

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики

Навчальний посібник

**Укладачі: Ю.О. Ушенко, М.С. Гавриляк,
М.В. Талах, В.В. Дворжак**



Чернівці

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

2021

УДК 621.391 (075.8)
О-75

Друкується за ухвалою Вченої ради
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(протокол № 7 від 30 червня 2021 р.)

Рецензенти:

Ляшенко С.О. доктор техн.-наук, професор кафедри безпеки життєдіяльності та права Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка;

Туркін І.Б., доктор техн. наук, професор, завідувач кафедри інженерії програмного забезпечення Національний аерокосмічний університет імені М.С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут»

Укладачі: Ушенко Ю.О., Гавриляк М.С.,
Талах М.В., Дворжак В.В.

О-75 Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики: навч. посібник / уклад. : Ю.О. Ушенко, М.С. Гавриляк, М.В. Талах, В.В. Дворжак. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2021. 308 с.

ISBN 978-966-423-639-0

У даному посібнику розглядаються основи методів та алгоритмів цифрової обробки сигналів. Наводиться математичний апарат опису лінійних систем і сигналів у часовій, частотній, z-області та у просторі станів. Розглядаються основи теорії лінійних дискретних систем. Розглядаються основи спектрального аналізу дискретних сигналів із використанням алгоритмів швидкого перетворення Фур'є, а також ефекти квантування у цифрових системах.

Для студентів, які навчаються за спеціальностями: 122 Комп'ютерні науки; 172 Телекомунікації та радіотехніка; 186 Видавництво та поліграфія; 152 Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка.

УДК 621.391 (075.8)

ISBN 978-966-423-639-0

© Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, 2021

Зміст

1. Вступ	6
1.1. Основні типи сигналів та їх математичний опис. Нормування часу ..	6
1.2. Типові дискретні сигнали	8
1.3. Нормування частоти.....	11
1.4. Узагальнена схема ЦОС.....	13
2. Математичний апарат опису сигналів і лінійних систем	17
2.1. Математичний опис аналогових сигналів і лінійних систем у p -області й у частотній області.....	18
2.1.1. Перетворення Лапласа	18
2.1.2. Перетворення Фур'є.....	19
2.1.3. Ряд Фур'є.....	20
2.2. Математичний опис дискретних сигналів і лінійних систем у z -області й у частотній області.....	22
2.2.1. Дискретне перетворення Лапласа	22
2.2.2. Z -перетворення	22
2.2.3. Перетворення Фур'є.....	23
3. Z-перетворення	26
3.1. Співвідношення між p - і z -площинами.....	26
3.2. Основні властивості z -перетворення	32
3.3. Обернене z -перетворення.....	41
3.3.1. Використання таблиці відповідностей	41
3.3.2. Використання теореми про відліки.....	42
3.3.3. Використання розкладання на прості дроби.....	43
4. Опис лінійних дискретних систем у часовій області	46
4.1 Імпульсна характеристика	47
4.2 Співвідношення вхід–вихід	48
4.2.1. Формула згортки.....	48
4.2.2. Різницеве рівняння	54
4.3. Рекурсивні й нерекурсивні лінійні дискретні системи	56
4.4. Системи зі скінченною й нескінченною імпульсними характеристиками	57
4.5. Властивості лінійних дискретних систем	59
5. Опис лінійних дискретних систем у z-області.....	61
5.1. Передавальна функція. Співвідношення вхід–вихід.....	61

5.2. Взаємозв'язок між передавальною функцією й різницеvim рівнянням.....	65
5.3. Різновиди передавальних функцій.....	66
5.4. Оцінка стійкості за передавальною функцією: критерій стійкості.....	67
6. Опис лінійних дискретних систем у частотній області	70
6.1. Частотна характеристика. Співвідношення вхід-вихід.....	70
6.2. Властивості частотної характеристики.....	72
6.3. Розрахунок частотної характеристики	73
7. Структурні схеми лінійних дискретних систем.....	75
7.1. Структури рекурсивних ЛДС	76
7.2. Структури нерекурсивних ЛДС	84
7.3. Вибір структури.....	86
8. Опис лінійних дискретних систем у просторі станів	87
8.1. Поняття стану.....	87
8.2. Опис ЛДС на основі структурних схем.....	89
8.3. Визначення рівнянь стану й виходу за передавальною функцією....	93
9. Опис дискретних сигналів	96
9.1. Опис дискретного сигналу в частотній області: спектр сигналу....	98
9.2. Властивості спектрів дискретних сигналів	98
9.3. Зв'язок між спектрами аналогового й дискретного сигналів...	102
9.4. Перетворення спектра	106
9.4.1. Перенесення спектра	107
9.4.2. Інверсія спектра дійсного сигналу.....	110
9.4.3. Формування сигналу з однією бічною смугою.....	112
10. Дискретне перетворення Фур'є.....	115
10.1. Дискретне перетворення Фур'є періодичної послідовності ...	115
10.2. Дискретне перетворення Фур'є кінцевої послідовності.....	119
10.3. Властивості ДПФ	124
11. Швидке перетворення Фур'є.....	137
11.1. Алгоритм ШПФ із проріджуванням за часом.....	138
11.2. Алгоритм ШПФ із проріджуванням за частотою	153
11.3. Оцінка виграшу в кількості операцій при обчисленні ДПФ за допомогою алгоритму ШПФ із основою 2.....	161
11.4. Обчислення зворотного ДПФ за допомогою алгоритму ШПФ....	162

12. Лінійна дискретна система як генератор випадкових сигналів	163
12.1. Основні поняття ймовірнісного аналізу дискретних сигналів.....	163
12.2. Генерація лінійною дискретною системою випадкових сигналів...	165
12.3. Властивості лінійних стохастичних різницевих рівнянь	167
13. Проходження випадкових сигналів через лінійні дискретні системи.....	172
13.1. Аналіз у часовій області.....	172
13.2. Аналіз у частотній області	174
13.3. Спектральна факторизація.....	177
14. Квантування сигналів у цифрових системах	181
14.1. Зображення й кодування чисел	181
14.2. Квантування чисел і сигналів	192
14.3. Вплив квантування вхідного сигналу на вихідний сигнал цифрової системи	198
15. Ефекти квантування в цифрових системах	202
15.1. Власний шум цифрової системи	202
15.2. Повний вихідний шум системи	208
15.3. Ефекти переповнювання в суматорах.....	210
15.4. Ефекти квантування коефіцієнтів цифрової системи.....	215
15.5. Граничні цикли	216
Лабораторна робота №1	219
Лабораторна робота №2	226
Лабораторна робота №3	239
Лабораторна робота №4	243
Лабораторна робота №5	261
Лабораторна робота №6	273
Лабораторна робота №7	289
Додаток 1	291
Додаток 2	303
Список літератури.....	307

1. Вступ

Цифрова обробка сигналів (ЦОС) – це галузь науки й техніки, в якій вивчаються загальні для різних дисциплін алгоритми й засоби обробки сигналів на основі числових методів із використанням цифрової обчислювальної техніки.

1.1. Основні типи сигналів та їх математичний опис.

Нормування часу

Сигнал – це зміна параметрів середовища розповсюдження в залежності від повідомлення, що передається, яке описується функцією часу. Середовищем розповсюдження може бути: електромагнітне поле (радіосигнал), повітря (звуковий сигнал), вода (гідросигнал), ґрунт (сеймосигнал) і т.ін.

До основних типів сигналів належать аналоговий, дискретний і цифровий [1].

Аналоговим називається сигнал, неперервним у часі й за станом (Рис. 1, а). Це означає, що сигнал описується неперервною (або частково неперервною) функцією $x(t)$, причому як аргумент, так і сама функція можуть набувати будь-яких значень із деяких інтервалів: $t' \leq t \leq t''$, $x' \leq x \leq x''$.

Дискретним називається сигнал, дискретний у часі й неперервний за станом (Рис. 1, б). Він описується дискретною функцією $x(n)$, де n – номер відліку; $n=0, 1, 2, 3, \dots$. Інтервал T називають *періодом дискретизації*, а обернену величину

$$f_d = \frac{1}{T} \quad (1.1)$$

– частотою дискретизації.

Дискретна функція (послідовність чисел) визначена тільки в моменти часу nT і може набувати будь-яких значень із деякого інтервалу $x' \leq x \leq x''$. Значення дискретної функції i , відповідно, дискретного сигналу в моменти часу nT називають відліками. Дискретний сигнал може бути дійсним або комплексним.

Цифровим називається сигнал, дискретний як у часі, так і за станом (Рис. 1, в). Сигнали такого типу також описуються дискрет-

ними функціями $x_u(nT)$, які, проте, можуть набувати тільки кінцеву кількість значень із деякого кінцевого інтервалу $x' \leq x \leq x''$. Ці значення називаються рівнями квантування, а відповідні функції – квантованими.

Цифро-аналоговий (Рис. 1.1, г) – це сигнал, неперервний у часі й квантований за значенням. Описується неперервною (або частково неперервною) функцією часу $x_u(nT)$, причому аргумент може набувати будь-яких значень з деякого інтервалу $t' \leq t \leq t''$, а сама функція – тільки кінцеву кількість значень із деякого кінцевого інтервалу $x' \leq x \leq x''$, тобто є квантованою.

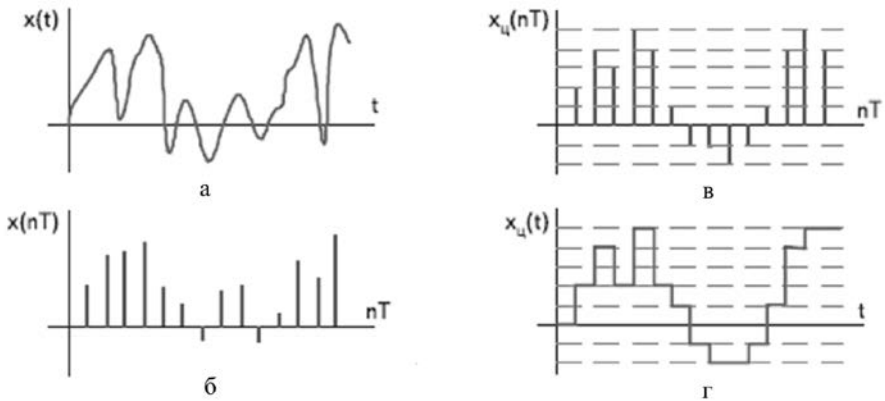


Рис. 1.1. Основні типи сигналів.

При аналізі дискретних сигналів зручно користуватися нормованим часом

$$\hat{t} = \frac{t}{T},$$

або, підставляючи $t = nT$,

$$\hat{t} = \frac{t}{T} = \frac{nT}{T} = n \quad (1.2)$$

Отже, номер n відліку дискретного сигналу може інтерпретуватися як *нормований час*.

Перехід до нормованого часу дозволяє розглядати дискретний сигнал як функцію цілочислової змінної n . Надалі дискретні сигнали $x(n)$ і $x(nT)$ будемо вважати тотожними:

$$x(nT) \equiv x(n).$$

1.2. Типові дискретні сигнали

При дослідженні цифрових кіл як текстові впливи використовуються наступні дискретні сигнали, які називаються *типовими*:

1. *Цифровий одиничний імпульс*, описується співвідношенням

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$,

з якого видно, що даний дискретний сигнал дорівнює одиниці при $n=0$ та нулю – при інших значеннях n (Рис. 1.2, а).

Затриманий цифровий одиничний імпульс (Рис. 1.2, б), – який описується співвідношенням:

$$u_0(n - n_0) = \begin{cases} 1, & n = n_0, \\ 0, & n \neq n_0, \end{cases} \quad (1.4)$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$,

з якого випливає, що цей сигнал, на відміну від незатриманого, дорівнює одиниці при $n = n_0$.

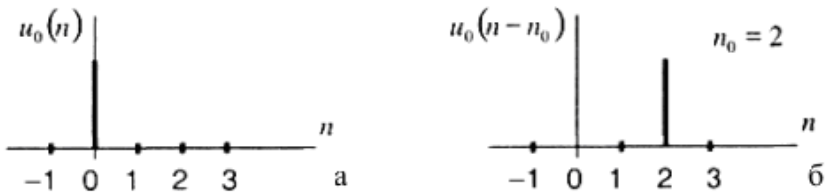


Рис. 1.2. Цифровий одиничний імпульс

Зазначимо, що будь-який відлік довільного дискретного сигналу можна зобразити за допомогою цифрового одиничного імпульсу

$$x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)u_0(n-m), \quad (1.5)$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$,

Наприклад, нехай задано дискретний сигнал, що являє собою послідовність із чотирьох відліків:

$$x(n) = \{x(0); x(1); x(2); x(3)\} = \{0,5; 0,98; 0,1; 0,3\}$$

Визначимо відлік $x(1) = 0,98$ на підставі (1.5)

$$\begin{aligned} x(1) &= \sum_{m=0}^3 x(m)u_0(n-m) = x(0)u_0(1-0) + x(1)u_0(1-1) + x(2)u_0(1-2) + x(3)u_0(1-3) = \\ &= 0,5u_0(1) + 0,98u_0(0) + 0,1u_0(-1) + 0,3u_0(-2) = 0,5 \cdot 0 + 0,98 \cdot 1 + 0,3 \cdot 0 = 0,98. \end{aligned}$$

2. *Цифровий одиничний стрибок* (Рис. 1.3, а), що описується співвідношенням:

$$u_1(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0, \\ 0, n < 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$,

з якого видно, що даний сигнал дорівнює одиниці при $n \geq 0$, та дорівнює нулю – при інших значеннях n .

Затриманий цифровий одиничний стрибок (Рис. 1.3, б), що описується співвідношенням:

$$u_1(n - n_0) = \begin{cases} 1, n \geq n_0, \\ 0, n < n_0, \end{cases} \quad (1.7)$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$,

з якого видно, що даний сигнал, на відміну від незатриманого, дорівнює одиниці при $n \geq n_0$ і дорівнює нулю – при інших значеннях n .

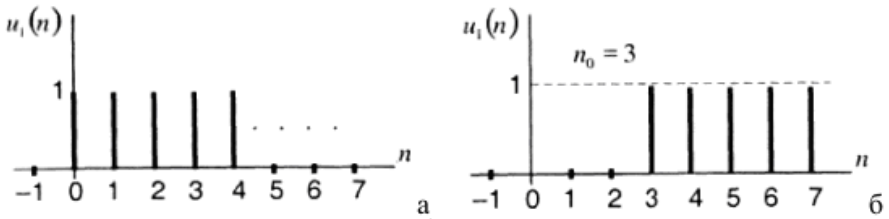


Рис. 1.3. Цифровий одиничний стрибок

3. Дискретна експонента, що описується співвідношенням:

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$,

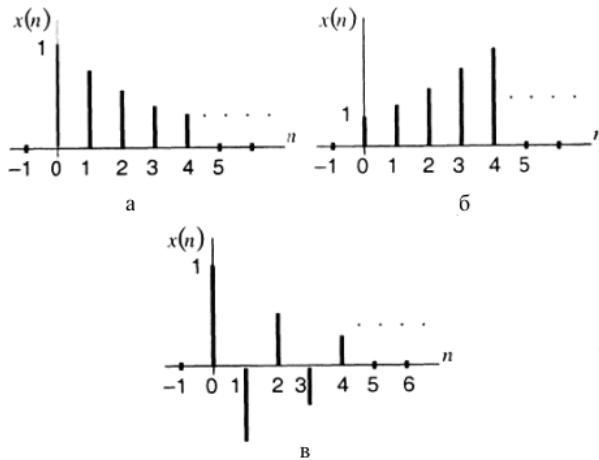


Рис. 1.4. Дискретна експонента

Якщо $|a| < 1$, дискретна експонента називається *спадною* (Рис. 1.4, а), а якщо $|a| > 1$ – *зростаючою* (Рис. 1.4, б). При $a < 0$ послідовність буде *знакозмінною* (Рис. 1.4, в), а при $a > 0$ – *знакосталою*. При $a = 1$ всі значення відліків при $n \geq 0$ однакові й дорівнюють одиниці.

4. Дискретна косинусоїда (синусоїда) (Рис. 1.5), що описується співвідношенням:

$$x(n) = A \cos(2\pi f T n) = A \cos(\omega T n), \quad (1.9)$$

де T —період дискретизації; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, A — амплітуда; f, ω — лінійна й циклічна частоти, пов'язані співвідношенням $\omega = 2\pi f$.

Дискретна косинусоїда пов'язана з аналоговим гармонійним сигналом у такий спосіб:

$$x(t) = A \cos(\omega t) \Big|_{t=nT} = A \cos(\omega T n).$$

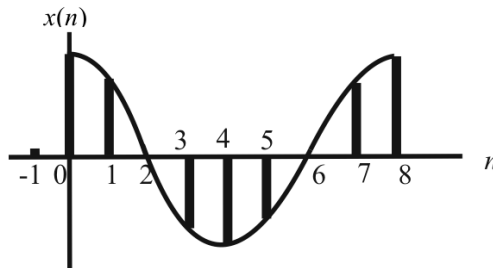


Рис. 1.5. Дискретна косинусоїда

5. Дискретна комплексна експонента, що описується співвідношенням

$$x(n) = A e^{j\omega T n},$$

або, із урахуванням формули Ейлера,

$$x(n) = A \cos(\omega T n) + j A \sin(\omega T n).$$

1.3. Нормування частоти

За теоремою Котельникова максимальна частота аналогового сигналу f_B не повинна перевищувати половини частоти дискретизації f_D , отже, у частотній області всі дискретні сигнали доцільно

розглядати в діапазоні $[0; f_D/2]$. Це дозволяє ввести поняття *нормованої частоти*

$$\hat{f} = \frac{f}{f_D} = fT, \quad (1.10)$$

або

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{f_D} = \omega T, \quad (1.11)$$

і, відповідно, розглядати дискретний сигнал в області $\hat{f} \in [0; 0,5]$ або $\hat{\omega} \in [0; \pi]$. Як буде показано далі, перевага надається нормованій частоті $\hat{\omega}$.

Застосування нормованих частот дозволяє досліджувати частотні характеристики дискретних систем і спектри дискретних сигналів в єдиній смузі частот. Для ЦОС важливі не абсолютні значення частоти сигналу й частоти дискретизації, а їх відношення, тобто значення нормованої частоти.

проілюструємо це на прикладі двох дискретних косинусоїд:

$$1) x_1(n) = \cos(2\pi f_1 T_1 n) = \cos(2\pi \frac{f_1}{f_{D1}} n),$$

$$f_1 = 2 \text{кГц}, f_{D1} = 16 \text{кГц}.$$

$$2) x_2(n) = \cos(2\pi f_2 T_2 n) = \cos(2\pi \frac{f_2}{f_{D2}} n),$$

$$f_2 = 5 \text{кГц}, f_{D2} = 40 \text{кГц}.$$

Підставивши значення частот, одержимо:

$$1) x_1(n) = \cos(2\pi \frac{2}{16} n) = \cos(\frac{\pi}{4} n);$$

$$2) x_2(n) = \cos(2\pi \frac{5000}{40000} n) = \cos(\frac{\pi}{4} n).$$

Дійсно, ці дискретні сигнали однакові, тому що однакові їхні нормовані частоти.

У загальному випадку дискретна косинусоїда в області нормованих частот має вигляд

$$x(n) = A \cos(2\pi \hat{f}n) = A \cos(\hat{\omega}n).$$

1.4. Узагальнена схема ЦОС

Процес ЦОС має три етапи:

1. формування послідовності чисел $x(nT)$ з аналогового сигналу $x(t)$;
2. перетворення послідовності $x(n)$, згідно із заданим алгоритмом, цифровим процесором обробки сигналів (надалі ЦПОС або обчислювач) у нову, вихідну числову послідовність $y(nT)$;
3. формування результуючого аналогового сигналу $y(t)$ з послідовності $y(nT)$.

Загальна схема ЦОС, що реалізує дані етапи (Рис. 1.6), складається з наступних елементів:

- аналоговий фільтр нижніх частот (ФНЧ);
- аналого-цифровий перетворювач (АЦП);
- цифровий процесор обробки сигналів (ЦПОС);
- цифро-аналоговий перетворювач (ЦАП);
- згладжуючий фільтр нижніх частот (ЗФНЧ).

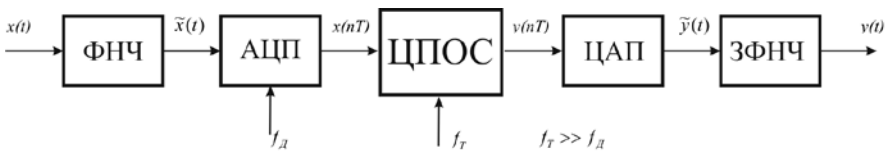


Рис. 1.6. Узагальнена схема цифрової обробки сигналів

На рис. 1.7. наведений характерний вигляд часових діаграм на вході й виході основних елементів узагальненої схеми ЦОС.

Формування послідовності чисел $x(nT)$ з аналогового сигналу $x(t)$ здійснюється АЦП й реалізується у два етапи:

- дискретизація за часом;
- квантування відліків за рівнями.

Дискретизація за часом (коротко дискретизація) являє собою процедуру зняття миттєвих значень (вибірок або відліків) $x(nT)$ аналогового сигналу $\tilde{x}(t)$ через рівні проміжки часу T

$$x(nT) = \tilde{x}(t) \Big|_{t=nT}$$

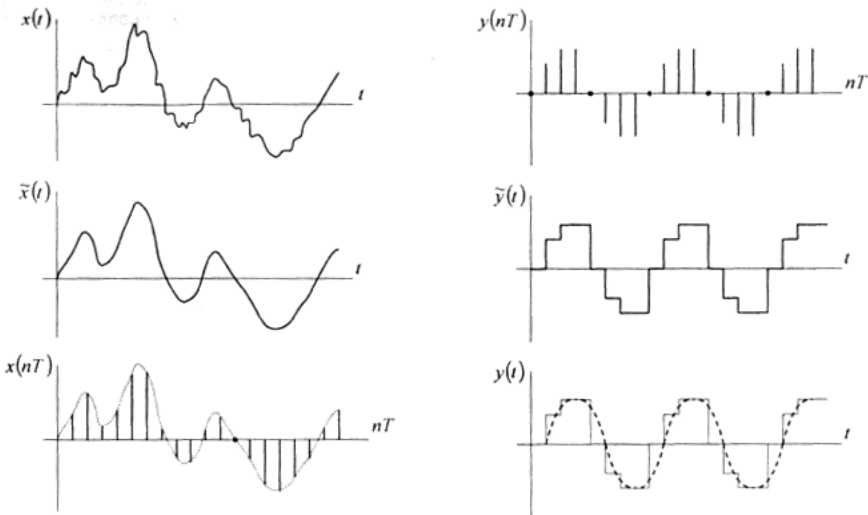


Рис. 1.7. Часові діаграми сигналів

Вибір частоти дискретизації визначається теоремою Котельникова, відповідно до якої точне відновлення аналогового сигналу гарантується, якщо частота дискретизації f_D як мінімум у два рази перевищує верхню частоту спектра аналогового сигналу f_B : $f_D \geq 2f_B$

Реальні сигнали, як правило, не задовольняють умовам теореми Котельникова, тому на вході АЦП ставиться ФНЧ, який обмежує спектр аналогового сигналу.

Звичайно енергія реальних сигналів істотно зменшується зі збільшенням частоти, тому перекручування, які вносяться ФНЧ, незначні, і сигнали на його вході й виході практично однакові (Рис. 1.8)

$$x(t) = \tilde{x}(t).$$

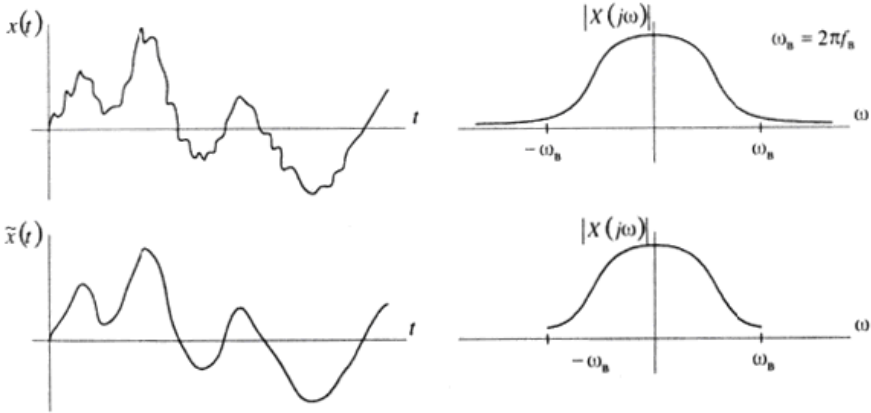


Рис. 1.8. Часові й спектральні діаграми на вході й виході ФНЧ

Квантування відліків за рівнями (коротко квантування) являє собою процедуру подання дискретних відліків числами кінцевої розрядності. Для цього весь діапазон зміни величини відліків розбивається на кінцеве число дискретних рівнів, які називаються рівнями квантування. Потім кожному відліку за певним правилом привласнюється значення одного з найближчих рівнів квантування. Рівні квантування кодуються двійковими числами, тому на виході АЦП маємо послідовність двійкових чисел $x(nT)$.

Цифровий сигнал $x(nT)$ відрізняється від дискретного сигналу $x(n)$

$$\varepsilon_{KB}(nT) = x_{Ц}(nT) - x(nT),$$

де $\varepsilon_{KB}(nT)$ називається помилкою квантування.

Зі збільшенням кількості рівнів квантування помилка квантування зменшується. Збільшуючи розрядність подання відліків, можна зробити цю помилку досить малою, тому поки не будемо розрізняти сигнали $\varepsilon_{Ц}(nT)$ й $x(n)$. Докладно питання оцінки помилки квантування розглянемо у спеціальному розділі.

Дискретний сигнал $x(nT)$ надходить до обчислювача (ЦПОС), що, згідно із заданим алгоритмом, кожному вхідному відліку $x(nT)$ ставить в однозначну відповідність вихідний відлік $y(n)$.

Кількість операцій (множень, додавань і т.ін.) для одержання одного відліку $y(nT)$ може обчислюватися тисячами. Однак якої б складності не був алгоритм обробки, максимальний час обчислення одного вихідного відліку повинен бути меншим за період дискретизації T . Ця умова може бути виконана, коли тактова частота ЦПОС істотно перевищує частоту дискретизації f_d . У цьому випадку робота обчислювача відбувається в реальному часі, тобто в темпі надходження вхідних відліків.

Отримані вихідні відліки $y(nT)$ подаються на цифро-аналоговий перетворювач (ЦАП), що формує східчастий сигнал $\tilde{y}(t)$. За допомогою згладжуючого ФНЧ сигнал $\tilde{y}(t)$ перетворюється в аналоговий сигнал $y(t)$.

2. Математичний апарат опису сигналів і лінійних систем

Обробці сигналів лінійною системою ставиться у відповідність математичний опис:

- вхідного сигналу;
- лінійної системи, що містить:
 - її характеристики;
 - співвідношення вхід–вихід.

У часовій області сигнали описуються функціями часу, а лінійна система – своїми формалізованими характеристиками, серед яких основною, як правило, вважається *імпульсна характеристика*.

Співвідношення вхід–вихід лінійної системи з одним входом і одним виходом у часовій області описується *лінійним рівнянням*, яке встановлює зв'язок між вхідним і вихідним сигналами – двома функціями часу.

Залежно від типу сигналів і лінійних систем – *аналогові* або *дискретні* – відповідні функції часу будуть:

- неперервними – $f(t)$ або частково неперервними;
- дискретними – $f(nT)$ послідовностями відліків, де T – період дискретизації, а n – номер відліку, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Крім часової області, сигнали й лінійні системи можуть описуватися в областях інших незалежних змінних, при цьому відповідні функції часу *перетворюються* у функції іншого аргументу, наприклад у функції частоти.

Подібні перетворення не слід плутати з перетвореннями функцій однієї й тієї ж незалежної змінної, зокрема з перетворенням вхідного сигналу у вихідний. Зміст перетворення завжди зрозумілий з контексту.

Даний розділ містить короткі відомості про математичний апарат перетворення функцій, традиційно використовуваний при описі *аналогових* і *дискретних* сигналів і лінійних систем в областях різних незалежних змінних.

Доцільно об'єднати інформацію з даного питання в одному, вступному розділі й звертатися до нього в міру необхідності в процесі викладу матеріалу. Це дозволить показати:

- основні методи аналізу аналогових і дискретних сигналів і лінійних систем;
- взаємозв'язок однотипних перетворень неперервних і дискретних функцій;
- взаємозв'язок між різними перетвореннями.

2.1. Математичний опис аналогових сигналів і лінійних систем у p -області й у частотній області

Математичний опис аналогових сигналів і лінійних систем у p -області (на комплексній p -площині) і в частотній області засновано відповідно на одnobічних перетвореннях Лапласа й Фур'є функції часу $f(t)$, для якої виконується умова:

$$f(t) = 0, t < 0 \text{ (нульові початкові умови).}$$

2.1.1. Перетворення Лапласа

Одnobічним перетворенням Лапласа функції $f(t)$ називається наступна пара взаємних однозначних перетворень:
прямого

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (2.1)$$

зворотного

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \oint_C F(p)e^{pt} dp, \quad (2.2)$$

де $f(t)$ – *оригінал* – неперервна або частково неперервна функція, (дійсна або комплексна), що відповідає умовам Діріхле: на будь-якому кінцевому інтервалі в області завдання функція неперервна й має кінцеву кількість розривів першого роду, мінімумів і максимумів [2]; p — оператор Лапласа:

$$p = \sigma + j\omega \quad (2.3)$$

$F(p)$ – p -зображення функції; $f(t)$ – результат перетворення Лапласа.

C – будь-який замкнений контур в області збіжності інтеграла (2.2), що охоплює початок координат p -площини й особливі точки підінтегральної функції $F(p)e^{pt}$.

Перетворення Лапласа (2.1) існує для $\text{Re}(p) = \sigma \geq \sigma_0$, якщо інтеграл

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{\sigma t}| dt \quad (2.4)$$

збігається для $\sigma = \sigma_0$. Найменше значення σ_0 характеризує абсцису збіжності перетворення Лапласа [3].

2.1.2. Перетворення Фур'є

Однобічне перетворення Фур'є функції $f(t)$ пов'язане з перетворенням Лапласа співвідношенням

$$F(j\omega) = F(p) \Big|_{p=j\omega}. \quad (2.5)$$

Тому перетворення Фур'є функції $f(t)$ тотожне перетворенню Лапласа цієї ж функції на комплексній осі $j\omega$ p -площини.

Відповідно, однобічним перетворенням Фур'є функції $f(t)$ називається наступна пара взаємно однозначних перетворень: прямого

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.6)$$

і зворотного

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} dt \quad (2.7)$$

де $f(t)$ – *оригінал* – неперервна або частково-неперервна функція (дійсна або комплексна), що задовольняє умови Діріхле;

$F(j\omega)$ – Фур'є-зображення функції $f(t)$ – результат перетворення Фур'є.

Перетворення Фур'є справедливо в області абсолютної збіжності інтеграла

$$\int_0^{\infty} |f(t)| dt < \infty. \quad (2.8)$$

Порівнюючи умови збіжності інтегралів у перетвореннях Лапласа й Фур'є (2.4) і (2.8), зазначимо, що перетворення Фур'є справедливо для більш вузького класу сигналів, ніж перетворення Лапласа. Дійсно, припустимо, що умова збіжності (2.8) не виконується, однак можна підібрати таке значення σ , при якому буде виконуватися умова збіжності перетворення Лапласа (2.4).

З порівняння розглянутих перетворень видно, що подання неперервної функції $f(t)$ у трьох областях (у часовій, частотній і p -області) однозначно взаємопов'язані, тому в якій би області не була задана вихідна функція, можна аналітично одержати її подання в інших областях, зрозуміло, при виконанні умов існування відповідних перетворень.

Надалі, говорячи про перетворення Лапласа й Фур'є, будемо за замовчуванням мати на увазі *однобічні* перетворення.

2.1.3. Ряд Фур'є

Неперервна періодична функція *часу* $f(t)$ з періодом T_d , що задовольняє в межах періоду умови Діріхле, може бути зображена рядом Фур'є:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k) e^{jk\Delta\omega t}, \quad (2.9)$$

де $\Delta\omega$ — період дискретизації за частотою ω ,

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_s},$$

k – нормована частота, що відповідає абсолютним значенням частоти ω , що дорівнює $k\Delta\omega$,

$F(k)$ — коефіцієнти Фур'є (комплексні числа), що обчислюються за формулою:

$$F(k) = \frac{1}{T_s} \int_{\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} f(t) e^{-jk\Delta t} dt. \quad (2.11)$$

Неперервна періодична функція частоти $F(\omega)$ з періодом ω_s , що задовольняють у межах періоду умови Діріхле, може бути зображена рядом Фур'є, симетричним рядом (2.9):

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-jn\Delta t\omega}, \quad (2.12)$$

де Δt — період дискретизації за часом t ,

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_s}, \quad (2.13)$$

n — нормований час, що відповідає абсолютним значенням часу t , що дорівнює $n\Delta t$,

$f(n)$ — коефіцієнти Фур'є (комплексні числа), що обчислюються за формулою:

$$f(n) = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} F(\omega) e^{jn\Delta t\omega} d\omega. \quad (2.14)$$

Порівнюючи пари формул (2.9)—(2.11) і (2.12)—(2.14), легко бачити взаємозамінність незалежних змінних t та ω .

2.2. Математичний опис дискретних сигналів і лінійних систем у z -області й у частотній області

Математичний опис дискретних сигналів і лінійних систем у z -області (на комплексній z -площині) й у частотній області засновано на однобічному z -перетворенні й перетворенні Фур'є дискретної функції часу $f(nT)$, для якої виконується умова:

$$f(nT) = 0, \quad n < 0.$$

2.2.1. Дискретне перетворення Лапласа

Дискретне перетворення Лапласа (D -перетворення) дискретної функції $f(nT)$ має пряму аналогію з перетворенням Лапласа (2.1) неперервної функції. У результаті переходу від неперервного часу до дискретного

$$t \rightarrow nT$$

і заміни неперервної функції дискретною

$$f(t) \rightarrow f(nT)$$

обчислення інтеграла в (2.1) може бути замінене обчисленням суми

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-pnT}, \quad (2.15)$$

де $f(nT)$ – *оригінал* – дискретна функція (послідовність дійсних або комплексних відліків);

$F(p)$ – D -зображення функції $f(nT)$ – *результат* дискретного перетворення Лапласа.

Дискретне перетворення Лапласа однозначно пов'язане з функцією $f(nT)$ й справедливе тільки в області абсолютної збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f(nT)|e^{-\sigma nT} < \infty. \quad (2.16)$$

2.2.2. Z -перетворення

Під час дослідження дискретних сигналів і лінійних дискретних систем, як правило, замість дискретного перетворення Лапласа використовується z -перетворення, що впливає з дискретного перетворення Лапласа (2.15) у результаті наступної заміни змінних:

$$z = e^{pT}. \quad (2.17)$$

Прямим z -перетворенням функції $f(nT)$ називають перетворення

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}, \quad (2.18)$$

де $f(nT)$ – *оригінал* – дискретна функція (послідовність дійсних або комплексних відліків),

$F(z)$ – z -зображення функції $f(nT)$ – результат z -перетворення.

Пряме z -перетворення однозначно пов'язане з функцією $f(nT)$ й справедливе тільки в області абсолютної збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f(nT)z^{-n}| < \infty. \quad (2.19)$$

Більш докладно z -перетворення буде розглянуте в наступному розділі 3.

2.2.3. Перетворення Фур'є

Перетворення Фур'є функції $f(nT)$ пов'язане з z -перетворенням (2.18) співвідношенням

$$F(e^{j\omega T}) = F(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}}, \quad (2.20)$$

тому перетворення Фур'є функції $f(nT)$ тотожне z -перетворенню даної функції на одиничному колі $z = re^{j\omega T} \Big|_{r=1} = e^{j\omega T}$ комплексної z -площини.

Відповідно, прямим перетворенням Фур'є функції $f(nT)$ називають

$$F(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-j\omega Tn}, \quad (2.21)$$

де $f(nT)$ – *оригінал* – дискретна функція (послідовність дійсних або комплексних відліків),

$F(e^{j\omega T})$ – *Фур'є-зображення* функції $f(nT)$ – результат перетворення Фур'є.

Перетворення Фур'є однозначно пов'язане з функцією $f(nT)$ й справедливе в області абсолютної збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f(nT)| < \infty. \quad (2.22)$$

З формули (2.21) видно, що результатом перетворення Фур'є дискретної функції $f(nT)$ є *неперервна періодична* функція $F(e^{j\omega T})$, оскільки аргумент даної функції $e^{j\omega T}$ (у свою чергу функція)

періодичний із періодом за частотою ω , що дорівнює $\frac{2\pi}{T}$:

$$e^{j\omega T} = e^{j(\omega \pm k \frac{2\pi}{T})T} = e^{j\omega T} e^{j2\pi k} \equiv e^{j\omega T}. \quad (2.23)$$

Отже, співвідношення (2.21) є одночасно:

- *прямим* перетворенням Фур'є гратчастої функції $f(nT)$;

- рядом Фур'є (2.14) неперервної функції $F(e^{j\omega T})$

$$F(e^{j\omega T}) = F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-jn\Delta t \omega} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{-j\omega n T},$$

де інтервал $\Delta t = T$; $f(nT)$ – дискретна функція в одиницях нормованого часу ($T=1$). Тому коефіцієнти $f(nT)$ ряду Фур'є (2.23) можна обчислити за відомою формулою (2.16):

$$f(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} F(e^{j\omega T}) e^{j\omega n T} d\omega,$$

де період $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$.

При цьому співвідношення (2.24) є одночасно:

- *оберненим* перетворенням Фур'є гратчастої функції $f(nT)$;

- *коефіцієнтами* ряду Фур'є неперервної функції $F(e^{j\omega T})$.

Таким чином, *однобічним перетворенням Фур'є* дискретної функції $f(nT)$ називається пара взаємно однозначних перетворень (2.21)—(2.24):

прямого

$$F(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-j\omega n T};$$

оберненого

$$f(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} F(e^{j\omega T}) e^{j\omega T n} d\omega. \quad (2.24)$$

Отже зображення дискретної функції $f(nT)$ у трьох областях (часовій, частотній та z -області) однозначно взаємозалежні, тому в якій би області не була задана вихідна функція, можна аналітично одержати її подання в інших областях, зрозуміло, при виконанні умов існування відповідних перетворень.

3. Z-перетворення

При вивченні аналогових сигналів і лінійних аналогових кіл введення перетворення Лапласа виявилось дуже корисним. На його основі визначаються такі фундаментальні поняття, як передавальна функція, частотні характеристики, стійкість кіл і т.ін. У цифровій обробці сигналів подібним перетворенням є z -перетворення, яке дозволяє спростити багато формул, визначити основні фундаментальні поняття й виявляється наочною й зручною формою подання процесів, що протікають при цифровій обробці.

3.1. Співвідношення між p - і z -площинами

Раніше (див. розділ 2) було визначено пряме z -перетворення

$$F(z) = Z\{f(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}, \quad (3.1)$$

де $f(nT)$ – числова послідовність (дискретний сигнал);

n – номер відліку,

T – період дискретизації.

При цьому дискретний сигнал $f(nT)$ називається *оригіналом*, а функція $F(z)$ – *зображенням*.

Аргумент z функції $F(z)$ є комплексною величиною, тобто

$$z = \xi + j\eta, \quad (3.2)$$

або в полярних координатах

$$z = re^{j\theta} \quad (3.3)$$

де

$$r = |z| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \theta = \arg(z) = \arctg\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$$

Досить часто аргумент z називають оператором, а співвідношення (3.1) – операторним зображенням числової послідовності.

Функція $F(z)$ визначена тільки для значень z , при яких ряд (3.1) збігається. Умова збіжності ряду (3.1) визначається співвідношенням

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f(nT)z^{-n}| < \infty.$$

Відомо, що модуль добутку дорівнює добутку модулів, тому

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f(nT)z^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |f(nT)| \cdot |z^{-n}|.$$

Винесемо нульовий член з-під знака суми

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f(nT)| \cdot |z^{-n}| = |f(0)| \cdot |z^{-0}| + \sum_{n=0}^{\infty} |f(nT)| \cdot |z^{-n}| = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} |f(nT)| \cdot |z^{-n}|$$

Значення $|z^{-n}|$, з урахуванням співвідношення (3.3), дорівнює r^{-n} :

$$|z^{-n}| = \left| (re^{j\theta})^{-n} \right| = \left| r^{-n} (e^{j\theta})^{-n} \right| = r^{-n}.$$

Дві останніх рівності дозволяють зобразити умову збіжності ряду (3.1) у вигляді:

$$f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|f(nT)|^{\frac{1}{n}} r^{-1} \right)^n < \infty.$$

Значення будь-якого відліку, у тому числі й $f(0)$, завжди кінцеве (див. розд. 2), тому збіжність визначається співвідношенням:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(|f(nT)|^{\frac{1}{n}} r^{-1} \right)^n < \infty$$

Отриманий ряд збігається, якщо

$$|z| > R \tag{3.4}$$

де R — верхня межа послідовності

$$|f(nT)|^{\frac{1}{n}},$$

$n=1,2,3\dots$

Наприклад, якщо $f(nT) = a^n$ (цифрова експонента), то ряд збігається поза колом з радіусом $R = a$.

Область z -площини, де забезпечується виконання умови (3.4), називається областю збіжності, а значення R – радіусом збіжності. Область збіжності ряду (3.1) зображена на рис. 3.1.



Рис. 3.1. Область збіжності z -перетворення

Z -перетворення, що описує дискретний сигнал (числову послідовність) в z -площині, визначається на підставі перетворення Лапласа, що описує аналоговий сигнал у p -площині. Аналіз співвідношення між p - і z -площинами дозволяє виявити умови коректного застосування z -перетворення, а також сформулювати вимоги до аналогових сигналів, що обробляються засобами ЦОС.

Взаємозв'язок між p - і z -площинами визначається співвідношенням (див. розділ 2)

$$z = e^{pT}. \quad (3.5)$$

Аргумент p є комплексною величиною, тобто:

$$p = \sigma + j\Omega.$$

Тому вираз (3.5) можна записати як

$$\xi + j\eta = e^{\sigma T + j\Omega T} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}. \quad (3.6)$$

З (3.6), із урахуванням формули Ейлера, випливає, що:

$$\xi = e^{\sigma T} \cos(\Omega T + 2\pi k). \quad (3.7)$$

$$\eta = e^{\sigma T} \sin(\Omega T + 2\pi k). \quad (3.8)$$

де $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Отже, (3.3) набуде вигляду

$$z = e^{\sigma T} e^{j(\Omega T + 2\pi k)}. \quad (3.9)$$

На підставі (3.9) розглянемо співвідношення між деякими характерними точками p - і z -площин:

1. точка p -площини з координатами $\sigma = 0; \Omega = 0$ відображається в точку z -площини з координатами $\xi = 1, \eta = 0$:

$$z = e^0 e^{j(0+2\pi k)} = e^{j2\pi k} = 1;$$

2. точка p -площини з координатами $\sigma = 0; \Omega = \pi/2T$ відображається в точку z -площини з координатами $\xi = 0; \eta = 1$:

$$z = e^0 e^{j\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} = e^{j\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} = j;$$

3. точка p -площини з координатами $\sigma = 0$ й $\Omega = -\pi/2T$ відображається в точку z -площини з координатами $\xi = 0$ й $\eta = -1$:

$$z = e^0 e^{j\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} = e^{j\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} = -j;$$

4. точка p -площини з координатами $\sigma = 0$ й $\Omega = \pm\pi/T$ відображається в точку z -площини з координатами $\xi = -1$ й $\eta = 0$:

$$z = e^0 e^{j(\pm\pi + 2\pi k)} = -1.$$

Розглянуті точки p -площини лежать на уявній осі ($\sigma = 0$) в інтервалі $[\Omega - \pi/T, \Omega + \pi/T]$. Їм відповідають точки z -площини

$$z = e^{j(\Omega T + 2\pi k)}. \quad (3.10)$$

Вираз (3.10) описує коло одиничного радіуса. При цьому інтервалу $[\Omega - \pi/T, \Omega + \pi/T]$ на уявній осі p -площини відповідає один повний оберт в z -площині;

5. точки лівої p -напівплощини ($\sigma < 0$) відображаються всередину кола одиничного радіуса z -площини, тому що:

$$|z| = e^{-\sigma T} < 1;$$

6. центру кола на z -площині ($z=0$) відповідає точка p -площини з координатами $\sigma = -\infty$ й $\Omega = 0$:

$$z = e^{-\infty} e^{j(\Omega T + 2\pi k)} = \frac{e^{j(\Omega T + 2\pi k)}}{e^{\infty}} = 0;$$

7. точки правої p -напівплощини ($\sigma > 0$) відображаються на z -площину поза одиничним колом, тому що:

$$|z| = e^{\sigma T} > 1.$$

Очевидно, що взаємно однозначне відображення p - і z -площин можливо тільки для смуги p -площини, що міститься між лініями, паралельними осі абсцис і перетинаючими вісь ординат у точках $\pm j\pi k/T$, де $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Співвідношення між деякими характерними точками p - і z -площин наведені в табл. 3.1 і зображені на рис. 3.2.

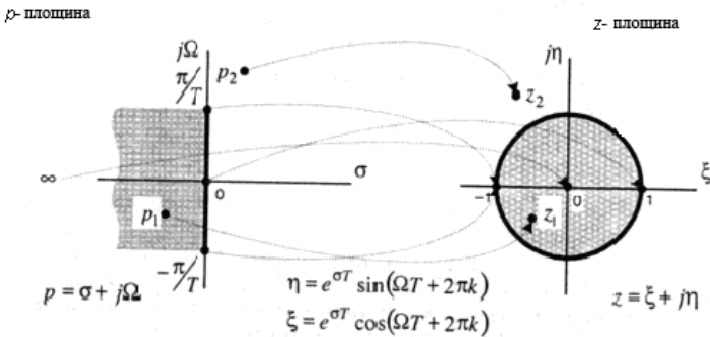


Рис. 3.2. Співвідношення між z - і p -площинами

Таблиця 3.1

Співвідношення між z - і p -площинами

	p -площина	z -площина
	$\sigma = 0; \Omega = 0$	$\xi = 1, \eta = 0; (z=1)$
	$\sigma = 0; \Omega = \pi/2T$	$\xi = 0; \eta = 1; (z=j)$
	$\sigma = 0; \Omega = -\pi/2T$	$\xi = 0; \eta = 1; (z=-j)$
	$\sigma = 0; \Omega = \pm \pi/T$	$\xi = -1; \eta = 0; (z=-1)$
	$\sigma = -\infty; \Omega = 0$	$\xi = 0; \eta = 0; (z=0)$
	Уявна вісь $\left(-\frac{\pi}{T} \leq \Omega \leq \frac{\pi}{T}\right)$	Одиничне коло $ z = 0$ (один оберт)
	Ліва напівплощина (у межах смуги $\pm j\pi/T$)	Внутрішня частина кола $ z \leq 1$ (взаємно однозначна відповідність)
	Права напівплощина (у межах смуги $\pm j\pi/T$)	Площина поза одиничним колом $ z > 1$ (взаємно однозначна відповідність)

3.2. Основні властивості z -перетворення

Формула (3.1) встановлює співвідношення між часовим й операторним зображенням числової послідовності. Якщо умова збіжності виконується, співвідношення (3.1) є єдиним і взаємно однозначним. Розглянемо властивості цього перетворення, які найчастіше використовуються.

1. Властивість лінійності.

Задано деяку числову послідовність $f(nT)$, що являє собою суму зважених числових послідовностей $f_i(nT)$:

$$f(nT) = \sum_i a_i f_i(nT). \quad (3.11)$$

де a_i — ваговий коефіцієнт.

Якщо для всіх $f_i(nT)$ відомі z -зображення:

$$F_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_i(nT) z^{-n}.$$

тоді для послідовності $f(nT)$ z -зображення визначається формулою:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} = \sum_i a_i F_i(z). \quad (3.12)$$

Ця властивість впливає безпосередньо із самого визначення z -перетворення. Так, підставивши у вираз (3.1) замість функції $f(nT)$ її зображення (3.11) і помінявши порядок сумування, одержимо:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_i a_i f_i(nT) \right) z^{-n} = \sum_i \left(a_i \sum_{n=0}^{\infty} f_i(nT) z^{-n} \right) = \sum_i a_i F_i(z).$$

2. Z -перетворення затриманої числової послідовності (теорема запізнення).

Задано числову послідовність $f(nT) = 0$ при $n < 0$, і для неї відоме зображення $F(z)$. Тоді для затриманої числової послідовності

$f((n - n_0)T)$, де n_0 — додатна ціла константа, z -зображення визначається формулою:

$$F_3(z) = z^{-n_0} F(z). \quad (3.13)$$

У цьому неважко переконалися, застосувавши заміну змінної у виразі для прямого z -перетворення:

$$\begin{aligned} F_3(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f((n - n_0)T) z^{-n} \Big|_{n - n_0 = k} = \\ &= \sum_{k=-n_0}^{\infty} f(kT) z^{-n_0} z^{-k} = z^{-n_0} \sum_{k=-n_0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = \\ &= z^{-n_0} \left(\sum_{k=-n_0}^{-1} f(kT) z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} \right). \end{aligned}$$

Враховуючи, що $f(kT) = 0$ при $k < 0$, остаточно одержуємо:

$$F_3(z) = z^{-n_0} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = z^{-n_0} F(z).$$

Таким чином, затримка n_0 тактів у часовій області еквівалентна множенню z -зображення на константу z^{-n_0} .

Зауваження

Для випереджаючої числової послідовності $f((n+n_0)T)$, де n_0 — додатна ціла константа, z -зображення визначається співвідношенням:

$$F_0(z) = z^{n_0} \left(F(z) - \sum_{k=0}^{n_0-1} f(kT) z^{-k} \right). \quad (3.14)$$

Це легко довести:

$$\begin{aligned}
F_0(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f((n-n_0)T)z^{-n} \Big|_{n-n_0=k} = \\
&= \sum_{k=n_0}^{\infty} f(kT)z^{n_0}z^{-k} = z^{n_0} \sum_{k=n_0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = \\
&= z^{n_0} \left(\sum_{k=n_0}^{\infty} f(kT)z^{-k} - \sum_{k=0}^{n_0-1} f(kT)z^{-k} \right) = z^{n_0} \left(F(z) - \sum_{k=0}^{n_0-1} f(kT)z^{-k} \right).
\end{aligned}$$

Зокрема, при $n_0=1$

$$F_0(z) = z^{n_0} \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} f(kT)z^{-k} - f(0) \right). \quad (3.15)$$

3. *Z-перетворення згортки числових послідовностей.*

Згорткою числових послідовностей $f_1(nT)$ і $f_2(nT)$ називається співвідношення

$$f_c(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} f_1(mT)f_2((n-m)T). \quad (3.16)$$

Z-зображення згортки визначається формулою

$$F_c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{cep}(nT)z^{-n} = F_1(z)F_2(z). \quad (3.17)$$

де $F_1(z)$ і $F_2(z)$ – z-зображення послідовностей $f_1(nT)$ і $f_2(nT)$ відповідно.

Справедливість даної властивості можна довести в такий спосіб:

$$\begin{aligned}
F_c(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_c(nT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} f_1(mT)f_2((n-m)T) \right] z^{-n} = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} f_1(mT) \left[\sum_{n=0}^{\infty} f_2((n-m)T)z^{-n} \right] =
\end{aligned}$$

$$= \left[\sum_{m=0}^{\infty} f_1(mT) z^{-m} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} f_2(nT) z^{-n} \right] = F_1(z) F_2(z).$$

4. *Z-перетворення числової послідовності, помноженої на експоненту.*

Задано дискретний сигнал, що являє собою помножену на експоненту числову послідовність:

$$f_E(nT) = f(nT) a^n,$$

де a – додатне число.

Якщо для числової послідовності $f(nT)$ відоме z -зображення

$$F(z) = Z\{f(nT)\},$$

то для послідовності $f_E(nT)$ z -зображення буде визначатися за формулою:

$$F_E(z) = F\left(\frac{z}{a}\right). \quad (3.18)$$

Доведемо справедливість (3.18), скориставшись визначенням Z -перетворення:

$$\begin{aligned} F_E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{\text{экс}}(nT) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} [f(nT) a^n] z^{-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) [a^n z^{-n}] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \left[\frac{z}{a}\right]^{-n} = F\left(\frac{z}{a}\right). \end{aligned}$$

Розглянуті властивості дозволяють досить просто знаходити зображення для більшості числових послідовностей, що зустрічаються на практиці. Покажемо це на прикладах.

Приклади розв'язування завдань.

При розв'язуванні завдань будемо розглядати числові послідовності як функції тільки параметра n (див. розд. 1). У цьому випадку z -перетворення визначається співвідношенням

$$F(z) = Z\{f(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}. \quad (3.19)$$

Приклад 3.1

Визначити z -зображення цифрового одиничного імпульсу (Рис. 1.2, а)

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$

де $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\dots$

Розв'язок

Скористаємося визначенням z -перетворення:

$$Z\{u_0(n)\} = U_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_0(n)z^{-n} = u_0(0)z^{-0} = 1.$$

Приклад 3.2

Визначити z -зображення затриманого цифрового одиничного імпульсу (Рис. 1.2, б)

$$u_0(n - n_0) = \begin{cases} 1, n = n_0 \\ 0, n \neq n_0 \end{cases},$$

де $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\dots$

Розв'язок

На підставі теореми запізнення можемо записати:

$$Z\{u_0(n - n_0)\} = Z\{u_0(n)\}z^{-n_0} = 1z^{-n_0} = z^{-n_0}.$$

Приклад 3.3

Визначити z -зображення для цифрового одиничного стрибка (Рис. 1.3, а)

$$u_1(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Розв'язок

Відповідно до визначення z -перетворення, можемо записати:

$$Z\{u_1(n)\} = U_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_1(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n.$$

Цей ряд є сумою членів нескінченної геометричної прогресії. Ряд збігається, якщо $|z| > 1$. У цьому випадку маємо кінцеву суму

$$S = \frac{a_1}{1 - q},$$

де $a_1 = 1, q = z^{-1}$

Таким чином, остаточно одержуємо:

$$Z\{u_1(n)\} = U_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}.$$

Приклад 3.4

Визначити z -зображення затриманого цифрового одиничного стрибка (Рис. 1.3, б)

$$u_1(n - n_0) = \begin{cases} 1, n \geq n_0 \\ 0, n < n_0 \end{cases}$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Розв'язок

Використовуючи теорему про зрушення й результат попереднього прикладу, можемо записати:

$$Z\{u_1(n - n_0)\} = z^{-n_0} U_1(z) = \frac{z^{-n_0}}{1 - z^{-1}}.$$

Приклад 3.5

Визначити z -зображення знакосталої спадної дискретної експоненти (Рис. 1.4, а)

$$x(n) = \begin{cases} a^n, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases},$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Розв'язок

Підставимо вираз для $x(n)$ у формулу для z -перетворення:

$$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n.$$

Отриманий вираз являє собою суму членів ряду нескінченної геометричної прогресії. Ряд збігається за умови $|az^{-1}| < 1$, а його сума визначається за формулою:

$$S = \frac{a_1}{1 - q},$$

де $a_1 = 1, q = az^{-1}$

Таким чином,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$

Приклад 3.6

Визначити z -зображення знакозмінної спадаючої дискретної експоненти (Рис. 1.4, в)

$$x(n) = \begin{cases} (-a)^n, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases},$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Розв'язок

Цей приклад розв'язується аналогічно з попереднім. Необхідно тільки уважно ставитися до знака константи a

$$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-a)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-az^{-1})^n.$$

Одержали суму членів ряду нескінченної геометричної прогресії, яка збігається за умови $|-az^{-1}| < 1$, тобто:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-az^{-1})^n = \frac{1}{1+az^{-1}}.$$

Приклад 3.7

Визначити z -зображення числової послідовності

$$x(n) = b_0(-a)^n + b_1(-a)^{n-1},$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Розв'язок

Скористаємося властивостями лінійності й теоремою запізнення:

$$\begin{aligned} X(z) &= b_0 Z\{(-a)^n\} + b_1 Z\{(-a)^{n-1}\} = b_0 Z\{(-a)^n\} + b_1 z^{-1} Z\{(-a)^n\} = \\ &= Z\{(-a)^n\} \underbrace{(b_0 + b_1 z^{-1})}_{\text{лінійність}} \end{aligned}$$

Формулу для послідовності $(-a)^n$ отримано в попередньому прикладі, тому остаточно z -зображення набуде вигляду

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + az^{-1}}.$$

Отримані в прикладах 1–7 вирази для оригіналів і їхніх зображень зведені в табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Таблиця відповідностей

	Послідовність $x(n)$	z -зображення
1.	$u_0(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$	1
2.	$u_0(n - n_0) = \begin{cases} 1, n = n_0 \\ 0, n \neq n_0 \end{cases}$	z^{-n_0}
3.	$u_1(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
4.	$u_1(n - n_0) = \begin{cases} 1, n \geq n_0 \\ 0, n < n_0 \end{cases}$	$\frac{z^{-n_0}}{1 - z^{-1}}$
5.	$\pm a^n$	$\frac{1}{1 \pm az^{-1}}$
6.	$r^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}$	$\frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}; a_1 \leq 2r$ $a_1 = -2r \cos \varphi_*$ $a_2 = r^2$
7.	$r^n \sin(\varphi_* n)$	$\frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$ $a_1 = -2r \cos \varphi_*$, $a_2 = r^2; a_1 \leq 2r; b_1 = r \sin \varphi_*$
8.	$r^n \cos(\varphi_* n)$	$\frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$ $a_1 = -2r \cos \varphi_*$, $a_2 = r^2; a_1 \leq 2r; b_1 = -r \cos \varphi_*$

3.3. Обернене z -перетворення

Завдання відновлення оригіналу за відомим зображенням розв'язується за допомогою *оберненого z -перетворення*:

$$f(nT) = Z^{-1}\{F(z)\} = F^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} dz, \quad (3.20)$$

де C – контур збіжності $F(z)z^{n-1}$, що охоплює початок координат z -площини.

Безпосередньо розв'язати такий інтеграл досить складно, а в більшості випадків неможливо. Тому розглянемо три простих способи знаходження оберненого z -перетворення:

1. Із використанням таблиці відповідностей.
2. На підставі теореми Коші про відліки.
3. Шляхом розкладання зображення на прості дроби.

3.3.1. Використання таблиці відповідностей

Обчислити обернене z -перетворення з використанням таблиці відповідностей дуже просто. Необхідно в довіднику, що містить таблиці оригіналів і відповідних їм зображень, знайти оригінал для заданого зображення. Основний недолік способу полягає в тому, що далеко не всі зображення наведені в довіднику.

Приклад 3.8

Визначити оригінал $x(n)$, якщо відоме z -зображення:

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}.$$

Розв'язок

Розіб'ємо вираз на суму двох дробів:

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}} + \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}.$$

З огляду на властивість лінійності, оригінал $x(n)$ зображення $X(z)$ можна визначити за формулою

$$x(n) = b_0 x_1(n) + b_1 x_2(n),$$

де $x_1(n)$ — оригінал зображення

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}}.$$

$x_2(n)$ — оригінал зображення

$$X_2(z) = \frac{z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}.$$

Скориставшись таблицею відповідностей (див. табл. 3.2), знаходимо оригінал зображення $X_1(z)$:

$$x_1(n) = a_1^n.$$

На підставі теореми запізнення, оригінал зображення $X_2(z)$ визначається формулою:

$$x_2(n) = a_1^{n-1}.$$

Таким чином, шуканий оригінал $x(n)$ має вигляд:

$$x(n) = b_0 a_1^n + b_1 a_1^{n-1}.$$

3.3.2. Використання теореми про відліки

Обчислення оберненого z -перетворення з використанням відліків базується на теоремі Коші. Причому відлік в k -му полюсі зображення $F(z)$ називається

$$\operatorname{Res}_{z_*k} [F(z)z^{n-1}] = \lim_{z \rightarrow z_*k} [(z - z_*k)F(z)z^{n-1}].$$

Нагадаємо, що полюс — це значення аргументу, при якому функція дорівнює нескінченності.

Суть теореми Коші про відліки полягає в тому, що якщо відомо зображення $F(z)$ і його N полюсів z_* , інтеграл (3.20) дорівнює сумі відліків у всіх особливих точках (полюсах z_*):

$$f(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\operatorname{Res}_{z_*k} [F(z)z^{n-1}]}_{\text{відлік в } k\text{-ом полюсі } z_*k = a_k}. \quad (3.21)$$

Приклад 3.9

Задано z -зображення

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}.$$

Необхідно знайти оригінал $x(n)$.

Розв'язок

Задане зображення $X(z)$ має тільки один полюс $\alpha = a_1$, тому необхідно обчислити тільки один відлік:

$$\begin{aligned} x(n) &= \operatorname{Res}_{z=a_1} [F(z)z^{n-1}] = \lim_{z \rightarrow a_1} \left[(z - a_1) \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} z^{n-1} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow a_1} \left[(z - a_1) \frac{(b_0 + b_1 z^{-1})z}{(z - a_1)} z^{n-1} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow a_1} [b_0 z z^{n-1} + b_1 z^{-1} z z^{n-1}] = b_0 a_1^n + b_1 a_1^{n-1}. \end{aligned}$$

3.3.3. Використання розкладання на прості дробі

Відомо N полюсів зображення $F(z)$. Тоді можна подати $F(z)$ у вигляді суми простих дробів:

$$F(z) = \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k z^{-1}}, \quad (3.22)$$

де β_k, α_k — коефіцієнти розкладання при k -му полюсі.

Якщо полюс дійсний, то й коефіцієнти розкладання дійсні; якщо полюс комплексний — коефіцієнти комплексні.

За властивістю лінійності оригінал $f(n)$ зображення $F(z)$ визначається за формулою:

$$f(n) = F^{-1}(z) = \sum_{k=1}^N \beta_k F_k^{-1}(z),$$

$$\text{де } F_k^{-1}(z) = Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right\}.$$

Остаточно, використовуючи таблицю відповідностей, одержимо:

$$f(n) = \sum_{k=1}^N \beta_k \alpha_k^n. \quad (3.23)$$

Таким чином, якщо z -зображення має вигляд (3.22) або може бути зведене до такого вигляду, то оригінал для нього визначається співвідношенням (3.23). Це і є суть методу знаходження оригіналу за допомогою розкладання на прості дроби.

Приклад 3.10

Визначити оригінал $x(n)$ якщо відомо зображення

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1} + 0,06z^{-2}}.$$

Розв'язок

Розкладемо z -зображення на суму простих дроби. Для цього зобразимо знаменник у вигляді співмножників першого ступеня:

$$\begin{aligned} 1 - 0,5z^{-1} + 0,06z^{-2} &= 1 - 0,2z^{-1} - 0,3z^{-1} + 0,06z^{-2} = \\ &= (1 - 0,2z^{-1}) - 0,3z^{-1}(1 - 0,2z^{-1}) = (1 - 0,3z^{-1})(1 - 0,2z^{-1}). \end{aligned}$$

Тоді задане z -зображення послідовності $x(n)$ можна записати у вигляді

$$X(z) = \frac{1}{(1 - 0,2z^{-1})(1 - 0,3z^{-1})}.$$

При цьому маємо два полюси:

$$\alpha_1 = 0,2; \alpha_2 = 0,3.$$

Розкладемо зображення на прості дроби й наведемо його у вигляді суми:

$$X(z) = \frac{\beta_1}{1 - 0,2z^{-1}} + \frac{\beta_2}{1 - 0,3z^{-1}},$$

де β_1 та β_2 – коефіцієнти розкладання.

Коефіцієнти розкладання β_1 та β_2 одержимо з умови рівності дробів

$$\frac{1}{(1-0,2z^{-1})(1-0,3z^{-1})} = \frac{\beta_1}{1-0,2z^{-1}} + \frac{\beta_2}{1-0,3z^{-1}}.$$

У правій частині останньої рівності зведемо суму двох простих дробів до загального знаменника:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1}{1-0,2z^{-1}} + \frac{\beta_2}{1-0,3z^{-1}} &= \frac{\beta_1 - 0,3\beta_1z^{-1} + \beta_2 - 0,2\beta_2z^{-1}}{(1-0,2z^{-1})(1-0,3z^{-1})} = \\ &= \frac{(\beta_1 + \beta_2) - (0,3\beta_1 + 0,2\beta_2)z^{-1}}{(1-0,2z^{-1})(1-0,3z^{-1})}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{1}{(1-0,2z^{-1})(1-0,3z^{-1})} = \frac{(\beta_1 + \beta_2) - (0,3\beta_1 + 0,2\beta_2)z^{-1}}{(1-0,2z^{-1})(1-0,3z^{-1})}.$$

Дроби рівні, якщо рівні їхні чисельники й знаменники. У нашому випадку рівність знаменників очевидно. Прирівнявши чисельники, отримаємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладання β_1 та β_2 :

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 &= 1 \\ 0,3\beta_1 + 0,2\beta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = -2 \\ \beta_2 = 3 \end{cases}.$$

Таким чином, z -зображення набуде вигляду

$$X(z) = \frac{-2}{1-0,2z^{-1}} + \frac{3}{1-0,3z^{-1}}.$$

Йому відповідає оригінал

$$x(n) = -2 * 0,2^n + 3 * 0,3^n.$$

4. Опис лінійних дискретних систем у часовій області

Системою обробки сигналів (коротко – системою) називають об'єкт, що виконує необхідне перетворення (обробку) вхідного сигналу у вихідний. За замовчуванням надалі будемо розглядати системи з одним входом і одним виходом.

Вхідний сигнал називають *впливом*, а вихідний – *реакцією*.

У загальному випадку взаємозв'язок між вхідним і вихідним сигналами – *співвідношення вхід–вихід* системи – математично описується рівнянням в операторній формі

$$Y = F(X), \quad (4.1a)$$

де X, Y – множини впливів й реакцій; у загальному випадку для систем із кількома входами й виходами X, Y – вектори, елементами яких є функції часу;

F – оператор, що визначає характер математичних операцій при відображенні множини X у множину Y .

В окремому випадку, для систем з одним входом і одним виходом, рівняння (4.1a) набуде вигляду:

$$y = F\{x\}, \quad (4.1b)$$

де x, y – вплив і реакція – функції часу.

Систему називають лінійною, якщо вона має наступні властивості:

- *адитивності*, відповідно до якої реакція на суму впливів дорівнює сумі реакцій на кожен із впливів (принцип *суперпозиції*) а саме:

$$\text{якщо } x = x_1 + x_2,$$

то

$$F\{x_1 + x_2\} = F\{x_1\} + F\{x_2\}; \quad (4.2)$$

- *однорідності*, відповідно до якої множення впливу на ваговий коефіцієнт відповідає реакції, помноженої на той самий коефіцієнт:

$$F\{ax\} = aF\{x\}. \quad (4.3)$$

Співвідношення вхід–вихід *лінійної* системи описується рівнянням (4.1 а) з *лінійним* оператором F . Це означає, що в правій частині рівняння (4.1 а) можливі тільки лінійні алгебраїчні операції додавання, віднімання й множення на ваговий коефіцієнт, а отже, співвідношення вхід–вихід лінійної системи описується *лінійним рівнянням*.

Систему називають *стаціонарною*, якщо вона має *властивість інваріантності в часі*, відповідно до якого затримка впливу на якийсь

час приводить до затримки реакції на той самий час. Параметри стаціонарної системи незмінні в часі. За замовчуванням надалі будемо розглядати стаціонарні *системи*.

Зауваження

Аналогові лінійні системи мають додаткову затримку реакції щодо впливу на $t_{зан}$.

Лінійна система називається *дискретною*, якщо вплив і реакція являють собою дискретні сигнали – послідовності відліків $x(nT)$ і $y(nT)$ (Рис. 4.1), які можуть бути як *дійсними*, так і *комплексними*.



Рис. 4.1. Загальна схема обробки сигналів лінійною дискретною системою.

У даному розділі розглядається опис лінійної дискретної системи в *часовій* області.

4.1. Імпульсна характеристика

У часовій області лінійна дискретна система (ЛДС), подібно до лінійної аналогової системи, описується *імпульсною характеристикою*.

Імпульсною характеристикою (ІХ) $h(nT)$ ЛДС називається її реакція на одиничний цифровий імпульс $u_0(nT)$ при нульових початкових умовах (Рис. 4.2).



Рис. 4.2. До визначення імпульсної характеристики

Ознакою *нульових початкових умов* є відсутність реакції при відсутності впливу. Позначивши початковий момент часу $n=0$, формалізуємо початкові умови:

$$\begin{cases} x(nT) = 0, \text{ при } n > 0 \\ y(nT) = 0, \text{ при } n < 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Нульові початкові умови (4.4) відповідають *принципу причинності*, відповідно до якого реакція не може виникнути раніше впливу. ІХ $h(nT)$ часто називають основною характеристикою лінійної системи, оскільки з її допомогою легко визначається реакція на довільний вплив.

При описі ЛДС у часовій області крім імпульсної використовують перехідну характеристику. *Перехідною характеристикою* $g(nT)$ ЛДС називається її реакція на одиничний цифровий стрибок $u_1(nT)$ при нульових початкових умовах (Рис. 4.3).



Рис. 4.3. До визначенням перехідної характеристики

4.2 Співвідношення вхід–вихід

Співвідношення вхід–вихід ЛДС відображає взаємозв’язок між її вхідним $x(nT)$ і вихідним $y(nT)$ сигналами – реакцію ЛДС на довільний вплив.

