

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

МОДЕЛЮВАННЯ В ЕЛЕКТРОНІЦІ

Навчальний посібник

для студентів спеціальностей
153 – Мікро- та наноелектроніка, 171 – Електроніка

РЕКОМЕНДОВАНО
Вченою радою ХНУРЕ.
Протокол № 8 від 03.07.2018

Харків 2020

УДК 621.384 (07)

Бондаренко І.М., Свідерська Л.І., Грицунов О.В. Моделювання в електроніці: навч. посібник для студентів спеціальностей 153 – Мікро- та наноелектроніка, 171 – Електроніка. – Харків: ХНУРЕ, 2020. – 163 с.

ISBN 978-966-659-285-2

У навчальному посібнику викладені найбільш поширені питання застосування сучасних інформаційних технологій у різних сферах проектної діяльності. Роботу структуровано за шістьма розділами: загальні питання теорії моделювання, загальні положення теорії електромагнітного поля, математичне моделювання ЕПП, моделювання напівпровідникових приладів, схемотехнічне моделювання, завдання та методи моделювання структур елементів ВІС. Кожен розділ містить ґрунтовні теоретичні положення, розгорнуті та докладно проаналізовані приклади розв'язання практичних задач.

Рецензенти:

Панченко О.Ю., професор кафедри ПЕЕА Харківського національного університету радіоелектроніки, д-р фіз.-мат. наук, професор;

Дехтярук Л.В., професор кафедри фізики Харківського національного університету будівництва та архітектури, д-р фіз.-мат. наук, професор.

Іл. 84. Табл. 5. Бібліограф. назв. 17.

ISBN 978-966-659-285-2

© Бондаренко І.М., Свідерська Л.І., Грицунов О.В., 2020
© Харківський національний університет радіоелектроніки, 2020

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1 ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ МОДЕЛЮВАННЯ.....	7
1.1 Вимоги до математичних моделей в електроніці	8
1.2 Класифікація моделей в електроніці.....	9
1.3 Методика отримання математичних моделей елементів.....	13
2 ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ	15
2.1 Основні закони електродинаміки	15
2.2 Математичні методи моделювання електромагнітних полів	17
2.2.1 Метод кінцевих різниць	18
2.2.2 Побудова різницевої схем.....	19
2.2.3 Розв'язання хвильового рівняння методом кінцевих різниць.....	24
2.2.4 Розв'язання рівняння Лапласа методом кінцевих різниць	29
2.3 Метод кінцевих елементів.....	33
2.4 Модельний експеримент. Застосування пакета програм COMSOL Multiphysics для вирішення завдань теплообміну	38
2.5 Порівняльна характеристика чисельних методів і алгоритмів	48
3 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОННИХ ПРИЛАДІВ	50
3.1 Змінні Ейлера та Лагранжа	50
3.2 Моделювання електровакуумних приладів.....	54
3.2.1 Моделювання тріода	55
3.2.2 Імітаційна модель тріода.....	58
3.2.3 Модельний експеримент. Моделювання тріодної електронно-оптичної системи в середовищі MathCad.....	61
4 МОДЕЛЮВАННЯ НАПІВПРОВІДНИКОВИХ ПРИЛАДІВ.....	66
4.1 Модель напівпровідникового діода	68
4.2 Модель біполярного транзистора.....	
4.3 Модельний експеримент. Формування біполярного транзистора за допомогою дифузії в середовищі MathCad	81
4.4 Моделювання діода Ганна	94
4.4.1 Короткі відомості про механізм роботи діода Ганна.....	95
4.4.2 Математична модель діода Ганна	96
4.4.3 Еквівалентна схема генератора на діоді Ганна.....	102

5 СХЕМОТЕХНІЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ	105
5.1 Формальне подання структури на макрорівні	105
5.2 Форми подання моделей елементів схем.....	110
5.3 Моделі компонентів електронних схем.....	113
5.4 Макромоделі	114
5.5 Ідентифікація параметрів моделей елементів електронних схем.....	117
5.6 Аналогові схеми.....	119
5.7 Цифрові та цифро-аналогові схеми.....	124
5.8 Модельний експеримент. Застосування програми наскрізного проектування OrCad для моделювання електричних схем.....	130
ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ.....	142

ВСТУП

Розвиток науки й техніки ставить завдання вдосконалення методів розроблення нових приладів, принципово реалізують нові фізичні явища. Особливо яскраво ці тенденції поширюються саме в електроніці.

У зв'язку з розвитком мікроелектроніки, створення інтегральних схем постала проблема вдосконалення технології виробництва. Однак вирішувати це завдання на практиці без попереднього аналізу, наприклад розміщення зв'язків і окремих елементів, практично неможливо. Адже мова йде про розміщення в одному кристалі декількох сотень тисяч активних і пасивних елементів. Окрім того, з них ще необхідно сконструювати схему, наприклад мікропроцесор.

Розроблення технічного пристрою супроводжується фізичним або математичним моделюванням. Фізичне моделювання пов'язане із значними матеріальними витратами, оскільки потрібне виготовлення робочих макетів та їхнє трудомістке дослідження.

Часто фізичне моделювання просто неможливо через надзвичайну складність пристроїв. У цьому випадку вдаються до математичного моделювання з використанням засобів і методів обчислювальної техніки. Це й обумовлює актуальність комп'ютерного моделювання та його вищої стадії – створення систем автоматизованого проектування.

Математичне моделювання – це використання замість реального об'єкта його математичної моделі. У свою чергу математична модель є кількісним описом об'єкта. Слово «математична» в терміні «математична модель» наголошує, що цей опис відрізняється чітким математичним характером.

Комп'ютерне моделювання є основним найпотужнішим інструментом дослідження складних систем і структур. Використання строгих комп'ютерних моделей дозволяє адекватно проводити їхній аналіз, синтез або оптимізацію і часто витісняє натурний експеримент. Бурхливо розвивається в останні роки програмне забезпечення, яке дозволяє вирішувати багато завдань, які раніше вважалися нездійсненними.

Мета цього посібника – ознайомити студентів з основними принципами побудови моделей в електроніці та навести приклади реалізації цих моделей.

У навчальному посібнику розглянуто п'ять тем, що охоплюють певною мірою такі галузі електроніки:

- теорія електромагнітного поля;
- електронні прилади;

- напівпровідникові прилади;
- аналогові схеми;
- цифрові схеми.

Для кращого засвоєння матеріалу деякі теми завершуються модельним експериментом із використанням сучасних пакетів програм.

1 ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ МОДЕЛЮВАННЯ

Математичне моделювання полягає в перекладі явищ нашого «реального світу» мовою математики. Поняття «модель» відображає поведінку об'єкта або процесу. Крайніми випадками поняття «моделювання» є, з одного боку, натурний експеримент, з іншого, – розрахунково-аналітичний. Між ними є проміжні методи досліджень. Вони дозволяють скоротити і полегшити натурний експеримент.

Математичні моделі (ММ) поділяються на:

- а) аналітичні, побудовані за фізичними законами, що розкриває сутність явищ;
- б) експериментально-статистичні, що відповідають набору експериментальних даних.

Аналітичні моделі дозволяють отримати явні (аналітичні) залежності для необхідних величин або, якщо це неможливо, знайти чисельні рішення для конкретних початкових умов і кількісних характеристик моделі.

Експериментально-статистичні моделі слугують для опису об'єкта як «чорного ящика». Тому обґрунтування достовірності (верифікації) ММ є невід'ємною частиною застосування методів моделювання.

Модель зазвичай уточнюється шляхом постановки натурних експериментів, що підтверджують точність і достовірність ММ.

Збільшення складності ММ для забезпечення більшої точності результатів має природне обмеження з боку швидкості обробки інформації, пам'яттю ЕОМ. Так, якщо вихідні дані відомі з точністю 5 %, то безглуздо пропонувати моделі, що забезпечують точність рішення 1 %.

Застосовуються методи математичного моделювання як до фізичних, так і до електричних процесів, а також і в галузях медицини, статистики тощо. Наприклад, розроблені моделі молекул, дорожнього руху, цукрового діабету тощо.

ММ технічного об'єкта – система математичних об'єктів (чисел, змінних, матриць, множин і т. п.) і відношень між ними, що відображає деякі властивості технічного об'єкта. У проектуванні використовують ММ, що відображають властивості об'єкта, суттєві з позицій інженера.

Серед властивостей об'єкта, що відображаються в описах на певному ієрархічному рівні, зокрема в ММ, розрізняють властивості систем, елементів систем і зовнішнього середовища, у якій має функціонувати об'єкт. Кількісне

вираження цих властивостей здійснюється за допомогою величин, що називаються параметрами. Величини, що характеризують властивості системи, елементів системи та зовнішнього середовища, називають відповідно вихідними, внутрішніми і зовнішніми параметрами.

1.1 Вимоги до математичних моделей в електроніці

До ММ висуваються вимоги універсальності, адекватності, точності й економічності.

Ступінь універсальності ММ характеризує повноту відтворення в моделі властивостей реального об'єкта. ММ відображає лише деякі властивості об'єкта. Так, більшість ММ, використовуваних у функціональному проектуванні, призначені для відображення фізичних або інформаційних процесів, що відбуваються в об'єкті, водночас не потрібно, щоб ММ описувала такі властивості об'єкта, як геометрична форма його елементів. Наприклад, ММ резистора у вигляді рівняння закону Ома характеризує властивість резистора пропускати електричний струм, але не відображає габарити резистора як деталі, його колір, механічну міцність, вартість тощо.

Точність ММ оцінюється ступенем збігу значень параметрів реального об'єкта і значень тих самих параметрів, розрахованих за допомогою оцінюваної ММ. Нехай відображені в ММ властивості оцінюються вектором вихідних параметрів $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Тоді, позначивши справжнє і розраховане за допомогою ММ значення j -го вихідного параметра через $y_{j \text{ іст}}$ і $y_{j \text{ м}}$ відповідно, визначимо відносну похибку ε_j розрахунку параметра y_j як

$$\varepsilon_j = (y_{j \text{ м}} - y_{j \text{ іст}}) / y_{j \text{ іст}}. \quad (1.1)$$

Отримана векторна оцінка $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$. За необхідності зведення цієї оцінки до скалярної використовують будь-яку норму вектора ε , наприклад

$$\varepsilon_M = \|\varepsilon\| = \max_{j \in [1:m]} \varepsilon_j. \quad (1.2)$$

Адекватність ММ – здатність відобразити задані властивості об'єкта з похибкою не вищою від заданої. Оскільки вихідні параметри є функціями векторів параметрів зовнішніх Q і внутрішніх X , похибка залежить від значень

Q і X . Зазвичай значення внутрішніх параметрів ММ визначають з умови мінімізації похибки ε_M у деякій точці $Q_{НОМ}$ простору зовнішніх змінних, а використовують модель із розрахованим вектором X за умови різних значень Q . У цьому випадку, як правило, адекватність моделі має місце лише в обмеженій області зміни зовнішніх змінних – області адекватності (ОА) математичної моделі:

$$OA = \{Q \mid \varepsilon_M \leq \delta\},$$

де $\delta > 0$ – задана константа, рівна гранично допустимій похибці моделі.

Економічність ММ характеризується витратами обчислювальних ресурсів (витратами машинних часу T_m і пам'яті ПМ) на її реалізацію. Чим менші T_m і ПМ, тим модель економічніша. Замість значень T_m і ПМ, що залежать не тільки від властивостей моделі, а й від особливостей застосовуваної ЕОМ, часто використовують інші величини, наприклад: середня кількість операцій, які виконуються в разі одного звернення до моделі, розмірність системи рівнянь, кількість використовуваних у моделі внутрішніх параметрів та ін.

Вимоги високої точності, ступеня універсальності, широкої області адекватності, з одного боку, і високої економічності, з іншого боку, суперечливі. Найкраще компромісне задоволення цих суперечливих вимог залежить від особливостей вирішуваних завдань, ієрархічного рівня й аспекту проектування. Ця обставина обумовлює застосування в системі автоматизованого проектування (САПР) широкого спектра математичних моделей.

1.2 Класифікація моделей в електроніці

За характером відображуваних властивостей об'єкта ММ поділяються на структурні та функціональні.

Структурні ММ призначені для відтворення структурних властивостей об'єкта. Серед структурних ММ розрізняють топологічні й геометричні.

У топологічних ММ відображаються склад і взаємозв'язки елементів об'єкта. Їх найчастіше застосовують для опису об'єктів, що складаються з великої кількості елементів, у вирішенні завдань прив'язки конструктивних елементів до певних просторових позицій (наприклад, завдання компоновання обладнання, розміщення деталей, трасування з'єднань) або до відносних моментів часу (наприклад, у розробці розкладів, технологічних процесів).

Топологічні моделі можуть мати форму графів, таблиць (матриць), списків тощо.

У геометричних ММ відображаються геометричні властивості об'єктів, у них, крім відомостей про взаємне розташування елементів, містяться відомості про форму деталей. Геометричні ММ можуть виражатися сукупністю рівнянь ліній і поверхонь; алгебрологічних співвідношень, які описують області, що становлять тіло об'єкта; графами і списками, що відображають конструкції з типових конструктивних елементів та ін. Геометричні ММ застосовують для вирішення завдань конструювання в машинобудуванні, приладобудуванні, радіоелектроніці, для оформлення конструкторської документації, у завданні вихідних даних на розробку технологічних процесів виготовлення деталей.

Функціональні ММ призначені для відображення фізичних чи інформаційних процесів, що відбуваються в об'єкті за умови його функціонування або виготовлення. Зазвичай функціональні ММ є системами рівнянь, що зв'язують фазові змінні, внутрішні, зовнішні та вихідні параметри. Розподіл описів об'єктів на аспекти та ієрархічні рівні безпосередньо стосується математичних моделей. Виділення аспектів опису приводить до виділення моделей електричних, механічних, гідравлічних, оптичних, хімічних тощо. Зокрема моделі процесів функціонування виробів і моделі процесів їхнього виготовлення різні. Наприклад, моделі напівпровідникових елементів інтегральних схем, що описують процеси дифузії і дрейфу рухливих носіїв заряду в напівпровідникових областях під час функціонування приладу і процеси дифузії домішок у напівпровідниках у процесі виготовлення приладу.

Використання принципів блоково-ієрархічного підходу до проектування приводить до появи ієрархії математичних моделей проєктованих об'єктів. Кількість ієрархічних рівнів у моделюванні визначається складністю проєктованих об'єктів і можливістю засобів проектування. Однак для більшості предметних галузей можуть належати наявні ієрархічні рівні до одного з трьох узагальнених рівнів, які називаються далі мікро-, макро- і метарівні.

Залежно від місця в ієрархії описів ММ поділяються на ті, що належать до мікро-, макро- і метарівня.

Особливістю ММ на мікрорівні є відображення фізичних процесів, що протікають в безперервних просторі та часі. Типові ММ на макрорівні – диференціальні рівняння в частинних похідних (ДРЧП). У них незалежними змінними є просторові координати і час. За допомогою цих рівнянь розраховуються поля механічних напруг і деформацій, електричних потенціалів, тисків, температур і т. п. Можливості застосування ММ у вигляді

ДРЧП обмежені окремими деталями, спроби аналізувати з їхньою допомогою процеси в багатокомпонентних середовищах, складальних одиницях, електронних схемах не можуть бути успішними через надмірне зростання витрат машинного часу та пам'яті.

На макрорівні використовують збільшену дискретизацію простору за функціональною ознакою, що приводить до подання ММ на цьому рівні у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). У цих рівняннях незалежною змінною є час t , а вектор залежних змінних V становлять фазові змінні, що характеризують стан укрупнених елементів дискретизованого простору. Такими змінними є сили і швидкості механічних систем, напруги й сили струму електричних систем, тиску та витрати гідравлічних і пневматичних систем тощо. Системи ЗДР є універсальними моделями на макрорівні, придатними для аналізу як динамічних, так і сталих об'єктів. Моделі для сталих режимів можна також представити у вигляді систем рівнянь алгебри. Порядок системи рівнянь залежить від кількості виділених елементів об'єкта. Якщо порядок системи наближається до 10^3 , то оперування моделлю стає складним, і тому необхідно переходити до уявлень на метарівні.

На метарівні як елементи приймають досить складні сукупності деталей. Метарівень характеризується великою різноманітністю типів використовуваних ММ. Для багатьох об'єктів ММ на метарівні, як і раніше, представляються системами ЗДР. Однак, оскільки в моделях не описуються внутрішні для елементів фазові змінні, а фігурують тільки фазові змінні, що стосуються взаємних зв'язків елементів, то укрупнення елементів на метарівні означає отримання ММ прийнятної розмірності для істотно більш складних об'єктів, ніж на макрорівні.

У низці предметних галузей вдається використовувати специфічні особливості функціонування об'єктів для спрощення ММ. Прикладом є електронні пристрої цифрової автоматики, у яких можливо застосовувати дискретне уявлення таких фазових змінних, як напруги і струми. Унаслідок ММ стає системою логічних рівнянь, що описують процеси перетворення сигналів. Такі логічні моделі істотно більш економічні, ніж моделі електричні, що описують зміни напруг і сил струмів як безперервних функцій часу. Важливий клас ММ на метарівні становлять моделі масового обслуговування, що застосовуються для опису процесів функціонування інформаційних і обчислювальних систем, виробничих ділянок, ліній і цехів.

Структурні моделі також поділяються на моделі різних ієрархічних рівнів. Водночас на нижчих ієрархічних рівнях переважає використання

геометричних моделей, на вищих ієрархічних рівнях застосовуються топологічні моделі.

За ступенем деталізації опису в межах кожного ієрархічного рівня виокремлюють повні ММ і макромоделі.

Повна ММ – модель, у якій фігурують фазові змінні, що характеризують стан усіх наявних міжелементних зв'язків (тобто стан усіх елементів проектованого об'єкта).

Макромодель – ММ, у якій відображається стан значно меншої кількості міжелементних зв'язків, що відповідає опису об'єкта за умови збільшеного виділення елементів.

За способом подання властивостей об'єкта функціональні ММ поділяються на аналітичні та алгоритмічні.

Аналітичні ММ є явними виразами вихідних параметрів як функцій вхідних і внутрішніх параметрів. Такі ММ характеризуються високою економічністю, однак, як правило, вимагають прийняття істотних припущень і обмежень, що знижують точність і звужують область адекватності моделі.

Алгоритмічні ММ відтворюють зв'язок вихідних параметрів з параметрами внутрішніми та зовнішніми у формі алгоритму.

Імітаційна ММ – алгоритмічна модель, що відображає поведінку досліджуваного об'єкта в часі в разі задання зовнішніх впливів на об'єкт. Прикладами імітаційних ММ можуть слугувати моделі динамічних об'єктів у вигляді систем ЗДР і моделі систем масового обслуговування, задані в алгоритмічній формі.

Для отримання ММ використовують методи неформальні й формальні.

Неформальні застосовують на різних ієрархічних рівнях для отримання ММ елементів. Ці методи передбачають вивчення закономірностей процесів і явищ, пов'язаних з об'єктом, що моделюється, виділення істотних чинників, прийняття різного роду припущень та їхнього обґрунтування, математичну інтерпретацію наявних відомостей тощо. Для виконання цих операцій у загальному випадку відсутні формальні методи, водночас від результату цих операцій істотно залежать показники ефективності ММ – ступінь універсальності, точність, економічність. Тому побудова ММ елементів, як правило, здійснюється кваліфікованими фахівцями, які пройшли підготовку як у відповідній предметній галузі, так і в питаннях математичного моделювання на ЕОМ.

Застосування неформальних методів можливе для синтезу ММ теоретичних і емпіричних. Теоретичні ММ створюються внаслідок

дослідження процесів і їхніх закономірностей, властивих класу об'єктів і явищ, що розглядаються; емпіричні ММ – після вивчення зовнішніх проявів властивостей об'єкта за допомогою вимірювань фазових змінних на зовнішніх входах і виходах та обробки результатів вимірювань.

Вирішення завдань моделювання елементів полегшується завдяки тому, що для побудови більшості технічних об'єктів використовуються типові елементи (кількість типів порівняно невелика). Тому розробка ММ елементів проводиться порівняно рідко. Один раз створені ММ елементів надалі багаторазово застосовують у розробці різноманітних систем із цих елементів. Прикладами таких ММ на мікрорівні є опис кінцевих елементів для аналізу напружено-деформованого стану деталей, безліч типів кінцевих елементів містять стрижні, плоскі елементи у формі трикутників і чотирикутників, тривимірні елементи типу паралелепіпеда, тетраедра тощо. Прикладами ММ геометричних елементів можуть бути рівняння ліній прямих, дуг кіл, площин і поверхонь другого порядку. Прикладами ММ елементів на макрорівні є ММ елементів інтегральних схем – транзисторів, діодів, резисторів, конденсаторів.

Формальні методи застосовують для отримання ММ систем у разі відомих математичних моделей елементів.

Отже, у програмах автоматизованого аналізу, що використовуються в САПР, отримання ММ проєктованих об'єктів забезпечується реалізацією ММ елементів і методів формування ММ систем.

1.3 Методика отримання математичних моделей елементів

У загальному випадку процедура отримання математичних моделей елементів передбачає певні операції. Перелічимо їх.

1. Вибір властивостей об'єкта, які підлягають відображенню в моделі. Цей вибір оснований на аналізі можливих застосувань моделі та визначає ступінь універсальності ММ.

2. Збір вихідної інформації про обрані властивості об'єкта. Джерелами відомостей можуть бути досвід і знання інженера, який розробляє модель, науково-технічна література, насамперед довідкова, опис прототипів – наявних ММ для елементів, близьких за своїми властивостями до досліджуваного, результати експериментального вимірювання параметрів тощо.

3. Синтез структури ММ. Структура ММ – загальний вигляд математичних співвідношень моделі без конкретизації числових значень параметрів. Структура моделі може бути представлена також у графічній

формі, наприклад у вигляді еквівалентної схеми або графа. Синтез структури – найбільш відповідальна операція й вона з найбільшими труднощами піддається формалізації.

4. Розрахунок числових значень параметрів ММ. Ця задача ставиться як задача мінімізації похибки моделі заданої структури, тобто

$$\min_{x \in XD} \varepsilon_M(x), \quad (1.3)$$

де X – вектор параметрів моделі; XD – область варіювання параметрів; визначається відповідно до (1.1) і (1.2), де y_{jM} – функція від X , а y_{jict} визначаються за результатами експериментів або фізичних, або чисельних із використанням більш точних ММ, якщо такі є в ієрархічному ряді ММ.

5. Оцінка точності й адекватності ММ. Для цього мають використовуватися значення y_{jict} , які не фігурували у розв'язанні задачі (1.3).

Велику цінність для користувача мають не оцінки похибки ε_M , виконані в одній-двох випадкових точках простору зовнішніх змінних, а відомості про область адекватності (ОА).

Однак визначення ОА потребує значних витрат машинного часу. Тому розрахунок ОА виконується тільки за умови ретельного відпрацювання ММ уніфікованих елементів, призначених для багаторазового застосування.

2 ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

У прикладній електроніці та електродинаміці, зокрема в оптиці, використання строгих методів аналізу та синтезу в моделюванні означає застосування алгоритмів на основі рівнянь Максвелла і строгих рішень рівнянь руху. Важливим елементом, що впливає на адекватність моделювання, є коректне введення матеріальних рівнянь і рівнянь руху частинок, а також облік нелінійних властивостей. Перш ніж розглядати питання моделювання, нагадаємо основні закони електродинаміки.

2.1 Основні закони електродинаміки

Згідно з основними положеннями макроскопічної електродинаміки електромагнітне поле в будь-якому середовищі в кожен момент часу визначається чотирма величинами: векторами E і D , що характеризують електричне поле, і векторами H і B , що характеризують магнітне поле. У рівняннях електромагнітного поля, крім цих чотирьох векторів, фігурують ще дві величини: щільність заряду ρ і щільність струму j . Ці величини характеризують джерела поля – заряди і струми, наявність яких призводить до порушення поля в навколишньому просторі. Для уточнення: у макроскопічній електродинаміці ρ є щільність вільного електричного заряду, а j – щільність електричного струму (струму провідності). За відсутності макроскопічних переміщень речовини щільність струму і щільність заряду пов'язані рівнянням безперервності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0, \quad (2.1)$$

і виражає той факт, що струм провідності обумовлений рухом вільних зарядів, що підкоряються закону збереження електрики. Конвекційні струми, обумовлені, наприклад, рухом електронів в електровакуумних приладах, ми надалі не розглядаємо. Якщо вони задані, то їх неважко врахувати (як сторонні струми).

Вектори електромагнітного поля, а також величини j та ρ залежать від трьох просторових координат (наприклад, від декартових координат x , y , z) і

часу t . Вони пов'язані між собою системою рівнянь Максвелла, яку запишемо в такому вигляді:

$$\operatorname{rot} H - \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j ; \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} D = 4\pi \rho ; \quad (2.3)$$

$$\operatorname{rot} E - \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = 0 ; \quad (2.4)$$

$$\operatorname{div} B = 0. \quad (2.5)$$

У цьому випадку тут і далі використовуємо абсолютну систему одиниць CGS (так звана симетрична або гауссівська система), де c – швидкість світла в порожнечі, що дорівнює $\approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с.

Нагадаємо, що рівняння (2.2) називається зазвичай першим, а рівняння (2.4) – другим рівнянням Максвелла. Ці рівняння, так само як і рівняння (2.3) і (2.4), є узагальненням дослідних даних. Так, рівняння (2.4) є диференціальне формулювання закону електромагнітної індукції Фарадея, рівняння (2.2) – диференціальне формулювання «закону повного струму» (закону, який пов'язує циркуляцію магнітного поля по контуру і струм, що охоплюється цим контуром) і гіпотези Максвелла про струм зсуву.

Рівняння (2.2) і (2.3) ми записали так, щоб у їхніх правих частинах стояли величини j та ρ , що характеризують джерела поля – струми і заряди, а в лівих частинах – вектори H і D , що характеризують електромагнітне поле. Тоді фізичний зміст рівнянь (2.2) і (2.3) є більш чіткий: ці рівняння показують, як електромагнітне поле збуджується своїми джерелами.

У рівняннях (2.4) і (2.5) фігурують тільки вектори E і B , а джерела поля відсутні.

Записана система рівнянь придатна для електромагнітних полів у будь-яких середовищах. Однак цих рівнянь недостатньо для вирішення конкретних завдань, бо число рівнянь виявляється меншим, ніж число невідомих. Справді, якщо, наприклад, вважати джерела j і ρ заданими, то для визначення чотирьох векторних величин E , D , B і H необхідно мати чотири векторних рівняння, у той час як рівняння (2.3) і (2.5) – суть скалярні рівняння.

Недостатність цієї системи рівнянь фізично пояснюється саме її універсальністю – вона може бути застосовна до електромагнітних процесів у будь-яких середовищах, між тим як параметри, що характеризують середовище,

у ній відсутні. Тому у вирішенні конкретних завдань ці рівняння необхідно доповнювати системою матеріальних рівнянь, у яких фіксується вплив середовища на електромагнітні явища, що в ньому протікають.

Як відомо, найпростіші матеріальні рівняння мають такий вигляд:

$$D = \varepsilon E; B = \mu H; \quad (2.6)$$

$$j = \sigma E. \quad (2.7)$$

Не можна не дивуватися різноманітності фізичних явищ, які описуються рівняннями (2.2)–(2.6), – від електромагнітних полів галактик, зірок і планет до електричних і магнітних полів грозової хмари та маленьких шматочків бурштину й залізної руди, завдяки яким були відкриті електрика і магнетизм. До цього треба додати електромагнітні поля, створені людиною, – від нескінченно слабких радіохвиль, що приходять до нас від автоматичних міжпланетних станцій, до надсильних полів, які використовуються в енергетиці та експериментальній фізиці. Така велика кількість можливих рішень дозволяє припустити, що знайти серед них потрібне рішення, яке задовольняє початковим і граничним умовам задачі, досить складно. Дійсно, зараз розв'язання рівнянь Максвелла у сфері довільної форми з довільним заповненням знаходиться за межами можливостей математики та обчислювальної техніки.

Відомо, що в розв'язанні задач про поширення електромагнітних хвиль можна виходити не з рівнянь електромагнітного поля, а з хвильового рівняння, яке неважко отримати з рівнянь Максвелла. Тому предметом нашого розгляду буде моделювання хвильового рівняння. Ми також розглянемо методи розв'язання рівняння теплопровідності та рівняння Лапласа і Пуассона, до яких належать багато прикладних задач.

2.2 Математичні методи моделювання електромагнітних полів

Методи, які використовуються в моделюванні, багато в чому залежать від зручності реалізації моделей на ЕОМ і від традиції в методах аналізу процесів. Основна увага приділятиметься математичним методам, які широко застосовуються для розв'язання прикладних задач електроніки.

2.2.1 Метод кінцевих різниць

Серед чисельних методів значно поширеними є різницеві методи. Вони ґрунтуються на введенні деякої різницевої сітки в цій області. Значення похідних, початкові та граничні умови виражаються через значення функцій у вузлах сітки, унаслідок чого виходить система алгебраїчних рівнянь, яка називається різницевою схемою. Розв'язуючи цю систему рівнянь, можна знайти у вузлах сітки значення сіткових функцій, які наближено вважаються рівними значенням функції, що вишукується.

Чисельні методи застосовні до різних типів завдань. Будемо розглядати лише досить вузький клас задач для рівнянь першого і другого порядків, лінійних щодо похідних. У разі двох незалежних змінних x, y ці рівняння можна записати у вигляді

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g. \quad (2.8)$$

Тут $u = u(x, y)$ – шукана функція. Коефіцієнти a, b, c, d, e, f і права частина g , узагалі кажучи, можуть залежати від змінних x, y та шуканої функції u . У зв'язку із цим рівняння (2.8) може бути: а) з постійними коефіцієнтами; б) лінійним, якщо g лінійно залежить від u , а коефіцієнти залежать тільки від x, y ; в) квазілінійним, якщо коефіцієнти залежать від u ; це найбільш загальний вигляд рівняння (2.8).

Існують різні види рівнянь залежно від співвідношення між коефіцієнтами. Розглянемо деякі з них. Якщо $a = b = c = f = 0$, отримаємо рівняння першого порядку вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial y} = q,$$

що називається рівнянням переносу. На практиці в цьому рівнянні однією із змінних може бути час t . Тоді його називають також еволюційним рівнянням.

Якщо хоча б один з коефіцієнтів a, b, c не дорівнює нулю, тоді (2.8) є рівнянням другого порядку. Залежно від знака дискримінанта $D = b^2 - ac$ воно може належати до одного з трьох типів: гіперболічного ($D > 0$), параболічного ($D = 0$) або еліптичного ($D < 0$).

Наведемо приклади рівнянь з приватними похідними другого порядку, які розглянемо далі:

- хвильове рівняння (гіперболічне)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

- рівняння теплопровідності або дифузії (параболічне)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0;$$

- рівняння Лапласа (еліптичне).

Якщо права частина останнього рівняння не дорівнює нулю, то воно називається рівнянням Пуассона.

Наведені рівняння називаються рівняннями математичної фізики. До їхнього розв'язання зводяться багато прикладних задач. Перш ніж переходити до обговорення чисельних методів розв'язання зазначених рівнянь, розглянемо основні питання побудови різницевих схем.

2.2.2 Побудова різницевих схем

Як уже зазначалося, побудова різницевих схем розв'язання рівнянь із приватними похідними оснований на введенні сітки в розглянутому просторі. Вузли сітки є розрахунковими точками.

Приклад найпростішої прямокутної області $G(x, y)$ із границею Γ у двовимірному випадку показаний на рис. 2.1. Сторони прямокутника $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ діляться на елементарні відрізки точками $x_i = a + ih_1$ ($i = 0, 1, \dots, I$) і $y_j = c + jh_2$ ($j = 0, 1, \dots, J$).

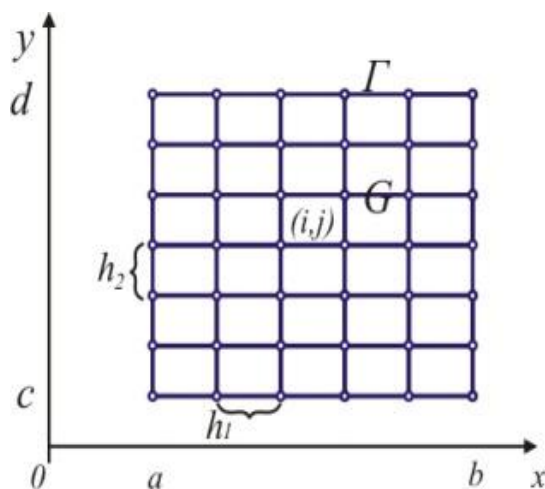


Рисунок 2.1 – Прямокутна сітка

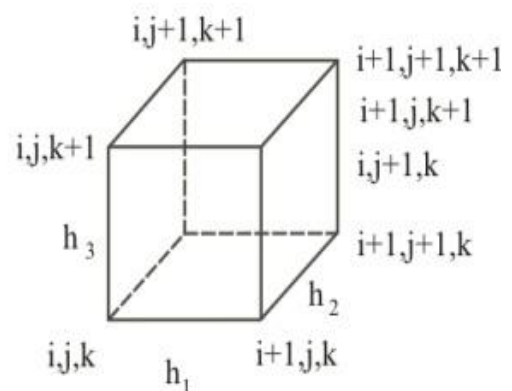


Рисунок 2.2 – Елемент сітки

Через ці точки проводяться два сімейства координатних прямих $x = const$ і $y = const$, що утворюють сітку з прямокутними осередками. Будь-який її вузол, номер якого (i, j) , визначається координатами. Оскільки всі осередки показаної на рис. 2.1 сітки однакові, таку сітку називають рівномірною.

Аналогічно вводяться сітки для багатовимірних областей, що містять більше двох вимірів. На рис. 2.2 зображений елемент сітки у вигляді прямокутного паралелепіпеда для тривимірної області.

Прямокутні сітки найбільш зручні в організації обчислювального алгоритму. Разом з тим деякі схеми використовують сітки з осередками більш складної форми: трикутними, чотирикутними (не прямокутні), шестикутними тощо.

Вузли сітки, що лежать на границі Γ області G , називаються граничними вузлами. Усі інші вузли – внутрішніми. Оскільки початкові та граничні умови для постановки завдань формулюються на границі розрахункової області, то їх можна вважати заданими в граничних вузлах сітки.

Іноді граничні точки області не є вузлами сітки, що має місце для областей складної форми. Тоді або вводять додаткові вузли на перетині координатних ліній із границями, або границю наближено замінюють ламаною, що проходить через близькі до границі вузли. На цю ламану переносяться граничні умови.

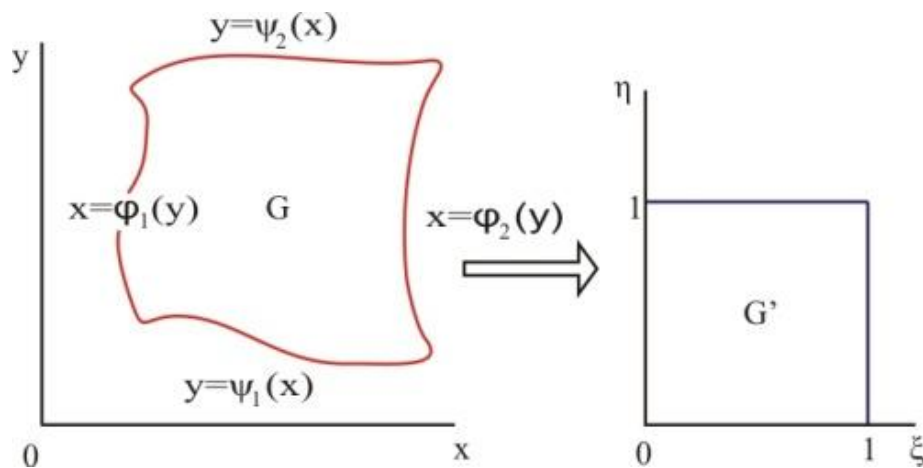


Рисунок 2.3 – Перетворення розрахункової області

У деяких випадках складні криволінійні області за допомогою переходу до нових незалежних змінних вдається звести до найпростішого виду. Наприклад, чотирикутну область G , зображену на рис. 2.3, можна привести до

одиначного квадрата G' шляхом введення нових змінних замість x, y за допомогою співвідношень

$$\xi = \frac{x - \varphi_1(y)}{\varphi_2(y) - \varphi_1(y)}, \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

$$\eta = \frac{y - \psi_1(x)}{\psi_2(x) - \psi_1(x)}, \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

До нових змінних потрібно перетворити рівняння, а також початкові та граничні умови. В області G' можна ввести прямокутну сітку, у цьому випадку в області G їй буде відповідати сітка з нерівномірно розташованими вузлами та криволінійними осередками.

Надалі в побудові різницевих схем для спрощення будемо використовувати прямокутні сітки (або з осередками у вигляді прямокутних паралелепіпедів у тривимірному випадку), а рівняння будемо записувати в декартових координатах (x, y, z) . На практиці доводиться вирішувати завдання в різних криволінійних системах координат: полярній, циліндричній, сферичній та ін. Наприклад, якщо розрахункову область зручно задати в полярних координатах, то в ній сітка вводиться з кроками і відповідно по радіус-вектору та полярному кутку.

Іноді і в простій розрахунковій області вводять нерівномірну сітку. Зокрема в деяких випадках необхідно проводити згущення вузлів для більш точного розрахунку в деяких частинах цієї області. У цьому разі області згущення вузлів або відомі заздалегідь, або визначаються в процесі виконання завдання (наприклад, залежно від градієнтів шуканих функцій). В останньому випадку сітки називають адаптивними.

Для побудови різницевої схеми, як і у випадку звичайних диференціальних рівнянь, приватні похідні в рівнянні замінюються кінцево-різницевиими співвідношеннями за деяким шаблоном. У цьому випадку точні значення шуканої функції замінюються значеннями сіткової функції у вузлах різницевої сітки.

Як приклад побудуємо деякі різницеві схеми для розв'язання рівняння теплопровідності за заданих початкових і граничних умов. Запишемо змішану крайову задачу у вигляді

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0, \quad a > 0, \quad (2.9)$$

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad U(0, t) = \psi_1(t), \quad U(1, t) = \psi_2(t).$$

де $\varphi(x)$ – початковий розподіл температури U (якщо $t = 0$); $\psi_1(t), \psi_2(t)$ – розподіл температури на кінцях розглянутого відрізка ($x = 0, 1$) у будь-який момент часу t .

Зауважимо, що початкові й граничні умови мають бути узгоджені, тобто $U(0,0) = \varphi(0) = \psi_1(0), U(1,0) = \varphi(1) = \psi_2(0)$.

Введемо рівномірну прямокутну сітку за допомогою координатних ліній $x_i = ih (i = 0, 1, \dots, I), t_j = j\tau (j = 0, 1, \dots)$; h, τ – відповідно кроки сітки за напрямками x і t . Значення функції у вузлах сітки позначимо $U_i^j = U(x_i, t_j)$. Ці значення замінимо відповідними значеннями сіткової функції, які задовольняють рівнянням, що створює різничну схему.

Замінюючи у вихідному рівнянні (2.9) приватні похідні шуканої функції за допомогою відносин кінцевих різниць, отримуємо різницеву схему

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}, \quad (2.10)$$

$$i = 1, 2, \dots, I-1, \quad j = 1, 2, \dots$$

У записі цієї схеми для кожного вузла використаний шаблон, зображений на рис. 2.4, а.

Для одного й того ж рівняння можна побудувати різні різницеві схеми. Зокрема, якщо скористатися шаблоном, зображеним на рис. 2.4, б, тобто апроксимувати похідну $\partial^2 U / \partial x^2$ за умови $t = t_{i+1}$:

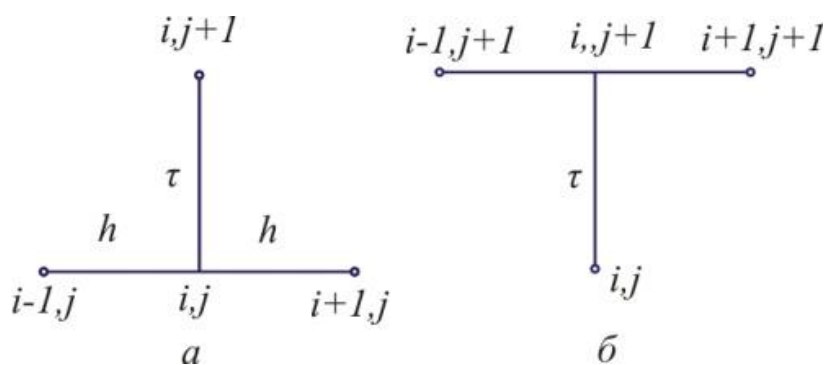


Рисунок 2.4 – Шаплони

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2},$$

то замість (2.9) отримаємо різницеву схему

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2}, \quad (2.11)$$

В обох випадках отримуємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення значень сіткової функції у внутрішніх вузлах. Значення в граничних вузлах знаходяться з граничних умов

$$u_0^j = \psi_1(t_j), \quad u_I^j = \psi_2(t_j). \quad (2.12)$$

Сукупність вузлів, якщо $t = const$, тобто в разі фіксованого значення j , називається шаром (або, оскільки змінна t відповідає часу, тимчасовим шаром). Схема (2.9) дозволяє послідовно знаходити значення u_i^{j+1} ($i = 1, 2, \dots, I-1$) на $(j+1)$ -му шарі через відповідні значення u_i^j на j -му шарі. Такі схеми називаються явними.

Для початку рахунку за схемою (2.9), якщо $j = I$, необхідно знати рішення на початковому шарі в разі $j = 0$. Воно визначається початковою умовою, яка записується у вигляді

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, I-1. \quad (2.13)$$

На відміну від явної схеми, кожне різницеве рівняння (2.11) містить на кожному новому шарі три невідомих значення: u_{i-1}^{j+1} , u_i^{j+1} , u_{i+1}^{j+1} , тому не можна відразу визначити ці значення через відоме рішення на попередньому шарі. Такі схеми називаються неявними. Водночас різницева схема (2.11) складається з лінійних триточкових рівнянь, тобто кожне рівняння містить невідому функцій у трьох точках цього шару. Такі системи лінійних рівнянь із тридіагональною матрицею можуть бути розв'язані шляхом прогону, унаслідок чого будуть знайдені значення сіткової функції у вузлах.

Зауважимо, що в розглянутому прикладі отримуємо двошарові схеми, коли в кожне різницеве рівняння входять значення функції з двох шарів: нижнього, на якому рішення вже знайдено, і верхнього, у вузлах якого рішення шукається.

За допомогою цього способу побудови різницевої схем окремі часткові похідні замінюються кінцево-різницевою співвідношеннями для сіткової

функції (або сітковими виразами), можуть бути створені багатошарові схеми, а також схеми високих порядків точності.

Незважаючи на те, що цей спосіб отримання різницевого рівняння найбільш простий, і тому широко використовується для розробки чисельних методів, існують також інші способи побудови різницевого схем.

2.2.3 Розв'язання хвильового рівняння методом кінцевих різниць

Одним із найбільш поширених в інженерній практиці рівнянь з приватними похідними другого порядку є хвильове рівняння, що описує різні види коливань. Оскільки коливання – процес нестационарний, то однією з незалежних змінних є час t . Крім того, незалежними змінними в рівнянні є також просторові координати x , y , z . Залежно від їхньої кількості розрізняють одновимірні, двовимірні та тривимірні хвильові рівняння.

Одновимірне хвильове рівняння описує поздовжні коливання стрижня, перетин якого здійснюють плоскопаралельні коливальні рухи, а також поперечні коливання тонкого стрижня (струни) та інші завдання. Двовимірне хвильове рівняння використовується для дослідження коливань тонкої пластини (мембрани). Тривимірне хвильове рівняння описує поширення хвиль у просторі (наприклад, звукових хвиль у рідині, пружних хвиль у суцільному середовищі тощо).

Розглянемо одновимірне хвильове рівняння, яке можна записати у вигляді

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (2.14)$$

Для поперечних коливань струни шукана функція $U(x, t)$ описує положення струни в момент t . У цьому випадку $a^2 = T/p$, де T – натягнення струни, p – її лінійна щільність.

