Ніжинський державний університет
імені Миколи Гоголя

М. С. Нікітченко

ТЕОРІЯ ПРОГРАМУВАННЯ
Частина 1

Навчальний посібник

Ніжин-2010

УДК 004.4
ББК 22.18я73
Н 62

Рекомендовано вченою радою
Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя
Протокол № 3 від 02.11.2010 р.

Рецензенти
д-р фіз.-мат. наук ***Белов Ю.А.***
д-р фіз.-мат. наук ***Буй Д.Б.***

Нікітченко М.С.

Н 62 Теоретичні основи програмування: [навчальний посібник] / М. С. Нікітченко. – Ніжин: Видавництво НДУ імені Миколи Гоголя, 2010. – _____ с.

Викладено теоретичні основи програмування. Матеріал подано в семантико-синтаксичному стилі на основі єдиного для програмування, математичної логіки та теорії алгоритмів композиційно-номінативного підходу. Викладення проілюстровано прикладами, у кінці розділів запропоновано питання для самоконтролю та вправи для самостійного розв'язання. Для студентів спеціальностей «Інформатика», «Прикладна математика», «Системний аналіз».

ББК 22.18я73

ВСТУП

Інформаційні технології застосовуються зараз практично у всіх сферах життя людства. Ці технології докорінно змінили світ. Значні успіхи в телекомунікаціях, енергетиці, транспорті, медицині, освіті, космічних дослідженнях та інших сферах діяльності людства досягнуто завдяки використанню інформаційних технологій. Однак таке розширення сфери їх застосувань має і негативну сторону. Людство стає все більш залежним від надійного і правильного функціонування комп'ютерних систем; помилки в їх роботі часом ведуть до величезних фінансових, а навіть і людських втрат. Дотепер фірми-розробники програмного забезпечення не дають гарантію на програмні продукти, які вони пропонують користувачу. Але такого фактично немає в жодній іншій сфері діяльності. Будь-який легальний продавець якогось товару дає гарантії якості і готовий нести (пригадаємо повернення мільйонів автомобілів на заводи виробника у разі виявлення дефектів) фінансову і юридичну відповідальність за поставку недоброякісного продукту.

Можна навести і безліч інших прикладів, коли погане програмне забезпечення призводило до знищення космічних ракет, аварій на заводах, гідроелектростанціях тощо. Про складний стан справ говорять і самі фахівці галузі комп'ютерних технологій. У чому ж причини? Вони, безумовно, різноманітні і пов'язані з науковими, економічними, соціальними, психологічними та іншими проблемами створення і використання інформаційних технологій. Серед наукових однією з найважливіших є проблема створення ефективних методів розробки програмних систем. Такі методи мають базуватися на розвиненій теорії програмування, яка має на меті дослідження програм та методів їх аналізу і синтезу. Відзначимо, що тут термін «програма» тлумачиться у широкому смислі, охоплюючи, зокрема, як програми конкретних мов програмування, так і великі програмні системи.

Даний посібник може розглядатися як вступ до теорії програмування. Ця дисципліна є базовою нормативною дисципліною спеціальності «Інформатика».

Щоб надати початкове уявлення про цю дисципліну, треба визначити її мету і завдання, об'єкт та предмет, а також вказати на її основні методи.

Метою і завданням навчальної дисципліни «Теорія програмування» є засвоєння основних концепцій, принципів та понять сучасного, зокрема композиційного, програмування. У світоглядному аспекті поняття і методи теорії програмування необхідні для обґрунтування та формалізації способів розробки правильних та ефективних програм. У прикладному аспекті апарат теорії програмування необхідний для адекватного моделювання мов специфікацій і програмування та використання побудованих моделей для створення сучасних програмних та інформаційних систем високої якості.

Об'єктом навчальної дисципліни «Теорія програмування» є програми, а її **предмет** включає в себе вивчення основних (базових) понять теорії програмування, розгляд основних аспектів програм (семантика та синтаксис), їх формалізацію та дослідження, а також уточнення основних методів розробки програм.

Вимоги до знань та вмінь. Для засвоєння матеріалу необхідні знання основ елементарної математики, дискретної математики, алгебри, математичної логіки та теорії алгоритмів. Відповідно в курсі будуть використовуватися **методи** теорії множин, дискретної математики, універсальної алгебри, математичної логіки і теорії алгоритмів.

Місце у структурно-логічній схемі спеціальності. Нормативна навчальна дисципліна «Теорія програмування» є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр». Курс теорії програмування потрібен для подальшого вивчення нормативних дисциплін «Системне програмування», «Бази даних та інформаційні системи», «Інтелектуальні системи», «Теорія обчислень», «Штучний інтелект», «Формальні методи розробки програмних

систем», «Інформаційні технології», «Прикладна логіка», низки спецкурсів відповідного напряму.

Суть теорії програмування – категоріальний (понятєвий) аналіз процесу програмування. Поняття визначаються у єдності їх двох моментів: змісту (інтенсіоналу) та обсягу (екстенсіоналу). Тому в курсі так багато часу приділяється аналізу основних понять програмування і розкриттю їх інтенсіоналів та екстенсіоналів. Звідси випливає, що для теорії програмування найважливішим є не конкретна програма, а відношення між програмними поняттями (тобто не стільки предметна, екстенсіональна складова, скільки логічна, інтенсіональна). Тому вміння писати конкретні програми ще не означає розуміти теорію програмування. Тут є аналогія з політикою, бо задача політики є не стільки безпосередня робота з пересічною людиною, скільки вибудова суспільних відносин.

Структура курсу:

- формалізація простої мови програмування;
- основні програмні поняття;
- синтактика;
- семантика;
- методи розробки програм.

В першій частині посібника розглядаються основні програмні поняття, формалізується проста мова програмування, вводиться поняття програмної системи, вивчаються формальні мови та граматики, методи уточнення рекурсії програм. У другій частині будуть розглянуті основні підходи до семантики програм та методів їх розробки.

Назва курсу «Теорія програмування» складається з двох термінів – «теорія» та «програмування». Існують різні підходи до побудови теорій. Щоб зрозуміти особливості теорії програмування сформулюємо декілька загальних запитань щодо властивостей теорій.

Яке значення та роль теорії?

Яка теорія потрібна (за побудовою)?

Яким методом будувати теорію?

Коротко відповісти на ці запитання можна наступним чином.

Відповідаючи на перше запитання, відзначимо, що теорію слід розглядати у нерозривному зв'язку з практикою. Дійсно, розробка теорії ґрунтується на науковому дослідження та аналізі практики. Потім наукові теорії втілюються у практику за допомогою відповідних технологій. Таким чином, маємо цикл: практика – наукове дослідження – теорія – технологія – практика.

Відповідаючи на друге запитання, відзначимо, що існують різні підходи до побудови теорій: історичний, логічний, еволюційний тощо. Тут зосередимось на розгляді феноменологічного та сутнісного підходів. Феноменологічний підхід має на меті описати зовнішні прояви певних процесів, а сутнісний – їх внутрішні причини. Хоча ці підходи мають багато спільного, ми основну увагу будемо приділяти сутнісному підходу.

Третє питання пов'язане з вибором методу побудови теорії. Зважаючи на те, що основні методи побудови програм (систематичний, зверху-вниз, структурний тощо) орієнтовані на поступове уточнення програм, будемо використовувати метод побудови теорії від абстрактного до конкретного (від простого до складного).

Таким чином, основними принципами побудови теорії програмування будуть

- принцип єдності теорії та практики,
- принцип побудови сутнісної теорії,
- принцип побудови теорії методом від абстрактного до конкретного.

Інші принципи будемо обговорювати пізніше.

Автор вдячний студентам факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка та студентам Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя за участь у підготовці прикладів.

Закінчення доведення теорем, лем, прикладів або зауважень, позначаємо знаком ■
.

1. Формалізація простої мови програмування

Центральним завданням теорії, зокрема і теорії програмування, є визначення та дослідження її основних понять. Зробити це не так просто, бо в теоріях, як правило, використовується багато понять, які пов'язані одне з одним. Тому спочатку доцільно ввести основні поняття теорії програмування на невеликому прикладі. Це буде програма знаходження найбільшого спільного дільника двох чисел. Програма записана на деякій простій мові. В цьому розділі ця мова буде формалізована, тобто буде описано її синтаксис і семантику, та їх зв'язок. Також будуть досліджені деякі властивості програм цієї мови.

1.1. Неформальний опис простої мови програмування

Для посилання на певну мову треба надати їй ім'я. Для імені часто використовують абревіатуру короткої характеристики мови. Зважаючи на традиції використання латинських літер у науковій символіці, утворимо абревіатуру ***SIPL*** від характеристики ***SI****mple* ***P****rogramming* ***L****anguage* (Проста Мова Програмування).

Цю абревіатуру можна розшифрувати по-іншому, вказуючи на імперативність або структурованість цієї мови:

SIPL **– S**imple **I**mperative **P**rogramming **L**anguage,

SIPL **– S**tructured **I**mperative **P**rogramming **L**anguage.

Говорячи неформально, мова *SIPL* має числа та змінні цілого типу, над якими будуються арифметичні вирази та умови. Основними операторами є присвоєння, послідовне виконання, розгалуження, цикл.

Мова *SIPL* може розглядатися як надзвичайно спрощена традиційна мова програмування, наприклад, Паскаль. У мові *SIPL* відсутні складні типи даних, оператори вводу-виводу, процедури та багато інших конструкцій традиційних мов програмування. Також немає явної типізації. Разом із тим ця мова є досить потужною, щоб програмувати різні арифметичні функції, більше того, в цій мові можуть бути запрограмовані всі обчислювані функції над цілими числами. Мета розгляду саме такої мови програмування полягає в тому, щоб формалізація та дослідження цієї мови були якомога простішими.

Приклад 1.1. Програма *GCD* знаходження найбільшого спільного дільника чисел *M* та *N* за алгоритмом Евкліда:

GCD ≡
begin
while ¬*M*=*N* **do**
if *M*>*N* ***then*** *M*:=*M*–*N* ***else*** *N*:=*N*–*M*
end

Тут ¬*M*=*N* означає *M*≠*N*. Оскільки програми призначені для обчислення результатів за вхідними даними, розглянемо неформально процес виконання цієї програми на вхідних даних, у яких *M* має значення *8*, а *N* – *16*. Вважаємо, що дані записуються в пам'ять, а оператори виконуються деяким процесором. Тому розмітимо програму, відмічаючи оператори мітками:

0: **begin**
1: **while** ¬*M*=*N* **do**
2: **if** *M*>*N* **then** *3*: *M*:=*M*–*N* **else** *4*: *N*:=*N*–*M*
end

Процес виконання програми можна подати у вигляді таблиці, кожний рядок якої вказує на номер виконуваного оператора та на нові значення змінних (деталі процесу виконання можна знайти у книжках з основ програмування). Для нашого прикладу така таблиця може мати наступний вигляд.

Таблиця 1.1

Мітка	Значення умови	Значення *M*	Значення *N*
0		*8*	*16*
1	*¬M=N – true*		
2	*M>N – false*		
4			*8*
1	*¬M=N – false*		

Програма припиняє роботу із значеннями *M* та *N*, рівними *8*. Це число і є найбільшим спільним дільником.

Аналізуючи цю програму та процес її виконання, відзначаємо два аспекти:

- *синтаксичний* (текст програми);
- *семантичний* (смисл програми – те, що вона робить).

У нашому прикладі ні синтаксис, ні семантика не задані точно (формально). Ми маємо лише інтуїтивне розуміння програм мови *SIPL*. Тому важко відповідати на питання, які вимагають точного опису мови. Наприклад незрозуміло, чи можна поставити крапку з комою між оператором та символом ***end***, що дозволяється робити в багатьох мовах програмування (синтаксичний аспект). Незрозуміло також, чи завжди наведена програма буде обчислювати найбільший спільний дільник для довільних значень *M* та *N* (семантичний аспект).

Щоб відповідь на такі питання стала можливою, необхідно надати строге (формальне) визначення нашої мови програмування. Лише тоді можна буде застосувати математичні методи дослідження програм та будувати відповідні системи програмування, зокрема транслятори та інтерпретатори.

Безумовно, уточнення (експлікацію) синтаксичного та семантичного аспектів можна давати по-різному. Спочатку розглянемо традиційні формалізми для опису синтаксису мов.

1.2. Формальний опис синтаксису мови SIPL

Для опису синтаксису мов зазвичай використовують БНФ (Форми Бекуса-Наура). Програми (або їх частини) виводяться із метазмінних (нетерміналів), які записуються у кутових дужках. Метазмінні задають синтаксичні класи. У процесі виводу метазмінні замінюються на праві частини правил, що задають ці метазмінні. Праві частини для однієї метазмінної розділяються знаком альтернативи « | ». Процес породження припиняється, якщо всі метазмінні замінено на термінальні символи (тобто символи без кутових дужок).

Синтаксис мови *SIPL* можна задати за допомогою наступної БНФ.

Таблиця 1.2

Ліва частина правила – метазмінна (дефінієндум)	Права частина правила (дефінієнс)	Ім'я правила
<програма> ::=	**begin** <оператор> **end**	*NP1*

<оператор> ::=	<змінна>:=<вираз> |	*NS1*
	<оператор> ; <оператор>|	*NS2*
	if <умова> **then** <оператор> **else** <оператор> |	*NS3*
	while <умова> **do** <оператор> |	*NS4*
	begin <оператор> **end** |	*NS5*
	skip	*NS6*
<вираз> ::=	<число> | <змінна> | <вираз> + <вираз> | <вираз> – <вираз> | <вираз> * <вираз> | (<вираз>)	*NA1*– *NA6*
<умова> ::=	<вираз> = <вираз> | <вираз> > <вираз> | <умова> ∨ <умова> | ¬ <умова> | (<умова>)	*NB1*– *NB5*
<змінна> ::=	. . . *M* | *N* | . . .	*NV*...
<число> ::=	. . . *–1* | *0* | *1* | *2* | *3* | . . .	*NN*...

Наведена БНФ задає мову *SIPL* як набір речень (слів), які виводяться з метазмінної <програма>. Точне визначення виводу буде подано пізніше, зараз тільки відмітимо, що вивід можна подати у вигляді дерева.

Щоб переконатись у синтаксичній правильності програми, треба побудувати її вивід. Зокрема, для нашої програми *GCD* маємо дерево виводу, подане на рис. 1.1.

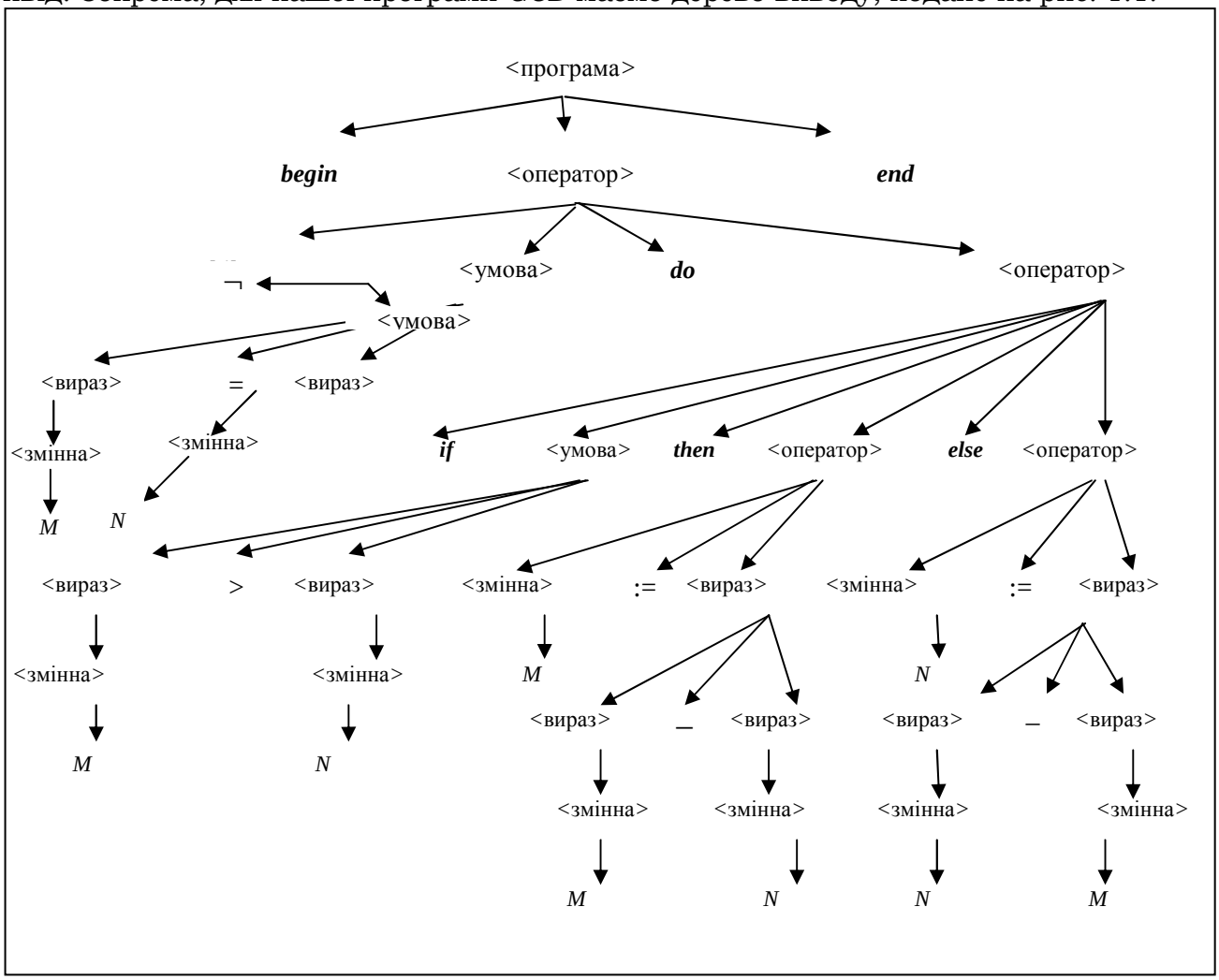


Рисунок 1.1. Дерево синтаксичного виводу програми GCD

Побудоване дерево синтаксичного виводу дозволяє стверджувати синтаксичну правильність програми *GCD*. Дійсно, якщо записати зліва направо послідовність усіх термінальних символів, то отримаємо програму *GCD*, що говорить про її вивідність у БНФ мови *SIPL*, тобто про її синтаксичну правильність.

Аналізуючи далі наведену БНФ можна відзначити, що вона досить просто описує основні конструкції мови *SIPL*. Але зворотною стороною цієї простоти є неоднозначність цієї БНФ. Наприклад, вираз *X+Y*Z* має два різних дерева виводу, що ведуть до різних семантик (рис. 1.2). Тому неоднозначність БНФ значно ускладнює семантичний аналіз програм.

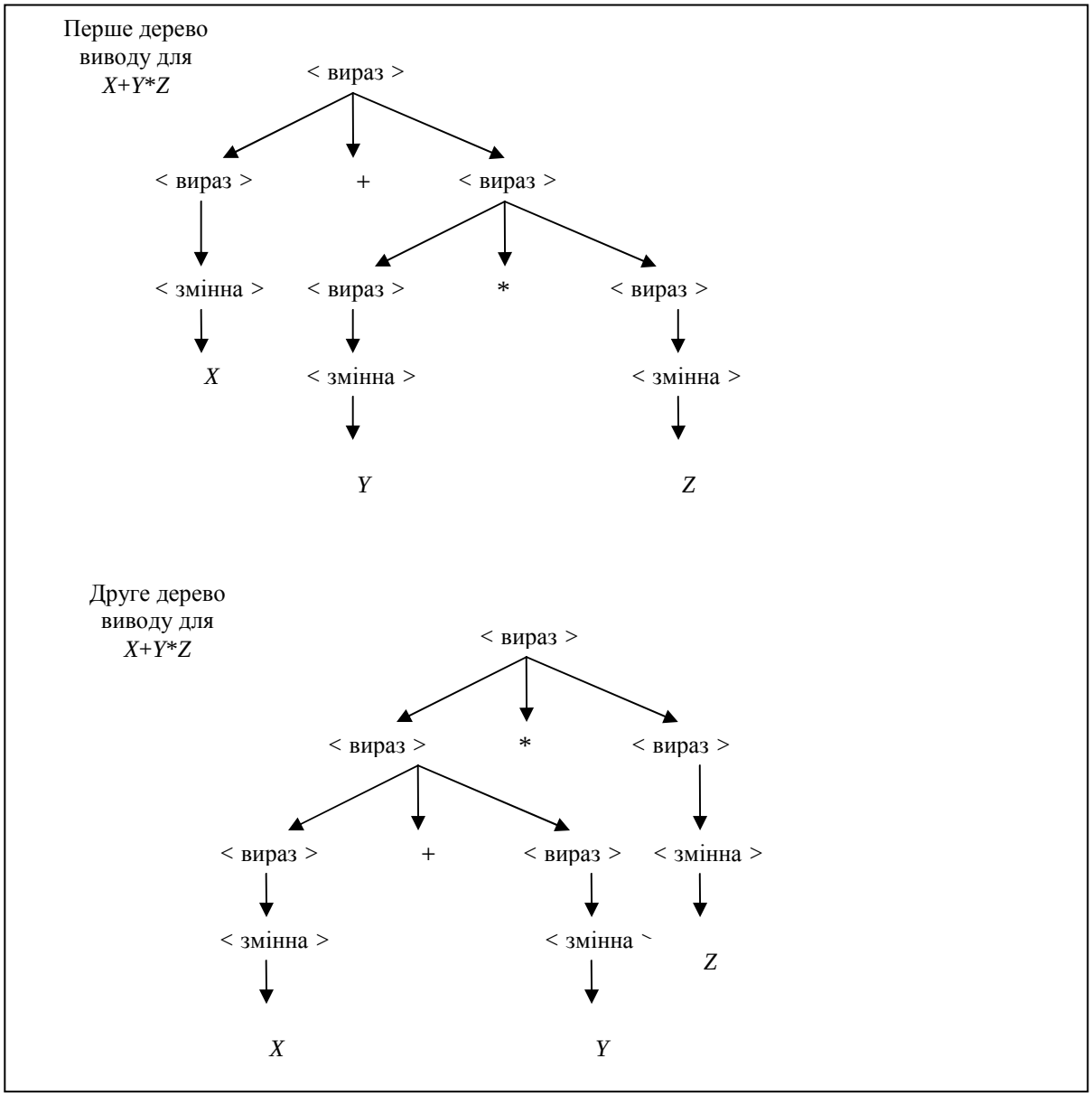


*Рисунок 1.2. Дерева синтаксичного виводу виразу X+Y*Z*

Однозначності побудови дерева синтаксичного виводу можна досягти введенням пріоритетів операцій та правил асоціативності для операцій одного пріоритету. Слід відзначити, що в математиці при описі пріоритетів, як правило, не розрізняють синтаксичний і семантичний аспекти, тому часто говорять, що пріоритети задають порядок виконання операцій (семантичний аспект) замість того, щоб говорити про порядок структурного аналізу виразу (синтаксичний аспект). Такий розгляд об'єкта,

коли не виокремлюються його різні аспекти та складові, часто називають *синкретичним*. У випадку мови *SIPL* однозначність аналізу може порушуватися при формуванні операндів операцій (синтаксичних конструкторів) різного типу. Будемо виокремлювати чотири типи операцій:

- арифметичні (бінарні операції +, –, *);
- порівняння (бінарні операції =, >);
- булеві (бінарна операція диз'юнкції ∨ та унарна операція заперечення ¬);
- оператори (присвоєння _:=_, оператор послідовного виконання _;_, умовний оператор ***if_then_else_*** та оператор циклу ***while_do_***).

Тут символ підкреслення позначає операнд (або параметр) оператора. Перші три групи операцій є традиційними, як і їх пріоритети. Четверта група потребує певного пояснення. Річ у тім, що, наприклад, синтаксична конструкція виду ***if*** *b* ***then*** *S1* ***else*** *S2*; *S3* може аналізуватися по-різному. Одне трактування може відносити до умовного оператора (його ***else***-частини) послідовність операторів *S2*; *S3*, інше трактування – тільки один оператор *S2*. Різні трактування будуть задавати різну семантику. Те саме стосується і конструкцій виду ***while*** *b* ***do*** *S1*; *S2* та *S1*; *S2*; *S3*. На семантику також впливає порядок застосування операцій одного типу. Так, вираз *a1–a2–a3* можна аналізувати як зліва направо (лівоасоціативно), що можна подати як (*a1–a2*)–*a3*, так і справа наліво (правоасоціативно), що можна подати як *a1*–(*a2–a3*) (=(*a1–a2*)+*a3*). Щоб подолати неоднозначність синтаксичного аналізу, будемо вважати, що всі бінарні операції лівоасоціативні (обчислюються зліва направо) та що пріоритет операцій наступний (у порядку зменшення):

1) множення *;
2) додавання + та віднімання –;
3) операції порівняння =, >;
4) заперечення ¬;
5) диз'юнкція ∨;
6) присвоєння _:=_;
7) оператор циклу ***while_do_***;
8) умовний оператор ***if_then_else_***;
9) послідовне виконання _;_.

Зауважимо ще раз, що однозначність синтаксичного аналізу не зовсім адекватно подається пріоритетами операцій, які мають семантичну природу. Тому можливі розбіжності між цими поняттями.

Є і друга можливість досягти однозначності БНФ мови *SIPL* – ввести нові метасимволи та нові правила їх визначення. Пропонуємо читачам зробити це самостійно.

Наведені вище позначення метазмінних не зовсім зручні, тому часто використовують форми, більш близькі до математики. Введемо позначення для всіх синтаксичних категорій та нові метазмінні, що вказують на представників цих категорій.

Таблиця 1.3

Метазмінна	**Синтаксична категорія**	**Нова метазмінна**
<програма>	*Prog*	*P*
<оператор>	*Stm*	*S*
<вираз>	*Aexp*	*a*
<умова>	*Bexp*	*b*
<змінна>	*Var*	*x*
<число>	*Num*	*n*

У наведених позначеннях БНФ мови *SIPL* набуває наступного вигляду.

Таблиця 1.4

Ліва частина правила – метазмінна	**Права частина правила**	**Ім'я правила**
P::=	**begin** S **end**	*P1*
S::=	x:=a | S_1 ; S_2| **if** b **then** S_1 **else** S_2 | **while** b **do** S | **begin** S **end** | *skip*	*S1–S6*
a::=	n | x | $a_1 + a_2$ | $a_1 - a_2$ | $a_1 * a_2$ | (a)	*A1– A6*
b::=	$a_1 = a_2$ | $a_1 > a_2$ | $b_1 \vee b_2$ | $\neg b$ | (b)	*B1 – B5*
x::=	. . . *M* | *N* | . . .	*NV…*
n::=	. . . *–1* | *0* | *1* | *2* | *3* | . . .	*NN…*

Надалі будемо користуватися введеними позначеннями для запису структури програм та їх складових.

Зауваження 1.3. Таблиці 1.3 та 1.4 надають можливість розглядати наведений формалізм подання синтаксису мову *SIPL* як певну багатоосновну алгебру (синтаксичну алгебру). Основами цієї алгебри є множини *Prog*, *Stm*, *Aexp*, *Bexp*, *Var* та *Num*, а операціями – перетворення, що задаються таблицею 1.4.■

Дотепер ми користувались інтуїтивним розумінням БНФ. Разом із тим слід розуміти, що можуть існувати різні уточнення БНФ (про це буде йтиметься в розділі із синтактики). Зараз приймемо, що БНФ дозволяє прописати індуктивне визначення синтаксичних категорій. Дійсно, наведена БНФ визначає шість синтаксичних категорій (класів): *Num*, *Var*, *Aexp*, *Bexp*, *Stm*, *Prog*. Вони можуть бути задані наступним індуктивним визначенням.

1. База індукції:
- Num={…, *-1*, *0*, *1*, *2*, *3*, …};
- Var={*M*, *N*, …};
- якщо $n \in Num$, то $n \in Aexp$;
- якщо $x \in Var$, то $x \in Aexp$;
- *skip* належить *Stm*.

2. Крок індукції:
- якщо a, a_1, $a_2 \in Aexp$, то записи (вирази)
  - $a_1 + a_2$,
  - $a_1 - a_2$,
  - $a_1 * a_2$,
  - (a)

  належать *Aexp*,
- якщо a_1, $a_2 \in Aexp$, b , b_1, $b_2 \in Bexp$, то записи (умови)
  - $a_1 = a_2$,
  - $a_1 > a_2$,
  - $b_1 \vee b_2$,
  - $\neg b$,
  - (b)

  належать *Bexp*,
- якщо $x \in Var$, $a \in Aexp$, $b \in Bexp$, S, S_1, $S_2 \in Stm$, то записи (оператори)
  - x:=a,
  - S_1 ; S_2,
  - **if** b **then** S_1 **else** S_2,

– **while** *b* **do** *S*,
– **begin** *S* **end**

належать *Stm*,

- якщо *S*∈ *Stm*, то запис **begin** *S* **end** належить *Prog*.

На підставі такого індуктивного визначення може бути задане визначення синтаксичних категорій за допомогою рекурентних співвідношень. Пропонуємо читачам зробити це самостійно.

Таким чином, можна стверджувати, що наведеними визначеннями синтаксис мови *SIPL* задано точно (формально).

Перейдемо тепер до визначення семантики мови *SIPL*.

1.3. Формальний опис семантики мови SIPL

Семантика задає значення (смисл) програми. Наш приклад показує, що смисл програми – перетворення вхідних *даних* у вихідні. У математиці такі перетворення називають *функціями*. Тому до семантичних понять відносять поняття даних, функцій та методів їх конструювання. Такі методи називаються *композиціями*, а відповідна семантика часто називається *композиційною*. Будемо вживати термін *композиційна семантика*, тому що саме композиції і визначають її властивості. Композиційна семантика є певною конкретизацією *функціональної семантики* тому, що базується на тлумаченні програм як функцій.

Перейдемо до розгляду композиційної семантики мови *SIPL*.

1.3.1. Дані

Базові типи даних – множини цілих чисел, булевих значень та змінних (імен):

- *Int*={ . . . , -*1*, *0*, *1*, *2*, . . . };
- *Bool*={*true*, *false*};
- *Var*={…, *M*, *N*, … }.

Похідні типи – множина станів змінних (наборів іменованих значень, наборів змінних з їх значеннями):

- *State*=*Var* →*Int*.

Приклади станів змінних: [*M*↦*8*, *N*↦*16*], [*M*↦*3*, *X*↦ *4*, *Y*↦*2*, *N*↦*16*].

Визначимо тепер *операції* на базових типах даних. Щоб відрізнити операції від символів, якими вони позначаються, їх пишуть жирним шрифтом або вводять спеціальні позначення. Ми тут оберемо другий варіант, вводячи нові позначення для операцій на типах даних.

Операції на множині Int. Символам +, –, * відповідають операції *add, sub, mult* (додавання, віднімання, множення). Це бінарні операції типу $Int^2 \to Int$.

Операції на множині Bool. Символам ∨, ¬ відповідають операції *or, neg*. Це бінарна операція типу $Bool^2 \to Bool$ (диз'юнкція) та унарна операція типу $Bool \to Bool$ (заперечення).

У мові також є *операції змішаного типу*. Символам операцій порівняння =, > відповідають операції *eq, gr*. Це бінарні операції типу $Int^2 \to Bool$.

Вивчення властивостей даних та операцій у математиці відбувається на основі поняття *алгебри*. В першому наближенні алгебру можна тлумачити як множину із заданими на ній операціями. Для нашої мови маємо наступні алгебри.

Алгебра цілих чисел: *A_Int*=<*Int*; *add, sub, mult*>.

Алгебра булевих значень: *A_Bool*=<*Bool*; *or, neg*>.

Якщо додати операції порівняння, отримаємо *двоосновну алгебру базових даних*:

A_Int_Bool =<*Int*, *Bool*; *add, sub, mult, or, neg, eq, gr*>.

Для опису мови *SIPL* треба додати ще одну основу – множину станів змінних. На цій основі задана бінарна операція *накладання* ∇ (для цієї операції іноді вживається термін «накладка»). Ця операція за двома станами будує новий стан змінних, до якого входять усі іменовані значення з другого стану та і ті значення з першого стану, імена яких не входять до першого стану. Ця операція подібна до операції

копіювання каталогів із спеціальним випадком однакових імен файлів у двох каталогах. У цьому випадку файл із першого каталогу замінюється файлом з тим же іменем з другого каталога.

Наприклад:

$$[M\mapsto 8,\ N\mapsto 16]\ \nabla\ [M\mapsto 3,\ X\mapsto 4,\ Y\mapsto 2] = [M\mapsto 3,\ N\mapsto 16,\ X\mapsto 4,\ Y\mapsto 2].$$

Уведемо відразу і відношення розширення $\subseteq$ станів новими іменованими значеннями. Наприклад,

$$[M\mapsto 8,\ N\mapsto 16] \subseteq [M\mapsto 8,\ X\mapsto 4,\ Y\mapsto 2,\ N\mapsto 16].$$

Це відношення не включаємо в алгебри, пов'язані з мовою *SIPL*, бо воно в цій мові безпосередньо не використовується, але буде корисним для доведення властивостей програм цієї мови.

Для створення та оперування із станами змінних треба визначити дві функції: *іменування* $\Rightarrow x$: $Int \to State$ та *розіменування* $x\Rightarrow$: $State \to Int$, які мають параметр $x \in Var$:

- $\Rightarrow x(n)=[x\mapsto n]$;
- $x\Rightarrow(st)=st(x)$.

Тут і в подальшому вважаємо, що $n \in Int$, $st \in State$. Перша функція іменує іменем x число n, створюючи стан $[x\mapsto n]$, друга бере значення імені x у стані st. Сама формула ґрунтується на тому факті, що стани змінних можуть тлумачитись як функції виду $Var\to Int$. Функція розіменування є частковою. Вона не визначена, якщо x не має значення у стані st.

Наприклад:

- $\Rightarrow M(5)=[M\mapsto 5]$;
- $Y\Rightarrow([M\mapsto 3,\ X\mapsto 4,\ Y\mapsto 2])=2$;
- $Y\Rightarrow([M\mapsto 3,\ X\mapsto 4])$ не визначене.

Крім того, введемо

- *параметричну функцію-константу арифметичного типу* $\overline{n}: State\to Int$, таку що $\overline{n}(st)=n$ $(n\in Int)$;
- *тотожну функцію* id: $State\to State$, таку, що $id(st)=st$.

Отримали багатоосновну *алгебру даних мови SIPL*

$$A\_Int\_Bool\_State = \langle Int,\ Bool,\ State;$$
$$add,\ sub,\ mult,\ or,\ neg,\ eq,\ gr,\ \Rightarrow x,\ x\Rightarrow,\ \overline{n},\ id,\ \nabla\rangle,$$

яка подана на рис. 1.3.

Зауваження 1.4. Є ще одна основа – *Var*. Оскільки ніяких операцій на цій основі у мові *SIPL* не задано, тому цю основу до алгебри даних не включаємо, але імена з *Var* використовуємо як параметри операцій іменування та розіменування.

1.3.2. Функції

Аналіз алгебри даних показує, що в мові *SIPL* можна вирізнити два види функцій: *1*) n-арні функції на базових типах даних, *2*) функції над станами змінних. Другий вид функцій будемо називати номінативними функціями. Назва пояснюється тим, що вони задані на наборах іменованих даних (латинське *nomen* – ім'я).

Визначимо тепер наступні класи функцій, які будуть задіяні при визначенні семантики мови *SIPL*:

1. n-арні операції над базовими типами:
   - $FNA=Int^n \to Int$ – n-арні арифметичні функції (операції);
   - $FNB=Bool^n \to Bool$ – n-арні булеві функції (операції);
   - $FNAB=Int^n \to Bool$ – n-арні функції (операції) порівняння.
2. Функції над станами змінних
   - $FA=State \to Int$ – *номінативні арифметичні функції;*
   - $FB=State \to Bool$ – *номінативні предикати;*
   - $FS=State \to State$ – *біномінативні функції–перетворювачі* (трансформатори) станів.

Для операцій мови *SIPL* зазвичай n=2, а для булевої операції заперечення n=1.

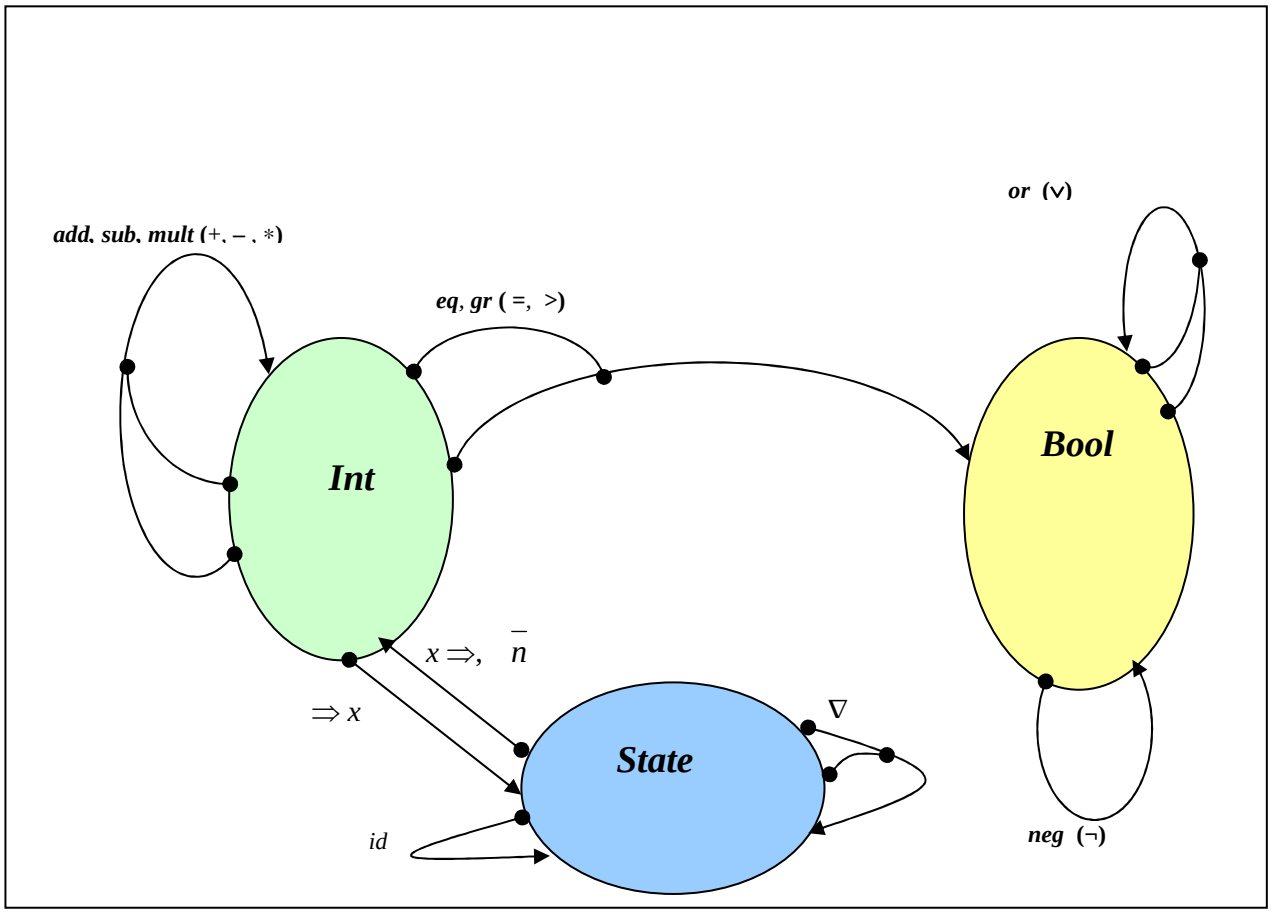


Рисунок 1.3. Алгебра даних мови SIPL

1.3.3. Композиції

Нагадаємо, що композиції формалізують методи побудови програм. Аналіз мови *SIPL* дає підстави говорити про те, що будуть вживатися композиції різних типів, а саме:

- композиції, які пов'язані з номінативними функціями та предикатами;
- композиції, які пов'язані з біномінативними функціями.

Перший клас композицій використовується для побудови семантики арифметичних виразів та умов, другий – операторів.

Цей клас композицій складається із композицій *суперпозиції* в n-арні функції, які задані на різних основах (класах функцій):

- суперпозиція номінативних арифметичних функцій в n-арну арифметичну функцію має тип S^n: $FNA\times FA^n\to FA$;
- суперпозиція номінативних арифметичних функцій в n-арну функцію порівняння має тип S^n: $FNAB\times FA^n\to FB$;
- суперпозиція номінативних предикатів в n-арну булеву функцію має тип S^n: $FNB\times FB^n\to FB$.

Зауваження 1.5. Суперпозиції різного типу позначаємо одним знаком.

Суперпозиція задається формулою

$$(S^n(f, g_1,\ldots,g_n))(st)=f(g_1(st),\ldots,g_n(st)),$$

де f – n-арна функція, $g_1,\ldots,g_n$ – номінативні функції відповідного типу.

Другий клас композицій складається з наступних композицій.

- *Присвоєння* AS^x: $FA \to FS$ (x – параметр).
  Присвоєння задається формулою:

$$AS^x(fa)(st)=st\,\nabla[x\to fa(st)].$$

- *Послідовне виконання* $\bullet$: $FS^2\to FS$
  Послідовне виконання задається формулою:
  $$(fs_1\bullet fs_2)(st)=fs_2(fs_1(st)).$$
- *Умовний оператор* (розгалуження): $IF{:}FB\times FS^2\to FS$. Задається формулою:
  $$IF(fb, fs_1, fs_2)(st)=\begin{cases} fs_1(st), & \text{якщо } fb(st)=true,\\ fs_2(st), & \text{якщо } fb(st)=false.\end{cases}$$
- *Цикл* (*ітерація з передумовою*): $WH{:}FB\times FS\to FS$. Задається рекурентно (індуктивно) наступним чином:
  $WH(fb,fs)(st)=st_n$,
  де $st_0=st$, $st_1=fs(st_0)$, $st_2=fs(st_1),\ldots, st_n=fs(st_{n-1})$, причому
  $fb(st_0)=true, fb(st_1)=true,\ldots, fb(st_{n-1})=true, fb(st_n)=false.$

Важливо відзначити, що для циклу наведена послідовність визначається однозначно. Позначимо число n (кількість ітерацій циклу) як $NumItWH((fb, fs), st)$. Однозначність визначення n дозволяє розглядати $NumItWH((fb, fs), st)$ як тернарне відображення, яке залежить від fb, fs, st. Якщо цикл не завершується, то $NumItWH((fb, fs), st)$ вважається невизначеним. Це відображення буде використовуватись в індуктивних доведеннях властивостей циклу.

1.3.4. Програмні алгебри

Побудовані композиції дозволяють стверджувати, що отримано *алгебру функцій* (*програмну алгебру*)

$$A\_Prog = \langle FNA, FNB, FNAB, FA, FB, FS; S^n, AS^x, \bullet, IF, WH, x\Rightarrow, id\rangle.$$

Функції іменування $\Rightarrow x$ та накладання ∇ не включені до переліку операцій цієї алгебри, тому що вони представлені композицією присвоєння. Також не включаємо функції-константи $\overline{n}$, які мають специфічну природу. Разом із тим до переліку композицій включено функції (нуль-арні композиції) розіменування та тотожна функція. Це пояснюється тим, що вказані нуль-арні композиції мають не предметну (специфічну) природу, а логічну (загальнозначущу), що дозволяє розглядати їх саме як загальні композиції (нехай і нуль-арні), а не як специфічні функції. Втім, цей розподіл є досить умовним.

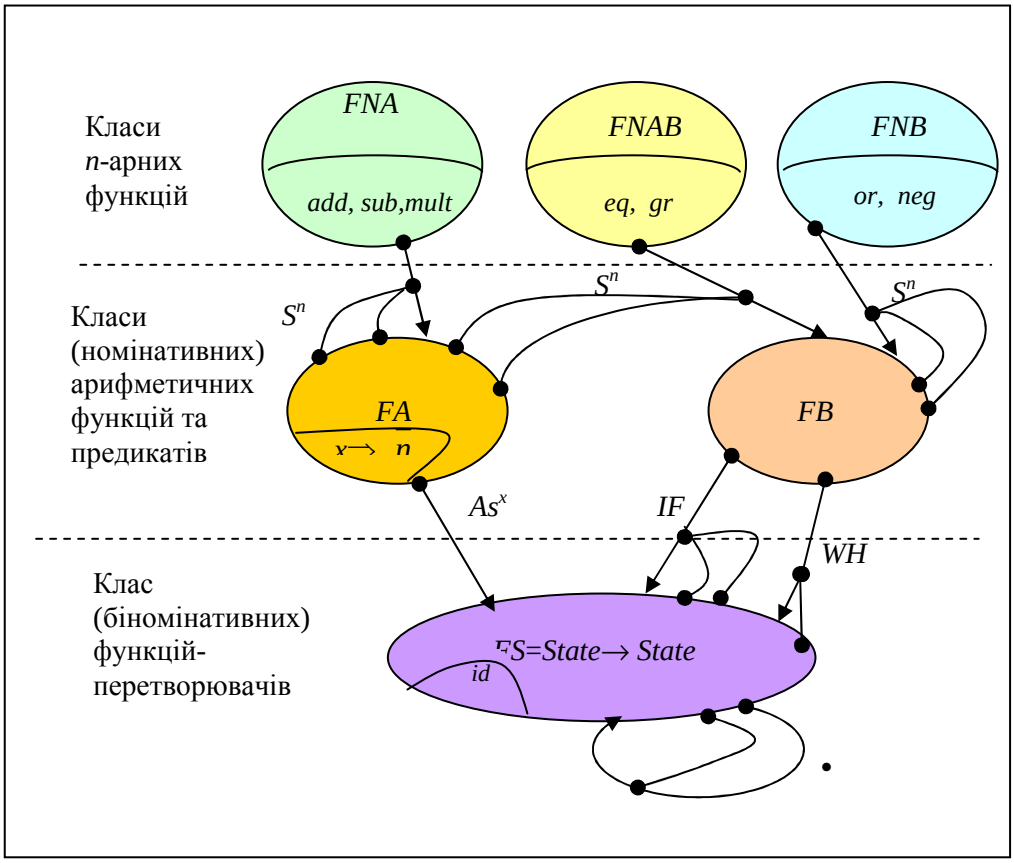


Рисунок 1.4. Алгебра функцій (програмна алгебра)

Наведена алгебра (рис. 1.4) в своїх основах містить багато «зайвих» функцій, які не можуть бути породжені в мові *SIPL*. Аналіз мови дозволяє стверджувати (цей факт буде доведено пізніше в теоремі 1.1), що функції, які задаються мовою *SIPL*, породжуються в алгебрі *A_Prog* з наступних *базових функцій*:

- $add, sub, mult \in FNA;$
- $or, neg \in FNB$;
- $eq, gr \in FNAB$;
- $\overline{n} \in FA$ ($n \in Int$).

Підалгебру алгебри *A_Prog*, породжену наведеними базовими функціями, назвемо *функціональною алгеброю мови SIPL* і позначимо *A_SIPL*.

Зауважимо, що всі функції алгебри *A_SIPL* є *однозначними* (детермінованими) функціями. Це випливає з того, що всі базові функції є однозначними, а композиції зберігають цю властивість. Прохання до читача довести цю властивість самостійно.

Формули для обчислення композицій та функцій алгебри *A_Prog* подамо у наступній таблиці (тут f – n-арна функція, fa, g_1,…, g_n – номінативні арифметичні функції, fb – номінативний предикат, fs, fs_1, fs_2 – біномінативні функції, st – стан, n – число).

Таблиця 1.5

Композиція	**Формула обчислення**	**Ім'я формули**
Суперпозиція	$(S^n(f, g_1,\ldots, g_n))(st)=f(g_1(st),\ldots, g_n(st))$	*AF_S*
Присвоєння	$AS^x(fa)(st)=st\,\nabla[x\rightarrow fa(st)]$	*AF_AS*
Послідовне виконання	$fs_1 \bullet fs_2(st)=fs_2(fs_1(st))$	*AF_SEQ*

Умовний оператор	$IF(fb, fs1, fs2)(st) = \begin{cases} fs1(st), & \text{ÿêùî } fb(st) = true, \\ fs2(st), & \text{ÿêùî } fb(st) = false. \end{cases}$	*AF_IF*
Цикл	$WH(fb,fs)(st)=st_n$, де $st_0=st$, $st_1=fs(st_0)$, $st_2=fs(st_1)$, …, $st_n=fs(st_{n-1})$, причому $fb(st_0)=true$, $fb(st_1)=true$,…, $fb(st_{n-1})=true$, $fb(st_n)=false$.	*AF_WH*
Функція розіменування	$x\Rightarrow(st)=st(x)$	*AF_DNM*
Тотожна функція	$id(st)=st$	*AF_ID*

Зауваження 1.6. Наведені формули слід тлумачити з урахуванням частковості функцій. А саме, якщо значення однієї з функцій, що фігурує у формулі, не є визначеним, то і результат не буде визначеним. Так, для формули $fs_1 \bullet fs_2(st)=fs_2(fs_1(st))$ вважаємо, що коли $fs_1(st)$ або $fs_2(fs_1(st))$ не визначені, то і результат не є визначеним.

Для роботи з частковими функціями використовують наступні позначення:

- $fs(st)\uparrow$ – значення fs на st не визначене,
- $fs(st)\downarrow$ – значення fs на st визначене,
- $fs(st)\downarrow=r$ –значення fs на st визначене і дорівнює r.

З урахуванням частковості, формулу для послідовного виконання можна записати у наступному вигляді:

$$fs_1 \bullet fs_2(st)= \begin{cases} r, & \text{якщо існує } r', \text{ що } fs_1(st)\downarrow= r' \,\&\, fs_2(r')\downarrow= r, \\ & \text{не визначено в інших випадках.} \end{cases}$$

Формула для умовного оператора буде мати вигляд

$$IF(fb, fs_1, fs_2)(st) = \begin{cases} r_1, & \text{якщо } fb(st)\downarrow= true \,\&\, fs_1(st)\downarrow= r_1, \\ r_2, & \text{якщо } fb(st)\downarrow= false \,\&\, fs_2(st)\downarrow= r_2, \\ & \text{невизначено в інших випадках.} \end{cases}$$

Інші формули можуть бути переписані аналогічним чином. Наведений вигляд формули зберігають і у випадку багатозначних (недетермінованих) функцій. Правда, тут такі функції розглядати не будемо.

Зазначимо, що наведені формули можна було б записувати із вживанням сильної рівності, яка задає невизначеність лівої частини при невизначеності правої.■

Побудована алгебра *A_SIPL* дозволяє тепер формалізувати семантику програм мови *SIPL*, задаючи їх функціональними виразами (семантичними термами) алгебри *A_SIPL*.

1.3.5. Визначення семантичних термів

Досі ми не дуже чітко розрізняли функціональний вираз алгебри *A_Prog* та функцію, що задається цим виразом. Наприклад, запис $(f \bullet g) \bullet h$ можна тлумачити як функцію, і тоді її можна застосувати до стану st або як вираз, і тоді, наприклад, вивчати тотожність $(f \bullet g) \bullet h = f \bullet (g \bullet h)$. У математичній логіці таке розрізнення роблять явним, вважаючи, що $(f \bullet g) \bullet h$ є виразом (термом, формулою), а не функцією. Саму ж функцію, яка задається цим виразом, позначають, наприклад, $(f \bullet g) \bullet h_I$, де I– інтерпретація символів f, g, h в алгебрі *A_Prog*.

Таке розрізнення можна було б зробити і для мови *SIPL*. У такому випадку для опису (дескрипції) функцій, які задаються програмами мови *SIPL*, можуть використовуватися функціональні вирази алгебри *A_SIPL*, які називаються *термами* цієї алгебри. Такі класи термів будуються індуктивно, аналогічно класам синтаксичних категорій. Терми програмної алгебри будемо також називати *семантичними термами*. Ми зазвичай не будемо використовувати різні позначення для термів та функцій, сподіваючись, що читач із контексту зрозуміє, про яке

поняття іде мова. Разом із тим слід пам'ятати, що це розрізнення є важливим у теорії програмування, яка чітко виокремлює синтаксис та семантику програм.

Зауважимо, що можна використовувати різні визначення термів алгебри, у тому числі

- індуктивне;
- рекурсивне;
- аналітичне;
- БНФ;
- графічне тощо.

Прохання до читача побудувати індуктивне визначення множини термів самостійно.

Позначимо множини термів, які задають арифметичні вирази, умови, оператори (та програми) мови *SIPL* відповідно як *TFA*, *TFB*, *TFS*.

1.3.6. Побудова семантичного терму програми

Програма мови *SIPL* може бути перетворена на семантичний терм (терм програмної алгебри), який задає семантику цієї програми (семантичну функцію програми), перетвореннями такого типу:

- *sem_P*: *Prog* → *TFS;*
- *sem_S*: *Stm* → *TFS;*
- *sem_A*: *Aexp* → *TFA;*
- *sem_B*: *Bexp* → *TFB.*

Ці перетворення задаються рекурсивно (за структурою програми). Тому побудова семантичного терму залежить від вибору структури синтаксичного запису програми. Тут треба зважати на неоднозначність обраної нами граматики, що може призвести до різної семантики програм. Для досягнення однозначності треба користуватися пріоритетами операцій і типом їх асоціативності.

Таблиця 1.6

Правило заміни	**Номер правила**
sem_P: *Prog* → *TFS* задається правилами:	
$sem\_P(\textbf{begin}\ S\ \textbf{end}) = sem\_S(S)$	*NS_Prog*
sem_S: *Stm* → *TFS* задається правилами:	
$sem\_S(x:=a) = AS^x(sem\_A(a))$ $sem\_S(S_1;S_2) = sem\_S(S_1) \bullet sem\_S(S_2)$ $sem\_S(\textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ S_1\ \textbf{else}\ S_2) = IF(sem\_B(b), sem\_S(S_1), sem\_S(S_2))$ $sem\_S(\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S) = WH(sem\_B(b), sem\_S(S))$ $sem\_S(\textbf{begin}\ S\ \textbf{end}) = (sem\_S(S))$ $sem\_S(skip) = id$	*NS_Stm_As* *NS_Stm_Seq* *NS_Stm_If* *NS_Stm_Wh* *NS_Stm_BE* *NS_Stm_skip*
sem_A: *Aexp* → *TFA* задається правилами:	
$sem\_A(n)) = \overline{n}$ $sem\_A(x)) = x\Longrightarrow$ $sem\_A(a_1+a_2) = S^2(add, sem\_A(a_1), sem\_A(a_2))$ $sem\_A(a_1-a_2) = S^2(sub, sem\_A(a_1), sem\_A(a_2))$ $sem\_A(a_1*a_2) = S^2(mult, sem\_A(a_1), sem\_A(a_2))$	*NS_A_Num* *NS_A_Var* *NS_A_Add* *NS_A_Sub* *NS_A_Mult*

$sem\_A((a))=sem\_A(a)$	*NS_A_Par*
sem_B: $Bexp \to TFB$ задається правилами:	
$sem\_B(a_1{=}a_2)=S^2(eq, sem\_A(a_1), sem\_A(a_2))$ $sem\_B(a_1{>}a_2)=S^2(gr, sem\_A(a_1), sem\_A(a_2))$ $sem\_B(b_1 \vee b_2)=S^2(or, sem\_B(b_1), sem\_B(b_2))$ $sem\_B(\neg b)=S^1(neg, sem\_B(b))$ $sem\_B((b))= sem\_B(b)$	*NS_B_eq* *NS_B_gr* *NS_B_or* *NS_B_neg* *NS_B_Par*

Наведені правила слід розглядати як загальні правила, які в логіці називають *схемами правил*. Щоб із *загального* правила (метаправила) отримати *конкретне* правило (об'єктне правило), слід замість синтаксичних метасимволів, таких як *a*, *b*, *S*, *P*, *n*, *x*, підставити конкретні синтаксичні елементи (записи), наприклад, замість *a* підставити *N–M*, замість *b* – *M>N* і т.д. Далі ліва частина конкретного правила замінюється на його праву частину і т.д.

