

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**В. М. Сокурєнко**

# **ПЕРЕТВОРЕННЯ СИГНАЛІВ В ОПТИКО-ЕЛЕКТРОННИХ СИСТЕМАХ**

**Навчальний посібник**

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для здобувачів ступеня магістра  
за освітньою програмою «Комп'ютерно-інтегровані системи та технології в  
приладобудуванні» спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані  
технології»

Електронне мережне навчальне видання

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2023

Рецензенти: *Тягур Володимир Михайлович*, доктор технічних наук, доцент, Заступник начальника науково-технічного комплексу, Головний конструктор напрямку КП СПБ «Арсенал»

*Безуглий Михайло Олександрович*, доктор технічних наук, професор, Завідувач кафедри виробництва приладів КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний редактор:

*Микитенко Володимир Іванович*, доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 6 від 30.03.2023 р.)  
за поданням Вченої ради Приладобудівного факультету  
(протокол № 3/23 від 27.03.2023 р.)*

Навчальний посібник написано на основі однойменного курсу, який викладається студентам приладобудівного факультету на кафедрі комп'ютерно-інтегрованих оптичних та навігаційних систем Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Надані відомості про сигнали в оптико-електронних системах довільного призначення та їх спектральне представлення. Зокрема, описуються особливості поширення та перетворення оптичних і електричних сигналів, їх зв'язок з такими фізичними явищами як дифракція та інтерференція, а також абераційними властивостями оптичних систем. Аналізуються властивості лінійних систем, процедур згортки та кореляції, прямого та зворотного перетворень Фур'є, перетворення Ганкеля, перетворення сигналів з обмеженим спектром, а також випадкових сигналів. Випадкові сигнали описуються у межах кореляційної теорії. Представлені поняття часової та просторової когерентності, когерентного та некогерентного імпульсних відгуків, оптичної передавальної функції та її складових. Розглядаються дискретні перетворення сигналів (а саме – операції дискретизації та квантування), а також теорема Найквіста.

Навчальний посібник призначений для здобувачів ступеня магістра за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології». Буде також корисним для всіх, хто цікавиться оптико-електронною апаратурою та обробкою сигналів у науці та техніці.

Реєстр. № НП 22/23-556. Обсяг 6,3 авт. арк.

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056  
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© В. М. Сокурєнко,  
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023

# ЗМІСТ

<b>ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ.....</b>	<b>5</b>
<b>ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....</b>	<b>6</b>
<b>ВСТУП.....</b>	<b>9</b>
<b>РОЗДІЛ 1. СИГНАЛИ В ОПТОЕЛЕКТРОНІЦІ.....</b>	<b>10</b>
1.1. Види сигналів в оптико-електронних системах.....	10
1.2. Спеціальні функції, що використовуються для опису сигналів в оптиці та електроніці.....	13
1.2.1. Гармонічна функція.....	13
1.2.2. Функція відліків і функція Фейєра.....	17
1.2.3. Функції Бесселя та функція Ейрі.....	21
1.2.4. Прямокутна, трикутна та кругова функції.....	24
1.2.5. Функція Дірака та гребінка Дірака.....	27
1.2.6. Функція Гевісайда та знакова функція.....	31
<b>РОЗДІЛ 2. ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є.....</b>	<b>33</b>
2.1. Ряд Фур'є.....	33
2.1.1. Ряд Фур'є в тригонометричній формі.....	33
2.1.2. Ряд Фур'є в комплексній формі.....	35
2.2. Дискретний спектр.....	36
2.3. Інтеграл Фур'є.....	39
2.4. Властивості перетворення Фур'є.....	40
2.5. Неперервний спектр.....	43
2.5. Симетрія функцій та фур'є-перетворень.....	45
2.7. Перетворення фур'є-сигналів з обмеженою потужністю.....	46
2.8. Двовимірне перетворення Фур'є.....	49
2.8.1. Перетворення Фур'є на площині.....	49
2.8.2. Перетворення Фур'є в оптиці.....	52
<b>РОЗДІЛ 3. ЗГОРТКА І КОРЕЛЯЦІЯ. ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ.....</b>	<b>55</b>
3.1. Лінійні перетворення та інтеграл суперпозиції.....	55
3.2. Згортка та її властивості.....	56
3.3. Кореляція та її властивості.....	59
3.4. Згортка і кореляція на площині.....	60
3.5. Усічене перетворення Фур'є.....	62
3.6. Усічене перетворення Фур'є в оптиці.....	67
3.7. Лінійні системи.....	68
3.8. Лінійні системи в оптиці.....	72
<b>РОЗДІЛ 4. ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ.....</b>	<b>78</b>

4.1. Випадковий сигнал і його опис.....	78
4.2. Стаціонарність та ергодичність .....	82
4.3. Автокореляційна та крос-кореляційна функції.....	85
4.4. Спектральне представлення випадкових сигналів .....	89
4.4.1. Теорема Вінера-Хінчина .....	89
4.4.2. Властивості енергетичного спектра.....	91
4.4.3. Ефективна ширина спектра.....	92
4.5. Проходження випадкового сигналу через лінійну систему.....	93
4.6. Випадкові сигнали на площині .....	95
4.7. Випадкові сигнали в оптиці .....	96
4.7.1. Опис поля при квазімонохроматичному випроміненні .....	96
4.7.2. Часова когерентність .....	99
4.7.3. Просторова когерентність.....	100
4.7.4. Опис явища інтерференції .....	101
<b>РОЗДІЛ 5. ДИСКРЕТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ СИГНАЛІВ .....</b>	<b>103</b>
5.1. Цифрове представлення сигналів .....	103
5.1.1. Процедура дискретизації неперервного сигналу.....	103
5.1.2. Процедура квантування дискретного сигналу.....	105
5.2. Дискретизація сигналів з кінцевою смугою частот (з обмеженим спектром).....	106
<b>КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ .....</b>	<b>109</b>
<b>ЛІТЕРАТУРА.....</b>	<b>111</b>
<b>ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК .....</b>	<b>112</b>

## ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

АЧХ	амплітудно-частотна характеристика
МПФ	модуляційна передавальна функція
ОЕП	оптико-електронний прилад
ОЕС	оптико-електронна система
ОС	оптична система
ФЧХ	фазово-частотна характеристика

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\leftrightarrow$	символ зв'язку двох функцій як пари Фур'є перетворення
$\otimes$	оператор згортки
$\langle \dots \rangle$	статистичне (в імовірнісному сенсі) усереднення випадкового сигналу
$1(t)$	одинична функція
$\{\arg C_n\}_n$	фазовий дискретний спектр
$\arg F(v)$	фаза спектру; фазовий неперервний спектр сигналу
$\arg H(v)$	фазово-частотна характеристика системи
$a_0, a_n, b_n$	коефіцієнти розкладання функції в ряд Фур'є в тригонометричній формі
$\text{comb}(x/X)$	гребінка Дірака
$C_n$	коефіцієнти розкладання функції в ряд Фур'є в комплексній формі
$\{ C_n \}_n$	амплітудний дискретний спектр
$\{ C_n ^2\}_n$	дискретний спектр потужності
$E$	комплексна напруженість електромагнітної хвилі
$f'$	фокусна відстань оптичної системи
$f(t)$	одновимірна функція часу
$f^*(t)$	комплексно спряжена одновимірна функція часу
$f(x, y)$	двовимірна функція просторових координат
$\tilde{f}(t)$	дискретний сигнал
$f_k$	випадкова величина
$F(v)$	одновимірний спектр; фур'є-образ; неперервний спектр
$F(v_x, v_y)$	двовимірний спектр
$F(\vec{v}_x)$	двовимірний спектр, записаний в векторній формі
$ F(v) $	амплітуда спектру; амплітудний неперервний спектр сигналу
$ F(v) ^2$	енергетичний спектр сигналу
$\text{Gauss}(\rho, a)$	функція Гауса
$h(t)$	імпульсний відгук інваріантної лінійної системи
$H(v)$	частотна передавальна функція системи
$ H(v) $	амплітудна частотна характеристика системи
$I_E(\rho)$	функція Ейрі
$I_n(x)$	функція Бесселя I-роду $n$ -го порядку
$I_0(x)$	функція Бесселя I-роду 0-го порядку
$I_1(x)$	функція Бесселя I-роду 1-го порядку
$k$	хвильове число
$\vec{k}$	хвильовий вектор

$K_f(\tau)$	автокореляційна функція стаціонарного випадкового сигналу
$K_{fg}(\tau), K_{gf}(\tau)$	взаємні кореляційні функції
$m_f$	математичне очікування випадкового сигналу
$\vec{n}$	орт нормалі хвильової фронту
$p(f_{ik})$	щільність розподілу імовірностей
$P$	потужність сигналу
Pupil	функція зіниці
$r$	відстань від між точками; радіальна координата в полярній системі координат
$\vec{r}$	точка простору з координатами $(x, y, z)$
$\text{rect}\left(\frac{x}{X}\right)$	прямокутна функція
$R_f(\tau)$	коваріаційна функція випадкового сигналу
$r_0$	відстань (ширина) когерентності випадкового сигналу
$S_f(\nu)$	спектральна щільність потужності (енергетичний спектр) випадкового сигналу
$\text{sgn}(t)$	знакова функція (сигнум-функція)
$\text{sinc}(x)$	функція відліків
$\text{sinc}^2(x)$	функція Фейєра
$T$ або $T_0$	часовий період в [с]
$X, Y$	просторові періоди в [мм]
$Y(t)$	функція Гевісайда (одиничний рівень)
$z$	відстань вздовж осі між площинами (екранами)
$\Gamma_i(\tau), \Gamma_j(\tau)$	функції когерентності (автокогерентності)
$\Gamma_{ij}(\tau), \Gamma_{ji}(\tau)$	функції взаємної когерентності
$\gamma_i(\tau), \gamma_j(\tau)$	нормовані функції когерентності (автокогерентності)
$\gamma_{ij}(\tau), \gamma_{ji}(\tau)$	нормовані функції взаємної когерентності
$\delta(t)$	$\delta$ -функція (функція Дірака)
$\Delta f$	крок квантування
$\Delta \nu$	ефективна ширина спектра випадкового сигналу
$\mathcal{F}$	оператор прямого перетворення Фур'є
$\mathcal{F}^{-1}$	оператор зворотного перетворення Фур'є
$\mathcal{F}_T$	оператор прямого усіченого перетворення Фур'є
$\mathcal{F}_T^{-1}$	оператор зворотного усіченого перетворення Фур'є
$\mathcal{L}$	оператор лінійного перетворення
$\lambda$	довжина хвилі випромінення
$\nu$ або $\nu_0$	часова частота (лінійна частота) в [Гц]
$\nu_{\max}$	максимальна частота в спектрі сигналу
$\nu_x, \nu_y$	просторові частоти в [мм <sup>-1</sup> ]
$\vec{\nu}_x$	вектор просторових частот
$\rho$	радіальна частотна координата в полярній системі координат

---

$\sigma_f^2$	дисперсія випадкового сигналу
$\tau_0$	інтервал кореляції випадкового сигналу
$\theta$	азимутальна частотна координата в полярній системі координат
$\omega$	кругова частота в [рад · с <sup>-1</sup> ]



## ВСТУП

В даний час оптико-електронні системи (ОЕС) широко використовуються в різних галузях науки і техніки.

В даному навчальному посібнику викладені математичні основи роботи сучасних оптико-електронних приладів (ОЕП). Зокрема, пояснюються особливості опису та перетворення оптичних та електричних сигналів в системах первинної обробки інформації, що включають оптичну систему (ОС), аналізатор зображення та приймач випромінювання.

В багатьох застосунках електроніки, математичної фізики та техніки надзвичайно зручно представляти функції, що підлягають детальному аналізу, як зважені суперпозиції набору інших (простіших) функцій, властивості яких заздалегідь добре відомі. Якщо система є лінійною, раціонально проаналізувати поведінку такої системи щодо функцій, які викликають інтерес. Для цього спочатку ці функції розділяють на складові частини та потім складають результати, отримані для кожної частини. Це основа функціонального аналізу, пов'язаного з лінійною алгеброю. Для кращого розуміння поведінки системи під час функціонального аналізу обґрунтовано використовуються різні геометричні представлення.

В даному посібнику з позицій кореляційної теорії розглядаються питання математичного опису та перетворення випадкових електричних і оптичних сигналів. Крім того, представлені поняття та властивості стаціонарних та ергодичних сигналів, часової та просторової когерентності.

Окремий розділ присвячений цифровим перетворенням, зокрема операціям дискретизації та квантування. Для коректного (однозначного) відновлення сигналів з обмеженим спектром розглядаються частота Найквіста та важлива теорема Віттакера-Найквіста-Шеннона (Котельнікова).

Представлений матеріал потребує від читача базових знань та уявлень, закладених у загальних курсах вищої математики, електроніки, фізичної та геометричної оптики.

## СИГНАЛИ В ОПТОЕЛЕКТРОНІЦІ

У цьому розділі:



- 1.1. Види сигналів в оптико-електронних системах.
- 1.2. Спеціальні функції, що використовуються для опису сигналів в оптиці та електроніці.
  - 1.2.1. Гармонічна функція.
  - 1.2.2. Функція відліків та функція Фейєра.
  - 1.2.3. Функції Бесселя та функція Ейрі.
  - 1.2.4. Прямокутні трикутні та кругові функції.
  - 1.2.5. Функція Дірака та гребінка Дірака.
  - 1.2.6. Функція Гевісайда та знакова функція.

### 1.1. Види сигналів в оптико-електронних системах

Узагальнена схема оптико-електронної системи (ОЕС) представлена на рис. 1.1. Вона відображає основні складові ОЕС та проходження сигналу, який є фізичним носієм інформації.

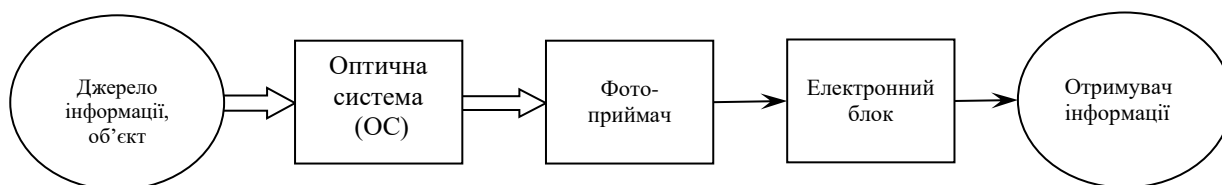


Рис. 1.1 – Узагальнена схема оптико-електронної системи (ОЕС)

В цілому, за своєю фізичною природою всі сигнали в ОЕС можна поділити на дві групи:

- 1) електричні (на рис. 1.1 вони показані стрілками «→»);
- 2) оптичні (на рис. 1.1 вони показані стрілками «⇒»).

**Електричний сигнал** представляє собою зміну у часі амплітуду (частоту або фазу) напруги або струму, яка може бути описана одномірною функцією часу  $f(t)$ .

**Оптичний сигнал** представляє собою залежність одного або декількох параметрів електромагнітної хвилі від просторових координат і часу. Він може бути описаний скалярною або векторною функцією від чотирьох змінних:

$$f(x, y, z, t) \text{ або } \vec{f}(x, y, z, t),$$

де  $x, y, z$  – просторові координати.

Параметрами електромагнітного поля можуть бути:

- амплітуда електричного вектора;
- частота випромінення (або довжина хвилі);
- фаза;
- напрямок хвильового вектора;
- стан поляризації тощо.

Як правило, під час аналізу ОЕС цікавляться розподілом світлового поля в певній площині  $XU$ , перпендикулярній до осі  $Z$ . При цьому часто інтерес представляє тільки залежність амплітуди сигналу від просторових координат  $XU$ . Тому для опису оптичного сигналу часто використовують вже дещо спрощену двомірну функцію:

$$f(x, y) = f(\vec{x}).$$

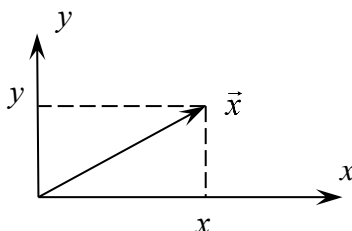


Рис. 1.2 – Векторне представлення просторових координат двовимірних функцій, які використовуються для опису оптичних сигналів

Як електричний, так і оптичний сигнали по формі представлення можуть бути поділені на такі два класи:

- 1) аналогові;
- 2) дискретні.

**Аналогові сигнали** описуються безперервними функціями часу або координат:  $f(t), f(\vec{x})$  (рис. 1.3). Зауважимо, що ці функції не виключають існування як екстремальних, так і особливих точок.

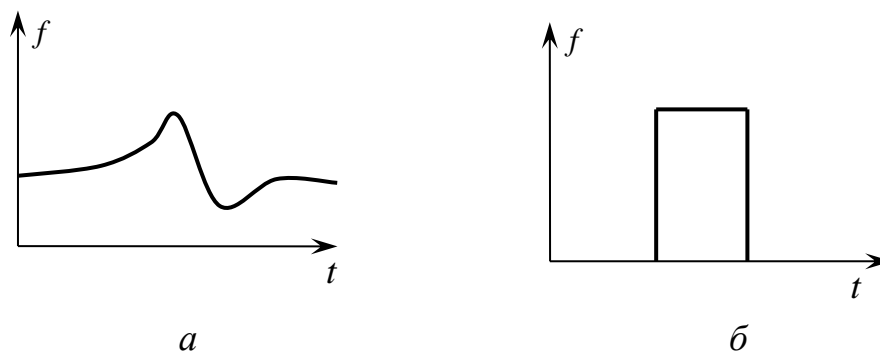


Рис. 1.3 – Приклади аналогових електричних сигналів  
*a* – довільний імпульс; *б* – прямокутний імпульс

**Дискретні сигнали** визначені тільки в сукупності окремих точок  $t_i$  на осі часу або  $(x_i, y_i) = \vec{x}_i$  на площині. Вони задаються ансамблями вибірових значень:  $\{f(t_i)\}, \{f(\vec{x}_i)\}$ .

За ступенем визначеності (детермінізму) всі сигнали можна поділити на:

- 1) детерміновані;
- 2) випадкові (стохастичні).

**Детерміновані сигнали** описуються однозначними функціями, значення яких для будь-якого значення аргументу може бути визначено з імовірністю, що дорівнює 1. Прикладами детермінованих електричних сигналів можуть бути функції  $\cos(t)$  і  $\sin(t)$ .

Для **випадкового сигналу** його значення для будь-якого аргументу може бути визначені лише з імовірністю, меншою за 1.

В свою чергу, детерміновані сигнали в ОЕС можуть бути:

- 1) періодичні;
- 2) аперіодичні.

**Періодичний сигнал** задовольняє такому виразу:

$$\boxed{f(t) = f(t + nT)}, \quad (1.1)$$

де  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$T$  – часовий період з одиницею вимірювання [с];

$1/T = \nu$  – частота з одиницею вимірювання  $[c^{-1}] = [\text{Гц}]$ .

Аналогічно, для періодичного оптичного сигналу справедливим є вираз:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x} + n\vec{X}), \quad (1.2)$$

де  $\vec{X}$  – просторовий період з одиницею вимірювання [мм];

$\nu_x = 1/X$  – просторова частота з одиницею вимірювання  $\left[\frac{1}{\text{мм}}\right] = [\text{мм}^{-1}]$ .

**Аперіодичний (неперіодичний) сигнал** – це сигнал, значення якого не повторюються. Отже, він не задовольняє умові (1.1).

## 1.2. Спеціальні функції, що використовуються для опису сигналів в оптиці та електроніці

### 1.2.1. Гармонічна функція

*Одномірна (часова) гармонічна функція* представляється виразом:

$$\boxed{\cos(2\pi\nu t) = \cos(\omega t)}, \quad (1.3)$$

де  $t$  – час (незалежна змінна);

$\nu$  – частота (параметр), що має одиницю вимірювання  $[\text{с}^{-1}] = [\text{Гц}]$ ,

$\omega = 2\pi\nu$  – кругова частота з одиницею вимірювання  $[\text{рад} \cdot \text{с}^{-1}]$ ,

$1/\nu = T$  – часовий період з одиницею вимірювання  $[\text{с}]$ .

Графік такої функції зображено на рис. 1.4. Очевидно, що гармонічна функція є періодичною функцією з періодом  $T$ .

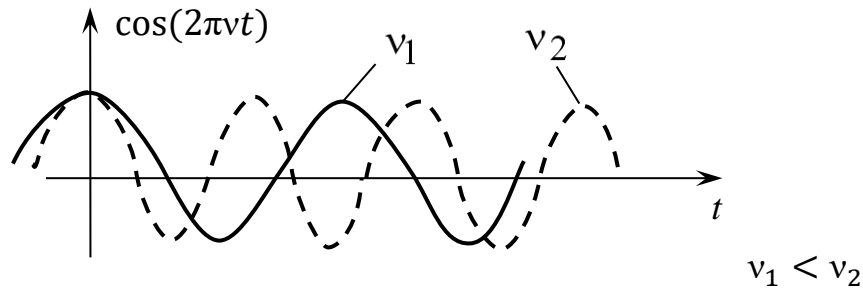


Рис. 1.4 – Дві одномірні (часові) гармонічні функції з різними частотами

В оптиці важливу роль відіграє *просторова гармонічна функція*. Це вже двомірна гармоніка, яку можна записати, використовуючи векторну нотацію, так:

$$\cos[2\pi(\nu_x x + \nu_y y)] = \cos(2\pi\vec{\nu}_x \vec{x}), \quad (1.4)$$

де  $\vec{\nu}_x \cdot \vec{x} = (\nu_x, \nu_y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \nu_x x + \nu_y y$ ,

$x, y$  – декартові координати (незалежні змінні);

$\nu_x, \nu_y$  – просторові частоти з одиницею вимірювання  $[\text{мм}^{-1}]$ ;

$\vec{\nu}_x = (\nu_x, \nu_y)$  – векторна просторова частота (див. рис. 1.5);

$|\vec{\nu}_x| = \sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}$ .

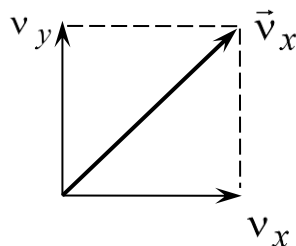


Рис. 1.5 – Векторне представлення просторових частот двовимірних функцій

Величини, зворотні просторовим частотам, називаються **просторовими періодами**:

$$X = \frac{1}{\nu_x}; \quad Y = \frac{1}{\nu_y}; \quad [X, Y] = \text{мм.}$$

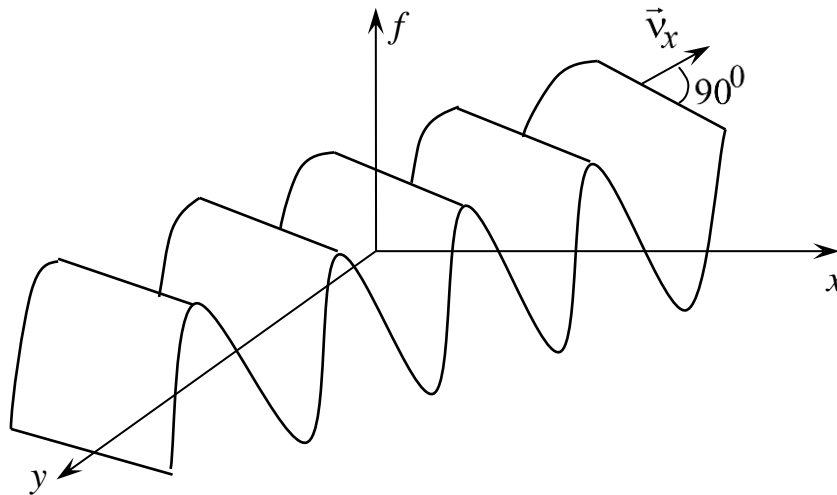


Рис. 1.6 – Довільна двовимірна (просторова) гармонічна функція

При одночасній та пропорційній зміні параметрів  $\nu_x, \nu_y$  просторова гармоніка розтягується та стискається; при непропорційній зміні параметрів або зміні тільки одного з параметрів простору гармоніка буде обертатися в площині  $xu$  навколо осі  $f$ .

Так, наприклад, при  $\nu_y = 0$  отримаємо частковий випадок:

$$\cos[2\pi(\nu_x \cdot x + 0 \cdot y)] = \cos(2\pi\nu_x x).$$

Очевидно, що ця хвиля «розповсюджується» вздовж осі  $x$  (див. рис. 1.7).

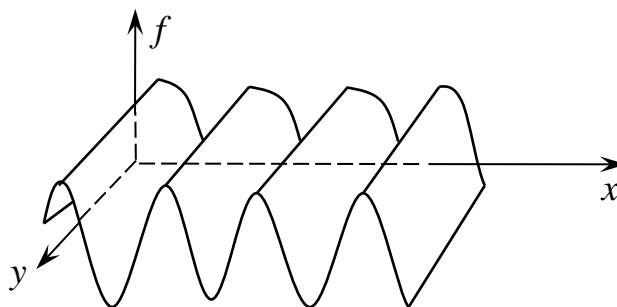


Рис. 1.7 – Двовимірна (просторова) гармонічна функція з нульовою просторовою частотою по координаті  $y$

Цікава властивість просторової гармоніки полягає у тому, що будь-який плоский її переріз, паралельний осі  $f$ , буде також одновимірною гармонікою.

Період такої гармоніки залежить від просторової орієнтації цього перерізу, а саме – від куту повороту перерізу в горизонтальній площині.

При практичних розрахунках зручно користуватися комплексним представленням гармонійних функцій (рис. 1.8).

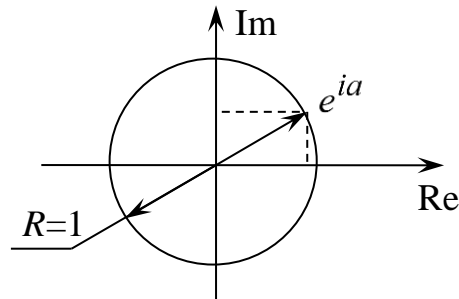


Рис. 1.8 – Комплексне представлення гармонічної функції

Скористаємось формулою Ейлера:

$$\exp(ia) = \cos(a) + i \cdot \sin(a), \quad (1.5)$$

Тоді функція косинуса є дійсною частиною комплексної експоненти:

$$\cos(2\pi vt) = \operatorname{Re}[\exp(i2\pi vt)], \quad (1.6)$$

Цікаво, що при переході до комплексного представлення багато перетворень гармонійної функції значно спрощуються. Наприкінці обчислень береться дійсна частина отриманого результату.

Аналогічно, в комплексній формі можна записати просторову гармоніку:

$$\exp[i2\pi(v_x x + v_y y)] = \exp[i2\pi \vec{v}_x \cdot \vec{x}]. \quad (1.7)$$

Функція (1.7) грає важливу роль в оптиці, оскільки описує *плоску монохроматичну хвилю* світла.

Дійсно, амплітуда електричного поля в точці спостереження  $\vec{r} = (x, y, z)$  в момент часу  $t$  може бути знайдена як розв'язок хвильового рівняння Максвелла:

$$E(\vec{r}, t) = \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - 2\pi v_o t), \quad (1.8)$$

де  $v_o$  – частота випромінювання;

$\vec{r}$  – точка спостереження в просторі;

$\vec{k}$  – хвильовий вектор;  $\vec{k} = k\vec{n}$ ;

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – хвильове число;

$\vec{n}$  – одиничний вектор нормалі до хвильової фронту.

Як видно з останнього виразу, фаза електромагнітної хвилі визначається скалярним добутком  $\vec{k} \cdot \vec{r}$ , а рівняння  $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const}$  визначає в просторі хуз площину. Тому хвиля, представлена виразом (1.8), називається *плоскою* (див. рис. 1.9).

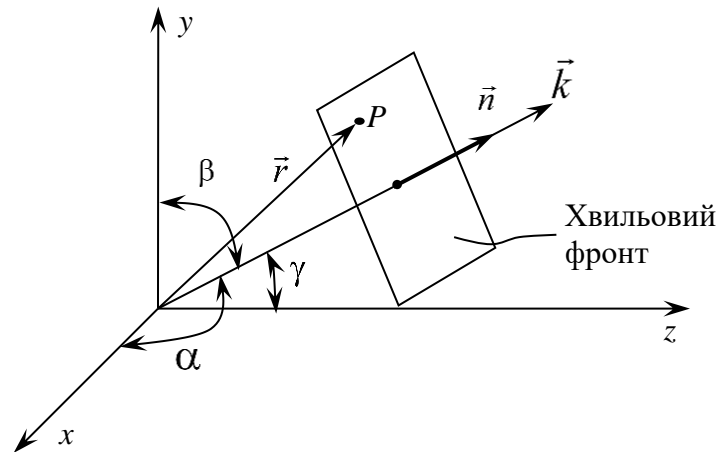


Рис. 1.9 – Розповсюдження плоскої хвилі в просторі

З рис. 1.9 видно, що вектор нормалі  $\vec{n}$  може бути визначений як

$$\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma), \quad (1.9)$$

де  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  – направляючі косинуси.

Якщо початок координат знаходиться в точці спостереження  $P$  ( $z = 0$ ), то, використовуючи вираз (1.9), формулу (1.8) можна переписати так:

$$E(\vec{r}, t) = \cos \left[ 2\pi \left( \frac{\cos \alpha}{\lambda} x + \frac{\cos \beta}{\lambda} y \right) - 2\pi \nu_o t \right],$$

або в комплексній формі:

$$E(\vec{r}, t) = \exp \left[ i 2\pi \left( \frac{\cos \alpha}{\lambda} x + \frac{\cos \beta}{\lambda} y \right) \right] \cdot \exp(-i 2\pi \nu_o t), \quad (1.10)$$

Другий множник в виразі (1.10) не залежить від координат  $x, y$ . Тому його можна опустити та записати плоску монохроматичну хвилю у вигляді:

$$E(\vec{r}) = \exp \left[ i 2\pi \left( \frac{\cos \alpha}{\lambda} x + \frac{\cos \beta}{\lambda} y \right) \right], \quad (1.11)$$

Порівнюючи вираз (1.11) з (1.7), приходимо до висновку, що просторова гармоніка в комплексному представленні (1.7) задає плоску монохроматичну хвилю з направляючими косинусами:

$$\cos \alpha = \lambda \nu_x; \quad \cos \beta = \lambda \nu_y.$$

Просторові гармоніки також описують таке фундаментальне оптичне явище як інтерференція.

Розглянемо інтерференцію двох плоских монохроматичних хвиль з направляючими косинусами:

$$\cos \alpha_1 = \lambda \nu_{x_1}; \quad \cos \alpha_2 = \lambda \nu_{x_2} \quad (\cos \beta = 0 \text{ – для прикладу}).$$

Інтенсивність суми цих хвиль в площині  $x, y$  дорівнює:

$$I(x, y) = \left| \exp(i 2\pi \nu_{x_1} x) + \exp(i 2\pi \nu_{x_2} x) \right|^2 = \quad (1.12)$$



$$\begin{aligned}
 &= 1 + 1 + \exp[i2\pi(v_{x_1} - v_{x_2})x] + \exp[-i2\pi(v_{x_1} - v_{x_2})x] = \\
 &= 2[1 + \cos(2\pi(v_{x_1} - v_{x_2})x)].
 \end{aligned}$$

Вираз (1.12) описує просторову гармоніку з постійною складовою, яка характеризує розподіл інтенсивності в картині інтерференції.

Окрім розглянутого, просторові гармонічні функції використовуються в оптиці для опису коефіцієнта пропускання (або відбиття) синусоїдальних дифракційних ґраток.

### 1.2.2. Функція відліків і функція Фейєра

**Функцією відліків** (або *sinc-функцією*) називається функція виду:

$$\boxed{\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}}, \quad (1.13)$$

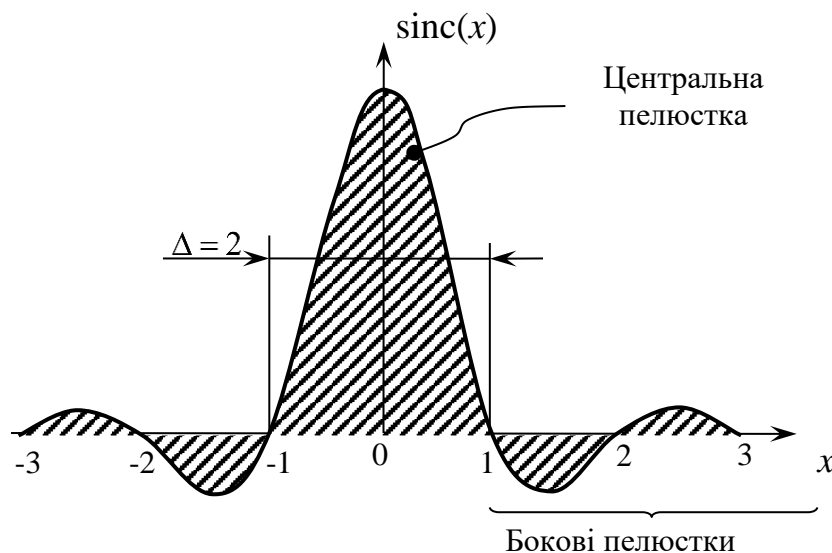


Рис. 1.10 – Функція відліків

Нулі такої *sinc*-функції знаходяться з умови:  $\sin(\pi x) = 0$  (крім точки  $x = 0$ , в якій ця функція дорівнює 1). В полярній системі координат:

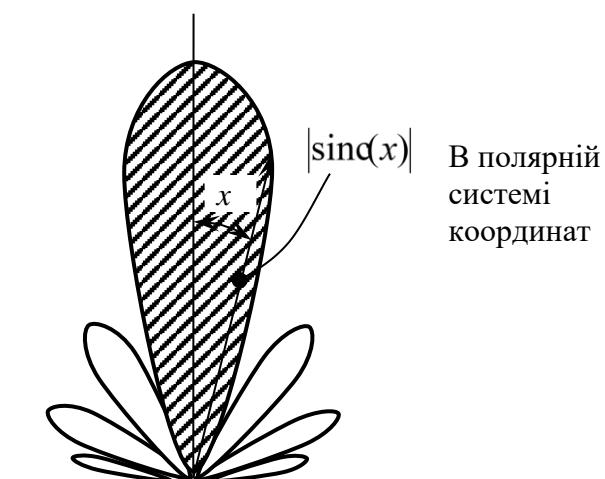


Рис. 1.11 – Вигляд функції відліків по модулю в полярній системі координат

В виразі (1.13) представлена *нормована* функція sinc. Вона часто використовується при цифровій обробці сигналів та в теорії зв'язку. В математиці поширена також *ненормована* sinc-функція:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

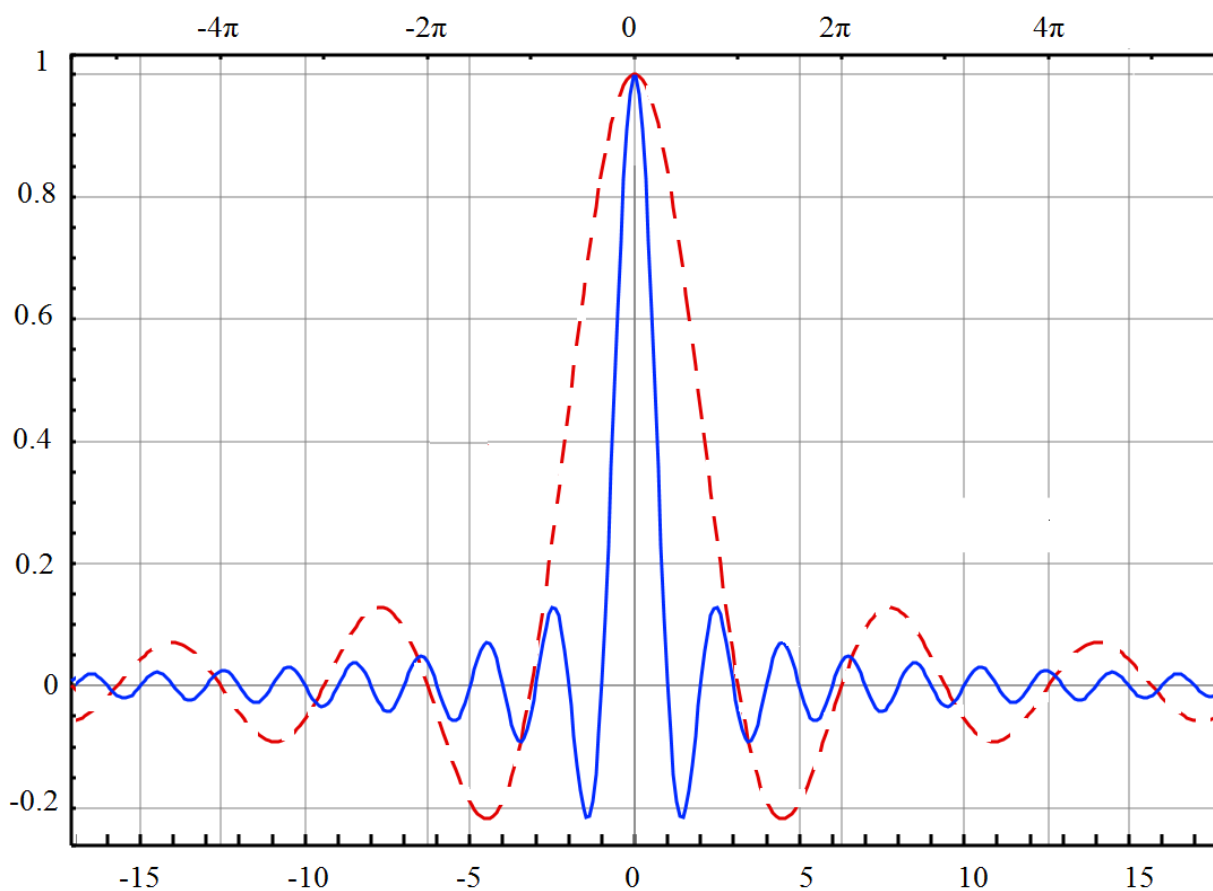


Рис. 1.12 – Два різновиди функції відліків:  
суцільна лінія – нормована, пунктирна лінія – ненормована

Як і будь-яка інша функція, sinc-функція може мати різний масштаб. Розглянемо функцію  $\text{sinc}(ax) = \frac{\sin(\pi ax)}{\pi ax}$ , де  $a$  – дійсне число.