Коливання передбачаються малими, тобто амплітуда мала порівняно з довжиною струни. Крім того, рівняння (2.14) записано для вільних коливань. У випадку вимушених коливань у правій частині рівняння додається деяка функція $f(x, t)$, що характеризує зовнішні дії.

Найпростішою задачею для рівняння (2.14) є задача Коші, для якої в початковий момент часу задаються дві умови:

$$U|_{t=0} = u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial U / \partial t|_{t=0} = \psi(x). \quad (2.15)$$

Ці умови описують початкову форму струни $U = \varphi(x)$ і швидкість її точок $\psi(x)$.

На практиці частіше доводиться розв'язувати не задачу Коші для нескінченної струни, а змішану задачу для обмеженої струни деякої довжини l . У цьому випадку задають граничні умови на її кінцях. Зокрема, якщо закріплені кінці їхнього зміщення дорівнюють нулю і граничні умови мають вигляд

$$U|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=l} = 0. \quad (2.16)$$

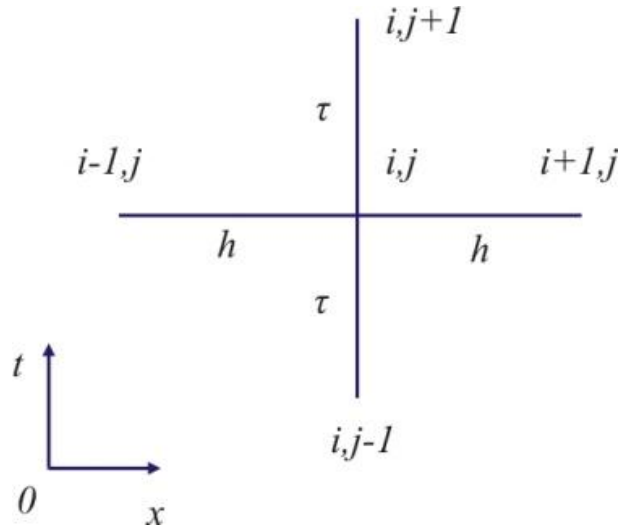


Рисунок 2.5 – Шаблон явної схеми

Розглянемо деякі різницеві схеми для розв'язання задачі (2.14)–(2.16). Найпростішою є явна тришарова схема типу хрест (шаблон показаний на рис. 2.5). Замінімо в рівнянні (2.14) другі похідні шуканої функції U за t та x їхніми кінцево-різницевими співвідношеннями за допомогою значень сіткової функції u_i^j у вузлах сітки (x_i, t_j) :

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2},$$

$$i = 1, 2, \dots, I-1, \quad j = 1, 2, \dots, J-1.$$

Звідси можна знайти явний вираз для значення сіткової функції на $(j+1)$ -му шарі:

$$u_i^{j+1} = 2(1-\lambda)u_i^j + \lambda(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - u_i^{j-1}, \quad \lambda = a^2\tau^2/h^2. \quad (2.17)$$

Тут, як завжди в тришарових схемах, для визначення невідомих значень на $(j+1)$ -му шарі потрібно знати рішення на j -му та $(j-1)$ -му шарах. Тому почати рахунок за формулами (2.17) можна лише для другого шару, а рішення на нульовому і першому шарах мають бути відомі. Вони знаходяться за допомогою початкових умов (2.15). На нульовому шарі маємо

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, I. \quad (2.18)$$

Для отримання рішення на першому шарі скористаємося другою початковою умовою (2.15). Похідну $\partial U/\partial t$ замінимо кінцево-різницевою апроксимацією. У найпростішому випадку вважають

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0}^{x=x_i} = \psi(x_i) \approx \frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau}. \quad (2.19)$$

Із цього співвідношення можна знайти значення сіткової функції на першому часовому шарі:

$$u_i^1 = u_i^0 + \tau\psi(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, I. \quad (2.20)$$

Відзначимо, що апроксимація початкової умови у вигляді (2.19) погіршує апроксимацію вихідної диференціальної задачі: похибка апроксимації стає порядку $O(h^2 + \tau)$, тобто першого порядку за τ , хоча сама схема (2.17) має другий порядок апроксимації за h і τ . Ситуацію можна виправити, якщо замість (2.20) взяти більш точне уявлення

$$u_i^1 = u_i^0 + \tau \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0}^{x=x_i} + \frac{\tau^2}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right|_{t=0}^{x=x_i}. \quad (2.21)$$

Замість $\partial U/\partial t$ потрібно взяти $\psi(x)$. А вираз для другої похідної можна знайти з використанням вихідного рівняння (2.14) і першої початкової умови (2.15). Отримаємо

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right|_{t=0} = a^2 \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{t=0} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Тоді (2.21) має вигляд

$$u_i^1 = u_i^0 + \tau \psi(x_i) + \frac{a^2 \tau^2}{2} \varphi''(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, I. \quad (2.22)$$

Різницева схема (2.17) з урахуванням (2.22) має похибку апроксимації порядку $O(h^2 + \tau^2)$.

У розв'язанні змішаної задачі з граничними умовами (2.16), тобто коли на кінцях розглянутого відрізка задані значення самої функції, другий порядок апроксимації зберігається. У цьому випадку для зручності крайні вузли сітки розташовують у граничних точках ($x_0 = 0, x_1 = l$). Але граничні умови можуть задаватися і для похідної.

Наприклад, у разі вільних поздовжніх коливань стрижня на його незакріпленому кінці задається умова

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{x=l} = 0. \quad (2.23)$$

Якщо цю умову записати в різницевому вигляді з першим порядком апроксимації, то похибка апроксимації схеми стане порядку $O(h^2 + \tau^2)$. Тому для збереження другого порядку цієї схеми за h необхідно граничну умову (2.23) апроксимувати з другим порядком.

Розглянута різницева схема (2.17) розв'язання задачі (2.14)–(2.16) умовно стійка. Необхідна їй достатня умова стійкості має вигляд

$$\frac{a\tau}{h} < 1. \quad (2.24)$$

Отже, у виконанні цієї умови і з урахуванням апроксимації схема (2.17) сходиться до вихідної задачі зі швидкістю $O(h^2 + \tau^2)$.

Існують і інші різницеві схеми розв'язання хвильового рівняння. Зокрема іноді зручніше використовувати неявні схеми, щоб позбутися від обмежень на величину кроку, що накладаються умовою (2.24). Ці схеми зазвичай абсолютно стійкі, проте алгоритм розв'язання задачі та програма для комп'ютера ускладнюються.

Побудуємо найпростішу неявну схему. Другу похідну за t у рівнянні (2.14) апроксимуємо, як і раніше, за триточковим шаблоном за допомогою значень сіткової функції на шарах $j-1, j, j+1$. Похідну до x замінюємо напівсумою її апроксимації на $(j+1)$ -му та $(j-1)$ -му шарах (рис. 2.5):

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{h^2} \right).$$

Із цього співвідношення можна отримати систему рівнянь щодо невідомих значень сіткової функції на $(j+1)$ -му шарі:

$$\lambda u_{i-1}^{j+1} - (1+2\lambda)u_i^{j+1} + \lambda u_{i+1}^{j+1} = (1+2\lambda)u_i^{j-1} - \lambda(u_{i+1}^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}) - 2u_i^j, \quad (2.25)$$

$$\lambda = a^2 \tau^2 / h^2, \quad i = 1, 2, \dots, I-1, \quad j = 1, 2, \dots, J-1.$$

Отримана неявна схема стійка і сходиться зі швидкістю $O(h^2 + \tau^2)$. Систему лінійних алгебраїчних рівнянь (2.25) можна, зокрема, розв'язувати методом прогону. До цієї системи потрібно додати різницеві початкові та граничні умови. Так, вирази (2.18), (2.20) або (2.22) можуть бути використані для обчислення значень сіткової функції на нульовому й першому шарах за часом.

За наявності двох або трьох незалежних просторових змінних хвильові рівняння приймають такий вигляд:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right).$$

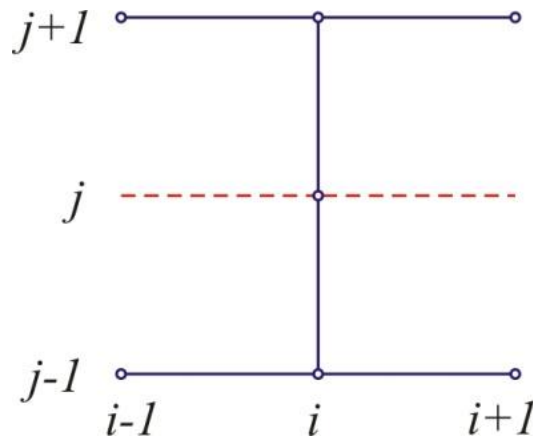


Рисунок 2.6 – Шаблон неявної схеми

Для них також можуть бути побудовані різницеві схеми за аналогією з одновимірним хвильовим рівнянням. Різниця полягає в тому, що потрібно апроксимувати похідні по двох або трьох просторових змінних, що, природно, ускладнює алгоритм і потребує значно більших обсягів пам'яті та часу рахунку.

2.2.4 Розв'язання рівняння Лапласа методом кінцевих різниць

Багатостаціонарні фізичні задачі зводяться до розв'язання рівняння Пуассона вигляду

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = F(x, y, z). \quad (2.26)$$

Якщо $F(x, y, z) = 0$, то рівняння (2.26) називається *рівнянням Лапласа*. Для простоти будемо розглядати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \quad (2.27)$$

Його розв'язання будемо шукати для деякої обмеженої області G зміни незалежних змінних x, y . Границею області G є замкнута лінія L . Для повного формулювання крайової задачі, крім рівняння Лапласа, потрібно задати граничну умову на границі L . Прийmemo її у вигляді

$$U(x, y)|_L = \varphi(x, y). \quad (2.28)$$

Задача, що полягає у розв'язанні рівняння Лапласа (або Пуассона) за умови заданих значень шуканої функції на границі розрахункової області, називається задачею Діріхле.

Одним із способів розв'язання стаціонарних еліптичних задач, зокрема і крайової задачі (2.27), (2.28), є їхнє зведення до розв'язання деякої фіктивної нестационарної задачі (гіперболічної або параболічної), знайдений розв'язок якої за досить великих значень часу t близький до розв'язку вихідної задачі. Такий спосіб розв'язання називається *методом встановлення*.

Оскільки рішення $U(x, y)$ рівняння (2.27) не залежить від часу, то можна в це рівняння додати рівний нулю (у разі точного розв'язання) член $\partial U/\partial t$. Тоді рівняння (2.27) набуде вигляду

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}. \quad (2.29)$$

Це відоме нам рівняння теплопровідності. Залишається тільки поставити початкову умову. Її можна прийняти практично в довільному вигляді, узгодженому з граничними умовами. Покладаємо

$$U|_{t=0} = \psi(x, y). \quad (2.30)$$

Гранична умова (2.28) у цьому випадку залишається стаціонарною, тобто незалежною від часу.

Процес чисельного розв'язання рівняння (2.29) з умовами (2.30), (2.28) складається в переході, коли $t \rightarrow \infty$, від довільного значення (2.30) до шуканого стаціонарно розв'язання. Рахунок ведеться до виходу розв'язання на стаціонарний режим. Природно, обмежуються розв'язанням за умови деякого досить великого t , якщо шукані значення на двох послідовних шарах збігаються із заданим ступенем точності.

Метод встановлення фактично є ітераційним процесом розв'язання задачі (2.29) з умовами (2.30), (2.28), зокрема на кожній ітерації значення шуканої функції знаходять шляхом чисельного розв'язання деякої допоміжної задачі. У теорії різницевих схем показано, що цей ітераційний процес зводиться до розв'язання вихідної задачі, якщо таке стаціонарне розв'язання існує.

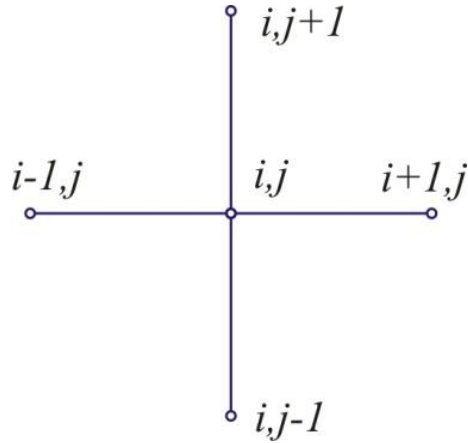


Рисунок 2.7 – Шаблон для рівняння Лапласа

Інший спосіб розв’язання задачі Діріхле полягає в побудові різницевої схеми шляхом апроксимації рівняння (2.27). Введемо в прямокутній області G сітку за допомогою координатних прямих $x = const$ та $y = const$. Прийmemo для простоти значення кроків за змінними x та y рівними h (передбачається, що сторони області G порівняні). Значення функції U у вузлах (x_i, y_j) замінимо значеннями сіткової функції. Тоді, апроксимуючи в рівнянні (2.27) другі похідні за допомогою відносин кінцевих різниць, отримаємо різницеве рівняння (шаблон зображений на рис. 2.7)

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0. \quad (2.31)$$

За допомогою цього рівняння можна записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо значень сіткової функції у вузлах у вигляді

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} &= 0, \\ i = 1, 2, \dots, I-1, \quad j = 1, 2, \dots, J-1 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Значення сіткової функції у вузлах, розташованих на границі розрахункової області, можуть бути знайдені з граничної умови (2.28):

$$\begin{aligned} u_{0j} &= \varphi(x_0, y_j), \quad u_{Ij} = \varphi(x_I, y_j), \quad j = 0, 1, \dots, J; \\ u_{i0} &= \varphi(x_i, y_0), \quad u_{iJ} = \varphi(x_i, y_J), \quad i = 0, 1, \dots, I. \end{aligned}$$

У теорії різницевих схем доводиться, що розв'язання побудованої різницевої задачі існує, а сама схема стійка.

Перейдемо тепер до практичного обчислення шуканих значень, тобто до розв'язання системи (2.32). Кожне рівняння системи (за винятком тих, які відповідають вузлам, розташованим поблизу границь) містить п'ять невідомих.

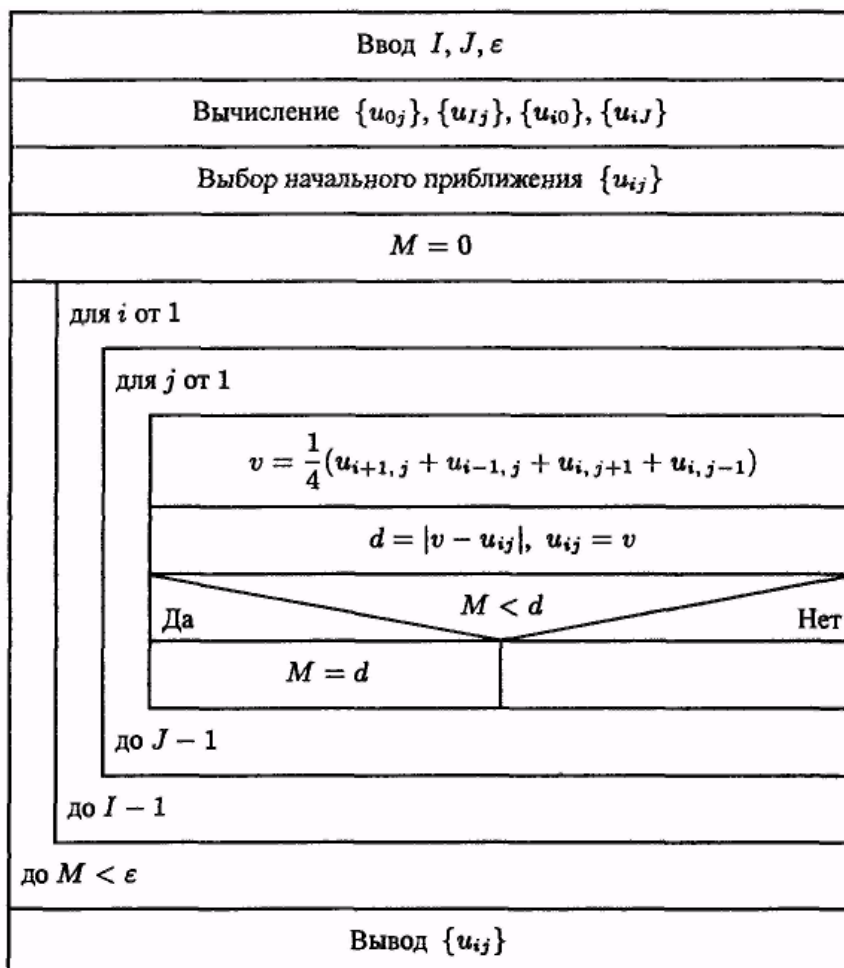


Рисунок 2.8 – Алгоритм розв'язання задачі Діріхле

Одним з найбільш поширених методів розв'язання цієї системи лінійних рівнянь є ітераційний метод. Кожне з рівнянь записуємо у вигляді щодо значення в центральному вузлі (рис. 2.7):

$$u_{ij} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}). \quad (2.33)$$

Алгоритм розв'язання задачі Діріхле з використанням ітераційного методу Гаусса–Зейделя розв'язання системи різницевого рівнянь (2.33) зображений на рис. 2.8. В алгоритмі передбачено вибір початкових значень u_{ij} . Іноді вважають $u_{ij} = 0$ для всіх i, j . Ітераційний процес контролюється максимальним відхиленням M значень сіткової функції у вузлах для двох послідовних ітерацій. Якщо його величина досягне деякого заданого малого числа, ітерації припиняються і відбувається виведення результатів.

2.3 Метод кінцевих елементів

Диференціальні рівняння в часткових похідних зручно записувати у вигляді

$$Lv(\mathbf{Z}) = \theta(\mathbf{Z}), \quad (2.34)$$

де L – диференційний оператор; v – шукана функція (фазова змінна); $\theta(\mathbf{Z})$ – відома функція вектора незалежних змінних \mathbf{Z} .

Наприклад, у разі одновимірного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

диференційний оператор

$$L = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right).$$

Один із можливих підходів до розв'язання диференціальних рівнянь (2.34) оснований на попередньому доборі для шуканого рішення $v(\mathbf{Z})$ деякої підхідної апроксимуючої залежності $u(\mathbf{Z})$, коефіцієнти якої розраховуються, виходячи з умови мінімізації похибки $\varepsilon(\mathbf{Z}) = Lu(\mathbf{Z}) - \theta(\mathbf{Z})$. Тут вважаємо, що у вектор незалежних змінних \mathbf{Z} можуть входити як просторові, так і тимчасова координати.

Зазвичай апроксимація $u(\mathbf{Z})$ приймається у формі

$$u(\mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^m q_i \varphi_i(\mathbf{Z}), \quad (2.35)$$

де $\varphi_i(\mathbf{Z})$ – функції, що називаються координатними (пробними, базисними або форми); q_i – шукані коефіцієнти.

Тоді розв’язання рівнянь (2.34) фактично зводиться до визначення коефіцієнтів q_i .

Для визначення q_i можна використовувати методи, розглянуті нижче.

У методі Гальоркіна q_i знаходяться з розв’язання системи рівнянь

$$\int_{\mathbf{R}} \varepsilon(\mathbf{Z}) \varphi_i(\mathbf{Z}) d\mathbf{R} = \int_{\mathbf{R}} \left(L \sum_{i=1}^m q_i \varphi_i(\mathbf{Z}) - \theta(\mathbf{Z}) \right) \varphi_i(\mathbf{Z}) d\mathbf{R} = 0,$$

де $\mathbf{Z} \in \mathbf{R}$, \mathbf{R} — досліджувана в задачі область.

У методі Рітца задача визначення формулюється як варіаційна. У цьому випадку підбирається деякий функціонал, такий, щоб рівняння (2.34), яке розв’язується, збігалось з рівнянням Ейлера для цього функціонала. Зауважимо, що у варіаційному виключенні рівнянням Ейлера для функціонала

$$I = \int_a^b F \left(x, v, \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx,$$

тобто в одновимірних задачах, називають рівняння

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial v_x} = 0,$$

для функціонала

$$I = \int_{\mathbf{R}} F \left(x, y, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\mathbf{R},$$

тобто у двовимірних задачах, називають рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial^2 F}{\partial v_x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial v_x \partial v_y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial v_y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \\ - \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial v_x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial v_y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial v_x} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial v_y} = 0, \end{aligned}$$

де $v_x = \partial v / \partial x$, $v_y = \partial v / \partial y$ тощо.

Розв’язання рівняння Ейлера, знайдене за певних граничних умов, надає своєму функціоналу екстремальне значення.

Тому, власне, і виявляється можливим замінити інтегрування заданого рівняння пошуком екстремалі відповідного функціонала, що і здійснюється в методі Рітца.

Часто в застосуванні методу кінцевих елементів (МКЕ) задачі вже у своїй вихідній постановці є задачами мінімізації функціоналів, а не задачами інтегрування диференціальних рівнянь. Така більшість задач аналізу напружень і деформацій у проєктованих конструкціях, що вирішуються в САПР машинобудівних галузей. Тут формулювання функціонала проводиться на основі варіаційних принципів механіки.

Далі в підібраний функціонал $I(u)$ підставляється вираз (2.35), проводиться диференціювання за вектором коефіцієнтів $\mathbf{Q} = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ і похідні $\partial I / \partial q_i$ прирівнюються нулю. Унаслідок маємо систему рівнянь

$$\partial I(\mathbf{Q}) / \partial \mathbf{Q} = 0., \quad (2.36)$$

розв'язання якої дає значення коефіцієнтів q_i , призводять до мінімізації похибки апроксимації $v(\mathbf{Z})$ функцією $u(\mathbf{Z})$.

Недоліком розглянутих варіаційних методів є труднощі успішного підбору координатних функцій. Їхня різноманітність і великі значення в (2.35) перешкоджають формалізації процедур і створенню досить універсального програмного забезпечення, орієнтованого на аналіз широкого класу конструкцій, що проєктуються. Цей недолік значною мірою усунений у МКЕ. Головна особливість МКЕ, що відрізняє його від інших варіаційних методів, полягає у використанні сплайнової апроксимації. У МКЕ вся досліджувана область поділяється на кінцеві елементи.

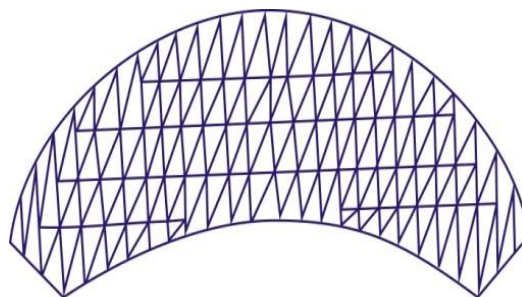


Рисунок 2.9 – Приклад поділу плоскої деталі на кінцеві елементи

У двовимірних задачах кінцеві елементи зазвичай вибираються у вигляді трикутників або чотирикутників, у тривимірних задачах мають форму тетраедра або паралелепіпеда. Так, на рис. 2.9 показаний часто використовуваний варіант виділення трикутних кінцевих елементів у плоских деталях.

Для кожного елемента окремо внаслідок його порівняно малих розмірів можна використовувати прості апроксимуючі вираження, найчастіше це поліноми ступеня не вищого за третій. Наприклад, в одновимірних задачах

$$u(x) = \sum_{i=0}^r a_i x^i. \quad (2.37)$$

У межах кінцевого елемента вибирається кілька вузлових точок (їхня кількість дорівнює кількості коефіцієнтів a_i у (2.37)). Підстановка координат цих точок (u_j, x_j) у (2.37) дає систему рівнянь, розв'язання якої дозволяє виразити u через u_j та перетворити (2.37) на вигляд (2.35):

$$u(x) = \sum_{j=0}^r q_j \varphi_j(x). \quad (2.38)$$

де $\varphi_j(x)$ – координатні функції; q_j – коефіцієнти, чисельно рівні значенню u_j шуканого наближеного розв'язання диференціального рівняння у вузлових точках.

На рис. 2.10 показано отримання (2.38) у найпростішому одновимірному випадку, відповідному аналізу деформацій, напружень або температур у стрижневих конструкціях. Тут на осі x (уздовж стрижня) виділені кінцеві елементи завдовжки L_1 і L_2 , обрані вузлові точки x_A, x_B у першого та x_B, x_C у другого елемента, тобто прийнята лінійна апроксимація $u(x)$ у межах кожного кінцевого елемента:

$$u(x) = a_0 + a_1 x.$$

У результаті для першого елемента маємо

$$u(x) = \frac{x_B - x}{L_1} u_A + \frac{x - x_A}{L_1} u_B$$

і для другого

$$u(x) = \frac{x_C - x}{L_2} u_B + \frac{x - x_B}{L_2} u_C,$$

тобто отримані вирази типу (2.38).

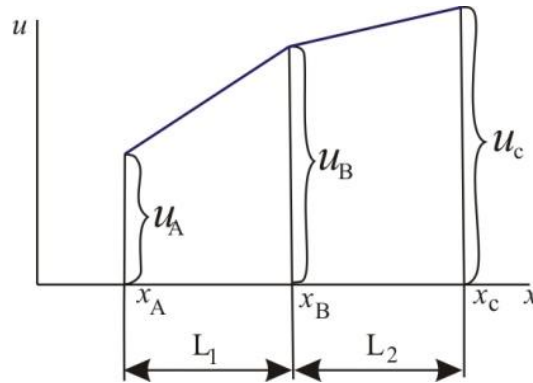


Рисунок 2.10 – Ілюстрація до отримання координатних функцій в одновимірній задачі

Після розбиття R на кінцеві елементи та вибору координатних функцій виконуються процедури, типові для методів Рітца або Гальоркіна. Використовувані в цих методах функціонали подані у вигляді сум інтегралів, що належать до кінцевих елементів. Сплайнова апроксимація істотно спрощує процедури отримання системи рівнянь (2.36), яка подається у вигляді

$$KQ = P, \quad (2.39)$$

де K – матриця, названа матрицею жорсткості; P – вектор правих частин, названий вектором навантажень, $Q = (q_1, q_2, \dots, q_l)$; l – загальне число вузлових точок в області R .

Отже, застосування МКЕ потребує виконання таких процедур:

- 1) розбиття області R на кінцеві елементи;
- 2) вибору координатних функцій, зазвичай зводиться до вибору ступеня полінома (2.37) або до вибору вузлових точок;
- 3) вибору функціонала, відповідного деякому варіаційному принципу або заданому диференціальному рівнянню;
- 4) формування матриць жорсткості окремих кінцевих елементів, порядок цих матриць дорівнює числу виділених в елементі вузлів;

5) складання матриці жорсткості всієї досліджуваної області шляхом об'єднання матриць жорсткості елементів і складання вектора навантажень;

6) визначення наближених значень шуканої функції у вузлових точках шляхом вирішення системи рівнянь (2.39);

7) визначення (у разі необхідності) значень шуканої функції в довільних точках на основі апроксимації (2.38).

Розроблено низку програмних комплексів аналізу, проєктованих об'єктів на основі МКЕ. Більшість вищезазначених процедур реалізовано в програмних модулях, і користувачеві потрібно лише вибрати тип кінцевого елемента з обмеженого переліку допустимих типів і вказати спосіб розбиття досліджуваної області на кінцеві елементи.

2.4 Модельний експеримент. Застосування пакета програм COMSOL Multiphysics для вирішення завдань теплообміну

COMSOL Multiphysics – це потужне інтерактивне середовище для моделювання і розрахунків більшості наукових та інженерних завдань, оснований на ДРЧП методом кінцевих елементів. З цим програмним пакетом можна розширювати стандартні моделі, що використовують одне диференціальне рівняння, у мультифізичні моделі для розрахунку пов'язаних між собою фізичних явищ. Розрахунок не потребує глибокого знання математичної фізики та методу скінченних елементів. Це можливо завдяки вбудованим фізичним режимам, де коефіцієнти ДРЧП задаються у вигляді зрозумілих фізичних властивостей і умов, таких як: теплопровідність, теплоємність, коефіцієнт тепловіддачі, об'ємна потужність тощо залежно від обраного фізичного розділу. Перетворення цих параметрів у коефіцієнти математичних рівнянь відбувається автоматично. Взаємодія з програмою можлива стандартним способом – через графічний інтерфейс користувача (GUI), або програмуванням за допомогою скриптів мовою COMSOL Script чи мовою MATLAB. Цей посібник розглядає основи роботи з програмою тільки через графічний інтерфейс.

Програма оснований на системі диференціальних рівнянь у часткових похідних. Існує три математичних способи задання таких систем: коефіцієнтна форма, призначена для лінійних і близьких до лінійних моделей; генеральна форма, для нелінійних моделей; слабка форма (Weakform), для моделей з ДРЧП на границях, ребрах або для моделей, які використовують умови зі змішаними похідними за часом.

Застосовуючи ці способи, можна змінювати типи аналізу, а саме:

- стаціонарний і перехідний аналіз;
- лінійний і нелінійний аналіз;
- модальний аналіз і аналіз власних частот.

Для розв'язання ДРЧП COMSOL Multiphysics використовує метод кінцевих елементів (FEM). Програмне забезпечення запускає кінцевоелементний аналіз разом із сіткою, яка враховує геометричну конфігурацію тіл, і контролем помилок із використанням різноманітних чисельних вирішувачів. Оскільки багато фізичних законів виражаються у формі ДРЧП, стає можливим моделювати широкий спектр наукових та інженерних явищ з багатьох підрозділів фізики, таких як: акустика, хімічні реакції, дифузія, електромагнетизм, гідродинаміка, фільтрування, оптика, квантова механіка, напівпровідникові пристрої та багато інших.

Крім переліченого вище, програма дозволяє за допомогою змінних зв'язку (coupling variables) з'єднувати моделі в різних геометріях і пов'язувати між собою моделі різних розмірностей. Для створення й розрахунку завдання рекомендується така послідовність дій.

1. Вибираємо розмірність моделі, визначаємо фізичний розділ у Model Navigator (Навігаторі моделей) (кожному розділу відповідає певне диференціальне рівняння) і визначаємо стаціонарний або нестаціонарний аналіз температурного поля.

2. Визначаємо робочу область і задаємо геометрію.

3. Задаємо вихідні дані, залежності змінних від координат і часу.

4. Указуємо теплофізичні властивості та початкові умови.

5. Указуємо граничні умови.

6. Задаємо параметри й будуємо сітку.

7. Визначаємо параметри вирішального пристрою і запускаємо розрахунок.

8. Налаштовуємо режим відображення.

9. Отримуємо результати.

Розглянемо приклад двовимірного моделювання на прикладі процесу нестаціонарного теплообміну для пластини, теплоізолюваної знизу й ліворуч і частково – зверху. Початкова температура пластини $T_0 = 293$ К, її ширина $L = 0,02$ м, висота $H = 0,03$ м. У напрямку, перпендикулярному до площини схеми, температура не змінюється (плоска задача).

Крок 1. Навігатор моделей. Виберіть 2D у списку Space dimension, потім папку > Heat Transfer і елемент Conduction. Виберіть Transient analysis. Натисніть ОК.

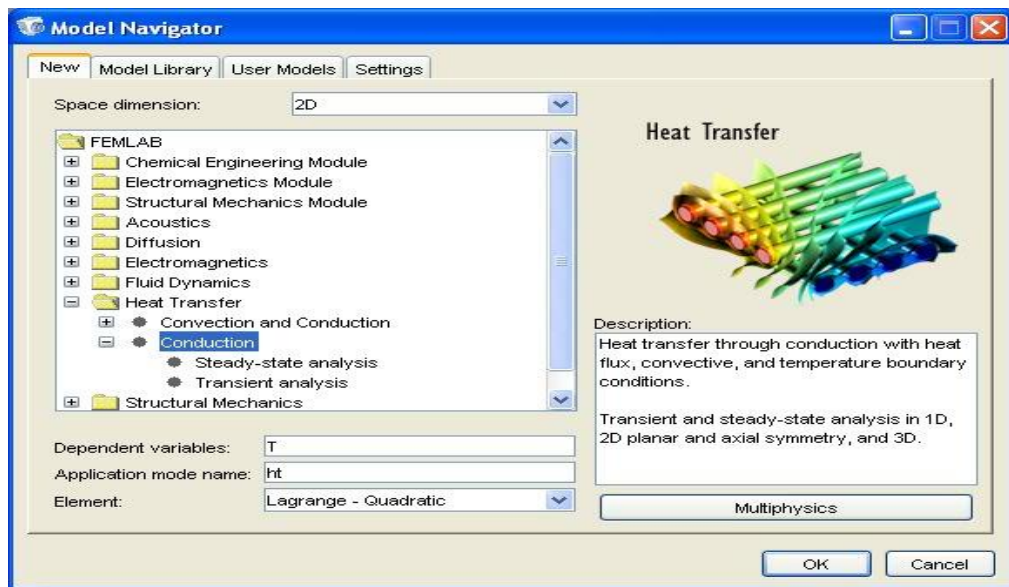


Рисунок 2.11 – Вікно навігатора моделей

Крок 2. Моделювання геометрії. У меню Draw виберіть Specify Objects і натисніть Rectangle. У вікні Rectangle знайдіть область Size і введіть 0,03 у поле Width (Ширина), потім введіть 0,02 у поле Height (Висота). Натисніть ОК.

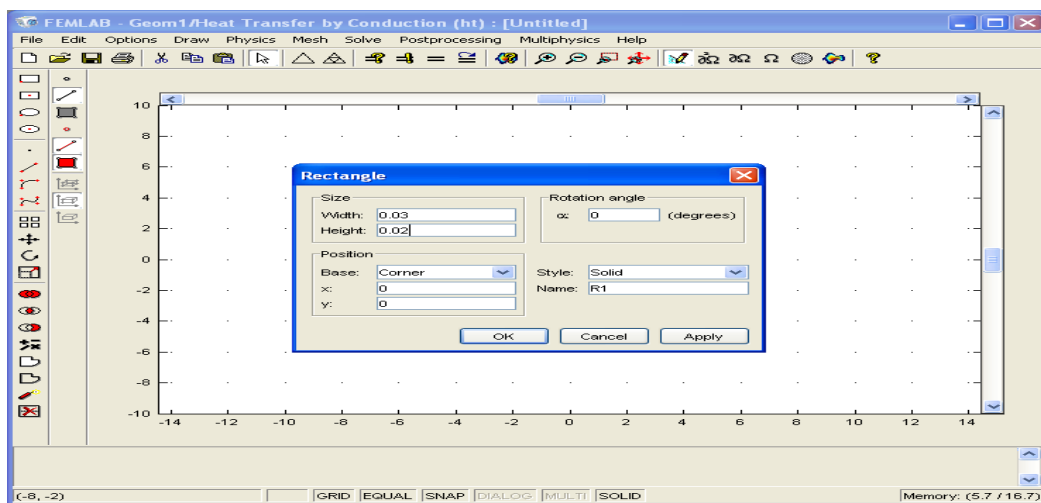


Рисунок 2.12 – Вікно програми для моделювання геометрії

У меню Draw виберіть Specify Objects і натисніть Point. У поле x введіть 0,015, у поле y введіть 0,02 для того, щоб верхня межа була поділена на дві частини.

Натисніть ОК. Натисніть кнопку Zoom Extents.

Крок 3. Константи і вирази. Відкрийте меню Options і виберіть Constants.

Введіть такі константи для задання виразів для граничних умов: $T_1 = 393$; $T_2 = 373$; $\Delta T_1 = 100$; $\Delta T_2 = 50$ $\sigma = 0,01$; $\omega = 0,05$; $\eta = 0,003$; $T_0 = 293$ К.

Натисніть ОК.

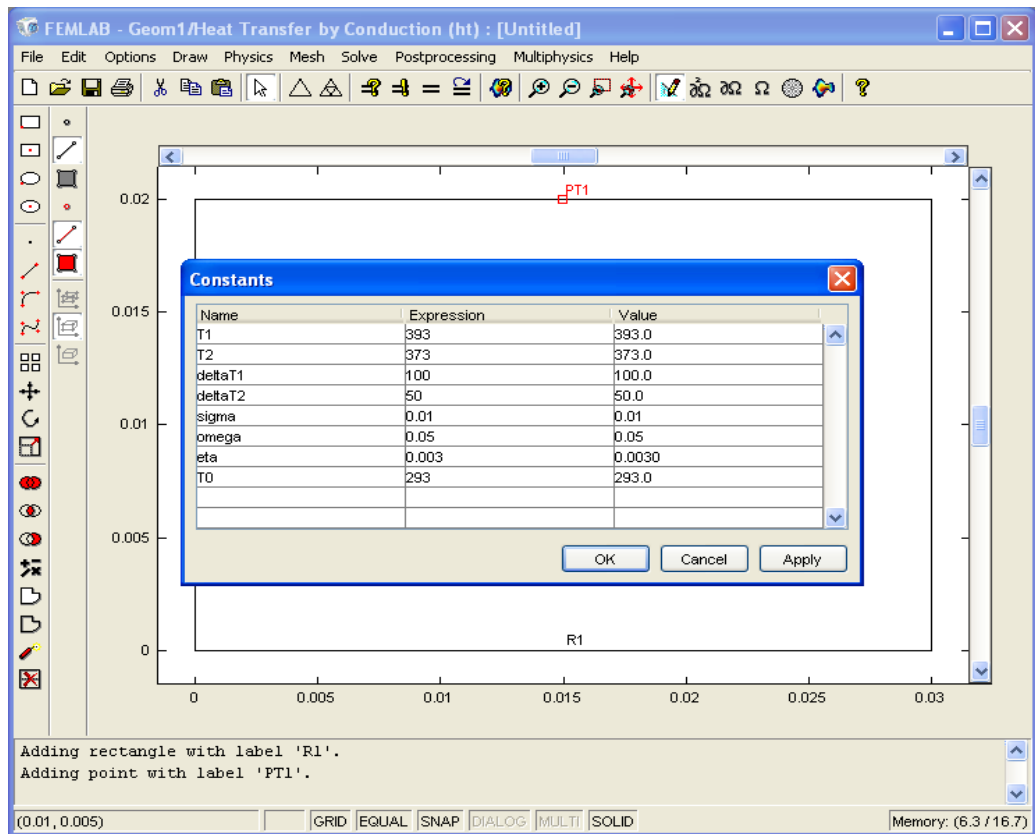


Рисунок 2.13 – Вікно програми для введення констант

Відкрийте вікно Options > Expressions > Boundary Expression (Вирази на границях). Виберіть ліву границю 1.

У поле Name введіть T1iq. У поле Expression – закон, за яким змінюється температура $T0 + \text{deltaT1} * (1 - \exp(-\text{sigma} * t))$.

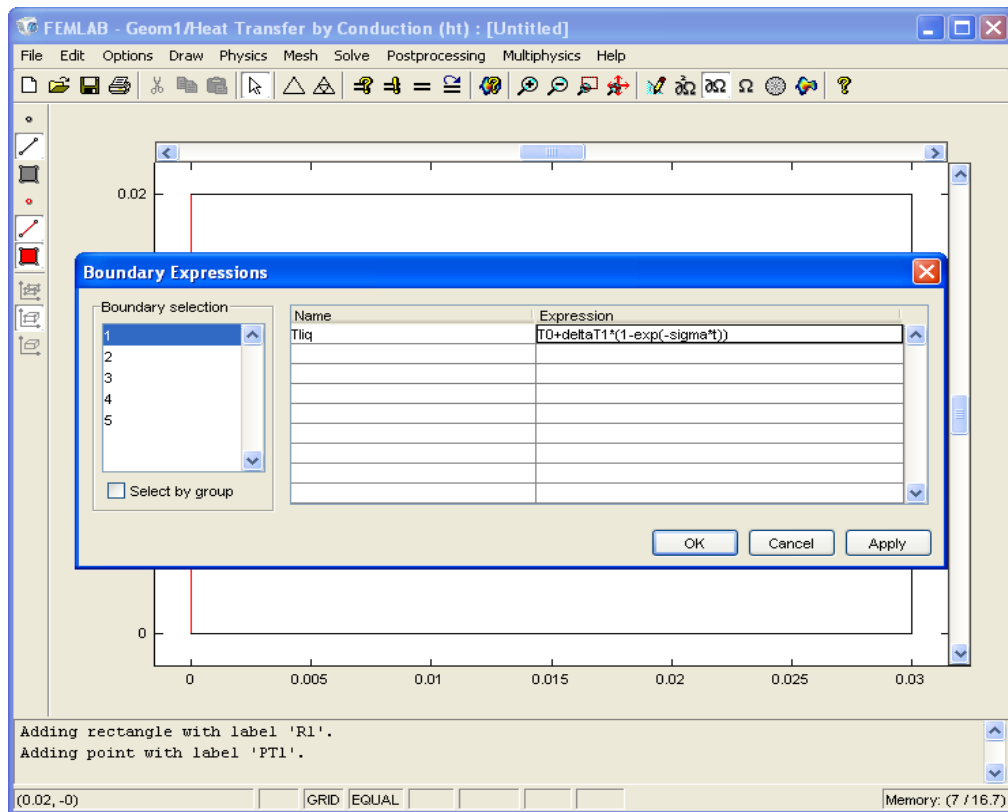


Рисунок 2.14 – Вікно вибору границь

Виберіть верхню границю 4. Введіть у поле Expression другий закон: $T_2 - \Delta T_2 \cdot \sin(\omega t) \cdot \exp(-\eta t)$.

Далі в граничних умовах можна буде задати змінну Tliq, а потрібний закон підставиться автоматично залежно від номера границі.

Натисніть ОК.

Крок 4. Фізичні установки. Властивості підобласті.

У меню Physics виберіть Subdomain Settings. У вікні Boundary Settings виберіть границю 1.

Тепер установіть початкове значення температури. Відкрийте в тому самому вікні вкладку Init.

Введіть T_0 як початкове значення в поле Temperature.

Натисніть ОК.

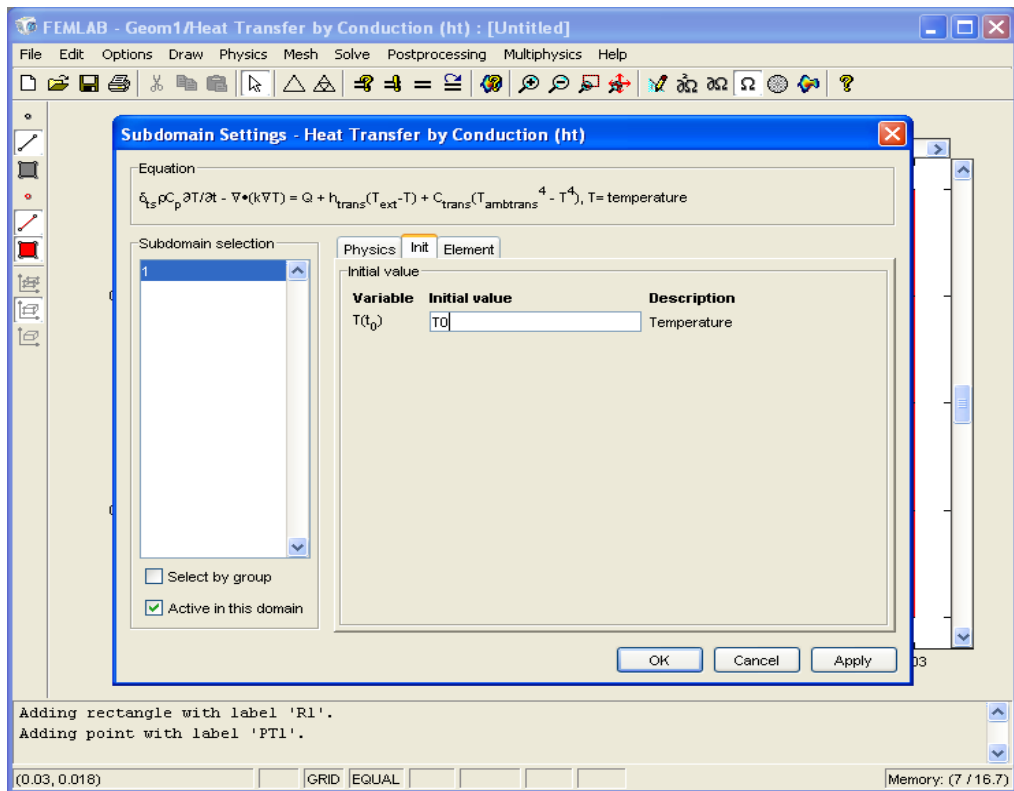


Рисунок 2.15 – Вікно фізичних установок

Крок 5. Граничні умови. Відкрийте меню Physics і виберіть Boundary Settings. У вікні Boundary Settings виберіть границю 1. У списку Boundary condition виберіть Heat flux. Надрукуйте 60000 у полі h – Heat transfer coefficient. Введіть T_{liq} у поле T_{inf} – External Temperature.