Приклад 1.2 Побудуємо семантичний терм виразу *X+Y*Z*. Побудова терму полягає в обчисленні значення $sem\_A(X+Y^*Z)$. Щоб зробити перший крок такого обчислення, треба віднайти правило, ліва частина якого буде збігатися із записом $sem\_A(X+Y^*Z)$ при відповідній конкретизації такого правила. Цей процес називається *уніфікацією* двох записів (термів). У нашому випадку можлива уніфікація з лівою частиною правил *NS_A_Add* та *NS_A_Mult*. У першому випадку уніфікація $sem\_A(X+Y^*Z)$ та $sem\_A(a_1+a_2)$ можлива при заміні a_1 на *X* та a_2 на *Y*Z*, а в другому уніфікація $sem\_A(X+Y^*Z)$ та $sem\_A(a_1{*}a_2)$ можлива при заміні a_1 на *X+Y* та a_2 на *Z*. Наведені заміни (підстановки) називаються *уніфікаторами* і зазвичай позначаються $[a_1/X, a_2/Y^*Z]$ та $[a_1/X+Y, a_2/Z]$ або $[a_1 \mapsto X, a_2 \mapsto Y^*Z]$ та $[a_1 \mapsto X+Y, a_2 \mapsto Z]$. Зазначимо, що друга уніфікація порушує пріоритет операцій, тому розглядаємо лише першу уніфікацію. Застосування першого уніфікатора до правила *NS_A_Add* призводить до наступного конкретного (об'єктного) правила:

NS_A_Add': $sem\_A(X+Y^*Z)= S^2(add, sem\_A(X), sem\_A(Y^*Z))$.

Застосування цього правила дозволяє перетворити запис $sem\_A(X+Y^*Z)$ на запис $S^2(add, sem\_A(X), sem\_A(Y^*Z))$. Цей запис містить два підзаписи ($sem\_A(X)$ та $sem\_A(Y^*Z)$), до яких можна застосувати перетворення. Підзапис $sem\_A(X)$ уніфікується з лівою частиною правила *NS_A_Var* за допомогою уніфікатора $[x/X]$, а підзапис $sem\_A(Y^*Z)$ – з *NS_A_Mult* за допомогою уніфікатора $[a_1/Y, a_2/Z]$. Застосування цих уніфікаторів призводить до двох нових конкретних правил:

NS_A_Var': $sem\_A(X)= X\Rightarrow$ та

NS_A_Mult': $sem\_A(Y^*Z)= S^2(mult, sem\_A(Y), sem\_A(Z))$.

Застосовуючи ці правила до виразу $S^2(add, sem\_A(X), sem\_A(Y^*Z))$ отримаємо $S^2(add, X\Rightarrow, S^2(mult, sem\_A(Y), sem\_A(Z)))$. Залишилося конкретизувати правило *NS_A_Var*, щоб отримати остаточний результат

$$sem\_A(X+Y^*Z)= S^2(add, X\Rightarrow, S^2(mult, Y\Rightarrow, Z\Rightarrow))\blacksquare$$

Отже, процес побудови семантичного терму програми полягає в послідовному перетворенні запису, для якого будується семантичний терм. Ці перетворення вимагають наступних дій:

- вибір загального правила, яке можна застосувати до підзапису поточного виразу з урахуванням пріоритету операцій;
- знаходження уніфікатора лівої частини правила з обраним під записом;
- отримання конкретного правила застосуванням уніфікатора до обох частин загального правила;

- заміна у поточному записі лівої частини конкретного правила на його праву частину.

Більш формально процес перетворень такого типу сформульований у теорії переписуючих правил.

Приклад 1.3. Побудувати семантичний терм програми *GCD*. Побудову будемо робити згідно з вищенаведеними правилами. Деталі не вказуємо.

sem_P(*GCD*)=
= *sem_P*(**begin**
while ¬*M*=*N* **do**
if *M*>*N* ***then*** *M*:=*M*–*N* ***else*** *N*:=*N*–*M*
end)=
= *sem_S*(**while** ¬*M*=*N* **do if** *M*>*N* **then** *M*:=*M*–*N* **else** *N*:=*N*–*M*)=
= *WH*(*sem_B*(¬*M*=*N*), *sem_S*(**if** *M*>*N* **then** *M*:=*M*–*N* **else** *N*:=*N*–*M*))=
= $WH(S^1(neg, sem\_A(M=N),$
$IF(sem\_B(M>N), sem\_S(M:=M–N), sem\_S(N:=N–M)))=$
= $WH(S^1(neg, S^2(eq, sem\_A(M), sem\_A(N))),$
$IF(sem\_B(M>N), sem\_S(M:=M–N), sem\_S(N:=N–M)))=$
= $WH(S^1(neg, S^2(eq, M\Rightarrow, N\Rightarrow)), IF(S^2(gr,M\Rightarrow,N\Rightarrow),$
$AS^M(sem\_A(M–N)), AS^N(sem\_A(N–M))))=$
= $WH(S^1(neg, S^2(eq, M\Rightarrow, N\Rightarrow)), IF(S^2(gr,M\Rightarrow,N\Rightarrow),$
$AS^M(S^2(sub,sem\_A(M),sem\_A(N))),$
$AS^N(S^2(sub,sem\_A(N),sem\_A(M)))))=$
= $WH(S^1(neg, S^2(eq, M\Rightarrow, N\Rightarrow)),$
$IF(S^2(gr, M\Rightarrow, N\Rightarrow),$
$AS^M(S^2(sub, M\Rightarrow, N\Rightarrow)),$
$AS^N(S^2(sub, N\Rightarrow, M\Rightarrow))))$ ■

Повернемося тепер до доведення того факту, що семантика довільної програми мови *SIPL* задається термом алгебри *A_SIPL*. Дійсно, аналізуючи таблицю 1.6, бачимо, що там фігурують лише базові функції алгебри *A_SIPL*. Більш строге доведення можна отримати індукцією за структурою програми *SIPL*. Таким чином, є справедливим наступне твердження.

Теорема 1.1. *Для довільної програми мови SIPL її семантична функція задається термом алгебри A_SIPL.*

Зауваження 1.7. Відображення побудови семантичного терму можна розглядати і в іншому аспекті – алгебраїчному. У цьому випадку програма розглядається як терм синтаксичної алгебри, який відображається в семантичну алгебру. Це відображення буде гомоморфізмом синтаксичної алгебри в семантичну. Доведення цього факту випливає з аналізу правил, заданих у таблиці 1.6. Прохання до читача довести цей факт самостійно.

1.3.7. Обчислення значень семантичних термів

Семантичні терми програми є точно (формально) заданими об'єктами, які формалізують семантику програм у термінах відповідних семантичних алгебр. Такі алгебри й терми і є головними об'єктами дослідження в нашому курсі. Ми далі будемо вивчати різні властивості таких алгебр та відповідних термів. Зараз розглянемо найпростішу властивість термів, зважаючи на те, що вони задають деякі функції (тобто повертаємось знову до синкретичного тлумачення терму як функції). Ця властивість називається аплікацією і полягає в застосуванні функції, що задається термом, до певних вхідних даних. Аплікація є аналогом (абстракцією) тестування програм.

Приклад 1.4. Обчислимо значення семантичного терму програми *GCD* на вхідному даному [$M \mapsto 8$, $N \mapsto 16$].

Процес обчислення значення задається формулами таблиці 1.5. Ці формули, як і формули таблиці 1.6, є загальними правилами обчислень. Щоб їх застосовувати, треба робити конкретизацію загальних правил подібно до того, як описано в прикладі 1.3. Отже, завдання полягає в отриманні значення наступної аплікації:

$WH(S^1(neg, S^2(eq, M\Rightarrow, N\Rightarrow)), IF(S^2(gr, M\Rightarrow, N\Rightarrow),$

$AS^M(S^2(sub, M\Rightarrow, N\Rightarrow)), AS^N(S^2(sub, N\Rightarrow, M\Rightarrow))))([M\mapsto 8, N\mapsto 16])$.

Правила для обчислення циклу *AF_WH* говорять про необхідність поступового обчислення станів st_0, st_1, … та перевірки відповідних умов. Отримуємо уніфікатор

$[fb/S^1(neg, S^2(eq, M\Rightarrow, N\Rightarrow)),$

$fs/IF(S^2(gr, M\Rightarrow, N\Rightarrow)), AS^M(S^2(sub, M\Rightarrow, N\Rightarrow), AS^N(S^2(sub, N\Rightarrow, M\Rightarrow))),$

$st/[M\mapsto 8, N\mapsto 16], st_0/[M\mapsto 8, N\mapsto 16]]$.

Переходимо до обчислення $fb(st_0)$, яке конкретизується аплікацією

$$S^1(neg, S^2(eq, M\Rightarrow, N\Rightarrow))([M\mapsto 8, N\mapsto 16]).$$

Ця аплікація обчислюється згідно із загальним правилом *AF_S* для обчислення суперпозиції. Після відповідної уніфікації та конкретизації спочатку отримуємо, що

$$S^1(neg, S^2(eq, M\Rightarrow, N\Rightarrow))([M\mapsto 8, N\mapsto 16])=$$
$$= neg(S^2(eq, M\Rightarrow, N\Rightarrow)([M\mapsto 8, N\mapsto 16])).$$

Застосовуючи правило обчислення суперпозиції ще раз та правила обчислення функції розіменування, отримуємо, що

$$S^2(eq, M\Rightarrow, N\Rightarrow)([M\mapsto 8, N\mapsto 16])=$$
$$=eq(M\Rightarrow([M\mapsto 8, N\mapsto 16]), N\Rightarrow([M\mapsto 8, N\mapsto 16]))=eq(8,16)=false.$$

Остаточно маємо, що

$$S^1(neg, S^2(eq, M\Rightarrow, N\Rightarrow))([M\mapsto 8, N\mapsto 16])=neg(false)=true.$$

Правила обчислення для циклу говорять про необхідність обчислення за правилом $st_1=fs(st_0)$, що конкретизується наступним чином:

$IF(S^2(gr, M\Rightarrow, N\Rightarrow), AS^M(S^2(sub, M\Rightarrow, N\Rightarrow)),$

$AS^N(S^2(sub, N\Rightarrow, M\Rightarrow)))([M\mapsto 8, N\mapsto 16])$.

Обчислення цієї аплікації полягає у застосуванні правила *AF_IF* для обчислення умовного оператора. Спочатку обчислюємо умову

$S^2(gr, M\Rightarrow, N\Rightarrow))([M\mapsto 8, N\mapsto 16])= gr(M\Rightarrow([M\mapsto 8, N\mapsto 16]), N\Rightarrow([M\mapsto 8, N\mapsto 16]))= gr(8, 16)= false$.

При хибній умові за правилом *AF_IF* обчислюється $AS^N(S^2(sub, N\Rightarrow, M\Rightarrow))([M\mapsto 8, N\mapsto 16])$. Отримуємо за правилом *AF_AS*

$AS^N(S^2(sub, N\Rightarrow, M\Rightarrow))([M\mapsto 8, N\mapsto 16])= [M\mapsto 8, N\mapsto 16]\nabla[N\mapsto S^2(sub, N\Rightarrow, M\Rightarrow)([M\mapsto 8, N\mapsto 16])] =[M\mapsto 8, N\mapsto 16]\nabla[N\mapsto sub(N\Rightarrow([M\mapsto 8, N\mapsto 16]), M\Rightarrow([M\mapsto 8, N\mapsto 16]))] =[M\mapsto 8, N\mapsto 16]\nabla[N\mapsto sub(16,8)]=[M\mapsto 8, N\mapsto 16]\nabla[N\mapsto 8] = [M\mapsto 8, N\mapsto 8]$.

Отже, st_1 конкретизується як $[M\mapsto 8, N\mapsto 8]$. Тепер за правилом *AF_WH* обчислюємо умову циклу на отриманому стані:

$$S^1(neg, S^2(eq, M\Rightarrow, N\Rightarrow))([M\mapsto 8, N\mapsto 8])=false.$$

Таким чином, остаточний стан є $[M\mapsto 8, N\mapsto 8]$. ■

1.3.8. Загальна схема формалізації мови *SIPL*

Підсумуємо схему формалізації, яка була застосована для мови *SIPL*. Зазначимо, що в першому наближенні мова *L* задається як трійка виду (*Synt*, *Sem*, *interpretation*), де *Synt* – опис синтаксичного аспекту (опис текстів програм), *Sem* – опис семантичного аспекту (опис смислу програм), *interpretation*: *Synt*→*Sem* – інтерпретація програм, яка кожній програмі співставляє її смисл (значення). Інтерпретацію також називають денотацією.

Спочатку ми мали початковий опис мови ($Synt_0$, Sem_0, $interpretation_0$), який складався з формального подання синтаксису $Synt_0$ у вигляді БНФ та неформального опису семантики Sem_0. Інтерпретація $interpretation_0$: $Synt_0 \rightarrow Sem_0$ також була неформальною.

Для формалізації семантики було вибрано формалізм функціональних алгебр. Цей формалізм також можна трактувати як певну мову, синтаксис якої задається термами алгебри $Synt_1$, семантика Sem_1 – функціями з носія алгебри, а інтерпретація $interpretation_1$: $Synt_1 \to Sem_1$ є просто інтерпретацією термів в алгебрі.

Визначення формальної семантики надає можливість надати формальне визначення мови *SIPL* наступним чином:

- синтаксис $Synt_0$ задається БНФ;
- семантика Sem_1 задається функціями;
- інтерпретація $interpretation_{SIPL}$: $Synt_0 \to Sem_1$ є добутком відображень sem_P та $interpretation_1$, тобто

$$interpretation_{SIPL} = sem\_P \bullet interpretation_1.$$

(Тут множення • тлумачиться як композиція довільних відображень.)

Таким чином, мова *SIPL* уточнюється трійкою

$$(Synt_0, Sem_1, sem\_P \bullet interpretation_1).$$

Кожен компонент цієї трійки визначений формально. Вказана схема формалізації наведена на рис. 1.5.

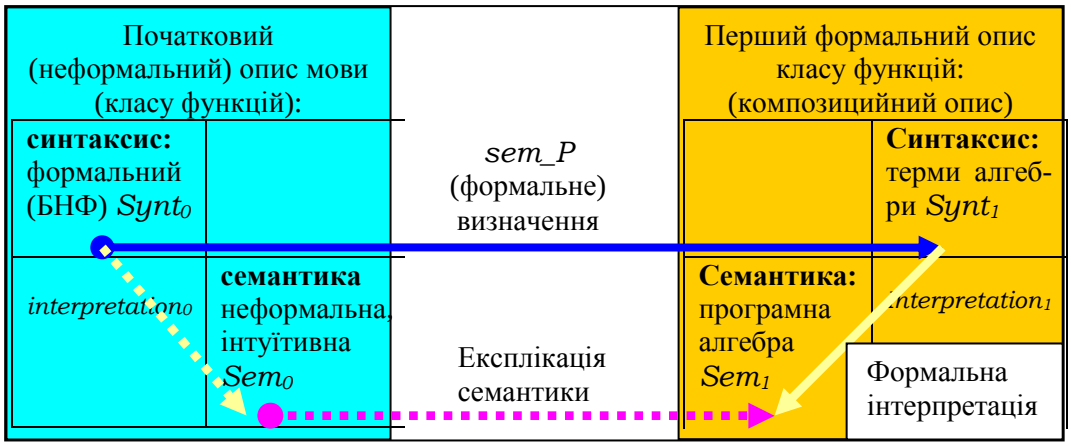


Рисунок 1.5 Схема визначення композиційної семантики

У цій схемі похідну стрілку $Sem_0 \to Sem_1$ можна тлумачити як уточнення (експлікацію) семантики.

Така схема буде використана далі для введення аплікативної аксіоматичної семантики.

1.4. Властивості програмної алгебри

Побудована програмна алгебра дозволяє сформулювати властивості програм, досліджуючи властивості функцій цієї алгебри, заданих її термами (функціональними виразами). Доведемо декілька таких властивостей.

Зауваження 1.8. У програмній алгебрі рівність розглядається як рівність функцій.

Лема 1.1. Доведемо властивість асоціативності послідовного виконання, тобто справедливість наступної тотожності ($f, g, h \in FS$):

$$(f \bullet g) \bullet h = f \bullet (g \bullet h).$$

Доведення. Оскільки в лемі формулюється рівність функцій, то слід довести, що на одному і тому ж даному обидві функції мають бути *1*) одночасно невизначеними або *2*) одночасно визначеними і в цьому випадку давати однакові результати (сильна рівність функціональних виразів). Використовуючи позначення $fs(st)\downarrow$ (функція fs визначена на st) та $fs(st)\uparrow$ (функція fs невизначена на st) наведене формулювання рівності можна задати наступним чином:

$fs_1 = fs_2$ тоді і тільки тоді, коли для довільного стану $st \in State$

1) ($fs_1(st)\uparrow$ & $fs_2(st)\uparrow$) або

2) ($fs_1(st)\downarrow$ & $fs_2(st)\downarrow$ & $fs_1(st)= fs_2(st)$).

Стосовно леми це означає:

($f\bullet g)\bullet h=f\bullet(g\bullet h)$) тоді і тільки тоді, коли для довільного стану $st\in State$

1) $((f\bullet g)\bullet h)(st)\uparrow$ & $(f\bullet(g\bullet h))(st)\uparrow$ або

2) $((f\bullet g)\bullet h)(st)\downarrow$ & $(f\bullet(g\bullet h))(st)\downarrow$ & $((f\bullet g)\bullet h)(st)= (f\bullet(g\bullet h))(st)$

Перейдемо до доведення. Беремо довільний стан $st\in State$. Спочатку доведемо, що якщо $((f\bullet g)\bullet h)(st)\uparrow$, то $(f\bullet(g\bullet h))(st)\uparrow$. Дійсно, для $((f\bullet g)\bullet h)(st)$ маємо формулу $h(g(f(st)))$. Тому значення $((f\bullet g)\bullet h)(st)$ буде не визначеним, якщо або $f(st)$ не визначене, або $g(f(st))$ не визначене, або $h(g(f(st)))$ не визначене. Але в кожному з цих трьох випадків буде невизначеним і значення $(f\bullet(g\bullet h))(st)$. Має місце і зворотне. Отже, якщо одне із значень $((f\bullet g)\bullet h)(st)$ або $(f\bullet(g\bullet h))(st)$ не визначене, то і друге значення також не визначене, тому формула ($fs_1(st)\uparrow$ & $fs_2(st)\uparrow$) буде істинною. Зауважимо, що звідси випливає, що якщо значення одного із функціональних виразів є визначеним, то є визначеним і значення іншого функціонального виразу.

Отже, коли одне із значень буде визначеним, то тоді визначені обидва значення і вони будуть рівними, бо $((f\bullet g)\bullet h)(st)= h(g(f(st)))$ та $(f\bullet(g\bullet h))(st)=h(g(f(st)))$.

Лема доведена. ■

У подальшому не будемо детально аналізувати випадки невизначеності функцій, сподіваючись, що читач сам зможе такі ситуації проаналізувати.

Зауваження 1.9. Рівність функцій можна доводити як рівність їх графіків. Але це вимагає переозначення композицій із функціональних у теоретико-множинні терміни. Тут цього робити не будемо.

Далі доведемо наступне твердження, яке часто буде використовуватися для доведення коректності програм із циклами.

Лема 1.2 (про властивості циклу). Для довільних функцій $fs\in FS$ і $fb\in FB$ та довільного стану $st\in State$ мають місце наступні властивості:

- $WH(fb,fs)= IF(fb, fs \bullet WH(fb,fs), id)$.
- $NumItWH((fb, fs), st)=0$ тоді і тільки тоді, коли $fb(st)\downarrow=false$ (це також означає, що $WH(fb, fs)(st)= st$).
- Якщо $NumItWH((fb, fs), st)>0$, то
  - $fb(st)\downarrow=true$,
  - $WH(fb, fs)(st)= WH(fb, fs)(fs(st))$ та
  - $NumItWH((fb, fs), fs(st))= NumItWH((fb, fs), st) - 1$.

Доведення. Спочатку доведемо першу властивість, що задає певну тотожність. Беремо довільний стан $st\in State$. Припустимо, що $WH(fb, fs)(st)$ визначено. Можливі два варіанта:

1) $fb(st)=false$;
2) $fb(st)=true$.

У першому випадку тіло циклу не виконується ($NumItWH((fb, fs), st)=0$), тому $WH(fb,fs)(st)=st$. При обчисленні $IF(fb, fs\bullet WH(fb,fs), id)(st)$ потрібно обчислити $id(st)$, що дає також значення st. Тому лема для цього випадку справедлива.

У другому випадку визначеність $WH(fb,fs)(st)$ означає, що є послідовність станів та значень предиката (тому $NumItWH((fb, fs), st))>0$), яка задовольняє наступним умовам:

$st_0=st$, $st_1=fs(st_0)$, $st_2=fs(st_1)$,…, $st_n=fs(st_{n-1})$, причому

$fb(st_0)=true$, $fb(st_1)=true$,…, $fb(st_{n-1})=true$, $fb(st_n)=false$.

Розглянемо, яке значення має $WH(fb,fs)(st_1)$. Зрозуміло, що послідовність обчислень повторює вищенаведену послідовність, але початковим станом є st_1. Тому $WH(fb,fs)(st_1)=st_n$. Звідси також випливає, що $NumItWH((fb, fs), st_1)= n-1$.

Подивимося тепер на обчислення функціонального виразу (праву частину тотожності)

$$IF(fb, fs\bullet WH(fb,fs), id)(st).$$

Оскільки $fb(st)=true$, то

$IF(fb, fs \bullet WH(fb,fs), id)(st) = (fs \bullet WH(fb,fs))(st) = WH(fb,fs)(fs(st)) = WH(fb,fs)(st_1) = st_n$.

Таким чином, і в цьому випадку лема справедлива.

Аналогічно доводиться, що якщо визначена ліва частина тотожності, то буде визначена і права частина з тим самим результатом. Тотожність доведено. З цього доведення випливають і інші дві властивості, сформульовані в лемі ■

Зауваження 1.10. Тотожність $WH(fb,fs)=IF(fb, fs \bullet WH(fb,fs), id)$ стверджує, що $WH(fb,fs)$ є розв'язком відносно X (можливо, одним із розв'язків) функціонального рівняння

$$X=IF(fb, fs \bullet X, id).$$

Дослідження рівнянь такого типу буде проведено у розділі, присвяченому рекурсії.

■

Леми 1.1 та 1.2 характеризували властивості побудованої алгебри функцій *A_Prog*. Таких властивостей є досить багато. Їх ідентифікація (формулювання) є важливою проблемою. Такі тотожності дозволяють робити еквівалентні перетворення програм з метою доведення їх властивостей або проведення оптимізації, трансляції, інтерпретації тощо.

Перейдемо тепер до визначення підалгебр алгебри *A_Prog*. Серед різних можливих підалгебр виділимо підалгебру, яка індукована аналізом відношення розширення (збагачення) станів новими змінними з їх значеннями. Наприклад, знаючи, що $sem\_P(GCD)([M\mapsto 8, N\mapsto 16]) = [M\mapsto 8, N\mapsto 8]$, запитаємо про значення $sem\_P(GCD)([M\mapsto 8, N\mapsto 16, L\mapsto 9])$, тобто про значення функції $sem\_P(GCD)$ на новому стані, який має нову змінну *L*. Більшість програмістів погодиться з тим, що результуючий стан буде просто розширенням попереднього результуючого стану цією новою змінною, тобто, що $sem\_P(GCD)([M\mapsto 8, N\mapsto 16, L\mapsto 9]) = [M\mapsto 8, N\mapsto 8, L\mapsto 9]$. Інакше кажучи, функція $sem\_P(GCD)$ є монотонною щодо відношення розширення станів $\subseteq$. Монотонність функцій визначається наступним чином.

Функція $fs \in FS$ називається *монотонною*, якщо з того, що $fs(st)\downarrow=str$ та $st \subseteq st'$, випливає, що $fs(st)\downarrow=str'$ та $str \subseteq str'$. Підклас монотонних функцій позначимо *MFS*.

Така властивість функцій використовується програмістами при збільшенні пам'яті комп'ютера, бо програми на збільшеній пам'яті будуть працювати так само (в будь-якому разі ми на це сподіваємось), як і на меншій пам'яті.

А чи є подібна властивість для функцій, породжених арифметичними виразами та умовами мови *SIPL*? Виявляється, при розширенні станів значення арифметичних функцій та предикатів не змінюється. Така властивість називається еквітонністю ("екві" означає "рівний"). Точне визначення наступне.

Функція $f \in FA$ називається *еквітонною*, якщо з того, що $f(st)\downarrow=r$ та $st \subseteq st'$ випливає, що $f(st')\downarrow=r$. Підклас еквітонних функцій позначимо *EFA*, підклас еквітонних предикатів – *EFB*.

Як бачимо, поняття монотонної та еквітонної функції є дуже важливими, тому подивимося на поведінку таких функцій стосовно композицій мови *SIPL*.

Виявляється (і зараз це буде доведено), що введені класи утворюють еквітонно-монотонну підалгебру

$$A\_EM\_Prog = \langle FNA, FNB, FNAB, EFA, EFB, MFS;$$
$$S^n, AS^x, \bullet, IF, WH, x\Rightarrow, id\rangle$$

алгебри функцій *A_Prog*.

Для цього потрібно довести, що класи *EFA*, *EFB*, *MFS* замкнені відносно заданих на них композицій.

Спочатку доведемо, що клас *EFA* замкнений відносно композицій алгебри *A_Prog*, заданих на *EFA*, тобто що він є замкненим відносно композиції суперпозиції S^n та функції розіменування. Нехай f – n-арна функція з FNA, $g_1,\ldots,g_n \in EFA$. Треба довести, що $S^n(f, g_1,\ldots,g_n) \in EFA$. Беремо довільні st та st', такі, що $st \subseteq st'$. Вважаємо також, що $(S^n(f, g_1,\ldots,g_n))(st)\downarrow=r$. Доведемо, що $(S^n(f, g_1,\ldots,g_n))(st')\downarrow=r$. Дійсно, враховуючи, що $g_1(st')= g_1(st), \ldots, g_n(st')=g_n(st)$, маємо

$$(S^n(f, g_1,\ldots,g_n))(st')=f(g_1(st'),\ldots,g_n(st'))= f(g_1(st),\ldots,g_n(st))=r.$$

Неважко також переконатися, що функція розіменування є еквітонною функцією з класу *EFA*.

Аналогічно доводиться, що і клас еквітонних предикатів *EFB* замкнений відносно відповідних композицій суперпозиції.

Залишилося довести, що клас монотонних функцій *MFS* замкнений відносно композицій присвоєння, послідовного виконання, умовного оператора, циклу та тотожної функції. Розглянемо всі ці випадки (для довільних *st* та *st′*, таких, що $st \subseteq st'$).

1. *Присвоєння*. Нехай $fa \in EFA$ та $AS^x(fa)(st)\downarrow = str$. За визначенням $AS^x(fa)(st) = st\ \nabla[x \to fa(st)]$. Обчислимо $AS^x(fa)(st')$, враховуючи, що для $fa \in EFA$ $fa(st') = fa(st)$. Маємо

$$AS^x(fa)(st') = st'\ \nabla[x \to fa(st')] = st'\ \nabla[x \to fa(st)].$$

Порівнюючи $st\ \nabla[x \to fa(st)]$ та $st'\ \nabla[x \to fa(st)]$, можна стверджувати, що $st\ \nabla[x \to fa(st)] \subseteq st'\ \nabla[x \to fa(st)]$, оскільки значення змінної x у цих станах є однакові, а $st \subseteq st'$.

2. *Послідовне виконання*. Нехай $fs_1, fs_2 \in MFS$ та $fs_1 \bullet fs_2(st)\downarrow = str$. За визначенням, $fs_1 \bullet fs_2(st) = fs_2(fs_1(st))$. Обчислимо $fs_1 \bullet fs_2(st')$, враховуючи, що $fs_1, fs_2 \in MFS$. Маємо $fs_1 \bullet fs_2(st') = fs_2(fs_1(st'))$. Оскільки $fs_1(st) \subseteq fs_1(st')$, то і $fs_2(fs_1(st)) \subseteq fs_2(fs_1(st'))$, що і треба було довести.

3. *Умовний оператор*. Нехай $fb \in EFB$, $fs_1, fs_2 \in MFS$ та $IF(fb, fs_1, fs_2)(st)\downarrow = str$. За визначенням, $IF(fb, fs_1, fs_2)(st)$ дорівнює $fs_1(st)$, якщо $fb(st) = true$, або $fs_2(st)$, якщо $fb(st) = false$. Обчислимо $IF(fb, fs_1, fs_2)(st')$, враховуючи, що $fb \in EFB$ (тобто $fb(st') = fb(st)$), а $fs_1, fs_2 \in MFS$. Тому, якщо $fb(st') = true$, то $IF(fb, fs_1, fs_2)(st') = fs_1(st')$, і оскільки $fs_1(st) \subseteq fs_1(st')$, то $IF(fb, fs_1, fs_2)(st) \subseteq IF(fb, fs_1, fs_2)(st')$. Аналогічно для випадку $fb(st') = false$ отримуємо $IF(fb, fs_1, fs_2)(st) \subseteq IF(fb, fs_1, fs_2)(st')$.

4. *Цикл*. Доведення випливає з того, що послідовності станів при обчисленні $WH(fb, fs)(st')$ відповідають послідовності станів при обчисленні $WH(fb, fs)(st)$, причому увесь час має місце співвідношення $st_i \subseteq st_i'$ ($i = 0, \ldots, n$).

5. *Тотожна функція* є монотонною з класу *MFS*.

Таким чином, доведено наступну лему.

Лема 1.3. Еквітонно-монотонна алгебра *A_EM_Prog* є під алгеброю алгебри функцій *A_Prog*.

Доведена лема дозволяє дати більш точний опис функцій, породжуваних мовою *SIPL*. Для цього слід показати, що алгебра *A_ SIPL* є підалгеброю алгебри *A_EM_Prog*. Слід переконатися, що функції-константи $\overline{n}$ є еквітонними функціями (що очевидно). Отже, справедливо наступне:

- якщо $a \in Aexp$, то $sem\_A(a) \in EFA$;
- якщо $b \in Bexp$, то $sem\_B(b) \in EFB$;
- якщо $S \in Stm$, то $sem\_S(S) \in MFS$;
- якщо $P \in Prog$, то $sem\_P(P) \in MFS$.

Отримані твердження можна сформулювати у вигляді наступної теореми.

Теорема 1.2. Вирази та умови мови *SIPL* породжують еквітонні функції, а програми та оператори – монотонні функції.

З теореми випливає, що якщо програма мови *SIPL* завершується з якимись результатами на певному стані, то вона завершиться і на розширеному стані, причому однакові змінні в обох результуючих станах будуть мати однакові результати.

Доведемо тепер коректність програми *GCD*. Позначимо функцію взяття найбільшого спільного дільника двох чисел як *gcd*.

Відзначимо, що оскільки у нас поки що є лише одна – композиційна семантика, то коректність програми доводиться відносно цієї семантики. Тому програмістські терміни слід тлумачити саме у термінах композиційної семантики. Так, завершуваність програми означає, що функція, яка задає семантику програми, визначена на відповідному стані, ітерація циклу – обчислення наступного члена послідовності станів, і так далі.

Теорема 1.3 (про часткову коректність програми *GCD*). Нехай стан *st* такий, що $M\Rightarrow(st)=m$, $N\Rightarrow(st)=n$ (m, $n>0$). Тоді, якщо $sem\_P(GCD)(st)\downarrow=str$, то $M\Rightarrow(str)=N\Rightarrow(str)=gcd(m, n)$.

Зауваження 1.11. Згідно з теоремою 1.2 можна взяти стан, який має лише дві змінні – *M* та *N*. У цьому випадку теорему можна сформулювати більш просто:

якщо $sem\_P(GCD)([M\mapsto m, N\mapsto n])\downarrow=[M\mapsto r1, N\mapsto r2]$, то $r1=r2=gcd(m, n)$.

Доведення

Побудуємо семантичний терм функції *sem_P(GCD).*

Маємо

$sem\_P(GCD)=$

$=sem\_P($**begin while** $\neg M=N$ **do if** $M>N$ **then** $M:=M-N$ **else** $N:=N-M$ **end**$)=$

$=WH(S^1(neg, S^2(eq, M\Rightarrow, N\Rightarrow)),$

$IF(S^2(gr, M\Rightarrow, N\Rightarrow),$

$AS^M(S^2(sub, M\Rightarrow, N\Rightarrow)),$

$AS^N(S^2(sub, N\Rightarrow, M\Rightarrow))$

$)$

$)$

Таким чином, семантика програми задається семантичним термом з композицією циклу у якості головної операції. Для спрощення позначимо

$p\_g = S^1(neg, S^2(eq, M\Rightarrow, N\Rightarrow))$,

$f\_g = IF(S^2(gr, M\Rightarrow, N\Rightarrow), AS^M(S^2(sub, M\Rightarrow, N\Rightarrow)), AS^N(S^2(sub, N\Rightarrow, M\Rightarrow)))$.

У цьому випадку $sem\_P(GCD)= WH(p\_g, f\_g)$.

Оскільки значення $WH(p\_g, f\_g)(st)$ визначене, то $NumItWH((p\_g, f\_g), st)\geq 0$. Нехай $NumItWH((p\_g, f\_g), st)=k$. Теорему будемо доводити індукцією за *k* (тобто за кількістю ітерацій циклу). *Індуктивна гіпотеза* фактично повторює формулювання теореми:

якщо $m>0$, $n>0$, $M\Rightarrow(st)=m$, $N\Rightarrow(st)=n$, $WH(p\_g, f\_g)(st)\downarrow=str$, то $M\Rightarrow(str)=N\Rightarrow(str)=gcd(m, n)$.

База індукції. Нехай $k=0$. Згідно з лемою 1.2, $p\_g(st)\downarrow=false$ та $WH(p\_g, f\_g)(st)= st$.

Що означає умова $p\_g(st)\downarrow=false$? Щоб це з'ясувати, проведемо наступні обчислення: $p\_g(st)=S^1(neg, S^2(eq, M\Rightarrow, N\Rightarrow))(st)=ntg(eq(M\Rightarrow(st), N\Rightarrow(st)))= neg(eq(m, n))=false$. Це означає, що $m=n$, тому $M\Rightarrow(st)=N\Rightarrow(st)= gcd(m, n)$.

Теорема виконується для цього випадку.

Крок індукції. Нехай теорема справедлива для всіх станів *st* таких, що $NumItWH((p\_g, f\_g), st)=k$ (обчислення $WH(p\_g, f\_g)(st)$ вимагає *k* застосувань функції f_g на відповідних станах). Доведемо, що тоді теорема буде справедлива для станів *st*, на яких обчислення $WH(p\_g, f\_g)(st)$ вимагає $k+1$ кроків. В цьому випадку (згідно з лемою *1.2*) це означає, що $p\_g(st)\downarrow=true$ (тобто $m\neq n$), $WH(p\_g, f\_g)(st) = WH(p\_g, f\_g)(f\_g(st))$ та $NumItWH((p\_g, f\_g), f\_g(st))=k$.

Проведемо обчислення $f\_g(st)= IF(S^2(gr, M\Rightarrow, N\Rightarrow), AS^M(S^2(sub, M\Rightarrow, N\Rightarrow)), AS^N(S^2(sub, N\Rightarrow, M\Rightarrow)))(st)$.

Маємо два випадки:

1) $S^2(gr, M\Rightarrow, N\Rightarrow)(st)\downarrow=true$ (це означає, що $m>n$). Тоді $f\_g(st)= AS^M(S^2(sub, M\Rightarrow, N\Rightarrow))(st)=st\nabla[M\mapsto S^2(sub, M\Rightarrow, N\Rightarrow)(st)]= st\nabla[M\mapsto sub(M\Rightarrow(st), N\Rightarrow(st)]=st\nabla[M\mapsto sub(m, n)]= st\nabla[M\mapsto m-n]$. (Для стану *st* з двома змінними можна записати, що результат є $[M\mapsto m, N\mapsto n]\ \nabla[M\mapsto m-n]= [M\mapsto m-n, N\mapsto n]$.);
2) $S^2(gr, M\Rightarrow, N\Rightarrow)(st)\downarrow=false$ (це означає, що $m\leq n$, але враховуючи, що $m\neq n$, маємо $m<n$). Тоді $f\_g(st)= AS^N(S^2(sub, N\Rightarrow, M\Rightarrow))(st)=st\nabla[N\mapsto S^2(sub, N\Rightarrow, M\Rightarrow)(st)]= st\nabla[N\mapsto sub(N\Rightarrow(st), M\Rightarrow(st)]=st\nabla[N\mapsto sub(n, m)]= st\nabla[N\mapsto n-m]$.
(Для стану *st* з двома змінними можна записати, що результат є $[M\mapsto m, N\mapsto n]\ \nabla[N\mapsto n-m]= [M\mapsto m, N\mapsto n-m]$.)

З теорії чисел випливає, що при вказаних умовах $gcd(m, n)= gcd(m, m-n)$, якщо $m>n$, та $gcd(m, n)= gcd(n-m, n)$, якщо $m<n$.

Дійсно, не обмежуючи загальності, розглянемо випадок $m>n$. Тут M має значення $m–n$, а N – n. Покажемо, що $gcd(m, n)= gcd(m, m–n)$. Для цього слід показати, що множина спільних дільників m і n і множина спільних дільників $m–n$ і n – співпадають. Нехай q – спільний дільник m і n, тобто $m = q*k$, $n = q*r$, для деяких натуральних чисел k, r. Тоді $m–n = q*k – q*r = q*(k–r)$, тобто q – спільний дільник $m–n$ і n. Аналогічним чином доводиться і зворотне твердження. Оскільки множини спільних дільників двох пар чисел співпадають, то і найбільший спільний дільник у них теж співпадає.

Отже, у стані $st_1=f\_g(st)$ значення змінних M та N додатні (більше нуля) та дорівнюють відповідно m та $m–n$, або $n–m$ та n. Таким чином, для обох випадків маємо $M\Rightarrow(st_1)>0$, $N\Rightarrow(st_1)>0$, та $gcd(M\Rightarrow(st_1), N\Rightarrow(st_1))= gcd(M\Rightarrow(st), N\Rightarrow(st))=gcd(m, n)$.

Тепер можна скористуватися індуктивною гіпотезою для стану st_1, бо всі її засновки виконуються. Тому отримуємо, що $M\Rightarrow(str)=N\Rightarrow(str)= gcd(M\Rightarrow(st_1), N\Rightarrow(st_1))$.

З урахуванням того, що $gcd(M\Rightarrow(st_1), N\Rightarrow(st_1))=gcd(m, n)$, маємо, що $M\Rightarrow(str)=N\Rightarrow(str)=gcd(m, n)$.

Теорему доведено. ■

Відзначимо дві обставини, пов'язані з теоремою коректності.

По-перше, теорему доведено за умови додатності значень змінних M та N. А як буде працювати програма, коли ця умова не виконується? Коли значення змінних M та N не є додатними та рівні між собою (наприклад, значення змінних M та N дорівнюють $–5$), то програма зупиняється, не змінюючи стан. Але наявне від'ємне число (або 0), що є значенням змінних, не може вважатися їх найбільшим спільним дільником. Коли ж значення змінних різні і хоча б одне із значень є від'ємним або 0, то програма зациклюється. Отже, на правильний результат можна сподіватися лише для додатних значень змінних M та N.

По-друге, теорему коректності доведено за умови завершуваності програми. Така коректність називається *частковою коректністю. Повна (тотальна) коректність* програми P для певного класу ST вхідних даних означає, що програма є частково коректною та завершується на всіх вхідних даних із цього класу. Якщо позначити формулу завершуваності програми P на стані $st\in ST$ як $termination(P)(st)$, а коректність – як $correctness(P)(st)$, то умова часткової коректності задається формулою

$$\forall st\in ST\ (termination(P)(st)\Rightarrow correctness(P)(st),$$

а тотальної коректності –

$$\forall st\in ST\ (termination(P)(st)\wedge correctness(P)(st).$$

Теорема 1.4 (про повну коректність програми GCD). Нехай стан st є такий, що $M\Rightarrow(st)=m$, $N\Rightarrow(st)=n$ та $m, n>0$. Тоді для деякого стану str маємо, що $sem\_P(GCD)(st)\downarrow=str$ та $(M\Rightarrow(str))=(N\Rightarrow(str))=gcd(m, n)$.

Щоб отримати повну коректність програми для додатних значень змінних M та N, треба довести завершуваність програми (точніше, визначеність значення функції $WH(p\_g, f\_g)(st)$). Це означає, що треба довести визначеність значення $NumItWH((p\_g, f\_g), st)$, якщо $m, n>0$.

Розглянемо послідовність станів змінних

$$st_0=st,\ st_1=fs(st_0),\ st_2=fs(st_1),\ \dots\ .$$

Оскільки при обчисленні нових станів задіяна лише функція віднімання, яка є всюди визначеною, то кожен елемент послідовності є визначеним, а сама послідовність є нескінченною.

Доведемо, що в цій послідовності є стан, у якому значення змінних M та N співпадають. Доведення проведемо від супротивного. Нехай це не так, тобто нехай у цій послідовності для кожного стану значення M та N різні. Розглянемо тепер послідовність сум значень цих змінних, тобто послідовність

$t_0=M\Rightarrow(st_0)+ N\Rightarrow(st_0)$, $t_1=M\Rightarrow(st_1)+ N\Rightarrow(st_1)$, $t_2=M\Rightarrow(st_2)+ N\Rightarrow(st_2)$, …

У початковому стані значення M та N додатні, тому $t_0>0$. За відсутності рівних значень M та N додатними мають бути і всі інші числа t_0, t_1, t_2,… . Разом із тим

послідовність є строго спадною, тобто $t_0>t_1>t_2>\dots$, тому що нові значення *M* та *N* отримуються відніманням меншого з чисел від більшого. За наведених умов послідовність t_0, t_1, t_2,… не може бути нескінченною, бо обмежена знизу числом *2*, що є найменшою сумою двох додатних чисел.

Отримане протиріччя говорить про те, що в послідовності станів змінних $st_0=st$, $st_1=fs(st_0)$, $st2=fs(st_1)$, … є стан з однаковими значеннями *M* та *N*, на якому цикл зупиняється, тобто значення $WH(p\_g, f\_g)(st)$ буде визначеним.

Це означає, що для додатних значень змінних *M* та *N* доведено повну коректність нашої програми. ■

Зауваження 1.12 Звернемо ще раз увагу на те, що при доведенні теореми ми інколи застосовували програмістську термінологію, говорячи, наприклад, про ітерації циклу, про завершуваність програми, а не про обчислення послідовності певних значень функцій, як того вимагає композиційна семантика. Зроблено це для того, щоб доведення краще відповідало програмістській інтуїції. Втім, сподіваємося на те, що читач зможе розпізнати та трансформувати програмістські терміни у точні математичні формулювання.

Варто підкреслити ще одну обставину: а саме, що без наявності формальної семантики та синтаксису ми не могли б навіть говорити про доведення різних властивостей програм та, зокрема, їх коректності. На інтуїтивному рівні розуміння програм може бути лише інтуїтивне обґрунтування властивостей програм.

Висновки

У цьому розділі був розглянутий простий приклад програми в мові *SIPL*. Ця мова є одним із варіантів простих мов подібного типу, наприклад, мови *WHILE* [14]. Фактично такі мови є мовами структурного програмування. Однак тут була дана композиційна семантика мови *SIPL*, яка базується на запропонованому В.Н. Редьком композиційному програмуванні [10]. Таким чином, основні результати цього розділу полягають у наступному:

1. Дано неформальний та формальний описи мови *SIPL*.
2. Для формального визначення синтаксису мови запропоновано її БНФ та розглянуто її властивості (дерева виводу, однозначність та неоднозначність БНФ).
3. Для формального визначення семантики мови побудовано алгебру даних мови *SIPL* та низку функціональних алгебр. Операціями цих алгебр є композиції, що формалізують засоби конструювання програм.
4. Визначено відображення побудови семантичного терму програми.
5. Досліджено низку тотожностей в алгебрі програм.
6. Продемонстрована можливість доведення часткової та повної коректності на підставі введених формалізацій.

Разом із тим виникає низка питань. Можливо, всі введені поняття і методи спрацьовують лише на простій мовіі для більш складних мов це не спрацює? Тобто чи є введені поняття необхідними та суттєвими, чи, може, вони випадкові? Які поняття ще слід увести, щоб працювати з біль ш потужними мовами програмування?

Питання такого типу є загальнометодологічними питаннями. Їх розглянемо в наступному розділі.

Контрольні питання

1. Які недоліки неформального опису мов програмування?
2. Яким чином задається синтаксис мови *SIPL*?
3. Що є деревом синтаксичного виводу програми?
4. Коли програма є синтаксично правильною?
5. Що таке неоднозначна БНФ?
6. Для чого вводиться пріоритет операцій?
7. Які пріоритети введено для операцій мови *SIPL*?

8. Які синтаксичні категорії та метазмінні введені в мові *SIPL*?
9. Які типи даних використовуються у мові *SIPL*?
10. Які алгебри даних пов'язані з мовою *SIPL*?
11. Як визначаються операції іменування та розіменування?
12. Які класи функцій використовуються для формалізації семантики мови *SIPL*?
13. Які типи номінативних функцій використовуються для формалізації семантики мови *SIPL*?
14. Як визначається суперпозиція в n-арну функцію?
15. Як визначається композиція присвоєння?
16. Як визначається композиція послідовного виконання?
17. Як визначається композиція розгалуження?
18. Як визначається композиція циклу?
19. Які програмні алгебри пов'язані з мовою *SIPL*?
20. За якими критеріями в перелік композицій включають і функції?
21. Як визначається підалгебра алгебри *A_Prog*, породжена мовою *SIPL*?
22. Як частковість функцій впливає на визначення композицій?
23. Як визначається семантичний терм програми?
24. Як будується семантичний терм програми?
25. Які властивості виконуються для програмних алгебр?
26. Як визначаються монотонні функції?
27. Як визначаються еквітонні функції?
28. Які визначають програми мови *SIPL*?
29. Що таке часткова коректність програм?
30. Що таке повна коректність програм?

Вправи

1. Довести однозначність синтаксичного аналізу при використанні правил пріоритету та асоціативності операцій.
2. Побудувати рекурентні співвідношення для визначення синтаксичних категорій.
3. Навести приклади неоднозначного аналізу програм мови *SIPL*.
4. Навести індуктивне визначення множин термів програмної алгебри.
5. Побудувати програми на мові *SIPL* для наступних задач (x, y, n – додатні цілі числа):
   - обчислення $x*y$, використовуючи функції +, – (та не використовуючи функції *);
   - обчислення $n!$;
   - обчислення $x–y$, використовуючи функцію віднімання одиниці ($–1$);
   - перевірки парності числа n;
   - обчислення $x \mathbin{div} y$, використовуючи функції +, –;
   - обчислення x^y, використовуючи функції $*$,+, –;
   - обчислення $[\lg n]$, використовуючи функції *div*, *mod*, +, –;
   - обчислення $x \bmod y$, використовуючи функції +, –;
   - обчислення 3^x, використовуючи функції $*$,+, –.
6. Перевірити синтаксичну правильність програм, створених у вправі 5, побудувавши їх дерева синтаксичного виводу. Побудувати семантичні терми цих програм та застосувати їх до певних вхідних даних.
7. Довести часткову та повну коректність програм, створених у вправі 5.

8. Довести, що програми мови *SIPL* задають однозначні (детерміновані) функції.
9. Довести лему про співпадіння для програм мови *SIPL*, а саме, визначити за програмою мови *SIPL* змінні, від яких залежить програма (індукцією за структурою програми), та довести, що значення програми будуть однаковими на станах з однаковими значеннями таких змінних.
10. Побудувати консервативні розширення мови *SIPL*. Тут неформально вважаємо, що розширення *SIPL_C* є консервативним розширенням *SIPL*, якщо для кожної програми з мови *SIPL_C* можна побудувати еквівалентну програму з мови *SIPL*. Включити до консервативного розширення *n*-арні функції div, mod, abs; композиції repeat_until_, if_then_, цикли for тощо. Надати формалізацію розширеної мови.

2. Розвиток основних понять програмування

Постійне розширення сфери застосування обчислювальної техніки і необхідність побудови все більш складних, але надійних програмних систем змушують дослідників знову і знову звертатися до визначення основних понять програмування. Незважаючи на різноманіття існуючих моделей програм і парадигм програмування, не можна не визнати тієї обставини, що розробка загальноприйнятної теорія програмування ще не завершена. Водночас зрозуміло, що центральною складової такої теорії повинні бути строгі уточнення (експлікації) понять програми і програмування. Одним із підходів до початкових уточнень цих понять є композиційно-номінативний підхід, який може розглядатися як подальший розвиток композиційного програмування.

Цей підхід базується на наступних трьох основних принципах: *розвитку*, *композиційності* і *номінативності*. Принцип розвитку (від абстрактного до конкретного) говорить про поступове уточнення поняття програми, починаючи з найбільш абстрактних і продовжуючи більш конкретними і багатими уточненнями. Принцип композиційності трактує програми як функції, що будуються з інших функцій за допомогою спеціальних операцій, які називаються композиціями. Принцип номінативності говорить про необхідність використовувати відношення іменування для роботи з програмами і даними.

Ідеї розвитку, композиційності і номінативності добре відомі і простежуються з глибокої давнини. Категорія розвитку є однією з центральних категорій у такому філософському напрямку, як діалектика, серед представників якої виділимо Геракліта Ефеського та Г.В.Ф. Гегеля. Композиційні властивості мовних виразів були чітко сформульовані Г. Фреге та Р. Карнапом. Принцип композиційності був основним у композиційному програмуванні, запропонованому В.Н. Редьком. Різним аспектам номінативності (іменування) присвятили свої роботи Аристотель, Гоббс, Джон Стюарт Мілль, Джордж Буль, Пірс, Фреге, Рассел, Кріпке і багато інших.

Перш ніж переходити до детального розгляду основних понять програмування, проаналізуємо визначення поняття «програма», наведені у словниках.

2.1. Аналіз словникових визначень поняття програми

Почнемо з визначень поняття програми, які наводяться у словниках і енциклопедіях. Великий тлумачний словник сучасної української мови[1], Меріам-Убстер Електронний словник[2] та інші словники дають наступне трактування слова «програма».

Етимологія: від грецького *prographein* – попередній запис (*pro* – перед + *graphein* – писати). Пізніше латинське *programma*: письмове повідомлення. Значення[3]:

- наперед продуманий план якої-небудь діяльності, роботи тощо;
- план для програмування деякого механізму (як комп'ютер);
- послідовність кодів інструкцій, що можна ввести в механізм (наприклад, комп'ютер).

Аналізуючи ці та інші визначення терміна «програма», дійдемо висновку, що визначення використовують такі терміни, як «план», «послідовність», «дія», «інструкція», «програмування», «комп'ютер» і т.д. Подивимося, наприклад, на визначення першого терміна в цьому списку. «План» – це:

---

[1] *http://www.slovnyk.net/*

[2] *http://www.m-w.com/cgi-bin/dictionary*.

[3] Серед різних значень слова 'програма' виділимо лише ті, які близькі до предмету нашого розгляду.

- креслення або діаграма,
- метод досягнення кінцевої мети,
- упорядкована класифікація частин проекту або мети,
- детальна програма дій.

Бачимо, що визначення терміна «план», які нас цікавлять, звертаються знову до слова «програма». Звідси можна зробити два висновки:

1) словникові визначення поняття програми призводять до хибного кола, бо ніякого глибокого розвитку цього поняття не відбувається, а є лише досить проста тавтологія, коли фактичного розкриття терміна немає, а стверджується, що програма – це те саме, що і план, а план є програмою;

2) поняття програми є дуже широким поняттям, яке не визначається як конкретизація деякого іншого поняття (не визначається за схемою родовидових понять Аристотеля).

Подібна ситуація буде і з іншими термінами з нашого списку. Правда, критикуючи словникові визначення за неповноту, зауважимо, що вони надають початкове уявлення про значення різних термінів. Тому треба погодитися зі словами М.Т. Рильського:

Не бійтесь заглядати у словник:
це пишний яр, а не сумне провалля.

Таким чином, термін 'програма' є надзвичайно загальним, багатоаспектним і не може бути простим способом визначений через інші терміни. Але як же тоді визначати такі загальні терміни?

Сформулювавши питання таким чином, ми фактично ставимо запитання про методи наукового пізнання і тим самим полишаємо область програмування і переходимо у більш загальну сферу, що яка є розділом філософії і яка називається *гносеологією*. Гносеологія (також вживається термін *епістемологія*) визначається як наука про взаємини суб'єкта та об'єкта, про закони, форми і методи пізнання, а також відношення знання до дійсності, критерії його істинності і достовірності. Тут суб'єкт та об'єкт – філософські категорії: під суб'єктом розуміється той, хто досліджує об'єкт.

2.2. Розвиток поняття програми з гносеологічної точки зору

Насамперед необхідно обґрунтувати, що поняття програми дійсно є складним, багатоаспектним поняттям і не зводиться тривіальним чином до більш простих понять. Це стає зрозумілим, якщо згадати історію розвитку програм, що починалася з досить простих обчислювальних програм для перших комп'ютерів і потім поступово перетворилася на потужну галузь виробництва, яка залучає величезні людські і фінансові ресурси. Складність поняття програми зрозуміла і зі словникових визначень. Уточнення таких складних, різнобічних та багатоаспектних понять має відбуватися згідно із загальними законами гносеології. Сформулюємо це твердження у вигляді наступного принципу.

