

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

# ЦИФРОВА ОБРОБКА АУДІОІНФОРМАЦІЇ

Лабораторний практикум

**Навчальний посібник**

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра  
за освітньою програмою «Інтелектуальні сервіс-орієнтовані розподілені обчислювання»  
спеціальності 122 Комп'ютерні науки

Електронне мережне навчальне видання

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2022

Укладачі:	Артюхов В.Г., к.т.н, доцент Бритов О.А. Гіоргізова-Гай В.Ш., к.т.н. Кирюша Б.А., к.т.н. Стіканов В.Ю., к.т.н., с.н.с.
Рецензент	Шумков Ю.С., к.т.н., доцент, кафедра інформаційно-вимірjувальних технологій приладобудівного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського
Відповідальний редактор	Мельник І.В., д.т.н., професор

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 1 від 02.09.2022 р.)*

*за поданням Вченої ради навчально-наукового інституту прикладного системного аналізу  
(протокол № 7 від 01.09.2022 р.)*

Лабораторний практикум включає лабораторні роботи з дослідження методів аналізу і обробки цифрових сигналів. Посібник містить короткі теоретичні відомості з опису цифрових аудіо сигналів в часовій та частотній області, з проектування і аналізу рекурсивних цифрових фільтрів (ЦФ). В додатку наведені відомості про проектування аналогових прототипів, на основі яких виконується проектування ЦФ.

Проектування починається з формування вимог до АЧХ ЦФ. На основі цих вимог формуються вихідні дані для розрахунку коефіцієнтів передаточних функцій нормованих аналогових фільтрів Батерворта, Чебишева та Золотарьова-Кауера. Результати розрахунку аналогових фільтрів використовуються для розрахунку коефіцієнтів передаточних функцій цифрових фільтрів за заданими параметрами АЧХ.

Розрахункові формули зведені в компактні таблиці, завдяки чому цей посібник може бути використаний як довідник з розрахунку цифрових фільтрів, а також з розрахунку передаточних функцій нормованих аналогових фільтрів.

Кожна лабораторна робота вміщує індивідуальні завдання і питання для самоперевірки.

Посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 122 Комп'ютерні науки. Він буде також корисним для осіб, які бажають самостійно опанувати основи цифрової обробки сигналів.

Реєстр. № НП 22/23-041. Обсяг 1,7 авт. арк.

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056  
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

## Зміст

ВСТУП.....	5
Лабораторна робота № 1. ДОСЛІДЖЕННЯ МОВНОГО СИГНАЛУ В ЧАСОВІЙ ОБЛАСТІ	6
1.1. Мета роботи.....	6
1.2. Короткі теоретичні відомості .....	6
1.3. Програма роботи:.....	9
1.4. Запитання для самоперевірки.....	10
Лабораторна робота № 2. ГАРМОНІЧНИЙ АНАЛІЗ МОВНОГО СИГНАЛУ .....	11
2.1. Мета роботи.....	11
2.2. Короткі теоретичні відомості .....	11
2.3. Програма роботи.....	14
2.4. Питання для самоперевірки.....	14
Лабораторна робота № 3. ЧАСТОТНИЙ АНАЛІЗ МОВНИХ СИГНАЛІВ.....	15
3.1. Мета роботи.....	15
3.2. Короткі теоретичні відомості. ....	15
3.3. Програма роботи .....	19
3.4. Запитання для самоперевірки.....	20
Лабораторна робота № 4. АПРОКСИМАЦІЯ ХАРАКТЕРИСТИК РЕКУРСИВНОГО ЦИФРОВОГО ФІЛЬТРУ .....	21
4.1. Мета роботи.....	21
4.2. Короткі теоретичні відомості .....	21
4.2.1. Опис об'єкту проектування.....	21
4.2.2. Етапи проектування ЦФ .....	24
4.2.3. Апроксимація частотних характеристик ЦФ .....	25
4.3. Програма роботи .....	44
4.4. Запитання для самоперевірки.....	44
Лабораторна робота № 5. ПРОЕКТУВАННЯ СТРУКТУРИ ЦФ .....	45
5.1. Мета роботи.....	45