При  $a > 1$  функція  $\text{sinc}(ax)$  стискається вздовж осі  $x$ , а при  $a < 1$  – розтягується.

Ширина центральної пелюстки функції  $\text{sinc}(ax)$  дорівнює:

$$\Delta = 2/a,$$

Розглянута функція може бути зсунутою вздовж осі абсцис. Тоді її може представити як:

$$\text{sinc}(x \pm x_0) = \frac{\sin[\pi(x \pm x_0)]}{\pi(x \pm x_0)}, \quad (1.14)$$

де  $x_0$  – параметр зсуву. Цікаво, що при доданому  $x_0$ , функція зсувається ліворуч, а при від'ємному – праворуч (див. рис. 1.13).

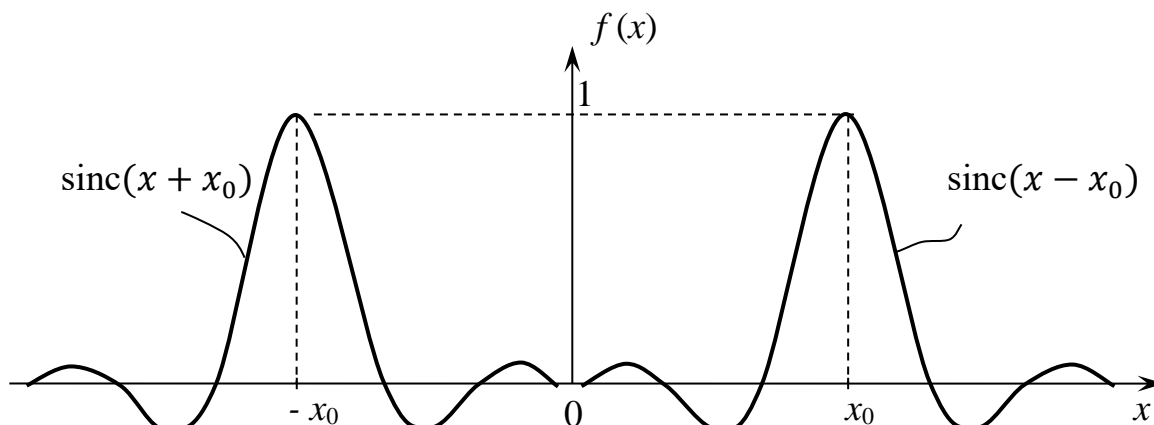
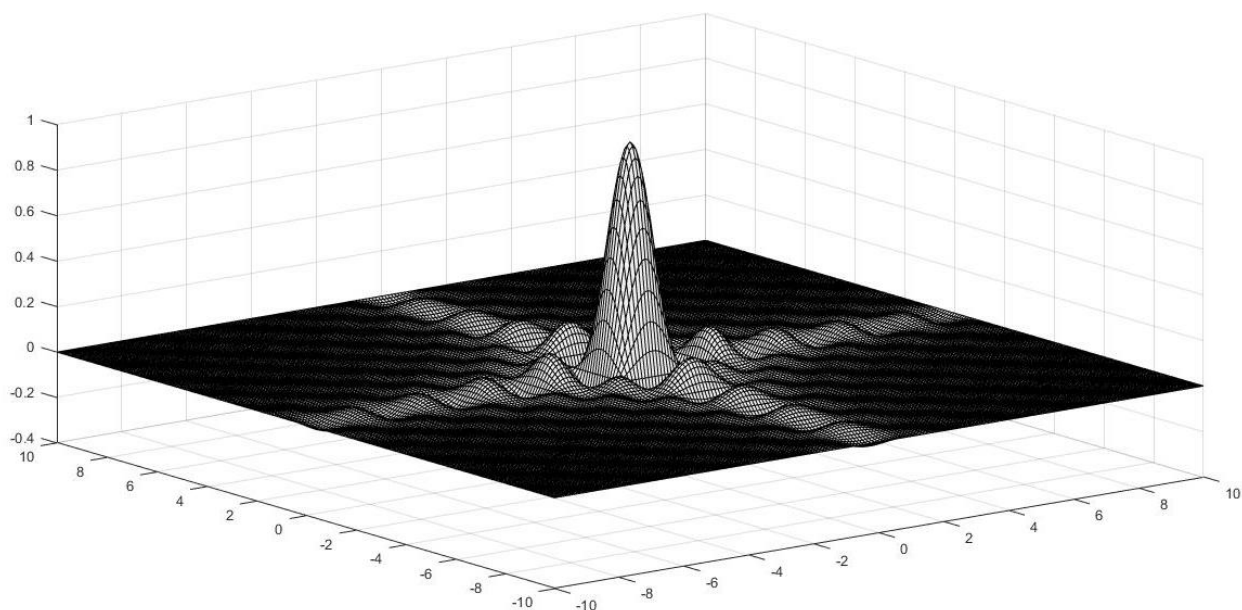


Рис. 1.13 – Зсунуті функції відліків

Двовірна sinc-функція є *сепарабельною*, тобто функцією з роздільними змінними:

$$\text{sinc}(x, y) = \text{sinc}(x) \cdot \text{sinc}(y). \quad (1.15)$$

Рис. 1.14 – Двовимірна функція  $\text{sinc}(x, y)$ 

В оптиці  $\text{sinc}$ -функцію використовують для опису дифракції Фраунгофера на прямокутному отворі (рис. 1.15).

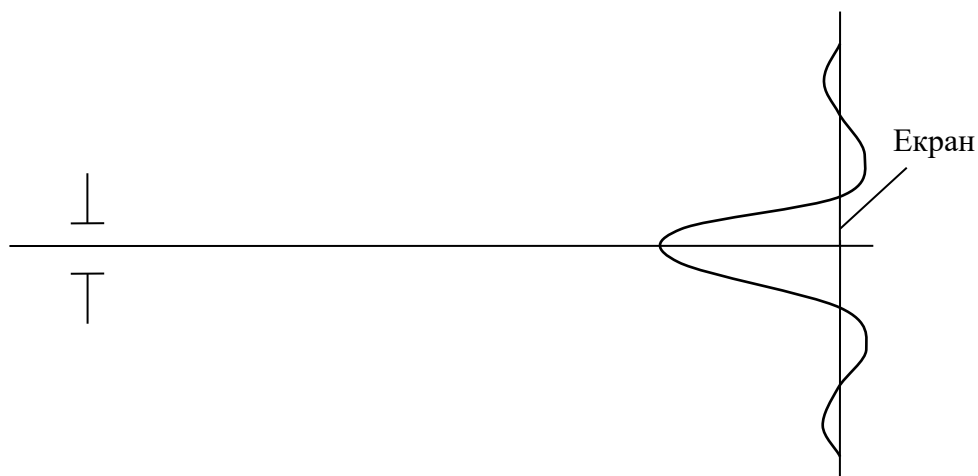


Рис. 1.15 – Розподіл комплексної амплітуди світлової хвилі в картині дифракції Фраунгофера на прямокутному отворі

Як правило, часто інтерес представляє не комплексна амплітуда в картині дифракції, а відповідний їй розподіл інтенсивності.

Для опису розподілу інтенсивності в картині дифракції Фраунгофера на прямокутному отворі використовується **функція Фейєра** (Lipót Fejér) (див. рис. 1.16):

$$\text{sinc}^2(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2 x^2}, \quad (1.16)$$

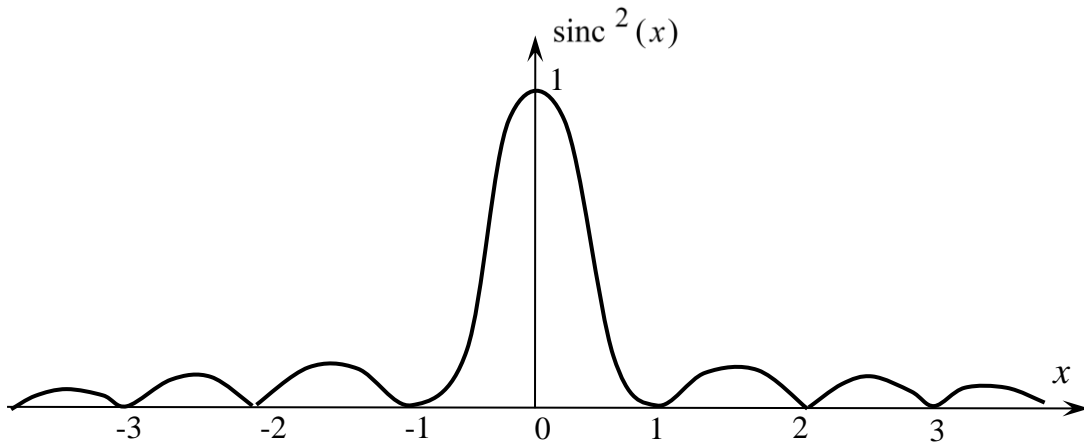


Рис. 1.16 – Функція Фейера, що описує розподіл інтенсивності світла в картині дифракції Фраунгофера на прямокутному отворі

### 1.2.3. Функції Бесселя та функція Ейрі

**Функції Бесселя I-роду** задаються інтегралом:

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i(n\Theta - x \cos \Theta)] d\Theta, \quad (1.17)$$

де  $n$  – порядок функції;  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ;

$\Theta$  – змінна Бесселя.

В оптиці найбільш часто використовують функцію Бесселя I-роду 0-го та 1-го порядків (рис. 1.17).

**Функція Бесселя I-роду 0-го порядку** задається рівнянням:

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-ix \cos \Theta) d\Theta, \quad (1.18)$$

Функції Бесселя вищих порядків можна знайти, використовуючи рекурентну формулу через функції Бесселя менших порядків.

Зокрема, **функція Бесселя I-роду 1-го порядку** може бути розрахована як:

$$I_1(x) = \frac{1}{x} \int_0^x x' \cdot I_0(x') dx', \quad (1.19)$$

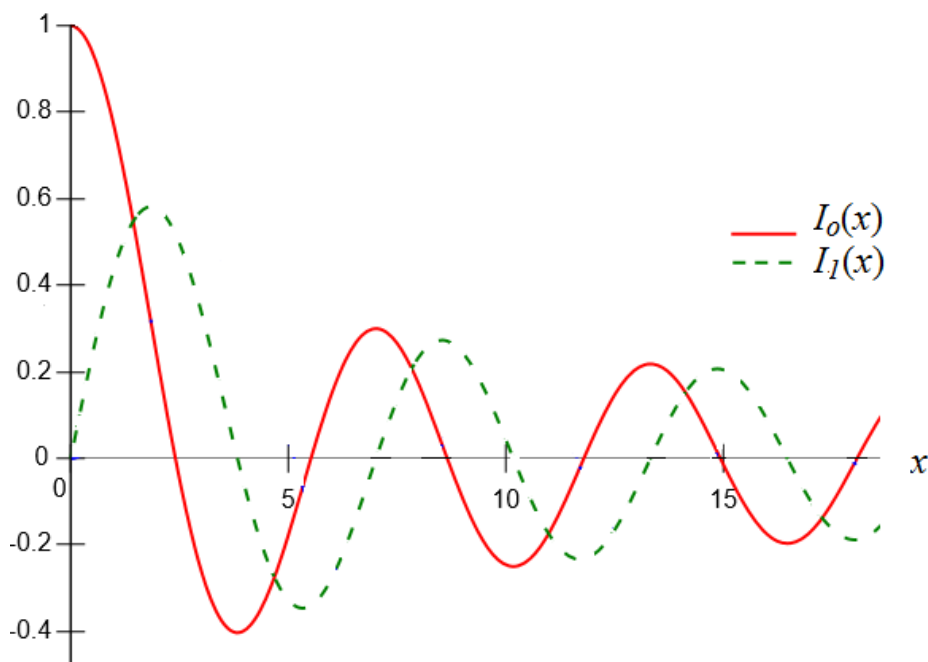


Рис. 1.17 – Функції Бесселя I-роду 0-го та 1-го порядків

Функції  $I_0(x)$  і  $I_1(x)$  застосовують для опису дифракції на круглому отворі. Зокрема, особливу роль в оптиці відіграє **функція Ейрі** (рис.1.18):

$$I_E(\rho) = 4 \frac{I_1^2(\pi\rho)}{(\pi\rho)^2}, \quad (1.20)$$

де  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  – радіус-вектор в полярній системі координат.

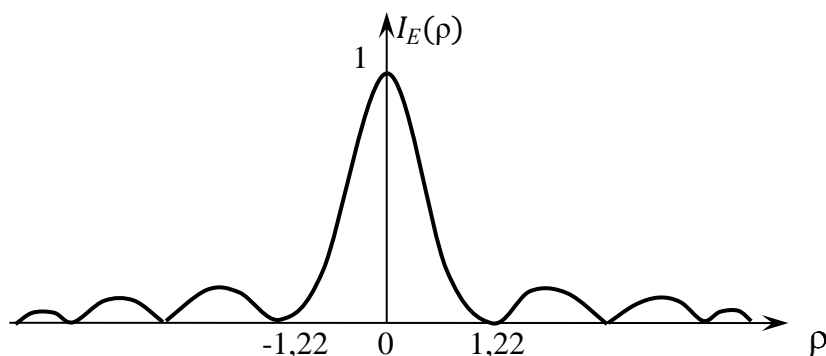


Рис. 1.18 – Функція Ейрі

Основними відмінностями функції Ейрі від функції Фейера є таке:

- бокові пелюстки зменшуються по амплітуді значно швидше;
- ширина пелюстків зменшується зі зростанням  $\rho$ ;
- півширина центральної пелюстки дорівнює 1,22.

Розглянута функція Ейрі описує розподіл інтенсивності в картині дифракції Фраунгофера на круглому отворі (рис. 1.19).

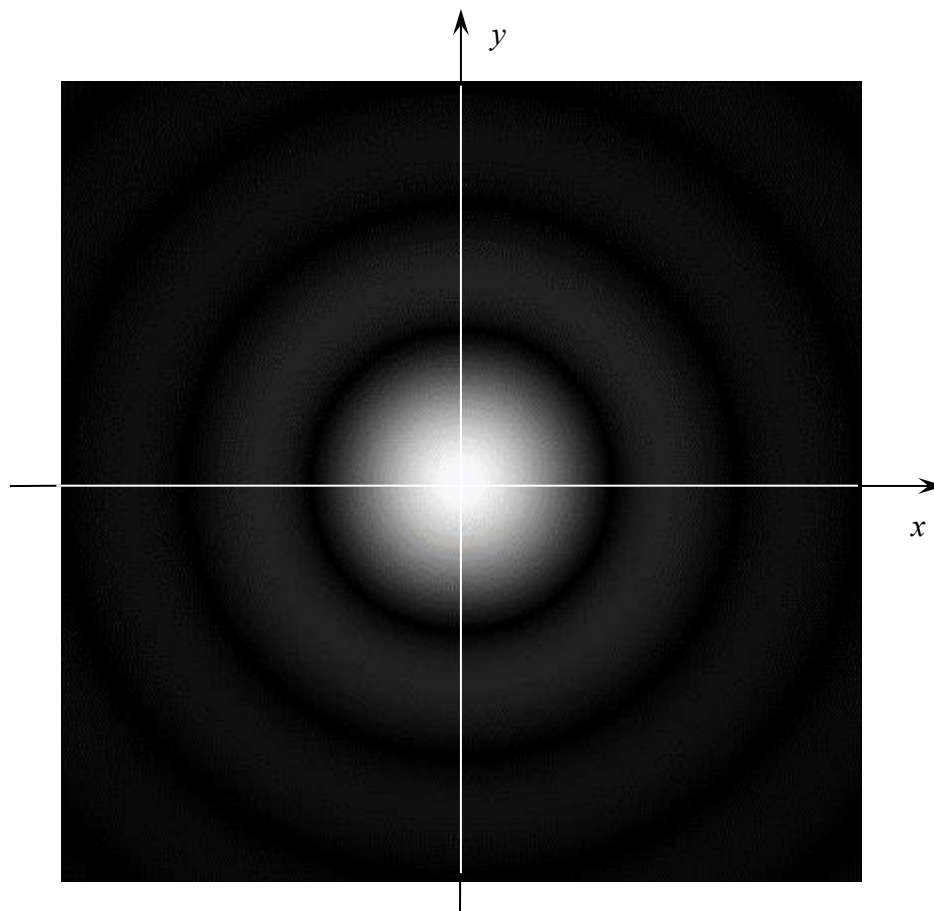


Рис. 1.19 – Картина Ейрі, яка описує розподіл інтенсивності світла при дифракції Фраунгофера на круглому отворі

Півширина центральної пелюстки функції Ейрі (1.22) визначає числовий параметр в **критерії розділення Релея**:

$$\delta = 1,22 \frac{\lambda}{A},$$

де  $A$  – числова апертура.

Функція Ейрі також описує зображення точкового джерела, створюване ідеальною безабераційною (дифракційно-обмеженою) ОС.

При наявності аберацій зображення точкового джерела відрізняється від картини Ейрі: центральна пелюстка розширюється, а бічні пелюстки розпливаються.

Для опису зображення, утвореного ОС з абераціями від точкового джерела, зручно використовувати **функцію Гауса** (англ. the Gaussian function):

$$\text{Gauss}(\rho, a) = \exp\left(-\frac{\rho^2}{a^2}\right), \text{ де } a > 0. \quad (1.21)$$

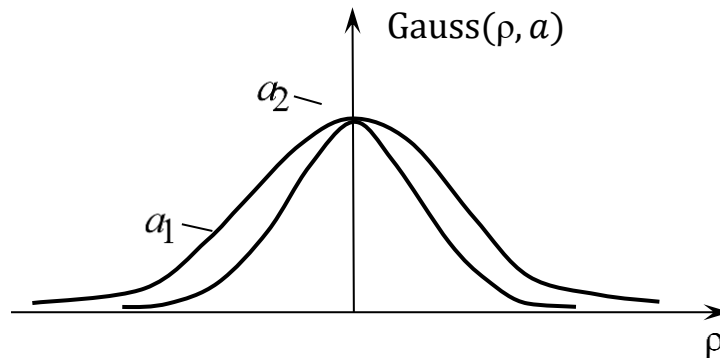


Рис. 1.20 – Функція Гауса

Числовий параметр  $a$  функції Гауса контролює, наскільки ця функція є розтягнутою або стиснутою по осі абсцис.

#### 1.2.4. Прямокутна, трикутна та кругова функції

Для опису різних прямокутних імпульсів зручно використовувати **прямокутну функцію** (англ. the rectangular pulse):

$$\text{rect}\left(\frac{x}{X}\right) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |x| \leq \frac{X}{2}, \\ 0, & \text{якщо } |x| > \frac{X}{2}. \end{cases} \quad (1.22)$$

де  $X$  – параметр;  $x$  – аргумент.

Графік такої функції представлено на рис. 1.21. Як добре видно з цього рисунку, параметр  $X$  характеризує ширину або тривалість імпульсу.

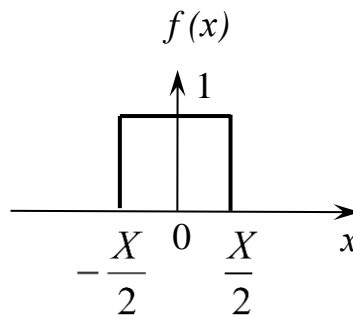


Рис. 1.21 – Прямокутна функція

Зміна масштабу rect-функції (рис. 1.22) задається числовим параметром  $a$ :

$$\text{rect}\left(\frac{ax}{X}\right) = \text{rect}\left(\frac{x}{X/a}\right).$$

Якщо  $a < 1$ , то прямокутник по осі абсцис розширюється і, навпаки, при  $a > 1$  – стискається.



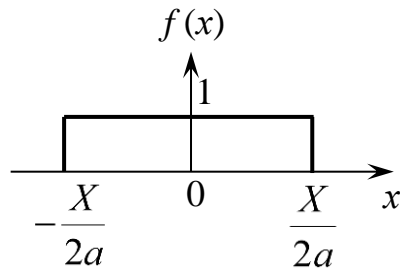


Рис. 1.22 – Прямокутна функція зі змінним масштабом

Під час опису різних прямокутних імпульсів доцільно користатися зсунутою  $\text{rect}$ -функцією:  $\text{rect}\left(\frac{x \pm x_0}{X}\right)$ . Безпосередньо сам зсув задається параметром  $x_0$  (рис. 1.23).

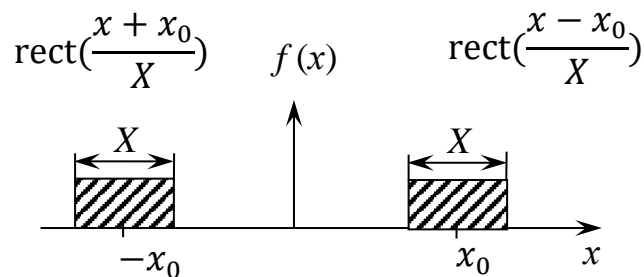


Рис. 1.23 – Зсунуті прямокутні функції

Цікаво, що двовірна прямокутна функція (див. рис. 1.24) є функцією із розділеними змінними, тобто сепарабельною функцією:

$$\text{rect}\left(\frac{x}{X}, \frac{y}{Y}\right) = \text{rect}\left(\frac{x}{X}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{Y}\right).$$

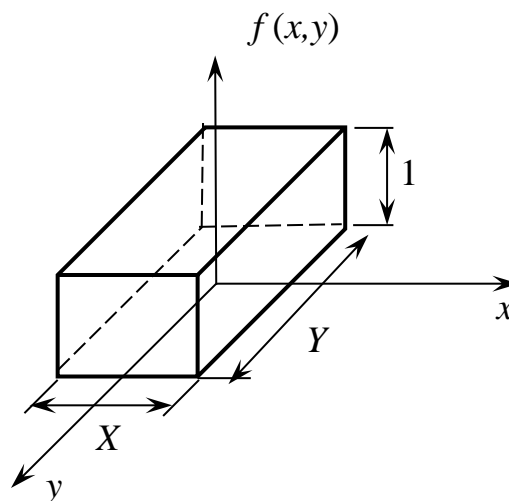


Рис. 1.24 – Двовимірна прямокутна функція

Стосовно електричних ланцюгів гест-функція описує прямокутні імпульси струму або напруги. В оптиці прямокутна функція зручно описує діафрагми прямокутної форми (див. рис. 1.25).

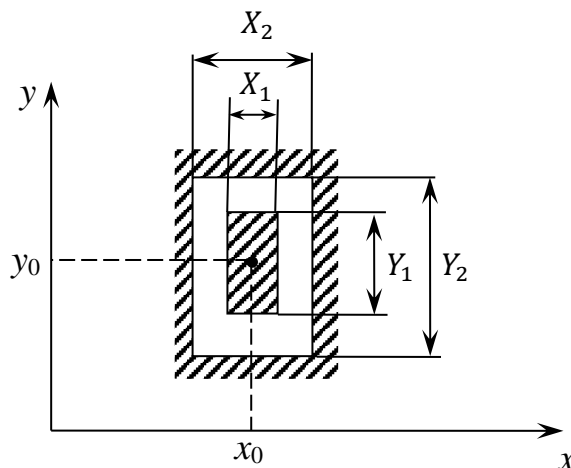


Рис. 1.25 – Приклад діафрагми прямокутної форми

Дійсно, використовуючи гест-функцію, можна записати вираз для амплітудного коефіцієнта пропускання такої діафрагми як:

$$\tau = \text{rect}\left(\frac{x-x_0}{X_2}\right) \text{rect}\left(\frac{y-y_0}{Y_2}\right) - \text{rect}\left(\frac{x-x_0}{X_1}\right) \text{rect}\left(\frac{y-y_0}{Y_1}\right). \quad (1.23)$$

Функцію гест також застосовують під час опису модуляційної передавальної функції ОС з прямокутною вихідною зіницею при когерентному освітленні.

При некогерентному освітленні для опису модуляційної передавальної функції ОС з прямокутною вихідною зіницею використовується **трикутна функція** (англ. the triangle function) (рис. 1.26):

$$\Lambda\left(\frac{x}{X}\right) = \begin{cases} 1 - 2\frac{|x|}{X}, & |x| \leq \frac{X}{2}, \\ 0, & \text{в інших областях.} \end{cases} \quad (1.24)$$

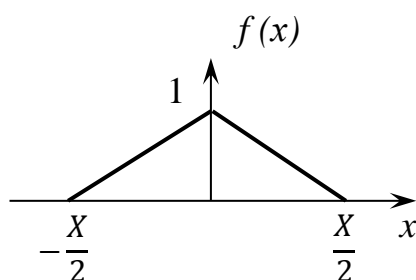


Рис. 1.26 – Трикутна функція

Двовимірна трикутна функція є сепарабельною (рис. 1.27):

$$\Lambda\left(\frac{x}{X}, \frac{y}{Y}\right) = \Lambda\left(\frac{x}{X}\right) \Lambda\left(\frac{y}{Y}\right).$$

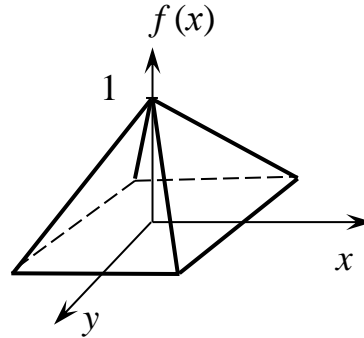


Рис. 1.27 – Двовимірна трикутна функція

Для опису круглих діафрагм часто використовується **кругова функція** (рис. 1.28):

$$\text{circ}\left(\frac{r}{R}\right) = \begin{cases} 1, & r \leq R, \\ 0, & r > R \end{cases}. \quad (1.25)$$

де  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

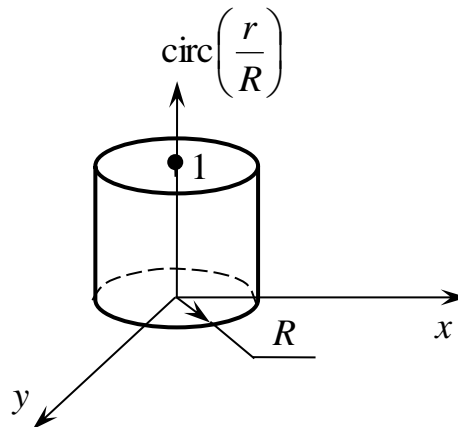
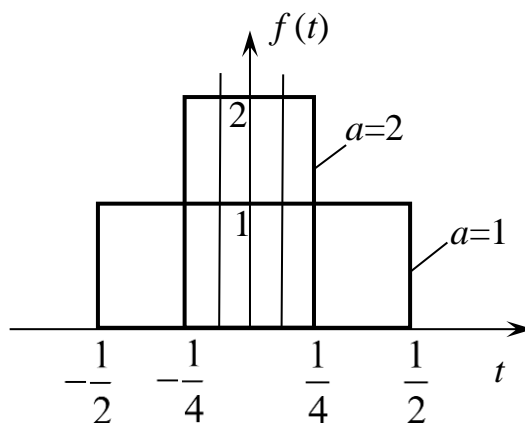


Рис. 1.28 – Кругова функція

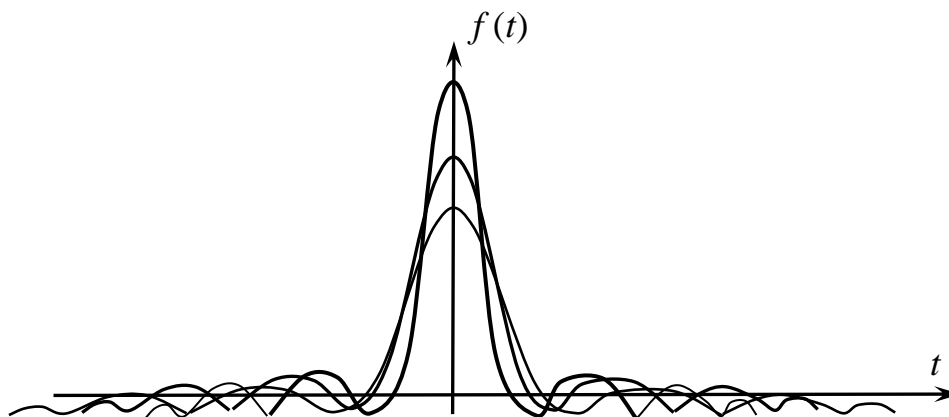
### 1.2.5. Функція Дірака та гребінка Дірака

**$\delta$ -функцію** або **функцію Дірака** (англ. the Dirac delta function) можна визначити як один з таких трьох лімітів:

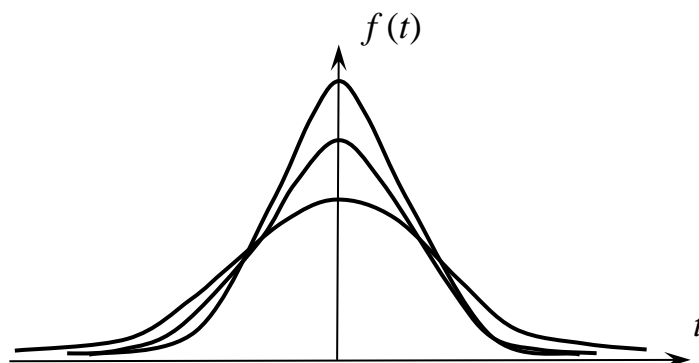
$$1) \delta(t) = \lim_{a \rightarrow \infty} a \cdot \text{rect}(at), \quad (1.26)$$

Рис. 1.29 – До визначення  $\delta$ -функції через ліміт з прямокутною функцією

$$2) \delta(t) = \lim_{a \rightarrow \infty} a \cdot \text{sinc}(at), \quad (1.27)$$

Рис. 1.30 – До визначення  $\delta$ -функції через ліміт з sinc-функцією

$$3) \delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{t^2}{a^2}\right), \quad (1.28)$$

Рис. 1.31 – До визначення  $\delta$ -функції через ліміт з експоненційною функцією

Математично  $\delta$ -функція визначається за допомогою двох умов :

- Умова 1:  $\delta(t - t_0)$  рівна 0 всюди, крім так званої *особливої* точки  $t_0$ , де вона рівна  $\infty$ .
- Умова 2: Інтеграл від  $\delta$ -функції, поширеної на як завгодно малу околицю  $\varepsilon$  особливої точки, дорівнює 1, тобто

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

Розглянемо детальніше основні властивості  $\delta$ -функції:

Властивість 1. **Симетрія:**

$$\boxed{\delta(t - t_0) = \delta(t_0 - t)}; \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \delta(t - t_0) dt = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \delta(t - t_0) dt = \frac{1}{2}. \quad (1.29)$$

Властивість 2. **Фільтрувальна властивість:**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)}. \quad (1.30)$$

Доведення:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt \\ & \quad = \text{за визначенням } \delta\text{-функції - умова(1)} = \\ & = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t - t_0) dt = f(t_0). \end{aligned}$$

Використовуючи фільтрувальну властивість, легко отримати й інші вирази:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t_0 - t) dt = f(t_0); \\ & \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t + t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - (-t_0)) dt = f(-t_0); \\ & \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) \delta(t) dt = \left| \begin{array}{l} t - t_0 = z \\ t = z + t_0 \\ dt = dz \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \delta(z + t_0) dz = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \delta(z - (-t_0)) dz = f(-t_0); \\ & \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0). \end{aligned}$$

Фільтрувальна властивість часто використовується на практиці для спрощення виразів. Як тільки в виразах зустрічається інтеграл з нескінченними межами, під яким в будь-якій комбінації фігурує  $\delta$ -функція, можна одразу застосувати фільтрувальну властивість.

Властивість 3. **Масштабування:**

$$\boxed{\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)}. \quad (1.31)$$

Доведення:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at)dt &= \left| \begin{array}{l} at = t' \\ dt = \frac{1}{a} dt' \end{array} \right| \\ &= \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t'}{a}\right)\delta(t')dt', a > 0 \\ \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} f\left(\frac{t'}{a}\right)\delta(t')dt', a < 0 \end{cases} = \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t'}{a}\right)\delta(t')dt' = \frac{1}{|a|} f(0). \end{aligned}$$

З іншого боку, використовуючи фільтрувальну властивість, можна записати:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{|a|} \delta(t) dt = \frac{1}{|a|} f(0).$$

Праві частини розглянутих двох рівнянь рівні. Тому й підінтегральні функції, що входять в інтеграл в лівих частинах цих рівнянь, будуть рівними одна до одної, тобто:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t).$$

Властивість 4. *Інтегральне представлення  $\delta$ -функції:*

$$\boxed{\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi vt) dv}. \quad (1.32)$$

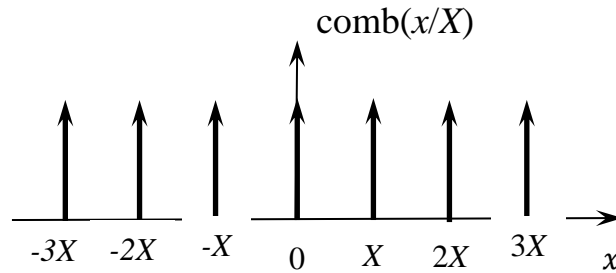
Доведення:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi vt) dv &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \exp(i2\pi vt) dv = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{i2\pi t} \exp(i2\pi vt) \Big|_{-a}^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi t} \sin 2\pi at = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} 2a \frac{\sin(2\pi at)}{2\pi at} = \lim_{a \rightarrow \infty} a' \cdot \text{sinc}(a't) = \delta(t). \end{aligned}$$

Під час аналізу та цифрової обробки сигналів значний інтерес представляє періодична  $\delta$ -функція або така звана *гребінка Дірака* (англ. the comb function) (рис. 1.32):

$$\boxed{\text{comb}\left(\frac{x}{X}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x + nX)}, \quad (1.33)$$

де  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Рис. 1.32 – Гребінка Дірака як сукупність зсунутих  $\delta$ -функцій

Цікава властивість гребінки Дірака, зумовлена розглянутою вище фільтрувальною властивістю  $\delta$ -функції, така:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \text{comb} \left( \frac{x}{X} \right) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nX).$$

### 1.2.6. Функція Гевісайда та знакова функція

**Функція Гевісайда** або **одиничний рівень** (англ. the unit step function) – це розривна функція дійсної змінної зі значенням рівним 0 для від'ємних значень аргументу та рівним 1 для додатних значень аргументу. Вона може бути представлена таким виразом (рис. 1.33):

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq 0, \\ 0, & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (1.34)$$

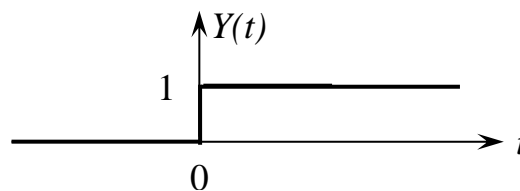


Рис. 1.33 – Функція Гевісайда

Взагалі ця функція поширена в теорії керування та обробці сигналів. В електроніці функція Гевісайда дозволяє описати, наприклад, моменти увімкнення (зникнення) напруги або струму. В оптиці ця функція застосовується переважно для опису діафрагм, що перекривають півплощину (така званий ніж Фуко).