Принцип гносеологічності. Уточнення основних понять програмування здійснюється відповідно до загальних законів (принципів) гносеології, застосування яких має програмологічну спрямованість.

Наведений принцип має два аспекти. Перший стосується доцільності використання загальних законів (принципів) гносеології для уточнення основних понять програмування. Другий аспект говорить про те, що ці закони слід конкретизувати, орієнтуючись на предметну область, що досліджується, та на теорію, що будується, тобто на програмування та на теорію програмування (програмологію). Тут під програмологією розуміється наука про програми та процеси програмування.

Гносеологія як наука про пізнання повинна, зокрема, надати нам загальні закони уточнення понять конкретних предметних областей. Складність використання гносеології з цією метою полягає в тому, що, незважаючи на багатовікову історію її

розвитку, все ж не створені загальноприйняті закони наукового пізнання. Існують різні школи і напрямки, що часто трактують одні і ті самі питання по-різному. Через це для дослідника конкретної предметної області залишаються три можливості:

- приєднатися до однієї зі шкіл гносеології;
- розробити власний гносеологічний підхід;
- ігнорувати загальногносеологічні проблеми.

Кожна з можливостей має свої переваги та недоліки. Розробити власний підхід дуже складно. Це призведе до значних витрат на чисто філософську діяльність, займе багато часу. Ігнорування гносеологічних проблем призведе до примітивних помилок, які вже давно зрозумілі філософам. Тут є повна аналогія з теорією дебютів у шахах. Розробити власний дебют дуже важко, бо історія шахів нараховує тисячоліття і в ній зроблено надзвичайно багато. Ігнорування теорії дебютів призведе до програшу вже на початку партії. Тому шахісти, як правило, використовують вже розроблені та досліджені дебюти. Так і ми спробуємо використати певний гносеологічний підхід. Але який? Звичайно той, що стоїть найближче до практики програмування.

Тому слід визначити ті особливості програмування, які повинні знайти своє обґрунтування в гносеологічному підході. Це, перш за все, програмування як поступове уточнення, програмування від абстрактного до конкретного. Це підтримується такими методами, як структурне, систематичне, об'єктно-орієнтоване програмування тощо. Виявляється, є гносеологічний підхід, який саме і проголошує метод розвитку (побудови від абстрактного до конкретного) своїм головним методом. Цей підхід називається *діалектичною логікою.*

Отже, в межах даної роботи будемо спиратися саме на цей напрямок гносеології, який був розвинутий Г.В.Ф. Гегелем та його послідовниками. Правда, для наших цілей немає потреби використовувати діалектичну логіку у всій її потужності. Будемо використовувати лише ті елементи діалектичної логіки, які необхідні для опису понять програмування.

Основною складовою діалектичної логіки є система взаємопов'язаних та взаємообумовлених категорій, які тут розглядаються як всезагальні ознаки предметів. Прикладами категорій є категорії абстрактне – конкретне, об'єктивне – суб'єктивне, якість – кількість – міра, елемент – частина – ціле, форма – зміст, явище – сутність, одиничне – особливе – всезагальне та багато інших.

Система категорій утворює каркас нашого мислення. Розбудова такої системи спирається на низку принципів.

Першим принципом є розвиток від абстрактного до конкретного: перехід від абстрактних, бідних за смислом визначень до конкретних, більш багатих за смислом. Другий принцип – це рух мислення від однієї категорії до протилежної за значенням з подальшим їх об'єднанням у третій категорії (тріадичний розвиток). Третій принцип фактично є певним уточненням перших двох принципів. Згідно з ним категорії членуються на три групи, що відповідають трьом етапам пізнання. Перша група – це зовнішні визначення предметів, друга – внутрішні визначення, третя – визначення самого поняття. На першому етапі предмет визначається з боку його зовнішності, на другому визначаються його внутрішня побудова, а на третьому поєднуються зовнішні визначення предмета з його внутрішніми визначеннями.

Наведені етапи дослідження предмета часто формулюють у вигляді наступної схеми: *синкретичний* етап (предмет не членується на складові, розглядаються зовнішні відношення), *аналітичний* етап (розглядається внутрішня структура та відношення між складовими) та *синтетичний* етап (об'єднуються зовнішні та внутрішні відношення та складові).

Сформульовані принципи вказують на методи розбудови системи категорій. Та основний смисл прихований у самих категоріях. Виділяють близько сотні категорій, які всі пов'язані між собою. Таких зв'язків – тисячі. Тому немає простого викладу системи категорій. Проводячи аналогію з математикою, можемо казати, що визначення системи категорій задається складною системою з сотень рівнянь над

сотнями змінних. Разом із тим для визначення основних понять програмування ми і не будемо використовувати усю потужність системи філософських категорій, а обмежимося лише тими моментами, які пов'язані з програмуванням. Цей висновок випливає і з принципу гносеологічності, але сформулюємо його як спеціальний принцип.

Принцип програмологічної проекції категорій: при визначенні основних понять програмування категорії розглядаються лише в тих аспектах, які відображають властивості програмування.

Зв'язки категорій часто формулюються як закони діалектики. Зупинимося більш докладно на *законі заперечення заперечення*. У діалектичній логіці заперечення розглядається як зміна (розвиток), що змінюючи річ (заперечуючи її), приводить до нової речі, яка зберігає в деякої іншій формі властивості початкової речі. Закон заперечення заперечення говорить про те, що, зміна заперечує змінюване, результат у свою чергу змінюється новим запереченням, що призводить нас не до простого повторення початкового, а до його нового рівня розвитку. Тим самим цей закон стверджує спадкоємність, зв'язок нового зі старим, повторювальність на вищій стадії розвитку деяких властивостей нижчої стадії.

Нарешті, надамо певні пояснення категорії абстрактне – конкретне. Інколи ці терміни тлумачаться як уявне(ідеальне) – реальне. Тут ми беремо інше значення цих термінів. *Абстрактне* (походить від латинського abstraction – відволікання, виділення) означає одностороннє, просте, нерозвинуте. *Конкретне* (від латинського concretus – зрощене) означає єдність різних сторін, багатостороннє. Тут важливо відзначити, що конкретність розглядається саме як єдність, як системність.

Процес опису деякого предмета (речі, об'єкта) фіксується за допомогою понять. Як було сказано, розвиток понять будемо здійснювати від абстрактного до конкретного. Починаємо з найбільш абстрактних (але істотних) понять. Зміст понять задається за допомогою суджень, що розкривають властивості предмета. Сукупність суджень про поняття на визначеному етапі дослідження будемо називати рівнем абстракції, на якому розглядається поняття. На кожному рівні абстракції можна робити умовиводи, що формулюють властивості предмета дослідження. Крок конкретизації полягає в тому, що вводяться поняття і судження, які розкривають нові властивості предмета. На отриманому новому рівні абстракції робляться нові умовиводи і т.д.

Застосовуючи зазначені положення до програм, одержуємо наступний принцип.

Принцип розвитку (від абстрактного до конкретного). Програмні поняття уточнюється у процесі їх розвитку. Цей процес починається з найбільш абстрактних уявлень, які відображають загальні істотні властивості програм та програмування, потім поступово переходить до більш конкретних уявлень у їх єдності, які відображають специфічні властивості програм та програмування, і таким чином, нарешті, розкриває поняття програмування в їх багатстві та взаємозв'язках.

Слід відзначити, що наведений принцип (та й інші методологічні принципи та визначення) не слід тлумачити абсолютно. Зокрема, цей принцип безумовно слід розглядати в єдності з рухом пізнання від конкретного до абстрактного. Тому завжди треба брати до уваги відносність аспектів, переходи одних аспектів в інші та пам'ятати в цілому про наявність складних взаємовідношень між поняттями. Сукупність таких відношень називають діалектикою понять.

Наведений принцип розвитку є дуже загальним, тому сформулюємо деякі наслідки, які розкривають його зміст. Насамперед відзначимо, що оскільки поняття будуть розглядатися на різних рівнях абстракції, то при їх вивченні варто чітко

- вказувати рівень абстракції, що розглядається (принцип фіксації рівня абстракції);
- при побудові умовиводів використовувати тільки такі властивості понять, що були явно визначені раніше (принцип достатньої підстави);
- не використовувати властивості, задані на інших рівнях і явно не визначені на рівні, що розглядається (принцип інкапсуляції рівнів абстракції);

- у процесі розвитку попередні властивості не відкидаються, а зберігаються на нових рівнях розвитку, можливо, в іншій формі (принцип кумулятивності розвитку).

Ще одним наслідком принципу розвитку є принцип *генетичності*, який стверджує, що структури програм є похідними від їх генетичних структур (структур породження).

Підставою вибору того чи іншого напрямку розвитку є принцип *єдності логічного та історичного*. Цей принцип може розглядатися як певний варіант відомого гносеологічного принципу *єдності теорії та практики*.

Розвиток понять часто відбувається згідно з тріадою розвитку: *теза – антитеза – синтез*.

Розглянемо простий приклад. Припустимо, що ми хочемо дати визначення терміна «теща» (теза). З цим терміном асоціюється інший термін – «зять» (антитеза). Наявність цих двох термінів (які протистоять один одному) ще не дає можливості безпосередньо визначити перший термін. Необхідно зробити ще один крок розвитку (синтез), що поєднає терміни «теща» та «зять». Це поєднання задається особою, що є дружиною зятя та дочкою тещі.

Наведений розвиток призвів до визначення терміна «теща», що приводиться у словниках: теща – мати дружини.

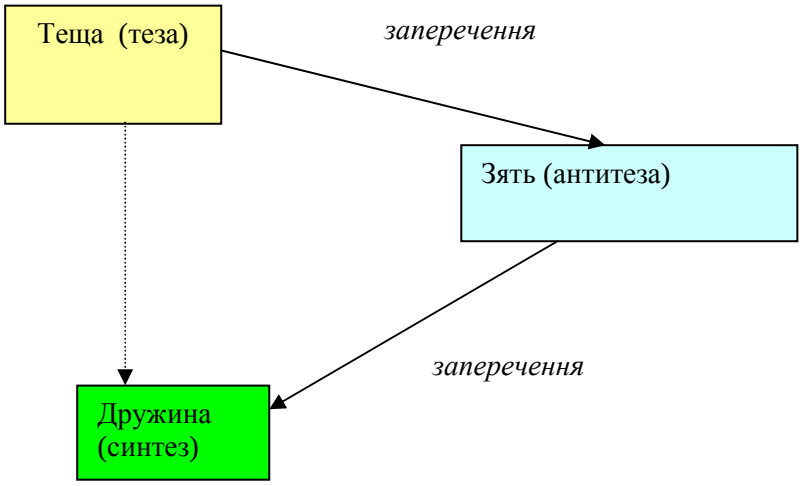


Рисунок 2.1. Тріада розвитку

Підсумовуючи наведені вище гносеологічні положення, можна говорити про наступне.

1. Предмети світу пов'язані між собою. Це емпіричний факт, що часто формулюється як принцип взаємозв'язку предметів (речей). Як наслідок отримуємо, що кожен предмет є єдністю багатьох сторін (аспектів).
2. Оскільки кожен предмет (крім дуже простих) має багато сторін, то неможливо визначити його одним визначенням.
3. Зважаючи на неможливість охопити всі сторони предмета одним визначенням, спочатку зупиняються лише на деяких аспектах (тобто предмет спочатку розглядається абстрактно).
4. Подальше визначення (уточнення) поняття предмета може відбуватися шляхом конкретизації обраних аспектів (як правило за родовидовою схемою Аристотеля) або (що є більш загальною схемою) за тріадою розвитку, коли далі обираються інші аспекти (тим самим вони є запереченням початковообраних аспектів) та які потім інтегруються з початковообраними аспектами.
5. Вибір аспектів визначається метою дослідження, але важливим є вибір суттєвих аспектів, що ведуть до визначення предмета по суті.

6. Цей вибір аспектів, як правило, відповідає наступній схемі: зовнішні аспекти – внутрішні аспекти – взаємозв'язок аспектів.

Наведені принципи мають застосовуватися як на найвищому рівні (філософському, методологічному), так і на інших рівнях розгляду – професійному (науковому) та формальному (математичному).

Озброївшись основними гносеологічними принципами, перейдемо до розгортання основних понять програмування на професійному (науковому) рівні.

2.3. Розвиток основних понять програмування

Для уточнення поняття програми будемо розглядати походження (генезис) тих понять, що виникають у процесі його розвитку. При цьому прагнемо, щоб нові поняття, які виникають, були дуже простими і не вимагали для свого розуміння багатого досвіду програмування. У цьому сенсі запропоноване уточнення (експлікація) поняття програми може розглядатися як початкова експлікація.

Звертаємо увагу на те, що термін «поняття» буде вживатися в наступних смислах: *1*) в інтуїтивному, коли поняття розглядається у всьому багатстві його властивостей, *2*) частково експлікованому, коли з поняттям пов'язуються тільки ті властивості, що визначені на фіксованому рівні абстракції. Будемо звертатися до інтуїтивного розуміння у тому випадку, коли необхідно ввести нову властивість, яка глибше розкриває зміст досліджуваного поняття. Частково експліковане розуміння використовується для вивчення властивостей поняття на фіксованому рівні абстракції. Сподіваємося, що з тексту завжди буде зрозуміло, про яке тлумачення йде мова.

Наша мета полягає в тому, щоб не просто ввести якісь визначення понять програмування, а продемонструвати їх зв'язки і те, як від одних понять ми мусимо переходити до інших.

Наприклад, ми хочемо визначити поняття університету. Перший аспект, який можна виділити (абстрагувати) в цьому понятті, – це те, що університет складається із студентів. Але це дуже абстрактна характеристика університету. Переходимо до (діалектичного) заперечення цього аспекту: університет – це викладачі. Але знову таке визначення неповне. Далі ідемо до синтезу: університет – це студенти та викладачі, пов'язані навчальним процесом (лекції, семінари тощо). Це вже досить конкретне визначення. Але і така тріада є абстрактною. Під таке визначення університету потрапляють і дитячий садок, і школа. Тому треба вводити ще більш конкретні визначення, розкриваючи структуру університету з різних сторін (навчальні плані, факультети, приміщення тощо.) Тільки на цьому шляху поняття університету буде розкрите конкретно, у його складових та їх зв'язках, призначенні університету і т.д.

Така сама ситуація має місце і для понять програмування. Розглянемо ще один простий приклад. Припустимо, що містер NN хоче дізнатися про рух коштів на його банківському рахунку. Він зв'язується з банківським службовцем, для якого проблема містера NN перестає бути одиничною проблемою, а стає масовою: як за номером банківського рахунку з'ясувати стан рахунку. Для розв'язання цієї проблеми службовець використовує спеціальну програму. Але ця програма є однією з багатьох програм, таких як системи керування базами даних, операційні системи тощо, які розробляються і обслуговуються спеціалістами банку. Цей приклад показує як, починаючи з «маленької» індивідуальної проблеми, ми змушені переходити до все більш загальних проблем, які вимагають для свого розв'язання усе більш складних і розвинених програмних систем. Приблизно таким же способом будемо розвивати поняття програми, починаючи з найбільш простих абстрактних властивостей і продовжуючи більш спеціальними і багатими властивостями. Отже, процес розвитку веде нас від індивідуальних властивостей через особливі до (все)загальних.

Як уже відзначалося раніше, у процесі уточнення програмних понять будемо часто використовувати тріаду розвитку: теза – антитеза – синтез.

Уточнення поняття програми природно починати, як говорили у давнину, *ab ovo* – із самого початку.

Але що обрати за початок?

Можна починати від понять програми та програмування. Але наведені приклади говорять про те, що для уточнення цих понять усе одно необхідно вийти на всезагальні поняття. Такою всезагальністю є поняття людства (суспільства). З цього і почнемо розвиток понять програмування.

2.3.1 Початкова тріада понять програмування

При пізнанні сутності програм та програмування ми повинні перш за все виходити з єдності трьох визначень їх понять: одиничності, особливості та (все)загальності. Цим категоріям відповідають такі моменти розгляду досліджуваного предмета, як елемент, частина та ціле. Зрозуміло, що сфера програмування належить до такої цілісності, як людство (суспільство). Але це занадто багата цілісність. Вона містить такі особливості, як сфери освіти, охорони здоров'я, оборони тощо. Серед цих особливих сфер є і сфера практичної діяльності, яка пов'язана з програмами та програмуванням. Назвемо її сферою інформатизації. Це занадто широкий термін, але і більш вузький термін важко вказати. Тому згідно з принципом програмологічної проекції будемо як всезагальне для теорії програмування брати цю сферу.

Таким чином, сфера інформатизації відноситься до практики. Що ж стосується теорії, то будемо (як уже зазначалося) виокремлювати три рівні (рис. 2.2):

- філософський, на якому визначаються категорії,
- науковий, на якому визначаються (загально- та спеціально-) наукові поняття,
- формальний, на якому визначаються формальні поняття.

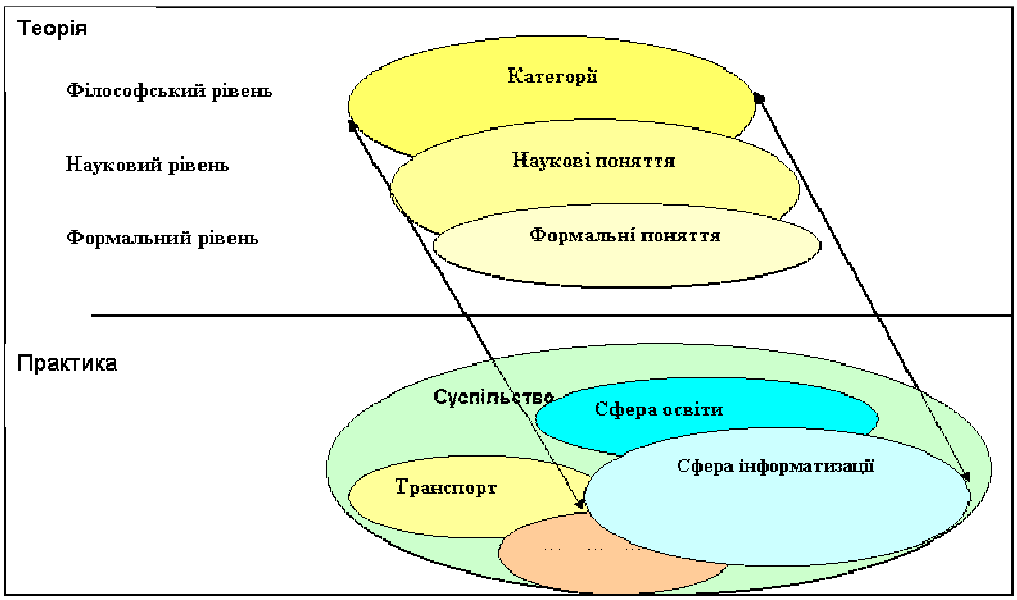


Рисунок 2.2. Сфера інформатизації як особлива сфера суспільства

Розвиток понять програмування почнемо з найвищого (філософського) рівня. На цьому рівні основним є категорії *суб'єкта* та *об'єкта*. Оскільки ми говоримо про орієнтацію на практику, то будемо розглядати категорію суб'єкта у праксеологічному (діяльнісному) аспекті. Діяльність суб'єкта має бути цілеспрямованою. Тобто, *ціль* є антитезою *суб'єкта*. Їх синтезом є категорія *засіб*. Таким чином, отримано першу тріаду: *суб'єкт – ціль – засіб*. Розвиваючи далі цю тріаду отримуємо ще дві категорії – *використання засобів* та *створення засобів*. Отримуємо пентаду: *суб'єкт – ціль – засіб – використання засобів – створення засобів*.

Переходимо тепер до наукового рівня розгляду. Тут найважливішим чинником буде поняття користувача (його елементами будуть конкретні користувачі). Саме це поняття – *користувача* – і є початковим пунктом розвитку. А що можна назвати його діалектичним запереченням? Користувачу (як і людині в цілому) протистоїть зовнішній світ, той світ, у якому людина існує, який вона сприймає, перш за все, як сукупність проблем, що потребують розв'язку. Тому можна вважати, що ціллю користувача є розв'язок певної *проблеми.* Згідно з тріадою розвитку наступний крок приведе до поняття, яке є синтезом понять користувача і проблема і яке може також розглядатися як розвиток користувача. Це – розв'язок проблеми. Цей розв'язок, враховуючи принцип програмологічної проекції, слід конкретизувати стосовно області програмування. У цій області розв'язком вважається *програма* (яка повинна допомогти користувачу розв'язати його проблему). Точніше кажучи, нас цікавить програмний розв'язок. Цей розв'язок з'являється саме як програма, як план. Тут можна навести слова К.Маркса про те, що найгірший архітектор відрізняється від бджоли тим, що попередньо має ідеальний образ, план. Таким чином, отримали першу тріаду основних понять програмування. Тут користувач – теза, проблема – антитеза, програма – синтез.

Ця тріада вперше вводить термін «програма», і саме ця тріада задає умови існування і ціль (мету) програм. Тому цю тріаду доцільно назвати *тріадою цільового призначення програм.* Мета програм полягає у тому, що вони є засобами розв'язку певних проблем користувача.

У цій тріаді розвитку можна також говорити про аналогії між введеними поняттями і такими категоріями гносеології, як «суб'єкт – мета (ціль) – засіб». Інакше кажучи, можна говорити про те, що поняття користувача, проблеми та програми є програмологічними проекціями відповідно до категорій суб'єкта, цілі та засобу.

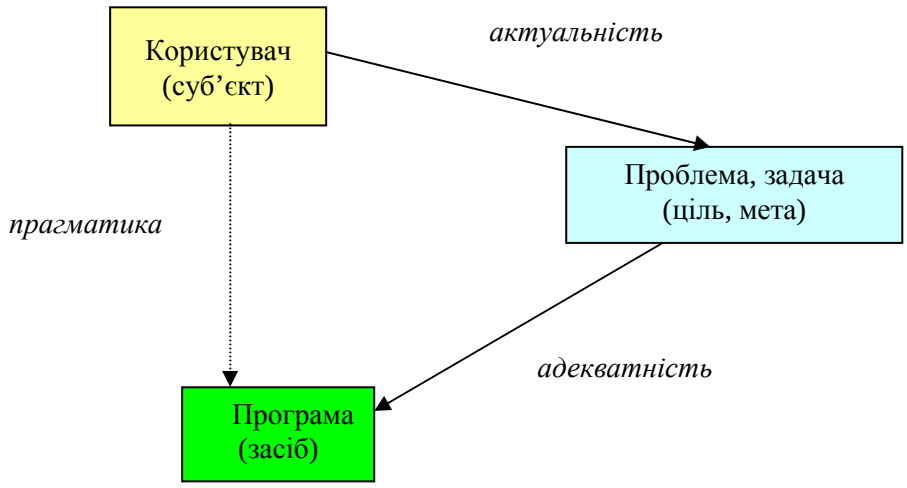


Рисунок 2.3. Тріада цільового призначення програм

Відзначимо, що введенням понять користувача, проблеми та програми не вичерпується розвиток понять програмування. Дуже важливо, що введені поняття пов'язані низкою співвідношень. Дійсно, розглянемо користувача та його проблеми. Серед них він повинен у першу чергу вирішувати ті проблеми, які є важливими для нього. Використовуючи традиційний для наукових досліджень термін «актуальний», будемо говорити, що основним відношенням між користувачем та проблемами є відношення *актуальності* (проблеми для користувача).

Далі розглянемо, який зв'язок між проблемами та програмами. Якщо користувач обрав для розв'язку актуальну для нього проблему, то йому бажано мати програму, яка найбільш відповідним чином (найбільш адекватно) розв'язує цю проблему. Тому

поняття проблеми і програми пов’язані відношенням адекватності (відповідності, правильності програми для розв’язку проблеми).

Поняття користувача і проблеми пов’язує відношення прагматичності (від грецького pragma – діло, дія). Відмітимо, що назва цього відношення має і певну епістемологічну обґрунтованість: «користувач» походить від «користуватися», «діяти».

Сформульовані відношення відображено на рис. 2.3. Ці відношення є основними. Але крім них, є ще інші відношення, які ми зараз не розглядаємо як суттєві.

Тепер слід зробити наступний крок розвитку. Цей наступний крок полягає в розкритті відношення прагматичності.

2.3.2. Тріада прагматичності програм

Розглядаючи користувача як тезу, а програму – як антитезу, ми зараз повинні віднайти синтезуюче поняття, яке розкриває спосіб користування програмами. Згідно з принципом програмологічної перспективи потрібно конкретизувати це поняття таким чином, щоб наблизитися до програмування (як програмування, орієнтованого на обчислювальну техніку). Ця конкретизація полягає у розкритті засобів реалізації цього відношення. Процес обчислення саме і є таким засобом. Це означає, що необхідно ввести поняття *процесу виконання* (за допомогою певного виконавця, наприклад комп'ютера). Враховуючи, що процес виконання відбувається, як правило, за допомогою комп’ютера, будемо такий процес також називати *процесом обчислення* програми.

Отже, використання програми полягає в першу чергу в її виконанні. З’являється нова тріада, яку назвемо тріадою прагматичності програм:

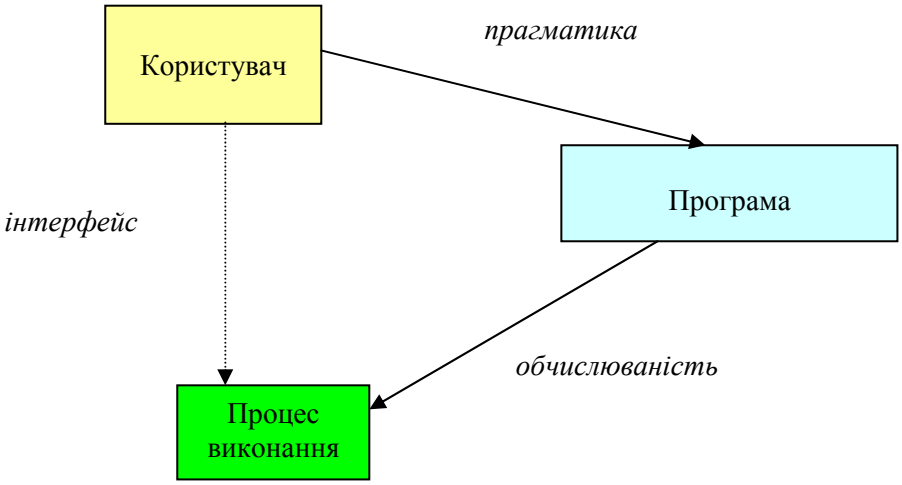


Рисунок 2.4. Тріада прагматичності програм

Основні відношення в цій тріаді наступні:

- прагматика (програма – користувач);
- обчислюваність (програма – процес виконання);
- інтерфейс (процес виконання – користувач).

Відзначимо, що хоча на перших етапах розвитку понять програмування введені відношення є абстрактними та бідними, при подальшій конкретизації вони розгортаються до дуже важливих та багатих відношень. Так, відношення обчислюваності є предметом теорії алгоритмів, якій присвячено чимало книжок. Інше відношення «користувач – процес обчислення». Його можна називати по-різному: (людино-машинний) інтерфейс, діалог. Це відношення деталізується як в монографіях, так і в державних стандартах. Можна виокремлювати різні рівні абстракції, пов’язані з цим відношенням. Наприклад:

1. Найбільш абстрактним буде вивчення відношення «користувач – процес обчислення « – в абстракції від програм та проблем.

2. Більш конкретним буде вивчення цього відношення з урахуванням особливостей програм.
3. Ще більша конкретність з'явиться при урахуванні особливостей програм та проблем тощо.

На кожному рівні абстракції є свої специфічні особливості відношення інтерфейсу. Наприклад, на першому рівні можна врахувати сприйняття користувачем кольорів монітору, швидкість набору символів на клавіатурі. На другому рівні можна врахувати кількість інформації, що видається програмою, спосіб розміщення цієї інформації на моніторі тощо. На третьому рівні додатково враховуються особливості проблеми, скажімо, чи вимагає проблема реакції у реальному часі.

Звичайно, є і багато інших конкретних рівнів.

2.3.3. Тріада основних понять програмування

Перейдемо до наступного кроку розвитку. Цей крок полягає в тому, щоб розкрити відношення адекватності. Це відношення розкривається у процесі створення, породження програм. Цей аспект називається *генетичним* аспектом програм. На цьому кроці з'являється поняття, що поєднує поняття програми та проблеми. Таким поняттям буде програмування (як процес), яке повинно пов'язати разом проблему і відповідну їй програму. Таким чином, побудовано нову тріаду розвитку: проблема (теза) – програма (антитеза) – процес програмування (синтез). Цю тріаду назвемо *тріадою основних понять програмування*, бо саме в ній уперше з'являється поняття програмування (тут терміни програмування та процес програмування розглядаємо як синоніми, проте будемо часто вживати саме термін «процес програмування», щоб підкреслити динамічний характер програмування). Крім того, термін «основні» тут використаний для того, щоб підкреслити, що суть програмування полягає саме у створенні необхідної єдності проблеми предметної області і програми, що використовується для розв'язання цієї проблеми.

Поняття основної тріади програмування пов'язані певними співвідношеннями (рис. 2.5). Так, поняття програмування та проблеми з'єднує відношення орієнтованості процесу програмування на розв'язок певної проблеми (проблемно-орієнтованість). Що ж стосується взаємодії понять програми та програмування, то тут виділимо два відношення:

- відношення *генетичності програм* (відношення «програма – процес програмування»);
- відношення *експлікативності процесу програмування* (відношення «процес програмування – програма»).

Для розкриття основної ідеї цих відношень розглянемо приклади.

Припустимо, що ви хочете купити мобільний телефон. Серед різних параметрів, які визначають ваш вибір, буде і параметр, пов'язаний із виробником телефону, тобто яка фірма і на якому заводі виробила телефон. Якщо це – бренд (на сучасному етапі – Nokia, Samsung, Motorola), то ви маєте більше довіри до якості телефону. Цей приклад демонструє важливість генетичного аспекту. Те саме стосується і генетичності програм: якщо програма (програмна система) розроблена відомою фірмою, яка використовує гарні технології розробки програм, то слід очікувати, що така програма буде більш надійною та ефективною, ніж програма, створена фірмою-одноденкою.

Відношення процесу програмування до програми буде конкретизовано як відношення уточнюваності (експлікативності процесу програмування).

Щоб зрозуміти, що означає це відношення, треба розглянути, як процес програмування пов'язаний із програмою. Спочатку про програму нічого не відомо (ні її розмір, ні кількість операторів і т.д.). Програма виступає як чорна скринька, наповнення якої з'явиться пізніше. На наступних кроках процесу програмування вимальовується деяка структура програми, її частини і т. д. Програма поступово уточнюється. Процес цих уточнень і задає відношення експлікативності.

Зробимо термінологічне зауваження: інколи вживають терміни «деталізація», «конкретизація», «декомпозиція». В англомовній літературі часто вживається термін «*refinement*», одним із смислів якого є уточнення.

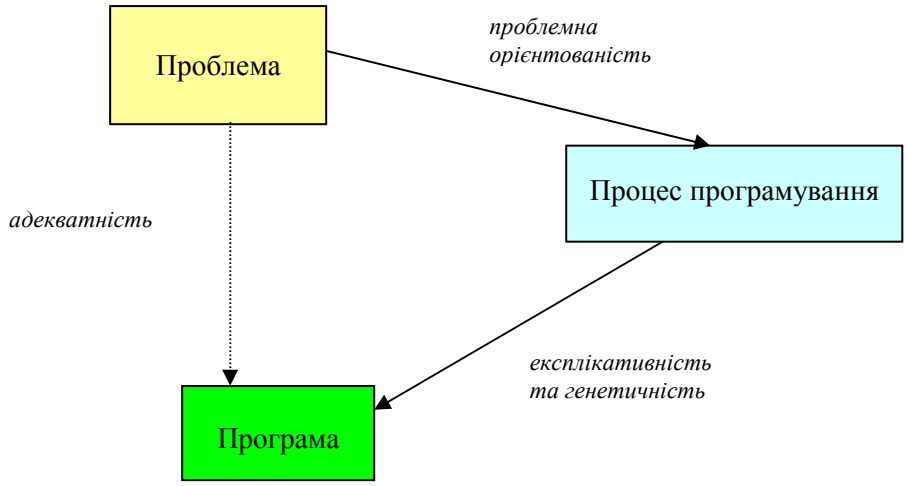


Рисунок 2.5. Тріада основних понять програмування

Уведені відношення також пов'язані одне з одним. Так, можна говорити про те, що відношення адекватності програми проблемі є певним «добутком» відношень проблемно-орієнтованості та уточнюваності: чим вони кращі, тим кращою є адекватність програми. Тобто можна записати таку символічну (але не формальну) формулу:

(*адекватність програми проблемі)=*
=(*проблемно-орієнтованість процесу програмування*) *
**(*експлікативність процесу програмування)*

2.3.4. Пентада основних понять програмування

У попередніх підрозділах було побудовано три тріади розвитку, що в сукупності вводять п'ять основних понять програмування (на професійному рівні). Ці п'ять понять та їх співвідношення будемо називати *пентадою основних понять програмування.* Ця пентада утворена трьома обертами розвитку (конкретизації). Її розвиток почався з філософського рівня (рис. 2.6).

Пентада основних понять програмування виділяє основні аспекти понять програмування. Так, для поняття програми основними аспектами будуть

- адекватність;
- прагматичність;
- обчислюваність;
- генетичність.

Для процесу програмування основні аспекти це

- проблемна орієнтованість;
- експлікативність.

Зробимо також кілька методологічних зауважень стосовно побудованої пентади. Відзначимо, що для нас тут головним є самі поняття та їх відношення, а не порядок появи у процесі розвитку. Процес розвитку можна було б починати від процесу програмування та йти до програми, потім до проблеми, користувача та процесу виконання. Разом із тим, може з'явитися питання: чому другий оберт (користувач – програма – процес виконання) зроблено раніше, ніж третій (проблема – програма – процес програмування)? Обґрунтування задається принципом історичності. На початковому етапі використання програм велика вага приділялась ефективності використання машинного часу (бо був дуже дорогий), тобто проблемам виконання програм. Лише пізніше почали досліджуватися методи програмування.

У посібнику значну увагу приділено категоріям абстрактного та конкретного. Проілюструємо ці категорії на різних визначеннях поняття програмування, які індукуються введеною пентадою.

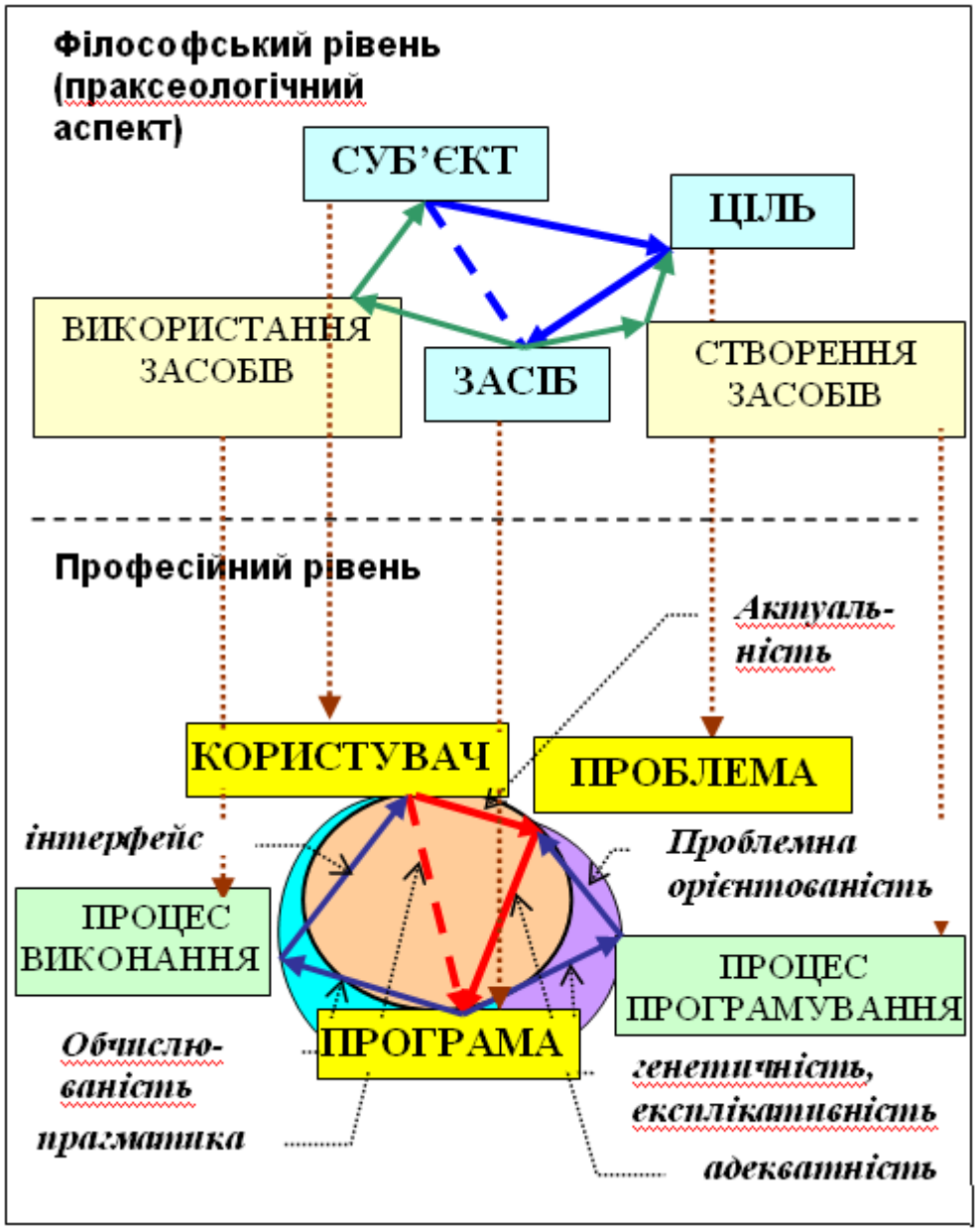


Рисунок 2.6. Схема розвитку основних понять програмування

Перше визначення: *програмування є процес побудови програм.* Це визначення поєднує лише два поняття нашої пентади та абстрагується від інших понять.

Друге визначення: *програмування є процес побудови програм, що має на меті розв'язання певних проблем.* Це визначення поєднує вже три поняття нашої пентади, але абстрагується від інших понять.

Третє визначення: *програмування є процес побудови програм, що має на меті розв'язання певних проблем, актуальних для користувача.* Це визначення поєднує чотири поняття нашої пентади, але абстрагується від інших понять.

Нарешті, четверте визначення: *програмування є процес побудови програм, що має на меті розв'язання певних проблем, актуальних для користувача, шляхом їх виконання.* Це визначення поєднує усі поняття нашої пентади.

Кожному наведеному визначенню відповідають певні методи програмування. Так, перше визначення фактично концентрується на методах написання синтаксично

правильних програм. Тут можна навести аналогію з навчанням у школі: спочатку дітей вчать писати букви та слова (тобто тут концентруються на синтаксичному аспекті в абстракції від семантичного). Друге визначення вже апелює до проблем предметної області, тому відповідні методи програмування мають враховувати семантику програм. Продовжуючи аналогію зі школою, можна сказати, що на цьому рівні діти повинні правильно викладати думки. Трете визначення апелює до користувачів та їх особливостей. На цьому рівні дітей у школі повинні навчати специфіці звертання та розмов з учителями, учнями, людьми похилого віку тощо. Нарешті, четверте визначення говорить про те, що методи програмування повинні враховувати особливості інтерфейсу та обчислюваності програм.

Таким чином, введена пентада дозволяє скласти певне уявлення про програмування. Та все ж уведені поняття є ще дуже абстрактними. Побудована пентада фактично відображає будь-який процес програмування, зокрема, процес підготовки програм для телебачення і т.д. Це пентада програмування взагалі. Наприклад, за цією пентадою ми можемо складати план роботи на наступний тиждень. Тому необхідно рухатися до більш конкретних понять, що розкриють процес програмування саме в професійному аспекті, у аспекті інформатизації.

Як же рухатися далі? Аналізуючи побудовану пентаду, можемо дійти висновку, що в них мова йде про зовнішні властивості програм та програмування. Згідно з принципами гносеології маємо тепер перейти до розкриття внутрішніх аспектів цих понять.

2.4. Розвиток основних програмних понять

Ми почнемо з розгляду внутрішніх аспектів програм. Відповідні поняття будемо називати *програмними поняттями*. Їх слід відрізняти від *понять програмування*, що пов'язані з процесом програмування, та які були розглянуті у попередньому розділі.

2.4.1. Тріада основних програмних понять

Почнемо подальший розвиток із конкретизації поняття програми. Вибір цього поняття (а не поняття користувача, проблеми, процесу виконання, процесу програмування) пов'язаний з тим, що це поняття є первісним щодо поняття процесу програмування, бо останнє «включає» в себе поняття проблеми і програми. Поняття програми також є первісним і для процесу виконання, що має спиратися на певне розуміння програм. Що стосується понять проблеми та користувача, то вони є більш важливими, ніж поняття програми, є визначальними для нього, але їх розгляд буде виводити нас поза сферу інформатизації. Тому доцільно починати розкриття основних понять програмування з поняття програми, яке легше піддається уточненню, ніж інші поняття пентади.

Як же починати уточнення поняття програми? Є різні підходи до того, як це робити. Але ми почнемо з аналізу тієї тріади, в який уперше з'явилось поняття програми. Це тріада «користувач – проблема – програма». З цієї тріади ми бачимо, що поняття програми є діалектичним запереченням (антитезою) поняття проблеми, тобто програми не є проблемами, але зберігають у собі проблеми у якійсь іншій формі. Цей зв'язок понять проблеми та програми подано на рис. 2.7.

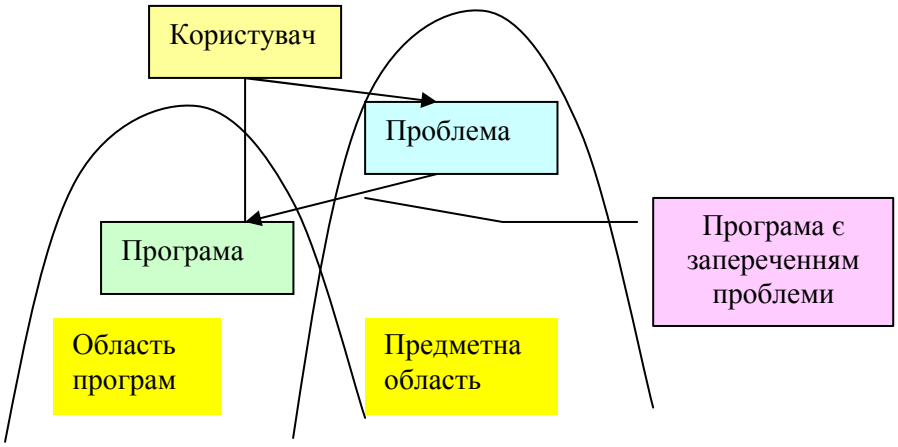
Яка ж саме властивість проблем знаходить своє відображення у програмах? Щоб сформулювати ту властивість проблем, яка робить можливим використання програм для їх розв'язання, подивимося на визначення проблеми. Філософські словники дають дуже гарне і просте визначення проблеми як єдності відомого та невідомого. З гносеологічної точки зору, тут мова йде про відому та невідому інформацію (знання).

Розглянемо питання про інформаційну властивість проблем більш детально. Сучасні комп'ютерні словники[4] визначають інформацію як дані, інтерпретовані в

[4] *The Free On-line Dictionary of Computing*. [Електронний ресурс]. – Домен доступу: *http://work.ucsd.edu*:5141/*cgi-bin/http_webster*

предметній області. Вони також дають наступну низку термінів, пов'язану з інформацією:

дані – інформація – знання – мудрість.



Малюнок 2.7. Програма як діалектичне заперечення проблеми

Тут дані тлумачаться як форма подання інформації, інформація – це дані, інтерпретовані у нашому світі, знання – істинна інформація, мудрість – уміння використовувати знання для досягнення вибраної мети.

Ця низка термінів видається дуже важливою для інформатики та суспільства в цілому. Вона фактично вказує на етапи розвитку інформатики та суспільства: спочатку досліджується зовнішня сторона інформації – тобто дані (пригадайте структури даних мов програмування, бази даних тощо), далі акцент переноситься на інформацію (інформаційні технології, інформаційне суспільство), після чого мають прийти технології обробки знань та бази знань (суспільство, засноване на знаннях). І хоча зараз на етапі лише частково розвиненого суспільства важко про це говорити, колись має з'явитися «розумне (мудре) суспільство».

Повертаючись назад до поняття проблеми, бачимо, що найважливішою властивістю проблем є властивість інформаційності, тобто та обставина, що для розв'язання проблеми необхідно визначити (обчислити) деяку нову інформацію (на підставі наявної інформації). Цю властивість проблем назвемо *принципом інформаційності проблем.* Оскільки поняття програми є діалектичним запереченням поняття проблеми, то властивість інформаційності проблем у сфері програм постає як властивість отримання нових даних на підставі існуючих даних. Таким чином, програми застосовуються для одержання деяких нових даних (на підставі наявних даних), які у предметній області інтерпретуються як деяка нова інформація, що використовується для розв'язання проблеми.

У математиці об'єкти, що обчислюють нові дані на підставі вхідних даних, називають *функціями*, а сам процес застосування функцій до даних – *аплікативністю.*

Отже, основною (істотною) властивістю програм є властивість аплікативності (функціональності): програми застосовують до вхідних даних для одержання результатів. Внутрішня властивість аплікативності знаходить своє зовнішнє відображення у відношенні прагматичності програм, оскільки вона задає спосіб використання програм користувачем. Ця властивість дозволяє на гранично високому рівні абстракції трактувати програми як функції, які переводять вхідні дані у вихідні. Сформулюємо таке розуміння програм у вигляді наступного принципу.

Принцип аплікативності (функціональності). На гранично високому рівні абстракції програми можуть розглядатися як функції, які при застосуванні до вхідних даних можуть виробляти вихідні дані.

Отже, уточнення поняття програми починається з поняття даного і продовжується його запереченням – поняттям функції. Пов'язуються ці поняття аплікацією (застосуванням функції до даного, у результаті якого утворюється вихідне дане). Тут не потрібно, щоб результат застосування функції до даного був завжди визначений або щоб результат такого застосування був однозначний. Інакше кажучи, будемо розглядати клас часткових багатозначних (недетермінованих) функцій. Такі функції задають зміст програм, який називається їх семантикою. Таке тлумачення семантики програм є найбільш абстрактним, бо згідно принципу розвитку ми починаємо з найбільш абстрактних формулювань.

Згідно з тріадою розвитку тепер потрібно побудувати поняття, що є синтезом понять даного (теза) та функції (антитеза). Позначимо це нове поняття через *X*. Тоді можна записати наступне понятійне рівняння:

X=синтез (теза: дане, антитеза: функція)

Щоб з'ясувати властивості нового поняття, скористаємося законом заперечення заперечення. З тріади розвитку випливає, що функція є діалектичним запереченням даного, а *X* – діалектичним запереченням функції, тобто *X* є заперечення заперечення даного. Це означає, що нове поняття *X*, з одного боку, зберігає функцію, а з іншого боку, за законом заперечення заперечення, підпадає під поняття даного, тим самим розвиваючи і це поняття. Говорячи більш просто, маємо, що *X* поводиться як дане (з ним працюють як з даним), але *X* також має певний зв'язок із функцією (містить, задає функцію).

Щоб зрозуміти, що є *X*, пригадаймо, що зараз розвиваються перші, найабстрактніші аспекти поняття програми. Тому слід очікувати, що ці аспекти, зокрема і *X*, мають з'являтися на перших кроках роботи з програмами, зокрема і на екрані комп'ютера. Дійсно, якщо ми включимо комп'ютер, то відразу ж на його робочому столі побачимо певний набір іконок, ярликів. Але ж це і представники поняття *X*. Дійсно, кожна іконка є певним знаком, іменем програми, яку можна при потребі виконати. Таким чином, розв'язком наведеного понятійного рівняння є поняття імені функції. Відзначимо, що можна було б це поняття назвати знаком, символом, позначенням функції, але термін «ім'я» видається найбільш вдалим, тому що активно використовується у програмування та має давню традицію використання в філософії. Зокрема, перше речення (!) праці Аристотеля «Категорії» присвячене розгляду властивостей імен.

Зазвичай, під ім'ям розуміється такий об'єкт, з яким зіставляється деякий інший об'єкт, який називається *денотатом (значенням)* імені. Між іменем та значенням визначають різні відношення *денотації*. Якщо нас цікавлять відношення «значення – ім'я», то їх називають відношеннями іменування, номінації, для відношень ім'я–значення використовують терміни «розіменування», «деномінація», «денотація».

З іменами ми поводимось як із даними. Імена складаються з певних символів, вони щось репрезентують (іменують, позначають).

На отриманому рівні абстракції можна сформулювати новий принцип.

Принцип номінативності програм. Програми можна представляти як імена, що позначають функції, які відображають вхідні дані в результати.

Поняття функції, імені і денотації, які є дуже абстрактними, мають широке коло застосування. Так наприклад, у книгах з мов і систем програмування основна частина тексту присвячена функціям, їх діям і іменам, які дозволяють через відношення денотації працювати з функціями і розрізняти їх.

До цього моменту розвитку був встановлений зв'язок між даними і функціями за допомогою аплікації і між функціями та іменами функцій за допомогою відношення денотації. А як же пов'язані дані та імена функцій? Їх зв'язок задається похідним відношенням *інтерпретації*, що за ім'ям функції та даним визначають результат застосування функції, що позначається цим іменем, до обраного даного. Відзначимо, що якщо зазначену впорядковану пару (ім'я, дане) розглядати як структуроване дане, то операція (відношення) інтерпретації підпадає під поняття функції, що дозволяє будувати «універсальні» операції інтерпретації як «звичайні» функції.

Додатковий аспект операції інтерпретації стосується її обчислюваності. Подальший розвиток цих аспектів призводить до побудови інтерпретаторів мов програмування і, зокрема, комп'ютерів.

Таким чином, побудована тріада понять, у якій в абстрактній формі виражені істотні аспекти програм. Ця тріада складається з понять даного, функції й імені функції, пов'язаних певними відношеннями, основними з яких є аплікація, денотація та інтерпретація. Будемо називати її *тріадою основних програмних понять* (рис. 2.8).

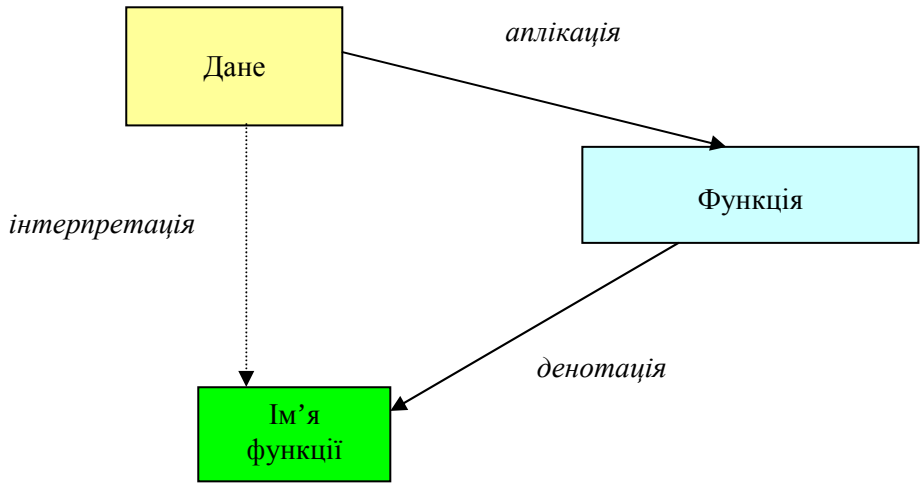


Рисунок 2.8. Тріада основних програмних понять

У цій тріаді всі поняття пов'язані одне з одним вказаними відношеннями, але і самі відношення пов'язані одне з одним. Наприклад, якщо нам задані відношення інтерпретації та аплікації, то можна визначити відношення денотації. Сформулюємо це більш точно. Нехай відношення інтерпретації *int*(*name*, *d*, *d´*) означає, що для імені функції *name* та вхідного даного *d* вихідним даним буде *d´*, а відношення *appl*(*func*, *d*, *d´*) означає, що аплікація функції *func* до вхідного даного *d* дає вихідне дане *d´*. Тоді імені функції *n* буде відповідати така функція *f*, що має місце рівність *int*(*n*, *d*, *d´*)= *appl*(*f*, *d*, *d´*) для всіх даних. Власне кажучи, такий спосіб визначення денотації і використовується при операціональному підході до семантики програм.

Надалі при розвитку програмних понять будемо «повторювати» програмну тріаду, але на більш багатих рівнях.

2.4.2. Пентада основних програмних понять

Останнім моментом розвитку понять у тріаді основних програмних понять було заперечення функції та перехід до імені функції, що зберігає функції за допомогою операції денотації. Для подальшого розвитку програмних понять необхідно зробити наступне заперечення, що повертає нас до поняття функції, але вже на новому рівні.

Відповідно до законів розвитку це означає, що ми переходимо до нового поняття, що не є іменем (але зберігає його) і яке підпадає під поняття функції, розвиваючи його. Позначаючи це нове поняття через *Y*, можемо записати наступне понятійне рівняння:

Y=синтез (теза: функція, антитеза: ім'я функції)

З тріади розвитку випливає, що ім'я функції є діалектичним запереченням функції, а *Y* – діалектичним запереченням імені функції, тобто *Y* є заперечення заперечення функції. Говорячи більш просто, маємо, що *Y* поводиться як функція (з цим поняттям працюють як із функціями), але також *Y* має певний зв'язок з іменами функцій та пов'язаним із ними функціями.

Аналогічно тому, як функції у програмній тріаді є функціями над даними, цей новий об'єкт буде функцією над функціями, що мають імена (іменованими

функціями). Такі об'єкти називаються композиціями функцій. Отже, з математичної точки зору композиції – це оператори (операції над функціями). Композиції і є новим поняттям *Y*. У композиціях операція іменування (денотації) повторює себе багато разів, тому що кожний новий аргумент композиції є новим набором іменованих функцій. Також і аплікація повторюється на новому рівні як застосування композицій до іменованих функцій. Отже, композиції розкривають структури функцій та з змістовної точки зору є засобами побудови функцій (програм). На новому рівні абстракції можна сформулювати наступний принцип [10].

Принцип композиційності. Програми (функції) будуються з більш простих програм за допомогою композицій.

У якості одного з наслідків цього принципу одержуємо, що повинні існувати деякі базові функції (програми), які використовуються для побудови більш складних функцій.

Для того щоб просуватися вперед, необхідно зробити нове заперечення і відповідно до закону заперечення заперечення буде здійснене повернення до поняття імені функції, але вже на новому рівні, який враховує наявність композицій. Нове поняття *Z* задається понятійним рівнянням

Z =синтез (теза: ім'я функції, антитеза: композиція)

Нові об'єкти із *Z*, які виникають, за своєю суттю є складними іменами, що описують функції. Такі об'єкти назвемо *дескрипціями*. Дескрипції фактично є текстами програм. Це дозволяє сформулювати наступний принцип.