5.2. Короткі теоретичні відомості .....	45
5.2.1. Постановка задачі .....	45
5.2.2. Вибір структури ЦФ і розрахунок її коефіцієнтів .....	45
5.2.3. Моделювання ЦФ довільної структури .....	49
5.3. Програма роботи.....	53
5.4. Запитання для самоперевірки .....	53
ДОДАТОК 1. АПРОКСИМАЦІЯ АНАЛОГОВОГО НОРМОВАНОГО ПРОТОТИПУ .....	55
ДОДАТОК 2. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ .....	71
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА .....	75
ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА.....	76

## ВСТУП

Цифрова обробка сигналів в сучасній технології займає значне місце.

Неможливо уявити сучасні системи зв'язку, радіотехнічні системи, системи обробки аудіо інформації без використання цифрових процесорів сигналів і відповідних алгоритмів. Метою дисципліни «Цифрова обробка аудіо інформації» є оволодіння студентами основ цифрової обробки сигналів стосовно аудіо сигналів.

Важливими елементами цифрової обробки є оцінка параметрів сигналів в часовій і частотній області, чому і присвячуються перші лабораторні роботи.

Цифрові фільтри є найбільш розповсюдженим засобом лінійної обробки різноманітних цифрових сигналів. При обробці аудіо інформації вони допомагають розв'язувати такі задачі, як придушення перешкод, виділення корисної інформації, корекція аудіо сигналів, регулювання тембру, різноманітні перетворення аудіо сигналів, створення аудіо ефектів (ефект хору, відлуння і т.ін.). Проектування таких фільтрів є необхідним інструментом для спеціалістів, які працюють в галузі розробки аудіо систем, акустичних систем, систем зв'язку, радіотехнічних систем і в інших.

Мета циклу лабораторних робіт – освоєння студентами методів аналізу аудіо сигналів в часовій та частотній областях, методів аналізу і проектування цифрових алгоритмів фільтрації з використання ЕОМ і засобів автоматизації проектування.

# Лабораторна робота № 1. ДОСЛІДЖЕННЯ МОВНОГО СИГНАЛУ В ЧАСОВІЙ ОБЛАСТІ

## 1.1. Мета роботи

Мета роботи: навчитися записувати аудіо сигнал в цифровій формі, визначати такі параметри сигналу як: тривалість, частота, період, відношення сигнал/шум.

## 1.2. Короткі теоретичні відомості

Для цифрової обробки мовного сигналу його треба перетворити в цифрову форму, тобто в послідовність чисел заданої розрядності. Сьогодні це перетворення виконується в 2 етапи:

1. перетворення мовного сигналу в електричну форму,
2. перетворення електричного сигналу в цифрову форму.

Для перетворення мовного сигналу, який являє собою зміни тиску повітря, в електричну форму, використовуються мікрофони (Рисунок 1).



Рисунок 1. Схематичне зображення мікрофону.

Мікрофон перетворює коливання тиску повітря  $p(t)$  в коливання електричного сигналу  $v(t)$  згідно з деякою передавальною функцією:

$$v(t) = f(p(t))$$

Якість перетворення характеризується рядом параметрів мікрофона:

### 1. Чутливість

Характеризує коефіцієнт перетворення звукового тиску у напругу електричного сигналу. Визначається відношенням величини вихідної напруги до величини звукового тиску синусоїдальної звукової хвилі на частоті 1000 Гц у напрямку осі мікрофона

$$M_0 = \frac{V(\text{мВ})}{P(\text{Па})}$$

або в логарифмічних одиницях децибелах

$$ML = 20 \lg(M_0)$$

Величина чутливості у залежності від типу мікрофона і лежить у межах 1 - 15 мВ/Па (-60 - -36,5 дБ).

### 2. Діапазон частот $f_{min} \dots f_{max}$ , Гц

Чутливість мікрофона залежить від частоти коливань звукової хвилі. Ця залежність представляється амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) чутливості  $M(f)$ , яка має явно виражений нерівномірний характер.

Частотний діапазон характеризує смугу частот, обмежену граничними частотами  $f_{\min}$ ,  $f_{\max}$ , в якій значення АЧХ (чутливість мікрофона) не виходять за межі деякої допустимого діапазону.