Функція Гевісайда є первісною дельта-функції Дірака. Тому її похідна дорівнюватиме:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \delta(t), \quad (1.35)$$

тобто швидкість зміни  $Y(t)$  і є  $\delta(t)$ .

Справедливе й зворотне співвідношення:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t') dt'. \quad (1.36)$$

**Знакова функція** та **сигнум-функція** (англ. the signum function) (рис. 1.34):

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & \text{при } t < 0, \\ 1, & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (1.37)$$

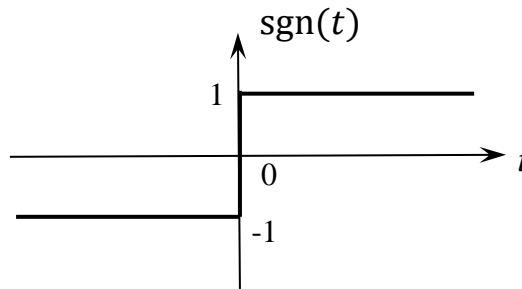


Рис. 1.34 – Знакова функція

$$\text{sgn}(t) = Y(t) - 1 + Y(t) = 2 \cdot Y(t) - 1. \quad (1.38)$$

$$\frac{d \text{sgn}(t)}{dt} = 2\delta(t). \quad (1.39)$$

Важливим застосуванням  $\text{sgn}(t)$  є можливість математичного представлення модулю будь-якого дійсного аргументу:

$$|t| = t \cdot \text{sgn}(t).$$



## ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

У цьому розділі:



- 2.1. Ряд Фур'є в тригонометричній формі.
  - 2.1.1. Ряд Фур'є в тригонометричній формі.
  - 2.1.2. Ряд Фур'є в комплексній формі.
- 2.2. Дискретний спектр.
- 2.3. Інтеграл Фур'є.
- 2.4. Властивість перетворення Фур'є.
- 2.5. Неперервний спектр.
- 2.6. Симетрія функцій та фур'є-образів.
- 2.7. Перетворення Фур'є сигналів з кінцевою потужністю.
- 2.8. Двовимірне перетворення Фур'є.
  - 2.8.1. Перетворення Фур'є на площині.
  - 2.8.2. Перетворення Фур'є в оптиці.

### 2.1. Ряд Фур'є

#### 2.1.1. Ряд Фур'є в тригонометричній формі

Нехай періодична функція  $f(t) = f(t + nT_0)$ , де  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , з періодом  $T_0$  задовольняє *умовам Діріхле* (англ. the Dirichlet conditions):

1)  $f(t)$  є однозначною функцією зі скінченим числом екстремальних точок на інтервалі  $T_0$ ;

2)  $f(t)$  є такою, що абсолютно інтегрується на інтервалі  $T_0$ , тобто

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |f(t)| dt < \infty.$$

Тоді таку функцію можна представити, розклавши її за ортогональною системою базисних функцій (англ. an orthogonal expansion).

Найпоширенішим випадком такої системи функцій є набір гармонічних функцій косинуса і синуса з різними частотами.

Отже,

$$f(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \left( 2\pi \frac{n}{T_0} t \right) + b_n \sin \left( 2\pi \frac{n}{T_0} t \right) \right], \quad (2.1)$$

де  $a_0$ ,  $a_n$  і  $b_n$  – коефіцієнти розкладання;  $1/T_0$  – *основна частота* або *основна гармоніка* (англ. the fundamental frequency);  $n/T_0$  –  $n$ -а гармоніка.

Для того, щоб знайти коефіцієнт  $a_0$ , проінтегруємо ліву та праву частини (2.1) на інтервалі  $T_0$ .

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt. \quad (2.2)$$

Очевидно, що  $a_0$  є середнім значенням функції  $f(t)$  або постійною складовою сигналу  $f(t)$ .

Щоб знайти коефіцієнт  $a_n$ , помножимо ліву та праву частини (2.1) на  $\cos \left( 2\pi \frac{n}{T_0} t \right)$  та проінтегруємо на інтервалі  $T_0$  (при цьому слід врахувати, що інтеграл від добутку гармонійних функцій з кратними значеннями частот дорівнює нулю). Отримуємо:

$$a_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos \left( 2\pi \frac{n}{T_0} t \right) dt. \quad (2.3)$$

Аналогічно, помноживши ліву та праву частини (2.1) на  $\sin \left( 2\pi \frac{n}{T_0} t \right)$  та інтегруючи на інтервалі  $T_0$ , отримаємо:

$$b_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \sin \left( 2\pi \frac{n}{T_0} t \right) dt. \quad (2.4)$$

Отже, вирази (2.1)...(2.4) задають *ряд Фур'є в тригонометричній формі*.

Ряд Фур'є (2.1) можна записати в іншій формі:

$$f(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos \left( 2\pi \frac{n}{T_0} t - \varphi_n \right). \quad (2.5)$$

Між коефіцієнтами ряду (2.5) та (2.1) існує такий зв'язок:

$$\begin{aligned} a_n &= d_n \cos \varphi_n, & b_n &= d_n \sin \varphi_n \\ d_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, & \varphi_n &= \arctg \left( \frac{b_n}{a_n} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

З математичної точки зору, ряд Фур'є дає ще один спосіб представлення періодичного сигналу: замість задання такого сигналу функцією  $f(t)$  його можна представити коефіцієнтами розкладання в ряд Фур'є.

З фізичної точки зору, ряд Фур'є показує, що будь-який періодичний сигнал незалежно від складності може бути представлений через нескінченну суму більш простих гармонічних коливань.

### 2.1.2. Ряд Фур'є в комплексній формі

Використовуючи добре відомі в математиці *формули Ейлера*:

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}}, \quad \boxed{\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}}, \quad \boxed{e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha}, \quad (2.7)$$

перейдемо до комплексного представлення ряду Фур'є:

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{T_0} t\right) + a_n \exp\left(-i2\pi \frac{n}{T_0} t\right) - \right. \\ &\quad \left. - ib_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{T_0} t\right) + ib_n \exp\left(-i2\pi \frac{n}{T_0} t\right) \right] = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (a_n - ib_n) \exp\left(i2\pi \frac{n}{T_0} t\right) + (a_n + ib_n) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{T_0} t\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Введемо позначення:

$$C_n = \begin{cases} a_n - ib_n, & n > 0, \\ a_0, & n = 0, \\ a_n + ib_n, & n < 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Використовуючи позначення (2.9), ряд (2.8) можна записати в більш компактній формі:

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot \exp\left(i2\pi \frac{n}{T_0} t\right)}. \quad (2.10)$$

Встановимо зв'язок коефіцієнтів  $C_n$  з функцією  $f(t)$ . За визначенням:

$$C_n = a_n - ib_n, \quad n > 0. \quad (2.11)$$

Підставимо в вираз (2.11) значення  $a_n$  і  $b_n$  з формул (2.3) і (2.4):

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \left[ \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) - i \sin\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) \right] dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{використовуємо третю формулу} \\ \text{Ейлера з виразів (2.7)} \end{array} \right| = \\ &\quad \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt. \end{aligned}$$

Отже,

$$\boxed{C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt}. \quad (2.12)$$

Вирази (2.10) і (2.12) визначають *ряд Фур'є в комплексній формі*.

Важливо звернути увагу на те, що в ряді (2.10) індекс  $n = -\infty \dots \infty$ . Це означає, що ряд містить гармоніки з від'ємними частотами. Для електричних

сигналів від'ємна частота не має значення. Тому при представленні таких сигналів комплексним рядом Фур'є на завершальному етапі перетворень часто відкидають гармонічні складові з від'ємними частотами. Як буде показано далі, для оптичних сигналів від'ємні частоти мають фізичний сенс.

Встановимо зв'язок між рядами Фур'є в комплексній та тригонометричній формах. Для цього знайдемо квадрат модуля  $C_n$ :

$$|C_n|^2 = C_n C_n^* = (a_n - ib_n)(a_n + ib_n) = a_n^2 + b_n^2 = d_n^2,$$

тобто

$$\boxed{|C_n|^2 = d_n^2}. \quad (2.13)$$

Комплексна форма ряду Фур'є є особливо зручною для представлення двовимірних періодичних сигналів.

Дійсно, для двовимірного періодичного сигналу, який можна записати як

$$f(x, y) = f(x + nX_0; y + mY_0), \text{ де } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

маємо:

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{n,m} \cdot \exp \left[ i2\pi \left( \frac{n}{X_0} x + \frac{m}{Y_0} y \right) \right], \quad (2.14)$$

де

$$C_{n,m} = \frac{1}{X_0 Y_0} \int_{-X_0/2}^{X_0/2} \int_{-Y_0/2}^{Y_0/2} f(x, y) \cdot \exp \left[ -i2\pi \left( \frac{n}{X_0} x + \frac{m}{Y_0} y \right) \right] dx dy. \quad (2.15)$$

## 2.2. Дискретний спектр

Комплексний коефіцієнт  $C_n$  можна записати в показовій формі:

$$C_n = |C_n| \exp[i \arg C_n], \quad (2.16)$$

де

$$|C_n| = +\sqrt{C_n C_n^*}, \quad (2.17)$$

$$\arg C_n = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} C_n}{\operatorname{Re} C_n}, \quad (2.18)$$

Множина  $\{|C_n|\}_n$  називається **амплітудним дискретним спектром** сигналу, а множина  $\{\arg C_n\}_n$  – **фазовим дискретним спектром** сигналу.

Для дійсного сигналу  $f(t)$ :

$$\boxed{C_n^* = C_{-n}}, \quad (2.19)$$

Доведення:

$$\begin{aligned}
 C_n^* &= \left( \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt \right)^* = \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left( f(t) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{T_0} t\right) \right)^* dt = |f(t) - \text{дійсн.}| = \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \exp\left(i2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \exp\left(-i2\pi \frac{(-n)}{T_0} t\right) dt = C_{-n}.
 \end{aligned}$$

З (2.19) випливає, що для дійсного сигналу амплітудний дискретний спектр – парна функція, тобто

$$|C_n| = |C_{-n}|, \quad (2.20)$$

а фазовий дискретний спектр – непарна симетрична функція, тобто

$$\arg C_n = -\arg C_{-n}, \quad (2.21)$$

Таким чином, будь-який періодичний сигнал може бути наочно представлений у вигляді дискретних амплітудного і фазового спектрів (див. рис. 2.1). Для відновлення дійсного сигналу достатньо знати лише половини його амплітудного та фазового спектрів.

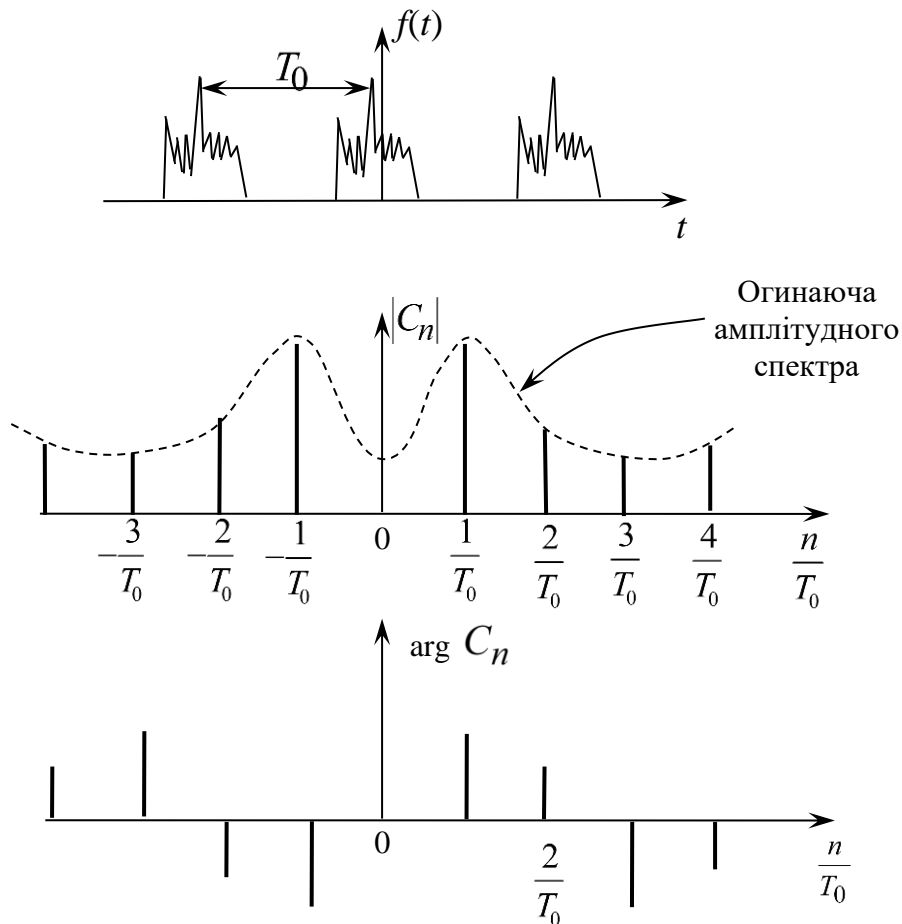


Рис. 2.1 – Довільний періодичний імпульс та його амплітудний та фазовий спектри (показано умовно)

Знайдемо потужність періодичного сигналу  $f(t)$ :

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |f(t)|^2 dt. \quad (2.22)$$

Враховуючи, що  $|f(t)|^2 = f(t)f^*(t)$ , можна записати:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)f^*(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f^*(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f^*(t) \cdot \exp\left(i2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n C_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \end{aligned}$$

Отже,

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2, \quad (2.23)$$

де  $\{|C_n|^2\}_n$  – дискретний спектр потужності.

Вираз (2.23) називають **теоремою Парсеваля**. Ця теорема показує, що при переході від часового подання сигналу ( $\arg = t$ ) до частотного ( $\arg = \frac{n}{T_0}$ ) потужність сигналу не змінюється.

### 2.3. Інтеграл Фур'є

Частотне подання сигналів можна узагальнити також і для неперіодичних функцій. Нехай  $f(t)$  – неперіодичний сигнал. Проте його можна розглядати як періодичну функцію з нескінченими періодом:

$$f(t) = f(t + T_0), \text{ якщо } T_0 \rightarrow \infty.$$

Тоді цей сигнал можна представити рядом Фур'є:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{T_0} t\right), \quad (2.24)$$

де

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t') \exp\left(-i2\pi \frac{n}{T_0} t'\right) dt'. \quad (2.25)$$

Підставимо вираз (2.25) в (2.24):

$$f(t) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t') \exp\left(-i2\pi \frac{n}{T_0} t'\right) dt' \cdot \exp\left(i2\pi \frac{n}{T_0} t\right). \quad (2.26)$$

Введемо позначення:

$$\frac{1}{T_0} = \Delta v; \quad \frac{n}{T_0} = n\Delta v = v_n - n\text{-а гармоніка.} \quad (2.27)$$

Використаємо позначення (2.27) в виразі (2.26) та спрямуємо  $T_0 \rightarrow \infty$ :

$$f(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t') \exp(-i2\pi v_n t') dt' \cdot \exp(i2\pi v_n t) \Delta v. \quad (2.28)$$

Очевидно, при  $T_0 \rightarrow \infty$ ,  $\Delta v$  переходить в  $dv$ ,  $v_n$  – в поточну частоту  $v$ , а сума – в інтеграл. Тоді

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(+i2\pi vt) \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp(-i2\pi vt') dt' dv. \quad (2.29)$$

Вираз (2.29) носить назву **подвійного інтегралу Фур'є**.

Введемо позначення:

$$\boxed{F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp(-i2\pi vt') dt'}. \quad (2.30)$$

Тоді

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(+i2\pi\nu t) d\nu}. \quad (2.31)$$

Формули (2.30) і (2.31) носять назву *пари перетворень Фур'є*. При цьому вираз (2.30) задає *пряме перетворення Фур'є* (англ. the direct Fourier transform), а формула (2.31) – *зворотне перетворення Фур'є* (англ. the inverse Fourier transform).

Функція  $F(\nu)$  називається *фур'є-образом*  $f(t)$ , а функція  $f(t)$  – *фур'є-прообразом* функції  $F(\nu)$ .

Як добре видно, пряме і зворотне перетворення Фур'є відрізняються знаком аргументу експоненційного множника. Згідно з нотацією, прийнятою в більшості літератури, в прямому перетворенні застосовується знак «-», а в зворотному – «+».

Множник  $\exp(+i2\pi\nu t)$  називається *ядром перетворення Фур'є*. Змінна  $\nu$  називається *фур'є-змінною*. Фізично вона представляє собою частоту та має одиниці вимірювання:  $[\text{с}^{-1}] = [\text{Гц}]$ .

Для скороченого запису формул (2.30) і (2.31) часто використовуються такі позначення:

$$\left[ \begin{array}{l} F(\nu) = \mathcal{F}\{f(t)\} \\ f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\nu)\} \end{array} \right] \text{ або } \left[ \begin{array}{l} f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu) \\ F(\nu) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f(t) \end{array} \right] \text{ або } f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}} F(\nu).$$

Для того, щоб існувало перетворення Фур'є, функція  $f(t)$  повинна бути абсолютно інтегрованою, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty. \quad (2.32)$$

Умова (2.32) є достатньою. Менш обмежувальною умовою існування перетворення Фур'є є такий вираз:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (2.33)$$

Умова (2.33) фізично означає, що для того, щоб існувало перетворення Фур'є, сигнал  $f(t)$  повинен мати кінцеву енергією.

## 2.4. Властивості перетворення Фур'є

Властивість 1. *Лінійність (суперпозиція):*

Якщо  $f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\nu)$ ,  $f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\nu)$ , де  $a_1, a_2$  – дійсні числа, то

$$\mathcal{F}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 \mathcal{F}\{f_1(t)\} + a_2 \mathcal{F}\{f_2(t)\}. \quad (2.34)$$

Властивість 2. *Масштабування:*

Якщо  $f(t) \rightarrow F(\nu)$ , то



$$\boxed{f(at) \rightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)}. \quad (2.35)$$

Доведення:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(at)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at) \exp(-i2\pi\nu t) dt = \\ &= \text{див. (2.30)} = \left| \begin{array}{l} at = t' \\ t = t'/a \\ dt = \frac{1}{a} dt' \end{array} \right| = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp\left(-i2\pi\frac{\nu}{a}t'\right) dt', \text{ якщо } a > 0 \\ \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} f(t') \exp\left(-i2\pi\frac{\nu}{a}t'\right) dt', \text{ якщо } a < 0 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp\left(-i2\pi\frac{\nu}{a}t'\right) dt' = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right). \end{aligned}$$

Зокрема, при  $a = -1$  отримаємо:  $f(-t) \rightarrow F(-\nu)$ .

Вираз (2.35) показує, що при стисканні функції (вздовж осі часу) її спектр буде розтягуватися (вздовж осі частот), і навпаки.

**Властивість 3. Зсув функції:**

Нехай  $f(t) \rightarrow F(\nu)$ , тоді

$$\boxed{f(t \pm t_0) \rightarrow F(\nu) \exp(\pm i2\pi\nu t_0)}. \quad (2.36)$$

Доведення:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t \pm t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t \pm t_0) \exp(-i2\pi\nu t) dt = \\ &= \text{див. (2.30)} = \left| \begin{array}{l} t \pm t_0 = t' \\ t = t' \mp t_0 \\ dt = dt' \end{array} \right| = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp(-i2\pi\nu t' \pm i2\pi\nu t_0) dt' = \\ &= \exp(\pm i2\pi\nu t_0) \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp(-i2\pi\nu t') dt', \\ &\text{де } \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp(-i2\pi\nu t') dt' = F(\nu). \end{aligned}$$

**Властивість 4. Зсув фур'є-образу:**

Нехай  $f(t) \rightarrow F(\nu)$ , тоді

$$\boxed{f(t) \cdot \exp(\pm i2\pi\nu_0 t) \rightarrow F(\nu \mp \nu_0)}. \quad (2.37)$$

Доведення:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t) \cdot \exp(\pm i2\pi\nu_0 t)\} &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(\pm i2\pi\nu_0 t) \exp(-i2\pi\nu t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i2\pi(\nu \mp \nu_0)t] dt = \text{див. (2.30)} = F(\nu \mp \nu_0). \end{aligned}$$

Властивість 5. *Дуальність часу та частоти:*

Якщо  $f(t) \leftrightarrow F(\nu)$ , то

$$\boxed{F(t) \leftrightarrow f(-\nu)} \quad (\text{час та частота є залежними}). \quad (2.38)$$

Доведення:

За визначенням  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(+i2\pi\nu t) d\nu$ .

Тоді

$$f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp[+i2\pi\nu(-t)] d\nu.$$

Заміна  $t \rightarrow \nu, \nu \rightarrow t$ :

$$f(-\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp[-i2\pi\nu t] dt.$$

Властивість 6. *Площа під кривою  $F(\nu)$ :*

Якщо  $f(t) \leftrightarrow F(\nu)$ , то

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) d\nu = f(0)}. \quad (2.39)$$

Доведення:

Ця властивість безпосередньо випливає з визначення Фур'є при підстановці  $t = 0$ .

Властивість 7. *Площа під кривою  $f(t)$ :*

Якщо  $f(t) \leftrightarrow F(\nu)$ , то

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = F(0)}. \quad (2.40)$$

Доведення:

Ця властивість безпосередньо випливає з визначення прямого перетворення Фур'є при підстановці  $\nu = 0$ .

Властивість 8. *Диференціювання:*

Якщо  $f(t) \leftrightarrow F(\nu)$ , то

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n} f(t) \leftrightarrow (i2\pi v)^n F(v)}. \quad (2.41)$$

Доведення:

$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(v) \exp(+i2\pi vt) dv$ . Тоді, використовуючи верхнє індексне позначення ( $n$ ) для  $n$ -ї похідної, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{d^n f(t)}{dt^n} &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F(v) \exp(i2\pi vt) dv \right]^{(n)} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(v) [\exp(i2\pi vt)]^{(n)} dv = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (i2\pi v)^n F(v) \exp(i2\pi vt) dv, \end{aligned}$$

де  $(i2\pi vt)^n F(v) = F2(v)$ .

$$\text{Отже, } \frac{d^n f(t)}{dt^n} \rightarrow F2(v) = (i2\pi v)^n F(v).$$

Властивість 9. **Симетрія:**

Якщо  $f(t) \leftrightarrow F(v)$ , то

$$\boxed{f^*(t) \leftrightarrow F^*(-v)}. \quad (2.42)$$

Доведення:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) \exp(-i2\pi vt) dt &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(+i2\pi vt) dt \right)^* = \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i2\pi(-v)t] dt \right)^* = (F(-v))^* = F^*(-v). \end{aligned}$$

## 2.5. Неперервний спектр

Запишемо зворотнє перетворення Фур'є:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(v) \exp(+i2\pi vt) dv. \quad (2.43)$$

Вираз (2.43) показує, що неперіодичний сигнал  $f(t)$  може бути представлений як нескінченна сума елементарних гармонічних функцій  $\exp(i2\pi vt)$  з амплітудами  $F(v)dv$ .

Комплексна функція  $F(v)$ :

$$F(v) = |F(v)| \cdot \exp[i \cdot \arg F(v)] \quad (2.44)$$

носить назву **неперервного спектра**. Відповідний синонімічний ряд такий: фур'є-образ, фур'є-спектр, неперервний спектр.

Модуль функції  $F(v)$ :  $|F(v)|$  називають **амплітудним неперервним спектром**.

Аргумент функції  $F(\nu)$ :  $\arg F(\nu)$  називають **фазовим неперервним спектром**.

З наведеної вище властивості (9) перетворення Фур'є випливає, що якщо  $f(t)$  є дійсною, тобто  $f^*(t) = f(t)$ , то

$$\boxed{F^*(\nu) = F(-\nu)}. \quad (2.45)$$

Тоді для дійсної функції можна записати:

$$\begin{aligned} |F(-\nu)| &= |F(\nu)|, \\ \arg F(-\nu) &= -\arg F(\nu). \end{aligned}$$

Останні два вирази означають, що для дійсної функції амплітудний неперервний спектр буде парною функцією, а фазовий неперервний спектр – непарною функцією (рис. 2.2):

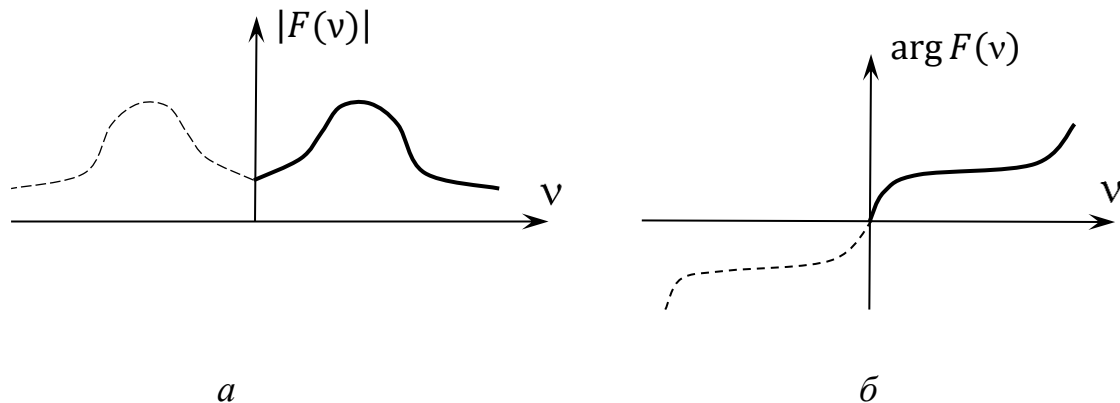


Рис. 2.2 – Неперервні спектри довільної дійсної функції (показано умовно):  
а – амплітудний; б – фазовий

Для дійсних часових сигналів від'ємні частоти в їх спектрі не несуть додаткової інформації. Для просторових сигналів від'ємні частоти мають сенс. Далі буде показано, що вони характеризують напрямок поширення гармонічної хвилі.

Амплітудний і фазовий спектри повністю описують сигнал  $f(t)$ , а їх графічне зображення наочно демонструє частотний розподіл сигналів.

На практиці часто буває достатньо знати розподіл енергії сигналу за частотами. Для цього користуються **енергетичною щільністю спектра потужності сигналу  $f(t)$**  або **енергетичним спектром сигналу**.

$$|F(\nu)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i2\pi\nu t) dt \right|^2. \quad (2.46)$$

## 2.6. Симетрія функцій та фур'є-образів

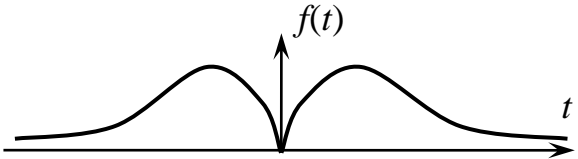
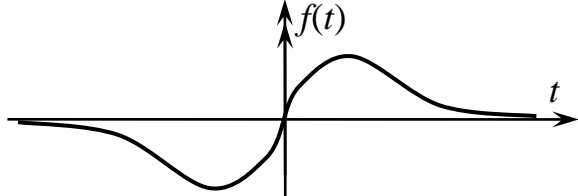
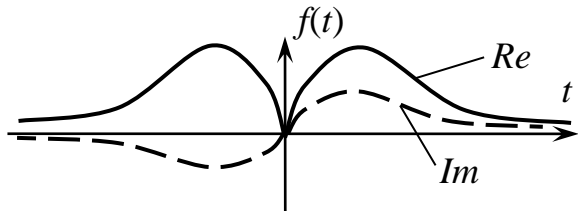
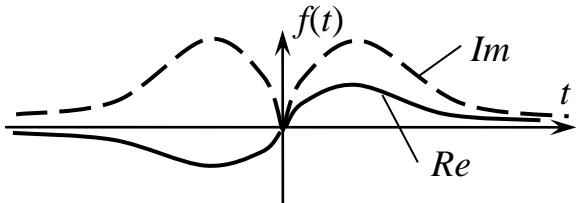
В табл. 2.1 представлені різні типи симетрії дійсних та комплексних функцій. Цікаво, що принципово будь-яку (довільну) функцію можна представити як суму двох функцій:

- однієї парної та однієї непарної;
- однієї ермітової та однієї анти-ермітової.

В табл. 2.2 наведено зв'язок між функціями та їх фур'є-образами стосовно різних типів симетрії.

Таблиця 2.1

Різні типи симетрії функцій

Симетрія функції	Вираз	Графік
Парна (Even)	$f(t) = f(-t)$	
Непарна (Odd)	$f(t) = -f(-t)$	
Ермітова (Hermitian)	$f(t) = f^*(-t)$	
Анти-ермітова (Anti-Hermitian)	$f(t) = -f^*(-t)$	

Таблиця 2.2

## Властивості симетрії різних функцій та їх спектрів

Вигляд функції $f(t)$	Вигляд фур'є-образу $F(v)$
Дійсна (без симетрії)	Ермітовий
Дійсна і парна	Дійсний і парний
Дійсна і непарна	Уявний і непарний
Уявна (без симетрії)	Анти-ермітовий
Ермітова	Дійсний (без симетрії)
Анти-ермітова	Уявний (без симетрії)

## 2.7. Перетворення фур'є-сигналів з обмеженою потужністю

Розглянемо неперервний сигнал  $f(t)$ , який має нескінченну енергію, але обмежену (кінцеву) потужність, тобто

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \infty \quad (\text{енергія}) \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt \neq \infty \quad (\text{потужність}) \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

Прикладами таких сигналів можуть слугувати синусоїда  $\sin(\omega t)$  і косинусоїда  $\cos(\omega t)$ .

Формально перетворення Фур'є таких сигналів не існує (див. умови існування перетворення Фур'є, зазначені в підрозділі 2.3). Проте, формально можна розповсюдити перетворення Фур'є і на цей клас сигналів, якщо допустити існування у їх спектрах так званих **сингулярних функцій**:  $\delta$ -функції Дірака і функції Гевісайда (одиничного стрибка).

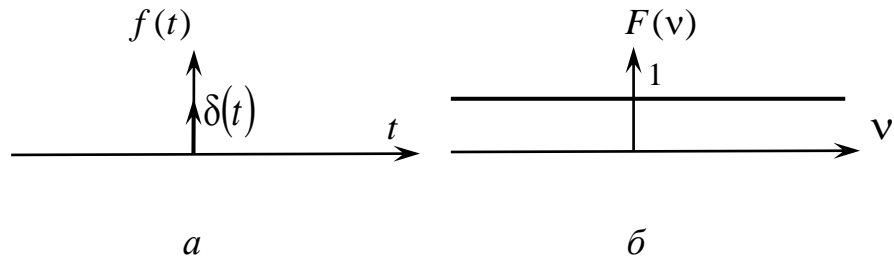
Покажемо це. Спочатку знайдемо перетворення Фур'є  $\delta$ -функції:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-i2\pi vt) dt = \left. \begin{array}{l} \text{відповідно до} \\ \text{фільтрувальної} \\ \text{властивості} \\ \delta\text{-функції} \end{array} \right| = 1 = 1(v),$$

де  $1(v)$  – **одинична функція** (англ. the unit function).

Отже,

$$\boxed{\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1(v)}. \quad (2.48)$$

Рис. 2.3 –  $\delta$ -функція (а) та її спектр (б)

Тоді, застосовуючи властивість дуальності перетворення Фур'є, можна показати таке.

Якщо  $f(t) \leftrightarrow F(v)$ , то  $F(t) \leftrightarrow f(-v)$ . Враховуючи вираз (2.48), матимемо:

$$\boxed{1(t) \leftrightarrow \delta(v)}. \quad (2.49)$$

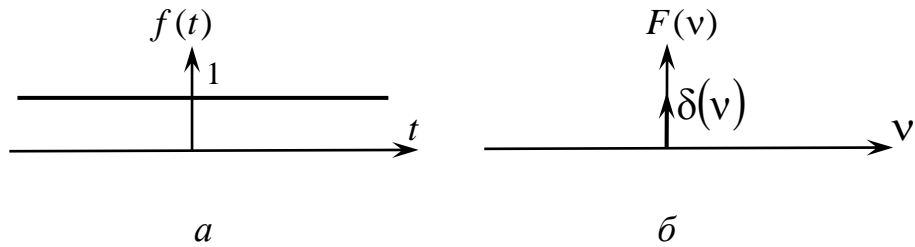


Рис. 2.4 – Одинична функція (а) та її спектр (б)

Розглянемо тепер гармонічний сигнал:  $\cos(2\pi v_0 t)$ . Його спектр матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\cos(2\pi v_0 t)\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}[\exp(i2\pi v_0 t) + \exp(-i2\pi v_0 t)]\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\{\exp(i2\pi v_0 t)\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{\exp(-i2\pi v_0 t)\} = \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\{1(t) \exp(i2\pi v_0 t)\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{1(t) \exp(-i2\pi v_0 t)\} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{відповідно до} \\ \text{властивості про зсув} \\ \text{Фур'є-образу} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\delta(v - v_0) + \frac{1}{2}\delta(v + v_0). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\boxed{\mathcal{F}\{\cos(2\pi v_0 t)\} = \frac{1}{2}[\delta(v - v_0) + \delta(v + v_0)]}. \quad (2.50)$$

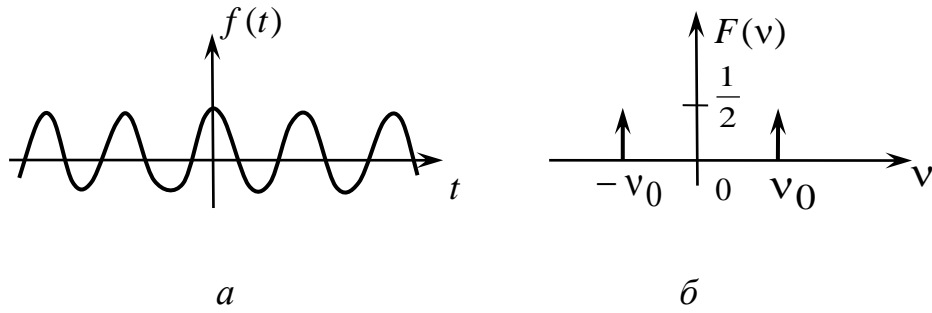


Рис. 2.5 – Функція косинуса (а) та її спектр (б)

Аналогічно можна визначити спектр функції синуса. Так,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{\sin(2\pi v_0 t)\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2i} [\exp(i2\pi v_0 t) - \exp(-i2\pi v_0 t)]\right\} = \\
 &= \frac{1}{2i} \mathcal{F}\{\exp(i2\pi v_0 t)\} - \frac{1}{2i} \mathcal{F}\{\exp(-i2\pi v_0 t)\} = \\
 &= \frac{1}{2i} \mathcal{F}\{1(t) \exp(i2\pi v_0 t)\} - \frac{1}{2i} \mathcal{F}\{1(t) \exp(-i2\pi v_0 t)\} = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \text{відповідно до} \\ \text{властивості про зсув} \\ \text{Фур'є-образу} \end{array} \right| = \frac{1}{2i} \delta(v - v_0) - \frac{1}{2i} \delta(v + v_0).
 \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\boxed{\mathcal{F}\{\sin(2\pi v_0 t)\} = \frac{1}{2i} [\delta(v - v_0) - \delta(v + v_0)]}. \quad (2.51)$$

Нарешті, розглянемо довільну періодичну функцію:

$$f_{T_0}(t) = f(t + nT_0). \quad (2.52)$$

де  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Ця функція також має нескінченну енергію, але обмежену (кінцеву) потужність.