Принцип дескриптивності. Програми можна представляти у вигляді дескрипцій (складних зображень), побудованих з використанням дескрипцій більш простих програм і композицій, та які описують функції, що відображають вхідні дані в результати.

Відзначимо етимологічну близькість терміна «дескрипції» терміну «програма». Обидва слова походять від дієслова «писати, малювати», тільки слово «програма» походить від грецького, а «дескрипція» – від латинського слова.

Дескрипції можуть розглядатися як імена, побудовані за допомогою більш простих імен. Правила побудови таких імен (дескрипцій) звичайно називаються *граматикою*. Граматика задає закони побудови правильних синтаксичних конструкцій. Стосовно предмета нашого дослідження граматика індуктивно задає правильні дескрипції (записи, зображення) на основі попередньо заданих імен базових функцій і імен (записів, зображень) композицій. Поняття дескрипції вже є досить багатим поняттям, оскільки допускається можливість виділення складових частин дескрипції та з'єднання таких частин у нову дескрипцію. Це фактично означає, що на класі дескрипцій повинні бути задані спеціальні операції, які дозволяють здійснювати таку роботу з дескрипціями. Відображення денотації для дескрипцій звичайно будуються індуктивно відповідно до структури дескрипції. Індуктивні визначення дескрипцій індукують індуктивні доведення різних властивостей програм.

У процесі розвитку поняття програми були введені п'ять програмних понять: дане – функція – ім'я функції – композиція – дескрипція. Ці п'ять програмних понять описують на абстрактному рівні основні властивості програм. Будемо називати ці поняття з їх відношеннями пентадою основних програмних понять (рис. 2.9).

Ця пентада була утворена двома обертами розвитку. Перший оберт задається тріадою «користувач – проблема – програма». Другий оберт вводить поняття композиції та дескрипції, розгортаючи поняття функції та імені відповідно.

В пентаді чітко прослідкуються три напрямки (три програмні аспекти):

- програмний аспект, що пов'язує дані, функції та композиції, який називають *семантичним* аспектом;
- програмний аспект, що пов'язує дані, імена та дескрипції, який називають *синтаксичним* аспектом;
- програмний аспект, що пов'язує імена та дескрипції з функціями та композиціями, який називають *денотаційним* аспектом.

Зауважимо, що для семантичного аспекту існують різні тлумачення: вузьке тлумачення розглядає семантичний аспект як область значень (смислів) програм, а широке тлумачення додатково включає в семантику зв'язок синтаксичного аспекту із смислами програм.

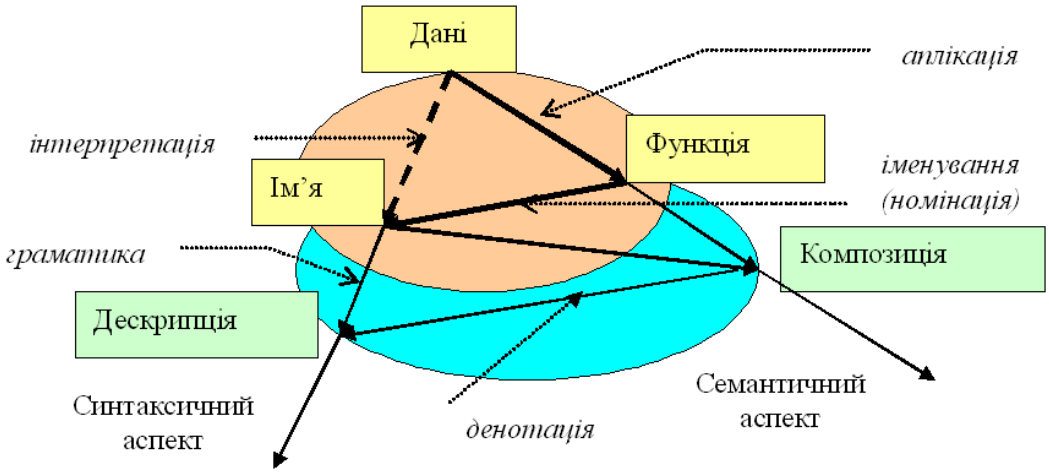


Рисунок 2.9. Пентада основних програмних понять

Введених понять достатньо для побудови багатьох моделей програм. Однак попередньо обговоримо питання про зв'язок цих понять із поняттям мови.

2.5. Сутнісні та семіотичні аспекти програм

Одним з основних програмних понять є поняття імені (знаку). Питаннями функціонування знаків займається також *семіотика* – наука про знаки та знакові системи. Тому не дивно, що здобутки семіотики застосовують і для визначення програмних аспектів.

Основні семіотичні аспекти (прагматика, семантика і синтаксис) були визначені та досліджені в роботах Ч.Пірса, Ч. Морріса, Р. Карнапа та інших учених:

- прагматика – це відношення між мовою і користувачем мови;
- семантика – це відношення між виразами мови та їх значеннями (денотатами), абстраговане від користувача;
- синтаксис – це відношення між мовними виразами, абстраговане від їх денотатів.

Ці три аспекти також застосовують до програм, визначаючи таким чином прагматичний, семантичний і синтаксичний аспекти програм. Будемо називати ці аспекти *семіотичними аспектами програм.*

Разом із тим побудовані пентади основних понять програмування та основних програмних понять дають дещо іншу класифікацію аспектів поняття програми.

Зокрема, перша пентада задає чотири основних зовнішніх аспекти:

- адекватнісний;
- прагматичний;
- обчислювальний;
- генетичний.

Ці аспекти розглядають програму як цілісність, не розкриваючи її структури.

Друга пентада дає три основних внутрішніх аспекти програм:

- семантичний;
- синтаксичний;
- денотаційний.

Ці дві пентади розкривають зовнішні та внутрішні аспекти програм. Необхідно також продемонструвати зв'язок зовнішніх та внутрішніх аспектів. Так, аплікація функції до даного (яка є внутрішнім аспектом) має зовнішнє проявлення у

застосуванні програм до даних (обчислюваності програм). Внутрішнє поняття композиції розкривається у зовнішньому відношенні експлікативності як декомпозиція програми. Інші введені відношення також пов'язані між собою.

Вказані аспекти розкривають зовнішні і внутрішні властивості програм та їх зв'язок. Це відповідає категорії сутності, тому будемо називати наведені сім аспектів *сутнісними аспектами програм.*

Таким чином, тут уведено два підходи до розкриття основних програмних аспектів: семіотичний та сутнісний. Доцільно зробити порівняльний аналіз запропонованих підходів.

Таблиця 2.1

№	Характе-ристика підходу	Семіотичний підхід	Сутнісний підхід
1	Рівень загальності	Орієнтація на довільні системи, що використовують знаки.	Більш спеціальна орієнтація на програми, які розглядаються на високому рівні абстракції.
2	Основні поняття підходу	Основним поняттям є знак, додатковими – користувач та значення. Тому головний акцент – на знаках, невелика кількість понять не дає можливості визначати достатню кількість аспектів.	Основних понять десять, що дає змогу більш точно виразити різні аспекти, не надаючи перевагу лише одному з них.
3	Класифі-кація аспектів	Класифікація аспектів відсутня. Тому чіткого розподілу на зовнішні та внутрішні аспекти немає. До зовнішніх можна віднести лише прагматичний аспект, частково – семантичний аспект, до внутрішніх – синтаксичний та семантичний (частково).	Аспекти класифікуються на чотири зовнішніх та три внутрішніх.
4	Зовнішні аспекти	До зовнішніх можна віднести лише прагматичний аспект. Як наслідок, це веде до перенавантаження прагматичного аспекту, який стає занадто розпливчастим та нечітким.	Виокремлено чотири зовнішніх аспекти з достатньо чіткими визначеннями. Це дозволяє розгорнути детальне вивчення цих аспектів.
5	Внутрішні аспекти	До внутрішніх можна віднести семантичний (частково) та синтаксичний аспекти. Але семантичний аспект визначає відношення знака до його значення, тобто має синтактико-семантичний напрямок, що ставить синтаксис у привілейоване становище.	До внутрішніх віднесено семантичний, синтаксичний та денотаційний аспекти. Семантичному аспекту в семіотиці відповідають такі аспекти в сутнісному підході: семантичний, як теорія значень, та денотаційний, який пов'язує значення (тобто семантику) та синтаксис. Це дає можливість розглядати семантико-синтаксичні підходи до розгортання визначень

			програм, у яких саме семантика знаходиться у привілейованому стані.

Як видно з наведеної таблиці, теорія семіотичних аспектів трактує програму як текст (зображення). На наш погляд, таке трактування є занадто бідним для програмування, бо залишає поза увагою багато важливих аспектів програм та робить центральним тлумачення програми як знака. На противагу семіотичному підходу сутнісна теорія програмних аспектів тлумачить програму як єдність її різних сторін, як єдність форми та змісту. Тому семантичний, синтаксичний та денотаційний аспекти стають внутрішніми аспектами програм, а прагматика, адекватність, обчислюваність та генетичність – зовнішніми, що дозволяє будувати більш адекватні теорії структур програм та програмування.

Порівнюючи семантику та синтаксис із категоріями змісту та форми, можна зробити висновок про те, що семантика є провідним аспектом, а інші аспекти можуть розглядатися як похідні. Це дозволяє сформулювати наступний принцип.

Принцип підпорядкованості. Семантика є провідним внутрішнім аспектом програм, а синтаксичний та денотаційний аспекти підпорядковані семантиці [10]. Всі аспекти варто спочатку вивчати незалежно один від одного, а потім – у їх єдності.

Внаслідок принципу підпорядкованості випливає, що семантичний аспект є важливіший за синтаксичний. Звідси випливає, що будемо використовувати семантико-синтаксичний підхід до дослідження та формалізації програмних понять. Сформулюємо це у вигляді наступного принципу.

Принцип семантико-синтаксичної орієнтації. Основним підходом до дослідження та формалізації програмних понять буде семантико-синтаксичний підхід, а синтактико-семантичний підхід будемо розглядати як допоміжний.

Аналізуючи семантичний та синтаксичний аспекти, можна стверджувати, що для семантичного аспекту найважливішим є поняття композиції, бо саме воно визначає властивості програм. Крім того, відзначаємо також важливість відношень іменування (номінативність). Це дозволяє називати запропонований підхід *композиційно-номінативним.*

Сформульовані принципи та пентада програмних понять утворюють базис композиційно-номінативного підходу до уточнення поняття програми. Використання терміна «композиційний» у назві запропонованого підходу можна пояснити кількома причинами. Серед трьох термінів: «дані», «функція» і «композиція» – користувачі зацікавлені насамперед у даних і функціях. Однак, щоб зрозуміти властивості даних і функцій, необхідно вивчити властивості композицій, які визначають структури (а отже, властивості) функцій і даних. Тому основна увага буде приділена вивченню композицій та їх властивостей, у той час як властивості функцій і даних будуть похідними від властивостей композицій. Інакше кажучи, композиції задають логічну складову програмування, а функції та дані – предметну. Що ж стосується терміна «номінативний», то його використання в назві підходу підкреслює фундаментальну роль відношень іменування (денотації) у побудові всіх програмних понять.

Таким чином, серед різних парадигм програмування (процедурна, функціональна, алгебраїчні, логічна тощо), які відображають різні аспекти програм, будемо вивчати парадигми композиційності і номінативності в межах композиційно-номінативного підходу. Цей підхід може бути охарактеризований як семантико-синтаксичний підхід, орієнтований на систематичне вивчення номінативних відношень у побудові даних, функцій, композицій і дескрипцій.

2.6. Програми і мови

Поняття програми тісно пов'язане з поняттям мови. Дескрипції можуть трактуватися як речення мови, функції – як значення речень. Тому способи подання програм можуть розглядатися як певні мови, які називають мовами програмування. Для дослідження таких штучних мов можна використовувати лінгвістику, яка була розвинена для природних мов. Разом із тим є певні відмінності між природними мовами та мовами програмування, які сформулюємо у наступній таблиці. Зауважимо, що, використовуючи термін «мова програмування», ми фактично будемо більше говорити про мови програм, ніж про процеси програмування.

Таблиця 2.2

№	Характе-ристика мови	Природні мови	Мови програмування
1	Походження	Природні мови з'явились у результаті історичного розвитку певної групи людей.	Мови програмування є штучними мовами.
2	Основні аспекти	Природні мови мають багато основних аспектів, таких як комунікативний, когнітивний, референціальний, сігніфікативний, експресивний, лікувальний і т.д.	Основних аспектів небагато, але вони мають достатньо точні визначення.
3	Точність визначення мови	Точних визначень немає, є різні моделі. Мови багатозначні.	Мови програмування, як правило, точно визначені. Мова однозначна.
4	Відкритість	Мова постійно розширюється.	Мова фіксована.

Як бачимо, мови програмування значно простіші та бідніші за природні мови. Але це дає можливість більш точно описати мови програмування. Однозначність мов програмування важлива при створенні відповідних систем програмування та при дослідженні програм.

2.7. Пентада програмних понять процесного типу

Введені програмні поняття є досить абстрактними. Згідно з принципом розвитку від абстрактного до конкретного, треба розвивати основні поняття до більш конкретних та багатих.

Наступним рівнем конкретизації може бути розгляд більш конкретних типів проблем не лише функціонального типу, як це було зроблено раніше, але і проблем процесного типу, коли їх суть полягає не стільки в інформаційності, скільки в необхідності виконання низки дій. Такі проблеми будемо називати проблемами процесного типу.

Уточнення програмних понять для проблем процесного типу веде до пентади, аналогічної раніше побудованій, у якій замість поняття функції береться поняття процесу.

Отримуємо наступну пентаду: дія – процес – ім'я процесу – композиція процесів – дескрипція процесів, яка подана на рис. 2.10.

Поняття процесу є важливим для моделювання та дослідження більш багатих програмних систем, а саме розподілених, паралельних, реактивних тощо. В межах першої частини посібника такі системи розглядати не будемо.

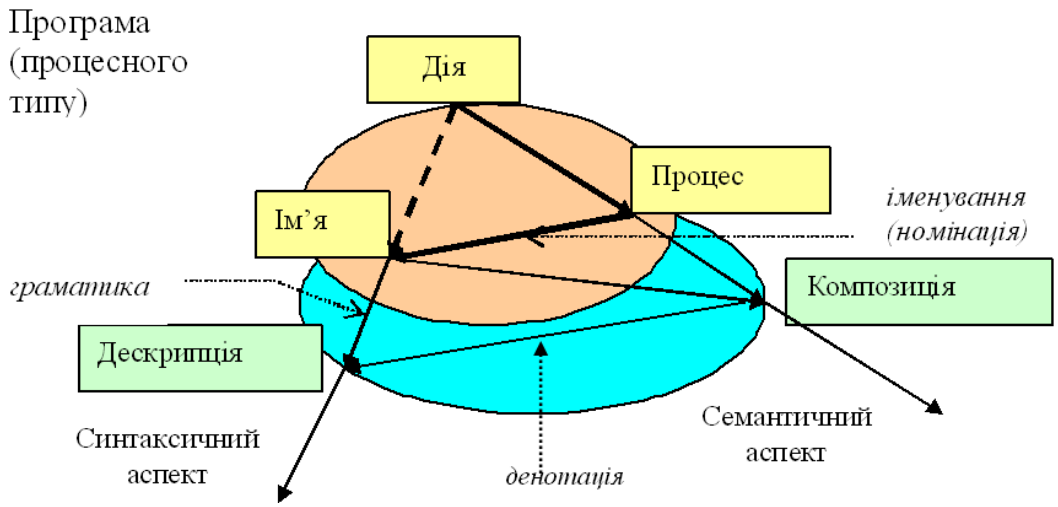


Рисунок 2.10. Пентада програмних понять процесного типу

Висновки

У цьому розділі було розвинено основні поняття програмування на основі загальногносеологічних принципів, головним з яких є принцип розвитку від абстрактного до конкретного. Основні результати можна сформулювати таким чином.

1. Було розглянуто словникові визначення поняття програми та продемонстровано, що ці визначення нечіткі, спрощені та ведуть до хибного кола визначень.

2. Були розглянуто основні гносеологічні принципи визначення понять. За основу був узятий підхід, що базується на діалектичній логіці, але береться у спрощеному вигляді для розгляду лише проблем програмування.

3. Продемонстровано важливість трьох взаємопов'язаних рівнів розгляду понять, а саме методологічного (філософського), професійного (конкретно-наукового) та формального (математичного).

4. Було розвинено основні поняття програмування в їх взаємозв'язках: спочатку тріада «користувач – проблема – програма», яка потім у пентаді доповнюється поняттями процесу виконання та процесу програмування. Введені відношення задають зовнішні сторони понять програми та програмування.

5. Було розвинено основні програмні поняття в їх взаємозв'язках: спочатку тріада «дане – функція – ім'я» функції, яка потім в пентаді доповнюється поняттями композиції та дескрипції.

6. Основними внутрішніми аспектами програм є семантичний, синтаксичний та денотаційний аспекти, які тісно пов'язані із зовнішніми аспектами.

7. Було зроблено порівняльний аналіз семіотичних та сутнісних аспектів програм. Семіотичні аспекти (прагматика, семантика, синтаксис) ставлять лише поняття знака у центр уваги, применшуючи важливість інших понять. Теорія сутнісних аспектів програм виділяє зовнішні (адекватність, прагматичність, обчислюваність, генетичність), внутрішні аспекти (семантика, синтаксис, денотація) та їх зв'язки, дозволяючи більш адекватно розкрити поняття програми.

8. Зроблено порівняльний аналіз природних мов та мов програмування. Підкреслено вимоги однозначності та точності для мов програмування.

9. У контексті подальшої конкретизації основних понять програмування побудовано пентаду понять для проблем процесного типу.

Додаткову інформацію про основні поняття програмування можна найти у [2–4,8,9].

Контрольні питання

1. Проаналізуйте визначення поняття програми та програмування, наведені у різних словниках.
2. Розкрийте зміст принципу гносеологічності.
3. Наведіть приклади категорій.
4. Розкрийте зміст принципу програмологічної проекції.
5. Розкрийте зміст категорій «абстрактне» та «конкретне».
6. Як формулюється принцип розвитку?
7. Як розуміється відносний характер принципу розвитку та інших гносеологічних принципів?
8. Які поняття та відношення утворюють початкову тріаду понять програмування?
9. Які поняття та відношення утворюють тріаду прагматичності програм?
10. Які поняття та відношення утворюють тріаду основних понять програмування?
11. Які поняття та відношення утворюють пентаду основних понять програмування?
12. Наведіть визначення програмування різних рівнів абстракції.
13. Які поняття та відношення утворюють тріаду основних програмних понять?
14. Розкрийте зміст принципу інформативності проблем.
15. Як формулюється принцип аплікативності?
16. Як формулюється принцип номінативності?
17. Як формулюється принцип композиційності?
18. Як формулюється принцип дескриптивності?
19. Які поняття та відношення утворюють пентаду основних програмних понять?
20. Сформулюйте семіотичні аспекти програм.
21. Сформулюйте сутнісні аспекти програм.
22. Як формулюється принцип підпорядкованості?
23. Як формулюється принцип семантико-синтаксичної орієнтації?
24. Які властивості формулюються для природних мов та мов програмування?
25. Які поняття та відношення утворюють пентаду основних програмних понять процесного типу?

3. Формалізація програмних понять

Перейдемо до побудови математичних уточнень введених програмних понять – до їх формалізації.

Згідно з принципом розвитку від абстрактного до конкретного, можна побудувати різні формалізації поняття програми. Найпростіша формалізація відповідає тріаді основних програмних понять: дане – функція – ім'я функції. Задаючи деякий клас даних D, програму можна уточнити як пару (fn, f), де fn – ім'я програми, а f: $D \to D$ – функція, що задає семантику програми. Клас програм тоді задається як певний клас таких пар і називається інтерпретованим класом програм.

Пентада програмних понять дозволяє побудувати більш конкретні та багаті формалізації для програм, що будуть враховувати їх композиційну структуру та структуру дескрипцій. У цьому випадку можна говорити про те, що класи програм задаються мовою програмування (програмною системою), яка може бути подана як трійка систем, що задають семантику, синтаксис та відношення денотації.

Які ж формалізми можна використовувати для подання програмних систем?

3.1. Теоретико-функціональна формалізація

Традиційно для формалізації поняття програми використовують теоретико-множинний підхід, часто в дуже специфічній формі. Наприклад, такі методи формальної розробки програм, як B [11] та Z [16], безпосередньо спираються на аксіоматичну теорію множин Цермело-Френкеля. Тому часто під формальною семантикою розуміють теоретико-множинну семантику. Водночас, незважаючи на наявний багатий позитивний досвід теоретико-множинних формалізацій, починаються спроби проводити формалізацію програмних понять не тільки на основі поняття множини, а на й основі поняття функції (відображення). Стосовно поняття програми, теоретико-функціональний підхід підтримується принципом аплікативності (функціональності) програм. У межах композиційно-номінативного підходу також будемо орієнтуватися на теоретико-функціональну формалізацію. Відразу ж відзначимо, що поняття функції і множини нерозривно пов'язані одне з одним, тому коли мова йде про використання теоретико-функціонального підходу то основна увага буде приділятися поняттю функції, а не поняттю множини. У зв'язку з цим сформулюємо наступний принцип.

Принцип теоретико-функціональної формалізації. Формалізація поняття програми здійснюється в межах теоретико-функціонального підходу, в основі якого лежить поняття функції (відображення), яке має розглядатися на різних рівнях абстракції.

Сформульований принцип має дві сторони. Перша полягає в тому, що більш адекватним для формалізації поняття програми є теоретико-функціональний підхід, а не теоретико-множинний, який розглядає лише екстенсіональні аспекти функцій. Друга сторона принципу полягає в тому, що треба збагачувати існуючі визначення функцій, вводячи інтенсіональні аспекти та властивості функцій і даних різних рівнів абстракції. Отже, мова йде про те, щоб зблизити поняття програми та функції, збагативши тлумачення функцій тими інтенсіональними аспектами, які є у програм.

З огляду на програмістську орієнтацію підходу, функції будуть у першу чергу трактуватися аплікативно (операціонально), як деякі абстрактні пристрої (машини, автомати), які при застосуванні до вхідних даних, можуть виробляти результати.

Таким чином, у процесі формалізації будемо вводити об'єкти різного рівня абстракції, які належать деякому універсуму об'єктів. На граничному рівні абстракції об'єкти розглядаються як чорні скриньки. На наступному рівні абстракції серед цих об'єктів виділяються спеціальні об'єкти, які називаються функціями

(відображеннями). Ці об'єкти трактуються як деякі машини, які мають вхідний порт (канал), на який можуть надходити дані, та вихідний порт (канал), з якого зчитуються результати. Передбачається, що результати можуть бути отримані за скінченний час. Якщо за скінченний час результату немає, то результат застосування машини (функції) до вхідного даного покладається не визначеним. На верхньому рівні абстракції внутрішній устрій машини (функції) невідомий (машина є чорною скринькою з двома портами), на більш низьких рівнях абстракції структура може бути частково розкрита (сірий ящик). Для деяких функцій або об'єктів їх внутрішній устрій цілком розкритий (біла скринька). Як наслідок будемо використовувати різні типи машин для опису класів відображень.

3.2. Класи функцій

Введемо визначення та позначення для різних класів функцій. Будемо розглядати найбільш загальний клас часткових багатозначних функцій. Визначення стосуються екстенсіональних аспектів функцій, тобто тих аспектів, які задаються лише через аргументи та значення функцій.

Нехай D і R – деякі класи об'єктів. Клас об'єктів, розглянутих як часткові багатозначні функції з D у R, позначимо $D \xrightarrow{m} R$. Для $f \in (D \xrightarrow{m} R)$ позначимо $arg(f)$ клас визначеності f, тобто клас об'єктів, на яких f може бути визначена, $und(f)$ – клас невизначеності f, тобто клас об'єктів, на яких f може бути не визначена, $gr(f) \subseteq D \times R$ – графік f, тобто множина пар (d, r) таких, що значення f на d може бути визначеним із значенням r. Відзначимо, що перетин $arg(f) \cap und(f)$ може бути не порожнім, оскільки можуть бути об'єкти, на яких f може бути як визначена, так і не визначена. Якщо ж $arg(f) \cap und(f) = \varnothing$, то f будемо називати реляційною функцією, оскільки в такому разі вона однозначно визначається своїм графіком, тобто бінарним відношенням (реляцією) на $D(R)$.

Для подання функцій будемо часто використовувати індексний конструктор функцій виду $[\, d_i \mapsto r_i \mid i \in I \,]$ або $[\, d_i : D \mapsto r_i : R \mid i \in I \,]$, де d_i і r_i можна трактувати як індексні часткові однозначні відображення з деякої множини індексів I у класи D і R відповідно. Такий конструктор задає функцію $f \in D \xrightarrow{m} R$ наступним чином. На $d \in D$ значення f може дорівнювати значенню r_i для такого $i \in I$, для якого d_i визначено і дорівнює d. Якщо ж таке r_i не визначено або ж необхідного i не існує, то значення f на d може бути не визначене.

Клас часткових однозначних функцій із D у R позначимо $D \to R$, клас тотальних (усюди визначених) багатозначних функцій – $D \xrightarrow{tm} R$, тотальних однозначних функцій – $D \xrightarrow{t} R$.

Введені позначення класів функцій дозволяють перейти до формалізації програмних понять. Формалізми, які виникають будемо називати програмними системами.

3.3. Програмні системи

Програмні системи – це специфічна форма фіксації рівня абстракції програмних понять. Вона дозволяє визначити сукупність понять, яка характеризує рівень, та їх властивості, що задаються сукупністю суджень. Програмні системи будуть визначатися відповідно до схеми розвитку програмних понять, що задається програмною пентадою. Кожне поняття представляється відповідною системою, яка фіксує зв'язок розглянутого поняття з іншими поняттями. Залежно від рівня абстракції такі системи можуть бути простими або дуже складними. Фактично повинна бути побудована мережа взаємопов'язаних систем.

Як ілюстрацію дамо визначення програмних систем, які знаходяться на гранично високому рівні абстракції.

Починаємо з системи даних. Оскільки ніяких властивостей даних не задано, то система даних *Dt* просто визначає деякий клас *D*, тобто *Dt*=<*D*>. Наступне поняття в пентаді – функція. Система функцій *Fn* – це пари <*D*, *F*>, де $F \subseteq D \xrightarrow{m} D$. Імена функцій задаються як деяка множина *Z*, тому система імен *Nm* – це одноелементний кортеж <*Z*>. Відношення денотації (номінації) будемо трактувати як відображення *den*: $Z \xrightarrow{m} F$. Тому система денотації *Dn* є кортеж <*den*>. Остання трійка систем визначає в абстрактному виді семантику програм (система функцій), їх синтаксис (система імен) та зв'язок синтаксису із семантикою (система денотації). Тому доцільно ввести нову – функціонально-номінативну – систему, яка задає ці системи в їх єдності. Функціонально-номінативна система *FNS* – це кортеж <*D*, *Fn*, *Nm*, *Dn*>. Подальший розвиток буде здійснюватися конкретизацією введених систем.

Відзначимо, що функціонально-номінативна система може тлумачитись як алгебра даних: *D* – носій цієї алгебри, а операціями алгебри є функції, які задаються іменами з *Z* за допомогою відображення *den*. Далі це поняття буде розвинене до алгебри функцій.

При побудові таких систем виникає питання про форми їх подання. Наприклад, функціонально-номінативну систему *FNS* можна було б представити не у вигляді «ієрархічного» кортежу <*D*, *Fn*, *Nm*, *Dn*>, а у вигляді «плоского» кортежу <*D*, *F*, *Z*, *den*>. Кожна з форм уявлення може бути зручної в тих або інших випадках. Тому, щоб не обмежувати себе однією формою уявлення, приймемо наступну угоду про *множинність форм подання програмних систем*: залежно від цілей дослідження програмні системи можуть представлятися в різних формах.

Наступне поняття в пентаді – композиція, яке уточнимо в межах композиційної системи *Cm*(*Z*)=<*D*, *F*, *C*>, де $C \subseteq (Z \xrightarrow{m} F) \xrightarrow{m} F$. Тут *Z* виступає як множина імен аргументів композицій.

Нарешті, формалізуємо поняття дескрипції. Насамперед зазначимо, що наявність композицій дозволяє ієрархічну побудову програм із деяких базових функцій багатократним застосуванням композицій. Тому дескрипції визначаються індуктивно. Інша обставина – дескрипції також будемо трактувати як відображення відповідно до теоретико-функціонального підходу. Тому для побудови дескрипцій необхідні множини імен базових функцій *FN*, композицій *CN* і аргументів композицій *Z*. Множина інфінітарних стандартних дескрипцій *StDes* задається індуктивно:

1) $StDes^{(0)}=FN$;

2) $StDes^{(i+1)}=\{[cn \mapsto \overline{ds}] \mid cn \in CN,\ \overline{ds} \in Z \xrightarrow{m} StDes^{(i)}\},\ i \in \omega$.

Тоді $StDes = \bigcup_{i \in \omega} StDes^{(i)}$.

Наведене визначення використовує довільні відображення імен аргументів у множину раніше побудованих дескрипцій. Це дозволяє задавати дуже загальні, в тому числі й інфінітарні (нескінченні) дескрипції. У програмуванні звичайно обмежуються використанням фінітарных дескрипцій. Для виділення спеціальних класів стандартних дескрипцій уведемо відповідну програмну систему *Ds*(*Z*)=<*FN*, *CN*, *Ds*>, де *Ds*⊆*StDes*, яку назвемо стандартною дескриптивною системою.

Відношення денотації конкретизується як відображення *den*: $Ds \xrightarrow{m} F$. Внаслідок індуктивної побудови дескрипцій досить задати відношення денотації для імен базових функцій та імен композицій: *den_fn*: $FN \xrightarrow{m} F$ та *den_cn*: $CN \xrightarrow{m} C$. Тоді значення *den* на $ds \in Ds$ задається індуктивно:

1) якщо $ds=fn$, $fn \in FN$, то $den(ds)=den\_fn(fn)$,

2) якщо $ds=[cn \mapsto \overline{ds}]$, де $\overline{ds}=[z_i \mapsto ds_i \mid z_i \in Z,\ ds_i \in Ds,\ i \in I]$,

то $den(ds)=(den\_cn(cn))([z_i \mapsto den(ds_i) \mid i \in I])$.

У цьому випадку систему денотації можна задати як пару *BDn*=<*den_cn*, *den_fn*>. Тому функціонально-номінативна система конкретизується як композиційно-

дескриптивна система *CDS*=<*Cm*(*Z*), *Ds*(*Z*), *BDn*>. Такі системи можуть тлумачитися як алгебри функцій, операціями яких є композиції.

Зазначимо, що можна розглядати нестандартні дескриптивні системи, але для того щоб визначити денотати таких дескрипцій будемо вважати, що є відображення нестандартних дескрипцій у стандартні. Таке відображення будемо називати відображенням *аналізу*, а дескриптивні системи із заданим відображенням аналізу будемо називати *аналізованими дескриптивними системами*.

Приведені уточнення програмних понять можна розглядати як перший, найбільш абстрактний оберт спіралі розвитку поняття програми. Подальші конкретизації фактично починають другий оберт спіралі.

3.4. Рівні конкретизації програмних систем

Розгляд рівнів почнемо з конкретизації поняття даного.

Рівні конкретизації даних. Як відзначалося раніше, треба будувати програмні поняття різних рівнів абстракції. Це стосується і даних. У цьому розділі розглянемо конкретизації даних, які фактично індуковані розвитком поняття даного в програмній пентаді (дане – ім'я – дескрипція). Інші конкретизації розглянемо пізніше. Програмна пентада фактично вказує на три рівні розгляду даних. Перший рівень – абстрактний, коли ніякі властивості даних не виділяються і дані розглядаються як елементи деякої абстрактної множини. Другий рівень визначається тим, що виділяються деякі специфічні дані. Звичайно такі дані застосовуються як логічні константи, тому назвемо другий рівень булевим рівнем. Нарешті, на третьому рівні є можливість виділяти компоненти даних. З огляду на те, що таке виділення компонент звичайно робиться за допомогою відношень іменування (номінації), назвемо третій рівень номінативним рівнем. Можна також охарактеризувати дані на абстрактному рівні як чорні (непрозорі) скриньки, константи булевого рівня – як білі (прозорі) скриньки, а дані номінативного рівня – як сірі (частково прозорі) скриньки.

Три виділені рівні приводять до трьох класів систем даних. Абстрактна система даних (визначена раніше) – *ADS* =<*D*>. Система даних булевого рівня в загальному випадку має вигляд *BDS* =<*D*, *c1*, *c2*, ...> , де *c1*, *c2*, ... – деякі виділені елементи (константи) з *D*. Можна виділити три типи систем: перед-булеву систему <*D*, *true*>, булеву систему <*D*, *true*, *false*> та пост-булеву систему <*D*, c_1, ..., *ck*>.

На номінативному рівні дані розглядаються як номінативні дані. Клас *ND* інфінітарних номінативних даних будується індуктивно на основі деяких множин імен *V* і значень *W*:

1) $ND^{(0)} = W$,

2) $ND^{(i+1)} = V \xrightarrow{m} ND^{(i)}$, $i \in \omega$.

Тоді $ND = \bigcup_{i \in \omega} ND^{(i)}$.

Таким чином, номінативні дані фактично є ієрархічно побудованими відображеннями, областю визначення яких є множина імен, а областю значень – номінативні дані.

Система даних номінативного рівня може бути задана як кортеж *NDS*=<*V*, *W*, *D*>, де $D \subseteq ND$.

Зазначимо, що вищенаведене індуктивне визначення номінативних даних може бути подане у вигляді наступного рекурсивного визначення: $ND = W \cup (V \xrightarrow{m} ND)$.

Ці визначення допускають інфінітарні (нескінченні) номінативні дані. У програмуванні клас номінативних даних обмежується класом ієрархічно побудованих скінченних реляційних відображень. Тому виділимо наступні основні класи номінативних даних:

- однозначні номінативні дані (скінченні однозначні відображення), які називаються *іменними даними*;

• багатозначні номінативні дані (скінченні багатозначні реляційні відображення), які називаються просто *номінативними даними*.

Іменні дані дозволяють формалізувати структури даних, які використовуються у програмуванні та характеризуються однозначністю іменування своїх компонент. Це такі структури даних, як записи, масиви, файли, реляції тощо. Номінативні дані дозволяють задавати структури даних, яким властива неоднозначність іменування своїх компонент, такі як множини, перед множини, мультимножини тощо. Наприклад, множину вигляду $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ можна представити номінативним даним $[1 \mapsto s_1, 1 \mapsto s_2, \ldots, 1 \mapsto s_n]$, де *1* обрано як стандартне ім'я елементів множини. Для роботи з такими даними повинні бути введені спеціальні функції, які відображають рівень абстракції даних. Важливо відзначити, що всі такі функції є конкретизаціями абстрактних функцій опрацювання номінативних даних, що істотно зменшує загальне число функцій та спрощує їх дослідження. Зазначимо також, що розгляд даних як спеціальних функцій має давні традиції у програмуванні.

Рівні конкретизації функцій. Кожен із рівнів конкретизації даних індукує відповідний рівень розгляду функцій. Абстрактному рівню відповідає абстрактний (нетипізований) клас функцій з D у D. Булевому рівню відповідають такі класи, як часткові характеристичні функції – часткові відображення на D, що приймають лише значення *true* (перед-булевий рівень), предикати – часткові відображення з D у *Bool* (булевий рівень), і часткові скінченнозначні відображення з D у $\{c_1, \ldots, c_k\}$ (пост-булевий рівень). Природно, що найбільш багаті класи функцій можна виділити на номінативному рівні. Фактично такі класи визначають класи функцій над різними структурами даних. У цьому випадку системи функцій конкретизуються як типізовані системи. Серед функцій номінативного рівня основними будуть різні типізовані функції іменування, розіменування, накладення, видалення компонент тощо.

Рівні конкретизації композицій. Як і в попередньому випадку, доцільно виділити три рівні композицій. Обмежимося тут розглядом композицій як однозначних відображень. У цьому випадку на абстрактному рівні можна виділити лише одну нетривіальну композицію – послідовне виконання • (яку звичайно називають функціональною композицією). Однак цього вже досить, щоб почати розвиток теорії категорій, для якої множення функцій є основною досліджуваною операцією. На булевому рівні можна додатково визначити такі композиції, як умовні оператори та цикли різних видів. Тому до булевого рівня можна віднести системи структурного програмування та системи алгоритмічних алгебр. Найбільш багатий композиціями номінативний рівень. Тут визначають наступні основні засоби конструювання програм: різні суперпозиції, розіменування, присвоювання тощо. Зазначимо, що введене поняття композиційної системи дозволяє дати опис повних класів композицій на різних рівнях абстракції, тобто описати всі композиції відповідного рівня.

Рівні конкретизації дескрипцій. Різноманіття типів даних, функцій та композицій індукує різні типізовані дескриптивні системи. Поряд із стандартними дескрипціями, визначеними раніше, використовуються спеціальні класи дескрипцій, зокрема, якщо композиції є скінченно-арними відображеннями, то імена їх аргументів є натуральними числами та їх впорядкованість можна використовувати для подання дескрипцій як послідовностей символів (слів у деякому алфавіті). Звичайно для визначення таких лінійно впорядкованих дескрипцій використовують породжуючі граматики. Ці граматики будуть детальніше розглянуті у наступному розділі.

Інтеграція композиційних і дескриптивних систем номінативного рівня за допомогою відображень денотації дозволяє дати цілісний опис різноманітних мов програмування і баз даних. Такі композиційно-дескриптивні системи номінативного рівня будемо називати композиційно-номінативними системами. Ці системи дозволяють також адекватно описувати семантику різних логічних мов і мов специфікацій прикладних областей.

Висновки

У розділі розглянуто підходи до формалізації програмних понять. Сформульовано принцип про важливість теоретико-функціональної формалізації поняття програми, при якій програми уточнюються як функції, що розглядаються на різних рівнях абстракції. Введено різні класи функцій. Розглянуто приклад формалізації програми. Введено поняття програмної системи та розглянуто системи різного рівня абстракції. Визначені програмні системи абстрактного, булевого і номінативного рівнів. Програмні системи номінативного рівня і різні їх конкретизації, які називаються композиційно-номінативними системами, є основним формалізмом опису програм. Будучи порівняно простими в побудові, ці системи, проте, мають велику потужність і дозволяють адекватно уточнити і досліджувати основні властивості програм мов програмування.

Додаткову інформацію про програмні системи можна знайти у [2, 4, 8, 15].

Контрольні питання

1. Розкрийте зміст принципу теоретико-функціональної формалізації поняття програми.
2. Визначте різні класи функцій.
3. Визначте програмні системи різного рівня абстракції.
4. Дайте визначення класу номінативних даних.

4. Синтактика: формальні мови та граматики

4.1. Розвиток понять формальної мови та породжуючої граматики

Мови програмування є штучними мовами, спеціально створеними для запису програм. На відміну від природних мов, які є багатоаспектними, неоднозначними, відкритими, відносно швидко змінюються, штучні мови значно бідніші, від них вимагають фіксованості смислу та однозначності.

Синтаксичний аспект є одним з основних аспектів програм. За визначенням, він пов'язаний з формами подання програм в абстракції від інших їх аспектів.

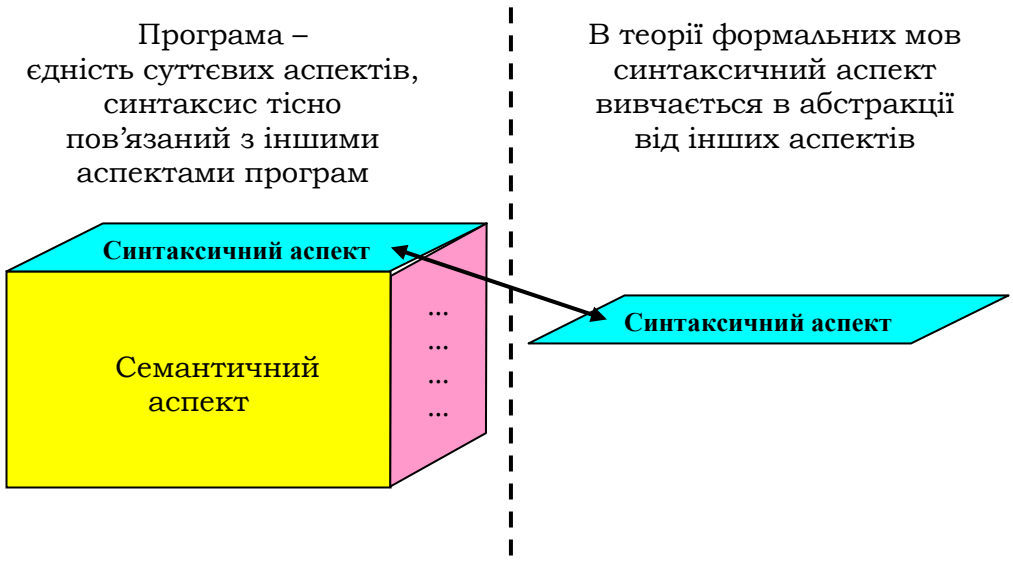


Рисунок 4.1. Абстрагування синтаксичного аспекту від інших аспектів програм

Момент абстракції синтаксичного аспекту від інших аспектів програм є дуже важливим. Це означає, що на першому етапі розвиток синтактики – науки про синтаксичний аспект – визначається головним чином лише відношенням знаків між собою. (див. рис. 4.1). Разом із тим не слід абсолютизувати цей момент абстрагування від інших аспектів, бо на другому етапі синтаксис програм має бути узгоджений з іншими їх аспектами.

Наведені твердження сформулюємо як принцип абстрагування та єдності синтаксичного аспекту з іншими аспектами програм.

Уточнення синтаксичного аспекту штучних мов здійснюється на основі поняття формальної мови. Як уже говорилося, це абстрактне поняття, що відображає перші (синтаксичні) характеристики мови. Тому термін «формальний» тлумачиться не тільки як «точно заданий», але і як «абстрактний».

Хоча синтаксичний аспект пов'язаний з багатьма аспектами програм, найтіснішій зв'язок є з семантичним аспектом. Зупинимось на цьому зв'язку детальніше. Синтаксичний та семантичний аспекти є подальшою конкретизацією (проекцією) категорій форми та змісту. Тому, вивчаючи синтаксис (теорію формальних мов), ми все ж не повинні забувати, що він є похідним від семантичного аспекту, і саме ця обставина і визначає методи експлікації (уточнення) та напрями дослідження синтаксису. Щоб обґрунтувати вторинність синтаксичного аспекту, треба розглянути зовнішні аспекти програм, і в першу чергу аспект адекватності програми проблемі. Зрозуміло, що в проблемі нас цікавить не стільки її форма, як її зміст. Це фактично означає, що семантика буде провідним аспектом, а синтаксис – похідним від семантики.

Щоб зафіксувати ці положення у явній формі, сформулюємо їх у вигляді наступного принципу синтактики.

Принцип відокремлення, підпорядкування та єдності синтаксичного та семантичного аспектів: синтаксичний аспект програм є похідним від семантичного, він спочатку вивчається в абстракції від семантичного аспекту, а потім – у єдності з ним.

Наведений принцип фактично вказує лише на відношення синтаксичного аспекту до семантичного, але не дає ніякої характеристики синтаксичному аспекту. Подальший крок конкретизації полягає в тому, що будемо уточнювати синтаксичний аспект за допомогою поняття формальної мови. Елементи, які задаються формальною мовою, будемо називати реченнями. Відзначимо, що тут можна було б вжити замість терміна «речення» терміни «слово», «текст», або інші терміни, що характеризують основні структурні елементи мови; цей вибір залежить від цільової направленості дослідження.

Проаналізуємо тепер, на якому рівні абстракції розглядаються речення. Згідно принципу розвитку від абстрактного до конкретного будемо спочатку речення тлумачити абстрактно як цілісності. Але цілісності якого типу – «білої» чи «чорної» скриньки?

Неважко зрозуміти, що елементи формальних мов – речення – слід розглядати як «білі скриньки», тобто їх можна розпізнавати та відрізняти одне від одного.

Обґрунтування вибору такого тлумачення надає принцип відокремлення, підпорядкованості та єдності, який стверджує вторинність синтаксису від семантики, зокрема і те, що синтаксис речення повинен допомогти у встановленні його семантики. А це можливо лише тоді, коли синтаксис є видимим, зрозумілим, прозорим («білим»). Звідси випливає, що мова є множиною (а не абстрактною сукупністю) певних елементів (речень, слів). Саме елементи множини тлумачаться як «білі скриньки». Отже, мова розглядається на конкретно-структурованому рівні, який позначимо *L.S* (*Language is a Set*). Тлумачення мови як множини речень є сильною абстракцією, бо відкидаються зв'язки між реченнями, а самі речення розглядаються як незалежні одне від одного.

Принцип теоретико-множинного тлумачення формальної мови: на найвищому рівні абстракції синтаксичний аспект програм подається у вигляді формальної мови, яка тлумачиться як множини речень.

Відзначимо, що цей принцип намічає певну відмінність між семантикою, яка тлумачиться у теоретико-функціональному сенсі, та синтаксисом, для якого більш адекватною є теоретико-множинна формалізація.

Отже, перша над-абстрактна модель мови – це деяка множина $L=\{s_i \mid i \in I\}$. На цьому рівні абстракції нічого крім теоретико-множинних понять немає, тому немає і власне теорії мов (а є теорія множин). Треба переходити на інший рівень абстракції, який має хоч би деякі специфічні характеристики мов. Цей перехід, як відомо з діалектичної логіки, є переходом від цілого до частин. Тут головне – виділити структуру, що пов'язує ціле з частинами. Щоб це зробити, треба конкретизувати структуру речень.

Оскільки ми абстрагувались від семантики (зокрема від функцій та композицій), то приходимо до висновку, що частини речення не мають ніякої специфіки і тому вони не типізовані. Це означає, що вони належать одному класу і розглядаються як рівноправні. Цей клас називають *алфавітом*, а його елементи – *літерами* (*символами*). Тут спостерігається деяке розходження у вживаній термінології, бо у природних мовах речення складаються із слів, а вже слова – із літер. Але не забуваємо, що відбулося абстрагування від семантики, і що ми розглядаємо формальні мови, тому не слід навантажувати вживані терміни додатковим семантичним смислом.

Яка ж структура пов'язує літери в речення? Оскільки ніякої додаткової інформації не маємо, то згідно принципу розвитку від абстрактного до конкретного, обираємо найбільш просту, абстрактну структуру. Це є структура послідовності.

Абстрагуючись від лінгвістичних конотацій та асоціацій будемо для таких послідовностей вживати терміни «ланцюжок», «слово» або «речення». Відзначимо, що

в комп'ютерній термінології часто вживається термін «слово» (*word*), в лінгвістичній – «речення» (*sentence*).

Структура послідовності використовується і в природних мовах, наприклад, друкування тексту на клавіатурі породжує саме послідовність літер. Крім того, усні розмови фактично визначають послідовності фонем.

Принцип тлумачення речень мови як послідовностей: на наступному рівні абстракції речення розглядаються як послідовності літер певного алфавіту.

Відзначимо, що тут абстрагуємось від порядку побудови ланцюжків. Наприклад, можна було б розрізняти ланцюжки $(ab)c$ та $a(bc)$. Але ми абстрагуємося від генетичного аспекту (аспекту породження). Це подібно до того, як ми сприймаємо, наприклад, паркан, або ряд крісел в театрі. Для нас це послідовність секцій, і не важливо, в якому порядку вони зводилися. Цей рівень розгляду будемо позначати як *L.S.S* (*Language is a Set of Sequences*).

Наведені міркування та постулати дозволяють ввести наступну математичну модель формальної мови.

Друга, абстрактна модель формальної мови – це деяка підмножина $L \subseteq A^*$, де A^* – скінченні послідовності літер з алфавіту A. Це фактично є певним абстрактним поняттям формальної мови.

Зв'язок моделей задається операцією абстрагування abs_L, яка є операцією переведення множини в множину з інкапсуляцією структури послідовності речень.

Що можна досліджувати на такому рівні абстракції? В першу чергу, це теоретико-множинні операції та операції над послідовностями. Крім того, не слід забувати про операції, які зв'язують послідовності з множинами. Ці операції будуть описані пізніше у математичній частині розділу. Разом із тим такі операції занадто бідні і не розкривають особливостей синтаксичного аспекту. Викликано це тим, що ми абстрагувалися від способу, яким задається мова. І якщо для перших двох моделей таке абстрагування від генетичного та дескриптивного аспектів було корисним, бо дозволяє вивчати операції над мовами, то тепер потрібно ввести механізми породження мов (дескрипції мов).

З'являється третя модель формальної мови. Ця модель успадковує властивості першої моделі з додаванням нової характеристики – механізму породження мови. Такий механізм можна називати породжуючою дескриптивною системою мови. Дуальний до породження механізм – сприйняття мов. Такий розподіл є традиційним для лінгвістики, де виділяють того, хто говорить (породження), і того, хто слухає (сприйняття). Такі ж механізми є і для програм: програмісти породжують програми, виконавці (зокрема, комп'ютери) – їх сприймають.

Отже, з'являється новий елемент поняття формальної мови – мовна дескриптивна система. Знову-таки, для визначення цієї системи будемо рухатись від абстрактного до конкретного.

Вважаючи, що породження є більш вагомим (ведучим) аспектом порівняно з сприйняттям, спочатку зосередимось на породженні.

Інтуїтивне розуміння породження полягає в тому, що це є процес, який веде від певних початкових елементів до заключних елементів (остаточно породжених елементів). Основні питання для уточнення цієї моделі полягають у наступному:

1. Елементи якої множини використовуються в процесі породження?
2. Які елементи є початковими?
3. Які елементи є заключними?
4. Як саме задаються операції породження одних елементів з інших?

Будемо вважати, що в процесі породження відбувається створення (перетворення) елементів множини *St*, початкові елементи задаються підмножиною *I*, а заключні – підмножиною F з *St*. Залишається питання про способи породження нових елементів. Найпростішим (найабстрактнішим) є випадок, коли породження задається бінарним відношенням перетворень (переходів, транзицій) $tr \subseteq St \times St$. Таким чином, отримали першу над-абстрактну модель породжуючої системи *TS*, яка задається параметрами (*St*, *I*, *F*, *tr*). Така система породжує множину елементів $L(TS)$

наступним чином: береться елемент a з I, далі береться елемент b, такий що (a, b) належить tr, потім цей процес повторюється, аж поки не буде отриманий елемент c з F. Цей елемент і входить до $L(TS)$. Тут фактично описаний процес побудови рефлексивного транзитивного замикання tr^* відношення tr і вибору тих пар, перший елемент яких належить I, а другий – F. Це дозволяє записати формулу $L(TS) = \{ c \mid (a,c) \in tr^*, a \in I, c \in F\}$.

Наведену модель у літературі часто називають *транзиційною системою*. Зафіксуємо цей розгляд за допомогою наступного принципу.

Принцип розгляду механізму породження мови як транзиційної системи: над-абстрактну модель породжуючої системи тлумачимо як транзиційну систему $TS = (St, I, F, tr)$ з визначеними раніше параметрами та яка визначає множину породжуваних елементів мови наступною формулою: $L(TS) = \{ c \mid (a,c) \in tr^*, a \in I, c \in F\}$.

Зауважимо, що транзиційні системи можна використовувати і як моделі сприйняття. В цьому випадку можна застосувати формулу: $L(TS) = \{ a \mid (a,c) \in tr^*, a \in I, c \in F\}$.

Як бачимо, різниця в породженні та сприйнятті полягає в тому, що в першому випадку елементи мови є *результатами* (вихідними даними) процесу породження, а в другому – *аргументами* (вхідними даними) процесу сприйняття. Крім того, можна говорити про те, що процес породження веде від позначення класу речень до окремого (індивідуального) речення, а процес сприйняття – навпаки, веде від індивідуального речення до позначення класу речень.

Транзиційні системи є моделями абстрактних динамічних систем, але суто мовні характеристики в них відсутні. Дійсно, як видно з наведеного визначення, ця над-абстрактна модель (транзиційна система) має той же рівень тлумачення елементів мови як і над-абстрактна модель формальної мови. Треба тепер конкретизувати цю модель, щоб перейти до тлумачення мови як множини ланцюжків, тобто перейти на рівень абстрактної моделі мови. Будемо вважати, що система має породити мову $L \subseteq A^*$.

Розумно припустити, щоб множина St також конкретизувалась як множина послідовностей над певним алфавітом B. Таке тлумачення пов'язане з тим, що на цьому рівні абстракції ми і не маємо інших структур речень. Зрозуміло, що $A \subseteq B$. Але залишається питання, чи можна вважати, що $A=B$. Недовгі роздуми на цю тему приводять до висновку, що брати випадок $A=B$ недоцільно, хоча в літературі такі системи досліджуються під назвою систем Туе. Справа в тому, що породження вимагає певної допоміжної інформації, тому краще взяти B, що складається з двох частин: алфавіту A, та деякого допоміжного алфавіту N. Елементи алфавіту N дійсно використовуються як допоміжні, тому вони не входять до ланцюжків породжуваної мови. За це їх називають нетермінальними символами (літерами), а елементи A входять у заключні ланцюжки, тому їх називають термінальними символами. Таким чином, проведена наступна конкретизація: $St=(A \cup N)^*$, $I \subseteq (A \cup N)^*$, $F \subseteq A^*$. Ця конкретизація не є повною, тому що відношення tr залишається абстрактним, вона не враховує нову структуру St.

Щоб наступна конкретизація не була зайвою конкретизацією, треба «розумно» скористатися тим, що St є множиною ланцюжків. Тому нова конкретизація tr заснована на тому, що перетворення задаються не «глобально» на всьому ланцюжку, а «локально», лише на деякій частині ланцюжка. Інакше кажучи, від трансформації об'єкта як цілісності переходимо до трансформації окремих частин. Наприклад, змії замінюють свою «одежу» – шкіру – повністю, люди – частинами (можна замінити окремо пальто, або сорочку і т.ін.). Аналогічно, під час ремонту складної техніки можна замінити агрегат повністю, наприклад, замість пошкодженого двигуна поставити новий, або замінити лише пошкоджену частину двигуна на справну.

При такому тлумаченні відношення переходів задається множиною локальних правил P, а операція «глобалізації», яка одночасно є операцією абстракції abs_G, дозволяє перетворити P в tr. Вкажемо наступну формулу: $abs_G(P)=\{ \lambda\alpha\rho \to \lambda\beta\rho \mid (\alpha,\beta) \in P, \lambda,\rho \in (A \cup N)^*\}$. Деталі визначення abs_G буде наведено пізніше. У якості початкових

ланцюжків береться лише один певний символ S з N. Такий початковий символ називають аксіомою (геном, «словоматкою»). Цей символ походить від терміну «Sentence». Термінальний алфавіт у подальшому будемо позначати T (від терміну «Terminal»).