3. Нерівномірність АЧХ  $A_p$ , дБ

Задається в логарифмічних одиницях і визначається як  $20\lg(M_{\max}/M_{\min})$ , дБ, де  $M_{\max}$ ,  $M_{\min}$  – максимальне та мінімальне значення АЧХ.

4. Номінальний внутрішній опір  $R_i$ , Ом

Визначає вимоги до вхідного опору мікрофонного підсилювача, який повинен перевищувати внутрішній опір мікрофона не менше, ніж у 3 рази.

5. Рівень шуму  $N$ , дБ

Визначається відношенням ефективної напруги  $U_{ш}$  на виході мікрофона за відсутністю звуку до напруги  $U_I$  при наявності звуку з ефективним тиском 0.1 Па,  $N=20\lg(U_{ш}/U_I)$ , дБ.

Перетворення електричного сигналу в цифрову форму виконується пристроєм, який називається цифро-аналоговий перетворювач (АЦП). Цей пристрій виконує дві важливі операції: дискретизацію і квантування.

Дискретизація полягає в фіксації миттєвих значень аналогового сигналу в задані моменти часу. Ця операція призводить до деяких спотворень сигналу, які називаються спотвореннями накладання спектрів. Наступна операція, квантування, полягає у відображенні неперервної множини значень сигналу на дискретну множину значень. Дискретна множина значень задається діапазоном аналогових значень, які підлягають перетворенню, і кількістю розрядів АЦП. Квантування вносить в сигнал шум квантування, який виникає внаслідок того, що, як правило, значення аналогових відліків не співпадають з елементами дискретної множини значень цифрового сигналу.

Функцію ідеального АЦП можна описати формулою:

$$D = \text{round} \left( \frac{v(t_i)}{V_{ref}} 2^L \right)$$

де  $D$  – вихідний код АЦП,  $v(t_i)$  – значення відліку аналогового сигналу,  $V_{ref}$  – опорна напруга, яка визначає діапазон перетворюваних значень і залежить від конструкції приладу,  $L$  – кількість двійкових розрядів, реалізованих в даному АЦП.

АЦП являє собою досить складний прилад, для опису якого використовуються десятки параметрів. Найбільш важливими є наступні:

1. Розрядність в бітах  $L$ . Кількість бітів визначає рівень шуму квантування. Для гармонічного сигналу з амплітудою  $A$ , який змінюється в межах від  $-A$  до  $A$ , відношення сигнал/шум квантування можна оцінити за формулою:

$$SNR_q = 6.02L + 1.76, \text{ дБ}$$

2. Частота дискретизації  $F_s$ . Визначає частоту, з якою АЦП бере відліки аналогового сигналу. Згідно з теоремою Шенона-Котельникова для усунення накладань спектру частота дискретизації має в 2 або більше разів перевищувати максимальну частоту в спектрі сигналу. При рівномірній дискретизації моменти часу, в які АЦП бере відліки сигналу, визначаються як

$$t_i = (i - 1)/F_s$$

В сучасних комп'ютерах введення і виведення аналогових сигналів забезпечується відповідним інтерфейсними пристроями. Вони виконують необхідне підсилення сигналів, перетворення їх в цифрову форму, введення з аудіо входу і виведення на вбудований гучномовець або на аудіо вихід. Для збереження цифрових сигналів пропонується кілька форматів файлів. Найбільш поширеним є формат wav. Заголовок wav файлу вміщує всю необхідну для обробки і відтворення сигналів інформацію: частоту дискретизації, кількість каналів, кількість відліків, розрядність відліків.

В середовищі схемотехнічного симулятора Micro-Cap введення сигналу із wav файлу забезпечується спеціальним джерелом (Рисунок 2).

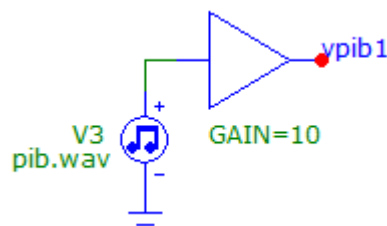


Рисунок 2. Схема введення сигналу з wav файлу.