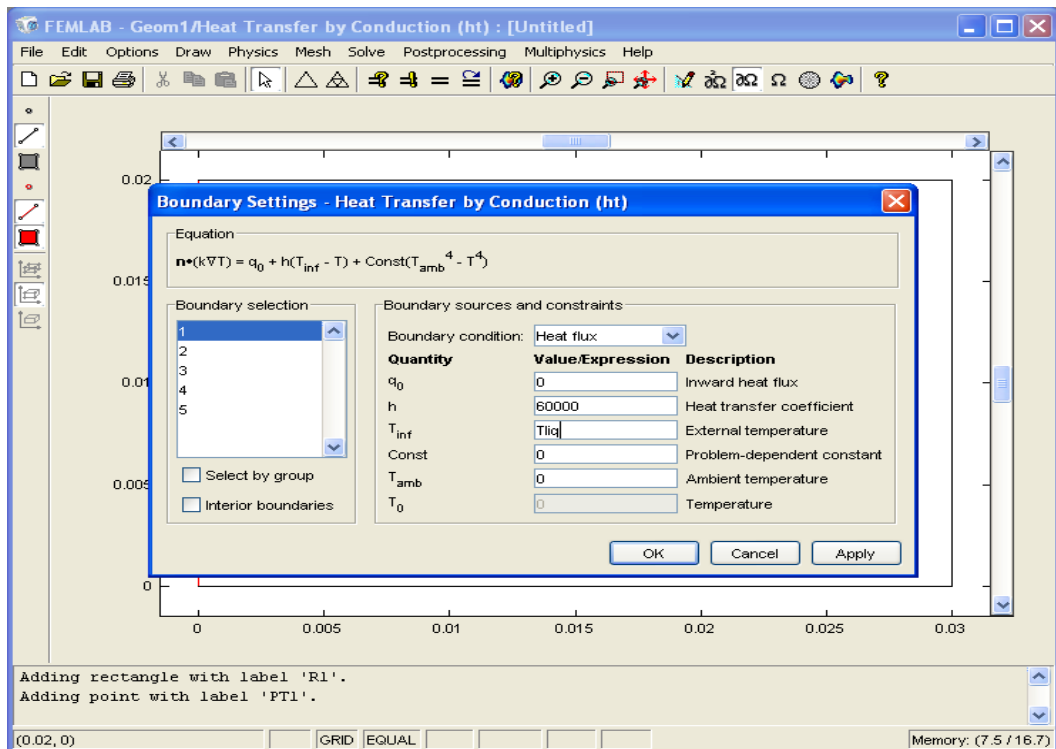


Рисунок 2.16 – Вікно задання граничних умов

Виберіть границю 4. У списку Boundary condition виберіть Heat flux. Надрукуйте 40000 у полі h – Heat transfer coefficient. Введіть T_{liq} у поле T_{inf} – External Temperature. Натисніть ОК.

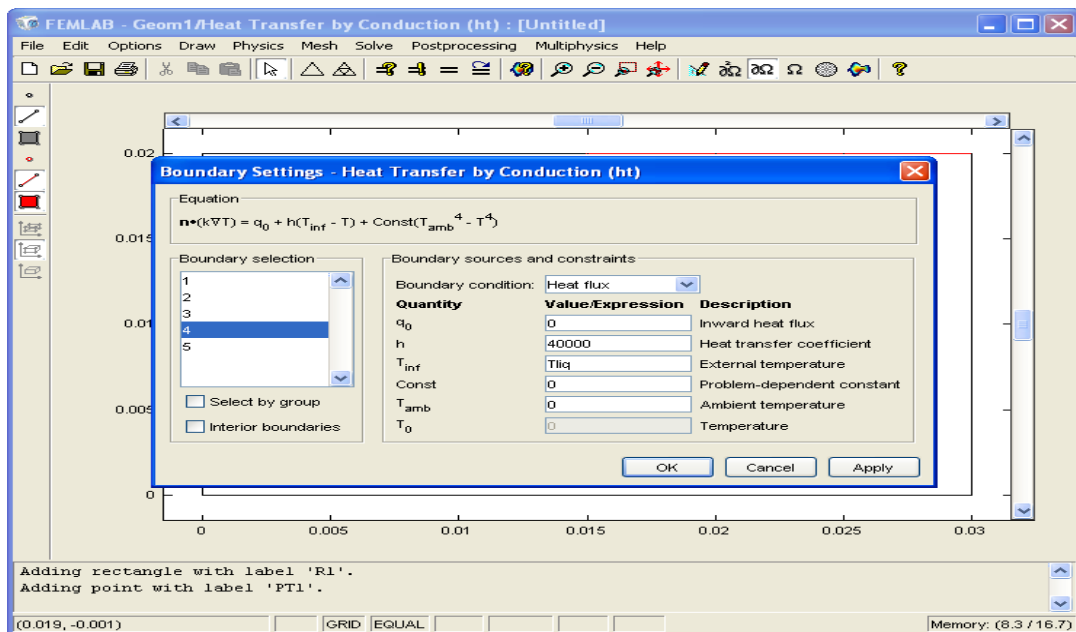


Рисунок 2.17 – Вікно задання граничних умов

Крок 6. Генерація сітки. Створіть сітку кінцевих елементів кнопкою Initialize Mesh на головній панелі інструментів (на кнопці зображений трикутник). За замовчуванням буде згенеровано 629 кінцевих елементів.

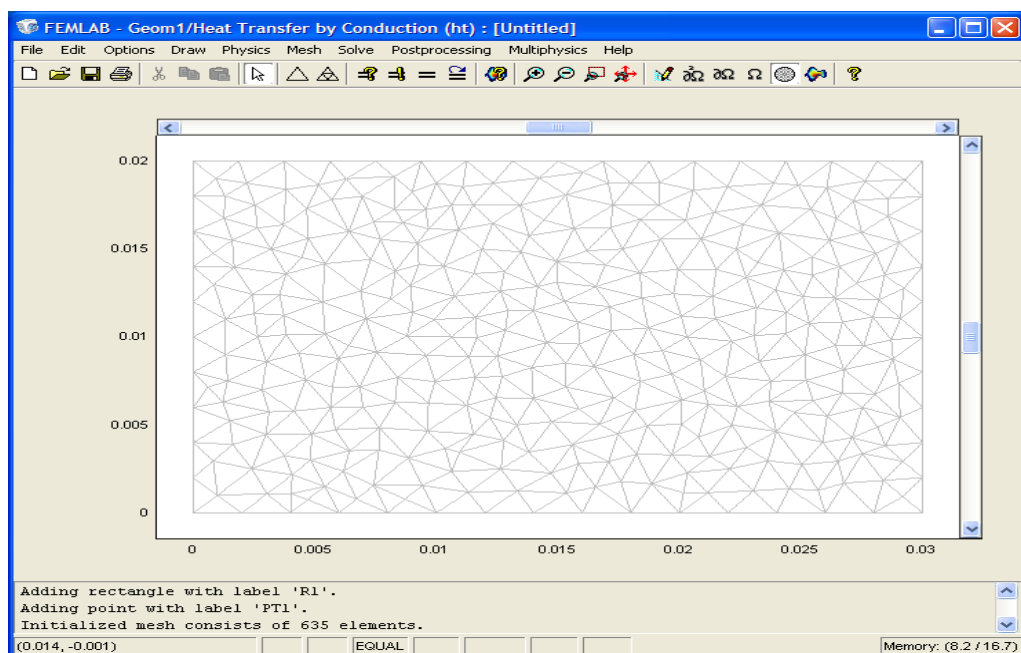


Рисунок 2.18 – Вікно генерації сітки

Крок 7. Розрахунок. Натисніть на кнопку Solver Parameters.

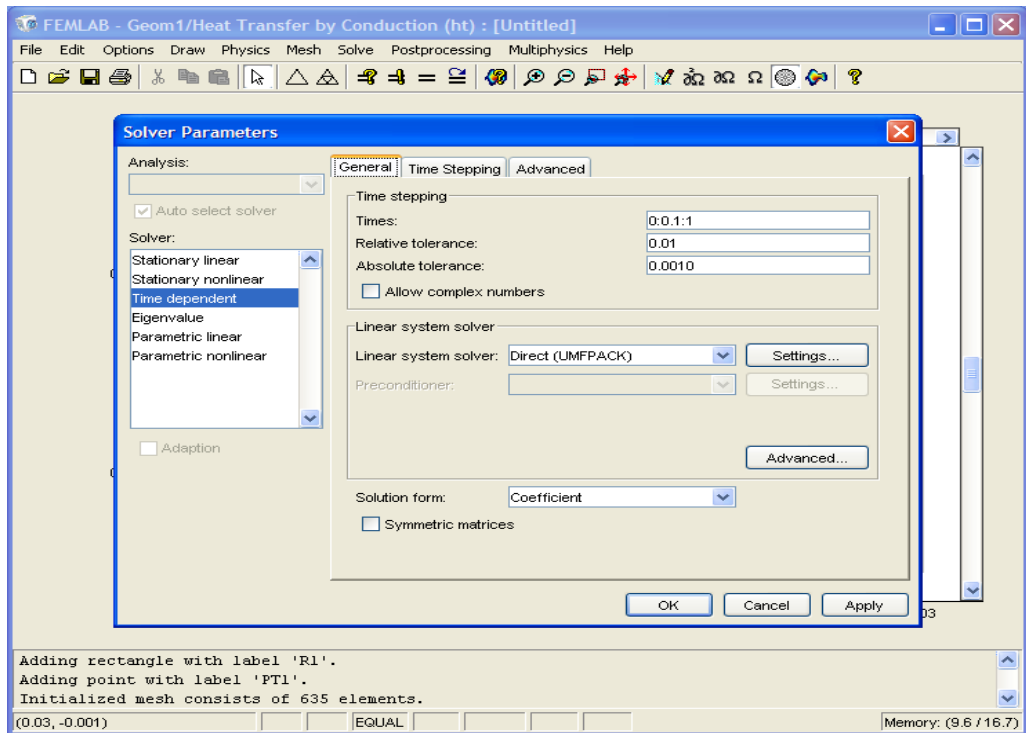


Рисунок 2.19 – Вікно виконання розрахунку задачі

На вкладці General у першому полі Times замість 0:0.1:1 вводимо 0:10:3000. Натисніть ОК.

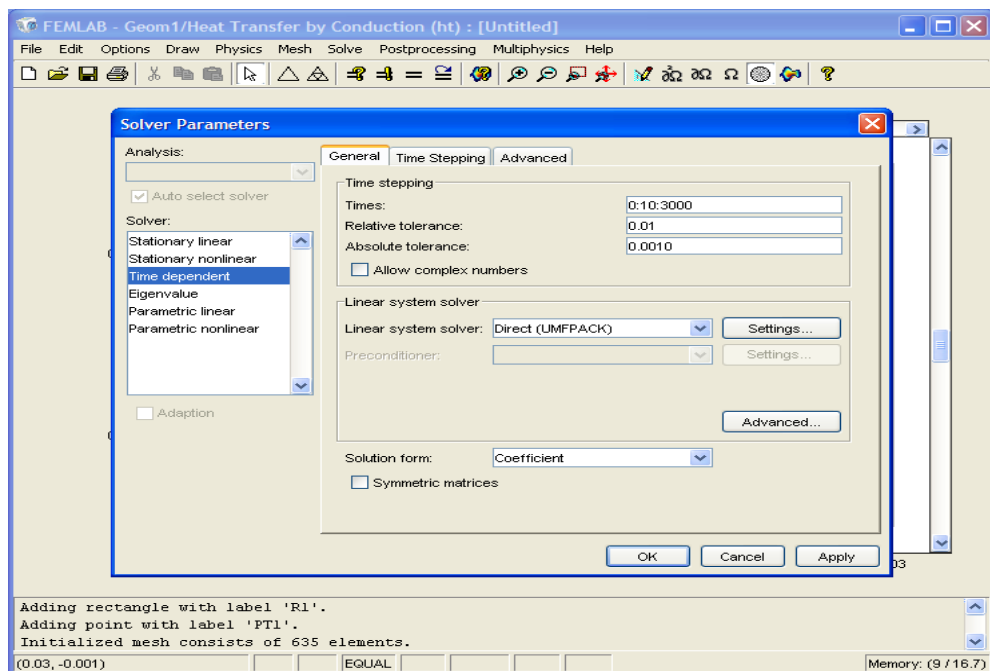


Рисунок 2.20 – Задання параметрів на вкладці General

Натискаємо кнопку Solve (Вирішувати).

Крок 8. Візуалізація. Після закінчення розрахунку ви побачите розподіл температури в пластині в момент часу 3000 секунд.

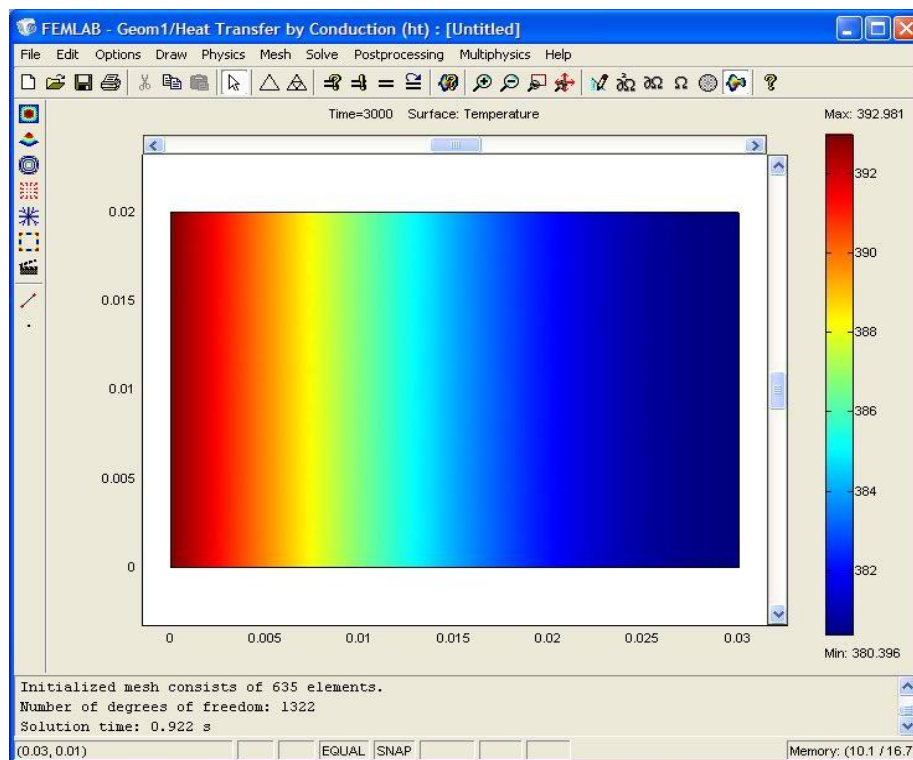


Рисунок 2.21 – Вікно візуалізації задачі

Якщо хочете побачити розподіл температур у вигляді ізотермічних ліній, натисніть кнопку Contour plot.

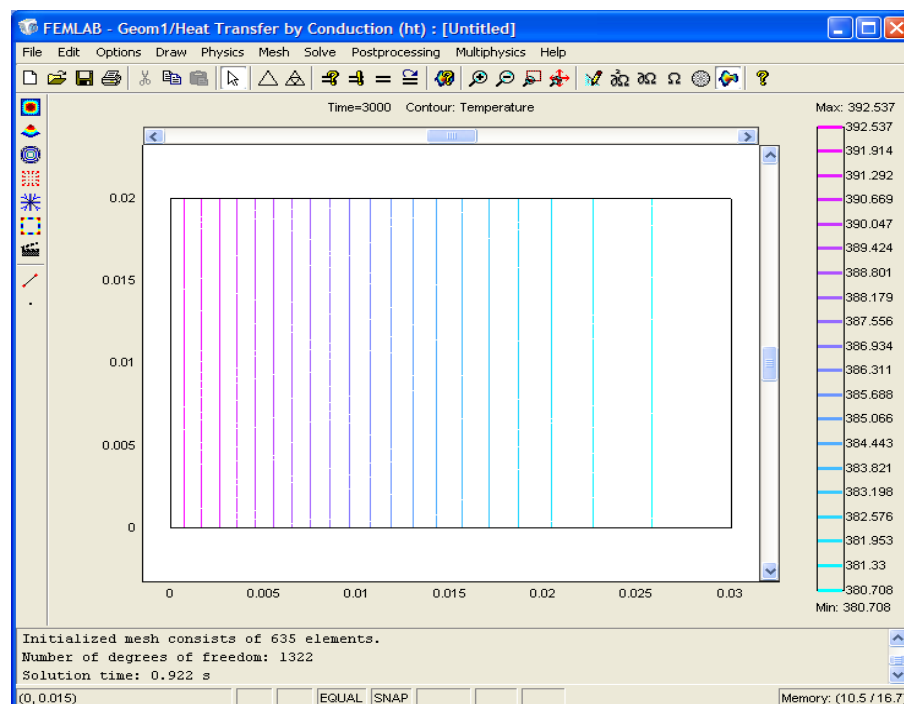


Рисунок 2.22 – Розподіл температур у вигляді ізотермічних ліній

Щоб побачити зображення теплового потоку у вигляді стрілок, натисніть кнопку Arrow plot.

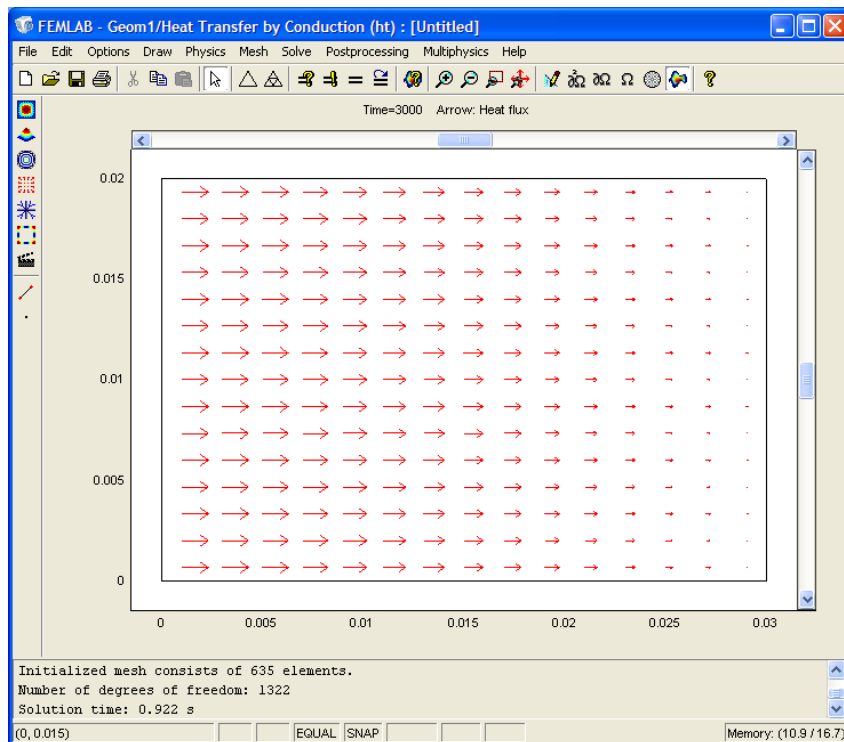



Рисунок 2.23 – Зображення теплового потоку у вигляді стрілок

Відображення теплового потоку у вигляді ліній струму вмикається натисненням кнопки Stream lineplot. 

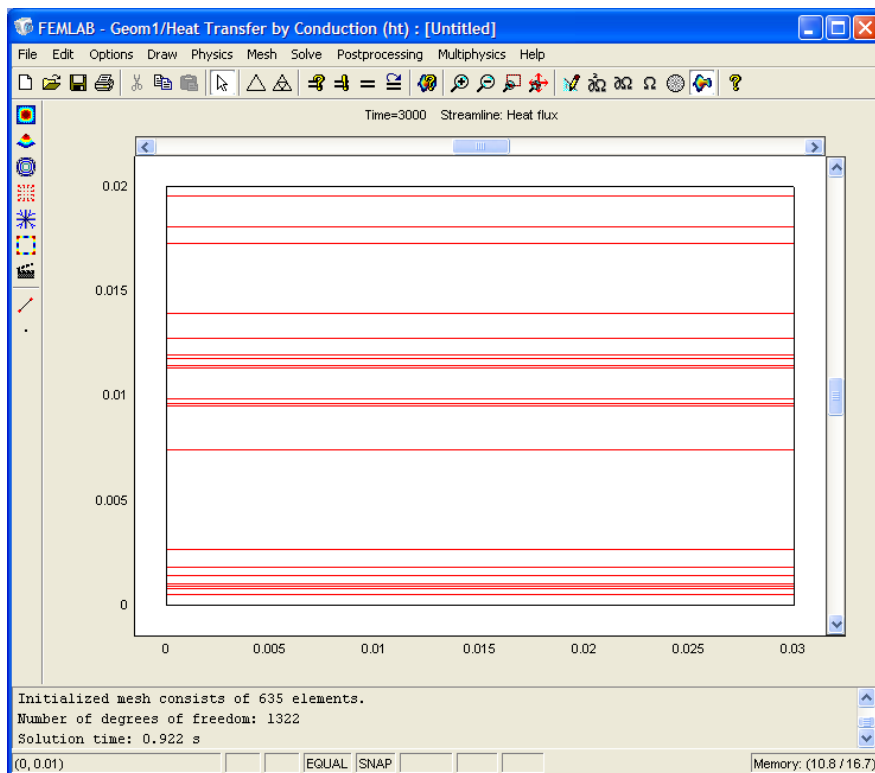


Рисунок 2.24 – Відображення теплового потоку у вигляді ліній струму

Ви бачите відображення у вигляді ліній струму. На цьому моделювання задачі завершено.

2.5 Порівняльна характеристика чисельних методів і алгоритмів

Інтенсивний розвиток чисельних методів розрахунку електродинамічних систем почався з середини 60-х рр., коли з'явилися перші універсальні програми розрахунку регулярних хвильоводів і аксіально-симетричних резонаторів. Накопичений досвід дозволяє сформулювати критерії, міра відповідності яким визначає придатність методу для розв'язання того або іншого класу завдань. До цих критеріїв належать:

1. Форма області, у якій розраховується електромагнітне поле, зокрема чи може вона бути неопуклою, багатозв'язковою, мати криволінійну границю.
2. Можливість розрахунку вищих типів коливань.
3. Залежність часу розв'язання від необхідної точності та практично досяжна точність розв'язання.
4. Зручності реалізації в обчислювальній програмі, тобто придатність для розв'язання широкого класу задач і розумні витрати часу і засобів на розробку та супровід програми.

Оскільки перелічені вимоги багато в чому суперечливі, методу, найкращого для розв'язання більшості завдань, що зустрічаються на практиці, мабуть, не існує. Цим, разом з іншими причинами, пояснюються різноманітність використовуваних чисельних методів і велика кількість створених на їхній основі обчислювальних програм. Порівняння основних характеристик цих програм дозволяє зробити певні висновки про сферу застосовності того або іншого методу.

У розвитку чисельних методів розв'язання внутрішніх крайових задач електродинаміки можна виокремити два періоди. Перший (1965–1972 рр.) характеризується застосуванням різних чисельних методів, зокрема на початку значна увага приділялася методам кінцевих різниць (МКР). Пізніше з'явилися програми, що реалізують варіаційні методи, а також методи інтегральних рівнянь і кінцевих елементів. Експлуатація цих програм дозволила оцінити їхні переваги й недоліки, зосередити зусилля дослідників на повній реалізації можливостей найбільш перспективних методів. Порівняння методів дозволяє зробити такі висновки:

1. Найбільш універсальними методами розв'язання двовимірних задач електродинаміки на власні значення є МКР і МКЕ. Можливості цих методів на

регулярних сітках і елементах першого порядку практично збігаються. Строга теорія МКЕ, гнучкість і широкі можливості задоволення таким суперечливим вимогам, як точність розв'язання й обмежений обсяг пам'яті ЕОМ, забезпечили йому велику популярність. Проте мінімальний обсяг вхідної інформації в поєднанні з простотою алгоритму, достатньою точністю і прийнятним часом розв'язання досягаються для реалізації МКР.

2. Варіаційні методи характеризуються винятково малою похибкою розрахунку поля в опуклих областях. Для неопуклих областей похибка сильно зростає. Активний розвиток варіаційних методів виявив їхні недоліки, пов'язані зі значним обсягом попередньої обробки задач, трудностю побудови координатних функцій, які відображали б основні властивості розв'язань і в разі порівняно малого числа цих функцій давали б задовільну апроксимацію розв'язання.

3. Методи інтегральних рівнянь характеризуються системами рівнянь найменшого порядку, проте їхня реалізація пов'язана зі знаходженням мінімуму визначників системи, що потребує значних витрат машинного часу. Крім того, для неопуклих областей висока точність розрахунку поля може бути досягнута тільки за умови вдалого вибору систем функцій, що використовуються для розкладання в ряд поверхневого струму, інакше можлива немонотонна збіжність до розв'язання. Проте точність розрахунку цими методами власних значень може бути дуже високою.

3 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОННИХ ПРИЛАДІВ

Як відомо, робота електронних ламп основана на використанні руху електронів під дією електричних полів.

Побудова ММ електронного приладу (ЕП) є індивідуальним завданням для кожного виду ЕП. Однак існує низка загальних закономірностей, характерних для будь-якого типу (як електровакуумних, так і напівпровідникових) приладів.

3.1 Змінні Ейлера та Лагранжа

Насамперед зупинимося на двох уявленнях математичного опису руху електронного потоку. Як правило, процес взаємодії в ЕП пов'язаний із впливом електронного потоку на електромагнітне або електростатичне поле: знання поведінки цього потоку багато в чому визначає успіх побудови ММ ЕП.

Нехай траєкторія руху електронів описується рівнянням

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z, t). \quad (3.1)$$

Якщо в цьому випадку нас не цікавить шлях, який описують окремі частинки, то (3.1) є траєкторією деякого потоку (подібний підхід характерний для гідродинаміки), що вивчається стороннім спостерігачем, який знаходиться в нерухомій лабораторній системі координат. Змінні x , y , z , t називаються ейлерові (змінні Ейлера). У цьому випадку поняття щільності струму і заряду мають прямий фізичний зміст, оскільки вони характеризують стан потоку в окремих точках простору.

Однак у деяких випадках необхідно знати швидкості та розташування окремих зарядів у потоці, що обумовлено неламинарним їхнім рухом у просторі. Тоді використовують лагранжеві змінні, коли змінними є поточний час t (або поточна координата) і проміжок часу t_0 влітання частки в область взаємодії. Інакше, змінні Лагранжа пов'язані з рухом частинки, тобто характеризують рухому систему координат.

З точки зору формального підходу змінні Ейлера слід ототожнювати із спостерігачем, що знаходиться в деякій фіксованій системі координат, щодо якої відбувається рух електронного потоку й окремих частинок у ньому, у той час як змінні Лагранжа ототожнюються із спостерігачем, пов'язаним

безпосередньо з частинками, які переміщуються. На практиці це еквівалентно в першому випадку спостерігачеві, який дивиться з тротуару на наповнений людьми автобус, що проходить, а в другому випадку спостерігач знаходиться вже в автобусі й дивиться на людину, яка стоїть на тротуарі.

Розглянемо взаємозв'язок змінних Ейлера і Лагранжа на прикладі руху потоку електронів в одновимірному діодному проміжку (рис. 3.1). Припустимо, що електрони влітають у простір, обмежений площинами $z \in [0, d]$, протягом якогось проміжку часу T , і для кожного електрона є рівняння траєкторії

$$Z = Z[\tau, t], \quad (3.2)$$

яке задовольняє умові $Z(\tau, \tau) = [Z(\tau, t)]_{t=\tau} = 0$.

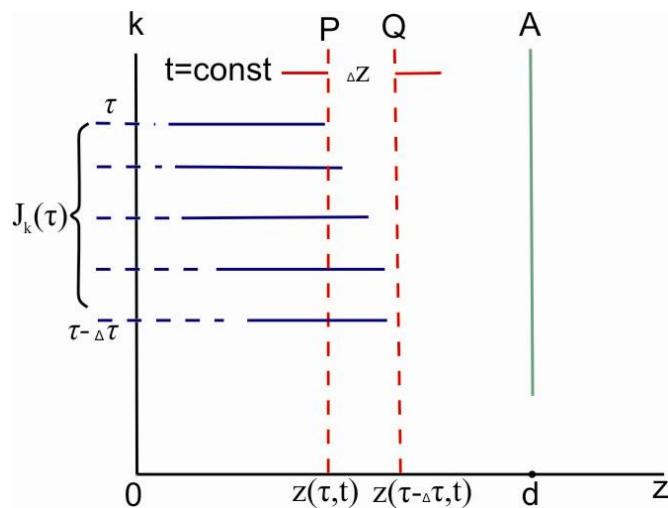


Рисунок 3.1 – Електронний потік у плоскому діоді

Тут τ – час влітання електрона в доданий проміжок (проміжок часу).

Оскільки ми не обговорюємо умови руху кожного окремого електрона, у процесі їхнього пересування відбуваються якісь еволюції і в певний момент часу t в області, обмеженою площинами P і Q , зосередиться заряд

$$q = \rho[z, t] \Delta z S, \quad (3.3)$$

де $\rho[z, t]$ – об'ємна щільність заряду. Ця умова зрозуміла, оскільки заздалегідь передбачається постановка одновимірної задачі, тобто незалежність процесів від координат X і Y .

На площині P знаходяться електрони, що влетіли в доданий проміжок у деякий початковий момент часу, а площину Q досягнуть електрони, які вилетіли раніше на час $\Delta\tau$ (тобто якщо початковий час $\tau - \Delta\tau$). Отже, ширина проміжку визначається сукупністю двох груп електронів, траєкторії яких описуються рівняннями:

$$\begin{aligned} Z_\tau &= Z(\tau, t), \\ Z_{\tau - \Delta\tau} &= Z(\tau - \Delta\tau, t). \end{aligned}$$

Тоді

$$(\Delta Z)_t = Z(\tau - \Delta\tau, t) - Z(\tau, t) = -\left(\frac{\partial Z}{\partial \tau}\right)_t \Delta\tau + \dots$$

Електрони, які на момент t заповнили простір між площинами P і Q , вилетіли з катода в інтервалі часу $\Delta\tau$ і принесли заряд

$$\Delta q = jk(\tau)\Delta\tau S_1, \quad (3.4)$$

де $jk(\tau)$ – щільність конвекційного струму в площині влітання електронів у доданий проміжок. Відповідно до закону збереження заряду

$$jk(\tau)\Delta\tau S_1 = \rho[Z, t]\Delta Z S_1 = -\rho[\tau, t]S_1 \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial \tau}\right)_t \Delta\tau + \dots \right].$$

Розділивши обидві частини на $\Delta\tau S_1$ і здійснивши перехід до межі за умови $\Delta\tau \rightarrow 0$, отримуємо

$$\rho[Z, t] = \rho[\tau, t] = -\frac{j_k(\tau)}{\left(\frac{\partial Z}{\partial \tau}\right)_t}, \quad (3.5)$$

Отже, якщо відомі закони зміни щільності струму й закон руху заряду, то можна розраховувати щільність об'ємного заряду в будь-який фіксований час.

У нашому випадку змінні, у яких незалежні величини – початковий час електронів і поточний час t , є лагранжеві та позначаються (τ, t) , а змінні Z і t – ейлерові змінні – позначаються $[Z, t]$, запис $\left(\frac{\partial Z}{\partial \tau}\right)_t$ означає диференціювання за умови фіксованого часу t , а $\left(\frac{\partial Z}{\partial \tau}\right)_\tau$ – у разі фіксованого τ .

Оскільки найбільш загальним в електроніці випадком є опис електронів (або інших заряджених частинок) у вигляді деякої кінематичної субстанції, розглянемо зміст основних понять механіки. За своїм змістом швидкість і прискорення – це характеристики окремої матеріальної точки, тобто їх необхідно обчислювати, слідуючи за рухом окремого електрона, який вийшов в проміжок в момент часу τ . Інакше кажучи, у цих обчисленнях повної похідної постійної залишається τ , а змінюється поточний час t . Отже,

$$v[Z, t] = \frac{dZ}{dt} = \left[\frac{\partial Z(\tau, t)}{\partial t} \right]_{\tau} = v(\tau, t);$$

$$\frac{dv}{dt} = \left[\frac{\partial v(\tau, t)}{\partial t} \right]_{\tau}; \quad \frac{d^2 Z}{dt^2} = \left[\frac{\partial^2 v(\tau, t)}{\partial t^2} \right]_{\tau},$$

тобто саме опис руху матеріальної точки потребує використання змінних Лагранжа.

Установимо деякі загальні правила переходу одних змінних в інші. Нехай задана деяка функція $F[Z, t]$ у змінних Ейлера. Тоді, з урахуванням (3.1)

$$F[Z(\tau, t), t] = F(\tau, t);$$

$$\frac{\partial F(\tau, t)}{\partial \tau} = \frac{\partial F(Z, t)}{\partial Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial \tau} \right)_t; \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial F(\tau, t)}{\partial t} = \frac{\partial F[Z, t]}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial t} \cdot \frac{\partial F[Z, t]}{\partial Z} = \frac{\partial F[Z, t]}{\partial t} + v \frac{\partial F[Z, t]}{\partial Z} = \frac{dF[Z, t]}{dt};$$

Повний диференціал у змінних Лагранжа

$$dZ(\tau, t) = \left(\frac{\partial Z}{\partial \tau} \right)_t d\tau + v(\tau, t) dt \quad (3.7)$$

є величиною першого порядку малості в збільшенні $\Delta Z(\tau, t) = Z(\tau, t) - Z(\tau - \Delta\tau, t - \Delta t)$, що дорівнює відстані між двома різними електронами потоку: один увійшов у діодний проміжок пізніше та знаходиться там в момент t ; інший увійшов під час $\tau - \Delta\tau$, а розглядається в момент $t - \Delta t$.

Подібний підхід дозволяє визначити щільність струму в будь-якій площині перетину діода (наприклад, у площині P) за заданим законом інжекції струму за умови $Z=0$. Дійсно, нехай за час $\partial\tau$ у діод проникає заряд $j_k(\tau)\partial\tau$,

який у вигляді щільності струму $j(\tau, t)$ проходить через площину P за час Δt . Тоді відповідно до закону збереження заряду

$$\Delta q = j_k(\tau) \Delta \tau = j(\tau, t) \Delta t; \quad (3.8)$$

$$j[Z, t] = j(\tau, t) = \frac{j_k(\tau)}{\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)_Z}.$$

Це співвідношення можна довести інакше. Оскільки $j[Z, t] = v[Z, t] \cdot \rho[Z, t]$, то з урахуванням (3.4)

$$j[Z, t] = -v[Z, t] \frac{j_k(\tau)}{\left(\frac{\partial Z}{\partial \tau}\right)_t}.$$

Для визначення щільності струму в заданій площині перетину P (3.7) потрібно

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)_t = -v(\tau, t) \left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)_z = -v[z, t] \left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)_z.$$

Підставивши це співвідношення в попереднє, отримаємо (3.8).

Змінні Лагранжа можуть бути не тільки (τ, t) , а й (t, Z) . Для цього досить скористатися рівнянням $t = t(Z, \tau)$, яке є іншою формою запису рівняння траєкторії частинки (3.1). Така форма запису зручна для аналізу процесів у підсилувачах із розподіленою взаємодією, у той час як перехід до тимчасових змінних Лагранжа зручний у моделюванні процесів в автогенераторі.

За своєю природою саме рівняння руху частинок представляються в лагранжевих змінних, а макроскопічні рівняння електродинаміки (рівняння Максвелла) потребують використання ейлерових змінних, оскільки вони описують характеристику ансамблю частинок. Як правило, найбільшу складність у моделюванні електронних приладів має коректна форма запису обох систем.

3.2 Моделювання електровакуумних приладів

Проектування електровакуумного приладу (ЕВП) пов'язане зі значними труднощами. Можна виділити основні елементи, притаманні всім типам ЕВП:

- інжектор електронів (катод або емітер);
- простір взаємодії, де взаємодіють потік електронів і електростатичні та (або) електромагнітні поля;

- колектор (анод), що збирає «відпрацьовані» електрони;
- балон, що обмежує область вакуумного середовища від повітряного.

Таке розмежування дозволяє спростити проектування всього ЕВП шляхом роздільного моделювання його основних елементів – зробити декомпозицію моделі. Наприклад, уся модель ЕВП буде складатися з чотирьох самостійних блоків.

Інжектор електронів є або окремим електродом (наприклад, термемісійний катод, найчастіше зустрічається в електронних лампах), або цілим пристроєм – електронною гарматою (в електронно-променевих і НВЧ-приладах). Метою цього елемента є створення потоку електронів, сформульованого в необхідному для використання в даному ЕВП вигляді. Так, для вакуумних діодів або інших типів ламп потрібно лише забезпечення емісії заданого числа електронів, в ЕВП і деяких приладах НВЧ до пучка, як правило, ставляться вимоги аксіальної симетрії (циліндричні суцільні або трубчасті пучки) тощо. Розрахунок і конструювання інжекторів електронів є самостійною і часто оригінальною частиною моделювання ЕП.

Колектор електронів (анод) відіграє роль елемента, що збирає «відпрацьовані» електрони. Його розрахунок зводиться здебільшого до визначення теплового режиму (потужності, що розсіюється на аноді). Однак у деяких приладах НВЧ роль колектора значно тонша, оскільки шляхом створення певного розподілу потенціалу (рекуперация електронів) вдається підвищити ККД приладів. Найбільш важливим для проектування є простір взаємодії. Саме процеси в ньому визначають усю різноманітність типів ЕВП. Тому в подальшому розглянемо типові приклади побудови моделей деяких ЕВП, які можуть бути основою для проектування інших видів приладів.

3.2.1 Моделювання тріода

Побудова моделі тріода може йти по двох самостійних напрямках. Перший – аналітичне моделювання, основане на досить добре розробленій теорії процесів у тріодах на низьких частотах (приймально-підсилювальні та генераторні тріоди). Його перевага полягає в простоті, наочності і в задовільній якості результатів розрахунку та експерименту. Недоліком цього напрямку є його наближеність, оскільки аналітичні рішення можуть бути отримані лише для найбільш простих приватних випадків геометрії приладу (плоского або циліндричного), у той час як реальна конструкція може мати суттєві відмінності.

Наведемо основні елементи аналітичної моделі. Суть проектування полягає у визначенні геометрії приладу (за умови заданих характеристик катода), що забезпечує необхідні статичні характеристики триода, головним чином анодно-сіткові. Звідси випливає основне рівняння аналітичної моделі – закон степеня 3/2 для триода:

$$I_k = G\sigma^{3/2}(U_c + DU_a)^{3/2}, \quad (3.9)$$

$\sigma = (1 + D + \frac{4}{3}D')^{-1}$ – гострота керування;

G – первеанс пучка в триоді;

D – проникність сітки (для плоскої моделі рідкої сітки

$$D = -\frac{\ln 2\pi R_c / a}{\frac{2\pi d_{ac}}{a}},$$

де R_c – радіус дроту сітки; a – крок намотки; d_{ac} – відстань анод-сітка).

У загальному вигляді можна представити:

$$D = -\frac{F_1(\alpha)}{\frac{2\pi d_{ac}}{a} - F_2(\alpha)}, \quad \alpha = \frac{2R_c}{a}; \quad (3.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(\alpha) = -\ln th \pi \alpha; \quad F_2 = \ln ch \pi \alpha; \\ F_1(\alpha) = -\ln \pi \alpha + \frac{1}{2} F_2(\alpha) - \frac{Z^2}{2 + 1,2Z^2}; \quad Z = \frac{1}{2}(\pi \alpha)^2; \\ F_2(\alpha) = \frac{GZ}{1 + Z - \frac{0,21Z^4}{\frac{Z}{4} + Z^3}}; \end{array} \right.$$

D' – обернена проникність сітки,

$$D' = \frac{F_1(\alpha)}{\frac{2\pi d_{CK}}{a} - F_2(\alpha)}; \quad (3.11)$$

d_{CK} – відстань сітка-катод.

Якщо сітка рідка, то рівняння (3.9) видозмінюється:

$$I_k = GU_{CO}^{3/2} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{U_{cm}}{U_{co}} \right)^2 \right],$$

де

$$U_{co} = \frac{U_c + DU_a}{1 + D + \frac{4}{3}D'};$$

$$U_{cm} = \frac{DmU_a}{1 + D + \frac{4}{3}D'};$$

$$Dm = D_0 \delta; \delta = 2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi R_c}{a} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{1}{D'} + 1 + \frac{d_{ck}}{dac} \right) e^{-\frac{2\pi d_{ck}}{a}} \right],$$

що справедливо для $\frac{d_{ck}}{a} > 0,5$ і $\frac{d_{ac}}{a} > 0,3$ (рис. 3.2).

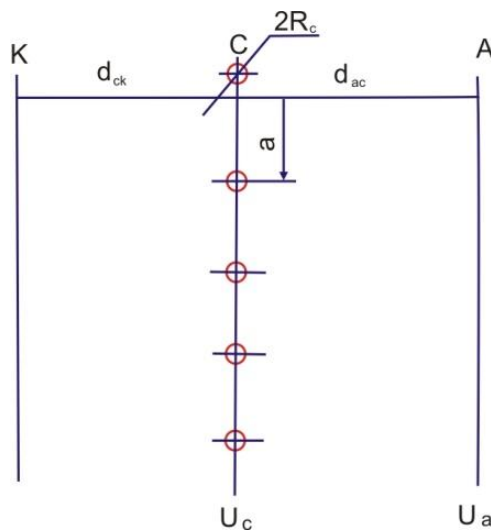


Рисунок 3.2 – Схема тріода

У режимі негативної сіткової напруги струм катода I_k приблизно дорівнює анодному струму I_a . Однак, якщо $U_c > 0$, необхідно враховувати режими повернення і прямого струмоперехоплення електронів і оперувати з коефіцієнтами

$$q = \frac{I_a}{I_k} = 1 - \frac{2\pi R_c}{a} \sqrt{\frac{1}{\sigma \left(1 + D \frac{U_a}{U_c} \right)}}$$

для режиму прямого струму перехоплення, коли $0 \leq U_c \leq U_a$,

та $q = \frac{4d_{ac}d_{ck}}{ad_{ak}} \sqrt{\frac{Ua}{Uc}}$ – для режиму повернення, якщо $Uc \geq Ua$.

Наведені співвідношення є схемою аналітичної моделі та не враховують наявність динаatronного ефекту, режиму великої щільності струму.

3.2.2 Імітаційна модель тріода

Імітаційна модель тріода – більш високий ступінь моделі. На відміну від аналітичної, вона дозволяє вивчити такі тонкі ефекти, як струмоперехоплення електронів сіткою, врахувати початкові швидкості електронів тощо.