Визначимо її спектр. Враховуючи властивість (2.52) періодичної функції, можемо розкласти її в ряд Фур'є:

$$f_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{T_0} t\right),$$

$$\text{де } C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{f_{T_0}(t)\} &= \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{T_0} t\right)\right\} = \\
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathcal{F}\{\exp\left(i2\pi \frac{n}{T_0} t\right)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta\left(v - \frac{n}{T_0}\right),
 \end{aligned}$$



Отже, фур'є-образ довільної періодичної функції матиме вигляд:

$$\boxed{\mathcal{F}\{f_{T_0}(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta\left(v - \frac{n}{T_0}\right)}. \quad (2.53)$$

Як приклад періодичної функції розглянемо гребінку Дірака:

$$\boxed{\text{comb}\left(\frac{t}{T_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)}. \quad (2.54)$$

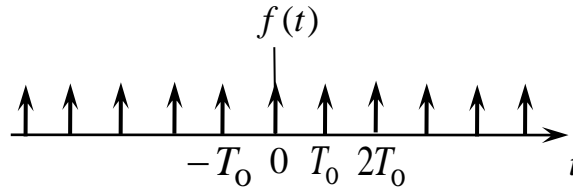


Рис. 2.6 – Гребінка Дірака як періодична функція

Для такої функції:

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt = \frac{1}{T_0}.$$

Тоді, використовуючи формулу (2.53), отримаємо:

$$\text{comb}\left(\frac{t}{T_0}\right) \leftrightarrow \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{n}{T_0}\right).$$

або

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \leftrightarrow \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{n}{T_0}\right)}. \quad (2.55)$$

Отже, фур'є-образ comb-функції є також comb-функцією, тобто

$$\boxed{\text{comb}\left(\frac{t}{T_0}\right) \leftrightarrow \frac{1}{T_0} \cdot \text{comb}(vT_0)}.$$

## 2.8. Двовимірне перетворення Фур'є

### 2.8.1. Перетворення Фур'є на площині

Як будь-яке лінійне перетворення, перетворення Фур'є може бути узагальнене на випадок двох змінних:

$$F(v_x, v_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i2\pi(v_x x + v_y y)] dx dy, \quad (2.56)$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(v_x, v_y) \exp[i2\pi(v_x x + v_y y)] dv_x dv_y. \quad (2.57)$$

Двовимірне перетворення Фур'є зручно записувати у векторній формі:

$$F(\vec{v}_x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) \exp(-i2\pi\vec{v}_x \cdot \vec{x}) d\vec{x}, \quad (2.58)$$

$$f(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\vec{v}_x) \exp(i2\pi\vec{v}_x \cdot \vec{x}) d\vec{v}_x. \quad (2.59)$$

Двовимірне перетворення Фур'є має всі властивості перетворення Фур'є, розглянутого раніше для одновимірного випадку. Проте воно має також й цікаву додаткову властивість.

Нехай координати площини  $x, y$  піддаються лінійному перетворенню, що описується матрицею  $\vec{T}$ , тобто нові координати  $\vec{x}'$  можна знайти як

$$\vec{x}' = \vec{T} \cdot \vec{x}.$$

Якщо  $f(\vec{x}) \leftrightarrow F(\vec{v}_x)$ , то

$$\boxed{f(\vec{T} \cdot \vec{x}) \leftrightarrow \frac{1}{\det \vec{T}} F(\vec{T}^{-1} \cdot \vec{v}_x)}. \quad (2.60)$$

де  $\vec{T}^{-1}$  – матриця, зворотна до  $\vec{T}$ .

Важливим окремим випадком лінійного перетворення простору є обертання системи координат або поворот на кут  $\varphi$ :

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \det \vec{T} = 1.$$

В цьому випадку,  $\vec{T}^{-1} = \vec{T}$ , тобто  $\vec{T}$  є **унітарною матрицею**. Отже, при повороті функції на певний кут її спектр буде повертатися на такий же кут.

Розглянемо інші особливості двовимірних функцій.

Функція  $f(x, y)$  називається **сепарабельною** або **функцією з розділеними змінними**, якщо задовольняє умові

$$f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y). \quad (2.61)$$

Очевидно, для такої функції

$$\boxed{\mathcal{F}\{f(x, y)\} = \mathcal{F}\{f_x(x)\} \cdot \mathcal{F}\{f_y(y)\} = F_x(v_x) \cdot F_y(v_y)}. \quad (2.62)$$

Доведення:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x, y)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i2\pi(v_x x + v_y y)] dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_y(y) \exp(-i2\pi v_x x) \exp(-i2\pi v_y y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \exp(-i2\pi v_x x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y) \exp(-i2\pi v_y y) dy = \end{aligned}$$

$$= \mathcal{F}\{f_x(x)\} \cdot \mathcal{F}\{f_y(y)\} = F_x(v_x) \cdot F_y(v_y).$$

Нехай  $f(x, y)$  має властивість осьової симетрії, тобто

$$f(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}). \quad (2.63)$$

Приклади таких функцій показані на рис. 2.7.

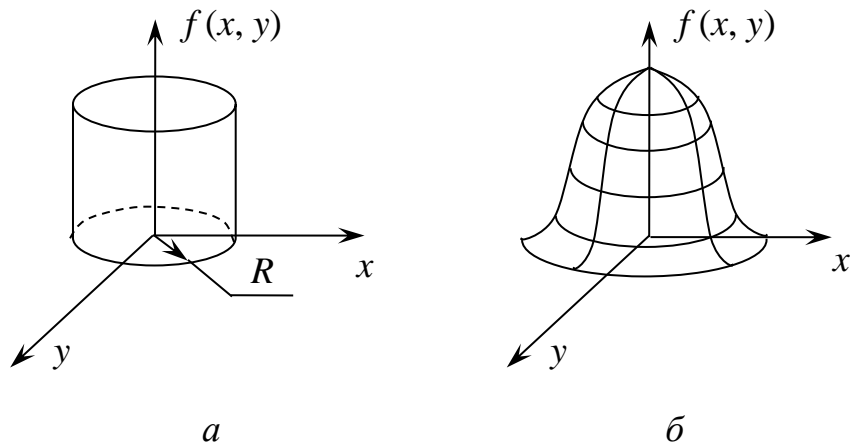


Рис. 2.7 – Приклади двовимірних функцій з осьовою симетрією:  
а – кругова; б – гаусоподібна

Знайдемо перетворення Фур'є такої функції. Для цього перейдемо від декартових просторових координат до полярних (рис. 2.8):

$$x, y \rightarrow r, \varphi; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x};$$

$$\Delta S = dx dy, \quad \Delta S = r dr d\varphi,$$

$$x = r \cdot \cos \varphi; \quad y = r \cdot \sin \varphi$$

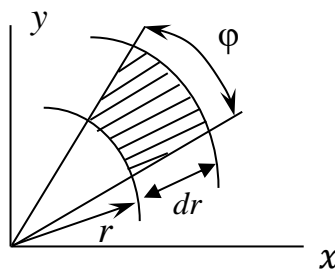


Рис. 2.8 – Перехід від декартових координат до полярних

Аналогічний перехід від декартових координат до полярних можна здійснити і в частотній області:

$$v_x, v_y \rightarrow \rho, \Theta, \quad \rho = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \Theta = \arctg \frac{v_y}{v_x},$$

$$\Delta S = dv_x dv_y, \quad \Delta S = \rho d\rho d\Theta,$$

$$v_x = \rho \cdot \cos \Theta, \quad v_y = \rho \cdot \sin \Theta$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(r)\} &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r) \exp[-i2\pi r \rho (\cos \Theta \cos \rho + \sin \Theta \sin \rho)] r dr d\varphi = \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r f(r) \exp[-i2\pi r \rho \cos(\Theta - \varphi)] d\varphi dr = \\ &= 2\pi \int_0^\infty r f(r) I_0(2\pi r \rho) dr = F(\rho). \end{aligned}$$

Отже,

$$\boxed{F(\rho) = \mathcal{F}\{f(r)\} = 2\pi \int_0^\infty r f(r) I_0(2\pi r \rho) dr}. \quad (2.64)$$

Формула (2.64) реалізує **пряме перетворення Фур'є-Бесселя** (англ. the direct Fourier-Bessel transform) або **пряме перетворення Ганкеля 0-го порядку** (англ. the direct Hankel transform of order 0).

Аналогічно виводиться **зворотне перетворення Фур'є-Бесселя** (англ. the inverse Fourier-Bessel transform) або **зворотне перетворення Ганкеля 0-го порядку** (англ. the inverse Hankel transform of order 0):

$$\boxed{f(r) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\rho)\} = \dots = 2\pi \int_0^\infty \rho F(\rho) I_0(2\pi r \rho) d\rho}. \quad (2.65)$$

### 2.8.2. Перетворення Фур'є в оптиці

Нехай функція  $f(x, y)$  описує довільний (як завгодно складний) монохромний оптичний сигнал.

Використовуючи зворотне перетворення Фур'є, можна записати:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty F(v_x, v_y) \exp[i2\pi(v_x x + v_y y)] dv_x dv_y. \quad (2.66)$$

Раніше зазначалося, що функція  $\exp[i2\pi(v_x x + v_y y)]$  в оптиці описує плоску монохроматичну хвилю світла з направляючими косинусами:

$$\cos \alpha = \lambda v_x, \quad \cos \beta = \lambda v_y, \quad \cos \gamma = \sqrt{1 - \lambda^2 v_x^2 - \lambda^2 v_y^2}.$$

Тоді (2.66) можна переписати як:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^\infty \int F\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right) \exp\left[i2\pi\left(x \frac{\cos \alpha}{\lambda} + y \frac{\cos \beta}{\lambda}\right)\right] d\frac{\cos \alpha}{\lambda} d\frac{\cos \beta}{\lambda}. \quad (2.67)$$

З виразу (2.67) видно, що оптичний сигнал  $f(x, y)$  представляє собою нескінченну суму плоских монохроматичних хвиль, що розповсюджуються у

всіх можливих напрямках, причому амплітуда кожної елементарної хвилі дорівнює  $F\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right) \cdot \frac{d \cos \alpha}{\lambda} \cdot \frac{d \cos \beta}{\lambda}$ .

Таким чином, двовимірне перетворення Фур'є (2.66) є математичним виразом **принципу Гюйгенса-Френеля у наближенні плоских хвиль**.

Тепер стає зрозумілим, що на відміну від одновимірного перетворення Фур'є від'ємні значення просторових частот  $\nu_x, \nu_y$  у двовимірному перетворенні Фур'є набувають реального фізичного змісту: знак просторової частоти відповідає знаку кута ( $\alpha$  або  $\beta$ ) розповсюдження плоскої монохроматичної хвилі.

Функція  $F\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right)$  представляє собою двовимірний спектр  $F(\nu_x, \nu_y)$ , виражений через напрямні косинуси, що описують розподілення амплітуди світлової хвилі за кутами  $\alpha$  і  $\beta$ . Тому ця функція має назву **кутового спектра плоских хвиль**.

Розглянемо задачу опису дифракції плоскої монохромної хвилі на отворі у непрозорому екрані (див. рис. 2.9).

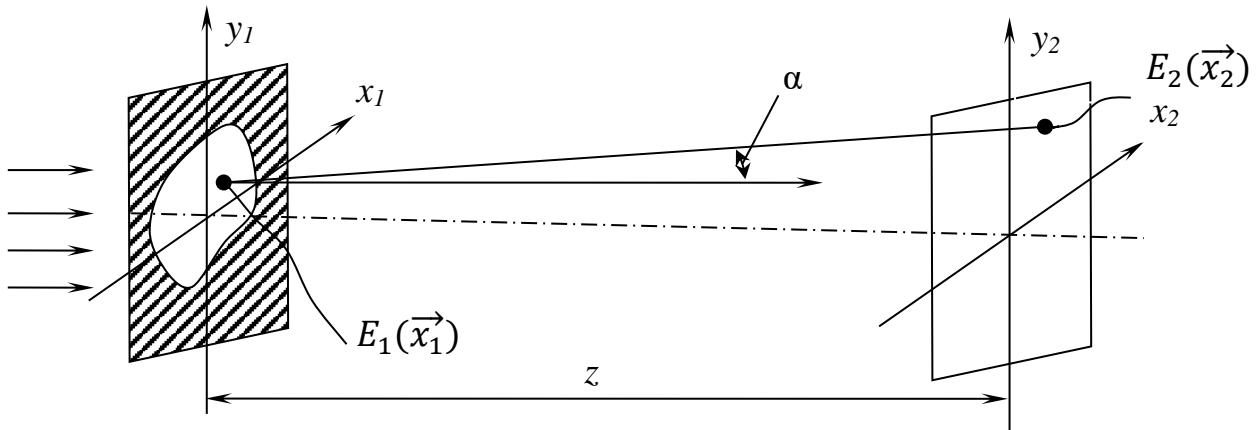


Рис. 2.9 – До розгляду дифракції плоскої монохромної хвилі на отворі у непрозорому екрані.  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  – довільні точки.

Розподіл електромагнітного поля в площині екрана в цій задачі можна визначити за формулою:

$$E_2(x_2, y_2) = \frac{1}{i\lambda} \int \int_{-\infty}^{\infty} E_1(x_1, y_1) \frac{\exp(ikr)}{r} \cos \alpha dx_1 dy_1, \quad (2.68)$$

де  $r = \sqrt{z^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ;

$E_1(x_1, y_1) dx_1 dy_1$  – амплітуда кожного віртуального джерела;

$\frac{\exp(ikr)}{r}$  – сферична хвиля одиничної амплітуди.

Вираз (2.68) є **дифракційною формулою Релея-Зоммерфельда**, яка виражає принцип Гюйгенса-Френеля.

Розглянемо випадок дифракції в дальній зоні, тобто коли

$$z \gg (x_{1,2}^2 + y_{1,2}^2)_{\max} \quad \text{або} \quad z \gg (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2_{\max}. \quad (2.69)$$

З урахуванням умови (2.69) формула (2.68) матиме вигляд:

$$E_2(\vec{x}_2) = C \int \int_{-\infty}^{\infty} E_1(x_1, y_1) \exp \left[ \frac{-i2\pi}{\lambda z} (x_2 x_1 + y_2 y_1) \right] dx_1 dy_1. \quad (2.70)$$

Вираз (2.70) є *дифракційною формулою Фраунгофера*. В даному виразі коефіцієнт  $C$  – це комплексна стала.

Як видно, з точністю до постійного коефіцієнта формула (2.70) представляє собою двовимірне перетворення Фур'є вхідного сигналу  $E_1$  із фур'є-змінними  $v_x = \frac{x_2}{\lambda z}$ ;  $v_y = \frac{y_2}{\lambda z}$ .

---

## ЗГОРТКА І КОРЕЛЯЦІЯ. ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ

У цьому розділі:



- 3.1. Лінійні перетворення та інтеграл суперпозиції.
- 3.2. Згортка та її властивості.
- 3.3. Кореляція та її властивості.
- 3.4. Згортка і кореляція на площині.
- 3.5. Усічене перетворення Фур'є.
- 3.6. Усічене перетворення Фур'є в оптиці.
- 3.7. Лінійні системи.
- 3.8. Лінійні системи в оптиці.

### 3.1. Лінійні перетворення та інтеграл суперпозиції

Нехай  $\mathcal{L}$  є оператором перетворення, який переводить сигнал  $f$  із простору  $t_1$  до сигналу  $g$  в області  $t_2$ , тобто

$$f(t_1) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(t_2) \text{ або } g(t_2) = \mathcal{L}\{f(t_1)\}. \quad (3.1)$$

Перетворення  $\mathcal{L}$  називається *лінійним*, якщо задовольняє *властивості суперпозиції* (англ. the principle of superposition):

$$\boxed{\mathcal{L}\{a_1 \cdot f_1(t_1) + a_2 \cdot f_2(t_1)\} = a_1 \cdot \mathcal{L}\{f_1(t_1)\} + a_2 \cdot \mathcal{L}\{f_2(t_1)\}}. \quad (3.2)$$

Покажемо, що будь-яке лінійне перетворення сигналів може бути представлено в єдиній канонічній формі.

Для цього запишемо сигнал  $f(t_1)$ , використовуючи фільтрувальну властивість  $\delta$ -функції:

$$f(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(t_1 - \tau) d\tau, \quad (3.3)$$

де  $\tau$  – фіктивна змінна.

Підставимо формулу (3.3) у вираз (3.1). На основі властивості суперпозиції і враховуючи, що оператор перетворення  $\mathcal{L}$  діє лише у просторі  $t_1$ , маємо:

$$g(t_2) = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(t_1 - \tau) d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \mathcal{L}\{\delta(t_1 - \tau)\} d\tau. \quad (3.4)$$

Введемо позначення:

$$\mathcal{L}\{\delta(t_1 - \tau)\} = h(t_2, \tau). \quad (3.5)$$

Підставимо вираз (3.5) в (3.4):

$$g(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t_2, \tau) d\tau.$$

Остаточно, після заміни  $\tau = t_1$  отримаємо *інтеграл суперпозиції*:

$$\boxed{g(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1) \cdot h(t_1, t_2) dt_1}. \quad (3.6)$$

Інтеграл суперпозиції є канонічною формою представлення будь-якого лінійного перетворення сигналів.

Очевидно, конкретний вид лінійного перетворення визначається характером функції  $h(t_2, t_1)$ , яка називається *ядром перетворення*.

Зокрема, перетворення Фур'є в силу його лінійності також можна записати у формі (3.6):

$$F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot h(t \cdot v) dt, \quad (3.7)$$

де  $h(t \cdot v) = \exp(-i2\pi vt)$ . Як добре видно, в даному випадку ядро перетворення Фур'є залежить від добутку змінних.

Важливими окремими випадками лінійного перетворення є згортка і кореляція. Розглянемо їх детальніше в наступних підрозділах.

## 3.2. Згортка та її властивості

Розглянемо окремий випадок лінійного перетворення, коли

$$\boxed{h(t_2, t_1) = h(t_2 - t_1)}. \quad (3.8)$$

У цьому випадку маємо:

$$g(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1) \cdot h(t_2 - t_1) dt_1.$$

Виконуючи заміни  $t_1 = \tau$ ,  $t_2 = t$ , отримаємо *інтеграл згортки* або просто *згортку* (англ. convolution):

$$\boxed{g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau}. \quad (3.9)$$

Інтеграл (3.9) задає лінійне інтегральне перетворення згортки. В цьому виразі  $\tau$  є фіктивною змінною, а параметр  $t$  – незалежною змінною (так званим параметром зсуву).

В літературі поширеним є умовне операторне представлення інтегралу згортки:

$$\boxed{g(t) = f(t) \otimes h(t)}. \quad (3.10)$$



Операції згортки можна дати наочну геометричну інтерпретацію (рис. 3.1 і 3.2).

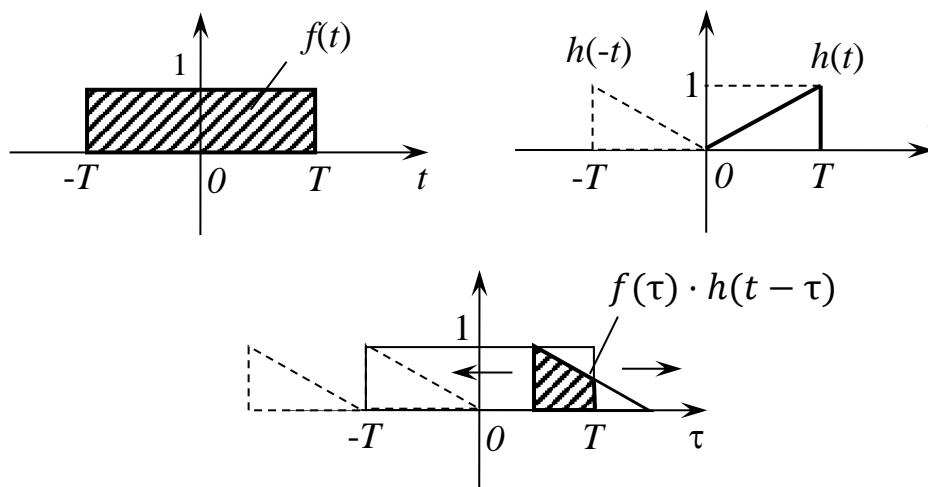


Рис. 3.1 – Геометричне представлення процедури згортки двох функцій

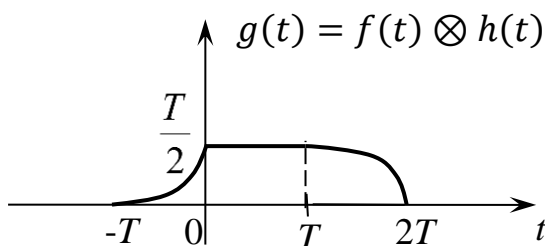


Рис. 3.2 – Результат згортки двох функцій

Розглянемо основні властивості згортки.

Властивість 1. **Комутативність:**

$$\boxed{f(t) \otimes h(t) = h(t) \otimes f(t)}. \quad (3.11)$$

Доведення:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \left| \begin{array}{l} t - \tau = \tau' \\ \tau = t - \tau' \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau') \cdot h(\tau') d\tau' = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau') f(t - \tau') d\tau' = h(t) \otimes f(t).$$

Властивість 2. **Теорема згортки:**

Якщо  $f(t) \leftrightarrow F(\nu)$  і  $h(t) \leftrightarrow H(\nu)$ , то

$$\boxed{f(t) \otimes h(t) \leftrightarrow F(\nu) \cdot H(\nu)}, \quad (3.12)$$

Отже, фур'є-образ згортки двох функцій дорівнює добутку фур'є-образів цих функцій. Іншими словами, перетворенню згортки в часовій області відповідає операція множення в частотній області.

Доведення:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{f(t) \otimes h(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \right) \exp(-i2\pi vt) dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \exp(-i2\pi vt) dt d\tau = \\
 &= \text{За властивістю фур'є-перетворення "зсув функції"} = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot H(v) \exp(-i2\pi v\tau) d\tau = \\
 &= H(v) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \exp(-i2\pi v\tau) d\tau = \\
 &= H(v)F(v) = F(v)H(v).
 \end{aligned}$$

Властивість 3. **Зворотна теорема згортки:**

Якщо  $f(t) \leftrightarrow F(v)$  і  $h(t) \leftrightarrow H(v)$ , то

$$\boxed{f(t)h(t) \leftrightarrow F(v) \otimes H(v)}. \quad (3.13)$$

Доведення:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{f(t) \cdot h(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(t) \exp(-i2\pi vt) dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left( \int_{-\infty}^{\infty} H(v') \exp(+i2\pi v't) dv' \right) \exp(-i2\pi vt) dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} H(v') \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i2\pi(v - v')t] dt dv' = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} H(v')F(v - v')dv' = H(v) \otimes F(v) = F(v) \otimes H(v).
 \end{aligned}$$

Отже, фур'є-образ добутку двох функцій дорівнює згортці фур'є-образів цих функцій. Іншими словами, операції множення в часовій області відповідає перетворення згортки в частотній області.

Розглянемо тепер умови існування інтеграла згортки. Перетворення згортки, у строгому сенсі, існує для сигналів з кінцевою енергією, тобто коли

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \text{ і } \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt < \infty. \quad (3.14)$$

Однак, перетворення згортки може бути розповсюджено і на випадок сигналів, що мають нескінченну енергію, але кінцеву потужність:

$$g(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau. \quad (3.15)$$

Зокрема, для періодичних сигналів  $f_{T_0}(t)$  з періодом  $T_0$ :

$$g(t) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_{T_0}(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau. \quad (3.16)$$

### 3.3. Кореляція та її властивості

Розглянемо інший окремий випадок лінійного перетворення, який описується інтегралом:

$$\boxed{K_{fh}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h^*(\tau - t) d\tau}. \quad (3.17)$$

Інтеграл (3.17) називається *інтегралом крос-кореляції* або *взаємної кореляції* (англ. correlation), а функція  $K_{fh}$  – *функцією взаємної кореляції* або *крос-кореляції*.

Зокрема, при  $f(t) = h(t)$  маємо:

$$\boxed{K_{ff}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot f^*(\tau - t) d\tau}. \quad (3.18)$$

Функцію (3.18) називають *автокореляційною функцією*.

В формулах (3.17) і (3.18) параметр  $\tau$  – це фіктивна змінна, а параметр  $t$  – незалежна змінна, яка характеризує величину зсуву.

Для зручності та компактності запису застосовується операторне представлення кореляції:

$$\boxed{K_{fh}(t) = f(t) * h(t)}. \quad (3.19)$$

Розглянемо основні властивості кореляції:

Властивість 1. *Симетрія*:

$$\boxed{K_{fh}(t) = K_{hf}^*(-t)}. \quad (3.20)$$

Доведення:

$$\begin{aligned} K_{fh}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h^*(\tau - t) d\tau = \begin{matrix} \tau - t = \tau' \\ \tau = \tau' + t \\ d\tau = d\tau' \end{matrix} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau' + t) \cdot h^*(\tau') d\tau' = \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau') f^*(\tau' - (-t)) \cdot d\tau' \right)^* = \\ &= \left( K_{hf}(-t) \right)^* = K_{hf}^*(-t). \end{aligned}$$

Властивість 2. *Зв'язок згортки і кореляції*:

$$\boxed{f(t) \otimes h(t) = f(t) * h^*(-t)}. \quad (3.21)$$

Доведення:

$$f(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot [h^*(t - \tau)]^* d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot [h^*(-(\tau - t))]^* d\tau = f(t) * h^*(-t).
 \end{aligned}$$

Властивість 3. **Теорема кореляції:**

Якщо  $f(t) \leftrightarrow F(\nu)$ ,  $h(t) \leftrightarrow H(\nu)$ , то

$$\boxed{f(t) * h(t) \leftrightarrow F(\nu) \cdot H^*(\nu)}. \quad (3.22)$$

Отже, перетворенню кореляції двох функцій в частотній області відповідає добуток фур'є-образу першої функції та комплексно спряженого фур'є-образу другої функції.

Доведення:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{f(t) * h(t)\} &= \mathcal{F}\{f(t) \otimes h^*(-t)\} = \\
 &= \mathcal{F}\{f(t)\} \cdot \mathcal{F}\{h^*(-t)\} = F(\nu) \cdot H^*(\nu).
 \end{aligned}$$

Із теореми кореляції можна зробити такі висновки:

Висновок 1. Якщо  $h(t) = f(t)$ , то на основі теореми кореляції отримаємо

$$K_{ff}(t) \leftrightarrow |F(\nu)|^2. \quad (3.23)$$

тобто фур'є-образ автокореляційної функції дорівнює квадрату модуля фур'є-образу вихідної функції.

Висновок 2. Обравши  $h(t) = f(t)$ , можемо переписати теорему кореляції як:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot f^*(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\nu)|^2 \exp(i2\pi\nu t) d\nu. \quad (3.24)$$

Таким чином, автокореляційна функція дорівнює зворотному перетворенню Фур'є енергетичного спектра вихідної функції.

Рівняння (3.24) є вірним для всіх можливих значень  $t$ . Зокрема, при  $t = 0$ , отримаємо **енергетичну теорему Релея:**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\nu)|^2 d\nu}. \quad (3.25)$$

тобто енергія сигналу дорівнює енергії його спектра.

Енергетична теорема Релея є неперервним аналогом теореми Парсеваля, отриманої для періодичних сигналів.

### 3.4. Згортка і кореляція на площині

Згортку і кореляцію, як лінійні операції, можна легко узагальнити на випадок просторових сигналів:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (3.26)$$

$$K_{fh}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) h^*(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta. \quad (3.27)$$

або у векторній формі з позначенням вектора  $\vec{\xi} = (\xi, \eta)$ :

$$g(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{\xi}) h(\vec{x} - \vec{\xi}) d\vec{\xi} = f(\vec{x}) \otimes h(\vec{x}), \quad (3.28)$$

$$K_{fh}(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{\xi}) h^*(\vec{\xi} - \vec{x}) d\vec{\xi} = f(\vec{x}) * h(\vec{x}). \quad (3.29)$$

Очевидно, двовимірним операціям згортки і кореляції притаманні ті самі властивості, що і одновимірним.

У випадку двозначних функцій  $f$  і  $h$ , що приймають значення 0 або 1, згортці та кореляції можна дати наочну геометричну інтерпретацію.

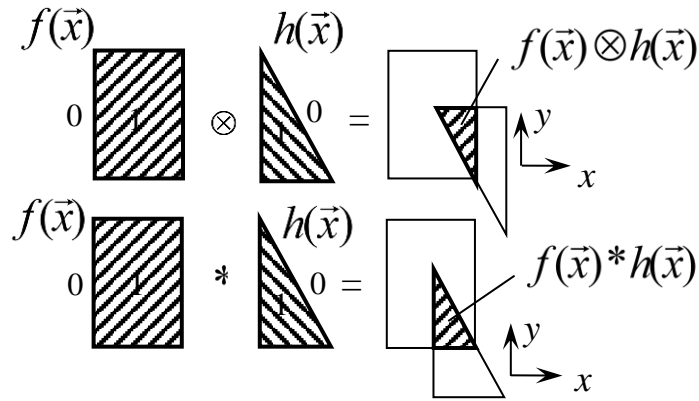


Рис. 3.3 – Порівняння операцій згортки та кореляції двовимірних функцій

З графічного прикладу добре видно, що якщо функція  $h$  є дійсною і парною, то різниця між згорткою і кореляцією зникає, тобто

$$\text{якщо } h(\vec{x}) = h^*(\vec{x}) = h(-\vec{x}), \text{ то } g(\vec{x}) = K_{fh}(\vec{x}).$$

Якщо функціям  $f$  і  $h$  притаманна властивість кругової симетрії, тобто  $h(\vec{x}) = h(r)$ ,  $f(\vec{x}) = f(r)$ , де  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , то їх згортка також є осесиметричною функцією:

$$g(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right) h\left(\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}\right) d\xi d\eta.$$

Переходячи від декартових координат  $(x, y)$  до полярних координат  $(r, \varphi)$  та від декартових координат  $(\xi, \eta)$  до полярних координат  $(\rho, \Theta)$ , отримаємо:

$$\boxed{g(r) = \int_0^{\infty} \rho \cdot f(\rho) \int_0^{2\pi} h\left(\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\Theta - \varphi)}\right) d\Theta d\rho.} \quad (3.30)$$

Доведення:

$$ds = d\xi d\eta = \rho d\rho d\Theta,$$

$$x = r \cos \varphi; y = r \sin \varphi;$$

$$\xi = \rho \cos \Theta; \eta = \rho \sin \Theta.$$

Тоді  $g(r) =$ 

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(\rho) h\left(\sqrt{x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2 - 2\rho r \cos(\Theta - \varphi)}\right) \rho d\rho d\Theta \\ &= \int_0^\infty \rho f(\rho) \int_0^{2\pi} h(\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\Theta - \varphi)}) d\Theta d\rho. \end{aligned}$$

Аналогічно, двовимірна кореляція в полярній системі координат матиме вигляд:

$$K_{fh}(r) = \int_0^\infty \rho f(\rho) \int_0^{2\pi} h^*(\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\Theta - \varphi)}) d\Theta d\rho. \quad (3.31)$$

### 3.5. Усічене перетворення Фур'є

Розглянемо функцію  $f(t)$ , що визначена на інтервалі  $-\infty < t < \infty$ . Нехай  $f(t) \leftrightarrow F(\nu)$ . Введемо до розгляду функцію  $f_T(t)$ :

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & |t| \leq T/2, \\ 0, & |t| > T/2. \end{cases} \quad (3.32)$$

Перетворення Фур'є цієї функції:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f_T(t)\} &= \int_{-\infty}^\infty f_T(t) \exp(-i2\pi\nu t) dt = \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-i2\pi\nu t) dt = F_T(\nu). \end{aligned} \quad (3.33)$$

називається *усіченим прямим фур'є-перетворенням функції  $f(t)$* .

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu), \quad f_T(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_T(\nu) \quad \text{або} \quad f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}_T} F_T(\nu).$$

Інакше кажучи, усічене перетворення Фур'є функції  $f(t)$  є звичайним (або повним) перетворенням Фур'є усіченої функції  $f_T(t)$ .

Встановимо зв'язок між повним та усіченим перетвореннями Фур'є. Для цього представимо усічену функцію  $f_T(t)$  таким добутком (рис. 3.4):

$$f_T(t) = f(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right). \quad (3.34)$$

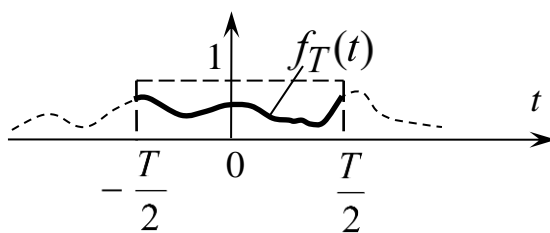


Рис. 3.4 – Усічення неперервної функції

Тоді

$$\begin{aligned} F_T(\nu) &= \mathcal{F}\{f_T(t)\} = \mathcal{F}\left\{f(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = \mathcal{F}\{f(t)\} \otimes \mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = \\ &= F(\nu) \otimes T \text{sinc}(\nu T). \end{aligned}$$

Отже,

$$\boxed{F_T(\nu) = F(\nu) \otimes T \text{sinc}(\nu T)}, \quad (3.35)$$

тобто усічений фур'є-образ дорівнює згортці повного фур'є-образу з sinc-функцією.

Розглянемо приклад, в якому  $f(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$ . Як вже відомо з підрозділу 2.7, спектр такої функції (рис. 3.5):

$$F(\nu) = \frac{1}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)].$$

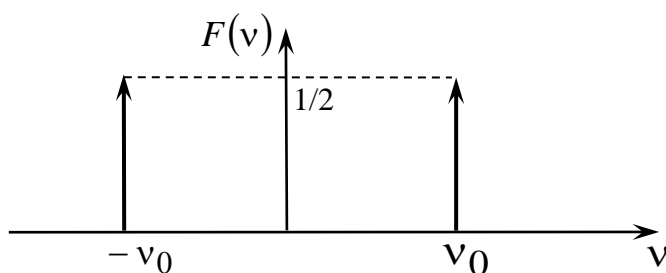


Рис. 3.5 – Повний спектр неперервної косинусоїди

З урахуванням (3.35), усічений фур'є-образ матиме вигляд (рис. 3.6):

$$\begin{aligned} F_T(\nu) &= \frac{1}{2} [\delta(\nu - \nu_0) \otimes T \text{sinc}(\nu T) + \delta(\nu + \nu_0) \otimes T \text{sinc}(\nu T)] = \\ &= \frac{1}{2} [T \text{sinc}[(\nu - \nu_0)T] + T \text{sinc}[(\nu + \nu_0)T]]. \end{aligned}$$

Порівнюючи рис. 3.5 і 3.6, приходимо до висновку, що під час усічення сигналу  $f(t)$  відбувається розмиття його спектра.

Враховуючи цю обставину, можна ввести поняття розділення спектра сигналу за частотою.

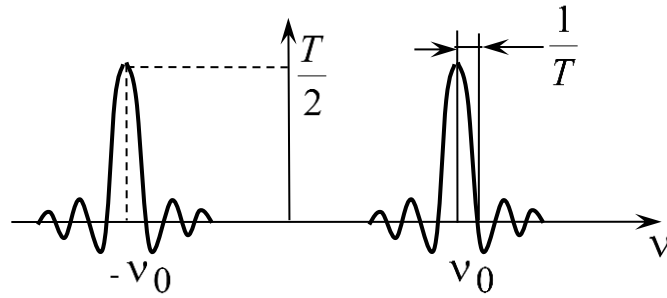


Рис. 3.6 – Спектр усіченої косинусоїди

Розглянемо сигнал, що являє собою суму гармонік з близькими частотами:

$$f(t) = \cos(2\pi v_1 t) + \cos(2\pi v_2 t),$$

де  $|v_1 - v_2| = \Delta v$ ,  $\Delta v \ll v_1, v_2$ .