У *часовій* області співвідношення вхід–вихід описується *лінійними рівняннями*:

- *формулою згортки* (назва рівняння), якщо використовується імпульсна характеристика;

- *різницеvim рівнянням*, якщо використаються параметри ЛДС.

Розглянемо докладніше кожне із цих рівнянь.

4.2.1. Формула згортки

Одержимо рівняння взаємозв’язку між вхідним $x(nT)$ і вихідним $y(nT)$ сигналами для ЛДС, заданою своєю імпульсною характеристикою $h(nT)$. Скористаємося визначенням ІХ і властивостями

ЛДС. Будемо послідовно записувати відповідності, що позначаються стрілкою, між впливом і реакцією:

- за визначенням, впливу у вигляді одиничного цифрового імпульсу відповідає реакція, яка названа імпульсною характеристикою:

$$u_0(nT) \rightarrow h(nT);$$

- на підставі властивості інваріантності в часі, впливу, затриманому на час nT , відповідає реакція, затримана на той же час:

$$u_0(nT - mT) \rightarrow h(nT - mT);$$

- на підставі властивості однорідності (4.3) лінійних систем, множенню впливу на константу $x(mT)$ відповідає реакція, помножена на той же коефіцієнт:

$$u_0(nT - mT)x(mT) \rightarrow h(nT - mT)x(mT);$$

- на підставі властивості адитивності (4.2) лінійних систем, реакція на суму впливів дорівнює сумі реакцій на кожний із впливів:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} u_0(nT - mT)x(mT) \rightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(nT - mT)x(mT);$$

- із урахуванням нульових початкових умов (4.4)

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_0(nT - mT)x(mT) \rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} h(nT - mT)x(mT);$$

ліворуч маємо вплив (див. розділ 1):

$$x(nT) \rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} h(nT - mT)x(mT),$$

а праворуч – реакцію

$$y(nT) \rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} h(nT - mT)x(mT), \quad (4.5)$$

де $h(nT - mT)$ – імпульсна характеристика, затримана на m періодів дискретизації.

Лінійне рівняння (4.5) називають *формулою згортки*. Відповідно до цієї формули, реакція $y(nT)$ обчислюється як дискретна згортка впливу $x(nT)$ й імпульсної характеристики $h(nT)$.

Використовуючи стандартну умовну позначку операції згортки, формулу (4.5) зручно подати в наступному компактному вигляді:

$$y(n) = x(n) \cdot h(n).$$

Виконавши заміну змінних в (4.5), можна одержати інший варіант запису формули згортки:

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h(mT - nT)x(mT). \quad (4.6)$$

Для нормованого часу формула згортки у двох варіантах запису (4.5) - (4.6) набуває вигляду відповідно

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m - n)x(m); \quad (4.7)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n - m). \quad (4.8)$$

Результат обчислення згортки за формулами (4.7), (4.8) тотожний. Вибір варіанта формули згортки визначається зручністю застосування в конкретному випадку.

Важливо, що математичний опис співвідношення вхід-вихід за допомогою формули згортки задовольняє умову *фізичної реалізації* ЛДС, що припускає дотримання *принципу причинності*, відповідно до якого при нульових початкових умовах реакція не може виникнути раніше впливу.

Приклад 4.1

Обчислити реакцію ЛДС за формулою згортки. Імпульсна характеристики й вплив задані графічно (Рис. 4.4–4.5). Потрібно визначити вісім відліків реакції.

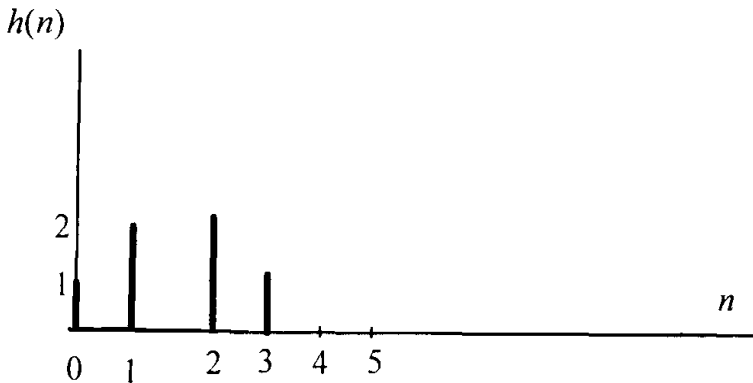


Рис. 4.4 Імпульсна характеристика

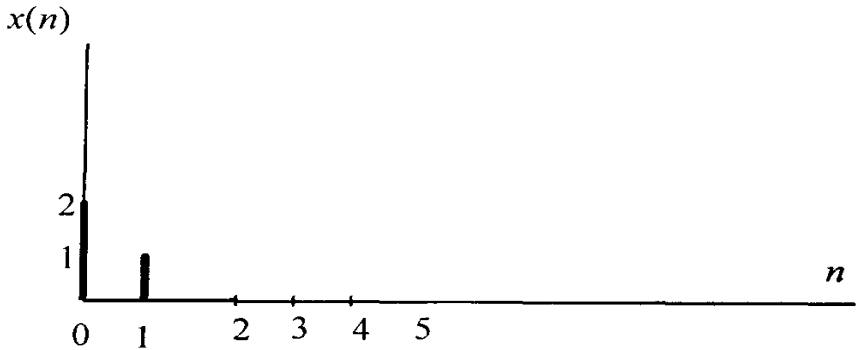


Рис. 4.5 Вплив (вхідний сигнал)

Графік обчисленої реакції поданий на Рис 4.6.

Таблиця 4.1

Обчислення реакції по формулі згортки

n	Реакція
0	$y(0) = h(0)x(0) + h(1)x(-1) + h(2)x(-2) + \dots = h(0)x(0) = 1 \cdot 2 = 2$
1	$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0) + h(2)x(-1) + \dots = h(0)x(1) + h(1)x(0) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$
2	$y(2) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0) + h(3)x(-1) + \dots =$ $= h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6$
3	$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0) + h(4)x(-1) + \dots =$ $= h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$
4	$y(4) = h(0)x(4) + h(1)x(3) + h(2)x(2) + h(3)x(1) + h(4)x(0) + h(5)x(-1) + \dots =$ $= h(0)x(4) + h(1)x(3) + h(2)x(2) + h(3)x(1) + h(4)x(0) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 1$
5	$y(5) = h(0)x(5) + h(1)x(4) + h(2)x(3) + h(3)x(2) + h(4)x(1) + h(5)x(0) + h(6)x(-1) + \dots =$ $= h(0)x(5) + h(1)x(4) + h(2)x(3) + h(3)x(2) + h(4)x(1) + h(5)x(0) =$ $= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$
6	$y(6) = 0$
7	$y(7) = 0$

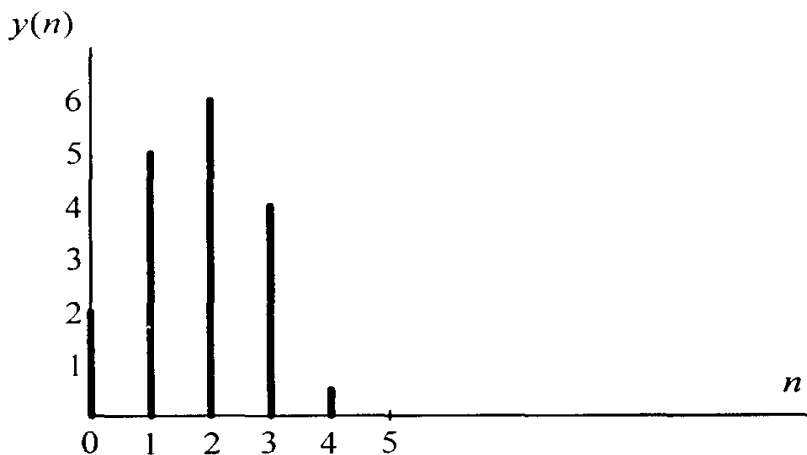


Рис. 4.6. Реакція

Механізм обчислення відліків реакції $y(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ за формулою згортки можна подати як послідовне обчислення сум локальних добутків двох послідовностей – імпульсної характеристики й впливу. При цьому одна з послідовностей фіксована, а інша дзеркально відображається щодо осі ординат і ковзає праворуч по осі часу. При використанні формули згортки у варіанті запису (4.8) фіксованою буде імпульсна характеристика, а ковзаючою – впливом.

Механізм обчислення за формулою згортки (4.8) для приклада 4.1 ілюструє рис. 4.7. Фіксована імпульсна характеристика показана на рис. 4.7, а, вплив – на рис. 4.7, б, дзеркально відображений вплив – на рис. 4.7, в, а результат його послідовного ковзання – на рис. 4.7, г-з.

Перший відлік реакції $y(0)$ обчислюється як сума локальних добутків послідовностей на рис. 4.7, а та рис. 4.7, в, другий відлік реакції $y(1)$ – як сума локальних добутків послідовностей на рис. 4.7, а та рис. 4.7, г і так далі.

Очевидно, що обчислення варто припинити, як тільки всі локальні добутки виявляться такими, що дорівнюють нулю. Це відбудеться, коли послідовності “розійдуться”, тобто у двох послідовностей, що перемножуються, не буде жодного збігу відліків у жоден із моментів часу n . У розглянутому прикладі послідовності “розходяться” при зсуві по осі часу на $m = 5$ (Рис. 4.7, з).

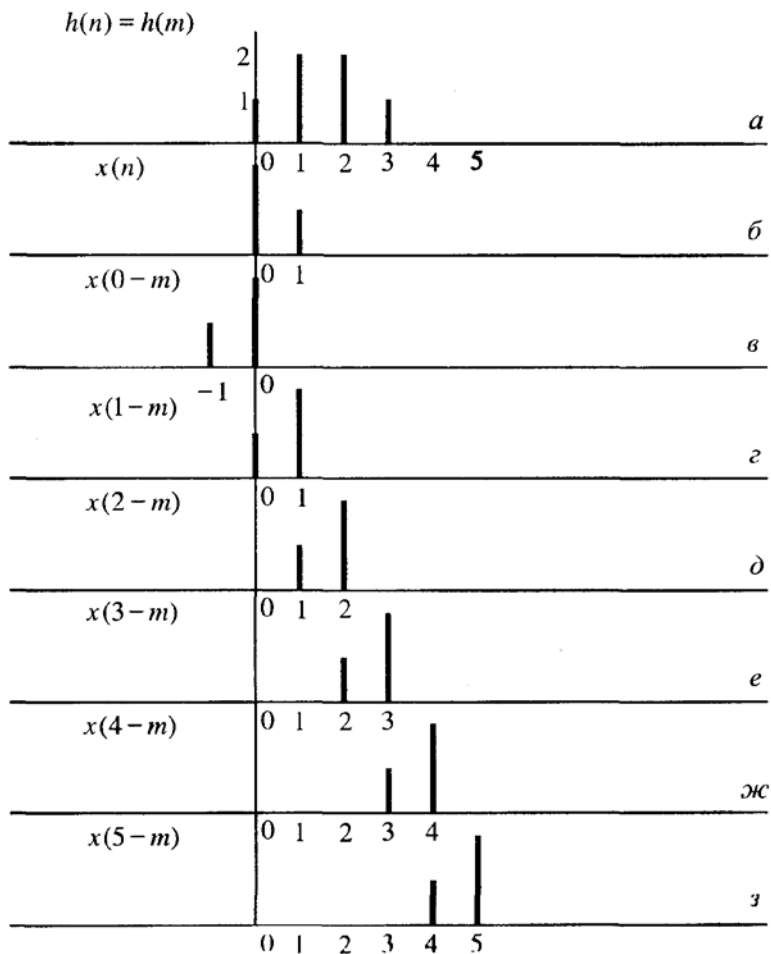


Рис. 4.7. Розрахунок за формулою згортки

Розглянутий механізм обчислення реакції за формулою згортки дозволяє зробити наступні висновки:

- якщо тривалість впливу й/або імпульсної характеристики нескінченна, тривалість реакції також нескінченна;

- якщо тривалості впливу $x(nT)$ та імпульсної характеристики $h(nT)$ скінченні й дорівнюють NT і MT , то тривалість реакції $y(nT)$ також скінченна й дорівнює LT ,

$$\text{де} \quad L = N + M - 1; \quad (4.9)$$

- при $n \geq L$ послідовності (імпульсна характеристика й “ковзаюча” – дзеркально відображений вплив) “розходяться” й $y(nT) = 0$;

- при кінцевих впливі та імпульсній характеристиці формула згортки у двох варіантах запису для нормованого часу набуває вигляду

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m-n)x(m); \quad (4.10)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m)x(n-m). \quad (4.11)$$

У прикладі 4.1 довжина вхідної послідовності (впливу) дорівнює $N = 2$, а довжина імпульсної характеристики $M = 4$, тому довжина L вихідної послідовності (реакції) дорівнює (Рис. 4.6)

$$L = 4 + 2 - 1 = 5.$$

Операцію дискретної згортки у формулах (4.7) - (4.8) називають *лінійною* (аперіодичної) згорткою, на відміну від іншого її різновиду – *кругової* (періодичної) згортки.

4.2.2. Різницеве рівняння

Якщо відомі параметри ЛДС, взаємозв’язок між впливом $x(nT)$ і реакцією $y(nT)$ – співвідношення вхід–вихід – описується різницеvim рівнянням (РР):

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x((n-i)T) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y((n-k)T) \quad , \quad (4.12)$$

де b_i, a_k – коефіцієнти рівняння (дійсні константи);

$x(n), y(n)$ – вплив і реакція (дійсні або комплексні сигнали);

i, k – значення затримок для впливу й реакції;

N, M – константи;

$x((n-i)T), y((n-k)T)$ – вплив і реакція, затримані на i та k періодів дискретизації відповідно.

Для нормованого часу ($T = 1$) різницеве рівняння (4.12) набуває вигляду

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(k-i) \quad (4.13)$$

Математичний опис співвідношення вхід-вихід за допомогою різницевого рівняння (4.12) задовольняє умову фізичної реалізації ЛДС, оскільки в цьому випадку дотримується принцип причинності (див. п. 4.2.1). Різницеве рівняння (4.12) має пряму аналогію з лінійним диференціальним рівнянням, що описує співвідношення вхід-вихід *аналогової* лінійної системи [4]:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} - \sum_{k=1}^{M-1} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}, \quad (4.14)$$

де b_i , a_k – коефіцієнти рівняння (дійсні константи), що визначають структуру аналогової лінійної системи.

Перехід від диференціальних рівнянь до різницевого зумовлений відмінностями функцій, що описують вхідний і вихідний сигнали аналогових і дискретних лінійних систем. Аналогові сигнали описуються неперервними, а дискретні – графчастими функціями часу, тому обчислення *похідних* замінюються обчисленням *розділених різниць* [5].

Диференціальне рівняння (4.14) розв'язується за допомогою одного з методів (алгоритмів) числового інтегрування. Вибір методу – досить складна проблема, однак *будь-який* метод числового інтегрування є наближеним, тобто принципово вносить похибку. При невдало обраному методі похибка може виявитися зростаючою, що приведе до непередбаченого результату.

Водоночас різницеве рівняння (4.12), по суті, вже являє собою *алгоритм* обчислення реакції; воно розв'язується *методом прямої підстановки* $n = 0, 1, 2, \dots$, що принципово не вносить похибки.

Приклад 4.2 Розв'язати різницеве рівняння

$$y(n) = x(n) - 0,5y(n-1)$$

методом прямої підстановки при заданому впливі

$$x(n) = 0,1^n.$$

Потрібно визначити 5 відліків реакції.

Розв'язок наведений у табл. 4.2.

Таблиця 4.2.

Обчислення реакції методом прямої підстановки

n	Вплив	Реакція
0	$x(0) = 0$	$b(0) = x(0) - 0,5b(-1) = 0 - 0,5 \cdot 0 = 0$
1	$x(1) = 0,1$	$b(1) = x(1) - 0,5b(0) = 0,1 - 0,5 \cdot 0 = 0,1$
2	$x(2) = 0,01$	$b(2) = x(2) - 0,5b(1) = 0,01 - 0,5 \cdot 0,1 = -0,04$
3	$x(3) = 0,001$	$b(3) = x(3) - 0,5b(2) = 0,001 - 0,5 \cdot (-0,04) = 0,21$
4	$x(4) = 0,0001$	$b(4) = x(4) - 0,5b(3) = 0,0001 - 0,5 \cdot 0,21 = -0,1049$
...

4.3. Рекурсивні й нерекурсивні лінійні дискретні системи

ЛДС називається *рекурсивною*, якщо хоча б один із коефіцієнтів a_k різницевого рівняння (4.13), що описує її співвідношення вхід–вихід не дорівнює нулю:

$$a_k \neq 0 \text{ хоча б для одного з значень } k. \quad (4.15)$$

Порядком рекурсивної ЛДС називають величину $\max\{(M-1), (N-1)\}$.

Згідно з РР (4.13), реакція $y(n)$ *рекурсивної* ЛДС у кожен момент часу n визначається:

- даним відліком впливу;
- передісторією впливу;
- передісторією реакції.

Приклади різницевого рівняння рекурсивної ЛДС: першого порядку:

$$y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1); \quad (4.16)$$

другого порядку:

$$b(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 b(n-1) - a_2 b(n-2). \quad (4.17)$$

ЛДС називається *нерекурсивною*, якщо всі коефіцієнти a_k різницевого рівняння (4.13), що описує її співвідношення вхід–вихід, дорівнюють нулю:

$$a_k = 0. \quad (4.18)$$

Для нерекурсивної ЛДС різницевої рівняння (4.12) – (4.13) набуває вигляду:

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x((n-i)T); \quad (4.19)$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i). \quad (4.20)$$

Порядком нерекурсивної ЛДС називають величину $(N-1)$.

Згідно РР (4.20) реакція $y(n)$ не рекурсивної ЛДС у кожен момент часу n визначається:

- даним відліком впливу;
- передісторією впливу.

Приклад РР нерекурсивної ЛДС другого порядку

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2). \quad (4.21)$$

4.4. Системи зі скінченною й нескінченною імпульсними характеристиками

Визначимо особливості *імпульсних характеристик* рекурсивних і нерекурсивних ЛДС. Для цього розглянемо приклади обчислення ІХ даних систем за різницевим рівнянням, розв'язуючи його методом прямої підстановки.

Приклад 4.3

Обчислити імпульсну характеристику *нерекурсивної* ЛДС другого порядку, співвідношення вхід–вихід якої описується РР:

$$y(n) = b_1 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2).$$

Розв'язок Згідно з визначенням, ІХ – це *реакція* на одиничний цифровий імпульс (див. Рис. 4.2), тому, виконавши заміну

$$\begin{aligned} x(n) &\rightarrow u_0(n); \\ y(n) &\rightarrow h(n); \end{aligned} \quad (4.22)$$

перепишемо РР у вигляді

$$h(n) = b_0 u_0(n) + b_1 u_0(n-1) + b_2 u_0(n-2)$$

і обчислимо відліки ІХ методом прямої підстановки (див. п. 4.2. 2):

$$h(0) = b_0 u_0(0) + b_1 u_0(-1) + b_2 u_0(-2) = b_0 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 = b_0$$

$$h(1) = b_{0u_0}(1) + b_{1u_0}(0) + b_{2u_0}(-1) = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 = b_1$$

$$h(2) = b_{0u_0}(2) + b_{1u_0}(1) + b_{2u_0}(0) = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 1 = b_2$$

$$h(3) = b_{0u_0}(3) + b_{1u_0}(2) + b_{2u_0}(1) = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 = 0$$

$$h(n) = 0, \text{ при } n > 3.$$

Поширюючи отримані результати на ІХ *нерекурсивної* ЛДС довільного порядку, можна зробити наступні висновки:

- імпульсна характеристика *нерекурсивної* ЛДС має *скінченну* тривалість, значення відліків ІХ дорівнюють коефіцієнтам різницевого рівняння

$$h(n) = b_i, \text{ при } n = i = 0, 1, \dots, N - 1;$$

- нерекурсивні ЛДС називають *системами зі скінченною імпульсною характеристикою*, або, коротко, *СІХ-системами*.

Є ряд винятків, коли СІХ-система одночасно може розглядатися і як нерекурсивна, і як рекурсивна ЛДС; прикладом такої СІХ-системи є однорідний фільтр [6].

Приклад 4.4

Обчислити імпульсну характеристику *рекурсивної* ЛДС першого порядку, співвідношення вхід–вихід якої описується РУ:

$$y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n - 1).$$

Розв'язок Виконавши заміну (4.22), перепишемо РР у вигляді:

$$h(n) = b_0 u_0(n) - a_1 h(n - 1)$$

і обчислимо відліки ІХ методом прямої підстановки

$$h(0) = b_0 u_0(0) - a_1 h(-1) = b_0$$

$$h(1) = b_0 u_0(1) - a_1 h(0) = -a_1 b_0$$

$$h(2) = b_0 u_0(2) - a_1 h(1) = -a_1(-a_1 b_0) = a_1^2 b_0$$

$$h(3) = b_0 u_0(3) - a_1 h(2) = -a_1(a_1^2 b_0) = -a_1^3 b_0$$

Обчислення можна продовжувати нескінченно за ітераційною формулою

$$h(n) = (-1)^n a_1^n b_0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Поширюючи отримані результати на ІХ *рекурсивної* ЛДС довільного порядку, можна зробити наступні висновки:

- імпульсна характеристика *рекурсивної* ЛДС має *нескінченну* тривалість;
- рекурсивні ЛДС називають системами з *нескінченною імпульсною характеристикою*, або, коротко, *НІХ-системами*.

4.5. Властивості лінійних дискретних систем

Вище зазначалося, що всі стаціонарні лінійні системи мають загальні властивості:

- адитивності;
- однорідності;
- інваріантності в часі.

Розглянемо додаткові властивості лінійних дискретних систем:

- властивість пам'яті;
- стійкість.

Властивість пам'яті лінійних дискретних систем

Під властивістю *пам'яті* системи мається на увазі її здатність "пам'ятати передісторію" (попередні відліки впливу) при обчисленні реакції в даний момент часу. Тривалість передісторії (кількість попередніх відліків впливу) визначає *тривалість пам'яті*.

Розглянемо властивість пам'яті *нерекурсивних* і *рекурсивних* ЛДС.

Відповідно до різницевого рівняння (4.20), що описує співвідношення вхід–вихід *нерекурсивної* ЛДС, для обчислення реакції $y(n)$ у даний момент часу необхідно "пам'ятати" $(N-1)$ попередніх відліків впливу. Отже, *нерекурсивна* ЛДС володіє властивістю пам'яті, її тривалість *скінченна* й дорівнює $(N-1)$.

Розглянемо властивості пам'яті *рекурсивної* ЛДС. Відповідно до РР (4.13), що описує співвідношення вхід–вихід *рекурсивної* ЛДС, кожен поточний відлік реакції $y(n)$ можна виразити через попередні відліки впливу в такий спосіб:

$$y(0) = b_0x(0)$$

$$y(1) = b_0x(1) + b_0x(0) - a_1y(0) = b_0x(1) + b_1x(0) - a_1[b_0x(0)],$$

$$y(2) = b_0x(2) + b_1x(1) + b_2x(0) - a_1y(1) - a_2y(0) = \\ = b_0x(2) + b_1x(1) + b_2x(0) - a_1\{b_0x(1) + b_1x(0) - a_1[b_0x(0)]\} - a_2\{b_0x(0)\}$$

і т.д.

Звідси випливає, що для обчислення будь-якого відліку реакції необхідно пам'ятати *всю* передісторію впливу, а, рекурсивна ЛДС має властивість пам'яті й тривалість її при $n \rightarrow \infty$ нескінченна.

Стійкість лінійних дискретних систем

ЛДС називається *стійкою*, якщо при обмеженому впливі й довільних початкових умовах реакція також обмежена.

Формалізуємо це визначення:

якщо

$$\max |x(n)| < R_x, \quad 0 < R_x < \infty,$$

де R_x – будь-яке як завгодно велике додатне число, що не дорівнює нескінченності, і $x(n)$, $y(n)$ при $n < 0$ мають будь-які (кінцеві) значення, то система буде називатися стійкою, якщо:

$$\max |y(n)| < R_y, \quad 0 < R_y < \infty,$$

де R_y — будь-яке як завгодно велике додатне число, що не дорівнює нескінченності.

Оцінювання стійкості за ІХ: критерій стійкості

Існують два *критерії* стійкості ЛДС. Один із них дозволяє оцінити стійкість ЛДС за її характеристикою в часовій області, інший – за z -зображенням цієї характеристики в z -області (див. розділ 5)

Вибір критерію визначається зручністю його практичного використання. У даному розділі, присвяченому опису ЛДС у часовій області, розглянемо критерій, що дозволяє оцінити стійкість ЛДС за її ІХ. Він формулюється в такий спосіб: для того щоб ЛДС була стійкою, необхідно й достатньо виконання умови абсолютної збіжності ряду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty. \quad (4.23)$$

Зауваження.

Даний критерій стійкості дозволяє зробити наступні висновки:

- нерекурсивні ЛДС – СІХ-системи – стійкі за визначенням;
- рекурсивні ЛДС – НІХ-системи – вимагають перевірки на стійкість;
- імпульсна характеристика рекурсивної ЛДС має характер згасаючої функції часу.

5. Опис лінійних дискретних систем у z -області

У розділі 4 розглядався опис ЛДС у часовій області – імпульсна характеристика $h(n)$ і співвідношення вхід–вихід. У даному розділі будуть розглядатися їх відображення в z -області.

Математичний апарат Z -перетворення, подібно до перетворення Лапласа в теорії лінійних аналогових кіл (див. розділ 2), дозволяє істотно спростити аналіз ЛДС.

5.1. Передавальна функція. Співвідношення вхід–вихід

Основною характеристикою ЛДС в z -області є z -зображення імпульсної характеристики $h(n)$

$$H(z) = Z \{h(n)\}, \quad (5.1)$$

яке визначається за формулою прямого Z -перетворення (2.18):

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}. \quad (5.2)$$

За відомим z -зображенням $H(z)$ імпульсна характеристика $h(n)$ знаходиться за допомогою оберненого Z -перетворення

$$h(n) = Z^{-1}\{H(z)\}.$$

$H(z)$ – передавальна функція (ПФ) ЛДС. Співвідношення (5.2) є математичним визначенням ПФ.

Співвідношення вхід–вихід ЛДС у часовій області визначалося за допомогою формули згортки або у вигляді різницевого рівняння. Розглянемо по черзі їх відображення в z -області.

Формулі згортки (див. розділ 4)

$$y(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} h(n-m)x(m) \\ \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) \end{cases} \quad (5.3)$$

z -області відповідає рівняння (див. розділ 3, властивості Z -перетворення)

$$Y(z) = H(z)X(z), \quad (5.4)$$

де $X(z)$ і $Y(z)$ – z -зображення впливу й реакції.

На підставі (5.4) передавальну функцію можна зобразити як співвідношення

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}, \quad (5.5)$$

яке дозволяє її визначити в такий спосіб:

Передавальна функція (ПФ) ЛДС $H(z)$ – це відношення z -зображення реакції до z -зображення впливу при нульових початкових умовах.

Дане визначення ПФ не суперечить наведеному вище математичному (5.2). Дійсно, відповідно до визначення, імпульсна характеристика $h(n)$ є реакцією на вплив у вигляді одиничного цифровою імпульсу $u_0(n)$. Підставивши z -зображення впливу й реакції в (5.5), одержимо математичне визначення (5.2):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Z\{h(n)\}}{Z\{u_0(n)\}} = Z\{h(n)\}$$

з огляду на те, що $Z\{u_0(n)\} = 1$ (див. розділ 3).

Різницевому рівнянню (4.13)

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k),$$

в z -області відповідає рівняння, яке можна одержати, виконавши перетворення правої й лівої частин РР:

$$Z\{y(n)\} = Z\left\{ \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k) \right\}.$$

Використовуючи властивості z -перетворення – лінійність і теорему про загалювання (див. розділ 3), запишемо:

$$Y(z) = X(z) \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} - \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k} Y(z).$$

звідки після зведення подібних маємо наступне рівняння:

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} X(z). \quad (5.5a)$$

Поділивши обидві частини цього рівняння на $X(z)$, одержимо передавальну функцію загального вигляду:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \quad (5.6)$$

– дробово-раціональну функцію, чисельник і знаменник якої – багаточлени від z^{-1} порядків $(N-1)$ і $(M-1)$ з дійсними коефіцієнтами b_i й a_k .

З (5.6) випливає, що ПФ залежить винятково від внутрішніх параметрів ЛДС і не залежить ні від впливу, ні від реакції.

Порядком ПФ називають найбільше із чисел $(N-1)$ і $(M-1)$. Тут і надалі будемо вважати, що *порядок багаточлена чисельника не перевищує порядок багаточлена знаменника*

$$(N-1) \leq (M-1).$$

Як і будь-яка дробово-раціональна функція, ПФ (5.6) характеризується своїми *особливими точками (полюсами)* й *нулями*.

Нулями ПФ називають значення z , при яких $H(z)$ (5.6) дорівнює нулю.

Особливими точками (полюсами) ПФ називають значення z , при яких знаменник $H(z)$ дорівнює нулю.

Визначення особливих точок і нулів передавальної функції ЛДС виконується так само, як це робиться в теорії лінійних аналогових кіл.

Попередньо варто записати ПФ $H(z)$ (5.6) як відношення багаточленів додатних ступенів z , для чого чисельник і знаменник $H(z)$ треба помножити на z^{M-1} . Доцільно виділити два випадки:

1. ПФ зображена *неправильною* дробово-раціональною функцією – порядок багаточлена чисельника *дорівнює* порядку багаточлена знаменника:

$$(N-1) = (M-1).$$

Тоді після множення чисельника й знаменника $H(z)$ (5.6) на z^{M-1} маємо:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{(M-1)-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{(M-1)-k}}. \quad (5.6a)$$

Нулями передавальної функції $H(z)$ будуть корені рівняння, що відповідає чисельнику:

$$\sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{(M-1)-i} = 0, \quad (5.7)$$

а полюсами — корінь рівняння, що відповідає знаменнику:

$$1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{(M-1)-k} = 0. \quad (5.8)$$

Якщо серед полюсів зустрічаються однакові, їх називають *кратними*.

2. ПФ зображена *правильною* дробово-раціональною функцією — порядок багаточлена чисельника *менше* порядку багаточлена знаменника:

$$(N - 1) < (M - 1)$$

Тоді після множення чисельника й знаменника $H(z)$ (5.6) на $z^{(M-1)}$ маємо:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{(N-1)-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{(M-1)-k}}.$$

Полюси таких ПФ визначаються так само, як і в першому випадку. Що стосується нулів, то, крім коренів чисельника (5.7) додаються нулі в точці $z = \infty$, кратність яких дорівнює різниці порядків багаточленів знаменника й чисельника:

$$(M - 1) - (N - 1) = M - N.$$

як правило, ці нулі не є інформативними, тому звичайно ними нехтують.

Картою нулів і полюсів називають зображення координат нулів (°) і полюсів (*) на комплексній z -площині. Як буде показано далі, така карта є досить важливою графічною характеристикою ЛДС.

Зауваження

При побудові карт нулів і полюсів у програмному середовищі MATLAB полюси зображуються символом множення (x).

5.2. Взаємозв'язок між передавальною функцією й різницеvim рівнянням

Із порівняння передавальної функції (5.6) і відповідного їй різницевого рівняння (4.13) видно, що:

1. багаточлен чисельника ПФ пов'язаний з відліками впливів $b_i x(n-1)$, при цьому величина затримки відліку $x(n-1)$ відображається ступенем z^{-i} (див. розділ 3), а значення коефіцієнта b_i залишається незмінним, що символічно можна записати в такий спосіб

$$b_i x(n-1) \leftrightarrow b_i z^{-i}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1;$$

2. багаточлен знаменника ПФ пов'язаний із відліками реакції $y(n)$ й $a_k y(n-k)$, при цьому вільний член багаточлена знаменника завжди дорівнює 1

$$a_0 = 1,$$

тому що в РР він відповідає реакції $y(n)$; величина затримки k відліку $y(n-k)$ відображається ступенем z^{-k} , абсолютне значення коефіцієнта a_k залишається незмінним, але його знак змінюється на протилежний, що символічно можна записати в такий спосіб:

$$a_k y(n-k) \leftrightarrow -a_k z^{-k}.$$

Приклад 5.1

Дана передавальна функція загального виду. Записати відповідне їй різницеve рівняння:

1. для ланки 1-го порядку (чисельник і знаменник ПФ – багаточлени першого порядку):

передавальна функція:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}; \quad (5.9)$$

різницеve рівняння:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1); \quad (5.10)$$

2. для ланки 2-го порядку (чисельник і знаменник ПФ – багаточлени від другого порядку):

передавальна функція:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}; \quad (5.11)$$

різницеве рівняння:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2). \quad (5.12)$$

5.3. Різновиди передавальних функцій

Різновиди передавальних функцій зумовлені можливістю їх різного математичного подання, а також типом ЛДС – рекурсивна (НІХ) або нерекурсивна (СІХ).

Наведемо різновиди математичного зображення передавальної функції загального вигляду (5.6).

1. Зображення ПФ у вигляді добутку з розкладанням чисельника й знаменника на найпростіші множники першого ступеня

$$H(z) = \frac{b_0 \prod_{i=1}^{N-1} (1 - \beta_i z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M-1} (1 - \alpha_k z^{-1})}, \quad (5.13)$$

де β_i, α_k - i -й нуль й k -й полюс ПФ (5.6) відповідно; у загальному випадку нулі й полюси – комплексно-спряжені числа; $(N-1)$ і $(M-1)$ – кількість нулів і полюсів відповідно.

При $N = M$ формула (5.13) набуває вигляду

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^{M-1} H_k(z) = b_0 \prod_{k=1}^{M-1} \frac{(1 - \beta_k z^{-1})}{(1 - \alpha_k z^{-1})}. \quad (5.14)$$

У зображенні ПФ (5.13) у загальному випадку маємо комплексні коефіцієнти при z^{-1} .

2. Зображення ПФ у вигляді добутку з розкладанням чисельника й знаменника на найпростіші множники другого ступеня:

$$H(z) = \frac{\prod_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} (b_{0i} + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2})}{\prod_{k=1}^{\frac{M-1}{2}} (1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2})}, \quad (5.15)$$

де $b_{0i}, b_{1i}, a_{1k}, a_{2k}$ – дійсні коефіцієнти; $(N-1), (M-1)$ – парні числа.

При $N = M$ формула (5.15) набуває вигляду

$$H(z) = \prod_{k=1}^K H_k(z) = \prod_{k=1}^K \frac{(b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2})}{(1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2})}, \quad (5.16)$$

де K – кількість ланок 2-го порядку; $K = (M-1)/2$.

3. Подання ПФ у вигляді суми простих дробів ($N \leq M$) першого ступеня

$$H(z) = \sum_{k=1}^{M-1} H_k(z) = \sum_{k=1}^{M-1} \frac{A_k}{(1 - \alpha_k z^{-1})}, \quad (5.17)$$

де α_k – k -й полюс ПФ (5.6); у загальному випадку полюси комплексно-спряжені числа; A_k – коефіцієнт розкладання при k -му полюсі; константа A_k – завжди число того ж типу, що й полюс α_k , тому в загальному випадку константи, так само як і полюси, – комплексно-спряжені числа; $(M-1)$ – кількість полюсів і констант.

4.Зображення ПФ у вигляді суми простих дробів ($N \leq M$) другого ступеня:

$$H(z) = \sum_{k=1}^K H_k(z) = \sum_{k=1}^K \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}}, \quad (5.18)$$

де $b_{0k}, b_{1k}, a_{1k}, a_{2k}$ – дійсні коефіцієнти; $K=(M-1)/2$, K – кількість ланок 2-го порядку.

5.4. Оцінювання стійкості за передавальною функцією: критерій стійкості

У попередньому розділі, присвяченому опису ЛДС у часовій області, був розглянутий критерій, який дозволяв оцінити стійкість ЛДС за імпульсною характеристикою. Логічно припустити, що в z -

області, де основною характеристикою ЛДС є передавальна функція – z -зображення H , повинен існувати критерій, що дозволяє оцінити стійкість ЛДС за передавальною функцією. Отримаємо його на підставі відомого критерію стійкості (4.23)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty.$$

Зобразимо ПФ загального вигляду (5.6) у вигляді суми простих дробів першого ступеня (5.17), тоді відповідна H може бути записана як сума H ланок першого порядку (див. розділ 3):

$$h(n) = \sum_{k=1}^{M-1} A_k \alpha_k^n. \quad (5.19)$$

Підставляючи H (5.19) в (4.23) і змінюючи порядок сумування, запишемо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{M-1} A_k \alpha_k^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{M-1} |A_k \alpha_k^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{M-1} |A_k| |\alpha_k|^n = \sum_{k=1}^{M-1} |A_k| \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_k|^n.$$

Умова (4.23) виконуватиметься у випадку, якщо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_k|^n < \infty, \quad k = 1, 2, \dots, M-1,$$

що можливе при наступному обмеженні для полюсів α_k :

$$|\alpha_k| < 1, \quad k = 1, 2, \dots, M-1. \quad (5.20)$$

Це дозволяє сформулювати *критерій*, що дасть змогу оцінити стійкість ЛДС за передавальною функцією: для того, щоб ЛДС була стійкою, необхідно й достатньо, щоб усі полюси її передавальної функції розташовувалися *всередині* одиничного кола комплексної z -площини.

Зауваження

Необхідно зазначити, що, на відміну від критерію (4.23), критерій (5.20) має обмеження: якщо найпростіші множники в передавальній функції вигляду (5.13) скорочуються (нуль дорівнює полюсу $\beta_i = \alpha_k$), може виявитися, що умова (4.23) виконується, а ЛДС нестійка. У таких випадках необхідно звертати увагу на множники, що скорочуються; якщо полюси (і нулі, що дорівнюють їм) розташовані всередині одиничного кола – ЛДС стійка, у протилежному випадку – нестійка [7].

При аналізі стійкості ЛДС, як правило, користуються критерієм (5.20), більш зручний у практичному застосуванні. Цей критерій дає можливість просто і швидко оцінити стійкість рекурсивної ЛДС за місцезнаходженням полюсів на карті нулів і полюсів.

6. Опис лінійних дискретних систем у частотній області

У розділі 4 розглядалися характеристики ЛДС у часовій області: імпульсна характеристика $h(n)$ і співвідношення вхід–вихід. У цьому розділі буде розглянуто їх відображення в частотній області.

Опис ЛДС в частотній області дозволяє виявити ряд її істотних особливостей, що були приховані при описі в часовій області і в z -області.

6.1. Частотна характеристика. Співвідношення вхід–вихід

Основною характеристикою ЛДС в частотній області є Фур’є-зображення імпульсної характеристики $h(n)$, яке визначається за формулою прямого перетворення Фур’є (2.21):

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) e^{-j\omega T n} \quad (6.1)$$

або для нормованої частоти $\hat{\omega}$ –

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) e^{-j\hat{\omega} n}. \quad (6.2)$$

При відомому Фур’є-зображенні $H(e^{j\hat{\omega}})$ імпульсна характеристика $h(n)$ знаходиться за допомогою оберненого перетворення Фур’є (2.24)

$$h(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} H(e^{j\omega T}) e^{j\omega T n} d\omega. \quad (6.3)$$

$H(e^{j\omega T}) = H(e^{j\hat{\omega}})$ – комплексна частотна характеристика (КЧХ) або, частотна характеристика (ЧХ) ЛДС. Співвідношення (6.1) є математичним визначенням ЧХ.

Визначимо ЧХ так, як це робиться для лінійних аналогових систем, для яких відомо, що гармонічний вплив викликає гармонічну реакцію тієї ж частоти, але (в загальному випадку) іншої амплітуди й початкової фази.

Розглянемо реакцію ЛДС на дискретний гармонічний вплив

$$x(nT) = C e^{j\omega n T}, \quad (6.4)$$

де C – амплітуда; $\omega n T$ – фаза дії. Згідно з формулою згортки (4.6), реакція дорівнює

$$\begin{aligned}
 y(nT) &= \sum_{m=0}^{\infty} h(nT)x(nT - mT) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)Ce^{j\omega(n-m)T} = \\
 &= Ce^{j\omega nT} \sum_{m=0}^{\infty} h(m)e^{-j\omega mT} = x(nT) \sum_{m=0}^{\infty} h(m)e^{-j\omega mT}
 \end{aligned}$$

або, з урахуванням визначення ЧХ (6.1),

$$y(nT) = x(nT)H(e^{j\omega T}). \quad (6.5)$$

На основі (6.5) частотну характеристику можна подати як відношення функцій часу

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{y(nT)}{x(nT)}, \quad (6.6)$$

що дозволяє її визначити як і ЧХ лінійної аналогової системи.

Частотна характеристика $H(e^{j\omega T})$ – це частотна залежність відношення реакції до гармонічної дії в сталому режимі.

Як будь-яку комплексну функцію $H(e^{j\omega T})$ можна передати через модуль і аргумент

$$H(e^{j\omega T}) = |H(e^{j\omega T})|e^{j\arg(H(e^{j\omega T}))} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (6.7)$$

де модуль

$$A(\omega) = |H(e^{j\omega T})| \quad (6.8)$$

називають *амплітудно-частотною характеристикою* (АЧХ) ЛДС, а аргумент

$$\varphi(\omega) = \arg(H(e^{j\omega T})) - \quad (6.9)$$

фазочастотною характеристикою (ФЧХ) ЛДС.

Порівнюючи передавальну функцію (5.2)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

з частотною характеристикою (6.1), легко бачити їх взаємозв'язок:

$$H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = H(e^{j\omega T}), \quad (6.10)$$

з якого видно, що ЧХ $H(e^{j\omega T})$ тотожна ПФ $H(z)$ на одиничному колі $e^{j\omega T}$ комплексної z -площини.

Взаємозв'язок ПФ і ЧХ (6.10) дозволяє від відомих співвідношень вхід–вихід у z -області (5.4) – (5.5(а))

$$Y(z) = H(z)X(z),$$

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} X(z)$$

перейти до відповідних співвідношень вхід–вихід у частотній області

$$Y(e^{j\omega T}) = H(e^{j\omega T})X(e^{j\omega T}),$$

$$Y(e^{j\omega T}) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i e^{-j\omega T i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k e^{-j\omega T k}} X(e^{j\omega T}),$$

де $X(e^{j\omega T}), Y(e^{j\omega T})$ – Фур'є-зображення впливу й реакції.

6.2. Властивості частотної характеристики

Основні властивості ЧХ, АЧХ і ФЧХ:

1. ЧХ, АЧХ і ФЧХ – *неперервні* функції частоти за визначенням.

2. ЧХ, АЧХ і ФЧХ – *періодичні* функції з періодом за частотою

$$\omega, \text{ що дорівнює } \omega_D = \frac{2\pi}{T}.$$

Період за частотою ЧХ, АЧХ і ФЧХ залежно від шкали частот, що використовується, дорівнює

$$f \rightarrow f_D; \tag{6.11}$$

$$\hat{f} \rightarrow 1; \tag{6.12}$$

$$\omega \rightarrow \omega_D; \tag{6.13}$$

$$\hat{\omega} \rightarrow 2\pi. \tag{6.14}$$

3. Якщо коефіцієнти ПФ дійсні, то модуль частотної характеристики (АЧХ) буде *парною*, а аргумент (ФЧХ) – *непарною* функцією частоти:

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega T})| &= |H(e^{-j\omega T})|, \\ \arg(H(e^{j\omega T})) &= -\arg(H(e^{-j\omega T})). \end{aligned}$$

Нагадаємо, що *парною* називається така функція, яка не змінює свого значення при зміні знака змінної. Якщо ж при зміні знака змінної змінюється знак функції, а її абсолютне значення зберігається незмінним, то така функція називається *непарною*.

Основна смуга частот

Термін "основна смуга частот" виник у результаті того, що при дискретизації *аналогового* сигналу його спектр, згідно з теоремою Котельникова, обмежується верхньою частотою:

$$f_B \leq \frac{f_D}{2},$$

унаслідок чого спектр *дискретного* сигналу, а також частотні характеристики лінійної системи, що обробляє даний сигнал, розглядаються в

діапазоні частот $\left[0; \frac{f_D}{2}\right]$, який назвали *основним діапазоном частот*,

або *основною смугою частот*. Залежно від шкали частот, що використовується, *основна смуга частот* дорівнює:

$$f \rightarrow \left[0; \frac{f_D}{2}\right]; \quad (6.15)$$

$$\hat{f} \rightarrow [0; 0.5]; \quad (6.16)$$

$$\omega \rightarrow \left[0; \frac{\omega_D}{2}\right] = \left[0; \frac{\pi}{T}\right]; \quad (6.17)$$

$$\hat{\omega} \rightarrow [0; \pi]. \quad (6.18)$$

Знаючи графіки АЧХ і ФЧХ в основній смузі частот, при необхідності їх можна періодично продовжити на будь-якому інтервалі частот.

6.3. Розрахунок частотної характеристики

Отримаємо частотну характеристику $H(e^{j\omega T})$ за відомою передавальною функцією $H(z)$ загального вигляду (5.6)

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}.$$

Виконавши заміну

$$z = e^{j\omega T}, \quad (6.19)$$

запишемо вираз для $H(e^{j\omega T})$ у вигляді

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i e^{-j(i\omega T)}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k e^{-j(k\omega T)}}. \quad (6.20)$$

Розпишемо експоненти $e^{-j(i\omega T)}$ і $e^{-j(k\omega T)}$ за формулою Ейлера:

$$e^{-jk\omega T} = \cos(k\omega T) - j \sin(k\omega T), \quad (6.21)$$

після чого виділимо дійсні й уявні частини в чисельнику і знаменнику $H(e^{j\omega T})$ (6.20)

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{\text{Re}_4 + j \text{Im}_4}{\text{Re}_3 + j \text{Im}_3}, \quad (6.22)$$

де індекси "ч" і "з" означають чисельник і знаменник.

Визначимо модуль (АЧХ) і аргумент (ФЧХ) частотної характеристики $H(e^{j\omega T})$ (6.22)

$$A(\omega) = |H(e^{j\omega T})| = \sqrt{\frac{\text{Re}_4^2 + \text{Im}_4^2}{\text{Re}_3^2 + \text{Im}_3^2}}; \quad (6.23)$$

$$\varphi(\omega) = \arg(H(e^{j\omega T})) = \arctg\left(\frac{\text{Im}_4}{\text{Re}_4}\right) - \arctg\left(\frac{\text{Im}_3}{\text{Re}_3}\right). \quad (6.24)$$

Отримані вирази (6.23) – (6.24) використовуються для розрахунку АЧХ і ФЧХ в основній смузі частот.

Оскільки в ЦОС ланки 1-го і 2-го порядків можна розглядати як утворюючі елементи, на базі яких будують ЛДС будь-якої складності, цим ланкам надається особлива увага.

7. Структурні схеми лінійних дискретних систем

Структурна схема ЛДС відображає алгоритм обчислення реакції. Нагадаємо, що в часовій області співвідношення вхід–вихід при відомих параметрах ЛДС описується різницевою рівнянням, розв'язання якого методом прямої підстановки і являє собою алгоритм обчислення реакції (див. п. 4.2.2). У цьому значенні структурна схема ЛДС відображає *різницеве рівняння*.

Алгоритм обчислення реакції за різницевою рівнянням базується на виконанні *трьох* типів операцій з відліками сигналу: затримки на період дискретизації T , множення на константу, алгебраїчного додавання. На структурній схемі їм ставляться у відповідність три види елементів: елемент затримки (Рис. 7.1, а), помножувач (Рис. 7.1, б), суматор (Рис. 7.1, в). Фізично елемент затримки являє собою регістр, що зберігає *один* із попередніх відліків сигналу.

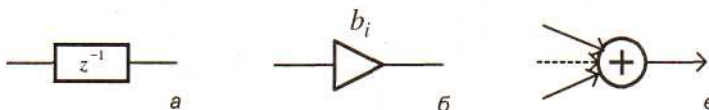


Рис.7.1. Елементи структурної схеми ЛДС

Структурна схема, що відображає різницеве рівняння, може бути реалізована апаратно або програмно. У першому випадку вона складається на базі конкретних мікросхем: регістрів, помножувачів, суматорів; у другому — при написанні програми мовою Асемблера процесора цифрової обробки сигналів (ЦПОС) — структурна схема лише вказує, які операції і в якій послідовності необхідно виконати для обчислення реакції, при цьому елемент затримки відповідає комірці пам'яті, в якій зберігається один із попередніх відліків сигналу. Потужний розвиток технологій ЦПОС в останні роки зробив програмну реалізацію пріоритетною.

Різницеве рівняння загального вигляду (4.13) однозначно пов'язане з передавальною функцією ЛДС загального вигляду (5.6).

Наведемо основні структури рекурсивних і нерекурсивних ЛДС, виходячи з зображення передавальної функції.

7.1. Структури рекурсивних ЛДС

На практиці найпоширенішими є структури, що відповідають наступним представленням передавальної функції $H(z)$ рекурсивної ЛДС:

- загального вигляду (5.6) і його модифікаціям;
- добутку з розкладанням на найпростіші множники другого ступеня (5.16);
- сумі простих дробів другого ступеня (5.18).

Пряма структура

Пряма структура базується на зображенні передавальної функції в загальному вигляді (5.6)

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}},$$

якому відповідає різницеве рівняння (4.13)

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k),$$

що відображається *прямою структурою*.

На рис. 7.2 наведена пряма структура ланки 2-го порядку, що описується передавальною функцією (5.11) і різницеvim рівнянням (5.12).

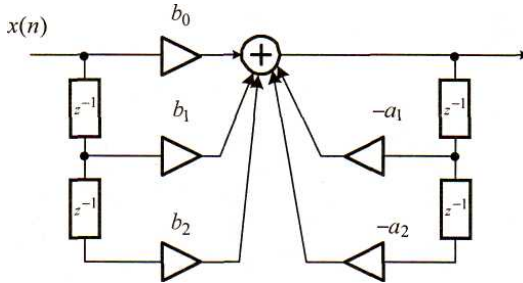


Рис.7.2. Пряма структура рекурсивної ланки 2-го порядку

Прямі канонічні структури

Структуру називають *канонічною*, якщо кількість елементів затримки дорівнює порядку передавальної функції $(M-1)$. У цьому випадку кількість елементів затримки мінімальна.

Серед безлічі канонічних структур практичне застосування знайшли три розглянуті нижче структури.

Пряма канонічна структура 1

Ця структура заснована на еквівалентному зображенні передавальної функції (5.6) у вигляді добутку

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} = \frac{V(z)}{X(z)} \frac{Y(z)}{V(z)} = H_1(z) H_2(z), \quad (7.1)$$

де

$$H_1(z) = \frac{V(z)}{X(z)}, \quad H_2(z) = \frac{Y(z)}{V(z)}$$

Передавальним функціям $H_1(z)$ і $H_2(z)$ відповідають такі різницеві рівняння:

$$v(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k v(n-k); \quad (7.2)$$

$$y(n) = \sum_{i=1}^{N-1} b_i v(n-i), \quad (7.3)$$

що відображаються прямими структурами.

На рис. 7.3, а, б наведені дані структури для ланки 2-го порядку, коли ПФ (7.1) і РР (7.2), (7.3) набувають відповідно вигляду:

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}); \quad (7.1a)$$

$$v(n) = x(n) - a_1 v(n-1) - a_2 v(n-2); \quad (7.2a)$$

$$y(n) = b_0 v(n) + b_1 v(n-1) + b_2 v(n-2). \quad (7.3a)$$

Об'єднання двох ліній затримки в одну приводить до *прямой канонічної структури 1* (Рис. 7.3, в).

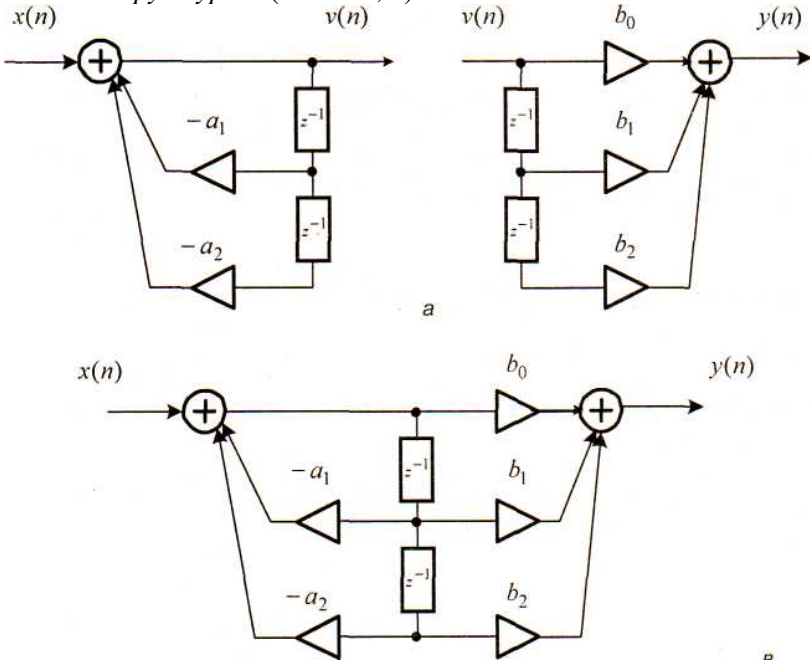


Рис.7.3. Прямая канонічна структура 1 рекурсивної ланки 2-го порядку

Пряма канонічна структура 2

Ця структура заснована на наступному еквівалентному зображенні передавальної функції (5.6). Вважаючи $N = M$, поділимо чисельник на знаменник за правилом ділення багаточленів. Оскільки вільний член багаточлена знаменника дорівнює 1, “частка” від ділення містить цілу частину, яка дорівнює b_0 , і дробовий залишок:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{-i}}{\sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} = b_0 + \frac{\sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} =$$

$$= H_{HP}(z) + H_P(z) = \frac{Y_{HP}(z) + Y_P(z)}{X(z)}. \quad (7.4)$$

Передавальна функція $H(z)$ (7.4) відображена сумою двох ПФ: нерекурсивної (з індексом “HP”):

$$H_{HP}(z) = \frac{Y_{HP}(z)}{X(z)} = b_0; \quad (7.5)$$

рекурсивної (з індексом “P”):

$$H_P(z) = \frac{Y_P(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}. \quad (7.6)$$

Передавальній функція $H_{HP}(z)$ (7.5) відповідає різницеve рівняння

$$y_{HP}(n) = b_0 x(n). \quad (7.7)$$

Передавальну функцію $H_P(z)$ (7.6) можна, подібно до (7.1), подати у вигляді добутку:

$$H_P(z) = \frac{Y_P(z)}{X(z)} = \frac{V(z) Y_P(z)}{X(z) V(z)} = H_{P1}(z) H_{P2}(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) z^{-k},$$

де передавальним функціям $H_{P1}(z)$ і $H_{P2}(z)$ відповідають різницеve рівняння, подібні до (7.2), (7.3), а саме:

$$v(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k v(n-k),$$

$$y_p(n) = \sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) v(n-k),$$

що відображаються прямими канонічними структурами 1.
Сумарній ПФ $H(z)$ (7.4)

$$H(z) = H_{HP}(z) + H_{p1}(z)H_{p2}(z) = b_0 + \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) z^{-k} \quad (7.8)$$

відповідає сумарне різницеве рівняння

$$y(n) = y_{HP}(n) + y_p(n) = b_0 x(n) + \sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) v(n-k), \quad (7.9)$$

де рівняння

$$v(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k v(n-k)$$

має вигляд (7.2) і відображається прямою канонічною структурою 2.

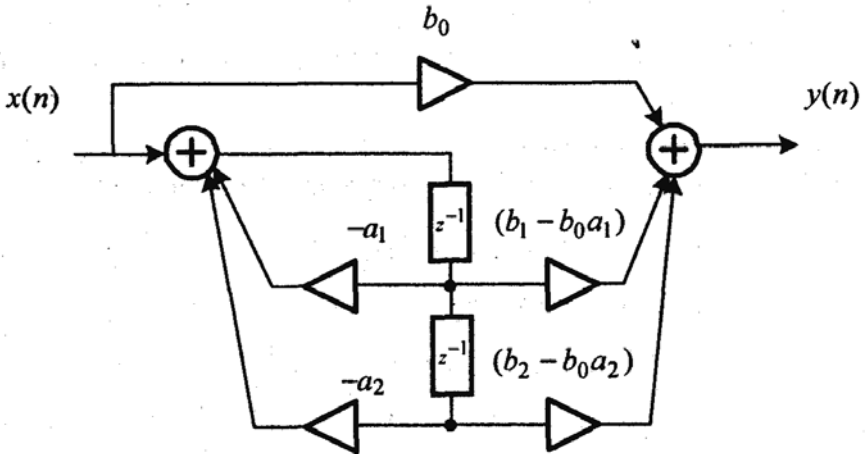


Рис. 7.4. Пряма канонічна структура 2 рекурсивної ланки 2-го порядку

На рис. 7.4 наведена пряма канонічна структура 2 для ланки 2-го порядку, коли ПФ (7.8) і РР (7.9) відповідно приймають вигляд

$$H(z) = b_0 + \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \left[(b_1 - b_0 a_1) z^{-1} + (b_2 - b_0 a_2) z^{-2} \right] \quad (7.10)$$

$$y(n) = b_0 x(n) + (b_1 - b_0 a_1) v(n-1) + (b_2 - b_0 a_2) v(n-2), \quad (7.11)$$

де

$$v(n) = x(n) - a_1 v(n-1) - a_2 v(n-2).$$

Каскадна структура

Каскадна структура заснована на представленні передавальної функції (5.6) у вигляді добутку (5.16) з розкладанням на найпростіші множники другого ступеня:

$$H(z) = \prod_{k=1}^K H_k(z) = \prod_{k=1}^K \frac{(b_{0k} + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2})}{(1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2})},$$

де коефіцієнти $b_{0k}, b_{1k}, b_{2k}, a_{1k}, a_{2k} \dots$ — дійсні числа, а K — кількість ланок 2-го порядку.

Якщо всі ланки мають пряму структуру (див. Рис. 7.2), такому відображенню ПФ відповідає система різницевих рівнянь :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(n) = b_{01}x(n) + b_{11}x(n-1) + b_{21}x(n-2) - a_{11}v_1(n-1) - a_{21}v_1(n-2) \\ v_2(n) = b_{02}v_1(n) + b_{12}v_1(n-1) + b_{22}v_1(n-2) - a_{12}v_2(n-1) - a_{22}v_2(n-2) \\ \dots \\ y(n) = b_{0k-1}v_{k-1}(n) + b_{1k-1}v_{k-1}(n-1) + b_{2k-1}v_{k-1}(n-2) - a_{1k-1}y(n-1) - \\ - a_{2k-1}y(n-2) \end{array} \right.$$

що передається каскадною структурою — послідовним з'єднанням рекурсивних ланок 2-го порядку.

Висновок: якщо ПФ наведена у вигляді добутку ПФ ланок 2-го порядку, реакція попередньої ланки є дією для подальшої ланки, тому структурна схема має вигляд послідовного з'єднання ланок.

На рис. 7.5 наведена каскадна структура з трьох ланок, кожна з яких може мати пряму або одну з двох запропонованих вище прямих канонічних структур.

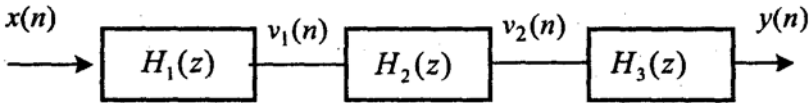


Рис. 7.5. Каскадна структура

Аналогічний вигляд мають каскадні структури ЛДС з меншою або більшою кількістю ланок.

Паралельна структура

Паралельна структура заснована на зображенні передавальної функції (5.6) у вигляді суми (5.18) з розкладанням на прості дробі другого ступеня:

$$H(z) = \sum_{k=1}^K H_k(z) = \sum_{k=1}^K \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}},$$

де $b_{0k}, b_{1k}, b_{2k}, a_{1k}, a_{2k}$ – дійсні коефіцієнти, K – кількість ланок 2-го порядку.

Отримаємо різницеве рівняння, відповідне даному вигляду ПФ, для чого помножимо праву й ліву частини рівності (5.18) на $X(z)$:

$$H(z)X(z) = \sum_{k=1}^K H_k(z)X(z)$$

або, з урахуванням позначення $V_k(z) = H_k(z)X(z)$:

$$Y(z) = \sum_{k=1}^K V_k(z).$$

Виконавши зворотнє z -перетворення правої та лівої частин, отримаємо відповідне ПФ (5.18) різницевого рівняння:

$$y(n) = \sum_{k=1}^K v_k(n), \quad (7.13)$$

де $V_k(n) = b_{ok}x(n) + b_{1k}x(n-1) - a_{1k}V_k(n-1) - a_{2k}V_k(n-2)$ – що відображається паралельною структурою – паралельним з'єднанням рекурсивних ланок 2-го порядку.

Висновок: якщо ПФ наводиться у вигляді суми ПФ ланок 2-го порядку, дія для всіх ланок буде однаковою, а реакція – дорівнюватиме сумі реакцій окремих ланок, тому структурна схема має вигляд паралельного з'єднання ланок.

На рис. 7.6 зображена паралельна структура з трьох ланок, кожна з яких може мати пряму або одну з двох запропонованих вище прямих канонічних структур.

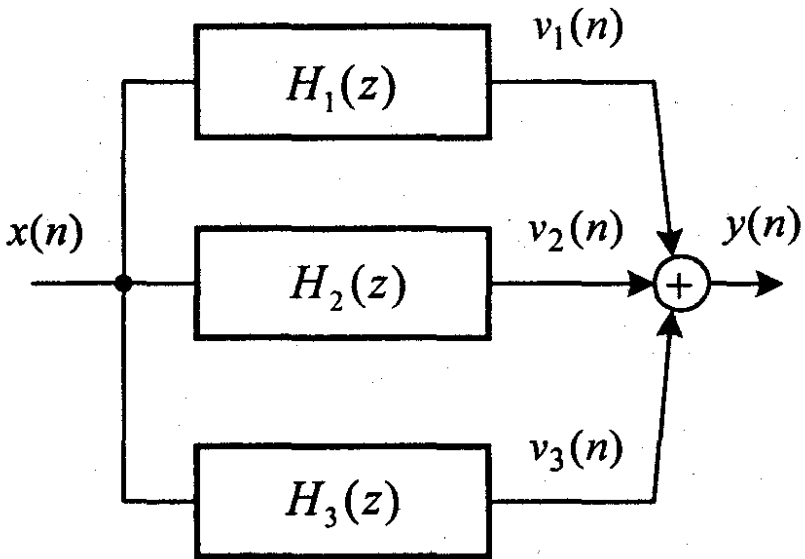


Рис. 7.6. Паралельна структура рекурсивної ЛДС

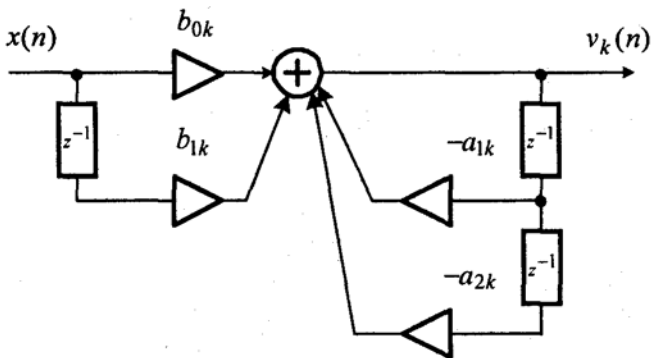


Рис. 7.7. Пряма структура рекурсивної ланки 2-го порядку при паралельній рекурсивній структурі ЛДС

На рис. 7.7 наведений приклад прямої структури ланки 2-го порядку, що описується ПФ (5.11) і РР (5.12).

Аналогічний вигляд мають паралельні структури ЛДС з меншою або більшою кількістю ланок.

7.2. Структури нерекурсивних ЛДС

Структури нерекурсивних ЛДС також вибираються, зважаючи на зображення передавальної функції. На практиці найрозповсюдженими є структури, що відповідають наступним представленням передавальної функції нерекурсивної ЛДС:

- у загальному вигляді (5.24);
- у вигляді добутку з розкладанням на найпростіші множники другого ступеня (5.26).

Пряма структура

Пряма структура базується на зображенні передавальної функції в загальному вигляді (5.24)

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} .$$

Цій ПФ відповідає різницеве рівняння (4.20)

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-1),$$

що відображається прямою структурою (Рис. 7.8).

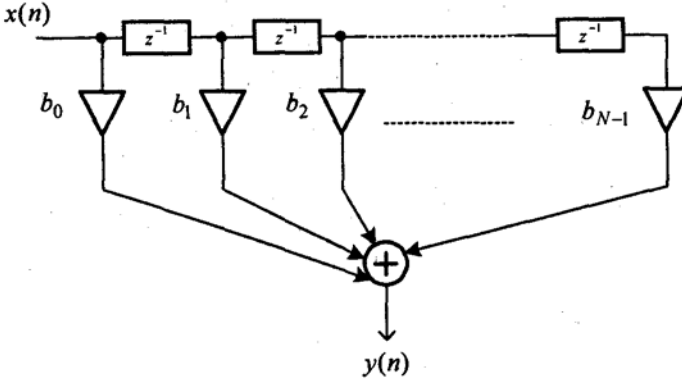


Рис. 7.8. Прямa структура нерекурсивної ЛДС

Каскадна структура

Каскадна структура заснована на представленні передавальної функції (5.14) у вигляді добутку (5.16) з розкладанням на найпростіші множники другого степеня:

$$H(z) = \prod_{i=1}^K H_i(z) = \prod_{i=1}^K (b_{0i} + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}),$$

де коефіцієнти b_{0i}, b_{1i}, b_{2i} – дійсні числа, а K – кількість ланок 2-го

порядку, $K = \frac{M-1}{2}$

Даному зображенню ПФ відповідає система різницевих рівнянь нерекурсивних ланок 2-го порядку :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(n) = b_{01}x(n) + b_{11}x(n-1) + b_{21}x(n-2) \\ v_2(n) = b_{02}v_1(n) + b_{12}v_1(n-1) + b_{21}v_1(n-2) \\ \dots\dots\dots \\ y(n) = b_{0k-1}v_{k-1}(n) + b_{1k-1}v_{k-1}(n-1) + b_{2k-1}v_{k-1}(n-2) \end{array} \right\},$$

що відображається каскадною структурою (аналогічною до рис. 7.5) — послідовним з'єднанням нерекурсивних ланок 2-го порядку (Рис. 7.9).

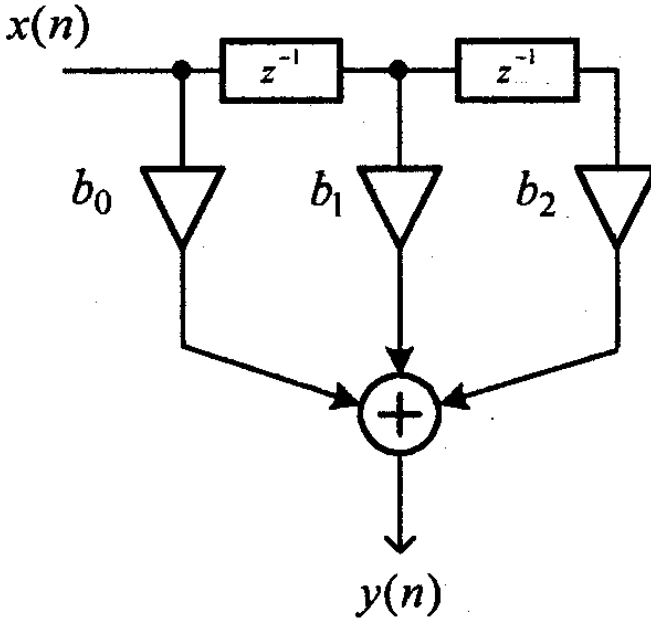


Рис. 7.9. Прямая структура ланки 2-го порядку при каскадній структурі нерекурсивної ЛДС

7.3. Вибір структури

Оскільки одна й та ж сама передавальна функція рекурсивної ЛДС може мати декілька еквівалентних уявлень, виникає питання про вибір структури. Наведемо два найбільш загальних положення:

- при синтезі цифрових фільтрів зображення передавальної функції повністю залежить від вибраного методу синтезу, тим самим тип структури виявляється автоматично визначеним; для рекурсивних цифрових фільтрів звичайно це каскадна або паралельна структура, а для нерекурсивних – пряма;

- при виборі структури окремих ланок і розташуванні ланок у каскадній структурі необхідно мати на увазі, що від цього залежить похибка обчислень.

8. Опис лінійних дискретних систем у просторі станів

Як впливає з попередніх розділів, аналіз ЛДС здійснюється в часовій області або над комплексною z -площиною, включаючи частотні методи. У даний час методи простору станів ототожнюються із сучасною теорією управління, частиною якої можна вважати цифрову обробку сигналів. У широкому значенні метод простору станів при вивченні дискретних систем має ряд позитивних аспектів [1]:

- опис у просторі станів природний і зручний для розв'язання задач на ЕОМ з урахуванням розвитку матричних алгоритмів;
- уніфікується опис цифрових систем із різними типами квантування;
- уніфікується опис одновимірних і багатовимірних дискретних систем;
- можливе застосування до деяких типів нелінійних і нестационарних систем.

У просторі станів неперервна система описується системою диференціальних рівнянь першого порядку, які називаються рівняннями станів. Для дискретних систем рівняння стану — різницеві рівняння першого порядку. Деякі дискретні системи можуть містити аналогові й цифрові елементи, отже, рівняння стану в загальному випадку одночасно складатимуться з диференціальних і різницевих рівнянь першого порядку. Проте не можна вважати, що використання методу простору станів завжди має очевидні переваги. Перевага добре розроблених частотних методів полягає в їх компактності. Тому велика кількість задач аналізу й синтезу систем ЦОС, як і раніше, розв'язується з використанням передавальних функцій.