Побудова імітаційної моделі будь-якого вакуумного приладу основана на розв'язанні рівняння руху (другого рівняння Ньютона):

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -|e| [-\vec{E}_0 + \vec{E}_{BЧ} + \vec{E}_{ПЗ} + [v\vec{B}]] , \quad (3.12)$$

де r – радіус-вектор траєкторії електрона;

– E_0 – вектор напруженості електростатичного поля;

– $\vec{E}_{BЧ}$ и $\vec{E}_{ПЗ}$ – вектори напруженостей електричної складової електромагнітного поля і поля просторового заряду;

– \vec{B} – вектор магнітної індукції. Для тріода $\vec{B} = 0$, у статичному режимі $-E_{BЧ} = 0$ та (3.12) матиме вигляд

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\left| \frac{e}{m} \right| \{-\vec{E}_0 + \vec{E}_{ПЗ}\}. \quad (3.13)$$

Отже, для визначення траєкторій руху електронів необхідно знати розподіл зовнішнього електростатичного поля і поля просторового заряду. Оскільки в тріодах у разі малої щільності струму дія сил просторового заряду незначна, припустимо, що $E_{ПЗ} = 0$ та з (3.13) перейдемо до

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = +\left| \frac{e}{m} \right| \vec{E}_0. \quad (3.14)$$

Істотним фактом є те, що для побудови імітаційної моделі необхідно знати розподіл електростатичного поля в тріоді. У загальному випадку – це складна самостійна задача, що полягає у розв'язанні рівняння Лапласа

$$\Delta U = 0,$$

$$\text{де} \quad \bar{E} = -\text{grad}U; \quad (3.15)$$

U – розподіл потенціалу із заданими граничними умовами: $U = 0$ – на катоді, $U=U_c$ – на границі сітки, $U=U_a$ – на аноді.

Часто немає необхідності шукати аналітичне розв’язання рівняння (3.15), оскільки легше визначати розподіл потенціалу окремо яким-небудь із відомих чисельних методів (методом R-функцій, варіаційним, методом Монте-Карло або сітковим методом та іншими, вводячи в пам’ять ЕОМ необхідні значення $U(P)$). Якщо ж можливо аналітичне розв’язання рівняння (3.15) як, наприклад, у разі плоского або циліндричного тріодов, то після підставлення його в (3.14) можна значно спростити розв’язання задачі.

Проте, як би не визначалася величина вектора \bar{E} , рівняння (3.14) доцільно представити в скалярній формі. Нехай $P = \bar{l}_1\xi + \bar{l}_2\eta$, де \bar{l}_1, \bar{l}_2 – орти, а ξ, η – деякі довільні координати. Тоді

$$\bar{E}_0 = \bar{l}_1 E_\xi + \bar{l}_2 E_\eta = - \left[\bar{l}_1 \frac{\partial U}{\partial \xi} + \bar{l}_2 \frac{\partial U}{\partial \eta} \right],$$

і, користуючись правилами векторної алгебри, отримаємо

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \left| \frac{e}{m} \right| E_\xi = - \left| \frac{e}{m} \right| \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= \left| \frac{e}{m} \right| E_\eta = - \left| \frac{e}{m} \right| \frac{\partial U}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

з граничними умовами на катоді $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0, \frac{d\xi}{dt} = \dot{\xi}_0, \frac{d\eta}{dt} = \dot{\eta}_0$. Найчастіше як початкові швидкості можна брати їхні теплові величини $\sqrt{\frac{KT}{m}}$. Рівняння (3.16) описують рух кожної окремої частки, тому за своєю природою мають описуватися змінними Лагранжа.

Для чисельної реалізації доцільно перетворити (3.16) до системи чотирьох рівнянь першого порядку шляхів заміни змінних

$$\frac{d\xi}{dt} = F; \quad \frac{d\eta}{dt} = Q;$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= F \\ \frac{dF}{dt} &= \left| \frac{e}{m} \right| \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ \frac{dQ}{dt} &= \left| \frac{e}{m} \right| \frac{\partial U}{\partial \eta} \\ \frac{d\eta}{dt} &= Q \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Система вирішується з урахуванням таких умов: якщо електрон потрапляє в область сітки, яка визначається координатами (ξ_c, η_c) , він виключається з подальшого розрахунку; рахунок ведеться до потрапляння електрона на анод (ξ_a, η_a) , величина струму визначається як сума частинок, що потрапили на електрод за певний інтервал часу:

$$I_c = \frac{nq_c}{\Delta t}; I_a = \frac{mq_a}{\Delta t} \quad (3.18)$$

Величина кожного заряду, що приписується частинці, визначається, як правило, з емісійних характеристик катода. Так, якщо щільність емісії

$j_0 = \frac{\sum q_n \Delta t}{S_0}$, то величина заряду $q = \frac{j_0 S_0}{n \Delta t}$, де n – число частинок, що підлягають аналізу. Для усереднення значень інтервал необхідно брати значно більший, ніж крок інтегрування.

Для спрощення розрахунків і отримання універсальних траєкторій і струмів доцільно віднормувати величини в (3.17). Наприклад, можна ввести

$V_0 = \sqrt{2 \left| \frac{e}{m} \right| U_a}$ – швидкість електрона в площині анода,

$$\frac{\xi}{d_{ak}} = x; \frac{\eta}{d_{ak}} = y; \theta = \frac{t}{t_n} = \frac{tV_0}{d_{ak}};$$

$$\frac{U}{U_a} = V, V \in [0,1]; \frac{F}{V_0} = F_1; \frac{Q_1}{V_0} = Q_1.$$

Тоді

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{d\theta} &= \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{dx}{d\theta} &= F_1 \\ \frac{dQ_1}{d\theta} &= \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{dy}{d\theta} &= Q_1 \end{aligned} \right\}. \quad (3.19)$$

3.2.3 Модельний експеримент. Моделювання тріодної електронно-оптичної системи в середовищі MathCad

Постановка задачі: побудувати картину розподілу потенціалів тріодної електронно-оптичної системи (ЕОС). Вибрати діапазони побудови розподілу потенціалу таким чином: по y – близькі до діапазону від 0 до $3d$, по x – близькі до діапазону від катода до анода. Водночас вважати, що відстань між сітками $d = 3 \text{ см}$, відстань між сіткою і катодом $d_{ck} = 4 \text{ см}$, відстань між анодом і сіткою $d_{ac} = 4 \text{ см}$, радіус сітки $R_c = 0.1 \text{ см}$, напруга на аноді $U_a = 20 \text{ В}$, напруга на катоді $U_k = 0 \text{ В}$, напруга на сітці $U_c = -1 \text{ В}$.

Методика розрахунку

Для розрахунку розподілу потенціалу в тріодній системі електродів (рис. 3.3) застосовується метод конформних відображень.

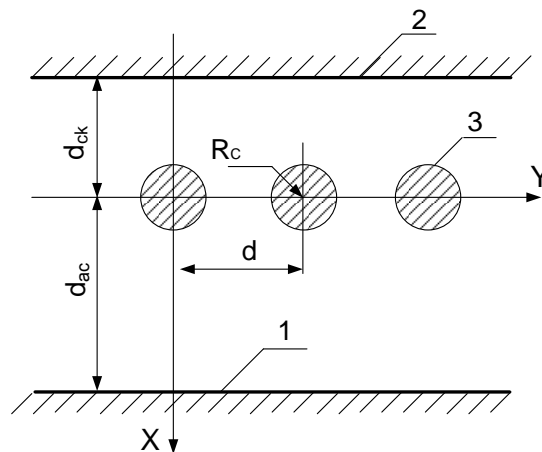


Рисунок 3.3 – Конфігурація тріодної системи ЕОС:

1 – анод; 2 – катод; 3 – сітка

Вираз для функції розподілу потенціалу в тріодній ЕОС має вигляд:

$$U(x, y) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot \ln \left(\exp \left(\frac{4 \cdot \pi \cdot x}{d} \right) + 1 - 2 \cdot \exp \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{d} \right) \cdot \cos \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot y}{d} \right) \right). \quad (3.20)$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів C_1, C_2, C_3 можна використовувати граничні умови

$$\begin{aligned} U(d_{ck}, 0) &= U_k \\ U(0, R_c) &= U_c \\ U(d_{ac}, 0) &= U_a \end{aligned} \quad (3.21)$$

Підставляючи їх у (3.20), отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) щодо шуканих коефіцієнтів. Розв'язуючи цю систему, знаходимо значення невідомих коефіцієнтів.

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 \cdot d_{ck} + C_3 \cdot \ln\left(\exp\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot d_{ck}}{d}\right) + 1 - 2 \cdot \exp\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot d_{ck}}{d}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot 0}{d}\right)\right) &= U_k \\ C_1 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cdot \ln\left(\exp\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot 0}{d}\right) + 1 - 2 \cdot \exp\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot 0}{d}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot R_c}{d}\right)\right) &= U_c \\ C_1 + C_2 \cdot d_{ac} + C_3 \cdot \ln\left(\exp\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot d_{ac}}{d}\right) + 1 - 2 \cdot \exp\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot d_{ac}}{d}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot 0}{d}\right)\right) &= U_a \end{aligned} \quad (3.22)$$

Завантажуємо MathCAD. Далі вводимо значення змінних (рис. 3.4).

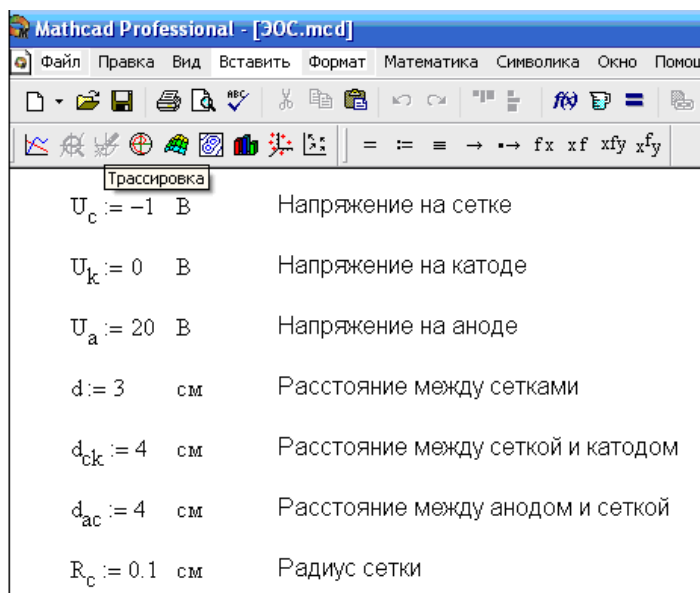



Рисунок 3.4 – Рабочая область після введення змінних

Наступним кроком необхідно задати та розв'язати систему рівнянь у MathCad. Для розв'язання СЛАР можна використовувати загальноприйняті математичні методи: метод Крамера, матричний метод тощо. Матричний метод

розв'язання системи лінійних рівнянь реалізований у функції *lsolve*. Загальний вигляд функції: *lsolve(a, b)*, де *a* – матриця коефіцієнтів при невідомих, *b* – вектор вільних членів.

У функції *lsolve* запрограмований чисельний метод розкладання, заснований на алгоритмі послідовних виключень Гаусса. Він полягає в перетворенні матриці *A* лінійної системи до трикутного вигляду, тобто до форми, коли всі елементи, нижчі за головну діагональ матриці, є нульовими. Точніше початкова СЛАР $Ax = b$ замінюється еквівалентною системою з іншою матрицею A^* та іншим вектором правих частин b^* , але має те саме розв'язання, що й вихідна система. Дуже важливо помітити, що результат, який видається методом Гаусса, є точним (звичайно, з поправкою на неминуче присутні помилки чисельного округлення, які, у разі добре обумовленої матриці *A*, є незначними). Отже, на противагу застосуванню обчислювального блоку Given / Find (в основі якого лежить наближений ітераційний алгоритм), функція *lsolve* не потребує присвоєння початкових значень вектора *x*.

Спочатку вводиться матриця коефіцієнтів перед невідомими в рівнянні (3.22), у нашому випадку невідомими є C_1, C_2, C_3 .

У меню *Вигляд* → *Інструментальні панелі* вибираємо панель *Матриця*, натискаємо на піктограмі . З'являється вікно (рис. 3.5), у якому необхідно вибрати кількість стовпців і рядків матриці.

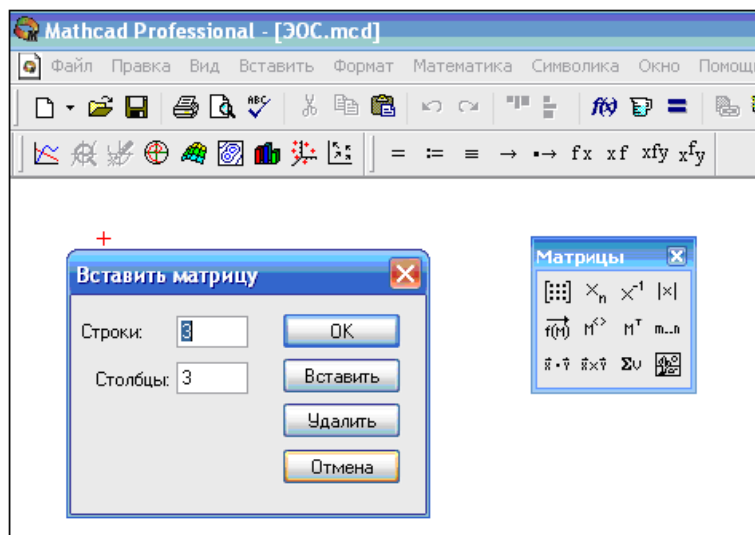


Рисунок 3.5 – Задання кількості рядків і стовпців матриці

Аналогічно вводиться вектор вільних членів рівняння. Отже, матриці матимуть вигляд, показаний на рис. 3.6.

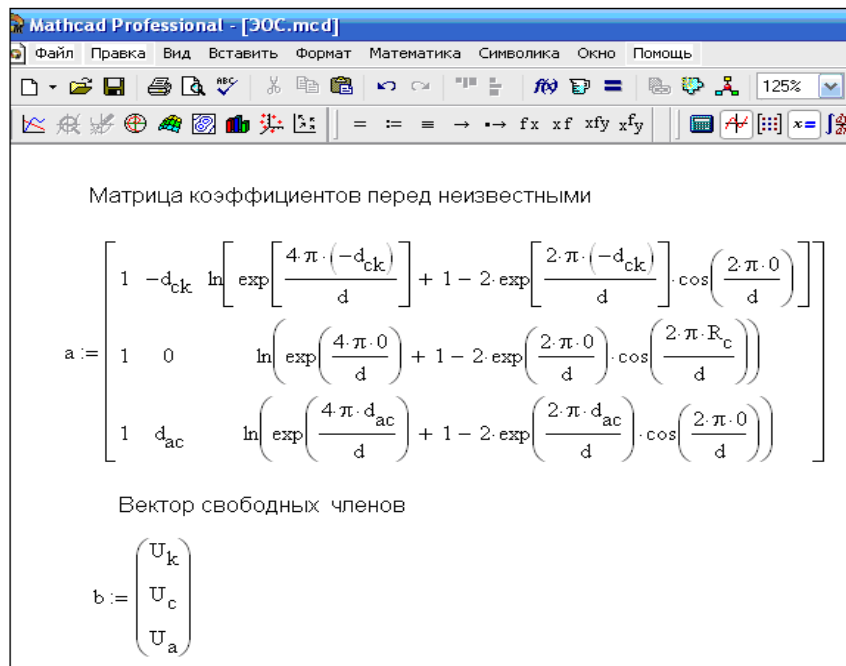



Рисунок 3.6 – Вигляд робочої області із заданими матрицями

Потім розв’язуємо СЛАР за допомогою вбудованої функції MathCAD Isolve. Щоб знайти потрібну функцію в MathCAD, необхідно натиснути на піктограму , й у вікні (рис. 3.7) вибрати потрібну опцію.

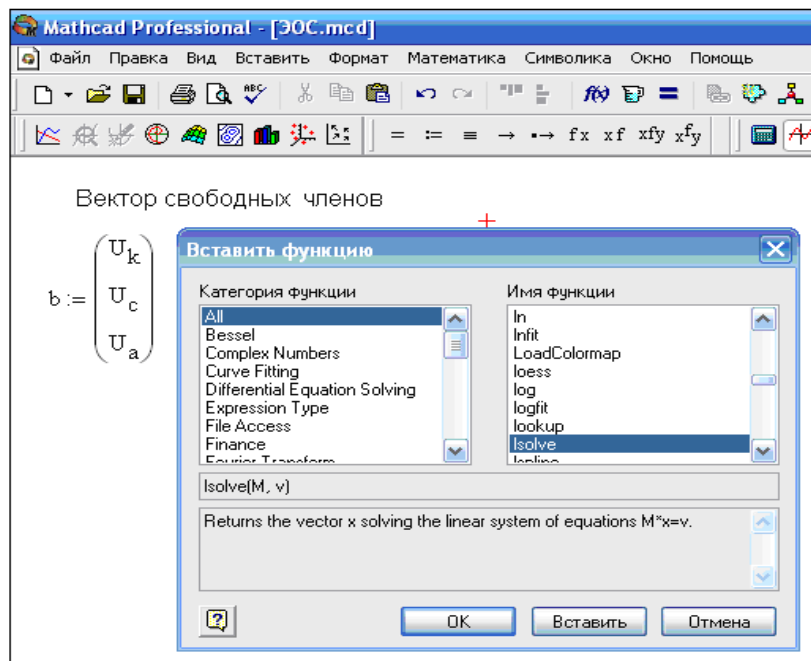


Рисунок 3.7 – Вікно із вбудованими функціями MathCAD

Після цього знаходимо значення невідомих у рівнянні (3.22) і робимо відповідне перепозначення змінних (рис. 3.9).

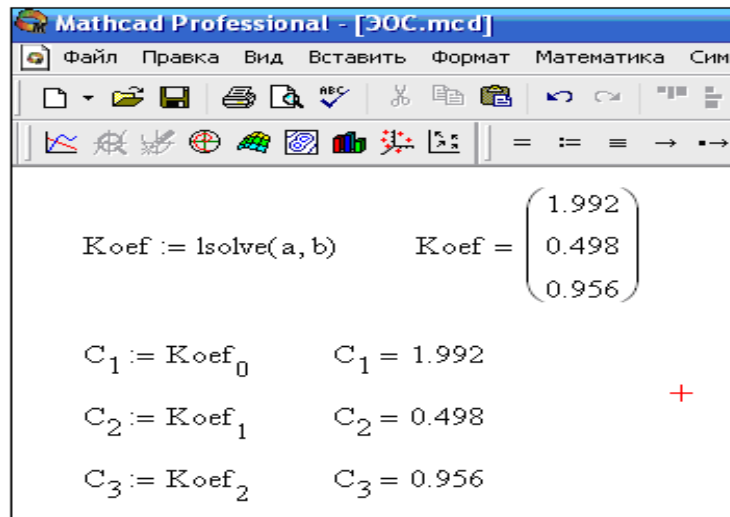


Рисунок 3.8 – Вікно програми MathCAD

Далі будемо графік розподілу потенціалу в тріодній ЕОС, використовуючи рівняння (3.20) і вбудовану функцію MathCAD – CreateMesh ($f, xlow, xhigh, ylow, yhigh, xn, yn$), де f – функція для побудови графіка, $xlow$ і $xhigh$, $ylow$ і $yhigh$ – діапазони зміни x і y , xn і yn – кількість точок побудови графіка по x і y . Поле для побудови графіка поверхні виводиться натисканням комбінації клавіш $ctrl + 2$, після чого внизу задається функція для побудови.

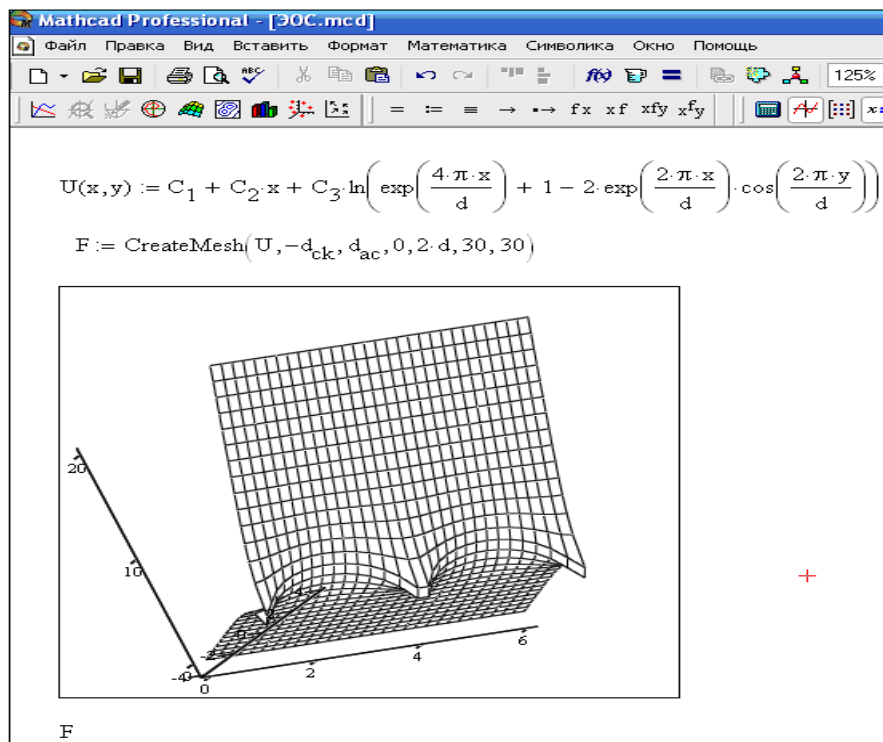


Рисунок 3.9 – Графік розподілу потенціалу в тріодній ЕОС

4 МОДЕЛЮВАННЯ НАПІВПРОВІДНИКОВИХ ПРИЛАДІВ

Проектування напівпровідникових приладів набуває все більшого значення завдяки їхньому широкому використанню в радіоелектронній апаратурі та застосуванню як активних елементів інтегральних схем (ІС). У надвеликих інтегральних схемах одночасно розміщуються декілька десятків тисяч компонентів, з них – тисячі транзисторів і діодів. Створити нові ІС без машинного проектування практично неможливо.

Подібно до того, як для вакуумних приладів моделювання зводиться до розв'язання рівнянь Ньютона (рівняння руху електронів) і, за необхідності, до розв'язання рівняння збудження, у моделюванні всіх типів напівпровідникових приладів також використовуються загальні рівняння. До них належать:

1) рівняння безперервності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \bar{J}; \quad (4.1)$$

2) рівняння Пуассона

$$\operatorname{div} \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}; \quad (4.2)$$

або

$$\Delta U = \frac{\rho}{\varepsilon};$$

3) рівняння переносу, яке показує, що струм у напівпровіднику – це результат дрейфу рухливих носіїв в електричному полі з напруженістю \bar{E} і дифузії цих носіїв за наявності градієнта концентрації:

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \bar{J}_n + \bar{J}_p; \\ \bar{J}_n &= q(n\mu_n \bar{E} + D_n \operatorname{grad} n); \\ \bar{J}_p &= q(p\mu_p \bar{E} + D_p \operatorname{grad} p); \end{aligned} \quad (4.3)$$

де ρ – об'ємна щільність заряду;

q – заряд електрона;

\bar{J}_n і \bar{J}_p – електронна й діркова складові щільності струму \bar{J} ;

n і p – концентрації;

D_n і D_p – коефіцієнти дифузії електронів (індекс n) і дірок (p).

Перший доданок в (4.3) характеризує дрейфову, а другий – дифузійну складову струму.

Слід зазначити, що рівняння (4.1), яке визначає взаємозв'язок тимчасової зміни щільності заряду і просторової зміни щільності конвекційного струму, не враховує таких специфічних для напівпровідника процесів, як рекомбінація носіїв зарядів.

Швидкість рекомбінації визначається наявністю надлишкової концентрації носіїв: $(p - p_0)$ – для дірок і $(n - n_0)$ – для електронів (тут n_0 і p_0 – рівноважні концентрації). Якщо припустити, що всі атоми домішок іонізовані та відомі концентрації N_d і N_a донорних і акцепторних домішок як функції координат, то, використовуючи вирази для об'ємної щільності заряду $\rho = |e|(p - n + N_d - N_a)$, можна переписати (4.1) у вигляді двох рівнянь безперервності щодо електронів і дірок відповідно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{1}{q} \operatorname{div} \bar{J}_n + \frac{(n - n_0)}{\tau_n}; \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{1}{q} \operatorname{div} \bar{J}_p + \frac{(p - p_0)}{\tau_p}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

де τ_n та τ_p – часи життя електронів і дірок.

Крім рівнянь (4.2)–(4.4), необхідно задати граничні умови на поверхні структури $\bar{E} \bar{e}_n = \bar{J}_p \bar{e}_n = \bar{J}_n \bar{e}_n = 0$ (\bar{e}_n – нормаль до поверхні), значення потенціалів на зовнішніх виводах і в місцях приєднання зовнішніх виводів вважати рівними нулю.

Система вихідних рівнянь (4.1)–(4.4) потребує спрощення для кожного з типів напівпровідникового приладу. Як правило, виходячи з фізичних передумов, для кожного типу напівпровідникового приладу будується еквівалентна схема, параметри якої розраховуються з основних рівнянь. Закономірність такої заміни пов'язана з малими геометричними розмірами приладів порівняно з довжиною хвилі та з можливостями складання загальної схематичної моделі ІС.

Різноманіття типів напівпровідникових приладів не дозволяє привести всі (або навіть найважливіші) їхні схеми й моделі. Тому обмежимося лише

деякими з них: моделями напівпровідникового діода, біполярного транзистора та НВЧ-транзистора.

4.1 Модель напівпровідникового діода

Побудову найпростішої моделі напівпровідникового діода наведемо для одновимірного випадку, вважаючи, що всі процеси протікають лише в напрямку осі x , що є нормаллю до площини розділу p - і n -областей. Складові векторів мають вигляд $\vec{E} = \bar{x}_0 E$, $\vec{\tau} = \bar{x}_0 \tau$. Уявімо діод у вигляді трьох секцій (рис. 4.1): якщо $x < x_1$ – p -область; в інтервалі $x_1 < x < x_2$ – збіднена рухливими носіями область p - n -переходу (інакше вона називається областю просторового заряду); якщо $x > x_2$ – n -область. Поверхні x_1 та x_2 характеризують границю збідненої області в p - і n -напівпровіднику відповідно.

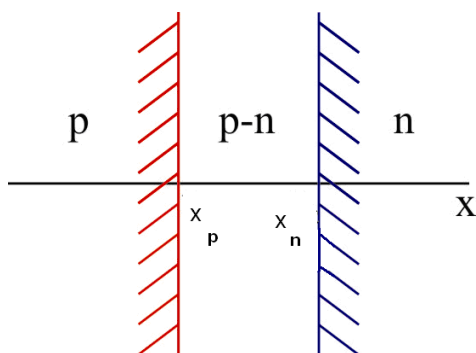


Рисунок 4.1 – Схема напівпровідникового діода

Для одновимірної моделі вихідні рівняння приймають такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{\rho}{\varepsilon}; \\ J_{n=q} &= n\mu_n E + D_n \frac{\partial n}{\partial x}; \\ J_{p=q} &= p\mu_p E + D_p \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{(p - p_0)}{\tau_p} - \frac{1}{q} \frac{\partial J_p}{\partial x}; \\ \frac{\partial n}{\partial x} &= -\frac{(n - n_0)}{\tau_n} + \frac{1}{q} \frac{\partial J_n}{\partial x}; \end{aligned} \right\}$$

Спрощення цієї системи рівнянь пов'язані з низкою фізичних припущень, оснований на експериментальному вивченні властивостей напівпровідників. Як правило, p -область легована значно сильніше, ніж n -область ($P_0 \gg n_0$), що дозволяє виключити з розгляду друге і п'яте рівняння системи. Крім того, у збідненій області дрейфовий і дифузійний струми дірок мають приблизно однакову величину, тобто з третього рівняння випливає, що $\tau_p \approx 0$.

$$P\mu_p E \approx D_p \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (4.5)$$

З урахуванням співвідношення Ейнштейна $D_p = \frac{KT}{q} \mu_p = \varphi_T \mu_p$

$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ співвідношення (4.5) набуває вигляду

$$\mu_p \varphi_T \frac{\partial p}{\partial x} = -p \mu_p \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (4.6)$$

Інтегруючи (4.6), з урахуванням умов на границях із координатами x_p, x_n отримують:

$$\varphi_k = \varphi_n - \varphi_k = \varphi_T \ln \frac{P_{p_0}}{P_{n_0}}. \quad (4.7)$$

Отже, відповідно до (4.7) у рівноважному стані концентрація одностипних носіїв по обидві сторони переходу пов'язані співвідношеннями:

$$\varphi_k = \varphi_T \ln \frac{P_{p_0}}{P_{n_0}} \text{ або } \varphi_k = \varphi_T \ln \frac{n_{n_0}}{n_{p_0}}. \quad (4.8)$$

Підставляючи замість контактної різниці потенціалів значення висоти потенційного бар'єра ($\varphi_k \mp U$), яке відповідає порушенню рівноваги, отримуємо

$$(\varphi_k \mp U) = \varphi_T \ln \frac{P_{p_0}}{P_n}. \quad (4.9)$$

Тут знак «мінус» відповідає прямому включенню р-п-переходу;

p_n – нерівноважна концентрація дірок, інжекттованих в n -область, на границі n -області за умови $x = x_n$;

φ_T – потенціал переходу в разі температури T .

Розв'язання (4.3) і (4.4) щодо P_{n_0} і p_n дає такі результати:

$$p_n = P_{n_0} = p_{p_0} e^{\frac{\varphi_k}{\varphi_T}}, \quad \text{якщо } U=0;$$

$$p_n = p_{p_0} e^{\frac{\varphi_k \pm U}{\varphi_T}} = p_{p_0} e^{-\frac{\varphi_k}{\varphi_T}} e^{\pm \frac{U}{\varphi_T}},$$

звідки:

$$P_n = P_{n_0} e^{\frac{U}{\varphi_T}}. \quad (4.10)$$

Розв'язання рівняння (4.8) для концентрації електронів дає співвідношення нерівноважної концентрації електронів, інжекттованих у p -область, на границі $x = -x_p$:

$$n_p = n_{p_0} e^{\frac{U}{\varphi_T}}. \quad (4.11)$$

Значення закону зміни концентрації дозволяє визначити статичну вольт-амперну характеристику діода. Для цього припустимо, що n -область електрично нейтральна, тобто струм у ній визначається тільки дифузійними процесами. Тоді $J_p = -|e|D_p \frac{\partial P}{\partial x}$, враховуючи, що $\partial P / \partial t = 0$, отримуємо

$$D_p \frac{d^2 P}{dx^2} - \frac{(P - P_{n0})}{\tau_p} = 0.$$

Розв'язання цього рівняння, з урахуванням (4.10) і за умови виконання граничних умов ($x \rightarrow \infty, P \rightarrow P_{n0}; x_n = 0$), має вигляд

$$p(x) = p_{n0} (e^{\frac{U}{\varphi_T}} - 1) e^{-\frac{x}{L_p}}, \quad (4.12)$$

де $L_p = \sqrt{D_p \tau_p}$ – дифузійна довжина хвилі в n -області.

Визначаючи з (4.12) похідну dp/dx і підставляючи її в рівняння для струму, знаходимо вираз для статичного струму діода

$$I_\partial = I_T \left[e^{\frac{U}{\phi_T}} - 1 \right]. \quad (4.13)$$

Тут враховано, що струм діода однаковий для площі S_0 за умови будь-якого x ; а $I_T = qD_p p_{n0} S_0 / L_p$ – тепловий струм.

Цікаво відзначити, що, з огляду на симетрії рівнянь для дірок і електронів, аналогічну залежність можна було б отримати, якщо розглядати тільки струм інжекції електронів n в p -область, але $I_T = qD_n n_{p0} S_0 / L_n$. Враховуючи також, що сумарний струм діода складається з суперпозиції діркової та електронної складових, вигляд результуючої залежності струму діода зберігається, тільки

$$I_T = qS_0 \left[\frac{D_p p_{n0}}{L_p} + \frac{D_n n_{p0}}{L_n} \right]. \quad (4.14)$$

Отже, рівняння (4.13) і (4.14) становлять математичну модель діода в статичному режимі.

Для побудови динамічної характеристики діода необхідно врахувати інерційні властивості p - n -переходу, обумовлені протіканням струму, що забезпечує зміна неосновних носіїв у базі діода, і струму, що забезпечує зміна об'ємної щільності просторового заряду іонізованих атомів домішок у збіднених областях.

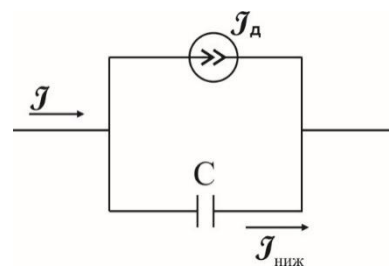


Рисунок 4.2 – Спрощена еквівалентна схема напівпровідникового діода

На еквівалентній схемі діода ці процеси описуються введенням ємності р-n-переходу (рис. 4.2).

Не вдаючись у подробиці визначення виразу для ємності C , відзначимо, що ця ємність є паралельним включенням двох складових: дифузійної ємності

$$C_{\text{диф}} = \frac{\tau_p}{\varphi_T} (I_\delta - I_T), \quad (4.15)$$

що характеризує зміну заряду неосновних носіїв при варіації потенціалу ($C_{\text{диф}} = dQ_{\text{инж}} / dU$), і бар'єрної ємності $C_\delta = dQ_n / dU$, яка характеризує зміну об'ємної щільності просторового заряду Q_n у збідненій області. Очевидно, що величина C_δ залежить від виду переходу (різкого або плавного). Зокрема для різкого переходу [1]

$$C_B = C_{B0} [\varphi_0 / (\varphi_0 - U)]^{1/2}; C_{B0} = S_0 \sqrt{0,58qN_\delta / \varphi_0}, \quad (4.16)$$

для плавного лінійного переходу ($N_\delta = ax$)

$$C_B = C_{B0} [\varphi_0 / (\varphi_0 - U)]^{1/3}; C_{B0} = S_0 \sqrt{\frac{\varepsilon^2 qa}{12\varphi_0}}. \quad (4.17)$$

Тут S_0 – площа поперечного перерізу р-n-переходу. Загальна ємність $C = C_{\text{диф}} + C_B$, а загальний струм переходу

$$I = I_\delta + C \frac{dU}{dt}. \quad (4.18)$$

Ідеалізовані вольт-амперні характеристики діода будуть відрізнятися від реальних, оскільки в отриманні формул не враховувалися деякі фізичні ефекти (наприклад, генерація і рекомбінація неосновних носіїв у збідненій області, наявність струмів витоків, інерційність установалення прямого опору діода в разі його включення, не враховано явища пробою р-n-переходу тощо), проте загалом наведена сукупність рівнянь правильно відображає хід фізичних залежностей.

4.2 Модель біполярного транзистора

Біполярний транзистор є сукупністю двох р-п-переходів, виконаних в одному кристалі напівпровідника й розділених тонкою базою. Фізико-топологічні моделі транзистора найбільш точні та універсальні. Залежно від того, за скількома координатами розглядаються фізичні процеси, моделі поділяються на одно-, дво- і тривимірні. Раніше було показано, що фізичні процеси в напівпровідниках описуються системою диференціальних рівнянь у приватних похідних, що містить рівняння безперервності для електронів і дірок та рівняння Пуассона:

$$\left. \begin{aligned} \partial p / \partial t &= \operatorname{div}(\mu_p p E + D_p \operatorname{grad} p) + g_p, \\ \partial n / \partial t &= \operatorname{div}(\mu_n n E + D_n \operatorname{grad} n) + g_n, \\ \operatorname{div} E &= -q(q - n + N_d - N_a)(\varepsilon \varepsilon_0), \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

де μ_p і μ_n – рухливості дірок і електронів;

D_p і D_n – коефіцієнти дифузії дірок і електронів;

g_p і g_n – швидкості процесів генерації-рекомбінації дірок і електронів;

q – заряд електрона;

N_d і N_a – концентрації донорних і акцепторних легуючих домішок;

ε – відносна діелектрична проникність напівпровідника;

ε_0 – діелектрична постійна вакууму.

Невідомі функції цієї системи – концентрація дірок і електронів $p(x, y, z, t)$ і $n(x, y, z, t)$ і напруженість електричного поля $E(x, y, z, t)$. Замість E може фігурувати електричний потенціал $\varphi(x, y, z, t)$, оскільки $E = -\operatorname{grad} \varphi$. Крайові умови складаються з початкових умов, що характеризують розподіл залежних змінних за об'ємом кристала в початковий момент часу, і граничних, які задають значення залежних змінних на границях даної напівпровідникової області. Геометричні розміри і конфігурація дифузійних областей і омичних контактів транзистора також враховуються граничними умовами. Параметрами цієї моделі є основні електрофізичні параметри напівпровідника.

Диференціальні рівняння в приватних похідних можна розв'язувати методами кінцевих різниць або кінцевих елементів. За допомогою фізико-топологічної моделі можна з високим ступенем точності визначити основні статичні та динамічні характеристики транзистора. Модель не враховує впливу магнітного поля та можливих неоднорідностей напівпровідникового матеріалу,

що несуттєво для моделювання реальних транзисторів, оскільки більше значення має точне визначення параметрів моделі. Застосування подібних моделей транзистора в задачах аналізу електронних схем практично не реалізується. Вони використовуються тільки для ідентифікації параметрів більш простих схемних моделей транзистора.

Схемні моделі транзистора основані, як правило, на істотних спрощеннях порівняно з фізикотопологічними моделями, тому дуже важливо чітко уявляти сферу застосування кожної такої моделі.

Найбільш поширені моделі отримані в одновимірному наближенні для сплавного бездрейфового транзистора, якому властива симетрична структура щодо бази – приблизно однакові площі емітерного і колекторного переходів. Транзистори цього типу працюють за умови низьких рівней інжекції, мають приблизно рівні концентрації домішок у емітера і колектора, основним механізмом переміщення носіїв через базу є дифузія, дрейфом носіїв нехтують. Розглянемо моделі – багатосекційну Лінвілла і програми ПА-1 (до цього ж класу належить відома модель Еберса–Молла), отримані для цих умов і основані на одновимірному поданні процесів, що відбуваються в транзисторі.

Модель Лінвілла характеризується тим, що основні рівняння в приватних похідних (4.19) замінюються системою ЗДР, які виходять наближеною заміною просторових похідних різницевиими формулами. Заміна рівносильна поділу одновимірної p-n-p (або n-p-n)-структури транзистора на ряд секцій кінцевих розмірів (рис. 4.3, а, б).

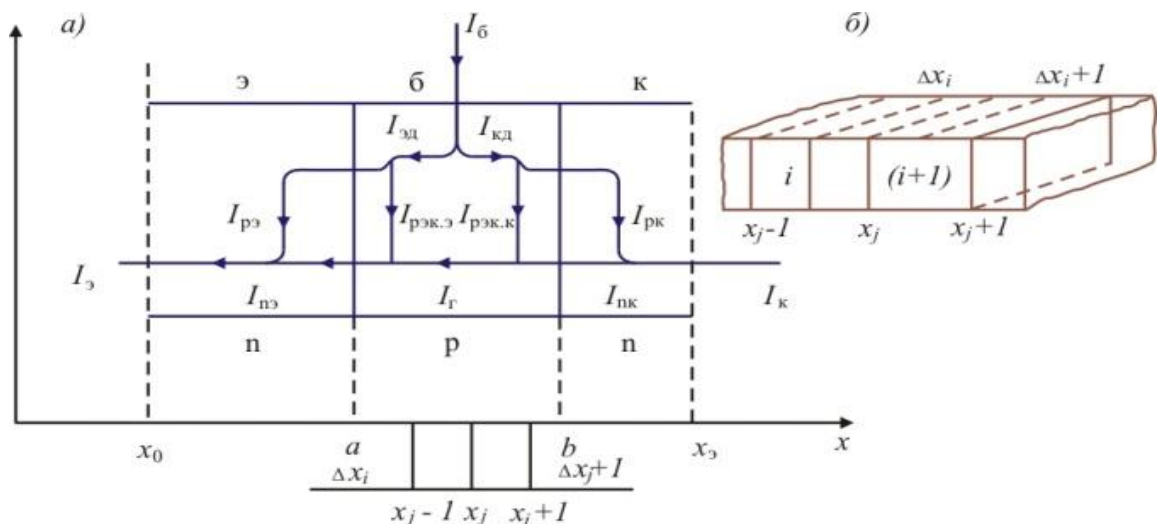


Рисунок 4.3 – Розподіл струмів у базі n-p-n-транзистора (а) і елементарна ділянка бази (б) в одновимірному наближенні

У межах кожної секції виходить система ЗДР, яку можна зіставити з формальною еквівалентною схемою (рис. 4.4).

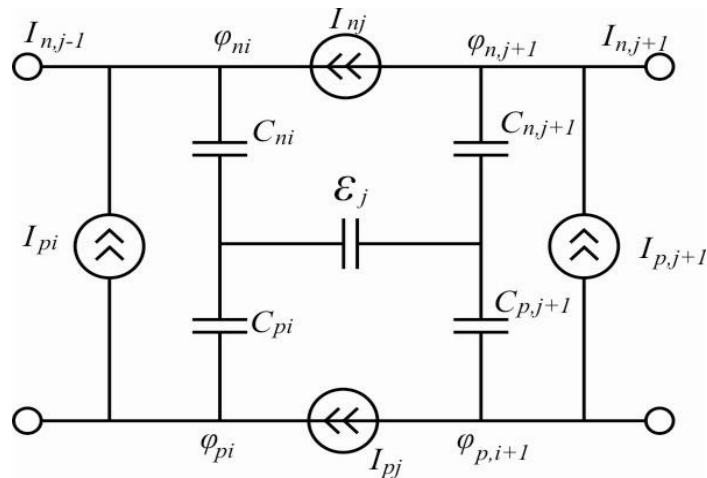


Рисунок 4.4 – Еквівалентна схема однієї секції моделі Лінвілла

Для отримання цієї схеми в (4.19) здійснюється перехід від концентрацій до потенціалів за формулами:

$$p = n_i \exp((\varphi_p - \Psi) / \varphi_T) \quad \text{і} \quad n = n_i \exp((\Psi - \varphi_n) / \varphi_T),$$

де n_i – власна концентрація;

φ_p і φ_n – квазіпотенціали Фермі відповідно для дірок і електронів;

W – електростатичний потенціал;

$\varphi_T = kT / q$ – температурний потенціал;

K – постійна Больцмана;

T – абсолютна температура.

Для кожної i -ї елементарної області (рис. 4.3, б) прийняті відповідні усереднені значення фізичних параметрів (N_i , μ_i тощо). Невідомими функціями в цій моделі є квазіпотенціали Фермі $\varphi_{pi}, \varphi_{ni}$ і електростатичний потенціал Ψ_i . Елементи еквівалентної схеми відповідають певним членам у перетворених рівняннях (4.19) і мають відомий фізичний зміст. Елемент I_p і відображає рекомбінацію електронів з дірками в i -й секції, C_{ni} – накопичення носіїв у ній, I_{nj} дифузію і дрейф носіїв з i -ї секції в $(i+1)$ -ю, C_j – ємність струму зміщення.

Аналогічні елементи з індексом p відображають ті самі процеси, пов'язані з дірками в даній ділянці напівпровідника. Із секцій можна скласти ланцюг, що є одновимірною розподіленою моделлю транзистора. Кількість секцій вибирається, виходячи з градієнта концентрації носіїв у конкретних ділянках кристала. Области з великим градієнтом концентрації (наприклад, область переходу) представлені великою кількістю секцій. Параметри цієї моделі – основні електрофізичні параметри напівпровідника.

Важлива перевага розподіленої моделі Лінвілла – можливість досить просто врахувати зовнішні впливи (фотоелектричні явища, вплив електромагнітних полів, дії ядерної та космічної радіації тощо) шляхом додавання генераторів струму, що враховують відповідні явища.

Модель програми ПА-1 виходить у разі, якщо область бази уявити однією секцією моделі Лінвілла і знехтувати дрейфовими складовими струмів переходу. Для статичного режиму отримаємо розподіл струмів у базі (рис. 4.3, *a*).