Таким чином, отримали другу абстрактну модель породжуючої системи, яка задається параметрами $G=(N, T, P, S)$ і яка успадковує над-абстрактну модель $T = (St, I, F, tr)$ наступним чином: $St=(T\cup N)^*$, $I = \{S\}$, $F=T^*$, $tr=abs_G(P)$. Отриману модель називають *породжуючою граматикою*. Це відповідає традиційному вживанню терміну «граматика», який означає сукупність правил побудови правильних речень мови. Зафіксуємо цей розгляд у вигляді відповідного принципу.

Принцип подання породжуючих систем породжуючими граматиками: Абстрактну модель породжуючої системи тлумачимо як породжуючу граматику $G=(N, T, P, S)$ з наведеними вище параметрами, що є конкретизацією транзиційної системи $TS = (St, I, F, tr)$ та визначає формальну мову $L(G)$ вказаним вище чином.

Чотири побудованих моделі та їх характеристики подано на рис. 4.2.

Малюнок подає взаємозв'язок моделей формальних мов. Він демонструє, що визначення формальної мови має щонайменше два виміри: перший рівень (вертикальний) задає рівень абстракції складових, другий рівень вводить нову дескриптивну складову.

Розрізнення рівнів абстракції визначень формальної мови та породжуючих граматик дозволяє досліджувати їх властивості на більш адекватному (більш абстрактному) рівні, де такі дослідження будуть простішими. Далі певні властивості переносяться (успадковуються) на більш конкретні рівні. Наприклад, теоретико-множинні властивості верхнього рівня (порожність мови, скінченність і таке інше) переносяться на більш конкретні рівні.

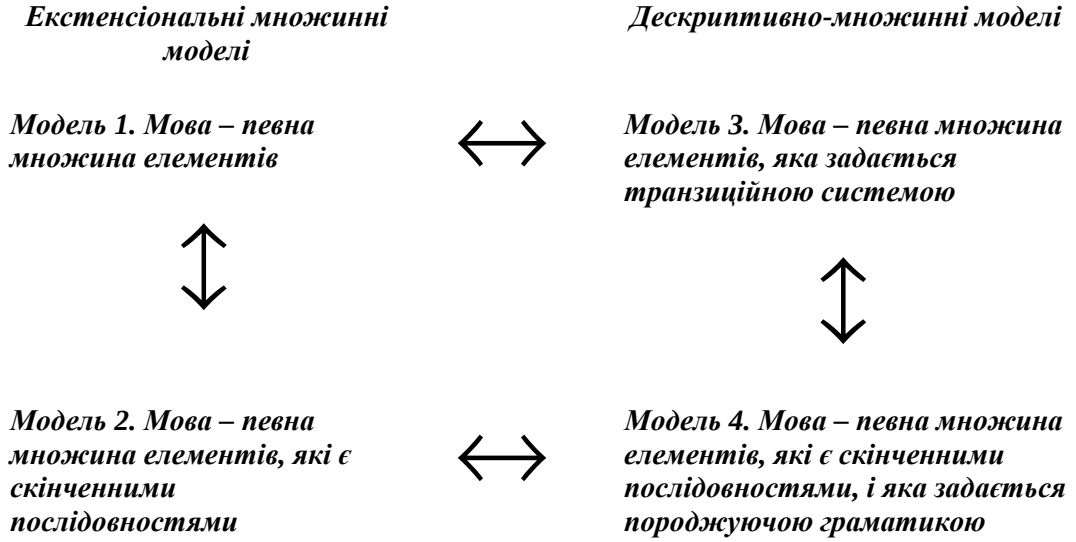


Рисунок 4.2. Моделі мов та граматик різного рівня абстракції

Зауваження 4.1. Як вже зазначалося, в літературі часто вживаються різні терміни для позначення одних і тих же понять. Наприклад, елемент формальної мови називають «реченням», «словом», «ланцюжком». Такий різнобій у термінології викликаний щонайменше двома обставинами:

a) дослідження формальних мов ведуться представниками різних наукових шкіл, зокрема лінгвістики та інформатики. Термінологія таких шкіл відрізняється одна від одної;
b) самі формальні мови досліджуються на різних рівнях абстракції, і той термін, що є доречним на одному рівні абстракції, часто не є відповідним

(адекватним) іншому рівню абстракції. Наприклад, термін «слово» досить адекватно відповідає рівню формальних мов, коли їх елементи задаються як послідовності символів, разом з тим цей термін не зовсім адекватний поданню елементів мови за допомогою граматик, бо текст великої програми, що складається з багатьох синтаксичних категорій, неадекватно тлумачити як одне слово.

Ми і в тексті цього посібника не будемо занадто вимогливими і дозволимо собі вживати різні терміни для одних і тих же понять.

Зробимо також декілька методологічних зауважень.

1. **Про опосередкування**. Вивчення мови відбувається не безпосередньо (як множини ланцюжків), а опосередковується механізмом дескриптивних систем. Тобто вивчаються не стільки мови, скільки граматики. У книжках цей факт явно не акцентується. Це подібно до того, як вивчення натуральних чисел опосередковується вивченням операцій та відношень, заданих на натуральних числах. Так само і вивчення програм фактично опосередковується вивченням їх композицій.
2. **Про визначення породжуючої граматики.** В існуючій літературі формальна граматика визначається як четвірка $G=(N, T, P, S)$ з визначеними раніше параметрами. На наш погляд, таке визначення не є вдалим, оскільки тут задаються лише індивідуальні параметри (екстенсіональні аспекти) і зовсім не розкриваються механізми породження мов (інтенсіональні аспекти), які визнаються значно пізніше. Те саме часто можна зустріти в деяких книжках з теорії алгоритмів, дискретної математики, логіки. Визначення граматики повинно починатися з властивостей класу породжуючих граматик, і лише потім потрібно задавати конкретні (індивідуальні) параметри.
3. **Про відношення вивідності.** Воно задається через єдність загального та одиничного. Це подібно, наприклад, до інструкції з користування телевізором. Механізм опису апелює не до конкретного телевізора в вашій кімнаті, а до будь-якого телевізора відповідної моделі. Тобто інструкція спирається на загальні параметри, які потім інтерпретуються для кожного конкретного телевізора. Це досить тонке питання, і його слід розуміти.

Таким чином, розглянуто моделі формальних мов різного рівня абстракції. Ці моделі можна назвати інтенсіональними моделями, бо вони характеризують властивості визначення формальних мов. Для подання конкретних мов використовують екстенсіональні моделі. В наступних розділах будемо спиратися на екстенсіональні визначення мов. Зазначимо, що традиційно обмежуються лише екстенсіональними визначеннями, не розкриваючи інтенсіональних.

Сформулюємо основні висновки нашого аналізу.

1. Поняття формальної породжуючої граматики має два аспекти: інтенсіональний та екстенсіональний.
2. Екстенсіональний аспект більш простіший і задається як клас об'єктів, кожен з яких є четвіркою виду $G=(N, T, P, S)$, де N і T – скінчені алфавіти, $N \cap T=\varnothing$, $P \subset (N \bigcup T)^* N (N \bigcup T)^* \times (N \bigcup T)^*$, P скінчена і $S \in N$.
3. Інтенсіонал поняття породжуючої граматики полягає в наступному: кожна граматика призначена для породження формальної мови, породження відбувається за допомогою відношення безпосереднього виводу, а мова – це множина термінальних ланцюжків, що виводяться з аксіоми за скінченну кількість кроків.
4. Поняття формальної граматики є єдністю обох аспектів, тут важливо підкреслити, що інтенсіональний аспект є тим загальним, що може використовуватись у конкретних (індивідуальних, одиничних) граматиках, бо задається фактично схема визначень, яка інтерпретується на конкретних значеннях параметрів.

Зроблений методологічний та інтенсіональний аналіз поняття формальної мови дозволяє тепер перейти до введення екстенсіональних визначень формальних мов та граматик.

4.2. Визначення основних понять формальних мов

Визначення 4.1. *Алфавітом* називають скінченну непорожню множину символів (літер). Позначатимемо алфавіт знаком Σ.

Приклад 4.1. Найчастіше використовуються наступні алфавіти:

1. $\Sigma = \{0,1\}$ – бінарний чи двійковий алфавіт;
2. $\Sigma = \{a, b \ldots z\}$ – множина літер англійського алфавіту.

Визначення 4.2. *Ланцюжком*, чи інколи словом, реченням, рядком, в алфавіті Σ називають скінченну послідовність символів з Σ.

Приклад 4.2 Послідовність *01101* – це ланцюжок у бінарному алфавіті $\Sigma = \{0,1\}$. Ланцюжок *111* також є ланцюжком у цьому алфавіті.

Визначення 4.3. *Порожній ланцюжок* – це ланцюжок, який не містить жодного символу. Цей ланцюжок позначається ε. Його можна розглядати як ланцюжок у довільному алфавіті.

Визначення 4.4. *Довжина слова* (послідовності) w позначається $|w|$; якщо $\Sigma' \subseteq \Sigma$, то довжина послідовності, утвореної з w видаленням тих символів, що не належать Σ', позначається $|w|_{\Sigma'}$; якщо $a \in \Sigma$, то $|w|_a$ означає $|w|_{\{a\}}$ і задає кількість входжень символу a в w.

Приклад 4.3. Для ланцюжка *abcbacaaccccb* маємо:

$|abcbacaaccccb| = 12$, $|abcbacaaccccb|_{\{a,\,c\}} = 9$, $|abcbacaaccccb|_c = 5$.

Визначення 4.5. Якщо w та u – ланцюжки в алфавіті Σ, то ланцюжок wu (результат дописування слова u в кінець слова w) називається *конкатенацією* (катенацією, зчепленням) слів w та u. Іноді конкатенацію слів позначають $w \cdot u$.

Визначення 4.6. Якщо w – ланцюжок в алфавіті Σ, то ланцюжок $\underbrace{w \cdot w \cdot \ldots \cdot w}_{n \ раз}$ називається *n-ю степенню* w і позначається w^n.

За визначенням, $w^0 = \varepsilon$.

Приклад 4.4. $a^3 = aaa$, $a^2b^3c = aabbbc$,

$(abcbacaaccccb)^2 = abcbacaaccccbabcbacaaccccb$.

Визначення 4.7. Множина всіх ланцюжків в алфавіті Σ позначається Σ* і називається *вільною напівгрупою*, породженою Σ. Множина всіх непорожніх ланцюжків позначається Σ^+.

Приклад 4.5. Якщо $\Sigma = \{a\}$, то $\Sigma^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \ldots\}$, $\Sigma^+ = \{a, aa, aaa, \ldots\}$.

Термін «вільна напівгрупа» веде своє походження з алгебри. Напівгрупою називається множина з асоціативною бінарною операцією. Якщо така множина має одиничний елемент, то її називають моноїдом. Напівгрупа вільна, якщо ніяких інших співвідношень (крім асоціативності) немає. В теорії формальних мов часто вважають, що напівгрупа має одиничний елемент. Множину Σ* можна розглядати як вільну напівгрупу з одиницею. Конкатенація є асоціативною операцією, а порожній ланцюжок ε є одиницею, тому що для довільного ланцюжка w маємо $w \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot w = w$. Такий розгляд множини ланцюжків Σ* дозволяє перейти до більш багатої структури напівгрупи та використати алгебраїчні властивості для дослідження цієї множини. Іншою обставиною є те, що подаючи множину послідовностей у вигляді напігрупи, ми ототожнюємо символ з послідовністю довжини *1*, що складається з цього символу. Тому замість двохосновної моделі (алфавіт та множина послідовностей), яка розрізняє символи та послідовності, розглядається лише одна основа – множина ланцюжків. Це спрощує дослідження.

Визначення 4.8. Ланцюжок t є *підланцюжком* ланцюжка w, якщо $w = utv$ для деяких ланцюжків u та v.

Нарешті, введемо поняття формальної мови.

Визначення 4.9. Якщо $L \subseteq \Sigma^*$, то L називається *формальною мовою* (або просто мовою) над алфавітом Σ (в алфавіті Σ).

Приклад 4.6. Множина ланцюжків $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} = \{\varepsilon, abc, a^2b^2c^2, a^3b^3c^3, \ldots\}$ є формальною мовою над алфавітом $\{a, b, c\}$.

Зауважимо, якщо L є мовою над Σ, то можна стверджувати, що L – це мова над будь-яким алфавітом Σ', що містить Σ. Інакше кажучи, є певна консервативність поняття мови до розширення алфавіту. Крім того, є монотонність множини мов відносно розширення алфавіту, бо це веде до збільшення множини мов.

4.3. Операції над формальними мовами

Операції над формальними мовами розподіляються на два класи. Перший клас операцій відповідає над-абстрактній моделі мов, у якій вони мають інтенсіонал множини. Тому всі теоретико-множинні операції можна застосовувати для мов. У першу чергу, це операції *об'єднання* $\cup$, *перетину* $\cap$ та *різниці* $\setminus$. Вважаємо, що мови – аргументи цих операцій – задані над одним і тим самим алфавітом. Якщо це не так, то будуємо новий алфавіт, який є об'єднанням алфавітів мов-аргументів. Тоді всі мови-аргументи будуть мовами над одним алфавітом. Якщо мова L є мовою в алфавіті Σ, то мова $\Sigma^* \setminus L$ називається *доповненням* мови L відносно алфавіту Σ. Коли з контексту ясно, про який алфавіт йде мова, говорять просто, що мова $\Sigma^* \setminus L$ є доповненням мови L і позначається $\overline{L}$.

Приклад 4.7. Нехай $L1=\{a^n b^n c^m \mid n,m \geq 0\}$, $L2=\{a^n b^m c^m \mid n,m \geq 0\}$. Тоді

$$L1 \cap L2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\},\ L1 \setminus L2 = \{a^n b^n c^n \mid m \neq n,\ n,m \geq 0\}.$$

Другий клас операцій над формальними мовами відповідає абстрактній моделі мов, коли їх елементи тлумачаться як послідовності символів. Серед цих операцій, у першу чергу, відзначимо операцію добутку (конкатенації) мов, яка є похідною від операції конкатенації ланцюжків. Для позначення цієї операції використовуємо той самий символ операції конкатенації.

Визначення 4.10. Нехай $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$. Тоді $L_1 \cdot L_2 \overset{def}{=} \{xy \mid x \in L_1, y \in L_2\}$. Мова $L_1 \cdot L_2$ називається конкатенацією мов L_1 та L_2.

Приклад 4.8. Якщо $L_1 = \{a, abac\}$ та $L_2 = \{bcc, c\}$, то $L_1 \cdot L_2 = \{ac, abacb, abacbac, abcc\}$.

Найважливішою характеристикою операції добутку мов є її асоціативність. Одиницею цієї операції є мова, що складається з порожнього ланцюжка, тобто мова $\{\varepsilon\}$. Похідною від добутку є операція піднесення до степені. Вважаємо, що $L^0 \overset{def}{=} \{\varepsilon\}$, $L^n \overset{def}{=} \underbrace{L \cdot \ldots \cdot L}_{n \text{ раз}}$.

Маючи степінь, дамо індуктивне визначення *ітерації*, яку ще називають замиканням Кліні, або «зірочкою Кліні».

Визначення 4.11. Ітерацією мови L (позначається L^*) називається мова $\bigcup_{n \in Nat} L^n$.

Приклад 4.9. $\{ab\}^* = \{\varepsilon, ab, abab, ababab, \ldots\}$.

Для мови, що складається з одного символу, фігурні дужки часто опускають і пишуть, наприклад, a^* заміть $\{a\}^*$.

Визначення 4.12. *Оберненням* або дзеркальним образом ланцюжка w (позначається w^R) називається ланцюжок, складений із символів w, взятих в оберненому порядку.

Приклад 4.10. Якщо $w = abc$, то $w^R = cba$.

Визначення 4.13. Нехай $L \subseteq \Sigma^*$. Тоді $L^R \overset{def}{=} \{w^R \mid w \in L\}$.

Крім вищенаведених операцій можна ввести й інші операції цього рівня, наприклад, ділення мов, проекції на під алфавіт тощо. Також можна ввести операції

індуктивного та рекурсивного визначення мов. Такі операції будуть розглянуті пізніше.

Хоч і ми визначили чимало операцій над формальними мовами, їх недостатньо, щоб задавати важливі типи мов. Тому потрібно переходити до методів дескриптивного подання мов, тобто до граматик.

За способом подання правильних ланцюжків формальні граматики поділяються на породжуючі і розпізнаючі (граматики породження та сприйняття). До породжуючих граматик відносяться граматики, які дозволяють побудувати будь-який правильний ланцюжок з зазначенням його структури і не дозволяють побудувати жодного неправильного ланцюжка. Розпізнаюча граматика – це граматика, яка дозволяє визначити, чи є довільно обраний ланцюжок правильним і, якщо він є правильним, визначити його структуру.

Формальні граматики широко застосовуються в лінгвістиці, інформатиці, логіці, та програмуванні у зв'язку з вивченням природних та штучних мов.

Почнемо з розгляду породжуючих граматик.

4.4. Породжуючі граматики

Як зазначалося на початку розділу, породжуючі граматики можуть розглядатися як конкретизації транзиційних систем або дедуктивних систем. Для таких систем головним є відношення переходів. У граматиках відношення переходу (виведення) задається за допомогою правил граматики (продукцій), які мають вигляд $\alpha \to \beta$, де α та β – ланцюжки в певному алфавіті Σ. Таке правило дозволяє перетворити ланцюжок γ_1 у ланцюжок γ_2 ($\gamma_1, \gamma_2 \in \Sigma^*$) тоді і тільки тоді, коли $\gamma_1 = \delta_1\alpha\delta_2$, $\gamma_2 = \delta_1\beta\delta_2$ для деяких ланцюжків δ_1 і δ_2, що належать Σ^*. Змістовно це правило дозволяє замінити підланцюжок γ_1, який співпадає з лівою частиною правила, на праву його частину, отримуючи ланцюжок γ_2.

Нехай P – множина продукцій. Тоді кожна продукція з P може розглядатися як правило виводу на Σ^*. Сама послідовність правил, використаних в процесі породження деякого ланцюжка, є його виводом. Визначена таким способом граматика представляє собою формальну систему. Відомими прикладами формальних систем слугують логічні числення (числення висловлювань, числення предикатів), які детально вивчаються у відповідних розділах математичної логіки. Низку формальних систем для програм буде наведено в цьому посібнику.

Наведені міркування приводять до наступного визначення.

Визначення 4.14. *Породжуючою граматикою* (граматикою типу *0*) називається четвірка $G=(N, T, P, S)$, де N і T – скінчені алфавіти, $N \cap T = \varnothing$, $P \subset (N \cup T)^* N (N \cup T)^* \times (N \cup T)^*$, P скінчена і $S \in N$. Тут

- N – *нетермінальний алфавіт* (допоміжний алфавіт), його елементи називаються нетермінальними символами, нетерміналами, змінними;
- T – *термінальний алфавіт* (основний алфавіт), його елементи називаються термінальними символами або терміналами;
- P – *множина продукцій*. Продукцію $(\alpha, \beta) \in P$ інколи називають правилом підстановки, правилом виводу, або просто правилом і записують у вигляді $\alpha \to \beta$;
- S – *початковий символ* (аксіома).

Зробимо декілька зауважень до наведеного визначення. По-перше, слід пам'ятати про те, що вказана четвірка є просто екстенсіональним (одиничним) об'єктом поняття породжуючої граматики і без посилань на інтенсіональні властивості граматик вона не є самодостатньою. Оскільки для нас важливою є єдність екстенсіональних та інтенсіональних аспектів, то ми вважаємо, що і у визначенні граматики така єдність повинна бути відзначена. По-друге, умова, що ліва частина правил належить множині $(N \cup T)^* N (N \cup T)^*$ означає, що в лівій частині обов'язково повинен бути нетермінал. Це обмеження фактично індукується

інтенсіональною ознакою породження, бо воно не повинно вестися із завершеного (термінального) ланцюжка. Разом з тим у лівій частині можуть фігурувати і термінальні символи, які можуть замінюватись на символи правої частини правила. Це дозволяє говорити, що визначення породжуючої граматики не достатньо підтримує розподіл символів на термінальні та нетермінальні. Як вже зазначалось, від такого часткового рішення можна відмовитись, розглядаючи системи Туе (де нема розподілу на термінальні та нетермінальні символи), або розглядаючи контекстні граматики (де дозволена заміна лише нетермінального символу, але в певному контексті). По-третє, множини T, N, P були визначені як скінченні. Проте, більшість результатів, що стосуються породжуючих граматик, може бути перенесена на нескінчені множини.

У прикладах нетермінальні символи зазвичай позначаємо великими літерами, термінальні – маленькими, для правил з однаковими лівими частинами $\alpha \to \beta_1, ..., \alpha \to \beta_n$ часто будемо використовувати скорочений запис $\alpha \to \beta_1 | ... | \beta_n$. Крім того, у прикладах інколи будемо задавати граматику не як відповідну четвірку, а просто списком правил, вважаючи, що алфавіт N складають всі великі літери, які зустрічаються в правилах, а алфавіт T – всі маленькі літери, що зустрічаються в правилах. При цьому ліва частина першого правила є початковий символ S.

Повторимо ще раз визначення відношення *безпосередньої вивідності*, яке задає граматика $G=(N, T, P, S)$.

Визначення 4.15. Нехай задано граматику $G=(N, T, P, S)$. Пишемо $\gamma_1 \Rightarrow_G \gamma_2$ ($\gamma_1, \gamma_2 \in (N \bigcup T)^*$), якщо $\gamma_1 = \delta_1 \alpha \delta_2$, $\gamma_2 = \delta_1 \beta \delta_2$ для деяких слів $\delta_1, \delta_2 \in (N \bigcup T)^*$, і $\alpha \to \beta \in P$.

Коли з контексту зрозуміло, про яку граматику йде мова, замість $\Rightarrow_G$ можна писати просто $\Rightarrow$.

Визначення 4.16. Рефлексивне транзитивне замикання відношення безпосередньої вивідності називається *відношенням вивідності* і позначається через $\Rightarrow^*_G$ (або $\overset{*}{\to}_G$).

Нагадуємо, що *рефлексивним транзитивним замиканням* бінарного відношення R на множині ST є найменше відношення R', яке містить R, і яке є рефлексивним та транзитивним, тобто

1) $sR's$ для всіх s з ST;
2) якщо s_1Rs_2 та $s_2R's_3$, то $s_1R's_3$.

Наведене визначення не вказує на спосіб побудови рефлексивного транзитивного замикання. Разом з тим з властивостей рефлексивного транзитивного замикання випливає, що ланцюжок γ_n виводиться з ланцюжка γ_0 ($\gamma_0 \Rightarrow^*_G \gamma_n$) тоді і тільки тоді, коли деяка послідовність (можливо порожня) замін лівих частин продукцій з P їхніми правими частинами переводить ланцюжок γ_0 в γ_n. Інакше кажучи, коли існує послідовність виду $\gamma_0 \Rightarrow_G \gamma_1 \Rightarrow_G ... \Rightarrow_G \gamma_n$ ($n \geq 0$).

Визначення 4.17. Послідовність ланцюжків $\gamma_0, \gamma_1, ... \gamma_n$, така, що $\gamma_{i-1} \Rightarrow_G \gamma_i$ для $1 \leq i \leq n$, називається *виводом* (*виведенням*) γ_n з γ_0 в G. Число n називається довжиною (кількістю кроків) цього виведення.

Зауважимо, що для довільного ланцюжка γ має місце $\gamma \Rightarrow^*_G \gamma$ (адже можливе виведення довжини 0). Слід також сказати, що вивід $\gamma_0, \gamma_1, ... \gamma_n$ не дає однозначного опису, які саме правила граматики були застосовані і до яких підланцюжків. Якщо така інформація є важливою, то можна застосовувати розмічений вивід, вказуючи входження лівої частини правила, що замінюється, та позначення правила, що було застосовано.

Визначення 4.18. Ланцюжки, що виводяться з певного нетерміналу A, називаються його *словоформами* (A-словоформами), або його *сентенційними формами*. Якщо вивід іде із аксіоми, то говоримо просто – словоформа, або сентенційна форма.

Приклад 4.11. Для граматики з правилами { $S \to aBSc$, $S \to \varepsilon$, $B \to \varepsilon$} та аксиомою S словоформами будуть ланцюжки $aBSc$, $aBaBaBSccc$, $aaaBccc$, та інші, які виводяться з S.

Центральним є визначення, яке задає мову, що породжується граматикою.

Визначення 4.19. *Мова, що породжується граматикою* G, – це множина ланцюжків $L(G)=\{w \mid S \Rightarrow^*_G w,\ w \in T^*\}$. Будемо також говорити, що граматика G породжує мову $L(G)$.

Говорячи просто, мова $L(G)$ є мовою, що породжується граматикою G, якщо вона складається із ланцюжків (слів) у термінальному алфавіті, які виводяться із аксіоми S.

Інтенсіональні аспекти цього визначення були обговорені раніше. Зауважимо, що в попередньому підрозділі для побудови моделей формальних мов використовувався підхід від загального (абстрактного) до конкретного (одиничного). Спочатку вводилось поняття мови як множини речень, а в кінці побудов вводилося поняття породжуючої граматики. Це був інтенсіональний аналіз поняття граматики. В цьому підрозділі зроблено навпаки – ідуть екстенсіональні побудови: від екстенсіонального визначення породжуючої граматики через поняття виводу та його абстракції і завершується поняттям мови, що породжується граматикою. Тут фактично можна говорити про визначення знизу-вверх: від індивідуальних понять – до загальних.

Ці міркування говорять про те, що поняття породжуючої граматики треба розглядати як єдність екстенсіоналу, що визначається четвірками вигляду $G=(N, T, P, S)$ з указаними раніше параметрами, та інтенсіоналу, що дає загальне визначення відношення безпосередньої вивідності $\Rightarrow$, його рефлексивного транзитивного замикання $\Rightarrow^*$, та визначення мови, що породжується, за формулою $L(G)=\{w \mid S \Rightarrow^*_G w,\ w \in T^*\}$.

4.5. Приклад породжуючої граматики та її властивості

Розглянемо на прикладі основні визначення та методи доведення властивостей граматик та породжуваних мов.

Нехай задана граматика $G3=(\{S,B\}, \{a,b,c\}, P, S)$, де

$P=\{$

$P1$: $S \to aBSc$,

$P2$: $S \to \varepsilon$,

$P3$: $Ba \to aB$,

$P4$: $Bb \to bB$,

$P5$: $Bc \to bc$

$\}$

Тут $P1$, $P2$, $P3$, $P4$, $P5$ – мітки відповідних правил.

Щоб зрозуміти, яку мову породжує ця граматика, побудуємо декілька виводів. Будемо використовувати розмічені виводи. Маємо:

1. $\underline{S} \overset{P2}{\Rightarrow} \varepsilon$.
2. $\underline{S} \overset{P1}{\Rightarrow} aB\underline{S}c \overset{P2}{\Rightarrow} a\underline{Bc} \overset{P5}{\Rightarrow} abc$.
3. $\underline{S} \overset{P1}{\Rightarrow} aB\underline{S}c \overset{P1}{\Rightarrow} aBaB\underline{S}cc \overset{P2}{\Rightarrow} a\underline{Ba}Bcc \overset{P3}{\Rightarrow} aaB\underline{Bc}c \overset{P5}{\Rightarrow} aa\underline{Bb}cc \overset{P4}{\Rightarrow} aab\underline{Bc}c \overset{P5}{\Rightarrow} aabbcc$.
4. $\underline{S} \overset{P1}{\Rightarrow} aB\underline{S}c \overset{P1}{\Rightarrow} aBaB\underline{S}cc \overset{P1}{\Rightarrow} aBa\underline{Ba}BScc \overset{P3}{\Rightarrow} aB\underline{aB}BScc \overset{P3}{\Rightarrow} aa\underline{Ba}BBScc \overset{P3}{\Rightarrow}$
   $aaaBBB\underline{S}ccc \overset{P2}{\Rightarrow} aaaBB\underline{Bc}cc \overset{P5}{\Rightarrow} aaaB\underline{Bb}ccc \overset{P4}{\Rightarrow} aaa\underline{Bb}Bccc \overset{P4}{\Rightarrow} aaabB\underline{Bc}cc \overset{P5}{\Rightarrow}$
   $aaab\underline{Bb}ccc \overset{P4}{\Rightarrow} aaabb\underline{Bc}cc \overset{P5}{\Rightarrow} aaabbbccc$

Отже, в цих виводах породжено ланцюжки ε, abc, $aabbcc$, $aaabbbccc$. Це дозволяє висунути припущення, що граматика $G3$ породжує мову $L3=\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Доведемо, що це дійсно так.

Теорема 4.1. $L(G3)=\{a^n b^n c^n \mid n\geq 0\}$.

Спочатку доведемо, що $L(G3)\subseteq\{a^n b^n c^n \mid n\geq 0\}$. Це доведення базується на наступній лемі, ідея якої полягає в тому, щоб сформулювати загальний вигляд ланцюжків в об'єднаному алфавіті, що виводяться в *G3* (загальний вигляд словоформ).

Лема 4.1. Нехай $S\Rightarrow^*_{G3}\alpha$ ($\alpha\in(N\cup T)^*$). Тоді існує $n\geq 0$ таке, що

1) $\alpha=\beta\gamma c^n$, де $\beta\in\{a,B\}^*$, $\gamma=S$ або $\gamma\in\{b,B\}^*$;
2) $|\alpha|_a=|\alpha|_c=|\alpha|_{\{b,B\}}=n$.

Доведення леми: індукція по довжині виводу.

База індукції. Для виводу довжини 0 маємо, що $n=0$, $\alpha=S$. Значить, α має вигляд $\beta\gamma c^0$ ($\beta=\varepsilon$, $\gamma=S$, $c^0=\varepsilon$) і тому $|\alpha|_a=|\alpha|_c=|\alpha|_{\{b,B\}}=0$. Лема виконується.

Крок індукції. Нехай лема виконується для усіх виводів довжини $k\geq 0$. Доведемо, що вона виконується для виводів довжини $k+1$.

Візьмемо довільний вивід $S\Rightarrow_{G3}\alpha_1\Rightarrow_{G3}\ldots\Rightarrow_{G3}\alpha_k\Rightarrow_{G3}\alpha_{k+1}$. Особливість виводів полягає в тому, що початкова послідовність $S\Rightarrow_{G3}\alpha_1\Rightarrow_{G3}\ldots\Rightarrow_{G3}\alpha_k$ буде виводом довжини k, і тому за індуктивним припущенням для α_k виконується твердження леми. Інакше кажучи, є деяке $n\geq 0$, таке що $\alpha_k=\beta\gamma c^n$ та $|\alpha_k|_a=|\alpha_k|_c=|\alpha_k|_{\{b,B\}}=n$. Безпосередній вивід $\alpha_k\Rightarrow_{G3}\alpha_{k+1}$ здійснюється за допомогою одного з правил *P1*, *P2*, *P3*, *P4*, *P5*. Розглянемо ці правила по черзі.

1. Нехай вивід $\alpha_k\Rightarrow_{G3}\alpha_{k+1}$ відбувся із застосуванням правила *P1*, тобто $\alpha_k\overset{P1}{\Rightarrow}_{G3}\alpha_{k+1}$. Тоді α_k має вигляд βSc^n ($\beta\in\{a,B\}^*$), а $\alpha_{k+1}=\beta aBSc^{n+1}$. Тому α_{k+1} має вигляд $\beta' Sc^{n+1}$ ($\beta'\in\{a,B\}^*$), як того вимагає лема, і крім того, $|\alpha_{k+1}|_a=|\alpha_{k+1}|_c=|\alpha_{k+1}|_{\{b,B\}}=n+1$. Для цього випадку лему доведено.
2. Нехай вивід $\alpha_k\Rightarrow_{G3}\alpha_{k+1}$ відбувся застосуванням правила *P2*, тобто $\alpha_k\overset{P2}{\Rightarrow}_{G3}\alpha_{k+1}$. Тоді α_k має вигляд βSc^n ($\beta\in\{a,B\}^*$), а $\alpha_{k+1}=\beta c^n$. Тому α_{k+1} можна подати у вигляді $\beta\gamma c^n$ ($\gamma=\varepsilon$), як того вимагає лема, і крім того, $|\alpha_{k+1}|_a=|\alpha_{k+1}|_c=|\alpha_{k+1}|_{\{b,B\}}=n$. Для цього випадку лему доведено.
3. Нехай вивід $\alpha_k\Rightarrow_{G3}\alpha_{k+1}$ відбувся застосуванням правила *P3*. Оскільки α_k має загальний вигляд $\beta\gamma c^n$, то правило *P3* може бути застосовано лише для підланцюжка β. Це правило не змінює ані загального вигляду α_{k+1}, ані кількості символів, тому $|\alpha_{k+1}|_a=|\alpha_{k+1}|_c=|\alpha_{k+1}|_{\{b,B\}}=n$. Для цього випадку лему доведено.
4. Нехай вивід $\alpha_k\Rightarrow_{G3}\alpha_{k+1}$ відбувся застосуванням правила *P4*. Оскільки α_k має загальний вигляд $\beta\gamma c^n$, то правило *P4* може бути застосоване лише для підланцюжка γ (хоча можливо замінюване B є останнім символом β). Застосування правила не змінює ані загального вигляду α_{k+1}, ані кількості символів, тому $|\alpha_{k+1}|_a=|\alpha_{k+1}|_c=|\alpha_{k+1}|_{\{b,B\}}=n$. Для цього випадку лему доведено.
5. При застосуванні правила *P5* твердження леми також залишається справедливим.

Лему доведено. ■

Нехай тепер $S\Rightarrow^*_{G3}t$ ($t\in T^*$). Оскільки t – ланцюжок в термінальному алфавіті, то він не містить нетерміналів, і за твердженням леми існує $n\geq 0$ таке, що $t=\beta\gamma c^n$, де $\beta\in a^*$, $\gamma\in b^*$ та $|t|_a=|t|_c=|t|_b=n$. Звідси випливає, що $t=a^n b^n c^n$. Інакше кажучи, будь який термінальний ланцюжок, що виводиться в *G3*, належить мові *L3*, тобто $L(G3)\subseteq L3$.

Доведемо тепер зворотне включення, тобто $L3\subseteq L(G3)$.

Для цього продемонструємо, як побудувати вивід ланцюжка $a^n b^n c^n$ для довільного n. Використовуємо індукцію за n.

База індукції. Ланцюжок $a^n b^n c^n$ ($=\varepsilon$) отримуємо виводом $\underline{S}\overset{P2}{\Rightarrow}\varepsilon$.

Крок індукції. Нехай існує вивід слова $a^n b^n c^n$ ($n\geq 0$), тобто $S\Rightarrow^*_{G3}a^n b^n c^n$. Доведемо, що існує вивід слова $a^{n+1}b^{n+1}c^{n+1}$, тобто $S\Rightarrow^*_{G3}a^{n+1}b^{n+1}c^{n+1}$.

Відповідний вивід будуємо наступним чином. Спочатку до аксіоми застосуємо перше правило, а потім зробимо вивід слова $a^n b^n c^n$. Отримали наступний вивід:

$\underline{S} \overset{P1}{\Rightarrow} aB\underline{S}c \Rightarrow^*_{G3} aBa^n b^n c^n c$. Далі n разів застосовуємо правило *P3*. Отримали ланцюжок $aa^n Bb^n c^n c (= a^{n+1} Bb^n c^{n+1})$. Після цього n разів застосовуємо правило *P4*. Отримали ланцюжок $a^{n+1} b^n Bc^{n+1}$. Нарешті, застосуванням правила *P5* отримуємо ланцюжок $a^{n+1} b^{n+1} c^{n+1}$.

Теорему 4.1 доведено. ■

Наступним кроком у вивченні породжуючих граматик буде їх класифікація.

4.6. Ієрархія граматик Хомського

Дослідження будь-якого класу предметів, як правило, починається з їх класифікації. Це методологічне зауваження стосується і граматик. Однією з перших була класифікація, запропонована Н. Хомським. Суть цієї класифікації полягає в поступових обмеженнях, що накладаються на праві та ліві частини продукцій. Визначені Хомським чотири типи граматик виявились інваріантними відносно різних уточнень породжуючих граматик. Крім того, цим типам граматик природнім чином відповідають типи автоматів, що розпізнають (сприймають) формальні мови.

Визначення 4.20.

- Граматиками *типу 0* називають довільні породжуючі граматики загального виду, що не мають жодних обмежень на правила виводу.
- Граматиками *типу 1* (*нескорочуючими* граматиками) називають породжуючі граматики, кожне правило яких має вигляд $\alpha \to \beta$, де $|\alpha| \le |\beta|$ ($\alpha \in (N \cup T)^* N (N \cup T)^*$, $\beta \in (N \cup T)^+$).
- Граматиками *типу 2* (*контекстно-вільними* граматиками, *КВ*-граматиками) називають породжуючі граматики, кожне правило яких має вигляд $A \to \beta$, де $A \in N$, $\beta \in (N \cup T)^*$.
- Граматиками *типу 3* (*праволінійними* граматиками) називають породжуючі граматики, кожне правило яких має вигляд $A \to \alpha B$ або $A \to \alpha$, де A, $B \in N$, $\alpha \in T \cup \{\varepsilon\}$. До граматик типу *3* відносять і *ліволінійні* граматики, кожне правило яких має вигляд $A \to B\alpha$ або $A \to \alpha$, де A, $B \in N$, $\alpha \in T \cup \{\varepsilon\}$.

Приклад 4.12. Граматика *G3* з попереднього підрозділу є граматикою типу *0*. Якщо з цієї граматики видалити правило *P2*, вона стане граматикою типу *1*, бо не буде скорочуючих правил. Граматика з правилами $\{S \to AR, R \to bRc, R \to \varepsilon, A \to aA, A \to \varepsilon\}$ є контекстно вільною граматикою (типу *2*), а її підграматика $\{A \to aA, A \to \varepsilon\}$ є праволінійною граматикою (типу *3*).

Кожному типу граматик відповідають мови, яким будемо приписувати той же тип, що має граматика, яка її породжує.

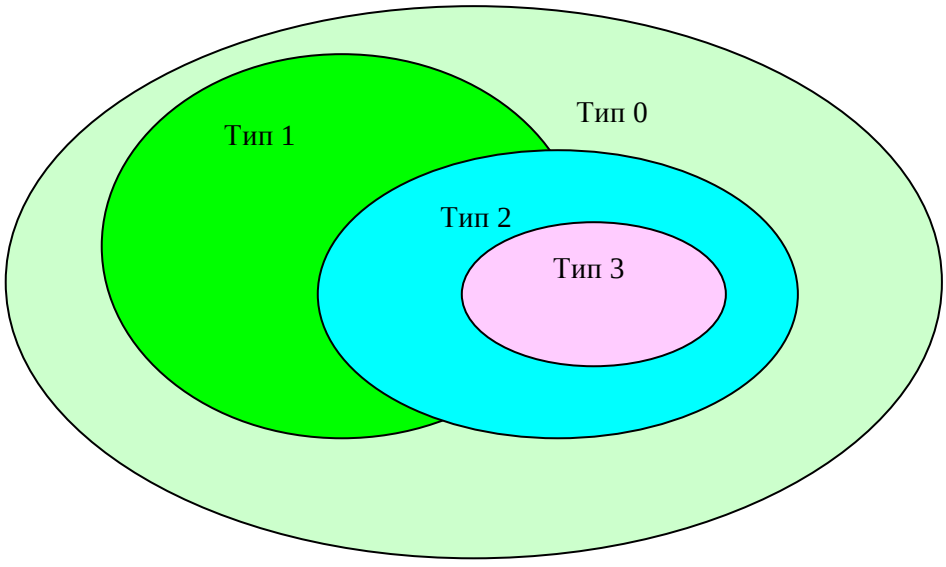


Рисунок 4.3. Співвідношення типів граматик

Error! Reference source not found. 4.3 демонструє співвідношення типів граматик. Як бачимо, граматики типів *2* та *3* не є підкласами граматик типу *1*. Це викликано тим, що наведені класи граматик мають скорочуючі правила виду $A\to\varepsilon$, які заборонені в граматиках типу *1*. Як буде показано далі, ці відмінності не дуже позначаються на класах мов, породжуваних граматиками типів *2* та *3*, і якщо ігнорувати порожній ланцюжок, то класи мов типів *3* та *2* будуть підкласами мов типу *1*.

Перш ніж переходити до вивчення класів мов, покажемо, що без втрати виразної сили можна розглядати більш обмежений клас граматик, які називаються *загально-контекстними* граматиками. Цей клас видається більш природним для породження, ніж загальні породжуючі граматики.

Визначення 4.21

- *Загально-контекстними* називають породжуючі граматики, кожне правило яких має вигляд $к_1Ак_2\to к_1\beta к_2$, де $A\in N$, $к_1$, $к_2$, $\beta\in(N\cup T)^*$. Ланцюжки $к_1$ і $к_2$ називають *лівим* та *правим контекстом* символу A у вказаному правилі.
- *Контекстно-залежними* називаються загально-контекстні граматики з нескорочуючими правилами, тобто правила мають вид $к_1Ак_2\to к_1\beta к_2$, де $\beta\in(N\cup T)^+$ (це означає, що $|\beta|\geq 1$).

Контекстно-залежні граматики інколи називають граматиками *безпосередньо складових* (БС-граматиками).

Слід сказати, що назва контекстно-залежних граматик не зовсім вдала, бо не підкреслює нескорочуваність правил граматики, а характеризує радше довільний клас контекстних граматик. Це ж стосується і назви граматик безпосередньо складових.

Граматики типів *2* та *3* (будучи безконтекстними) безпосередньо є підкласами загально-контекстних граматик.

З визначень видно, що класи загально-контекстних та контекстно-залежних граматик є власними підкласами відповідно граматик типів *0* та *1*. Разом з тим відповідні класи мов співпадають, тобто використання лише контекстних правил не обмежує породжувальну здатність граматик.

Доведемо цей факт співпадіння мов.

Нехай $G_0=(N, T, P, S)$ – довільна породжуюча граматика типу *0*. Побудуємо еквівалентну їй загально-контекстну граматику. Алгоритм побудови наступний.

1. Виділяємо термінальні символи, які входять до неконтекстних правил та вводимо нетермінали, які дублюють такі термінальні символи, тобто вводимо нові нетермінали N_a для кожного такого термінального символу $a\in T$.
2. Далі всі неконтекстні правила з P замінюємо на нові правила, в котрих замість термінальних символів стоять їх нетермінальні дублери. Добавляємо нові правила $N_a\to a$. Очевидно, що отримана граматика G' еквівалентна початковій.
3. Побудуємо граматику G'', яка буде контекстною та еквівалентною G'. Спочатку пронумеруємо усі неконтекстні правила граматики G' (контекстні не змінюємо). Розглянемо неконтекстне правило G' з номером k виду $\alpha\to\beta$, де $\alpha = A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$, $n>1$. Це правило замінимо на наступну множину нових правил:

$$A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n\to N_{kl}A_2\ldots A_{n-1}A_n$$
$$N_{kl}A_2\ldots A_{n-1}A_n\to N_{kl}A_2\ldots A_{n-1}N_{kr}$$
$$N_{kl}A_2\ldots A_{n-1}\,N_{kr}\to N_{kl}A_3\ldots A_{n-1}N_{kr}$$
$$N_{kl}A3\ldots A_{n-1}\,N_{kr}\to N_{kl}A4\ldots A_{n-1}N_{kr}$$
$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$
$$N_{kl}A_{n-1}N_{kr}\to N_{kl}N_{kr}$$
$$N_{kl}N_{kr}\to N_{kp}N_{kr}$$
$$N_{kp}N_{kr}\to N_{kp}\beta$$
$$N_{kp}\to\varepsilon.$$

(**Коментар**. Ідея побудови наведених правил полягає у наступному: спочатку виставляємо лівий N_{kl} та правий маркери N_{kr} вибраного правила, далі

видаляємо всі інші символи лівої частини продукції, потім переходимо до породження правої частини, але перед цим вносимо про це інформацію за допомогою N_{kp}. Наприкінці породжуємо в контексті N_{kp} праву частину продукції, а сам символ N_{kp} видаляємо.)

Можна довести, що вказана послідовність правил еквівалентна одному початковому правилу. Дійсно, ця послідовність індукує (майже детерміновано) однозначний вивід. Тільки правило $N_{kp}\to\varepsilon$ порушує однозначність. Але якщо його застосувати до правила $N_{kp}N_{kr}\to N_{kp}\beta$, то не буде можливості позбавитися нетермінала N_{kr}. Тому справедлива наступна теорема.

Теорема 4.2. Для довільної породжуючої граматики G_0 існує граматика G_C у загально-контекстній формі, яка породжує ту саму мову, тобто $L(G_0)=L(G_C)$.

Визначення 4.22. Довільні граматики G_1 та G_2 називаються *еквівалентними*, якщо вони породжують одну й ту саму мову, тобто $G_1 \approx G_2 \Leftrightarrow L(G_1)=L(G_2)$.

Цілком очевидно, що так введене відношення $\approx$ є відношенням еквівалентності (рефлексивним, симетричним та транзитивним відношенням).

Приклад 4.13. Побудуємо за граматикою *G3*, що породжує мову $L(G3)=\{a^n b^n c^n \mid n\geq 0\}$ еквівалентну їх загально-контекстну граматику $G3_C$.

Граматика *G3* має наступні правила:

P1: $S \to aBSc$
P2: $S \to \varepsilon$
P3: $Ba \to aB$
P4: $Bb \to bB$
P5: $Bc \to bc$

З них неконтекстними є правила *P3* та *P4*. Спочатку перетворимо правило $Ba\to aB$ (правило *P3*) в послідовність контекстних правил. Отримуємо:

$Ba\to aB$ замінюємо на $BA_a\to A_aB$, $A_a\to a$.

Далі замість $BA_a\to A_aB$ вводимо послідовність правил

$BA_a\to N_{31}A_a$
$N_{31}A_a \to N_{31}N_{3r}$
$N_{31}N_{3r}\to N_{3p}N_{3r}$
$N_{3p}N_{3r}\to N_{3p}A_aB$
$N_{3p}\to\varepsilon$

Аналогічно вчинимо з правилом *P4*: $Bb \to bB$. Після цих перетворень отримуємо нову граматику $G3_C$, в якій пронумеруємо нові правила:

P1: $S \to A_aBSc$,
P2: $S \to \varepsilon$
P31: $A_a\to a$
P32: $BA_a\to N_{3l}A_a$
P33: $N_{3l}A_a \to N_{3l}N_{3r}$
P34: $N_{3l}N_{3r}\to N_{3p}N_{3r}$
P35: $N_{3p}N_{3r}\to N_{3p}A_aB$
P36: $N_{3p}\to\varepsilon$
P41: $B_b \to b$
P42: $BB_b\to N_{4l}B_b$
P43: $N_{4l}B_b \to N_{4l}N_{4r}$
P44: $N_{4l}N_{4r}\to N_{4p}N_{4r}$
P45: $N_{4p}N_{4r}\to N_{4p}B_bB$
P46: $N_{4p}\to\varepsilon$
P5: $Bc \to B_bc$

Побудуємо декілька виводів у цій граматиці, тобто, говорячи в термінах програмування, зробимо «тестування» побудованої граматики.

Очевидно, що $\underline{S}\overset{P2}{\Rightarrow}\varepsilon$ та $\underline{S}\overset{P1}{\Rightarrow}A_aB\underline{S}c\overset{P2}{\Rightarrow}A_a\underline{Bc}\overset{P5}{\Rightarrow}\underline{A_a}B_bc\overset{P31}{\Rightarrow}a\underline{B_b}c\overset{P41}{\Rightarrow}abc$. Побудуємо вивід ланцюжка $a^2b^2c^2$. Маємо,

$$\underline{S} \overset{P1}{\Rightarrow} A_a B \underline{S} c \overset{P1}{\Rightarrow} A_a B A_a B \underline{S} c c \overset{P2}{\Rightarrow} A_a B A_a \underline{B} c c \overset{P5}{\Rightarrow} A_a \underline{B A_a} B_b c c \overset{P32}{\Rightarrow} A_a \underline{N_{3l}} \underline{A_a} B_b c c \overset{P33}{\Rightarrow}$$

$$A_a \underline{N_{3l}} \underline{N_{3r}} B_b c c \overset{P34}{\Rightarrow} A_a \underline{N_{3p}} \underline{N_{3r}} B_b c c \overset{P35}{\Rightarrow} A_a \underline{N_{3p}} A_a B B_b c c \overset{P36}{\Rightarrow} A_a A_a \underline{B B_b} c c \overset{P42}{\Rightarrow}$$

$$A_a A_a \underline{N_{4l}} \underline{B_b} c c \overset{P43}{\Rightarrow} A_a A_a \underline{N_{4l}} \underline{N_{4r}} c c \overset{P44}{\Rightarrow} A_a A_a \underline{N_{4p}} \underline{N_{4r}} c c \overset{P45}{\Rightarrow} A_a A_a N_{4p} B_b B c c \overset{P46}{\Rightarrow} A_a A_a B_b \underline{B c} c \overset{P5}{\Rightarrow}$$

$$A_a A_a B_b \underline{B_b} c c \overset{P41}{\Rightarrow} A_a A_a \underline{B_b} b c c \overset{P41}{\Rightarrow} A_a \underline{A_a} b b c c \overset{P31}{\Rightarrow} \underline{A_a} a b b c c \overset{P31}{\Rightarrow} a a b b c c.$$

Еквівалентність нескорочуючих та контекстно-залежних граматик доводиться аналогічним чином.

Це дозволяє нам говорити про те, що різні варіанти визначень граматик (породжуючі та контекстні) є еквівалентними, і що ієрархія Хомського досить стабільна відносно варіантів граматик.

Перейдемо до дослідження зв'язків класів породжуючих граматик з класами формалізмів розпізнання (сприйняття), в першу чергу, з класами автоматів різного типу.

4.7. Автоматні формалізми сприйняття мов

Дуальним методом до породження мов є їх сприйняття (розпізнавання). Цей метод також може уточнюватися на основі поняття транзиційної системи. Відмінність полягає у тому, що початковий стан містить ланцюжок, для якого потрібно перевірити його належність певній мові, а заключний стан говорить про належність (або неналежність) мові.

Існують різні уточнення методів сприйняття. Одним з них є уточнення, яке можна отримати з породжуючих граматик простим оберненням застосування правил, тобто замість правила породжуючої граматики $\alpha \to \beta$ розглядати правило сприймаючої граматики $\beta \to \alpha$. Вивід у сприймаючій граматиці тоді треба вести від термінального ланцюжка до аксіоми. Такий метод уточнення нічого суттєво нового не привносить, хоча він часто розглядається в теорії формальних граматик як метод висхідного аналізу. Тому важливо визначити інші формалізми сприйняття мов. З цією метою часто обираються формалізми автоматів (машин) різного типу.

Автомати характеризуються тим, що відбувається розподіл на інформацію, що зберігається у пам'яті певного типу, та на інформацію, що керує процесом функціонування автомату і яка задається керуючим пристроєм автомату. Такий розподіл корисний тим, що робить функціонування автомату більш детермінованим. Інакше кажучи, формалізм автоматів більш пристосований до керування виводом ніж формалізм граматик, де керування виводом дуже слабке.

Автомат у його загальній формі має пам'ять (як правило, це потенційно нескінченна стрічка), має пристрій керування (задається скінченною множиною станів), та керуючу голівку, яка «працює» з певним елементом пам'яті. Головним для автомату є спосіб його функціонування, який задається переходами із стану в стан, зміною пам'яті та рухом голівки. Ці переходи залежать від поточного стану керування та змісту елементу пам'яті, на який «дивиться» голівка.

Є різні варіанти визначень автоматів. Розглянемо ті з них, що відповідають класифікації мов за Хомським.

Найбільш потужними за сприймаючою силою є автомати, що називаються *машинами Тьюрінга*.

4.7.1. Машини Тьюрінга

Машина Тьюрінга M складається з таких частин.

1. Керуючий пристрій, який може приймати певний стан із скінченної множини Q.
2. Стрічка (потенційно) нескінченної довжини, розділена на комірки, в яких розміщена вхідна інформація у вигляді символів деякого алфавіту A (як правило, $Q \cap A = \varnothing$). В кожній комірці записано по одному символу з алфавіту.

Виділяється особливий символ $\#\in A$, який інтерпретуємо як "порожній символ", причому в кожен даний момент стрічка містить лише скінчену кількість символів, відмінних від #. Вважаємо також, що всі такі "непорожні" символи записані підряд.

3. Голівка читання-запису забезпечує обмін інформацією між стрічкою і керуючим пристроєм. У кожний момент часу голівка може працювати тільки з однією коміркою стрічки. Голівка може
   - замінити прочитаний символ іншим символом алфавіту A,
   - переміщуватись на одну позицію вправо чи вліво, чи
   - залишатися на місці.

Робота машини задається спеціальними правилами переходу (командами), що називаються *програмою* машини.

Програма складається з команд виду $qa\to pbR$, $qa\to pbL$, $qa\to pb$ ($q, p\in Q$, $a, b\in A$, L,R – додаткові символи). *Інтерпретація команд* наступна:

- Виконання команди $qa\to pbR$. Якщо керуючий пристрій знаходиться у стані q, а голівка оглядає комірку на стрічці, у якій записано символ a, то керуючий пристрій переходить у стан p, голівка у комірку записує символ b і сама зміщується на одну комірку вправо.
- Виконання команди $qa\to pbL$. Відрізняється від попереднього лише тим, що голівка зміщується вліво.
- Виконання команди $qa\to pb$. Відрізняється від попередньої команди тим, що голівка залишається на місці.

У подальшому не будемо акцентувати увагу на керуючому пристрої та голівці і говорити просто, що машина Тьюрінга змінює свій стан та рухається вліво або вправо.

У фіксований момент часу поточна інформація задається за допомогою *конфігурації* машини Тьюрінга. Конфігурацією машини Тьюрінга зазвичай називається трійка (q, $\#\omega$, $\upsilon\#$), де $q\in Q$, $\omega,\upsilon\in A^*$. Конфігурація описує повний стан машини й інтерпретується таким чином:

- q – стан керуючого пристрою,
- $\#\omega$ – ланцюжок, записаний на стрічні машини вліво від голівки,
- $\upsilon\#$ – ланцюжок, записаний на стрічні машини вправо від голівки, включаючи символ, який оглядає голівка.

Зважаючи на те, що будемо перетворювати команди машини Тьюрінга у правила граматики, конфігурації в подальшому будемо задавати у вигляді ланцюжка $\#\omega q\upsilon\#$ (тому тут важливо, щоб $Q\cap A=\varnothing$).