Ім'я файлу задається у вікні параметрів джерела (Рисунок 3).

В часовій області мовний сигнал являє собою нестационарний процес. В якому можна виділити інтервали майже періодичного сигналу (вокалізовані звуки), шумового сигналу (невокалізовані звуки), а також інтервали, в яких мовний сигнал відсутній (паузи).

Важливими параметрами сигналу в часовій області є :

1. Частота дискретизації  $F_s$ , Гц. Або період дискретизації  $T_s=1/F_s$ .
2. Розрядність даних в бітах.
3. Тривалість сигналу  $T_m$ .
4. Кількість відліків сигналу у виборці.
5. Діапазон зміни сигналу.
6. Потужність сигналу.



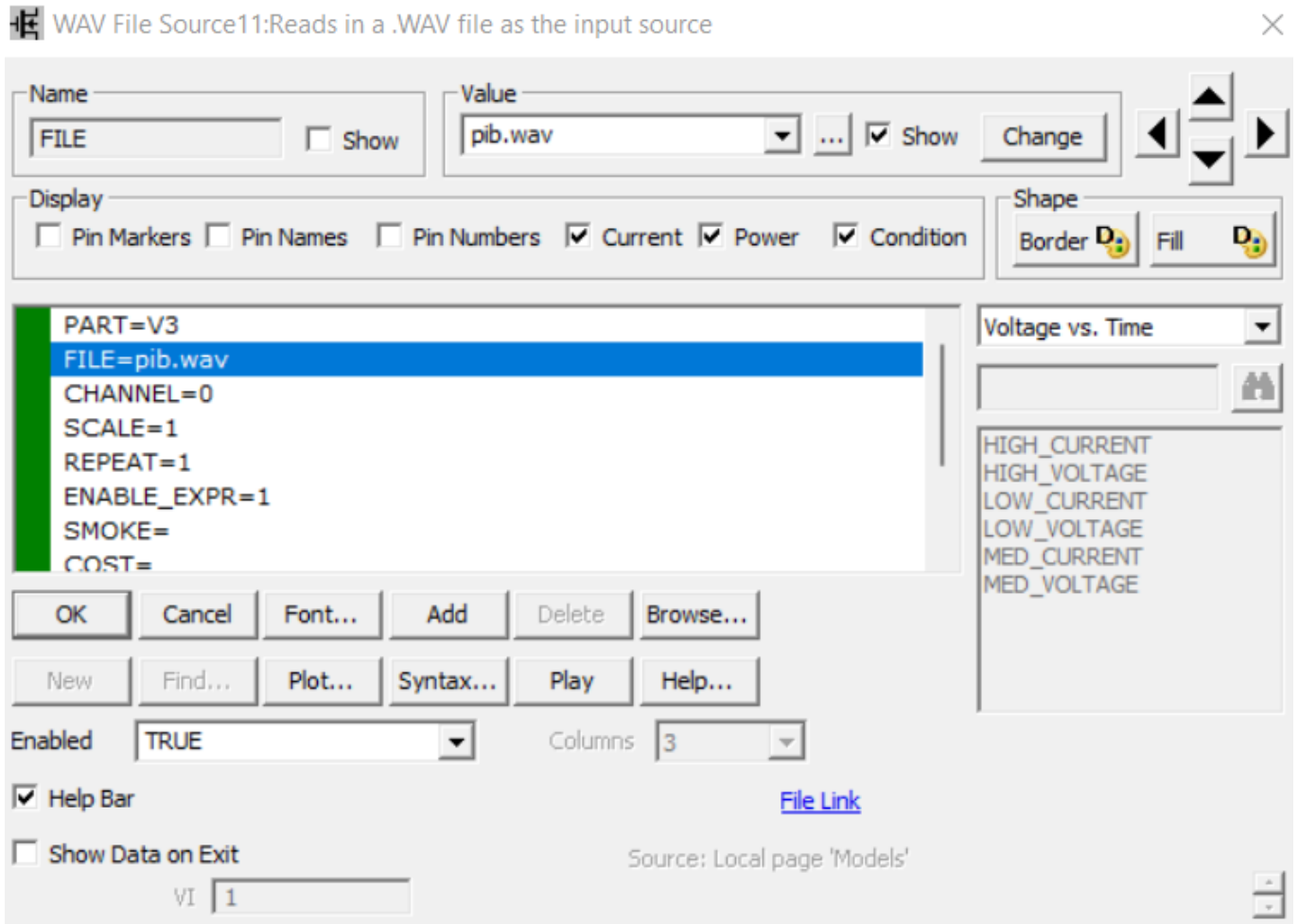


Рисунок 3. Вікно параметрів джерела WAV File Source.

### 1.3. Програма роботи:

1. Використовуючи можливості персонального комп'ютера, записати фразу, змістом якої є прізвище, ім'я, по батькові студента, який виконує роботу. Частота дискретизації 22050 Гц, розрядність 16 біт. Зберегти запис у форматі WAV.
2. Відкрити файл ЛР1\_АналізВЧасовійОлбасті.cir в програмі Micro-Cap. .



Для завдання імені файлу, клікнути двічі значок (файлове джерело сигналу). В списку параметрів виділити параметр FILE і в вікні Value ввести ім'я WAV файлу і закрити вікно параметрів.

Виконати аналіз через пункт меню Analysis/Transient.

3. Занести в протокол отримані результати.
4. Розробити програму визначення параметрів сигналу на мові Python в онлайн блокноті colab. Для цього можна використати функції, приклад використання яких знаходиться за посиланням

<https://colab.research.google.com/github/AllenDowney/ThinkDSP/blob/master/code/chap01.ipynb>

5. Отримати параметри сигналу, виконавши розроблену програму. Занести результати в протокол і порівняти з результатами п.2.

#### **1.4. Запитання для самоперевірки**

1. В яких одиницях вимірюється період дискретизації?
2. Яка розрядність АЦП потрібна для отримання відношення сигнал/шум 60 дБ?
3. В скільки разів потужність шуму менше потужності сигналу, якщо відношення сигнал/шум дорівнює 40 дБ?