Тут I_e, I_b, I_k – струми через виводи емітера, бази і колектора. Електрони, що інжектуються емітером і колектором у базу, частково рекомбінуються в ній, утворюючи рекомбінаційні струми, а частково досягають протилежного переходу. Тут I_{ne}, I_{nk} – загальний електричний струм відповідно через емітерний і колекторний переходи. Рекомбінація відбувається в усій області бази. Параметри і змінні усереднюються в межах секції, тому рекомбінаційний струм представляється у вигляді двох зосереджених складових $I_{рек.е}$ і $I_{рек.к}$. Струм переносу $I_{\Gamma} = I_{ne} - I_{рек.е}$. Діркова складова емітерного дифузійного струму I_{pe} не створює перенесення носіїв між емітером і колектором, оскільки для основних носіїв у базі p -типу переходи створюють потенційний бар'єр, що не пропускає дірки. Тому струм I_{pe} повністю входить у струм бази.

Суму рекомбінаційного $I_{рек.е}$ і діркового струму I_{pe} позначимо $I_{ед}$. Аналогічно, $I_{кд}$ – сума рекомбінаційного $I_{рек.к}$ і діркового струму $I_{рк}$ колекторного переходу в зоні бази. Задачу отримання математичної моделі транзистора можна сформулювати таким чином: необхідно пов'язати струми $I_{\Gamma}, I_{ед}$ з напругами (щодо бази) на емітерному $U_{eб}$ і колекторному $U_{кб}$ переходах. Представивши ці струми як залежні джерела, можна від розподілу струмів у базі перейти до початкового варіанта еквівалентної схеми. Доповнивши статичну схему ємностями емітерного C_e і колекторного C_k переходів, опорами витоку переходів R_{ye}, R_{yk} і об'ємними опорами бази r_b і колектора r_k , отримаємо повну еквівалентну схему транзистора (рис. 4.5).

Залежності I_T , $I_{ед}$ і $I_{кд}$ від $U_{еб}$ і $U_{кб}$ для статичного режиму визначаються шляхом аналітичного розв'язання основних рівнянь (4.19) у разі одновимірного наближення й усереднених значень параметрів напівпровідника. Ці параметри, крім перелічених вище електрофізичних, містять площі емітерного S_E і колекторного S_K переходів. Остаточні вирази для джерел струму зображені на рис. 4.5:

$$I_{ед} = I_{TE} \exp(U_{ЕБ}/m\phi_{TE} - 1), \quad I_{кд} = I_{TK} \exp(U_{KB} / m\phi_{TK} - 1),$$

$$I_T = \beta I_{ед} - \beta_I I_{кд},$$

де I_{TE} , I_{TK} – відповідно теплові струми емітерного і колекторного переходів;

$m\phi_{TE}$, $m\phi_{TK}$ – температурні потенціали переходів;

β , β_I – коефіцієнти передачі струму бази відповідно в нормальному активному і в інверсному активному режимах.

Перелічені параметри називаються електричними параметрами моделі транзистора.

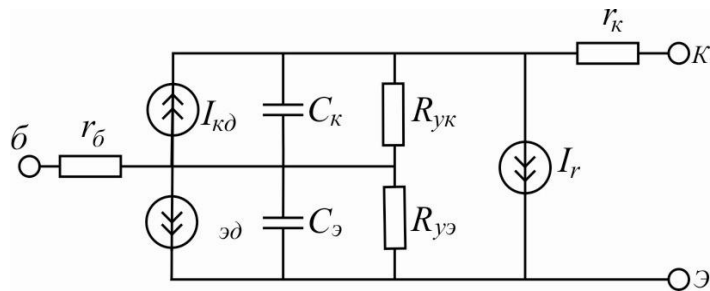


Рисунок 4.5 – Еквівалентна схема моделі транзистора в програмі ПА-1

Інерційні властивості р-п-переходу пов'язані з тим, що в перехідних процесах, крім струму $I_{ед}(I_{кд})$, через перехід повинен протікати струм, що забезпечує зміну заряду неосновних носіїв у базі й обумовлюється членом dn/dt у рівняннях безперервності, і струм, який забезпечує зміну просторового заряду іонізованих атомів домішок в області просторового заряду.

Першу складову можна відтворити за допомогою дифузійної ємності $C_{диф}$, другу – бар'єрної ємності $C_б$. Аналітичне розв'язання рівняння безперервності в одновимірному наближенні дозволяє визначити $C_{диф}$, а аналітичне розв'язання рівняння Пуассона – $C_б$. Ці вирази для моделі транзистора на рис. 4.5 мають вигляд

$$C_{\bar{b}i} = C_{\bar{b}O_i} [\varphi_0 / (\varphi_0 - U_{i\bar{b}})]^{n_i};$$

$$C_{\text{ДИФ}i} = \tau_i (I_{\text{д}i} + I_{\text{Т}i}) / m\varphi_{\text{Т}i};$$

$$C_i = C_{\text{ДИФ}i} + C_{\bar{b}i},$$

де $I \in \{\bar{э}, \kappa\}$ – індекс;

$C_{\bar{b}i}$, – значення бар’єрної ємності за умови $U_{i\bar{b}} = 0$;

φ_0 – контактна різниця потенціалів;

n_i – коефіцієнт ($n_i = 0,5$ для плавних переходів, $n_i = 1/3$ для різких переходів);

τ_i – постійна часу переходу.

Ці параметри доповнюють перелік електричних параметрів для моделі на рис. 4.5. Еквівалентна схема моделі транзистора Еберса–Молла отримана аналогічно, на основі суперпозиції струмів для нормального й інверсного транзисторів, що працюють в активному режимі. Моделі ПА-1 і Еберса–Молла забезпечують задовільну точність аналізу більшості електронних схем і отримали найбільш значне поширення в програмах схемотехнічного аналізу.

Розглянуті схемні моделі отримані в одновимірному наближенні й не враховують багатьох ефектів, властивих інтегральним транзисторам. Для сучасних інтегральних транзисторів характерна асиметрична структура. Транзистори цього типу мають такі властивості: неоднорідну область бази (наявність градієнта концентрації домішок у ній); витіснення інжекції до периферії емітера; дуже незначний інверсний коефіцієнт підсилення; істотно різна площа емітерного й колекторного переходів; вплив підкладки на процеси в транзисторі; робота за умови високих рівнів інжекції, тобто необхідно враховувати дифузію і дрейф носіїв у базі.

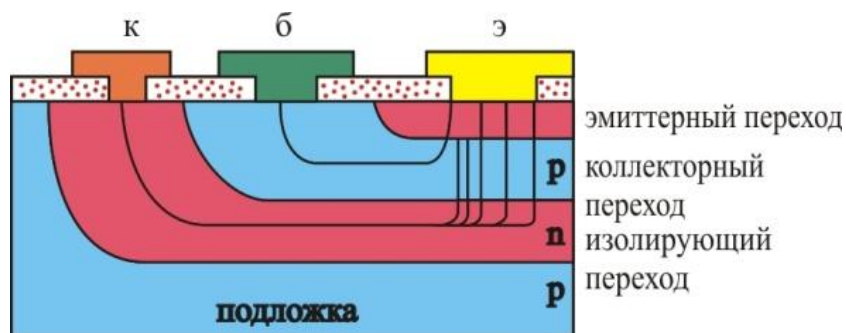


Рисунок 4.6 – Схема протікання струмів в інтегральному транзисторі

На рис. 4.6 показана схема протікання струмів в інтегральному n-p-n-транзисторі. Процеси мають виражений двовимірний характер. Зазначені особливості призводять до появи таких ефектів, які не враховувалися в попередніх моделях: зменшення коефіцієнта B зі збільшенням рівня інжекції; залежності коефіцієнта B_I від струму колектора; накопичення заряду в колекторі в разі прямого зміщення колекторного переходу (чинник дуже важливий у моделюванні режиму насичення транзистора); зменшення τ_e і збільшення τ_k у процесі збільшення струму колектора; зміни крутизни статичних вольт-амперних характеристик транзистора в режимах високих рівнів інжекції, тобто за умови великих струмів колектора. Підходи до отримання моделі інтегрального транзистора: розробка оригінальних моделей, що відображають властивості інтегрального транзистора; модифікація схемних моделей.

Оригінальні моделі інтегральних транзисторів основані на обліку двовимірних і асиметричності транзисторної структури. Багатосекційні двовимірні моделі є найбільш точними, у них кожна секція заміщається відповідною еквівалентною схемою. Такі розподілені моделі складні за кількістю схемних компонентів і за кількістю параметрів. Виділимо такі середжені двовимірні моделі інтегрального транзистора: Голубева–Кремльова, IBIS і BIRD. У них, поряд з електричними та електрофізичними параметрами, враховуються геометричні розміри топології і профіль розподілу домішки в транзисторі.

Модифікації моделі ПА-1 щодо інтегрального транзистора значно економічніші за оригінальні моделі. Вплив підкладки враховується шляхом введення в еквівалентну схему елементів паразитного p-n-p-транзистора (рис. 4.7). У цій моделі струм неосновних носіїв, інжектіваних у колектор колекторним переходом (передбачається, що перехід колектор-підкладка ізолюючий, тобто завжди закритий), $I_r' = B_{II} I_{KD}$, де B_{II} – коефіцієнт передачі струму паразитного p-n-p-транзистора. Ємність підкладки C_{II} обчислюється за формулами, аналогічним C_k і C_e . Інші ефекти враховуються, як правило, шляхом апроксимації відповідних експериментальних залежностей.

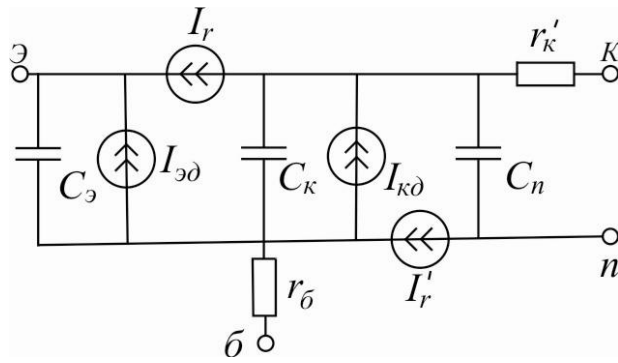


Рисунок 4.7 – Еквівалентна схема моделі інтегрального транзистора

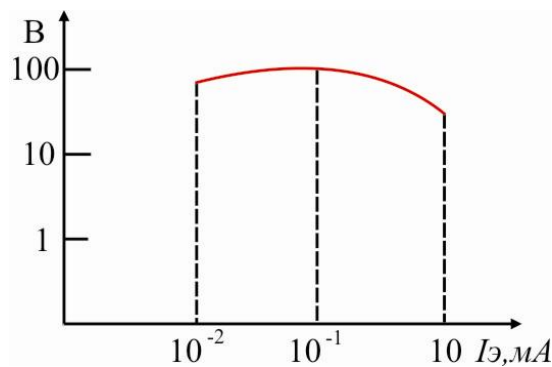


Рисунок 4.8 – Залежність коефіцієнта B від струму емітера

На рис. 4.8 показана типова залежність коефіцієнта посилення транзистора B від статичного струму емітера I_E . За умови апроксимації цієї залежності аргументом може бути струм моделі, але оскільки цей струм пропорційний величині $e = \exp(U_{EB}/m\varphi_{TE} - 1)$, то аргументом зручно використовувати e . Апроксимуючою функцією використовуються поліноми або експоненціальні функції, наприклад $B = AeD \exp(Ce)$, де A , D , C – коефіцієнти апроксимації.

Багато додаткових ефектів можна врахувати шляхом додавання зовнішніх щодо вихідної моделі схемних елементів.

Передбачувані моделі зручні як складові в різних схемотехнічних розрахунках, особливо для створення інтегральних схем, коли неможливо розділити транзистор або напівпровідниковий діод і пасивний елемент – резистор чи ємність, які теж виконуються у вигляді p-n-переходу.

4.3 Модельний експеримент. Формування біполярного транзистора за допомогою дифузії в середовищі MathCad

Методика розрахунку.

У формуванні структури біполярного транзистора необхідно створити два р-п-переходи. Схема дискретного вертикального біполярного транзистора, сформованого за стандартною планарною технологією, показана на рис. 4.9. Такий транзистор можна сформувати, наприклад, якщо в кремній ввести спочатку акцепторну домішку, а потім донорну.

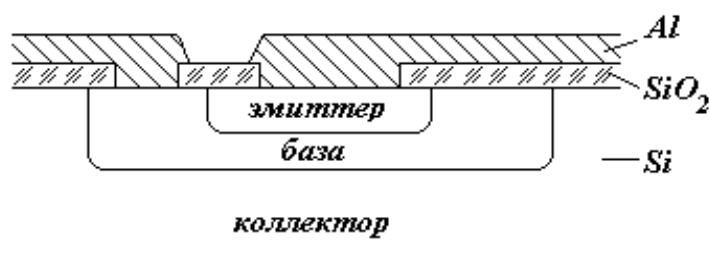


Рисунок 4.9 – Схема біполярного транзистора, сформованого за стандартною планарною технологією

Оскільки донорні й акцепторні домішки дифундують у напівпровідник з різними швидкостями, можна, створивши належну поверхневу концентрацію цих елементів, отримати електронно-діркову структуру шляхом одночасної дифузії обох елементів з парової фази. Для отримання дифузійних переходів у кремнії, поряд з методом одночасної дифузії домішок, наприклад із з'єднань III–V груп, застосовують метод послідовної дифузії донорних і акцепторних домішок або їхніх сплавів або сполук, особливо оксидів.

Перший метод, хоча й відрізняється простотою, не допускає роздільного регулювання концентрації домішок або температури. Тому зазвичай віддають перевагу другому методу, що допускає роздільне регулювання концентрації та температури. Спочатку в напівпровідник вводять домішку (донор), що повільно дифундує, інакше буде важко керувати розподілом домішки (акцептора), що швидко дифундує.

Для кращого контролю процесу потрібно, щоб обидва домішкових елементи були присутні в напівпровіднику тільки під час другої дифузії. У тому випадку, коли можна задавати концентрації незалежно від температури, проведення обох дифузійних циклів за умови різних температур забезпечує

більшу гнучкість процесу. Навіть коли коефіцієнти дифузії донора й акцептора однакові, то можна управляти процесом шляхом різної тривалості першого і другого циклу.

Як уже згадувалося, у разі багатокомпонентних систем вважають, що кожна домішка дифундує незалежно від іншої. Це узгоджується з дослідними результатами. Щоб показати співвідношення між концентраціями домішок у напівпровіднику за умови різних коефіцієнтів їхньої дифузії та поверхневих концентрацій, розглянемо одночасну дифузію двох домішок у випадку постійних поверхневих концентрацій C_S . Розподіл домішок для цього випадку показаний на рис. 4.10.

Концентрація донора представлена кривою C_D . Передбачається, що донор більш розчинний і менш рухливий, ніж акцептор (крива C_A). Пряма C_D^0 відповідає постійній концентрації донора у вихідному напівпровіднику. Перший р-п-перехід b_1 виникає, коли крива, що відповідає сумарній концентрації донора $C_D + C_D^0$, перетне акцепторну криву, а другий перехід b_2 , коли крива C_A перетне пряму C_D^0 . Залежність різниці концентрацій $C_D - C_A$ від відстані показана для цього випадку на рис. 4.10, а). Нахил кривої $C_D - C_A = f(x)$ в р-області або в базовій області характеризує внутрішнє електричне поле, що виникає в базовій області транзистора. Це поле прискорює переміщення електронів до переходу b_2 у тій частині базової області, яка лежить правіше від мінімуму на кривій; наявність такого поля є одним з важливих переваг дифузійних структур. Поле, яке є в лівій половині базової області, має бути якомога меншим.

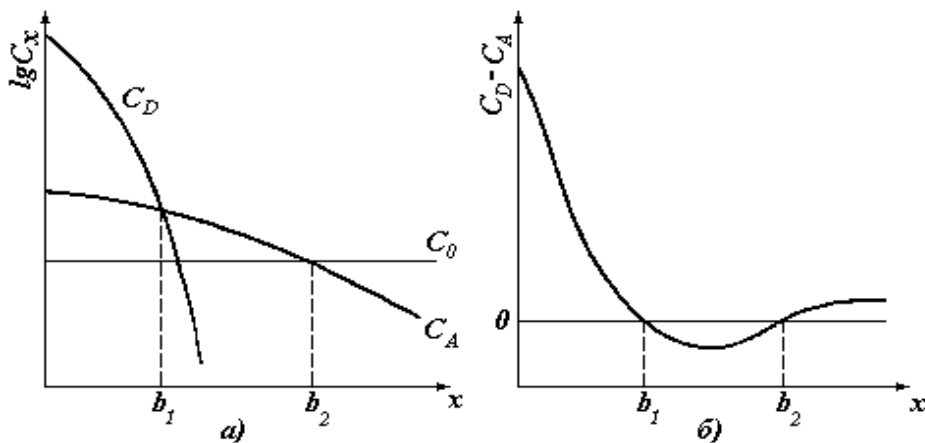


Рис. 4.10 – Розподіл домішок за умови одночасної дифузії донора C_D і акцептора C_A в напівпровідник з вихідною концентрацією донора C_D^0 (а) і залежність різниці концентрацій $C_D - C_A$ від глибини (б): р-п-переходи виникають на глибині b_1 і b_2 від поверхні

Базову дифузію зазвичай здійснюють у дві стадії: перша – стадія загону, друга – стадія розгону. Стадію загону проводять протягом короткого часу, у цьому випадку кількість домішки суворо регламентується. Розподіл концентрації домішки описується *erfc*-функцією:

$$C_1(x) = C_0 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{D_1 t_1}}. \quad (4.20)$$

Концентрація домішкових атомів, уведених під час першої стадії, описується виразом:

$$Q = C_0 \cdot \sqrt{\pi \cdot D_1 \cdot t_1}, \quad (4.21)$$

де Q – поверхнева концентрація введеної домішки;

C_0 – поверхнева концентрація домішки в процесі загону;

D_1 – коефіцієнт дифузії домішки під час загону;

t_1 – коефіцієнт дифузії домішки в процесі загону, і водночас підпорядковується експоненціальним розподілам.

Другу стадію проводять більш тривалий час, а розподіл домішки:

$$C_2(x) = \frac{Q}{\sqrt{\pi \cdot D_2 \cdot t_2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4 \cdot D_2 \cdot t_2}\right), \quad (4.22)$$

де D_2 – коефіцієнт дифузії домішки в процесі розгону;

t_1 – час розгону домішки.

Глибина залягання колекторного р-n-переходу розраховується за допомогою формули:

$$X_i = 2\sqrt{D_2 \cdot t_2} \cdot \sqrt{\ln(Q/C_s \sqrt{\pi \cdot D_2 \cdot t_2})}, \quad (4.23)$$

де C_s – концентрація домішки у вихідному напівпровіднику.

Дифузію емітерної області проводять в одну стадію, зазвичай із джерела з постійною поверхневою концентрацією, тому розподіл домішки описується *erfc*-функцією:

$$C_3(x) = C_o \cdot \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{D_3 t_3}}, \quad (4.24)$$

де D_3 – коефіцієнт дифузії емітерної домішки;
 t_3 – час дифузії емітерної домішки.

Глибина залягання емітерного р-n-переходу визначається точкою інверсії типу провідності. Для розрахунку глибини залягання р-n-переходу необхідно розв'язати рівняння

$$C_3(x) + C_s = C_2(x). \quad (4.25)$$

Точний розрахунок глибини залягання р-n-переходу в аналітичному вигляді дуже складний, тому рівняння (4.25) розв'язується чисельним способом.

Температурна залежність коефіцієнта дифузії має вигляд:

$$D = D_0 \cdot \exp(-\Delta E/kT), \quad (4.26)$$

де D_0 – постійна, чисельно рівна коефіцієнту дифузії за умови нескінченно високої температури, $\text{см}^2/\text{с}$;

ΔE – енергія активації дифузії, eV ;

$k = 8,625 \cdot 10^{-5} eV/K$ – постійна Больцмана.

Значення цих величин для деяких домішок у кремнії наведені в табл. 4.1.

Таблиця 4.1 – Коефіцієнти дифузії та енергії активації для деяких домішок у кремнії

Акцептори			Донори		
Елемент	$D_0, \text{см}^2/\text{с}$	E_a, eV	Елемент	$D_0, \text{см}^2/\text{с}$	E_a, eV
Бор	5,1	3,7	Фосфор	3,85	3,66
Алюміній	1,385	3,39	Миш'як	24	4,08
Індій	0,785	3,63	Сурма	12,9	3,98
Галій	0,374	3,41	Вісмут	1,08	3,85

Одним із важливих параметрів біполярного транзистора є максимальна концентрація домішки в базі та глибина її залягання. Перша може бути знайдена як максимум функції, що є відношенням концентрації донорів до акцепторів

$$K(x) = \frac{C_2(x)}{C_s + C_3(x)}. \quad (4.27)$$

Ці параметри розраховуються також чисельним методом.

У розрахунку розподілу концентрації базової домішки та визначенні положення р-п-переходів необхідно врахувати перерозподіл домішки в базовій області в разі дифузії емітерної домішки. У випадку багаторазової дії на напівпровідник підвищеної температури в розрахунку використовується ефективне значення $D \cdot t$:

$$Dt_{ef} + D_1 \cdot t_1 + D_2 \cdot t_2 + D_3 \cdot t_3. \quad (4.28)$$

Отже, виходячи з формули, глибина колекторного р-п-переходу після дифузії домішки в емітерну область може бути обчислена за формулою

$$X_i = 2\sqrt{Dt_{эфф}} \cdot \sqrt{\ln(Q/C_s \sqrt{\pi \cdot Dt_{эфф}})}. \quad (4.29)$$

У виконанні роботи слід врахувати одну обставину: розчинність домішок у кремнії має межу. Тому в процесі проведення дифузії максимальна поверхнева концентрація домішки C_0 не може перевищувати її максимальну розчинність у кремнії. Зазвичай вважають, що якщо за умови температури дифузії є надлишок домішки, то поверхнева концентрація домішки дорівнює її максимальній розчинності. Інформація щодо максимальної розчинності домішок у кремнії подана в табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Максимальна розчинність деяких домішок у кремнії

Елемент	Максимальна розчинність, ат/см ³	Температура максимальної розчинності, °С
Алюміній	$2 \cdot 10^{19}$	1150
Бор	$4 \cdot 10^{20}$	1200
Вісмут	$8 \cdot 10^{17}$	1300
Галій	$4 \cdot 10^{19}$	1250
Індій	10^{19}	1300
Миш'як	$2 \cdot 10^{21}$	1150
Сурма	$8 \cdot 10^{19}$	1300
Фосфор	$1,3 \cdot 10^{21}$	1150

Розподіл концентрації домішок після проведення всіх стадій дифузії показано на рис. 4.11.

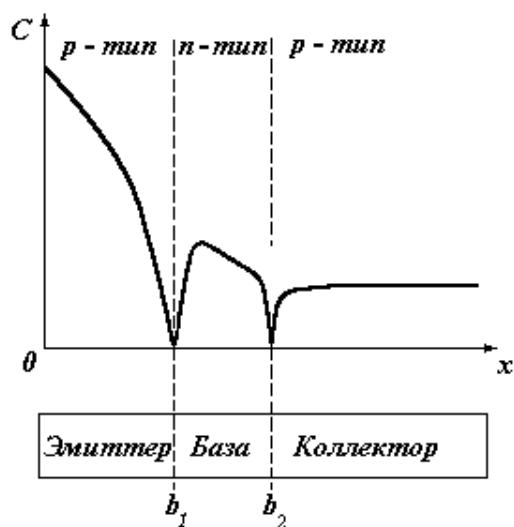


Рис. 4.11 – Розподіл концентрації домішок у р-п-р-транзисторі

Порядок виконання роботи.

1. Запустити програму MathCAD.

2. Скласти програму розрахунку, припускаючи, що за температури дифузії є надлишок домішки, а сам процес іонізації домішок відбувається в разі температури їхньої максимальної іонізації. Припустимо, що $t_1 = t_3 = 15$ хв, $t_2 = 60$ хв, а температура заганняння проводиться за умови 1100 °С. Так само припустимо, що кратність іонізації домішок дорівнює одиниці.

3. Вибрати з табл. 4.3 необхідні для розрахунку параметри.

Таблиця 4.3 – Параметри домішок для розрахунку

№ варіанта	Домішка		Концентрація домішки, см^{-3}		Ширина, мкм	
	базова	емітерна	максимальна в емітері	у вихідному кремнії	бази	емітера
1	B	P	10^{21}	10^{15}	1,5	1
2	P	B	5×10^{20}	10^{16}	1,5	1
3	B	As	5×10^{20}	10^{16}	0,5	1,5
4	As	B	10^{21}	10^{17}	0,5	1
5	B	Sb	8×10^{19}	10^{16}	1	1
6	Sb	B	5×10^{19}	10^{15}	1,5	0,5

5 Отримати параметри стадій загону й розгону базової домішки, необхідних для формування бази транзистора: коефіцієнти дифузії домішки під час загону й розгону, залежність концентрації домішки від глибини залягання в кремнії. Отримати глибину залягання колекторного р-n-переходу.

6 Отримати параметри стадії дифузії емітерної домішки: коефіцієнт дифузії домішки, залежність концентрації домішки від глибини залягання. Отримати глибину залягання емітерного р-n-переходу.

7 Уточнити глибину залягання колекторного р-n-переходу (він може зміститися).

8 Розрахувати максимальну концентрацію домішки в базі й глибину її залягання.

Нижче наведено формування біполярного транзистора в середовищі MathCad. Процес вирішення цього завдання можна розбити на кілька етапів:

1) підібрати параметри стадій розгону й загону, необхідних для формування бази транзистора, отримати необхідну глибину залягання колекторного р-n-переходу;

2) підібрати параметри стадії дифузії (температура, час) для отримання необхідної глибини залягання емітерного р-n-переходу та ширини базової області;

3) запустити MathCAD Professional, ввести константи та коментарі до них (рис. 4.12). Після того, як всі константи й коментарі до них будуть введені, робоче вікно матиме такий вигляд:

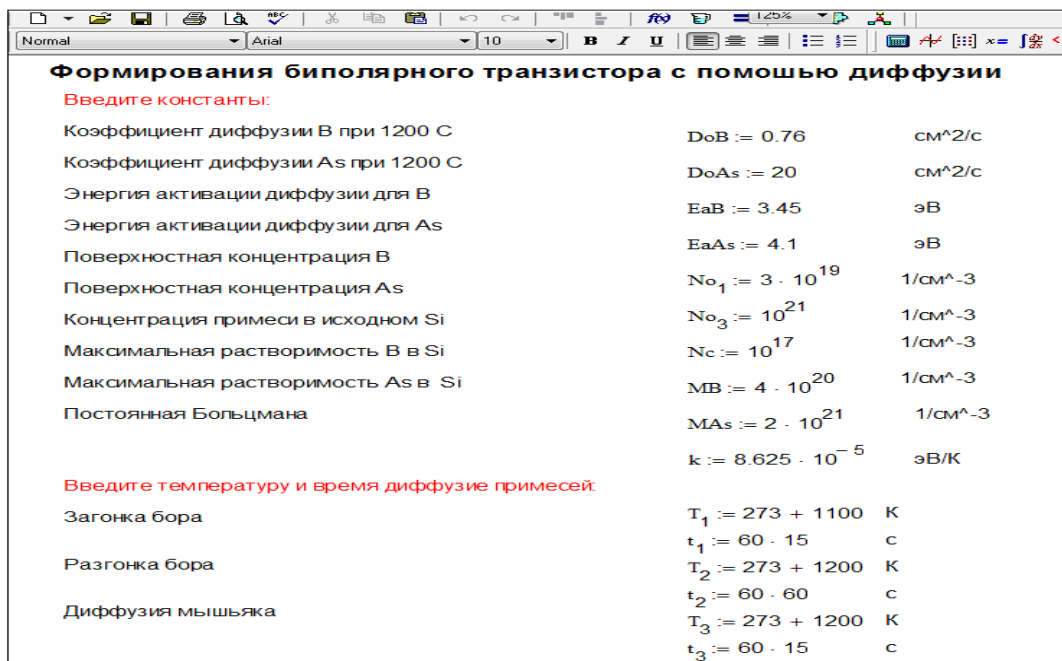


Рисунок 4.12 – Вигляд робочої області після введення констант

Базову дифузію зазвичай здійснюють у дві стадії: загоном і разгоном. Стадію загону проводять протягом короткого часу, водночас кількість домішки суворо регламентується. Концентрація домішкових атомів, введених під час першої стадії, описується певним рівнянням, яке необхідно задати в MathCAD. Ця процедура нічим не відрізняється від введення змінних, записується символічний вираз зі знаком привласнення. Усі змінні, які будуть використовуватися в рівнянні, мають бути заздалегідь визначені, в іншому випадку знак присвоєння, символ експоненти, дужки виділяються червоним кольором.

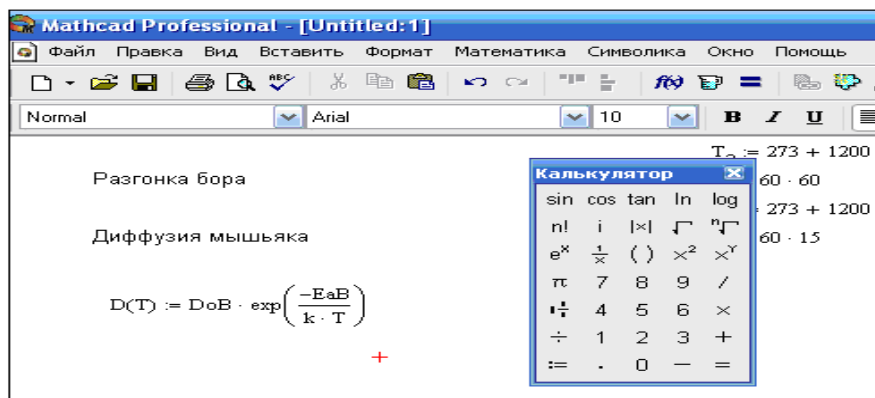


Рисунок 4.13 – Вигляд робочої області після введення символічного рівняння

Розподіл концентрації домішки описується erf-функцією. Для цього в закладці *Вигляд* вибираємо пункт *Інструментальні панелі* та рядок *Програмування*. У вікні вибираємо пункт *Add Line (Додати рядок програмування)* – й отримуємо вертикальну риску і два рядки програмування. Для того щоб додати ще рядок програмування, достатньо натиснути у вікні програмування *Add Line*. Після того як ввели дані в перший рядок, необхідно ввести умову виконання цього рядка, для цього в вікні програмування вибираємо рядок *if*.

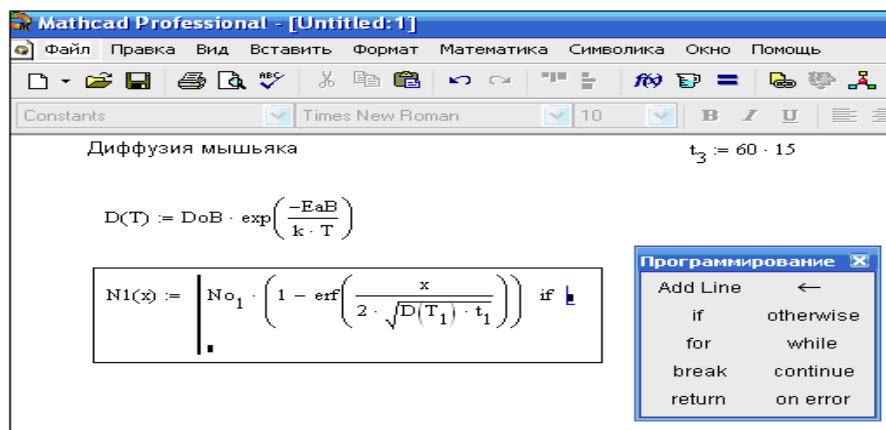


Рисунок 4.14 – Вигляд робочої області в заданні умов програмування

Для того щоб задати умови, знадобляться знаки нерівностей, панель із цими знаками є в закладці *Вигляд > Інструментальні панелі > Логічна*. На цій панелі вибираємо необхідний знак нерівності.

Визначимо концентрацію домішкових атомів, уведених під час загону.

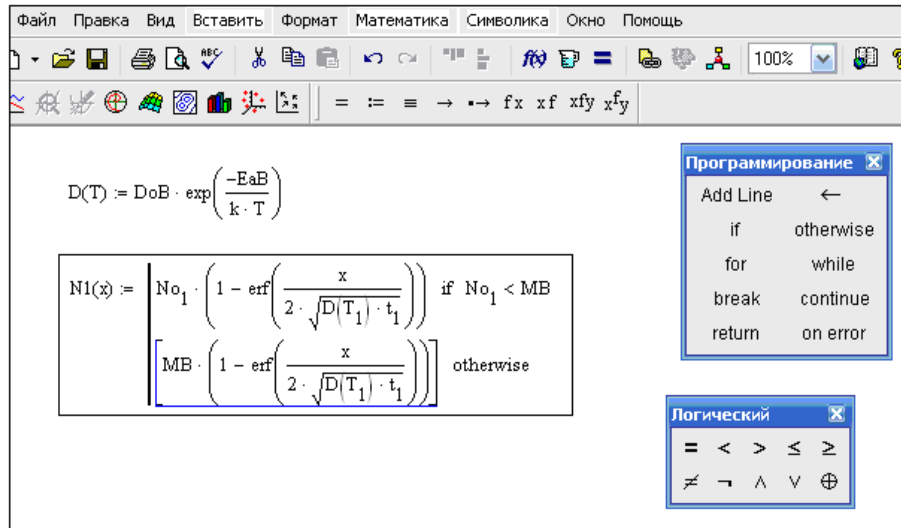


Рисунок 4.15 – Вікно програми

Другу стадію (розгону) проводять більш тривалий час, а розподіл домішки в цьому випадку підпорядковується експоненціальним законам розподілу.

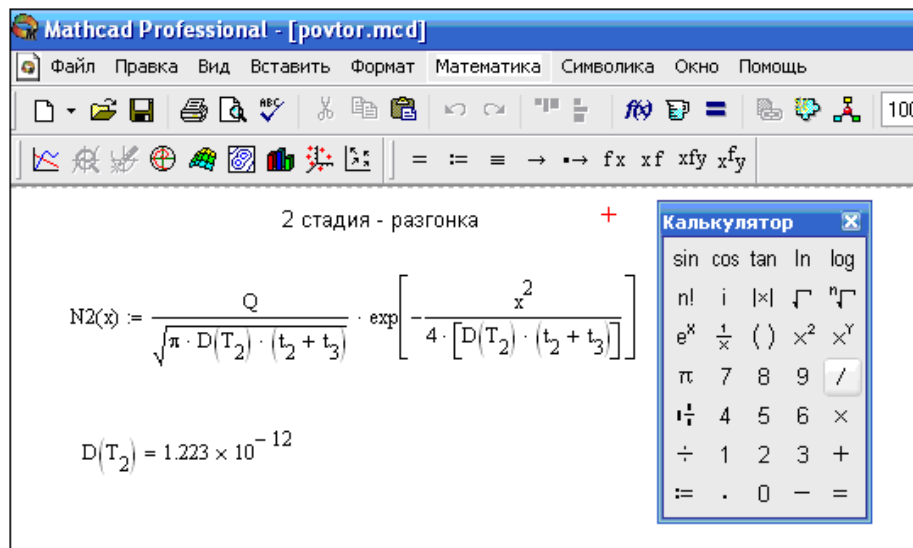


Рисунок 4.16 – Вікно програми

Третя стадія – стадія дифузії, яку також задаємо програмним способом.

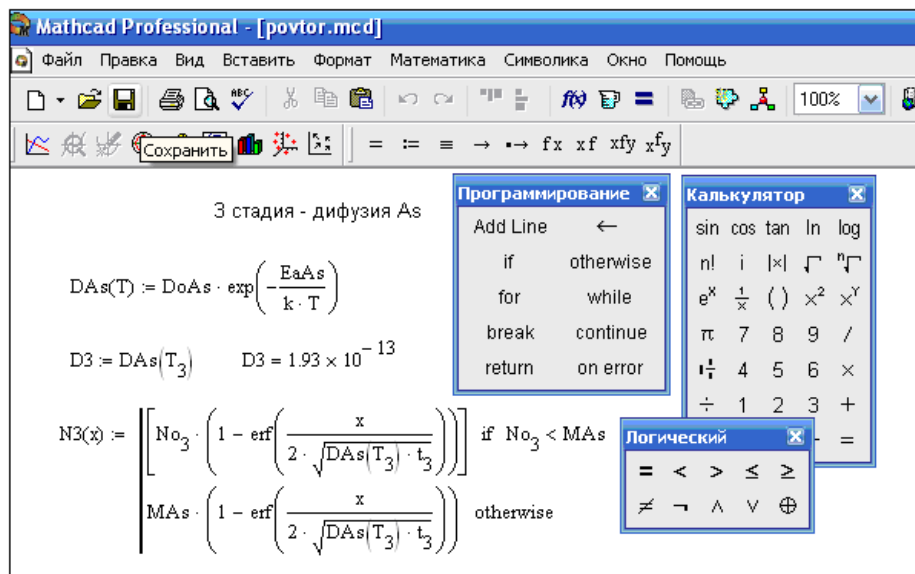



Рисунок 4.17 – Вікно програми

Для того щоб побудувати профіль розподілу концентрації домішок у кремнії, слід виконати такі дії. Відкриваємо закладку *Вигляд* > *Інструментальні панелі* > *Графіка* або на панелі задань знаходимо піктограму .

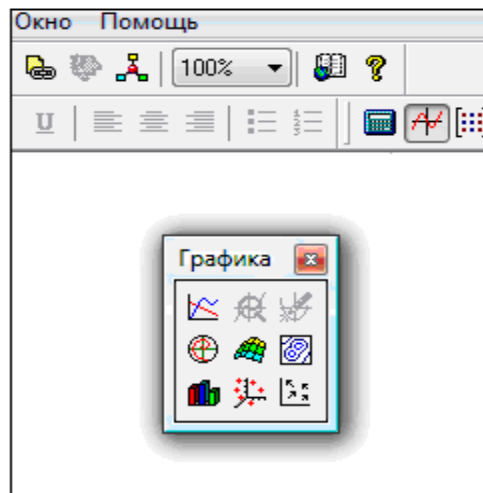



Рисунок 4.18 – Вікно програми

Вводимо діапазон зміни змінної x . Для цього вводимо змінну x , з панелі *Калькулятор* натискаємо на піктограму $\frac{1}{x}$, далі на панелі *Матриці* необхідно натиснути на піктограму $m..n$ і ввести діапазон змінної x .

На панелі, що з'явилася, вибираємо піктограму, яка позначає двовимірний графік .

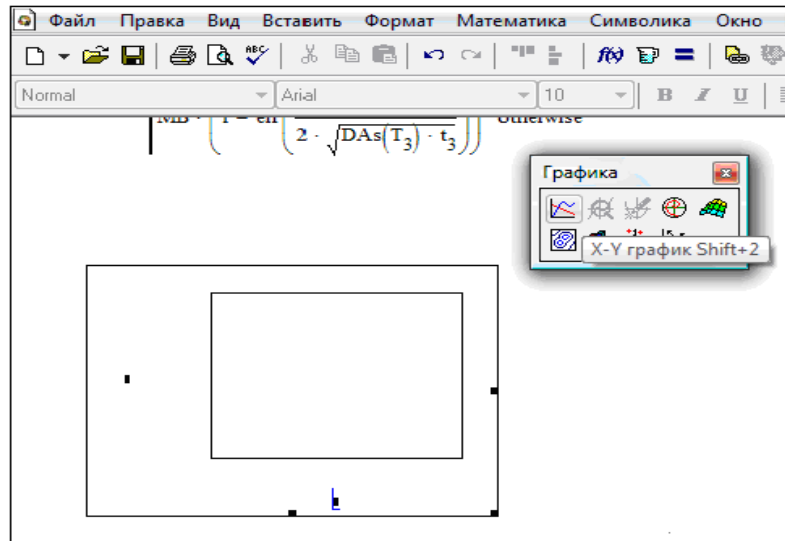


Рисунок 4.19 – Вікно програми

У вікні побудови X-Y-графіка по осі абсцис вводимо x , а по осі ординат, через кому, – позначення функцій, графічні характеристики яких необхідно побудувати. Зайшовши у властивості графіка, двічі натиснувши на полі графіка лівою кнопкою миші. У закладці *Осі X-Y* ставимо «галочки» на лініях сітки та мірної лінійці по осі Y . У наступній закладці встановлюємо тип, товщину та колір ліній.

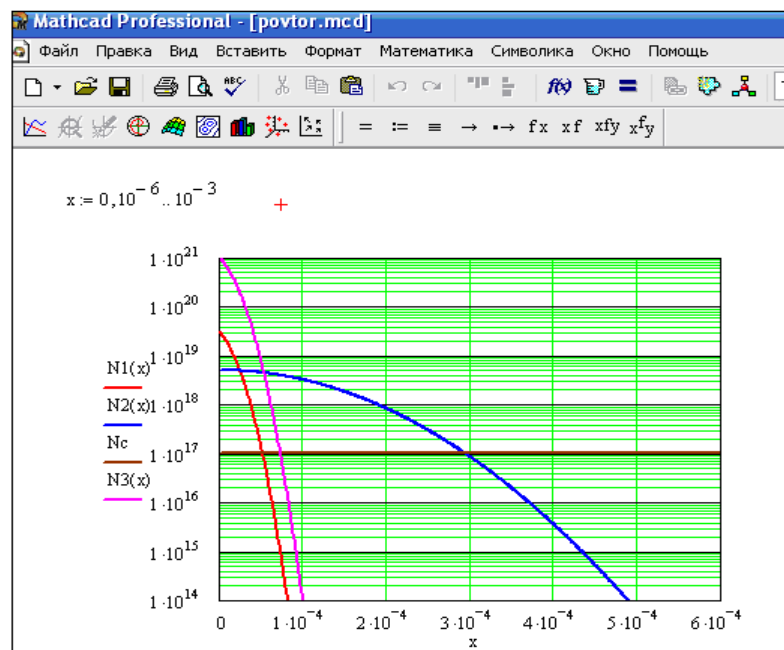


Рисунок 4.20 – Розподіл концентрації домішок по глибині пластини для різних стадій дифузії

Аналогічно будуємо профіль розподілу концентрації домішок у кремнії, попередньо поставивши профіль зміни змінної x і розподілу домішок по структурі транзистора.

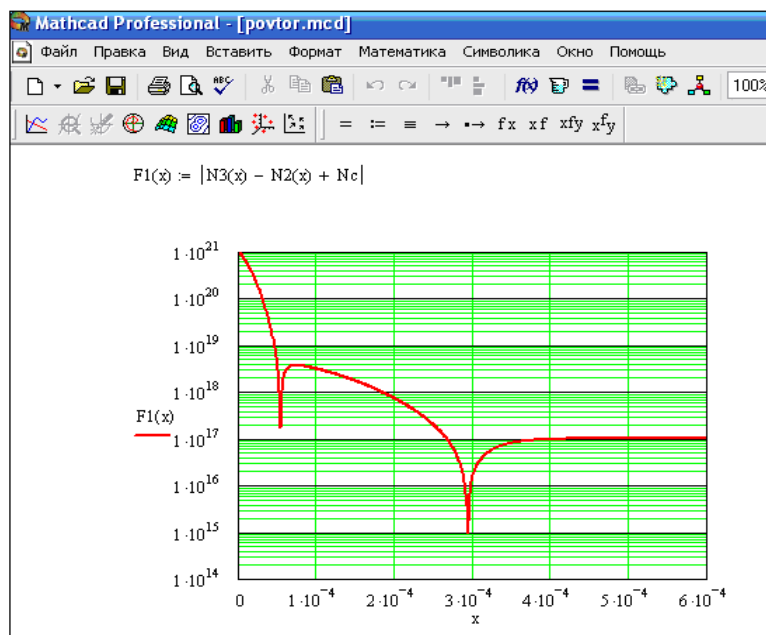


Рисунок 4.21 – Розподіл концентрації домішок у кремнії

Графічним способом визначаємо глибину залягання емітерного й колекторного переходів, і визначаємо ширину бази, для чого натискаємо правою кнопкою миші на поле графіка, вибираємо меню *Трасування*, після чого розміщуємо курсор на мінімумі графіка. Для більш точного визначення можна аналогічно скористатися функцією зміну масштабу.