8.1. Поняття стану

Поняття стану є переважно інтуїтивним і, відповідно, не може бути визначеним більш повно, ніж, наприклад, термін “множина” в математиці. Найбільше, що можна зробити в цьому плані, — це сформулювати властивості, якими повинна володіти система (в нашому випадку дискретна), поведінка якої відповідає поняттю стану. Детермінована (невипадкова) цифрова система може бути визначена у такий спосіб:

1. Існує клас функцій часу, які називаються допустимими входними сигналами.

2. Для кожного моменту часу nT визначена множина $\{x(nT)\}$, елементи якої (nT) є можливими станами.

3. Кожній парі $x(nT)$ і (nT) відповідає принаймні одна функція часу $y(nT)$, яка називається вихідним сигналом.

З цього визначення випливає, що стан системи в кожний момент часу можна описати за допомогою кінцевого набору величин, які називаються змінними стану q_1, q_2, \dots, q_k , що змінюються. Сукупність цих величин утворює вектор стану дискретної системи, якщо за їх допомогою за відомим вхідним сигналом $x(nT)$ можна визначити як вихідний сигнал системи $y(nT)$, так і майбутні значення вектора стану. Таким чином, для того, щоб K -мірний вектор $q = [q_1, \dots, q_k]$ був вектором стану, необхідне існування такої однозначної векторної функції F і такої однозначної скалярної функції векторного аргументу G , де має місце рівність (для нормованого часу):

$$q(n+1) = F(q(n), x(n)); \quad (8.1)$$

$$y(n) = G(q(n), x(n)). \quad (8.2)$$

Сукупність усіх можливих значень вектора станів утворює простір станів даної системи. Зрозуміло, що воно також буде K -мірним.

Приклад 8.1

Нехай дискретна система описується двома змінними q_1 і q_2 , кожна з яких набуває чотирьох цілих значень 0, 1, 2, 3.

У цьому випадку простором станів є множина вузлів двовимірної ґратки розміром 4×4 (Рис. 8.1).

Еволюцію системи в часі можна подати у вигляді ламаної лінії, що сполучає вузли ґратки. Переходи з одного стану в інший відбуваються в дискретні моменти часу.

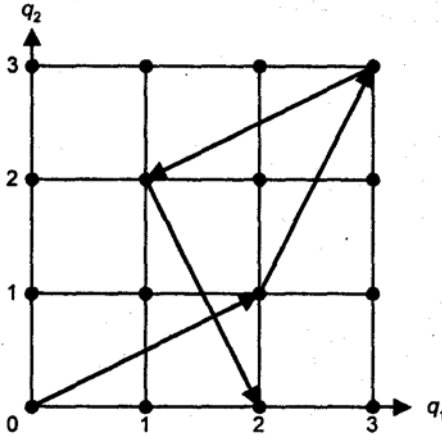


Рис. 8.1. Простір станів двовимірної дискретної системи

При описі систем у просторі станів вводяться поняття керованості й спостережуваності, що дозволяє в ряді випадків охарактеризувати внутрішні властивості системи.

Кінематичну систему називають керованою, якщо існує послідовність вхідних сигналів $x(nT)$, що дозволяє перевести об'єкт з довільного початкового $q(0)$ стану в будь-який кінцевий стан $q(nT)$ за обмежений час, який дорівнює N періодам дискретизації.

Дискретну систему з вихідним сигналом $y(nT)$ називають спостережуваною, якщо довільний стан $q(nT)$ можна визначити, маючи кінцеву кількість відліків вихідного сигналу $y(nT), y((n+1)T), \dots, y((n+N-1)T)$.

8.2. Опис ЛДС на основі структурних схем

Зі співвідношення (4.12) випливає, що в часовій області ЛДС можна описати лінійним різницеvim рівнянням порядку N . Однією з цілей введення простору станів є зниження порядку початкового різницевого рівняння шляхом переходу до системи з N лінійних різницевих рівнянь першого порядку.

Розглянемо пряму канонічну структуру 1 ЛДС другого порядку (Рис. 7.3). Вважається за доцільне вводити змінні стану як сигнали на виходах елементів затримки. Таке введення змінних стану не єдине,

але володіє наочністю, оскільки дозволяє ототожнити кожен змінну з вмістом регістра або елемента пам'яті мікропроцесора, що входить до складу лінії затримки. Зрозуміло, кількість змінних стану буде не менше порядку цифрового ланцюга.

На підставі вищевикладеного вважатимемо, що сигнал $v(n-2)$ збігається зі змінною $q_1(n)$, а сигнал $v(n-1)$ – зі змінною $q_2(n)$ (Рис. 7.3). Після цього пряма канонічна структура 1 набуде певного вигляду (Рис. 8.2).

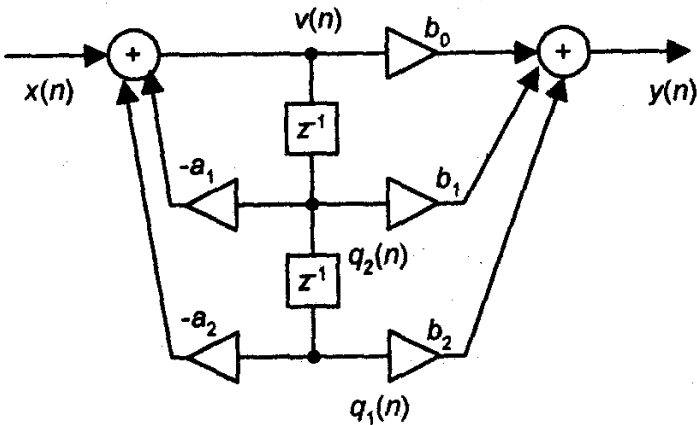


Рис. 8.2. Пряма канонічна структура 1 зі змінними стану

З рисунку видно, що змінна $q_2(n)$ випереджає $q_1(n)$ на один період дискретизації T . Аналогічно проміжна змінна $v(n)$ випереджає $q_1(n)$. Математично в нормованому часі це можна записати таким чином:

$$q_1(n+1) = q_2(n); \quad (8.3)$$

$$q_2(n+1) = v(n). \quad (8.4)$$

Структурна схема свідчить, що проміжна змінна $v(n)$ є алгебраїчною сумою трьох сигналів :

$$v(n) = -a_2 q_1(n) - a_1 q_2(n) + x(n). \quad (8.5)$$

Підставляючи рівняння (8.5) в (8.4) й модифікуючи запис рівняння (8.3), отримаємо систему двох лінійних різницьових рівнянь, що описують часову динаміку змінних стану :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1(n-1) = 0 * q_1(n) + 1 * q_2(n) + x(n) \\ q_2(n+1) = -a_2 q_1(n) - a_1 q_2(n) + 1 * x(n) \end{array} \right\}. \quad (8.6)$$

Переходячи до матричних позначень, можна ввести вектор-стовпчик, який має розмір 2×1 :

$$q(n) = \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix}; \quad (8.7)$$

квадратну матрицю коефіцієнтів розміру 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}; \quad (8.8)$$

матрицю-стовпчик розміру 2×1 :

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (8.9)$$

З урахуванням введених позначень (8.7)–(8.9) систему (8.6) запишемо в наступному вигляді:

$$q(n+1) = Aq(n) + Bx(n). \quad (8.10)$$

Рівняння (8.10) називається матричним рівнянням стану ЛДС другого порядку. Воно, звісно, також буде лінійним.

Отримаємо для тієї ж схеми рівняння для вихідного сигналу $y(n)$. Перш за все зазначимо, що $y(n)$ є алгебраїчною сумою трьох змінних :

$$y(n) = v(n) + b_1 q_2(n) + b_2 q_1(n). \quad (8.11)$$

Із урахуванням (8.5), рівняння (8.11) набуде вигляду:

$$y(n) = (b_2 - b_0 a_2) q_1(n) + (b_1 - b_0 a_1) q_2(n) + b_0 x(n). \quad (8.12)$$

Введемо матрицю-рядок розміром 1×2 :

$$C = [(b_2 - b_0 a_2)(b_1 - b_0 a_1)] \quad (8.13)$$

і для одноманітності — матрицю D , що складається з одного елемента b_0 :

$$D = b_0. \quad (8.14)$$

Із урахуванням (8.13), (8.14) і (8.7), рівняння (8.12) може бути записано в наступному вигляді:

$$y(n) = C * q(n) + D * x(n) \quad (8.15)$$

Рівняння (8.15) називають рівнянням виходу ЛДС. Незважаючи, на те що в рівнянні фігурують вектори й матриці, воно дозволяє знайти скалярний вихідний сигнал $y(n)$.

Неважко показати, що ЛДС із канонічною структурою 1 довільного порядку N описується рівняннями (8.10) і (8.15). Матриці A , B , C і вектор $q(n)$ матимуть розміри $N \times N$, $N \times 1$, $1 \times N$ і $N \times 1$ відповідно. При цьому матриці мають наступні структури:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_N & \dots & -a_2 & \dots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad (8.16)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (8.17)$$

$$C = [(b_N - b_0 a_N)(b_{N-1} - b_0 a_{N-1}) \dots (b_1 - b_0 a_1)]. \quad (8.18)$$

Матриця B відповідає скаляру B_0 .

У випадку нерекурсивних лінійних цифрових систем в рівностях (8.16) і (8.18) слід вважати всі коефіцієнти $a_1 \dots a_n$ такими, що дорівнюють нулю. При цьому опис ЛДС у просторі станів стає тривіальним.

8.3. Визначення рівнянь стану й виходу за передавальною функцією

Рівняння стану й виходу ЛДС з одним входом і одним виходом можуть бути отримані за допомогою розкладання передавальної функції системи на елементарні дроби. Припустимо, що передавальну функцію $H(z)$ можна зобразити у вигляді суми простих дроби першого ступеня:

$$H(z) = \sum_{k=1}^K \frac{C_k}{Z - Z_{*k}} = \sum_{k=1}^K \frac{C_k Z^{-1}}{1 - Z_{*k} Z^{-1}} \quad (8.19)$$

де Z_{*k} — полюси передавальної функції.

На підставі результатів, отриманих в п.7.1.4, можна стверджувати, що розклад (8.19) відповідає зображенню ЛДС у вигляді паралельного з'єднання K рекурсивних ланок першого порядку. Структурна схема, що відповідає подібному зображенню, наведена на рис. 8.3.

Розкладання (8.19) припускає, що ступінь полінома чисельника передавальної функції менше степеня многочлена знаменника і всі полюси Z_{*k} різні. З розпаралелювання структури ЛДС слідує, що всі змінні стану, введені раніше розглянутим способом, стають взаємозалежними. Отже, будь-яке різницеве рівняння типу (8.6) набуває наступного вигляду:

$$q_k(n+1) = Z_k q_k(n) + x(n) \quad (8.20)$$

$$k = 1, 2, \dots, K.$$

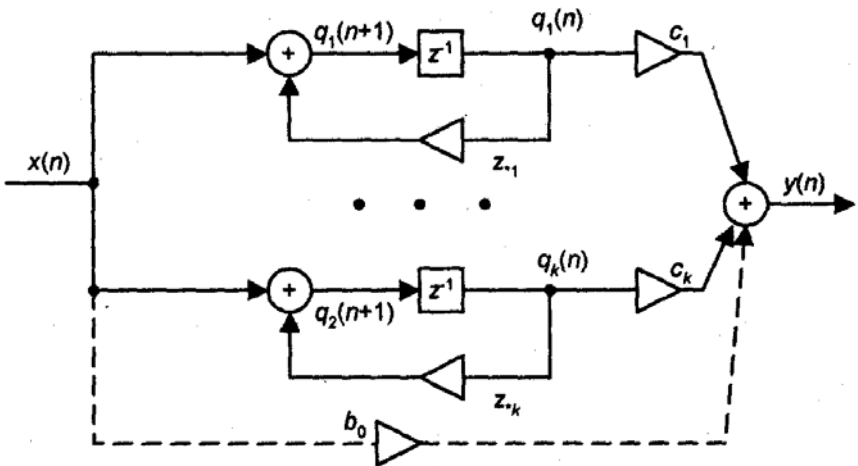


Рис. 8.3. Паралельна структура ЛДС

Вираз (8.20) свідчить про те, що матриця A стає діагональною з числовими значеннями полюсів на головній діагоналі :

$$A = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & Z_k \end{bmatrix}. \quad (8.21)$$

Необхідність подання вхідного сигналу $x(n)$ на всі паралельні гілки схеми перетворює матрицю B у стовпчик, що складається з одиничних елементів:

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (8.22)$$

Матриця C складається з коефіцієнтів C_k в розкладі (8.19):

$$C = [C_1 C_2 \dots C_k]. \quad (8.23)$$

У (8.20) показано, що кожний коефіцієнт C_k може бути знайдений з рівності:

$$C_k = \lim_{Z \rightarrow Z_k} H(z)(Z - Z_k) \quad (8.24)$$

$$Z \rightarrow Z_k$$

$$k = 1, 2, \dots, K.$$

У разі рівності степенів поліномів чисельника і знаменника передавальної функції у схемі (рис. 8.3) з'являється пряма дія вхідного сигналу $x(n)$ на вихід $y(n)$ через коефіцієнт b_0 (пунктирна лінія), де:

$$b_0 = \lim_{Z \rightarrow \infty} H(z) \quad (8.25)$$

$$Z \rightarrow \infty.$$

Приклад 8.2

Зобразити в просторі станів ЛДС другого порядку з передавальною функцією:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1} + 0,06z^{-2}}.$$

Розв'язок

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1} + 0,06z^{-2}} = \frac{-2}{1 - 0,2z^{-1}} + \frac{3}{1 - 0,3z^{-1}}$$

$$Z_1 = 0,2; Z_2 = 0,3$$

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [-2 \quad -3]$$

Структурна схема, відповідно до отриманого розв'язку, наведена на рис. 8.4.

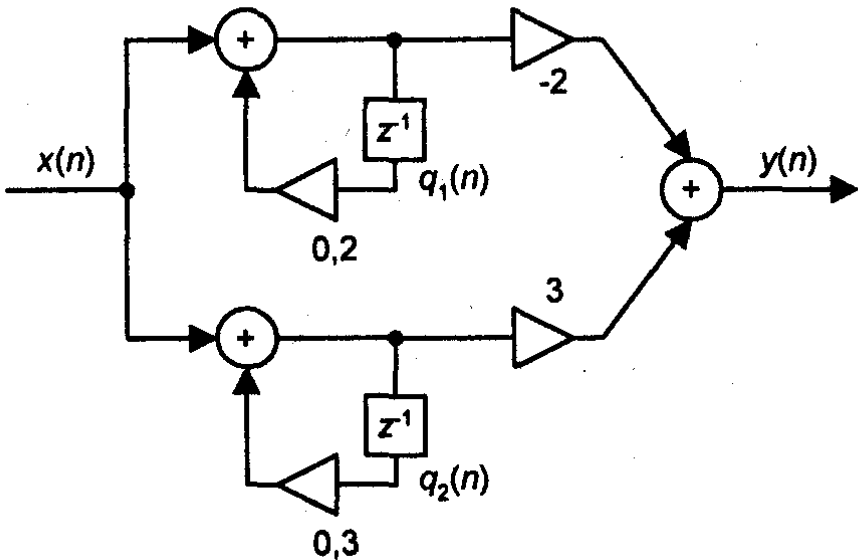


Рис. 8.4. Паралельна структура рекурсивної ланки 2-го порядку

9. Опис дискретних сигналів

Подібно до опису лінійних дискретних систем, дискретні сигнали описуються в трьох областях: часовій, частотній і z -області. У часовій області дискретний сигнал - числова послідовність - описується гратчастою функцією часу $x(nT) = x(n)$.

У z -області дискретний сигнал описується z -зображенням $X(z)$

$$X(z) = Z\{x(n)\}, \quad (9.1)$$

яке визначається за формулою прямого z -перетворення (2.18):

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}. \quad (9.2)$$

Вихідний сигнал $x(n)$ за відомим z -зображенням $X(z)$ знаходиться за допомогою зворотного z -перетворення

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}. \quad (9.3)$$

Розглянемо опис дискретного сигналу в частотній області.

9.1. Опис дискретного сигналу в частотній області: спектр сигналу

У частотній області дискретний сигнал $x(nT)$ описується своїм фур'є-зображенням $X(e^{j\omega T})$, що визначається за формулою прямого перетворення Фур'є (частина перша, п. 2.1.2)

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega Tn} \quad (9.4)$$

або, для нормованої частоти $\hat{\omega}$,

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-j\hat{\omega}n}. \quad (9.5)$$

Фур'є-зображення $X(e^{j\omega T})$ дискретного сигналу називають його спектром.

Вихідний сигнал $x(n)$ за відомим Фур'є-зображенням $X(e^{j\omega T})$ знаходять за допомогою зворотного перетворення Фур'є (частина перша п. 2.1.3)

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega T n} d\omega. \quad (9.6)$$

Як будь-яку комплексну функцію, спектр $X(e^{j\omega T})$ можна зобразити через модуль і аргумент

$$X(e^{j\omega T}) = \left| X(e^{j\omega T}) \right| e^{j \arg\{X(e^{j\omega T})\}} \quad (9.7)$$

Модуль й аргумент спектра часто називають *амплітудним* і *фазовим* спектрами сигналу відповідно.

Приклад 9.1.

Обчислити спектр дискретного сигналу $x(nT) = e^{\alpha n T}$ ($\alpha < 0$). Відповідно до визначення (9.4) знаходимо спектр сигналу

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{(\alpha - j\omega)nT},$$

який має вигляд нескінченної збіжної геометричної прогресії, сума якої дорівнює

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{1 - e^{(\alpha - j\omega)T}},$$

звідки, відповідно до (9.7), визначаємо модуль

$$\left| X(e^{j\omega T}) \right| = \frac{1}{\sqrt{[1 - e^{\alpha T} \cos(\omega T)]^2 + [e^{\alpha T} \sin(\omega T)]^2}}$$

і аргумент

$$\arg(X(e^{j\omega T})) = -\frac{e^{\alpha T} \sin(\omega T)}{1 - e^{\alpha T} \cos(\omega T)}$$

спектра дискретного сигналу $x(nT) = e^{\alpha n T}$.

Порівнюючи z -зображення сигналу (9.2) з його спектром (9.4), легко побачити їх взаємозв'язок

$$X(e^{j\omega T}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}}, \quad (9.8)$$

з цього випливає, що спектр сигналу $X(e^{j\omega T})$ тотожний з його z -зображенням на одиничному колі $e^{j\omega T}$ комплексної z -площини.

9.2. Властивості спектрів дискретних сигналів

Розглянемо основні властивості спектрів дискретних сигналів.

1. Спектр $X(e^{j\omega T})$, а також його модуль і аргумент - *неперервні* функції частоти за визначенням.

2. Спектр $X(e^{j\omega T})$, а також його модуль і аргумент - *періодичні* функції з періодом за частотою, що дорівнює

$$\omega_D = \frac{2\pi}{T}.$$

Доведення періодичності функцій випливає з того, що її аргумент $e^{j\omega T}$ періодичний з періодом за частотою ω , що дорівнює $\frac{2\pi}{T}$

$$e^{j\omega T} = e^{j(\omega \pm \frac{2\pi k}{T})T} = e^{j\omega T} e^{j2\pi k} \equiv e^{j\omega T}.$$

Період за частотою залежно від використовуваної шкали частот дорівнює

$$f \rightarrow f_D$$

$$\omega \rightarrow \omega_D,$$

$$\omega \rightarrow 2\pi.$$

Частина спектра, розташована в *основній смузі частот* (див. розд. 6, частина 1), називається *основним* спектром.

3. Якщо $x(nT)$ - послідовність *дійсних* відліків, то модуль спектра буде *парною*, а аргумент - *непарною* функціями частоти

$$|X(e^{j\omega T})| = |X(e^{-j\omega T})|,$$

$$\arg(X(e^{j\omega T})) = -\arg(X(e^{-j\omega T})).$$

Доведення. Застосувавши формулу Ейлера, запишемо перетворення Фур'є (9.4) у вигляді

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega nT} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\cos(\omega nT) - j\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\sin(\omega nT),$$

або скорочено

$$X(e^{j\omega T}) = \text{Re} - j \text{Im}, \quad (9.9)$$

де Re - парна, а Im - непарна функції частоти, оскільки в першому випадку маємо суму косинусів, а в другому - синусів.

Змінивши знак змінної, $\omega = -\omega$, у (9.9) одержимо:

$$X(e^{-j\omega T}) = \text{Re} + j \text{Im}, \quad (9.10)$$

звідки на підставі (9.9)-(9.10) для модуля й аргументу спектра справедливо записати

$$\left| X(e^{j\omega T}) \right| = \left| X(e^{-j\omega T}) \right| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}, \quad (9.11)$$

$$\arg(X(e^{j\omega T})) = \text{arctg}\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right),$$

$$\arg(X(e^{-j\omega T})) = \text{arctg}\left(\frac{-\text{Im}}{\text{Re}}\right) = -\text{arctg}\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right),$$

звідки

$$\arg(X(e^{j\omega T})) = -\arg(X(e^{-j\omega T})). \quad (9.12)$$

При зміні знака змінної модуль спектра не змінює свого значення, оскільки він є парною функцією частоти. Аргумент спектра, зберігається незмінним за абсолютною величиною, але змінюється за знаком, оскільки, він є непарною функцією частоти.

4. *Лінійність* спектра $X(e^{j\omega T})$ впливає з його визначення як фур'є-зображення (9.4).

Це означає, що якщо дискретний сигнал дорівнює лінійній композиції сигналів

$$x(nT) = a_1 x_1(nT) + a_2 x_2(nT) + \dots,$$

то його спектр дорівнює лінійній композиції відповідних спектрів

$$X(e^{j\omega T}) = a_1 X_1(e^{j\omega T}) + a_2 X_2(e^{j\omega T}) + \dots$$

5. Зміщення (перенесення, зсув) спектра по осі частот ω праворуч на величину ω_0 відповідає множенню вихідної послідовності $x(nT)$ на комплексну експоненту $e^{j\omega_0 nT}$ що символічно можна записати в такий спосіб:

$$X(e^{j\omega T}) \rightarrow x(nT),$$

$$X(e^{j(\omega-\omega_0)nT}) \rightarrow x(nT)e^{j\omega_0 nT}. \quad (9.13)$$

Дійсно, підставивши в праву частину перетворення Фур'є (9.4) сигнал $x(nT)e^{j\omega_0 nT}$, маємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{j\omega_0 nT} e^{-j\omega nT} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{jnT(\omega-\omega_0)} = X(e^{j(\omega-\omega_0)nT}).$$

Аналогічно, зміщення спектра по осі частот ω *ліворуч* на величину ω_0 відповідає множенню вихідної послідовності $x(nT)$ на $e^{-j\omega_0 nT}$, що символічно можна записати у такий спосіб:

$$X(e^{j\omega T}) \rightarrow x(nT),$$

$$X(e^{j\omega T}) \rightarrow x(nT)e^{-j\omega_0 nT}. \quad (9.14)$$

При цьому модуль й аргумент спектра *комплексного* сигналу втратили властивість парності й непарності відповідно.

Дійсно, застосувавши формулу Ейлера, запишемо перетворення Фур'є (9.4) комплексного сигналу у такому вигляді:

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-j(\omega-\omega_0)nT} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cos(\omega - \omega_0)nT - j \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \sin(\omega - \omega_0)nT,$$

звідки модуль і аргумент дорівнюють

$$\left| X(e^{j(\omega-\omega_0)T}) \right| = \sqrt{\left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cos(\omega - \omega_0)nT \right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \sin(\omega - \omega_0)nT \right]^2}$$

$$\arg(X(e^{j\omega T})) = \operatorname{arctg} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \sin(\omega + \omega_0)nT}{\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cos(\omega - \omega_0)nT}$$

Змінивши знак змінної, $\omega = -\omega$ отримаємо наступні вирази для модуля й аргументу спектра:

$$\left| X(e^{j(\omega-\omega_0)T}) \right| = \sqrt{\left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cos(\omega - \omega_0)nT \right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \sin(\omega - \omega_0)nT \right]^2}$$

$$\arg(X(e^{j\omega T})) = \arctg \frac{\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \sin(\omega + \omega_0)nT}{\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cos(\omega - \omega_0)nT}$$

Оскільки модуль і аргумент спектра при зміні знака змінної змінили своє значення, ці функції не є а ні парними, а ні непарними функціями частоти (порівняйте з (9.11) - (9.12)).

6. Зсув сигналу $x(nT)$ на m відліків праворуч (затримка сигналу) відповідає множенню його спектра $X(e^{j\omega T})$ на комплексну експоненту $e^{-j\omega mT}$, що символічно можна записати в такий спосіб:

$$\begin{aligned} x(nT) &\rightarrow X(e^{j\omega T}), \\ x[(n-m)T] &\rightarrow X(e^{j\omega T})e^{-j\omega mT}. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Доведення цієї властивості впливає із взаємозв'язку (9.8) спектра дискретного сигналу і його z -зображення й теорему про затримку.

Значимо, що затримка сигналу призводить до зміни тільки аргументу спектра, що одержує лінійний приріст:

$$\arg(X(e^{j\omega T})) - \omega mT.$$

7. Рівність (теорема) Парсваля встановлює зв'язок між енергією дискретного сигналу, обчисленою в часовій і частотній областях:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)|^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} |X(e^{j\omega T})|^2 d\omega, \quad (9.16)$$

де $\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)|^2$ - енергія сигналу, обчислена в часовій області;

$\frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} |X(e^{j\omega T})|^2 d\omega$ - енергія сигналу, обчислена в частотній області.

9.3. Зв'язок між спектрами аналогового й дискретного сигналів

Нехай $x_a(t)$ є аналоговий сигнал $x_a(t)$ і сигнал, отриманий у результаті його дискретизації - $x(nT)$. Визначимо зв'язок між спектрами даних сигналів. Аналоговий сигнал $x_a(t)$ і його спектр (фур'є-зображення) $X_a(j\omega)$ пов'язані між собою перетворенням Фур'є (2.6)-(2.7):

$$X_a(j\omega) = \int_0^{\infty} x_a(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (9.17)$$

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (9.18)$$

де $x_a(t) = 0$ при $t < 0$.

Спектр дискретного сигналу $X(e^{j\omega T})$ визначається за допомогою перетворення Фур'є (9.4).

Виконавши в (9.18) заміну $t \rightarrow nT$, запишемо:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) e^{j\omega nT} d\omega.$$

Обчислення інтеграла на інтервалі $[-\infty; \infty]$ можна замінити тожним обчисленням нескінченної суми $\sum_{m=-\infty}^{\infty}$ інтегралів на рівних інтервалах $\Delta\omega$. Вибравши $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$, виконаємо відповідну заміну

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{(2m-1)\frac{\pi}{T}}^{(2m+1)\frac{\pi}{T}} X_a(j\omega) e^{j\omega nT} d\omega,$$

де m - номер інтервалу, а $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ (див. Рис. 9.1).

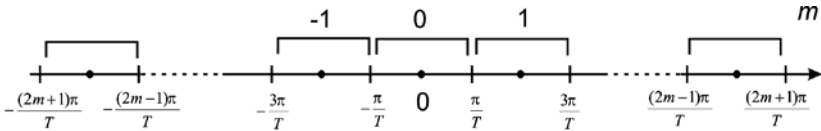


Рис. 9.1. Нескінченна послідовність інтервалів

Обчислення інтегралу $\int_{(2m-1)\frac{\pi}{T}}^{(2m+1)\frac{\pi}{T}}$ зі змінними межами, але

незалежною від m підінтегральною функцією $X_a(j\omega)$ можна замінити обчисленням інтегралу з фіксованими межами $\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}$, але залежною від m підінтегральною функцією $X_a[(j(\omega + m\frac{2\pi}{T}))]$, яка відповідає спектру, зміщеному по осі частот на $m\frac{2\pi}{T}$, де $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (див. Рис. 9.1). Тому останню рівність можна переписати у вигляді

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_a[j(\omega + m\frac{2\pi}{T})] e^{j\omega nT} d\omega,$$

або, змінивши порядок сумування і інтегрування,

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a[j(\omega + m\frac{2\pi}{T})] e^{j\omega nT} d\omega$$

Порівнюючи отриманий вираз з оберненим перетворенням Фур'є (9.6), одержуємо шуканий зв'язок між спектрами аналогового й дискретного сигналів:

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a[j(\omega + m\frac{2\pi}{T})], \quad (9.19)$$

що дозволяє стверджувати, що спектр дискретного сигналу дорівнює (з точністю до постійного множника $\frac{1}{T}$) сумі спектрів аналогового сигналу, зміщених по осі частот на всі можливі частоти, кратні частоті дискретизації $m\omega_D = m\frac{2\pi}{T}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Інакше кажучи, спектр дискретного сигналу є нескінченним рядом копій спектрів аналогового сигналу, зміщених одна відносно одної на частоту дискретизації ω_D .

Дослідимо вплив частоти дискретизації ω_D на співвідношення між спектрами (9.19), припускаючи, що спектр $X_a(j\omega)$ аналогового сигналу обмежений верхньою частотою $\omega_B = 2\pi f_B$.

На рис. 9.2 наведені умовні графіки модулів спектрів, що відповідають аналоговому сигналу з фінітним спектром (див. рис. 9.2, а) і дискретному сигналу із частотами дискретизації: $\omega_D = 2\omega_B$ (див. рис. 9.2, б), $\omega_D > 2\omega_B$ (див. рис. 9.2, в), $\omega_D < 2\omega_B$ (див. рис. 9.2, г), де $\omega_D = 2\pi f_D = \frac{2\pi}{T}$.

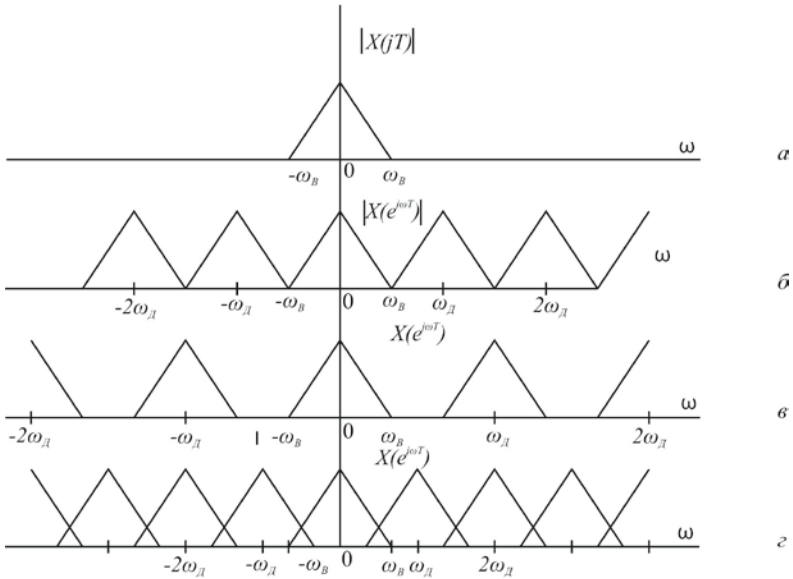


Рис. 9.2. Зв'язок між спектрами аналогового й дискретного сигналів

Наведені графіки дозволяють зробити наступні висновки:

1. Якщо частота дискретизації $\omega_D \geq 2\omega_B$, то в основній смузі частот $[0; \frac{\omega_D}{2}]$ спектри аналогового й дискретного сигналів збігаються.

2. Якщо частота дискретизації $\omega_D < 2\omega_B$, то відбувається накладання спектрів, назване *елайсінгом* (*aliasing*), тому в основній смузі частот $[0; \frac{\omega_D}{2}]$ спектр дискретного сигналу являє собою перевернутий спектр аналогового сигналу.

Даний результат підтверджується теоремою Котельникова: аналоговий сигнал з фінітним спектром повністю визначається послідовністю своїх відліків, узятих з інтервалом $T \leq \frac{1}{2f_B}$ (частотою $f_D \geq 2f_B$), де f_B – верхня частота спектра аналогового сигналу.

У реальних системах зв'язку вихідний аналоговий сигнал може виявитися смуговим або вузькосмуговим із фінітним спектром, зосередженим у смузі $f_H \leq f \leq f_B$, де нижня частота $f_H \neq 0$ (див. рис. 9.3). У подібних випадках частота дискретизації за Котельниковим $f_D \geq 2f_B$ буде надлишковою і її можна вибрати з умови $f_D \geq 2(f_B - f_H)$; докладно про це можна прочитати в праці [1].

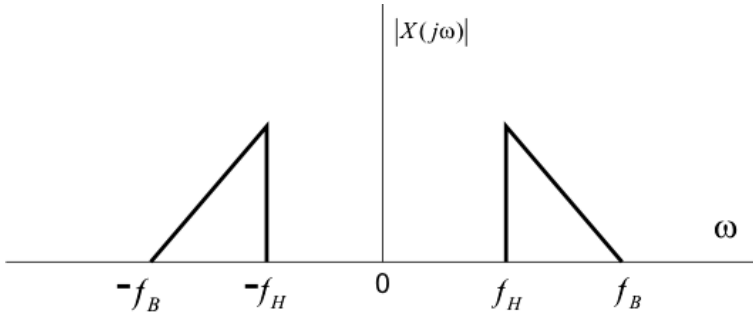


Рис. 9.3. Модуль спектра смугового сигналу.

Вибираючи частоту дискретизації, варто пам'ятати, що чим вона вища, тим більш жорсткі вимоги висуваються до швидкодії цифрового сигнального процесора, на базі якого реалізується алгоритм цифрової обробки сигналів. Величина періоду дискретизації T обмежує час циклу обробки $\Delta t_{\text{циклу}}$, що не повинен перевищувати інтервалу між двома сусідніми відліками сигналу $\Delta t_{\text{циклу}} \leq T$.

9.4. Перетворення спектра

Під час обробки сигналів виникає ряд задач, пов'язаних з перетворенням спектра сигналу, зокрема, з його зсувом по осі частот. Такі задачі типові для систем багатоканального зв'язку при формуванні групового сигналу із частотним розподілом каналів (ЧРК) з окремих каналних сигналів або при виділенні окремих каналних сигналів із групового сигналу з ЧРК. Особливістю перетворення спектра в цьому випадку є те, що модуль спектра практично не змінюється, а лише зміщується по осі частот.

У даному пункті розглядається можливість перетворення спектра методами цифрової обробки. Попередньо підкреслимо, що

термінологія "перетворення спектра", прийнята через її стислість, у дійсності, зрозуміло, перетворюється *сигнал*, внаслідок чого змінюється його спектр.

9.4.1. Перенесення спектра

Розглянемо, які операції з дійсним або комплексним сигналом варто виконати, для того щоб спектри даних сигналів виявилися зміщеними по осі частот.

Перенесення спектра дійсного сигналу

Нехай є дійсний дискретний сигнал $x(nT)$ і відомий його основний спектр $X(e^{j\omega T})$, що займає смугу $[\omega_1; \omega_2]$ (див. рис. 9.4, а). Потрібно за допомогою зміни сигналу змістити його спектр по осі частот на деяку частоту $\pm \omega_0$, вибрану з умови $0 < (\omega_0 + \omega_2) \leq \frac{\omega_D}{2}$.

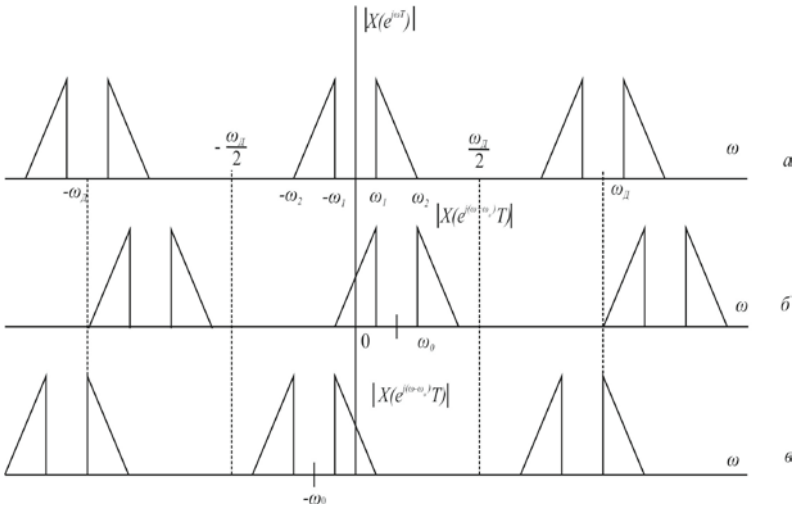


Рис. 9.4. Перенесення спектра дійсного сигналу

Ознакою дійсного сигналу є симетрія модуля спектра $X(e^{j\omega T})$ відносно осі ординат (див. п. 9.3). На рис. 9.4, б, в зображені спектри $|X(e^{j(\omega-\omega_0)T})|$ та $|X(e^{j(\omega+\omega_0)T})|$, зміщені по вісі частот на частоту ω_0 праворуч та ліворуч відповідно.

Відповідно до властивостей спектрів, зміщення спектра $X(e^{j\omega T})$ по осі частот на ω_0 *праворуч* або *ліворуч* реалізується множенням сигналу $x(nT)$ на дискретну експоненту $e^{j\omega_0 nT}$ або $e^{-j\omega_0 nT}$, що символічно можна записати так:

$$x(nT)e^{j\omega_0 nT} \rightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)T}), \quad (9.20)$$

$$x(nT)e^{-j\omega_0 nT} \rightarrow X(e^{j(\omega+\omega_0)T}), \quad (9.21)$$

На рис. 9.5, а, б подано схеми, що відображають операції з вихідним *дійсним* сигналом $x(nT)$, виконання яких призводить до зміщення спектра $X(e^{j\omega T})$ *праворуч* на частоту ω_0 . Вихідний комплексний сигнал $y(nT) = x(nT)e^{j\omega_0 nT}$ (див. рис. 9.5, б) містить дійсну й уявну складові

$$y(nT) = y_1(nT) + jy_2(nT) = x(nT)\cos(\omega_0 nT) + jx(nT)\sin(\omega_0 nT) \quad (9.22)$$

та має спектр

$$Y(e^{j\omega T}) = X(e^{j(\omega-\omega_0)T}).$$

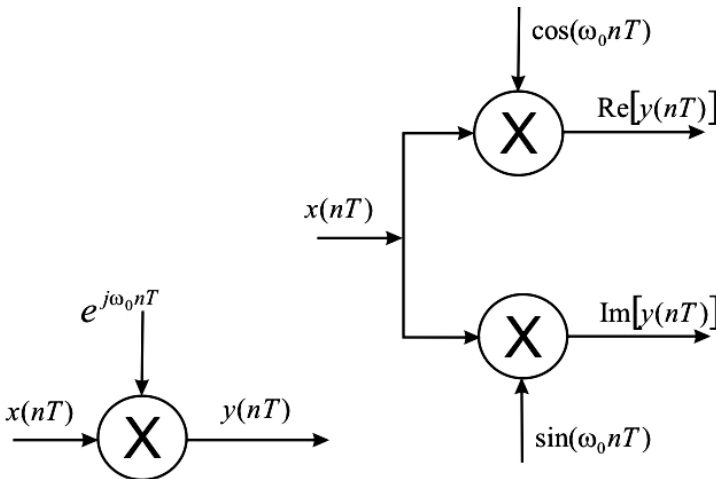


Рис. 9.5. Формування сигналу при перенесенні спектра (вихідний сигнал - дійсний)

Ознакою того, що сигнал $y(nT)$ – комплексний, слугує відсутність симетрії модуля спектра $|X(e^{j(\omega-\omega_0)T})|$ відносно осі ординат (див. рис. 9.4, б).

Перенесення спектра комплексного сигналу

Перенесення спектрів дійсного й комплексного сигналів принципово нічим не відрізняється, за винятком того, що при вихідному комплексному сигналі

$$x(nT) = x_1(nT) + jx_2(nT) \quad (9.23)$$

формування результуючого сигналу $y(nT)$ (9.24) потребує виконання більшої кількості операцій, а саме:

$$\begin{aligned} y(nT) &= y_1(nT) + jy_2(nT) = (x_1(nT) + jx_2(nT))e^{j\omega_0 nT} = \\ &= (x_1(nT) + jx_2(nT))(\cos(\omega_0 nT) + j \sin(\omega_0 nT)) = \\ &= \underbrace{(x_1(nT) \cos(\omega_0 nT) - x_2(nT) \sin(\omega_0 nT))}_{\text{Re}(y(nT))} + \\ &+ \underbrace{j(x_1(nT) \sin(\omega_0 nT) + x_2(nT) \cos(\omega_0 nT))}_{\text{Im}(y(nT))}. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Схему формування сигналу $y(nT)$ (9.24) наведено на Рис. 9.6.

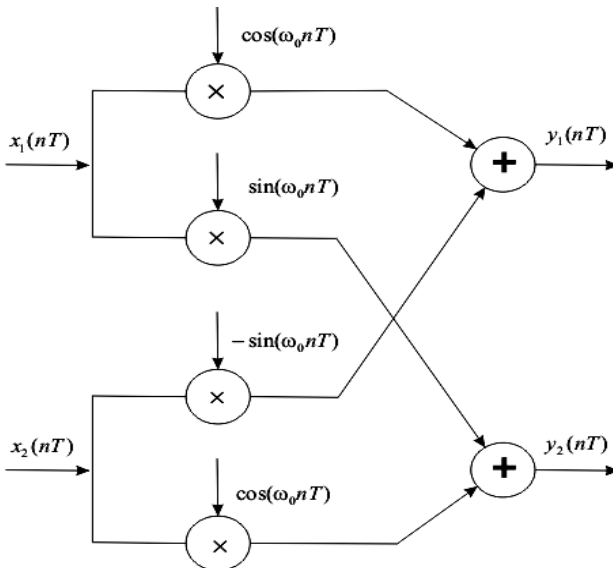


Рис. 9.6. Формування сигналу при перенесенні спектра (вихідний сигнал - комплексний).

9.4.2. Інверсія спектра дійсного сигналу

Для ряду практичних додатків, наприклад при виділенні нижньої бічної смуги, становить інтерес операція *інверсії спектра*. Її зміст полягає в тому, що в *основній* смугі частот будь-яка складова вихідного модуля спектра на частоті $\hat{\omega}_0$ повинна опинитися на "протилежній" частоті $(\pi - \hat{\omega}_0)$, що символічно можна записати в такий спосіб (див. рис. 9.7, а, б):

$$\hat{\omega}_0 \rightarrow (\pi - \hat{\omega}_0),$$
$$\left| X(e^{j\hat{\omega}_0}) \right| \rightarrow \left| X(e^{j(\pi - \hat{\omega}_0)}) \right|.$$

Покажемо, як операція інверсії модуля спектра може бути реалізована за допомогою зсуву спектра по осі частот праворуч на частоту $\hat{\omega}_0 = \pi$.

Спектр $X(e^{j(\hat{\omega} - \pi)})$, отриманий у результаті зсуву вихідного спектра $X(e^{j\hat{\omega}})$, відображений через модуль і аргумент (9.7), має вигляд

$$X(e^{j(\hat{\omega} - \pi)}) = \left| X(e^{j(\hat{\omega} - \pi)}) \right| e^{j \arg(X(e^{j(\hat{\omega} - \pi)}))}$$

звідки на підставі парності модуля й непарності аргументу спектра (див. п. 9.3) впливає

$$X(e^{j(\hat{\omega} - \pi)}) = \left| X(e^{j(\pi - \hat{\omega})}) \right|,$$

$$\arg(X(e^{j(\hat{\omega} - \pi)})) = -\arg(X(e^{j(\pi - \hat{\omega})})).$$

Таким чином, зсув спектра праворуч на частоту $\hat{\omega}_0 = \pi$ автоматично призводить до інверсії модуля й аргументу спектра при одночасній зміні знака останнього (див. рис. 9.7, б).

З огляду на відповідність (9.24) між зміщеним спектром і сигналом

$$x(nT)e^{jm} \rightarrow X(e^{j(\hat{\omega}-\pi)T}),$$

запишемо сигнал, що породжує інверсний спектр:

$$x(nT)e^{jm} = x(nT)\cos(\pi n) = x(nT)(-1)^n.$$

Отже, зрозуміло, що для інверсії спектра досить змінити знак кожного другого (парного) відліку вихідного сигналу $x(nT)$ (див. рис. 9.7, в, г і рис. 9.8).

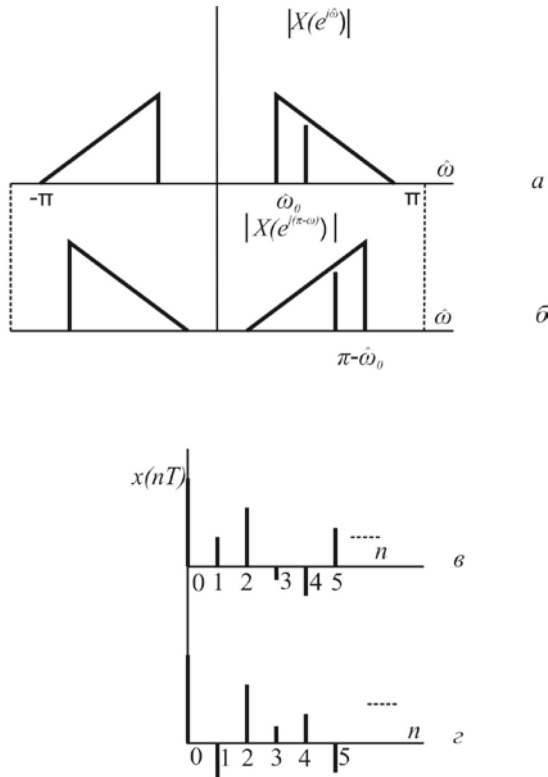


Рис. 9.7. Інверсія спектра дійсного сигналу

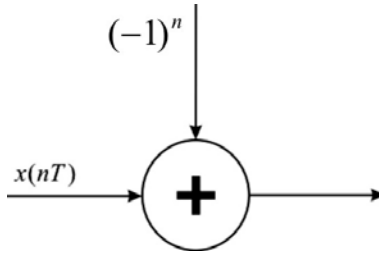


Рис. 9.8. Формування сигналу з інверсним спектром

9.4.3. Формування сигналу з однією бічною смугою

Як відомо, при звичайній амплітудній модуляції отримується спектр із двома бічними смугами відносно певної несучої частоти [1]. Для техніки зв'язку великий інтерес являють сигнали, спектри яких містять тільки одну бічну смугу (ОБС) - сигнали з ОБС. Таке завдання виникає, наприклад, у багатоканальному зв'язку із ЧРК при формуванні групового сигналу, коли в заданій смузі частот потрібно передати максимальну кількість окремих каналних сигналів.

Розглянемо процедуру одержання сигналу з ОБС.

Модуль спектра $|X(e^{j\omega T})|$ вихідного дійсного сигналу $x(nT)$ має дві бічні смуги, симетричні відносно несучої частоти ω_0 (див. рис. 9.9, а). Потрібно одержати сигнал з ОБС, що означає перетворити сигнал $x(nT)$ так, щоб його спектр містив тільки одну бічну смугу. Для прикладу виділимо верхню бічну смугу $[\omega_1; \omega_2]$, позначену на графіку.

Поставлене завдання реалізується в результаті виконання наступних операцій зі спектром $X(e^{j\omega T})$ вихідного сигналу $x(nT)$:

1. Зміщення спектра $X(e^{j\omega T})$ по осі частот *ліворуч* на частоту ω_* , що дорівнює $\omega_* = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$, таким чином, що верхня бічна смуга виявляється поділеною віссю ординат навпіл.

У результаті операції зміщення маємо спектр (див. рис. 9.9, б)

$$Y_1(e^{j\omega T}) = X(e^{j(\omega + \omega_*)nT}),$$

який відповідає комплексному сигналу (див. рис. 9.10, а)

$$y_1(nT) = x(nT)e^{-j\omega_0 nT}.$$

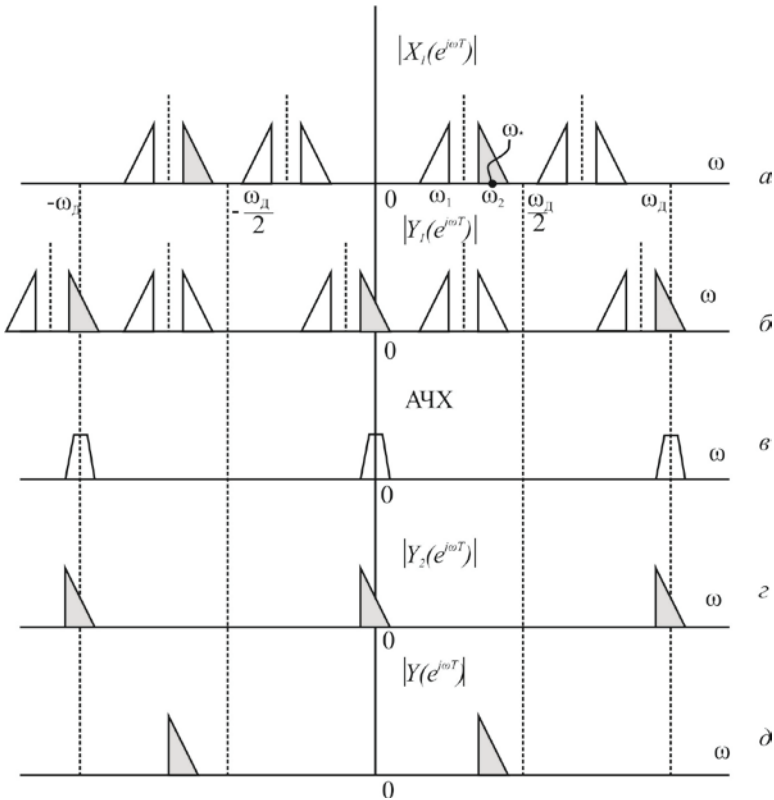


Рис. 9.9. Операції при отриманні сигналу з ОБС

Формування дійсної $\text{Re}(y_1)$ та уявної $\text{Im}(y_1)$ частин комплексного сигналу $y(nT)$ зображено на рис. 9.10, б.

2. Виділення зміщеної верхньої бічної смуги спектра $Y_1(e^{j\omega nT})$ за допомогою фільтра нижніх частот (ФНЧ), ідеальна АЧХ якого зображена на рис. 9.9, в.

Зміщення спектра в область нижніх частот дозволяє замість складного смугового фільтра використати істотно більш простий ФНЧ.

Фактично фільтрація виконується двома ФНЧ, окремо для дійсної $\text{Re}(y_1)$ й уявної $\text{Im}(y_1)$ частин сигналу $y(nT)$. Ширина смуги пропускання ФНЧ в основній смузі частот дорівнює $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$.

На виході ФНЧ маємо комплексний сигнал $y_2(nT)$ (див. рис. 9.10, а, б) із спектром $Y_2(e^{j\omega T})$ (див. рис. 9.9, г).

3. Зміщення спектра $Y_2(e^{j\omega T})$ по осі частот праворуч на частоту ω_* - повернення у вихідне положення, у результаті чого маємо спектр $Y(e^{j\omega T}) = Y_2(e^{j(\omega - \omega_*)nT})$ з ОБС (див. рис. 9.9, д), що відповідає сигналу $y(nT) = y_2(nT)e^{j\omega_*nT}$ (див. рис. 9.10, а).

Схема формування сигналу $y(nT)$ (див. рис. 9.10, б) збігається із зображеною на рис. 9.6.

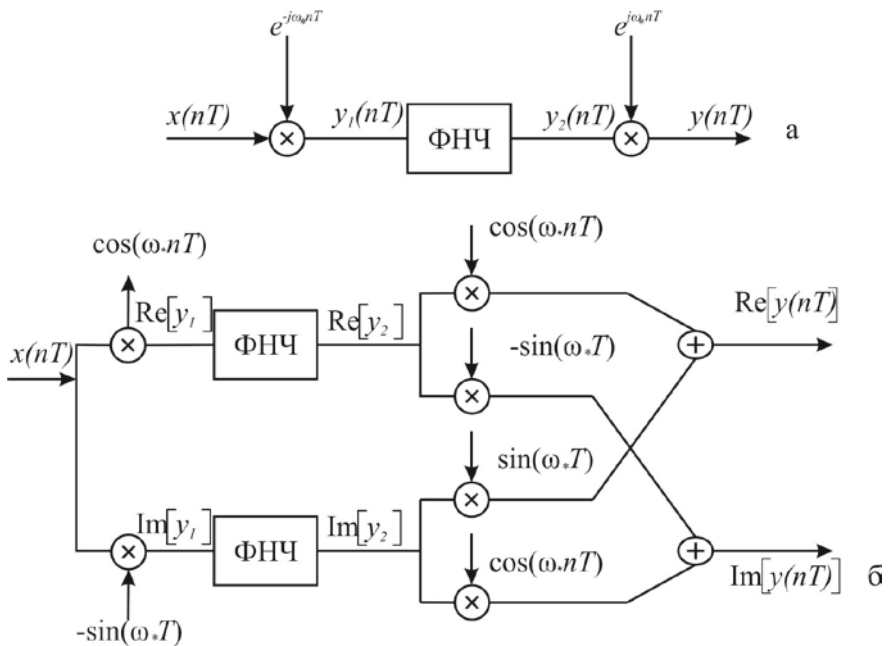


Рис. 9.10. Формування сигналу з ОБС

10. Дискретне перетворення Фур'є

У попередньому розділі введено визначення спектра дискретного сигналу $x(nT)$ як його Фур'є-зображення (9.4)

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega Tn},$$

де $x(nT)$ - у загальному випадку нескінченна послідовність, $X(e^{j\omega T})$ - спектр послідовності - неперервна періодична функція частоти ω із періодом, що дорівнює частоті дискретизації ω_d

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T}. \quad (10.1)$$

Дане визначення спектра зберігається й для кінцевих послідовностей, якщо змінити верхню межу суми у формулі (9.4)

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-j\omega Tn}, \quad (10.2)$$

де N - довжина, а NT - тривалість кінцевої послідовності.

У даному розділі буде розглядатися алгоритм обчислення неперервного спектра $X(e^{j\omega T})$ (10.1) у дискретних точках на періоді ω_d . Цей алгоритм базується на використанні дискретного перетворення Фур'є (ДПФ).

Поняття ДПФ спочатку було введено для подання в частотній області періодичних послідовностей, тому з них і почнемо.

10.1. Дискретне перетворення Фур'є періодичної послідовності

Як відомо, аналоговий періодичний сигнал $x_p(t)$ із періодом T_s може бути зображений рядом Фур'є (частина 1, п. 2.1.1)

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k)e^{jk\Delta\omega t}, \quad (10.3)$$

де $\Delta\omega$ - період дискретизації за частотою ω ,

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_s}; \quad (10.4)$$

$X_p(k)$ - коефіцієнти Фур'є

$$X_p(k) = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} x_p(t) e^{-jk\Delta\omega t} dt. \quad (10.5)$$

Множину коефіцієнтів Фур'є $X_p(k)$ ряду (10.3) називають *спектром* періодичного сигналу $x_p(t)$, а самі коефіцієнти – комплексними гармоніками на частотах $k\Delta\omega = k \frac{2\pi}{T_s}$.

Аналогічно *дискретний* періодичний сигнал $x_p(nT)$ з періодом NT

$$x_p(nT) = x_p(nT \pm mNT), m = 0, 1, \dots$$

можна відобразити рядом Фур'є, подібним (10.3)

$$x_p(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_p(k) e^{jk\Delta\omega nT}, n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (10.6)$$

де неперервний час, замінений дискретним

$$t \rightarrow nT,$$

а період за t - періодом за nT

$$T_s \rightarrow NT,$$

у результаті чого період за частотою $\Delta\omega$ (10.4) дорівнює

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{NT}. \quad (10.7)$$

Для нормованого часу ряд Фур'є (10.6) записується у вигляді

$$x_p(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad (10.8)$$

де k - номер відліку в частотній області, що відповідає абсолютним значенням частоти ω , що дорівнює

$$k\Delta\omega = k \frac{2\pi}{NT}. \quad (10.9)$$

Порівняємо ряди Фур'є (10.3) і (10.8) і проаналізуємо особливості ряду (10.8). Легко бачити, що в (10.8) комплексна

експонента $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ - періодична функція, за змінними n і k , причому періоди однакові й дорівнюють N :

$$e^{j\frac{2\pi}{N}k(n\pm mN)} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} e^{\pm j2\pi km} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad (10.10)$$

$$e^{j\frac{2\pi}{N}n(k\pm mN)} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk} e^{\pm j2\pi mn} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad (10.11)$$

З періодичності комплексної експоненти $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ за змінною k (10.11) впливає періодичність коефіцієнтів Фур'є $X_p(k)$ з періодом N , а значить, нескінченні межі суми в (10.8) можливо й доцільно замінити кінцевими, у результаті чого сигнал буде зображений *частковою сумою* перших N членів ряду Фур'є:

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n=0,1,\dots,N-1, \quad (10.12)$$

де $X_p(k)$ - коефіцієнти Фур'є на періоді за змінною k .

Множину коефіцієнтів Фур'є $X_p(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ ряду (10.12) називають спектром періодичної послідовності $x_p(n)$, а самі коефіцієнти - комплексними гармоніками на частотах $k\Delta\omega$ (10.9).

Одержимо вираз для коефіцієнтів Фур'є $X_p(k)$ в (10.12). Властивість періодичності цих коефіцієнтів дозволяє зобразити їх рядом Фур'є, симетричним ряду (10.6) (див. п. 2.1. 3), що базується на взаємозамінності незалежних змінних часу й частоти в перетвореннях Фур'є. Запишемо ряд Фур'є (2.12) для подання періодичної функції $X_p(k)$, замінивши в (2.12) неперервну частоту ω на номер відліку k в частотній області:

$$\omega \rightarrow k,$$

а період за ω - на період за k

$$\omega_s \rightarrow N.$$

У результаті чого період за часом Δt (2.13) буде дорівнювати

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{N}, \quad (10.13)$$

і ряд Фур'є (2.12) набуде вигляду

$$X_p(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad (10.14)$$

де відліки послідовності $x_p(n)$ є коефіцієнтами Фур'є ряду (10.14).

Аналогічно періодичність комплексної експоненти $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ за часом n (10.10) і періодичність послідовності $x_p(n)$ дозволяють від нескінченних меж суми ряду (10.14) перейти до кінцевих меж, у результаті чого буде отримана часткова сума перших N членів ряду Фур'є, симетрична (10.12):

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k=0,1,\dots,N-1. \quad (10.15)$$

Зауваження

У технічній літературі з ЦОС часткові суми у виразах (10.12), (10.15) іноді називають дискретним рядом Фур'є, очевидно, внаслідок перекладу "Discrete Fourier series", де прикметник "discrete" має значення "частковий".

Пари перетворень (10.12) і (10.15) будуть взаємно однозначними, якщо в перетворення (10.12) додати коефіцієнт пропорційності $\frac{1}{N}$:

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n=0,1,\dots,N-1. \quad (10.16)$$

Для того, щоб у цьому переконатися, підставимо в праву частину рівності (10.16) значення $X_p(k)$ з (10.15), замінивши, щоб уникнути плутанини, у правій частині формули (10.15) індекс n на m :

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_p(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} \right] e^{j\frac{2\pi}{N}nk}.$$

Змінімо порядок сумування

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_p(m) \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)}. \quad (10.17)$$

Обчислимо внутрішню суму. При $m = n$ вона дорівнює N

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j0} = N,$$

а при $m \neq n$ відповідно до формули для суми геометричної прогресії кінцевої довжини

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)} = \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(n-m)N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(n-m)}} = \frac{1 - e^{j2\pi(n-m)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(n-m)}},$$

вона дорівнює нулю, оскільки чисельник дорівнює нулю.

Отже, зовнішня сума в (10.17) містить тільки один відмінний від нуля доданок при $m=n$ і дорівнює $x_p(m)$, тому рівність (10.17) перетвориться в тотожність:

$$x_p(n) = x_p(m) \Big|_{n=m}.$$

Дискретним перетворенням Фур'є (ДПФ) періодичної послідовності $x_p(n)$ називається наступна пара взаємно однозначних перетворень:

$$\text{прямого } X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k=0,1,\dots,N-1, \quad (10.18a)$$

$$\text{зворотного } x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n=0,1,\dots,N-1, \quad (10.18б)$$

де пряме ДПФ - часткова сума (10.15); зворотне ДПФ (ОДПФ) - часткова сума (10.16); $X_p(k)$ - коефіцієнти ДПФ, що часто називаються просто ДПФ.

Зміст ДПФ періодичної послідовності полягає в наступному:

1. Коефіцієнти ДПФ $X_p(k)$ і спектр періодичної послідовності - поняття тотожні.
2. Спектр $X_p(k)$ періодичної послідовності $x_p(n)$ є періодична послідовність із тим же періодом N у частотній області.
3. Коефіцієнти ДПФ $X_p(k)$ забезпечують точне відновлення періодичної послідовності $x_p(n)$.

10.2. Дискретне перетворення Фур'є кінцевої послідовності

Перейдемо до розгляду алгоритму обчислення неперервного спектра (10.2) кінцевої послідовності в дискретних точках. Необхідність такого алгоритму зумовлена тим, що ЦОС передбачає обробку цифрових сигналів засобами цифрової обчислювальної техніки.

З огляду на властивість періодичності спектра $X(e^{j\omega T})$, доцільно його розраховувати в дискретних точках на періоді $\omega_D = \frac{2\pi}{T}$. Залишається з'ясувати питання про кількість точок, адже

їхня недостатність може призвести до втрати важливої інформації, а надмірність - до невиправданого зростання обсягу обчислень.

Відповідь на запитання про необхідну й достатню кількість дискретних точок неперервного спектра дає теорема Котельникова для відліків у частотній області, симетрична теоремі для відліків у часовій області й сформульована на підставі взаємозамінності незалежних змінних t і ω в перетвореннях Фур'є.

Нагадаємо суть теореми Котельникова в часовій області: аналоговий сигнал (неперервна функція) з кінцевим спектром повністю визначається послідовністю своїх відліків, узятих з

інтервалом $T \leq \frac{1}{2f_s}$, де f_s – верхня (максимальна) частота спектра аналогового сигналу.

Зробимо необхідну заміну змінних:

ширину $2\omega_B$ кінцевого спектра на інтервалі $[-\omega_B; \omega_B]$ замінимо на тривалість NT кінцевого сигналу (послідовності)

$$2\omega_s \rightarrow NT,$$

або, з урахуванням співвідношення між частотами ω й f ,

$$2f_s \rightarrow \frac{NT}{2\pi}; \quad (10.19)$$

період T дискретизації за часом замінимо на період $\Delta\omega$ дискретизації за частотою

$$T \rightarrow \Delta\omega,$$

після чого сформулюємо теорему Котельникова в частотній області: неперервний спектр $X(e^{j\omega T})$ кінцевого сигналу повністю визначається послідовністю своїх відліків у частотній області, узятих з інтервалом $\Delta\omega$ (у цьому випадку на періоді ω_D), де

$$\Delta\omega \leq \frac{2\pi}{NT}. \quad (10.20)$$

На підставі (10.20) визначимо мінімально достатню кількість рівновіддалених *відліків* спектра на періоді ω_D

$$\frac{\omega_D}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{T} : \frac{2\pi}{NT} = N.$$

Отже, за N рівновіддаленим відлікам спектра, кількість яких дорівнює довжині вихідної послідовності, забезпечується можливість точного відновлення неперервного спектра $X(e^{j\omega T})$.

Перепишемо формулу (10.2), замінивши обчислення неперервного спектра $X(e^{j\omega T})$ обчисленням його відліків в N точках $k\Delta\omega$, $k = 0, 1, \dots, N-1$:

$$X(e^{jk\Delta\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-jk\Delta\omega Tn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-jk\frac{2\pi}{NT}Tn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}.$$

Позначимо:

$$X(k) = X(e^{jk\Delta\omega T}),$$

де k - номер відліку в частотній області, що відповідає абсолютним значенням частоти, що дорівнює $k\Delta\omega = 0, \frac{2\pi}{NT}, \frac{4\pi}{NT}, \dots, \frac{(N-1)2\pi}{NT}$; N - *період* за змінною k , що відповідає періоду за абсолютною частотою ω_D .

Для нормованого часу маємо

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k=0, 1, \dots, N-1, \quad (10.21)$$

де $X(k)$ і $x(n)$ - у загальному випадку комплексні функції.

Установимо зв'язок між відліками послідовності $x(n)$ і відліками спектра $X(k)$. Для цього у формулі *зворотного* перетворення Фур'є (9.6)

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega Tn} d\omega.$$

змінимо межі інтегрування

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{T}} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega Tn} d\omega. \quad (10.22)$$

Згідно з теоремою Котельникова, для відліків у частотній області спектр $X(e^{j\omega T})$ повністю визначається дискретними відліками $X(k)$ (тобто може бути точно за ними відновлений). З іншого боку, перетворення Фур'є є взаємно однозначним, тому підстановка в (10.22) послідовності відліків спектра $X(k)$ на періоді замість неперервного спектра $X(e^{j\omega T})$ повинна забезпечити той самий результат. При цьому необхідно виконати наступні заміни, пов'язані з переходом від неперервної частоти до дискретної:

- обчислення інтеграла за ω замінити обчисленням суми за змінною k ;
- період ω_D спектрау $X(e^{j\omega T})$ за частотою ω замінити на період N за змінною k

$$\omega \rightarrow N;$$

- межі інтегрування $[0; \omega_D] = [0; \frac{2\pi}{T}]$ за ω замінити на межі підсумовування $[0; N-1]$ за змінною k ;

- ваговий множник інтеграла $\frac{T}{2\pi} = \frac{1}{\omega_D}$ замінити ваговим

множником суми $\frac{1}{N}$.

У результаті для нормованого часу маємо

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n=0,1,\dots,N-1. \quad (10.23)$$

Отримана пара перетворень (10.21) і (10.23) називається *дискретним перетворенням Фур'є* (ДПФ) кінцевої послідовності:

$$\text{прямим} \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k=0,1,\dots,N-1, \quad (11.24 \text{ а})$$

$$\text{зворотним } x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n=0,1,\dots,N-1, \quad (11.24 \text{ б})$$

де $X(k)$ - коефіцієнти ДПФ або просто ДПФ.

Формально ДПФ періодичної послідовності (10.18) і ДПФ кінцевої послідовності (10.24) повністю збігаються, різниця між ними полягає в трактуванні *результатів*, а саме:

1. Коефіцієнти ДПФ періодичної послідовності - це її дискретний спектр, а коефіцієнти ДПФ кінцевої послідовності - це дискретні відліки її неперервного спектра на періоді, за якими, однак, гарантується можливість точного відновлення неперервного спектра.

2. Послідовність $x(n)$, обчислена за формулою ОДПФ (10.24б), у дійсності є не кінцевою, а *періодичною* з періодом, що дорівнює її довжині N , тому отриманий результат інтерпретується як один період послідовності $x(n)$, вважаючи, що за його межами $x(n) = 0$.

Маючи на увазі зазначені відмінності, ДПФ періодичної й кінцевої послідовностей являє собою пари взаємно однозначних перетворень:

$$\text{прямого} \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k=0,1,\dots,N-1, \quad (10.25 \text{ а})$$

$$\text{зворотного} \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad n=0,1,\dots,N-1, \quad (10.25 \text{ б})$$

де введено позначення:

$$W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}. \quad (10.26)$$

Оскільки комплексна експонента $e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ відображає кут повороту на одиничному колі комплексної z -площини, змінну W_N^{nk} називають *обертаючим множником*.

$X(k)$ і $x(n)$, що обчислюються за формулами (10.25), називають *N-точковим ДПФ* та *N-точковою послідовністю* відповідно.

Приклад 10.1

Обчислити ДПФ кінцевої послідовності $x(n) = a^n$ довжини N .

Розв'язок. Знайдемо ДПФ за формулою (10.24 а)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} a^n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} (ae^{-j\frac{2\pi}{N}k})^n,$$

звідки остаточно, обчисливши суму геометричної прогресії, одержимо:

$$X(k) \frac{1 - (ae^{-j\frac{2\pi}{N}k})^N}{1 - ae^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{1 - a^N}{1 - ae^{-j\frac{2\pi}{N}k}}, \quad k=0,1,\dots,N-1.$$

Необхідно мати на увазі, що точно таке саме рішення буде отримане для ДПФ *періодичної* послідовності $x(n) = a^n$ з періодом, що дорівнює N .

10.3. Властивості ДПФ

Сформулюємо основні властивості ДПФ, які є прямим наслідком властивостей спектрів дискретних сигналів (див. п. 9.2).

1. Лінійність.

а) якщо послідовність дорівнює лінійній композиції послідовностей довжини N

$$x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n) + \dots, \quad (10.27)$$

то її ДПФ дорівнює лінійній композиції ДПФ даних послідовностей і має довжину N

$$X(k) = a_1X_1(k) + a_2X_2(k) + \dots; \quad (10.28)$$

б) якщо у лінійній композиції (10.27) у послідовностей різні довжини - N_1, N_2, N_3, \dots , то перед обчисленням ДПФ всі послідовності необхідно звести до однакової довжини N

$$N = \max\{N_1, N_2, N_3, \dots\},$$

доповнивши нулями, після чого ДПФ обчислюється як лінійна композиція (10.28) і має довжину N .

2. Зсув (зміщення) ДПФ.