Оскільки машина Тьюрінга є конкретизацією транзиційної системи, то у визначення вводиться початковий стан $q_0\in Q$ та множина заключних станів $F\subseteq Q$. Звичайним чином вводиться відношення безпосереднього виводу $\Rightarrow$ (часто позначається $|\!-$) та рефлексивне транзитивне замикання цього відношення $\Rightarrow^*$ ($|\!-^*$). Введені поняття дають можливість формального визначення машин Тьюрінга.

Визначення 4.23. *Машиною Тьюрінга M* називається послідовність параметрів (Q, A, #, δ, q_0, F), де

- Q – скінченна множина станів,
- A – скінченний алфавіт ($Q\cap A=\varnothing$),
- # – символ з A («порожній» символ),
- δ – скінченна множина команд $qa\to pbR$, $qa\to pbL$, $qa\to pb$ ($q, p\in Q$, $a, b\in A$, L,R – додаткові символи),
- q_0 – початковий стан із Q,
- F – підмножина фінальних станів із Q.

Зауважимо, що є багато варіантів визначення машин Тьюрінга, наприклад, може бути декілька стрічок, порожній символ можна явно не вводити в алфавіт і вважати

його однаковим для класу машин Тьюрінга, не вводити заключних станів і т. ін. Всі такі визначення, як правило, є еквівалентними, з точки зору сприйняття мов.

Наведене визначення задає екстенсіонал поняття машини Тьюрінга, тобто клас одиничних машин. Що стосується інтенсіоналу, то він обумовлений призначенням машин, орієнтованих на сприйняття мов, яке засновано на відношенні $|\!-_T$ ($\Rightarrow_T$) безпосереднього переходу від однієї конфігурації до іншої.

Визначення 4.24. *Конфігурацією* машини Тьюрінга $M=(Q, A, \#, \delta, q_0, F)$ називається ланцюжок виду $\#\omega q\upsilon\#$, $q\in Q$, $\omega,\upsilon\in A^*$.

Визначення 4.25. Нехай $M=(Q, A, \#, \delta, q_0, F)$ – машина Тьюрінга. Конфігурація $\#\omega cqav\#$ *безпосередньо переходить*

- у конфігурацію $\#\omega cbp\upsilon\#$, якщо виконується команда $qa\to pbR$,
- у конфігурацію $\#\omega pcb\upsilon\#$, якщо виконується команда $qa\to pbL$, та
- у конфігурацію $\#\omega cpb\upsilon\#$, якщо виконується команда $qa\to pb$ ($a,b,c\in A$, $\omega,\upsilon\in A^*$, $q, p\in Q$).

Ми будемо відношення безпосереднього переходу також називати відношенням *виводу* конфігурацій, щоб продемонструвати його єдність із відношенням виводу у породжуючих граматиках та формальних системах. Послідовність конфігурацій, пов'язаних відношенням безпосереднього виводу, називається *протоколом* машини Тьюрінга.

Визначення 4.26. Рефлексивне транзитивне замикання відношення $|\!-_T$ позначаємо $|\!-^*_T$.

Початкові конфігурації мають вид $\#q_0\upsilon\#$, фінальні – $\#\omega_1 q_F\omega_2\#$, $q_F\in F$.

І, нарешті, головне смислове визначення.

Визначення 4.27. *Мова, яка допускається машиною Тьюрінга* $M=(Q, A, \#, \delta, q_0, F)$, є множина ланцюжків

$$L_T(M)=\{\ \omega\mid\ \#q_0\omega\ \#|\!-^*_T\#\omega_1 q_F\ \omega_2\#,\ q_F\in F,\ \omega,\ \omega_1,\omega_2\in\ A^*\}$$

Таким чином, поняття машини Тьюрінга є єдністю двох аспектів: екстенсіонального та інтенсіонального. Екстенсіональний аспект задається як клас машин Тьюрінга, визначених відповідними шістками параметрів, інтенсіональний аспект задається уніформним визначенням відношення безпосередньої вивідності, та мови, що сприймається (допускається, розпізнається) машиною.

Приклад 4.14. Побудуємо машину Тьюрінга, яка допускає мову $\{r\tilde{r}\mid r\in\{a,b\}^*\}$.

Ідея програми наступна:

1. У початковому стані q_0 машина читає символ a, b, або #. У перших двох випадках машина стирає прочитані символи та «запам'ятовує» прочитаний символ відповідно у стані q_a або у стані q_b. Останній випадок означає, що на вхідній стрічці – порожній ланцюжок і тому машина переходить у заключний стан q_F.
2. Далі голівка рухається у правий бік до кінця ланцюжка. Прочитавши порожній символ #, голівка повертається на одну комірку (клітинку) вліво та переходить у стан q_{-a} зі стану q_a, або у стан q_{-b} зі стану q_b. Тут індекси $-a$ та $-b$ означають, що машині потрібно стерти відповідно символ a або b.
3. Якщо правий символ ланцюжка співпадає з символом, «запам'ятованим» як такий, що потрібно стерти, то він стирається, машина переходить у стан q_L; якщо ні, то робота машини блокується (немає застосовних правил) і вхідний ланцюжок не належить нашій мові.
4. У стані q_L голівка рухається вліво, поки не дійде до символу #. Далі голівка переходить у стан q_0 та зміщується у правий бік. Один цикл перевірки завершено. Робота продовжується наступним циклом перевірки або завершується, якщо все перевірено.

Наведений алгоритм дозволяє побудувати машину Тьюрінга

$$M=(\{q_0, q_a, q_{-a}, q_b, q_{-b}, q_L, q_F\}, \{a, b\}, \#, \delta, q_0, \{q_F\}),$$

де δ – множина наступних команд:

1. $q_0a\to q_a\#R$

2. $q_0b \to q_b\#R$
3. $q_aa \to q_aaR$
4. $q_ab \to q_abR$
5. $q_a\# \to q_{-a}\#L$
6. $q_{-a}a \to q_L\#L$
7. $q_ba \to q_baR$
8. $q_bb \to q_bbR$
9. $q_b\# \to q_{-b}\#L$
10. $q_{-b}b \to q_L\#L$
11. $q_La \to q_LaL$
12. $q_Lb \to q_LbL$
13. $q_L\# \to q_0\#R$
14. $q_0\# \to q_F\#$

Розглянемо на прикладі сприйняття слів цією машиною Тьюрінга. Візьмемо слово $\#abba\#$. Побудуємо протокол його сприйняття:

$\#q_0abba\# \Rightarrow \#q_abba\# \Rightarrow \#bq_aba\# \Rightarrow \#bbq_aa\# \Rightarrow \#bbaq_a\# \Rightarrow$
$\#bbq_{-a}a\# \Rightarrow \#bbq_L\# \Rightarrow \#bq_Lb\# \Rightarrow \# q_Lbb\# \Rightarrow q_L\#bb\# \Rightarrow$
$\# q_0bb\# \Rightarrow \# q_bb\# \Rightarrow \# bq_b\# \Rightarrow \#q_{-b}b\# \Rightarrow \#q_L\# \Rightarrow \#q_0\# \Rightarrow \#q_F\#$

4.7.2. Еквівалентність машин Тьюрінга та породжуючих граматик

Наведений у попередньому прикладі протокол машини Тьюрінга підказує ідею побудови породжуючої граматики за програмою машини. Таку побудову зробимо в два етапи: спочатку за програмою побудуємо продукції переходу (перетворення) конфігурацій машини Тьюрінга, потім зробимо обернення побудованих продукцій та додамо правило для аксіоми та правила породження і видалення порожніх символів. Отримана породжуюча граматика буде еквівалентна вибраній машині Тьюрінга.

Кожна команда машини Тьюрінга породжує наступні правила перетворення конфігурацій:

- Команда виду $qa \to pbR$ породжує правило $qa \to bp$.
- Команда виду $qa \to pbL$ породжує множину правил перетворення $\{ cqa \to pcb \mid c \in A\}$.
- Команда виду $qa \to pb$ породжує правило $qa \to pb$.

На другому етапі побудови обернемо отримані правила (перетворення виду $\alpha \to \beta$ замінимо на правило породжуючої граматики $\beta \to \alpha$), додамо правило для аксіоми $S \to \#q_F\#$. Враховуючи, що за таких побудованих простих правилах можуть бути зайві #, переведемо їх в пустий ланцюжок є правилом $\# \to \varepsilon$, або створимо у разі необхідності додаткові порожні символи # правилом $\# \to \#\#$. Нарешті, потрібно буде видалити початковий стан, щоб отримати (породити) початковий ланцюжок правилом $q_0 \to \varepsilon$.

Таким чином, буде створена граматика $G_M=(N,T, P, S)$, яка має наступні параметри:

- $N=\{S\} \cup Q \cup \{\#\}$ $(S \notin Q \cup \{\#\})$.
- $T=A \setminus \{\#\}$.
- $S \in N$.
- P будується за вказаним вище алгоритмом.

Продемонструємо наведений алгоритм прикладом.

Приклад 4.15. Візьмемо машину Тьюрінга, запропоновану в попередньому прикладі, та побудуємо еквівалентну їй граматику. Отримаємо граматику $G_M = (\{ S, q_0, q_a, q_{-a}, q_b, q_{-b}, q_L, q_F, \#\}, \{a, b\}, P, S)$.

Потрібні перетворення команд наведено в таблиці, третій стовпчик якої задає продукції P.

Таблиця 4.1

Команди машини Тьюрінга	**Правила перетворення конфігурацій**	**Продукції породжуючої граматики**
		0. $S \to \#q_F\#$ $0_\#$. $\# \to \#\#$
1. $q_0a \to q_a\#R$	1. $\#q_0a \to \#q_a$	1. $\#q_a \to \#q_0a$
2. $q_0b \to q_b\#R$	2. $\#q_0b \to \#q_b$	2. $\#q_b \to \#q_0b$
3. $q_aa \to q_aaR$	3. $q_aa \to aq_a$	3. $aq_a \to q_aa$
4. $q_ab \to q_abR$	4. $q_ab \to bq_a$	4. $bq_a \to q_ab$
5. $q_a\# \to q_{-a}\#L$	5. $aq_a\# \to q_{-a}a\#$	5. $q_{-a}a\# \to aq_a\#$
6. $q_{-a}a \to q_L\#L$	6. $aq_{-a}a \to q_La\#$; $bq_{-a}a \to q_Lb\#$; $\#q_{-a}a \to q_L\#\#$;	6. $q_La\# \to aq_{-a}a$; $q_Lb\# \to bq_{-a}a$; $q_L\#\# \to \#q_{-a}a$
7. $q_ba \to q_baR$	7. $q_ba \to aq_b$	7. $aq_b \to q_ba$
8. $q_bb \to q_bbR$	8. $q_bb \to bq_b$	8. $bq_b \to q_bb$
9. $q_b\# \to q_{-b}\#L$	9. $bq_b\# \to q_{-b}b\#$	9. $q_{-b}b\# \to bq_b\#$
10. $q_{-b}b \to q_L\#L$	10. $aq_{-b}b \to q_La\#$; $bq_{-b}b \to q_Lb\#$; $\#q_{-b}b \to q_L\#\#$;	10. $q_La\# \to aq_{-b}b$; $q_Lb\# \to bq_{-b}b$; $q_L\#\# \to \#q_{-b}b$
11. $q_La \to q_LaL$	11. $aq_La \to q_Laa$; $bq_La \to q_Lba$; $\#q_La \to q_L\#a$	11. $q_Laa \to aq_La$; $q_Lba \to bq_La$; $q_L\#a \to \#q_La$;
12. $q_Lb \to q_LbL$	12. $aq_Lb \to q_Lab$; $bq_Lb \to q_Lbb$; $\#q_Lb \to q_L\#b$	12. $q_Lab \to aq_Lb$; $q_Lbb \to bq_Lb$; $q_L\#b \to \#q_Lb$;
13. $q_L\# \to q_0\#R$	13. $q_L\# \to \#q_0$	13. $\#q_0 \to q_L\#$
14. $q_0\# \to q_F\#$	14. $\#q_0\# \to \#q_F\#$	14. $\#q_F\# \to \#q_0\#$
		15. $q_0 \to \varepsilon$
		16. $\# \to \varepsilon$

Правила, отримані перетворенням команди з номером n ($n=6$, 10, 11, 12), будемо далі нумерувати як $n(1)$, $n(2)$, $n(3)$.

Продемонструємо коректність правил виводу для породження ланцюжка *abba* (індекси вказують на застосоване правило):

$\underline{S} \Rightarrow_0 \underline{\#q_F\#} \Rightarrow_{14} \underline{\#q_0}\# \Rightarrow_{13} \#q_L\underline{\#} \Rightarrow_{0\#} \#\underline{q_L\#\#} \Rightarrow_{10(3)} \underline{\#\#}q_{-b}b\# \Rightarrow_{16} \#\underline{q_{-b}b\#} \Rightarrow_9 \#\underline{bq_b\#} \Rightarrow_8$
$\underline{\#}q_bb\# \Rightarrow_{0\#} \#\underline{\#q_0}b\# \Rightarrow_{13} \#\underline{q_L\#}bb\# \Rightarrow_{12(3)} \underline{\#\#}q_Lbb\# \Rightarrow_{16} \#\underline{q_Lbb\#} \Rightarrow_{12(2)} \#bq_Lb\underline{\#} \Rightarrow_{0\#}$
$\#bq_Lb\#\# \Rightarrow_{6(2)} \#bb\underline{q_{-a}a\#} \Rightarrow_5 \#bb\underline{aq_a}\# \Rightarrow_3 \#b\underline{bq_a}a\# \Rightarrow_4 \#\underline{bq_a}ba\# \Rightarrow_4 \#q_abba\# \Rightarrow_1$
$\underline{\#}q_0abba\# \Rightarrow_{16} q_0abba\underline{\#} \Rightarrow_{16} q_0abba.$

Зауважимо, що в процесі виводу застосовувались правила породження та знищення порожнього символу #.

Наведені вище міркування та приклад дозволяють сформулювати наступне твердження.

Теорема 4.3. За кожною машиною Тьюрінга M можна побудувати еквівалентну їх породжуючу граматику G, що породжує ту ж мову, яку сприймає M, тобто: $L_T(M)=L(G)$.

Ця теорема може бути обернена.

Теорема 4.4. За кожною породжуючою граматикою G можна побудувати еквівалентну їх машину Тьюрінга M, що сприймає ту ж мову, яку породжує G, тобто: $L_T(M)=L(G)$.

Доведення може бути конструктивним, коли машиною Тьюрінга моделюється зворотній до породження процес сприйняття ланцюжка, або можна скористатися

тезою Чорча, що стверджує існування машини Тьюрінга для формального подання інтуїтивних алгоритмів. Тут деталі такої побудови описувати не будемо.

З наведених теорем випливає, що граматики типу *0* породжують усі рекурсивно-зліченні множини (мови) в алфавіті *A*. Тим самим клас породжуючих граматик має таку ж виразну потужність, як і інші універсальні моделі алгоритмів.

Відзначимо, що є різні варіанти машин Тьюрінга, наприклад, машини з різною кількістю стрічок, з різними обмеженнями на команди. Зокрема, виділяють детерміновані (не існує команд з однаковими лівими частинами та різними правими частинами), та недетерміновані машини Тьюрінга (існують команди з однаковими лівими частинами та різними правими частинами). Клас формальних мов, що сприймаються машинами Тьюрінга, є однаковий для детермінованих та недетермінованих машин, та для машин з різною кількістю стрічок.

4.7.3. Лінійно-обмежені автомати

Лінійно-обмежені автомати можуть розглядатися як обмежені машини Тьюрінга, для яких довжина ланцюжка на стрічці завжди лінійно обмежена довжиною вхідного ланцюжка.

Визначення 4.28 Машина Тьюрінга $M=(Q, A, \#, \delta, q_0, F)$ називається *лінійно-обмеженим автоматом*, якщо існує число k, що для будь якого ланцюжка $v\in A^*$ довжини n, з умови $\#q_0v\# \vdash^* \#w_1q\,w_2\#$ ($q\in Q$, $w_1, w_2\in A^*$) випливає, що $|w_1\,w_2|\le k\cdot n$.

Наведену умову важко перевірити, маючи машину Тьюрінга, тому наведене визначення часто спрощують, вимагаючи, щоб $k=1$, тобто, щоб голівка машини Тьюрінга не могла записувати нові символи за межами вхідного ланцюжка. Є й інші варіанти визначення лінійно-обмежених автоматів.

Використовуючи методи, наведені в попередньому підрозділі, можемо за лінійно-обмеженим автоматом побудувати еквівалентну породжуючу граматику типу *1*, і навпаки, за граматикою типу *1* побудувати лінійно-обмежений автомат. Таким чином, справедливе наступне твердження.

Теорема 4.5. За кожним лінійно-обмеженим автоматом можна побудувати еквівалентну йому породжуючу граматику типу *1*, і навпаки, за кожною породжуючою граматикою типу *1* можна побудувати еквівалентний їй лінійно-обмежений автомат.

Говорячи більш просто, теорема стверджує, що клас лінійно-обмежених автоматів еквівалентний класу породжуючих граматик типу *1*.

4.7.4. Магазинні автомати

Магазинні автомати (автомати з магазинною пам'яттю, МП-автомати, стекові автомати) широко використовуються в програмуванні, бо дозволяють моделювати різні важливі алгоритми, які пов'язані з компіляцією та інтерпретацією мов програмування, обробки складних структур даних – дерев, списків і т. ін. Такі автомати можна розглядати як обмежені машини Тьюрінга, що мають вхідну стрічку, на якій голівка може тільки читати символи і рухатися тільки в один бік, та робочу стрічку, яку відповідна голівка може обробляти лише з однієї сторони. Як і в попередніх випадках є різні варіанти визначень магазинних автоматів. Наведемо тут просте екстенсіональне визначення, яке разом з тим є еквівалентним іншим визначенням за класом мов, що розпізнаються.

Визначення 4.29. Магазинний автомат – це шістка $M=(Q, A, \Gamma, \delta, q_0, F)$, де

- Q – скінченна множина станів,
- A – скінченний вхідний алфавіт ($Q\cap A=\varnothing$),
- Γ – скінченний магазинний алфавіт,
- δ – скінченне відношення переходів (скінченне відображення $\delta: Q\times A\times\Gamma\to Q\times\Gamma^*$),
- q_0 – початковий стан із Q,
- F – підмножина фінальних (заключних) станів із Q.

Виконання команди виду $(q, a, Z)\to(p, \gamma)$ означає, що знаходячись у стані q, та оглядаючи символ a на вхідній стрічці і символ Z у магазині, автомат переходить у стан p, стирає символ a та пересуває голівку до наступного символу на вхідній стрічці, а замість символу Z записує у магазин ланцюжок γ. Зауважимо, що в інших модифікаціях магазинних автоматів перехід у новий стан може відбуватися без стирання символу із вхідної стрічки (так званий ε-перехід).

Конфігурацію магазинного автомату можна задати як трійку (q, w, ζ), де $q\in Q$, $w\in A^*$, $\zeta\in\Gamma^*$). Відношення безпосереднього переходу $|-$ задається так: $(q, aw', Z\zeta')|-(p, w', \gamma\zeta')$, якщо команда $(q, a, Z)\to(p, \gamma)$ належить δ.

Аналогічно тому, як це робилося раніше, визначаються й інші необхідні поняття, пов'язані з магазинним автоматом: протоколи та мова, що сприймається таким автоматом.

Для нас важливим є наступне твердження.

Теорема 4.6. За кожним магазинним автоматом можна побудувати еквівалентну йому породжуючу граматику типу *2* (контекстно-вільну граматику), і навпаки, за кожною породжуючою граматикою типу *2* можна побудувати еквівалентний їй магазинний автомат.

Зважаючи на те, що синтаксис мов програмування, як правило, задається граматиками типу *2*, теорема стверджує, що алгоритми обробки програм можуть базуватися на магазинних автоматах.

4.7.5. Скінченні автомати

Скінченні автомати можна розглядати як обмежені машини Тьюрінга, що мають одну вхідну стрічку – голівка може тільки читати символи і рухатися тільки в один бік. Тому такі автомати не мають необмеженої пам'яті. Екстенсіональне визначення наступне.

Визначення 4.30. Скінченний автомат – це п'ятірка $M=(Q, A, \delta, q_0, F)$, де

- Q – скінченна множина станів,
- A – скінченний вхідний алфавіт ($Q\cap A=\varnothing$),
- δ – скінченне відношення переходів (скінченне відображення $\delta: Q\times A\to Q$),
- q_0 – початковий стан із Q,
- F – підмножина фінальних (заключних) станів із Q.

Всі основні загальні (інтенсіональні) поняття визначаються подібно до того, як це було зроблено для машин Тьюрінга та магазинних автоматів, тому тут їх наводити не будемо.

Основним є наступний результат.

Теорема 4.7. За кожним скінченним автоматом можна побудувати еквівалентну йому породжуючу граматику типу *3* (ліволінійну чи праволінійну граматику), і навпаки, за кожною породжуючою граматикою типу *3* можна побудувати еквівалентний їй скінченний автомат.

Відзначимо, що детермінованість чи недетермінованість скінченного автомату не впливає на клас мов, що сприймаються автоматами.

Теорія скінченних автоматів розроблена досить детально, для них побудовані алгоритми еквівалентних перетворень, мінімізації та ін. Тут наведемо лише один результат, що стосується алгебраїчного подання скінченно-автоматних мов. Такі мови ще називаються регулярними мовами.

Регулярні мови задаються виразами (термами) регулярної алгебри мов, що має операції об'єднання, конкатенації та ітерації.

Регулярні вирази можна визначити індуктивно.

Базис складається з трьох визначень.

1. Константи ε та Ø є регулярними виразами.
2. Якщо a – довільний символ алфавіту, то a – регулярний вираз. Зауважимо, що часто в написанні розрізняють символ алфавіту та відповідний вираз. Тут це не робимо, щоб не ускладнювати текст.

3. Якщо X – змінна, то X – регулярний вираз.

Крок індуктивної побудови. Індуктивний крок складається з чотирьох визначень, по одному для трьох операторів та для введення дужок.

1. Якщо E та F – регулярні вирази, то $E+F$ – регулярний вираз.
2. Якщо E та F – регулярні вирази, то EF – регулярний вираз. Зауважимо, що для позначення оператора конкатенації – як операції над мовами, так і оператора в регулярному виразі – можна використовувати крапку.
3. Якщо E – регулярний вираз, то E* – регулярний вираз.
4. Якщо E – регулярний вираз, то (E) – регулярний вираз.

Інтерпретація L виразів у класі мов над алфавітом A задається також індуктивно на підставі інтерпретації змінних L_V: $Var \to 2^{A^*}$, де Var – множина змінних.

Інтерпретація базових виразів задається таким чином:

1. $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$ і $L(\emptyset) = \emptyset$.
2. $L(a) = \{a\}$.
3. $L(X) = L_V(X)$.

Інтерпретація складних виразів задається таким чином (E та F – регулярні вирази):

1. $L(E+F) = L(E) \cup L(F)$.
2. $L(EF) = L(E)L(F)$.
3. $L(E^*) = (L(E))^*$.
4. $L((E)) = L(E)$.

Ми використовуємо $L(E)$ для позначення мови, яка відповідає E. Як і в інших алгебрах, оператори регулярних виразів мають певні пріоритети, тобто оператори зв'язуються зі своїми операндами в певному порядку.

Найвищий пріоритет має оператор ітерації *. Далі йде оператор конкатенації. Оскільки він асоціативний, то не має значення, в якому порядку групуються послідовні конкатенації. Але, якщо необхідно групувати вирази, то робимо це, починаючи зліва. Найнижчий пріоритет має оператор об'єднання. Він також асоціативний. Для нього будемо притримуватися групування, починаючи з лівого краю виразу.

Основний результат стосовно регулярних мов є наступний.

Теорема 4.8. За кожним скінченним автоматом можна побудувати еквівалентний йому регулярний вираз, і навпаки, за кожним регулярним виразом можна побудувати еквівалентний йому скінченний автомат.

Наведений результат дозволяє використовувати різні формалізми (граматики типу *3*, скінченні автомати, регулярні вирази) для дослідження властивостей регулярних мов. Такі мови мають гарні властивості замкненості (відносно об'єднань, перетину, доповнень, конкатенації, ітерації та деяких інших операцій). Ще одну важливу групу властивостей регулярних мов становлять «властивості розв'язності». За їх допомогою можна з'ясувати, чи визначають два різні автомати одну і ту саму мову. Розв'язність цієї задачі дозволяє мінімізувати автомати, тобто за даним автоматом знайти еквівалентний йому з найменшою можливою кількістю станів. Задача мінімізації має велике значення при проектуванні інтегральних схем.

4.8. Методи подання синтаксису мов програмування

Граматики типу *2* (контекстно-вільні граматики) відіграють велику роль у формалізації мов програмування. Справа в тому, що вони задають чітке подання деякого синтаксичного поняття як структури, що складається з певних частин. Ті частини, у свою чергу, мають частини і так далі. Тобто контекстно-вільні граматики подають ієрархічну організацію синтаксичного поняття. Це відповідає і композиційній структурі програм. Саме тому вивченню цього класу граматик буде приділено більшу увагу. Щоб продемонструвати зв'язок з мовами програмування більш чітко, розглянемо методи подання синтаксису мов програмування. Найбільш відомим методом є нормальні форми Бекуса–Наура (БНФ). Цей формалізм (метамова)

широко використовується як під час подання синтаксису мов програмування, так і під час вивченні природних мов.

4.8.1. Нормальні форми Бекуса–Наура

Ці форми були запропоновані Дж. Бекусом та П. Науром для опису синтаксису мови програмування АЛГОЛ-*60*. Основним призначенням форм Бекуса та Наура було подання у компактному вигляді строго формальних правил написання основних конструкцій мов програмування.

Приблизно в той самий час Ноам Хомський (1959) ввів аналогічну форму – контекстно-вільну граматику – для визначення синтаксису природної мови.

БНФ складається зі скінченної множини правил, які визначають формальну мову (зокрема, синтаксис мов програмування).

Одним із класів об'єктів, що використовуються в БНФ, є символи описуваної мови. Другим класом об'єктів БНФ виступають мета змінні (нетермінальні символи), значеннями яких є ланцюжки основних символів. Для опису синтаксису мов програмування використовують велику кількість нетермінальних символів, тому для наочності їх подають як комбінації слів природної мови, що поміщені в кутові дужки. Ліву частину правил відділяють від правої частини знаком ::=, крім того, правила з однаковою лівою частиною записуються як одне правило, при цьому праві частини (альтернативи) розділяються вертикальною рискою |.

Приклад 4.16. Синтаксис операторів мови *SIPL* задається наступною БНФ:

<оператор> ::= <змінна>:=<вираз> |

<оператор> ; <оператор>|

if <умова> **then** <оператор> **else** <оператор> |

while <умова> **do** <оператор> |

begin <оператор> **end** |

skip

За кожною БНФ легко побудувати контекстно-вільну граматику, співставляючи правилу БНФ виду $A::=\alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \ldots \alpha_n$ сукупність правил граматики $A\to\alpha_1$, $A\to\alpha_2$, … $A\to\alpha_n$.

4.8.2. Модифіковані нормальні форми Бекуса–Наура

Для отримання більш наочних та компактних описів синтаксису застосовують модифіковані БНФ. Найчастіше передбачається введення спеціальних позначень для ітерації та альтернативи.

Наприклад, список якихось елементів задається БНФ

<список>::=<елемент><список>| **ε**

У модифікованій БНФ можна записати

<список>::={<елемент>}*

Така форма передбачає введення операції, яка називається ітерацією і позначається парою фігурних дужок із зірочкою.

Якщо певна частина синтаксичної конструкції може бути пропущена, то в модифікованих БНФ її виділяють квадратними дужками. Наприклад, замість правила БНФ

<оператор> ::=

if <умова> **then** <оператор> **else** <оператор> | **if** <умова> **then** <оператор>

можна вжити наступне правило модифікованої БНФ:

<оператор> ::= **if** <умова> **then** <оператор> [**else** <оператор>].

Зрозуміло, що для модифікованих БНФ вживати дужки « { », « } », « [» та «] », а також « * » у якості символів мови не слід, тому що вони виступають як метасимволи формалізму модифікованих БНФ. За необхідності вживання цих дужок і зірочки для них використовують спеціальні позначення.

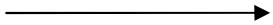
4.8.3. Синтаксичні діаграми

Для поліпшення зорового сприйняття і полегшення розуміння синтаксичних описів, застосовують подання синтаксичних правил у вигляді синтаксичних діаграм. Такі діаграми мають одну вхідну і одну вихідну стрілки. Схематично їх можна зображувати таким чином (*D* – внутрішність діаграми):

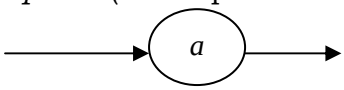
Синтаксичні діаграми є структурованими. Це означає, що вони визначаються індуктивно: є найпростіші діаграми, а більш складні будуються за допомогою певних правил.

Найпростішими є наступні діаграми:

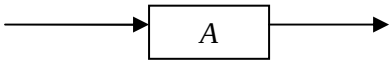
- *Порожня діаграма*



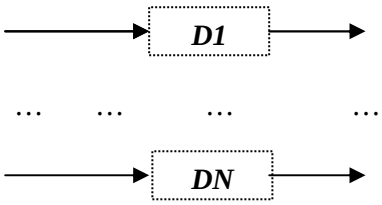
- *Термінальна діаграма* (*a* – термінальний символ)



- *Нетермінальна діаграма* (*A* – нетермінальний символ)

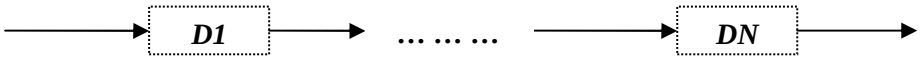


Далі вважаємо, що побудовані наступні діаграми:

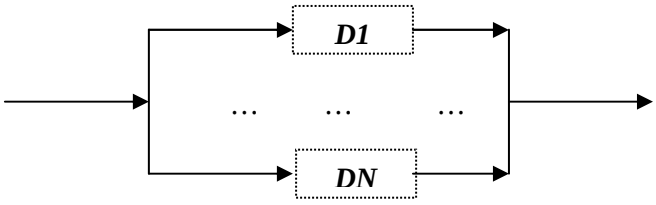


Є три правила побудови нових діаграм з наведених:

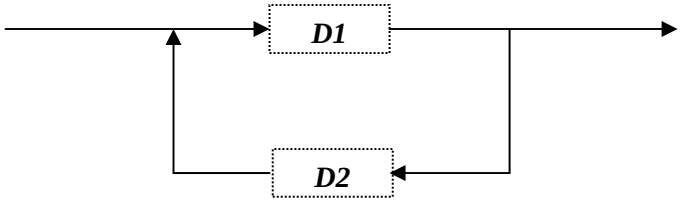
- *Послідовність*



- *Альтернатива*



- *Ітерація*



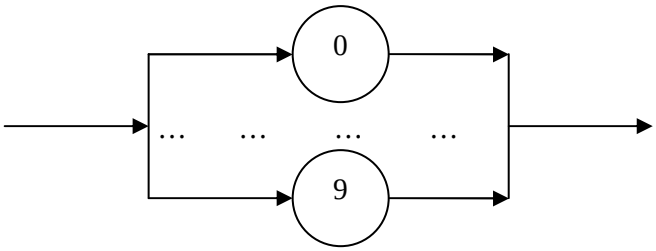
Діаграми можуть мати назву, яка є нетермінальним символом.

Сукупність іменованих діаграм задає певну формальну мову, кожне слово якої складається з термінальних символів, які знаходяться на шляху від початкової стрілки до заключної (від вхідної до вихідної стрілки), причому нетермінальні символи замінюються на термінальні слова, які задаються діаграмою, що називається цим нетермінальним символом.

Приклад 4.17. Наведемо кілька діаграм, які задають числа:

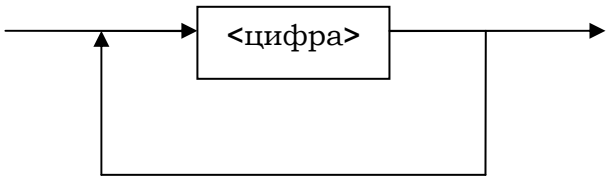
- Цифра:

<цифра>



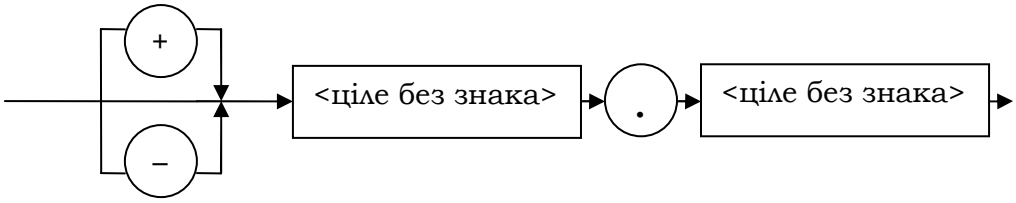
- Ціле без знака:

<ціле без знака>



- Дійсне число (без експоненти):

<дійсне число>



Щоб скоротити кількість діаграм, їх часто об'єднують, заміняючи нетермінальні символи, які входять у діаграму, на побудовані для них діаграми.

За кожною БНФ можна побудувати систему синтаксичних діаграм. Метод побудови наступний (індукція за структурою БНФ):

- порожньому слову відповідає порожня діаграма;
- термінальному символу відповідає термінальна діаграма з цим символом;
- нетермінальному символу відповідає нетермінальна діаграма з цим символом;

- послідовності символів, що утворюють одну з альтернатив правої частини правила БНФ, відповідає послідовність діаграм, що задають символи цієї частини;
- альтернативам правила (тобто виразу ::=α_1 | α_2 | … α_n) буде відповідати діаграма – альтернатива для діаграм, побудованих за виразами α_1, α_2, … , α_n;
- правилу A::=α_1 | α_2 | … α_n буде відповідати деяка діаграма з іменем A, яка визначається для виразу α_1 | α_2 | … α_n.

Неважко побудувати і зворотній алгоритм, який за системою синтаксичних діаграм вказаного вигляду будує еквіваленту їй БНФ.

Таким чином, справедливе наступне твердження.

Твердження 4.1. Наступні формалізми подання формальних мов: БНФ, модифіковані БНФ, контекстно-вільні граматики, синтаксичні діаграми, є еквівалентними формалізмами.

Зауважимо, що наведене твердження не сформульовано як теорема лише тому, що не було дано достатньо точного визначення формальних мов, що породжуються такими формалізмами, як БНФ, модифіковані БНФ та синтаксичні діаграми. Разом з тим надати такі формальні визначення не дуже складно (зробіть це самостійно).

Зважаючи на наведене твердження, будемо в подальшому серед указаних формалізмів розглядати переважно формалізм контекстно-вільних граматик.

4.9. Властивості контекстно-вільних граматик

У цьому підрозділі розглянемо властивості контекстно-вільних граматик (КВ-граматик), зокрема їх еквівалентні перетворення та нормальні форми. Спочатку доведемо лему про еквівалентність граматик щодо бієктивного перейменування нетерміналів.

Лема 4.2 (про перейменування нетерміналів). Нехай задані граматика G=(N, T, P, S) та бієктивне відображення ρ: $N\rightarrow N'$ множини нетерміналів N на деяку іншу множину нетерміналів N' ($N'\cap T$=∅). Тоді для граматики G'=(N', T, S', P'), де P' – множина правил, отриманих з P заміною нетерміналів N на відповідні нетермінали з N', а S'=ρ(S), маємо: $L(G)$= $L(G')$.

Для доведення леми слід скористатися тією обставиною, що кожний вивід в одній граматиці має відповідний вивід (шляхом перейменування нетерміналів) в іншій граматиці.

Зрозуміло, що умова бієктивності є суттєвою.

4.9.1. Видалення несуттєвих символів

Продовжимо розгляд очевидних, але важливих перетворень. У деяких випадках КВ-граматика може містити символи та правила, що не вживаються для виводу термінальних ланцюжків.

Приклад 4.18. У граматиці G=({S, A, B}, {a, b, c}, P, S), де P={$S\rightarrow a$, $S\rightarrow cS$, $A\rightarrow b$}, нетермінал A і термінал b не можуть з'явитися в жодному ланцюжку виведення (в жодній словоформі). Таким чином, ці символи не приймають участь у породженні ланцюжків мови $L(G)$ і правила, що їх містять, можна видалити, не змінивши мови $L(G)$.

Визначення 4.31. Нетермінал $A\in N\cup T$ назвемо *недосяжним* у граматиці G=(N, T, P, S), якщо A не з'являється в жодному вивідному ланцюжку, тобто не існує виводу виду $S\Rightarrow_G{}^* \gamma A\delta$, γ, $\delta\in(N\cup T)^*$.

Для знаходження недосяжних нетерміналів спочатку визначимо множину *досяжних* нетерміналів. Ця множина для заданої КВ-граматики G=(N, T, P, S) легко визначається за допомогою наступних індуктивних визначень.

1. R_0={S}.
2. R_i={B | є правило $A\rightarrow\alpha B\beta\in P$, що $A\in R_{i-1}$, $B\in N$} ∪ R_{i-1} (i=1,2, …).

Оскільки множина N є скінченною, а формула для визначення R_i задає монотонне за i відображення, то існує k ($k \geq 0$), що $R_k = R_{k+1}$. Інакше кажучи, послідовність R_0, R_1, R_2, … стабілізується на k-му кроці. Покладемо $R = R_k$.

Множина UR недосяжних нетерміналів задається формулою $UR = N \setminus R$.

За граматикою $G=(N, T, P, S)$ будуємо граматику $G'=(N', T', P', S')$ таким чином:

1. $N' = N \cap R$
2. $T' = T$
3. $S' = S$
4. $P' = \{ A \to \alpha \in P \mid \alpha \in (R \cup T)^* \}$

Очевидною є наступна лема.

Лема 4.3. Для граматики $G'=(N', T', P', S')$ виконуються наступні властивості:

1. $L(G') = L(G)$ (еквівалентність).
2. Для всіх $A \in N'$ існують такі ланцюжки α та β із $(N' \cup T)^*$, що $S \Rightarrow^*_G \alpha A \beta$ (всі нетермінали є досяжними).

Визначення 4.32. Нетермінал $A \in N$ назвемо *непродуктивним* в граматиці $G=(N, T, P, S)$, якщо з A не можна вивести жодного термінального ланцюжка, тобто не існує виводу виду $A \Rightarrow^*_G t$, $t \in T^*$.

Спочатку визначимо множину *продуктивних* нетерміналів. Множина продуктивних нетерміналів для заданої КВ-граматики $G=(N, T, P, S)$ легко визначається за допомогою наступних індуктивних визначень.

1. $Pr_0 = \{ A \mid$ є правило $A \to t \in P$, що $t \in T^* \}$.
2. $Pr_i = \{ A \mid$ є правило $A \to \gamma \in P$, що $\gamma \in (R_{i-1} \cup T)^* \} \cup R_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Оскільки множина N є скінченною, а формула для визначення Pr_i задає монотонне за i відображення, то існує k ($k \geq 0$), що $Pr_k = Pr_{k+1}$. Інакше кажучи, послідовність Pr_0, Pr_1, Pr_2, … стабілізується на k-му кроці. Покладемо $Pr = Pr_k$.

Множина UPr непродуктивних нетерміналів задається формулою: $UPr = N \setminus Pr$.

За граматикою $G=(N, T, P, S)$ будуємо граматику $G'=(N', T', P', S')$ таким чином:

1. $N' = (N \cap Pr) \cup \{S\}$
2. $T' = T$
3. $S' = S$
4. $P' = \{ A \to \alpha \in P \mid \alpha \in (Pr \cup T)^* \}$

Очевидною є наступна лема.

Лема 4.4. Для граматики $G'=(N', T', P', S')$ виконуються наступні властивості:

1. $L(G') = L(G)$ (еквівалентність).
2. Для всіх $A \in N' \setminus \{S\}$ існують термінальні ланцюжки, що виводяться з A.

Відзначимо, що аксіома S є спеціальним випадком, тому що вона може бути непродуктивною, і разом з тим вона має належати множині нетермінальних символів (за визначенням породжуючих граматик), але в такому випадку множина правил буде порожньою.

До речі, наведений метод побудови множини продуктивних нетерміналів дозволяє дати відповідь на питання, *чи є порожньою мова*, що породжується граматикою $G=(N, T, P, S)$?

Відповідь проста: якщо аксіома є продуктивним нетерміналом, то мова непорожня, якщо ж аксіома – непродуктивний нетермінал, то мова – порожня.

Визначення 4.33. Символ $X \in N \cup T$ назвемо *несуттєвим* у КВ-граматиці $G=(N, T, P, S)$, якщо в ній немає виводу виду $S \Rightarrow^* wXy \Rightarrow^* wxy$, де w, x, y належать T^*.

З наведеного визначення бачимо, що нетермінал X – несуттєвий, якщо X є недосяжним або непродуктивним нетерміналом (крім, можливо, аксіоми). Термінальний символ X є несуттєвим, коли немає жодного породжуваного ланцюжка, що містить X.

Визначення 4.34. Граматика $G=(N, T, P, S)$ називається *зведеною*, якщо в ній немає несуттєвих символів (можливо, крім аксіоми S).

Для побудови зведеної граматики спочатку видаляємо недосяжні та непродуктивні нетермінали. Потім з множини термінальних символів видаляємо

несуттєві символи. Такі термінальні символи не містяться в правих частинах отриманих правил. Отримана граматика буде зведеною.

Лема 4.5. За кожною КВ-граматикою можна побудувати еквівалентну їй зведену граматики, що не містить несуттєвих символів.

Приклад 4.19. Розглянемо граматику $G=(\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$, де P складається з правил:

$S\to a$
$S\to A$
$A\to AB$
$B\to b$
$C\to c$

Спочатку видаляємо недосяжні нетермінали. Отримаємо $R=\{S, A, B\}$. Недосяжним є C. З граматики треба видалити вказаний символ та останнє правило. Далі визначаємо множину продуктивних нетерміналів. Знаходимо, що $Pr=\{S, B\}$. Непродуктивним є A. Після видалення відповідних правил нетермінал B стає недосяжним. Видаляємо і його. Залишається одне правило $S\to a$. Тому суттєвим термінальним символом є лише a. Видаляємо несуттєві термінальні символи. Отримуємо наступну зведену граматику: $G'=(\{S\}, \{a\}, \{ S\to a\}, S)$.

4.9.2. Видалення ε-правил

Визначення 4.35. Назвемо КВ-граматику $G=(N, T, P, S)$ граматикою *без ε-правил* (або нескорочуваною), якщо P не містить ε-правил, тобто правил виду $A\to\varepsilon$.

Лема 4.6 За кожною КВ-граматикою можна побудувати еквівалентну їй (з точністю до порожнього ланцюжка – ε-еквівалентну) граматику без ε-правил.

Доведення. Нехай дана КВ-граматика $G=(N, T, P, S)$, що породжує мову $L(G)$. Проведемо серію перетворень множини P. Якщо множина P містить правила $B\to\alpha A\beta$ і $A\to\varepsilon$ для деяких $A, B\in N$, $\alpha, \beta\in(N\cup T)^*$, то додамо правило $B\to\alpha\beta$ в P. Повторюємо цю процедуру поки множина правил не стабілізується. Далі виключимо із множини P всі правила вигляду $A\to\varepsilon$.

Наведений алгоритм можна уточнити за допомогою наступних індуктивних визначень.

1. $P_0=P$
2. $P_i=\{B\to\alpha\beta \mid \in$ правила $B\to\alpha A\beta\in P, A\to\varepsilon\in P_{i-1}\}\cup R_{i-1}$ $(i=1,2, \ldots)$.

Оскільки множина правил є скінченною, а праві частини нових правил коротші, то формула для визначення P_i задає монотонне за i відображення. Тому існує k $(k\geq 0)$, що $P_k=P_{k+1}$. Інакше кажучи, послідовність $P_0, P_1, P_2, \ldots$ стабілізується на k-му кроці. Покладемо $P'=P_k\setminus\{A\to\varepsilon\in P_k\}$.

Одержана граматика $G'=(N, T, P', S)$ породжує мову $L(G)\setminus\{\varepsilon\}$.

Дійсно, кожен вивід у граматиці G, який не породжує порожнє слово, може бути промодельований у граматиці G', що легко доводиться індукцією по довжині виводу. Так само можна промоделювати виводи в G' виводами в G, використовуючи замість модифікованих правил виду $B\to\alpha\beta$ початкові правила виду $B\to\alpha A\beta$ з подальшим виводом порожнього ланцюжка з A. ■

Приклад 4.20. Розглянемо граматику G з правилами

$S\to aSb$
$S\to bSa$
$S\to\varepsilon$

Застосувавши до цієї граматики описаний метод видалення ε-правил, отримаємо граматику G' з правилами

$S\to aSb$
$S\to bSa$
$S\to ab$
$S\to ba,$

яка еквівалентна з точністю до порожнього ланцюжка граматиці G.

4.9.3. Нормальна форма Хомського

Визначення 4.36. Назвемо КВ-граматику $G=(N, T, P, S)$ граматикою у *нормальній формі Хомського*, якщо її правила мають вигляд $S\to\varepsilon$, $A\to a$, $A\to BC$ для деяких $A, B, C\in N$, $a\in T$.

Лема 4.7. За кожною КВ-граматикою можна побудувати еквівалентну їй граматику у нормальній формі Хомського.

Доведення. Нехай дана КВ-граматика $G=(N, T, P, S)$. Проведемо ряд перетворень цієї граматики так, що породжувана нею мова залишиться незмінною. Спочатку побудуємо еквівалентну граматику $G'=(N', T', P', S')$ без ε-правил.

Далі замінимо у всіх правилах кожен термінальний символ a на новий нетермінальний символ $N(a)$ і додамо до множини P правила $N(a)\to a$ для всіх $a\in T$.

Видалимо правила вигляду $A\to A_1A_2\ldots A_n$, де $n>2$, замінюючи його на наступний ряд нових правил $A\to A_1N(A_2\ldots A_n)$, $N(A_2\ldots A_n)\to A_2N(A_3\ldots A_n)$, …, $N(A_{n-1}\ldots A_n)\to A_{n-1}A_n$ (при цьому додаються нові нетермінальні символи $N(A_2\ldots A_n)$, $N(A_3\ldots A_n)$, …, $N(A_{n-1}\ldots A_n)$).

Якщо для деяких $A\in N, B\in N$ і $\alpha\in(N\cup T)^*$ множина P містить правила $A\to B$, $B\to\alpha$, але не містить правила $A\to\alpha$, то додамо це правило в P. Повторюємо цю процедуру, доки можливо. Після цього видалимо із множини P всі правила вигляду $A\to B$.

Нарешті, змінимо S на S', та додамо правила $S'\to\varepsilon$, $S\to S'$ в тому випадку, коли мова $L(G)$ містить порожній ланцюжок.

Приклад 4.21. Граматика $S\to\varepsilon$, $S\to abSc$ еквівалентна наступній граматиці в нормальній формі Хомського: $S\to\varepsilon$, $S\to AB$, $B\to CD$, $D\to SE$, $C\to b$, $A\to a$, $E\to c$.

4.9.4. Нормальна форма Грейбах

Визначення 4.37. КВ-граматику $G=(N, T, P, S)$ будемо називати граматикою в *нормальній формі Грейбах*, якщо її правила мають вигляд $A\to a\alpha$ ($a\in T$, $\alpha\in(N\cup T)^*$), тобто кожне правило починається з термінального символу.

Сформулюємо без доведення наступне твердження.

Лема 4.8 За кожною КВ-граматикою можна побудувати ε-еквівалентну їй (з точністю до порожнього ланцюжка) граматику у нормальній формі Грейбах.

Зауважимо, що наявність нормальної форми Грейбах дозволяє досить легко за кожною граматикою побудувати еквівалентний їй недетермінований магазинний автомат. Також у таких граматиках довжина виводу термінального ланцюжка не перевищує його довжину.

Приклад 4.22. Граматика $S\to\varepsilon$, $S\to abSc$ еквівалентна наступній граматиці в нормальній формі Грейбах: $S\to abc$, $S\to abSc$.

4.9.5. Рекурсивні нетермінали

Визначення 4.38. Нетермінал $A\in N$ КВ-граматики назвемо *рекурсивним* (*самовставним*, *циклічним*), якщо існує вивід виду $A\Rightarrow^*\alpha A\beta$. Якщо такого виводу немає, то нетермінал називають нерекурсивним.

Лема 4.9. Якщо КВ-граматика G не має рекурсивних нетерміналів, то мова $L(G)$ скінченна.

Дійсно, в цьому випадку може бути лише скінченна кількість виводів, тому породжується лише скінченна мова.

Зауважимо, що зворотне твердження не є справедливим для довільної граматики, бо може бути рекурсивний нетермінал, що породжує скінченну мову. Це можливо для рекурсивного нетерміналу, коли є вивід $A\Rightarrow^*\alpha A\beta$, але завжди з α та β породжуються порожні ланцюжки: $\alpha\Rightarrow^*\varepsilon$ та $\beta\Rightarrow^*\varepsilon$. Крім того, рекурсивні недосяжні або непродуктивні рекурсивні нетермінали не впливають на породжувану мову.

Приклад 4.23. Розглянемо граматику, множина P якої складається з наступних правил виведення:

$S\to AB$
$A\to C$
$A\to a$

$B \to b$
$C \to A$

Мова, породжена цією граматикою, складається з єдиного ланцюжка ab. Але нетермінали A та C є рекурсивними.

Отже, наведена лема дозволяє сформулювати необхідну умову породження КВ-граматикою нескінченних мов: нескінченна мова може породжуватися лише граматикою з рекурсивними нетерміналами. Але ця умова, як показує приклад, не є достатньою.

Для нескінченних мов має місце наступне твердження.

Лема 4.10. Нехай граматика $G=(N, T, P, S)$ породжує нескінченну мову. Тоді існує суттєвий рекурсивний нетермінал A такий, що має місце $A \Rightarrow^* t_1 A t_2$, де $t_1, t_2 \in T^*$ та $|t_1 t_2| \geq 1$.

Ця лема буде використовуватись для доведення властивостей КВ-мов.

4.10. Властивості контекстно-вільних мов

У цьому розділі розглянемо властивості КВ-мов, тобто структуру їх ланцюжків, виразну потужність КВ-мов та їх замкненість відносно операцій над формальними мовами.

Спочатку сформулюємо для КВ-мов аналог твердження (Лема *4.10*), яке характеризувало властивості КВ-граматик.

Лема 4.11 (лема про розростання, лема про накачку). Нехай L – КВ-мова над алфавітом T. Тоді знайдеться таке натуральне число k, що для довільного ланцюжка $t \in L$ довжини не менше k знайдуться ланцюжки u, v, t_1, t_2, $x \in T^*$, для яких вірно $ut_1xt_2v=t$, $|t_1t_2| \geq 1$, $|t_1xt_2| \leq k$ та $ut_1^i x\, t_2^i v \in L$ для всіх $i=0,1,\ldots$.

Ідея доведення полягає в тому, що для породження мови L розглядається граматика у нормальній формі Хомського (нескорочуюча граматика). Тоді для достатньо довгих виводів можна виділити рекурсивний нетермінал A такий, що має місце $A \Rightarrow^* t_1 A t_2$, де $t_1, t_2 \in T^*$ та $|t_1 t_2| \geq 1$ (дивись попередню лему). Звідси і буде випливати твердження леми.

4.11. Операції над формальними мовами

Лема 4.12. Мова $L3=\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ не є КВ-мовою.

Доведення. Якби мова $L3$ була б КВ-мовою, то тоді існували б ланцюжки u, v, t_1, t_2, $x \in \{a,b,c\}^*$ такі, що $ut_1^i x\, t_2^i v \in L3$ для всіх $i=0,1,\ldots$. Зрозуміло, що t_1 (так само як і t_2) не може складатися з різних символів (інакше для деякого i ланцюжок $ut_1^i x\, t_2^i v$ не буде належати $L3$. Але якщо t_1 складається лише з одного символу, то збільшуючи i, можна порушити баланс символів a,b,c. Тому мова $L3$ не може бути КВ-мовою.

Далі почнемо розгляд властивостей КВ-мов відносно теоретико-множинних операцій.

Лема 4.13. Клас КВ-мов замкнений відносно об'єднання.

Дійсно, нехай КВ-мови L_1 та L_2 породжені граматиками $G_1=(N_1, T, P_1, S_1)$ та $G_2=(N_2, T, P_2, S_2)$ відповідно. Задамо граматику G, отриману в результаті об'єднань граматик G_1 та G_2, наступним чином:

- перейменуємо (якщо це потрібно) множини нетерміналів N_1 і N_2 так, щоб $N_1 \cap N_2 = \varnothing$, та додамо новий нетермінал S;
- об'єднаємо множини правил P_1 і P_2, додаючи два нових правила $S \to S_1$ та $S \to S_2$.

Таким чином, отримуємо граматику $G=(N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}, S)$, яка складається з усіх правил граматик G_1 та G_2 з перейменованими множинами нетерміналів та з доданих правил $S \to S_1$, $S \to S_2$. З побудови очевидно, що G породжує всі слова з мов L_1 та L_2. Доведемо, що вона не породжує інших слів.

Згідно твердження (Лема 4.2) перейменування нетерміналів не змінює породжувану мову. Оскільки найпершим правилом у виводі є $S \to S_1$ або $S \to S_2$, то

далі ми продовжуємо вивід або для S_1, або для S_2, породжуючи слова лише з мови L_1 або L_2 відповідно. Отже, L належить класу КВ-мов.

Лема 4.14. Клас КВ-мов не замкнений відносно перетину.

Для доведення цього факту достатньо розглянути приклад.

Візьмемо мови $L1=\{a^n b^m c^m \mid n,m\geq 0\}$ та $L2=\{a^n b^n c^m \mid n,m\geq 0\}$. Ці мови є КВ-мовами. Однак мова $L_1 \cap L_2=\{a^n b^n c^n \mid n\geq 0\}= L3$ не є КВ-мовою.

Лема 4.15. Клас КВ-мов не замкнений відносно доповнення.

Твердження леми випливає з попередньої леми, оскільки, в силу законів де Моргана, будь-який клас мов, замкнений відносно об'єднання та доповнення, має бути замкненим відносно перетину. Тобто з припущення замкненості класу КВ-мов відносно доповнення випливає замкненість відносно перетину, що суперечить попередній лемі.

Приклад 4.24. Побудуємо КВ-граматику, яка задає мову, доповнення до якої не буде КВ-мовою.

Ідея побудови випливає з лем 4.14 та 4.15. Візьмемо мову $L3=\{a^n b^n c^n \mid n\geq 0\}$, яка не є КВ-мовою. Покажемо, що її доповнення – мова $\overline{L3}$ є КВ-мовою. Оскільки $\overline{L3}=\overline{L1\cap L2}=\overline{L1}\cup\overline{L2}$, то спочатку доведемо, що доповнення мов $L1$ та $L2$, тобто мови $\overline{L1}$ та $\overline{L2}$, є КВ-мовами. Дійсно, $L1$, $L2 \subseteq a^*b^*c^*$. Остання мова є регулярною, тому її доповнення $\overline{a^*b^*c^*}$ = ($\{a, b, c\}^* \setminus a^*b^*c^*$) також є регулярною мовою. Ця мова містить слова, які мають заборонені комбінації двох символів, тобто комбінації, які порушують порядок слідування символів у мовах $L1$ та $L2$. Порядок слідування є наступним:

- літера a передує літері b, або літері c;
- літера b передує літері c.