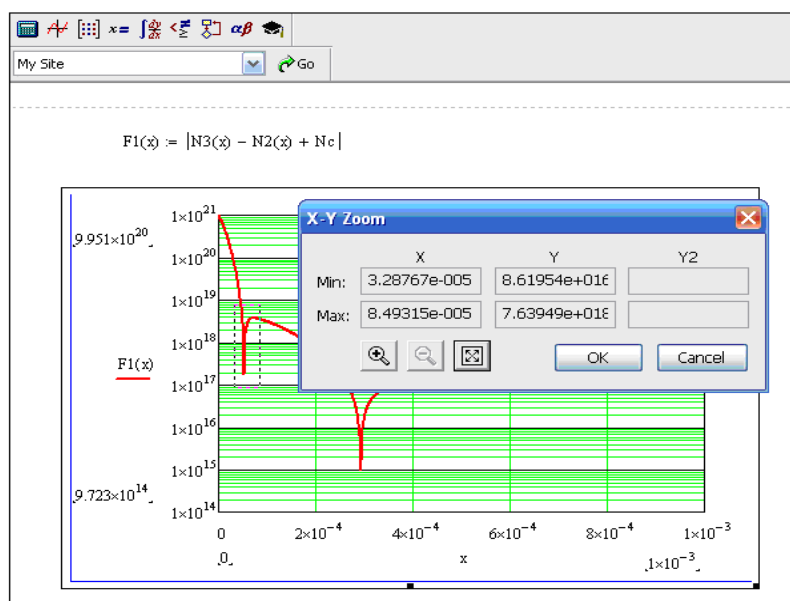


Рисунок 4.22 – Видгляд робочої області у використанні функції зміни масштабу

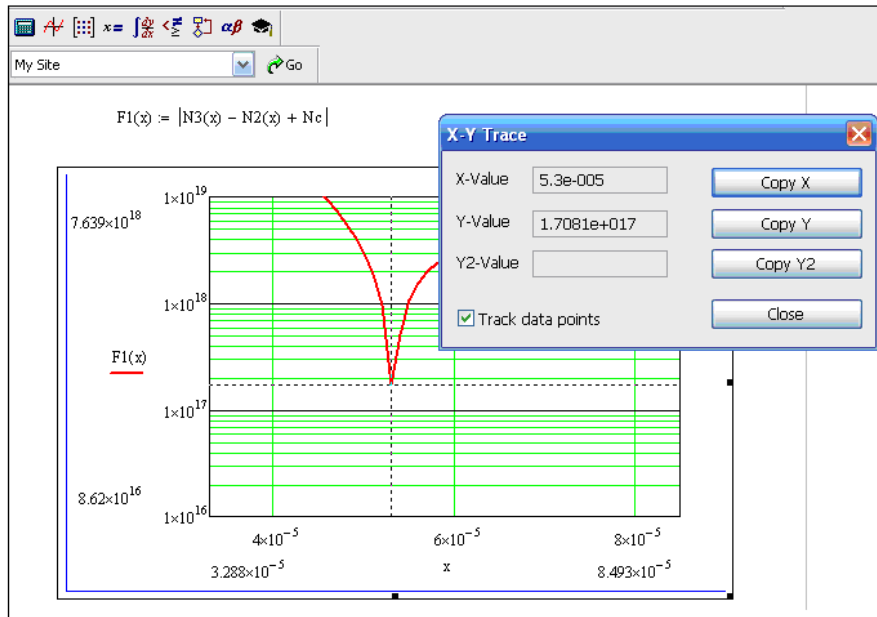


Рисунок 4.23 – Вікно програми

Змінюючи температуру й час процесу дифузії, необхідно домогтися заданої глибини залягання емітерного р-п-переходу та ширини бази.

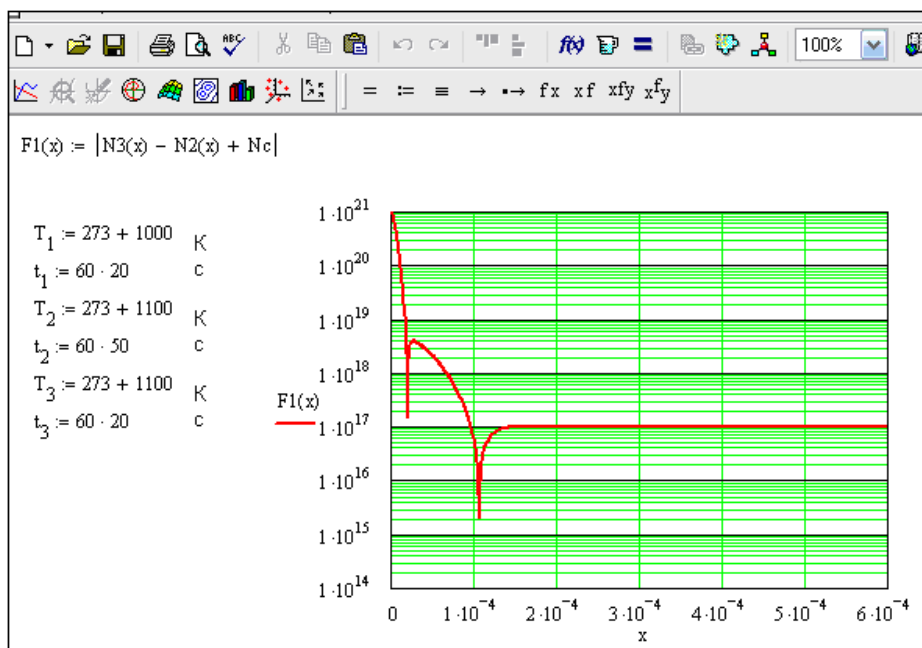


Рисунок 4.24 – Зміна температури й часу процесу дифузії

На цьому моделювання формування біполярного транзистора за допомогою дифузії завершено.

4.4 Моделювання діода Ганна

Діод Ганна (ДГ) – це кристал арсеніду галію електронної електропровідності з двома омичними контактами на протилежних гранях (рис. 4.25). Активна частина ДГ зазвичай має довжину $l=1\dots 100$ мкм і концентрацію легуючих донорних домішок $n_0 = 2 \cdot 10^{14} \dots 2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$. Шари напівпровідника з підвищеною концентрацією домішок слугують для створення омичних контактів. Типові значення діаметра кристала $d = 50\dots 250$ мкм. ДГ – це напівпровідниковий прилад з двома електродами, що не містить р-п-переходів.

Назва діодів пов'язана з фізичним ефектом, відкритим Дж. Ганном 1963 р. Ефект полягає в тому, що в процесі подачі на діод (зі структурою, показаною на рис. 4.25) постійної напруги, що перевищує деякий пороговий рівень $U_{\text{пор}}$, виникають періодичні коливання струму. Частота цих порогових коливань обернено пропорційна довжині активної частини діода

$$f_{\text{пр}} = 100/l, \quad (4.30)$$

де l – у мкм; $f_{\text{пр}}$ – у ГГц.

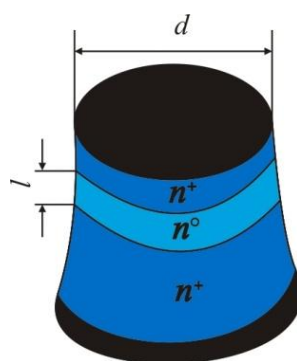


Рисунок 4.25 – Структура діода Ганна

Отже, на відміну від багатьох типів автогенераторів, де коливання створюються в резонаторі, генератори на ДГ можуть працювати без резонансних коливальних систем.

За аналогією з діодами інших типів електроди ДГ називають катодом і анодом, зокрема до катода приєднують негативний полюс джерела постійної напруги, до анода – позитивний.

Параметри діода Ганна: концентрація домішок в активній області n_0 , рухливість електронів μ_0 у слабкому електричному полі (тобто за умови

напруги на діоді, меншої за порогову); довжина активної області l , площа контакту $A = \pi d^2 / 4$; порогова напруга $u_{пор}$, пороговий струм $i_{пор}$, опір у слабкому полі $R_0 = u_{пор} / i_{пор}$, статична ємність діода $C_0 = \varepsilon A / l$.

Електричні параметри ДГ $u_{пор}$, $i_{пор}$, R_0 визначаються за статичною вольт-амперною характеристикою (рис. 4.26).

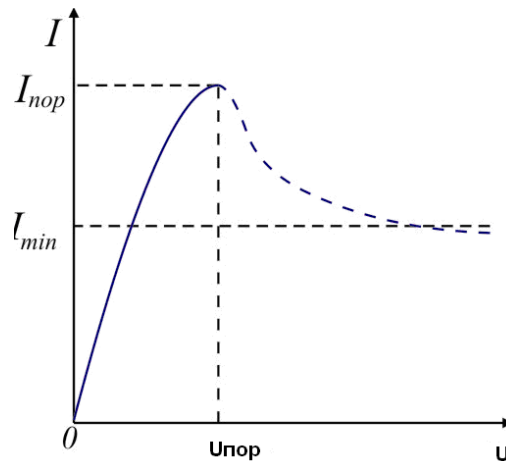


Рисунок 4.26 – Статична вольт-амперна характеристика ДГ

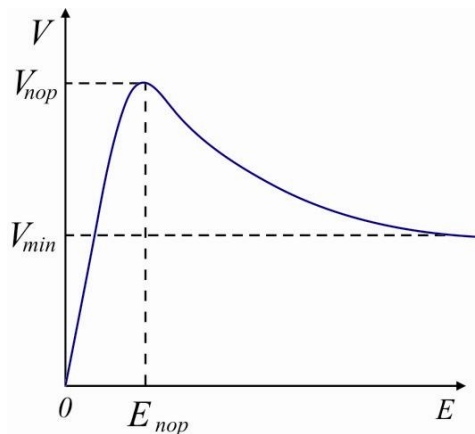


Рисунок 4.27 – Залежність середньої дрейфової швидкості електронів від напруженості електричного поля в арсеніді галію та фосфіду індію

4.4.1 Короткі відомості про механізм роботи діода Ганна

В основі ефекту Ганна лежить так званий міждолинний електронний перехід. Для арсеніду галію (GaAs), фосфіду індію (InP) та інших напівпровідникових матеріалів характерна залежність середньої дрейфової швидкості електронів від напруженості прикладеного електричного поля,

зображена на рис. 4.27. Особливість цієї залежності – наявність ділянки негативної крутизни.

Електричний струм у напівпровідниках I_a пропорційний швидкості електронів v :

$$i_a = q_0 n v A, \quad (4.31)$$

де q_0 – заряд електрона; n – концентрація електронів в активній області діода.

Напруга на електродах ДГ пропорційна напруженості електричного поля. Можна було б очікувати, що статична вольт-амперна характеристика ДГ повторює залежність $v(E)$. Однак на практиці цього не спостерігається, що можна пояснити нестійкістю розподілу електричного поля (E) у ДГ, якщо $u_a > u_{\text{пор}}$. Щоб вивчити картину розподілу поля уздовж довжини активної області діода, досить промоделювати процеси в діоді на ЕОМ.

4.4.2 Математична модель діода Ганна

Фізичні процеси в діоді Ганна можуть бути вивчені шляхом вирішення двох фундаментальних рівнянь:

- рівняння Пуассона

$$\text{div} \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_a, \quad (4.32)$$

де ρ – щільність об'ємного заряду; ε_a – діелектрична проникність напівпровідникового матеріалу ($\varepsilon_a = \varepsilon \varepsilon_0$, $\varepsilon = 12,5$ для арсеніду галію);

- рівняння щільності повного струму

$$\text{div} \mathbf{j}_\Sigma = 0, \quad (4.33)$$

де

$$\mathbf{j}_\Sigma = \mathbf{j}_{\text{пр}} + \mathbf{j}_{\text{диф}} + \mathbf{j}_{\text{см}}. \quad (4.34)$$

\mathbf{j}_Σ – щільність повного струму; $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ – щільність струму провідності; $\mathbf{j}_{\text{диф}}$ – щільність дифузійного струму; $\mathbf{j}_{\text{см}}$ – щільність струму зміщення.

Слід зазначити, що в структурі «сендвіч» (див. рис. 4.35) заряди рухаються в одному напрямку – від катода до анода, тому можна вважати, що в

площині поперечного перерізу не змінюються ні щільність струму, ні електричне поле. У разі таких припущень завдання спрощується і рівняння стають одновимірними.

Об'ємна щільність заряду

$$\rho = q_0(n - n_0), \quad (4.35)$$

де n – концентрація електронів; n_0 – концентрація донорів.

Щільність струму провідності визначається виразом (4.33), щільність дифузійного струму в одновимірному випадку

$$\mathbf{j}_{\text{диф}} = q_0 D \frac{\partial n}{\partial x}, \quad (4.36)$$

де D – коефіцієнт дифузії (у загальному випадку $D=D(E)$, однак облік залежності D від E не приводить до нових результатів, тому для спрощення розв'язання рівнянь тут прийнято $D = \text{const}$);

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (4.37)$$

де $J_{\text{см}}$ – щільність струму зміщення; t – час.

Рівняння (4.33) для одновимірного випадку має вигляд $\partial j_x / \partial x = 0$. Звідси випливає, що щільність сумарного струму всередині діода \mathbf{j}_x не залежить від координати і може бути прирівняна до щільності струму \mathbf{j}_a / A , протікає через виводи діода в зовнішньому ланцюгу.

З урахуванням співвідношень (4.31), (4.34)–(4.37) запишемо рівняння (4.32), (4.33) в одновимірному наближенні:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{q_0}{\varepsilon_a} (n - n_0); \quad (4.38)$$

$$q_0 n v - q_0 D \frac{\partial n}{\partial x} + \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{i_a}{A}, \quad (4.39)$$

де i_a – струм зовнішнього ланцюга.

Рівняння (4.38) і (4.39) містять дві невідомі функції: $n(x, t)$ і $E(x, t)$. Для зручності розв'язання доцільно (4.38) і (4.39) об'єднати в одне рівняння. З цією метою n з (4.38) підставимо в (4.39), унаслідок цього отримаємо

$$D \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - v(E) \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{q_0}{x_a} D \frac{dn_0}{dx} - \frac{q_0}{x_a} n_0 v(E) + \frac{i_a}{\varepsilon_a A} = 0. \quad (4.40)$$

У виведенні рівняння (4.40) прийнято до уваги, що концентрація донорів n_0 може змінюватися уздовж координати x , тобто $n_0 = n_0(x)$. Нелінійні властивості діода враховуються тим, що швидкість v залежить від E .

Рівняння (4.40) будемо розв'язувати в області $0 \leq x \leq l$ за умови зміни часу t від 0 до ∞ . У цьому випадку для однозначного розв'язання необхідно задати початкові та граничні умови.

Як початкові умови потрібно задати функцію $E(x)$ у початковий момент часу. Як граничні умови необхідно задати функцію $E(t)$ або $\partial E(t)/\partial t$ на границях активної області діода, тобто коли $x = 0$ і $x = l$.

Початкова умова. Вважаємо, що в початковий момент часу прикладена до діода напруга $u_a = 0$. У цьому випадку $E(x) = 0$ в разі, коли $dn_0/dx = 0$. Якщо ж є градієнт концентрації домішок, то виникає струм дифузії, утворюються внутрішні області зарядів і, як наслідок, з'являється струм провідності.

У стані рівноваги за умови $u_a = 0$ сума струмів провідності та дифузійного струму має дорівнювати нулю. З огляду на те, що в площині поперечного перерізу щільність струму не змінюється, унаслідок складання (4.27) і (4.31) отримаємо рівняння $q_0 n \mu_n E(x) - q_0 D \frac{dn}{dx} = 0$, звідки

$$E(x) = \frac{D}{\mu_n} \frac{1}{n} \frac{dn}{dx}.$$

Беручи до уваги, що відповідно до співвідношення Ейнштейна $D/\mu_n = \varphi_T$, де φ_T – температурний потенціал ($\varphi_T = 0,025$ В, якщо $T = 300$ К), і вважаючи, що $n = n_0$, початковий момент $t = 0$, остаточно запишемо початкову умову

$$E(x, t = 0) = \varphi_T \frac{1}{n_0(x)} \frac{dn_0(x)}{dx}. \quad (4.41)$$

Граничні умови. Щоб задати граничні умови, потрібно знати реальний розподіл домішок по довжині кристала. Нехай $n_0(x)$ змінюється, як показано на рис. 4.28. У структурах реальних діодів немає різких переходів від областей n^+ до області n_0 . Крім того, як видно з рис. 4.28, можливий градієнт концентрації донорів в активній області діода, а також виїмка (зменшення n_0) у катода.

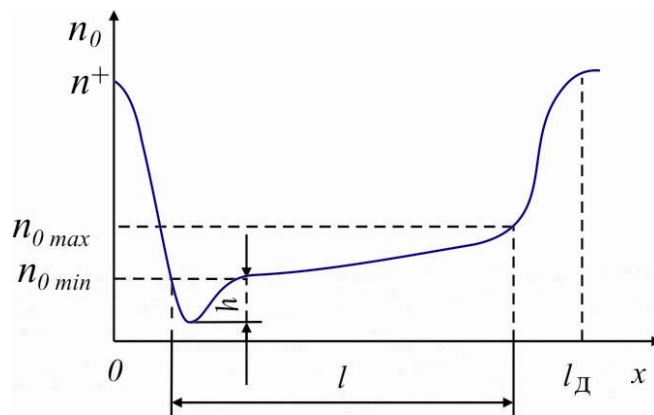


Рисунок 4.28 – Профіль легування ДГ

Градієнт концентрації домішки найбільш вірогідний у коротких діодах ($l \leq 5$ мкм). Виїмка може утворитися в тому випадку, коли активний n_0 – шар діода, отриманий шляхом епітаксійного вирощування на n^+ – підкладка, а другий n^+ – шар, утворений у процесі впікання омичного контакту.

Оскільки на границі активної області діода концентрація домішки збільшується до значень $10^{18} \dots 10^{19} \text{ см}^{-3}$, то контакти діода за своїми електричними властивостями близькі до металу, тобто мають дуже малий опір. Якщо до діода прикладена різниця потенціалів, то падіння напруги на контактах практично відсутнє й напруженість електричного поля близька до нуля. Звідси отримуємо граничні умови

$$E(0, t) = 0, \quad E(l_D, t) = 0, \quad (4.42)$$

де l_D – сумарна довжина діода, що містить активну частину та приконтактні області.

Рівняння (4.40) разом з умовами (4.41) і (4.42) є моделлю діода Ганна. Розв'язуючи чисельно рівняння (4.40) з початковою умовою (4.41) і граничними умовами (4.42), можна розрахувати функцію в дискретні моменти часу t_1, t_2, \dots, t_k . Водночас необхідно знати значення зовнішнього струму у відповідні моменти часу $i_a(t_1), i_a(t_2), \dots, i_a(t_k)$. З відомих функцій можна розрахувати напругу на діоді

$$u_a(t_k) = \int_0^{l_k} E(x, t_k) dx. \quad (4.43)$$

Знаючи $u_a(t_k)$, можна розрахувати струм $i_a(t_k)$, розв'язуючи рівняння зовнішнього ланцюга.

Далі переходимо до наступного етапу розрахунку, знову звертаючись до рівняння (4.40) і визначаючи u_a в момент часу t_{k+1} . У підсумку отримуємо тимчасові залежності напруги на діоді $u_a(t)$ і струму діода $i_a(t)$. Крім того, стає відомим розподіл поля $E(x)$ уздовж діода в різні моменти часу. Можна також обчислити розподіл концентрації електронів уздовж діода, розв'язуючи рівняння (4.37).

Характеристики та параметри моделі діода. Для використання моделі діода необхідно знати залежності $v(E)$, $n_0(x)$, а також параметри d, l, h . Залежність $v(E)$ може бути апроксимована виразом

$$v(E) = \left[\mu_n E + v_{\text{нас}} \left(\frac{E}{E_m} \right)^4 \right] / \left[1 + \left(\frac{E}{E_m} \right)^4 \right], \quad (4.44)$$

де $v_{\text{нас}} = 10^7$ см/с – дрейфова швидкість, відповідна насиченню характеристики за умови великих напруженістей поля; $E_m = 4000$ В/см.

Рухливість електронів μ_n у слабкому полі залежить від концентрації донорів n_0 :

$$\mu_n = \frac{\mu_i}{\left(1 + \sqrt{n_0 / 10^{17}}\right)}, \quad (4.45)$$

де μ_i – рухливість електронів в ідеальному бездомішковому напівпровіднику (для арсеніду галію $\mu_i \approx 8000 \text{ см}^2 / (\text{В} \cdot \text{с})$).

Для арсеніду галію з концентрацією донорних домішок $n_0 = 2 \cdot 10^{14} \dots 2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ $\mu_n = 5500 \dots 8000 \text{ см}^2 / (\text{В} \cdot \text{с})$ порогова напруженість поля $E_{\text{пор}} = 3,5 \text{ кВ/см}$, дрейфова швидкість, що відповідає пороговій напруженості поля, $v_{\text{пор}} = (1,5 \dots 2,0) \times 10^7 \text{ см/с}$.

Коефіцієнт дифузії можна обчислити за формулою

$$D = \mu_n \varphi_t + 1.5 \tau_3 v_{\text{пор}}^2, \quad (4.46)$$

де τ_3 – час релаксації енергії в напівпровіднику (для арсеніду галію $\tau_3 \approx 10^{-13} \text{ с}$).

Слід зазначити, що параметри діода $v_{\text{нас}}$, μ_n , D залежать від середньої температури кристала T . Залежності $\mu(T)$, $v_{\text{нас}}(T)$ можна апроксимувати виразами:

$$\mu_n(T) = \mu_n (300/T)^{1,14}, \quad v_{\text{нас}}(T) = v_{\text{нас}} (300/T)^{0,7}. \quad (4.47)$$

Залежність $D(T)$ може бути розрахована в підстановці в (4.46) значень $\mu_n(T)$ (4.47) і $v_{\text{пор}}(T)$ (4.44).

Межі застосування моделі. Розподілена одновимірна модель ДГ може бути використана для вирішення таких завдань:

- 1) дослідження фізичних процесів у діоді за умови різних значень параметрів діода;
- 2) вивчення режимів роботи діодів у різних схемах автогенераторів на різних частотах;
- 3) пошук оптимальних параметрів діода та зовнішнього ланцюга.

Межі застосування моделі обумовлені прийнятими припущеннями. Основні з них такі: 1) середня дрейфова швидкість електронів v залежить від миттєвого значення напруженості електричного поля E ;

- 2) коефіцієнт дифузії D не залежить від напруженості поля E .

Слід зазначити, що перше припущення виконується не завжди. Із зростанням частоти коливань електричне поле змінюється настільки швидко, що швидкість електронів не встигає відслідковувати ці зміни. Крім того, потрібен певний час для розгону електронів, протягом якого вони набувають швидкість, що відповідає миттєвій напруженості поля. Відстань, яку електрони пролітають за час розгону, має бути істотно меншою за довжину діода для того, щоб можна було вважати v функцією миттєвої напруженості поля E .

Отже, перше припущення обмежує застосовність моделі до деякої граничної частоти (приблизно 40 ГГц) і накладає обмеження на довжину активної області діода (мкм). Друге припущення, пов'язане з постійністю коефіцієнта дифузії, як показали машинні експерименти, не приводить до яких-небудь помітних обмежень застосовності моделі.

Рівняння (4.40) з початковою умовою (4.41) і граничною умовою (4.42) розв'язуються чисельно.

4.4.3 Еквівалентна схема генератора на діоді Ганна

Для розв'язання рівняння, що описує процеси в ДГ, потрібно знати зв'язок миттєвого струму і напруги на діоді, яка визначається зовнішнім ланцюгом. Застосовують різні електричні схеми генераторів на діоді Ганна. Раніше зазначалося, що для утворення автогенератора на діоді Ганна немає принципової необхідності в резонаторі. Найпростіший генератор складається з діода, ланцюга живлення і навантаження (рис. 4.29, а).

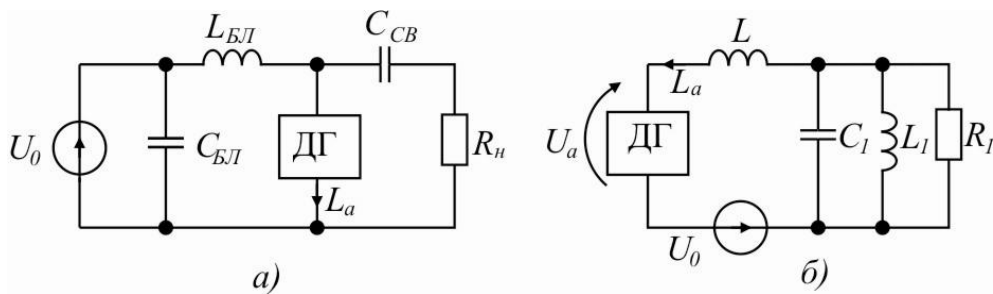


Рисунок 4.29 – Еквівалентні схеми генераторів на ДГ:

а – найпростіша схема; б – схема з резонатором

Тут застосована паралельна схема живлення; $C_{\text{бл}}, L_{\text{бл}}$ – елементи, що блокують джерело живлення U_0 від струму НВЧ; $C_{\text{св}}$ – ємність зв'язку ДГ із навантаженням $R_{\text{н}}$.

У режимі стаціонарних коливань напруга на діоді, крім постійної складової, має змінну складову, утворену падінням напруги на навантаженні в разі протікання через неї змінного струму $i_a(t)$.

Генератор за схемою на рис. 4.29, а на практиці застосовується рідко, оскільки має такі недоліки: 1) форма коливань $i_a(t)$ і $u_a(t)$ негармонічна, унаслідок чого в навантаженні виділяється потужність не тільки на основній частоті, але і на її гармоніках; 2) частота коливань жорстко пов'язана з довжиною ДГ.

Практика роботи з генераторами показала, що ККД по першій гармоніці істотно зростає, якщо ДГ помістити в резонатор. У разі, коли резонатор у точках підключення діода може бути представлений у вигляді еквівалентної схеми паралельно з'єднаних C_1 і L_1 , напруга на ДГ близька гармонійній. Якщо ж частотна характеристика резонатора подібна на характеристику послідовного коливального контура, то близьким до гармонійного виявляється струм ДГ. В обох випадках потужність у навантаженні на гармоніках основної частоти ослаблена.

Зручною для моделювання процесів у генераторах на діодах Ганна представляється схема, зображена на рис. 4.29, б. Змінюючи параметри схеми, тут можливо реалізувати режими з гармонійною формою напруги на діоді, з гармонійною формою струму або проміжні варіанти. Слід зазначити, що схема на рис. 4.29, б є еквівалентною, на практиці в діапазоні НВЧ застосовують резонатори з розподіленими параметрами.

Модель зовнішнього ланцюга генератора. Модель зовнішнього ланцюга генератора є системою алгебраїчних і диференціальних рівнянь, отриманих одним із методів теорії лінійних ланцюгів (методом змінних стану, вузлових потенціалів тощо). Оскільки модель ДГ дозволяє розрахувати напругу на діоді за відомим струмом, то в моделі зовнішнього ланцюга діод поданий як генератор напруги, керований струмом: $u_a(i_a)$.

Для схеми на рис. 4.29, б система алгебро-диференціальних рівнянь, складених методом змінних стану, має такий вигляд:

$$i_H = u_H / R_H, \quad (4.48)$$

$$u_L = -U_0 - u_a - u_H, \quad (4.49)$$

$$i_C = -i_H - i_{L1} + i_a, \quad (4.50)$$

$$i_C = Cdu_H / dt, \quad (4.51)$$

$$u_L = L di_a / dt, \quad (4.52)$$

$$u_H = L_1 di_{L1} / dt. \quad (4.53)$$

Ця система розв'язується чисельно спільно з рівнянням (4.40), що моделює процеси в ДГ. Наведемо порядок її розв'язання.

1. За заданим початковим значенням змінних стану (напруг на ємностях і струмів індуктивностей): $u_H = (t_0)$, $i_a(t_0)$, $i_{L1}(t_0)$, напруги джерела U_0 і напруги $u_a(t_0)$ обчислюють $i_H = (t_0)$, $u_L(t_0)$, $i_C(t_0)$ у момент часу t_0 шляхом розв'язання системи алгебраїчних рівнянь (4.48)–(4.50).

2. Розв'язують диференціальні рівняння (4.51)–(4.53) відносно $u_H = (t_1)$, $i_a(t_1)$, $i_{L1}(t_1)$ у момент часу $t_1 = t_0 + \Delta t$, де Δt – крок по часу.

3. Звертаються до підпрограми моделювання ДГ, тобто чисельно розв'язують рівняння (4.40) із використанням обчисленого струму діода $i_a(t_1)$, зокрема визначають $E(x, t_1)$ і за (4.43) розраховують $u_a(t_1)$.

4. Знову розраховують $i_H(t_1)$, $u_L(t_1)$ та $i_C(t_1)$, розв'язуючи рівняння (4.48)–(4.50) і т. д.

Процес обчислення завершується, коли в генераторі встановлюється стаціонарний режим коливання.

Запропоновані варіанти математичних моделей не вичерпують усього різноманіття моделей різних напівпровідникових приладів, тим більше, що за останню годину з'явилося безліч робіт щодо їхнього математичного моделювання.

5 СХЕМОТЕХНІЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

5.1 Формальне подання структури на макрорівні

Першим етапом моделювання об'єктів на макрорівні має бути заміна реального об'єкта деяким графічним поданням, що складається з пов'язаних між собою гілок, – графами та еквівалентними схемами.

Графи. Графи застосовуються не тільки для подання топологічних рівнянь у моделях макрорівня. Ними широко користуються для отримання структурних і функціональних математичних моделей на різних рівнях проектування, а також для вирішення завдань синтезу структури.

Для представлення структур об'єктів у процесі їхнього моделювання застосовуються два різновиди графів: графи зв'язків і полюсні. Ці різновиди виражають одні й ті самі відомості про структуру об'єктів, але в різній формі. Хоча в конкретному завданні будь-яка одна з цих форм може виявитися більш наочною для користувача, у загальному випадку віддати перевагу тому чи іншому різновиду не можна. З огляду на те, що застосування обох різновидів приводить до ідентичних результатів, розглянемо та будемо використовувати тільки полюсні графи, як більш поширені.

Графом називають сукупність вершин (вузлів) і ребер (гілок). Визначення графа може бути записано в такому вигляді: $G(U, P, I)$, де U – безліч вершин; P – безліч ребер; I – інцидентор – покажчик способу, з'єднання ребер один з одним.

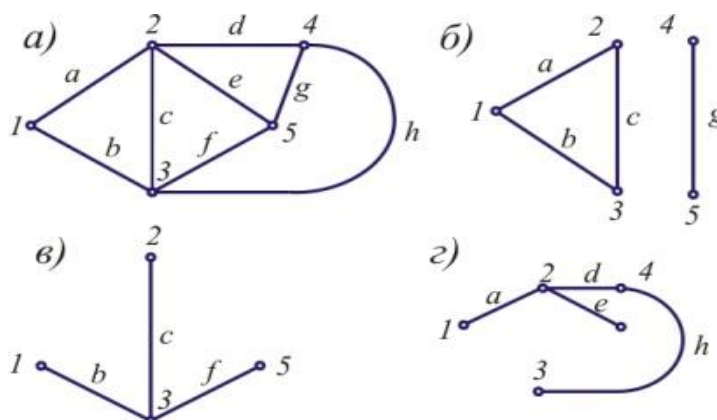


Рисунок 5.1 – Зв'язковий (а) і незв'язковий (б) графи, приклади дерев для зв'язкового графа (в, г)

Спрямований граф (орієнтований, або орграф) – граф, для ребер якого вказані певні напрямки. Ребра спрямованого графа називають дугами. На рис. 5.1, *a* показаний граф, у якому безліч ребер $P \in \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, а безліч вершин $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Підграфом називають таку частину графа, яка містить деякі вершини та ребра графа, зокрема серед ребер можуть бути тільки ті, які пов'язують вершини підграфа. Нехай на рис. 5.1, *a* підграф є граф $G' (U', P', I')$, і якщо $U' = \{1, 2, 3\}$, то в підграф може мати тільки гілки *a, b, c*. Якщо підграф містить усі вершини графа, тобто $U'=U$, то підграф називають суграфом.

Маршрутом називають будь-яку послідовність *s* ребер, у якій сусідні ребра інцидентні одній і тій самій вершині. Термін «інцидентність» означає співвідношення об'єктів типу «проходить через ...» або «знаходиться на ...». На рис. 5.1, *a* в графі послідовності (b, c, e, f, c, d) і (e, g) – маршрути, однак (a, h) маршрутом не є, оскільки ребра *a* та *h* інцидентні різним вершинам. Якщо в маршруті немає повторюваних ребер, то маршрут називають ланцюгом. Якщо ланцюг починається і завершується в одній і тій самій вершині, то маємо цикл – контур. Кількість ребер у *s* називають довжиною маршруту.

Зв'язковим графом називають граф, у якому можна вказати маршрут, що з'єднує будь-які вершини. Це визначення можна записати в такій формі: «якщо $\forall x, y \in U (\exists s(x, y))$, то граф зв'язковий». Дослівно подібний запис читається так: «якщо для будь-яких вершин *x* і *y*, що належать безлічі *U*, існує маршрут *s*, то граф зв'язний». Граф на рис. 5.1, *a* – зв'язний. Прикладом незв'язного графа може бути граф на рис. 5.1, *б*.

Деревом зв'язкового графа називають зв'язний підграф без циклів. Так, на рис. 5.1, *в, г* наведено приклади дерев для графа, зображеного на рис. 5.1, *a*.

Деревом, що покриває (фундаментальним) дерево (основу), називають зв'язним суграфом без циклів, тобто дерево є фундаментальним, якщо його гілки охоплюють всі вершини графа і не утворюють циклів.

Гілками дерева називають ребра графа, що містяться в дереві, а хордами – ребра графа, що не увійшли в дерево.

На рис. 5.1, *г* зображено фундаментальне дерево. Для одного й того самого графа можна вказати кілька фундаментальних дерев, кожному вибору фундаментального дерева відповідає свій поділ безлічі ребер на підмножини гілок дерева *B* і хорд *X*. У разі дерева, показаного на рис. 5.1, *г*, маємо $B = \{a, d, e, h\}$ і $X = \{b, c, f, g\}$.

Якщо позначити кількість ребер у графі через α , а кількість вершин – через β , то у фундаментальному дереві завжди буде $\beta - 1$ гілок і $\alpha - \beta + 1$ хорд. Далі фундаментальні дерева будемо називати просто деревами.

Контуром k -ї хорди називають безліч ребер, що утворюють цикл у графі, отриманому в разі додавання k -ї хорди до дерева. Наприклад, контуром хорди f для графа рис. 5.1, а і дерева 5.1, з буде безліч ребер $\{f, e, d, h\}$.

Перетином гілки дерева називають безліч ребер, що перетинаються лінією перетину, якщо: а) серед гілок дерева перетинається єдина; б) лінія перетину замкнута і ребро може перетинатися не більше ніж один раз.

На графі рис. 5.2, а дерево виділено жирними лініями; пунктирними тут показані лінії перетину: перетином гілки a буде безліч ребер $\{a, e\}$, перетином гілки b – безліч ребер $\{b, e, f\}$ тощо.

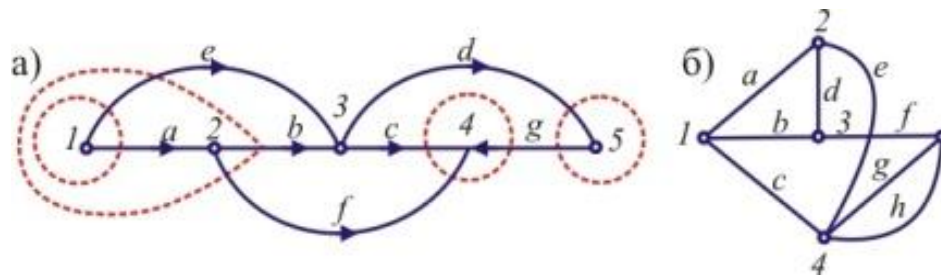


Рисунок 5.2 – Граф, його остов і лінії перетину гілок дерева (а); граф з матрицею суміжності (б)

За допомогою *матриці інциденцій* $A = [a_{ij}]$ може бути виражена та сама інформація, яка міститься в графі. У цій матриці $\beta - 1$ рядків та α стовпців. Кожному вузлу, за винятком одного, прийнятого за базовий, у матриці відповідає один рядок; кожному ребру – один стовпець. У стовпці записуються одиниці на перетині з рядками тих вузлів, яким інцидентне ребро даного стовпчика.

Якщо граф спрямований, то знаки одиниць вказують напрямки дуг: +1 відповідає рядку вузла, до якого направлено ребро, (-1) – рядку другого вузла. У решти клітинах матриці записуються нулі. Матриця інциденцій для графа рис. 5.1, а в тому випадку, коли базовим вузлом є вузол 4, представлена в табл. 5.1.

Таблиця 5.1 – Матриця інциденцій

		Вершини \ Ребра					
	A	b	c	d	e	f	g
1	-1	0	0	0	-1	0	0
2	+1	-1	0	0	0	-1	0
3	0	+1	-1	-1	+1	0	0
5	0	0	0	+1	0	0	-1

Граничні вершини ребра – вершини, інцидентні цьому ребру.

Кратні ребра – ребра з однаковими граничними вершинами.

Мультиграф – графи, які мають кратні ребра.

Степінь вершини u_i – кількість ребер, інцидентних вершині u_i .

Дві вершини є суміжними, якщо вони з'єднані ребром.

Матрицею суміжності R , що відповідає графу G , називають квадратну матрицю порядку n , де n – число вершин графа G , у якій елемент r_{ij} дорівнює кількості ребер, з'єднують вершини з номерами i та j . Матриця суміжності містить повну інформацію про граф, і тому завдання ЕОМ деякого графа зазвичай зводиться до завдання матриці суміжності, що найчастіше здійснюється з урахуванням її розрідженості.

Графи – зручний засіб відображення структур проєктованих об'єктів. Найчастіше в такому відображенні вершини графа ототожнюються з елементами структури, а ребра відповідають зв'язкам між елементами. У цьому випадку ребра графа ставлять відповідно до значення деякого параметра об'єкта, названого вагою. Значення ваги проставляють поруч з ребрами і граф називають зваженим графом. Так, у зображенні структури комплексу апаратури вершини можуть відтворювати пристрої, ребра відповідають зв'язкам між пристроями, а вагою може бути довжина зв'язків. Іноді, навпаки, ребрами зображують елементи, а вершинами – зв'язки між елементами. Таке уявлення структур частіше використовується в моделюванні об'єктів.

Ієрархічні структури зручно зображувати у вигляді дерев, прикладом може бути дерево, показане на рис. 5.3. Вершини таких дерев зазвичай поділяють на рівні (яруси). Так, на рисунку яруси відзначені римськими цифрами I–IV. Єдину вершину найвищого рівня називають кореневою

вершиною (коренем). Вершини, у яких відсутні суміжні вершини, що належать до більш низького ярусу, тобто кінцеві (висячі) вершини дерева, називають листям.

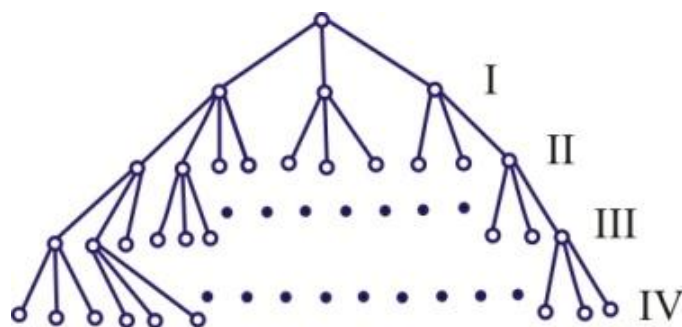


Рисунок 5.3 – Ієрархічне дерево рішень

Еквівалентні схеми для систем з однорідними елементами. Якщо граф відображає тільки такі структурні особливості, як спосіб зв'язку елементів один з одним, то еквівалентна схема містить повнішу інформацію про об'єкт: відображає також фізичну сутність окремих елементів.

У загальному випадку для еквівалентних схем відсутня настільки ж чітка та однозначна система термінів і позначень, як для графів. У зображенні еквівалентних схем допускається використовувати багато позначень принципівих схем. Будемо застосовувати еквівалентні схеми, побудовані відповідно до таких правил:

1. Еквівалентна схема, як і граф, складається з безлічі гілок і безлічі вузлів.
 2. Кожна гілка належить до одного з п'яти можливих типів.
- Зображення гілок усіх можливих типів наведені на рис. 5.4.

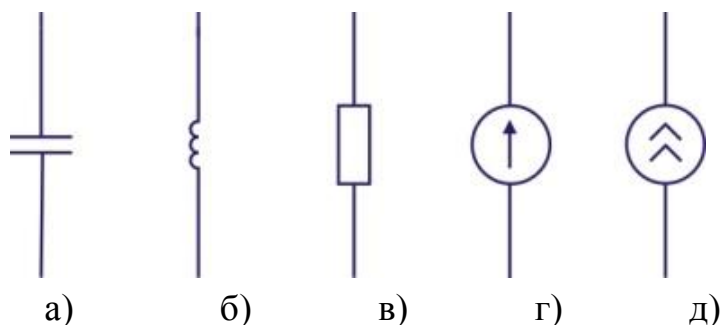


Рисунок 5.4 – Типи гілок в еквівалентних схемах

3. Кожній гілці відповідає компонентне рівняння:

- для ємнісної гілки (рис. 5.4, а) – рівняння, що пов'язує I і dU/dt , зазвичай це рівняння вигляду $I = C(dU/dt)$, де I і U – фазові змінні типу потоку і різниці потенціалів (напруги), де C – ємність;

- для індуктивної гілки (рис. 5.4, б) – рівняння, що пов'язує U і dI/dt , зазвичай це рівняння вигляду $U = L(dI/dt)$, де L – індуктивність;

- для резистивної гілки (рис. 5.4, в) – рівняння, що пов'язує U і I , звичайно це рівняння вигляду $U = RI$, де R – опір;

- для гілки джерела напруги (рис. 5.4, г) – рівняння, що пов'язує напругу U з незалежною змінною t і, можливо, із фазовими змінними інших гілок: $U = f_1(\mathbf{V}, t)$; де \mathbf{V} – вектор фазових змінних; t – час; в окремому випадку, можливо, $U = \text{const}$;

- для гілки джерела потоку (рис. 5.4, д) – рівняння, що пов'язує потік I з часом t і, можливо, з вектором \mathbf{V} , має вигляд: $I = f_2(\mathbf{V}, t)$; можливо, що $I = \text{const}$.

Залежна гілка – гілка, параметр якої (U в джерелі напруги, I в джерелі потоку, або C, L, R) залежить від будь-яких фазових змінних.

4. Як уже зазначалося, кожному вузлу схеми відповідає певне значення фазової змінної типу потенціалу; кожній гілці – значення змінних I і U , що фігурують у компонентних рівняннях. З'єднання гілок один з одним, тобто створення вузлів, має відображати взаємодію елементів у системі. Виконання цієї умови забезпечує справедливість топологічних рівнянь для вузлів і контурів схеми.

Як фазові змінні потрібно вибирати такі величини, за допомогою яких можна описувати стан фізичних систем у вигляді розглянутих вище топологічних і компонентних рівнянь.

5.2 Форми подання моделей елементів схем

Особливість математичного забезпечення схемотехнічного проектування полягає в моделюванні елементів електронних схем і аналізі конкретних типів проєктованих схем.