Зсув ДПФ по осі k праворуч на величину k_0 відповідає множенню вихідного ДПФ на комплексну експоненту

$e^{j\frac{2\pi}{N}k_0n} = W_N^{-k_0n}$, що символічно можна записати в такий спосіб:

$$X(k) \rightarrow x(n),$$

$$X(k - k_0) \rightarrow x(n)W_N^{-k_0n}.$$

Аналогічно зсув ДПФ по осі k ліворуч на величину k_0 відповідає множенню вихідного ДПФ на комплексну експоненту

$e^{-j\frac{2\pi}{N}k_0n} = W_N^{k_0n}$, що символічно можна записати в такий спосіб:

$$X(k) \rightarrow x(n),$$

$$X(k + k_0) \rightarrow x(n)W_N^{k_0n}.$$

3. Зсув (затримка) послідовності.

Зсув послідовності праворуч на m відліків (затримка послідовності) відповідає множенню ДПФ на комплексну експоненту

$e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} = W_N^{mk}$, що символічно можна записати в такий спосіб:

$$x(n) \rightarrow X(k),$$

$$x(n - m) \rightarrow X(k)W_N^{mk}.$$

4. Рівність (теорема) Парсеваля.

Для періодичних і кінцевих послідовностей співвідношення Парсеваля, отримане на основі (9.16), має вигляд:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2,$$

де $\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$ - енергія сигналу, обчислена за змінною n (у часовій

області); $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$ - енергія сигналу, обчислена за змінною k (у частотній області).

5. Властивість симетрії

а) якщо послідовність є дійсною, то модуль її ДПФ буде парною, а аргумент - непарною функцією змінної k , що задовольняють наступні умови симетрії:

$$\begin{aligned} |X(k)| &= |X(N-k)|, \\ \arg(X(k)) &= -\arg(X(N-k)); \end{aligned}$$

вісь симетрії проходить через точку $k = \frac{N-1}{2}$;

б) якщо послідовність $x(n)$ симетрична
 $x(n) = x(N-n)$,

її ДПФ буде дійсним.

Доведення. З урахуванням симетрії, ДПФ (10.25 а) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} x(n) [e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-n)k}] = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} x(n) [e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + e^{-j2\pi k} e^{j\frac{2\pi}{N}(N-n)k}] = \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} x(n) [e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + e^{j\frac{2\pi}{N}nk}], \end{aligned}$$

звідки використовуючи формулу Ейлера, одержимо дійсне ДПФ:

$$X(k) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} x(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right).$$

6. ДПФ дійсної послідовності.

З урахуванням властивості 5, ДПФ дійсної послідовності повністю визначено на інтервалі $[0; \frac{N-1}{2}]$, що відповідає основному спектру сигналу (див. п. 9.2, властивість 2).

Розглянемо додаткові властивості ДПФ.

7. *Кругова* (періодична, циклічна) *згортка*: обчислення за допомогою ДПФ.

Поняття кругової згортки використовується тільки для *періодичних* послідовностей.

Круговою згорткою двох періодичних послідовностей $x_1(n)$ і $x_2(n)$ з періодами N називається послідовність, що визначається співвідношенням

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(n-m)x_2(m). \quad (10.29)$$

Послідовність $y(n)$ є також періодичною з періодом N , тому кругову згортку достатньо обчислити на одному періоді. Пояснимо це на прикладі.

Приклад 10.2

Обчислити кругову згортку періодичних послідовностей $x_1(n)$ і $x_2(n)$ з періодом $N = 4$

$$x_1(n) = \{3,2,1,0\}, \quad x_2(n) = \{2,2,1,1\}.$$

Рис. 10.1 ілюструє механізм обчислення згортки

$$y(n) = \sum_{m=0}^3 x_1(m)x_2(n-m).$$

Механізм обчислення кругової згортки подібний розглянутому раніше обчисленню лінійної (аперіодичної) згортки кінцевих послідовностей (див. п. 4.2.1). "Фіксована" послідовність $x_1(n)$ (три періоди) – (рис. 10.1, а), а "ковзаюча" послідовність $x_2(n)$ (три періоди) – (рис. 10.1, б); відліки послідовностей на періоді $[0; N-1] = [0; 3]$ виділені жирним шрифтом. Дзеркально відображена послідовність $x_2(n)$ подана на рис. 10.1, в, а результат її послідовного ковзання - на рис. 10.1, г-ж. Розглянемо обчислення результату на періоді: перший відлік $y(0)$ обчислюється як сума локальних добутків послідовностей на рис. 10.1, а; рис. 10.1, б, другий відлік $y(1)$ - як сума локальних добутків послідовностей на рис. 10.1, а й рис. 10.1, г, далі, аналогічно, $y(2)$ - на рис. 10.1, а й рис. 10.1, д, $y(3)$ - на рис. 10.1, а й рис. 10.1, е.

Наступний відлік $y(4)$ повинен обчислюватися як локальний добуток послідовностей на рис. 10.1, а рис. 10.1, ж, однак, через періодичність $x_2(n)$, послідовності $x_2(4-m)$ (див. рис. 10.1, ж) і $x_2(0-m)$ (див. рис. 10.1, в) на інтервалі $[0; N-1] = [0; 3]$ виявляються однаковими, тому результати обчислень будуть повторюватися з періодом $N = 4$. Для прикладу 10.1 вони наведені в Табл. 10.1 і на рис. 10.2 (три періоди).

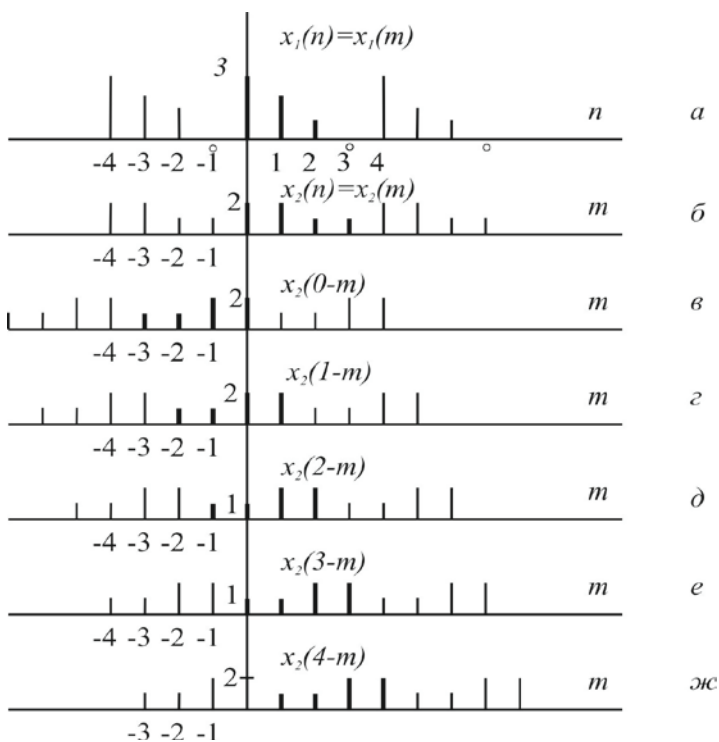


Рис. 10.1. Обчислення кругової згортки.

Таблиця 10.1.

Обчислення кругової згортки

n	$x_1(n)$	$x_2(n)$	$y(n)$
0	3	2	$y(0) = x_1(0)x_2(0) + x_1(1)x_2(-1) + x_1(2)x_2(-2) + x_1(3)x_2(-3) = 3 * 2 = 6$
1	2	2	$y(1) = x_1(0)x_2(1) + x_1(1)x_2(0) + x_1(2)x_2(-1) + x_1(3)x_2(-2) = 3 * 2 + 2 * 2 = 10$
2	1	1	$y(2) = x_1(0)x_2(2) + x_1(1)x_2(1) + x_1(2)x_2(0) + x_1(3)x_2(-1) = 3 * 1 + 2 * 2 + 1 * 2 = 9$
3	0	1	$y(3) = x_1(0)x_2(3) + x_1(1)x_2(2) + x_1(2)x_2(1) + x_1(3)x_2(0) = 3 * 1 + 2 * 1 + 1 * 2 + 0 * 2 = 7$

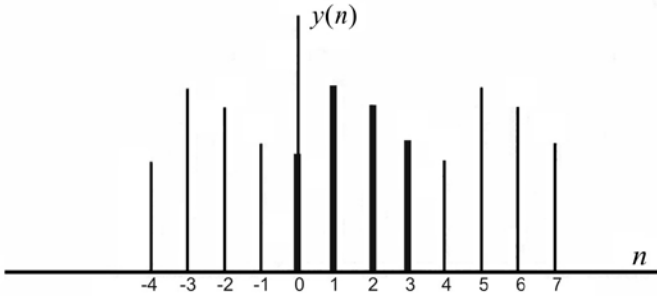


Рис. 10.2. Результат обчислення кругової згортки.

Знайдемо ДПФ *кругової згортки* (10.29) за формулою (11.25а)

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(n-m) \right] W_N^{nk}.$$

Змінимо порядок підсумовування

$$Y(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n-m) W_N^{nk}.$$

Зобразимо обертаючий множник у вигляді добутку (див. (10.26))

$$W_N^{nk} = W_N^{(n-m)k} W_N^{mk}$$

і перепишемо формулу ДПФ

$$Y(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_2(n-m) W_N^{(n-m)k} \right] W_N^{mk}. \quad (10.30)$$

Розглянемо внутрішню суму

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_2(n-m) W_N^{(n-m)k}.$$

Виконавши заміну змінних

$$l = n - m \rightarrow n = l + m,$$

запишемо з урахуванням нульових початкових умов ($m \geq 0$)

$$\sum_{l+m=0}^{N-1} x_2(l) W_N^{lk} = \sum_{l=-m}^{-1} x_2(l) W_N^{lk} + \sum_{l=0}^{N-1} x_2(l) W_N^{lk} = \sum_{l=0}^{N-1} x_2(l) W_N^{lk} = X_2(k) \cdot$$

Підставивши отримане значення в (10.30), отримаємо:

$$Y(k) = X_2(k) \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) W_N^{mk} = X_2(k) X_1(k), k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Таким чином, ДПФ *кругової згортки* дорівнює добутку ДПФ початкових послідовностей і має період N .

Останнє співвідношення можна використовувати для обчислення *кругової згортки* згідно з наступним алгоритмом:

обчислюються ДПФ послідовностей $X_1(k)$ і $X_2(k)$ за формулою (10.25а); обчислюється добуток цих ДПФ

$$Y(k) = X_2(k) X_1(k)$$

обчислюється $y(n)$ за допомогою ОДПФ (10.25, б).

Для обчислення ДПФ і ОДПФ застосовуються швидкі алгоритми (див. розділ 11), тому запропонований метод забезпечує істотне скорочення обсягу обчислень порівняно з безпосереднім обчисленням згортки за формулою (10.29).

8. *Кругова згортка послідовностей* ДПФ.

Аналогічно до властивості 7, можна показати, що ДПФ періодичної послідовності, що дорівнює *добутку* двох періодичних послідовностей $x_1(n)$ і $x_2(n)$ з періодами N :

$$y(n) = x_1(n) x_2(n)$$

дорівнює *круговій згортці* відповідних послідовностей ДПФ і має період N :

$$Y(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_1(m) X_2(k-m) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_1(k-m) X_2(m)$$

9. *Лінійна* (аперіодична) *згортка*: обчислення за допомогою ДПФ.

Лінійною згорткою кінцевих послідовностей $x_1(n)$ і $x_2(n)$ з довжинами N_1 й N_2 відповідно називається послідовність $y(n)$, що визначається співвідношенням

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=0}^{L-1} x_1(n-m)x_2(m), \quad (10.31)$$

де L - довжина послідовності $y(n)$:

$$L = N_1 + N_2 - 1.$$

Приклад обчислення лінійної згортки наведений у п. 4.2.1. Оскільки в ДПФ (10.25) послідовність $x(n)$ є періодичною з періодом N (у разі кінцевої послідовності ми абстрактно розглядаємо її як один період послідовності), для обчислення ДПФ лінійної згортки (10.31) можна використовувати алгоритм обчислення ДПФ кругової згортки. З цією метою послідовності $x_1(n)$ й $x_2(n)$ доповнюють нулями так, щоб їх довжини дорівнювали L . У результаті переходимо до нових послідовностей $\tilde{x}_1(n)$ і $\tilde{x}_2(n)$, для яких визначаємо кругову згортку (10.29):

$$\tilde{y}(n) = \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m) = \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{x}_1(n-m)\tilde{x}_2(m). \quad (10.32)$$

ДПФ кругової згортки (10.32) має період L і дорівнює добутку (див. властивість 7)

$$\tilde{Y}(k) = \tilde{X}_2(k)\tilde{X}_1(k), \quad (10.33)$$

де $\tilde{X}_1(k)$, $\tilde{X}_2(k)$ - ДПФ послідовностей $\tilde{x}_1(n)$ і $\tilde{x}_2(n)$.

Запропонований алгоритм можна використовувати для обчислення реакції за формулою згортки (4.10) або (4.11)

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m)x(n-m) = \sum_{m=0}^{L-1} h(n-m)x(m),$$

де N_1 і N_2 - довжини імпульсної характеристики й впливу відповідно, а L - довжина реакції

$$L = N_1 + N_2 - 1.$$

Доповнивши нулями до довжини L імпульсну характеристику й вплив маємо згортку типу (10.32)

$$\tilde{y}(n) = \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{h}(m)\tilde{x}(n-m) = \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{h}(n-m)\tilde{x}(m)$$

ДПФ якої дорівнює добутку:

$$\tilde{Y}(k) = \tilde{H}(k)\tilde{X}(k).$$

Реакція визначається як ОДПФ за формулою (10.25б).

Обчислення всіх ДПФ: $\tilde{H}(k)$, $\tilde{X}(k)$ і $\tilde{Y}(k)$, а також ОДПФ виконуються за допомогою одного з алгоритмів швидкого перетворення Фур'є (див. розділ 11).

Секціоновані згортки.

Лінійна згортка (10.31) у випадку, якщо довжина однієї з послідовностей істотно перевищує довжину іншої, обчислюється шляхом поділу довгої послідовності на короткі частини - *секції* й обчислення часткових - *секціонованих згорток*, з яких формується шукана лінійна згортка.

Саме цей випадок особливо важливий для практичних задач ЦОС при обчисленні реакції за формулою згортки (4.7) або (4.8)

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=0}^{\infty} h(n-m)x(m),$$

коли відліки сигналу $x(n)$ надходять у реальному часі; їх кількість (довжина послідовності) досить велика й наперед не відома, тому умовно можна говорити про "нескінченну послідовність". Існують *два методи* обчислення лінійної згортки із секціонуванням: перекриття з підсумовуванням і з накопиченням.

Метод перекриття з підсумовуванням полягає в наступному. Нехай довжина імпульсної характеристики $h(n)$ обмежена до N_1 відліків (рис. 10.3, а), а довжина послідовності $x(n)$ не обмежена (рис. 10.3, б) і потрібно обчислити їх згортку.

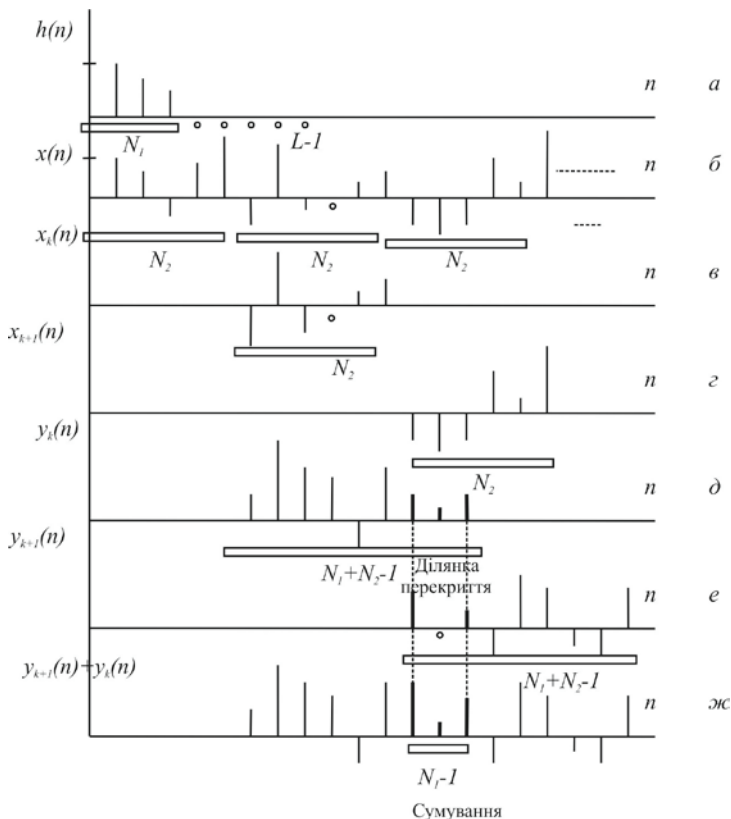


Рис. 10.3. Обчислення згортки методом перекриття з підсумовуванням

З цією метою послідовність $x(n)$ ділиться на суміжні секції $x_k(n)$ завдовжки N_2 відліків (рис. 10.3, б, в, г), при цьому рекомендується вибирати довжини N_1 і N_2 близькими за величиною. Тоді початкова послідовність може бути представлена у вигляді суми секцій:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(n). \quad (10.34)$$

Підставивши $x(n)$ (10.34) у формулу лінійної згортки, запишемо

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) \sum_{k=0}^{\infty} x_k(n-m).$$

Змінюючи порядок сумування й ураховуючи кінцеві довжини послідовностей $h(n)$ і $x_k(n)$, отримуємо:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{L-1} h(m)x_k(n-m),$$

де внутрішня сума являє собою секціоновану згортку, довжина якої (див. властивість 9) дорівнює L

$$L = N_1 + N_2 - 1. \quad (10.35)$$

З урахуванням сказаного, шукана згортка є сумою секціонованих згорток:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(n). \quad (10.36)$$

На рис. 10.3, д, е показані суміжні секціоновані згортки завдовжки L , що перекриваються на ділянці завдовжки $(N_1 - 1)$

$$(N_1 + N_2 - 1) - N_2 = N_1 - 1.$$

Тому, згідно з (10.36), на ділянці перекриття відповідні відліки *підсумовуються* (див. рис. 10.3, ж).

Метод перекриття з накопиченням відрізняється від розглянутого вище тим, що перекриваються не суміжні секціоновані згортки, а суміжні початкові послідовності. Послідовність $x(n)$ ділиться на секції $\tilde{x}_k(n)$, $\tilde{x}_{k+1}(n)$, $k = 0, 1, \dots$ завдовжки $L = N_1 + N_2 - 1$ з ділянками перекриття завдовжки $(N_1 - 1)$ відліків (див. рис. 10.4, в, г).

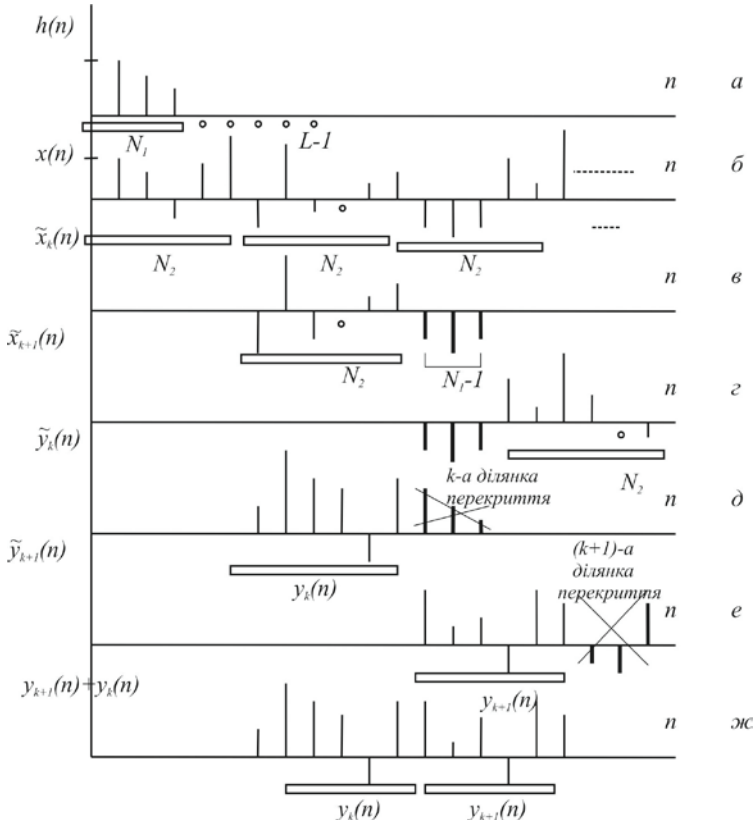


Рис. 10.4. Обчислення згортки методом перекриття з накопиченням

Послідовність доповнюють кількістю нулів до довжини L , переходячи, таким чином, до послідовності $h(n)$ (див. рис. 10.4, а). Після цього обчислюються секціоновані кругові згортки (див. рис. 10.4, д, е):

$$\tilde{y}_k(n) = \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{h}(m) \tilde{x}_k(n-m); \quad (10.37)$$

$$\tilde{y}_{k+1}(n) = \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{h}(m) \tilde{x}_{k+1}(n-m). \quad (10.38)$$

При формуванні сумарної згортки (10.36) необхідно мати на увазі, що це співвідношення отримано при справедливості співвідношення (10.34), проте в даному випадку це не так:

$$x(n) \neq \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{x}_k(n),$$

а отже,

$$y(n) \neq \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{y}_k(n).$$

Представимо послідовності $\tilde{x}_k(n)$, $\tilde{x}_{k+1}(n)$ у вигляді сум:

$$\tilde{x}_k(n) = x_k(n) + \delta_k(n),$$

$$\tilde{x}_{k+1}(n) = x_{k+1}(n) + \delta_{k+1}(n),$$

де $\delta_k(n)$ і $\delta_{k+1}(n)$ - послідовності на ділянках перекриття завдовжки $(N_1 - 1)$. Тоді згортки (10.37), (10.38) можна записати у вигляді

$$\tilde{y}_k(n) = \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{h}(m)x_k(n-m) + \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{h}(m)\delta_k(n-m) = y_k(n) + \xi_k(n);$$

$$\tilde{y}_{k+1}(n) = \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{h}(m)x_{k+1}(n-m) + \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{h}(m)\delta_{k+1}(n-m) = y_{k+1}(n) + \xi_{k+1}(n),$$

де ξ_k і ξ_{k+1} - згортки, що нас не цікавлять, завдовжки $(N_1 - 1)$, зумовлені внеском відліків δ_k і δ_{k+1} на ділянках перекриття. Тому при формуванні сумарної згортки (10.36) останні $(N_1 - 1)$ відліків кожної секціонованої згортки $\tilde{y}_k(n)$ на ділянці перекриття відкидаються, а відліки $y_k(n)$ ніби нагромаджуються (див. рис. 10.4 ж).

В обох розглянутих методах секціоновані згортки можуть визначатися за допомогою ДПФ і ОДПФ (див. властивість 9) із застосуванням швидких алгоритмів.

11. Швидке перетворення Фур'є

Спектральний аналіз є основою багатьох алгоритмів ЦОС, зокрема він використовується при розпізнаванні, виявленні і стисненні сигналів. У реальному часі такі алгоритми, як правило, припускають обробку досить довгих числових послідовностей по частинах; довжина відрізків залежить від конкретної задачі й фізичної природи сигналу. Спектральний аналіз виконується за допомогою ДПФ (10.25, а)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (11.1)$$

де N - довжина початкової послідовності; W_N^{nk} - обертаючий множник (10.26), уведений для позначення комплексної експоненти:

$$W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}. \quad (11.2)$$

Значення N визначає розмірності ДПФ і початкової послідовності; скорочено їх називають N -точковими.

Оцінимо обчислювальну складність алгоритму ДПФ (11.1). При фіксованому значенні k та $n = 0, 1, \dots, (N-1)$ необхідно виконати N множень і $(N-1) \approx N$ додавань, усього $2N$, а при $k=0, 1, \dots, (N-1)$ відповідно арифметичних $N \times 2N = 2N^2$ операцій із комплексними числами. Як правило, являє інтерес оцінка порядку обчислювальної складності алгоритму щодо довжини N , для чого зручно використовувати символіку $O(\cdot)$. Порядок обчислювальної складності алгоритму ДПФ (11.1) оцінюється як $O(N^2)$, що при великих N досить вагомо. Для зниження порядку обчислювальної складності були розроблені алгоритми швидкого обчислення ДПФ, так звані *алгоритми швидкого перетворення Фур'є* (ШПФ) або коротко ШПФ. Оскільки існує цілий набір таких алгоритмів, для їхнього розрізнення після аббревіатури ШПФ ставлять уточнення: алгоритм ШПФ із основою 2, алгоритм ШПФ із основою 4, алгоритм ШПФ Винограда і т.ін.

Найбільше розповсюдження отримали алгоритми ШПФ із основою 2, для реалізації яких довжина N початкової послідовності повинна бути кратною 2:

$$N = 2^{\nu}, \quad (11.3)$$

де ν - ціле додатне число.

Якщо умова (11.3) не задовольняється, початкова послідовність доповнюється необхідною кількістю нулів.

Перший алгоритм ШПФ із основою 2, відомий як алгоритм ШПФ Кулі - Т'юкі, був опублікований у 1965 р. у США ученими Кулі і Т'юкі. Відомі дві версії цього алгоритму: з *проріджуванням за часом* і з *проріджуванням за частотою*.

11.1. Алгоритм ШПФ із проріджуванням за часом

Основна ідея алгоритму ШПФ із проріджуванням за часом полягає в поетапному обчисленні N -точкового ДПФ (11.1) на ν етапах, при цьому на кожному етапі ДПФ визначаються через ДПФ удвічі меншої розмірності.

Перед виконанням першого етапу відліки початкової N -точкової послідовності розставляються за певним правилом; сформована N -точкова послідовність забезпечує початкові умови алгоритму. Після цього виконується поетапна (циклічна) процедура обчислення ДПФ (див. рис. 11.1):

перший етап:

визначаються $N/2$ 2-точкових ДПФ для $N/2$ 2-точкових послідовностей; на цьому етапі використовуються *початкові умови*;

другий етап:

$N/4$ 4-точкові ДПФ визначаються як комбінація $N/2$ 2-точкових ДПФ;

⋮

⋮

i -й етап:

$N/2^i$ 2^i -точкових ДПФ визначаються як комбінація $N/2^{i-1}$ 2^{i-1} -точкових ДПФ;

⋮

⋮

$(\nu - 1)$ -й етап:

два $N/2$ -точкових ДПФ визначаються як комбінація чотирьох $N/4$ -точкових ДПФ;

ν -й (останній) етап:

N -точкові ДПФ визначається як комбінація двох $N/2$ -точкових ДПФ.

Для реалізації поетапної процедури необхідно:

- забезпечити *початкові умови* алгоритму;
- мати *загальну формулу* для обчислень на будь-якому i -му етапі.

Отримаємо *загальну формулу* алгоритму ШПФ із проріджуванням за часом. Припустимо, що алгоритм ШПФ складається тільки з **одного ν -го** етапу (див. рис. 11.1). Тоді перед виконанням даного етапу відліки початкової N -точкової послідовності повинні бути розташовані за правилом: спочатку йде $N/2$ -точкова послідовність *парних* відліків $(x(0), x(2), \dots, x(N-2))$, потім - $N/2$ -точкова послідовність *непарних відліків* $(x(1), x(3), \dots, x(N-1))$. Сформована N -точкова послідовність забезпечує *початкові умови одноетапного* алгоритму ШПФ із проріджуванням за часом.

Початкове розташування відліків початкової послідовності дозволяє поділити суму у формулі ДПФ (11.1) на дві частини:

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) W_N^{(2n+1)k} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) W_N^{2nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) W_N^{2nk}, \quad (11.4) \\
 k &= 0, 1, \dots, (N-1).
 \end{aligned}$$

де $x(2n)$ і $x(2n+1)$ - послідовності з парних і непарних відліків відповідно.

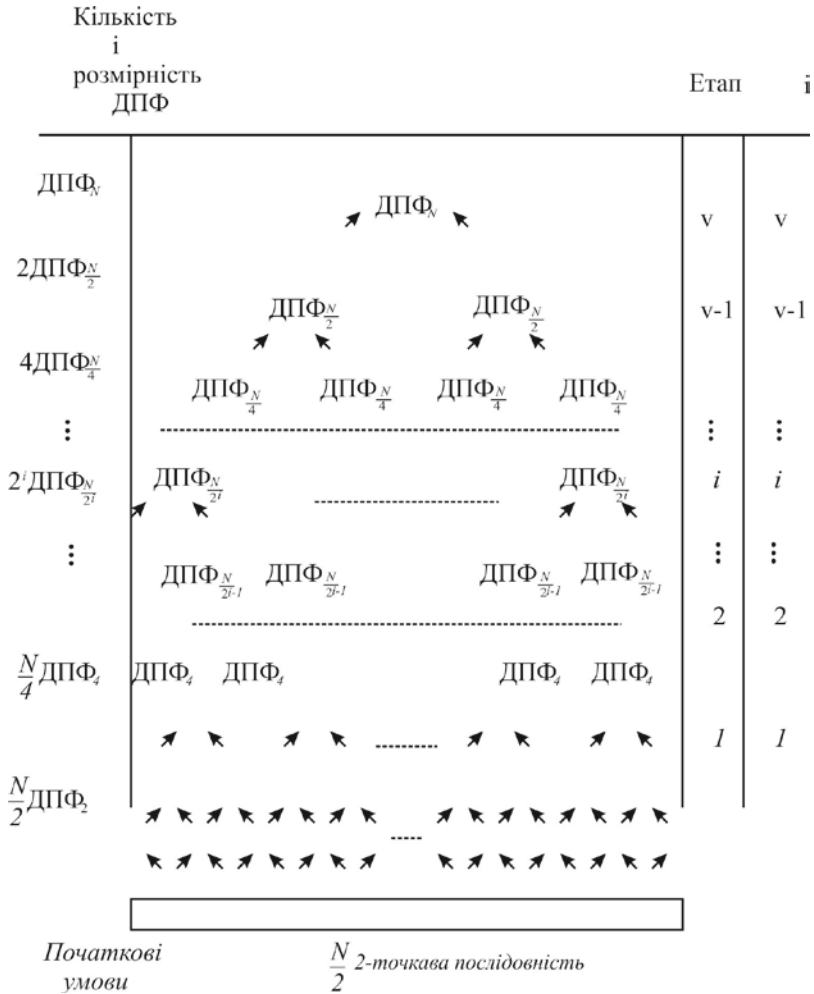


Рис. 11.1. Ідея алгоритму ШПФ із проріджуванням за часом

Виконаємо перетворення обертаючого множника, враховуючи його визначення (11.2):

$$W_N^{2nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}nk} = W_{N/2}^{nk}, \quad (11.5)$$

і перепишемо формулу ДПФ (11.4):

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) W_{N/2}^{nk}, k = 0, 1, \dots, (N-1). \quad (11.6)$$

В отриманому виразі маємо: ліворуч - N -точкове ДПФ, праворуч - два $N/2$ -точкових ДПФ парних і непарних відліків послідовності. Уведемо позначення:

$$X(k) = X_0^v, \quad (11.7)$$

$$X_0^{v-1}(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) W_{N/2}^{nk}, \quad (11.8)$$

$$X_1^{v-1}(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) W_{N/2}^{nk}, \quad (11.9)$$

де *верхній* індекс указує номер етапу, а *нижній* - ДПФ парних (0) або непарних (1) відліків.

Перепишемо формулу (11.6) з урахуванням позначень (11.7) - (11.9):

$$X^v(k) = X_0^{v-1}(k) + W_N^k X_1^{v-1}(k), k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (11.10)$$

$N/2$ -точкові ДПФ $X_0^{v-1}(k)$ і $X_1^{v-1}(k)$ - періодичні функції змінної k з періодом $N/2$, це значить, що їх достатньо обчислити на інтервалі $[0; N/2-1]$

$$X_0^{v-1}(k) = X_0^{v-1}(k + \frac{N}{2}), k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1, \quad (11.11)$$

$$X_1^{v-1}(k) = X_1^{v-1}(k + \frac{N}{2}), k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1. \quad (11.12)$$

Визначимо значення обертаючого множника на інтервалі $[N/2; N-1]$

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = W_N^k W_N^{\frac{N}{2}} = W_N^k e^{-j\frac{2\pi N}{N^2}} = -W_N^k, k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1, \quad (11.13)$$

таким чином, і обертаючий множник достатньо визначити на інтервалі $[0; N/2-1]$.

Властивості (11.11) - (11.13) дозволяють спростити обчислення ДПФ за рахунок наступного перетворення формули (11.10)

$$\begin{cases} X_0^v(k) = X_0^{v-1}(k) + W_N^k X_1^{v-1}(k); \\ X_0^v(k + \frac{N}{2}) = X_0^{v-1}(k) - W_N^k X_1^{v-1}(k); \\ k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1. \end{cases} \quad (11.14)$$

Зіставивши формули (11.10) і (11.14), зрозуміло, що визначення N -точкового ДПФ як комбінації двох $N/2$ -точкових ДПФ $X_0^{v-1}(k)$ і $X_1^{v-1}(k)$ в (11.14) призводить до скорочення обсягу обчислень за рахунок можливості *паралельного* обчислення ДПФ на інтервалах $[0; N/2-1]$ і $[N/2; N-1]$ за *верхньою* і *нижньою* формулами відповідно.

Таким чином, при **одноетапному** алгоритмі маємо **одну** формулу (11.14) для розрахунку ДПФ. Згідно з (11.7), на **виході одноетапного** алгоритму ШПФ відліки ДПФ йдуть у *природному* порядку: $k = 0, 1, \dots, (N - 1)$.

Припустимо, що алгоритм ШПФ складається з **двох** етапів - v -го і $(v - 1)$ -го (див. рис. 11.1). Тоді *початкові умови* алгоритму ШПФ із проріджуванням за часом формуються в результаті **двократного** поділу початкової послідовності за правилом:

- 1) початкова N -точкова послідовність поділяється на дві $N/2$ -точкові послідовності парних і непарних відліків (див. вище);
- 2) кожна з $N/2$ -точкових послідовностей знову поділяється на дві $N/4$ -точкові послідовності парних і непарних відліків за порядком їх *розташування, а саме:*

$N/2$ -точкова послідовність *парних* відліків $(x(0), x(2), \dots, x(N-2))$ поділяється на дві $N/2$ -точкові:

- парних $(x(0), x(4), \dots)$ і
- непарних $(x(2), x(6), \dots)$ відліків.

Парним відлікам відповідає $N/4$ -точкове ДПФ $X_0^{v-2}(k)$, а непарним - $N/4$ -точкове ДПФ $X_1^{v-2}(k)$;

$N/2$ -точкова послідовність непарних відліків $(x(1), x(3), \dots, x(N-1))$ поділяється на дві $N/4$ -точкові:

парних $(x(1), x(5), \dots)$ і непарних $(x(3), x(7), \dots)$ відліків.

Парним відлікам відповідає $N/4$ -точкове ДПФ $X_2^{v-2}(k)$, а непарним - $N/4$ -точкове ДПФ $X_3^{v-2}(k)$.

Перед виконанням $(v-1)$ -го етапу відліки початкової N -точкової послідовності повинні бути розташовані у вказаному порядку. Сформована N -точкова послідовність забезпечує початкові умови **двохетапного** алгоритму ШПФ із проріджуванням за часом.

На $(v-1)$ -му етапі два $N/2$ -точкових ДПФ визначаються як комбінація чотирьох $N/4$ -точкових ДПФ (див. рис. 11.1), а саме:

$N/2$ -точкове $X_0^{v-1}(k)$ - як комбінація $N/4$ -точкових ДПФ $X_0^{v-2}(k)$ і $X_1^{v-2}(k)$,

$N/2$ -точкове $X_1^{v-1}(k)$ - як комбінація $N/4$ -точкових ДПФ $X_2^{v-2}(k)$ і $X_3^{v-2}(k)$.

Кожна з двох формул визначення $N/2$ -точкового ДПФ $X_0^{v-1}(k)$ і $X_1^{v-1}(k)$ має вигляд (11.14), де удвічі знижені розмірності ДПФ і обертаючого множника:

$$\begin{cases} X_0^{v-1}(k) = X_0^{v-2}(k) + W_{N/2}^k X_1^{v-2}(k); \\ X_0^{v-1}(k + \frac{N}{4}) = X_0^{v-2}(k) + W_{N/2}^k X_1^{v-2}(k); \\ k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1, \end{cases} \quad (11.15)$$

$$\begin{cases} X_1^{v-1}(k) = X_2^{v-2}(k) + W_{N/2}^k X_3^{v-2}(k); \\ X_1^{v-1}(k + \frac{N}{4}) = X_2^{v-2}(k) + W_{N/2}^k X_3^{v-2}(k); \\ k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1. \end{cases} \quad (11.16)$$

Таким чином:

- на $(\nu - 1)$ -му етапі для розрахунку двох $N/2$ -точкових ДПФ маємо **дві** формули (11.15) - (11.16);

- на ν -му етапі для розрахунку N -точкового ДПФ маємо **одну** формулу (11.14). Як бачимо, розрахункові формули (11.15) - (11.16) для $(\nu - 1)$ -го етапу структурно точно такі самі, як формула (11.14) для ν -го етапу; вони відрізняються синхронним зменшенням на одиницю верхнього індексу (номери етапу) і зниженням удвічі розмірностей ДПФ і обертаючого множника.

Згідно з (11.7), на виході *двохетапного* алгоритму ШПФ відліки ДПФ йдуть у природному порядку: $k = 0, 1, \dots, (N - 1)$.

Міркуючи аналогічно, при **трьохетапному** алгоритмі ШПФ формування *початкових умов* полягатиме в **триразовому** поділі початкової послідовності на групи з парних і непарних відліків за наведеним вище правилом.

На $(\nu - 2)$ -му етапі матимемо **чотири** формули для розрахунку чотирьох $N/4$ -точкових ДПФ $X_0^{\nu-2}(k)$, $X_1^{\nu-2}(k)$, $X_2^{\nu-2}(k)$, $X_3^{\nu-2}(k)$:

- перші дві формули для розрахунку $X_0^{\nu-2}(k)$, $X_1^{\nu-2}(k)$ отримують з (11.15);

- другі дві - для розрахунку $X_2^{\nu-2}(k)$, $X_3^{\nu-2}(k)$ - з (11.16).

В обох випадках синхронно зменшується на одиницю верхній індекс і знижуються удвічі розмірності ДПФ і обертаючого множника.

На $(\nu - 1)$ -му етапі матимемо **дві** формули (11.15) і (11.16) для розрахунку двох $N/2$ -точкових ДПФ.

На ν -му етапі матимемо **одну** формулу (11.14) для розрахунку N -точкового ДПФ.

На *виході* **трьохетапного** алгоритму ШПФ із проріджуванням за часом як і раніше згідно з (11.7), відліки ДПФ йдуть в природному порядку.

Відзначену закономірність можна розповсюдити на ν -етапний алгоритм ШПФ:

- формування *початкових умов* перед виконанням 1-го етапу полягає у ν -**кратному** поділі початкової N -точкової послідовності на групи з *парних* і *непарних* відліків за наведеним вище правилом (в п. 11.1.2 правило розташування відліків формалізується);
- на **першому** етапі для розрахунку $N/2$ двоточкових ДПФ необхідно мати $N/2$ формул; особливості цього етапу, пов'язані з початковими умовами алгоритму, розглядаються нижче;
- на **другому** етапі для розрахунку $N/4$ 4-точкових ДПФ необхідно мати $N/4$ формул;
-
-
- на **i -му** етапі для розрахунку $N/2^i$ 2^i -точкових ДПФ необхідно мати $N/2^i$ формул;
-
-
- на **$(\nu - 1)$ -му** етапі необхідні **дві** формули для розрахунку двох $N/2$ -точкових ДПФ;
- на **ν -му** етапі необхідно мати **одну** формулу для розрахунку N -точкового ДПФ.

На *виході* ν -**етапного** алгоритму ШПФ, згідно з (11.7), матимемо відліки ДПФ, що йдуть у природному порядку.

Зобразимо розглянуту закономірність у вигляді *загальної формули алгоритму ШПФ із проріджуванням за часом* для i -го етапу:

$$\begin{cases} X_m^i(k) = X_{2m}^{i-1}(k) + W_L^k X_{2m+1}^{i-1}(k); \\ X_m^i(k + \frac{L}{2}) = X_{2m}^{i-1}(k) + W_L^k X_{2m+1}^{i-1}(k); \\ k = 0, 1, \dots, \frac{L}{2} - 1; \\ i = 1, 2, \dots, \nu; m = 0, 1, \dots, 2^{\nu-i} - 1, \end{cases} \quad (11.17)$$

де i - номер етапу; особливості **першого** ($i = 1$) етапу (вхід алгоритму) розглядаються нижче;
 m - номер L -точкового ДПФ на i -му етапі, $m = 0, 1, 2 \dots, M-1$,
 M - кількість ДПФ, що розраховуються на i -му етапі:

$$M = \frac{N}{2^i} = \frac{2^\nu}{2^i} = 2^{\nu-i}, \quad (11.18)$$

$2m$ і $2m + 1$ - номери $N/2$ -точкових ДПФ на $(i-1)$ -му етапі,
 k - номер відліку L -точкового ДПФ на i -му етапі,
 L - розмірність ДПФ, що розраховується на i -му етапі:

$$L = 2^i \quad (11.19)$$

$X_m^i(k)$ - L -точкові ДПФ, що розраховуються на i -му етапі,

$X_{2m}^{i-1}(k)$, $X_{2m+1}^{i-1}(k)$ - $L/2$ -точкові ДПФ $(i-1)$ -го етапу, за якими обчислюються L -точкові ДПФ на i -му етапі.

Згідно з формулою (11.17), при фіксованих значеннях i та m L -точкове ДПФ обчислюється так:

- перші $L/2$ відліків з номерами $k=0,1,\dots,(L/2-1)$ - за *верхньою* формулою,
- другі $L/2$ відліків з номерами $k=L/2,\dots,(L-1)$ - за *нижньою* формулою.

Розглянемо особливості **першого** етапу ($i=1$) алгоритму. За формулою (11.19) визначимо розмірність L обчислюваних ДПФ, а за формулою (11.18) - кількість M 2-точкових ДПФ

$$M = 2^{\nu-i} = 2^{\nu-1} = \frac{N}{2}.$$

З урахуванням цього перепишемо загальну формулу алгоритму (11.17) так:

$$\begin{cases} X_m^1(0) = X_{2m}^0(0) + W_2^0 X_{2m+1}^0(0); \\ X_m^1(1) = X_{2m}^0(0) - W_2^0 X_{2m+1}^0(0), \end{cases} \quad (11.20)$$

де обертаючий множник збережений для одноманітності співвідношень.

Для обчислення за формулою (11.20) необхідно в праву частину підставляти значення $X_{2m}^0(0)$ і $X_{2m+1}^0(0)$, $m = 0, 1, 2, \dots, (N/2 - 1)$. Формально це відліки ДПФ попереднього нульового етапу, проте

такого етапу немає, тому для обчислення 2-точкових ДПФ за загальною формулою (11.17) перед виконанням першого етапу задають *початкові умови*: кожній парі відліків ДПФ $X_{2m}^0(0)$ і $X_{2m+1}^0(0)$, $m=0,1,2,\dots,(N/2-1)$ і послідовно привласнюють значення пари відліків послідовності - одного парного і другого - непарного. Останні одержують у результаті ν -кратного поділу початкової N -точкової послідовності

$$\begin{cases} X_{2m}^0(0) = \tilde{x}_{2m}; \\ X_{2m+1}^0(0) = \tilde{x}_{2m+1}, \end{cases} \quad (11.21)$$

де \tilde{x}_{2m} та \tilde{x}_{2m+1} - позначення парного і непарного відліків послідовності.

Підставляючи (11.21) в (11.20) при $m=0,1,2,\dots,(N/2-1)$, одержуємо $N/2$ формул типу:

$$\begin{cases} X_0^1(0) = \tilde{x}_0 + \tilde{x}_1 \\ X_0^1(1) = \tilde{x}_0 - \tilde{x}_1 \\ \\ X_1^1(0) = \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \\ X_1^1(1) = \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 \\ \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

Таким чином, алгоритм ШПФ із проріджуванням за часом являє собою ν -етапну (циклічну) процедуру обчислень за загальною формулою (11.17). Перед виконанням першого етапу формуються *початкові умови* - відліки початкової N -точкової послідовності розташовуються в певному порядку (див. п. 11.1.2) і їх значення привласнюються відлікам ДПФ згідно з (11.21). На виході алгоритму маємо N -точкове ДПФ, відліки якого, згідно з (11.7), йдуть у природному порядку.

На рис. 11.2 наведений напрямлений граф однотипної операції при обчисленні за формулою (11.17). Це базова операція алгоритму ШПФ із проріджуванням за часом, що отримала назву "метелик" за асоціацією із зображенням її напрямленого графа. Коло позначає

арифметичну операцію складання/віднімання, верхній вихід відповідає сумі, нижній - різниці, стрілка позначає операцію множення на обертаючий множник, що знаходиться над стрілкою.

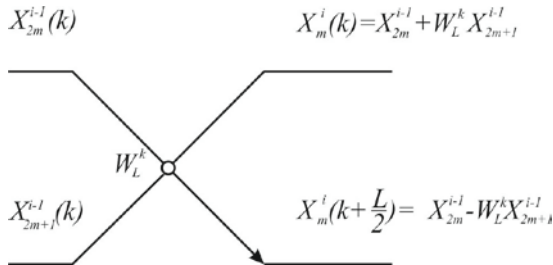


Рис. 11.2. Напрямлений граф базової операції "метелик" алгоритму ШПФ із проріджуванням за часом

По суті загальна формула (11.17) є алгоритмом ШПФ із проріджуванням за часом; вона повністю відображає поетапне обчислення ДПФ як процедуру типу цикл в циклі, а саме:

- зовнішній цикл організовується за змінною i – номера циклу, $i = 1, 2, \dots, v$;
- внутрішній цикл 1 (при фіксованому i) - за змінною m – номера "метелика" (11.17), $m = 0, 1, 2, \dots, M-1$;
- внутрішній цикл 2 (при фіксованих i та m) - за змінною k - номера відліку ДПФ в m -му "метелику", $k = 0, 1, \dots, (L/2-1)$.

Необхідно зазначити, що кількість "метеликів" на будь-якому i -му етапі алгоритму ШПФ однакова. Дійсно, на i -му етапі для обчислення ДПФ за загальною формулою (11.17) при фіксованому значенні m , а $k = 0, 1, \dots, L/2$ потрібно $L/2$ "метеликів", відповідно, при $m = 0, 1, \dots, (M-1)$ потрібно $ML/2$ "метеликів". Підставляючи значення M (11.18) і L (11.19), одержуємо необхідну кількість "метеликів":

$$M \frac{L}{2} = 2^{v-i} \frac{2^i}{2} = \frac{N}{2}. \quad (11.22)$$

Приклад обчислення 8-точкового ДПФ за допомогою алгоритму ШПФ із проріджуванням за часом

Для кращого розуміння алгоритму ШПФ із проріджуванням за часом проілюструємо його на прикладі обчислення 8-точкового ДПФ (11.1):

$$X(k) = \sum_{n=0}^7 x(n) W_N^{nk} \quad (11.23)$$

Алгоритм ШПФ є трьохетапною процедурою обчислення ДПФ за загальною формулою (12.17) при $i=1, 2, 3$.

Формування *початкових умов* перед виконанням першого етапу полягає в **триразовому** поділі початкової 8-точкової послідовності на групи *парних* і *непарних* відліків, а саме:

1) 8-точкова послідовність поділяється на дві групи 4-точкових з парними і непарними відліками:

$[x(0), x(2), x(4), x(6)]$ - парні відліки,

$[x(1), x(3), x(5), x(7)]$ - непарні відліки;

2) кожна з двох 4-точкових послідовностей поділяється на **дві** групи 2-точкових з парними й непарними відліками за порядком їх розташування, починаючи від нуля, а саме:

послідовність $[x(0), x(2), x(4), x(6)]$:

$[x(0), x(4)]$ - парні відліки,

$[x(2), x(6)]$ - непарні відліки;

послідовність $[x(1), x(3), x(5), x(7)]$:

$[x(1), x(5)]$ - парні відліки,

$[x(3), x(7)]$ - непарні відліки;

3) кожна з чотирьох 2-точкових послідовностей поділяється на два відліки - парний і непарний за порядком їх розташування, починаючи від нуля, тобто на нульовий (парний) і перший (непарний), а саме:

послідовність $[x(0), x(4)]$:

$[x(0)]$ - парний відлік,

$[x(4)]$ - непарний відлік;

послідовність $[x(2), x(6)]$:

$[x(2)]$ - парний відлік,

$[x(6)]$ - непарний відлік;

послідовність $[x(1), x(5)]$:
 $[x(1)]$ - парний відлік,
 $[x(5)]$ - непарний відлік;

послідовність $[x(3), x(7)]$:
 $[x(3)]$ - парний відлік,
 $[x(7)]$ - непарний відлік.

Після цього, згідно з (11.21), кожній парі відліків ДПФ $X_{2m}^0(0)$ і $X_{2m+1}^0(0)$, $m = 0,1,2,3$ послідовно привласнюються значення пари відліків *прорідженої* 8-точкової послідовності, а саме (див. рис. 11.3):

$$\begin{cases} X_0^0(0) = x(0), \\ X_1^0(0) = x(4); \end{cases} \quad (11.24)$$

$$\begin{cases} X_2^0(0) = x(2), \\ X_3^0(0) = x(6); \end{cases} \quad (11.25)$$

$$\begin{cases} X_4^0(0) = x(1), \\ X_5^0(0) = x(5); \end{cases} \quad (11.26)$$

$$\begin{cases} X_6^0(0) = x(3), \\ X_7^0(0) = x(7); \end{cases} \quad (11.27)$$

Далі виконується трьохетапний *алгоритм ШПФ*, напрямлений граф якого наводиться на рис. 11.3:

1) $i = 1$

На першому етапі виконується **чотири** операції "метелик" (11.17) при $m = 0,1,2,3$ з урахуванням початкових умов (11.24) - (11.27)

$$\begin{cases} X_0^1(0) = x(0) + W_2^0 x(4), \\ X_0^1(1) = x(0) - W_2^0 x(4); \end{cases} \quad \begin{cases} X_1^1(0) = x(2) + W_2^0 x(6), \\ X_1^1(1) = x(2) - W_2^0 x(6); \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2^1(0) = x(1) + W_2^0 x(5), \\ X_2^1(1) = x(1) - W_2^0 x(5); \end{cases} \quad \begin{cases} X_3^1(0) = x(3) + W_2^0 x(7), \\ X_3^1(1) = x(3) - W_2^0 x(7). \end{cases}$$

Тут обертаючий множник залишений виключно для односторонності метеликів; насправді

$$W_2^0 = 1.$$

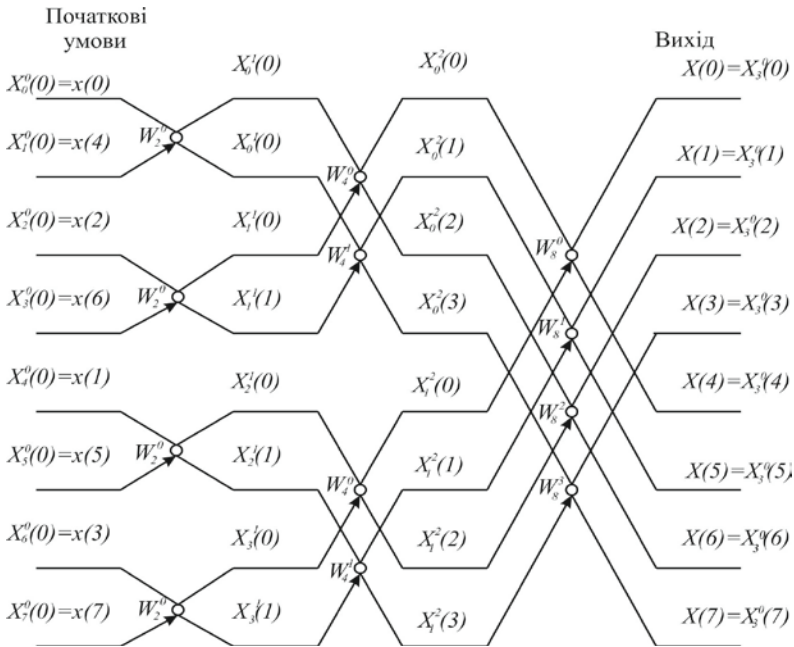


Рис. 11.3. Напрямленим граф алгоритму ШПФ із проріджуванням за часом для 8-точкового ДПФ

2) $i = 2$

На другому етапі виконується **чотири** операції "метелик" (11.17) при $m = 0,1$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0^2(k) = X_0^1(k) + W_4^k X_1^1(k); \\ X_0^2(k+2) = X_0^1(k) - W_4^k X_1^1(k); \\ k=0,1, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1^2(k) = X_2^1(k) + W_4^k X_3^1(k); \\ X_0^2(k+2) = X_2^1(k) - W_4^k X_3^1(k); \\ k=0,1. \end{array} \right.$$

3) $i = 3$

На третьому етапі виконується **чотири** операції "метелик" (11.17) при $m = 0$

$$\begin{cases} X_0^3(k) = X_0^2(k) + W_8^k X_1^2(k); \\ X_0^2(k+2) = X_0^2(k) - W_8^k X_1^2(k); \\ k = 0, 1, 2, 3. \end{cases}$$

На виході маємо 8-точкове ДПФ, відліки якого, згідно з (11.7), слідують у природному порядку

$$\begin{cases} X(k) = X_0^3(k); \\ k = 0, 1, \dots, N - 1. \end{cases}$$

Правило розстановки відліків початкової послідовності: операція біт-реверсії

При великих значеннях N процедура багатоетапного поділу початкової послідовності на групи парних і непарних відліків досить трудомістка, тому її необхідно формалізувати.

У табл. 11.1 показано дві 8-точкові послідовності: початкова і сформована для початкових умов алгоритму ШПФ із проріджуванням за часом (див. п. 12.1.1), а також двійкові номери відліків даних послідовностей.

Порівнюючи останні між собою можна сформулювати просте правило розстановки (*проріджування*) відліків: перед виконанням першого етапу алгоритму відліки початкової послідовності розташовуються в біт-реверсивному порядку двійкових номерів відліків початкової послідовності.

У сучасних процесорах цифрової обробки сигналів передбачені зручні засоби реалізації операції біт-реверсії.

Таблиця 11.1

Розстановка 8-точкової послідовності в біт-реверсивному порядку

Початкова послідовність		Послідовність у біт-реверсивному порядку двійкових номерів відліків	
Відлік	Двійковий номер	Двійковий номер	Відлік
x(0)	000	000	x(0)
x(1)	001	100	x(4)
x(2)	010	010	x(2)
x(3)	011	110	x(6)
x(4)	100	001	x(1)
x(5)	101	101	x(5)
x(6)	110	110	x(3)
x(7)	111	111	x(7)

11.2. Алгоритм ШПФ із проріджуванням за частотою

Основна ідея алгоритму ШПФ із проріджуванням за частотою полягає в поетапному обчисленні N -точкового ДПФ (11.1) на ν етапах, при цьому на кожному етапі ДПФ визначаються через ДПФ удвічі більшої розмірності.

Перед виконанням першого етапу алгоритму ШПФ із проріджуванням за частотою відліки N -точкової послідовності не зображуються, зберігаючи *природний порядок номерів* $n = 0, 1, \dots, N - 1$; дана N -точкова послідовність забезпечує *початкові умови* алгоритму. Після цього виконується поетапна процедура обчислення ДПФ (див. рис. 11.4):

перший етап:

визначаються *два* $N/2$ -точкових ДПФ двох $N/2$ -точкових послідовностей; на цьому етапі використовуються *початкові умови*;

другий етап:

чотири $N/4$ -точкові ДПФ визначаються як комбінація двох $N/2$ -точкових ДПФ;

⋮

i -й етап:

$N/2^{i-1}$ 2^{i-1} -точкові ДПФ визначаються як комбінація $N/2^i$ 2^i -точкових ДПФ;

⋮

***v*-й (останній) етап:**

$N/2$ 2-точкових ДПФ визначаються як комбінація $N/4$ 4-точкових ДПФ; з $N/2$ 2-точкових ДПФ формується N -точкове ДПФ.

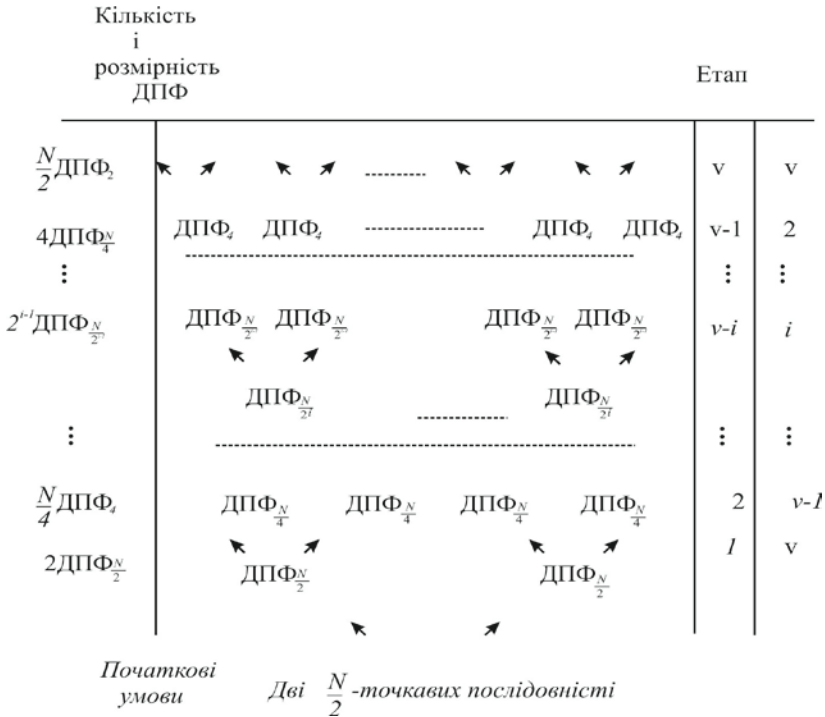


Рис. 11.4. Ідея алгоритму ШПФ із проріджуванням за частотою

Подібно до алгоритму з проріджуванням за часом для реалізації алгоритму ШПФ із проріджуванням за частотою необхідно:

- забезпечити *початкові умови* алгоритму;
- мати *загальну формулу* для обчислень на будь-якому *i*-му етапі.

Отримаємо *загальну формулу* алгоритму ШПФ із проріджуванням за частотою, виходячи з відомої властивості *дуальності* алгоритмів ШПФ із проріджуванням за часом і за частотою: кожний із цих

алгоритмів походить з іншого шляхом заміни входу й виходу, й оберненням усіх стрілок напрямленого графа.

На рис. 11.5, а, б зображено перетворення напрямленого графа базової операції "метелик", а на рис. 11.6 - напрямлений граф "метелика" алгоритму ШПФ із проріджуванням за частотою, отриманий у результаті обернення напрямленого графа "метелика" алгоритму ШПФ із проріджуванням за часом (див. рис. 11.2).

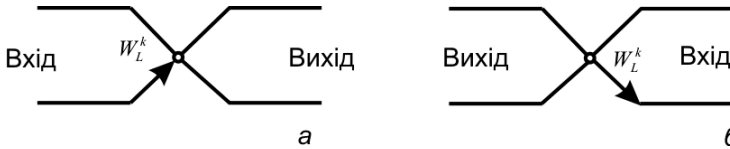


Рис. 11.5. Обернення напрямленого графа базової операції „метелик”

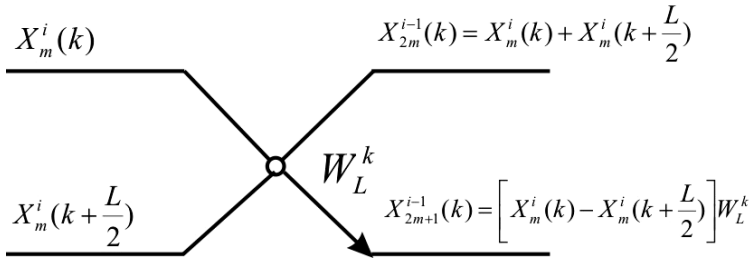


Рис. 11.6. Направлений граф базової операції "метелик" алгоритму ШПФ із проріджуванням за частотою

Визначивши базову операцію "метелик" (див. рис. 11.6), можна записати загальну формулу алгоритму ШПФ із проріджуванням за частотою для **i-го** етапу:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{2m}^{i-1}(k) = X_m^i(k) + X_m^i(k + \frac{L}{2}); \\ X_{2m+1}^{i-1}(k) = \left[X_m^i(k) - X_m^i(k + \frac{L}{2}) \right] W_L^k; \\ k = 0, 1, \dots, \frac{L}{2} - 1; \\ i = v, v-1, \dots, 1; \quad m = 0, 1, \dots, 2^{v-i} - 1, \end{array} \right. \quad (11.28)$$

де i - номер етапу; згідно з принципом дуальності $i=v, (v-1), \dots, 1$; особливості **першого** ($i = v$) і **v -го** ($i = 1$) етапів - входу й виходу алгоритму - розглядаються нижче;

m - номер L -точкового ДПФ на $(i - 1)$ -му етапі $m = 0, 1, 2, \dots, M - 1$;

M - кількість ДПФ, обчислюваних на $(i - 1)$ -му етапі, значення M визначається за формулою (11.18):

$$M = 2^{v-i},$$

$2m$ і $2m + 1$ - номери $L/2$ -точкових ДПФ на i -му етапі,

L - розмірність ДПФ на i -му етапі, значення L визначається за формулою (11.19):

$$L = 2^i,$$

$X_m^i(k)$ - L -точкові ДПФ i -го етапу, за якими обчислюються $L/2$ -точкові ДПФ на $(i - 1)$ -му етапі,

$X_{2m}^{i-1}(k), X_{2m+1}^{i-1}(k)$ - $L/2$ -точкові ДПФ, що обчислюються на $(i - 1)$ -му етапі.

Згідно з формулою (11.28), при фіксованих значеннях i та m два $L/2$ -точкових ДПФ обчислюються наступним чином:

- $L/2$ ДПФ із парними відліками - за *верхньою* формулою (індекс " $2m$ ");
- $L/2$ ДПФ із непарними відліками - за *нижньою* формулою (індекс " $2m+1$ ").

Зіставивши формулу (11.28) із загальною формулою алгоритму *ШПФ* із проріджуванням за часом (11.17), відзначимо, що, згідно з принципом дуальності, вхід і вихід помінялися місцями.

Розглянемо особливості першого етапу алгоритму ($i = v$). Визначимо розмірність L (11.19)

$$L = 2^v = N$$

і кількість M (11.18) N -точкових ДПФ

$$M = 2^{v-v} = 1.$$

З урахуванням цього перепишемо загальну формулу алгоритму (11.28) так:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0^{v-1}(k) = X_0^v(k) + X_0^v(k + \frac{N}{2}); \\ X_1^{v-1}(k) = \left[X_0^v(k) - X_0^v(k + \frac{N}{2}) \right] W_N^k; \\ k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1. \end{array} \right. \quad (11.29)$$

Для обчислення за формулою (11.29) необхідно в праву частину підставляти значення $X_0^v(k)$ і $X_0^v(k + \frac{N}{2})$, $k = 0, 1, 2, \dots, (n/2 - 1)$. Формально це відліки N -точкового ДПФ у природному порядку прямування, проте вони невідомі й будуть обчислені після завершення алгоритму (на останньому етапі, $i = 1$), тому для обчислення $N/2$ -точкових ДПФ $X_0^{v-1}(k)$ та $X_1^{v-1}(k)$ за формулою (11.29) перед виконанням першого етапу задають *початкові умови*:

відлікам ДПФ $X_0^v(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, (N - 1)$ привласнюють значення відліків N -точкової послідовності

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0^v(k) = x(k); \\ k = 0, 1, 2, \dots, (N - 1). \end{array} \right. \quad (11.30)$$

Розглянемо *вихід* алгоритму - останній v -й етап ($i = 1$). Визначимо розмірність L (11.19)

$$L = 2^i = 2$$

і кількість M (11.18) 2-точкових ДПФ:

$$M = 2^{v-1} = \frac{N}{2}.$$

З урахуванням цього перепишемо загальну формулу (11.28) так:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{2m}^0(0) = X_m^1(0) + X_m^1(1); \\ X_{2m+1}^0(0) = \left[X_m^1(0) - X_m^1(1) \right] W_2^0. \end{array} \right. \quad (11.31)$$

При $m = 0, 1, \dots, (N/2 - 1)$ за формулою (11.31) обчислюються два відліки ДПФ: парний $X_{2m}^0(0)$ і непарний $X_{2m+1}^0(0)$. Формально - це відліки ДПФ $(\nu + 1)$ -го етапу ($i = 0$), проте такого етапу немає, тому отримані значення - відліки шуканого N -точкового ДПФ $X(k)$, що йдуть у біт-реверсивному порядку двійкових номерів початкової послідовності, як і повинно бути згідно з принципом дуальності:

$$\begin{cases} \tilde{X}_{2m} = X_{2m}^0(0); \\ \tilde{X}_{2m+1}^0 = X_{2m+1}^0(0), \end{cases} \quad (11.32)$$

де \tilde{X}_{2m} і \tilde{X}_{2m+1}^0 - позначення парного й непарного відліків ДПФ на виході алгоритму [порівняйте з (11.21)].

Підставляючи (11.32) у (11.31) при $m = 0, 1, \dots, (N/2 - 1)$, отримаємо $N/2$ “метеликів” типу

$$\begin{cases} \tilde{X}_0 = X_0^1(0) + X_0^1(1); \\ \tilde{X}_1 = X_0^1(0) - X_0^1(1), \\ \tilde{X}_2 = X_1^1(0) + X_1^1(1); \\ \tilde{X}_3 = X_1^1(0) - X_1^1(1), \\ \vdots \end{cases}$$

По суті, загальна формула (11.28) являє собою алгоритм ШПФ із проріджуванням за частотою; вона повністю відображає поетапний розрахунок ДПФ як процедуру типу цикл у циклі, а саме:

- зовнішній цикл організується за змінною i – номером циклу, $i = \nu, (\nu - 1), \dots, 1$;
- внутрішній цикл 1 (при фіксованому i) – за змінною m – номером “метелика” (11.28), $m = 0, 1, 2, \dots, M - 1$;
- внутрішній цикл 2 (при фіксованих i та m) – за змінною k – номером відліку ДПФ в m -му “метелику”, $k = 0, 1, \dots, (L/2 - 1)$.

Кількість "метеликів" на будь-якому i -му етапі алгоритмів ШПФ із проріджуванням за частотою така сама, як і з проріджуванням за часом і дорівнює $N/2$ [див. розрахункову формулу (11.23)].

Алгоритм ШПФ із проріджуванням за частотою застосовується рідше, ніж із проріджуванням за часом, оскільки, в останньому випадку на виході одержуємо відліки ДПФ, що розташовані у природному порядку.

Приклад розрахунку 8-точкового ДПФ за допомогою алгоритму ШПФ із проріджуванням за частотою

Для кращого розуміння алгоритму ШПФ із проріджуванням за частотою проілюструємо його на прикладі розрахунку 8-точкового ДПФ (11.23).

Перед виконанням першого етапу формуються *початкові умови* алгоритму (11.30)

$$\begin{cases} X_0^3(k) = x(k); \\ k = 0, 1, \dots, 7. \end{cases} \quad (11.33)$$

Напрявлений граф алгоритму ШПФ із проріджуванням за частотою для 8-точкової послідовності наведений на рис. 11.7.