Очевидно,

$$\left. \begin{aligned} F(v)|_{v>0} &= \frac{1}{2}\delta(v - v_1) + \frac{1}{2}\delta(v - v_2) \\ F_T(v)|_{v>0} &= \frac{T}{2}\text{sinc}[(v - v_1)T] + \frac{T}{2}\text{sinc}[(v - v_2)T] \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Таким чином, спектр матиме вигляд як показано на рис. 3.7.

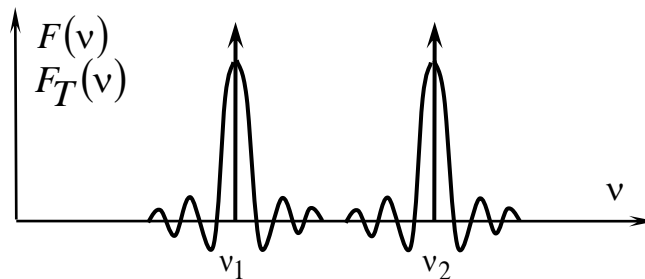


Рис. 3.7 – Спектр суми гармонік з близькими частотами

З рис. 3.7 видно, що для того, щоб спостерігати частоти  $v_1, v_2$  у спектрі роздільно, величина  $\Delta v$  має бути не меншою, ніж півширина  $\text{sinc}$ -функції (див. рис. 3.8), тобто

$$\Delta v \geq \frac{1}{T}. \quad (3.37)$$

Межу  $\Delta v$  називають **частотним розділенням спектра**  $f(t)$ . Очевидно, якщо  $T \rightarrow \infty$ , то

$$\begin{aligned} F_T(v) &= \lim_{T \rightarrow \infty} [F(v) \otimes T \text{sinc}(vT)] = \\ &= F(v) \otimes \lim_{T \rightarrow \infty} T \text{sinc}(vT) = F(v) \otimes \delta(v) = F(v), \end{aligned}$$



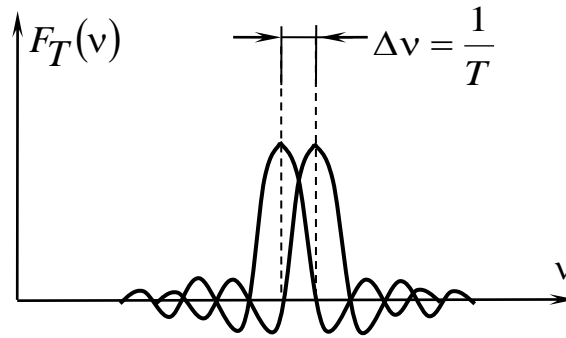


Рис. 3.8 – До визначення частотного розділення спектра

Отже, якщо  $T \rightarrow \infty$ , то

$$F_T(v)_{T \rightarrow \infty} \rightarrow F(v) \quad (3.38)$$

тобто отримуємо краще розділення.

Окрім усічення сигналу  $f(t)$ , можна розглядати також усічення його спектра за частотою (рис. 3.9):

$$F_{\Omega_0}(v) = F(v) \cdot \text{rect}\left(\frac{v}{\Omega_0}\right). \quad (3.39)$$

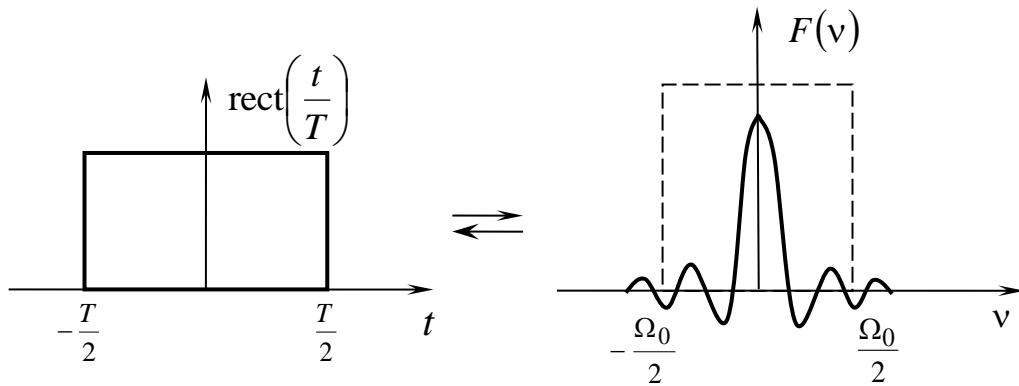


Рис. 3.9 – Усічення спектра по частоті

Тоді зворотне перетворення Фур'є, усічене за частотою спектра:

$$\boxed{f_{\Omega_0}(t) = f(t) \otimes \Omega_0 \cdot \text{sinc}(\Omega_0 t)}. \quad (3.40)$$

Вираз (3.39) описує *зворотнє усічене перетворення Фур'є*.

Доведення:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{F_{\Omega_0}(v)\} &= \mathcal{F}^{-1}\left\{F(v) \cdot \text{rect}\left(\frac{v}{\Omega_0}\right)\right\} = \left| \begin{array}{l} \text{на підставі} \\ \text{теоремаи згортки} \end{array} \right| = \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{F(v)\} \otimes \mathcal{F}^{-1}\left\{\text{rect}\left(\frac{v}{\Omega_0}\right)\right\} = f(t) \otimes \Omega_0 \cdot \text{sinc}(\Omega_0 t). \end{aligned}$$

Таким чином, приходимо до важливого висновку: усічення сигналу за часом призводить до розмазування його спектра за частотою (спектр сигналу згортається з  $\text{sinc}$ -функцією) та, навпаки, при усіченні спектра сигналу за частотою відбувається розмазування сигналу за часом (сигнал згортається з  $\text{sinc}$ -функцією).

Поняття усіченого перетворення Фур'є можна розповсюдити й на випадок двовимірних сигналів. При цьому виникають різноманітні можливості (варіанти) усічення сигналу та його спектра. Найбільш часто використовуються усічення сигналу та його спектра прямокутним і круглим вікнами.

Розглянемо усічення прямокутним вікном:

$$f_{XY}(x, y) = f(x, y) \cdot \text{rect}\left(\frac{x}{X}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y}{Y}\right), \quad (3.41)$$

$$F_{\Omega_x \Omega_y}(v_x, v_y) = F(v_x, v_y) \cdot \text{rect}\left(\frac{v_x}{\Omega_x}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{v_y}{\Omega_y}\right). \quad (3.42)$$

Вираз (3.41) описує **прямокутне просторове вікно**, а вираз (3.42) – **прямокутне спектральне вікно**.

Тоді в частотній області матимемо

$$F_{XY}(v_x, v_y) = F(v_x, v_y) \otimes X \text{sinc}(Xv_x) \cdot Y \text{sinc}(Yv_y), \quad (3.43)$$

$$f_{\Omega_x \Omega_y}(x, y) = f(x, y) \otimes \Omega_x \Omega_y \text{sinc}(\Omega_x x) \cdot \text{sinc}(\Omega_y y). \quad (3.44)$$

Розглянемо усічення круглим вікном:

$$f_{r_o}(x, y) = f(x, y) \cdot \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r_o}\right), \quad (3.45)$$

$$F_{\rho_o}(v_x, v_y) = F(v_x, v_y) \cdot \text{circ}\left(\frac{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{\rho_o}\right). \quad (3.46)$$

Вираз (3.45) описує **кругле просторове вікно**, а вираз (3.46) – **кругле спектральне вікно**.

Тоді відповідні фур'є-пари матимуть вигляд:

$$F_{r_o}(v_x, v_y) = F(v_x, v_y) \otimes r_o \frac{I_1(2\pi r_o \sqrt{v_x^2 + v_y^2})}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}, \quad (3.47)$$

$$f_{\rho_o}(x, y) = f(x, y) \otimes \rho_o \frac{I_1(2\pi \rho_o \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3.48)$$

### 3.6. Усічене перетворення Фур'є в оптиці

Згідно з теорією Аббе-Релея процес формування зображення в ОС може бути представлений як двократне перетворення Фур'є:

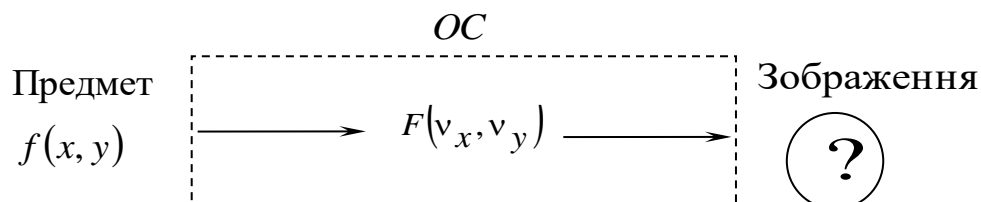


Рис. 3.10 – Умовне представлення процесу формування зображення в ОС

При цьому друге перетворення Фур'є є усіченим за частотою (див. рис. 3.10). Згідно з теорією Аббе усічення просторового спектра відбувається на вихідній зіниці ОС, а згідно з теорією Релея – на вхідній зіниці.

Оскільки вихідна і вхідна зіниці пов'язані між собою співвідношенням геометричної подібності (у першому наближенні, без урахування аберацій), то ці дві теорії рівнозначні та дають ідентичний результат. Визначимо його:  $\mathcal{F}_{\rho_o}\{\mathcal{F}\{f(x, y)\}\} = ?$

Зазвичай, вихідна зіниця являє собою круглий отвір та може бути описана функцією:

$$\text{circ}\left(\frac{2\lambda f'}{D}\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\right), \quad (3.49)$$

де  $f'$  – фокусна відстань об'єктива,  $D$  – діаметр вхідної зіниці об'єктива.

Тоді згідно з теорією Аббе зображення, що утворюється ОС, буде описуватися:

$$\begin{aligned} f_{\rho_o}(x, y) &= \mathcal{F}\left\{F(v_x, v_y) \cdot \text{circ}\left(\frac{2\pi f'}{D}\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\right)\right\} = \\ &= \begin{vmatrix} f(\vec{x}) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\vec{v}_x) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f(\vec{x}) \\ f(\vec{x}) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\vec{v}_x) \xrightarrow{\mathcal{F}} f(-\vec{x}) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

або

$$f_{\rho_o}(x, y) = f(-x, -y) \otimes \frac{D}{2\lambda f'} \cdot \frac{I_1\left(\frac{\pi D}{\lambda f'}\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3.50)$$

де  $f(-x, -y)$  – ідеальне зображення предмету.

Реальне зображення, яке створює ОС, являє собою згортку ідеального зображення з функцією вигляду  $\frac{I_1(r)}{r}$ , тобто зображення на виході ОС виявляється розмитим (рис. 3.11).

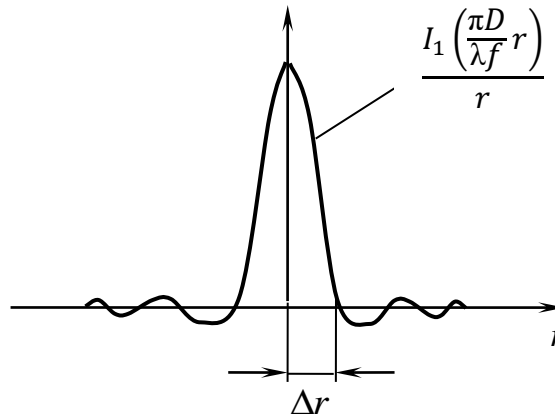


Рис. 3.11 – Функція, якою розмивається зображення, утворене дифракційно-обмеженою оптичною системою

Ступінь розмитості зображення визначається *діафрагмовим числом*  $\frac{f'}{D}$  (величиною, зворотною до відносного отвору):

$$\Delta r = 1,22 \frac{\lambda f'}{D},$$

де  $\Delta r$  – *дифракційна межа розділення ОС*.

### 3.7. Лінійні системи

Будь-який фізичний об'єкт, здатний змінювати свій стан під дією зовнішніх збурювань (або впливів), називається *системою*.

Абстрагуючись від фізичної природи системи, її можна представити у вигляді моделі (див. рис. 3.12), яку називають *чорною скринькою*.

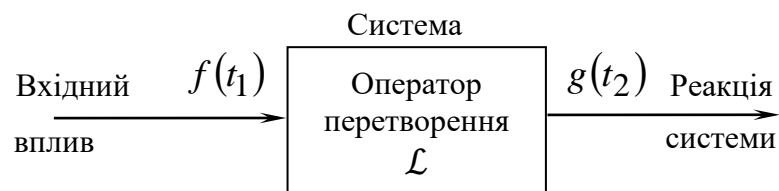


Рис. 3.12 – Система як «чорна скринька»

Таким чином, поведінка системи може бути повністю визначена деяким оператором  $\mathcal{L}$  системи, який переводить вхідний сигнал  $f(t_1)$  у вихідний сигнал  $g(t_2)$ :

$$g(t_2) = \mathcal{L}\{f(t_1)\}. \quad (3.51)$$

Раніше було вказано, що система називається *лінійною*, якщо оператор  $\mathcal{L}$  задовольняє умові суперпозиції. Очевидно, реакція лінійної системи на вхідний сигнал  $f(t_1)$  може бути записана як інтеграл суперпозиції:

$$g(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1) \cdot h(t_2, t_1) dt_1, \quad (3.52)$$

де  $h(t_2, t_1) = \mathcal{L}\{\delta(t_2 - t_1)\}$  – реакція системи на  $\delta$ -функцію.

Функція  $h$  називається *імпульсним відгуком* (англ. the impulse response) лінійної системи. Вона повністю визначає лінійну систему.

Фізичний зміст виразу (3.52) є таким. Вихідний сигнал  $g(t_2)$  лінійної системи являє собою нескінченну суму елементарних реакцій системи (імпульсних відгуків) на  $\delta$ -імпульси, що прикладені до входу в моменти часу  $t_1$  з амплітудами  $f(t_1)dt_1$ .

Лінійна система називається *інваріантною* (англ. the shift invariant system), якщо її імпульсний відгук залежить тільки від різниці  $t_2$  і  $t_1$ , тобто

$$h(t_2, t_1) = h(t_2 - t_1). \quad (3.53)$$

Тоді вихідний сигнал інваріантної лінійної системи описується інтегралом згортки:

$$g(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1) \cdot h(t_2 - t_1) dt_1. \quad (3.54)$$

Інваріантні системи мають таку характерну властивість.

Якщо  $\mathcal{L}\{f(t_1)\} = g(t_2)$ , то

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t_1 - \tau)\} = g(t_2 - \tau)}, \quad (3.55)$$

тобто при зсуві вхідного сигналу реакція лінійного інваріантної системи не змінюється, але також зазнає зсуву.

Доведення:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t_1 - \tau)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1 - \tau) h(t_2 - t_1) dt_1 = \left. \begin{array}{l} t_1 - \tau = t_1' \\ t_1 = t_1' + \tau \\ dt_1 = dt_1' \end{array} \right| = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1') h(t_2 - t_1' - \tau) dt_1' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1') h[(t_2 - \tau) - t_1'] dt_1' = \\ &= f(t_2 - \tau) \otimes h(t_2 - \tau) = g(t_2 - \tau). \end{aligned}$$

Поняття лінійної системи легко узагальнюється на випадок двовимірних функцій. Дійсно, для двовимірної лінійної системи її реакція може бути записана за допомогою такого інтегралу:

$$g(\vec{x}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}_1) h(\vec{x}_2, \vec{x}_1) d\vec{x}_1, \quad (3.56)$$

де  $h(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$  – відгук системи на двовимірну  $\delta$ -функцію  $\delta(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ .

Лінійна просторова система називається *ізопланарною (просторово-інваріантною)*, якщо її імпульсний відгук:

$$h(\vec{x}_2, \vec{x}_1) = h(\vec{x}_2 - \vec{x}_1), \quad (3.57)$$

$$g(\vec{x}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}_1) h(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) d\vec{x}_1. \quad (3.58)$$

Незважаючи на аналогію між часовими і просторовими лінійними системами, між ними існує принципова відмінність. Розглядаючи часову систему, необхідно враховувати *принцип причинності* (англ. causality). Його сутність якого полягає у тому, що наслідок не може передувати причині, яка його викликає.

Тому, записуючи реакцію лінійної інваріантної системи (3.54), правильно було б записати:

$$\boxed{g(t_2) = \int_{-\infty}^{t_2} f(t_1) \cdot h(t_2 - t_1) dt_1}. \quad (3.59)$$

Верхня межа  $t_2$  показує, що для визначення сигналу  $g$  в момент  $t_2$  необхідно просумувати значення вхідного сигналу в усі моменти часу, що передують моменту  $t_2$ .

Цього разу вираз (3.59) формально вже не є інтегралом згортки. Однак, його можна записати як інтеграл згортки, якщо накласти певне обмеження на функцію  $h$ :

$$g(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_2) \cdot h(t_2 - t_1) dt_1,$$

де  $h(t_2 - t_1) = 0$  для  $t_1 > t_2$ .

Останню умову можна переписати в іншій формі:

$$\boxed{h(t_2) = 0, \text{ для } t_2 < 0}. \quad (3.60)$$

Ця умова називається *умовою можливості фізичної реалізації системи*.

Як видно із (3.60), імпульсний відгук часової системи є завжди несиметричним.

Оскільки від'ємні та додатні значення просторових координат  $x, y$  є повністю рівноправними, то умови можливості фізичної реалізації для двовимірних просторових систем не існує. Тому імпульсний відгук просторових систем може описуватись симетричною функцією.

Отже, з урахуванням умови можливості фізичної реалізації, реакція лінійної інваріантної системи визначається як згортка:

$$\boxed{g(t_2) = f(t_2) \otimes h(t_2)}. \quad (3.61)$$

Нехай

$$g(t_2) \leftrightarrow G(\nu), f(t_2) \leftrightarrow F(\nu), h(t_2) \leftrightarrow H(\nu).$$

Тоді, застосовуючи теорему згортки (3.61), отримаємо:

$$\boxed{G(\nu) = F(\nu) \cdot H(\nu)}. \quad (3.62)$$

Комплексна функція:

$$H(\nu) = |H(\nu)| \exp[i \cdot \arg H(\nu)] \quad (3.63)$$

називається **частотною передавальною функцією** (англ. the transfer function) лінійної системи.

При цьому  $|H(\nu)|$  – **амплітудно-частотною характеристикою** (АЧХ),  $\arg H(\nu)$  – **фазово-частотною характеристикою** (ФЧХ).

Частотна передавальна функція показує як змінюється частотний (спектральний) склад вхідного сигналу під час проходження через лінійну систему.

Розглянемо один приклад для ілюстрації проходження сигналу через лінійну систему (рис. 3.13).

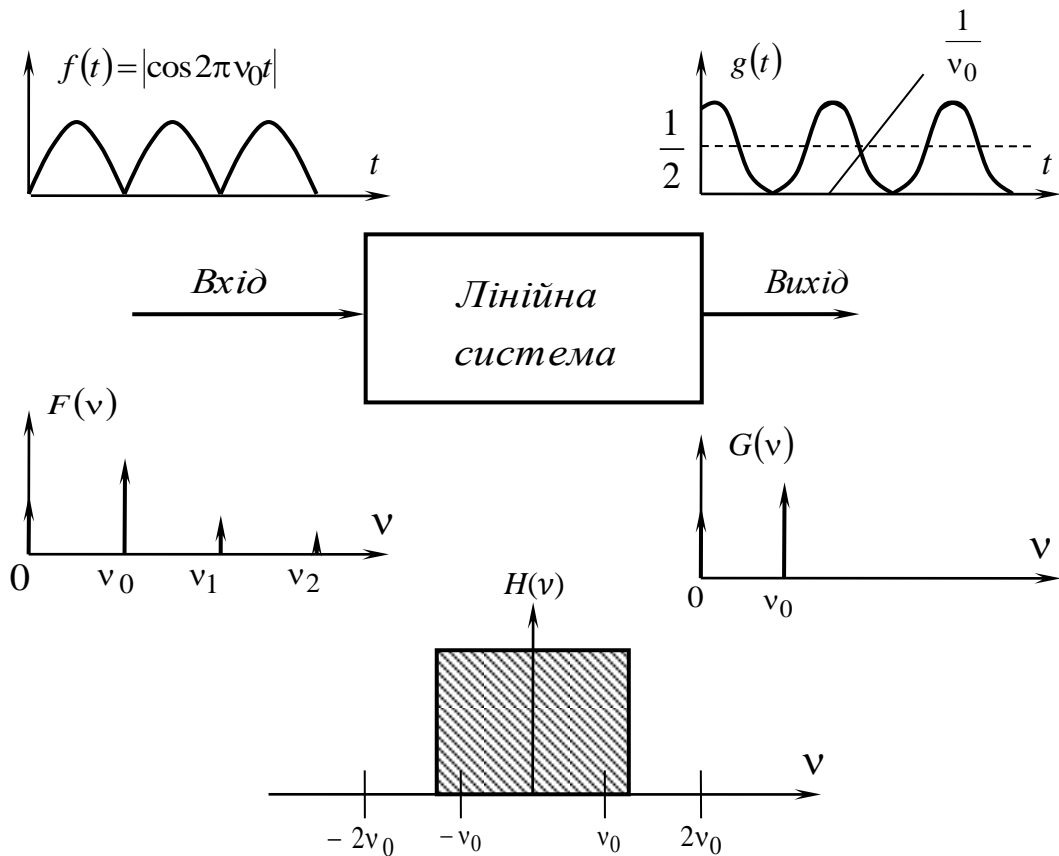


Рис. 3.13 – Проходження сигналу через лінійну систему з частотною передавальною функцією  $H(\nu)$

Як видно, інваріантна лінійна система може бути повністю визначена одним з двох способів:

- 1) заданням імпульсного відгуку  $h(t_2)$ .
- 2) заданням частотної передавальної функції  $H(v)$ .

При цьому, розглянуті два способи задання лінійної системи повністю є рівнозначними, оскільки функції  $h(t)$  і  $H(v)$  утворюють фур'є-пару:

$$h(t) \leftrightarrow H(v).$$

Доволі часто на практиці для знаходження реакції лінійної інваріантної системи замість розв'язання інтегрального рівняння (3.61) зручніше перейти до рівняння (3.62) з подальшим розрахунком фур'є-прообразу функції  $G(v)$ .

### 3.8. Лінійні системи в оптиці

Повернемося до задачі опису дифракції на плоскому екрані (див. рис. 3.14).

Як видно з рис. 3.14, відстань між довільними точками  $\vec{x}_1$  і  $\vec{x}_2$  на площинах (екранах) дорівнюватиме

$$r = \sqrt{z^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}; \alpha = \alpha(\vec{x}_1). \quad (3.64)$$

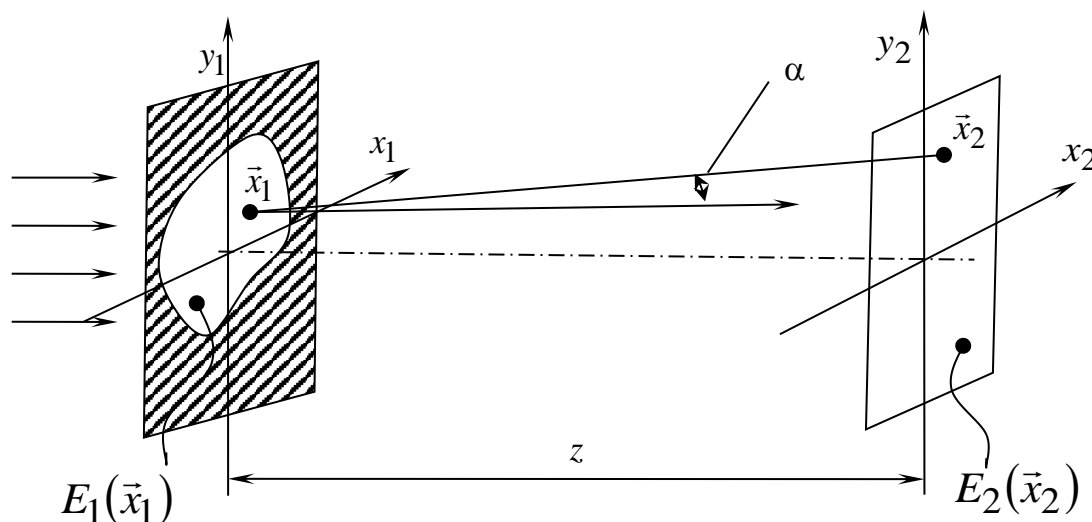


Рис. 3.14 – До опису дифракції на плоскому екрані

В загальному випадку оптичний сигнал в площині  $\vec{x}_2$  може бути знайдений за **дифракційною формулою Релея-Зоммерфельда**:

$$E_2(\vec{x}_2) = \frac{1}{i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(\vec{x}_1) \frac{\exp(i\frac{2\pi}{\lambda}r)}{r} \cos \alpha(\vec{x}_1) d\vec{x}_1. \quad (3.65)$$

Вводячи позначення:



$$h(\vec{x}_2, \vec{x}_1) = \frac{\exp(i\frac{2\pi}{\lambda}r)}{i\lambda r} \cos \alpha(\vec{x}_1), \quad (3.66)$$

перепишемо вираз (3.65) в дещо простішому вигляді:

$$E_2(\vec{x}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} E_1(\vec{x}_1) h(\vec{x}_2, \vec{x}_1) d\vec{x}_1. \quad (3.67)$$

В виразі (3.67) отримано інтеграл суперпозиції. Тому стає зрозумілим, що ділянку вільного простору між площинами  $\vec{x}_1$  і  $\vec{x}_2$  можна розглядати як лінійну (в загальному випадку – неізопланарну) систему з імпульсним відгуком (3.66).

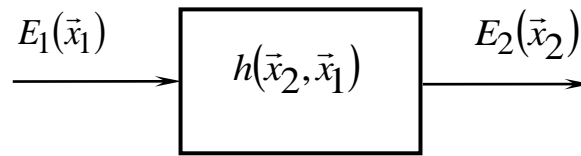


Рис. 3.15 – До опису ділянки вільного простору

В параксіальному наближенні  $\cos \alpha(\vec{x}_1) \approx 1$  і система стає ізопланарною. У випадку, коли  $z \gg (\sqrt{x^2 + y^2})_{\max}$  – умова Френеля, вихідний сигнал визначається **дифракційною формулою Френеля**:

$$E_2(\vec{x}_2) = \frac{\exp(i\frac{2\pi}{\lambda}z)}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(\vec{x}_1) \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda z}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2\right] d\vec{x}_1. \quad (3.68)$$

Вводячи визначення:

$$h_2(\vec{x}_2) = \frac{\exp(i\frac{2\pi}{\lambda}z)}{i\lambda z} \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda z}\vec{x}_2^2\right], \quad (3.69)$$

вираз (3.68) можна переписати як вже звичну згортку:

$$E_2(\vec{x}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} E_1(\vec{x}_1) h(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) d\vec{x}_1 = E_1(\vec{x}_2) \otimes h(\vec{x}_2). \quad (3.70)$$

Отже, в наближенні Френеля (ближня область дифракції) ділянку вільного простору можна розглядати як лінійну ізопланатичну систему з імпульсним відгуком (3.69).

Представимо ізопланарну систему в частотній області. Для цього знайдемо частотну характеристику ділянки вільного простору в наближенні Френеля, скориставшись (3.69):

$$\begin{aligned} H(\vec{v}_x) &= \mathcal{F}\{h(\vec{x}_2)\} = \\ &= \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\frac{\pi}{\lambda z}\vec{x}_2^2\right) \cdot \exp(-i2\pi\vec{v}_x \cdot \vec{x}_2) d\vec{x}_2 \end{aligned}$$

або

$$H(\vec{v}_x) = \frac{\exp(\frac{i2\pi}{\lambda}z)}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda z}(\vec{x}_2^2 - 2\vec{v}_x\vec{x}_2\lambda z)\right] d\vec{x}_2. \quad (3.71)$$

Щоб далі скористатися відомим табличним інтегралом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-U^2) dU = \sqrt{\pi}, \quad (3.72)$$

доповнимо вираз у квадратних дужках у формулі (3.71) до повного квадрату різниці:

$$H(\vec{v}_x) = \frac{\exp(\frac{i2\pi}{\lambda}z)}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda z}(\vec{x}_2^2 - 2\vec{v}_x\vec{x}_2\lambda z + \vec{v}_x^2\lambda^2 z^2 - \vec{v}_x^2\lambda^2 z^2)\right] d\vec{x}_2. \quad (3.73)$$

Для спрощення аналізу розглянемо внутрішній інтеграл лише за однією змінною  $x_2$ . Виконаємо заміну змінних:

$$i\frac{\pi}{\lambda z}(x_2 - \vec{v}_x\lambda z)^2 = -U^2,$$

звідки

$$x_2 - \vec{v}_x\lambda z = \sqrt{\frac{i\lambda z}{\pi}} U$$

або

$$x_2 = \sqrt{\frac{i\lambda z}{\pi}} U + \vec{v}_x\lambda z;$$

$$dx_2 = \sqrt{\frac{i\lambda z}{\pi}} dU.$$

Враховуючи, що  $d\vec{x}_2 = dx_2 dy_2$ , інтеграл у виразі (3.73) буде дорівнювати:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots d\vec{x}_2 = \left(\sqrt{\frac{i\lambda z}{\pi}}\right)^2 (\sqrt{\pi})^2 = i\lambda z.$$

Отже,

$$\boxed{H(\vec{v}_x) = \exp\left[i\left(\frac{2\pi}{\lambda}z - \pi\lambda z\vec{v}_x^2\right)\right]}. \quad (3.74)$$

Вираз (3.74) описує **частотну характеристику ділянки вільного простору у наближенні Френеля**. Як видно, для ділянки вільного простору АЧХ=1, а фазова частотна характеристика дорівнює

$$\text{ФЧХ}(\vec{v}_x) = \frac{2\pi}{\lambda}z - \pi\lambda z\vec{v}_x^2.$$

Графік цієї параболічної характеристики зображений на рис. 3.16.

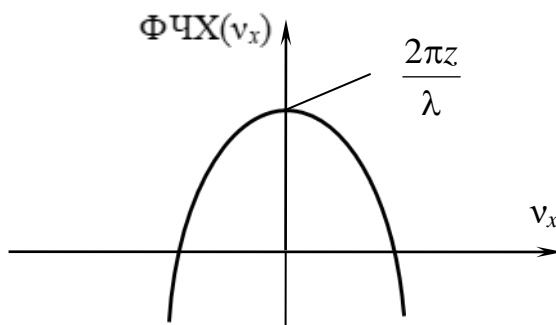


Рис. 3.16 – Фазова частотна характеристика ділянки вільного простору у наближенні Френеля

Перший доданок у виразі (3.74) характеризує постійну фазову затримку сигналу при проходженні ділянки вільного простору глибиною  $z$ . Другий доданок характеризує відхилення фазової затримки за частотами згідно параболічної залежності.

Розглянемо тепер довільну ОС, що формує дійсне зображення. Будемо розглядати її як «чорну скриньку» (рис. 3.17).

Припустимо, що в ОС відсутні будь-які аберації. Така система є ідеальною і називається *дифракційно-обмеженою*.

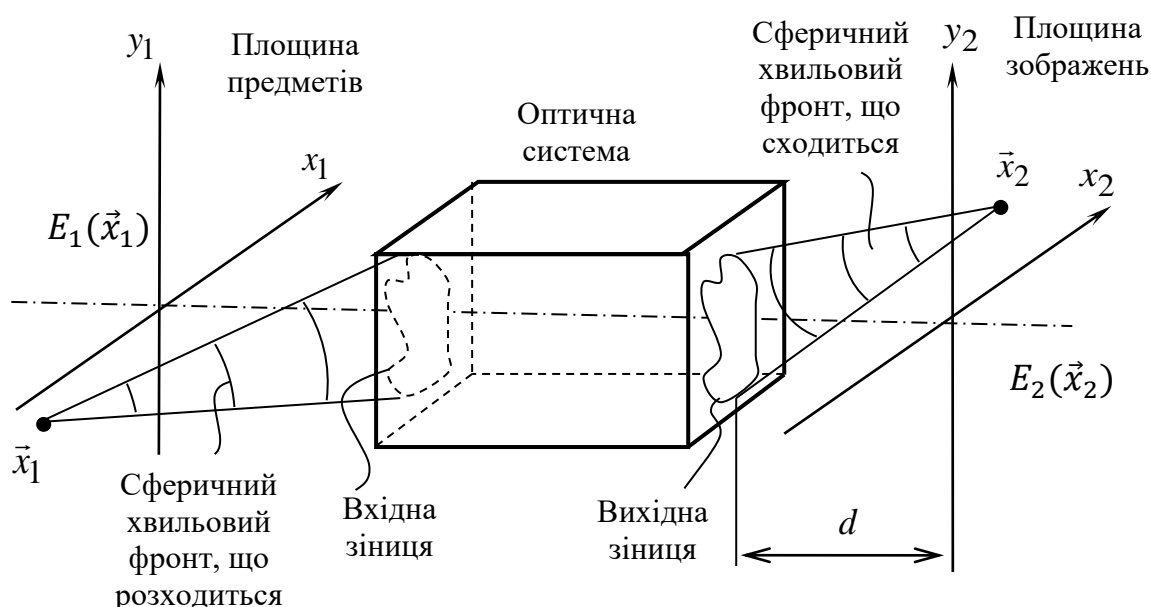


Рис. 3.17 – Дія довільної ОС

Через лінійність явища розповсюдження світла в середовищі оптичний сигнал на виході ОС при когерентному освітленні в загальному випадку буде дорівнювати:

$$E_2(\vec{x}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} E_1(\vec{x}_1) h_K(\vec{x}_2, \vec{x}_1) d\vec{x}_1, \quad (3.75)$$

де  $h_K(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$  – імпульсний відгук ОС.

Функція  $|h_K(\vec{x}_2, \vec{x}_1)|^2$  являє собою утворене ОС зображення точкового джерела, що розташоване в точці  $\vec{x}_1$ . Цю функцію прийнято називати **функцією розсіяння точки**.

Якщо ОС задовольняє умові ізопланатизму, то вихідний сигнал описується виразом:

$$E_2(\vec{x}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} E_1(\vec{x}_1) h_K(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) d\vec{x}_1. \quad (3.76)$$

При некогерентному освітленні вирази (3.75) і (3.76) мають бути переписані відносно інтенсивності оптичного сигналу:

$$I_2(\vec{x}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} I_1(\vec{x}_1) h_{HK}(\vec{x}_2, \vec{x}_1) d\vec{x}_1, \quad (3.77)$$

$$I_2(\vec{x}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} I_1(\vec{x}_1) h_{HK}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) d\vec{x}_1, \quad (3.78)$$

де  $I_2 = |E_2|^2$ ,  $I_1 = |E_1|^2$ ,  $h_{HK} = |h_K|^2$ .

З виразів (3.77) і (3.78) стає зрозумілим фізичний смисл процесу формування зображення в ОС: створюване ОС зображення отримується як суперпозиція елементарних зображень точкових джерел, розташованих по полю предмету, яскравості яких дорівнюють інтенсивності оптичного сигналу в відповідних точках площини.

Ізопланарна ОС може бути описана також в частотній області. Застосовуючи теорему згортки до виразів (3.76) і (3.78), отримаємо:

$$\mathcal{F}\{E_2\} = \mathcal{F}\{E_1\} \cdot \mathcal{F}\{h_K\}, \quad (3.79)$$

$$\mathcal{F}\{I_2\} = \mathcal{F}\{I_1\} \cdot \mathcal{F}\{h_{HK}\}, \quad (3.80)$$

де  $\mathcal{F}[h_K] = H_K(\vec{v}_x)$  називається **когерентною передавальною функцією** (КПФ);  $\mathcal{F}[h_{HK}] = H_O(\vec{v}_x)$  – **оптичною передавальною функцією** (ОПФ). Вони повністю визначають ОС при когерентному та некогерентному освітленні, відповідно.