4. Чим відрізняються сигнали, які відповідають фонемам А (О, І, И, Є, Е) і На (Но, Мо, Мі, Ми, Мє, Ме)?
5. Який об'єм пам'яті необхідний для одно каналного запису 1 с мовного сигналу при частоті дискретизації 22050 Гц і розрядності 16 біт?

# Лабораторна робота № 2. ГАРМОНІЧНИЙ АНАЛІЗ МОВНОГО СИГНАЛУ

## 2.1. Мета роботи

Метою роботи є дослідження частотних спектрів локалізованих (голосних) звуків мови.

## 2.2. Короткі теоретичні відомості

Аналіз негармонічного періодичного сигналу може бути значно спрощений, якщо представити його у вигляді суми простих функцій  $\varphi_i(t)$ , властивості яких добре відомі, зважених коефіцієнтами  $c_i$ . Таке представлення називають узагальненим рядом Фур'є:

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \varphi_i(t). \quad (1)$$

Функції  $\varphi_i(t)$  мають утворювати базис, тобто бути лінійно незалежними. Зручно також обирати в якості базису ортогональні функції, тому що це значно спрощує обчислення вагових коефіцієнтів. Ортогональними є функції, які задовольняють співвідношенню:

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \|\varphi_i(t)\|^2, & i = j \end{cases}$$

Для обчислення коефіцієнтів ряду помножимо обидві частини на  $\varphi_j^*(t)$  і проінтегруємо їх:

$$\int_{t_1}^{t_2} s(t) \varphi_j^*(t) dt = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} c_i \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt = c_j \|\varphi_j(t)\|^2$$

$$c_j = \frac{1}{\|\varphi_j(t)\|^2} \int_{t_1}^{t_2} s(t) \varphi_j^*(t) dt$$

Вивченням функціональних базисів займається розділ математики, який називається Функціональний аналіз. Найбільш відомим базисом є базис, який складається з комплексних експонент кратних частот:

$$\varphi_i(t) = e^{j \frac{2\pi}{T} i t}$$
$$j = \sqrt{-1}$$

$$\|\varphi_i(t)\|^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j\frac{2\pi}{T}it} e^{-j\frac{2\pi}{T}it} dt = T$$