На **1-му** етапі при $i = v = 3$ виконуються **чотири** операції "метелик" (11.28) при $m = 0$ з урахуванням початкових умов (11.33)

$$\begin{cases} X_0^2(k) = x(k) + x(k+4); \\ X_1^2(k) = [x(k) - x(k+4)]W_8^k; \\ k = 0, 1, \dots, 3. \end{cases}$$

На **2-му** етапі при $i = v - 1 = 2$ виконуються **чотири** операції "метелик" (11.28) при $m = 0, 1$

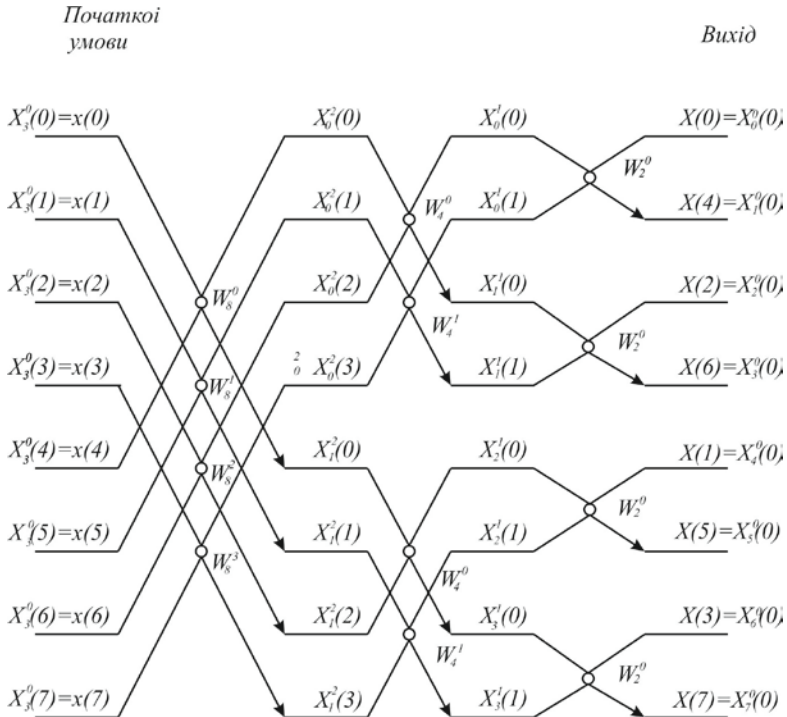


Рис. 11.7. Напрямлений граф алгоритму ШПФ із проріджуванням за частотою для обчислення ДПФ 8-точкової послідовності

$$\begin{cases} X_{2m}^1(k) = X_m^2(k) + X_m^2(k+2); \\ X_{2m+1}^1(k) = [X_m^2(k) - X_m^2(k+2)]W_4^k \\ k=0,1. \end{cases}$$

На **3-му** етапі при $i = v - 2 = 1$ виконуються **чотири** операції "метелик" (11.28) при $m = 0,1,2,3$

$$\begin{cases} X_{2m}^0(0) = X_m^1(0) + X_m^1(1); \\ X_{2m+1}^0(0) = [X_m^1(0) - X_m^1(1)]W_2^0. \end{cases}$$

Отримані значення $X_{2m}^0(0)$ і $X_{2m+1}^0(0)$, $m = 0,1,2,3$ є шукане 8-точкове ДПФ, відліки якого, згідно з (11.32), розташовані у *біт-реверсивному* порядку двійкових номерів початкової послідовності:

$$\begin{cases} X(0) = X_0^0(0), \\ X(4) = X_1^0(0); \end{cases} \quad \begin{cases} X(2) = X_2^0(0), \\ X(6) = X_3^0(0); \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(1) = X_4^0(0), \\ X(5) = X_5^0(0); \end{cases} \quad \begin{cases} X(3) = X_6^0(0), \\ X(7) = X_7^0(0). \end{cases}$$

Порівнюючи напрямлені графи алгоритмів ШПФ із проріджуванням за часом (див. рис. 11.3) і за частотою (див. рис. 11.7), можна переконатися в їх дуальності.

11.3. Оцінка виграшу в кількості операцій при обчисленні ДПФ за допомогою алгоритму ШПФ із основою 2

Оцінимо виграш у кількості арифметичних операцій при обчисленні N -точкового ДПФ за допомогою розглянутих алгоритмів ШПФ із основою 2.

Будь-який з алгоритмів ШПФ - із проріджуванням за часом або за частотою - виконується за ν етапів, де ν згідно (11.3), дорівнює

$$\nu = \log_2 N.$$

Кількість "метеликів", які виконуються на кожному i -му етапі алгоритмів ШПФ із проріджуванням за часом і за частотою, однакове і, згідно з (11.22), дорівнює $N/2$. Для виконання *одного* "метелика" при фіксованих m і k потрібно два додавання (для верхньої й нижньої формул) і одне множення - всього три арифметичні операції. Отже, для виконання $N/2$ "метеликів" на кожному етапі необхідно $3N/2$, а на всіх ν етапах - арифметичних операцій $3N/2 \log_2(N)$ з комплексними числами.

У символіці O порядок обчислювальної складності алгоритму ШПФ оцінюється як $O(N \log_2 N)$, тоді як при прямому обчисленні ДПФ за формулою (11.1) він дорівнює $O(N^2)$.

Наочне уявлення про одержуваний виграш в обсязі обчислень залежно від довжини N початкової послідовності можна отримати з Табл. 11.2.

Таблиця 11.2.

Оцінка виграшу в кількості операцій

N	Оцінка обчислювальної складності		Оцінка виграшу $N^2 / (N \log_2 N)$
	Пряме обчислення ДПФ N^2	Обчислення за допомогою ШПФ $N \log_2 N$	
8	64	24	2,7
16	256	64	4,0
32	1024	160	6,4
64	4096	384	10,7
128	16384	896	18,3
256	65536	1024	32,0
512	262144	4096	56,9
1024	1048576	10240	102,4

**11.4. Обчислення зворотного ДПФ
за допомогою алгоритму ШПФ**

Розглянемо можливість використання алгоритму ШПФ для обчислення зворотного ДПФ (10.25, б)

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Виконаємо операцію комплексного спряження правої й лівої частин рівності і помножимо обидві частини на N

$$N x^*(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk}$$

Права частина рівності являє собою N -точкове ДПФ послідовності $X^*(k)$, тому вона може бути обчислена за допомогою одного з алгоритмів ШПФ. Виконавши ще раз операцію комплексного спряження і розділивши обидві частини рівності на N , отримаємо шукану послідовність

$$x(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk} \right]^*, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

12. Лінійна дискретна система як генератор випадкових сигналів

На практиці часто зустрічаються задачі, в яких вплив на дискретну систему має випадковий (стохастичний) характер, пов'язаний як з імовірнісною природою самого сигналу, так і з різного роду шумами. У цьому випадку до суттєвих результатів приводять методи оцінки усереднених параметрів, що враховують статистичні характеристики впливів.

Викладення матеріалу даного розділу припускає наявність знань з основ теорії ймовірності і випадкових процесів. Проте спочатку будуть визначені ті поняття, які покладені в основу цього й кількох подальших розділів.

12.1. Основні поняття ймовірнісного аналізу дискретних сигналів

Формально *дискретний випадковий процес* у нормованому часі t є індексованим сімейством випадкових величин $\{x(n)\}$. Таке сімейство характеризується сукупністю функцій розподілу ймовірності, які в загальному випадку можуть залежати від часу nT . Дискретний випадковий процес є математичною моделлю стохастичного сигналу. Якщо функції всіляких сумісних розподілів залежать від часу, випадковий сигнал називають *нестационарним*. Якщо вказані функції інваріантні до зсуву в часі, сигнал називають *стационарним* (у вузькому значенні). Стационарний випадковий процес є *ергодичним*, якщо усереднення за множиною для нього може бути замінено усереднюванням за часом. Ергодичний сигнал можна описати його *математичним очікуванням* (середнім значенням)

$$\mu_x = E\{x(n)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N x(n) \quad (12.1)$$

і *автокореляційною функцією*

$$R_x(m) = E\{x(n) \cdot x(n+m)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N x(n)x(n+m), \quad (11.2)$$

де символом $E\{\cdot\}$ позначено усереднення за ансамблем і за часом; $(N+1)$ - кількість відліків дискретного сигналу.

Автокореляційна функція є мірою взаємозалежності окремих значень випадкового сигналу. З її визначення випливає, що вона залежить від математичного очікування сигналу. Якщо ж аналізуються тільки відхилення від середнього, функція (12.2) переходить в автоковаріаційну функцію:

$$r_x(m) = E\left\{\left[x(n) - \mu_x\right]\left[x(n+m) - \mu_x\right]\right\} = R_{x(m)} - \mu_x^2. \quad (12.3)$$

При $m = 0$ формула (12.3) дає дисперсію сигналу

$$\sigma_x^2 = r_x(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N [x(n) - \mu_x]^2. \quad (12.4)$$

Якщо амплітуда сигналу розподілена за нормальним законом, він повністю описується математичним очікуванням і автоковаріаційною функцією. Стохастичний сигнал називають стаціонарним у широкому значенні, якщо його характеристики μ_x і $r_x(m)$ не залежать від часу.

Ступінь лінійної зв'язності двох різних випадкових сигналів визначається взаємною кореляційною функцією

$$R_{xy}(m) = E\{x(n)y(n+m)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N x(n)y(n+m) \quad (12.5)$$

або взаємною коваріаційною функцією

$$r_{xy}(m) = E\left\{\left[x(n) - \mu_x\right]\left[y(n+m) - \mu_y\right]\right\} = R_{xy}(m) - \mu_x\mu_y. \quad (12.6)$$

Два випадкові сигнали називаються некорельованими, якщо

$$r_{xy}(m) = 0.$$

Білий шум відрізняється від випадкових сигналів інших типів тим, що його поточне значення не залежить від усіх попередніх. Оскільки внутрішній взаємозв'язок між значеннями білого шуму відсутній, то послідовність його відліків $\{y(n)\}$ складається з незалежних, однаково розподілених випадкових величин. У разі розподілу за нормальним законом білий шум повністю описується математичним очікуванням μ_v і коваріаційованою функцією

$$r_v(m) = \sigma_v^2 \cdot \delta(m) \quad (12.7)$$

де $\delta(m)$ - символ Кронекера, що визначається рівністю:

$$\delta(m) = \begin{cases} 1, & \text{при } m = 0; \\ 0, & \text{при } m \neq 0. \end{cases} \quad (12.8)$$

Векторний випадковий сигнал (процес) порядку M являє собою сукупність M скалярних сигналів. Взаємозв'язок окремих скалярних складових описується коваріаційною матрицею, що складається із усіяляких функцій вигляду (12.6).

12.2. Генерація лінійною дискретною системою випадкових сигналів

Білий шум відіграє важливу роль в імовірнісному аналізі - усі випадкові процеси генеруються його фільтрацією. Нехай $v(n)$ - дискретний білий шум у нормованому часі. Процес, що виробляється системою, описуваною різницеvim рівнянням

$$x(n) = b_0 v(n) + b_1 v(n-1) + \dots + b_n v(n-N), \quad (12.9)$$

називається *ковзаючим середнім*. Відповідно до п. 4.3 рівняння (12.9) відображає в часову область нерекурсивну ЛДС порядку M . Вихідний сигнал такої системи розглядається $x(n)$ як зважена сума N відліків вхідного білого шуму.

Якщо сигнал, що виробляється системою, описується різницеvim рівнянням

$$x(n) = b_0 v(n) - a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2) - \dots - a_N x(n-N), \quad (12.10)$$

то процес називається *авторегресійним*. Рівняння (12.10) відповідає виходу рекурсивного ланцюга порядку N , що збуджується білим шумом $v(n)$.

Авторегресійні процеси відіграють важливу роль у лінійному прогнозуванні.

Різницеve рівняння (12.10) порядку N методами простору станів, описаними в розділі 8, легко звести до системи N лінійних рівнянь. У матричному записі рівняння стану й виходу матимуть вигляд

$$\bar{q}(n+1) = A\bar{q}(n) + Bv(n), \quad (12.11)$$

$$x(n+1) = C\bar{q}(n) + b_0 v(n), \quad (12.12)$$

де матриці A , B і C визначені наступним чином:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}, C = [-a_N - a_{N-1} \dots - a_1]$$

Структурна схема, що відповідає ЛДС 2-го порядку, наведена на рис. 8.2. При цьому треба врахувати, що $b_1 = b_2 = 0$.

Для випадкових сигналів неможливо точно визначити їх майбутнє значення. Тому природним розвитком поняття стану для цих процесів є вимога, щоб розподіл імовірності наступного стану однозначно визначався поточним, тобто:

$$p[x(n) | x(n-1), \dots, x(0)] = p[x(n) | x(n-1)], \quad (12.13)$$

де $p[\cdot]$ - умовна густина імовірності. Стохастичні процеси, що володіють такою властивістю, отримали назву *марківських*. Даному вище визначенню марківського процесу відповідає сигнал, що описується скалярним різницевою рівнянням першого порядку:

$$x(n+1) = ax(n) + v(n), \quad (12.14)$$

яке встановлює зв'язок між майбутнім значенням $x(n+1)$ і поточними значеннями $x(n)$ й $v(n)$. Якщо $v(n)$ - білий шум, то $x(n)$ є марківським процесом, що генерується ЛДС першого порядку. Її структурна схема зображена на рис. 12.1.

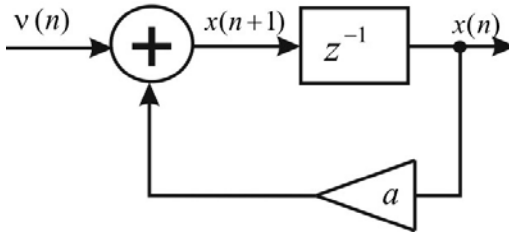


Рис. 12.1. Модель генерації марківського процесу.

При введенні в розділі 8 змінних стану під ними малися на увазі сигнали на виходах елементів затримки. Це дозволяє припустити, що марківські процеси є не що інше, як стохастичний еквівалент моделей лінійних дискретних систем у просторі станів. Тому рівняння (12.14) називають лінійним стохастичним різницевим рівнянням.

12.3. Властивості лінійних стохастичних різницевих рівнянь

Дослідимо характер випадкового процесу (у загальному випадку векторного), заданого лінійним стохастичним різницевим рівнянням:

$$\bar{x}(n+1) = A\bar{x}(n) + \bar{V}(n), \quad (12.15)$$

де $\bar{x}(n)$ і $\bar{V}(n)$ - вектор-стовпці розміру $N \times 1$; A - квадратна перехідна матриця розміру $N \times N$.

Передбачається, що початковий стан має математичне очікування $\bar{\mu}_x(0)$ й матрицю коваріації $R_x(0)$. Векторний білий шум володіє нульовим математичним очікуванням і коваріаційною матрицею R_v . Обчислимо математичне очікування й коваріаційну матрицю процесу $\bar{x}(n)$ у довільний момент часу.

Для отримання математичного очікування застосовують оператор $E[\cdot]$ до обох частин рівняння (12.15)

$$\bar{\mu}_x(n+1) = A\bar{\mu}_x(n) \quad (12.16)$$

з початковою умовою $\bar{\mu}_x(0)$. Отже, математичне очікування марківського процесу передається в часі так само, як і в системі без шуму.

Щоб обчислити коваріаційну матрицю, введемо матричну функцію:

$$P(n) = E \left[\bar{U}(n) \bar{U}^T(n) \right], \quad (12.17)$$

де $\bar{U}(n) = \bar{x}(n) - \bar{\mu}_x(n)$

З рівнянь (12.15) і (12.16) випливає, що $\bar{U}(n)$ задовольняє рівняння (12.15) з нульовим початковим математичним очікуванням. Для обчислення коваріаційної матриці побудуємо вираз

$$\begin{aligned} \bar{U}(n+1) \cdot \bar{U}^T(n+1) &= [A\bar{U}(n) + \bar{V}(n)] [A\bar{U}(n) + \bar{V}(n)]^T = \\ &= A\bar{U}(n)\bar{U}^T(n)A^T + A\bar{U}(n)\bar{V}^T(n) + \bar{V}(n)\bar{U}^T(n)A^T + \\ &+ \bar{V}(n)\bar{V}^T(n). \end{aligned} \quad (12.18)$$

Визначаючи математичні очікування правої й лівої частин (12.18) і враховуючи незалежність $\bar{V}(n)$ і $\bar{U}(n)$, отримуємо:

$$P(n+1) = AP(n)A^T + R_v \quad (12.19)$$

з початковою умовою $P(0) = R_x(0)$. Рекурентне рівняння (12.19)

визначає передавання в часі коваріації процесу $\bar{x}(n)$.

Щоб обчислити коваріаційну матрицю стану, зазначимо, що:

$$\bar{U}(n+1) \cdot \bar{U}^T(n) = [A\bar{U}(n) + \bar{V}(n)] \bar{U}^T(n).$$

Оскільки $\bar{V}(n)$ й $\bar{U}(n)$ незалежні й математичне очікування білого шуму $\bar{V}(n)$ дорівнює нулю, то коваріаційна матриця процесу $x(n)$ в момент часу $n+1$:

$$R_x(n+1) = AP(n). \quad (12.20)$$

Для прогнозування еволюції коваріаційної матриці на m часових інтервалах повторюємо наведені міркування і маємо

$$R_x(n+m) = A^m P(n). \quad (12.21)$$

Якщо випадковий процес нормальний, то він однозначно визначається своїми математичним очікуванням і коваріаційною матрицею. Різні члени в рівнянні (12.19) мають певну фізичну інтерпретацію. Коваріаційна матриця $P(n)$ це невизначеність стану в момент часу n . Добуток $AP(n)A^T$ показує, як передається

невизначеність відповідно до динаміки системи. Матриця R_v описує збільшення невизначеності внаслідок наявності збурення $\bar{V}(n)$.

Приклад 12.1

Розглянемо ЛДС першого порядку зі скалярним вектором стану $x(n)$ й скалярним білим шумом $v(n)$ з нульовим математичним очікуванням і коваріаційною функцією $r_v(m)$. Нехай стан у момент часу $n=0$ має математичне очікування $\mu_x(0)$ й коваріаційну функцію $r_x(0)$. Динаміка даної системи описуватиметься різницеvim рівнянням

$$x(n+1) = ax(n) + v(n). \quad (12.22)$$

З (12.16) випливає, що математичне очікування процесу відповідно до (12.22) змінюється так:

$$\mu_x(n+1) = a\mu_x(n) \quad (12.23)$$

при відомій початковій умові $\mu_x(0)$. Розв'язуючи (12.23) для довільного моменту часу, отримуємо:

$$\mu_x(n) = a^n \mu_x(0). \quad (12.24)$$

Рівняння (12.19) для коваріаційної функції дає

$$P(n+1) = a^2 P(n) + r_v, \quad (12.25)$$

де $P(0) = r_x(0)$.

Ітераційна процедура розв'язування (12.25) призводить до наступного результату:

$$P(n) = a^{2n} r_x(0) + \frac{1-a^{2n}}{1-a^2} r_v. \quad (12.26)$$

Якщо $|a| < 1$, то з (12.24) і (12.26) випливає при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mu_x(n) &\rightarrow 0, \\ p(n) &\rightarrow \frac{r_v}{1-a^2}. \end{aligned}$$

У цьому випадку процес стає стаціонарним, оскільки математичне очікування є константа, а коваріаційна функція не залежить від часу.

Умова, що призводить до стаціонарності ($|a| < 1$), відповідає тому, що полюс передавальної функції ЛДС

$$Z_* = a$$

знаходиться усередині одиничного круга на Z -площині. Отже, стійка ЛДС 1-го порядку, що описується рівнянням (12.22), породжує на виході стаціонарний випадковий процес при $n \rightarrow \infty$.

Більш загальний вигляд лінійні стохастичні різницеви рівняння набувають у разі об'єднання виразів (12.9) і (12.10) в єдине ціле:

$$\begin{aligned} x(n) = & b_0 v(n) + b_1 v(n-1) + \dots + \\ & + b_N v(n-N) - a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2) - \dots - a_N x(n-N). \end{aligned} \quad (12.26)$$

Рівняння (12.26) описує скалярний змішаний *авторегресійний процес із ковзаючим середнім*. Вихідна випадкова послідовність $x(n)$ є функцією незалежного збуджуючого шуму $v(n)$ і лінійною комбінацією N попередніх своїх відліків. У цьому випадку говорять, що лінійна дискретна система породжує *марківський випадковий сигнал порядку N* , оскільки кожний його відлік залежить від N попередніх. З погляду загальної теорії ЛДС, викладеної в п. 5.1, сигнал $x(n)$ можна розглядати як вихід цифрового ланцюга, що має передавальну функцію

$$H(Z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}, \quad (12.27)$$

що збуджується білим шумом $v(n)$ з нульовим середнім і одиничною дисперсією. Структурні схеми подібних рекурсивних ланцюгів довільного порядку детально розглядалися в розділі 7.

За допомогою методів простору станів можна отримати еквівалент стохастичного різницевого рівняння (12.26), звівши його до

системи N лінійних рівнянь, що мають, наприклад, вигляд (12.11) і (12.12). З погляду теорії випадкових функцій відбувається декомпозиція марківського процесу N -го порядку, і він перетворюється на векторний (розмірності N) марківський процес першого порядку. У разі раціонального вибору змінних стану кожна компонента векторного процесу може мати фізично наочну інтерпретацію як вихід свого елемента затримки в структурній схемі ЛДС.

Таким чином, широкий клас випадкових дискретних сигналів може описуватися параметричними моделями, які являють собою марківські процеси, що значною мірою полегшує їх теоретичний аналіз.

13. Проходження випадкових сигналів через лінійні дискретні системи

У даному розділі будуть розглянуті різні способи аналізу процесу проходження випадкових послідовностей через ЛДС з постійними параметрами.

13.1. Аналіз у часовій області

Розглянемо ЛДС з імпульсною характеристикою $h(n)$ (час нормований). Нехай на її вхід впливає скалярна випадкова послідовність $x(n)$ із математичним очікуванням $\mu_x(n)$ і автоковаріаційною функцією $r_x(n)$. На виході системи виникає випадкова послідовність $y(n)$, що володіє своїми ймовірнісними характеристиками. Визначимо їх.

У часовій області зв'язок вхід-вихід відповідно до (4.7) і (4.8) описується формулою згортки

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(n-m)x(m) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m). \quad (13.1)$$

Визначивши математичні очікування лівої і правої частин рівності (13.1), отримаємо:

$$\begin{aligned} \mu_y(n) = E[y(n)] &= \left[\sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) \right] = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)E[x(n-m)] = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} h(m)\mu_x(n-m). \end{aligned} \quad (13.2)$$

Таким чином, математичне очікування вихідного процесу отримаємо при подачі на вхід системи математичного очікування початкового сигналу $x(n)$.

Визначимо й відразу обчислимо *середню потужність* вихідної послідовності

$$\bar{P}_y = E[y^2(n)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N y^2(n) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h(k)h(m)x(n-k)x(n-m) \right] = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h(k)h(m) \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N x(n-k)x(n-m) \right].
\end{aligned}$$

Вираз у квадратних дужках є, за визначенням, середньою потужністю входної послідовності \bar{P}_x і, відповідно,

$$\bar{P}_y = \bar{P}_x \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n). \quad (13.3)$$

Якщо вхідний сигнал має нульове середнє значення, то, відповідно до (13.3) і (12.4),

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n). \quad (13.4)$$

Перш ніж визначити коваріаційну функцію вихідного процесу $r_y(m)$, зазначимо, що віднімання (13.2) з (13.1) дає

$$y(n) - \mu_y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) [x(n-m) - \mu_x(n-m)].$$

Відповідно, різниця між вхідним сигналом і його математичним очікуванням передається через ЛДС так само, як і сам вхідний сигнал. Тому при обчисленні коваріаційних функцій можна допустити, що математичні очікування дорівнюють нулю, що істотно спрощує викладення. Визначення автоковаріаційної функції приводить до наступного результату:

$$\begin{aligned}
r_y(m) &= E[y(n+m) \cdot y(n)] = E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n+m-k) \cdot \sum_{l=0}^{\infty} h(l)x(n-l) \right\} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h(k)h(l) E[x(n+m-k)x(n-l)] =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h(k)h(l)r_x(m+l-k). \quad (13.5)$$

Аналогічно можна отримати формулу для взаємної коваріаційної функції, вихідної послідовності, скориставшись виразом (12.6):

$$\begin{aligned} r_{yx}(m) &= E[x(n+m)x(n)] = E\left[\sum_{l=0}^{\infty} h(l)x(n+m-l)x(n)\right] = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} h(l)E[x(n+m-l)x(n)] = \sum_{l=0}^{\infty} h(l)r_x(m-l). \end{aligned} \quad (13.6)$$

Вираз (13.6) являє собою згортку автоковаріаційної функції одного процесу з імпульсною характеристикою ЛДС. Обчислення у формулах (13.5) і (13.6) ґрунтувалися на припущенні про існування нескінченних сум і на вільній зміні порядку сумування й операції взяття математичного очікування. Справедливість подібних дій можна довести, якщо припустити, що четвертий момент вхідного сигналу кінцевий, а збіжність розуміється в середньоквадратичному змісті.

13.2. Аналіз у частотній області

Зв'язки, що виражені рівняннями (13.5) і (13.6), можна описати в більш простій формі, якщо ввести поняття *спектральної густини потужності випадкового процесу*. Згідно з теоремою Хінчіна-Вінера, вона є Фур'є-образом автоковаріаційної функції. На підставі співвідношень, отриманих у п. 6.1, спектральну густину потужності визначаємо як

$$S_y(\hat{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_y(n) e^{-j\hat{\omega}n}. \quad (13.7)$$

Підставляючи в (13.7) вираз для $r_y(n)$ з (13.5), отримаємо:

$$\begin{aligned} S_y(\hat{\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\hat{\omega}n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h(k)h(l)r_x(m+l-k) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-j(n+l-k)\hat{\omega}} r_x(m+l-k) e^{-j\hat{\omega}l} h(l) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{-jk\hat{\omega}} h(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\hat{\omega}} r_x(n) \sum_{l=0}^{\infty} e^{-jl\hat{\omega}} h(l) \right]. \quad (13.8)$$

Користуючись визначенням для частотної характеристики $H(e^{j\hat{\omega}})$, введеним в п. 6.1., рівняння для спектральної густини потужності (13.8) можна записати так:

$$S_y(\hat{\omega}) = H(e^{\hat{\omega}}) S_x(\hat{\omega}) H(e^{-j\hat{\omega}}) \quad (13.9)$$

На підставі рівняння (13.6) для взаємної спектральної густини потужності

$$\begin{aligned} S_{yx}(\hat{\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\hat{\omega}} r_{yx}(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\hat{\omega}} \sum_{k=0}^{\infty} h(k) r_x(n-k) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} h(k) e^{-jk\hat{\omega}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-jn\hat{\omega}} r_x(n) = H(e^{j\hat{\omega}}) S_x(\hat{\omega}). \end{aligned} \quad (13.10)$$

На підставі проведеного аналізу можна зробити наступні висновки:

1. Якщо вхідний сигнал ЛДС – це стаціонарний випадковий процес із математичним очікуванням μ_x і спектральною густиною потужності $S_x(\hat{\omega})$, то для стійкої системи вихідний сигнал є також стаціонарним процесом із математичним очікуванням

$$\mu_y = H(1) \mu_x \left(\hat{\omega} = 0 \right). \quad (13.11)$$

2. Вихідна і взаємна спектральна густини потужності визначаються співвідношеннями (13.9) і (13.10). Результат (13.9) має просту фізичну інтерпретацію. Спектральна густина потужності вихідного сигналу – це добуток квадрата АЧХ системи на спектральну густину потужності входу, оскільки

$$H\left(e^{j\hat{\omega}}\right)H\left(e^{-j\hat{\omega}}\right) = A^2\left(\hat{\omega}\right). \quad (13.12)$$

З рівняння (13.10) випливає, що взаємна спектральна густина потужності дорівнює частотній характеристиці системи, якщо на вході маємо білий шум з одиничною спектральною густиною потужності. Цю властивість можна використовувати для визначення частотної характеристики $H\left(e^{j\hat{\omega}}\right)$ ЛДС.

Приклад 13.1

Розглянемо процес $x(n)$, описаний у прикладі 12.1. З погляду співвідношення вхід-вихід можна вважати, що він породжується системою з передавальною функцією:

$$H(Z) = \frac{z^{-1}}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{z - a}, \quad (13.13)$$

на вхід якої поступає білий шум. Оскільки спектральна густина процесу $v(n)$ постійна й дорівнює

$$S_v\left(\hat{\omega}\right) = \frac{r_v}{2\pi},$$

то з рівняння (13.9) випливає, що спектральна густина потужності генерованого процесу $x(n)$ буде дорівнює

$$\begin{aligned} S_x\left(\hat{\omega}\right) &= H\left(e^{j\hat{\omega}}\right)H\left(e^{-j\hat{\omega}}\right)\frac{r_v}{2\pi} = \\ &= \frac{r_v}{2\pi} \cdot \frac{1}{\left(e^{j\hat{\omega}} - a\right)\left(e^{-j\hat{\omega}} - a\right)} = \frac{r_v}{2\pi\left(1 + a^2 - 2a\cos\hat{\omega}\right)}. \end{aligned}$$

При розрахунку використовувався відомий з (6.10) факт, що:

$$H\left(e^{j\hat{\omega}}\right) = H(z) \Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}}.$$

13.3. Спектральна факторизація

Розглянемо задачу знаходження такої лінійної дискретної системи (її передавальної функції), вихідний випадковий сигнал якої має задану спектральну густину потужності, якщо на її вхід поступає білий шум. Розв'язання цієї задачі має важливе значення, оскільки воно показує, як, перетворюючи білий шум, можна генерувати випадковий сигнал із необхідними характеристиками. Крім того, розв'язок дозволяє визначити, наскільки універсальна модель (12.15). З п. 13.2 випливає, що випадковий процес, який виробляється ЛДС, на вхід якої поступає білий шум, має спектральну густину потужності, що задається співвідношенням (13.9).

Якщо система кінцеворозмірна, то частотна характеристика $H(e^{j\hat{\omega}})$ й спектральна густина потужності $S(\hat{\omega})$ - раціональні функції від $e^{j\hat{\omega}}$. З невеликим припущенням таку спектральну густину потужності називають раціональною. Ураховуючи, що при переході на z -площину

$$Z = e^{j\hat{\omega}},$$

для правої частини (13.9) можна увести нову функцію:

$$F(z) = H(z)H(z^{-1}). \quad (13.14)$$

Якщо $z_{o,j}$ - корінь функції $H(z)$, то $z_{o,j}^{-1}$ - корінь $H(z^{-1})$. Таким чином, нулі функції $F(z)$ симетричні щодо дійсної осі комплексної z -площини і інверсні щодо одиничного кола в припущенні, що коефіцієнти раціональної функції $F(z)$ - дійсні числа. Це міркування має силу й для полюсів функції $F(z)$. На рис. (13.1) наведений один із можливих варіантів симетрії нулів і полюсів.



Рис. 13.1. Симетрія нулів і полюсів шуканої системи

Нехай для простоти на вході ЛДС діє білий шум з одиничною спектральною густиною потужності $S_v(\hat{\omega}) = 1$. З (13.9) випливає, що необхідна спектральна густина потужності вихідного процесу $S_y(\hat{\omega})$ буде визначатися нулями й полюсами функції $F(z)$ (а отже, і $H(z)$).

Спочатку визначимо полюси z_{*j} й нулі z_{oj} , функції $F(z)$. Зі встановленої симетрії полюсів і нулів випливає, що вони завжди з'являються парами при дотриманні умов

$$z_{oi} z_{oj} = 1;$$

$$z_{*i} z_{*j} = 1.$$

У кожній парі вибираємо полюс або нуль, модуль якого не перевищує одиниці, а потім будемо з них необхідну передавальну функцію вигляду

$$H(z) = \frac{\prod_{i=0}^M (z - z_{oi})}{\prod_{j=1}^N (z - z_{*j})} = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (13.15)$$

Вибір полюсів усередині одиничного круга на z -площині забезпечить стійкість ЛДС і асимптотичну стаціонарність випадкового процесу, що генерується.

Наведені міркування дозволяють сформулювати результат. Якщо задана спектральна густина потужності $S(\hat{\omega})$, яка є раціональною функцією від $\cos \hat{\omega}$, то існує така лінійна система з передавальною функцією

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)},$$

що вихідний процес після подавання на вхід білого шуму буде

стаціонарним випадковим процесом зі спектральною густиною потужності $S(\hat{\omega})$. Многочлен $A(z)$ матиме корені усередині одиничного кола на z -площині, а $B(z)$ - всередині або на межі одиничного кола.

З цього результату випливають важливі наслідки:

1. Усі стаціонарні випадкові послідовності можна представляти як виходи стійких лінійних систем, на вхід яких подається білий шум. Схемна реалізація таких систем обмежується рекурсивними ланцюгами необхідного порядку. У цьому випадку достатньо розуміти поведінку системи при її збудженні білим шумом і мати нагоду моделювати його. Усі інші стаціонарні процеси з раціональною спектральною густиною потужності можуть бути отримані фільтрацією білого шуму.

2. Оскільки неперервну функцію на невеликому інтервалі можна скільки завгодно близько апроксимувати раціональною функцією [5], моделі (12.15) і (13.1) можуть описувати сигнали, спектри яких близькі до будь-якої неперервної функції.

3. З'являється можливість зображення для скалярних систем сумісного впливу кількох випадкових сигналів одним еквівалентним впливом, який визначається за допомогою обчислення загальної спектральної густини потужності вихідного сигналу й застосування розглянутої вище процедури.

Приклад 13.2

Нехай спектральна густина потужності випадкового процесу має вигляд

$$S(\hat{\omega}) = \frac{1,04 + 0,4 \cos \hat{\omega}}{1,25 + \cos \hat{\omega}}.$$

Необхідно знайти передавальну функцію ЛДС, що генерує подібний процес з білого шуму.

Розглянемо розкладання $S(\hat{\omega})$:

$$S(\hat{\omega}) = \frac{1,04 + 0,4 \cos \hat{\omega}}{1,25 + \cos \hat{\omega}} = \frac{e^{j\hat{\omega}} + 0,2}{e^{j\hat{\omega}} + 0,5} \cdot \frac{e^{-j\hat{\omega}} + 0,2}{e^{-j\hat{\omega}} + 0,5}$$

Йому відповідають наступні передавальні функції:

$$H_1(z) = \frac{z + 0,2}{z + 0,5};$$

$$H_2(z) = \frac{1 + 0,2z}{z + 0,5} = 0,2 \frac{z + 0,5}{z + 0,5};$$

$$H_3(z) = \frac{z + 0,2}{1 + 0,5z} = 2 \frac{z + 0,2}{z + 2};$$

$$H_4(z) = \frac{1 + 0,2z}{1 + 0,5z} = 0,4 \frac{z + 5}{z + 2}.$$

Зазначимо, що тільки $H_1(z)$ не має нулів і полюсів зовні одиничного круга на z -площині. Це означає, що стійка система, яка генерує випадкову послідовність із заданою спектральною густиною, може бути реалізована за допомогою наступної схеми (див. рис. 13.2):

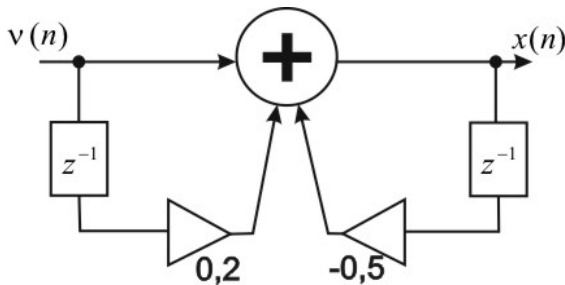


Рис. 13.2. Схема генератора випадкової послідовності

Спектральна факторизація дає потужний і конструктивний спосіб синтезу лінійних дискретних систем, що збуджуються білим шумом, для генерування випадкових послідовностей із заданими характеристиками.

14. Квантування сигналів у цифрових системах

Цифрова система обробки сигналів - це дискретна система, що описується різницеvim рівнянням і реалізована програмним шляхом на ЕОМ або апаратним шляхом у вигляді спеціалізованого цифрового обчислювача (процесора обробки сигналів, DSP).

Для зображення коефіцієнтів системи й відліків сигналу, що обробляється, у цифровій системі використовуються елементи пам'яті (реєстри, комірки пам'яті), розрядність яких кінцева. Операційні пристрої (суматори, помножувачі) також мають обмежену розрядність. Отже, коефіцієнти системи й відліки сигналу, що обробляється, зображаються з обмеженою точністю. Обмеження розрядності елементів пам'яті й операційних пристроїв системи приводить до *операції квантування*.

Квантування - це нелінійна операція. Її введення в алгоритм обробки сигналу, що описується лінійним дискретним рівнянням, викликає появу помилок у реалізації алгоритму. Ці помилки називаються *помилками квантування*.

У даному розділі описуються форми зображення й способи кодування чисел, ефекти, пов'язані з виконанням арифметичних операцій над числами, способи квантування чисел, джерела помилок (похибок) квантування, а також наводяться оцінки шуму квантування вхідного сигналу й оцінки відповідного шуму на виході системи [3, 4].

14.1. Зображення й кодування чисел

Дискретний сигнал є послідовністю відліків (чисел), що набувають довільних значень у деякому діапазоні.

Цифровий сигнал - це квантований за рівнем дискретний сигнал, тобто квантована послідовність відліків (чисел), які можуть набувати лише кінцевий ряд дискретних за величиною значень - рівнів квантування. Значення відліків цифрового сигналу відображаються числами у вибраній системі числення.

Розглянемо форми зображення й способи кодування чисел, а також ефекти, пов'язані з виконанням арифметичних операцій над числами.

Позиційні системи числення

Під *системою числення* (СЧ) розуміється спосіб зображення чисел за допомогою символів, що мають певну кількість значень.

Позиційною системою числення (ПСЧ) називається система числення, в якій кількісне значення кожного символу визначається ще й місцем (позицією), яке займає даний символ у записі числа.

Основою p позиційної СЧ називається число різних символів, що використовуються в даній ПСЧ.

У цифрових системах найбільш широко використовується зображення чисел у двійковій ($p = 2$), десятковій ($p = 10$) і шістнадцятковій ($p = 16$) системах числення. У табл. 14.1 наведені символи, що використовуються у вказаних СЧ.

Будь-яке число A можна зобразити у вигляді розкладання за ступенями ПСЧ:

$$A = \pm(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p^1 + a_0 p^0 + a_{-1} p^{-1} + \dots + a_{-m} p^{-m} + \dots), \quad (14.1)$$

де a_i - символи, що використовуються в даній ПСЧ. Число A в системі числення з основою p записується у вигляді послідовності символів a_i :

$$A(p) = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} \dots a_{-m}. \quad (14.2)$$

Таблиця 14.1

Символи в системах числення

Система числення	Символи
Двійкова	0,1
Десяткова	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
Шістнадцяткова	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

Кожний символ a_i , займає одну позицію в записі числа, яку називають *розрядом*. Коефіцієнт p^i при символі a^i називається *вагою* (*ваговим коефіцієнтом*) i -го розряду.

Приклад 14.1.

Зобразимо ціле десяткове число 109 і правильні десяткові дробу 0,6875 і 0,2 у двійковій і шістнадцятковій системах числення відповідно до (14.1) і (14.2). Результати наведені в табл. 14.2.

Таблиця 14.2

Приклади представлення чисел у системах числення

$A_{(10)}$	p	Розкладання	$A_{(p)}$
109	2	$1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	1101101
	$\frac{1}{6}$	$6 \cdot 16^1 + 13 \cdot 16^0 = 6 \cdot 16^1 + D \cdot 16^0$	6D
0,6875	2	$1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4}$	0.1011
	$\frac{1}{6}$	$11 \cdot 16^{-1} = B \cdot 16^{-1}$	0.B
0,2	2	$0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 0 \cdot 2^{-5} + 0 \cdot 2^{-6} + \dots$	0.00110011...
	$\frac{1}{6}$	$3 \cdot 16^{-1} + 3 \cdot 16^{-2} + 3 \cdot 16^{-3} + \dots$	0.333...

Як видно з прикладу 14.1, цілі десяткові числа зображаються у двійковій (шістнадцятковій) СЧ точно за допомогою обмеженої (що визначається величиною числа) кількості розрядів. Для точного зображення правильного десяткового дробу у двійковій (шістнадцятковій) СЧ може знадобитися необмежена кількість розрядів (наприклад $A_{(10)} = 0,2$).

Переведення числа з однієї ПСЧ в іншу здійснюється за наступними алгоритмами.

Алгоритм підстановки. Для переведення числа $A_{(p_1)}$ із ПСЧ з основою p_1 в ПСЧ з основою p_2 необхідно в зображення числа $A_{(p_1)}$ у вигляді (14.1) підставити значення основи p й розрядів a_i , записані в ПСЧ із основою p_2 , і обчислити отриману суму добутоків.

Приклад 14.2

Переведення двійкового числа $A_{(p_2)} = 1011.01$ в десяткову СЧ:

$$A_{(10)} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} = 11,25.$$

Переведення десяткового числа $A_{(10)} = 11,25$ у двійкову СЧ:

$$A_{(2)} = 1 \cdot 1010^{+1} + 1 \cdot 1010^0 + 10 \cdot 1010^{-1} + 101 \cdot 1010^{-10} \approx 1011,01.$$

Алгоритм послідовного ділення (переведення цілого числа). Для переведення цілого числа $A_{(p_1)}$ із ПСЧ з основою p_1 в ПСЧ з основою p_2 необхідно послідовно ділити число $A_{(p_1)}$ на число p_2 , записане в ПСЧ з основою p_2 , і виписати послідовно всі залишки від ділення, починаючи з останнього.

Приклад 14.3

Переведення десяткового числа $A_{(10)} = 109$ у двійкову СЧ:

$$\begin{array}{r} 109 \overline{) 2} \\ 108 \quad 54 \quad 2 \\ \hline 1 \quad 54 \quad 27 \quad 2 \\ \quad 0 \quad 27 \quad 13 \quad 2 \\ \quad \quad 1 \quad 12 \quad 6 \quad 2 \\ \quad \quad \quad 1 \quad 6 \quad 3 \quad 2 \\ \quad \quad \quad \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 1 \end{array}$$

$$A_{(2)} = 1101101.$$

Алгоритм послідовного множення (переведення правильного дробу). Для переведення правильного дробу $A_{(p_1)}$ із ПСЧ з основою p_1 в ПСЧ з основою p_2 необхідно послідовно помножити даний дріб на число p_2 , записане в ПСЧ з основою p_1 (перемножуючи тільки дробові частини), і виписати послідовно всі цілі частини отриманих добутоків, починаючи з першого.

Приклад 14.4

Переведення десяткового дробу $A_{(10)} = 0,6875$ у двійкову СЧ:

$$0,(6875*2)=1,3750$$

$$1,(3750*2)=0,7500$$

$$0,(7500*2)=1,5000$$

$$1,(5000*2)=1,0000$$

$$A_{(2)} = 0,1011.$$

Алгоритм переведення чисел із двійкової СЧ у шістнадцяткову СЧ. Для переведення числа $A_{(2)}$ в шістнадцяткову СЧ необхідно кожну тетраду двійкових чисел ліворуч і праворуч від коми замінити відповідним шістнадцятковим числом. Якщо кількість розрядів двійкового числа ліворуч (праворуч) від коми не кратне чотирьом, необхідно доповнити його ліворуч (праворуч) нулями.

Приклад 14.5

Переведення двійкового числа $A_{(2)} = 1101101.1011$ у шістнадцяткову СЧ:

$$1101101,1011 \rightarrow 0110\ 1101,1011$$

$$A_{(16)} = 6, D, B.$$

Для переведення чисел із шістнадцяткової СЧ у двійкову СЧ виконується зворотна операція.

Як правило, у пристроях ЦОС числа зображуються у двійковій СЧ, що пояснюється зручністю запам'ятовування й обробки двійкової інформації.

Форми зображення чисел

У системах ЦОС використовуються дві форми зображення чисел: з фіксованою й плаваючою комами.

При зображенні числа у формі з *фіксованою комою* вважається, що положення коми, що відділяє цілу частину числа від дробової частини, фіксовано. Розряди ліворуч від коми відображають цілу частину числа і його знак, а праворуч - дробову частину числа.

Усі розряди числа (разом зі знаковим) утворюють розрядну сітку.

Як правило, у системах ЦОС із фіксованою комою використовується нормування оброблюваних даних так, щоб усі арифметичні операції виконувалися з числами A , по абсолютним значенням, меншим за одиницю:

$$0 \leq |A| < 1. \quad (14.3)$$

Нехай розрядна сітка числа містить $m = b + 1$ двійкових розрядів. Старший розряд слугує для фіксації знака й називається знаковим. Наступні b розрядів слугують для фіксації дробової частини числа й називаються числовими. Кома фіксована між знаковим і числовими розрядами. У цьому випадку розрядна сітка завдовжки m дозволяє зобразити 2^b відмінних за абсолютним значенням чисел з кроком 2^{-b} і задовольняючих умову (14.3) у діапазоні

$$0 \leq |A| < 1 - 2^{-b}. \quad (14.4)$$

Якщо результат арифметичної операції виходить за верхню межу діапазону (14.4), відбувається переповнення розрядної сітки, що приводить до спотворення результату. За умови (14.3) указане переповнення може відбутися тільки при операціях додавання й віднімання.

Зображення числа A у формі з плаваючою комою базується на записі

$$A = (\pm \mu)p^{\pm\gamma}, \quad (14.5)$$

де p - основа системи числення; μ , γ - мантиса й порядок числа A відповідно.

Приклад 14.6.

Зобразимо двійкове число $A_{(2)} = +101.001$ й відповідне десяткове число $A_{(10)} = 5.125$ у вигляді (14.5):

$$A_{(2)} = +0.101001 \cdot 2^{+11}, \text{ де } p = 2, \mu_{(2)} = 0.101001, \gamma_{(2)} = 11,$$

$$A_{(10)} = +0.5125 \cdot 10^{+1}, \text{ де } p = 10, \mu_{(10)} = 0.5125, \gamma_{(10)} = 1.$$

У розрядній сітці, що містить m розрядів, $b_\gamma + 1$ розрядів відводиться для зображення порядку числа і його знаку, $b_\mu + 1$ розрядів - для зображення мантиси та її знака. Отже, $m = b_\gamma + b_\mu + 2$.

Діапазон зображення абсолютних значень двійкових чисел у формі з плаваючою комою визначається нерівністю

$$0 \leq |A| < (1 - 2^{-b_\mu}) \cdot 2^{2^{b_\gamma} - 1}. \quad (14.6)$$

З порівняння нерівностей (14.4) і (14.6) видно, що діапазон зображення чисел у формі з плаваючою комою істотно більший, ніж у разі зображення чисел з фіксованою комою. Проте найпростіші в реалізації й швидкодії цифрові системи використовують зображення чисел у формі з фіксованою комою. На цьому принципі будується більшість обчислювачів і ряд цифрових процесорів, наприклад сімейства TMS320 (TMS32010, TMS32020, TMS32050 і ін.) [4; 5].

Кодування чисел

Для кодування чисел із фіксованою комою використовуються три основні способи: прямий, зворотний і додатковий.

Розглянемо особливості способів кодування, виконуючи операції з додатними та від'ємними двійковими числами A :

$$A = \pm 0.a_1a_2\dots a_b,$$

що задовольняють умову (14.3), розрядна сітка чисел містить $m = b + 1$ розрядів.

Прямий код числа A формується за наступним правилом. У знаковий розряд коду записується 0 (для додатних чисел) або 1 (для від'ємних чисел), числові розряди коду відповідають числовим розрядам (дробової частини) початкового числа:

$$[A]_{np} = \begin{cases} 0.a_1a_2\dots a_b, \text{ при } & A \geq 0; \\ 1.a_1a_2\dots a_b, \text{ при } & A \leq 0. \end{cases} \quad (14.7)$$

Приклад 14.7.

Зобразимо додатне число A і від'ємне число B , модуль яких дорівнює $0,10111$, у прямому коді. Відповідно до (14.7),

$$[A]_{np} = 0,10111 \text{ і } [B]_{np} = 1,10111.$$

Додатковий код числа A формується за наступним правилом. Додатковий код додатного числа збігається з прямим кодом, тобто $[A]_{\text{дод}} = [A]_{np}$. Для від'ємних чисел у знаковий розряд коду записується 1, числові розряди початкового числа інвертуються (0 замінюється на 1 і навпаки) і до молодшого числового розряду додається 1, тобто:

$$[A]_{\text{дод}} = \begin{cases} 0.a_1a_2\dots a_b, & \text{при } A \geq 0; \\ 1.\bar{a}_1\bar{a}_2\dots\bar{a}_b + 2^{-b}, & \text{при } A \leq 0. \end{cases} \quad (14.8)$$

При цьому передбачається, що числа A задовольняють умову (14.3).

Приклад 14.8.

Зобразимо від'ємне число $A = -0,10111$ у додатковому коді. Відповідно до (14.8),

$$[A]_{np} = 1,10111 \rightarrow + \begin{array}{r} 1,01000 \\ 1 \\ \hline 1,01001 \end{array}$$

$$[A]_{\text{дод}} = 1,01001.$$

Для переведення додаткового коду від'ємного числа в прямий код необхідно інвертувати числові розряди додаткового коду й додати 1 до молодшого розряду.

Приклад 14.9

Здійснимо зворотнє переведення додаткового коду числа $A = 1,01001$ (з прикладу 14.8) у прямий код:

1,10110

$$[A]_{\text{дод}} = 1,01001 \rightarrow + \frac{1}{\overline{1,10111}}$$

$$[A]_{\text{пр}} = 1,10111.$$

Слід зазначити, що додатковому коду $[A]_{\text{дод}} = 1,00\dots 0$ відповідає число $A = -1$, яке не можна перевести в додатковий код згідно з алгоритмом (14.8).

Зворотний код числа A формується за наступним правилом. Зворотний код додатного числа збігається з прямим кодом, тобто $[A]_{\text{зв}} = [A]_{\text{пр}}$. Для від'ємних чисел у знаковий розряд коду записується 1, числові розряди початкового числа інвертуються (0 замінюється на 1 і навпаки), тобто:

$$[A]_{\text{зв}} = \begin{cases} 0.a_1a_2\dots a_b, \text{ при } A \geq 0; \\ 1.\bar{a}_1\bar{a}_2\dots\bar{a}_b, \text{ при } A \leq 0. \end{cases} \quad (14.9)$$

При цьому передбачається, що числа A задовольняють умову (14.3).

Приклад 14.10.

Зобразимо негативне число $A = -0.10111$ у зворотному коді. Відповідно до (14.9),

$$[A]_{\text{обр}} = 1,01000.$$

Найширше в системах ЦОС використовується зображення чисел у додатковому коді, оскільки при цьому ефективно реалізуються операційні пристрої цифрової системи.

Основними арифметичними операціями над числами в системах ЦОС є *додавання і множення*. Алгоритми виконання операцій над числами детально описані в [6;7]. Нас же цікавитимуть питання,

пов'язані з розглядом ефектів квантування в системах ЦОС при виконанні вказаних операцій.

Арифметичні операції над числами з фіксованою комою

При складанні чисел з фіксованою комою, що задовільняють умову (15.3), може відбутися переповнення розрядної сітки. Розглянемо це явище на прикладі.

Приклад 14.11

Виконаємо операцію $Y = A + B$, де $A_{(10)} = 0,625$, $A_{(10)}$ і $B_{(10)} = 0,5$, тобто складемо двійкові числа $A_{(2)} = 0,101$ і $B_{(10)} = 0,100$ в додатковому коді. При цьому складові і результат зобразимо за допомогою m двійкових розрядів (в даному прикладі — чотирьох) :

$$\begin{array}{r} [A]_{don} = 0,101 \\ + \\ [B]_{don} = 0,100 \\ \hline [Y]_{don} = 1,001 \end{array}$$

Отже, при складанні двох позитивних чисел отриманий негативний результату (у знаковому розряді 1). Перетворимо результат у прямий код (див. п. 14.9): $[Y]_{пр} = 1,111$. Таким чином, $Y = -0,825$ (замість $Y_n = +1,125$). Поява неправильного результату природна, оскільки для зображення цілої частини числа в розрядній сітці не передбачено розрядів.

Операція $Y = F(Y_n)$ при $1 < Y_n < -1$ є нелінійною операцією. На Рис. 14.1 а, подана нелінійна характеристика суматора при складанні чисел у додатковому коді. При переповнюванні відбувається різке спотворення результату. Для зменшення помилок при можливих переповнюваннях розрядної сітки часто використовують суматор із насиченням, характеристика якого зображена на рис. 14.1, б.

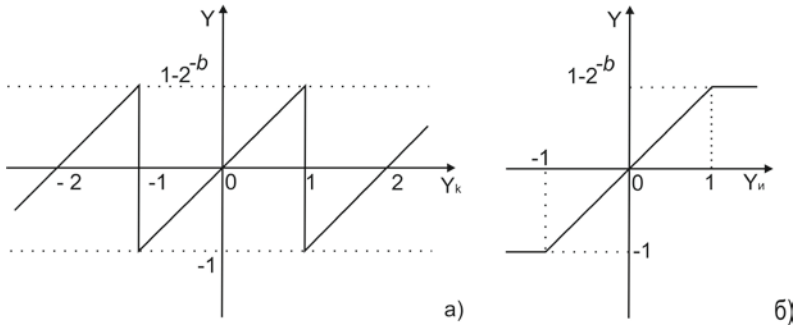


Рис.14.1. Нелінійна характеристика суматора

Водночас при відсутності переповнення операція складання чисел із фіксованою комою виконується точно в m -розрядній сітці.

Розглянемо тепер операцію *множення* двох чисел із фіксованою комою, причому $m = b + 1$, де b — кількість числових розрядів. Точне значення добутку містить (у загальному випадку) $2b$ числових розрядів і знаковий розряд.

Приклад 14.12

Виконаємо операцію $Y = AB$, де $A_{(10)} = 0,625$ і $B_{(10)} = 0,375$, тоді перемножимо двійкові числа $A_{(2)} = 0,101$ і $B_{(2)} = 0,011$ ($m = 4, b = 3$). Результат множення дорівнює

$$Y = AB = 0,234375_{(10)} = 0,001111_{(2)} .$$

Початкові співмножники містили $b = 3$ числових розрядів, а добуток містить $2b = 6$ числових розрядів.

Таким чином, якщо кожний із співмножників подається в $(b+1)$ -розрядній сітці (зберігається в $(b+1)$ -розрядному регістрі елемента пам'яті), то для отримання точного результату добуток повинен бути поданий у $(b+1)$ -розрядній сітці (вихідний регістр помножувача повинен мати $2b+1=2m-1$ розрядів). Як правило, у системах ЦОС відповідні регістри мають розрядність $2m$, причому $2b$ розрядів є числовими, а 2 розряди — знаковими.

Водночас при виконанні операції множення переповнення розрядної сітки виникнути не може, оскільки модуль добутку чисел, модулі яких менше 1, завжди також менше 1.

14.2. Квантування чисел і сигналів

Принципальною відмінністю дискретної системи від цифрової є введення в алгоритм обробки цифрової системи операції квантування відліків (чисел) сигналу, що обробляється, і коефіцієнтів системи. Необхідність введення операції квантування зумовлена обмеженою розрядністю регістрів (елементів пам'яті) цифрової системи.

Способи квантування чисел

Квантування числа — це зображення останнього за допомогою кінцевої кількості (b) числових розрядів. Операція квантування є нелінійною і вносить у зображення квантованого числа A помилку

$$e = F(a) - A, \quad (14.10)$$

де A — число до квантування; $F(A)$ — число після квантування (після виконання нелінійної операції F).

Кроком квантування Q називається відстань між двома сусідніми рівняннями квантування. Розглядатимемо операцію квантування з постійним кроком. У цьому випадку $Q = \text{const}$. Крок квантування визначається вагою молодшого числового розряду $Q = 2^{-b}$ (основа системи числення $p = 2$).

Зауваження

Далі в даному розділі для зображення чисел використовується двійкова система числення.

Наочно процес квантування декількох чисел (відліків дискретної послідовності) зображений на рис. 14.2. На рис. 14.2, *a* пунктирною лінією показаний аналоговий сигнал, з якого отримані відліки дискретної послідовності. Дискретні значення відліків позначені крапками на аналоговому сигналі. На рис. 14.2, *б* зображений квантований сигнал, значення якого розташовані на рівнях квантування.

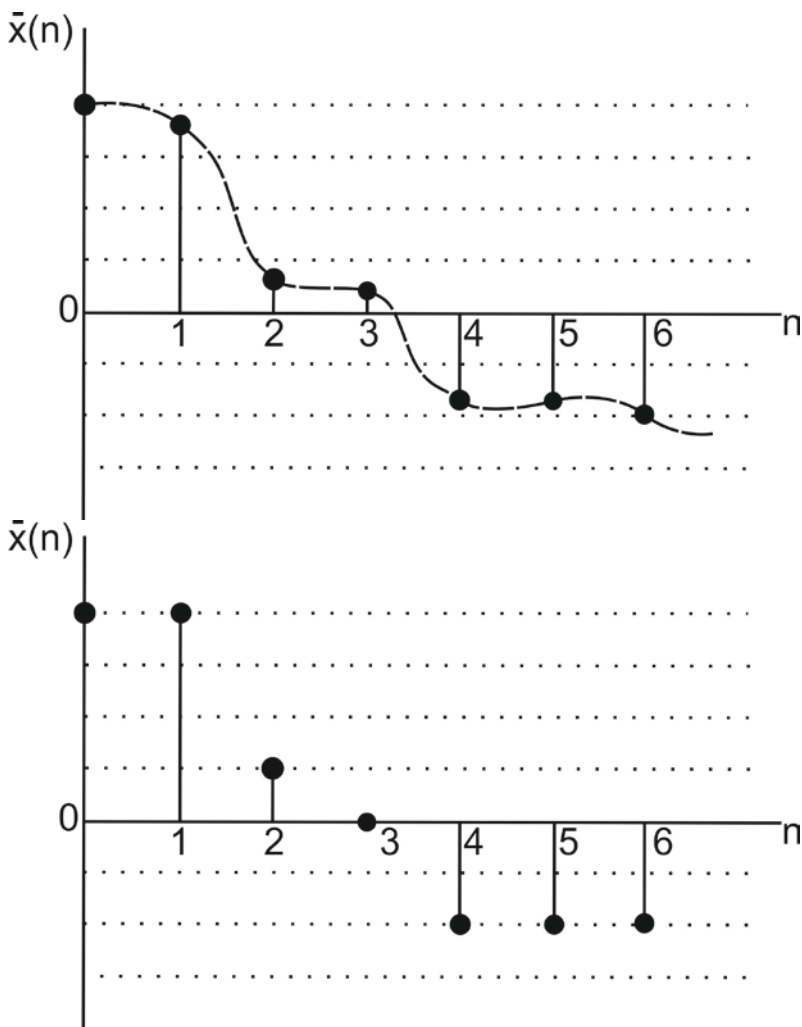


Рис.14.2. Процес квантування дискретної послідовності

При квантуванні використовується два способи: округлення і усікання. При *округленні* числа до b числових розрядів початкове k -розрядне число ($b < k < \infty$) *замінюється* на найближче b -розрядне (що відповідає вибору найближчого рівня квантування).

Помилка квантування (14.10) при округленні із застосуванням будь-якого способу кодування відповідає нерівності

$$-Q/2 \leq e \leq Q/2 \quad (14.11)$$

тобто не перевищує за абсолютною величиною половини кроку квантування $Q = 2^{-b}$. Відзначимо, що в (14.11) вважається, що $k \gg b$. Характеристика нелінійності, що відповідає операції квантування, подана на рис. 14.3, а.

Числам A , модуль яких менше ніж $(2/2)$, відповідають квантовані числа $D_{кв}=0$. Числам, що лежать в інтервалі $(Q/2, 3Q/2)$, відповідають квантовані числа $A_{кв}=Q$ і т. д.

Звичайно при аналізі робиться припущення, що всі можливі значення помилки в межах діапазону (14.11) рівномірні, тобто помилка квантування є випадковою величиною з рівномірною густиною розподілу. Графік густини розподілу помилки квантування (при округленні) наведений на Рис. 14.3, б.

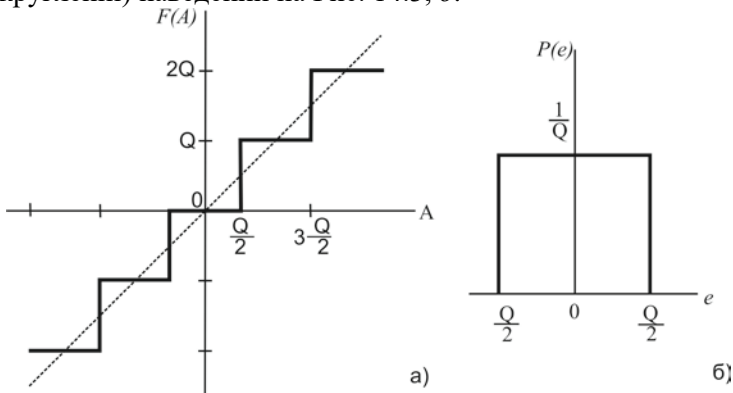


Рис.14.3. Характеристика нелінійності і густина розподілу помилки квантування при округленні числа

При усіканні k -розрядного числа до b числових розрядів ($b < k < \infty$) молодші $(k-b)$ розрядів початкового числа відкидаються. Помилка квантування (14.10) при усіканні задовольняє нерівності (вважаючи, що $k \gg b$):

- для позитивних чисел при будь-якому способі кодування і негативних чисел у додатковому коді

$$-2^{-b} \leq e \leq 0; \quad (14.12)$$

- для негативних чисел у прямому і зворотному кодах

$$0 \leq e \leq 2^{-b} \quad (14.13)$$

Характеристика нелінійності, що відповідає операції усікання для додаткового коду, наведена на рис. 15.4, а. Відповідна густина розподілу помилки квантування зображена на рис. 15.4, б.

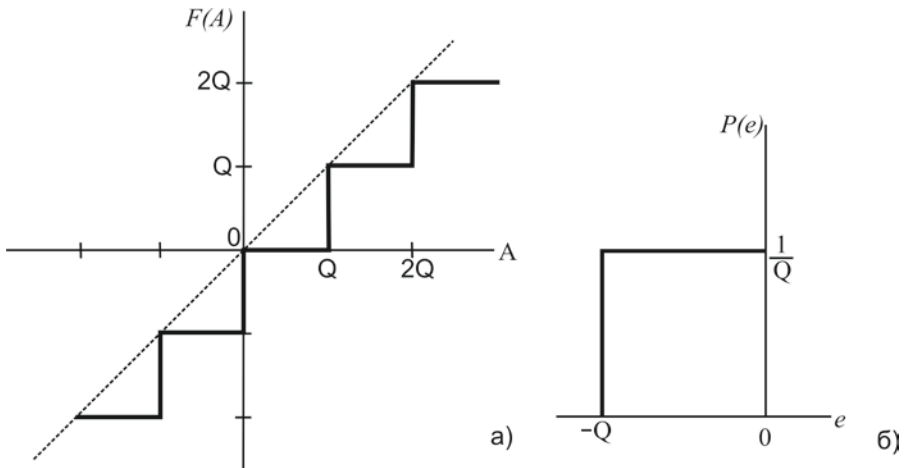


Рис.14.4. Характеристика нелінійності й густина розподілу помилки квантування при усіканні числа

Лінійна модель процесу квантування вхідного сигналу. Оцінки шуму АЦП

Для наближеного опису нелінійної операції квантування вхідного сигналу при аналітичному дослідженні процесів у цифрових системах використовується лінійна модель процесу квантування. Лінійна модель процесу квантування вхідного сигналу зображена на рис. 15.5, а. Дискретизатор Д перетворить аналоговий сигнал $x(t)$ в дискретну послідовність $x(n)$ ($k = \infty$ — необмежена кількість розрядів). До цієї послідовності додається дискретний сигнал, що враховує помилку квантування $e_A(n)$ при формуванні b_A числових розрядів підсумкової цифрової послідовності. Вихідний сигнал лінійної моделі — квантований (цифровий) сигнал $x(n)$.

На практиці операції лінійної моделі (дискретизація і квантування до b числових розрядів) реалізуються в аналогово-цифровому перетворювачі (АЦП), тому помилку квантування (шум квантування) $e_A(n)$ вхідного сигналу часто називають шумом АЦП. Для сигналу помилки $e_A(n)$ вводиться ряд допущень:

- послідовність $e_A(n)$ є стаціонарною і ергодичним дискретним випадковим процесом;
- розподіл вірогідності помилок є рівномірним за діапазоном помилок квантування;
- будь-які два відліки послідовності $e_A(n)$ не корельовано, тобто послідовність $e_A(n)$ є дискретним випадковим процесом типу "білий шум";
- послідовність $e_A(n)$ не корельована з дискретним сигналом $x(n)$.

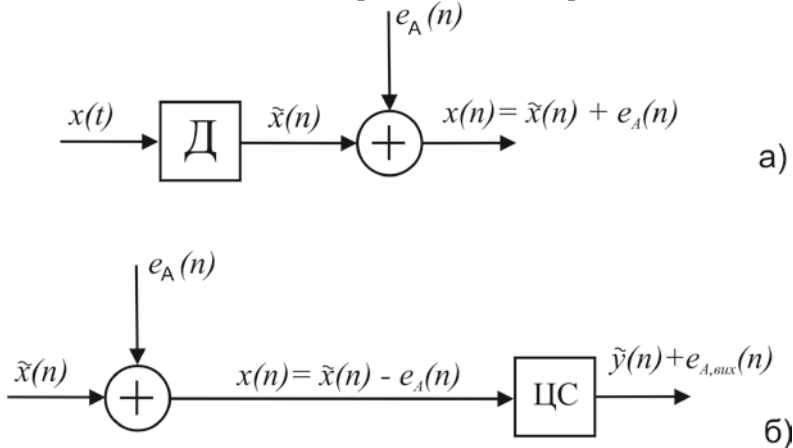


Рис. 14.5. Лінійні моделі процесу квантування вхідного й вихідного сигналів

Введення вказаних допущень дозволяє достатньо просто проаналізувати ефекти квантування сигналів у цифрових системах. Розглянемо деякі *оцінки вірогідності шуму квантування вхідного сигналу*. Математичне очікування μ_A і дисперсія δ_A^2 помилки квантування $e_A(n)$ визначаються за формулами

$$\mu_A = E[e_A(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} e_A(n) p_A(e) de_A(n)$$

$$\delta_A^2 = E[(e_A(n) - \mu_A)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} e_A^2(n) p_A(e) de_A(n) = E[e_A^2(n)] - \mu_A^2,$$

де $p_A(e)$ — густина вірогідності шуму квантування $e_A(n)$; $E[\cdot]$ — оператор математичного очікування. За цими формулами обчислюються математичне очікування (середнє значення) і дисперсія шуму квантування при операціях округлення й усікання.

Зауваження

Далі в даному розділі вважатимемо, що квантуванню піддаються числа, подані у формі з фіксованою комою в додатковому коді.

З урахуванням вказаного зауваження отримаємо значення математичного очікування і дисперсії шуму АЦП при округленні чисел (графік густини вірогідності $P_A(E)$ шуму квантування наведений на рис. 15.3)

$$\mu_A = \int_{-\infty}^{\infty} e_A(n) p_A(e) de_A(n) = \int_{-Q_A/2}^{Q_A/2} e_A(n) \frac{1}{Q_A} de_A(n) = \frac{1}{Q_A} \left. \frac{e_A^2(n)}{2} \right|_{-Q_A/2}^{Q_A/2} = 0; \quad (14.14)$$

$$\sigma_A^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e_A^2(n) p_A(e) de_A(n) = \int_{-Q_A/2}^{Q_A/2} e_A^2(n) \frac{1}{Q_A} de_A(n) = \frac{1}{Q_A} \left. \frac{e_A^3(n)}{3} \right|_{-Q_A/2}^{Q_A/2} = \frac{Q_A^2}{12}, \quad (14.15)$$

де $Q_A = 2^{-b_A}$ — крок квантування; b_A — кількість числових розрядів АЦП.

Виконуючи аналогічні перетворення при операції усікання чисел (графік густини вірогідності $p_A(e)$ шуму квантування поданий на рис. 15.4), отримаємо значення:

$$\mu_A = -Q_A/2, \quad \delta_A^2 = Q_A^2/12.$$

Дисперсія шуму АЦП часто виражається в логарифмічному масштабі

$$\delta_A^2 = 1011\lg(Q_A^2/12) = 1011\lg(2^{-2b_A}/12) = -(20b_A \lg(2) + 1011\lg(12)) \approx$$

$$\approx -(6,02b_A + 10,79), \text{дБ} \quad (14.16)$$

Нагадаємо, що в коді, що містить b_A+1 розряд, один розряд відображає за знак і b_A розрядів є числовими. Розглянемо також *детерміновану оцінку шуму квантування вхідного сигналу* — абсолютну межу помилки квантування. Ця оцінка з урахуванням виразів (15.11) - (15.13) має такий вигляд:

$$E_A = \max_n |e_A(n)| \leq \begin{cases} Q_A/2 = 2^{-b_A-1}, & \text{при округленні;} \\ Q_A = 2^{-b_A}, & \text{при усіканні;} \end{cases} \quad (14.17)$$

Приклад 14.13

Оцінимо характеристики шуму АЦП при $b_A=8$ і $b_A=12$. Квантування вхідного сигналу виконується з використанням округлення. Тоді параметри шумового сигналу $e_A(n)$, які визначаються за формулами (14.14), (14.16), (14.17), складають:

$$\mu_A = 0, \quad \delta_A^2 = -58,8\text{дБ}, \quad E_A = 2^{-7} \quad \text{при} \quad b_A=8$$

$$\mu_A = 0, \quad \delta_A^2 = -82,8\text{дБ}, \quad E_A = 2^{-11} \quad \text{при} \quad b_A=12.$$

14.3. Вплив квантування вхідного сигналу на вихідний сигнал цифрової системи

Розглянемо цифрову систему з передавальною функцією $H(z)$ і імпульсною характеристикою $h(n)$, $n = 1, 2, \dots$, що обробляє сигнал за певним алгоритмом. Вважатимемо, що коефіцієнти системи і арифметичні операції, що виконуються в ній, реалізуються точно. *Лінійна модель, що дозволяє оцінити ефекти квантування вхідного сигналу* (тобто складову вихідного шуму, зумовлену квантуванням вхідного сигналу), подана на рис. 14.5, б, де блок ЦС — цифрова система; $x(n)$ — відліки дискретного (точного) вхідного сигналу; $e_A(n)$ — шум квантування (до b_A числових розрядів) вхідного дискретного сигналу;

$x(n)$ — квантований сигнал; $y(n)$ — корисна складова вихідного сигналу (результат обробки дискретного сигналу $x(n)$); $e_{A,вих}(n)$ — вихідний шум, зумовлений квантуванням вхідного сигналу. Для цифрової системи, що описується різницеvim рівнянням,

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m).$$

Згідно властивістю лінійності системи має місце рівність

$$e_{A,вих}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)e_A(n-m) \quad (14.18)$$

Щодо вхідного шуму вводиться ряд припущень, описаних в п. 14.2.2.

Зауваження

У подальших перетвореннях використовуються оцінки вірогідності й детермінованої шуму квантування $e_A(n)$ при округленні чисел в додатковому кодi. Ці оцінки наведені у формулах (14.14) - (14.17).