Очевидно, між КПФ і ОПФ існує зв'язок. Дійсно,

$$\begin{aligned} H_O(\vec{v}_x) &= \mathcal{F}\{h_{HK}\} = \mathcal{F}\{|h_K|^2\} = \mathcal{F}\{h_K \cdot h_K^*\} = \\ &= |\text{за теоремою кореляції}| = \\ &= \mathcal{F}\{h_{HK}\} * \mathcal{F}\{h_{HK}\} = H_K(\vec{v}_x) * H_K(\vec{v}_x) = \\ &= H_K(\vec{v}_x) \otimes H_K^*(-\vec{v}_x). \end{aligned}$$

Отже,

$$\boxed{H_O(\vec{v}_x) = H_K(\vec{v}_x) \otimes H_K^*(-\vec{v}_x)}. \quad (3.81)$$

З виразу (3.81) стає зрозумілим, що смуга пропускання частот ОС при некогерентному випроміненні буде вдвічі ширшою, ніж при когерентному випроміненні.

Відповідно до *теорії Аббе*:

$$H_k(\vec{v}_x) = \text{Pupil}(\lambda d \vec{v}_x) \quad (3.82)$$

де  $\text{Pupil}$  – *функція зіниці*.

Для ідеальної ОС:

$$\text{Pupil} = \begin{cases} 1 & \text{всередині зіниці,} \\ 0 & \text{поза зіницею.} \end{cases}$$

$d$  – відстань від вихідної зіниці до площини зображення.

Зазвичай, вихідна зіниця має круглу форму та описується функцією:

$$\text{Pupil}(\lambda d \vec{v}_x) = \text{circ}\left(\frac{\lambda d \rho}{\rho_0}\right). \quad (3.83)$$

---

## ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

У цьому розділі:



- 4.1. Випадковий сигнал і його опис.
- 4.2. Стаціонарність та ергодичність.
- 4.3. Автокореляційні та крос-кореляційні функції.
- 4.4. Спектральне представлення випадкових сигналів.
  - 4.4.1. Теорема Вінера-Хінчина.
  - 4.4.2. Властивості енергетичного спектра.
  - 4.4.3. Ефективна ширина спектра.
- 4.5. Проходження випадкового сигналу через лінійну систему.
- 4.6. Випадкові сигнали на площині.
- 4.7. Випадкові сигнали в оптиці.
  - 4.7.1. Опис поля при квазімонохроматичному випроміненні.
  - 4.7.2. Часова когерентність.
  - 4.7.3. Просторова когерентність.
  - 4.7.4. Опис явища інтерференції.

### 4.1. Випадковий сигнал і його опис

Розглянемо деяке фізичне явище чи об'єкт, що породжує випадковий сигнал (наприклад, темновий струм на виході напівпровідникового фотодіода).

Припустимо, що можна проводити нескінченну кількість експериментів з цим явищем чи об'єктом, в результаті яких спостерігати породжені ним сигнали (експеримент може бути як активним, так і пасивним, тобто зводиться до простого спостереження за об'єктом).

Множину експериментів та їх результатів назвемо *вибірковим простором* або *простором вибірок*, а результат кожного окремого експерименту – *вибірковою функцією* (див. рис. 4.1).

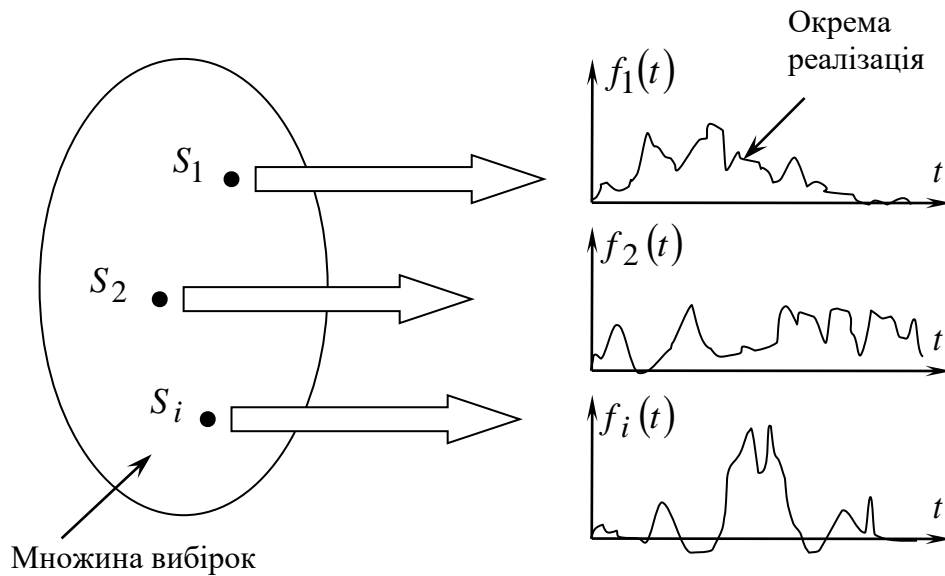


Рис. 4.1 – До визначення вибіркової функції

Нескінченна множина (або ансамбль)

$$\{f_i(t)\}_i = f(t) \quad (4.1)$$

задає **випадковий сигнал**, який породжується об'єктом або явищем, що досліджується.

Отже, випадковий сигнал являє собою нескінченну множину (ансамбль) вибірових функцій (реалізацій), які можуть бути отримані в результаті всіх можливих експериментів, що проводяться з досліджуваним об'єктом або явищем. Звичайно, при цьому невідомо, яка саме з вибраних функцій реалізується в даному конкретному експерименті.

Розглянемо деякий випадковий сигнал  $f(t)$  та зафіксуємо момент часу  $t_k$  на осі часу  $t$ .

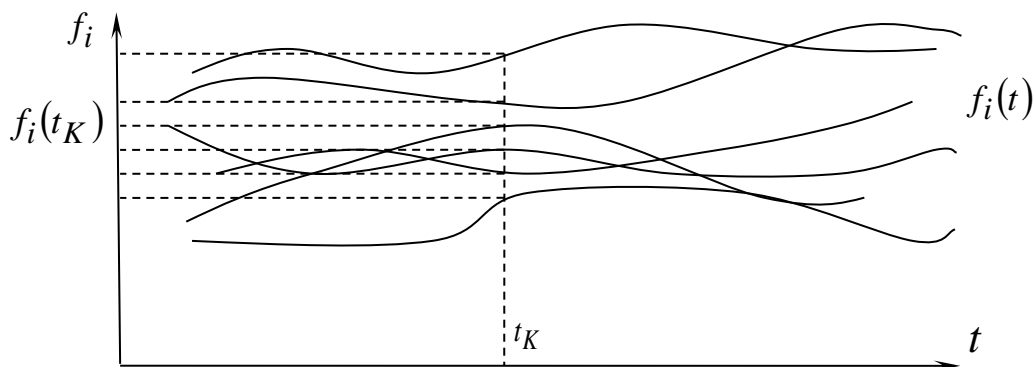


Рис. 4.2 – До визначення випадкового сигналу.  
Індекс  $i$  – це індекс елемента множини.

Значення випадкового сигналу в момент часу  $t_k$  являє собою **випадкову величину**:

$$f_k = \{f_i(t_k)\}_i = \{f_{ik}\}_i \quad (4.2)$$

Випадкова величина  $f_k$  може бути повністю визначена шляхом задання **щільності розподілу імовірностей**:

$$p(f_{ik}) = \lim_{\Delta f_{ik} \rightarrow 0} \frac{P[f_{ik} < f_k < f_{ik} + \Delta f_{ik}]}{\Delta f_{ik}}, \quad (4.3)$$

де чисельник  $P[\dots]$  – імовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина  $f_k$  прийме значення в інтервалі від  $f_{ik}$  до  $f_{ik} + \Delta f_{ik}$ .

Очевидно, імовірність цієї події дорівнює:

$$P[f_{ik} < f_k < f_{ik} + \Delta f_{ik}] = p(f_{ik})df_{ik} \quad (4.4)$$

Звідси випливає, що якщо відома функція щільності розподілу імовірностей для кожного можливого значення випадкової величини, то можна в кожному конкретному експерименті розрахувати імовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал.

Якщо визначити щільність розподілу імовірностей для всіх можливих значень аргументу  $t$ , то можна охарактеризувати весь випадковий сигнал  $f(t)$ . Однак, такий опис буде надзвичайно громіздким і в переважній кількості практичних випадків надмірним. Тому доцільно мати можливість спрощеного опису випадкового сигналу. Для цього розглянемо числові параметри випадкової величини.

Основними та найбільш вживаними числовими параметрами випадкової величини є:

1) **математичне очікування** (середнє статистичне значення):

$$m_{f_k} = \langle f_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_{ik} p(f_{ik}) df_{ik} \quad (\text{абсциса центра тяжіння}) \quad (4.5)$$

2) **дисперсія** – характеризує величину розкиду значень випадкової величини відносно середнього значення:

$$\sigma_{f_k}^2 = \langle |f_k - m_{f_k}|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |f_{ik} - m_{f_k}|^2 \cdot p(f_{ik}) df_{ik} \quad (\text{момент інерції відносно центра тяжіння}) \quad (4.6)$$

Отже,  $m_{f_k}$  характеризує середнє (в імовірнісному сенсі) значення випадкової величини, а дисперсія – середній розкид значень випадкової величини відносно її середнього значення.

Як параметр, що характеризує розкид (розсіювання) значення випадкової величини, часто використовується **стандартне відхилення**:

$$\sigma_{f_k} = + \sqrt{\sigma_{f_k}^2}.$$



Зручність використання стандартного відхилення полягає в тому, що воно має таку саму розмірність, що і випадкова величина. Очевидно, для опису випадкової функції можна використовувати параметри  $m_{f_k}$  і  $\sigma_{f_k}^2$ , розглядаючи їх як функції, в яких безперервно змінюється аргумент  $t$ :

$$m_f(t) = \langle f(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) \cdot p[f_i(t)] df_i(t), \quad (4.7)$$

$$\sigma_f^2(t) = \langle |f(t) - m_f(t)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |f_i(t) - m_f(t)|^2 \cdot p(f_i(t)) df_i(t). \quad (4.8)$$

На рис. 4.3 показані приклади різних по характеру випадкових функцій. Функції  $f(t)$  і  $g(t)$  мають однакове математичне очікування, але неоднакову дисперсію. Функції  $u(t)$  і  $v(t)$ , навпаки, мають практично однакову дисперсію, але абсолютно різне математичне очікування.

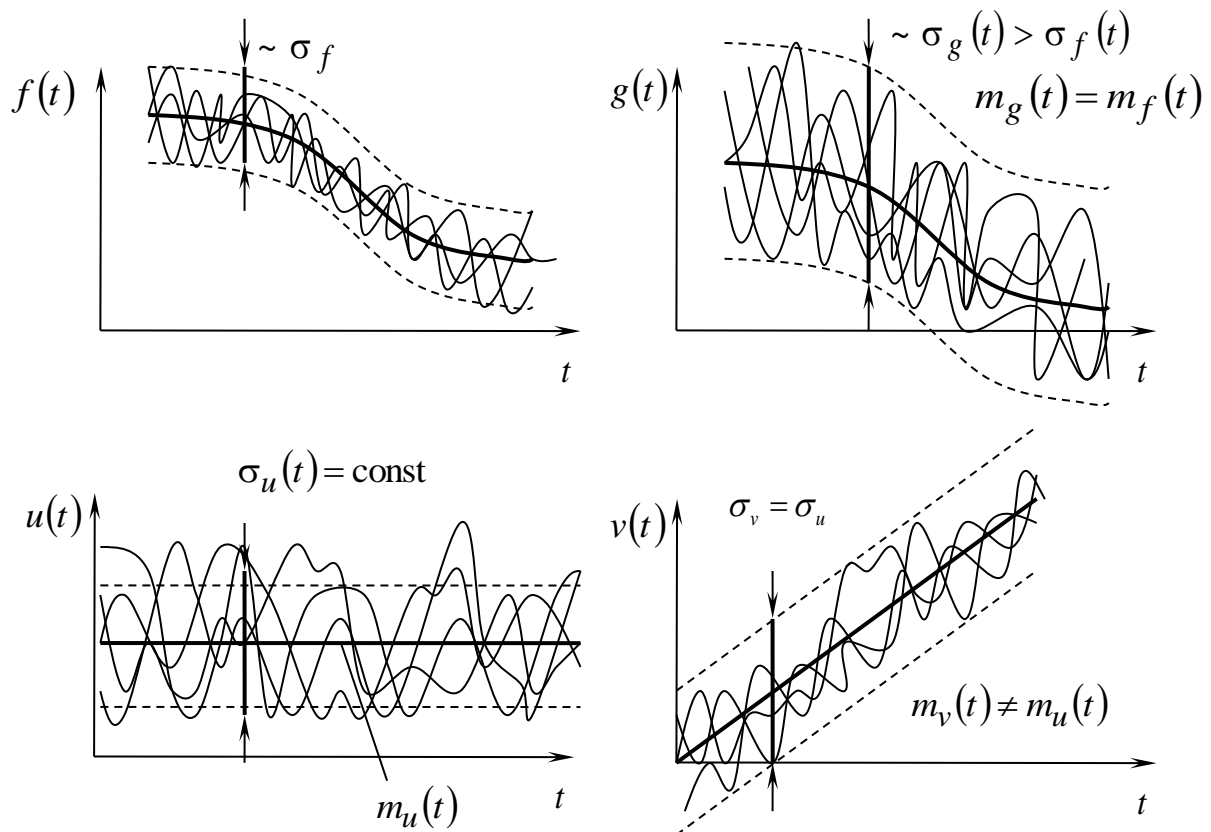


Рис. 4.3 – Приклади випадкових функцій, які відрізняються математичним очікуванням або дисперсією

Однак,  $m_f$  і  $\sigma_f$  не є достатніми характеристиками для опису випадкового сигналу. Дійсно, два повністю різних випадкових сигнали можуть мати однакові  $m_f$  і  $\sigma_f$ . Так, наведені на рис. 4.4 два сигнали відрізняються середньою швидкістю зміни амплітуди в часі.

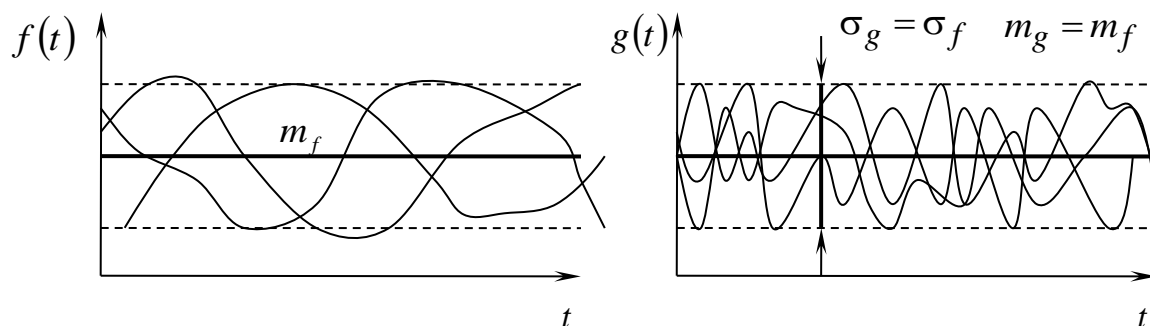


Рис. 4.4 – Дві випадкові функції з однаковими математичним очікуванням і дисперсією, але різною частотною поведінкою

Як характеристику швидкості зміни випадкового сигналу можна використовувати **автокореляційну функцію**:

$$K_f(t, t') = \langle f(t) \cdot f^*(t') \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) \cdot f_i^*(t') \cdot p[f_i(t), f_i(t')] df_i(t) df_i(t'), \quad (4.9)$$

де  $p[f_i(t), f_i(t')]$  – **двовірна щільність розподілу імовірностей** випадкової величини  $f(t)$  і  $f(t')$ :

$$p[f_i(t), f_i(t')] = \lim_{\substack{\Delta f_i(t) \rightarrow 0 \\ \Delta f_i(t') \rightarrow 0}} \frac{P \left[ \begin{array}{l} f_i(t) < f(t) < f_i(t) + \Delta f_i(t) \\ f_i(t') < f(t') < f_i(t') + \Delta f_i(t') \end{array} \right]}{\Delta f_i(t) \Delta f_i(t')}. \quad (4.10)$$

Автокореляційна функція характеризує середню швидкість зміни випадкового сигналу або статистичну (імовірнісну) залежність між собою значень випадкового сигналу в сусідні моменти часу.

Таким чином, у більшості практичних застосувань для опису випадкового сигналу достатньо використовувати три характеристики:  $m_f$ ,  $\sigma_f^2$  і  $K_f(t, t')$ .

## 4.2. Стаціонарність та ергодичність

Випадковий сигнал називається **стаціонарним у вузькому сенсі**, якщо кожна  $n$ -вимірна щільність розподілу імовірностей інваріантна до часового зсуву сигналу:

$$p[f_i(t), f_i(t'), f_i(t''), \dots, f_i(t^{(n)})] = p[f_i(t - \tau), f_i(t' - \tau), \dots, f_i(t^{(n)} - \tau)]. \quad (4.11)$$

Зокрема, для сигналу, що є стаціонарним у вузькому сенсі, на підставі (4.11) маємо:

$$p[f_i(t)] = p[f_i(t - \tau)] = p[f_i(t')] = p[f_i] \text{ – не залежить від часу} \quad (4.12)$$

$$p[f_i(t), f_i(t')] = p[f_i(t), f_i(t - \tau)] \quad (4.13)$$

Вираз (4.13) задає двовимірну щільність імовірності. Її значення залежить тільки від різниці аргументів:  $\tau = t' - t$ .

Тоді, підставляючи вираз (4.12) і (4.13) до формул (4.7)...(4.9), для стаціонарного у вузькому сенсі сигналу отримаємо:

$$\left. \begin{array}{l} m_f(t) = m_f = \text{const} \\ \sigma_f^2(t) = \sigma_f^2 = \text{const} \\ K_f(t, t') = K_f(\tau), \text{ де } \tau = t' - t. \end{array} \right\} \quad (4.14)$$

Випадкові сигнали, що задовольняють умовам (4.14) називаються **стаціонарними в широкому сенсі** або просто **стаціонарними**. Стаціонарний сигнал у вузькому сенсі завжди стаціонарний у широкому, але не навпаки.

Для ілюстрації стаціонарності на рис. 4.5 розглянемо різні випадкові процеси.

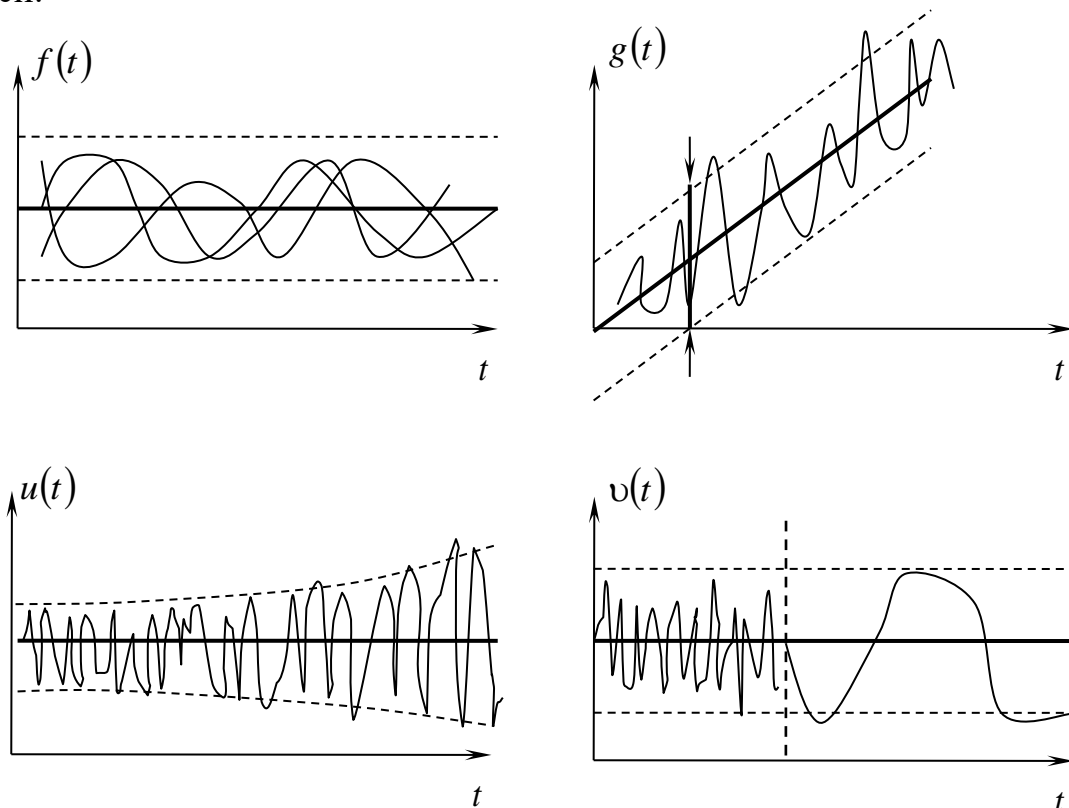


Рис. 4.5 – Ілюстрація стаціонарних та нестаціонарних процесів:

$f(t)$ :  $m_f = \text{const}$ ,  $\sigma_f = \text{const}$  – стаціонарний процес;

$g(t)$ :  $m_g \neq \text{const}$ ,  $\sigma_g = \text{const}$  – нестаціонарний процес;

$u(t)$ :  $m_u = \text{const}$ ,  $\sigma_u \neq \text{const}$  – нестаціонарний процес;

$v(t)$ :  $m_v = \text{const}$ ,  $\sigma_v = \text{const}$ ,  $K_v(t, t') \neq K_v(\tau)$  – нестаціонарний процес.

З рис. 4.5 можна зробити такий важливий висновок: стаціонарність характеризує часову однорідність (стабільність) випадкового сигналу.

Переважає більшість реальних випадкових сигналів мають нестационарну природу. Однак, враховуючи відносну простоту опису стаціонарних сигналів, нестационарний сигнал намагаються привести до стаціонарного.

Якщо випадковий сигнал є нестационарним через непостійність математичного очікування (див. сигнал  $g(t)$  на рис.), то він може бути легко приведений до стаціонарного шляхом **центрування**, тобто віднімання від реалізацій сигналу математичного очікування  $\overset{\circ}{g}(t)$ :

$$\overset{\circ}{g}(t) = g(t) - m_g(t).$$

У загальному випадку, нестационарний випадковий сигнал розбивають на такі часові інтервали, в межах яких його можна вважати стаціонарним (див. вертикальний пунктир на графіку сигналу  $v(t)$ ).

Стаціонарний випадковий сигнал називають **ергодичним**, якщо його характеристики, що отримані усередненням за часом значень однієї реалізації, з імовірністю, близькою до 1, дорівнюють характеристикам, отриманим шляхом усереднення за ансамблем реалізацій.

Іншими словами, під час обчислення характеристик ергодичного сигналу операцію усереднення за ансамблем реалізацій можна замінити усередненням за часом однієї реалізації:

$$m_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_i(t) dt, \quad (4.15)$$

$$\sigma_f^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (f_i(t) - m_f)^2 dt, \quad (4.16)$$

$$K_f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_i(t) f_i^*(t - \tau) dt. \quad (4.17)$$

Вираз для кореляційної функції ергодичного сигналу (4.17) повністю збігається з визначенням кореляційної функції детермінованого сигналу з нескінченною енергією, але кінцевою потужністю.

Як видно з наведених на рис. 4.6 ілюстрацій, сигнал  $f(t)$  характеризується відносною постійністю своїх характеристик при переході від однієї реалізації до іншої. Тому його можна вважати ергодичним.

Характеристики сигналу  $g(t)$ , обчислені за окремими реалізаціями, істотно відрізняються одна від одної. Тому сигнал  $g(t)$  є в дійсності неергодичним.

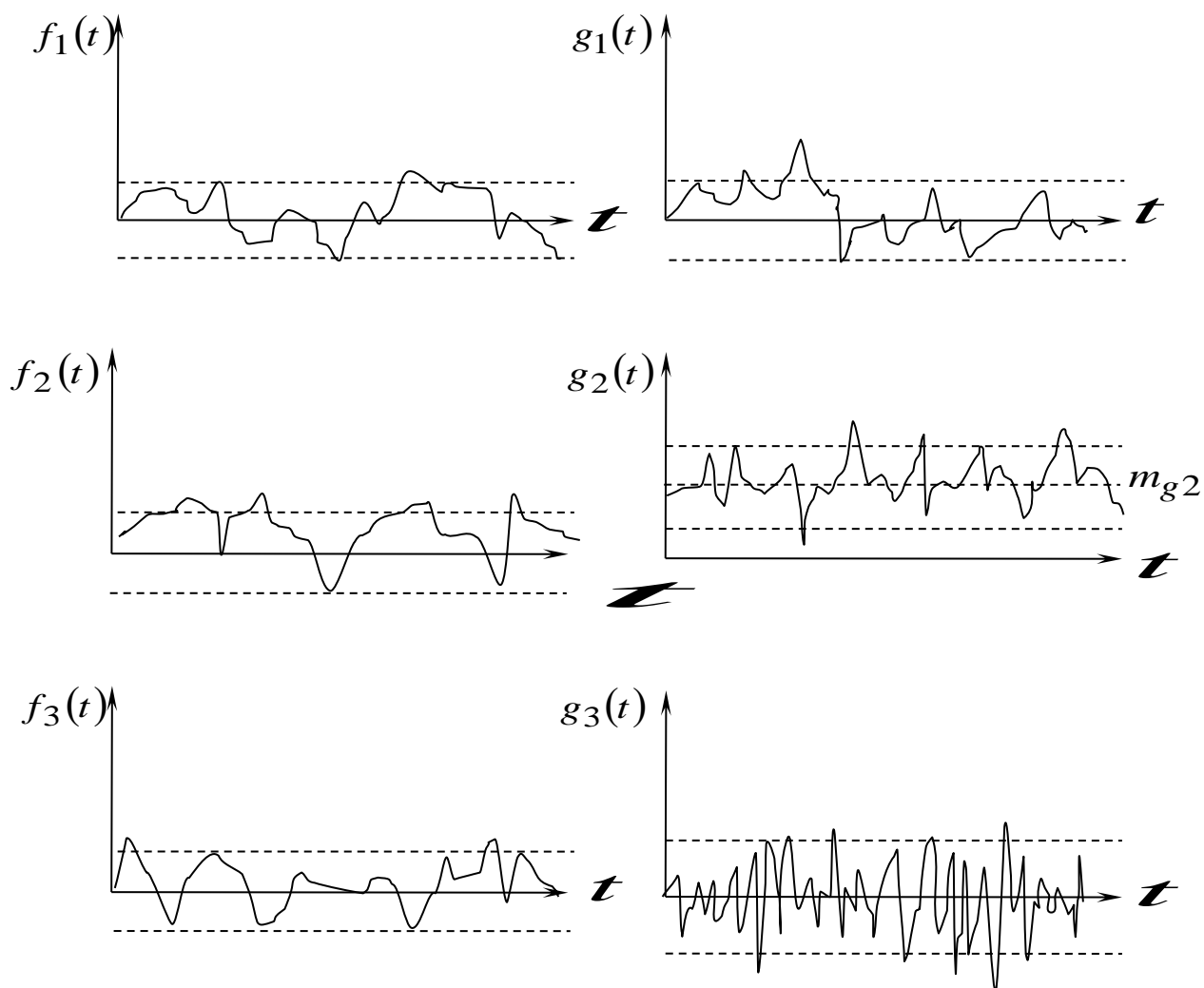


Рис. 4.6 – Ілюстрація ергодичності:  
 процес  $f(t)$ , показаний ліворуч, є ергодичним;  
 процес  $g(t)$ , показаний праворуч, є неергодичним

Таким чином, властивості ергодичності характеризують ансамблеву однорідність випадкового сигналу, тобто однорідність сигналу в ансамблі реалізацій.

### 4.3. Автокореляційна та крос-кореляційна функції

Розглянемо властивості автокореляційної функції  $K_f(\tau)$  стаціонарного сигналу  $f(t)$ .

Властивість 1. **Симетрія:**

$$K_f(\tau) = K_f^*(-\tau). \quad (4.18)$$

Зокрема, для дійсного випадкового сигналу:

$$K_f(\tau) = K_f(-\tau), \quad (4.19)$$

тобто автокореляція дійсного випадкового сигналу є парною.

Доведення:

$$\begin{aligned} K_f(\tau) &= \langle f(t)f^*(t-\tau) \rangle = (\langle f^*(t)f(t-\tau) \rangle)^* = \\ &= \left. \begin{array}{l} t-\tau = t' \\ dt = dt' \\ t = t' + \tau \end{array} \right| = (\langle f^*(t'+\tau)f(t') \rangle)^* = \\ &= (\langle f(t')f^*(t' - (-\tau)) \rangle)^* = K_f^*(-\tau). \end{aligned}$$

Властивість 2. **Автокореляція в нульовій точці:**

$$\boxed{K_f(0) = \langle |f(t)|^2 \rangle} \text{ – середня потужність.} \quad (4.20)$$

Доведення:

Як впливає із визначення кореляційної функції:

$$K_f(0) = \langle f(t)f^*(t-0) \rangle = \langle f(t)f^*(t) \rangle = \langle |f(t)|^2 \rangle.$$

Властивість 3. **Максимум автокореляції**

$$\boxed{K_f(0) \geq K_f(\tau)}. \quad (4.21)$$

Автокореляційна функція досягає максимального значення в точці  $\tau = 0$ .

Доведення:

Розглянемо середній квадрат суми-різниці:

$$\begin{aligned} &\langle |f(t) \pm f(t-\tau)|^2 \rangle \geq 0 \\ &\langle |f(t)|^2 \rangle + \langle |f(t-\tau)|^2 \rangle \pm \langle f(t)f^*(t-\tau) \rangle \pm \langle f^*(t)f(t-\tau) \rangle = \\ &= K_f(0) + K_f(0) \pm K_f(\tau) \pm K_f^*(-\tau) = 2K_f(0) \pm 2K_f(\tau) = \\ &= 2(K_f(0) \pm K_f(\tau)) \geq 0 \end{aligned}$$

або

$$K_f(0) \geq \mp K_f(\tau).$$

Властивість 4. **Автокореляція в нескінченності:**

$$\boxed{K_f(\infty) = |m_f|^2}. \quad (4.22)$$

Доведення:

$$K_f(\infty) = \langle f(t) \cdot f^*(t-\infty) \rangle.$$

Очевидно, що випадкові величини  $f(t)$  і  $f^*(t-\infty)$  є статистично незалежними. Тому їх усереднений добуток дорівнює добутку їх усереднених значень:

$$K_f(\infty) = \langle f(t) \rangle \cdot \langle f^*(t - \infty) \rangle = m_f \cdot m_f^* = |m_f|^2.$$

Властивість 5. *Дисперсія*:

$$K_f(0) - K_f(\infty) = \sigma_f^2. \quad (4.23)$$

Доведення:

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= \langle |f(t) - m_f|^2 \rangle = \\ &= \langle |f(t)|^2 \rangle + \langle |m_f|^2 \rangle - \langle f(t) \cdot m_f^* \rangle - \langle f^*(t) \cdot m_f \rangle = \\ &= \langle |f(t)|^2 \rangle + \langle |m_f|^2 \rangle - m_f^* \langle f(t) \rangle - m_f \langle f^*(t) \rangle = \\ &= \langle |f(t)|^2 \rangle - |m_f|^2 = K_f(0) - K_f(\infty). \end{aligned}$$

Використовуючи наведені властивості 1...5, можна представити загальний вигляд автокореляційної функції стаціонарного ергодичного випадкового сигналу (див. рис. 4.7).

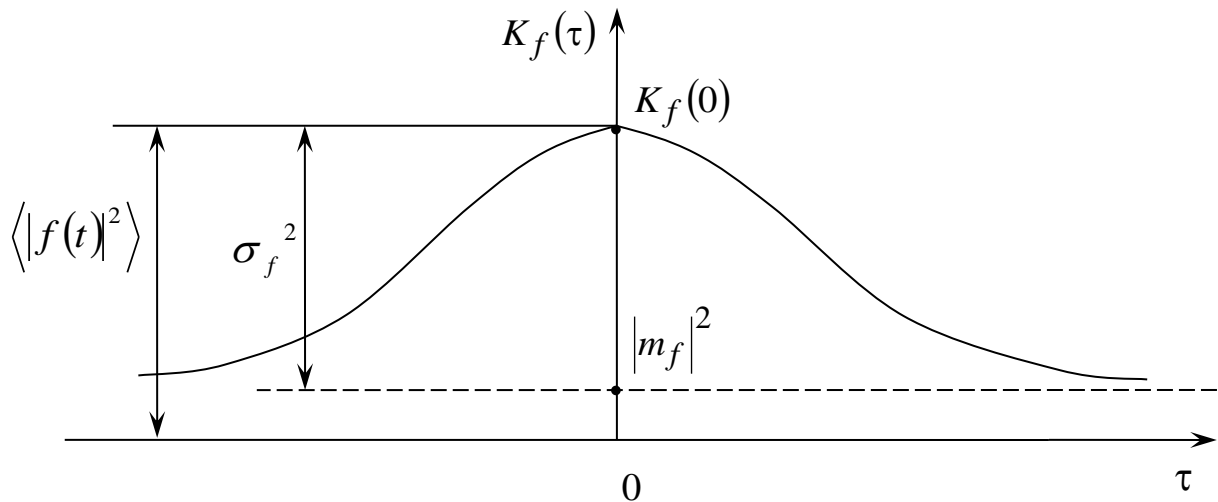


Рис. 4.7 – Автокореляційна функція та її параметри

Як видно з наведеного рисунку, кореляційна функція є найбільш універсальною характеристикою випадкового сигналу. За нею можна визначити математичне очікування, дисперсію і середню потужність випадкового сигналу.

Часто замість кореляційної функції для опису випадкового сигналу використовують *коваріаційну функцію*:

$$R_f(\tau) = \langle (f(t) - m_f)(f^*(t - \tau) - m_f^*) \rangle. \quad (4.24)$$

Коваріаційну функцію також називають центральним змішаним моментом.

Очевидно, коваріаційна і кореляційна функції пов'язані між собою:

$$\left. \begin{aligned} R_f(\tau) &= K_f(\tau) - |m_f|^2, \\ R_f(0) &= \sigma_f^2, \\ R_f(\infty) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Таким чином, графік коваріаційної функції матиме вигляд, як показано на рис. 4.8.

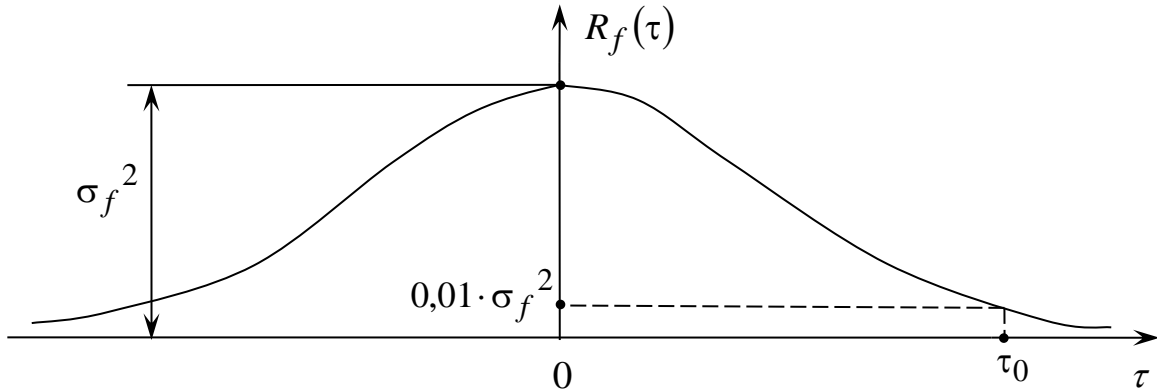


Рис. 4.8 – Коваріаційна функція та її параметри

Середня швидкість зміни випадкового сигналу може бути кількісно охарактеризована величиною  $\tau_0$ , яка називається *інтервалом кореляції* або *часом кореляції*, для якої

$$R_f(\tau_0) = 0,01 \cdot R_f(0).$$

Очевидно, випадкові величини  $f(t)$  і  $f(t - \tau_0)$  можна вважати статистично незалежними.