Заперечення цих тверджень дає наступні комбінації: ba, ca, cb. Тому $(\{a,b,c\}^* \setminus a^*b^*c^*)=\{a,b,c\}^*ba\{a,b,c\}^* \cup \{a,b,c\}^*ca\{a,b,c\}^* \cup \{a,b,c\}^*cb\{a,b,c\}^*$. Ця мова задається наступною граматикою:

$S\to R\ ba\ R \mid R\ ca\ R \mid R\ cb\ R$

$R\to \varepsilon \mid aR \mid bR \mid cR$

Отже, $\overline{L1}=\{a,b,c\}^* \setminus L1=(\{a,b,c\}^* \setminus a^*b^*c^*) \cup (a^*b^*c^* \setminus L1)$. Покажемо, що мова $(a^*b^*c^* \setminus L1)$ є КВ-мовою. В ланцюжках цієї мови кількість літер b не співпадає з кількістю літер c. Ця мова задається граматикою:

$S\to ABbE$

$S\to AEcC$

$E\to \varepsilon \mid bEc$

$A\to \varepsilon \mid aA$

$B\to \varepsilon \mid bB$

$C\to \varepsilon \mid cC$

Аналогічно будується граматика другої мови $\overline{L2}=\{a,b,c\}^* \setminus L2=(\{a,b,c\}^* \setminus a^*b^*c^*) \cup (a^*b^*c^* \setminus L2)$, в ланцюжках якої кількість літер a не співпадає з кількістю літер b:

$S\to QbBC$

$S\to AaQC$

$Q\to \varepsilon \mid aQb$

$A\to \varepsilon \mid aA$

$B\to \varepsilon \mid bB$

$C\to \varepsilon \mid cC$

Об'єднуючи три граматики (а це можна зробити, бо колізії нетерміналів не відбувається), отримуємо наступну граматику:

$S\to R\ ba\ R \mid R\ ca\ R \mid R\ cb\ R \mid ABbE \mid AEcC \mid QbBC \mid AaQC$

$R\to \varepsilon \mid aR \mid bR \mid cR$

$E\to \varepsilon \mid bEc$

$Q\to \varepsilon \mid aQb$

$A\to \varepsilon \mid aA$

$B \to \varepsilon \mid bB$

$C \to \varepsilon \mid cC$

Ця граматика породжує КВ-мову, але її доповнення не є КВ-мовою. ■

Розглянемо тепер деякі специфічні операції над мовами, що відповідають більш конкретному рівню абстракції, який трактує ланцюжки як послідовності символів.

Лема 4.16. Клас КВ-мов замкнений відносно конкатенації.

Дійсно, нехай КВ-мови L_1 та L_2 породжені граматиками $G_1=(N_1, T, P_1, S_1)$ та $G_2=(N_2, T, P_2, S_2)$ відповідно. Будемо вважати, що $N_1 \cap N_2=\varnothing$. Візьмемо символ $S \notin N_1 \cup N_2$. Тоді мова $L_1 \cdot L_2=\{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$ буде породжена КВ-граматикою $G=(N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}, S)$. Це випливає з того, що вивід будь-якого ланцюжка починається з доданого правила $S \to S_1 S_2$, а далі будується з правил P_1 та P_2, які виводять лише слова з мов L_1 та L_2 відповідно.

Лема 4.17. Клас КВ-мов замкнений відносно ітерації.

Дійсно, нехай КВ-мова L породжена граматикою $G=(N, T, P, S)$. Тоді мова L^* буде породжена КВ-граматикою $G=(N \cup \{S'\}, T, P \cup \{ S' \to S'S, S' \to \varepsilon\}, S')$, де $S' \notin N$. Це випливає з того, що вивід будь-якого слова починається з доданого правила $S' \to S'S$, що дозволяє породжувати будь-яку кількість ланцюжків з мови L.

Лема 4.18. Клас КВ-мов замкнений відносно дзеркального відображення (обернення) ланцюжків.

Дійсно, нехай КВ-мова L породжена граматикою $G=(N, T, P, S)$. Тоді мова $\tilde{L}$ буде породжена КВ-граматикою $G=(N, T, \tilde{P}, S)$, де $\tilde{P}=\{A \to \tilde{\alpha} \mid A \to \alpha \in P\}$.

Визначимо операції дублювання та дзеркального дублювання наступним чином: $D(L)=\{ ww \mid w \in L\}$ та $DM(L)=\{ w\tilde{w} \mid w \in L\}$.

Лема 4.19. Клас КВ-мов не замкнений відносно операцій дублювання та дзеркального дублювання.

Для доведення цього факту достатньо розглянути приклад. Візьмемо КВ-мову $L=\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. Тоді мови $D(L)=\{ a^n b^n a^n b^n \mid n \geq 0 \}$ та $DM(L)=\{ a^n b^{2n} a^n \mid n \geq 0\}$ не можуть бути КВ-мовами в силу леми про розростання.

Таким чином, клас КВ-мов не утворює підалгебру теоретико-множинної алгебри формальних мов, бо не є замкненим відносно перетину та доповнення. Тому для КВ-мов розглядаються інші алгебри, в першу чергу алгебра $ACF=\{CF, \cup, \cdot\}$ з операціями об'єднання та конкатенації. Алгебри з такими операціями будемо називати *слабкими алгебрами формальних мов* (*САФМ*). Виявляється, цих операцій достатньо для подання КВ-мов за допомогою рівнянь у цій алгебрі. Цей факт буде розглянуто пізніше.

4.12. Дерева виводу

Визначення 4.39. Нехай $G = (N, T, P, S)$ – контекстно-вільна граматика і $S \Rightarrow_G \alpha_1 \Rightarrow_G \alpha_2 \Rightarrow_G \ldots \Rightarrow_G \alpha_n$ – вивід у G. Будемо називати цей вивід лівостороннім, якщо для кожного i, $0 \leq i < n$, можемо записати α_i у вигляді $w_i A_i \beta_i$, $\alpha_{i+1} - w_i \gamma_i \beta_i$, де $A_i \to \gamma_i \in P$, $w_i \in T^*$ і $A_i \in N$. Змістовно вивід є лівостороннім, якщо на кожному кроці заміняється найлівіший нетермінал.

Очевидним є наступне твердження.

Лема 4.20. Нехай $G = (N, T, P, S)$ – контекстно-вільна граматика. Якщо $w \in L(G)$, то існує лівосторонній вивід w в G.

Визначення 4.40. Для контекстно-вільних граматик кожному виводу вигляду $S \Rightarrow_G \alpha_1 \Rightarrow_G \alpha_2 \Rightarrow_G \ldots \Rightarrow_G \alpha_n$ можна співставити скінченне впорядковане дерево, яке має назву дерева виводу. Вершини дерева відмічені символами алфавіту $N \cup T$. Корінь дерева відмічено початковим символом S. Якщо у виводі було застосовано правило $S \to \alpha$, то кожному символу ланцюжка α, на який замінюється символ S на першому кроці виводу, ставиться у відповідність вершина дерева, і до неї проводиться дуга із кореня. Отримані таким чином безпосередні нащадки кореня впорядковані відповідно до їх порядку у ланцюжку α. Для тих із одержаних вершин,

що відмічені символами з множини N, робиться аналогічна побудова і т.ін. Кроною дерева виводу називається слово, отримане із термінальних символів, записаних на вершинах при їх обході зліва-направо.

Приклад 4.25. Візьмемо наступну граматику для мови $L=L1 \cup L2$, де $L1=\{a^n b^m c^m \mid n,m \geq 0\}$ та $L2=\{a^n b^n c^m \mid n,m \geq 0\}$:

$S \to AB \mid CD \mid \varepsilon$

$A \to \varepsilon \mid aA$

$B \to \varepsilon \mid bBc$

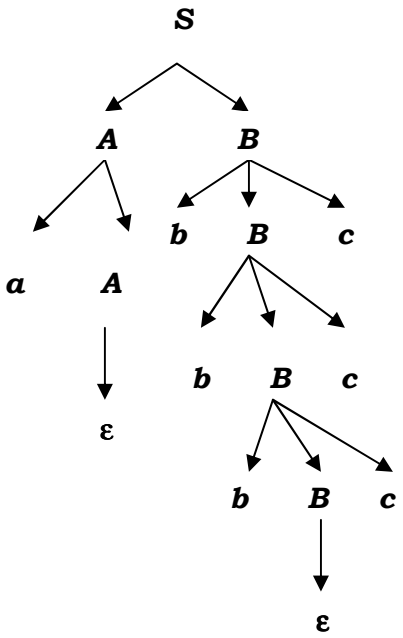
$C \to \varepsilon \mid aCb$

$D \to \varepsilon \mid cD$

Виводу

$S \Rightarrow AB \Rightarrow AbBc \Rightarrow aAbBc \Rightarrow aAbbBcc \Rightarrow aAbbbBccc \Rightarrow abbbBccc \Rightarrow abbbccc$

відповідає наступне дерево виводу:



Неважко довести таку лему.

Лема 4.21. Нехай $G = (N, T, P, S)$ – контекстно-вільна граматика і $w \in L(G)$. Тоді існує взаємно-однозначна відповідність між лівосторонніми виведеннями слова w в граматиці G і деревами виводу в граматиці G, кроною яких є w.

Дерево виводу фактично задає клас еквівалентності виводів, які розрізняються лише порядком застосування правил. Тому для задач, для яких порядок застосувань не є важливим, доцільно спиратися на дерева виводу. Крім того, дерева виводу фактично задають структурну організацію ланцюжка, яка є важливою в різних застосуваннях граматик, зокрема, і в семантиці.

4.13. Однозначні та неоднозначні граматики

Визначення 4.41. КВ-граматика називається неоднозначною, якщо існує ланцюжок, котрий має два або більше різних лівосторонніх виводів. Інакше КВ-граматика називається однозначною.

Приклад 4.26. КВ-граматика із прикладу *4.25* неоднозначна. Слово *aabbcc* має два різних лівосторонніх вивода:

$S \Rightarrow AB \Rightarrow aAB \Rightarrow aaAB \Rightarrow aaB \Rightarrow aabBc \Rightarrow aabbBcc \Rightarrow aabbcc$

та

$S \Rightarrow CD \Rightarrow aCbD \Rightarrow aaCbbD \Rightarrow aabbD \Rightarrow aabdDc \Rightarrow aabbDcc \Rightarrow aabbcc$

Також неоднозначною є граматика (БНФ) мови *SIPL*, наведена в першому розділі.

Приклад 4.2. Мова Діка – це мова, що породжена граматикою $G_k = (\{S\}, T, P, S)$, де $k>0$, $T = \{a_1, a_2,\ldots, a_k, b_1, b_2,\ldots, b_k\}$, а P складається з продукцій $S\to SS$, $S\to\varepsilon$, $S\to a_iSb_i$, $1\le i\le k$. Нехай $L_k=L(G_k)$. Зрозуміло, що мова Діка є контекстно-вільною мовою. Можна вважати, що мова Діка – це множина усіх ланцюжків урівноважених дужок k різних типів, де a_i та b_i – це ліва та права дужки для кожного i. Мова Діка є важливою в теорії контекстно-вільних граматик. Вона, зокрема, утворює основу довільної контекстно-вільної мови, тому що будь-яка КВ-мова є гомоморфним образом мови Діка. Наведена граматика не є однозначною. Але наступна граматика $S \to \varepsilon$, $S \to a_1Sb_1S,\ldots, S \to a_nSb_nS$ – однозначна.

Визначення 4.42. КВ-мова називається *суттєво неоднозначною*, якщо кожна КВ-граматика, яка породжує цю мову, є неоднозначною.

Приклад 4.28. КВ-мова $L=L1\cup L2$ з прикладу 4.25, де $L1=\{a^nb^mc^m \mid n,m\ge 0\}$ та $L2=\{a^nb^nc^m \mid n,m\ge 0\}$ є суттєво неоднозначною. Доведення цього факту наводиться в книзі [1], стор. *234-236*.

Неоднозначність є важливим поняттям теорії мов. Якщо граматика, яка використовується для породження мови програмування, є неоднозначною, то це може призвести до її неоднозначної семантичної інтерпретації, що є небажаним явищем.

4.14. Розв'язні та нерозв'язні проблеми КВ-граматик та мов

Масову проблему називають *алгоритмічно розв'язною*, або *розв'язною*, якщо предикат, який її визначає, є рекурсивний, інакше проблему називають *алгоритмічно нерозв'язною*, або *нерозв'язною*.

Масову проблему називають *частково алгоритмічно розв'язною*, або *частково розв'язною*, або *напіврозв'язною*, якщо предикат, який її визначає, є частково рекурсивний.

Для КВ-граматик та мов наступні проблеми є *розв'язними*:

1. Чи є мова, породжувана КВ-граматикою, порожньою?
2. Чи є мова, породжувана КВ-граматикою, скінченною?
3. Чи є мова, породжувана КВ-граматикою, нескінченною?
4. Чи належить ланцюжок w мові, що породжується КВ-граматикою?

Для КВ-граматик та КВ-мов наступні проблеми є *нерозв'язними*.

1. Чи є перетин мов, породжуваних двома КВ-граматиками, порожнім?
2. Чи є перетин мов, породжуваних двома КВ-граматиками, скінченним?
3. Чи є перетин мов, породжуваних двома КВ-граматиками, нескінченним?
4. Чи є КВ-граматика однозначною?
5. Чи є порожнім (скінченним, нескінченним) доповнення до КВ-мови?
6. Чи співпадає КВ-мова, породжувана граматикою, з T^*?
7. Чи є еквівалентними дві КВ-граматики?
8. Чи є регулярною мова, породжувана КВ-граматикою?

Зазначимо, що проблеми, розв'язні для КВ-граматик та мов будуть розв'язними і для регулярних граматик та мов. Разом з тим деякі проблеми, нерозв'язні для КВ-граматик та мов, можуть бути розв'язними для регулярних граматик та мов. Зокрема, такими є вищенаведені проблеми 1–7, переформульовані на випадок регулярних граматик та мов.

4.15. Рівняння в алгебрах формальних мов

Граматики та БНФ є формалізмами, що задають мову «поштучно», «поелементно», вказуючи механізм породження окремих слів. Разом з тим сама форма граматик та БНФ підштовхує до думки, що їх можна розглядати як системи рівнянь, розв'язками яких є мови. Щоб перейти до такого тлумачення, попередньо введемо необхідні визначення.

Визначення 4.43. *Слабкою алгеброю формальних мов над алфавітом T* будемо називати алгебру $AL=(2^{T^*}, \cup,)$ з операціями об'єднання та добутку мов.

Визначення 4.44. *Множиною виразів LExp* над множиною змінних *Var* та множиною мов-констант $LS=\{ L_i \mid L_i \subseteq T^*, i \in I\}$ називається множина, задана наступним індуктивним визначенням:

1) якщо $x \in Var$, то $x \in Lexp$,
2) якщо $L \in LS$, то $L \in Lexp$,
3) якщо $t, t' \in Lexp$, то $t \cup t'$, $t \cdot t' \in Lexp$.

Визначення 4.45. *Формальним рівнянням* (формальною рівністю) над алгеброю *AL* називається запис вигляду $t=t'$, де $t, t' \in Lexp$.

Визначення 4.46. *Інтерпретацією* (означуванням, оцінкою) змінних називається довільне відображення ν: $Var \to 2^{T^*}$. Інтерпретація змінних однозначно (та гомоморфно) продовжується до відображення μ_ν: $LExp \to 2^{T^*}$ *інтерпретації виразів*, параметром якого є інтерпретація змінних ν, яке задається індуктивно за побудовою виразу $e \in Lexp$:

1) якщо $e = x$ ($x \in Var$), то $\mu_\nu(e) = \nu(x)$,
2) якщо $e = L$ ($L \in LS$), то $\mu_\nu(e) = L$,
3) якщо $e = t \cup t'$, то $\mu_\nu(e) = \mu_\nu(t) \cup \mu_\nu(t')$,
4) якщо $e = t \cdot t'$, то $\mu_\nu(e) = \mu_\nu(t) \cdot \mu_\nu(t')$.

Визначення 4.47. Наведене визначення дозволяє абстрагувати відображення μ_ν до оператора μ: $LExp \to ((Var \to 2^{T^*}) \to 2^{T^*})$. Вираз e, який містить змінні $x_1, \ldots, x_n$, будемо позначати $e(x_1, \ldots, x_n)$, а відповідний оператор – $\mu(e(x_1, \ldots, x_n))$.

Приклад 4.29. Нехай $Var = \{x, y, z\}$, $\nu(x)=\{a,ab\}$, $\nu(y)=\{\varepsilon,b,cc\}$, $\nu(z)=\{bb,c\}$. Тоді вираз $x^2z\{a\}y$ інтерпретується таким чином:

$\mu_\nu(x^2z\{a\}y)=\{a,ab\}^2\{bb,c\}\{a\}\{\varepsilon,b,cc\}=\{aa, aab, aba, abab\}\{bba,ca\}\{\varepsilon,b,cc\}=$
$\{aabba, aabbba, ababba, ababbba, aaca, aabca, abaca, ababca\}\{\varepsilon,b,cc\} =$
$\{aabba, aabbba, ababba, ababbba, aaca, aabca, abaca, ababca, b,cc\} =$
$\{aabbab, aabbbab, ababbab, ababbbab, aacab, aabcab, abacab, ababcab, aabbacc, aabbbacc, ababbacc, ababbbacc, aacacc, aabcacc, abacacc, ababcacc\}$.

Визначення 4.48. Інтерпретація (означування) змінних ν: $Var \to 2^{T^*}$ називається *розв'язком рівняння* $t=t'$, якщо $\mu_\nu(t)=\mu_\nu(t')$.

Визначення 4.49. Розв'язком системи рівнянь $\{t_1=t'_1, \ldots, t_n=t'_n\}$ є така інтерпретація змінних, яка кожне рівняння перетворює у рівність.

Визначення 4.50. Рівняння виду $x=t$, де $x \in Var$, $t \in Lexp$ називається *рекурсивним*. Якщо у виразі t фігурують лише скінченні мови, то рівняння називають *слабкорекурсивним*. Аналогічно вводяться поняття рекурсивних та слабкорекурсивних систем рівнянь.

Розв'язок рівнянь в алгебрах мов можна знаходити різними методами, але найважливішим є метод поступових наближень.

Приклад 4.30

Розглянемо мову $L=\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. Ця мова породжується наступною простою граматикою G: $S \to \varepsilon \mid aSb$.

Цій граматиці відповідає наступне рівняння: $S=\{\varepsilon\} \cup \{a\}S\{b\}$. Позначимо оператор $\mu(\{\varepsilon\} \cup \{a\}S\{b\})$ як $\varphi(S)$.

Розв'язок рівняння знаходять методом послідовних наближень. Найперше наближення – порожня мова $\varnothing$. Наступні наближення отримуємо підстановкою в оператор $\varphi(S)$ замість S попереднього наближення. (Для спрощення тут можна

говорити про підставку в саме рівняння). Отримуємо наступну послідовність наближень:

$R^{(0)}= \varnothing$;
$R^{(1)}= \{\varepsilon\}$;
$R^{(2)}= \{\varepsilon\}\cup\{ab\}=\{\varepsilon, ab\}$;
$R^{(3)}= \{\varepsilon, ab\}\cup\{ab, aabb\}=\{\varepsilon, ab, aabb\}$;

… … …
$R^{(i+1)}=R^{(i)}\cup\{a\}\ R^{(i)}\{b\}$;
… … …

Вважаємо, що

$R=\cup_{i\in\omega} R^{(i)}$.

(Тут ω є першим граничним ординаром і може тлумачитись як множина натуральних чисел. Детальніше про це буде сказано у наступному розділі посібника.)

Використовуючи оператор φ, отримуємо, що $R^{(i+1)}=\varphi(R^{(i)})$ та $R=\cup_{i\in\omega}\varphi(R^{(i)})$. Мова R і буде розв'язком нашого рівняння.

Щоб це довести, розглянемо наступну властивість оператора φ.

Лема 4.22 (неперервність φ). $\varphi(\cup_{i\in\omega} R^{(i)})= \cup_{i\in\omega} \varphi(R^{(i)})$.

Доведення

Спочатку доведемо, що $\varphi(\cup_{i\in\omega} R^{(i)})\subseteq\cup_{i\in\omega} \varphi(R^{(i)})$. Нехай $x\in\varphi(\cup_{i\in\omega} R^{(i)})$. Тоді $x\in\{\varepsilon\}$, або $x\in\{a\}(\cup_{i\in\omega} R^{(i)})\{b\}$. У першому випадку очевидно, що $x\in\cup_{i\in\omega} \varphi(R^{(i)})$. У другому випадку $x\in\varphi(R^{(i+1)})$, тому $x\in\cup_{i\in\omega} \varphi(R^{(i)})$.

Тепер доведемо, що $\varphi(\cup_{i\in\omega} R^{(i)})\supseteq\cup_{i\in\omega} \varphi(R^{(i)})$. Нехай тепер $x\in\cup_{i\in\omega} \varphi(R^{(i)})$. Тоді існує $k\in\omega$, що $x\in\varphi(R^{(k)})$. Це означає, що $x\in\{\varepsilon\}$, або $x\in\{a\}(R^{(k-1)})\{b\}$. Тому $x\in\{a\}(\cup_{i\in\omega} R^{(i)})\{b\}$, тобто $x\in\varphi(\cup_{i\in\omega} R^{(i)})$. ■

Умова неперервності фактично говорить, що $R=\cup_{i\in\omega}\varphi(R^{(i)})$ є розв'язком рівняння $S=\{\varepsilon\}\cup\{a\}S\{b\}$. Дійсно, для $i\in\omega$ маємо, що $\varphi(R^{(i)})=R^{(i+1)}$, тому $\cup_{i\in\omega} \varphi(R^{(i)})=\cup_{i\in\omega} R^{(i+1)}=\cup_{i\in\omega} R^{(i)}$. Остання рівність випливає з того, що $R^{(0)}= \varnothing$, тому маємо, що $R=\varphi(R)$.

Неважко довести, що цей розв'язок співпадає з мовою, породженою граматикою G.

Лема 4.23. $L(G)=R$.

Доведення проводиться індукцією. Індуктивне твердження наступне: нехай $L(G)^k$ – усі термінальні слова, що виводяться з S виводами довжини не більше k, тоді $L(G)^k= R^{(k)}$.

База індукції. Для $k=0$ маємо $L(G)^0= R^{(0)}= \varnothing$.

Крок індукції. Нехай індуктивна гіпотеза справедлива для довільного k. Доведемо її справедливість для $k+1$.

Дійсно, виводи довжини не більше ніж $k+1$ отримуємо або застосуванням правила $S\to\varepsilon$ (тоді гіпотеза справедлива), або з виводів довжини не більш ніж k після застосування правила $S\to aSb$. У цьому випадку, всі породжені ланцюжки будуть належати $R^{(k+1)}$. І навпаки, якщо ланцюжок належить $R^{(k+1)}$, то він виводиться не більше ніж за $k+1$ крок.

Доведенням леви завершується розгляд прикладу 4.30.

У наведеному прикладі ми знайшли лише один розв'язок рівняння. Неважко довести, що цей розв'язок дійсно є єдиним. Доведення можна провести від супротивного, вибравши з іншого розв'язку R' найменше за довжиною слово, що не належить R, тоді з рівняння має випливати існування ще меншого слова, що не належить R. Отримане протиріччя говорить про єдиність розв'язку. (Деталі доведення з'ясуйте самостійно.)

Виникає питання, чи завжди розв'язок має бути єдиним. Рівняння $S=SS$ є прикладом того, що це не так, бо воно має безліч розв'язків. Наприклад, його розв'язками є такі мови: $S=\varnothing$, $S=\{\varepsilon\}$, $S=\{a\}^*$, $S=\{aa\}^*$, $S=\{ab\}^*$, $S=\{aba\}^*$ і т.ін.

Інші питання, пов'язані з розв'язком рекурсивних рівнянь, розглянемо у наступному розділі, присвяченому рекурсії.

Висновки

У цьому розділі буо розглянуто основні методи подання синтаксису програм. Серед таких методів можна виділити методи породження та сприйняття мов. Формалізмами породження мов є породжуючі граматики, сприйняття мов – автомати (машини). Синтаксис мов програмування звичайно подається формалізмами, які еквівалентні контекстно-вільним граматикам. У розділі визначено класифікацію граматик за Хомським, зв'язок класів граматик з класами автоматів, та проведено детальне дослідження класу контекстно-вільних граматик.

Викладені у цьому розділі питання розглядаються у книжках [1, 5, 9].

Основні результати цього розділу полягають у наступному:

1. Побудовано над-абстрактну та абстрактну моделі формальних мов як множин речень.
2. Побудовано дескриптивні формалізми визначення мов як транзиційних систем та породжуючих граматик.
3. Дані визначення основних понять формальних мов та породжуючих граматик: відношення безпосереднього виводу, його рефлексивного транзитивного замикання, виводу слова, породженої мови.
4. Наведено приклад доведень у теорії породжуючих граматик.
5. Наведено класифікацію класів граматик за Хомським.
6. Дано визначення загально-контекстних граматик.
7. Наведено визначення різних формалізмів сприйняття мов.
8. Встановлено еквівалентність між класами граматик та відповідними класами автоматів (машин).
9. Розглянуто методи подання синтаксису мов програмування.
10. Розглянуто властивості контекстно-вільних граматик та мов.
11. Сформульовано розв'язні та нерозв'язні проблеми породжуючих граматик та мов.
12. Розглянуто рівняння в алгебрах мов.

Контрольні питання

1. Дайте визначення синтаксичного аспекту програм.
2. Від яких аспектів програм абстрагуються при вивченні синтаксичного аспекту? Сформулюйте відповідний принцип.
3. Сформулюйте принцип, який вказує на співвідношення синтаксичного та семантичного аспектів?
4. Поясніть вживання терміну «формальна мова».
5. Обґрунтуйте принцип теоретико-множинного тлумачення формальних мов. Порівняйте цей принцип з теоретико-функціональним принципом формалізації програм.
6. Як визначається над-абстрактна модель формальної мови?
7. Як визначається абстрактна модель формальної мови?
8. Обґрунтуйте конкретизацію речень як послідовностей символів. Сформулюйте відповідний принцип.
9. Обґрунтуйте необхідність введення дескриптивної компоненти у модель формальної мови.
10. Обґрунтуйте вибір транзиційної системи як дескриптивної моделі формальних мов. Сформулюйте відповідний принцип.
11. Обґрунтуйте необхідність подальшої конкретизації транзиційних систем. У чому суть такої конкретизації?
12. Вкажіть відображення абстракції та конкретизації для чотирьох моделей формальної мови. Намалюйте відповідну таблицю.
13. Дайте визначення понять алфавіту, ланцюжка, порожнього ланцюжка, підланцюжка, операцій конкатенації та піднесення до степені.
14. Що таке вільна напівгрупа?

15. Що таке формальна мова?
16. Визначте теоретико-множинні операції над формальними мовами.
17. Що таке операція конкатенації (добутку) формальних мов?
18. Що таке операція ітерації формальних мов?
19. Що таке операція обернення формальної мови?
20. Що таке породжуюча граматика?
21. Дайте визначення відношення безпосередньої вивідності та його рефлексивного транзитивного замикання.
22. Дайте визначення виводу в граматиці.
23. Що таке словоформа (сентенційна форма)?
24. Дайте визначення мови, що породжується граматикою.
25. Вкажіть на екстенсіональні та інтенсіональні аспекти формальних мов та породжуючих граматик.
26. Визначте класи граматик за Хомським. Яке співвідношення цих класів?
27. Які граматики називаються загально-контекстними?
28. Як співвідносяться класи породжуючих та загально-контекстних граматик?
29. У чому полягає відмінність між механізмами породження та сприйняття мов?
30. Які особливості вирізняють автомати від граматик?
31. Дайте визначення машини Тьюрінга. Вкажіть на інтенсіональні та екстенсіональні аспекти для формалізму машин Тьюрінга. Як визначається мова, яка розпізнається машиною Тьюрінга?
32. Як співвідносяться машини Тьюрінга та породжуючі граматики?
33. Дайте визначення лінійно-обмеженого автомата.
34. Як співвідносяться лінійно-обмежені автомати та породжуючі граматики?
35. Дайте визначення магазинного автомата.
36. Як співвідносяться магазинні автомати та породжуючі граматики?
37. Дайте визначення скінченного автомата.
38. Як співвідносяться скінченні автомати та породжуючі граматики?
39. Дайте визначення регулярної мови.
40. Як пов’язані регулярні мови з породжуючими граматиками та автоматами?
41. Які методи подання синтаксису використовуються для мов програмування?
42. Що таке нормальні форми Бекуса–Наура?
43. Які конструкції вживаються для модифікованих БНФ?
44. Що таке синтаксичні діаграми?
45. Як зв’язані БНФ, модифіковані БНФ, контекстно-вільні граматики та синтаксичні діаграми?
46. Сформулюйте основні властивості КВ-граматик.
47. Що таке продуктивні та досяжні нетермінали?
48. Яка граматика називається зведеною?
49. Дайте визначення різним нормальним формам КВ-граматик.
50. Що таке рекурсивний нетермінал?
51. Сформулюйте основні властивості КВ-мов.
52. Сформулюйте властивості замкненості КВ-мов відносно основних операцій.
53. Що таке дерево виводу в КВ-граматиці?
54. Які граматики називаються однозначними?
55. Які мови називаються суттєво неоднозначними?
56. Сформулюйте розв’язні проблеми КВ-мов та граматик.
57. Сформулюйте нерозв’язні проблеми КВ-мов та граматик.
58. Що таке алгебра мов?
59. Що таке рівняння в алгебрі мов?
60. Яким чином знаходяться розв’язки рівнянь в алгебра мов?

Вправи

1. Побудуйте приклади транзиційних систем і мов, які вони задають.
2. Побудувати граматику G для мови $L=\{a^n b^{2n} c^n \mid n>0\}$, довести, що $L(G)=L$, та що мова L не є КВ мовою.
3. Побудувати граматику G і систему рівнянь S для мови $L=\{a^{2n} b^n \mid n>0\}$ та довести, що $L(G)=L$ та $R(S)=L$.
4. Перетворіть граматику
   $S\to A \mid B$
   $A\to aB \mid bS \mid b$
   $B\to AB \mid Ba$
   $B\to AS \mid b$
   на еквівалентну їй КВ-граматику, що не містить несуттєвих символів.
5. Побудуйте граматику без ε–правил, еквівалентну даній
   $S\to ABC$
   $A\to BB \mid \varepsilon$
   $B\to CC \mid a$
   $C\to AA \mid b$

6. Опишіть мову, яка породжується правилами
   $S\to bSS$
   $S\to a$
7. Побудуйте, якщо це можливо, КВ-граматики, які породжують наступні мови:
   а) $\{a^{n*n} \mid n\geq 1\}$;
   б) $\{\alpha \mid \alpha\in\{a, b, c\}^*, \ |\alpha|_a=|\alpha|_b=|\alpha|_c\}$;
   в) $\{ww \mid w\in\{a, b\}^*\}$;
   г) $\{a^m b^n a^m b^n \mid m\geq 1, n\geq 1\}$.

8. Для вищенаведених мов побудуйте відповідні автомати, які розпізнають ці мови.

5. Теорія рекурсії (теорія найменшої нерухомої точки)

5.1. Рекурсивні визначення та рекурсивні рівняння

Рекурсивні визначення – це такі визначення, в правій частині яких використовується посилання на поняття, що визначається. Такі визначення мають вид

$$x = \varphi(x).$$

Рекурсивне визначення можна тлумачити

- операційно, тобто вказати алгоритм, за яким можна обчислити рекурсивно визначений об'єкт;
- або денотаційно, тобто як рівняння, розв'язком якого є нерухомі точки (НТ) оператора φ.

Зауваження 5.1. Тут на $\varphi(x)$ ми дивимось синкретично (не розрізнюючи різні аспекти), та тлумачимо $\varphi(x)$ або як вираз у певній алгебрі (коли говоримо про рівняння), або як оператор у цій алгебрі (коли говоримо про нерухомі точки оператора).

Зауваження 5.2. Часто також розглядаються системи рівнянь виду

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ ... \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}$$

Такі системи зводяться до одного рівняння над послідовністю $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Історія математики та логіки говорить про необхідність обережного поводження з рекурсією. Розглянемо приклад.

Припустимо, що ми хочемо визначити суму $2+2^2+2^3+2^4+\ldots$. Позначимо цю суму через x, тобто $x=2+2^2+2^3+2^4+\ldots$. Якщо винести 2 з усіх членів суми, крім першого члена, отримаємо наступне рекурсивне визначення: $x=2+2x$. Звідси $x = -2$, що зовсім не відповідає очікуванню.

Рекурсія може бути прихованою (неявною). Для ілюстрації розглянемо парадокс Рассела з теорії множин. А саме, множина x називається *нормальною*, якщо $x \notin x$. Позначимо через N множину усіх нормальних множин, тобто $N = \{ x \mid x \notin x \}$. Парадокс виявляється, якщо запитати, чи є N нормальною множиною? Отримуємо, що $N \in N$ тоді і тільки тоді, коли $N \notin N$. Тут рекурсія виступає неявно, бо в визначенні N (неявно) припускається, що N може бути елементом N.

Наведені приклади говорять про необхідність детального вивчення рекурсії, щоб уникнути некоректностей та парадоксів.

Рекурсія широко використовується в мовах програмування. У таких випадках вона, як правило, визначається операційно, тобто вказується алгоритм, за яким можна обчислити рекурсивну процедуру або функцію.

Традиційні проблеми, що розглядаються для такого роду рівнянь, є проблеми існування та опису всіх можливих розв'язків, зокрема, формулювання умов єдиності розв'язку.

Існують різні методи розв'язку рекурсивних рівнянь. Найчастіше використовують метод послідовних наближень, який полягає у наступному.

Береться початкове наближення d_0. Далі обчислюється послідовність наближень $d_1 = \varphi(d_0), d_2 = \varphi(d_1), \ldots$.

За результат береться границя обчисленої послідовності: $d = \lim_{i \in \omega} d_i$.

Зауваження 5.3. У теорії найменших нерухомих точок зазвичай використовується позначення виду $i \in \omega$, де ω – перший нескінченний ординал, тобто ω={*0, 1, 2, . . .*} – множина натуральних чисел.

Метод послідовних наближень графічно представлений на рис. *5.1*. Наближення d_0, d_1, d_2 ... мають границю *d*, яка є коренем рівняння $x = \varphi(x)$.

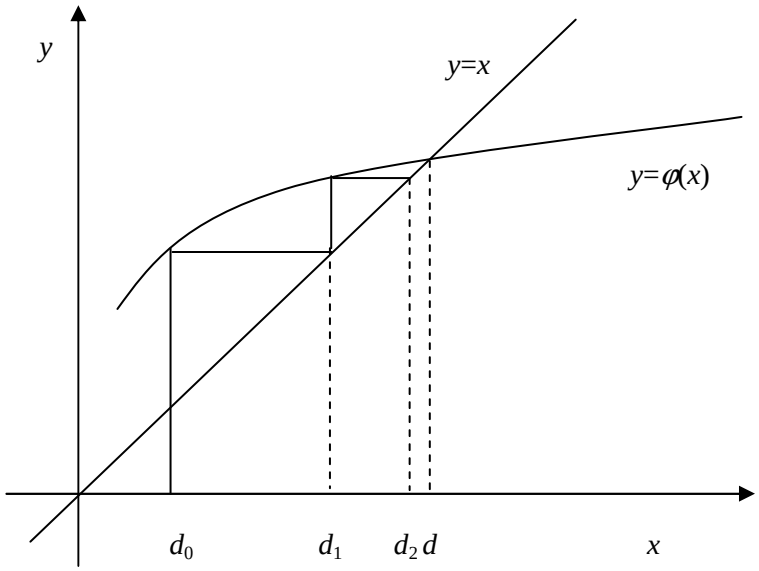


Рисунок 5.1 Розв'язок рівнянь методом послідовних наближень

5.2. Частково впорядковані множини, границі ланцюгів та ω-області

Для того, щоб метод послідовних наближень міг бути застосований, необхідно задати відношення «наближеності» (це – частковий порядок), початкове наближення (у нашому випадку це буде найменший елемент), та гарантувати існування границі (повнота).

Вказані поняття можна формалізувати наступним чином.

Визначення 5.1. Множина *D* з заданим бінарним відношенням $\leq \subseteq D \times D$ називається частково впорядкованою множиною $(D, \leq)$ (ЧВМ), якщо для відношення ≤ виконуються наступні аксіоми часткового порядку ($d, d_1, d_2, d_3 \in D$):

1. Рефлексивність: $d \leq d$.
2. Транзитивність: $d_1 \leq d_2 \,\&\, d_2 \leq d_3 \Rightarrow d_1 \leq d_3$.
3. Антисиметричність: $d_1 \leq d_2 \,\&\, d_2 \leq d_1 \Rightarrow d_1 = d_2$.

Визначення 5.2. Нехай $(D, \leq)$ – ЧВМ, $X = \{d_i\}_{i \in \omega}$ – індексована підмножина *D*. Ця підмножина – *ланцюг*, якщо $d_0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \ldots$.

Для частково впорядкованих множин границею ланцюга вважається його точна верхня границя (супремум, найменша мажоранта).

Визначення 5.3. Нехай $X = \{d_i\}_{i \in \omega}$ – ланцюг в ЧВМ $(D, \leq)$. *Границею X* (позначається $lim\ X = sup\ X = \coprod X = \lim\limits_{i \in \omega} d_i = \sup\limits_{i \in \omega} d_i = \coprod\limits_{i \in \omega} d_i$) називається точна верхня границя (супремум, найменша мажоранта) множини *X*, якщо вона існує.

В теорії рекурсії зазвичай використовується позначення $\coprod_{i\in\omega} d_i$, або $\coprod_{i\in\omega} d_i$, або $\coprod\{d_i \mid i\in\omega\}$, або $\coprod X$. Останнім позначенням і будемо користуватися у подальшому.

Визначення 5.4. ЧВМ $(D,\leq)$ – повна, якщо для довільного ланцюга $\{d_i\}_{i\in\omega}$ з D існує його границя $\coprod_{i\in\omega} d_i$ (що належить D).

Інтегруючи наведені визначення, отримуємо поняття ω-області.

Визначення 5.5. Множина D – *ω-область* (також вживається термін *індуктивна множина, ω-домен*), якщо

1) на D введено частковий порядок $\leq$;
2) в D існує найменший елемент $\perp$;
3) D є повною ЧВМ.

5.3. Неперервні відображення

Центральним поняттям теорії рекурсії є поняття неперервного відображення. На відміну від визначення неперервності за Коші (ε-δ визначення) будемо користуватися більш абстрактним визначенням неперервності за Гейне.

Визначення 5.6. Відображення $\varphi: D\to D$, задане на ЧВМ $(D,\leq)$, – *неперервне* за Гейне, якщо для будь-якого ланцюга $\{d_i\}_{i\in\omega}$ з D виконується рівність

$$\varphi(\coprod_{i\in\omega}(d_i)) = \coprod_{i\in\omega}\varphi(d_i).$$

Зауваження 5.4. Поняття неперервного відображення узагальнюється для відображень типу $\varphi: D\to R$, (де $(D, \leq_D)$ та $(R, \leq_R)$ – ЧВМ) наступним чином. Нехай $\{d_i\}_{i\in\omega}$ – ланцюг в D. Тоді φ – неперервне, якщо $\varphi(\coprod_{i\in\omega}{}_D(d_i)) = \coprod_{i\in\omega}{}_R\varphi(d_i)$.

Визначення 5.7. Відображення $\varphi: D\to D$ – *монотонне*, якщо

$$\forall d_0, d_1 \in D: d_0 \leq d_1 \Rightarrow \varphi(d_0) \leq \varphi(d_1).$$

Неперервні відображення є монотонними.

Лема 5.1. Нехай $(D,\leq)$ **–** ЧВМ та $\varphi: D\to D$ – неперервне відображення, тоді φ – монотонне.

Доведення

Нехай є ланцюг $d_0 \leq d_1 \leq d_1 \leq d_1 \leq \ldots$, всі елементи якого, крім d_0, дорівнюють d_1. Тоді з визначення ланцюга та неперервності φ випливає, що

$$\varphi(\coprod_{i\in\omega} d_i) = \coprod_{i=\omega}\varphi(d_i) = \coprod_{i=0}^{i=1}\varphi(d_i) = \varphi(\coprod\{d_0, d_1\}) = \varphi(d_0)\coprod\varphi(d_1)$$

Оскільки $\coprod_{i=0}^{i=1}\{d_0, d_1\} = d_1$, то $\varphi(d_1) = \varphi(d_0)\coprod\varphi(d_1)$. Це означає, що $\varphi(d_1)$ є мажорантою $\varphi(d_0)$. Тому $\varphi(d_0) \leq \varphi(d_1)$. ■

5.4. Теореми про нерухомі точки

Центральною теоремою є наступна теорема, яка стверджує наявність найменшого розв'язку рекурсивного рівняння, який може бути знайдений методом послідовних наближень. Цю теорему відносять до розряду фольклорних («народних») теорем, тобто її формулювання всі знають, але першого автора назвати важко. Як правило, до перших авторів відносять Кнастера, Тарського та Кліні. Важливість теореми пов'язана з широким колом її застувань.

Теорема 5.1 (Кнастер-Тарський-Кліні)

Нехай D – ω-область, $\varphi: D\to D$ – неперервне відображення, задане на цій області. Тоді існує найменша нерухома точка φ, яка позначається $lfp\,\varphi$ та для якої справедлива наступна формула:

$$lfp\ \varphi = \coprod_{i\in\omega} \varphi^{(i)}(\bot), \qquad \text{(КТК)}$$

де $\varphi^{(0)}(\bot) = \bot$, $\varphi^{(i+1)}(\bot) = \varphi(\varphi^{(i)}(\bot))$, $i \in \omega$.

Доведення теореми складається з трьох тверджень:

1. Доведення факту, що множина $\{\varphi^{(i)}(\bot)\}_{i\in\omega}$ є ланцюг (тому її супремум $\coprod_{i\in\omega} \varphi^{(i)}(\bot)$ існує).
2. Доведення того, що $\coprod_{i\in\omega} \varphi^{(i)}(\bot)$ є нерухомою точкою φ.
3. Доведення, що $\coprod_{i\in\omega} \varphi^{(i)}(\bot)$ є найменшою з нерухомих точок φ.

Почнемо з першого твердження. Розглянемо послідовність $\bot, \varphi(\bot), \varphi(\varphi(\bot)), \ldots$.

Доведемо методом математичної індукції, що це – ланцюг.

База індукції. Оскільки $\bot$ – найменший елемент D, то $\bot \le \varphi(\bot)$.

Індуктивний крок. Треба довести, що з $\varphi^{(i)}(\bot) \le \varphi^{(i+1)}(\bot)$ випливає $\varphi^{(i+1)}(\bot) \le \varphi^{(i+2)}(\bot)$. Дійсно, за монотонністю φ маємо

$$\varphi^{(i)}(\bot) \le \varphi^{(i+1)}(\bot) \Rightarrow \varphi(\varphi^{(i)}(\bot)) \le \varphi(\varphi^{(i+1)}(\bot)) \Rightarrow \varphi^{(i+1)}(\bot) \le \varphi^{(i+2)}(\bot).$$

Отже $\bot, \varphi(\bot), \varphi(\varphi(\bot)), \ldots$ – ланцюг.

Перейдемо до другого твердження. За неперервністю φ:

$$\varphi(\coprod_{i\in\omega} \varphi^{(i)}(\bot)) = \coprod_{i\in\omega} \varphi(\varphi^{(i)}(\bot)) = \coprod_{i\in\omega} \varphi^{(i+1)}(\bot) = \coprod_{i\in\omega} \varphi^{(i)}(\bot) \ .$$

Остання рівність випливає з того, що $\varphi^{(0)}(\bot) = \bot$, а найменший елемент не впливає на супремум. Отже, $\coprod_{i\in\omega} \varphi^{(i)}(\bot)$ – нерухома точка φ.

Доведемо тепер останнє твердження, що $\coprod_{i\in\omega} \varphi^{(i)}(\bot)$ – найменша нерухома точка (ННТ).

Нехай b також нерухома точка, тобто $b = \varphi(b)$. Маємо, що $\bot \le b$. За монотонністю φ $\varphi(\bot) \le \varphi(b) = b$. Аналогічно, $\varphi^{(i)}(\bot) \le b$ для всіх $i \in \omega$. Тому $\coprod_{i\in\omega} \varphi^{(i)}(\bot) \le b$. Отже, $\coprod_{i\in\omega} \varphi^{(i)}(\bot)$ – найменша з нерухомих точок. ■

Теорема 5.2 (структура множини нерухомих точок)

Нехай D – ω-область, φ – неперервне відображення на D. Тоді множина нерухомих точок $Y = \{d \mid d = \varphi(d)\}$ – ω-область.

Доведення

Доведемо, що виконуються три умови визначення ω-області.

1. Частковий порядок на множині нерухомих точок отримуємо як звуження часткового порядку на D: $\le_Y \subseteq \le_D$.

2. Найменшим елементом в Y є елемент $lfp\varphi$ (за теоремою Кнастера-Тарського-Кліні).

3. Доведемо повноту. Розглянемо ланцюг $d_0 \le d_1 \le d_2 \le \ldots$ елементів Y. Покажемо, що границя ланцюга є нерухомою точкою, тобто $\coprod_{i\in\omega} d_i \in Y$. Дійсно,

$\varphi(\coprod_{i\in\omega} d_i) \overset{непер.}{=} \coprod_{i\in\omega} \varphi(d_i) = \coprod_{i\in\omega} d_i$. Тобто $\coprod_{i\in\omega} d_i$ – нерухома точка. ■

Перш ніж рухатися далі у вивченні властивостей оператора найменшої нерухомої точки, доведемо важливу лему.

Лема 5.2 Якщо множина $\{d_{ij}\}_{i\in\omega, j\in\omega} \subseteq D$ впорядкована за обома індексами, тобто $\forall i\in\omega\forall j\in\omega\ (d_{ij}\leq d_{i(j+1)} \& \ d_{ij}\leq d_{(i+1)j})$, то

$$\coprod_{i\in\omega}(\coprod_{j\in\omega} d_{ij}) = \coprod_{j\in\omega}(\coprod_{i\in\omega} d_{ij}) = \coprod_{k\in\omega} d_{kk}.$$

Доведення

Попередньо необхідно показати, що множини, які розглядаються під супремумами, є ланцюгами (тобто $\{\coprod_{j\in\omega} d_{ij}\}_{j\in\omega}$, $\{\coprod_{i\in\omega} d_{ij}\}_{j\in\omega}$, $\{d_{kk}\}_{k\in\omega}$ – ланцюги). Це випливає з вибору множини $\{d_{ij}\}_{i\in\omega, j\in\omega}$.

Метод доведення леми полягає в тому, що ми покажемо, що множини мажорант усіх ланцюгів співпадають. Звідси буде випливати рівність границь (бо вони є найменшими з мажорант).

Нехай a – мажоранта ланцюга $\{\coprod_{j\in\omega} d_{ij}\}_{j\in\omega}$. Звідси a – мажоранта d_{ij} для всіх $i\in\omega$ та для всіх $j\in\omega$, а отже a – мажоранта для $\coprod_{i\in\omega} d_{ij}$ для всіх $j\in\omega$, тобто a – мажоранта для ланцюга $\{\coprod_{i\in\omega} d_{ij}\}_{j\in\omega}$. Аналогічно a – мажоранта для ланцюга $\{d_{kk}\}_{k\in\omega}$.

Залишилося продемонструвати, що якщо a – мажоранта для $\{d_{kk}\}_{k\in\omega}$, то a – мажоранта для $\{\coprod_{j\in\omega} d_{ij}\}_{j\in\omega}$. Дійсно, для будь якого елемента d_{ij} існує k (зокрема, $k=max(i, j)$), що $d_{ij}\leq d_{kk}$. Тому a – мажоранта для $\{\coprod_{j\in\omega} d_{ij}\}_{j\in\omega}$. ■

5.5. Конструювання похідних ω-областей

У програмуванні поруч із базовими типами даних часто використовуються похідні (структуровані) дані. Для дослідження рівнянь над похідними даними доречно розглянути побудову похідних ω-областей з базових областей. Найпростішим методом побудови є об'єднання областей.

Розмічене об'єднання ω-областей

Не втрачаючи загальності, розглянемо випадок двох областей. Нехай $D1$ та $D2$ – ω-області. Будемо індексувати відповідні поняття наступним чином: $\leq_{D1}$, $\perp_{D1}$, $\coprod_{D1}$ – для першої області, $\leq_{D2}$, $\perp_{D2}$, $\coprod_{D2}$ – для другої області. Нехай також $D1$ та $D2$ не перетинаються. Будуємо нову множину $D = D1\cup D2\cup\{\perp\}$, де $\perp$ – новий елемент, що не належить ні $D1$, ні $D2$.

На множині D вводимо частковий порядок наступним чином:

$$\leq_D = \leq_{D1}\cup\leq_{D2}\cup\{(\perp,\perp)\}\cup\{(\perp, d1)\mid d1\in D1\}\cup\{(\perp, d2)\mid d2\in D2\}$$

Інакше кажучи, новий частковий порядок є об'єднанням часткових порядків на $D1$ та $D2$, і крім того елемент $\perp$ визначено найменшим елементом в D.

Неважко довести, що колапсу так побудованого відношення часткового порядку не буде. Повнота D відносно порядку $\leq_D$ випливає з його розміченості (множини $D1$ та $D2$ не перетинаються, тому ланцюг обов'язково складається з елементів однієї множини крім, можливо, $\perp$).

Лема 5.3. Розмічене об'єднання ω-областей є ω-областю.

Декартовий добуток ω-областей

Нехай $D1$ та $D2$ – ω-області. Побудуємо ω-область для $D = D1\times D2$.

Задамо частковий порядок на D покоординатно:

$$(d1, d2)\leq_D(d1', d2') \overset{def}{\Leftrightarrow} (d1\leq_{D1} d1') \ \&\ (d2)\leq_{D2} d2').$$

Неважко довести, що так визначене відношення є частковим порядком.

Найменшим елементом D буде елемент $(\perp_{D1}, \perp_{D2})$.

Доведемо повноту D відносно введеного відношення. Нехай $\{(d1_i, d2_i)\}_{i\in\omega}$ – ланцюг в D. З визначення часткового порядку на D випливає, що $\{d1_i\}_{i\in\omega}$ та $\{d2_i\}_{j\in\omega}$ – ланцюги відповідно в $D1$ та $D2$. З повноти цих областей випливає, що існують $\coprod_{i\in\omega}{}_{D1} d1_i$ та $\coprod_{j\in\omega}{}_{D2} d2_j$. Очевидно, що пара $(\coprod_{i\in\omega}{}_{D1} d1_i, \coprod_{j\in\omega}{}_{D2} d2_j)$ є мажорантою елементів ланцюга $\{(d1_i, d2_i)\}_{i\in\omega}$. Можна показати, що ця мажоранта є найменшою. А це означає, що $\coprod_{i\in\omega}{}_{D}(d1_i, d2_i) = (\coprod_{i\in\omega}{}_{D1} d1_i, \coprod_{j\in\omega}{}_{D2} d2_j)$, тобто, що D – повна.

З наведеного доведення також випливають наступні співвідношення: $\coprod_{i\in\omega}{}_{D}(d1_i, d2) = (\coprod_{i\in\omega} d1_i, d2)$ та $\coprod_{i\in\omega}{}_{D}(d1, d2_i) = (d1, \coprod_{i\in\omega} d2_i)$, де $d1\in D1$, $d2\in D2$.

Отже, доведено наступне твердження.

Лема 5.4. Декартовий добуток ω-областей є ω-областю.

Лема 5.5. Нехай $D1$ та $D2$ – ω-області. Тоді відображення $\varphi: D1\times D2 \to R$ неперервне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне за кожним аргументом.

Доведення

Необхідність. Нехай відображення $\varphi: D1\times D2 \to R$ неперервне на множині $D = D1\times D2$. Це означає, що для довільного ланцюга $(a_0, b_0) \le_D (a_1, b_1) \le_D (a_2, b_2) \le_D \ldots$ з $D = D1\times D2$ маємо, що $\varphi(\coprod_{i\in\omega}{}_{D}(a_i, b_i)) = \coprod_{i\in\omega}{}_{R}\varphi(a_i, b_i)$.

Щоб довести неперервність за першим аргументом розглянемо ланцюг $(a_0, b) \le_D (a_1, b) \le_D (a_2, b) \le_D \ldots$, у елементів якого другий компонент дорівнює b. Звідси випливає, що $a_0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots$ та

$$\coprod_{i\in\omega}(a_i, b) = (\coprod_{i\in\omega} a_i, \coprod_{i\in\omega} b) = (\coprod_{i\in\omega} a_i, b).$$

Використовуючи ці співвідношення, отримуємо, що

$$\varphi(\coprod_{i\in\omega} a_i, b)) = \varphi(\coprod_{i\in\omega} a_i, \coprod_{i\in\omega} b) = \varphi(\coprod_{i\in\omega}(a_i, b)) = \coprod_{i\in\omega}\varphi(a_i, b).$$

Аналогічно доводиться неперервність і за другим аргументом.

Достатність. Треба довести, що з неперервності за кожним аргументом випливає неперервність $\varphi: D1\times D2 \to R$ в цілому. Беремо довільний ланцюг і користуючись властивостями супремуму на декартовому добутку та неперервністю за кожним аргументом, отримуємо наступні рівності:

$$\varphi(\coprod_{i\in\omega}(a_i, b_i)) = \varphi(\coprod_{i\in\omega} a_i, \coprod_{j\in\omega} b_j) = (\coprod_{i\in\omega}\varphi(a_i, \coprod_{j\in\omega} b_j) = \coprod_{j\in\omega}\coprod_{i\in\omega}\varphi(a_i, b_j) = \coprod_{i\in\omega}\varphi(a_i, b_i). \blacksquare$$

Класи функцій на ω-областях. Доведемо, що множина тотальних (всюди визначених) функцій $F=[D\to D]$ на ω-області є ω-областю.

Щоб відрізняти елементи та відношення на множинах F та D будемо вживати відповідні індекси, позначаючи частковий порядок на D як $\le_D$, а на F – як $\le_F$.

Спочатку визначимо частковий порядок $\le_F$ на $F=[D\to D]$ наступним чином.