Наведемо оцінки вірогідності вихідного шуму, зумовленого квантуванням вхідного сигналу. Використовуючи рівність (14.18), математичне очікування $\mu_A = 0$ і дисперсію $\delta_A^2 = Q_A^2/12$ вхідного шуму квантування, отримаємо математичне очікування й дисперсію вихідного шуму $e_{A,вих}(n)$ відповідно:

$$\begin{aligned} \mu_{A,вих} &= E[e_{A,вих}] = E\left[\sum_{m=0}^{\infty} h(m)e_A(n-m)\right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} h(m)E[e_A(n-m)] = 0; \end{aligned} \quad (14.19)$$

$$\begin{aligned} \delta_{A,вих}^2 &= E[(e_{A,вих}(n) - \mu_{A,вих})^2] = E[e_{A,вих}^2(n)] = \\ &= E\left[\left(\sum_{m=0}^{\infty} h(m)e_A(n-m)\right)^2\right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[\sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) e_A^2(n-m) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(m)h(k) e_A(n-m) e_A(n-k) \right] = \\
&= E \left[\sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) e_A^2(n-m) \right] + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(m)h(k) E[e_A(n-m) e_A(n-k)] = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) E[e_A^2(n-m)] = \frac{Q_A^2}{12} \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) . \quad (14.20)
\end{aligned}$$

Дисперсію $\delta_{A, \text{ВЫХ}}^2$ можна визначити, не тільки використовуючи імпульсну характеристику системи, але і її амплітудно-частотну характеристику. Згідно рівності Парсеваля запишемо:

$$\sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left| H(e^{j\omega T}) \right|^2 d\omega, \quad (14.21)$$

де $\left| H(e^{j\omega T}) \right|$ — амплітудно-частотна характеристика цифрової системи. Тоді з урахуванням (14.21) вираз (14.20) має такий вигляд:

$$\delta_{A, \text{ВЫХ}}^2 = \frac{\delta_A^2 T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left| H(e^{j\omega T}) \right|^2 d\omega$$

У логарифмічному масштабі дисперсія вихідного шуму визначається наступним чином:

$$\tilde{\delta}_{A, \text{ВЫХ}}^2 = 10 \lg(\delta_{A, \text{ВЫХ}}^2) = 10 \lg(\delta_A^2) + 10 \lg\left(\sum_{m=0}^{\infty} h^2(m)\right), \text{ дБ} \quad (14.22)$$

Зазначимо, що

- оцінка дисперсії $\delta_{A, \text{ВЫХ}}^2$, зумовлена квантуванням вхідного сигналу, не залежить від форми реалізації (пряма, канонічна і т. д.) цифрової системи, оскільки в розрахункових формулах (14.20), (14.22) використовується імпульсна характеристика всієї системи;

- за допустимим значенням $\delta_{A,вих}^2$ і відомою АЧХ або імпульсною характеристикою цифрової системи можна визначити допустиме значення дисперсії δ_A^2 вхідного сигналу, яка у свою чергу залежить від розрядності b чисел, що являють вибірки вхідного сигналу;

- при $\mu_A = 0$ дисперсія у логарифмічному масштабі $\delta_{A,вих}^2$ визначається потужністю шуму на виході системи.

Обчислимо *детерміновану оцінку вихідного шуму* $e_{Авим}(n)$. Використовуючи (14.17) і (14.18), отримаємо абсолютну межу вихідної помилки, зумовленої квантуванням вхідного сигналу:

$$\begin{aligned} E_{A,вих} &= \max_n |e_{A,вих}(n)| = \max_n \left| \sum_{m=0}^{\infty} h(m) e_A(n-m) \right| \leq \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)| \max_n |e_A(n-m)| = \frac{Q_A}{2} \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)|. \end{aligned} \quad (14.23)$$

Таким чином, абсолютна межа помилки квантування вихідного сигналу залежить від імпульсної характеристики системи і не залежить від статичних характеристик вхідного сигналу.

15. Ефекти квантування в цифрових системах

Для спрощення процесу аналізу ефектів квантування в цифрових системах вводиться наступне припущення. Помилки у вихідному сигналі, викликані квантуванням вхідного сигналу, і помилки, зумовлені квантуванням результатів арифметичних операцій в цифровій системі, не залежать одні від одних.

Прийнявши це припущення, можна розглядати вказані складові вихідного шуму незалежно одні від одних. Роздільний розгляд виявляється корисним і для того, щоб оцінити, який внесок у повний вихідний шум роблять окремі складові. На основі такої оцінки розробник може обґрунтовано сформулювати вимоги до АЦП, архітектури й параметрів цифрового пристрою.

В даному розділі описуються: процес формування власного і повного вихідного шуму системи, ефекти переповнення в суматорах, квантування коефіцієнтів і поява граничних циклів у системі [8; 9].

15.1. Власний шум цифрової системи

Власний шум цифрової системи — це шум, зумовлений квантуванням результатів операцій множення, що виконується в системі. Аналіз власних шумів у цифрових системах набагато складніший, ніж аналіз ефектів квантування вхідного сигналу. Річ у тому, що при аналізі власних шумів необхідно знати:

- точки системи, в яких виконується операція квантування;
- параметри, що генеруються відповідними джерелами шумових сигналів (математичне очікування, дисперсію, абсолютну межу);
- структуру системи (шлях, який проходить кожний шумовий сигнал від свого джерела шуму до виходу системи);
- архітектуру й параметри цифрового пристрою.

Оцінка параметрів власного шуму, зумовленого квантуванням результатів арифметичних операцій, виконується в три етапи:

1. Складається лінійна модель цифрової системи, що враховує шуми квантування в тих точках системи, в яких виконується операція квантування.
2. Визначається реакція системи на кожний шумовий сигнал, тобто визначаються всі складові власного шуму на виході системи.

3. Обчислюється власний шум на виході системи і визначаються його вірогідність і детермінована оцінки.

Розглянемо детально кожний із вказаних етапів.

Лінійна модель цифрової системи

Джерелами шуму квантування сигналів у цифровій системі є помножувачі.

Дійсно, множення значень з b_y числовими розрядами послідовності $x(n)$ на коефіцієнт a дає добуток $ax(n)$, що містить точні значення з $2b_y$ числовими розрядами. Проте обчислений добуток повинен бути відображений послідовністю значень з b_y числовими розрядами (без урахування знакового розряду). При формуванні даного результату з'являється помилка квантування, викликана скороченням кількості розрядів (переходом від $2b_y$ до b_y числових розрядів).

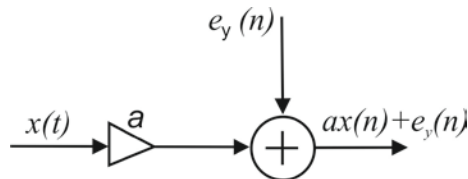


Рис.15.1. Лінійна модель помножувача

Лінійна модель помножувача — джерела помилки квантування — зображена на Рис. 15.1. Модель помножувача з кінцевою кількістю розрядів подається у вигляді послідовного з'єднання ідеального помножувача (з необмеженою кількістю розрядів) і суматора, на вхід якого разом із точним значенням добутку поступає помилка квантування $e_y(n)$. На виході моделі формується послідовність квантованих значень добутку з числовими розрядами.

Передбачається, що шумовий сигнал $e_y(n)$, що враховує ефекти квантування на виході помножувача, відповідає припущенням, введеним на сигнал помилки в п. 14.2.2. Тоді при використанні округлення як способу квантування на основі виразів (14.14), (14.15), (14.17) запишемо наступні оцінки шуму квантування на виході помножувача:

- математичне очікування

$$\mu_y = 0 ; \quad (15.1)$$

- дисперсія

$$\delta_y^2 = \frac{Q_y^2}{12} , \quad (15.2)$$

де $Q_Y = 2^{-b_y}$ — крок квантування;

- абсолютна межа

$$E_y \leq \frac{Q_y}{2} = 2^{-b_y-1} . \quad (15.3)$$

Цифрова система довільної структури може бути описана за допомогою *лінійної моделі*, що є сукупністю дискретної системи і певної кількості адитивних дій, що враховують ефекти квантування сигналів і що подаються на відповідні точки дискретної системи.

Приклад 15.1

Складемо лінійну модель цифрової системи із зазначенням джерел шуму квантування. Як цифрову систему розглянемо, наприклад, рекурсивну систему першого порядку.

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} .$$

Рекурсивна система першого порядку має передавальну функцію і імпульсну характеристику

$$h(n) = b_0(-a_1)^n + b_1(-a_1)^{n-1} \quad (15.4)$$

Система стійка, якщо виконується умова $|a_i| < 1$.

Структурна схема реалізації рекурсивної системи в прямій формі наведена на рис. 15.2, *а*. Для аналізу ефектів квантування як вхідний сигнал використовуємо шум АЦП $e_A(n)$.

Лінійна модель системи із зазначенням шумових сигналів $e_{y1}(n)$, $e_{y2}(n)$, $e_{y3}(n)$ на виходах помножувачів зображена на рис. 15.2, *б*.

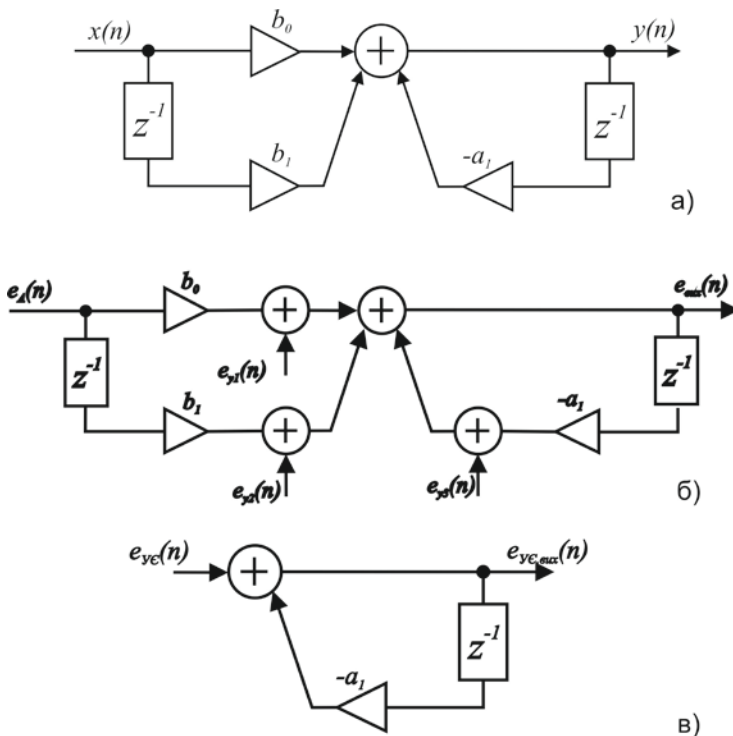


Рис.15.2. Структурні схеми рекурсивної системи першого порядку для аналізу ефектів квантування

Визначення складових власного шуму

Складові власного шуму — це реакції цифрової системи на шумові сигнали від кожного джерела шуму.

Використовуємо модель помножувача (рис.15.1) для опису кожного джерела шуму (вузла множення).

На основі властивості лінійності цифрової системи помилка квантування на виході системи (власний шум) визначається як суперпозиція помилок $e_{y_i, \text{вих}}(n)$. $i = 1, 2 \dots, b$, зумовлених всіма b джерелами шуму квантування, тобто:

$$e_{y, \text{вих}}(n) = \sum_{i=1}^L e_{y_i, \text{вих}}(n) \quad (15.5)$$

При цьому i -а складова вихідного сигналу помилки (власного шуму) $e_{y_i, \text{вих}}(n)$, викликана i -м джерелом шуму, знаходиться за використанням імпульсної характеристики частини системи ($g_i(m)$) від точки додатка i -го джерела шуму до виходу системи за формулою згортки

$$e_{y_i, \text{вих}}(n) = \sum_{m=1}^m g_i(m) e_{y_i}(n-m). \quad (15.6)$$

Виконуючи перетворення, аналогічні (14.19), (14.20), (14.21), з урахуванням (15.6) отримаємо оцінки i -ї складової власного шуму:

- математичне очікування (середнє значення)

$$\mu_{y_i, \text{вих}} = \sum_{m=1}^m g_i(m) E[e_{y_i}(n-m)] = \sum_{m=0}^{\infty} g_i(m) \mu_{y_i} = 0, \quad (15.7)$$

де $\mu_{y_i} = 0$ згідно з (15.1);

- дисперсія

$$\delta_{y_i, \text{вих}}^2 = \delta_{y_i}^2 \sum_{m=0}^{\infty} g_i^2(m) = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{m=0}^{\infty} g_i^2(m), \quad (15.8)$$

де $\delta_y^2 = \frac{Q_y^2}{12}$ згідно з (15.2);

- абсолютна межа

$$E_{y_i, \text{вих}} = \max_n |e_{y_i, \text{вих}}(n)| \leq E_{y_i} \sum_{m=0}^{\infty} |g_i(m)| = \frac{Q_y}{2} \sum_{m=0}^{\infty} |g_i(m)|, \quad (15.9)$$

де $E_{y_i} = Q_y / 2$ згідно з (15.3).

Обчислення власного шуму

Відповідно до виразу (15.5) власний шум системи визначається сумою всіх шумових складових, отриманих у результаті аналізу проходження шумів квантування від точок їх появи (з виходів b множників) до виходу цифрової системи.

Вірогідність (математичне очікування, дисперсія) і детермінована (абсолютна межа) оцінки власного шуму системи знаходяться наступним чином:

- математичне очікування

$$\mu_{y,вих} = \sum_{i=1}^L \mu_{y_i,вих=0}$$

з урахуванням (15.7) для всіх $i=1,2,\dots,L$;

- дисперсія

$$\delta_{y,вих}^2 = \sum_{i=1}^L \delta_{y_i,вих}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{i=1}^L \sum_{m=0}^{\infty} g_i^2(m)$$

з урахуванням (15.8) для всіх $i= 1, 2 \dots, L$;

- абсолютна межа

$$E_{y,вих} = \sum_{i=1}^L E_{y_i,вих} \leq \frac{Q_y}{2} \sum_{i=1}^L \sum_{m=0}^{\infty} |g_i(m)|$$

з урахуванням (15.9) для всіх $i= 1,2,\dots,L$.

Слід зазначити: чим більше помножувачів містить цифрова система, тим більше її власний шум. Таким чином, власний шум системи залежить від форми реалізації (пряма, канонічна і т. д.) системи. На практиці доцільно використовувати таку форму реалізації, яка б генерувала менший власний шум (зокрема містила б менше джерел шуму — помножувачів). Наприклад, для КИХ-фільтрів із лінійною ФЧХ можна створити форму реалізації, що містить у два рази менше помножувачів порівняно з прямою формою.

Приклад 15.2

Отримаємо оцінки вірогідності власного шуму рекурсивної системи першого порядку. Лінійна модель системи наведена на рис.15.2, б, де шумові сигнали $e_{y_i}(n)$, $i = 1, 2, 3$ з математичним очікуванням $\mu_{y_i} = 0$ і дисперсією $\delta_{y_i}^2 = Q_y^2/12$, $i = 1, 2, 3$ описують ефекти квантування на виходах помножувачів.

Використовуючи властивість лінійності системи, замінимо три шумові сигнали одним еквівалентним сигналом:

$$e_{y_{\text{ек}}} (n) = e_{y_1}(n) + e_{y_2}(n) + e_{y_3}(n).$$

Його математичне очікування $\mu_{y_{\text{ек}}} = 0$, дисперсія

$$\delta_{y_{\text{ЭК}}}^2 = \sum_{i=1}^3 \delta_{y_i}^2 = 3Q_y^2 / 12.$$

Відповідна еквівалентна лінійна модель подана на рис. 15.2, в, де сигнал $e_{y_{\text{ЭЭ}}}(\mathbf{n})$ обробляється тільки рекурсивною частиною. Отже, еквівалентний шумовий сигнал впливає на еквівалентну систему з передавальною функцією

$$H_{\text{ЭК}}(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1}}$$

і імпульсною характеристикою

$$h_{\text{ЭК}}(\mathbf{n}) = (-a_1)^n.$$

Реакцією системи на сигнал $e_{y_{\text{ЭЭ}}}(\mathbf{n})$ є власний шум $e_{y_{\text{ЭЭ}}, \text{вих}}(\mathbf{n})$. Математичне очікування власного шуму

$$\mu_{y_{\text{ЭК}}, \text{вих}} = 0,$$

дисперсія

$$\delta_{y_{\text{ЭК}}, \text{вих}}^2 = \sum_{i=1}^L \delta_{y_i, \text{вих}}^2 = \frac{2Q_y^2}{12} \sum_{m=0}^{\infty} h_{\text{ЭК}}^2(m) = \frac{3Q_y^2}{12} \sum_{m=0}^{\infty} (-a_1)^{2m} = \frac{3Q_y^2}{12} \frac{1}{1 - (-a_1)^2}.$$

15.2. Повний вихідний шум системи

Нагадаємо, що на початку аналізу ефектів квантування вводилося припущення, що помилки у вихідному сигналі, викликані квантуванням вхідного сигналу, і помилки, зумовлені квантуванням результатів арифметичних операцій у цифровій системі, не залежать одні від одних. На основі цього припущення повний вихідний шум системи, зумовлений квантуванням вхідного сигналу і квантуванням результатів арифметичних операцій, визначається сумою відповідних помилок, тобто

$$e_{\text{вих}}(\mathbf{n}) = e_{A, \text{вих}}(\mathbf{n}) + e_{y, \text{вих}}(\mathbf{n}), \quad (15.10)$$

де $e_{\text{вих}}(\mathbf{n})$ — повний вихідний шум системи; $e_{A, \text{вих}}(\mathbf{n})$ — шум квантування вхідного сигналу (шум АЦП); $e_{y, \text{вих}}(\mathbf{n})$ — власний шум системи.

Вважається, що шумові сигнали, зумовлені квантуванням у довільній точці системи, є стаціонарними випадковими процесами типу "білий шум", не корельовані з квантованим сигналом, а будь-які два джерела шуму створюють некорельовані шуми.

Тоді з урахуванням лінійності моделі системи і рівності (15.10) отримаємо формули розрахунку оцінок вірогідності повного вихідного шуму системи:

- математичне очікування $\mu_{вих}$ повного вихідного шуму

$$\mu_{вих} = \mu_{А,вих} + \mu_{у,вих} , \quad (15.11)$$

де $\mu_{А,вих}$ — математичне очікування шуму АЦП; $\mu_{у,вих}$ — математичне очікування власного шуму системи;

- дисперсія $\sigma_{вих}^2$ повного вихідного шуму

$$\sigma_{вих}^2 = \sigma_{А,вих}^2 + \sigma_{у,вих}^2 , \quad (15.12)$$

де $\sigma_{А,вих}^2$ — дисперсія шуму АЦП; $\sigma_{у,вих}^2$ — дисперсія власного шуму системи.

У ряді випадків використовується детермінована оцінка повного вихідного шуму системи — абсолютна межа (діапазон зміни) $E_{вих}$ сигналу $e_{вих}(n)$. Така оцінка знаходиться за формулою

$$E_{вих} = \max_n |e_{вих}(n)| \leq E_{А,вих} + E_{у,вих} .$$

Приклад 15.3

Обчислимо оцінки вірогідності повного вихідного шуму рекурсивної системи першого порядку з урахуванням результатів прикладу 16.2. На основі виразів (15.19), (15.20) і формули (16.4) імпульсної характеристики системи запишемо оцінки вірогідності вихідного шуму, зумовленого квантуванням вхідного сигналу:

математичне очікування шуму АЦП

$$\mu_{А,вих} = 0 ;$$

дисперсія шуму АЦП

$$\sigma_{А,вих}^2 = \frac{Q_A^2}{12} \sum_{m=0}^{\infty} [b_0(-a_1)^m + b_1(-a_1)^{m-1}]^2 .$$

У результаті математичне очікування повного вихідного шуму системи, що аналізується, згідно з (16.11),

$$\mu_{\text{вих}} = 0;$$

дисперсія повного вихідного шуму згідно з (16.12)

$$\delta_{\text{А,вих}}^2 = \frac{Q_{\text{А}}^2}{12} \sum_{m=0}^{\infty} [b_0(-a_1)^m + b_1(-a_1)^{m-1}]^2 + \frac{3Q_y^2}{12} \frac{1}{1-(-a_1)^2}.$$

15.3. Ефекти переповнення в суматорах

Раніше були розглянуті ефекти квантування сигналів у цифрових системах і отримані оцінки дисперсії (потужності) $\delta_{\text{вих}}^2$ повного вихідного шуму і її складових: $\delta_{\text{А,вих}}^2$ — дисперсії складової вихідного шуму, зумовленої квантуванням вхідного сигналу, (шуму АЦП) і $\delta_{\text{у,вих}}^2$ — дисперсії власного шуму системи. Таким чином, корисний сигнал на виході системи присутній на фоні шумів.

Опишемо шумові характеристики системи, а також методи масштабування сигналів, що дозволяють поліпшити вказані характеристики і запобігти появі ефекту переповнення в суматорах системи.

Динамічний діапазон цифрової системи

Важливою характеристикою цифрової системи є відношення сигнал/шум.

Відношенням сигнал/шум R називається відношення потужності $P_{\text{Свих}}$ вихідного сигналу системи до потужності $P_{\text{Швих}}$ шуму на виході системи

$$R = 10 \lg \left(\frac{P_{\text{С,вих}}}{P_{\text{Ш,вих}}} \right), \text{ дБ.}$$

Пороговим відношенням сигнал/шум R_u називається відношення мінімальної потужності $P_{\text{Смінвих}}$ вихідного сигналу системи до потужності $P_{\text{Швих}}$ шуму на виході системи

$$R_u = 10 \lg \left(\frac{P_{\text{Смін,вих}}}{P_{\text{Ш,вих}}} \right), \text{ дБ.}$$

Мінімальна потужність вихідного сигналу має місце при мінімальному рівні a_{\min} вхідного сигналу.

Динамічним діапазоном D цифрової системи називається відношення максимальної амплітуди $a_{D\max}$ до мінімальної амплітуди $a_{D\min}$ вхідного сигналу, при якій забезпечується певне відношення RD сигнал/шум на виході системи

$$D = 20\lg\left(\frac{a_{D,\max}}{a_{D,\min}}\right), \text{ Дб}$$

при

$$R_D = 10\lg\left(\frac{P_{cD\min,\text{вих}}}{P_{\text{ш,вих}}}\right),$$

де $P_{c,D\min,\text{вих}}$ — потужність вихідного сигналу на нижній межі динамічного діапазону (при амплітуді вхідного сигналу, що дорівнює $a_{0\min}$).

Динамічний діапазон слід контролювати введенням коефіцієнтів масштабування. Використовування даних коефіцієнтів і способи їх отримання розглядаються далі.

Масштабуючі коефіцієнти

При підсумовуванні чисел із фіксованою комою помилка квантування не виникає, якщо регістри суматора мають розрядність не менше розрядності доданків. Проте при підсумовуванні чисел можливо переповнення розрядної сітки (див. п. 15.1.4). У цьому випадку результат підсумовування суттєво спотворюється.

Для усунення ефекту переповнення в суматорах вводиться масштабування сигналів із використанням коефіцієнтів масштабування. Масштабування сигналів можна виконати наступними способами.

Автоматичне масштабування. Здійснюється зсув двійкових кодів доданків на входах кожного суматора праворуч на один розряд (або більше при складанні більш ніж двох чисел). При цьому масштабуючий коефіцієнт вхідних сигналів дорівнює $\gamma_i = 2^{-k}$, де i — номер суматора, k — необхідна кількість зсувів.

У результаті такої операції з'являється помилка масштабування. Наведемо її оцінки вірогідності.

При зображенні чисел у прямому і зворотньому кодах помилка масштабування $e_m = 2^{-b}$, де b — кількість числових розрядів складових. Математичне очікування і дисперсія помилки масштабування на вході суматора дорівнює відповідно

$$\mu_M = 0, \quad \delta_M^2 = \frac{2^{-2b}}{2}$$

При зображенні чисел у додатковому коді помилка масштабування $e_m = 2^{-b}$. Математичне очікування й дисперсія цієї помилки дорівнюють відповідно

$$\mu_M = \frac{2^{-2b}}{2}, \quad \delta_M^2 = \frac{2^{-2b}}{2}$$

Ці помилки масштабування можуть бути враховані у лінійній моделі цифрової системи так само, як помилки квантування.

Розглянутий спосіб масштабування дає коефіцієнт малої величини. Тому використовувати автоматичне масштабування в системах складної структури недоцільно, оскільки масштабування сигналів і малої амплітуди приводить до "втрати" таких сигналів при розрахунку реакції.

Масштабування сигналів із використанням імпульсної характеристики. Якщо імпульсна характеристика системи (або її частини) дорівнює $h_i(n)$, то вихідний сигнал системи (або її частини) за формулою згортки дорівнює:

$$y_i(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_i(m)x(n-m)$$

Згідно з формулою згортки, обмеження вихідного сигналу має такий вигляд

$$|y_i(n)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |h_i(m)||x(n-m)|$$

$$\max_n |y_i(n)| \leq \max_n |x(n)| \sum_{m=0}^{\infty} |h_i(m)|. \quad (15.13)$$

З виразу (15.13) видно, що при $\max_n |x(n)| \leq 1$ необхідною умовою відсутності переповнення (коли $\max_n |y_i(n)| \leq 1$) є

$$\sum_{m=0}^{\infty} |h_i(m)| \leq 1. \quad (15.14)$$

Нерівність (15.14) виконується, якщо ввести коефіцієнт масштабування γ_i таким чином: $h_i(m) = \gamma_i \cdot h_i(m)$. Тоді нерівність (15.14) запишемо у вигляді

$$\gamma_i \sum_{m=0}^{\infty} |h_i(m)| \leq 1.$$

Отже, умова вибору коефіцієнта масштабування

$$\gamma_i \leq \frac{1}{\sum_{m=0}^{\infty} |h_i(m)|}. \quad (15.15)$$

Коефіцієнти $\gamma_i, i=1,2,\dots$ звичайно вибирають, як і у разі автоматичного масштабування такими, що дорівнюють степеням 2, щоб масштабуєчне множення зводилося до операції зсуву. При цьому слід мати на увазі, що при істотному зменшенні амплітуд сигналів, що проходять через систему, зменшуватиметься відношення сигнал/шум на виході системи порівняно з відношенням сигнал/шум на вході. Зазначимо, що обчислення $u_i, i=1,2,\dots$ за виразом (15.15) часто приводить до завищених результатів, тобто умова (15.15) надмірна.

Масштабуючі помножувачі під'єднують на входах системи або на виходах помножувачів.

Масштабування сигналів із використанням амплітудно-частотної характеристики. Даний спосіб масштабування застосовується для системи (або її частин) невисокого (не вище четвертого — п'ятого) порядку. Максимальне значення амплітудно-частотної характеристики системи (або її частини) $\max_{\omega} |H_i(e^{j\omega T})| > 1$. Масштабуванню піддається вхідний сигнал системи (або її частини). При цьому коефіцієнт масштабування розраховується за формулою:

$$\gamma_i = \frac{1}{\max_{\omega} |H_i(e^{j\omega T})|} . \quad (15.16)$$

Приклад 15.4

Отримаємо коефіцієнт масштабування вхідного сигналу системи першого порядку з передавальною функцією

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}} .$$

Система, що описана вказаною передавальною функцією, є фільтром нижніх частот (речовинний полюс системи $z^*=0,5$ розташований на карті нулів і полюсів у правій напівплощині). Отже, $\max_{\omega} |H_i(e^{j\omega T})|$ існує при $\omega = 0$, тобто при $z = 1$. Тоді

$$\max |H(e^{j\omega T})| = H(e^{j\omega T}) = H(1) = \frac{2}{0,4} = 4$$

На основі рівності (15.16) визначимо коефіцієнт масштабування $\gamma = 1/4$.

Порівняємо отримане значення γ з коефіцієнтом масштабування, обчисленим за імпульсною характеристикою системи

$$h(n) = 0,5^n + 0,5^{n-1}$$

$$\text{Оцінимо } \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} 0,5^n = \frac{2}{1-0,5} = 4 . \quad , \quad \text{за формулою}$$

(15.15) коефіцієнт масштабування $\gamma = 1/4$.

Отже, у даному прикладі способи масштабування сигналів з використанням амплітудно-частотної та імпульсної характеристик дають однакові коефіцієнти масштабування.

За допомогою описаного способу масштабування формуються коефіцієнти малої величини, тому застосовувати розглянутий спосіб

масштабування в системах складної структури недоцільно через можливість "втрату" сигналів невисокого рівня.

Розрахунок масштабуючих коефіцієнтів у цифрових системах складної структури виконується за методикою, що базується на використуванні спектрального аналізу і апарату нормованих просторів [8].

15.4. Ефекти квантування коефіцієнтів цифрової системи

При реалізації цифрової системи значення її коефіцієнтів (коефіцієнти різницевого рівняння або передавальної функції) квантуються, оскільки вони відображаються обмеженою кількістю розрядів, що визначається розрядністю елементів пам'яті цифрової системи. Зміна коефіцієнтів приводить до більшої або меншої зміни значень нулів і полюсів передавальної функції, і, відповідно, до зміни частотних характеристик системи.

На прикладі покажемо, що квантування коефіцієнтів системи може привести навіть до втрати її стійкості, тобто пристрій стає непрацездатним.

Приклад 15.5

Передавальна функція рекурсивної системи має такий вигляд:

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

де $a_1 = -1,603$, $a_2 = -0,645$. Полюси системи комплексно-зв'язані $z_{*1,2} \approx 0,8 \pm 0,05j \approx 0,8016e^{\pm j3,6}$. Вони розташовані усередині одиничного кола ($|z_{*1,2}| < 1$), відповідно, система стійка. Здійснимо квантування коефіцієнтів a_1 і a_2 , тобто округлятимемо їх значення $a_1 = -1,6$, $a_2 = 0,6$. Полюси нової системи дійсні $z_{*1} = 1$, $z_{*2} = 0,6$, причому один із них не лежить усередині одиничного кола. Отже, після квантування коефіцієнтів система стала нестійкою. Важливо зазначити, що операція квантування коефіцієнтів, що є нелінійною за своєю природою, не впливає на лінійність самої системи а лише змінює її частотні й тимчасові характеристики. Іншими словами, виконавши операцію квантування коефіцієнтів, переходимо від однієї лінійної системи до іншої з характеристиками,

дещо відмінними від характеристик початкової системи. Так, зокрема, квантування коефіцієнтів приводить до появи помилки АЧХ $\Delta A(\omega) = A(\omega) - \tilde{A}(\omega)$, де $A(\omega) = \left| H(e^{j\omega T}) \right|$ - АЧХ системи з неквантованими коефіцієнтами; $\tilde{A}(\omega)$ - АЧХ системи з квантованими коефіцієнтами. Слід зазначити, що при розв'язанні задачі синтезу системи необхідно визначати коефіцієнти так, щоб не тільки ідеальні частотні й тимчасові характеристики початкової системи, але і характеристики системи з квантованими коефіцієнтами відповідає заданим вимогам.

Для оцінки впливу операцій квантування коефіцієнтів на параметри системи використовуються функції чутливості. Функція чутливості є коефіцієнтом пропорційності в співвідношенні, що зв'яже відносну зміну величини k-го коефіцієнта з відносною зміною певного параметра системи (положення полюса або нуля на z-площині, частотної характеристики тощо). Ефекти квантування коефіцієнтів істотним чином залежать від властивостей передавальної функції, типу фільтру, структури та ін.

15.5. Граничні цикли

При розгляді ефектів квантування в попередніх пунктах були зроблені певні припущення щодо помилок, що викликають у сигналах, що обробляється, у цифровій системі з обмеженою розрядністю регістрів. По-перше, був прийнятий ряд припущень про статистичні характеристики шумів квантування. По-друге, вважалося, що при обробці сигналу в цифровій системі не відбувається переповнень регістрів суматорів. Водночас, і ті, і інші припущення можуть порушуватися. Це приводить у рекурсивних системах до виникнення специфічних ефектів, які отримали назву граничних циклів. Розрізняють два види граничних циклів:

- граничні цикли низького рівня, пов'язані з квантуванням відліків сигналу, що обробляється, (наявністю в структурі цифрової системи нелінійності, характеристики яких наведені на рис. 15.3, 15.4);
- граничні цикли високого рівня пов'язані з переповненнями регістрів суматорів (наявністю в структурі цифрової системи нелінійності з характеристиками, наведеними на рис. 15.1).

Існує кілька підходів до аналізу граничних циклів. Перший підхід базується на аналізі положення полюсів системи при квантуванні сигналів, другий — на аналізі стійкості цифрової системи.

Граничні цикли низького рівня. Граничними циклами низького рівня називаються незгасаючі коливання, які можуть виникати в рекурсивних системах за відсутності (або малому рівні) дії і ненульових початкових умов в системі. Поява цих коливань зумовлена квантуванням сигналів на виходах помножувачів.

Розглянемо простий приклад, що ілюструє ефект граничного циклу. Цей ефект полягає в тому, що при малому або такому, що дорівнює нулю, рівні вхідного сигналу помилки округлення можуть привести до встановлення на виході системи постійного або періодичного сигналу певного рівня, незалежного від значення вхідного сигналу.

Приклад 15.6.

Досліджуємо появу граничного циклу в рекурсивній системі першого порядку, що описується рівнянням

$$y(n) = x(n) + ay(n-1), \quad x(n) = 0, \quad y(-1) = 1, \quad a = const.$$

Кожний добуток $ay(n-1)$ заокруглюємо до найближчого цілого за правилом

$$[ay(n-1)]_{ok} = Int[ay(n-1) + 0,5]$$

Значення $[y(n)]_{ok}$ при $a = 0,9$ і $a = -0,9$ подані в табл. 15.1.

Таблиця 15.1

Значення вихідного сигналу $[y(n)]_{ok}$ системи першого порядку

п	0	1	2	3	4	5	6
$a = 0,9$	-0,9	0,8	-0,7	0,6	0,5	0,5	0,5
$a = -0,9$	-0,9	0,8	-0,7	0,6	-0,5	0,5	-0,5

З табл. 15.1 видно, що, починаючи з $n = 4$, вихідний сигнал при $a = 0,9$ набуває значення по черзі +0,5 і -0,5, а при $a = -0,9$ - постійне значення +0,5.

Таким чином, за певних початкових умов і значень коефіцієнтів у системі через нелінійність операцій заокруглення виникає нестійкий режим, який називається граничним циклом.

Зазначимо, що чим більша розрядність зображення чисел, тим менша вірогідність появи граничних циклів низького рівня.

Граничні цикли високого рівня. Граничні цикли високого рівня можуть виникати в рекурсивних системах, якщо при складанні відліків сигналів у регістрах суматорів відбувається переповнення розрядної сітки (див. п. 15.3). У цьому випадку система стає істотно нелінійною, у вихідному сигналі з'являються значні помилки, тобто система фактично непрацездатна. У ряді випадків після переповнення регістра суматора вихідний сигнал системи набуває вигляду періодичного коливання з граничним значенням амплітуди, що дорівнює одиниці. Тому граничні цикли високого рівня часто називають «коливаннями переповнення».

У зв'язку з можливістю виникнення коливань переповнення в рекурсивних системах необхідно вживати заходів для запобігання переповнень регістрів суматорів, тобто виконувати масштабування сигналів (див. п. 15.3)

Лабораторний практикум

Лабораторна робота №1

“Вступ до середовища інженерних розрахунків Matlab”

Обладнання: Персональний комп'ютер, програмне середовище MATLAB 6.5

Мета й завдання:

1. Отримати навички роботи в середовищі інженерних розрахунків MATLAB.

2. Ознайомитись із основними елементами матричної лабораторії MATLAB:

- з інтерфейсом MATLAB;
- з основами графічної візуалізації;
- зі звичайною та спеціальною графікою MATLAB;
- з основними операторами та функціями, що використовуються в даному середовищі;

- з основними операціями з векторами та матрицями;

3. Освоїти методи задавання векторів та матриць. Навчитись використовувати основні оператори для роботи з матрицями.

4. Навчитись будувати графіки функцій та використовувати певні оператори для представлення структури та особливостей матриці.

5. Здобути навички графічної візуалізації результатів різноманітних видів обчислень.

Основні теоретичні відомості

MATLAB — одна з найстаріших, ретельно розроблених і перевірених часом систем автоматизації математичних розрахунків, побудована на розширеному уявленні і застосуванні матричних операцій. В цілому MATLAB — це унікальна колекція реалізацій сучасних чисельних методів комп'ютерної математики, створених за останні три десятиліття років. Вона увібрала в себе і досвід, правила і методи математичних обчислень. Також присутнє поєднання з могутніми засобами графічної візуалізації і навіть анімаційної графіки.

Система MATLAB була розроблена Молером (С. В. Moler) і з кінця 70-х рр. широко використовувалась на великих ЕОМ. На початку 80-х рр. Джон Літл (John Little) з фірми MathWorks Inc. розробив версії системи PC MATLAB для комп'ютерів класу IBM PC,

VAX і Macintosh. Надалі були створені версії для робочих станцій Sun, комп'ютерів з операційною системою UNIX і багатьох інших типів великих і малих ЕОМ.

Формування векторів і матриць Особливості задавання векторів і матриць

MATLAB — система, спеціально призначена для проведення складних обчислень з векторами, матрицями і масивами. При цьому вона припускає, що кожна задана змінна — це вектор, матриця або масив. Усе визначається конкретним значенням змінної. Наприклад, якщо $X=1$, то це значить, що X — вектор з єдиним елементом, що має значення 1. Якщо треба задати вектор з трьох елементів, то їх значення слід перерахувати в квадратних дужках, розділяючи їх пробілом

» $V=[1\ 2\ 3]$

$V=$

1 2 3

Задає вектор V , що має три елементи зі значеннями 1, 2 і 3. Після введення вектора система виводить його на екран дисплея у командному вікні.

Задавання матриці вимагає створення декількох рядків. Для розмежування рядків використовується знак “;” (крапка з комою). Цей же знак в кінці введення запобігає виводу матриці або вектора (і взагалі результату будь-якої операції) на екран дисплея. Так, введення

» $M=[1\ 2\ 3; 4\ 5\ 6; 7\ 8\ 9];$

задає квадратну матрицю, яку можна вивести:

» M

$M=$

1 2 3

4 5 6

7 8 9

Можливе введення елементів матриць і векторів у вигляді арифметичних виразів, що містять будь-які доступні системі функції, наприклад:

» $V=[2+2/(3+4)\ \exp(5)\ \text{sqrt}(10)];$

$V=2.2857\ 148.4132\ 3.1623$

Якщо елементу $M(2, 2)$ треба присвоїти значення 10, то слід записати

» $M(2, 2)=10$

Вираз $M(i)$ з одним індексом дає доступ до елементів матриці, розгорнутих в один стовпець. Така матриця утворюється з початкової, якщо підряд виписати її стовпці. Наступний приклад пояснює такий доступ до елементів матриці M :

```

» M=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
M =
1 2 3
4 5 6
7 8 9
» M(2)
ans =
4
» M(8)
ans =
6
» M(9)

```

Можливе задавання векторів і матриць з комплексними елементами, наприклад:

```

» i=sqrt(-1);
» CM=[1 2; 3 4] + i*[5 6; 7 8]
або
» CM=[1+5*i 2+6*i; 3+7*i 4+8*i]

```

Це створить матрицю:

```

CM=
1.0000 + 5.0000i 2.0000 + 6.0000i
3.0000 + 7.0000i 4.0000 + 8.0000i

```

Поряд із операціями над окремими елементами матриць і векторів існує можливість проводити операції множення, розподілу і зведення в степінь відразу над всіма елементами, тобто над масивами. Для цього перед знаком операції ставиться крапка. Наприклад, оператор „*” означає множення для векторів або матриць, а оператор „.*” —по елементне множення всіх елементів масиву. Так, якщо M — матриця, то $M.*2$ дасть матрицю, всі елементи якої перемножені на скаляр — число 2. Втім, для множення матриці, на скаляр обидва вирази — $M*2$ і $M.*2$ — виявляються еквівалентними.

Арифметичні оператори й функції

Арифметичні оператори є найпоширенішими і відомими. На відміну від більшості мов програмування в системі MATLAB практично всі оператори є *матричними*, тобто призначені для виконання операцій над матрицями. В табл.1 приводиться список арифметичних операторів і синтаксис їх застосування.

Таблиця 1. Арифметичні оператори і функції MATLAB

Функція	Назва Оператор	Синтаксис
Plus	Плюс +	M1+M2
Uplus	Унарний плюс +	+M
Minus	Мінус	M1-M2
Uminus	Унарний мінус	-M
Mtimes	Матричне множення *	M1*M2
Times	По елементне множення масивів .*	A1.*A2
Mpower	Піднесення матриці до степені	M1^x
Power	По елементне піднесення масиву до степені	A1.^x
Mldivide	Зворотне (справа наліво) ділення матриць \	M1\M2
Mrdivide	Ділення матриць зліва направо /	M1/M2
Ldivide	По елементне ділення масивів справа наліво .\	A1.\A2
Rdivide	По елементне ділення масивів зліва направо ./	A1 ./A2

Алгебраїчні та арифметичні функції

В системі MATLAB визначені функції алгебри й арифметики, деякі із яких наведені нижче:

- $\text{abs}(X)$ — повертає абсолютну величину для кожного числового елемента вектора X . Якщо X містить комплексні числа, $\text{abs}(X)$ обчислює модуль кожного числа.

- $\text{exp}(X)$ — повертає експоненту для кожного елемента X . Для комплексного числа $z = x + i*y$ функція $\text{exp}(z)$ обчислює комплексну експоненту: $\text{exp}(z) = \text{exp}(x) * (\cos(y) + i * \sin(y))$.

- $\log(X)$ — повертає натуральний логарифм елементів масиву X . Для комплексного або негативного z , де $z = x + y*i$, обчислюється комплексний логарифм у вигляді $\log(z) = \log(\text{abs}(z)) + i * \text{atan2}(y, x)$. Функція логарифма обчислюється для кожного елемента масиву. Область визначення функції включає комплексні і негативні числа, що може привести до непередбачених результатів при некоректному використанні.

- $\log_{10}(X)$ — повертає логарифм з основою 10 для кожного елемента X . Область функції включає комплексні числа, що може привести до непередбачених результатів при некоректному використанні.

- $\text{mod}(x, y)$ — повертає $x \bmod y$;

- $\text{sqrt}(A)$ — повертає квадратний корінь кожного елемента масиву X . Для негативних і комплексних елементів X функція $\text{sqrt}(X)$ обчислює комплексний результат.

Спеціальні символи MATLAB

1) : (двокрапка) використовується для:

A) створення векторів:

$j:k$ — якщо $j < k$, то це вектор $[j, j+1, \dots, k]$; але якщо $j > k$, то це пустий вектор.

$j:i:k$ — якщо $(j < k \text{ та } i > 0)$ або $(j > k \text{ та } i < 0)$, то це вектор $[j, j+i, j+2i, \dots, k]$;

але якщо $(j < k \text{ та } i < 0)$ або $(j > k \text{ та } i > 0)$, то це пустий вектор.

де i, j, k — скалярні величини.

Б) вибору рядків, стовбців та елементів з векторів, матриць та багатомірних масивів:

$A(i,:)$ – це i -й рядок з A ;

$A(:,j)$ – це j -й стовбець з A ;

$A(:,:)$ – еквівалент двохмірного масиву. Для матриць це аналогічно A ;

$A(j:k)$ – це $A(j), A(j+1), \dots, A(k)$ (використовується тільки для векторів або

одномірних масивів);

$A(:,:,k)$ – це k -та сторінка трьохмірного масиву A ;

$A(i,j,k,:)$ – вектор, виділений з чотирьохмірного масиву A .

Вектор включає

елементи $A(i,j,k,1), A(i,j,k,2), A(i,j,k,3)$ і т. д.;

$A(:)$ – записує всі елементи масиву A у вигляді стовпця.

Примітка:

Якщо вектор V має m компонент, а вектор W має n компонент, то $A(V,W)$ буде матрицею розміром $m \times n$, сформованою з елементів матриці A , індекси якої – елементи векторів V і W .

2) П (квадратні дужки) використовуються для:

А) формування векторів та матриць:

$[6.9 \ 9.64 \ \text{sqrt}(-1)]$ – це вектор, що вміщує три елементи, розділені пробілами;

$[6.9 \ 9.64 \ i]$ – такий самий вектор;

$[1+j \ 2-j \ 3]$ та $[1 \ +j \ 2 \ -j \ 3]$ – різні вектори: перший має 3 елементи, а другий 5;

$[11 \ 12 \ 13; \ 21 \ 22 \ 23]$ – матриця розміром 2×3 (крапка з комою розділяє перший

та другий рядки).

Б) іншого:

$A=[]$ – зберігає порожню матрицю в A ;

$A(m,:)=[]$ – вилучає (видаляє) рядок m з матриці A ;

$A(:,n)=[]$ – вилучає (видаляє) стовбець n з матриці A .

3) . (десятькова крапка) використовується для відділення дробової частини чисел від цілої.

$314/100$ 3.14 $.314e1$ – одне і те ж саме число.

4) ; (крапка з комою) – використовується:

А) всередині круглих дужок для розділення строк матриць

Б) в кінці операторів для заборони виводу на екран результату обчислень.

5) , (кома) використовується для

А) розділення індексів елементів матриці та аргументів функції

Б) розділення операторів мови інженерних розрахунків MATLAB. (При розділенні операторів в рядку комою (,) можна замінити на крапку з комою (;) з метою заборони виводу на екран результату обчислень).

6) % (знак відсотку) використовується для вказування логічного кінця рядка. Текст, що знаходиться після %, сприймається як коментарій та ігнорується (нажаль за виключенням російськомовних коментарів, які нерідко призводять до помилкових команд).

7) ... (продовження) – три або більше крапок в кінці рядка вказують на продовження рядка.

8) = (знак рівності) використовується для присвоєння значень в арифметичних виразах;

9) ' (одиничні лапки, апостроф)

А) текст в одиничних лапках представляється в якості вектора символів з компонентами, які являються ASCII-кодами цих символів (апостроф всередині рядка задається двома апострофами).

» a='Hello, I'm your friend'

a =

Hello, I'm your friend

Б) **транспонування** матриць з комплексним спряженням: A' – транспонована матриця A. Для комплексних матриць транспонування доповнюється комплексним спряженням.

Лабораторна робота №2 „Моделювання обробки сигналів лінійною дискретною системою в програмному середовищі MATLAB”

Обладнання: Персональний комп’ютер, програмне середовище MATLAB 6.5

Мета й завдання: Дослідити роботу лінійної дискретної системи в часовій, z -області та частотній області.

Математичне моделювання обробки сигналів лінійною дискретною системою (ЛДС) включає:

- розрахунок характеристик ЛДС у часовій, частотній та z -областях;
- розрахунок реакції ЛДС за співвідношенням вхід-вихід;
- аналіз впливу та реакції в часовій та частотних областях.

Приведемо у відповідність термінологію й позначення, що були використані раніше, із загальноприйнятими в MATLAB.

В MATLAB математичною моделлю ЛДС називають описання співвідношення вхід-вихід у вигляді рівняння чи системи рівнянь, що дозволяють розрахувати реакцію на заданий вплив.

У часовій області співвідношення вхід-вихід може описуватися за допомогою (див. Лекцію 4):

- Різницевого рівняння (РР)

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + \dots + b_i x(n-i) + \dots + b_{N-1}x[n-(N-1)] - a_1y(n-1) - a_2y(n-2) - \dots - a_k y(n-k) - \dots - a_{M-1}y[n-(M-1)], \quad (1)$$

яке задається вектором коефіцієнтів впливу b

$$b = [b_0 \quad b_1 \dots b_i \dots b_{N-1}] \quad (2)$$

та вектором коефіцієнтів реакції

$$a = [a_0 \quad a_1 \dots a_k \dots a_{M-1}]. \quad (3)$$

Перший елемент вектора a завжди рівний 1

$$a_0 = 1. \quad (4)$$

- Формули згортки

$$y(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m); \\ \sum_{m=0}^{\infty} x(m)h(n-m), \end{cases} \quad (5)$$

де імпульсна характеристика й вплив задаються у вигляді кінцевих послідовностей (векторів).

- Системи рівнянь змінних станів

$$\begin{aligned} s(n+1) &= As(n) + Bx(n); \\ y(n) &= Cs(n) + Dx(n), \end{aligned} \quad (6)$$

де $s(n)$ - змінні стани; $x(n)$ - вхідний сигнал;

A - для систем з одним входом та одним виходом – квадратна матриця розміром $t \times t$, де t - порядок ЛДС; B - вектор-стовбчик; C - вектор-рядок; D - скаляр.

Передавальна функція ЛДС (див. Лекцію 5)

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_i z^{-i} + \dots + b_{N-1} z^{-(N-1)}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_k z^{-k} + \dots + a_{M-1} z^{-(M-1)}}, \quad (7)$$

подібно до РР, задається векторами коефіцієнтів b (2) та a (3).

Частотна характеристика ЛДС представляється через модуль (АЧХ) й аргумент (ФЧХ) (див. Лекцію 6)

$$H(e^{j\omega T}) = \left| H(e^{j\omega T}) \right| e^{j \arg\{H(e^{j\omega T})\}} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (8)$$

В подальшому найменування „ЛДС” та „цифровий фільтр” (ЦФ) будемо вважати тотожними.

1. Моделювання роботи ЛДС у часовій області

Моделювання роботи ЛДС у часовій області виконується на основі однієї з її математичних моделей, приведених вище.

1.1. Моделювання роботи ЛДС на основі різницевого рівняння(РР): функція filter

Моделювання роботи ЛДС на основі РР (1) – розрахунок реакції на початковий вплив при нульових початкових умовах (НПУ) – виконується за допомогою функції **filter**, формат якої має вигляд:

filter(b,a,x)

де b - вектор коефіцієнтів (2) в порядку їх слідування, a - вектор коефіцієнтів (3) в порядку їх слідування; *перший елемент завжди рівний 1*, x - вектор відліків впливу $x(n)$.

Розглянемо два приклади ЛДС – КІХ- (кінцева імпульсна характеристика) та НІХ-(нескінченна імпульсна характеристика) фільтри (системи).

Приклад 1. Розрахувати реакцію КІХ-фільтра 2-го порядку, заданого наступним РР

$$y(n) = 0.1x(n) + 0.5x(n-1) + 0.7x(n-2), \quad (9)$$

де $n = 0 \dots 32$; $\omega T = 0.5$; $x(n) = \sin(\omega T)$:

```
>> b=[0.1 0.5 0.7];
>> a=[1];
>> n=0:32;
>> x=sin(0.5.*n);
>> y=filter(b,a,x);
>> plot(n,x,n,y,'--'), grid
>> hold on
>> stem(n,x)
>> stem(n,y)
>> gtext('x(n)')
>> gtext('y(n)')
```

Результати розрахунків представлені на Рис.1, де окрім дискретних сигналів зображено їх огинаючі.

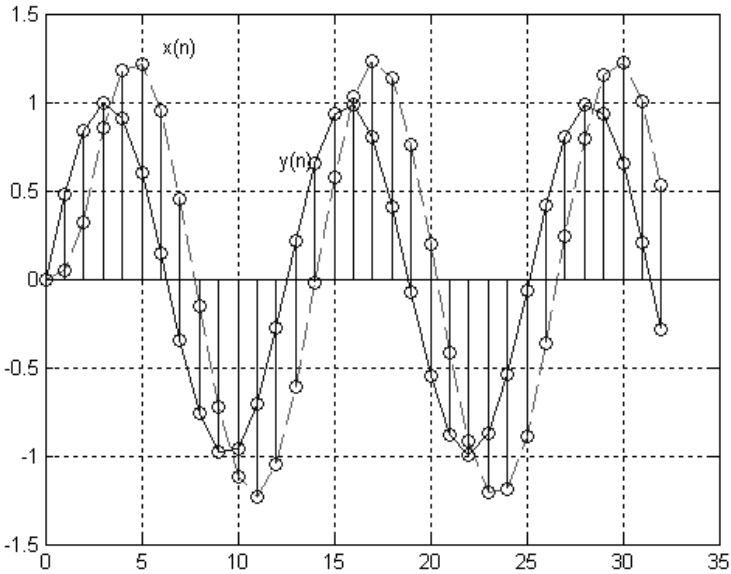


Рис.1. Вхідний та вихідний сигнали (до прикладу 1).

Приклад 2. Розрахувати реакцію НІХ-фільтру 2-го порядку, заданого наступним РР

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + 0.7y(n-1) - 0.25y(n-2), \quad (10)$$

де $n = 0 \dots 32$; $\omega T = 0.5$; $x(n) = \sin(\omega T)$:

```
>> b=[1 1 1];
>> a=[1 0.7 -0.25];
>> n=0:32;
>> x=sin(0.5.*n);
>> y=filter(b,a,x);
>> plot(n,x,n,y,'-'), grid
>> hold on
>> stem(n,x)
>> stem(n,y)
>> gtext('x(n)')
>> gtext('y(n)')
```

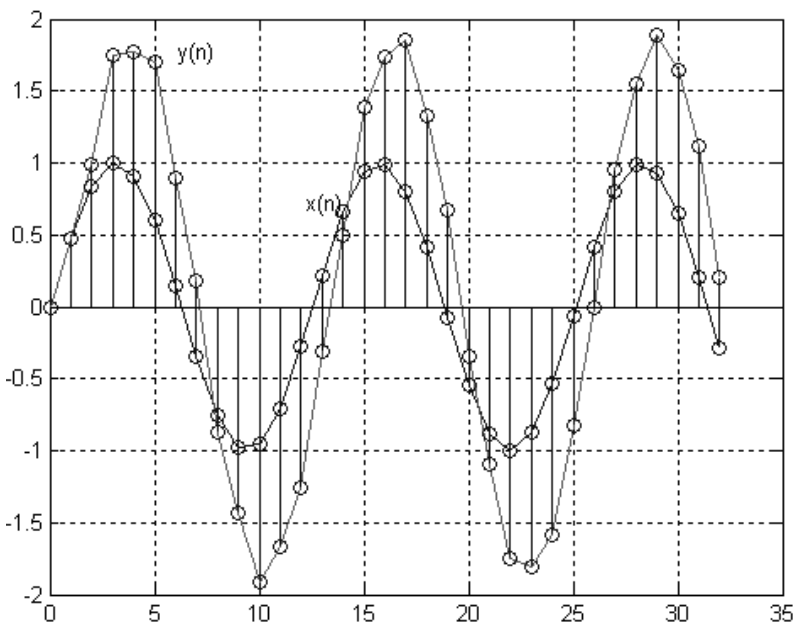


Рис.2. Вхідний та вихідний сигнали (до прикладу 2).

1.2. Розрахунок імпульсної характеристики (ІХ) за допомогою різницевого рівняння(РР): функція filter

Для того, щоб розрахувати ІХ НІХ-фільтра за допомогою РР (1), необхідно в якості впливу обрати одиничний цифровий імпульс – вектор $[1 \ 0 \ \dots]$, де кількість нулів відповідає довжині ІХ (в дійсності нескінченної).

Приклад 3. Розрахувати ІХ НІХ-фільтра, заданого РР (10). Введемо позначення: h – ІХ, δ – одиничний цифровий імпульс довжиною 51 відліків (одиниця та 50 нулів):

```
>> b=[1 1 1];
>> a=[1 0.7 -0.25];
>> delta=[1; zeros(50,1)]';
>> h=filter(b,a,delta);
>> stem(0:length(delta)-1,h)
>> grid
```

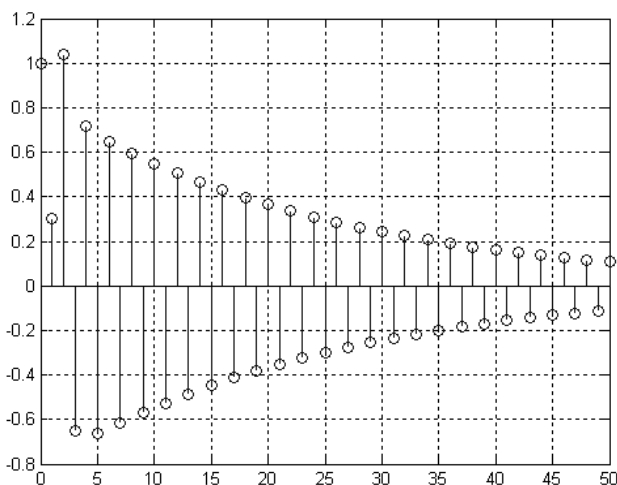


Рис.3. IX, розрахована за PP (до прикладу 3)

1.3. Розрахунок імпульсної характеристики (IX) за допомогою коефіцієнтів різницевого рівняння (PP): функція `impz`

IX може бути розрахована безпосередньо за коефіцієнтами PP за допомогою функції `impz`, формат якої має вигляд

$$[h, nT] = \text{impz}(b, a, N, Fs)$$

де b - вектор коефіцієнтів (2) в порядку їх слідування, a - вектор коефіцієнтів (3) в порядку їх слідування; *перший елемент завжди рівний 1*, N - кількість відліків IX, що розраховується (оскільки IX нескінченна), Fs - частота дискретизації в Гц, h - вектор-стовбчик відліків IX, nT - вектор-стовбчик значень дискретного часу.

Визначимо IX НІХ-фільтру за даними попереднього прикладу при $N = 50$ та $Fs = 2000$ Гц:

```
>> b=[1 1 1];
>> a=[1 0.7 -0.25];
>> N=50;
>> Fs=2000;
>> [h,nT]=impz(b,a,N,Fs);
>> stem(nT,h),grid
```

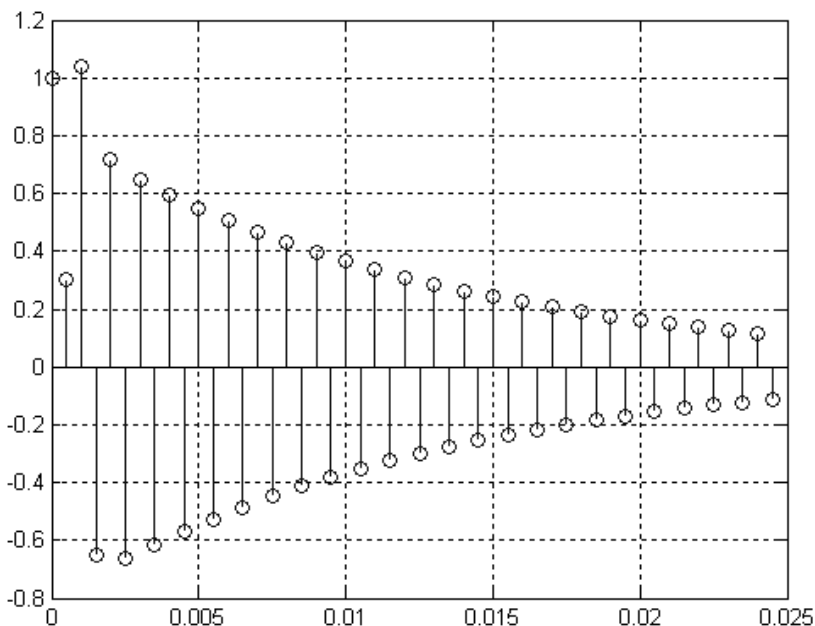


Рис.4. IX, розрахована за коефіцієнтами РР (вісь nT)

Графік IX (Рис.4) має такий самий вигляд як і в попередньому випадку (при розрахунках за допомогою функції **filter**), за виключенням того, що замість осі нормованого часу ми маємо вісь nT .

Якщо необхідна вісь n , зручніше використати інший формат функції **impz**

$$\mathbf{h}=\mathbf{impz}(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{N})$$

Для прикладу, що розглядається (див. Рис.5):

```
>> h=impz(b,a,50);
>>n=1:50;
>>stem(n,h),grid
```

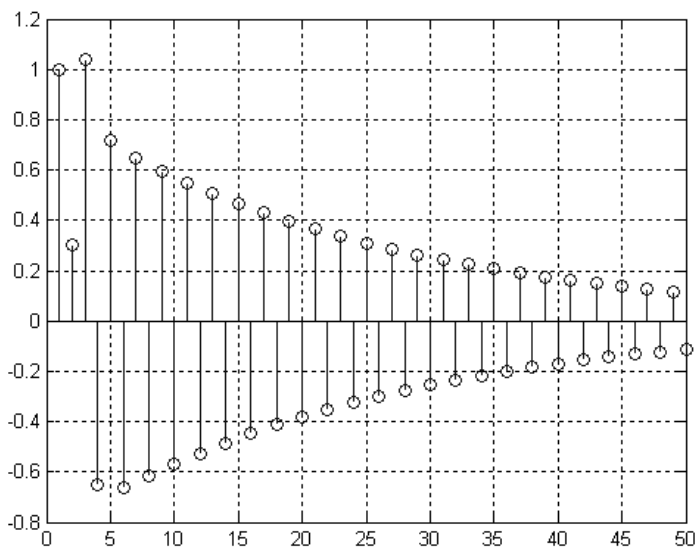



Рис.5. ІХ, розрахована за коефіцієнтами РР (всіх n)

1.4. Моделювання роботи ЛДС на основі формули згортки: функція `conv`

Моделювання роботи ЛДС на основі формули згортки (5) з виконується за допомогою функції `conv`, формат якої має вигляд

`conv(x,h)`

або

`conv(h,x)`

де x - вектор відліків реакції довжиною $k = \text{length}(x)$, h - вектор відліків ІХ довжиною $i = \text{length}(h)$. В результаті розрахунку функція `conv` повертає вектор реакції довжиною $k + i - 1$.

Приклад 4. Розрахувати реакцію КІХ-фільтра, заданого РР (9). ІХ рівна вектору коефіцієнтів РР:

```
>> b=[0.1 0.5 0.7];
```

```
>> h=b;
```

```

>> n=0:32;
>> x=sin(0.5.*n);
>> y=conv(h,x);
>> k=length(y);
>> stem(n,x)
>> hold on
>> plot(n,x), grid
>> nc=0:(k-1);
>> stem(nc,y)
>> plot(nc,y,'--')
>> gtext('x(n)')
>> gtext('y(n)')

```

Результати обрахунку приведені на Рис. 6 (порівняйте їх із прикладом 1).

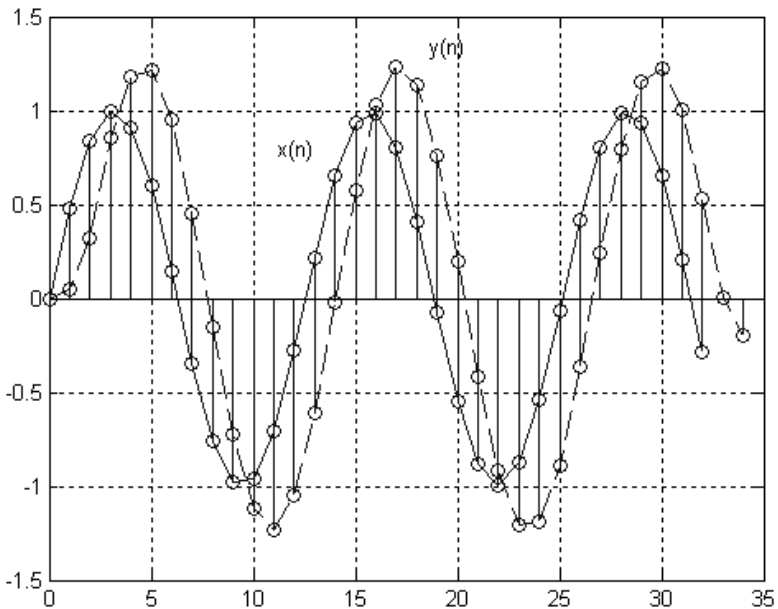


Рис.6. Вхідний та вихідний сигнали, розраховані за допомогою формули згортки

Приклад 5. Розрахувати реакцію НІХ-фільтра, заданого РР (10).
ІХ розрахована в прикладі 3.

```
>> b=[1 1 1];  
>> a=[1 0.7 -0.25];  
>> delta=[1; zeros(50,1)]';  
>> h=filter(b,a,delta);  
>> n=0:32;  
>> x=sin(0.5.*n);  
>> y=conv(x,h);  
>> k=length(y);  
>> stem(0:(k-1),y),grid
```

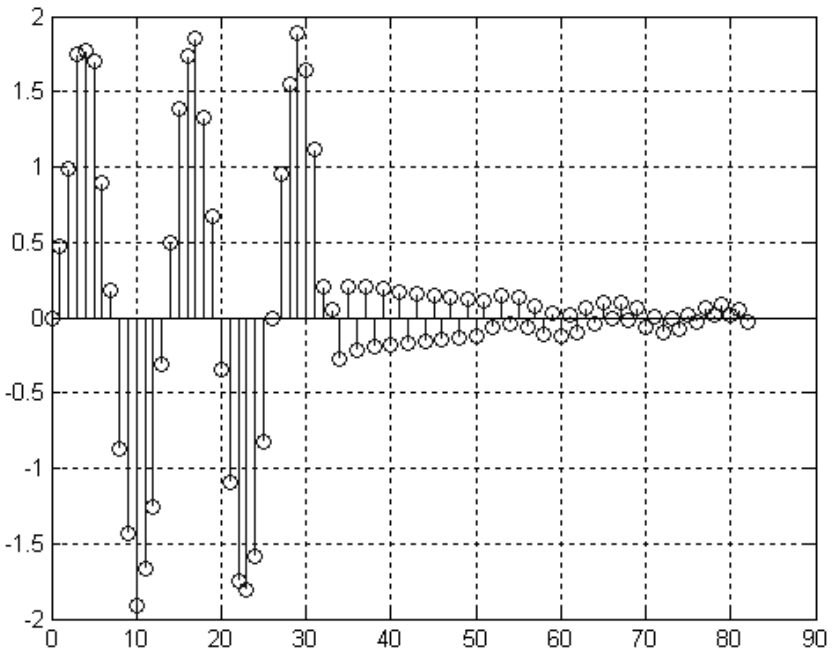


Рис.7. ІХ (до прикладу 5)

1.5. Розрахунок імпульсної характеристики (ІХ) НІХ-фільтра за відомими впливом та реакцією: функція `deconv`

Функція `deconv` виконує операцію, обернену до згортки. Тому, якщо відома реакція (вектор y) та вплив (вектор x), але невідомі вектори коефіцієнтів a, b , ІХ можливо знайти за допомогою функції `deconv`, що в даному випадку має формат

$$h = \text{deconv}(y, x)$$

де y, x, h - вектори відліків реакції, впливу та ІХ відповідно. Необхідно пам'ятати, що розрахунок ІХ за допомогою функції `deconv` можливий тільки тоді, коли перший елемент векторів x, y не рівний 0!

Приклад 6. Розрахувати ІХ підчас впливу та розрахованій за допомогою `conv` реакції в прикладі 4.

```
>> h=deconv(y,x)
?? Error using ==> deconv
First coefficient of A must be non-zero.
```

В даному випадку розрахунок ІХ за допомогою функції `deconv` неможливий.

Приклад 7. Розрахувати ІХ підчас впливу $x(n) = \sin(0.5n) \rightarrow x(n) = \cos(0.5n)$.

Визначимо реакцію

```
>> b=[0.1 0.5 0.7];
>> h=b;
>> n=0:32;
>> x=cos(0.5.*n);
>> y=conv(h,x);
```

та виконаємо обернену процедуру – за відомими векторами x, y розрахуємо ІХ – вектор h :

```
>> h=deconv(y,x)
```

```
h = 0.1000 0.5000 0.7000
```

Отримані дані співпадають з вектором b в прикладі 4.

1.6. Формування моделі змінних станів: функції **tf2ss**, **zp2ss**, **ss2tf**, **ss2zp**

Формування математичної моделі у вигляді змінних станів (6) може бути виконано:

- За відомими коефіцієнтами b, a РР (1) із допомогою функції **tf2ss**, що має формат

-

$$[A,B,C]=\text{tf2ss}(b,a);$$

де A, B, C, D - визначені в (6); b, a - вектори коефіцієнтів в порядку їх слідування.

```
>> b=[1 1 1];
>> a=[1 -0.7 0.25];
>> [A,B,C,D]=tf2ss(b,a);
A =
    0.7000   -0.2500
    1.0000     0
B =
     1
     0
C =    1.7000    0.7500
D =     1
```

Отримана математична модель у вигляді рівнянь змінних станів (6):

$$\begin{cases} s_1(n+1) = 0.75s_1(n) - 0.25s_2(n) + x(n), \\ s_2(n+1) = s_1(n), \\ y(n) = 1.7s_1(n) + 0.75s_2(n) + x(n). \end{cases}$$

Обернена процедура виконується за допомогою функції **ss2tf**:

```
>> A=[0.7 -0.25; 1 0];
>> B=[1 0]';
>> C=[1.7 0.75];
>> D=1;
>> [b,a]=ss2tf(A,B,C,D)
```

b =

1.0000 1.0000 1.0000

a =

1.0000 -0.7000 0.2500

• За нулями й полюсами функції $H(z)$ (векторам p, q) за допомогою функції **zp2ss** (розрахунок нулів і полюсів див. далі); обернена процедура виконується з допомогою функції **ss2zp**; розібратися з даними функціями дуже легко й тому пропонується зробити це самостійно.

Завдання:

1. Розрахувати реакцію КІХ- та НІХ- фільтрів заданих наступними РР:

$$- y(n) = x(n) + 0.3x(n-1) + 0.9x(n-2),$$

-

$$y(n) = 0.5x(n) + x(n-1) + 0.01x(n-2) + 0.7y(n-1) - y(n-2)$$

(аналогічно до прикладів 1, 2)

Вимоги до оформлення звіту:

1. Мета, завдання, короткі теоретичні відомості.
2. Лістинги обчислювальних програм.
3. Висновки по роботі.