Часто інтервал кореляції визначають інакше:

$$\tau_0 = \frac{\int_0^{\infty} K_f(\tau) d\tau}{K_f(0)}. \quad (4.26)$$

Розглянемо два ергодичних стаціонарних випадкових сигнали  $f(t)$  і  $g(t)$  з кореляційними функціями  $K_f(\tau)$ ,  $K_g(\tau)$ .

Щоб охарактеризувати імовірнісну залежність між різними сигналами використовують *взаємні кореляційні функції*:

$$K_{fg}(\tau) = \langle f(t) \cdot g^*(t - \tau) \rangle, \quad (4.27)$$

$$K_{gf}(\tau) = \langle g(t) \cdot f^*(t - \tau) \rangle. \quad (4.28)$$

Взаємна кореляційна функція, на відміну від автокореляційної функції, має таку властивість:

$$K_{fg}(\tau) = K_{gf}^*(-\tau). \quad (4.29)$$



Зокрема, для дійсної функції:

$$K_{fg}(\tau) = K_{gf}(-\tau). \quad (4.30)$$

У загальному випадку, функції  $K_{fg}(\tau)$  і  $K_{gf}(\tau)$  є різними. Тому взаємно кореляційна функція не є ані парною, ані непарною.

Імовірнісні властивості системи двох випадкових сигналів найбільш повно можуть бути описані так званою **кореляційною матрицею**  $f(t)$ :

$$\vec{K}_{fg}(\tau) = \begin{pmatrix} K_f(\tau) & K_{fg}(\tau) \\ K_{gf}(\tau) & K_g(\tau) \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Як видно, в загальному випадку повний опис кореляційної функції потребує задання чотирьох різних кореляційних функцій.

## 4.4. Спектральне представлення випадкових сигналів

### 4.4.1. Теорема Вінера-Хінчина

Нехай  $f_i(t)$  є реалізацією ергодичного стаціонарного сигналу  $f(t)$  з кореляційною функцією  $K_f(t)$ .

Нехай  $f_{iT}(t)$  – реалізація  $f_i(t)$ , усічена на інтервалі  $-T/2 \leq t \leq T/2$ . Її вигляд показано на рис. 4.9.

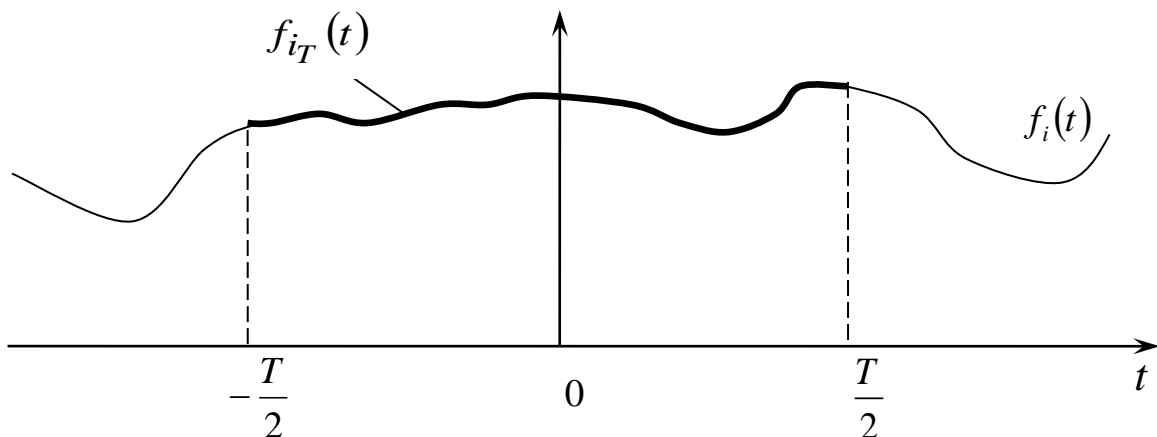


Рис. 4.9 – Усічення однієї реалізації ергодичного сигналу

Тоді, очевидно, потужність реалізації  $f_i(t)$  може бути записана у вигляді:

$$P_{f_i} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |f_{iT}(t)|^2 dt. \quad (4.32)$$

Використовуючи енергетичну теорему Релея, наведену наприкінці теми 3.3, вираз (4.32) можна переписати як:

$$P_{fi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |F_{iT}(\nu)|^2 d\nu, \quad (4.33)$$

де  $F_{iT}(\nu) = \mathcal{F}\{f_{iT}(t)\}$ .

Потужність випадкового сигналу  $f(t)$  можна знайти усередненням (4.33):

$$P_f = \langle P_{fi} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \langle |F_{iT}(\nu)|^2 \rangle d\nu. \quad (4.34)$$

Тоді величина

$$\boxed{S_f(\nu) = \frac{dP_f}{d\nu}}. \quad (4.35)$$

буде представляти собою **спектральну щільність потужності випадкового сигналу або енергетичний спектр випадкового сигналу  $f(t)$** .

Диференціюючи вираз (4.34) по  $d\nu$ , отримаємо:

$$\boxed{S_f(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle |F_{iT}(\nu)|^2 \rangle}. \quad (4.36)$$

Спектральна щільність потужності характеризує частку потужності випадкового сигналу  $f(t)$ , що припадає на диференційно малу смугу частот шириною  $d\nu$  (рис. 4.10).

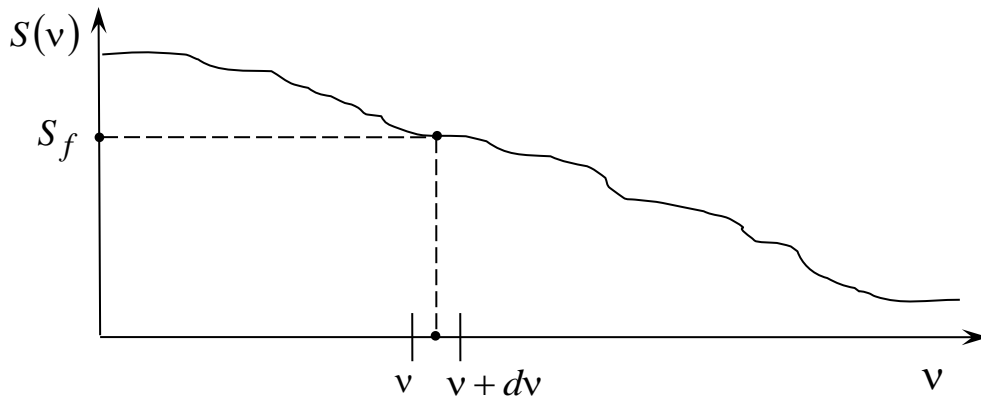


Рис. 4.10 – Спектральна щільність потужності

Встановимо зв'язок між функціями  $K_f(\tau)$  і  $S_f(\nu)$ . Знайдемо зворотне Фур'є перетворення  $S_f(\nu)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{S_f(\nu)\} &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle |F_{i_T}(\nu)|^2 \rangle\right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle \tau^{-1} \{ |F_{i_T}(\nu)|^2 \} \rangle = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle \mathcal{F}^{-1}\{F_{i_T}(\nu)\} \cdot \mathcal{F}^{-1}\{F_{i_T}(\nu)\} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle f_{i_T}(\tau) \cdot f_{i_T}(\tau) \rangle = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle \int_{-T/2}^{T/2} f_i(t) f^*(t - \tau) dt \rangle.\end{aligned}$$

Враховуючи, що за припущенням випадковий сигнал є ергодичним, кутові дужки в останньому виразі можна випустити.

$$\mathcal{F}^{-1}\{S_f(\nu)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_i(t) f^*(t - \tau) dt = K_f(\tau). \quad (4.37)$$

Отже, доведено *теорему Вінера-Хінчина*:

$$\boxed{K_f(\tau) \leftrightarrow S_f(\nu)}. \quad (4.38)$$

Кореляційна функція і спектральна щільність потужності стаціонарного ергодичного сигналу утворюють пару перетворень Фур'є.

Отже, стаціонарний ергодичний сигнал може бути описаний двома способами: або за допомогою кореляційною функції  $K_f(\tau)$ , або за допомогою енергетичного спектра  $S_f(\nu)$ .

#### 4.4.2. Властивості енергетичного спектра

Розглянемо *основні властивості енергетичного спектра*  $S_f(\nu)$ :

Властивість 1. *Невід'ємність*:

$$\boxed{S_f(\nu) \geq 0}. \quad (4.39)$$

Доведення: Випливає з визначення, див. (4.36).

Властивість 2. *Значення в нульовій точці*:

$$\boxed{S_f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} K_f(\tau) d\tau}. \quad (4.40)$$

Доведення: Згідно з теоремою Вінера-Хінчина:

$$S_f(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} K_f(\tau) \exp(-i2\pi\nu\tau) d\tau. \quad (4.41)$$

При  $\nu = 0$  вираз (4.41) набуде вигляду (4.40).

Властивість 3. *Площа під графіком*:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} S_f(\nu) d\nu = K_f(0)}. \quad (4.42)$$

Доведення: Згідно з теоремою Вінера-Хінчина:

$$K_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\nu) \exp(+i2\pi\nu\tau) d\nu. \quad (4.43)$$

При  $\tau = 0$  вираз (4.43) набуде вигляду (4.42).

Доречно зазначити, що вираз  $K_f(0) = \langle |f(t)|^2 \rangle$  характеризує середню потужність сигналу.

Властивість 4. **Симетрія** (для дійсного випадкового сигналу):

$$S_f(\nu) = S_f(-\nu). \quad (4.44)$$

Доведення:

За властивістю №1 «Симетрія» автокореляційної функції дійсного випадкового сигналу:  $K_f(\tau) = K_f(-\tau)$ . Тоді згідно з теоремою Вінера-Хінчина:

$$\begin{aligned} S_f(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_f(\tau) \exp(-i2\pi\nu\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K_f(-\tau) \exp(-i2\pi\nu\tau) d\tau = \left. \begin{array}{l} \text{Заміна:} \\ \tau' = -\tau \\ |d\tau' = -d\tau| \end{array} \right| = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K_f(\tau') \exp(-i2\pi(-\nu)\tau') d\tau' = S_f(-\nu). \end{aligned}$$

#### 4.4.3. Ефективна ширина спектра

Щоб охарактеризувати смугу частот, яку займає випадковий сигнал (див. рис. 4.11), вводиться поняття **ефективної ширини спектра**  $S_f(\nu)$ :

$$\Delta\nu = \frac{\int_0^{\infty} S_f(\nu) d\nu}{S_f(0)}. \quad (4.45)$$

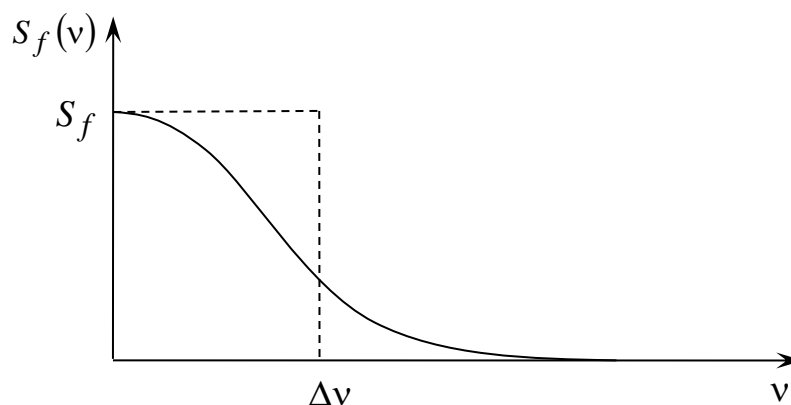


Рис. 4.11 – До визначення ефективного ширини спектра

Між ефективною шириною спектра і часом кореляції існує зв'язок. Для його встановлення скористаємося властивостями 2 і 3 енергетичного спектра, тобто виразами (4.40) і (4.42):

$$\Delta v = \frac{\int_0^\infty S_f(v) dv}{S_f(0)} = \left| \frac{\int_0^\infty S_f(v) dv = \frac{K_f(0)}{2}}{S_f(0) = \int_{-\infty}^\infty K_f(\tau) d\tau} \right| = \frac{K_f(0)}{2 \int_{-\infty}^\infty K_f(\tau) d\tau} = \frac{K_f(0)}{4 \int_0^\infty K_f(\tau) d\tau} = \frac{1}{4\tau_0},$$

звідки

$$\boxed{\Delta v \cdot \tau_0 = \frac{1}{4} = \text{const}}. \quad (4.46)$$

Величина  $\Delta v \cdot \tau_0$  називається *часово-смуговим добутком сигналу*. Вона показує, що при зменшенні одного з параметрів  $\Delta v$  або  $\tau_0$  інший параметр буде збільшуватися.

## 4.5. Проходження випадкового сигналу через лінійну систему

Розглянемо лінійну інваріантну систему з імпульсним відгуком  $h(t_2 - t_1)$ . Схематично це можна представити рис. 4.12.

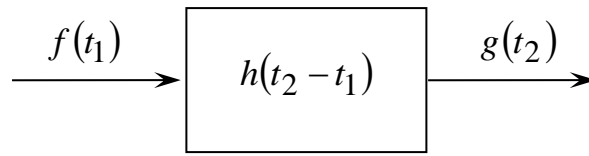


Рис. 4.12 – Проходження випадкового сигналу через лінійну інваріантну систему

Нехай на вхід системи потрапляє випадковий сигнал (в загальному випадку, нестационарний) з кореляційною функцією  $K_f(t_1, t_1')$ :

$$K_f(t_1, t_1') = \langle f_i(t_1) f_i^*(t_1') \rangle. \quad (4.47)$$

Зрозуміло, що сигнал на виході системи також буде випадковим. Знайдемо кореляційну функцію вихідного сигналу.

Спочатку розглянемо вираз для  $i$ -ї реалізації вихідного сигналу:

$$g_i(t_2) = \int_{-\infty}^\infty f_i(t_1) h(t_2 - t_1) dt_1 = \int_{-\infty}^\infty f_i(t_2 - t_1) h(t_1) dt_1. \quad (4.48)$$

Тоді

$$\begin{aligned} K_g(t_2, t_2') &= \langle g_i(t_2) g_i^*(t_2') \rangle = \\ &= \left\langle \int_{-\infty}^\infty f_i(t_2 - t_1) h(t_1) dt_1 \int_{-\infty}^\infty f_i^*(t_2' - t_1') h^*(t_1') dt_1' \right\rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1) h^*(t_1') \left\langle f_i(t_2 - t_1) f_i^*(t_2' - t_1') \right\rangle dt_1 dt_1' = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1) h^*(t_1') K_f(t_2 - t_1, t_2' - t_1') dt_1 dt_1'.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\boxed{K_g(t_2, t_2') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1) h^*(t_1') K_f(t_2 - t_1, t_2' - t_1') dt_1 dt_1'}. \quad (4.49)$$

Як видно, в загальному випадку, коли маємо нестационарний вхідний сигнал, кореляційна функція вихідного сигналу дорівнює двократному інтегралу суперпозиції від кореляційної функції вхідного сигналу та двох імпульсних відгуків системи.

Іншими словами, знаючи імпульсний відгук системи і кореляційну функцію вхідного сигналу, за формулою (4.49) можна знайти кореляційну функцію вихідного сигналу.

Розглянемо тепер випадок, коли вхідний сигнал є стаціонарним. Тоді можемо записати:

$$K_f(t_2 - t_1, t_2' - t_1') = K_f(t_2 - t_1 - t_2' + t_1') = K_f(\tau - t_1 + t_1'), \quad (4.50)$$

де  $\tau = t_2 - t_2'$ .

Отже,

$$\boxed{K_g(t_2, t_2') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1) h^*(t_1') K_f(\tau - t_1 + t_1') dt_1 dt_1' = K_g(\tau)}. \quad (4.51)$$

З останнього виразу добре видно, що вихідний сигнал у цьому випадку також буде стаціонарним.

Вираз (4.51) показує, що в разі стаціонарного вхідного впливу кореляційна функція реакції системи може бути знайдена як двократна згортка кореляційної функції вхідного сигналу з імпульсними відгуками лінійної системи:

$$K_g(\tau) = K_f(\tau) \otimes h(\tau + t_1) \otimes h^*(\tau - t_1). \quad (4.52)$$

Виконавши перетворення Фур'є обох частин виразу (4.51) і використовуючи теорему Вінера-Хінчина, отримаємо:

$$\begin{aligned}
S_g(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1) h^*(t_1') \mathcal{F}\{K_f(\tau - t_1 + t_1')\} dt_1 dt_1' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1) h^*(t_1') S_f(v) \cdot \exp[-i2\pi v(t_1 - t_1')] dt_1 dt_1' = \\
&= S_f(v) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1) \exp(-i2\pi v t_1) dt_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t_1') \exp(+i2\pi v t_1') dt_1' = \\
&= S_f(v) H(v) H^*(v) = S_f(v) \cdot |H(v)|^2.
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\boxed{S_g(v) = S_f(v) \cdot |H(v)|^2}. \quad (4.53)$$

Рівняння (4.53) повністю еквівалентне рівнянню (4.51) та описує поведінку лінійної інваріантної системи при стаціонарному входньому впливі в частотній області.

По-перше, рівняння (4.51) і (4.53) утворюють пару перетворень Фур'є. Їх розмірності зазвичай такі:

$$[A^2] \text{ або } [B^2] \text{ в виразі (4.51)}$$

та

$$\left[ \frac{A^2}{\Gamma_{\Pi}} \right] \text{ або } \left[ \frac{B^2}{\Gamma_{\Pi}} \right] \text{ в виразі (4.53)}.$$

По-друге, необхідно розрізнити рівняння (4.51) і (4.53), що характеризують поведінку лінійної системи при випадковому впливі, від відповідних рівнів, що описують поведінку тієї ж самої системи при детермінованому впливі (сигналі):

$$g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)f(\tau - t)dt \quad [A] \text{ або } [B]$$

$$G(v) = F(v) \cdot H(v) \quad \left[ \frac{A}{\Gamma_{\Pi}} \right] \text{ або } \left[ \frac{B}{\Gamma_{\Pi}} \right]$$

де  $F(v) = \mathcal{F}\{f(\tau)\}$ ;  $G(v) = \mathcal{F}\{g(\tau)\}$ ;  $H(v) = \mathcal{F}\{h(\tau)\}$ .

Отже, при детермінованому впливі рівняння лінійної системи пов'язує амплітуди сигналів на вході і виході, а при випадковому впливі – їх потужності.

## 4.6. Випадкові сигнали на площині

Просторовий випадковий сигнал, що залежить від змінних  $x$  і  $y$ , прийнято називати **випадковим полем**.

Методи опису та характеристики випадкових полів можуть бути отримані узагальненням усіх попередніх результатів на двовимірний випадок:

$$f(x, y) = \{f_i(x, y)\}_i, \quad (4.54)$$

$$K_f(\vec{x}, \vec{x}') = \langle f_i(\vec{x}) \cdot f_i^*(\vec{x}') \rangle. \quad (4.55)$$

Для **стаціонарного в широкому сенсі** випадкового поля:

$$\boxed{K_f(\vec{x}, \vec{x}') = K_f(\vec{\xi}) = \langle f_i(\vec{x}) \cdot f_i^*(\vec{x} - \vec{\xi}) \rangle}, \quad (4.56)$$

де  $\vec{\xi} = \vec{x} - \vec{x}'$ .

$$S_f(\vec{v}_x) = \lim_{XY \rightarrow \infty} \frac{1}{XY} \left\langle |F_{i_{XY}}(\vec{v}_x)|^2 \right\rangle, \quad (4.57)$$

$$K_f(\vec{\xi}) \Leftrightarrow S_f(\vec{v}_x). \quad (4.58)$$

Аналогом поняття «ергодичність» для випадкового поля є **однорідність**. Для однорідного випадкового поля:

$$K_f(\vec{\xi}) = \lim_{XY \rightarrow \infty} \frac{1}{XY} \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} \int_{-\frac{Y}{2}}^{\frac{Y}{2}} f_i(\vec{x}) f_i^*(\vec{x} - \vec{\xi}) d\vec{x}. \quad (4.59)$$

Випадкове поле називається **ізотропним**, якщо

$$\boxed{K_f(\vec{\xi}) = K_f(r)}, \quad (4.60)$$

$$\text{де } r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

**Теорема Вінера-Хінчина для ізотропного поля:**

$$\boxed{S_f(\rho) = 2\pi \int_0^\infty r K_f(r) I_0(2\pi r \rho) dr}, \quad (4.61)$$

$$\text{де } \rho = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Для ізотропного випадкового поля функції  $K_f(r)$  і  $S_f(\rho)$  утворюють пару Фур'є-Бесселя.

## 4.7. Випадкові сигнали в оптиці

### 4.7.1. Опис поля при квазімонохроматичному випроміненні

Розглянемо основні елементи **теорії когерентності**.

Як вже було показано у випадку монохроматичного випромінення, світлове поле в площині  $x, y$  може бути описано комплексним оптичним сигналом:

$$E(x, y) = |E(x, y)| \cdot \exp[i\varphi(x, y)], \quad (4.62)$$

де  $|E|$ ,  $\varphi$  – детерміновані функції просторових координат.

У випадку квазімонохроматичного випромінення зі смугою частот, яка значно менша за середню частоту ( $\Delta\nu \ll \nu_{\text{сеп}}$ ), вираз для оптичного сигналу можна представити у вигляді:

$$E(\vec{x}, t) = |E(\vec{x}, t)| \cdot \exp[i\varphi(\vec{x}, t)], \quad (4.63)$$

де  $|E|$ ,  $\varphi$  – випадкові функції часу з нульовими середніми значеннями.



Отже, для опису оптичного сигналу при квазімонохроматичному випромінненні необхідно використовувати імовірнісні методи теорії випадкових функцій.

Розглянемо оптичний сигнал у двох точках площини  $x, y$  для випадку квазімонохроматичного випроміннення (див. рис. 4.13).

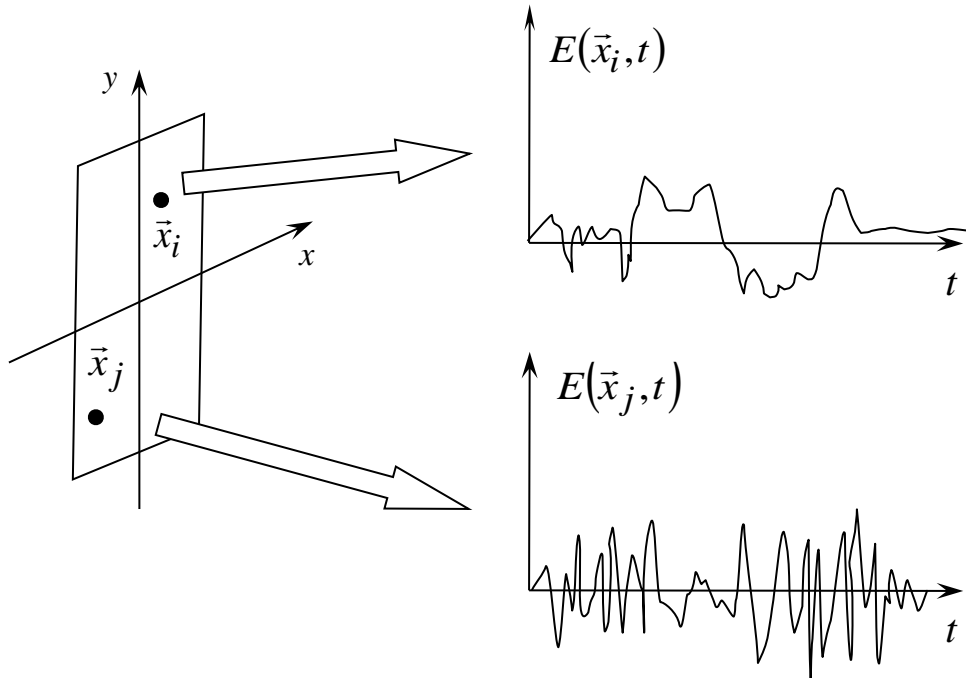


Рис. 4.13 – Випадковий оптичний сигнал у двох точках

Для того, щоб описати імовірнісну просторово-часову структуру оптичного сигналу в площині  $XY$ , можна використовувати **кореляційну матрицю**:

$$\vec{K}_{\vec{x}_i \vec{x}_j}(t, t') = \begin{pmatrix} K_{\vec{x}_i \vec{x}_i}(t, t') & K_{\vec{x}_i \vec{x}_j}(t, t') \\ K_{\vec{x}_j \vec{x}_i}(t, t') & K_{\vec{x}_j \vec{x}_j}(t, t') \end{pmatrix}, \quad (4.64)$$

де  $K_{\vec{x}_i \vec{x}_i}(t, t')$ ,  $K_{\vec{x}_j \vec{x}_j}(t, t')$  – автокореляційні функції сигналів  $E(\vec{x}_i, t)$  і  $E(\vec{x}_j, t)$ ;  $K_{\vec{x}_i \vec{x}_j}(t, t')$ ,  $K_{\vec{x}_j \vec{x}_i}(t, t')$  – взаємні кореляції сигналів  $E(\vec{x}_i, t)$  і  $E(\vec{x}_j, t)$ .

Припускаючи, що сигнали  $E(\vec{x}_i, t)$  і  $E(\vec{x}_j, t)$  є стаціонарними, можна записати:

$$K_{\vec{x}_i \vec{x}_i}(t, t') = \langle E(\vec{x}_i, t) E^*(\vec{x}_i, t - \tau) \rangle = \Gamma_i(\tau), \quad (4.65)$$

$$K_{\vec{x}_i \vec{x}_j}(t, t') = \langle E(\vec{x}_i, t) E^*(\vec{x}_j, t - \tau) \rangle = \Gamma_{ij}(\tau). \quad (4.66)$$

З урахуванням виразів (4.65) і (4.66), матрицю (4.64) можна переписати у вигляді:

$$\vec{\Gamma}_{ij}(\tau) = \begin{pmatrix} \Gamma_i(\tau) & \Gamma_{ij}(\tau) \\ \Gamma_{ji}(\tau) & \Gamma_j(\tau) \end{pmatrix}, \quad (4.67)$$

де  $\Gamma_{jj} = \Gamma_j$ ,  $\Gamma_{ii} = \Gamma_i$ .

Матриця  $\vec{\Gamma}_{ij}(\tau)$  в виразі (4.67) називається **матрицею когерентності**. При цьому  $\Gamma_i, \Gamma_j$  – **функції когерентності** (або **функції автокогерентності**),  $\Gamma_{ij}, \Gamma_{ji}$  – **функції взаємної когерентності**.

Якщо припустити, що сигнали  $E(\vec{x}_i, t)$  і  $E(\vec{x}_j, t)$  є ергодичними, то функції когерентності можна розрахувати за дещо спрощеними формулами:

$$\Gamma_{ij}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E(\vec{x}_i, t) E^*(\vec{x}_j, t - \tau) dt, \quad (4.68)$$

$$\Gamma_i(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E(\vec{x}_i, t) E^*(\vec{x}_i, t - \tau) dt. \quad (4.69)$$

Очевидними є такі властивості функції когерентності:

$$1) \Gamma_i(0) = \langle E(\vec{x}_i, t) E(\vec{x}_i, t) \rangle = I_i - \text{інтенсивність} \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]. \quad (4.70)$$

$$2) \Gamma_{ij}(0) = \langle E(\vec{x}_i, t) E^*(\vec{x}_j, t) \rangle = I_{ij} - \text{взаємна інтенсивність}. \quad (4.71)$$

$$3) \Gamma_i(0) \geq \Gamma_i(\tau). \quad (4.72)$$

$$4) \Gamma_i(0) \geq \Gamma_{ij}(0). \quad (4.73)$$

Визначимо **нормовану функцію когерентності** як:

$$\gamma_{ij}(\tau) = \frac{\Gamma_{ij}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_i(0) \cdot \Gamma_j(0)}} = \frac{\Gamma_{ij}(\tau)}{\sqrt{I_i \cdot I_j}}, \quad (4.74)$$

де  $i \neq j$ . Якщо  $i = j$ , то отримуємо

$$\gamma_i(\tau) = \frac{\Gamma_i(\tau)}{I_i}. \quad (4.75)$$

Функція  $\gamma_{ij}(\tau)$  називається **комплексним ступенем когерентності**.

Використовуючи властивості (4.70) ... (4.73), можна показати, що

$$0 \leq |\gamma_{ij}(\tau)| \leq 1. \quad (4.76)$$

Таким чином, величина  $|\gamma_{ij}(\tau)|$  може слугувати кількісною характеристикою ступеню когерентності оптичного випромінення.

Розглядаючи когерентність, необхідно розрізняти два її типи:

- часову когерентність;
- просторову когерентність.

### 4.7.2. Часова когерентність

**Часова когерентність** визначається стабільністю світлових коливань у часі та може бути охарактеризована величиною:

$$\tau_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_i(\tau)| d\tau. \quad (4.77)$$

Величина  $\tau_0$  являє собою *час кореляції* або *інтервал кореляції* випадкового сигналу  $E(\vec{x}_i, t)$ .

Можливі три основні випадки часової когерентності (рис. 4.14):

1.  $\tau_0 = 0$ ,  $|\gamma_i(\tau)| = \delta(\tau)$  – функція Дірака, випромінення повністю некогерентне (у часі);
2.  $\tau_0 = \infty$ ,  $|\gamma_i(\tau)| \equiv 1$  – випромінення має повну часову когерентність;
3.  $0 < \tau_0 < \infty$  – випромінення має часткову часову когерентність.

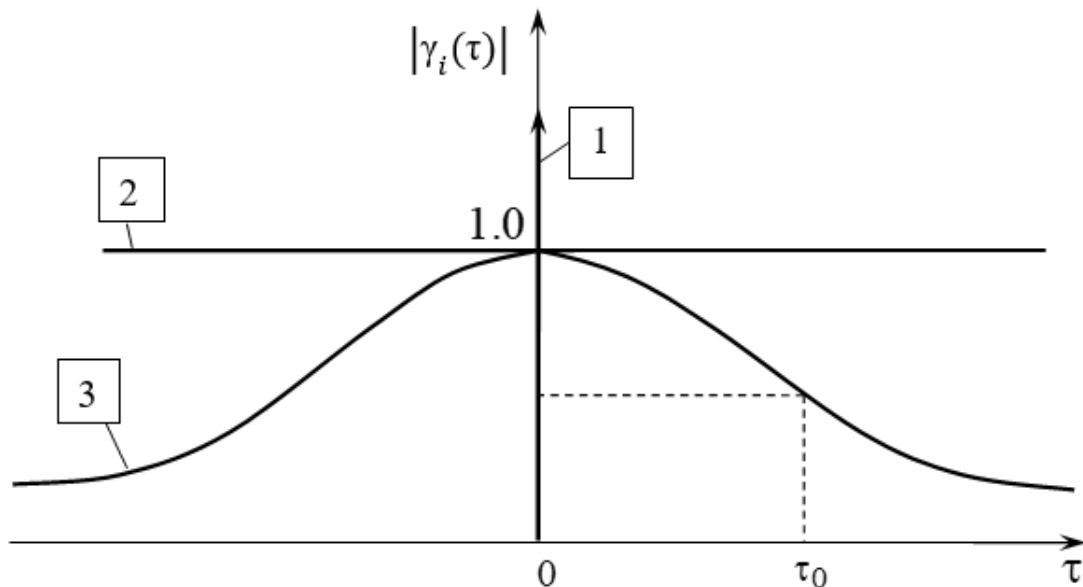


Рис. 4.14 – Основні випадки часової когерентності (пояснення в тексті)

Відомо, що величина  $\tau_0$  пов'язана зі смугою частот сигналу  $\Delta\nu$  співвідношенням:

$$\tau_0 \cdot \Delta\nu = \frac{1}{4}.$$

Нагадаємо, що величину  $\tau_0 \cdot \Delta\nu$  називають *часово-смуговим добутком*.

Тоді з останнього виразу:

$$\tau_0 = \frac{1}{4\Delta\nu}. \quad (4.78)$$

З фізичної точки зору, поняття часу когерентності пов'язане з поняттям монохроматичності випромінення:

- для монохроматичного джерела:  $\Delta\nu = 0, \tau_0 = \infty$ ;
- для білого світла:  $\Delta\nu = \infty, \tau_0 = 0$ .

Отже, ідеальне монохроматичне джерело дає повністю когерентне у часі випромінення, біле світло є повністю некогерентним у часі, а квазімонохроматичне джерело (як, наприклад, лазер) здатне генерувати лише частково когерентне випромінення.

### 4.7.3. Просторова когерентність

**Просторова когерентність** означає просторову однорідність світлових коливань по площині (синфазність світлових коливань в різних точках простору).

Для ізотропного оптичного сигналу вона може бути охарактеризована величиною:

$$r_0 = \int_0^\infty |\gamma_{ij}(r, \tau = 0)| dr, \quad (4.79)$$

де  $r = \sqrt{\vec{x}_i^2 - \vec{x}_j^2}$  – відстань між точками  $\vec{x}_i$  і  $\vec{x}_j$ .

Ця величина називається **шириною** або **відстанню когерентності**.

Можливі три основні випадки просторової когерентності (рис. 4.15):

- 1)  $r_0 = 0, |\gamma_{ij}(r, 0)| = \delta(r)$  – випромінення повністю просторово некогерентне;
- 2)  $r_0 = \infty, |\gamma_{ij}(r, 0)| = 1$  – випромінення має повну просторову когерентність;
- 3)  $0 < r_0 < \infty$  – випромінення має часткову просторову когерентність.

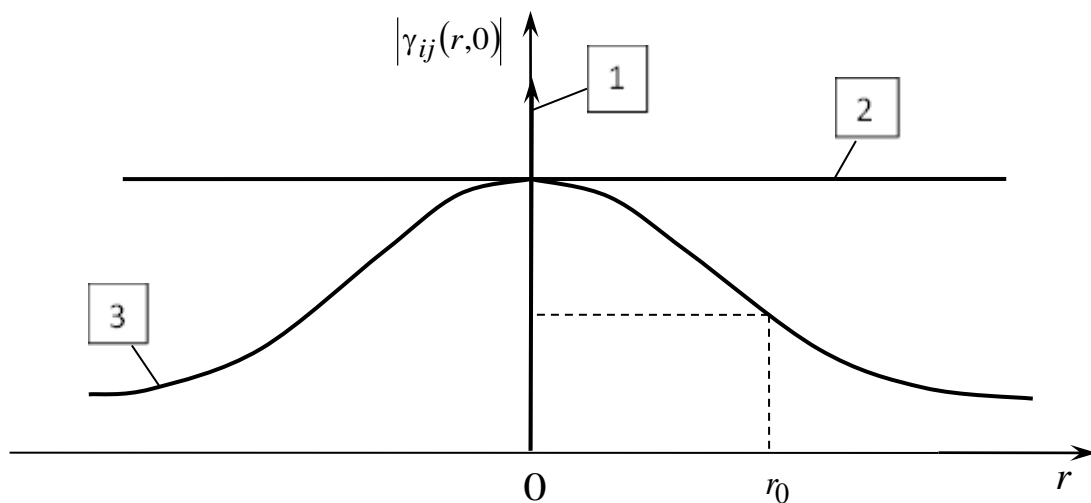


Рис. 4.15 – Основні випадки просторової когерентності (пояснення в тексті)

З фізичної точки зору, поняття просторової когерентності пов'язане з розмірами джерела випромінення (рис. 4.16). Чим меншим є розмір джерела, тим більшим буде  $r_0$ , тобто тим вищою буде ступінь просторової когерентності, і навпаки.