У моделюванні компонентами електронної схеми є резистор, конденсатор, котушка індуктивності, окремий електронний прилад у дискретному або інтегральному виконанні, джерело струму або напруги тощо. Елементом електронної схеми може бути як компонент, так і типовий

фрагмент схеми (вентиль, тригер тощо). Математична модель електронної схеми в аналізі на ЕОМ – система звичайних диференціальних рівнянь, що пов'язує струми й напруги в різних компонентах схеми. Математична модель схеми (ММС), отримана безпосереднім об'єднанням моделей компонентів у загальну систему рівнянь на основі топологічних рівнянь, називається повною моделлю схеми. ММС, що є простіша за витратами часу і пам'яті ЕОМ на її реалізацію, ніж повна модель, називається макромделлю схеми. Типові фрагменти схеми (функціональні вузли) складаються з окремих компонентів, тому моделі таких фрагментів у складі складних електронних схем є макромделі. Отже, можна виділити два основних типи моделей елементів електронних схем: моделі компонентів і макромделі функціональних вузлів.

Математична модель елемента електронної схеми є системою ЗДР щодо фазових змінних: струму I та потенціалу φ (або напруги $U_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$, де φ_i і φ_j – потенціали i -го та j -го вузлів схеми, $i \neq j$). Існує декілька форм подання такої моделі: інваріантна, схемна й алгоритмічна (або програмна).

Інваріантна форма – це запис системи ЗДР безвідносно до методу її чисельного рішення. Систему ЗДР можна отримати в нормальній формі Коші або у вигляді системи алгебродиференціальних рівнянь. Недолік інваріантної форми – це відсутність наочності в синтезі структури моделі та складність включення моделі елемента в бібліотеку моделей конкретної програми аналізу електронних схем, оскільки виникають труднощі з поданням системи рівнянь графом для подальшого формування ММС.

Схемна форма – представлення моделі елемента у вигляді еквівалентної електричної схеми, що складається з певного набору електричних компонентів і зв'язків між ними. Еквівалентні схеми розрізняють залежно від складу допустимих компонентів.

Базові еквівалентні схеми складаються з таких двополюсників: ємності C , індуктивності L , резистора R , джерела струму I (постійний або залежний від фазових змінних і часу) і напруги E (постійна або залежна від фазових змінних і часу). Базові еквівалентні схеми відповідають вимогам, що висуваються за умови синтезу структури моделі та включення її в бібліотеку моделей елементів електронних схем. Недолік таких схем – у моделюванні складних функціональних вузлів. Вони втрачають свою наочність, стають громіздкими і незручними, тому використовуються здебільшого в моделюванні компонентів електронних схем.

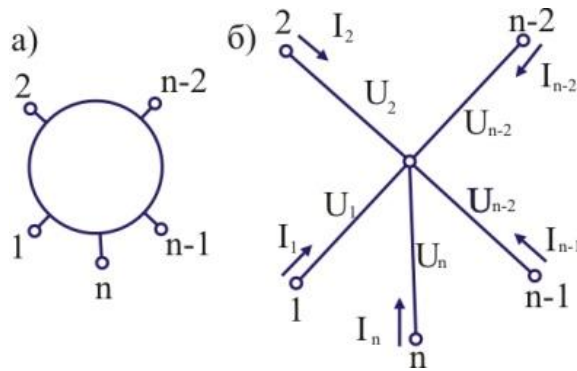


Рисунок 5.5 – Багатополюсник (а) та його полюсний граф (б)

Узагальнені еквівалентні схеми допускають використання, крім перелічених двополюсників, довільних багатополюсних елементів. Кожен двополюсний компонент характеризується струмом, що протікає через нього, і напругою між його полюсами. У багатополюсному елементі один з полюсів приймається за базисний, щодо якого визначаються напруги інших полюсів. Нехай кількість полюсів багатополюсника n і вузол з номером n – базисний. Кожен полюс характеризується струмом, що впадає до нього I_i , та напругою щодо базисного вузла U_{in} (для базисного вузла $U_{nn}=0, \sum_{j=1}^n I_j = 0$), які створюють два вектори невідомих I_M і U_M , обидва розмірністю n . За цих умов багатополюсник можна розглядати як сукупність n двополюсників (рис. 5.5), тому його нарівні з іншими двополюсниками можна включити до узагальненої еквівалентної схеми для формування ММС. Математична модель багатополюсника має вигляд

$$F(I_M, U_M, \bar{I}_M, \bar{U}_M, t) = 0, U_{nn} = 0, \sum_{j=1}^n I_j = 0.$$

Отже, за допомогою багатополюсника можна уявити будь-який функціональний вузол електронної схеми. Приклади багатополюсників: трансформатор, мікросхеми з великою кількістю виводів тощо. Узагальнені еквівалентні схеми застосовуються для отримання макромоделей.

Алгоритмічна (програмна) форма – це програма обчислення усіх необхідних функцій і коефіцієнтів конкретної моделі елемента в разі її включення в бібліотеку моделей програми аналізу електронної схеми. Структура алгоритму моделі залежить від методу формування ММС, закладеного в конкретну програму аналізу. Наприклад, для методу вузлових

потенціалів необхідно обчислити вектор вузлових струмів і матрицю вузлових провідностей для еквівалентної схеми моделі в певний момент часу. Розглянемо отримання програми моделі напівпровідникового діода для узагальненого методу формування ММС. Модель діода має вигляд

$$f_d(Z, I_d, U_d, \tau) = Z - (I_d \varphi_T) / (\tau I_T \exp(U_d / \varphi_T)) + \varphi_T / \tau = 0,$$

де I_d – струм діода;

U_d – напруга на діоді;

$Z = dU_d / dt$;

φ_T, τ, I_T – параметри діода.

Для узагальненого методу формування ММС у програмі моделі елемента мають бути обчислені вектор нев'язок Q для рівнянь моделі в разі заданих значень фазових змінних і матриця A приватних похідних вектор-функції рівнянь моделі по фазових змінних. Модель діода має одне рівняння і три змінних, тому розмір матриці приватних похідних (1,3). Алгоритм для складання програми моделі діода:

1. Описати змінні та постійні величини: q, Z, τ, I_T , матрицю A (1,3).

2. Визначити $q = f_d(Z, I_d, U_d, \tau)$.

3. Розрахувати $a_{11} = \partial f_d / \partial Z = 1$; $a_{12} = \partial f_d / \partial I_d = -\varphi_T / \tau I_T \exp(U_d / \varphi_T)$;

$a_{13} = \partial f_d / \partial U_d = I_d / \tau I_T \exp(U_d / \varphi_T)$;

Моделі елементів для узагальненого методу формування ММС не залежить від методів інтегрування систем ЗДР, оскільки в них не потрібна заміна похідних Z різницеvими формулами, як у методі вузлових потенціалів.

5.3 Моделі компонентів електронних схем

Похибки моделювання електронних схем визначаються наближеністю моделей компонентів схеми, методів чисельного розв'язання і неточністю завдання вихідних даних (параметрів моделей компонентів, зовнішніх параметрів та ін.).

Чисельні методи в програмах аналізу електронних схем здебільшого забезпечують порівняно високу точність розрахунку. Значну похибку в остаточні результати вносять помилково задані внутрішні та зовнішні параметри схеми, але ця похибка усунена, оскільки помилки вихідних даних

можна виправити. Похибки конкретних моделей компонентів схеми не можна виправити інакше, ніж заміною на більш точну. У разі низької точності моделей транзисторів, діодів, резисторів застосування програм аналізу схем у багатьох випадках буде неефективним. З іншого боку, з урахуванням усіх складових загальної похибки моделювання застосування окремих високоточних моделей компонентів призведе до нераціональних витрат часу і пам'яті ЕОМ. Тому для кожного компонента бажано мати кілька моделей різного ступеня точності та складності, щоб розробник мав змогу залежно від типу та структури проекрованої схеми вибирати ті чи інші моделі. Центральною проблемою в отриманні конкретних моделей є синтез структури моделей. У синтезі моделей використовуються такі основні підходи.

Теоретичний підхід характеризується тим, що всі рівняння моделі виводяться з фізичних особливостей процесів у компоненті. Цей підхід забезпечує отримання найбільш точних і універсальних моделей.

Експериментальний (емпіричний) підхід оснований на експериментальному дослідженні зв'язків між струмами і напругами на зовнішніх виводах компонента. Рівняння моделі отримуються шляхом апроксимації експериментальних характеристик відповідними функціями. Такі моделі точні тільки для умов, у яких проводилися вимірювання, і відображають виміряні залежності, тому не універсальні.

Експериментально-теоретичний підхід оснований на поєднанні попередніх. Наприклад, вид формульних залежностей спочатку отримується з фізичних міркувань, потім ці залежності коригуються, виходячи з результатів експерименту.

5.4 Макромоделі

Вихідною інформацією для отримання макромоделей є повні моделі вузлів на рівні моделей компонентів. Тому основне теоретичне завдання макромоделювання полягає у створенні формальної методики, що дозволяє отримати необхідну макромодель з повною моделі. У загальному випадку для нелінійних динамічних схем таке завдання не вирішене, зокрема найбільш складний синтез структури макромоделей.

Для функціональних вузлів, як і для компонентів електронних схем, бажано мати кілька моделей різного ступеня точності та складності. Виокремлюють три рівні макромоделей.

Макромоделі першого рівня утворюють найпростіші макромоделі, які відображають тільки функціонально-логічне призначення вузла, що моделюється без урахування його схмотехнічних і технологічних особливостей.

Макромоделі другого рівня відображають основні вихідні схмотехнічні параметри вузла. Для мікросхем ці параметри вказуються в технічних умовах, для фрагментів великих інтегральних схем (ВІС) їх можна отримати шляхом вимірювань.

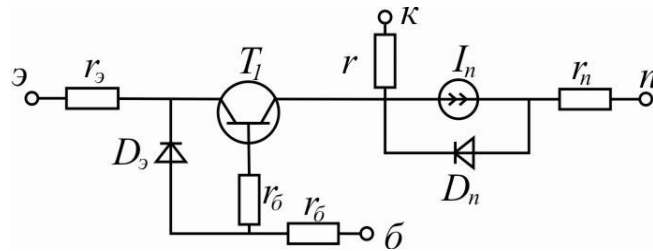


Рисунок 5.6 – Модель транзистора

Макромоделі третього рівня відображають додаткові схмотехнічні та технологічні особливості функціонального вузла (різні паразитні ефекти, неідеальність основних характеристик тощо). Ці параметри визначаються шляхом аналізу функціонального вузла за допомогою повної моделі.

Синтез макромоделей першого рівня складності простий і виконується за допомогою формальних або базових еквівалентних схем. Еквівалентна схема макромоделі логічного елемента І–НЕ (рис. 5.7), побудована на основі ідеального вхідного ($R_{BX} \rightarrow \infty$) і вихідного ($R_{ВИХ} \rightarrow 0$) опорів і залежного джерела E , реалізує логічну функцію елемента згідно з табл. 5.2. Тут використовуються такі позначення: $U_{R_{BX1}}$, $U_{R_{BX2}}$ – напруги на відповідних опорах; $U_{«0»}$, $U_{«1»}$ – рівні логічного нуля й одиниці відповідно.

На рис. 5.8 показана еквівалентна схема макромоделі ідеального операційного підсилювача з коефіцієнтом підсилення K .

Макромоделі другого та третього рівнів складності розробляються двома способами: на основі блокового макромодельовання шляхом поступового ускладнення простих еквівалентних схем, починаючи з макромоделей першого рівня; спрощенням вихідної повної моделі вузла до рівня, що визначається необхідною точністю моделювання його зовнішніх характеристик з точки зору функціонування всього електронного пристрою. З точки зору формалізації синтезу макромоделей перший підхід більш перспективний.

Таблиця 5.2 – Дані для побудови еквівалентної схеми макромоделі логічного елемента І–НЕ

$UR_{вх1}$	$UR_{вх2}$	E
$U_{<0>}$	$U_{<0>}$	$U_{<1>}$
$U_{<0>}$	$U_{<1>}$	$U_{<0>}$
$U_{<1>}$	$U_{<0>}$	$U_{<0>}$
$U_{<1>}$	$U_{<1>}$	$U_{<0>}$

Блоковий метод макромодельовання оснований на створенні набору еквівалентних схем типових блоків, з яких у подальшому можна складати різні макромоделі. Типові блоки можна поділити на два класи: універсальні макроелементи та типові базові елементи. Універсальні макроелементи реалізують математичні описи основних властивостей електронних пристроїв і не мають фізичного прототипу (опис логічних рівнянь, типових характеристик, фіксація моменту досягнення порогу спрацьовування тощо).

Дуже складно розробити функціонально повний набір макроелементів для оперативного макромодельовання цифрових і аналогових схем. Набір універсальних макроелементів дозволить формалізувати розробку макромоделей другого рівня складності.

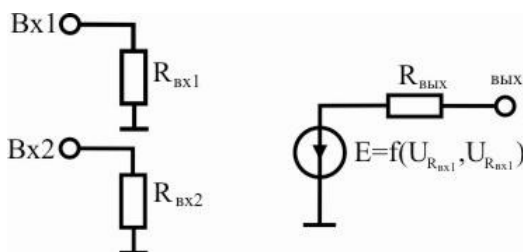


Рисунок 5.7 – Макромодель елемента І–НЕ

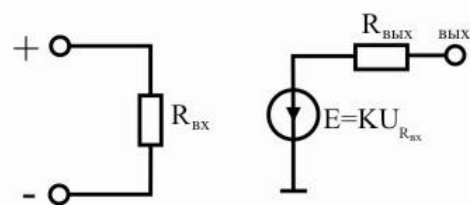


Рисунок 5.8 – Макромодель операційного підсилювача

Типові базові елементи відображають типові структурні частини модельованих вузлів (вхідні, проміжні та вихідні каскади схем тощо). У першому наближенні базові елементи мають бути «ідеальними каскадами» електронних схем за умови мінімальної складності їхньої структури. Набір моделей базових елементів у поєднанні з макроелементами дозволить формалізувати розробку найбільш точних макромоделей третього рівня складності. На рис. 5.9 наведена еквівалентна схема макромоделі третього рівня для операційного підсилювача 140УД7. Каскади «вхідний

диференційний» і «вихідний диференційний» моделюються за допомогою базових елементів, а проміжний – за допомогою макроелементів.

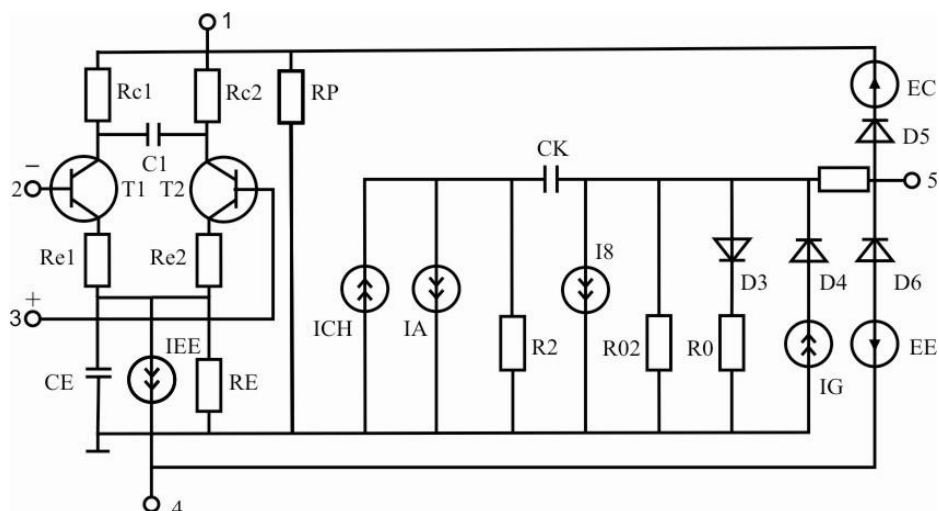


Рисунок 5.9 – Макромодель мікросхеми 140УД7:
2 ... 7 – виводи мікросхеми

5.5 Ідентифікація параметрів моделей елементів електронних схем

Основні способи визначення параметрів моделей елементів – розрахунковий і експериментальний.

Розрахунковий метод ґрунтується на безпосередньому розрахунку параметрів за відомими аналітичними формулами та виразами. Наприклад, параметри моделі транзистора для програми ПА-1 розраховуються на основі електрофізичних параметрів напівпровідника і даних про геометричні розміри топології транзистора. Параметри макромоделей розраховуються на базі аналітичних методів розрахунку модельованих функціональних вузлів.

Експериментальний метод передбачає проведення серії експериментів (натурних, машинних) для визначення параметрів моделі елемента. Експерименти бувають двох типів, коли визначаються внутрішні параметри моделі елемента безпосередньо (прямо) або вихідні параметри елемента, що моделюється з метою подальшого розрахунку внутрішніх параметрів його моделі оптимізаційними методами.

У разі прямого виміру параметри моделі визначаються у встановлених для даного елемента режимах. Методики визначення параметрів моделі різні, тому вимір кожного з них здійснюється за своєю власною схемою і потребує своєї вимірювальної апаратури. За умови великого числа параметрів процес вимірювань є тривалою та трудомісткою процедурою. У разі оптимізаційних

методів для визначення параметрів моделей потрібна розробка відповідного програмного забезпечення. На підставі вимірних (або розрахованих на більш точну модель) еталонних вихідних параметрів елемента за допомогою цих програм визначаються такі значення внутрішніх параметрів досліджуваної моделі елемента, які забезпечують найкращий збіг результатів моделювання з еталонними вихідними параметрами.

Для макромоделей вихідні параметри вузла, як правило, розраховуються на ЕОМ за допомогою повної моделі. Наскрізне, автоматизоване проектування обчислювальної апаратури приводить до поступової відмови від визначення параметрів моделей безпосереднім вимірюванням на реальних об'єктах, тим більше що в процесі проектування часто відсутній реальний прототип елемента, який моделюється. Для ідентифікації параметрів елементів більш перспективне визначення вихідних параметрів елемента (або безпосередньо параметрів моделі) за допомогою більш точних моделей цього елемента на інших рівнях проектування. Наприклад, параметри схемної моделі транзистора можна визначити за допомогою його фізико-топологічних моделей на рівні проектування компонентів електронних схем.

Розробка надійних в експлуатації програм ідентифікації параметрів моделей елементів – складне й трудомістке завдання. Особливу складність має розробка оптимізаційних методів, оскільки оптимізація проводиться в просторі багатьох змінних, а цільова функція не має аналітичного уявлення. Як цільова функція зазвичай використовується відхилення вихідних характеристик елемента, отриманих на моделі, від еталонних у робочому діапазоні зовнішніх впливів. Найбільш часто мінімізується середньоквадратичне відносне відхилення:

$$F = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n [(y_{\text{э}i} - y_{\text{м}i}) / y_{\text{э}i}]^2 \right) / n},$$

де $y_{\text{э}i}, y_{\text{м}i}$ – відповідно еталонне й отримане на моделі значення i -го вихідного параметра елемента; n – кількість вихідних параметрів.

Правильне визначення параметрів моделей елементів має дуже велике значення у вирішенні основних завдань схмотехнічного проектування. Тому впровадження програм схмотехнічного проектування має супроводжуватися розробкою заходів щодо ідентифікації параметрів моделей елементів електронних схем, зокрема створення спеціального програмного забезпечення.

5.6 Аналогові схеми

Аналогові електронні схеми поділяються на лінійні та нелінійні. Характеристики елементів електронних схем найчастіше нелінійні, тому під лінійними аналоговими маються на увазі схеми в прийнятті допущення про лінійності співвідношень між їхніми фазовими змінними в межах змін амплітуд вхідних сигналів. Такі схеми іноді називають малосигнальними (підсилювачі, фільтри та ін.). У режимі великих сигналів і під час обліку нелінійностей елементів схеми в робочих режимах аналогові схеми вважаються нелінійними (детектори, модулятори, автогенератори гармонійних коливань тощо).

Аналіз у частотній області – основний вид аналізу аналогових лінійних схем. У схемі визначаються струми і напруги як функції частоти. Вихідну математичну модель можна отримати за допомогою універсальних методів формування ММС у вигляді лінійної системи ЗДР: $GV + WV = Q$; де G , W – постійні матриці; V – вектор фазових змінних схеми; Q – вектор із постійними елементами та залежними від часу вхідними впливами.



Рисунок 5.10 – Модель лінійної аналогової схеми у вигляді чотирьохполосника

За допомогою перетворень Лапласа або Фур'є розв'язання цієї системи переводяться в область змінної $p = \sigma + j\omega$, яка називається комплексною частотою. Основна мета перетворень – зведення диференціальних рівнянь до алгебраїчних щодо комплексної частоти p . Унаслідок отримуємо модель схеми у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$AV' = B, \quad (5.1)$$

де $A = pG + W$; $V' = V(p)$; $B = Q' + GV_0$; $Q' = Q(p)$; V_0 – вектор початкових умов.

Представляючи кожну змінну у вигляді суми дійсної та уявної частини, тобто $v_i' = \text{Re}(v_i') + j\text{Im}(v_i')$, і замінюючи p на $\sigma + j\omega$, можна отримати дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь (ЛАР) для дійсної та уявної частини вектора V за умови частоти ω . Розв'язання цих систем дає модуль і аргумент для всіх змінних схеми на заданій частоті ω .

В аналізі лінійних схем інтерес мають відносини фазових змінних, взяті на окремо виділених гілках, відповідних входах і виходах схеми. У разі декількох вхідних джерел вихідну змінну визначають відповідно до принципу суперпозиції – як суму впливів кожного із джерел. Фазовими змінними в схемі є струми і напруги, тому співвідношення між вхідним джерелом і виходом схеми можна представити у вигляді чотириполюсника (рис. 5.10). Відношення між струмами і напругами на сторонах чотириполюсника в операторній формі називаються схемними функціями, наприклад, коефіцієнт передачі напруги $K_U = U_{\text{вих}} / U_{\text{вх}}$, вхідний опір $Z_{\text{вх}} = U_{\text{вх}} / I_{\text{вх}}$ тощо. За умови переходу в частотну область значення модуля та аргументу комплексних схемних функцій у діапазоні частот визначають амплітудно-частотні (АЧХ) і фазочастотні характеристики (ФЧХ) схеми.

Методи частотного аналізу лінійних схем поділяються на дві групи: символічні та чисельні.

Символічні методи основані на отриманні виразів для схемних функцій як раціональних функцій комплексної частоти з числовими коефіцієнтами. Наприклад, коефіцієнт передачі напруги

$$K_U(p) = \left(\sum_{i=0}^n a_i p^i \right) / \left(\sum_{j=0}^m b_j p^j \right), \quad (5.2)$$

де a_i і b_i – коефіцієнти, що залежать від параметрів елементів схеми; m і n не перевищують кількості реактивних елементів у схемі.

Вираз (5.2) отримано внаслідок застосування формули Крамера до системи (5.1). Символічні методи характеризуються швидким зростанням обсягу обчислень у разі збільшення розмірності задачі. Розширення меж складності аналізованих схем можливе на основі діакоптичних методів.

Чисельні методи основані на багаторазовому розв'язанні системи (5.2) для заданого набору точок на осі частот і отриманні АЧХ і ФЧХ схеми. Для обчислення АЧХ і ФЧХ необхідно задати точки в необхідному діапазоні частот. Для простих характеристик точки вибираються з рівномірним кроком за

частотою, кількість точок 40 ... 100 на весь діапазон. У більш складних випадках потрібний змінний крок за частотою. Чисельні методи набули найбільшого поширення в частотному аналізі лінійних схем.

Аналіз лінійних схем у тимчасовій області виконується для двох видів вхідних впливів: 1) стандартних імпульсних сигналів $\theta(t)$ – одиничної функції Хевісайда і $\delta(t)$ – дельта-функції Дірака; 2) вхідних сигналів довільної форми.

У разі впливу стандартних сигналів можна отримати аналітичний розв’язок вихідної лінійної системи ЗДР і визначити відповідно перехідну $h(t)$ і імпульсну $g(t)$ характеристики схеми. У цьому випадку доводиться розв’язувати складну задачу обчислення всіх власних значень і векторів матриці Якобі вихідної системи. За умови впливу сигналів довільної форми обчислюються перехідні процеси за частотними характеристиками схеми на основі кусково-лінійної або сплайнової апроксимації АЧХ і ФЧХ. У цьому випадку точність розрахунку перехідних процесів невисока.

У загальному випадку для будь-яких вхідних сигналів основним методом аналізу лінійних схем у тимчасовій області є чисельне розв’язання вихідної системи на заданому інтервалі часу. У цьому разі зазвичай використовуються неявні методи інтегрування зі змінним кроком. Є широкий клас лінійних схем, відповідних резонансних пристроїв високої добротності (наприклад, фільтри зосередженої селекції). Час установлення стаціонарного режиму в таких схемах може містити тисячі періодів власних коливань. У цьому випадку звичайні методи інтегрування незастосовні через значну кількість кроків і накопичення великих методичних помилок. Для таких схем необхідно застосовувати спеціальні алгоритми чисельного аналізу.

Аналіз нелінійних аналогових схем у часовій області передбачає розгляд стаціонарних режимів коливань і перехідних процесів. Математичною моделлю схеми є система нелінійних ЗДР вигляду

$$\dot{V} = F(V, t), \quad V(t_0) = V_0. \quad (5.3)$$

Припустимо, що розв’язання системи можна апроксимувати виразом

$$V(t) = V_0(t) + \sum_{i=1}^L (V_{ci}(t) \cos i\omega_0 t + V_{si}(t) \sin i\omega_0 t), \quad (5.4)$$

де $i\omega_0$ – частоти гармонійних складових; $\omega_0 = 2\pi/T_0$; $V_{Ci}(t)$ та $V_{Si}(t)$ – функції часу, що змінюються в загальному випадку набагато повільніше, ніж $\sin \omega_0 t$ і $\cos \omega_0 t$, тобто порядок величин $V_{Ci}(t)$ і $V_{Si}(t)$ набагато менший, ніж ω_0 .

Стационарному режиму коливань відповідає періодичний розв’язок системи (5.3), якщо $t \rightarrow \infty$:

$$V_{CT} = V_{0CT} + \sum_{i=1}^L (V_{CiCT} \cos i\omega_0 t + V_{SiCT} \sin i\omega_0 t).$$

Метод Ейпріла–Тріка для розв’язання цієї задачі оснований на визначенні вектора початкових умов V_0 , для якого справедлива рівність

$$V_0 = V(t_0) = V(t_0 + T_0). \quad (5.5)$$

Рівність (5.5) можна записати у вигляді

$$\Phi(V_0) = V_0 - V(t_0 + T_0) = 0. \quad (5.6)$$

Система (5.6) розв’язується методом Ньютона щодо V_0 . Для обчислення вектор-функції $\Phi(V_0)$ для деякого значення V_0 необхідно проінтегрувати систему (5.3) на інтервалі $[t_0, t_0 + T_0]$. Тому для обчислення матриці Якобі системи (5.6) $[\partial\Phi/\partial V_0]$ застосовуються метод збільшень або варіаційні методи. В обох випадках обчислення матриці $[\partial\Phi/\partial V_0]$ пов’язане із значними витратами машинного часу. У разі високої добротності схеми метод потребує дуже високої точності інтегрування системи (5.3). Задача визначення перехідного процесу, що описується формулою (5.4), дуже складна, надійні, універсальні алгоритми для її розв’язання поки відсутні. На практиці застосовуються два можливих підходи.

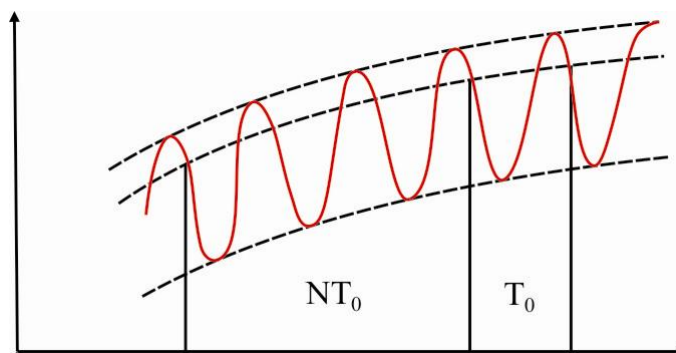


Рисунок 5.11 – Вихідний сигнал високодобротної електронної схеми

Узагальнений алгоритм Ейпріла–Тріка розглянемо на прикладі рис. 5.11. Нехай задані три моменти часу t_0 , t_1 і t_2 , зокрема $(t_2-t_1)=T_0$, $(t_1-t_0)=NT_0$, де N – ціле число, значення $V(t_0)$ відомо. Якщо N вибрати так, щоб функції $V_{ci}(t)$ і $V_{si}(t)$ змінювалися мало на інтервалі $[t_0, t_2]$, то, виражаючи перші похідні цих функцій через кінцеві різниці, отримаємо

$$\dot{V}_{CS} \cong [V_{CS}(t_2) - V_{CS}(t_1)]/T_0 \cong [V_{CS}(t_2) - V_{CS}(t_0)]/(N+1)T_0, \quad (5.7)$$

де $V_{CS}=(V_{ci} \cup V_{si})$.

З огляду на (5.7), за допомогою формули (5.4) можна отримати

$$\Phi(V(t_1)) = V(t_2) - V(t_1) - [V(t_2) - V(t_0)]/(N+1) = 0. \quad (5.8)$$

Система (5.8) розв'язується методом Ньютона щодо векторів V_i , $i=1, 2, \dots, m+1$, водночас для деякого значення $V(t_1)$ необхідно чисельно проінтегрувати систему (5.3) на інтервалі $[t_1, t_2]$. Цьому методу притаманні недоліки методу Ейпріла–Тріка, пов'язані зі складністю визначення матриці $[\partial\Phi/dV]$ і залежністю обчислювальних витрат від добротності схеми.

Метод вкладеного інтегрування багатоперіодних схем (ВІБС) оснований на спільному інтегруванні двох систем ЗДР: нелінійної (5.3) на періоді T_0 (внутрішнє інтегрування); $V_{CS} = F_1(V_{CS}, t)$, $V_{CS}(t_0)=V_0$ на інтервалі $[t_0, t_1]$ (зовнішнє інтегрування). Оскільки вектор-функція F_1 у явному вигляді невідома, для її оцінки можна скористатися наближеною формулою

$$\dot{V}_{CS}(t) = [V_{CS}(t+T_0) - V_{CS}(t)]/T_0.$$

Для зовнішнього інтегрування можуть застосовуватися явні та неявні формули. В окремому випадку для інтегрування за неявною формулою Ейлера на кроці зовнішнього інтегрування $H=NT_0$ отримаємо систему (5.8), тому ВІБС можна розглядати як узагальнення попереднього методу. Важливою відмінною рисою ВІБС є алгоритм виконання неявного кроку зовнішнього інтегрування, оснований на таких положеннях. Внутрішнє інтегрування виконується тільки однокроковими. На кожному i -му кроці внутрішнього інтегрування h_i на інтервалі $[t_1, t_2]$ для обраної формули інтегрування можна скласти систему рівнянь:

$$\Phi(V_i, V_{i+1}, \dot{V}_i, \dot{V}_{i+1}, h_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.9)$$

де V_i та V_{i+1} – значення фазових змінних відповідно на початку і в кінці кроку h_i , зокрема $V_1 = V(t_1)$, $V_{m+1} = V(t_2)$.

Унаслідок цього на інтервалі $[t_1, t_2]$ отримаємо m систем типу (5.9) з $(m+1)$ невідомими векторами V_i . Загальна замкнута система рівнянь містить і систему, отриману для формули зовнішнього інтегрування, яка для неявної формули Ейлера має вигляд

$$V_1 = V(t_0) + (V_{i+1} - V_1)H/T_0, \quad (5.10)$$

де $H = NT_0$ – крок зовнішнього інтегрування.

Ця формула еквівалентна (5.8). Отримані системи (5.9) і (5.10) розв'язуються методом Ньютона щодо векторів V_i , $i=1, 2, \dots, m+1$. Основна перевага розглянутого алгоритму полягає в тому, що матриця Якобі для методу Ньютона конструюється безпосередньо з підматриць $[dF/dV]$, які обчислюються аналітично в програмах аналізу електронних схем. У виконанні ітерацій враховується структурна розрідженість матриці Якобі.

5.7 Цифрові та цифро-аналогові схеми

Основним видом аналізу цифрових і цифро-аналогових електронних схем є аналіз у часовій області. Математичну модель схеми отримуємо за допомогою універсальних методів формування ММС у вигляді нелінійної системи ЗДР:

$$\Phi(V, \dot{V}, t) = 0. \quad (5.11)$$

Завдання аналізу цифрових схем пов'язані з дослідженням схем невисокого ступеня складності (до 100 транзисторів) – цифрових мікросхем малого ступеня інтеграції, фрагментів ВІС тощо і складних схем ВІС з урахуванням розподілених параметрів електричних ланцюгів, що пов'язують фрагменти ВІС між собою. Основним методом аналізу в першому випадку є чисельне розв'язання системи (5.11) на заданому інтервалі часу за умови заданого набору вхідних імпульсів або рівнів напруги. Зазвичай використовуються неявні методи інтегрування невисокого порядку точності з перемінним кроком. У процесі інтегрування розраховуються вихідні статичні

та динамічні параметри – функціонали, що характеризують цифрові схеми: рівні логічної «1» і «0», часи затримань і тривалості фронтів вихідних сигналів та ін. У другому випадку необхідна розробка спеціальних швидкодіючих алгоритмів аналізу ВІС.

Труднощі аналізу ВІС пояснюються такими причинами: 1) розмірність системи (5.11) становить сотні й тисячі рівнянь навіть у використанні макромоделей, що призводить до великих витрат машинного часу; 2) для розрахунку характеристик ВІС необхідне моделювання десятків тактів роботи для різних сполучень вхідних сигналів, що призводить до збільшення тимчасового інтервалу моделювання; 3) необхідно враховувати розподілений характер між'єднань і компонентів ВІС і вплив теплових процесів на електричні параметри схем. Для розробки алгоритмів аналізу ВІС застосовуються діакоптичні методи та змішане (багаторівневе) моделювання ВІС.

Діакоптичні методи (розбиття, декомпозиції) ґрунтуються на поділі складної схеми (або системи рівнянь) на прості підсхеми (підсистеми) з урахуванням зв'язків між ними. Розв'язання задачі високої розмірності зводиться до послідовного (або паралельного) розв'язання декількох підзадач меншої розмірності. Кожну підсхему можна, у свою чергу, розбити на більш прості підсхеми.

Поділ складної схеми на підсхеми найчастіше виконується проектувальником з урахуванням функціональної закінченості підсхем та їхньої повторюваності в структурі схеми. У деяких випадках розробляються спеціальні алгоритми розбиття графа схеми на слабкозв'язані між собою підграфи (кластери), які утворюють відповідні підсхеми. Після поділу схеми фазові змінні поділяються на внутрішні змінні окремих підсхем і граничні, що відображають зв'язки між підсхемами. Діакоптичні методи аналізу ВІС поділяються на три групи: підсхем, роздільного ітерування й роздільного інтегрування.

Методи підсхем характеризуються тим, що на етапі формування ММС спочатку групується рівняння окремих підсхем, а в кінці – усі граничні рівняння. Унаслідок цього матриця Якобі системи (5.11) набуває форми блоководіагональної матриці з обрамленням.

Метод роздільного ітерування оснований на використанні різної швидкості збіжності ітерацій у вирішенні нелінійних алгебраїчних рівнянь для окремих підсхем. Застосування методу Ньютона на кожному кроці інтегрування системи (5.11) приводить до однакового числа ітерацій для всіх

підсхем, яке визначається за підсхемою з найбільш повільної збіжності ітерацій. У складній ВІС, як правило, метод Ньютона для кожної підсхеми збігається за різною кількістю ітерацій. Незалежне розв'язання системи нелінійного алгебраїчного рівняння (НАР) для кожної підсхеми значно знижує обчислювальні витрати під час аналізу всієї ВІС. Розглянемо можливий алгоритм роздільного ітерування системи НАР в процесі аналізу ВІС. Кожній підсхемі відповідає підсистема НАР:

$$F_i(V_i V_{ri}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l - 1, \quad (5.12)$$

де V_i – вектор внутрішніх змінних i -ї підсхеми; $V_{ri} \in V_r$, V_r – вектор граничних змінних.

Система граничних рівнянь

$$F_r(V, V_r) = 0, \quad (5.13)$$

де V – вектор, що складається з підвектора V_i .

Кожна система (5.14) розв'язується методом Ньютона автономно щодо V_i за умови фіксованого вектора $V_{ri,k}$, де k – номер ітерації Ньютона у розв'язанні системи (5.13). Потім виконується $(k+1)$ -я ітерація для розв'язання системи (5.13) у разі фіксованого вектора V . Закінчення ітераційного процесу визначається заданою точністю рішення системи (5.13). Збіжність у розв'язанні систем (5.12) від ітерації до ітерації поліпшується за умови збіжності розв'язання системи (5.13). Якщо $V_{ri,k+1} = V_{ri,k}$, то систему (5.12) для i -ї підсхеми на $(k+1)$ -ї ітерації розв'язувати не потрібно.

Методи роздільного інтегрування оснований на різній інерційності окремих підсхем, коли в одній підсхемі перехідні процеси протікають швидко, а в іншій – повільно. До методів роздільного інтегрування належать методи обліку латентності, вкладених кроків, багатополюсних підсхем, односпрямованих реакцій, прогнозованих реакцій, релаксації форми сигналу (РФС). Розглянемо найбільш відомий метод багатополюсних підсхем, оснований на автономному інтегруванні рівнянь усіх підсхем зі своїм оптимальним кроком за умови фіксованих значень граничних змінних. Кожній підсхемі відповідає підсистема ЗДР

$$F_i(V_i, \dot{V}_i, V_{ri}, \dot{V}_{ri}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, (j - 1). \quad (5.14)$$

Система граничних ЗДР має вигляд

$$F_r(V, \dot{V}, V_r, \dot{V}_r, t) = 0. \quad (5.15)$$

На кожному кроці інтегрування системи (5.15) виконуються такі операції: прогнозування граничних змінних $V_{ri,np}$ і $\dot{V}_{r,np}$, автономне інтегрування систем (5.14) у межах кроку за умови фіксованих значень $V_{r,np}$ і $\dot{V}_{ri,np}$, обчислення остаточних значень граничних змінних V_r на даному етапі й корекції внутрішніх змінних за допомогою відомих коефіцієнтів чутливості. У разі автономного інтегрування необхідно визначити коефіцієнти чутливості внутрішніх змінних до змін граничних змінних, які використовуються для формування матриці Якобі в остаточному розв'язанні системи (5.15) і корекції внутрішніх змінних з урахуванням остаточних значень V_{ri} . Це завдання вирішується шляхом інтегрування одночасно із системою (5.15) лінійної пов'язаної системи ЗДР.

Отже, діакоптичні методи забезпечують прискорений аналіз ВІС шляхом зведення задачі великої розмірності до сукупності підзадач меншої розмірності. Організація автономних обчислювальних процесів для підсхем дозволяє проводити аналіз ВІС за умови обмеженого обсягу оперативної пам'яті ЕОМ і виконувати паралельні обчислення в багатопроцесорних обчислювальних системах.

Змішане багаторівневе моделювання ґрунтується на паралельному використанні моделей і алгоритмів різних рівнів у процесі розрахунку. Багаторівневе моделювання дозволяє описувати різні частини схеми ВІС з різним ступенем деталізації. Основні рівні деталізації – функціонально-логічний, схемотехнічний, приладовий. Змішане моделювання дозволяє автоматизувати схемотехнічне проектування цифрових і цифро-аналогових електронних схем.

В алгоритмах змішаного (багаторівневого) моделювання модель ВІС може одночасно містити моделі елементів і підсхем на всіх рівнях деталізації, тому інформаційне узгодження рівнів є одним з основних завдань. У вирішенні цього завдання можна виокремити два підходи.

Аналіз ВІС виконується на схемотехнічному рівні, а моделі підсхем на інших рівнях надаються відповідними макромоделями. Приклади таких макромоделей: багатосекційна Лінвілла для транзистора відбиває процеси в транзисторі на мікрорівні (щодо фізико-топологічних моделей транзистора ця

модель буде макромоделлю); макромодель логічного елемента I–HE відбиває логічну функцію для цього елемента. Такий підхід у поєднанні з діакоптичними методами дозволяє вирішувати багато завдань аналізу (зокрема облік міжз'єднань і теплових процесів) й оптимізації електричних схем ВІС. Але підхід не завжди ефективний, особливо в моделюванні НВІС. Це пов'язано з тим, що в разі отримання макромоделей мікрорівня відбувається втрата точності (за рахунок переходу від розподілених моделей до зосереджених), а для макромоделей системного рівня – втрата економічності (оскільки логічні елементи описуються на електричному рівні). У процесі аналізу кожна виділена підсхема ВІС моделюється і розраховується методами одного з перелічених вище рівнів, які обирають залежно від конкретних вимог до точності та економічності моделі підсхеми. Спільний аналіз схеми ВІС виконується синхронно для всіх підсхем, водночас на стиках різних рівнів працюють спеціальні елементи-перетворювачі фазових змінних для організації зв'язків між різнорівневими моделями. Розглянемо цей універсальний підхід докладніше, оскільки він забезпечує вдалий компроміс між вимогами точності (завдяки поданням найбільш відповідальних підсхем ВІС з потрібним ступенем деталізації) і економічності (завдяки поданням інших підсхем на більш високих рівнях моделювання аж до системного).

На рис. 5.12 показана можлива структура програмного забезпечення системи змішаного (багаторівневого) моделювання ВІС. Програми аналізу розподілених моделей забезпечують моделювання і розрахунок на мікрорівні активних і пасивних елементів ВІС, міжз'єднань і паразитних зв'язків, теплових ефектів. Програми аналізу електронних схем дозволяють проводити електричний розрахунок схем на рівні зосереджених моделей і макромоделей. Програми структурного і функціонально-логічного аналізу забезпечують проектування архітектури й логічних схем цифрових і цифро-аналогових ВІС. Усі ці підсистеми можуть працювати автономно для вирішення завдань проектування і спільно в процесі аналізу ВІС.

Зв'язок підсистем за інформацією здійснюється через загальну базу даних системи й елементи-перетворювачі інформації. Зв'язок підсистем з управління здійснюється за допомогою спеціальної програми-диспетчера, виконує такі функції: введення опису ВІС і звернення до трансляторів відповідних підсистем для формування моделей окремих підсхем; підключення між моделями різних рівнів елементів-перетворювачів інформації; формування повної ММС ВІС; вибір оптимальної послідовності звернень до різних моделей елементів у процесі розрахунку; синхронізацію роботи різних підсистем у ході розрахунку;

зв'язок з іншими підсистемами САПР (наприклад, з підсистемою топологічного проектування ВІС та ін.).