Перелік контрольних запитань

1. Поняття лінійної дискретної системи (ЛДС).
2. Визначення різницевого рівняння та формули згортки.
3. Поняття КІХ та НІХ фільтрів та систем.
4. Поняття імпульсної характеристики.

Лабораторна робота №3 „Цифрова фільтрація мовного сигналу за допомогою пакета SPTool програми Matlab”

Обладнання: Персональний комп’ютер, програмне середовище MATLAB 6.5

Мета й завдання: ознайомлення з деякими можливостями пакета SPTool програми Matlab, включаючи освоєння процедури цифрової фільтрації мовних сигналів.

1.Робоче завдання

1. Засобами Matlab ввести в комп’ютер мовний сигнал тривалістю $n=50000$ вибірок. Параметри введення: частота дискретизації $F_s=22050$ Гц, 1 канал (моно), 16 біт. Приклад фрази: «Сидячи на дереві ворона чистила пір’я».

2. Переконатися в гарній якості зробленого запису, для чого в середовищі Matlab прослухати введений сигнал.

3. Активувати пакет SPTool й імпортувати в його середовище мовний сигнал із середовища Matlab.

4. У середовищі SPTool:

1) переглянути, прослухати й зберегти зображення форми мовного сигналу;

2) обчислити спектр мовного сигналу й зберегти його зображення;

3) засобами SPTool сформувати низькочастотний (ФНЧ) фільтр (Кайзера, параметр $\beta = 5$) із заданою частотою зрізу F_1 й зберегти зображення його АЧХ;

4) профільтувати мовний сигнал отриманим фільтром;

5) переглянути, прослухати й зберегти зображення форми профільтованого мовного сигналу;

6) обчислити спектр профільтованого мовного сигналу й зберегти його зображення;

7) повторити дії (пп. 3-5) для високочастотного (ФВЧ) фільтра із частотою зрізу F_2 й для смугового фільтра (СФ) із частотами зрізу F_1 й F_2 .

Примітка: значення частот зрізу F_1 й F_2 наведені в таблиці 1.

5. У звіті привести:

1) графіки сигналу і його спектра до й після фільтрації, а також графіки АЧХ відповідного фільтра для ФНЧ, ФВЧ і ПФ;

2) пояснення змін, що відбулися, із сигналом і його спектром у результаті фільтрації (використайте при цьому математичні формули, що описують проходження сигналу через лінійну систему);

3) відповіді на контрольні питання.

6. Контрольні запитання:

1) чому фільтр називають лінійною системою?

2) чи повністю АЧХ описує властивості фільтра?

3) який з результатів фільтрації має найбільшу розбірливість?

4) який з результатів фільтрації має найменшу гучність і чому?

Таблиця 1

	1	2	3	4	5	6	7	8
F_1 , Гц	500	600	700	550	650	750	800	850
F_2 , Гц	1500	1600	1700	1800	1900	2000	2100	2200

2. Теоретичні відомості

Введення в комп'ютер мовного сигналу засобами Matlab

здійснюється за допомогою команди:

`x=wavrecord(50000, 22050, 1, 'double')`,

де **`n=50000`** – кількість вибірок сигналу, введених у комп'ютер із частотою дискретизації **`Fs=22050`** Гц. Інші параметри: **`1`** – число каналів (тобто моно); **`'double'`** – 16-бітовий запис, дані масштабуються в діапазоні `-1.....1` і представляються в 8-бітовому форматі із плаваючою комою.

Після введення сигналу в робочому просторі (workspace) повинна з'явитися змінна **`y`** – масив з 50000 вибірок.

Примітка: введення здійснюється за допомогою мікрофона, вихід якого підключений до мікрофонного входу звукової карти комп'ютера; перед введенням потрібно перевірити готовність системи сприймати сигнал з виходу мікрофона (Панель керування – звуки й аудіопристрої – аудіо – запис звуку – мікрофон увімкнено на максимальну гучність).

3. Перевірка якості уведеного сигналу

Здійснюється за допомогою команди:

wavplay(x, 22050).

4. Робота з пакетом SPTool

4.1. Активація пакета й імпорт звукового файлу із середовища Matlab

Для активації пакету SPTool потрібно в командному вікні програми Matlab набрати команду **sptool**.

Для імпорту масиву **x** із середовища Matlab:

- у вікні, що з'явилося, SPTool, активізуйте позицію меню «файл - імпорт»;

- у вікні, що з'явилося, Import to SPTool мишкою виділіть ім'я змінної **x** і перенесіть змінну в рядок Data, натиснувши на кнопку зі стрілкою → (праворуч);

- вкажіть частоту дискретизації - 22050;

- введіть ім'я сигналу **x**;

- натисніть клавішу ОК.

У результаті у вікні SPTool у розділі Signals з'явиться вектор **x**.

4.2. Перегляд, прослуховування й збереження зображення форми мовного сигналу

Для перегляду форми сигналу натисніть клавішу View у розділі Signals - у результаті з'явиться вікно Signal Browser із графіком сигналу.

Для прослуховування сигналу вкажіть вертикальними маркерами границі ділянки, що прослуховується, і натисніть піктограму з гучномовцем. Для збереження зображення форми мовного сигналу натисніть на клавіатурі Print Screen - у результаті зображення екрана збережеться в буферній пам'яті. Інший спосіб - у вікні Signal Browser задайте режим друку у файл.

4.3. Обчислення спектра мовного сигналу

У розділі Spectra вікна SPTool натисніть кнопку Create й у вікні, що з'явилося, Spectrum Viewer, задайте параметри спектрального аналізу: **Method = FFT; Nfft = 50000**.

Після натискання клавіші Apply з'явиться графік амплітудного спектру сигналу **x**.

4.4. Формування фільтра Кайзера засобами SPTool

Продемонструємо, як сформувати ФНЧ із частотою зрізу 500 Гц. Інші фільтри (ФВЧ і СФ) формуються аналогічно.

У вікні SPTool у розділі Filters натисніть клавішу New.

У вікні, що з'явилося, Filter Designer:

- задайте частоту дискретизації 22050;
- виберіть Algorithm = Kaiser Window FIR;
- відключите прапорець Minimum Order;
- задайте Type=lowpass;
- задайте частоту зрізу $F_c = 500$;
- задайте Beta = 5;
- натисніть клавішу Apply.

У результаті буде сформований потрібний фільтр **filt1** – його АЧХ буде показана у вікні Filter Designer, а його ім'я з'явиться у вікні SPTool у розділі Filters.

4.5. Фільтрація мовного сигналу отриманим фільтром

У вікні SPTool у розділі Signals повинне бути виділене ім'я сигналу **x**, що фільтрується, а в розділі Filters – ім'я фільтра **filt1**.

Для фільтрації натисніть у розділі Filter кнопку Apply – у результаті з'явиться вікно Apply Filter, у якому залишіть ім'я вихідного сигналу таким, яким його пропонують, тобто **sig1**, і натисніть кнопку ОК.

У результаті у вікні SPTool з'явиться ім'я вектора **sig1** – це і є результат фільтрації. Переглянути, прослухати й зберегти графік сигналу **sig1** можна точно так само, як це робилося для вихідного сигналу **x**.

Примітка: будьте уважні - при фільтрації сигналу **x** його ім'я повинне бути виділене в розділі Signals вікна SPTool.

Лабораторна робота №4 „Моделювання дискретних сигналів в Matlab й Simulink”

Обладнання: Персональний комп’ютер, програмне середовище MATLAB 6.5

Мета й завдання: освоєння прийомів моделювання дискретних сигналів у середовищах Matlab й Simulink.

1. Робоче завдання

• Змоделювати в середовищі Matlab сигнал $s_2(t)$ на виході дискретизатора (частота дискретизації F_s), якщо на вхід дискретизатора подається сигнал:

$$s_1(t) = A_1 \cos(2\pi f_{01}t + \varphi_{01}) + A_2 \cos(2\pi f_{02}t + \varphi_{02}), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Варіанти значень параметрів сигналу $s_1(t)$ наведені в табл. 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A_1	1	1	2	1	1	1	1	2
A_2	1	2	1	1	1	2	2	1
f_{01} , Гц	100	100	100	100	100	100	100	100
f_{02} , Гц	200	200	200	200	200	200	200	200
φ_{01} , рад	0	0	0	0	π	0	π	0
φ_{02} , рад	0	0	0	π	0	π	0	π

Частоту дискретизації F_s задати двома способами:

а) виходячи з інженерної версії теореми Найквіста-Котельникова;

б) збільшивши обране по таблиці (f_{02}) значення в 5 разів.

Тривалість T вибрати так, щоб на ній уклалося два періоди.

У звіті представити:

- перелік команд Matlab, за допомогою яких відбувається обчислення сигналу $s_2(t)$;

- графік сигналу $s_2(t)$ й складових його гармонійних компонентів.

- **Змоделювати сигнал $s_2(t)$ у середовищі Simulink.**

У звіті представити:

- блок-схему моделювання;
- графік сигналу $s_2(t)$ й складових його гармонійних компонентів.

- **Зробити загальні висновки по роботі, порівнявши між собою моделювання в середовищі Matlab і моделювання в середовищі Simulink**

Контрольні питання:

1. Що таке «інженерна версія теореми Найквіста-Котельникова»?
2. Що собою представляє спосіб дискретизації, відомий як «вибірка-зберігання»?
3. Як реалізувати спосіб дискретизації, відомий як «вибірка-зберігання», у середовищі Matlab й у середовищі Simulink?

2. Теоретичні відомості. Дискретні сигнали в Matlab й Simulink

Подаючи електричний сигнал з виходу мікрофона на вхід звукової плати комп'ютера, корисно уявляти собі, як аналоговий сигнал перетвориться в дискретний, і як потім дискретний сигнал перетвориться в послідовність чисел. У даному розділі ми розглянемо перший етап - перетворення аналогового сигналу в дискретний. Таке перетворення прийнято називати «дискретизацією».

Можливі варіанти сигналів показані на Рис. 1. Сигнал, зображений на Рис. 1(а), будемо називати *вихідним аналоговим*. На Рис. 1(б) представлена дискретна версія вихідного сигналу, що називається *даними*, або *даними з амплітудно-імпульсною модуляцією* (pulse amplitude modulation — PAM). Дані на Рис. 1(б) ще несумісні із цифровою системою, оскільки амплітуда кожної природної вибірки може приймати нескінченну кількість можливих значень, а цифрова система працює з кінцевим набором значень. На Рис. 1(в) і Рис. 1(г) показане подання вихідного сигналу такими дискретними імпульсами, вершина яких плоска. Далі ці імпульси можна подати на пристрій квантування, що перетворить імпульси так, що їх значення утворять рахункову

множину - такі імпульси називаються *квантованими відліками*. Дані в такому форматі сумісні із цифровою системою.

Імпульси Рис. 1(г) відрізняються від імпульсів Рис. 1(в) тим, що повністю заповнюють проміжок між моментами відновлення значення сигналу. Такий спосіб дискретизації, називається «вибірка-зберігання» [3], що є найбільш ефективний з погляду завадостійкості.

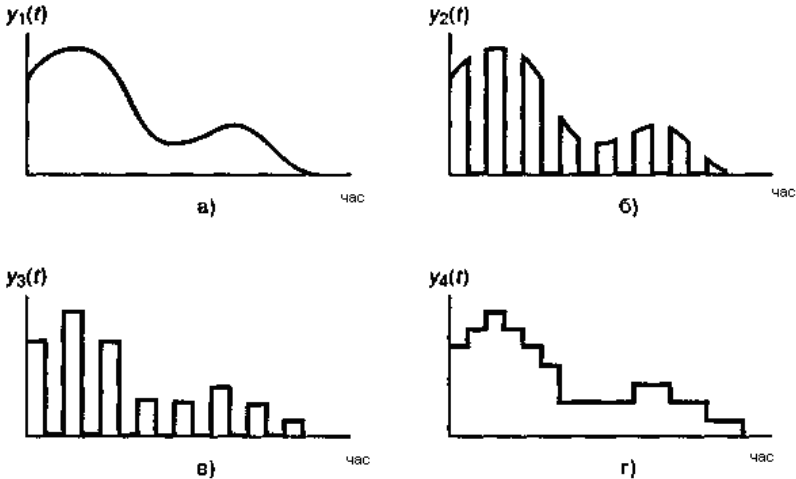


Рис. 1. Вихідні дані в системі координат "час-амплітуда":
а) вихідний аналоговий сигнал; б) дискретизований сигнал;
в) квантовані вибірки; г) вибірка-зберігання

3. Моделювання дискретних сигналів в Matlab

Генерувати сигнали в **Matlab** можна трьома способами:

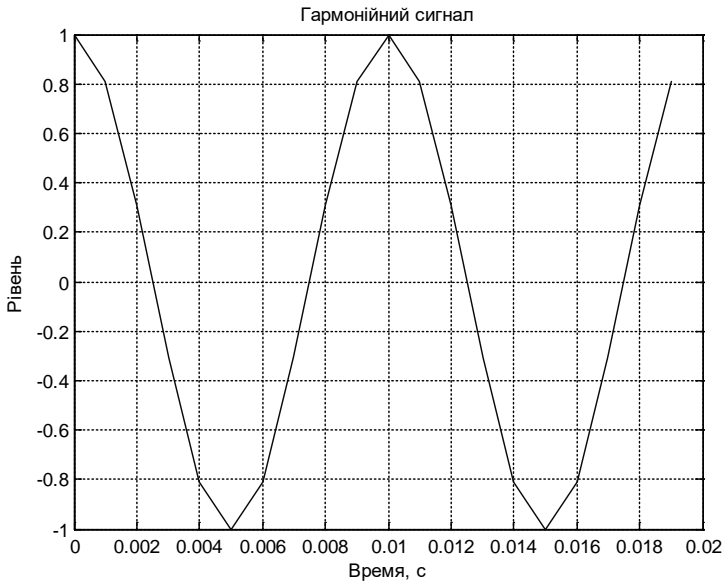
- у діалоговому режимі, за допомогою послідовності команд у командному вікні;
- в автоматичному режимі, шляхом створення й запуску на виконання m-скрипту;
- в автоматичному режимі, шляхом створення й виклику m-функції.

Генерування сигналів у діалоговому режимі. Цей спосіб найбільш трудомісткий, оскільки вимагає кожну команду набирати із клавіатури в командному вікні. Щоб підвищити продуктивність праці, можна всю послідовність команд попередньо набрати в будь-якому текстовому редакторі (звичайно це **Notebook** або **Word**), а потім,

скопіювавши текст у буферну пам'ять (**Clipboard**), вставити його в командне вікно. Недолік цього способу в тім, що необхідно одночасно тримати активними дві програми – **Matlab** і текстовий редактор. Такий стиль роботи типовий, наприклад, при проведенні лабораторних робіт [1].

Наприклад, так виглядає в текстовому редакторі послідовність команд генерування N відліків тонального сигналу амплітудою A , частотою f_0 , початковою фазою Fi_0 , із частотою дискретизації fs :

```
% гармонійний сигнал
A=1; f0=100; Fi0=pi/2; fs=1000; N=20; % параметри сигналу
t=(0:N-1)/fs; % моменти часу
s=A*sin(2*pi*f0*t+Fi0); % обчислення відліків сигналу
plot(t,s) % вивід графіка
title('Гармонійний сигнал') % заголовок
xlabel('Время, с'); ylabel('Рівень'); % написи уздовж осей
grid on % координатна сітка
```



Генерування сигналів шляхом створення m-скрипта. Даний спосіб відрізняється тим, що всі команди набираються в спеціальному вікні редактора m-файлів.

```

D:\Raboty_3\Kpi_new\Acoustic\Audio&Computer&Video&Foto\A_book_rech\signal
File Edit View Text Debug Breakpoints Web Window Help
[Icons]
1 % гармонический сигнал
2 - A=1; f0=100; F0=pi/2; fs=1000; N=20; % параметры сигнала
3 - t=(0:N-1)/fs; % моменты времени
4 - s=A*sin(2*pi*f0*t+F0); % вычисление отсчетов сигнала
5 - plot(t,s) % вывод графика
6 - title('Гармонический сигнал') % заголовок
7 - xlabel('Время, с'); ylabel('Уровень'); % надписи вдоль осей
8 - grid on % координатная сетка

```

Даний спосіб гарний тим, що замість сторонніх програмних продуктів використовується власний інструментарій Matlab, спеціалізований для написання й налагодження m-скриптов.

Генерування сигналів шляхом створення m-функції. Даний спосіб відрізняється тим, що вхідні дані записують як аргумент якоїсь функції $y = f(x)$, а вихідні – як значення цієї функції. Зручність у тому, що символічні позначення даних можуть відрізнятися від позначень, використовуваних у тілі функції. Більше того, числові значення вхідних даних можна просто задавати в найменуванні функції, що викликається. Останню обставину продемонструємо на прикладі.

Створимо підпрограму - m-скрипт **ton.m** виду:

```

% скрипт ton
s=A*sin(2*pi*f0*t+F0); % обчислення відліків сигналу
    Команду виконання цього скрипту потрібно «оточити»
командами підготовки вхідних даних і виводу вихідних даних:
A=1; f0=100; F0=pi/2; fs=1000; N=20; % параметри сигналу
t=(0:N-1)/fs; % моменты часу
ton; % обчислення відліків сигналу
plot(t,s) % вывод графика
title('Гармонийний сигнал') % заголовок
xlabel('Время, с'); ylabel('Рівень'); % напису уздовж осей
grid on % координатна сітка

```

Очевидно, позначення вхідних і вихідних даних програми повинні збігатися з позначеннями відповідних даних підпрограми, що викликається.

Тепер зробимо по-іншому – напишемо й збережемо m-функцію під ім'ям **ton_sig.m**:

```
%-i-i-i-функція ton_sig.m -i-i-i-i-  
% [s,t]=ton_sig(B,f1,Fi1,Fs,N1)  
%-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-  
% генерування гармонійного сигналу  
%  $y = B * \sin(2 * \pi * f1 * x + Fi1)$ ,  
% B - амплітуда;  
% N1 - кількість отсчетов сигналу;  
% f1 - частота;  
% Fs - частота дискретизації;  
% Fi1 - початкова фаза сигналу  
%-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-  
function [y,x] = ton_sig ( B, f1, Fi1, Fs, N1 )  
%-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-  
x = (0:N1-1)/Fs; % моменти часу  
y = B * sin( 2*pi*f1*x + Fi1 );  
%-i-i-i-i кінець функції ton_sig.m -i-i-i-i
```

Тепер m-скрипт генерування того ж відрізка косинусоїди буде виглядати так:

```
% гармонійний сигнал  
[s,t]=ton_sig(1,100,pi/2,1000,20) % обчислення відліків  
сигналу  
plot(t,s) % вивід графіка  
title('Гармонійний сигнал') % заголовок  
xlabel('Час, с'); ylabel('Рівень'); % напису уздовж осей  
grid on % координатна сітка
```

Як бачимо, тепер числові значення вхідних даних задаються як аргументи m-функції **ton_sig.m**. Вихідні дані функції використовуються для побудови графіка.

Очевидно, застосування m-функцій вигідно тоді, коли алгоритм формування значень функції досить складний: міститься багато команд і звертань до різноманітних бібліотечних функцій з непростим синтаксисом.

Очевидний і недолік m-функцій – необхідно пам'ятати їх синтаксис. Втім, одержати потрібну інформацію можна, якщо в командному вікні задати команду **help**:

```
>> help ton_sig
```


У результаті на моніторі відобразиться коментар, з якого починається m-функція. Для наведеного вище приклада текст допомоги має такий вигляд:

```
%-i-i-i-функція ton_sig.m -i-i-i-i-
% [s,t]=ton_sig(B,f1,Fi1,Fs,N1)
%-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-
% генерування гармонійного сигналу
%  $y = B * \sin(2 * \pi * f1 * x + Fi1)$ ,
% B - амплітуда;
% N1 - кількість відліків сигналу;
% f1 - частота;
% Fs - частота дискретизації;
% Fi1 - початкова фаза сигналу
%-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-i-
```

Таким чином, очевидний висновок: **дуже важливо при програмуванні m-функцій оздоблювати їх якісним і докладним коментарем.**

4. Моделювання дискретних сигналів в Simulink

Генерування сигналів в **Simulink**, природно, має свої особливості. Розглянемо їх. Візьмемо з бібліотеки блоків **Simulink** два блоки: **Sine Wave** (з розділу **Sources**) і **Scope** (з розділу **Sinks**). З'єднавши їх, одержимо наступну схему (Рис.2).

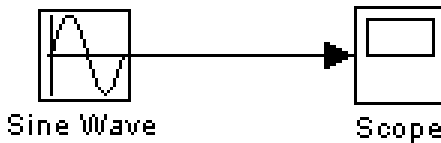


Рис.2. Схема сполучення.

Потім подвійним натисканням на блоці осцилоскопа активізуємо вікно, що імітує екран осцилоскопа, і запусимо модель (кнопка **Start simulation**). У результаті одержимо зображення відрізка синусоїди (Рис.3).

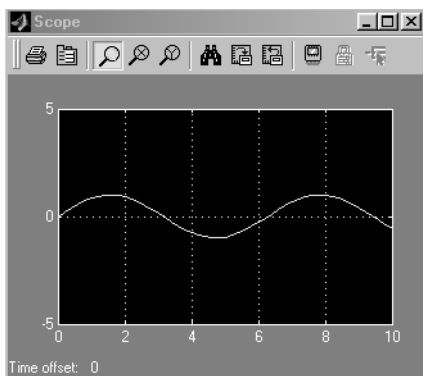


Рис.3. Зображення відрізка синусоїди

Як бачимо, генерувати гармонійний сигнал у середовищі Simulink навіть простіше, ніж у середовищі Matlab. Однак це перше враження досить оманливе. Дійсно, адже важливо ще вміти управляти параметрами гармонійного сигналу. Дійсно, за замовчуванням амплітуда генерованого сигналу прийнята рівній одиниці. Однак частотою, початковою фазою й тривалістю сигналу ми поки не керуємо.

Двічі клацнемо по блоці **Sine Wave** – у результаті з'явиться вікно настроювань параметрів (Рис. 4). Клацнувши по кнопці **Help**, одержимо інструкцію з даного блоку, сутність якої зводиться коротенько до того, що в даному блоці виконується операція

$$y = \textit{Amplitude} \times \sin(\textit{frequency} \times \textit{time} \times \textit{phase}) + \textit{bias}$$

З наведеної формули й написів на мал.5 стає зрозумілим зміст чотирьох змінних: амплітуди, кутової частоти, початкової фази й постійної складовій. Залишається поки зашифрованим зміст змінної “час”.

Зупиняючись на цьому важливому питанні, відзначимо розходження понять “час” й “модельний час”. Так, генерування відрізка сигналу тривалістю 1с (модельний час) може тривати значно більше короткий проміжок часу, наприклад, 0.1с (реальний час). Швидкість генерування залежить від обсягу обчислень, швидкодії комп'ютера, від обраного алгоритму моделювання, і т.д. До речі, цілком можливий зворотний ефект - для складного алгоритму процедура моделювання відрізка сигналу тривалістю 0.1с може розтягтися на кілька секунд.

Сигнал може генеруватися двох типів: неперервний **time-based** і дискретний **sample-based**. Для моделювання роботи неперервних систем

рекомендують використовувати неперервний тип **time-based**, а для моделювання роботи дискретних систем – дискретний тип **sample-based** [2].

Якщо встановлено тип **time-based**, тоді параметр **Sample time** може приймати значення:

- 0 (за замовчуванням) - блок працює в неперервному режимі;
- >0 - блок працює в дискретному режимі;
- -1 - блок успадковує той же режим, що й приймаючий блок.

Як вказується в **Help**, робота в неперервному режимі може приводити до більших похибок генерації на більших проміжках модельного часу.

Робота в дискретному режимі змушує блок поводитися так, ніби до виходу неперервного генератора був приєднаний блок **Zero-Order Hold**. Дійсно, зібравши дві схеми (Рис. 5) і задавши в обох випадках значення параметра **Sample time**, рівне 0.5 (вікно налаштування блоку **Zero-Order Hold** показано на Рис. 6), одержуємо ідентичні результати (Рис. 7).

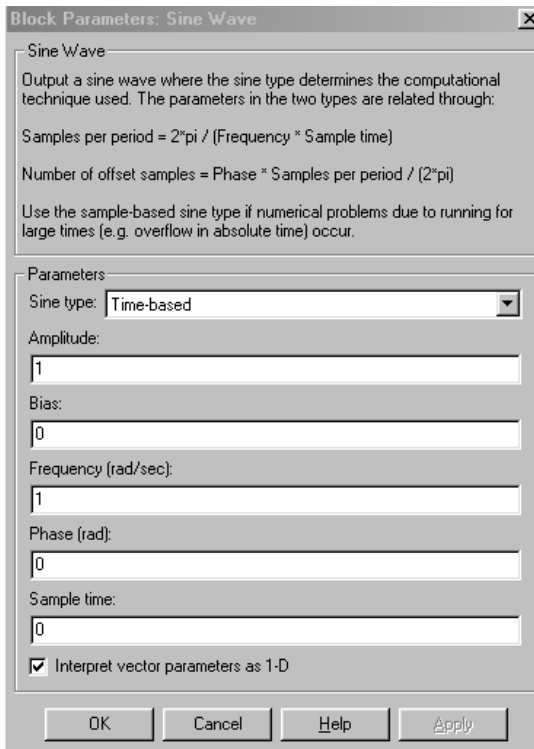


Рис.4. Вікно налаштувань параметрів Sine Wave

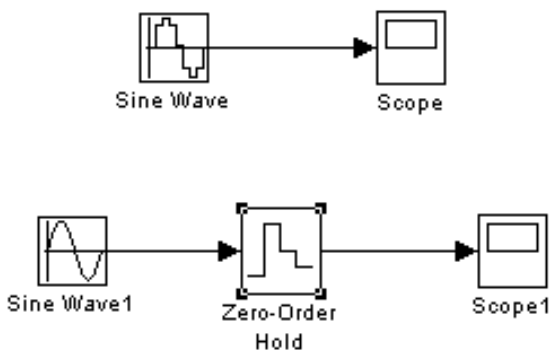


Рис.5. Схема підключення

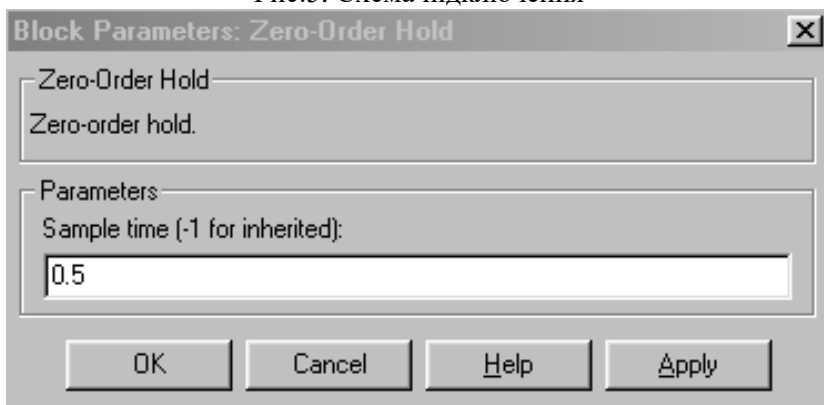


Рис.6. Вікно налаштування блоку **Zero-Order Hold**

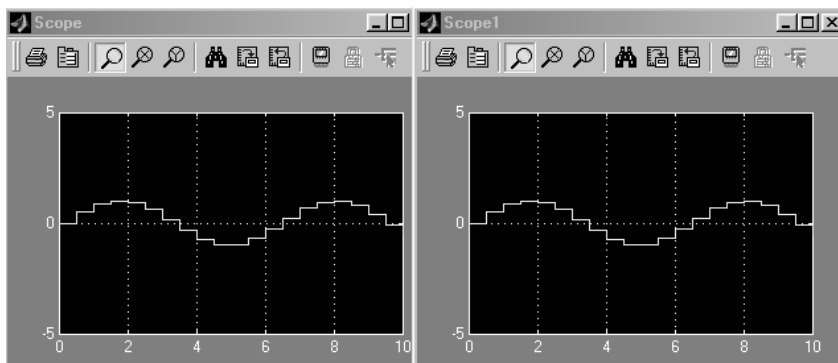


Рис.7. Результати моделювання

Таким чином, блок **Zero-Order Hold** можна трактувати як “дискретизатор”, тобто частина АЦП, відповідальну за дискретизацію сигналу. Іноді блок **Zero-Order Hold** називають АЦП [4]. На нашу думку, це не коректно, оскільки дискретизований сигнал у “справжньому” АЦП піддається ще й квантуванню за рівнем. У блоці **Zero-Order Hold**, однак, квантування не здійснюється.

Кілька слів про побудову графіків. Крім блоку **Scope**, графік можна побудувати й за допомогою блоку **X-Y-Graf**, на верхній вхід X якого потрібно подати послідовність моментів часу за допомогою блоку **Clock** (годинник), а на нижній вхід Y – значення генерованого сигналу (Рис. 8).

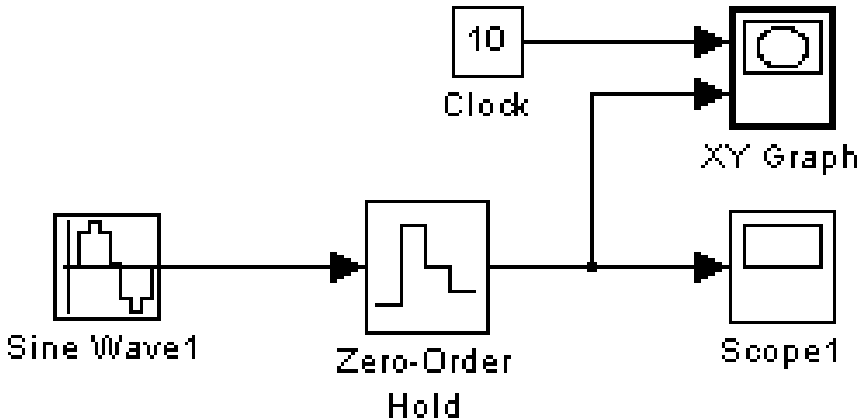


Рис.8. Схема побудови графіків

У результаті попередньо налаштований (у відповідному вікні настроювання задаються граничні значення аргументу й функції, а також указується значення параметра **Sample time**) графобудівник видасть показаний на Рис. 9 графік, якщо для блоку **X-Y-Graf** заданий **Sample time=-1** (тобто період дискретизації усладковується).

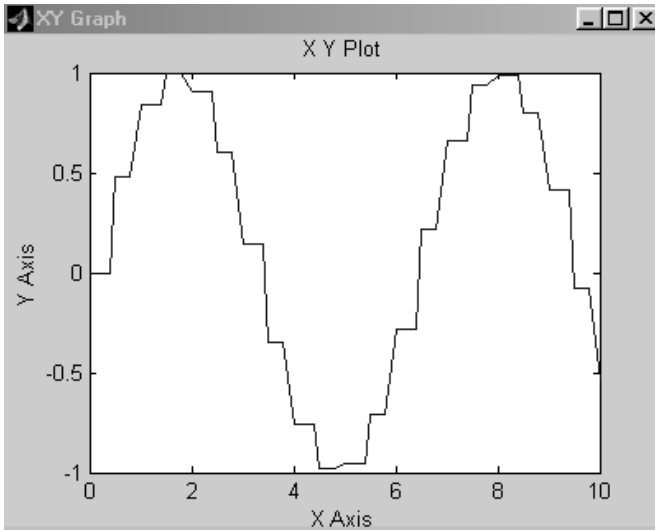


Рис.9. Результат виконання для **Sample time=-1**

Графік буде трохи іншим (Рис. 10), якщо для блоку **X-Y-Graf** задане **Sample time=0.5**.

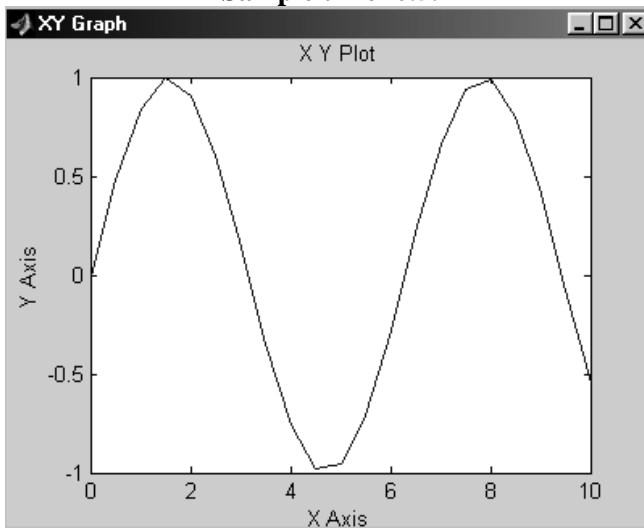


Рис.10. Результат виконання для **Sample time=-1**

Ще про один спосіб побудови графіків. Масиви відліків моментів часу й відповідних значень сигналу можна за допомогою блоку **To Workspace** експортувати із середовища **Simulink** у середовище **Matlab** (Рис. 11).

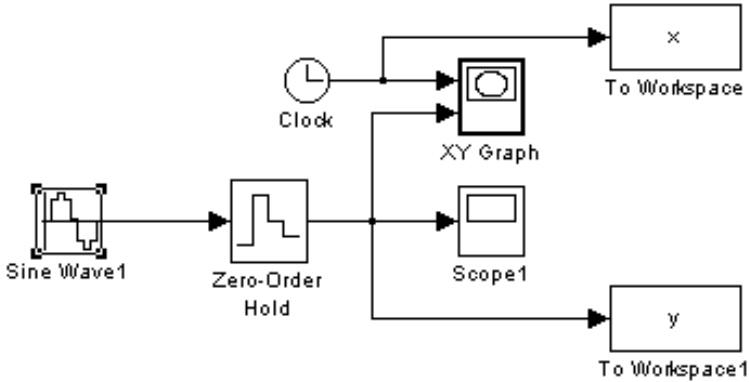


Рис.11. Схема підключення

При цьому, як показує практика, найкраще задати формат **array** для експортованих даних (Рис. 12).

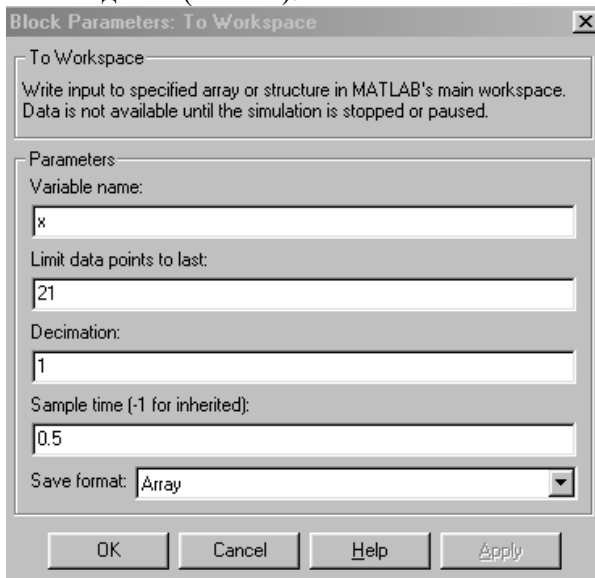


Рис.12. Вікно задання вихідних даних

Подальша побудова графіка в середовищі **Matlab** відбувається за допомогою команди **plot(x,y)** (Рис. 13).

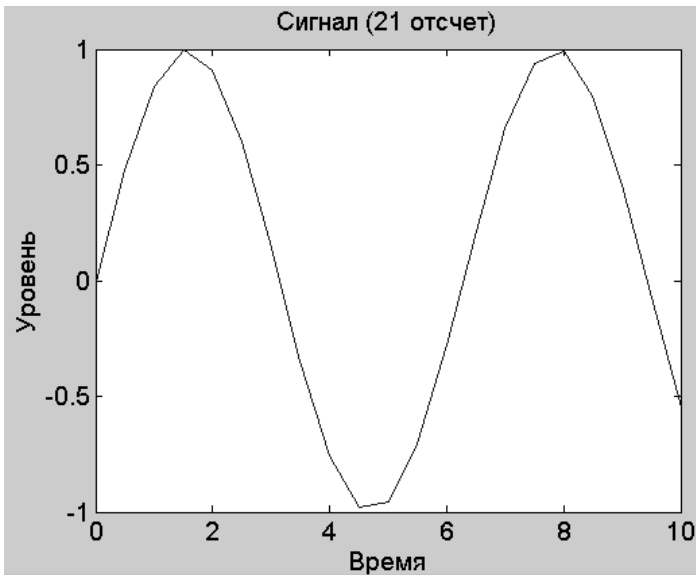


Рис.13. Результирующий графік

Підсумуємо результати проведених дослідів. Сигнал типу **time-based** при роботі блоку генерації в режимі неперервного часу має вигляд гладкої функції часу, а в режимі дискретного часу - вигляд східчастого сигналу, такого, як якби до виходу генератора плавного сигналу був приєднаний блок **Zero-Order Hold**, що є дискретизатором типу “відлік-зберігання”.

Іншими словами, задаючи режим дискретного часу, ми йдемо від необхідності використання блоку **Zero-Order Hold**.

Згенеруємо в **Simulink** відрізок дискретного гармонійного сигналу з тими самими параметрами, що були задані в **Matlab**: амплітуда 1, частота 100 Гц, частота дискретизації 1000 Гц, початкова фаза $\pi / 2$, кількість відліків 20.

Збираємо знову схему з генератора й осцилоскопа. У вікні-масці налаштування генератора робимо вказуємо потрібні числові значення параметрів, задаємо тип **time-based** і привласнюємо значення **Sample time = 0.001** (Рис. 14).

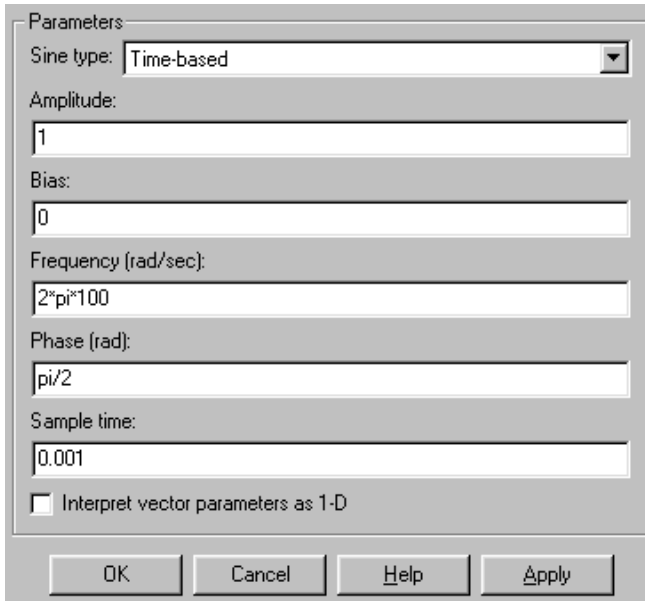


Рис.14. Вікно налаштувань

Після запуску моделі одержуємо на екрані осцилоскопа зовсім не ту картину, що очікували (Рис.15).

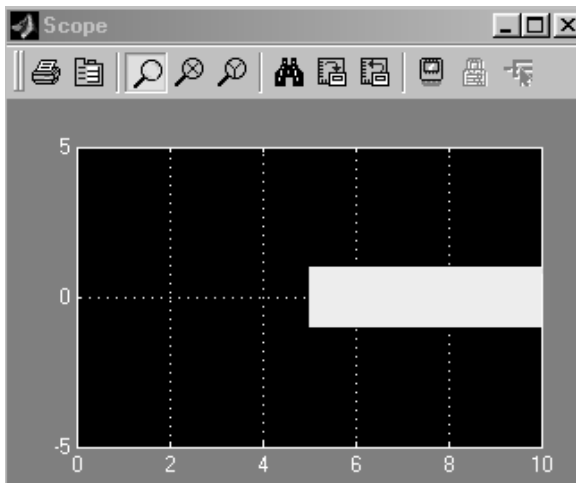


Рис.15. Результат виконання

Причина проста – потрібно ще настроїти параметри моделювання: задати початок і кінець модельного часу (у нашому випадку це 0 й 0.02с, відповідно), а також вибрати алгоритм моделювання. На Рис. 16 показано вікно налаштувань параметрів моделювання, що активується при виборі позиції меню **Simulation/Simulation parameters**.

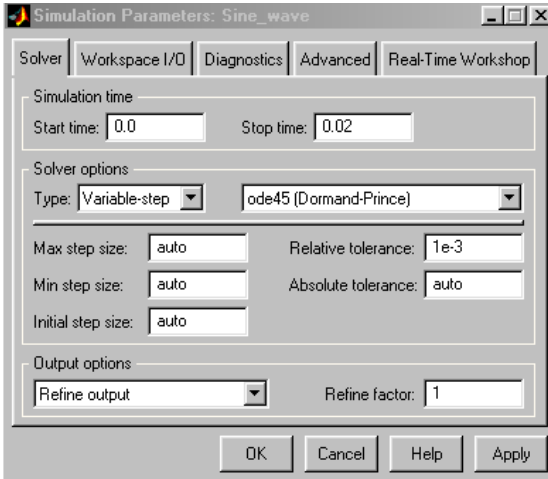


Рис.16. Вікно налаштувань параметрів моделювання

Крім того, налаштуємо параметри осцилоскопа, клацнувши по кнопці **Parameters** на вікні **Scope** (Рис. 17).

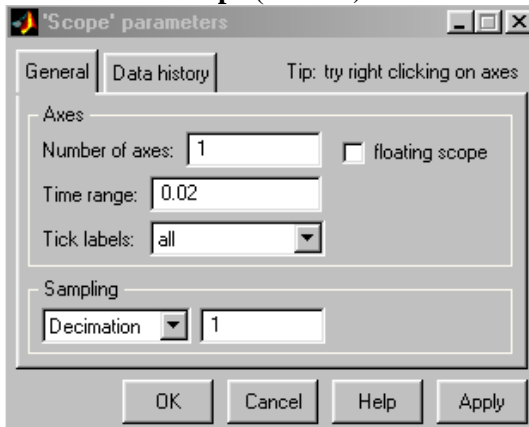


Рис.17. Вікно налаштувань параметра осцилоскопа

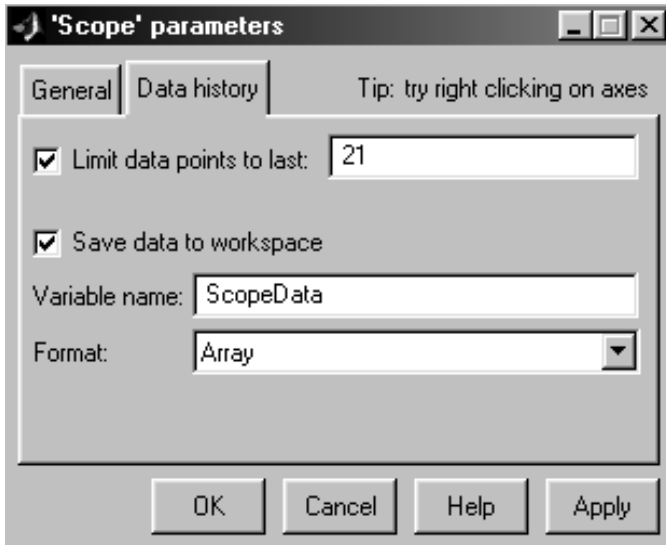


Рис.18. Вікно налаштувань параметра осцилоскопа

Після запуску моделі на екрані осцилоскопа з'явиться зображення (Рис.19).

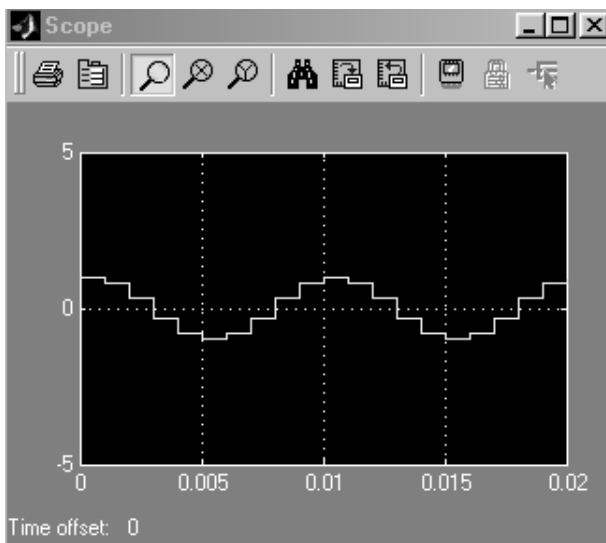


Рис.19. Результат виконання

Оскільки параметри осцилоскопа були задані так, щоб у робочий простір виводився двовимірний масив **ScopeData** значень аргументу й функції, за допомогою команд

```
>> y1=ScopeData(:,1);  
>> y2=ScopeData(:,2);  
>> plot(y1,y2)
```

можна побудувати графік функції засобами **Matlab** (Рис. 20).

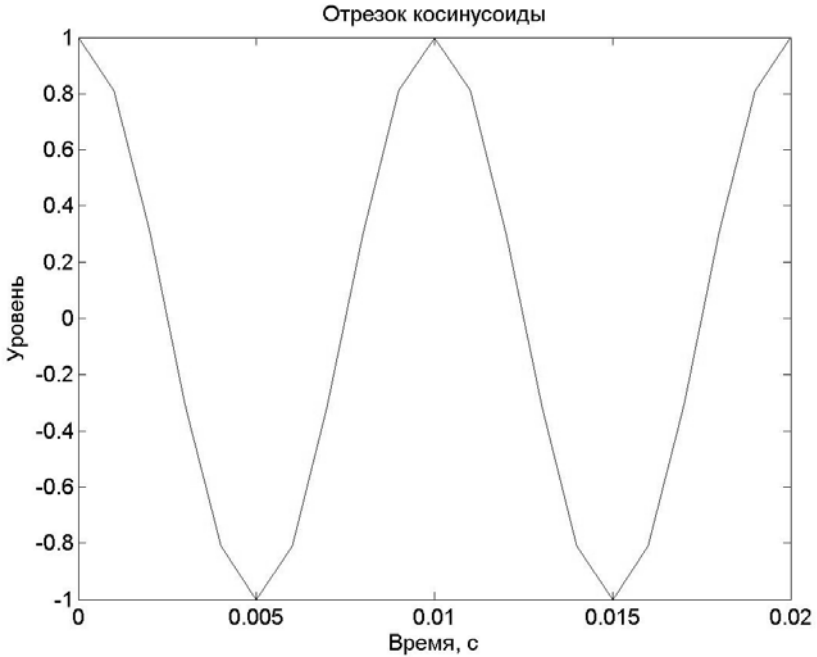


Рис.20. Результирующий графік

Лабораторна робота №5 „Розрахунок цифрових фільтрів у пакеті MatLab з урахуванням квантування”

Обладнання: Персональний комп’ютер, програмне середовище MATLAB 6.5.

Мета й завдання:

- вивчення можливостей проектування цифрових фільтрів за допомогою пакета fdatool з бібліотеки Filter Desing;
- одержання навичок проектування цифрових фільтрів;
- вивчення характеристик цифрових фільтрів, у яких всі операції над даними виконуються з машинною точністю;
- вивчення характеристик цифрових фільтрів з урахуванням квантування за рівнем.

1. Проектування цифрових фільтрів за допомогою пакета Filter Desing

Головне вікно програми fdatool з бібліотеці Filter Desing показано на Рис.1. Воно з’являється на екрані після завантаження програми, що викликається наступним ім’ям: `>>fdatool`

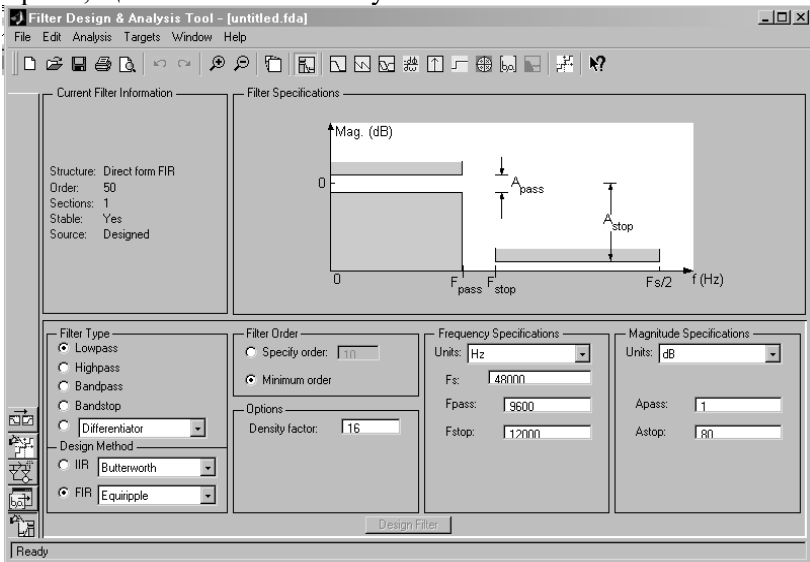


Рис.1. Головне вікно програми fdatool

З Рис.1 видно, що головне вікно включає кілька областей для введення й виводу необхідної інформації. Розглянемо ці області в послідовності, що застосовується при розробці фільтра. Насамперед, розробник повинен зробити вибір між фільтрами з нескінченними й кінцевими імпульсними характеристиками (IIR або FIR), що підтверджується відповідним прапорцем в області Design Method. При активному вікні FIR можна викликати спадаючими меню, що пропонує кілька варіантів проектування фільтрів. За замовчуванням програма пропонує фільтр Equiripple (фільтр із рівномірними пульсаціями). Проектування фільтрів за допомогою вікон (Window), робить активним підменю Window, вибір якого активізує область Window, у спадаючому меню якого з'являються найпоширеніші типи вікон. За замовчуванням програма fdatool пропонує вікно Кайзера (Kaiser).

Після того, як обраний тип імпульсної характеристики фільтра й метод його проектування, задаємо тип фільтра - область Filter Type. Програма fdatool пропонує наступні типи фільтрів:

- Low pass (нижніх частот);
- High pass (високих частот);
- Band pass (смуговий фільтр);
- Band stop (режекторний фільтр);

Область Filter type має ще спадаюче меню, у якому розташовані спеціалізовані цифрові ланцюги:

- Differentiator (дифференціатор);
- Hilbert Transformer (перетворювачі Гільберта);
- Multiband (многополосний фільтр) і т.д.

При виборі типу фільтра, наприклад Band pass, в області Filter Specification з'являється поле, у якому представляються основні характеристики фільтра. У правому нижньому куті розташовані області Frequency Specification й Magnitude Specifications (частотні й амплітудні специфікації, відповідно). Перша з них містить окна для введення значень частоти дискретизації F_s , граничних частот смуг затримки (F_{stop1} F_{stop2}) і граничних частот смуг пропускання (F_{pass1} й F_{pass2}), а також одиниці виміру частоти (Units) при побудові АЧХ. Причому кількість граничних частот залежить від типу фільтра, що задається в розділі Filter Type. Друга область - Magnitude Specification - дозволяє задати одиниці виміру амплітуди (Units) і обмежень амплітудної характеристики проектованого фільтра для області пропускання (A_{pass} або W_{pass}) і затримування (A_{stop} або W_{stop}).

Наведені дані дозволяють задати АЧХ у функції частоти, що змінюється від 0 до $F_s / 2 = F_H$ (F_H - частота Найквіста)

На сторінці Design Filter є ще одна область - Filter Order (порядок фільтра), у якій можна або явно задати порядок фільтра, або зажадати, щоб програма автоматично вибрала найменший порядок, відповідно до уведених характеристик фільтра.

Для конкретності, спроектуємо смуговий фільтр, параметри якого представлені на Рис. 2. У полі Filter Specifications задані контури АЧХ проєктованого фільтра, а в полі Frequency Specifications й Magnitude Specifications вимоги до фільтра приймають конкретний вигляд, заданий відповідними цифрами. Наприклад, з полів Frequency Specifications й Magnitude Specifications випливає, що перша смуга затримки простягається від 0 до 7200 Гц при ослабленні -80 Дб., а друга смуга затримки простягається від 12800 Гц. до 24000 Гц при ослабленні -80 Дб.

Тепер, коли задані всі характеристики фільтра, можна приступитися до його проєктування (натискання кнопки Design Filter). У результаті виконання програми на Рис.3 з'явиться АЧХ проєктованого фільтра.

В області "Поточна інформація" (Current Filter Information) відображаються дані, що характеризують фільтр, що проєктується (форма подання фільтра, порядок, джерело проєктування). У меню Edit є підменю Convert Structure (вибір структури), вхід у яке дозволяє розглянути різні форми реалізації фільтрів. Меню Analysis робить доступним команди, що дозволяють всебічно охарактеризувати фільтр, що проєктується:

- Filter Specifications (специфікація фільтра);
- Magnitude Response (амплітудно-частотна характеристика);
- Phase Response (фазо-частотна характеристика);
- Magnitude and Phase Response (АЧХ, ФЧХ);
- Group Delay (груповий час затримки);
- Impulse Response (імпульсна характеристика);
- Step Response (перехідна характеристика);
- Pole/Zero Plot (полюси й нулі);
- Filter Coefficients (коефіцієнти фільтра);

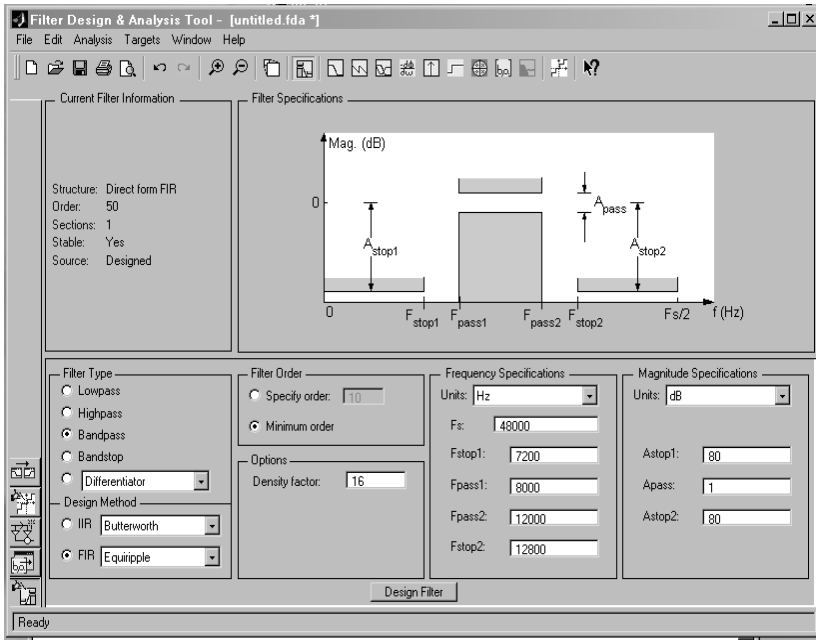


Рис.2. Параметри проєктованого фільтра

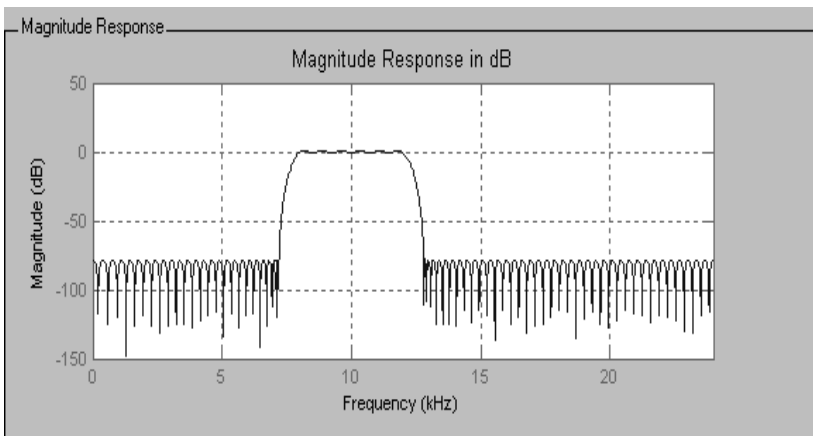


Рис.3. АЧХ проєктованого фільтра

Для відображення тієї або іншої характеристики фільтра, необхідно вибрати відповідну команду або натиснути одну із кнопок,

розташованих угорі головного вікна під рядком меню. Мінючи тип вікна й параметра фільтра, є можливість створити віртуальні моделі різних фільтрів і дослідити їх характеристики.

Програма fdatool має команду "Реалізація моделі" (Realize model), що створює mdl файли, проєктованих фільтрів.

Таким чином, у вищенаведеному описі представлені послідовності кроків для проєктування FIR фільтра, у якому всі операції над даними виконувалися з машинною точністю.

Тепер проаналізуємо, що відбудеться при врахуванні квантування й при врахуванні зміни формату, у якому визначаються коефіцієнти передавальної функції. У правій частині вікна є кнопки, що управляють розділом Quantization. Установимо параметри квантування (Set Quantization Parameters). У головному вікні з'явиться нове поле, що містить кнопку Turn Quantization On (повернення до квантованих коефіцієнтів). Для запуску процедури розрахунку фільтра із квантованими коефіцієнтами встановимо прапорець, запустивши тим самим розрахунок квантованого фільтра з параметрами квантування, заданими за замовчанням.

По закінченні процедури розрахунку графік нового (квантованого) фільтра наклався на АЧХ фільтра-прототипа, розрахованого раніше (Рис. 4). З Рис. 4 видно, що АЧХ представлених фільтрів (крива 1 і крива 2) мають незначні відмінності, що характерно для цифрових фільтрів з кінцевою імпульсною характеристикою (FIR фільтри).

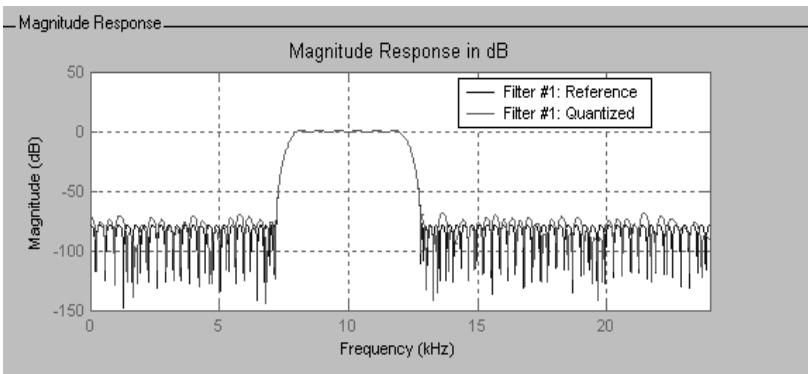


Рис.4. Амплітудно-частотні характеристики фільтра-прототипу й квантованого фільтра з кінцевою імпульсною характеристикою

Використовуючи ті ж вихідні дані (Рис. 2), спроектуємо цифровий фільтр із нескінченною імпульсною характеристикою (ІІР фільтр). Для прикладу, на Рис. 5 (крива 1) представлений смуговий фільтр Баттерворта. В області Current Filter Information зазначено, що цей фільтр реалізований передавальною функцією 30 порядку, яка в програмі fdatool представлена прямою формою, що складається з 15 секцій другого порядку. Вхід у підменю Convert Structure з меню File дає уявлення про структури, які можуть бути використані при реалізації ІІР фільтрів. Цю інформацію варто вважати довідковою, тому що програма fdatool при проектуванні ІІР фільтрів реалізує їх єдиним способом - у вигляді прямої форми 2, що складаються із секцій другого порядку (Direct form || second-order sections). Принципову схему цього фільтра можна зберегти в mdl файлі, викликавши команду Realize Mode.

Розглянемо, як змінилися характеристики й параметри фільтра, якщо коефіцієнти фільтра будуть задаватися з обмеженою точністю й параметрами квантування, заданими за замовчуванням. Після переходу до вікна розрахунку цифрового фільтра з урахуванням квантування, з'явилося нове поле, що містить кнопку Turn Quantization. Для запуску процесу розрахунку із квантовими коефіцієнтами, установимо прапорець, запустимо тим самим розрахунок. Дані розрахунку наведені на Рис. 5.

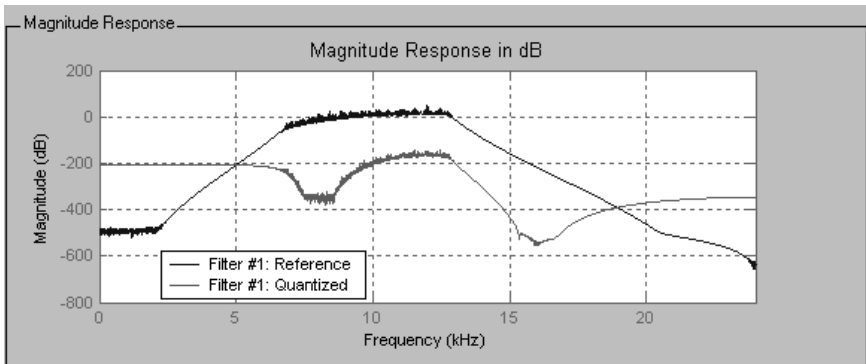


Рис.5. АЧХ вихідного (Reference) і квантованного (Quantized) фільтрів

З порівняння кривих Рис.5 видно, що врахування квантування значно змінило АЧХ нового цифрового фільтра.

Властивості квантованих фільтрів залежать від багатьох факторів: формату даних, реалізації операцій, вибору арифметики й форми (структури) подання фільтра. У розглянутому пакеті, як було зазначено вище, немає можливості досліджувати характеристики фільтрів при різних структурах. У розглянутому пакеті фільтр із нескінченною імпульсною характеристикою (IIR фільтр) реалізується блоковою структурою, як менш чутливою до зміни значень коефіцієнтів.

Як було зазначено, врахування квантування за рівнем робить систему нелінійною, що ускладнює завдання. Однак масштабування коефіцієнтів, виключення переповнення розрядної сітки й інші прийоми, пов'язані з нормалізацією коефіцієнтів фільтра, значно зменшують помилки квантування. Не вдаючись у розгляд цих складних питань, вкажемо, що fdatool має підпрограму “Optimization”, команди якої наведені на Рис. 6.

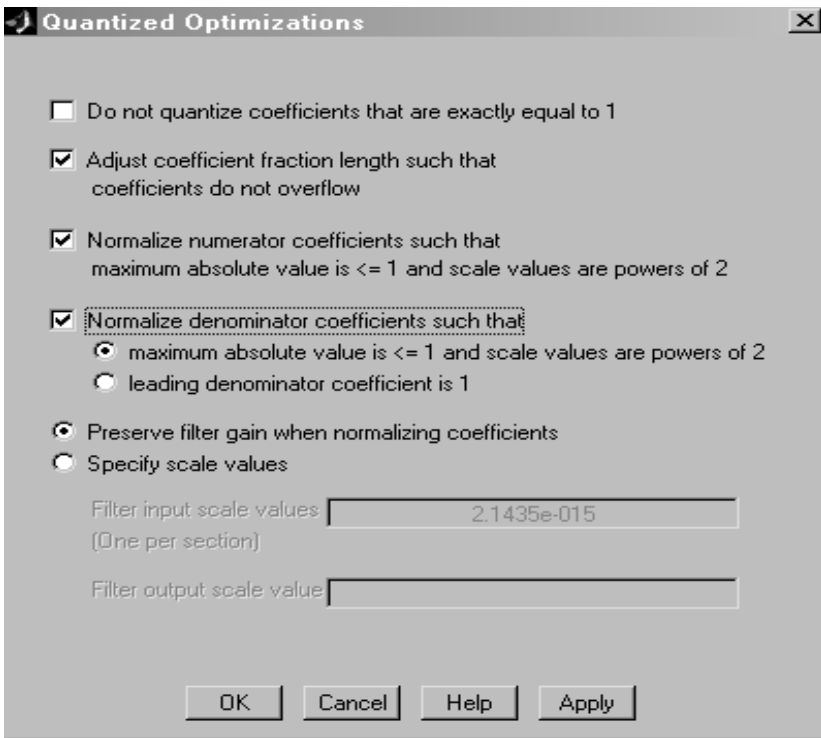


Рис.6. Команди підпрограми Optimization

Зробивши активними процедури, поставивши прапорці, є можливість наблизити характеристики квантованого фільтра до фільтра-прототипу (Рис.7).

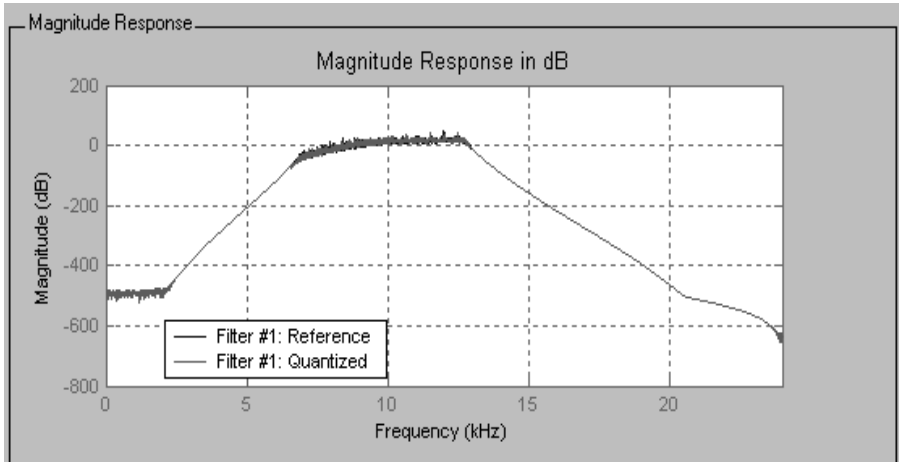


Рис.7. АЧХ фільтра прототипу й фільтра з урахуванням квантування, після використання підпрограми Optimization

Після виключення переповнення й нормалізації коефіцієнтів чисельника й знаменника АЧХ квантованого фільтра наблизилася до прототипу (Рис.7) за рахунок введення процедур оптимізації.

Adjust coefficient fraction length such that coefficient do not overflow (виключити переповнення в коефіцієнтах дробової частини (мантиси)).

Normalize numerator coefficient such that maximum absolute value is ≤ 1 and scale value powers of 2 (нормалізувати коефіцієнти чисельника так, щоб для максимальної величини виконувалося співвідношення $x_{\max} \leq 1$, а масштабний коефіцієнт задавався числами, рівними ступеня 2).

Normalize denominator coefficients such that (у такий же спосіб нормалізувати коефіцієнти знаменника).

2. Домашнє завдання

1. Вивчити розділи, присвячені цифровий обробки сигналів, у яких визначаються числові характеристики, що задають параметри АЧХ.
2. Вивчити розділи, у яких використовуються фільтри з кінцевими й нескінченними імпульсними характеристиками.
3. Вивчити АЧХ характеристики найпоширеніших типів фільтрів.
4. Визначити параметри проєктованого фільтра й способи їхнього завдання.

3. Порядок виконання роботи

1. Для заданого варіанта (табл. 1) заповнити поля, що визначають параметри АЧХ проєктованого фільтра.
2. Для фільтра з кінцевою імпульсною характеристикою знайти:
 - 2.1 АЧХ.
 - 2.2 ФЧХ.
 - 2.3 Імпульсну характеристику.
 - 2.4 Перехідну характеристику.
 - 2.5 Розташування нулів і полюсів.
 - 2.6 Структурну схему фільтра і його коефіцієнти

Для визначення перерахованих вище характеристик варто увійти в меню Analysis або скористатися відповідними кнопками, розташованими нижче головного меню.

Для визначення структури варто скористатися кнопкою Realize Model, розташованої ліворуч. Після натискання цієї кнопки стає активною друга кнопка Realize Model, розташована внизу головного вікна програми fdatool. Скориставшись другою кнопкою Realize Model, одержимо mdl файл, що визначає структурну схему проєктованого фільтра.

3. Перенести структурну схему у звіт.
4. Визначити параметри фільтра з нескінченною імпульсною характеристикою
 - 4.1 АЧХ.
 - 4.2 ФЧХ.
 - 4.3 Імпульсну характеристику.
 - 4.4 Перехідну характеристику.
 - 4.5 Розташування нулів і полюсів.
 - 4.6 Структурну схему фільтра і його коефіцієнти
5. Визначимо характеристику FIR фільтра з урахуванням квантування. Для цього скористаємося кнопкою Set Quantization

Params (ліва лінійка команд). Після виконання цієї команди відкривається поле для побудови характеристик фільтра з урахуванням квантування. Уведемо команду Turn quantization on, що робить активними поля, у яких задаються вимоги до форми подання коефіцієнтів. У вікні, що представляє АЧХ фільтрів з'явиться дві графіки. Один - визначає АЧХ, у якій коефіцієнти передавальної функції задані з машинною точністю, а другий графік АЧХ - у коефіцієнтах якого враховане квантування за рівнем.

6. Уведемо операцію «Оптимізація», підставивши прапорці, що нормує коефіцієнти.

7. Обчислимо АЧХ фільтра з урахуванням квантування після введення операції «Оптимізація».

8. Порівняємо характеристики цифрових FIR фільтрів для трьох варіантів розрахунку:

- коефіцієнти фільтра визначені з машинною точністю;

- коефіцієнти фільтра визначені з урахуванням квантування без «Оптимізації»;

- коефіцієнти фільтра визначені з урахуванням квантування й застосування процедури «Оптимізація».

Приступаємо до проектування IIR фільтрів.

9. Виконуємо пункти 5-8 стосовно до IIR фільтрів.

10. Порівняємо характеристики FIR й IIR фільтрів і зробимо висновки.