Таким чином, ідеальне точкове джерело спроможне генерувати повністю просторово когерентне випромінення, а протяжне джерело – лише частково просторово когерентне випромінення.

Інколи ширину когерентності пов'язують з кутовим розміром джерела випромінення (рис. 4.16):

$$r_0 \sim \frac{1}{2\alpha},$$

де  $2\alpha$  – кутовий розмір джерела випромінення,

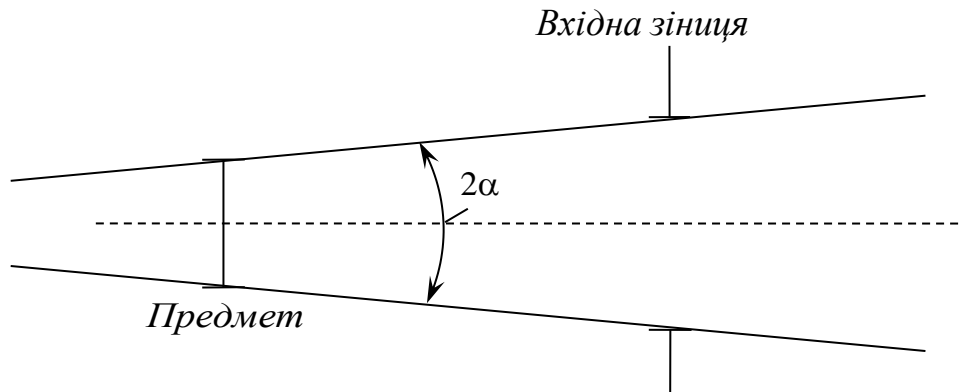


Рис. 4.16 – Зв'язок просторової когерентності з розмірами джерела випромінення

#### 4.7.4. Опис явища інтерференції

Проілюструємо застосування теорії когерентності на прикладі інтерференції двох світлових хвиль.

Нехай два квазімонохроматичних оптичних сигнали  $E_1(\vec{x}_i, t) = E(\vec{x}_i, t)$  і  $E_2(\vec{x}_i, t) = E(\vec{x}_i + \vec{x}_0, t - \tau)$  складаються в площині  $x, y$ .

Позначаючи  $\vec{x}_i + \vec{x}_0 = \vec{x}_j$ , знайдемо вираз для сумарної інтенсивності випромінення в точці  $\vec{x}_i$ :

$$\begin{aligned} I_{\Sigma}(\vec{x}_i) &= \langle |E(\vec{x}_i, t) + E(\vec{x}_j, t - \tau)|^2 \rangle = \\ &= \langle |E(\vec{x}_i, t)|^2 \rangle + \langle |E(\vec{x}_j, t - \tau)|^2 \rangle + \langle |E(\vec{x}_i, t)E^*(\vec{x}_j, t - \tau)| \rangle + \\ &+ \langle |E^*(\vec{x}_i, t)E(\vec{x}_j, t - \tau)| \rangle = I_i + I_j + \Gamma_{ij}(\tau) + \Gamma_{ij}^*(\tau). \end{aligned}$$

Використовуючи визначення комплексного ступеню когерентності, можна показати, що:

$$I_{\Sigma}(\vec{x}_i) = I_i + I_j + 2\sqrt{I_i \cdot I_j} |\gamma_{ij}(\tau)| \cos(\arg \gamma_{ij}(\tau)). \quad (4.80)$$

Доведення:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}(\tau) + \Gamma_{ij}^*(\tau) &= |\text{см. (4.74)}| = \\ &= \sqrt{I_i \cdot I_j} (\gamma_{ij}(\tau) + \gamma_{ij}^*(\tau)) \\ &= \left| \gamma_{ij}(\tau) = |\gamma_{ij}(\tau)| \cdot \exp[i \cdot \arg \gamma_{ij}(\tau)] \right| = \\ &= \sqrt{I_i \cdot I_j} |\gamma_{ij}(\tau)| [\exp(i \cdot \arg \gamma_{ij}(\tau)) + \exp(-i \cdot \arg \gamma_{ij}(\tau))] = \\ &= 2\sqrt{I_i \cdot I_j} |\gamma_{ij}(\tau)| \cos(\arg \gamma_{ij}(\tau)). \end{aligned}$$

Як добре видно з виразу (4.80), розподіл сумарної інтенсивності в площині  $x, y$  містить сталу складову (постійний рівень або фон)  $I_i + I_j$  та періодичну складову, яка описується третім доданком. Отже,  $I_{\Sigma}(\vec{x}_i)$  описує інтерференційну картину в площині  $x, y$ .

**Видність (контраст) інтерференційних смуг:**

$$K = \frac{I_{\Sigma \max} - I_{\Sigma \min}}{I_{\Sigma \max} + I_{\Sigma \min}} = \frac{2\sqrt{I_i \cdot I_j}}{I_i + I_j} |\gamma_{ij}(\tau)|. \quad (4.81)$$

Очевидно, для повністю когерентного випромінення  $|\gamma_{ij}(\tau)| = 1$ , видність буде максимальною:

$$K = \frac{2\sqrt{I_i \cdot I_j}}{I_i + I_j}.$$

Зокрема, при  $I_i = I_j$  маємо  $K = 1$ . Для повністю некогерентного випромінення:  $|\gamma_{ij}(\tau)| = 0$ ,  $K = 0$ . Для частково когерентного випромінення:  $0 < K < 1$ .

Таким чином, можна зробити такий важливий висновок. Для частково когерентного випромінення сумарну інтенсивність дорівнюватиме:

$$I_{\Sigma} = I_i + I_j + 2\sqrt{I_i \cdot I_j} |\gamma_{ij}(\tau)| \cos(\arg \gamma_{ij}(\tau)),$$

для повністю некогерентного випромінення:

$$I_{\Sigma} = I_i + I_j.$$

Останні два результати для сумарної інтенсивності є принципово різними. Тому при складанні оптичних сигналів необхідно обов'язково враховувати властивості їх когерентності.

## ДИСКРЕТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ СИГНАЛІВ

У цьому розділі:



- 5.1. Цифрове представлення сигналів.
  - 5.1.1. Процедура дискретизації неперервного сигналу.
  - 5.1.2. Процедура квантування дискретного сигналу.
- 5.2. Дискретизація сигналів з кінцевою смугою частот (з обмеженим спектром).

### 5.1. Цифрове представлення сигналів

В цілому, процес аналого-цифрового перетворення можна представити блок-схемою, представленою на рис. 5.1.

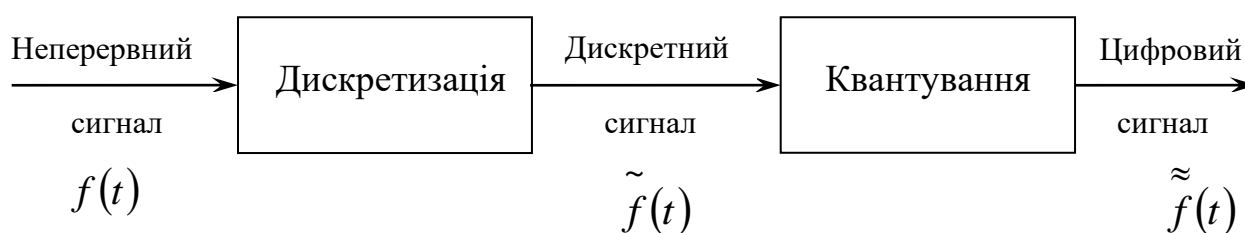


Рис. 5.1 – Блок-схема аналого-цифрового перетворювача (АЦП)

Як видно з наведеного рисунку, процес такого перетворення передбачає здійснення двох процедур: дискретизації та квантування. Розглянемо їх більш детально.

#### 5.1.1. Процедура дискретизації неперервного сигналу

**Дискретизація** неперервного сигналу полягає в тому, що він замінюється послідовністю дискретних **відліків**, взятих у фіксовані моменти часу.

Як правило, інтервал часу  $\Delta t$  – *інтервал дискретизації* – зазвичай вибирається постійним (хоча це необов'язково). У цьому випадку говорять про *рівномірну дискретизацію*:  $f(n\Delta t)$  –  $n$ -й відлік (див. рис. 5.2).

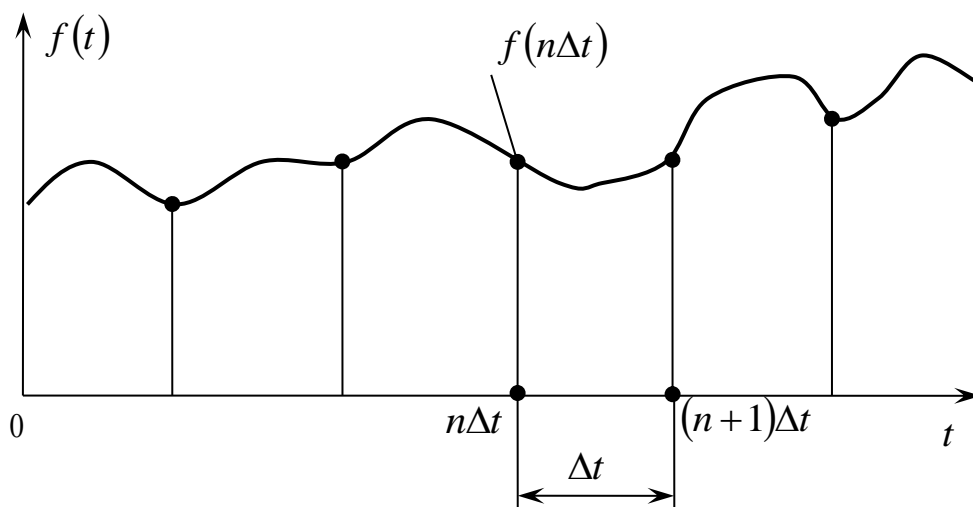


Рис. 5.2 – Рівномірна дискретизація неперервного сигналу

Якщо  $f(t)$  – неперервний сигнал, то відповідний йому дискретний сигнал може бути записаний у вигляді:

$$\tilde{f}(t) = f(t) \cdot \text{comb}\left(\frac{t}{\Delta t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta t) \delta(t - n\Delta t). \quad (5.1)$$

Як добре видно з рис. 5.3, у загальному випадку процедура дискретизації сигналу є неоднозначною.

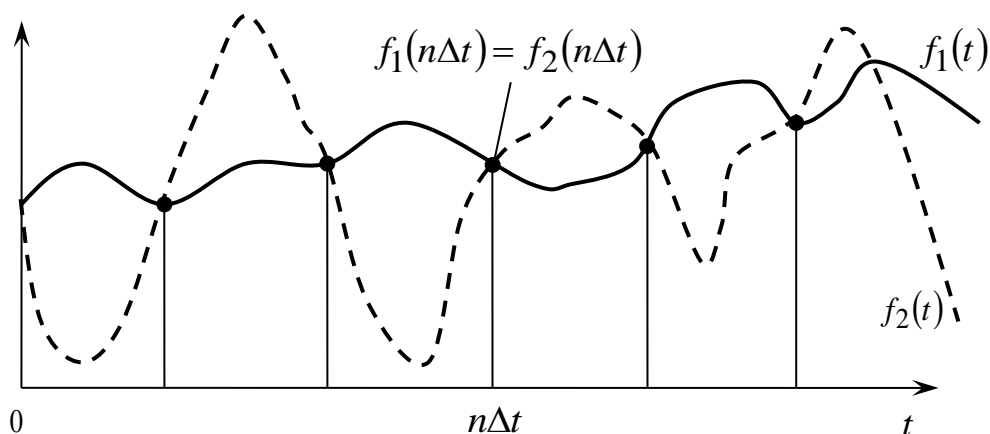


Рис. 5.3 – Неоднозначність процедури дискретизації

Проте, як буде показано далі, існує клас сигналів, для яких існує взаємно-однозначна процедура дискретизації.



### 5.1.2. Процедура квантування дискретного сигналу

Процедура *квантування* дискретного сигналу полягає в тому, що кожне неперервне значення  $f(n\Delta t)$  дискретного сигналу  $\tilde{f}(t)$  замінюється найближчою стандартною величиною  $\tilde{\tilde{f}}(t)$ .

Фізично процес квантування означає, що лінійна характеристика, що пов'язує дискретну і цифрову величини, замінюється ступінчастою характеристикою (див. рис., де  $\Delta f$  – *крок квантування*. Не слід плутати крок квантування з різницею частот. Висота кожної сходинки обирається довільно (рис. 5.4).

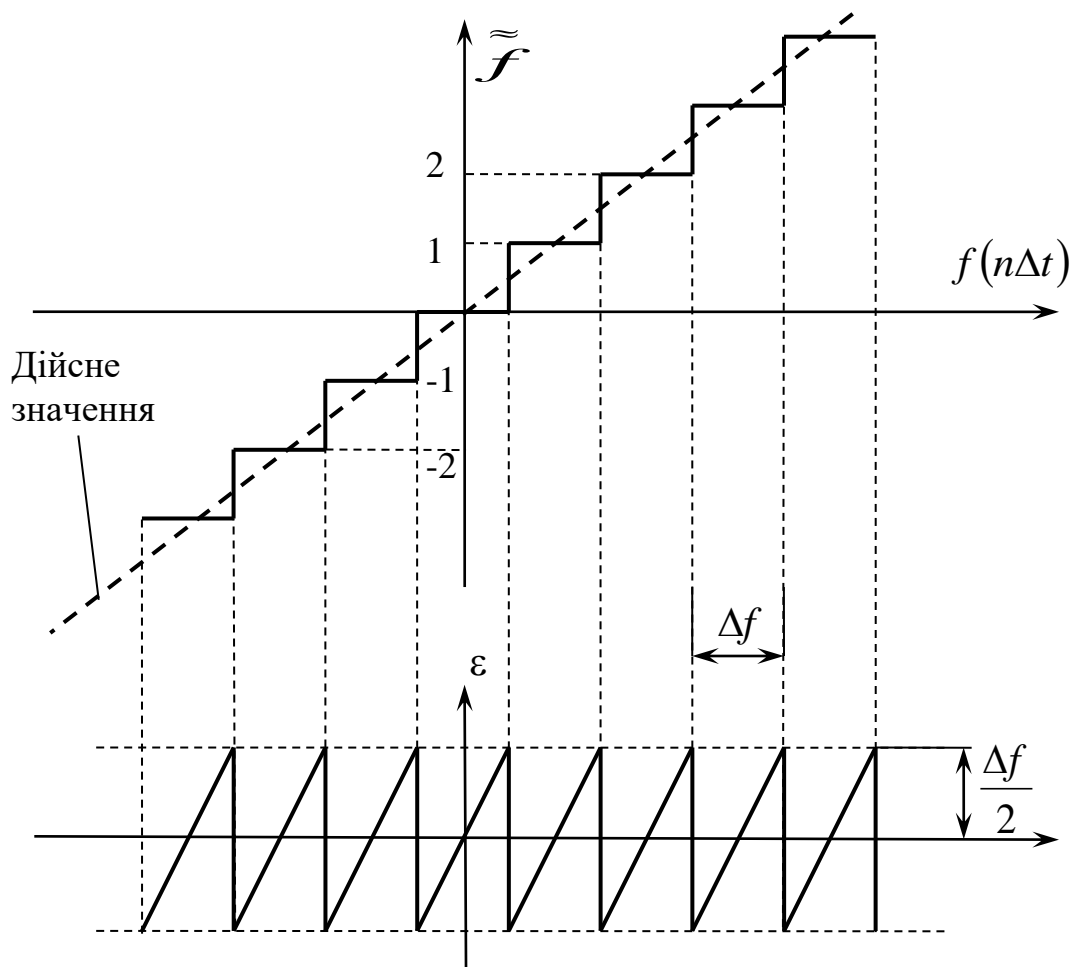


Рис. 5.4 – Процедура квантування дискретного сигналу та похибка округлення  $\epsilon$ , яка виникає при цьому

Зазвичай, цифровий сигнал представляють у двійковому коді. Тому крок квантування обирають за формулою:

$$\Delta f = \frac{|f_{\max}|}{2^{m-1}}, \quad (5.2)$$

де  $m$  – довжина двійкового коду (розрядність цифрового пристрою).

При квантуванні сигналу має місце *похибка квантування*  $\varepsilon$ :

$$|\varepsilon| \leq \frac{\Delta f}{2}. \quad (5.3)$$

Підставляючи вираз (5.3) до формули (5.2), можна знайти необхідну розрядність  $m$  двійкового коду, що забезпечує задану похибку квантування:

$$2|\varepsilon| = \frac{|f_{\max}|}{2^{m-1}}.$$

Звідси

$$m_{\min} = \log_2 \left( 1 + \frac{|f_{\max}|}{2|\varepsilon|} \right). \quad (5.4)$$

Таким чином, процедура квантування полягає у тому, що дискретний відлік замінюється найближчим до нього за величиною двійковим  $m$ -розрядним числом.

## 5.2. Дискретизація сигналів з кінцевою смугою частот (з обмеженим спектром)

Розглянемо неперервний сигнал  $f(t)$ . Нехай його спектр лежить у смузі частот від  $-v_{\max}$  до  $v_{\max}$ , тобто

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \begin{cases} F(v), & -v_{\max} \leq v \leq v_{\max} \\ 0, & \text{в іншій області.} \end{cases} \quad (5.5)$$

З урахуванням виразу (5.5):

$$f(t) = \mathcal{F}_T^{-1}\{F(v)\} = \int_{-v_{\max}}^{v_{\max}} F(v) \cdot \exp(i2\pi vt) dv. \quad (5.6)$$

Сконструюємо періодичну функцію в частотній області (див. рис. 5.5):

$$F_p(v) = F(v - n2v_{\max}), \quad (5.7)$$

де  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

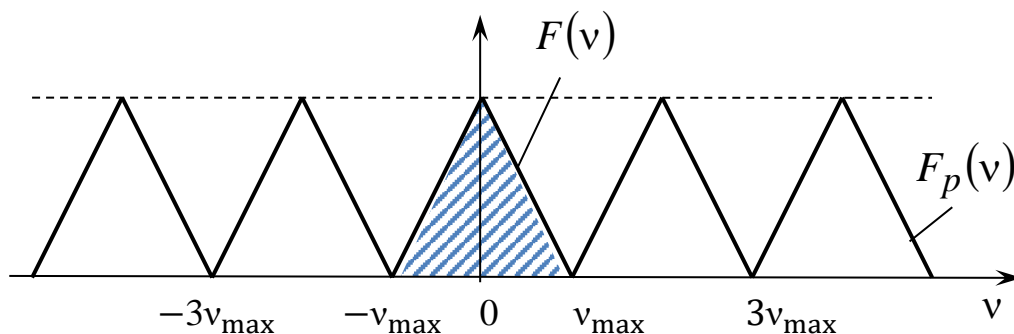


Рис. 5.5 – Формування періодичної функції в частотній області

Функція  $F_p(v)$  є періодичною, Якщо вона задовольняє умовам Діріхле, її можна розкласти в ряд Фур'є:

$$F_p(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left(-i2\pi \frac{n}{2v_{\max}} v\right), \quad (5.8)$$

де

$$C_n = \frac{1}{2v_0} \int_{-v_{\max}}^{v_{\max}} F_p(v) \exp\left(+i2\pi \frac{n}{2v_{\max}} v\right) dv. \quad (5.9)$$

Порівнюючи вирази (5.9) і (5.6), приходимо до висновку, що:

$$C_n = \frac{1}{2v_{\max}} f\left(\frac{n}{2v_{\max}}\right). \quad (5.10)$$

Тоді, підставляючи (5.10) в (5.8), отримаємо  $F_p(v)$ :

$$F_p(v) = \frac{1}{2v_{\max}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2v_{\max}}\right) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{2v_{\max}} v\right). \quad (5.11)$$

Повернемося від періодичної функції  $F_p(v)$  до істинного спектру  $F(v)$ . Для цього помножимо вираз (5.11) на прямокутну функцію (рис. 5.6):

$$F(v) = F_p(v) \cdot \text{rect}\left(\frac{v}{2v_{\max}}\right). \quad (5.12)$$

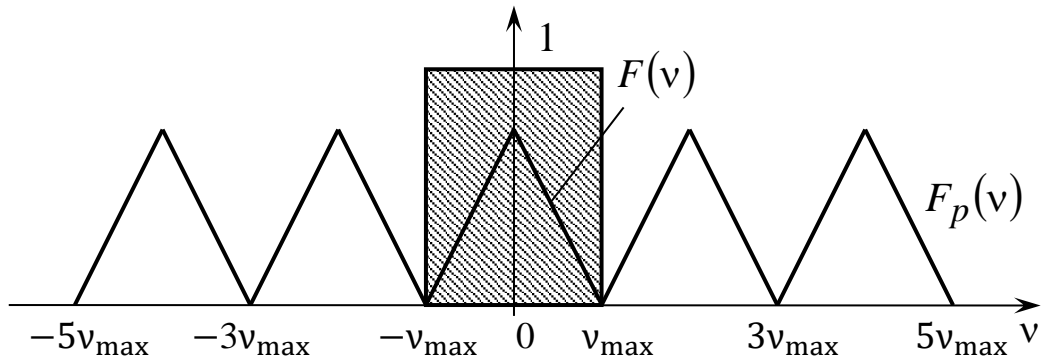


Рис. 5.6 – Представлення спектру заданого сигналу як добутку періодичної та прямокутної функцій

Тоді, використовуючи послідовно вирази (5.12), (5.6) і (5.11), отримаємо:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{F}_T^{-1}\{F(v)\} = \mathcal{F}_T^{-1}\left\{F_p(v) \cdot \text{rect}\left(\frac{v}{2v_{\max}}\right)\right\} = \\ &= \frac{1}{2v_{\max}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2v_{\max}}\right) \int_{-v_{\max}}^{v_{\max}} \exp\left(i2\pi v \left(t - \frac{n}{2v_{\max}}\right)\right) dv = \\ &= \frac{1}{2v_{\max}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2v_{\max}}\right) \int_{-v_{\max}}^{v_{\max}} \exp\left(\frac{i2\pi v(2v_{\max}t - n)}{2v_{\max}}\right) dv = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2v_{\max}}{2v_{\max}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2v_{\max}}\right) \frac{\exp[i\pi(2v_{\max}t - n)] - \exp[-i\pi(2v_{\max}t - n)]}{i2\pi(2v_{\max}t - n)} = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2v_{\max}}\right) \frac{\sin[\pi(2v_{\max}t - n)]}{\pi(2v_{\max}t - n)} = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2v_{\max}}\right) \cdot \text{sinc}(2v_{\max}t - n).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2v_{\max}}\right) \text{sinc}(2v_{\max}t - n)}. \quad (5.13)$$

Вираз (5.13) представляє собою **теорему Найквіста**. Інколи її називають теоремою **Віттакера-Найквіста-Шеннона** та **теоремою Котельникова**, оскільки вона була доведена незалежно Е. Т. Віттакером (Edmund Taylor Whittaker), Г. Найквістом (Harry Nyquist), К. Шенноном (Claude Shannon) і М. Котельниковим в першій половині 20-го століття.

Сутність даної теореми така: сигнал з обмеженою смугою частот, що не містить спектральних компонентів з частотами вище за  $v_{\max}$ , може бути повністю та однозначно відновлений з дискретного сигналу  $f(t)$ , якщо інтервал дискретизації дорівнюватиме не більше  $\Delta t = \frac{1}{2v_{\max}}$ .

Величина  $v_s = 2v_{\max}$  називається **частотою Найквіста**. Вона дозволяє обґрунтовано встановити максимальний крок дискретизації, при якому можна уникнути неоднозначності результату відновлення функції:

$$\boxed{\Delta t \leq \frac{1}{2v_{\max}}}. \quad (5.14)$$

Отже, для відтворення вихідного сигналу без спотворень (викривлення та різних артефактів), частота дискретизації повинна, щонайменше, вдвічі перевищувати максимальну частоту в спектрі сигналу, який оброблюється.

Якщо амплітудний спектр довільного сигналу не має складових вище встановленої частоти Найквіста, то такий сигнал може бути теоретично продискретизований та відновлений без спотворень. Однак, слід пам'ятати, що перетворення будь-якого аналогового сигналу в цифрову форму на практиці буде пов'язане з квантуванням відліків, коли кожний відлік замінюється цифровим кодом кінцевої розрядності. При цьому через округлення значень будуть неодмінно вноситися похибки квантування.

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які основні складові частини має оптико-електронної система?
2. Скільки параметрів мають зазвичай електричний та оптичний сигнали?
3. Запишіть математично гармонічну функцію.
4. Чим відрізняються між собою лінійна частота, кругова частота та просторова частота?
5. Який вигляд та властивості має функція відліків?
6. Як математично описуються зсунуті та масштабовані одиночні прямокутні імпульси?
7. Які різновиди функцій Бесселя є найбільш вживаними в оптиці?
8. Що характеризує картина Ейрі?
9. Перелічіть основні властивості  $\delta$ -функції.
10. Для яких випадків використовують функцію Гевісайда?
11. Яку функцію називають гребінкою Дірака?
12. Чим відрізняється ряд Фур'є в тригонометричній формі від ряду Фур'є в комплексній формі?
13. Для яких функцій може бути застосоване перетворення Фур'є?
14. Чим відрізняється пряме та зворотне перетворення Фур'є?
15. Що називають ядром перетворення Фур'є?
16. Які види симетрії мають графіки амплітудного і фазового спектрів для дійсної функції?
17. Що називають енергетичною щільністю спектра потужності сигналу або енергетичним спектром сигналу?
18. Як можна швидко розрахувати потужність періодичного сигналу?
19. В чому полягає різниця між рядом Фур'є і інтегралом Фур'є?
20. Які основні властивості перетворення Фур'є?
21. Для яких функцій доцільно застосовувати перетворення Фур'є-Бесселя або перетворення Ганкеля 0-го порядку?
22. Які спектри мають дельта-функція, одинична функція, косинусоїда та синусоїда?
23. Як двовимірне перетворення Фур'є математично описує дифракцію Фраунгофера для плоскої монохромної хвилі?
24. Який інтеграл є канонічною формою представлення будь-якого лінійного перетворення сигналів?
25. Чим відрізняється операція згортки двох функцій від операції кореляції?
26. Перелічіть основні властивості операції згортки.
27. Назвіть основні властивості операції кореляції.
28. В яких випадках результати згортки та кореляції будуть ідентичними?
29. До чого призводить усічення сигналу та спектру?
30. Які системи називають лінійними?
31. Що називають імпульсним відгуком системи?

32. В чому полягає принцип причинності лінійної системи? Як з нього випливає умова можливості фізичної реалізації часової системи?
33. Які два способи є для знаходження реакції лінійної інваріантної системи на вхідний сигнал?
34. Що називають передавальною функцією системи? Як вона пов'язана з імпульсним відгуком?
35. Який вигляд мають амплітудна та фазова частотні характеристики ділянки вільного простору у наближенні Френеля?
36. Який сигнал називають випадковим? Як його математично задати через окремі реалізації?
37. Перелічіть основні числові параметри випадкової величини.
38. Що характеризує автокореляційна функція випадкового сигналу?
39. Які властивості має стаціонарний у вузькому сенсі сигнал?
40. Дайте визначення для ергодичного сигналу.
41. Який загальний вигляд має графік автокореляційної функції ергодичного випадкового сигналу?
42. В чому полягає сутність теореми Вінера-Хінчина?
43. Які властивості має енергетичний спектр випадкового сигналу?
44. Як визначається ефективна ширина спектру випадкового сигналу?
45. Який зв'язок існує між шириною спектра і часом кореляції випадкового сигналу?
46. Яке випадкове поле називається ізотропним?
47. Охарактеризуйте два типи когерентності випадкового оптичного сигналу.
48. Яку умову потрібно виконати, щоб у загальному випадку процедура дискретизації сигналу була однозначною?
49. До чого зводиться процедура квантування дискретного сигналу?
50. Від чого залежить крок квантування дискретного сигналу?
51. В чому полягає сутність теореми Найквіста (Віттакера-Найквіста-Шеннона, Котельникова)?
52. Яку частоту називають частотою Найквіста?

## ЛІТЕРАТУРА

### Основна література:

1. Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики: навч. посібник / уклад. : Ю.О. Ушенко, М.С. Гавриляк, М.В. Талах, В.В. Дворжак. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2021. 308 с.
2. Братченко Г. Д., Перелигін Б. В., Банзак О. В., Казакова Н. Ф., Григор'єв Д. В. Методи та засоби обробки сигналів. Навчальний посібник. – Одеса: Типографія-видавництво «Плутон», 2014. – 452 с.
3. Рибальченко М. О., Єгоров О.П., Зворикін В. Б. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.
4. Хвильова оптика. Частина 1. Електромагнітна теорія світла та інтерференція: Підручник / Уклад.: В. Г. Колобродов. – К.: НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», 2017. – 208 с.
5. Хвильова оптика. Частина 2. Дифракція і поляризація світла: Підручник / Автор: В. Г. Колобродов. – К.: НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», 2018. – 240 с.
6. Чиж І. Г. Теорія оптичних систем : підручник / І. Г. Чиж. Вид. 2-ге, без змін. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2022. – 426 с.
7. Оптико-електронні системи ближньої локації : монографія / Я. І. Лепіх, В. І. Сантоній, Л. М. Будіянська та інш. За редакцією Лепіха Я.І. – Одеса: Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2019. – 294 с.

### Додаткова література:

1. Синявська О. О., Слюсарчук П. В. Ряди Фур'є. Навчальний посібник для студентів спеціальностей математика, прикладна математика, статистика. – Ужгород, 2015. – 70 с.
2. Комп'ютерне моделювання систем і процесів. Методи обчислень. Частина 2 : навчальний посібник / [Р. Н. Кветний, І. В. Богач, О. Р. Бойко та інші]; за заг. Ред. Р. Н. Кветного. – Вінниця: ВНТУ, 2013. – 235 с.
3. Сайко В. Г., Оксіюк О. Г., Дікареєв О. В. Основи цифрового оброблення сигналів в системах цифрового радіозв'язку. Частина 1. Навчальний посібник. – К.: ДУТ, 2016. – 107 с.
4. Конспект лекцій до кредитного модулю «Спеціальні розділи оброблення сигналів 2» для магістрів радіотехнічного факультету, спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка, спеціалізації «Радіозв'язок та оброблення сигналів» / Уклад.: І. О. Сушко, Н. О. Лащевська, А. В. Мовчанюк, Р. В. Антипенко – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 172 с.

## ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Вибірковий простір .....	78	Когерентність	
Видність інтерференційних смуг .....	102	просторова .....	100
Випадкова величина		часова .....	99, 100, 101
визначення .....	80	Комплексний ступінь когерентності .....	98
дисперсія .....	80	Кореляція	
математичне очікування .....	80	властивості .....	59
стандартне відхилення .....	80	двовимірна .....	60
Випадкове поле		інтеграл автокореляції .....	59
визначення .....	95	інтеграл взаємної кореляції .....	59
ізотропне .....	96	інтеграл крос-кореляції .....	59
однорідне .....	96	Лінійне перетворення	
стаціонарне в широкому сенсі .....	95	визначення .....	55
Випадковий сигнал		інтеграл суперпозиції .....	56
визначення .....	79	ядро .....	56
ергодичний .....	84	Матриця	
стаціонарний .....	83	когерентності .....	98
стаціонарний у вузькому сенсі .....	82	кореляційна .....	89, 97
Випадковий сигнал		унітарна .....	50
стаціонарний в широкому сенсі .....	83	Перетворення Ганкеля	
Відстань когерентності .....	100	пряме 0-го порядку .....	52
Вікно		Перетворення Фур'є	
просторове, кругле .....	66	властивості .....	40
просторове, прямокутне .....	66	двовимірне .....	50
спектральне, кругле .....	66	зворотне .....	40
спектральне, прямокутне .....	66	пряме .....	40
Властивість суперпозиції .....	55	усічене, зворотне .....	65
Гребінка Дірака .....	30	усічене, пряме .....	62
Дискретизація		ядро .....	40
інтервал .....	104	Перетворення Фур'є-Бесселя	
процедура .....	103	зворотне 0-го порядку .....	52
рівномірна .....	104	Період	
Ефективна ширина спектра .....	92	просторовий .....	14
Згортка		часовий .....	13
властивості .....	57	Принцип	
двовимірна .....	60	Гюйгенса-Френеля, у наближенні	
інтеграл .....	56	плоских хвиль .....	53
умови існування .....	58	причинності .....	70
Імпульсний відгук .....	69	Простір вибірок .....	78
Інтеграл Фур'є		Розділення	
подвійний .....	39	критерій Релея .....	23
інтервал кореляції .....	88	оптичної системи, дифракційна межа .....	68
інтервал кореляції .....	99	частотне, спектра .....	64
Квантування		Ряд Фур'є	
крок .....	105	в комплексній формі .....	35
похибка .....	106	в тригонометричній формі .....	34
процедура .....	105	Сигнал	



аналоговий .....	11, 12, 13	дифракційна Френеля .....	73
аперіодичний .....	12	Ейлера .....	35
випадковий .....	12	Функція	
детермінований .....	12	sinc двомірна .....	19
дискретний .....	12	sinc ненормована .....	18
електричний .....	11	sinc нормована .....	17
оптичний .....	11	автокогерентності .....	98
періодичний оптичний .....	12	автокореляційна випадкового сигналу	82
періодичний часовий .....	12	автокореляційна випадкового сигналу, властивості .....	85
Симетрія функції		Бесселя I-роду 0-го порядку .....	21
анти-ермітова .....	45	Бесселя I-роду $n$ -го порядку .....	21
ермітова .....	45	взаємної когерентності .....	98
непарна .....	45	взаємної кореляції випадкового сигналу	88
парна .....	45	.....	88
Система		вибіркова випадкового сигналу .....	78
визначення .....	68	відліків .....	17
дифракційно-обмежена .....	75	гармонічна просторова .....	13
ізопланарна .....	70	гармонічна часова .....	13
інваріантна .....	69	Гауса .....	23
лінійна .....	69	Гевісайда .....	31
просторово-інваріантна .....	70	двомірна .....	11
умова можливості фізичної реалізації .....	70	дельта ( $\delta$ ), визначення .....	27, 29
Спектр		дельта ( $\delta$ ), властивості .....	29
дискретний амплітудний .....	36	Дірака .....	27
дискретний потужності .....	38	Ейрі .....	22
дискретний фазовий .....	36	зіниці .....	77
енергетичний випадкового сигналу .....	90	знакова .....	32
енергетичний випадкового сигналу, властивості .....	91	коваріаційна .....	87
енергетичний детермінованого сигналу .....	44	когерентна передавальна .....	76
неперервний .....	43	когерентності .....	98
неперервний амплітудний .....	43	кругова .....	27
плоских хвиль, кутовий .....	53	одинична .....	46
фазовий .....	44	одиничний рівень .....	31
Спектральна щільність потужності		оптична передавальна .....	76
випадкового сигналу .....	90	прямокутна двомірна .....	25
Теорема		прямокутна одновимірна .....	24
Вінера-Хінчина для ергодичного сигналу .....	89, 91	розсіяння точки .....	76
Вінера-Хінчина для ізотропного поля .....	96	сигнум .....	32
Найквіста (Віттакера-Найквіста- Шеннона, Котельникова) .....	108	сингулярна .....	46
Парсеваля .....	39	трикутна двомірна .....	27
Релея, енергетична .....	60	трикутна одновимірна .....	26, 27
Теорія		Фейєра .....	20
Аббе .....	77	частотна передавальна .....	71
когерентності .....	96	Фур'є -прообраз .....	40
Умови Діріхле .....	33	Фур'є-змінна .....	40
Формула		Фур'є-образ .....	40
дифракційна Релея-Зомерфельда ...	53, 72	Характеристика	
дифракційна Фраунгофера .....	54	амплітудно-частотна .....	71
		фазово-частотна .....	71
		Хвиля	
		плоска монохроматична .....	15

---

Час кореляції.....	88, 99	Щільність розподілу імовірностей	
Частота Найквіста .....	108	двовірна .....	82
Чорна скринька.....	68	одновірна.....	80
Ширина когерентності.....	100		