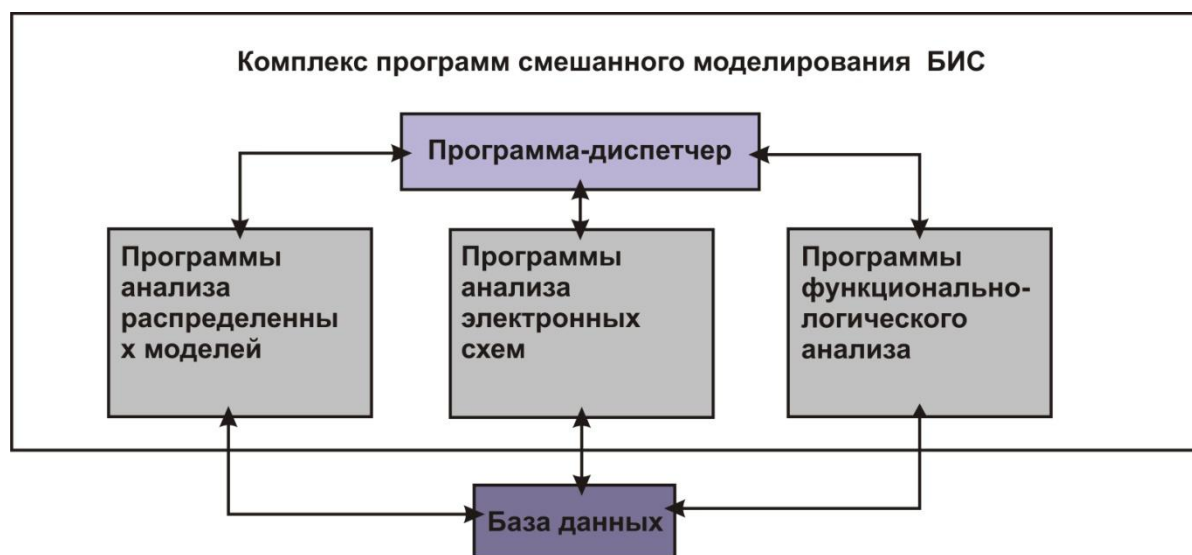


Рисунок 5.12 – Структура комплексу програм змішаного моделювання ВІС

Елементи-перетворювачі інформації перетворюють дискретні сигнали в безперервні й навпаки. В асинхронному двозначному логічному моделюванні кожен сигнал має два можливих значення – «0» і «1», а час квантований за моментами перемикання сигналів. Перетворення безперервного сигналу в дискретний здійснюється за допомогою порогових функцій, тобто за умови напруги входу $U_{вх}$, меншій за деякий поріг $U_{пор}$, логічний стан входу $Q_{вх} = \langle 0 \rangle$, якщо $U_{вх} > U_{пор}$, стан входу $Q_{вх} = \langle 1 \rangle$. Момент перетину порогові напруги відповідає моменту появи сигналу. У разі зворотного перетворення слід уникати миттєвих перепадів напруги на виходах елементів-перетворювачів дискретних сигналів у безперервній, це може порушити стійкість обчислювального процесу в безперервній підсистемі. Тому треба імітувати кінцевий час наростання логічних сигналів на виході елементів-перетворювачів. У низці випадків бажано відображати вхідні й вихідні вольт-амперні характеристики логічних елементів.

Синхронізувати підсистеми можна на основі подієвого моделювання, за допомогою графа, що відображає напрямки потоків інформації, якими обмінюються моделі елементів. Наприклад, у логіко-електричному моделюванні спочатку виконується крок інтегрування в електричній

підсистемі, потім відбувається звернення до підсистеми логічного моделювання. Якщо в межах кроку з'являються нові події на вході електричної частини, то крок зменшується до появи першої нової події. Величина наступного кроку повинна вибиратися таким чином, щоб не перевищувати моменту появи чергові події на вході електричної частини схеми. Така організація обчислень пов'язана з тим, що події порушують гладкість безперервних змінних за часом. Подієве моделювання реалізується також урахуванням латентності. Підсхема вважається латентною, якщо на поточному інтервалі часу (у межах кроку інтегрування) усі внутрішні та граничні змінні підсхеми не змінюються. Поки підсхема латентна, можна не розв'язувати рівняння, що слугують для визначення її внутрішніх змінних. Електрична підсхема латентна, якщо збільшення кожної змінної її похідної за часом не перевищує деяких заданих порогових значень в межах кроку. Логічна підсхема латентна в разі відсутності сигналів на входах і виходах. Вибір порогових значень для електричних підсхем є складним завданням, оскільки маленький поріг не дає виграшу (якщо поріг дорівнює нулю, то підсхема ніколи не буде латентною), а великий – може призвести до помилкових результатів. Визначення латентності логічних підсхем технічно не створює труднощів. Тому доцільно враховувати латентності тільки для логічних підсхем, а для електричних підсхем виконувати автономне інтегрування зі своїм оптимальним кроком.

5.8 Модельний експеримент. Застосування програми наскрізного проектування OrCad для моделювання електричних схем

Для моделювання електричних схем використовуються різні мови опису схем. Наведемо приклади найбільш поширених алгоритмів, зокрема Spice. Його розроблено в кінці 70-х рр. в університеті Берклі (США, Каліфорнія). Для моделювання пристроїв на електричному рівні широко використовуються алгоритми Spice (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis). На їхній основі створено декілька комерційних програм для ПК: HSpice (фірми MetaSoftware), Pspice (MicroSim), IS_Spice (Intusoft), Micro-Cap (Spectrum Software), Analog Workbench (Cadence), Saber (Analog), Dr.Spice та ViewSpice (Deutsch Research). Широко розвиваються програми PSpice, Dr.Spice, Micro-Cap. Програми Design Lab є як складовою частиною пакета OrCAD, а програма Dr.Spice – пакета Accel EDA 14.0, утворюючи потужні системи наскрізного проектування апаратури.

Програма OrCAD має вбудовані математичні моделі типових компонентів: біполярні транзистори, МОП-транзистори, польові транзистори з керуючим р-n-переходом, арсенід-галієвий польовий транзистор, діоди, резистори, конденсатори, індуктивності, незалежні джерела напруги і струму, лінії затримки, ключі, керовані джерела, операційні підсилювачі, компаратори.

Параметри математичних моделей компонентів записуються в бібліотечні файли або складаються у файли окремих моделей. Бібліотеки програм містять велику кількість моделей компонентів зарубіжних фірм. Зокрема програма OrCAD містить кілька десятків тисяч компонентів. Ліцензовані користувачі отримують доступ через Інтернет до розширеної бази даних, що містить відомості приблизно про 200 тис. компонентів різних фірм.

Для електричного моделювання програма забезпечує можливість створення макромоделей (ієрархічних блоків) будь-якого ступеня вкладеності фрагментів ланцюга або окремих пристроїв, що складаються з типових компонентів. Використання макромоделей не тільки зменшує розміри електричних схем, але й скорочує час обчислень. Програма використовується в моделюванні аналогових, цифрових та змішаних цифро-аналогових схем.

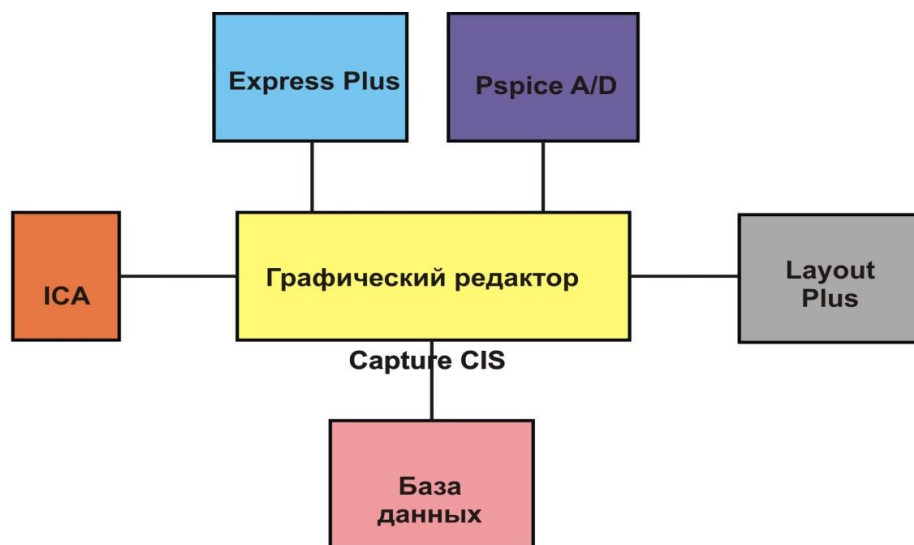


Рисунок 5.13 – Склад програми OrCAD 9.2

САПР OrCAD на цей час є практично єдиним засобом наскрізного проектування цифрової, аналогової та цифро-аналогової апаратури на платформі Windows.

Склад САПР OrCAD 9.2 наведено на рис. 5.13. Електрична схема створюється в редакторі Capture CIS. За допомогою служби ICA є доступ через

Інтернет до бази даних, що містить відомості про 200 тис. компонентів різних фірм. За допомогою програми Express Plus проводиться моделювання цифрових схем і синтез ПЛІС, компоненти яких описані мовою VHDL. Програма PSpice A/D застосовується для моделювання цифрових, аналогових та цифро-аналогових схем. Розробка друкованих плат проводиться за допомогою вбудованої програми Layout Plus.

У САПР OrCAD 9.2 може бути створено чотири опції проекту:

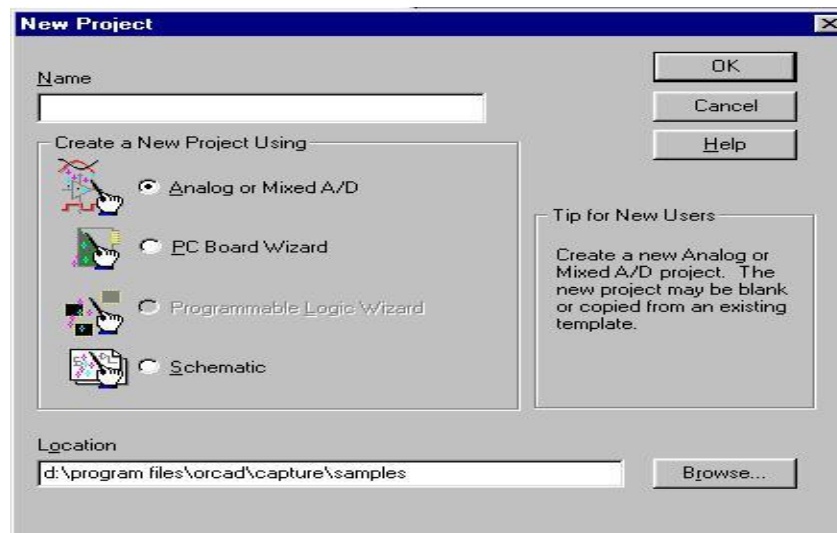


Рисунок 5.14 – Вікно OrCAD 9.2

- Analog or Mixed – Signal Circuit – моделювання аналогових, цифрових і цифро-аналогових схем;
- PC Board – друковані плати з можливістю моделювання схем у PSpice A/D і цифрових схем в Express Plus;
- Programmable Logic – моделювання цифрових схем і синтез програмованої логіки;
- Schematic – створення та документування принципів схем.

Нижче розглядається методика моделювання цифрових і аналого-цифрових схем в системі наскрізного проектування OrCAD.

Задача.

Проаналізувати залежність коефіцієнта передачі активного фільтра нижніх частот (ФНЧ) (рис. 5.15) від частоти в смузі 100 Гц...100 кГц у пакеті OrCad.

Використовуючи цільові функції, знайти частоту f_{max} , на якій амплітудно-частотна характеристика $K_u(f)$ має максимум, коефіцієнт передачі на цій частоті. Побудувати графік частотної характеристики $K_u(f)$.

За допомогою режиму PARAMETRIC визначити такі значення $C3 = C6$ на схемі рис. 5.15, за умови яких $K_u(f)$ дорівнює до $3 \pm 0,1$.

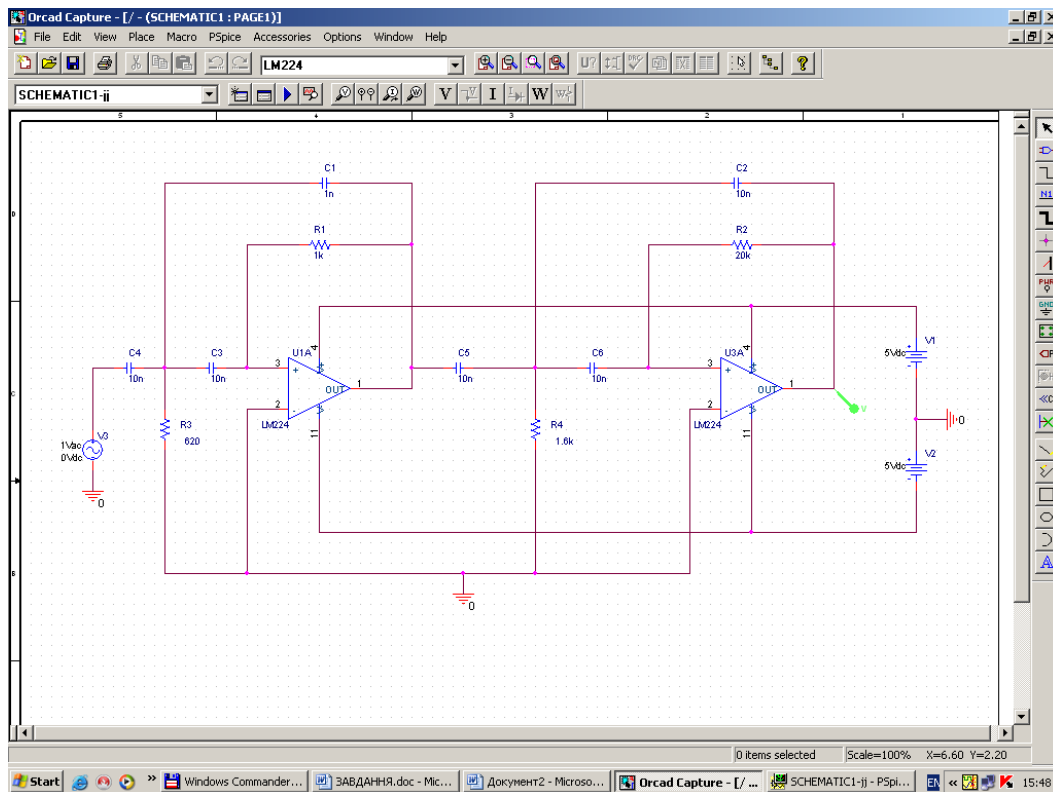


Рисунок 5.15 – Схема активного ФНЧ

Розв’язання.

Для створення нового проекту виконується команда **File>New Project**. Після цього в діалоговому вікні, що відкрилося (рис. 5.14), на рядку **Name** вказується ім’я, а на рядку **Location** – ім’я підкаталогу розташування проекту.

Далі в середній частині цього вікна вибирається тип проекту: **Analog or Mixed-Signal Circuit** – аналогові, цифрові або змішані аналого-цифрові пристрої, що моделюються за допомогою програми PSpice A/D.

Компоненти розміщуються на схемі відповідно до команди **Place>Part**.

У діалоговому вікні цієї команди спочатку в списку **Libraries** вибирається ім’я однієї або декількох бібліотек, зміст яких відображається на панелі **Part** (для вибору декількох бібліотек натискається та втримується клавіша **Ctrl**). Після цього на панелі **Part** вибирається ім’я компонента, символ якого має бути розміщений на схемі.

Натисканням на кнопку **Add Library** відкривається діалогове вікно для додавання бібліотек у список **Libraries**, натискання на кнопку **Remove Library**

видаляє обрану бібліотеку зі списку. Кнопка **Part Search** призначена для пошуку конкретного компонента в бібліотеках зі списку **Libraries**. Елемент LM324 знаходиться в бібліотеці OPAM, резистори та конденсатори – у бібліотеці ANALOG. Після натискання на кнопку **OK** символ обраного компонента переноситься на схему. Рухом курсору компонент переміщується в потрібне місце схеми і фіксується натисканням лівої кнопки миші. Після цього на схему може бути розміщена ще одна копія цього ж символу. Натискання правої кнопки миші відкриває спливаюче меню, у якому дублюється виклик команд основного меню для обертання (**Rotate**), дзеркального відображення (**Mirror**), зміни масштабу зображення (**Zoom**), редагування параметрів компонента (**Edit Properties**) і низка інших. Завершення розміщення на схемі символу обраного компонента виробляється після вибору в цьому меню команди **End Mode** або натискання на клавішу **Esc**.

За командами **Place>Ground** і **Place>Power** відкриваються діалогові вікна розміщення компонентів «земля» або «живлення». Перелік символів «землі» і джерел живлення, розміщені в штатних бібліотеках CAPSYM.OLB і SOURCE.OLB. Ці символи можуть бути розміщені на схемі тільки за допомогою команд **Place>Ground** і **Place>Power**. Обидві ці команди еквівалентні.

Провідники кіл розміщуються за командою **Place>Wire**, натисканням комбінації клавіш **Shft+W** або натисканням на кнопку панелі інструментів. Режим введення кіл завершується натисканням клавіші **Esc** або вибором рядка **End Wire** у спливаючому меню, що відкривається клацанням правої кнопки миші.

Після виконання цих дій буде створена схема (рис. 5.15). У роботі з OrCAD Capture директиви моделювання задаються/редагуються за командою **PSpice>New/Edit Simulation Profile**. Після завдання цієї команди відкривається діалогове вікно, у якому можна задати режим моделювання:

AC Sweep – розрахунок частотних характеристик і рівня шуму. У діалоговому вікні задання параметрів режиму **AC Sweep** є два розділи. У першому задаються параметри директиви зміни частоти. У діалоговому вікні в розділі **AC Sweep Type** визначається характер зміни частоти:

- **Linear** – лінійна шкала;
- **Octave** – зміна частоти октавами;
- **Decade** – зміна частоти декадами.

У розділі **Sweep Type** задаються параметри діапазону частот:

- **Total Pts., Pts/Decade, Pts/Octave** – загальна кількість точок у виборі лінійного масштабу або кількість точок за частотою на одну декаду або октаву;
- **Start. Freq** – початкова частота, яка дорівнює до 100 Гц;
- **End Freq** – кінцева частота, яка дорівнює до 100 кГц.

Після вибору завдання на моделювання необхідно запустити завдання на виконання за допомогою команди **Pspice\Run**.

У системі OrCAD програма моделювання **PSpice** об'єднана з програмою відображення та оброблення результатів моделювання **Probe**. Результати моделювання зображені на рис. 5.16.

За командою **Trace>Eval Goal Function** програми **Probe OrCad** обчислюються цільові функції. Цільова функція для розрахунку частоти f_{\max} , на якій амплітудно-частотна характеристика $K_u(f)$ максимум має вигляд **CenterFreq(1,dB_level)**, де замість першого параметра одним клацанням курсору підставляється ім'я змінної, обмірюваної в децибелах.

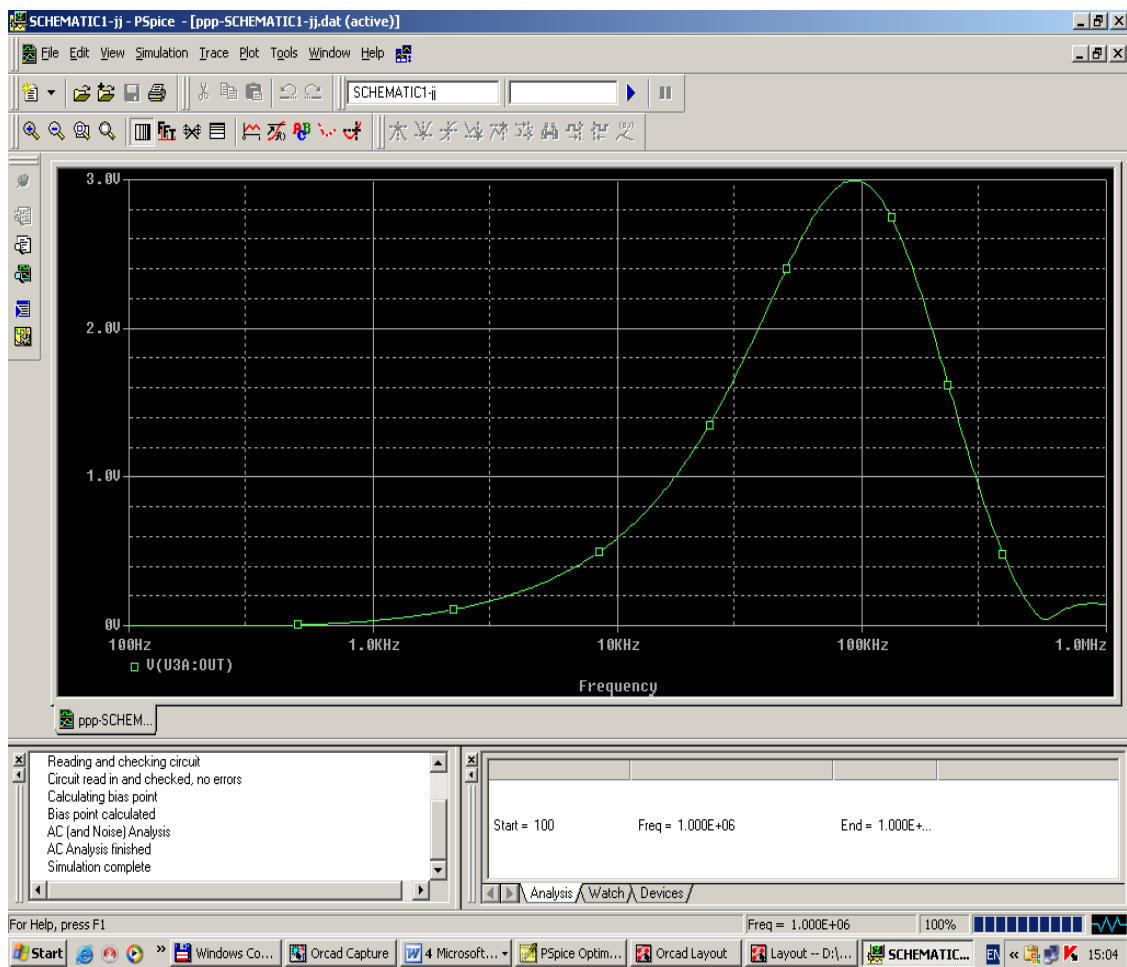


Рисунок 5.16 – Результати моделювання

Після вибору курсором імені цільової функції воно переноситься в командний рядок без вказівки параметрів – CenterFreq (,), імена змінних вказуються курсором, а додаткові параметри (у цьому випадку суфікс db) вводяться з клавіатури. Значення цільових функцій відображаються на екрані подвійно.

Якщо в меню **Tools>Options** не включена опція **Display Evaluation**, то значення цільової функції міститься у вікні.

Якщо ж опція **Display Evaluation** включена, то результати розрахунку цільової функції відображаються на графіку, де, крім того, позначені точки, на підставі яких вона обчислена.

Після виконання цих дій **OrCad** будує графік, зображений на рис. 5.17.

Отже, частота f_{\max} , на якій амплітудно-частотна характеристика $K_u(f)$ має максимум, дорівнює 99 202 Гц. Значення $K_u(f)$ дорівнює 2,0347.

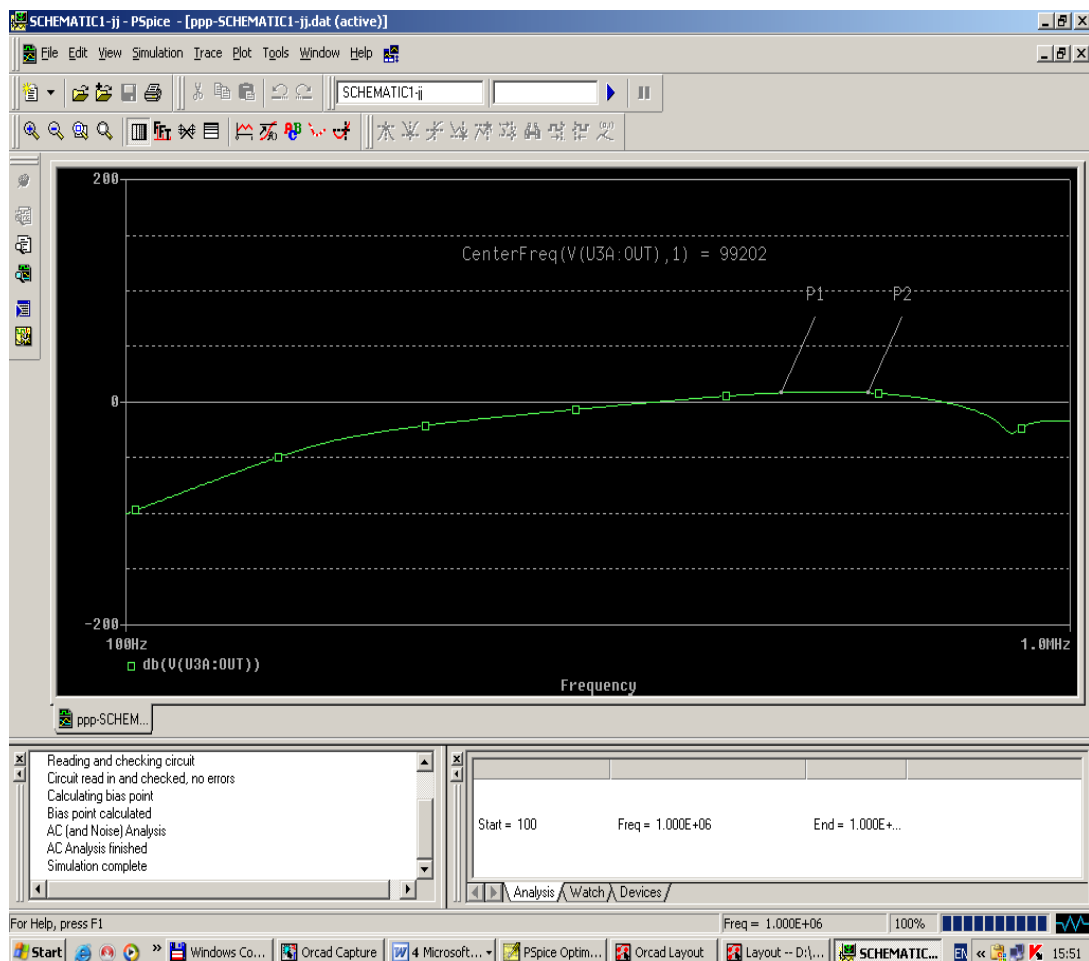


Рисунок 5.17 – Результати розрахунку цільової функції

Далі необхідно, використовуючи режим PARAMETRIC, визначити такі значення $C3 = C6$ на схемі рис. 5.15, за яких $K_u(f)$ дорівнює до 3 ± 0.1 . Для цього замість величини номіналу необхідно присвоїти елементам $C3$ та $C6$ будь-яке ім'я (у нашому випадку – cc), далі необхідно це ім'я пов'язати з компонентом PARAM, який знаходиться в бібліотеці SPECIAL.

Параметричний режим виконується в діалоговому вікні, після натискання на кнопку **Parametric** у меню вибору директив моделювання.

Після вибору завдання на моделювання необхідно запустити завдання на виконання за допомогою команди **Pspice\Run**. У системі OrCAD програма моделювання **PSpice** об'єднана з програмою відображення та оброблення результатів моделювання **Probe**.

Результати моделювання подані на рис. 5.18.

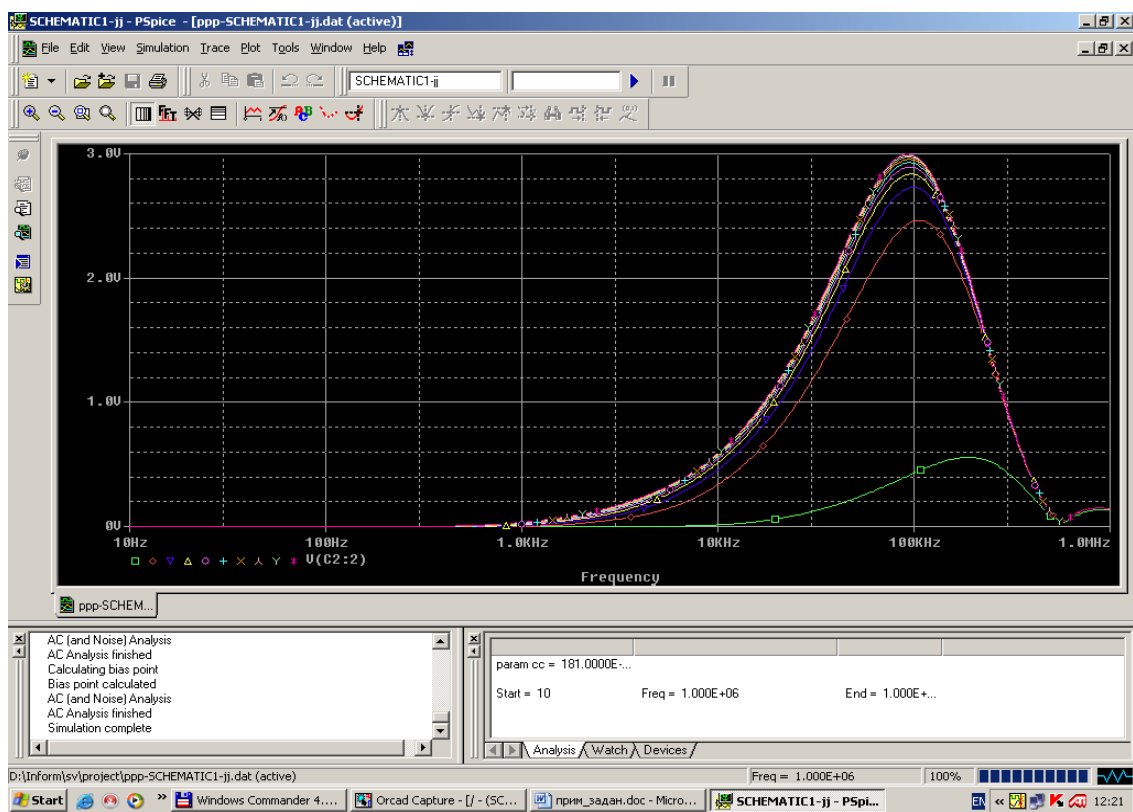


Рисунок 5.18 – Результати оптимізації

З графіка на рис. 5.18 можна отримати графік залежності $K_u(f)$ від резистора $C3$ та $C6$, який має вигляд, поданий на рис. 5.19.

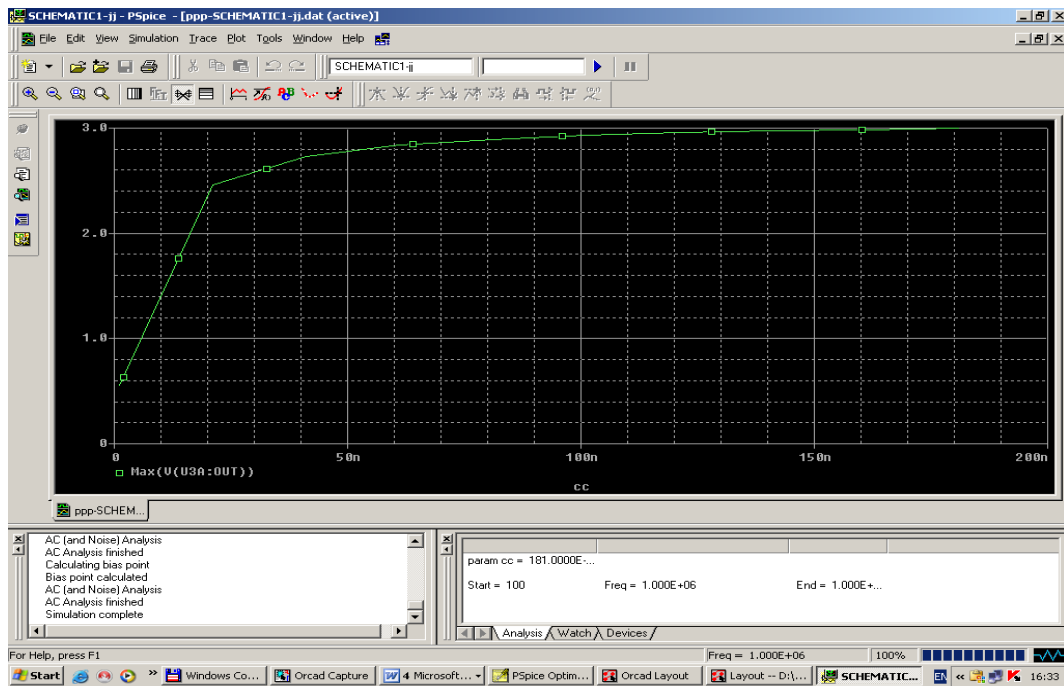


Рисунок 5.19 – Графік залежності $K_u(f)$ від резистора $C3$ та $C6$

З цього рисунка можна зробити висновок, що $K_u(f)$ досягає значення 3 ± 0.1 , якщо значення елементів $C3$ та $C6$ дорівнює до 178 н.

Визначити такі значення $C3 = C6$, за умови яких $K_u(f)$ дорівнює до 3 ± 0.1 , можна також, використовуючи програму **Optimizer**.

У пакеті **OrCAD** параметрична оптимізація виконується методом найшвидшого спуску шляхом взаємодії модуля **PSpice Optimizer** із графічним редактором схем, програмою моделювання **PSpice** і постпроцесором **Probe**. Критерій оптимізації – забезпечення значення цільової функції у виконанні низки лінійних і нелінійних обмежень.

У створенні схеми за допомогою **OrCAD Capture** список параметрів, що оптимізуються, задається відповідно до команди **PSpice>Place Optimizer Parameters**. Клацанням по заголовку цього символу відкривається панель специфікації параметрів і задаються такі величини (рис. 5.20):

- **Name** – ім'я параметра;
- **Initial Value** – початкове значення;
- **Current Value** – поточне значення;
- **Lower Limit** – нижня границя зміни параметра;
- **Upper Limit** – верхня границя зміни параметра;
- **Tolerance** – допуск стандартизованого ряду значень параметрів.

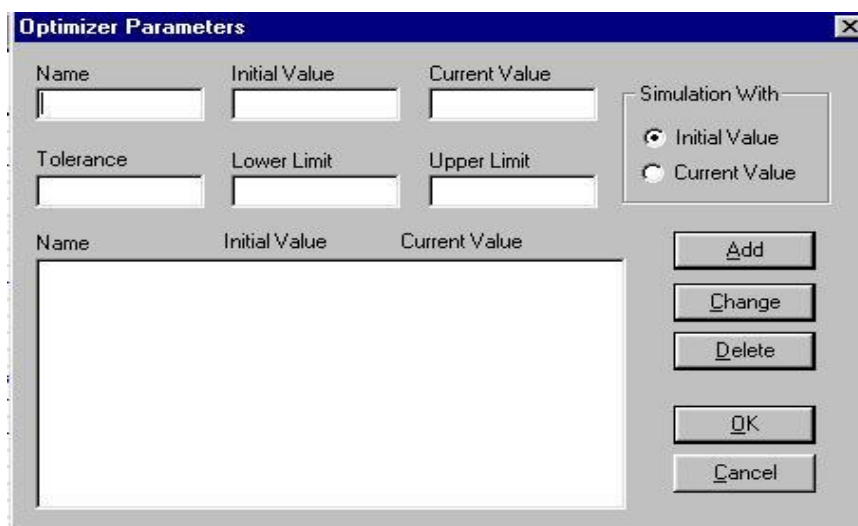


Рисунок 5.20 – Вікно **Optimizer Parameters**

Натискання кнопки **Add Param** додає введені значення до списку параметрів. Після введення останнього параметра натискається кнопка **Save Param** для їхнього збереження.

Далі в меню **Analysis** за командою **Setup** відкривають діалогове вікно для задання виду аналізу та діапазону зміни поточної змінної (частоти, часу, джерела постійної напруги або глобального параметра). Критерій оптимізації задається безпосередньо в програмі **PSpice Optimizer**, що викликається з меню програми **OrCAD Capture** відповідно до команди **Run Optimizer** для створення або редагування файлу задання на оптимізацію (рис. 5.21).

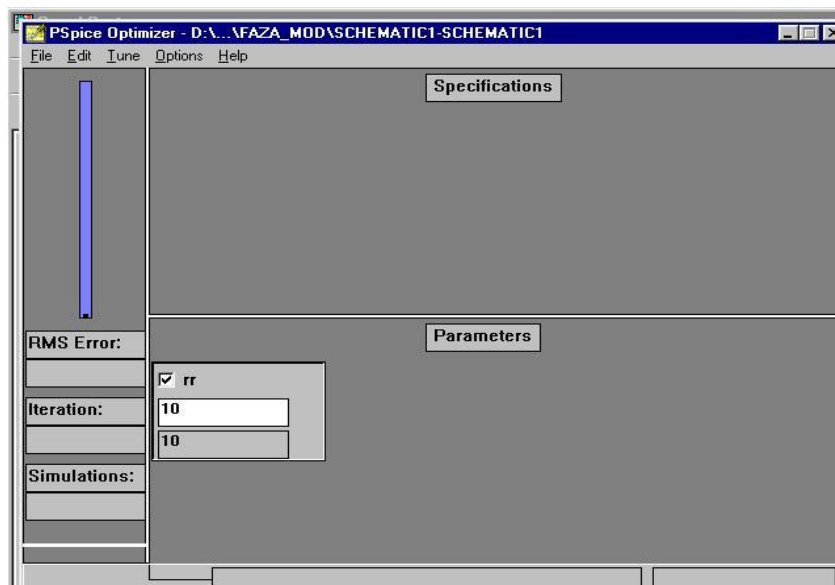


Рисунок 5.21 – Діалог команди **Run Optimizer**

У правій верхній частині головного вікна програми **PSpice Optimizer** розміщений список значень функцій, які можуть бути цільовими функціями або обмеженнями (розділ *Specifications*), у нижній – перелік параметрів (розділ *Parameters*).

Значення цільових функцій розраховуються за допомогою програми **Probe**. Цільові функції програми **Probe** дозволяють розрахувати мінімум або максимум функції, відстань між виділеними точками, центральну частоту, смугу пропускання тощо.

За командою **Parameters** меню **Edit** відкривається вікно зі списком специфікації функцій. Натисканням кнопки **Add** відкривається меню специфікації нової функції. Це саме вікно відкривається клацанням по імені функції зі списку. У вікні специфікації вводяться такі дані:

- **Name** – ім'я функції;
- **Enabled** – включення режиму розрахунку функцій на наступній ітерації;
- **Reference** – вибір між внутрішньою специфікацією (*Internal*) і зовнішньою (*External*);
- **Weight** – коефіцієнт цільової функції, за допомогою якого встановлюється важливість кожної цільової функції.

Запуск процесу оптимізації виконується в меню *Tune*. Оптимізація в автоматичному режимі запускається за командою **Auto>Start**.

Спочатку обчислюється матриця чутливості та визначається напрямок зміни параметрів. Рух у цьому напрямку відбувається доти, поки не перестане зменшуватися різниця між поточними та необхідним значеннями цільової функції.

Після цього знову обчислюється матриця чутливості й новий напрямок зміни параметрів. Після досягнення оптимуму процес оптимізації завершується або його потрібно зупинити за командою **Auto>Terminate**. Результати оптимізації відображаються в головному вікні програми.

Після успішного завершення оптимізації знайдені значення параметрів відображаються в головному меню (рис. 5.22).

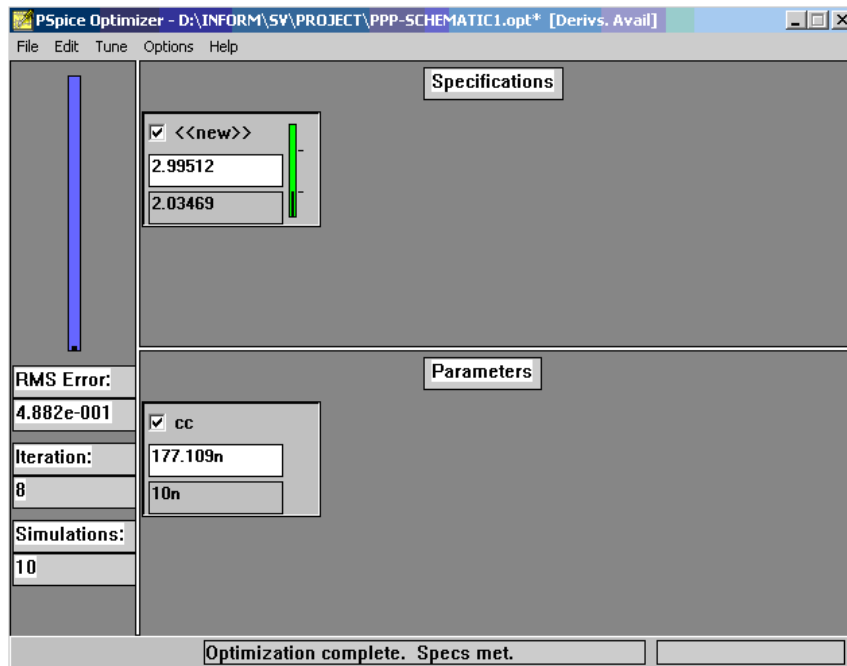


Рисунок 5.22 – Вікно програми **PSpice Optimizer**

У зв'язку з тим, що деякі параметри компонентів, наприклад опору резисторів, не можуть приймати будь-які значення, можна виконати округлення їхніх значень до найближчої стандартної величини за командою **Edit>Round Nearest Edit>Round Calculated**.

Точність округлення визначається параметром **Tolerance**, що може приймати значення 1, 5 і 10 %. Нові значення цільових функцій після округлення параметрів розраховуються автоматично.

Із зображення на рис. 5.22 можна зробити висновок, що $K_u(f)$ дорівнює до 3 ± 0.1 , якщо значення $C3$ та $C6$ дорівнюють 177.109 н.

Значення знайдених у процесі оптимізації параметрів переносяться на схему за командою **Edit>Update Schematic**. Нові значення параметрів відображаються в атрибутах символів **OPTPARAM**.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Шварц Н.З. Линейные транзисторные усилители СВЧ. Москва: Советское радио, 1980. 368 с.
2. Микроэлектронные устройства СВЧ: учеб. пособие для радиотехнических специальностей вузов / Г.И. Веселов и др.; под ред. Г.И. Веселова. Москва: Высшая школа, 1988. 280 с.
3. Gonzalez G. Microwave transistor amplifiers. Analysis and design. 1984. Prentice-Hall.
4. Клейнер Э.Ю. Основы теории электронных ламп. Москва: Высшая школа, 1974. 368 с.
5. Методы расчета электростатических полей / Н.Н. Миролюбов и др. Москва: Высшая школа, 1963. 270 с.
6. Кацеленбаум И.Е. Высокочастотная электродинамика. Основы математического аппарата. Москва: Высшая школа, 1961. 322 с.
7. Зи С. Физика полупроводниковых устройств: в 2-х книгах. Москва: Мир, 1984. 456 с.
8. Гордиенко Ю.Е., Яковлев Д.Р. Тонкопленочные транзисторы на основе неупорядоченного кремния // Радиоэлектроника и информатика. 2000. № 5. 9 с.
9. Абрамов И.И. Курс лекций «Моделирование элементов интегральных схем»: учеб. пособие. Минск: БГУ, 1999. 92 с.
10. Кремлев В.Я. Физико-топологическое моделирование элементов БИС. Москва: Высшая школа, 1990. 144 с.
11. Гейтс Эрл Д. Введение в электронику. Практический подход / пер. с англ. Ростову-на-Дону: Феникс, 1998. 640 с.
12. Левинзон Д.И. Современные направления электроники: учеб. пособие. Запорожье: ГУ «ЗИГМУ», 2002. 124 с.
13. Ржевкин К.С. Физические принципы действия полупроводниковых приборов. Москва: МГУ, 1986. 320 с.
14. Бонч-Бруевич В.Л., Калашников С.Г. Физика полупроводников. Москва: Наука, 1977. 234 с.
15. Брудай И., Меррей Дж. Физические основы микротехнологии / пер. с англ. Москва: Мир, 1985. 311 с.

16. Курносов А.И., Юдин В.В. Технология производства полупроводниковых и интегральных микросхем: учеб. пособие. Изд. 2-е, переработ. и доп. Москва: Высшая школа, 1979. 189 с.

17. Бубенников А.Н. Моделирование интегральных микротехнологий, приборов и схем: учеб. пособие. Москва: Высшая школа, 1989. 302 с.

Навчальне видання

БОНДАРЕНКО Ігор Миколайович
СВІДЕРСЬКА Людмила Іванівна
ГРИЦУНОВ Олександр Валентинович

МОДЕЛЮВАННЯ В ЕЛЕКТРОНІЦІ

Навчальний посібник

для студентів спеціальностей
153 – Мікро- та наноелектроніка, 171 – Електроніка

Відповідальний випусковий І.М. Бондаренко

Редактор Л.В. Кузьміна

Комп'ютерна верстка Н.Є. Сіпатова

План 2020 (перше півріччя), поз. 66

Підп. до друку 08.01.2020 Формат 60×84 ¹/₁₆. Спосіб друку – ризографія.

Умов.-друк. арк. 8,4. Облік. вид. арк. 7,5. Тираж 75 прим.

Зам. № 1-66. Ціна договірна.

ХНУРЕ. Україна. 61166, Харків, просп. Науки, 14

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі ХНУРЕ
61166, Харків, просп. Науки, 14