Нехай $f, g \in F$. Тоді вважаємо, що

$$f \le_F g \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall d \in D \quad f(d) \le_D g(d).$$

Для так введеного бінарного відношення виконуються всі аксіоми часткового порядку: рефлексивність, транзитивність, антисиметричність.

Дійсно, оскільки $\forall d \in D\ f(d) \le_D f(d)$, то $f \le_F f$ (рефлексивність). Далі, $\forall d \in D\,(f(d) \le_D g(d), g(d) \le_D h(d) \Rightarrow f(d) \le_D h(d))$, тому $f \le_F g, g \le_F h \Rightarrow f \le_F h$ (транзитивність). Нарешті, справедливе співвідношення

$\forall d \in D\,(f(d) \le_D g(d), g(d) \le_D f(d) \Rightarrow f(d) =_D g(d))$, з якого випливає $f \le_F g, g \le_F f \Rightarrow f =_F g$ (антисиметричність).

Тепер визначимо найменший елемент $\perp_F = [d \mapsto \perp_D | d \in D]$. Тут вираз у квадратних дужках називається *функціональним конструктором.* Він задає значення функції на кожному її аргументі. Це означає, що $\forall d \in D$ $(\perp_F (d) \overset{def}{=} \perp_D)$. Тому для довільної функції g з F маємо, що $\perp_F (d) = \perp_D \le_D g(d)$. За визначенням, це означає, що $\perp_F \le_F g$.

Далі треба продемонструвати повноту F. Нехай $f_0 \le_F f_1 \le_F f_2 \le \ldots$ – ланцюг в F. Треба довести, що $\coprod_{i\in\omega}{}_F f_i \in F$, тобто, що супремум функцій є функцією.

Спочатку визначимо нову функцію $f \overset{def}{=} [d \mapsto \coprod_{i\in\omega}{}_D f_i(d) | d \in D]$. Наведений функціональний конструктор задає значення функції на кожному її аргументі. Це означає, що $\forall d \in D$ $f(d) \overset{def}{=} \coprod_{i\in\omega}{}_D f_i(d)$.

Доведемо, що $\coprod_{i\in\omega}{}_F f_i = f$ (тобто що f – найменша з мажорант ланцюга $f_0 \le_F f_1 \le_F f_2 \le \ldots$).

1. Спочатку доведемо, що f – мажоранта множини функцій $\{f_i\}_{i\in\omega}$. Дійсно, за визначенням f $\forall d \in D$ $(f(d) \overset{def}{=} \coprod_{i\in\omega}{}_D f_i(d))$. Звідси випливає, що $\forall d \in D$ $\forall i \in \omega (f_i(d) \le_D f(d))$. Переставляючи універсальні квантори, отримуємо, що $\forall i \in \omega\, \forall d \in D$ $f_i(d) \le_D f(d)$.

А це означає (за визначенням часткового порядку на F), що $\forall i \in \omega$ $f_i \le_F f$. Тобто, f – мажоранта множини функцій $\{f_i\}_{i\in\omega}$.

2. Доведемо тепер, що f – найменша мажоранта множини функцій $\{f_i\}_{i\in\omega}$. Нехай g – довільна мажоранта цієї множини. Тоді

$\forall i \in \omega$ $f_i \le_F g \Leftrightarrow \forall i \in \omega\, \forall d \in D$ $f_i(d) \le_D g(d) \Leftrightarrow \forall d \in D\, \forall i \in \omega$ $f_i(d) \le_D g(d) \Leftrightarrow \forall d \in D$ $\coprod_{i\in\omega}{}_D f_i(d) \le_D g(d) \Leftrightarrow$ $\forall d \in D$ $f(d) \le_D g(d) \Leftrightarrow f \le_F g$.

Це означає, що доведена наступна лема.

Лема 5.6. Відображення $f \overset{def}{=} [d \mapsto \coprod_{i\in\omega}{}_D f_i(d) | d \in D]$ є супремумом множини функцій $\{f_i\}_{i\in\omega}$, тобто $f = \coprod_{i\in\omega}{}_F f_i$.

З доведених властивостей випливає, що множини неперервних функцій є ω-областю. Отриманий результат можна посилити для випадку множини функцій $[D1 \to D2]$ на ω-областей *D1* та *D2*.

Лема 5.7. Множина функцій, визначених на ω-областях, є ω-областю.

Неперервні функції на ω-областях. Нехай $F = [D \overset{c}{\to} D]$ – клас неперервних тотальних функцій на ω-області D. Відношення часткового порядку на $[D \overset{c}{\to} D]$ є обмеженням часткового порядку на множині функцій $[D \to D]$, оскільки клас $[D \overset{c}{\to} D]$ є підкласом класу $[D \to D]$. Залишилося довести, що $\perp_F$ – неперервне

відображення, і що супремум неперервних відображень є неперервним відображенням.

Доведемо неперервність відображення $\perp_F$, тобто, що $\perp_F \in [D \xrightarrow{c} D]$. Це означає, що треба довести рівність $\perp_F (\coprod_{i\in\omega D} d_i) = \coprod_{i\in\omega D} \perp_F (d_i)$ для довільного ланцюга $d_0 \le_D d_1 \le_D d_2 \le_D \ldots$ елементів з *D*. Дійсно, $\perp_F (\coprod_{i\in\omega D} d_i) = \perp_D = \coprod_{i\in\omega D} \perp_D = \coprod_{i\in\omega D} \perp_F (d_i)$.

Лема 5.8. Якщо функції f_i $(i \in \omega)$ – неперервні, то функція $f = \coprod_{i\in\omega F} f_i$ – також неперервна.

Доведення. За лемою 5.6, якщо $f = \coprod_{i\in\omega F} f_i$, то $f = [d \to \coprod_{i\in\omega D} f_i(d) \mid d \in D]$. Щоб довести, що f – неперервна, треба довести, що $f(\coprod_{i\in\omega D} d_i) = \coprod_{i\in\omega D} f(d_i)$ для довільного ланцюга $\{d_i\}_{i\in\omega}$. Маємо, що $(\coprod_{j\in\omega F} f_j)(\coprod_{i\in\omega D} d_i) = \coprod_{j\in\omega D}(f_j(\coprod_{i\in\omega D} d_i)) = \coprod_{j\in\omega D}(\coprod_{i\in\omega D} f_j(d_i))$.

За лемою 5.2 $\coprod_{j\in\omega D}(\coprod_{i\in\omega D} f_j(d_i)) = \coprod_{i\in\omega D}(\coprod_{j\in\omega D} f_j(d_i))$, тому

$\coprod_{i\in\omega D}(\coprod_{j\in\omega D} f_j(d_i)) = \coprod_{i\in\omega D}((\coprod_{j\in\omega F} f_j)(d_i)) = \coprod_{i\in\omega D} f(d_i)$. ■

Це означає, що клас $[D \xrightarrow{c} D]$ є ω-областю. Отриманий результат можна посилити для випадку множини неперервних функцій $[D1 \xrightarrow{c} D2]$, заданих на ω-областей *D1* та *D2*. Це дозволяє сформулювати наступний результат.

Лема 5.9. Множина неперервних функцій, заданих на ω-областях, є ω-областю.

5.6 Властивості оператора найменшої нерухомої точки

Операцію взяття нерухомої точки можна трактувати як оператор $lfp : [D \xrightarrow{c} D] \to D$, де $[D \xrightarrow{c} D]$ – множина неперервних відображень. Доведемо, що оператор *lfp* – неперервний. Але спочатку покажемо, що він – монотонний.

Лема 5.10. Відображення $lfp : [D \xrightarrow{c} D] \to D$ – монотонне відображення, тобто $g \le_F h \Rightarrow lfp(g) \le_D lfp(h)$ для $g, h \in [D \xrightarrow{c} D]$.

Доведення. Нехай $g \le_F h$. Розглянемо наступні співвідношення:

$\perp_D$	$\le_D$	$\perp_D$	
$g(\perp_D)$	$\le_D$	$h(\perp_D)$	(Умова $g \le_F h$)
$g(g(\perp_D))$	$\le_D$	$g(h(\perp_D)) \le_D h(h(\perp_D))$	(Монотонність g та умова $g \le_F h$)
…		…	…
$g^{(k)}(\perp_D)$	$\le_D$	$\ldots \le_D g^{(k-m)}(h^{(m)}(\perp_D)) \ldots \le_D h^{(k)}(\perp_D)$	(Монотонність g та умова $g \le_F h$)
…		…	…
$\coprod_{i\in\omega D} g^{(i)}(\perp_D)$	$\le_D$	$\coprod_{i\in\omega D} h^{(i)}(\perp_D)$	

Оскільки $lfp(g)=\coprod_{i\in\omega D} g^{(i)}(\perp_D)$ та $lfp(h)=\coprod_{i\in\omega D} h^{(i)}(\perp_D)$, то $lfp(g)\le_D lfp(h)$. ■

Теорема 5.3 (неперервність *lfp*). Якщо D – ω-область, то відображення lfp - неперервне, тобто $lfp\in[D\xrightarrow{c}D]\xrightarrow{c}D$.

Доведення. Неперервність lfp означає, що для довільного ланцюга $f_0\le_F f_1\le_F f_2\le\ldots$ має виконуватись співвідношення

$$lfp(\coprod_{i\in\omega F} f_i)=\coprod_{i\in\omega D} lfp(f_i).$$

Спочатку доведемо, що $lfp(\coprod_{i\in\omega F} f_i)\ge\coprod_{i\in\omega D} lfp(f_i)$. Оскільки $\coprod_{i\in\omega F} f_i\ge f_i$, то за лемою 5.10 $lfp(\coprod_{i\in\omega F} f_i)\ge lfp(f_i)$ для довільного $i\in\omega$, а отже $lfp(\coprod_{i\in\omega F} f_i)\ge\coprod_{i\in\omega D} lfp(f_i)$.

Тепер доведемо, що $lfp(\coprod_{i\in\omega F} f_i)\le\coprod_{i\in\omega D} lfp(f_i)$. Для цього покажемо, що $a=\coprod_{i\in\omega D} lfp(f_i)$ – нерухома точка для $f=\coprod_{i\in\omega F} f_i$ (тобто, $f(a)=a$). Дійсно

$f(a)=(\coprod_{i\in\omega F} f_i)(\coprod_{j\in\omega D} lfp(f_j))=\coprod_{i\in\omega D}(f_i(\coprod_{j\in\omega D} lfp(f_j))=\coprod_{i\in\omega D}(\coprod_{j\in\omega D}(f_i(lfp(f_j))))$. Позначимо $d_{ij}=f_i(lfp(f_j))$, $i,j\in\omega$. Неважко довести, що засновки леми 5.2 виконуються, тому $\coprod_{i\in\omega D}(\coprod_{j\in\omega D}(f_i(lfp(f_j))))=\coprod_{k\in\omega} f_k(lfp(f_k))=\coprod_{i\in\omega D} lfp(f_i)=a$.

Оскільки $lfp(\coprod_{i\in\omega F} f_i)$ – найменша нерухома точка, то вона менша за будь-яку нерухому точку для $\coprod_{i\in\omega F} f_i$. Тому $lfp(\coprod_{i\in\omega F} f_i)\le\coprod_{i\in\omega} lfp(f_i)=a$.

Отже ми довели, що $lfp(\coprod_{i\in\omega F} f_i)=\coprod_{i\in\omega} lfp(f_i)$. ■

Таким чином, досліджено основні властивості оператора найменшої нерухомої точки, який може вважатися одним із уточнень рекурсії.

5.7. Застосування теорії ННТ

Найважливішими способами визначення нескінченних об'єктів (множин, послідовностей, функцій і таке інше), є рекурентні, індуктивні та рекурсивні способи. Оскільки перші два способи є частковими випадками рекурсії, то звідси випливає важливість теорії найменшої нерухомої точки (ННТ), як одного із способів уточнення рекурсії, в різних застосуваннях. Тут ми розглянемо застосування ННТ для уточнення синтаксису та семантики мов програмування.

5.7.1. Уточнення синтаксису мов програмування

Синтаксис мов програмування переважно задається за допомогою БНФ, граматик та інших подібних формалізмів. Сама структура правил БНФ говорить про можливість застосування теорії ННТ для уточнення формальних мов, що задаються БНФ.

У попередньому розділі було розглянуто приклад подання породжуючої граматики як системи рівнянь.

Так, правила $A\to aAb\mid\varepsilon$ задають мову, яка є розв'язком рівняння $A=\{a\}A\{b\}\cup\{\varepsilon\}=\varphi(A)$. Але для того, щоб стверджувати існування розв'язку, необхідно дослідити область, на якій задаються такі рівняння.

Розглянемо слабку алгебру формальних мов, в якій задано наведене рівняння (відображення φ):

$AL=<2^{T^*},\cup,\bullet>$, де

2^{T^*} – множина мов, $\cup$ та $\bullet$ – операції об'єднання та конкатенації.

Достатніми умовами існування розв'язків рекурсивних рівнянь в алгебрах наведеного типу є умови для множини 2^{T^*} бути ω-областю, та для операцій об'єднання та конкатенації буди неперервними. Доведемо виконання цих умов.

Лема 5.11. Множина 2^{T^*} – ω-область

Доведення. Щоб множина була ω-областю треба визначити на ній частковий порядок та показати його повноту та вказати найменший елемент.

Для множини 2^{T^*} частковим порядком буде включення, порожня множина буде найменшим елементом, а об'єднання множин буде супремумом, тобто є така відповідність:

1) $\leq$ – $\subseteq$

2) $\perp$ – $\{\}$

3) $\coprod_{i\in\omega} L_i$ – $\bigcup_{i\in\omega} L_i$

Очевидно, що всі необхідні умови ω-області виконуються для так введеного часткового порядку. ■

Лема 5.12. Операції об'єднання та конкатенації – ω-неперервні.

Доведення. Розглянемо операцію об'єднання $\cup$. Згідно леми 5.5 досить довести неперервність об'єднання за кожним аргументом. Не обмежуючи загальності, доведемо неперервність за першим аргументом.

Нехай $\{L_i\}_{i\in\omega}$ – ланцюг з множини 2^{T^*}, $L'\in 2^{T^*}$, $L=\coprod_{i\in\omega} L_i$. За визначенням, $\coprod_{i\in\omega} L_i = \bigcup_{i\in\omega} L_i$. Щоб довести неперервність, треба показати, що $(\bigcup_{i\in\omega} L_i)\bigcup L' = \bigcup_{i\in\omega}(L_i \bigcup L')$. Дійсно, для довільного елемента x маємо:

$$x\in(\bigcup_{i\in\omega} L_i)\cup L' \Leftrightarrow x\in\bigcup_{i\in\omega} L_i \vee x\in L' \Leftrightarrow \exists k(x\in L_k)\vee x\in L' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists k(x\in L_k\cup L') \Leftrightarrow x\in\bigcup_{i\in\omega}(L_i\cup L').$$

Отже, $\cup$ – неперервна операція.

Розглянемо тепер операцію $\bullet$. За визначенням,

$$L\bullet L' = \{l\,l' \mid l\in L, l'\in L'\}.$$

Доведемо, що $(\bigcup_{i\in\omega} L_i)\bullet L' = \bigcup_{i\in\omega}(L_i\bullet L')$. Маємо, що

$$x\in(\bigcup_{i\in\omega} L_i)\bullet L' \Leftrightarrow \exists y\exists z \quad y\in(\bigcup_{i\in\omega} L_i), z\in L', x=yz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists y\exists z\exists k \quad y\in L_k, z\in L', x=yz \Leftrightarrow \exists y\exists z\exists k \quad yz\in L_k\bullet L, x=yz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists k\; x\in L_k\bullet L' \Leftrightarrow x\in\bigcup_{i\in\omega}(L_i\bullet L').$$

Отже, операція $\bullet$ також неперервна. ■

Таким чином, множина формальних мов над певним алфавітом є ω-областю, а операції слабкої алгебри формальних мов – неперервними. Похідні операції також будуть неперервними. Тому рекурсивні визначення (рівняння) над цією алгеброю завжди мають найменший розв'язок. Цей розв'язок, за теоремою КТК, можна знайти методом послідовних наближень.

Доведемо, що якщо за КВ-граматикою побудувати відповідну систему рекурсивних визначень, то розв'язок цієї системи співпаде з мовою, породженою граматикою.

Отже, нехай $G = (N, T, P, S)$ – КВ-граматика, $\alpha\in(N\cup T)^*$. Задамо відображення $s:(N\cup T)\to(N\cup 2^T)$, вважаючи, що $s(A)=A$, $A\in N$, та $s(a)=\{a\}$, $a\in T$. Це відображення розповсюджуємо на послідовності символів з алфавіту $(N\cup T)$, вважаючи, що $s(x_1x_2\ldots x_n)=s(x_1)s(x_2)\ldots s(x_n)$. Тепер маємо, що $s:(N\cup T)^*\to(N\cup 2^T)^*$. Сукупність усіх

правил $A\to\alpha_1, A\to\alpha_2, \ldots, A\to\alpha_k$ з граматики G з одним і тим же нетерміналом у лівій частині замінюємо на рекурсивне визначення $A = s(\alpha_1)\cup s(\alpha_2)\cup\ldots\cup s(\alpha_k)$. Такі визначення будуємо для всіх нетерміналів. Отриману систему рекурсивних визначень над слабкою алгеброю формальних мов позначимо $E(G)$. Відображення, що задається правими частинами цієї системи позначимо φ_G, його складову за нетерміналом A позначимо φ_A, а найменшу нерухому точку цього відображення за змінною (нетерміналом) S позначимо $lfp_S(\varphi_G)$.

Приклад 5.1. Для граматики $G = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b, c\}, P, S)$, де P складається з наступних правил:

$S\to AB \mid CD \mid \varepsilon$

$A\to\varepsilon \mid aA$

$B\to\varepsilon \mid bBc$

$C\to\varepsilon \mid aCb$

$D\to\varepsilon \mid cD,$

отримуємо наступну систему рекурсивних визначень:

$$\begin{cases} S = AB \cup CD \cup \{\varepsilon\} \\ A = \{\varepsilon\} \cup \{a\}A \\ B = \{\varepsilon\} \cup \{b\}B\{c\} \\ C = \{\varepsilon\} \cup \{a\}C\{b\} \\ D = \{\varepsilon\} \cup \{c\}D. \end{cases}$$

Доведемо тепер, що мова, породжена КВ-граматикою, співпадає з найменшим розв'язком системи рекурсивних визначень (рівнянь), побудованих за цією граматикою.

Теорема 5.4. Для КВ-граматики $G = (N, T, P, S)$

$$L(G) = lfp_S(\varphi_G).$$

Доведення. Нехай $L^{(k)}{}_A(G)$ – множина термінальних ланцюжків породжених з нетермінала A деревами виводу глибини не більше k. Індукцією за k доводимо, що

$$L^{(k)}{}_A(G) = \varphi^{(k)}{}_A(\bot).$$

Дійсно, для виводів довжини 0 маємо, що $L^{(0)}{}_A(G) = \varnothing$ та $\varphi^{(0)}{}_A(\bot) = \bot = \varnothing$.

Припускаючи, що індуктивна гіпотеза вірна для k, доведемо її справедливість для $k+1$. Дійсно, мова $L^{(k+1)}{}_A(G)$ складається з термінальних ланцюжків t, які виводяться з A деревами виводу глибини не більше $k+1$. Такі дерева породжуються деяким правилом $A\to x_1x_2\ldots x_n\in P$, а виводи з нетермінальних символів з $x_1, x_2, \ldots, x_n$ мають глибину не більшу k. Термінальні ланцюжки, що породжуються з таких нетерміналів x входять у мову $\varphi^{(k)}{}_x(\bot)$. З побудови $\varphi^{(k+1)}{}_A(\bot)$ випливає, що ланцюжок t буде належати цій мові. Також є вірним і зворотне: якщо $t\in\varphi^{(k+1)}{}_A(\bot)$, то $t\in L^{(k+1)}{}_A(G)$. Індуктивна гіпотеза доведена. Звідси випливає справедливість теореми. ■

Таким чином, для подання формальних мов можна використовувати формалізм рекурсивних визначень та теорію ННТ. Правда, цей формалізм є більш потужним, якщо допускається використання нескінченних мов у визначеннях. Разом з тим неважко довести, що для слабко рекурсивних визначень (із скінченними мовами у визначеннях), найменшими розв'язками будуть лише КВ-мови.

Вибір формалізму подання синтаксису залежить від способу його використання (від прагматики).

Тепер розглянемо використання теорії ННТ для подання семантики мов програмування.

5.7.2. Семантика мов програмування

У першому розділі посібника семантика програм мови *SIPL* задавалась функціями програмної алгебри

$$A\_Prog = \langle FNA, FNB, FNAB, FA, FB, FS; S^n, AS^x, \bullet, IF, WH, x\Rightarrow, id \rangle.$$

Програми мови *SIPL* не є рекурсивними, але легко зробити таке її розширення, яке буде мати рекурсивні функції та процедури (це буде зроблено трохи пізніше). Тому

здається вірогідним, що класи часткових функцій алгебри *A_Prog* (класи *FA*, *FB*, *FS*) є ω-областями, а композиції, задані на цих класах, – неперервними. Це, дійсно, так.

Доведемо більш загальний результат. Нехай D, R – деякі множини даних, а $F = D \to R$ – клас часткових функцій, заданих на цих множинах. Введемо на F відношення часткового порядку ≤, вважаючи, що для функцій $f,g \in F$

$$f \le g \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall d \in D(f(d)\downarrow \Rightarrow g(d)\downarrow \wedge f(d) = g(d)).$$

Якщо використовувати графіки функцій, то можна записати, що

$$f \le g \overset{def}{\Leftrightarrow} gr(f) \subseteq gr(g).$$

Очевидно, що так введене бінарне відношення є, дійсно, відношенням частково порядку. Найменшим елементом буде всюди невизначена функція, для якої залишимо позначення ⊥.

Супремумом ланцюга функцій $f_0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots$ буде функція $f = \coprod_{i\in\omega} f_i$, графік якої є об'єднання графіків функцій ланцюга, тобто $gr(f) = \bigcup_{i\in\omega} gr(f_i)$. Неважко переконатися, це об'єднання є функціональним бінарним відношенням. Дійсно, нехай $(a,b),(a,c) \in f$. Це означає, що

$$(a,b) \in \bigcup_{i\in\omega} gr(f_i) \Leftrightarrow \exists k\,(a,b) \in gr(f_k),$$

$$(a,c) \in \bigcup_{i\in\omega} gr(f_i) \Leftrightarrow \exists m\,(a,c) \in gr(f_m).$$

Якщо $k \ge m \Rightarrow \begin{cases}(a,b) \in gr(f_k)\\(a,c) \in gr(f_k)\end{cases} \Rightarrow b = c$, аналогічно розглядається випадок $k \le m$.

Тобто f є, дійсно, функцією. Це говорить про повноту *F*.

Таким чином, доведено наступне твердження.

Лема 5.13. Множина $F = D \to R$ часткових функцій із D в R є ω-область відносно введеного часткового порядку.

Зауважимо відмінність цієї леми від лем 5.7 та 5.9, які говорять про класи *тотальних* функцій, частковий порядок на яких індукується частковим порядком на їх областях визначення та значень. У лемі 5.3 говориться про клас *часткових* функцій, визначених на довільних множинах, які не обов'язково є ω-областями. В зв'язку з цим класи *n*-арних тотальних функцій *FNA*, *FNB*, *FNAB* не підпадають під дію леми 5.13.

Застосовуючи лему 5.13 до наступних класів (основ алгебри) часткових функцій алгебри *A_Prog*: *FA*, *FB*, *FS*, отримуємо, що ці основи є ω-областями.

Доведемо тепер, що композиції S^n, AS^x, •, *IF*, *WH*, $x\Rightarrow$, *id* алгебри *A_Prog* є неперервними.

Це очевидно для нуль-арних композицій (функцій) $x\Rightarrow$ і *id*, які не мають функцій-аргументів.

Лема 5.14. Композиція суперпозиції S^n номінативних функцій у *n*-арну функцію неперервна за номінативними функціями-аргументами.

Доведення. Нехай f – *n*-арна функція, $g_1,\ldots,g_n$ – номінативні функції типу *FA*, $f_0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots$ – ланцюг функцій з *FA*, $st \in State$. Нагадаємо, що:

$$S^n(f, g_1,\ldots,g_n))(st) = f(g_1(st),\ldots,g_n(st)).$$

Доведемо неперервність суперпозиції за першим аргументом типу *FA*, тобто доведемо, що $S^n(f, \coprod_{i\in\omega} f_i,\ldots,g_n) = \coprod_{i\in\omega} S^n(f, f_i,\ldots,g_n)$.

Нехай $S^n(f, \coprod_{i\in\omega} f_i,\ldots,g_n))(st)\downarrow = r$. Отримуємо наступну послідовність еквівалентних перетворень:

$$S^n(f, \coprod_{i\in\omega} f_i,\ldots,g_n))(st)\downarrow = r \Leftrightarrow f(\coprod_{i\in\omega} f_i(st),\ldots,g_n(st))\downarrow = r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists k(f(f_{ake}(st),\ldots,g_n(st))\downarrow = r \Leftrightarrow \coprod_{i\in\omega} S^n(f, f_i,\ldots,g_n)(st)\downarrow = r.$$

Наведені перетворення спираються на той факт, що

$$\coprod_{i\in\omega} f_i\,(st)\downarrow = r' \Leftrightarrow \exists k(f_{ake}(st)(st)\downarrow = r'. \blacksquare$$

Аналогічним чином доводиться наступне твердження.

Лема 5.15. Композиція присвоєння AS^x – неперервна.

Доведемо неперервність послідовного виконання.

Лема 5.16. Композиція послідовного виконання $\bullet$ – неперервна.

Доведення. Щоб довести неперервність композиції $\bullet$, нам потрібно довести неперервність $\bullet$ за кожним аргументом. Доведемо лише неперервність за першим аргументом, тобто, що $(\coprod_{i\in\omega} f_i)\bullet g =_F \coprod_{i\in\omega}(f_i \bullet g)$ для довільного ланцюга $f_0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots$ функцій з *FS*. Маємо, що

$$((\coprod_{i\in\omega} f_i)\bullet g)(st)\downarrow = r \Leftrightarrow \exists b\,(\coprod_{i\in\omega} f_i)(st)\downarrow = b \;\&\; g(b)\downarrow = r \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists b \exists k\; f_k(st)\downarrow = b \;\&\; g(b)\downarrow = r \Leftrightarrow \exists k\,(f_k \bullet g)(st)\downarrow = r \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\coprod_{i\in\omega}(f_i \bullet g))(st)\downarrow = r\,. \blacksquare$$

Лема 5.17. Композиція *IF* – неперервна.

Доведення. Щоб довести неперервність композиції *IF*, нам потрібно довести неперервність *IF* за кожним аргументом. Розглянемо лише доведення неперервності за одним аргументом, оскільки за іншими вона доводиться аналогічно. Нагадаємо, що

$$IF(p, f, g)(st) = \begin{cases} f(st), \textit{якщо } p(st)\downarrow = true \\ g(st), \textit{якщо } p(st)\downarrow = false \\ \textit{невизначено в інших випадках} \end{cases}$$

Розглянемо перший випадок: $p(st)\downarrow = true$. Тоді

$$IF(p, \coprod_{i\in\omega} f_i, g)(st)\downarrow = r \Leftrightarrow (\coprod_{i\in\omega} f_i)(st)\downarrow = r \Leftrightarrow \exists k\; f_k(st)\downarrow = r \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists k\; IF(p, f_k, g)(st)\downarrow = r \Leftrightarrow (\coprod_{i\in\omega} IF(p, f_i, g))(st)\downarrow = r\,. \blacksquare$$

Другий випадок ($p(st)\downarrow = false$) є більш простим.

Для доведення неперервності композицій ітерації (циклу) спочатку покажемо, що ітерація функцій є найменшою нерухомою точкою певного рекурсивного визначення.

Теорема 5.5. Для композиції циклу виконується наступне співвідношення:

$$WH(p, f) = lfp_X\, IF(p, f \bullet X, id)$$

Доведення

Раніше (лема *1.2*) було доведено, що $WH(p, f)$ є нерухомою точкою рівняння $X = IF(fb, fs \bullet X, id)$, звідки випливає, що $WH(p, f) \ge lfp_X\, IF(p, f \bullet X, id)$. Тому залишилось довести, що $WH(p, f) \le lfp_X\, IF(p, f \bullet X, id)$.

Попередньо нагадаємо початкове визначення композиції циклу *WH* (розділ 1): $WH(fb,fs)(st) = st_n$, де $st_0 = st$, $st_1 = fs(st_0)$, $st_2 = fs(st_1)$, …, $st_n = fs(st_{n-1})$, причому $fb(st_0) = true$, $fb(st_1) = true, \ldots, fb(st_{n-1}) = true$, $fb(st_n) = false$.

Тепер позначимо $IF(p, f \bullet X, id) = \varphi(X)$. Тоді $lfp_x IF(p, f \bullet X, id) = \coprod_{i\in\omega} \varphi^{(i)}(\perp)$. Також будемо позначати $WH(p, f)(st)\downarrow^{\le k} = st_k$ той факт, що обчислення $WH(p, f)$ на даному *st* завершилося з результатом st_k при числі ітерацій, не більше ніж *k*, тобто $NumItWH((p, f), st) \le k$.

Доведемо індукцією за k, що з умови $WH(p,f)(st)\downarrow^{\le k} = st_k$, випливає $(\varphi^{(k+1)}(\perp))(st)\downarrow = st_k$. (Усі твердження такого типу вважаються універсально квантифікованими, в даному випадку за st та st_k.)

База індукції ($k = 0$). З умови $WH(p,f)(st)\downarrow^{\le 0} = st_k$, випливає, що $st_0 = st$, та $p(st) = false$. Оскільки $\varphi^{(1)}(\perp) = \varphi(\perp) = IF(p, f \bullet \perp, id)$, то за вказаних умов будемо мати, що $(\varphi^{(1)}(\perp))(st)\downarrow = st$.

Індуктивний крок. З припущення, що індуктивна гіпотеза справедлива для k, доведемо її справедливість для $k+1$.

Дійсно, нехай $WH(p,f)(st)\downarrow^{\le k+1} = st_{k+1}$. Тоді з леми *1.2* випливає, що $WH(p,f)(f(st))\downarrow^{\le k} = st_{k+1}$ та що $p(st) = true$. За індуктивною гіпотезою маємо, що $(\varphi^{(k+1)}(\perp))(f(st))\downarrow = st_{k+1}$. Звідси випливає, що $(\varphi^{(k+2)}(\perp))(st)\downarrow = st_{k+1}$, бо $\varphi^{(k+2)}(\perp) = IF(p, f \bullet \varphi^{(k+1)}(\perp), id)$ і при обчисленні маємо, що

$$(\varphi^{(k+2)}(\perp))(st) = (IF(p, f \bullet \varphi^{(k+1)}(\perp), id))(st) =$$
$$= f \bullet \varphi^{(k+1)}(\perp)(st) = (\varphi^{(k+1)}(\perp))(f(st)) = st_{k+1}. \blacksquare$$

Лема 5.18. Композиція WH – неперервна.

Доведення. Скориставшись доведеними результатами щодо циклу та неперервності композицій послідовного виконання та умовного оператора, отримуємо, що

$$WH(p, \coprod_{i\in\omega} f_i) = lfp_X\, IF(p, (\coprod_{i\in\omega} f_i) \bullet X, id) = lfp_X\, IF(p, \coprod_{i\in\omega}(f_i \bullet X), id) =$$
$$= lfp_X \coprod_{i\in\omega} IF(p, f_i \bullet X, id) = \coprod_{i\in\omega} lfp_X\, IF(p, f_i \bullet X, id) = \coprod_{i\in\omega} WH(p, f_i).$$

Аналогічним чином доводиться неперервність і за першим аргументом. ■

Доведені леми про неперервність композицій алгебри *A_Prog* дозволяють стверджувати, що похідні композиції, які можна визначити в цій алгебрі, також будуть неперервними. (Питання про точне визначення похідних композицій буде розглянуто пізніше.)

Факт неперервності композицій алгебри *A_Prog* не є випадковим. Має місце наступне твердження.

Твердження 5.1. Програмні композиції (які обчислюються за скінченну кількість кроків) – неперервні.

Доведення ґрунтується на тому факті, що для обчислення значень функцій, побудованих за допомогою програмних композицій, використовується лише скінченна частина (скінченний графік) функцій-аргументів. Деталі доведення тут не наводимо.

Таким чином, найважливіший висновок з теорії ННТ полягає в тому, що семантика мов програмування задається класами функцій, які є ω-областями, а композиції таких функцій є неперервними операторами. Це дозволяє обґрунтувати коректність використання різних рекурсивних методів для визначення засобів конструювання програм, спираючись на теореми, доведені в теорії ННТ.

Проілюструємо введення рекурсивних визначень функцій для розширення мови *SIPL*.

5.7.3. Рекурсивні розширення мови SIPL

Спочатку розглянемо приклади рекурсивних визначень функцій.

Приклад 5.1. Функцію $n!$ часто задають наступним рекурсивним визначенням:

$$f(n) = \textbf{if } n > 1 \textbf{ then } n*f(n-1) \textbf{ else } 1.$$

Головна складність таких визначень полягає у відсутності їх стандартного семантичного уточнення. Одне з можливих уточнень має операційний характер, а саме, вважається, що при обчисленні значення, наприклад, $f(5)$, обчислюється права частина рекурсивного визначення (відбувається розгортка визначення при заміні n

на 5). Це обчислення призведе до необхідності обчислення $f(4)$, що у свою чергу потребує обчислення $f(3)$, і т.ін. І тільки обчислення $f(1)$ дасть результат 1, що дозволить обчислити $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$.

Аналіз цієї процедури обчислень показує, що обчислення фактично пов'язані з перетворенням виразів, їх «переписуванням», «озгорткою» для нових аргументів функцій (англійською – *rewriting*). Але порядок застосувань переписуючих правил також чітко не визначений. Тому виникають різні можливості розгортки рекурсивної функції, коли замінюється праве входження функції, чи ліве, чи внутрішнє, чи зовнішнє. Цей порядок має визначатись семантикою визначень, тому ми знову повертаємось до питання про семантику рекурсивних визначень.

Тут будемо застосовувати композиційно-номінативну семантику виразів. Це означає, що права частина буде тлумачитись як номінативна функція, побудована з простих функцій за допомогою композицій.

Перше питання, що виникає, є наступним: яка номінативна функція відповідає виразу **if** $n > 1$ **then** $n*f(n-1)$ **else** 1? Попереднє тлумачення, коли ми вживали виклики функції виду $f(5)$, $f(4)$ і т.ін., говорить про те, що f є унарною функцією типу $Int \to Int$. Тут фактично n є позначенням числа. Таке тлумачення для програмування не є вдалим, тому що для програмування є природним вживання функцій над іменованими значеннями (детальніше це буде обговорюватись у подальших розділах). Тому будемо вважати, що виразу **if** $n > 1$ **then** $n*f(n-1)$ **else** 1 відповідає функція, задана на станах змінних, причому n є однією із змінних. Але оскільки ми вже «зарезервували» n для позначення довільного числа, будемо змінну позначати прописною (великою) літерою N. Це означає, що нам краще переписати визначення саме у такій формі:

$$f(N) = \textbf{if } N > 1 \textbf{ then } N*f(N-1) \textbf{ else } 1$$

Отже, права частина визначення задає функцію, що обчислюється на даних виду $[N \to n]$ та на їх розширеннях.

При побудові семантичного терму цього виразу виникає питання про тлумачення виразу $f(N-1)$. Зрозуміло, що це буде суперпозиція функції $S^2(sub, N\Rightarrow,\bar{1})$, яка задається виразом $N-1$, в функцію f. Але функція f є номінативною, а не є n-арною функцію. Тому треба визначити суперпозицію у номінативні функції. Таких суперпозицій може буде декілька, зокрема повна (глобальна) та неповна (локальна) суперпозиції. Для глобальної суперпозиції аргумент функції f формується повністю (як цілісність). Для локальної суперпозиції формуються лише одна частина аргументу f, а інша береться із вхідного даного. Ці міркування і ведуть до наступних визначень суперпозицій.

Повною (глобальною) суперпозицією функцій $g_1, g_2, \ldots, g_n$ в номінативну функцію f називається функція, яка задається формулою:

$$S^{(v1,v2,..vn)}(f,g_1,g_2,\ldots,g_n)(st)=f([v1\mapsto g_1(st), v2\mapsto g_2(st), \ldots, vn\mapsto g_n(st)]).$$

Частковою (локальною) суперпозицією функцій $g_1, g_2, \ldots, g_n$ в номінативну функцію f називається функція, яка задається формулою:

$$S^{[v1,v2,..vn]}(f,g_1,g_2,\ldots,g_n)(st)=f(st\,\nabla[v1\mapsto g_1(st), v2\mapsto g_2(st), \ldots, vn\mapsto g_n(st)]).$$

Зауважимо, що традиційна суперпозиція в n-арну функцію може розглядатися як частковий випадок повної суперпозиції при тлумаченні $1, \ldots, n$ як імен аргументів функції f. Тому

$$S^n(f,g_1,g_2,\ldots,g_n)=S^{(1,2,\ldots,n)}(f,g_1,g_2,\ldots,g_n).$$

Повернемось тепер до побудови семантичного терму виразу

$$\textbf{if } N > 1 \textbf{ then } N*f(N-1) \textbf{ else } 1$$

Хоча можна обрати повну (глобальну) суперпозицію, візьмемо неповну (локальну) суперпозицію як більш адекватну задачам програмування. Отримуємо семантичний терм

$$\varphi(f)= IF(S^2(gr, N\Rightarrow, \bar{1}), S^2(mult, N\Rightarrow, S^{[N]}(f, S^2(sub, N\Rightarrow,\bar{1}))), \bar{1}).$$

Неважко довести, що введені композиції суперпозиції є неперервними, тому теорема КТК є застосовною. Це означає, що існує ННТ $\varphi(f)$, яку можна отримати методом послідовних наближень. Обчислимо декілька таких наближень.

Початковим наближенням є всюди невизначена функція $f_0 = \perp$.

Наступне наближення отримуємо підстановкою попереднього наближення в оператор φ.

$f_1 = \varphi(f_0) = \varphi(\perp) = IF(S^2(gr, N\Rightarrow, \bar{1}), S^2(mult, N\Rightarrow, S^{[N]}(\perp, S^2(sub, N\Rightarrow, \bar{1}))), \bar{1}) = IF(S^2(gr, N\Rightarrow, \bar{1}), S^2(mult, N\Rightarrow, \perp), \bar{1}) = IF(S^2(gr, N\Rightarrow, \bar{1}), \perp, \bar{1})$.

Наведені рівності мають місце тому, що суперпозиція всюди невизначеної функції, або суперпозиція у всюди невизначену функцію, має своїм результатом всюди невизначену функцію, тобто $S^{[N]}(\perp, S^2(sub, N\Rightarrow, \bar{1})) = \perp$ та $S^2(mult, N\Rightarrow, \perp) = \perp$. Тому суперпозицію часто називають строгою операцією, бо вона зберігає всюди невизначену функцію.

Наближення f_1 можна записати за допомогою її графіка наступним чином

$$f_1([N\mapsto n]) = IF(S^2(gr, N\Rightarrow, \bar{1}), \perp, \bar{1})([N\mapsto n]) = \begin{cases} 1, \text{якщо } n \le 1, \\ \text{невизначено, якщо } n > 1. \end{cases}$$

Обчислимо друге наближення:

$f_2 = \varphi(f_1) = IF(S^2(gr, N\Rightarrow, \bar{1}), S^2(mult, N\Rightarrow, S^{[N]}(f_1, S^2(sub, N\Rightarrow, \bar{1}))), \bar{1}) =$

$= IF(S^2(gr, N\Rightarrow, \bar{1}), S^2(mult, N\Rightarrow, S^{[N]}(IF(S^2(gr, N\Rightarrow, \bar{1}), \perp, \bar{1}),$

$S^2(sub, N\Rightarrow, \bar{1}))), \bar{1})$.

Аналіз отриманого виразу говорить про те, що з'явилося нове значення при $n = 2$. Це значення можна обчислити на $f_2([N\mapsto 2])$ так, як це ми робили раніше.

Це дає можливість записати наближення f_2 за допомогою його графіка наступним чином

$$f_2([N\mapsto n]) = \begin{cases} 1, \text{ÿêùî} \quad n \le 1, \\ 2, \text{ÿêùî} \quad n = 2, \\ \text{íåâèçíà÷åí} \quad \text{î}, \text{ÿêùî} \quad n > 2. \end{cases}$$

Наведені наближення дозволяють сформулювати гіпотезу, що

$$f_k([N\mapsto n]) = \begin{cases} 1, \text{ÿêùî} \quad n \le 1, \\ n!, \text{ÿêùî} \quad 2 \le n \le k, \\ \text{íåâèçíà÷åí} \quad \text{î}, \text{ÿêùî} \quad n > k. \end{cases}$$

Цю гіпотезу можна довести індукцією за k.

Для $k=1$ гіпотеза справедлива.

Доведемо її справедливість для $k+1$, виходячи з того, що вона справедлива для k. Маємо, що

$f_{k+1} = \varphi(f_k) = IF(S^2(gr, N\Rightarrow, \bar{1}), S^2(mult, N\Rightarrow, S^{[N]}(f_k, S^2(sub, N\Rightarrow, \bar{1}))), \bar{1})$

У силу монотонності φ «старі» значення функції f_k не зміняться, але можуть з'явитися нові значення. Це можливо лише для даного $[N\mapsto k+1]$. Дійсно, обчислення f_{k+1} дає

$f_{k+1}([N\mapsto k+1]) = \varphi(f_k) =$

$= IF(S^2(gr, N\Rightarrow, \bar{1}), S^2(mult, N\Rightarrow, S^{[N]}(f_k, S^2(sub, N\Rightarrow, \bar{1}))), \bar{1})([N\mapsto k+1]) =$

$= S^2(mult, N\Rightarrow, S^{[N]}(f_k, S^2(sub, N\Rightarrow, \bar{1})))([N\mapsto k+1]) =$

$= mult(N\Rightarrow([N\mapsto k+1]), S^{[N]}(f_k, S^2(sub, N\Rightarrow, \bar{1}))([N\mapsto k+1])) =$

$= mult(k+1, f_k([N\mapsto k+1] \nabla [N\mapsto S^2(sub, N\Rightarrow, \bar{1})([N\mapsto k+1])]) =$

$= mult(k+1, f_k([N\mapsto k+1] \nabla [N\mapsto sub(N\Rightarrow([N\mapsto k+1]), \bar{1}([N\mapsto k+1]))])) =$

$= mult(k+1, f_k([N\mapsto k+1] \nabla [N\mapsto sub(k+1, 1)])) =$

$=mult\ (k+1,\ f_k([N\mapsto k+1]\ \nabla[N\mapsto k]))=mult\ (k+1,\ f_k([N\mapsto k+1]\ \nabla[N\mapsto k]))=$
$=mult\ (k+1,\ f_k([N\mapsto k]))=mult\ (k+1,\ k!)=(k+1)!.$

Для даних, більших за $k+1$, значення f_{k+1} буде невизначеним.

Границя послідовності $f_0,\ f_1,\ f_2,\ldots$ дає функцію $f_\omega=\coprod_{i\in\omega} f_i$, яка є найменшою нерухомою точкою оператора φ, тобто $f_\omega=\coprod_{i\in\omega} f_i=lfp_f\ \varphi$. Функція f_ω на даному $[N\mapsto n]$ приймає значення $n!$ (для $n>0$). Таким чином, теорія найменшої нерухомої точки дає обґрунтування рекурсивним визначенням наведеного типу.

Приклад 5.2. Знайдемо ННТ рекурсивного визначення найбільшого спільного дільника чисел n та m. Традиційне рекурсивне визначення має такий вигляд:

$f(n,\ m)$ = **if** $n > m$ **then** $f(n-m,\ m)$ **else if** $n < m$ **then** $f(n,\ m-n)$ **else** m

Таке визначення зазвичай трактують як визначення певної бінарної функції. Хоча можна побудувати теорію ННТ і для n-арних функцій (зробіть це самостійно), ми перейдемо до класу номінативних функцій (над даними з іменами M та N). Для цього наше визначення перепишемо у наступному вигляді:

$f(N,\ M)$ = **if** $N > M$ **then** $f(N-M,\ M)$ **else if** $N < M$ **then** $f(N,\ M-N)$ **else** M

Побудуємо семантичний терм правої частини цього визначення.

$\varphi(f)= IF(S^2(gr,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow),\ S^{[N,M]}(f,\ S^2(sub,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow),\ M\Rightarrow),\ IF(S^2(less,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow),\ S^{[N,M]}(f,\ N\Rightarrow,\ S^2(sub,\ M\Rightarrow,\ N\Rightarrow)),\ M\Rightarrow))$.

Тут gr позначає предикат «більше».

Зауважимо, що можна взяти суперпозицію за одним іменем, а саме

$\varphi'(f)= IF(S^2(gr,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow),\ S^{[N]}(f,\ S^2(sub,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow)),\ IF(S^2(less,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow),\ S^{[M]}(f,\ S^2(sub,\ M\Rightarrow,\ N\Rightarrow)),\ M\Rightarrow))$.

Також можна брати повну суперпозицію:

$\varphi''(f)= IF(S^2(gr,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow),\ S^{(N,M)}(f,\ S^2(sub,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow),\ M\Rightarrow),\ IF(S^2(less,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow),\ S^{(N,M)}(f,\ N\Rightarrow,\ S^2(sub,\ M\Rightarrow,\ N\Rightarrow)),\ M\Rightarrow))$.

Для спрощення перетворень візьмемо варіант для φ'.

Початковим наближенням є всюди невизначена функція

$f_0 = \bot$.

Наступне наближення отримуємо підстановкою попереднього наближення в оператор φ:

$f_1 = \varphi'(f_0) =\varphi'(\bot)= IF(S^2(gr,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow),\ S^{[N]}(\bot,\ S^2(sub,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow)),\ IF(S^2(less,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow),\ S^{[M]}(\bot,\ S^2(sub,\ M\Rightarrow,\ N\Rightarrow)),\ M\Rightarrow))=IF(S^2(gr,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow),\ \bot,\ IF(S^2(less,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow),\ \bot,\ M\Rightarrow))$.

Графік задається наступною формулою:

$f_1([N\mapsto n,M\mapsto m])=$
$=IF(S^2(gr,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow),\ \bot,\ IF(S^2(less,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow),\ \bot,\ M\Rightarrow))([N\mapsto n,M\mapsto m])=$

$$= \begin{cases} m, \text{ якщо } n = m, \\ \text{невизначено, якщо } n \neq m. \end{cases}$$

Запишемо графік f_1 трішки іншим чином, фактично вводячи r як найбільший спільний дільник:

$f_1([N\mapsto n,M\mapsto m])=$

$$= \begin{cases} r, \text{ якщо } (1*r = n\ \&\ 1*r = m), \\ \text{невизначено в інших випадках}. \end{cases}$$

Обчислимо друге наближення.

$f_2 = \varphi'(f_1) = IF(S^2(gr,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow),\ S^{[N]}(f_1,\ S^2(sub,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow)),\ IF(S^2(less,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow),\ S^{[M]}(f_1,\ S^2(sub,\ M\Rightarrow,\ N\Rightarrow)),\ M\Rightarrow))$.

Його графік задається наступною формулою:

$f_2([N\mapsto n,M\mapsto m])=$
$=IF(S^2(gr,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow),\ S^{[N]}(f_1,\ S^2(sub,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow)),\ IF(S^2(less,\ N\Rightarrow,\ M\Rightarrow),\ S^{[M]}(f_1,\ S^2(sub,\ M\Rightarrow,\ N\Rightarrow)),\ M\Rightarrow))([N\mapsto n,M\mapsto m])=$

$$= \begin{cases} m, \text{ якщо } n = m \text{ або } n = 2m, \\ n, \text{ якщо } 2n = m, \\ \text{невизначено в інших випадках}. \end{cases}$$

Пропонуємо читачу побудувати самостійно наступні наближення та довести, що їх границя задає функцію знаходження найбільшого спільного дільника.

Побудуємо тепер розширення мови *SIPL*, які дозволяють використовувати рекурсивні визначення такого типу, як у розглянутих прикладах.

Синтаксис розширення – його БНФ – подамо у наступній таблиці.

Таблиця 5.1

Ліва частина правила – метазмінна	Права частина правила	Ім'я правила
<програма> ::=	…| **program** <список об'явлень функцій> **begin** <оператор> **end**	*NP1* *NP2*
<вираз> ::=	…| **if** <умова> **then** <вираз> **else** <вираз> | <виклик функції>	*NA1–NA7* *NA8* *NA9*
<список об'явлень функцій>::=	ε | <об'явлення функції> | <об'явлення функції> ; <список об'явлень функцій>	*LDF1* *LDF2* *LDF3*
<об'явлення функції>::=	**func** <ім'я функції>=<вираз> | **func** <ім'я функції>(<список формальних параметрів>) = <вираз>	*DF1* *DF2*
<ім'я функції> ::=	<змінна>	*NF*
<список формальних параметрів>::=	<змінна> | <змінна> , <список формальних параметрів>	*LFP1* *LFP2*
<виклик функції> ::=	<ім'я функції> | <ім'я функції> (<список фактичних параметрів>)	*CF1* *CF2*
<список фактичних параметрів>::=	<вираз> | <вираз> , <список фактичних параметрів>	*LAP1* *LAP2*

У більш математичному вигляді ці розширення можна задати наступним чином:

Таблиця 5.2

Ліва частина правила – метазмінна	Права частина правила	Ім'я правила
P::=	…| **program** $dec_1;\ldots;dec_n$ **begin** *S* **end**	*P1* *P2*
a::=	…| **if** *b* **then** a_1 **else** a_2 | *fc*	*A1– A7* *A8* *A9*
dec ::=	**func** *fn*=*a* |	*DF1* *DF2*

	func $fn(x_1,\ldots,x_n) = a$	
fn ::=	x	*NF*
fc ::=	fn | $fn(a_1,\ldots,a_n)$	*CF1* *CF2*

Семантичні правила повинні врахувати наявність рекурсивних визначень. Тому ці правила ускладнюються, бо з'являється аргумент *E*, який називаємо *середовищем*. Неформально середовище можна трактувати як відображення, яке імені функції fn, заданого рекурсивним визначенням **func** $fn(x_1,\ldots,x_n) = a$, співставляє формальні параметри $(x_1,\ldots,x_n)$ та семантику виразу a. Далі ця інформація використовується для подання семантики викликів функцій. Деталі тут розписувати не будемо.

Висновки

У цьому розділі було розглянуто основи теорії рекурсивних визначень. Основним методом знаходження об'єкту, що задається рекурсивним визначенням, є метод послідовних наближень. Щоб цей метод був коректним, клас об'єктів має бути ω-областю (повною частково впорядкованою множиною з найменшим елементом), а операції над об'єктами – неперервними. В цьому випадку теорема Кнастера–Тарського–Кліні гарантує існування найменшого розв'язку (найменшої нерухомої точки неперервного оператора), який знаходиться методом послідовних наближень. Множина нерухомих точок також утворює ω-область, а відображення, яке неперервному оператору співставляє його найменшу нерухому точку, також є неперервним. Традиційні методи побудови більш складних областей дозволяють будувати нові ω-області з більш простих ω-областей. Застосування теорії найменшої нерухомої точки є надзвичайно широким. Зокрема, ця теорія може бути застосована для визначення синтаксису формальних мов за допомогою БНФ та подібних методів. Семантика рекурсивних програм також може бути визначена за допомогою цієї теорії. Важливо відзначити, що семантичні області є ω-областями, а засоби конструювання програм – композиції – є неперервними. Ці властивості гарантують наявність адекватного тлумачення рекурсивних програм.

Контрольні питання

1. Що таке рекурсивне визначення (рекурсивне рівняння)?
2. Які парадокси пов'язані з рекурсивними визначеннями?
3. Який метод застосовують для розв'язку рекурсивних рівнянь? Які поняття пов'язані з цим методом?
4. Що таке перший граничний (перший нескінченний) ординал?
5. Що таке ω-область?
6. Дайте визначення неперервного відображення.
7. Сформулюйте теорему Кнастера-Тарського-Кліні.
8. Яку структуру має множина нерухомих точок неперервного оператора?
9. Визначте методи конструювання похідних областей.
10. Сформулюйте властивості оператора найменшої нерухомої точки.
11. Вкажіть на застосування теорії ННТ для подання синтаксису мов програмування.
12. Вкажіть на застосування теорії ННТ для подання семантики мов програмування.
13. Як визначаються рекурсивні розширення мови *SIPL*.
14. Наведіть приклади рекурсивних визначень у розширеннях мови *SIPL*.

Вправи

1. Розбудуйте теорію ННТ для класу *n*-арних функцій.
2. Для задач з розділу 1 побудуйте рекурсивні визначення.
3. Доведіть коректність побудованих рекурсивних визначень.

Література:

1. Ахо А., Ульман Дж. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции (Том 1. Синтаксический анализ). – М.: Мир, 1978. – 612 с.
2. Басараб И.А., Никитченко Н.С., Редько В.Н. Композиционные базы данных. – К.: Либідь, 1992. – 182 с.
3. Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л. Алгебра. Языки. Программирование.– К.: Наукова думка, 1974. – 328 с.
4. Грис Д. Наука программирования. – М.: Мир, 1982.
5. Гросс М., Лантен А. Теория формальных грамматик.– М.: Мир, 1971.– 294 с.
6. Дейкстра Э. Дисциплина программирования. – М.: Мир, 1976.
7. Лавров С. Программирование. Математические основы, средства, теория. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001. – 320 с.
8. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Математична логіка та теорія алгоритмів. – К., 2008. – 528 с.
9. Пентус А.Е., Пентус М.Р. Теория формальных языков: Учебное пособие. – М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ, 2004. – 80 с.
10. Редько В.Н. Композиции программ и композиционное программирование // Программирование. – 1978. – N.5. – С. 3–24.
11. Хопкрофт Дж., Мотвани Р., Ульман Д. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. – М.: Вильямс, 2002.– 528 с.
12. Abrial J.-R. Assigning Programs to Meanings.– Cambridge University press. – 1996. – 779 p.
13. Hoare C.A.R., Jifeng H. Unifying Theories of Programming. – Prentice Hall Europe. – 1998. – 298 p.
14. Nielson H.R., Nielson F. Semantics with Applications. A Formal Introduction.– John Wiley & Sons, Chichester, England, 1992. – 240 p.
15. Nikitchenko N. A Composition Nominative Approach to Program Semantics. – Technical Report IT-TR: 1998-020. – Technical University of Denmark. – 1998. – 103 p.
16. Spivey J.M. Understanding Z: A specification language and its formal semantics. – Cambridge University press. – 1988. – 131 p.
17. Winskel G. The Formal Semantics of Programming Languages: An Introduction. – The MIT Press, London: England, 1993. – 361 p.

ЗМІСТ