4. Зміст звіту

1. Титульний аркуш

2. Формулювання мети роботи.

3. Короткі теоретичні відомості про фільтри з кінцевої (FIR) і нескінченною (IIR) імпульсними характеристиками, про квантування сигналів за рівнем, про процедури зменшення похибок при квантуванні сигналів.

4. Результати випробування FIR фільтрів, для трьох форм задавання коефіцієнтів.

5. Результати випробування IIR фільтрів, для трьох форм задавання коефіцієнтів.

6. Порівняльні характеристики FIR й IIR фільтрів

7. Висновки

Перелік контрольних запитань

5. Поняття цифрового фільтра.
6. Визначення смугового фільтра.
7. Поняття перехідної характеристики.
8. Визначення структурної схеми фільтра (ЛДС).

5. Вихідні дані для виконання лабораторної роботи.

табл.1

№	F _s	F stop1	F pass1	F pass2	F stop2	A stop1	A pass	A stop2
1	50000	8000	10000	12000	14000	-60	1	-80
2	60000	10000	12000	16000	20000	-80	1	-80
3	60000	8000	12000	16000	22000	-80	1	-60
4	60000	4000	12000	16000	26000	-60	1	-60
5	70000	10000	12000	16000	18000	-60	1	-60
6	80000	8000	9000	10000	11000	-80	1	-80
7	80000	10000	15000	25000	30000	-40	1	-40
8	100000	50000	60000	70000	80000	-60	1	-60
9	40000	10000	11000	15000	16000	-80	1	-80
10	50000	12000	15000	20000	23000	-40	1	-40
11	50000	13000	15000	20000	22000	-40	1	-40
12	50000	14000	15000	20000	21000	-40	1	-40
13	50000	14000	15000	20000	21000	-80	1	-80
14	70000	18000	20000	30000	32000	-80	1	-80
15	70000	18000	21000	29000	32000	-80	1	-80
16	70000	18000	22000	28000	32000	-80	1	-80
17	200000	40000	50000	60000	70000	-60	1	-60
18	200000	45000	50000	60000	65000	-60	1	-60
19	200000	46000	50000	60000	66000	-60	1	-60

20	200000	47000	50000	60000	63000	-60	1	-60
21	200000	47000	50000	60000	65000	-60	1	-60
22	100000	20000	21000	22000	23000	-60	1	-60
23	100000	19000	21000	22000	24000	-60	1	-60
24	100000	18000	21000	22000	25000	-60	1	-60
25	50000	5000	7000	8000	10000	-80	1	-80
26	50000	6000	7000	8000	9000	-80	1	-80

Лабораторна робота №6 „ Моделювання систем фільтрації мовних сигналів”

Мети роботи:

- 1) освоєння прийомів фільтрації мовних сигналів;
- 2) освоєння способів синтезу цифрових вінерівських фільтрів.

Обладнання: Персональний комп'ютер, програмне середовище MATLAB 6.5

Робоче завдання

1. Розрахувати виграш у відношенні сигнал-шум, що досягається при використанні НЧ фільтрації мовного сигналу, що маскується білим шумом.

2. Експериментально оцінити ефективність НЧ фільтрації мовного сигналу, що маскується білим шумом, за допомогою моделювання в середовищі Matlab-sptool.

3. Експериментально оцінити ефективність вінерівської фільтрації:

3.1. Синтезувати оптимальний цифровий вінерівський КІХ фільтр методом зворотного перетворення Фур'є. Здійснити цифрову фільтрацію суміші мовного сигналу із шумом. Порівняти сигнали до й після фільтрації.

3.2. Синтезувати оптимальний цифровий вінерівський КІХ фільтр шляхом числового розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду. Здійснити цифрову фільтрацію суміші мовного сигналу із шумом. Порівняти сигнали до й після фільтрації.

Теоретичні відомості

2. Наближена оцінка виграшу у відношенні сигнал-шум за рахунок НЧ фільтрації

Спектр мовного сигналу зосереджений в області частот 100-3500 Гц – його приблизно можна вважати існуючим в області частот 0-3500 Гц. Спектр білого шуму сприймається вухом людини в області частот 20-20000 Гц, його приблизно можна вважати існуючим в області частот 0-20000 Гц.

Якщо здійснити фільтрацію адитивної суміші мовного сигналу й шуму за допомогою НЧ фільтра, частота зрізу якого $f_c = 3500$ Гц,

тоді потужність перешкоди знизиться в $20000/3500 = 5,7$ рази (рис. 1) або в $10\log 5,7 = 7,6$ дБ.

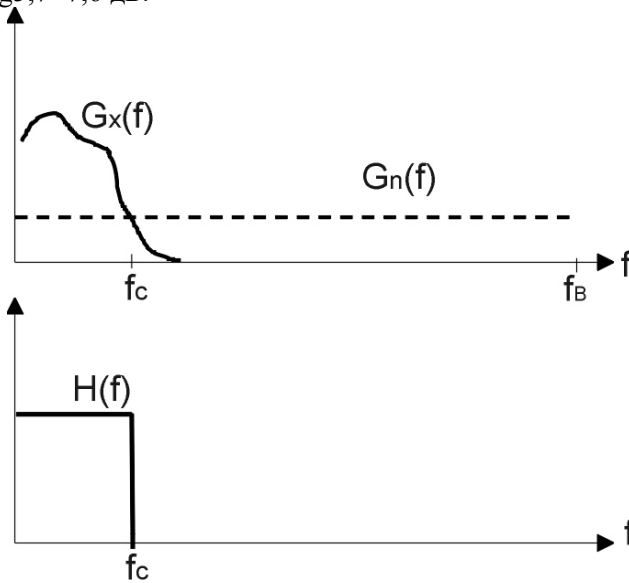


Рис. 1. НЧ фільтрація мовного сигналу

2. Перевірка наявності позитивного ефекту від НЧ фільтрації мовного сигналу, що маскується білим шумом, шляхом моделювання в середовищі Matlab

Запишемо мовний сигнал у вигляді wav-файлу з параметрами: частота дискретизації $F_s = 44100$ Гц, моно, 16 біт. Для запису можна використовувати телефонну гарнітуру й програму «Звукозапис» із групи «Стандартные|Развлечения». У якості альтернативної програми записи можна також використовувати команду **wavrecord** середовища **Matlab**.

Якщо звуковий файл записувався за допомогою програми «Звукозапис», його слід імпортувати в середовище Matlab:

```
rech2=wavread('rech2.wav');
```

Примітка 1. Якщо звуковий файл записувався засобами Matlab, у такому імпортуванні немає необхідності, оскільки файл створюється у вигляді одномірного масиву в робочому просторі Matlab:

```
rech2=wavrecord(220500,44100,'double');
```

(тут $n=220500$ – кількість відліків записуваного сигналу, що відповідає тривалості сигналу 5 с при частоті дискретизації $F_s=44100$ Гц; ‘double’ – опція, що вказує на запис у форматі 16 біт/відлік).

Примітка 2. Якщо звуковий файл записувався засобами **Matlab**, тоді для збереження його на вінчестері слід використовувати команду **wavwrite** (синтаксис цієї команди дивитися в розділі **Help** програми **Matlab**).

Маючи масив **rech2**, далі проробимо наступні дії:

- оцінимо стандартне відхилення мовного сигналу (середнє на інтервалі існування сигналу);
- згенеруємо відрізок дискретного білого гаусівського шуму з потрібним стандартним відхиленням;
- складемо мовний сигнал з перешкодою, у результаті відношення сигнал-шум для отриманої суміші буде рівно 1/9 (або, -9,5 Дб, тобто майже -10 дб).

Команди Matlab для реалізації таких дій:

```
std_rech=std(rech2); % вимір станд.откл. мовного сигналу
std_noise=3*std_rech; % станд.откл. шуму
n=std_noise*randn(length(rech2),1); % генерування шуму
rech2_noise = rech2+n; % аддитивн.суміш
```

Прослухаємо отриману суміш:

```
wavplay(rech2_noise,44100);
```

НЧ фільтрацію цієї суміші зручно реалізувати за допомогою програми **sptool**, яка викликається з командного вікна командою:

```
sptool
```

У результаті активізації програми **sptool** на моніторі з'являється вікно її графічного інтерфейсу (рис. 2).

Як впливає з написів на цьому вікні, дана програма дозволяє працювати із сигналами, їх спектрами, синтезувати цифрові фільтри й пропускати сигнали через синтезовані цифрові фільтри. Як фільтровані, так і відфільтровані сигнали можуть бути візуалізовані у вигляді графіків, а також прослухані через навушники або мультимедійну аудіосистему комп'ютера.

Для того, щоб така обробка сигналів стала можливою, сигнали слід імпортувати в середовище програми **sptool**. Графіки імпортованих у середовище **sptool** сигналів **rech2** і **rech2_noise** наведено на рис. 3 і 4, відповідно.

Графік АЧХ синтезованого НЧ фільтра (КИХ фільтр із вікном Кайзера, $\beta=3$, порядок фільтра 34) показаний на рис. 5.

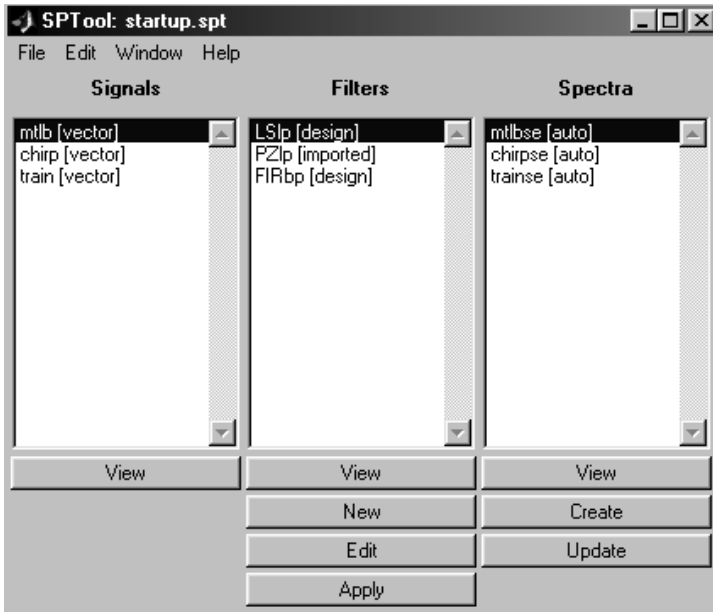


Рис. 2. Вікно графічного інтерфейсу програми **sptool**

Сигнал **rech2_denoise** що представляє собою результат НЧ фільтрації сигналу **rech2_noise**, показаний на рис. 6 – на графіку досить добре видно зростання рівня сигналу, обумовлене НЧ фільтрацією.

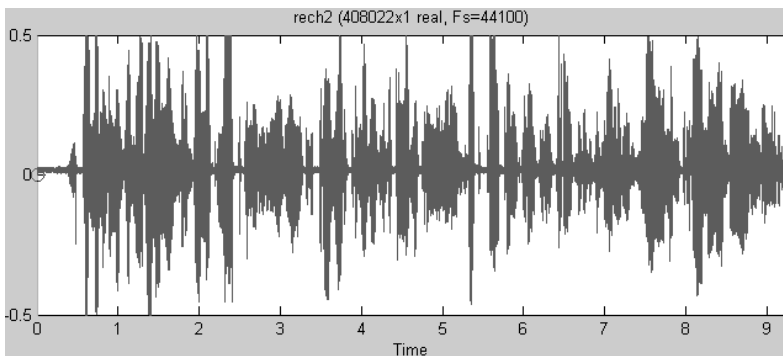


Рис. 3. Графік сигналу **rech2**

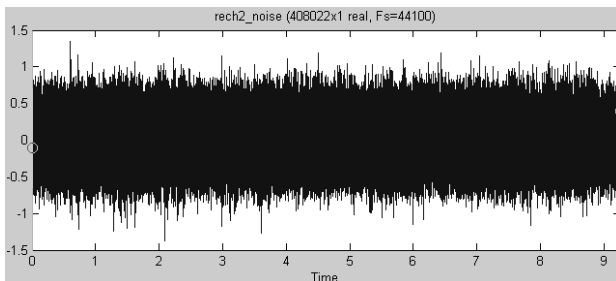


Рис. 4. Графік сигналу **rech2_noise**

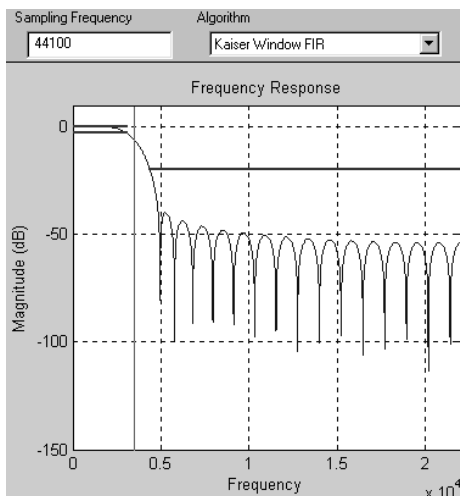


Рис. 5. Графік синтезованого НЧ фільтра

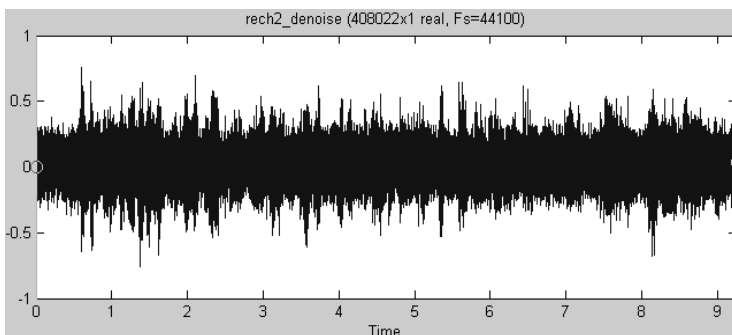


Рис.6. Графік сигналу **rech2_denoise**

Поліпшення розбірливості мови практично не відчувається.

Настільки, видалося б, дивні результати даного досвіду можна пояснити основними положеннями теорії вимірювання розбірливості мови [3], згідно з якими розбірливість мови визначається розбірливістю формант – спектральних складових елементарних «цеглинок» мовного сигналу у вигляді фонем. Спектр формант зосереджений головним чином у діапазоні частот 200-4000 Гц. Маскуючу дію на мовний сигнал спричиняють прилеглі (у межах критичної смуги) спектральні компоненти шуму. Тому, здійснюючи НЧ фільтрацію із частотою зрізу 3500 Гц, ми лише незначним чином зменшуємо маскуючу дію шуму. Як наслідок – розбірливість мови практично не змінюється.

Звідси випливає важливий висновок: *для істотного підвищення розбірливості мови необхідно пригнічувати перешкоду, зосереджену в тій самій смузі частот, що й мовний сигнал, тобто в смузі частот 100-3500 Гц.*

3. Синтез оптимального цифрового вінерівського КІХ фільтра методом зворотного перетворення Фур'є

При розрахунках низькочастотних КІХ-фільтрів з лінійною ФЧХ порядку $2N$ методом зворотного перетворення Фур'є коефіцієнти a_k , $-N \leq k \leq N$, обчислюють [1] за формулою:

$$a_k = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} H(\omega) \exp(j\omega k \Delta t) d\omega, \quad (1)$$

де $H(\omega)$, $\omega = 2\pi f$, - ЧХ ідеального цифрового НЧ-фільтра, що звичайно задається у вигляді прямокутника (рис. 7) одиничної висоти й шириною $2F_p$; F_p - гранична частота смуги пропускання; $\Delta t = 1/F_s$ - період дискретизації; F_s - частота дискретизації.

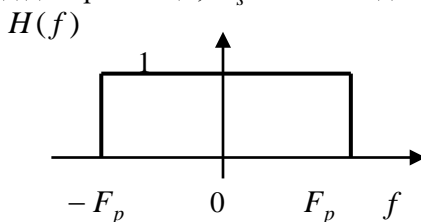


Рис. 7. Вигляд прямокутного сигналу

Алгоритм фільтрації при цьому має вигляд:

$$y_n = \sum_{k=-N}^N a_k x_{n-k}, \quad (2)$$

де x_n й y_n - відліки вхідного й вихідного сигналів у момент часу $t_n = n \cdot \Delta t$; Δt - період дискретизації.

Вираз для частотної характеристики вінерівського фільтра:

$$H(f) = \frac{G_x(f)}{G_x(f) + G_n(f)}.$$

Синтез вінерівського фільтра в середовищі **Matlab** здійснимо за допомогою функції **fir2**, що дозволяє синтезувати цифрові КІХ фільтри з АЧХ значно більш складної форми. При цьому, по суті, необхідна АЧХ задається масивами значень частоти й відповідних значень АЧХ.

Для вимірювання спектрів суміші $G_z(f)$ й перешкоди $G_n(f)$ використовуємо оцінку Уелча (Welch) з параметрами: довжина сегментів і довжина вагового вікна Хеннінга $Nfft=Nwin=1024$; сегменти перекриваються на 512 відліків. Таким чином роздільна здатність спектрального аналізу рівна $44100/1024=43$ Гц (що близько до мінімальної ширини критичної смуги слуху).

Програма обчислень спектрів суміші $G_z(f)$ й перешкоди $G_n(f)$:

```
Fs=44100; nfft = 1024; window = hanning(nfft); noverlap = 512;
% вікно Хана, перекриття 50%
[Gz,fz] = pwelch(rech2_noise>window,noverlap,nfft,Fs); %
оцінка спектра суміші
plot(fz(1:128),Gz(1:128));
title('Спектр потужності суміші, Gz');
xlabel('Частота, Гц');ylabel('Рівень');
figure
[Gn,fn] = pwelch(n>window,noverlap,nfft,Fs); % оцінка спектра
перешкоди
plot(fn(1:128),Gn(1:128));
title('Спектр потужності перешкоди, Gn');
xlabel('Частота, Гц');ylabel('Рівень');
```

Зразковий вид графіків оцінок спектрів суміші $G_z(f)$ й перешкоди $G_n(f)$ показаний на рис. 8-9.

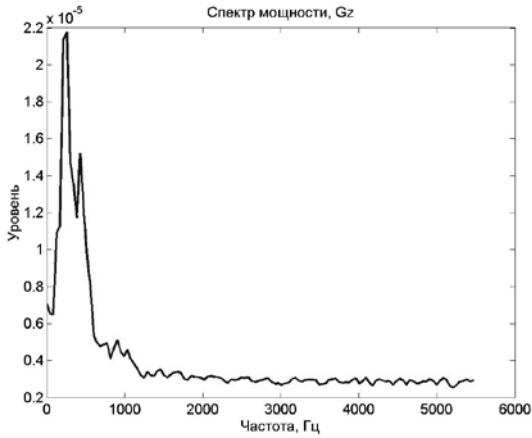


Рис.8. Оцінка спектра $G_z(f)$

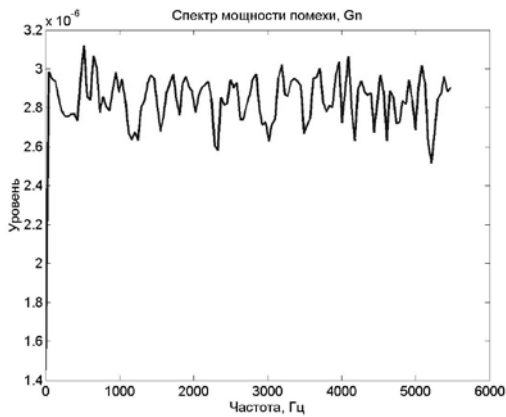


Рис. 9. Оцінка спектра $G_n(f)$

Оцінка необхідної АЧХ вінерівського фільтра $H(f)$:

Figure; H=abs(1-gn./Gz);

plot(fz(1:128),H(1:128));

title('Оцінка АЧХ винеровского фільтра, H');

xlabel('Частота, Гц');ylabel('Рівень');

Графік оцінки функції $H(f)$ показано на рис. 10.

Синтез вінерівського фільтра 34-го порядку здійснимо за допомогою функції `fir2`:

```
f=fz/22050; m=N;  
a=fir2(34,f,m); % 34 – порядок фільтра  
[h,w]=freqz(a,1); % АЧХ синтезованого фільтра  
figure; plot(w(1:180)*22050/pi,abs(h(1:180)));  
title('АЧХ синтезованого вінеровського фільтра, H');  
xlabel('Частота, Гц');ylabel('Рівень');
```

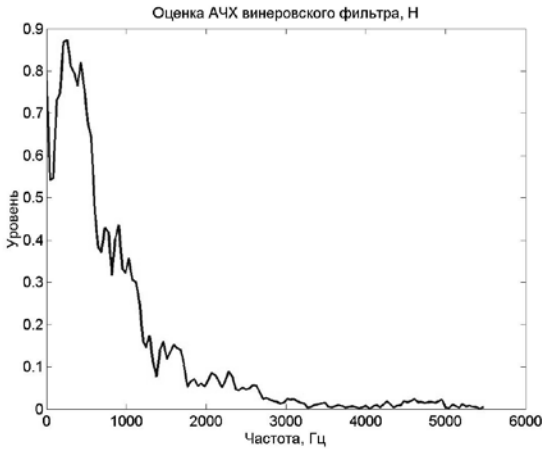


Рис. 10. Оцінка $H(f)$

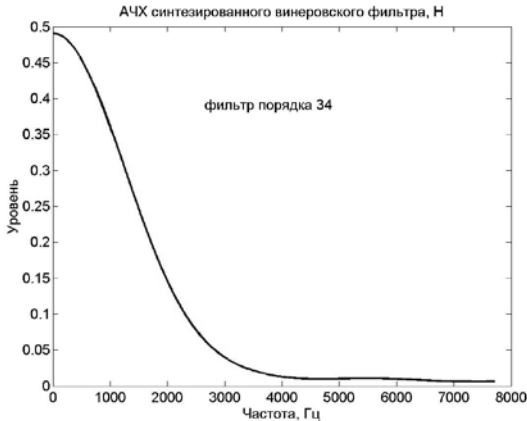


Рис. 11. Синтезована АЧХ (34 порядок)

Графік АЧХ синтезованого вінерівського КІХ фільтра 34 порядку показаний на рис. 11. Порівнюючи рис. 10 і 11, бачимо, що навряд чи можна говорити про гарний збіг форми необхідної й синтезованої АЧХ. Збільшуючи порядок фільтра до 250, одержуємо АЧХ, що значно краще збігається з необхідною АЧХ (рис.12).

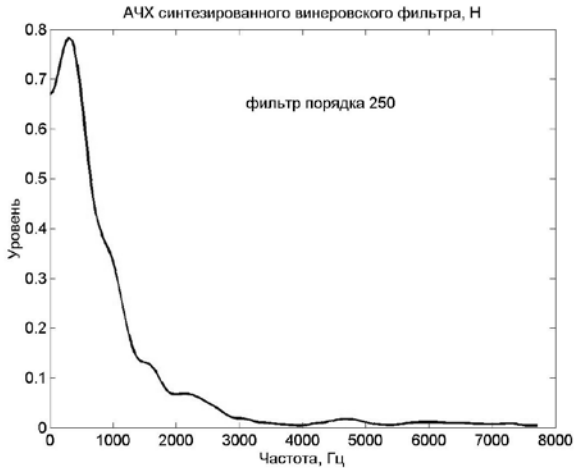


Рис. 12. Синтезована АЧХ (250 порядок)

Здійснимо цифрову фільтрацію суміші сигналу із шумом, використовуючи коефіцієнти синтезованого вінерівського КІХ фільтра 250-го порядку.

```
rech2_denoise_10db_wien250_spec=filter(a,1,rech2_noise);
```

Графік результату фільтрації представлено на рис. 13. Порівнюючи його з рис. 6, неважко бачити помітно більш високу якість придушення перешкоди. Це не дивно, оскільки ефективна смуга пропускання показаної на рис. 12 АЧХ приблизно вдвічі менша за аналогічну на рис. 5.

Прослуховування мовного сигналу, фільтрованого синтезованим вінерівського фільтром 250-го порядку, також свідчить про зниження рівня маскуючого шуму, однак свідчить і про досить істотне зниження розбірливості мови. При цьому в першу чергу слід зазначити погане відтворення приголосних звуків, що пояснюється тим, що спектри приголосних звуків містять високочастотні компоненти.

4. Синтез оптимального вінерівського цифрового КІХ фільтра шляхом числового розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду

Коефіцієнти фільтра одержимо, розв'язуючи рівняння

$$\mathbf{K}_z \mathbf{a} = \mathbf{K}_{zx}$$

відносно вектора \mathbf{a} . Необхідні для обчислень оцінки кореляційних матриць \mathbf{K}_z і \mathbf{K}_n одержимо у два етапи. На першому етапі одержимо «одномірні» оцінки кореляційних функцій суміші й перешкоди:

```
[Kz,lags] = xcov(rech2_noise,512); % коррел.функц. суміші  
figure; plot(lags/44100,Kz);  
title('Коррел.функ. суміші, Kz');  
xlabel('Затримки, c');ylabel('Рівень');  
[Kn,lags] = xcov(n,512); % коррел.функц. перешкоди  
figure; plot(lags/44100,Kn);  
title('Коррел.функ. перешкоди, Kn');  
xlabel('Затримки, c');ylabel('Рівень');
```

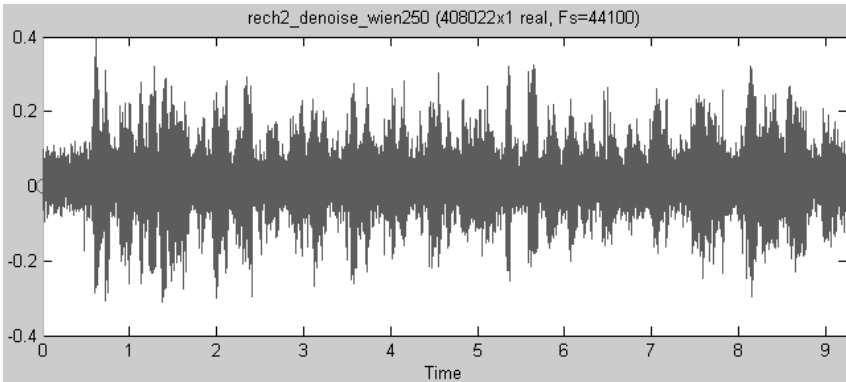


Рис. 13. Результат фільтрації вінерівським фільтром 250 порядку

Графіки оцінок кореляційних функцій наведено на рис. 14.

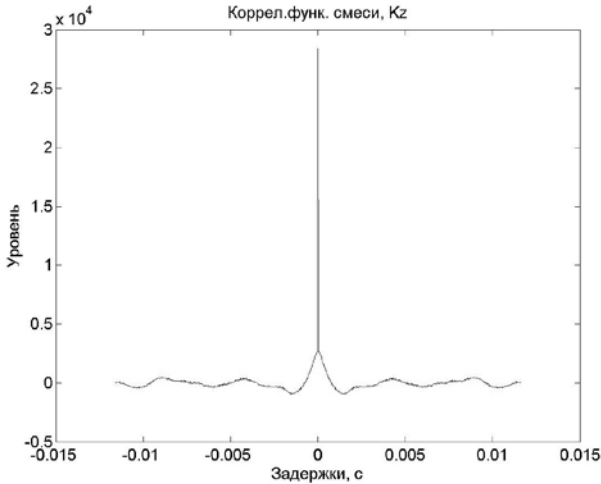


Рис. 14а. Кореляційна функція суміші

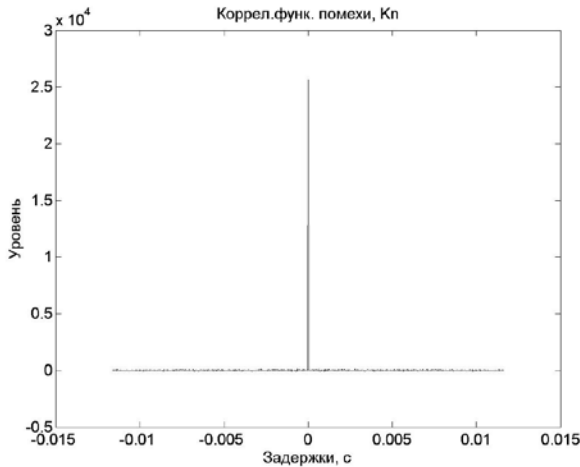


Рис. 14б. Кореляційна функція перешкоди

Далі формуємо необхідні матриці, обчислюємо коефіцієнти й частотну характеристику синтезованого дискретного фільтра:

Kz =Kz; Kz_(1:512)=[]; % отбрас.отрицат.затримки кор. ф-ции суміші

```

Kzm=toeplitz(Kz_); % формування матриці Теплиця суміші
(513x513)
Kx=Kz-Kn;
Kx(1:256)=[]; Kx(514:769)=[];
a_full=Kzm\Kx; % розв'язок матричного зрівняний. - 513
коєфіцієнтів фільтра
% ===== розрахунки фільтра 34 пор. =====
a_34 = a_full;
a_34(1:239)=[]; a_34(36:274)=[]; % коєф.фільтра 34 пор.
figure; stem(a_34);
axis([0 36 0 0.04])
title('ИПХ винеровского фільтра 34 пор. ');
xlabel('Номера коєф-тов'); ylabel('Рівень');
% ----- АЧХ фільтра 34 пор. -----
[h_34,w]=freqz(a_34,1); % АЧХ синтезованого фільтра 34
пор.
figure; plot(w(1:180)*22050/pi,abs(h_34(1:180)));
title('АЧХ синтезованого винеровского фільтра, Н');
xlabel('Частота, Гц'); ylabel('Рівень');

```

На рис. 15 представлені коєфіцієнти й АЧХ синтезованого фільтра 34 порядку.

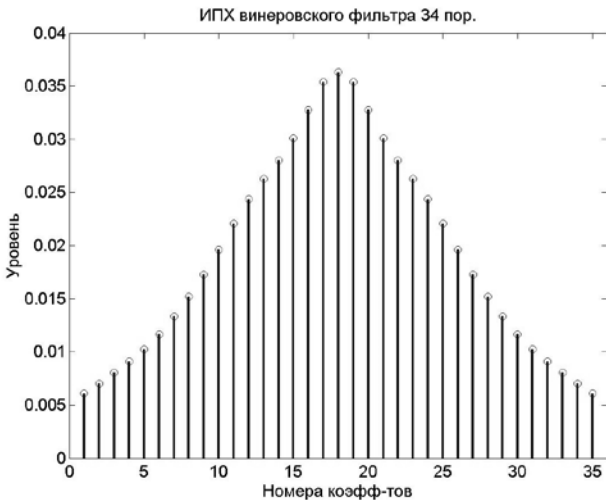


Рис. 15а. Оцінки коєфіцієнтів

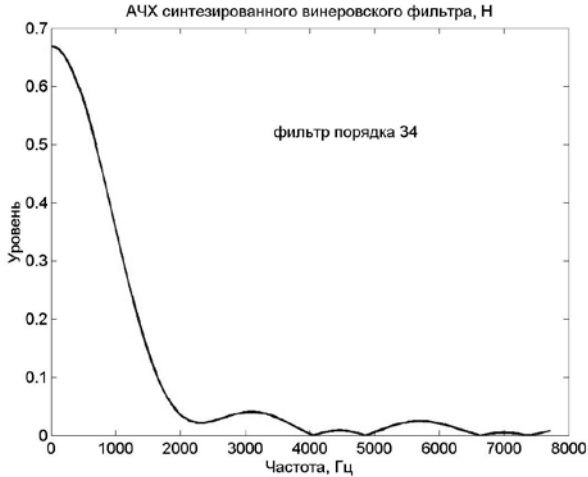


Рис. 15б. АЧХ синтезованого фільтра 34 порядку

Порівнюючи рис. 15.б і рис. 10- 11, доходимо висновку, що порядок фільтра потрібно підвищити, однак ступінь такого підвищення може бути меншою, ніж у попередньому випадку. Тому розрахуємо коефіцієнти й АЧХ вінерівського фільтра 150 порядку.

Програма такого розрахунку має вигляд:

```
% ===== розрахунки фільтра 150 пор. =====
a_150=a_full;
a_150(1:181)=[];a_150(152:332)=[]; % коэф.фільтра 150 пор.
figure; plot(a_150);
% axis([0 152 0 0.04])
title('ИПХ винеровского фильтра 150 пор. ');
xlabel('Номера коэфф-тов');ylabel('Рівень');
% ----- АЧХ фільтра 150 пор. -----
[h_150,w]=freqz(a_150,1); % АЧХ синтезованого фільтра
150 пор.
figure; plot(w(1:180)*22050/pi,abs(h_150(1:180)));
title('АЧХ синтезованого винеровского фильтра, Н');
xlabel('Частота, Гц');ylabel('Рівень');
```

На рис. 16 представлені коефіцієнти й АЧХ синтезованого фільтра 150 порядку.

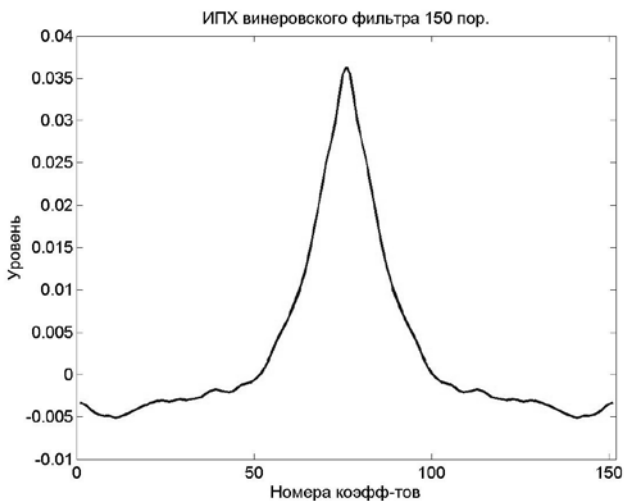


Рис. 16а. Оцінки коефіцієнтів

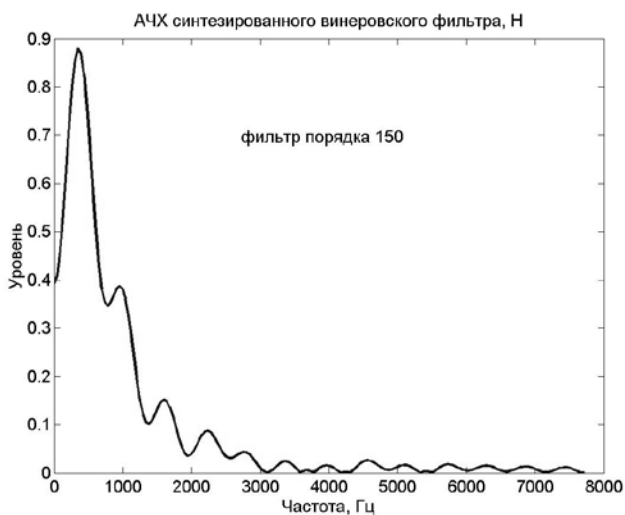


Рис. 16б. АЧХ синтезованого фільтра 150 порядку

Здійсимо цифрову фільтрацію суміші сигналу із шумом, використовуючи синтезований вінерівський фільтр 150-го порядку.

```
rech2_denoise_10db_wien150_kor=filter(a_150,1,rech2_noise);
```

Графік результату фільтрації представлено на рис. 17.

Порівнюючи його з рис. 13, важко помітити більш високу якість придушення перешкоди (у порівнянні з першим методом синтезу вінерівського фільтра). Це пояснюється тим, що відповідні АЧХ синтезованих фільтрів мало відрізняються.

Прослуховування мовних сигналів, фільтрованих синтезованим вінерівськими фільтрами 250 порядку («частотний спосіб») і 150-го порядку («часовий спосіб»), також свідчить про практично однакову розбірливість мови.

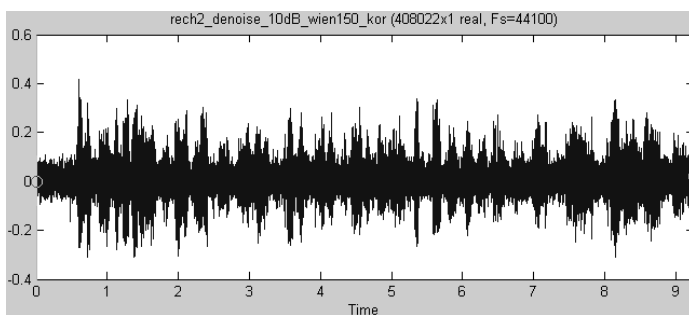


Рис. 17. Графік результату фільтрації

Вимоги до оформлення звіту:

4. Графіки сигналів і їх спектрів до й після фільтрації, а також АЧХ і ІХ фільтрів, що використовувалися.
5. Коментарі до графіків.
6. Лістинги обчислювальних програм.
7. Висновки по роботі.

Перелік контрольних запитань:

1. Поясніть причини невисокої ефективності НЧ фільтрації суміші мовного сигналу з перешкодою.
2. Чому вінерівська фільтрація називається оптимальною?
3. Які способи синтезу вінерівського фільтра вам відомі?
4. Поясніть технологію синтезу вінерівського фільтра на «частотній мові».
5. Поясніть технологію синтезу вінерівського фільтра на «часовій мові».
6. Як здійснити фільтрацію сигналу після того, як фільтр синтезований?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7

Вимірювання густини ймовірностей випадкового процесу гістограмним методом

Мета роботи: здобуття практичних навичок вимірювання густини ймовірностей випадкових процесів гістограмним методом.

Обладнання: Персональний комп'ютер, програмне середовище MATLAB 6.5

Робоче завдання

1. Змоделювати дискретні випадкові процеси з різними законами розподілу та побудувати графіки відрізків реалізацій цих процесів:

1) процес з некорельованих відліків, рівномірно розподілених на інтервалі $[a, b]$;

2) гармонічний процес з амплітудою c , відносною* частотою ω_0 та випадковою початковою фазою φ , рівномірно розподіленою на $[0, 2\pi]$;

3) періодичну послідовність трикутних імпульсів з амплітудою c , відносною* частотою ω_0 та випадковою початковою фазою φ , рівномірно розподіленою на $[0, 2\pi]$;

4) (μ, σ) -гаусівський випадковий процес з некорельованими відліками;

5) адитивну суміш двох статистично незалежних процесів, рівномірно розподілених на інтервалі $[a, b]$.

Варіанти значень числових параметрів, що необхідні для виконання лабораторної роботи, наведені в Таблиці 1.

Таблиця 1. Варіанти значень числових параметрів

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	
Параметр	μ	1	2	3	4	5	6	7	8
	σ	1	2	3	4	5	6	7	8
	a	0	1	2	3	4	5	6	7
	b	1	2	3	4	5	6	7	8
	c	1	2	3	4	5	6	7	8

ω_0	0,2	0,22 5	0,25	0,27 5	0,3	0,32 5	0,35	0,37 5
N	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	1000
M	10	11	12	13	14	15	16	10

Примітка 1: у всіх випадках генерувати N відліків випадкового процесу, а на графік виводити перші 100 відліків.

***Примітка 2:** відносною частотою гармоніки називатимемо величину $\omega_0 = \omega \cdot \Delta t = \omega / F_d$, F_d - частота дискретизації.

Примітка 3: параметр M - це кількість інтервалів Δx гістограмного методу оцінювання.

2. **Обчислити та побудувати графіки:** а) гістограмної оцінки $\tilde{W}(x, \Delta x)$; б) теоретичної густини $W(x)$. Порівняти між собою графіки теоретичної густини та її оцінки та прокоментувати їх.

3. **Обчислити відносні похибки** вимірювань густини ймовірності для (μ, σ) -гаусівського випадкового процесу в точці $x = \mu$ (тут ідеться про процес, що було згенеровано в п.4):

відносне зміщення

$$\Delta_0[\tilde{W}(x, \Delta x)] = \frac{\Delta[\tilde{W}(x, \Delta x)]}{W(x)},$$

відносне середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_0[\tilde{W}(x, \Delta x)] = \frac{\sigma[\tilde{W}(x, \Delta x)]}{W(x)},$$

та відносну повну середньоквадратичну похибку вимірювань

$$\Pi_0[\tilde{W}(x, \Delta x)] = \frac{\Pi[\tilde{W}(x, \Delta x)]}{W(x)}.$$

4. **Оформити звіт за результатами експериментальних досліджень та аналітичних розрахунків за пп.1-3 даного робочого завдання.**

Допоміжні відомості для роботи з програмою Matlab

1. Введення числових значень параметрів

Для автоматизації виконання даної лабораторної роботи введіть в робочий простір програми Matlab числові значення параметрів відповідно до Таблиці 1. Для цього скопіюйте строку з даними свого варіанта в командне вікно програми Matlab та натисніть клавішу **Enter**.

a=0; b=1; c=1; miu=1; sigma=1; w0=0.2; N=2000; M=10; % 1-й варіант

a=1; b=2; c=2; miu=2; sigma=2; w0=0.225; N=3000; M=11; % 2-й варіант

a=2; b=3; c=3; miu=3; sigma=3; w0=0.25; N=4000; M=12; % 3-й варіант

a=3; b=4; c=4; miu=4; sigma=4; w0=0.275; N=5000; M=13; % 4-й варіант

a=4; b=5; c=5; miu=5; sigma=5; w0=0.3; N=6000; M=14; % 5-й варіант

a=5; b=6; c=6; miu=6; sigma=6; w0=0.325; N=7000; M=15; % 6-й варіант

a=6; b=7; c=7; miu=7; sigma=7; w0=0.35; N=8000; M=16; % 7-й варіант

a=7; b=8; c=8; miu=0; sigma=8; w0=0.375; N=1000; M=10; % 8-й варіант

2. Рівномірно розподілений на інтервалі $[a, b]$ випадковий процес

1.1. Генерування процесу та побудова графіку відрізка реалізації

Функція **rand** забезпечує генерування матриці незалежних випадкових величин, що рівномірно розподілені на інтервалі $(0,1)$. Синтаксис:

y = rand(m,n) % коментар: генер. матр. m-на-n випадкових чисел

Таким чином, якщо треба згенерувати послідовність із N чисел, рівномірно розподілених на інтервалі (a, b) , а також побуду-

вати графік перших 100 відліків цього процесу, треба задати в командному вікні програми Matlab:

`y = rand(1,N)*(b-a)+a;` % (контрольне питан. – чому саме так?)

`plot(y(1:100))` % графік 100 відліків процесу y

Зауваження 1: крапка з комою в кінці команди блокує вивід згенерованих чисел на екран монітору

Зауваження 2: скопіюйте цю програму в командне вікно програми Matlab – обчислення виконуються автоматично.

Зауваження 3: всі обчислення та графіки, що наведені далі, зроблено для Варіанту 8

На рис.1 наведено відповідний графік (експортуйте графік на вінчестер у форматі *.jpg та **приведіть його у звіті**).

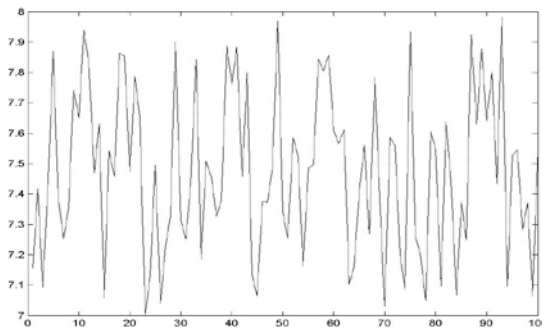


Рис.1. Приклад залежності.

1.2. Оцінювання густини ймовірності гістограмним методом figure % новий рисунок

`dx=(b-a)/M;` % величина інтервалу Δx

`x=a-dx/2:dx:b+dx/2;` % x – вектор значень аргументу

гістограми

`[h,x]=hist(y,x);` % h - вектор значень гістограми

`wh=h/N/dx;` % оцінка густини ймовірності

`bar(x,wh)` % графік оцінки густини ймовірності

`colormap cool;` % палітра графіка

Графік оцінки густини ймовірності показано на рис.2.

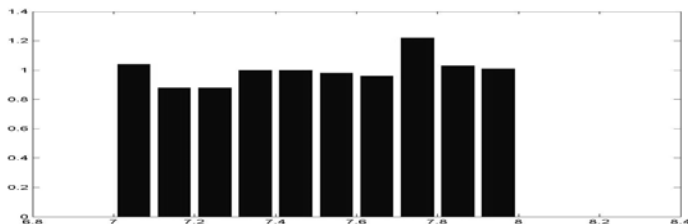


Рис.2. Графік оцінки густини ймовірності.

- Контрольні запитання:** 1) як і чому зміниться графік при збільшенні (зменшенні) параметру Δx ?
 2) як і чому зміниться графік, якщо задати $x=a-dx:dx:b+dx$?
 3) навіщо провадиться ділення значень гістограми на N та Δx ?

2.3. Побудова теоретичної густини ймовірності

Рівномірний закон розподілу густини ймовірності:

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{інших } x \end{cases}$$

Програма обчислень теоретичної густини та побудови її графіку, а також графіку оцінки густини (рис.3):

```

figure
w=pdf('Uniform',x,a,b)           % обчисл. значень теоретичної
густина
bar(x,wh)                       % графік оцінки густини
colormap cool;                  % палітра графіку
hold on;                        % команда накладенн. наступних
графіків
stem(x,w,'r');                   % графік теоретичної густини
(червоний колір)
    
```

hold off % команда відміни накладенн. наступних графіків

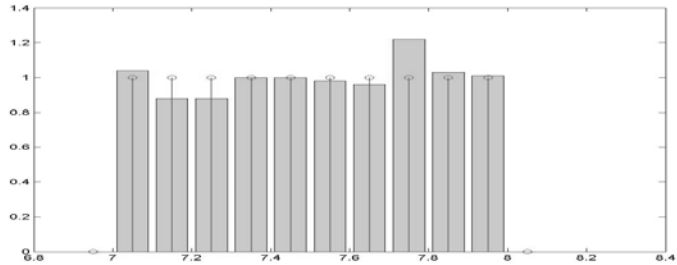


Рис.3. Графік оцінки густини.

Контрольні запитання:

- 1) чому відрізняються значення теоретичної густини та її оцінки?
- 2) як і чому зміниться графік оцінки густини при збільшенні (зменшенні) параметрів N та Δx ?

2. Дискретний гармонічний процес

2.1. Генерування процесу та побудова графіку відрізка реалізації

Команда **sin** забезпечує обчислення однойменної математичної функції **sin**. Синтаксис:

y=sin(x)

Для генерування N відліків гармонічного дискретного процесу

$$X(t) = c \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

з детермінованими амплітудою c , частотою ω та випадковою початковою фазою φ , рівномірно розподіленою на $[0, 2\pi]$, треба виконати декілька команд:

figure

i=1:N; % вектор номерів відліків дискретного процесу

phase=2*pi*rand(1,1); % значення випадкової фази, рівномірно розподіленої на $[0, 2\pi]$

y=c*sin(w0*i+phase); % гармонічний дискретний процес

plot(y(1:100)) % графік 100 відліків процесу y

Примітка: тут ми оперуємо відносною частотою гармоніки

$$\omega_0 = \omega \cdot \Delta t = \omega / F_d = 2\pi \frac{f}{F_d}.$$

Контрольне питання: укажіть максимально допустиме значення параметра ω_0 ?

2.2. Оцінювання густини ймовірності гістограмним методом `figure`

`dx=2*c/M;` % величина інтервалу Δx

`x=-c-dx/2:dx:c+dx/2;` % x – вектор значень аргументу

гістограми

`[h,x]=hist(y,x);` % h - вектор значень гістограми

`wh=h/N/dx;` % оцінка густини ймовірності

`bar(x,wh)` % графік оцінки густини ймовірності

`colormap cool;` % палітра графіка

Контрольне питання: що й чому змінилося в цій програмі порівняно з попереднім випадком?

2.3. Побудова теоретичної густини ймовірності

Теоретичний закон розподілу густини ймовірності процесу

$X(t) = c \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ називають *законом арксинуса*:

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}}, & -c \leq x \leq c; \\ 0, & \text{для інших } x \end{cases}$$

Програма обчислень теоретичної густини та побудови її графіку, а також графіку оцінки густини:

`figure`

`for j=1:length(x)` % цикл обчисл. значень теоретичної

густини

`if (x(j)>=-c)&(x(j)<=c)`

`w(j)=1/(pi*sqrt(c^2-x(j)^2));`

`else`

`w(j)=0;`

`end`

`end`

% кінець циклу

bar(x,wh)	% графік оцінки густини
colormap cool;	% палітра графіку
hold on;	% команда накладенн. наступних графіків
stem(x,w,'r');	% графік теоретичної густини (червоний колір)
hold off	% команда відміни накладенн. наступних графіків

Контрольні питання: 1) чому теоретична густина ймовірності підвищується з наближенням x до $\pm c$? 2) що і чому змінилося в обчислювальній програмі порівняно з попереднім випадком?

3. Періодична послідовність трикутних імпульсів

3.1. Генерування процесу та побудова графіку відрізка реалізації

Функція **sawtooth** забезпечує формування періодичної, з періодом 2π , послідовності трикутних двополярних імпульсів одиничної амплітуди. Синтаксис:

y=sawtooth(x)

Для генерування N відліків періодичної послідовності трикутних імпульсів з амплітудою c , відносною* частотою ω_0 та випадковою початковою фазою φ , рівномірно розподіленою на $[0, 2\pi]$, треба виконати декілька команд, аналогічних до випадку генерації дискретного гармонічного процесу:

figure

i=1:N; % вектор номерів відліків дискретного процесу

phase=2*pi*rand(1,1); % значен. випадкової фази, рівномірно розподіленої на $[0, 2\pi]$

y=c* sawtooth(w0*i+phase); % гармонічний дискретний процес

plot(y(1:100)) % графік 100 відліків процесу y

Вигляд відрізка реалізації цього процесу показаний на рис.4.

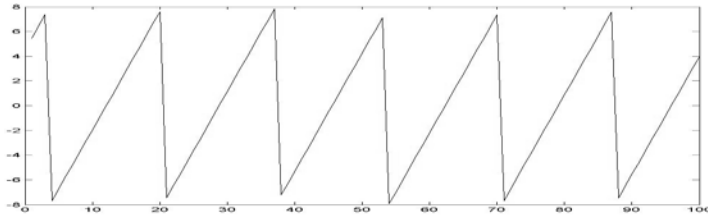


Рис.4. Графік функції.

3.2. Оцінювання густини ймовірності гістограмним методом figure

dx=2*c/M; % величина інтервалу Δx

x=-c-dx/2:dx:c+dx/2; % x – вектор значень аргументу

гістограми

[h,x]=hist(y,x); % h - вектор значень гістограми

wh=h/N/dx; % оцінка густини ймовірності

bar(x,wh) % графік оцінки густини ймовірності

colormap cool; % палітра графіка

Контрольне питання: чому нічого не змінилося в цій програмі порівняно з попереднім випадком?

Контрольне питання: чому нічого не змінилося порівняно з попереднім випадком?

3.3. Побудова теоретичної густини ймовірності

Теоретичний закон розподілу густини ймовірності є рівномірним (*контрольне запитання – чому?*):

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{2c}, & -c \leq x \leq c, \\ 0, & \text{інших } x \end{cases}$$

Програма обчислень теоретичної густини та побудови її графіку, а також графіку оцінки густини:

figure

w=pdf('Uniform',x,-c,c)% обчисл. значень теоретичної густини

bar(x,wh) % графік оцінки густини

colormap cool; % палітра графіку

hold on; % команда накладен. наступних графіків

stem(x,w,'r'); % графік теоретичної густини (червоний колір)
hold off % команда відміни накладен. наступних графіків

Контрольне питання: що й чому змінилося в обчислювальній програмі порівняно з випадком “чисто випадкового рівномірно розподіленого процесу”?

4. (μ, σ)-гаусівський випадковий процес

4.1. Генерування процесу

Функція **randn** забезпечує генерування матриці незалежних випадкових величин, що розподілені як (0,1)-гаусівський випадковий процес. Синтаксис:

y = rand(m,n) % коментар: генер. матр. m-на-n випадкових чисел

Для генерування послідовності N чисел, розподілених як (μ, σ)-гаусівський випадковий процес із некорельованими відліками, необхідно виконати таку команду (*контрольне питання – чому саме таку?*):

figure

y = randn(1,N)*sigma+miu;

plot(y(1:100)) % графік 100 відліків процесу у

4.2. Оцінювання густини ймовірності гістограмним методом

figure

dx=6*sigma/M; % величина інтервалу Δx

x=miu-3*sigma-dx/2:dx: miu+3*sigma+dx/2; % x – вектор

значень аргументу гістограми

[h,x]=hist(y,x); % h - вектор значень гістограми

wh=h/N/dx; % оцінка густини ймовірності

bar(x,wh) % графік оцінки густини ймовірності

colormap cool; % палітра графіка

Контрольне питання: що і чому змінилося в обчислювальній програмі порівняно з попередніми випадками ?

4.3. Побудова теоретичної густини ймовірності

Теоретичний закон розподілу густини ймовірності має вигляд:

$$W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Програма обчислень теоретичної густини та побудови її графіку, а також графіку оцінки густини:

```
figure  
w=pdf('Normal',x,miu,sigma) % теоретична густина  
bar(x,wh) % графік оцінки густини  
colormap cool; % палітра графіку  
hold on; % команда накладен. наступних графіків  
stem(x,w,'r') % графік теоретичної густини (червоний колір)  
hold off % команда відміни накладен. наступних графіків
```

Контрольне питання: що і чому змінилося в обчислювальній програмі порівняно з попередніми випадками ?

5. Адитивна суміш двох статистично незалежних процесів з рівномірним розподілом

5.1. Генерування процесу та побудова графіку відрізка реалізації

Програма:

```
figure  
y1 = rand(1,N)*(b-a)+a; % перший процес  
y2 = rand(1,N)*(b-a)+a; % другий процес  
y=y1+y2; % адитивна суміш  
plot(y(1:100)) % графік 100 відліків процесу у
```

5.2. Оцінювання густини ймовірності гістограмним методом

```
figure  
dx=2*(b-a)/M; % величина інтервалу  $\Delta x$   
x=2*a-dx/2:dx:2*b+dx/2; %  $x$  – вектор значень аргументу
```

гістограми

```
[h,x]=hist(y,x); %  $h$  - вектор значень гістограми  
wh=h/N/dx; % оцінка густини ймовірності  
bar(x,wh) % графік оцінки густини ймовірності  
colormap cool; % палітра графіка
```

Контрольні питання: 1) що і чому змінилося в обчислювальній програмі порівняно з попередніми випадками ?

2) чому оцінка густини ймовірності має такий вигляд?

5.3. Побудова теоретичної густини ймовірності

Теоретичний закон розподілу густини ймовірності має вигляд трикутника (рис.5). **Контрольне питання:** чому?

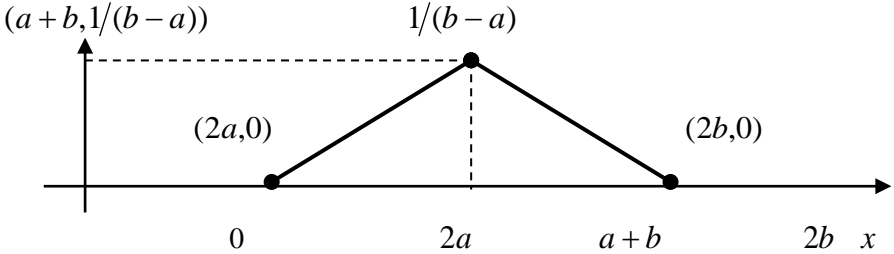


Рис.5. Розподіл густини ймовірності.

Аналітичний вираз цього розподілу:

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^2} \cdot (x-2a), & 2a \leq x \leq a+b, \\ \frac{1}{(b-a)^2} \cdot (2b-x), & a+b \leq x \leq 2b, \\ 0, & \text{для ін. } x \end{cases}$$

Програма обчислень теоретичної густини та побудови її графіку, а також графіку оцінки густини:

```
for j=1:length(x) % цикл обчисл. значень теоретичної густини
```

```
    if (x(j)>=2*a)&(x(j)<=a+b)
        w(j)=1/(b-a)^2*(x(j)-2*a);
    elseif (x(j)>=a+b)&(x(j)<=2*b)
        w(j)=1/(b-a)^2*(2*b-x(j));
    else
        w(j)=0;
```

```
    end
```

```
end
```

```
bar(x,wh)
```

```
colormap cool;
```

```
hold on;
```

```
% кінець циклу
```

```
% графік оцінки густини
```

```
% палітра графіку
```

```
% команда накладен. наступних графіків
```

stem(x,w,'r'); % графік теоретичної густини (червоний колір)
hold off % команда відміни накладен. наступних графіків

Контрольне питання: що й чому змінилося в обчислювальній програмі порівняно з попередніми випадками ?

6. Обчислення похибок вимірювання

6.1. Відносне зміщення

Аналітичний вираз:

$$\Delta_0[\tilde{W}(x, \Delta x)] = \frac{\Delta[\tilde{W}(x, \Delta x)]}{W(x)}.$$

В точці $x = \mu$, з урахуванням формули (Д2.7), маємо:

$$\Delta_0[\tilde{W}(\mu, \Delta x)] = \frac{(\Delta x)^2}{24} \frac{W''(\mu)}{W(\mu)}.$$

Приклад програми обчислення відносного зміщення в середовищі Matlab:

Крок 1: користуючись блоком символної математики (Symbolic Math Toolbox), одержимо аналітичний вираз відношення $\frac{W''(x)}{W(x)}$:

```
syms m sig x % імена символних змінних
w=1/(sig*sqrt(2*pi))*exp(-(x-m)^2/(2*sig^2)); %
аналітичний вираз густини
diff(w,2)/w % аналітичний вираз другої похідної
густини, поділеної на густину
Одержуємо відповідь:
ans =
5644425081792261/2251799813685248*(-
2251799813685248/5644425081792261/sig^3*exp(-1/2*(x-
m)^2/sig^2)+2251799813685248/5644425081792261/sig^5*(x-
m)^2*exp(-1/2*(x-m)^2/sig^2))*sig/exp(-1/2*(x-m)^2/sig^2)
Спрощуємо одержаний вираз:
ans1=simplify(ans)
Одержуємо:
ans1 =
(-sig^2+x^2-2*x*m+m^2)/sig^4
```

Крок 2: обчислюємо відносне зміщення в точці $x = \mu$, покладаючи $\sigma = \sigma$:

$dx = 6 * \sigma / M$; % величина інтервалу Δx

$\Delta_0 = dx^2 / 24 * (-\sigma^2 + \mu^2 - 2 * \mu * \mu + \mu^2) / \sigma^4$

Зауваження: тут ми скористалися тим, що числові значення μ , σ та M вже були в робочому просторі програми Matlab.

Одержуємо відповідь:

$\Delta_0 =$
 -0.0150

Таким чином, відносне зміщення дорівнює 1,5 %.

6.2. Відносна середньоквадратична похибка

Аналітичний вираз

$$\sigma_0[\tilde{W}(x, \Delta x)] = \frac{\sigma[\tilde{W}(x, \Delta x)]}{W(x)}.$$

З урахуванням формули (Д2.8), маємо:

$$\sigma_0[\tilde{W}(x, \Delta x)] \approx \frac{1}{\Delta x N}.$$

Приклад обчислення відносного зміщення в середовищі Matlab:

$\sigma_0 = 1 / (dx * N)$

Одержуємо відповідь:

$\sigma_0 =$
 $2.0833e-004$

Таким чином, відносна середньоквадратична похибка дорівнює 0,02 %.

6.3. Повна відносна похибка

З урахуванням формули (Д2.9), маємо:

$$\Pi_0[\tilde{W}(x, \Delta x)] = \frac{\Pi[\tilde{W}(x, \Delta x)]}{W(x)} = \sqrt{\Delta_0^2 [\tilde{W}(x, \Delta x)] + \sigma_0^2 [\tilde{W}(x, \Delta x)]}$$

$$\Pi_0[\tilde{W}(x, \Delta x)] \approx 0.015.$$

Стислі теоретичні відомості.

Гістограмний метод оцінювання густини ймовірності

Сутність гістограмного методу вимірювань густини ймовірностей зручно пояснювати на прикладі неперервної випадкової величини (ВВ) X . Розділимо весь діапазон значень ВВ X на інтервали («розряди») довжиною Δx і підрахуємо кількість значень m_i , що приходяться на кожний i -тий інтервал. Це число поділимо на загальну кількість спостережень n і таким чином знайдемо частоту, що відповідає даному інтервалу:

$$W_i^* = \frac{m_i}{n}. \quad (2.1)$$

Сума частот для всіх інтервалів, вочевидь, повинна дорівнювати одиниці.

Побудуємо таблицю, в якій приведені інтервали в порядку їх розташування вздовж осі абсцис, й відповідні частоти. Ця таблиця називається *статистичним рядом*. Приклад статистичного ряду, де I_j позначені інтервали значень ВВ X – табл. 2.1.

Табл. 2.1

I_j	-4;-3	-3;-2	-2;-1	-1;0	0;1	1;2	2;3	3;4
m_i	6	25	72	133	120	88	46	10
W_i^*	0,012	0,050	0,144	0,266	0,240	0,176	0,092	0,020

Статистичний ряд часто оформлюють у вигляді графіка, котрий називають *гістограмою* (рис. 2.1). Очевидно, при збільшенні кількості дослідів можна зменшити розмір інтервалів Δx ; при цьому гістограма буде все більше наближатися до істинної густини ймовірності величини X .

Користуючись даними статистичного ряду, можна наближено побудувати й *статистичну функцію розподілу* (тобто *оцінку інтегрального закону розподілу*) величини X (рис. 2.2).

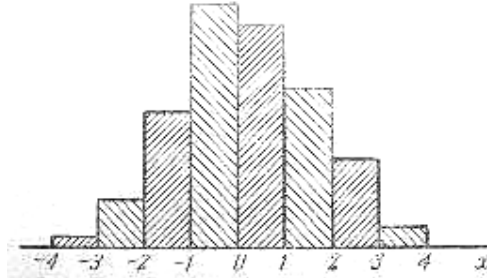


Рис. 2.1.

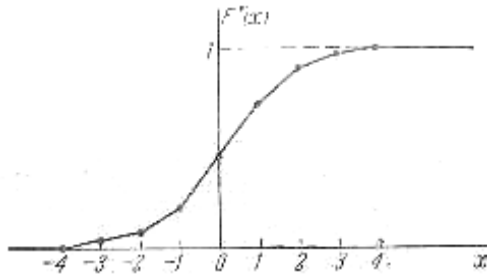


Рис. 2.2.

Розглянемо тепер задачу оцінювання одновимірної густини ймовірностей $W(x)$ ергодичного стаціонарного випадкового процесу (СВП) $X(t)$ по його єдиній реалізації $x(t)$. Пов'язуючи цю задачу з попередньою, неважко бачити, що значення $X(t)$ у фіксований момент часу $t = t_0$ можна трактувати як значення якоїсь випадкової величини X .

Позначимо T_x час перебування ергодичного (відносно вимірювання густини ймовірностей) СВП $X(t)$ в Δx -околиці значення x (рис. Д2.3). Тоді оцінку $\tilde{P}(x, \Delta x)$ ймовірності попадання СВП $X(t)$ в Δx -околицю значення x можна представити у вигляді відносного часу перебування:

$$\tilde{P}(x, \Delta x) = \frac{T_x}{T}, \quad (2.2)$$

де

$$T_x = \sum_j \Delta t_j,$$

Δt_j - час перебування СВП $X(t)$ в Δx -околиці значення x в j -тій часовій ділянці.

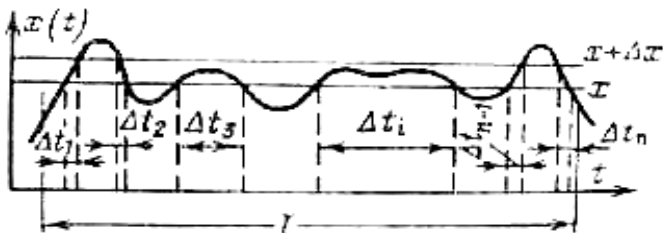


Рис. 2.3

Оцінка $\tilde{W}(x, \Delta x)$ густини $W(x)$ при цьому може бути представлена у вигляді:

$$\tilde{W}(x, \Delta x) = \frac{\tilde{P}(x, \Delta x)}{\Delta x} = \frac{T_x}{T \Delta x}. \quad (2.3)$$

Середнє значення оцінки (Д2.3):

$$\langle \tilde{W}(x, \Delta x) \rangle = \frac{\langle \tilde{P}(x, \Delta x) \rangle}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} P(x, \Delta x) = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} W(\xi) d\xi \quad (2.5)$$

Неважко бачити, що з-за скінчених розмірів розряду Δx оцінка (2.3) зміщена:

$$\langle \tilde{W}(x, \Delta x) \rangle \neq W(x). \quad (2.6)$$

Вираз для зміщення $\Delta[\tilde{W}(x, \Delta x)]$ оцінки (2.3):

$$\Delta[\tilde{W}(x, \Delta x)] = \langle \tilde{W}(x, \Delta x) \rangle - W(x) = \frac{\Delta x}{2} W'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{6} W''(x)$$

Якщо границі інтервалу Δx симетричні відносно точки x , тоді

$$\langle \tilde{W}(x, \Delta x) \rangle = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} W(\xi) d\xi,$$

і вираз для зміщення спрощується (у подальшому будемо використовувати саме цей вираз):

$$\Delta[\tilde{W}(x, \Delta x)] = \langle \tilde{W}(x, \Delta x) \rangle - W(x) = \frac{(\Delta x)^2}{24} W''(x) \quad (2.7)$$

Дисперсія оцінки густини ймовірності:

$$D[\tilde{W}(x, \Delta x)] \approx \frac{W(x)}{\Delta x N}, \quad (2.8)$$

где $N = T/\Delta t$.

Таким чином, справедливі наступні висновки.

Висновок 1: При плануванні експерименту з вимірювань густини $W(x)$ потрібно пам'ятати, що в руках експериментатора є всього два «важеля» для управління точністю вимірювань: величина інтервалу Δx та довжина відрізка реалізації T (або, що одне й те саме, - кількість відліків $N = T/\Delta t$);

Висновок 2: при фіксованому T зміщеність оцінки $\tilde{W}(x, \Delta x)$ можна зменшити шляхом зменшення величини інтервалу Δx ;

Висновок 3: при фіксованому T дисперсію оцінки $\tilde{W}(x, \Delta x)$ можна зменшити шляхом збільшення Δx ;

Висновок 4: вимога збільшення точності вимірювань густини $W(x)$ при фіксованому T зводиться до вимоги змінювати величину інтервалу Δx ; при цьому вимоги до Δx є суперечливими: із збільшенням Δx дисперсія зменшується, але одночасно з цим збільшується зміщеність; тому для фіксованого T можна ставити задачу про пошук оптимального Δx , що мінімізує повну похибку вимірювань:

$$\Pi(x, \Delta x) = \sqrt{\Delta^2 [\tilde{W}(x, \Delta x)] + D[\tilde{W}(x, \Delta x)]}. \quad (2.9)$$

Висновок 5: на відміну від зміщення, дисперсія оцінки $\tilde{W}(x, \Delta x)$ залежить не тільки від Δx , але й від T : при фіксованому значенні Δx дисперсія оцінки $\tilde{W}(x, \Delta x)$ обернено пропорційна об'єму вибірки N , тобто тривалості інтервалу спостереження T .

Висновок 6: узагальнюючи результати, приходимо до висновку про доцільність погодженого вибору параметрів Δx й T :

$$\Delta x \rightarrow 0, \quad \text{но} \quad \Delta x T \rightarrow \infty.$$

Список літератури

1. Цикин И.А. Дискретно-аналоговая обработка сигналов / И.А. Цикин // – М.: Радио и связь. –1982. – С.161.
2. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов /И.С. Гоноровский // – М.: Радио и связь. – 1994. – С.512.
3. Солонина А.И. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций / А.И. Солонина, Д.А. Улахович, С.М. Арбузов, Е.Б. Соловьева, И.И. Гук// – СПб.: БХВ-Петербург. – 2003. – С.608.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов // – М.: Гостехиздат. – 1951. –С.340.
5. Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей: Учеб. для вузов / А.Ф. Белецкий // – М.:Радио и связь. – 1999. – С.544.
6. Гольденберг Л.М. Цифровая обработка сигналов: Справочник / Л.М. Гольденберг, Б.Д. Матюшкин, М.Н. Поляк // – М.: Радио и связь. – 1985. – С.312.
7. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис // – М.: Наука. – 1973. – С.688.
8. Гольденберг Л.М. Цифровая обработка сигналов: Учеб. пособие для вузов / Л.М. Гольденберг, Б.Д. Матюшкин, М.Н. Поляк // – М.: Радио и связь. – 1990. – С.256.
9. Ланнэ А.А. Основы цифровой обработки сигналов / А.А. Ланнэ, Б.Д. Матюшкин, Д.А.Улахович // – СПб. – 1995. – Ч.1. – С.283.

Навчальне видання

**Основи та методи цифрової обробки сигналів:
від теорії до практики**

Навчальний посібник

Укладачі: **Ушенко Ю.О., Гавриляк М.С.,
Талах М.В., Дворжак В.В.**

Відповідальний за випуск **Ангельський О.В.**
Літературний редактор **Макарова О.П.**
Технічний редактор та дизайнер обкладинки **Цибуляк В.Д.**

Підписано до друку 14.07.2021. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Друк різнографічний. Ум.-друк. арк. 16,8.
Обл.-вид. арк. 18,1. Тираж 50. Н-079.
Видавництво та друкарня Чернівецького національного університету 58002,
Чернівці, вул. Коцюбинського, 2
e-mail: ruta@chnu.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №981 від 08.04.2002