Цей базис дає широко відомий і вживаний комплексний ряд Фур'є:

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i e^{j\frac{2\pi}{T}it}$$

$$c_i = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}it} dt$$

З наведених формул видно, що коефіцієнти цього ряду мають спряжену симетрію:

$$c_{-i} = c_i^*$$

Завдяки цій симетрії ряд Фур'є можна записати в алгебраїчній формі:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos \frac{2\pi}{T} it + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin \frac{2\pi}{T} it$$

$$a_i = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos \frac{2\pi}{T} it dt$$

$$b_i = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin \frac{2\pi}{T} it dt$$

В цій формі використовуються дві функції – синус і косинус, що на практиці не є дуже зручним. Звести представлення сигналу у вигляді ряду з використанням єдиною функції – синусу або косинусу, можна за допомогою відомих тригонометричних формул:

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha) = A \sin(\alpha + \varphi)$$

$$= A \sin \left( \alpha + \tan^{-1} \frac{a}{b} \right)$$

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha) = A \cos(\alpha - \varphi)$$

$$= A \sin \left( \alpha - \tan^{-1} \frac{b}{a} \right)$$

В результаті отримуємо амплітудно-фазову форму ряду:

$$s(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin\left(\frac{2\pi}{T} it + \varphi_{si}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \cos\left(\frac{2\pi}{T} it + \varphi_{ci}\right)$$

$$A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$$

$$\varphi_{si} = \tan^{-1}\left(\frac{a_i}{b_i}\right)$$

$$\varphi_{ci} = -\tan^{-1}\left(\frac{b_i}{a_i}\right)$$

Така форма представляє сигнал у вигляді суми гармонік, кожна з яких характеризується номером (частотою), амплітудою і фазою. Звідси витікають поняття амплітудного і фазового спектрів.

Амплітудним спектром називають залежність амплітуд гармонік від їх номерів (частот). Фазовим спектром називають залежність фаз гармонік від їх номерів (частот). Амплітудний і фазовий спектри повністю характеризують властивості сигналу.

Частота гармоніки однозначно визначається її номером і дорівнює частоті початкового сигналу, помноженій на номер гармоніки.

Строго кажучи, періодичний сигнал визначений на нескінченному інтервалі часу. На практиці ми маємо справу з сигналами скінченної тривалості. В цьому випадку ми можемо уявити, що даний сигнал тривалістю  $T_s$  є одним періодом нескінченного періодичного сигналу з таким же періодом  $T_s$ , і застосувати до нього гармонічний аналіз. Комплексні коефіцієнти Фур'є такого періодичного сигналу обчислюються за формулою:

$$c_i = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} s(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_s} it} dt$$

Частоти гармонік в даному випадку кратні частоті  $f_s=1/T_s$ .

Якщо розглянутий сигнал є відрізком періодичного сигналу з періодом  $T_p$  і в інтервал аналізу вкладається ціла кількість періодів такого сигналу, тобто  $T_s=kT_p$ , де  $k=0, 1, 2, \dots$ , кожна гармоніка з номером  $i$  періодичного сигналу буде співпадати з гармонікою з номером  $ik$  сигналу, що аналізується.

Якщо ж відношення тривалості сигналу, що аналізується, до періоду гармонічного сигналу, з якого складається цей сигнал, не є цілим числом, частоти гармонік сигналу, що аналізується, можуть бути зміщені відносно частот гармонік періодичного сигналу на величину, яка не перевищує  $1/T_s$ .

### 2.3. Програма роботи

1. Для аналізу використовується сигнал за файлу `rib.wav`, записаного при виконанні попередньої лабораторної роботи.
2. Виділити на графіку сигналу інтервал, який відповідає голосному звуку і зафіксувати час його початку `tgp` і кінця `tgk`.
3. Задати початок і кінець інтервалу гармонічного аналізу за допомогою директив:  

```
.define t1 tgp  
.define tu tgk.
```
4. Для виконання аналізу перейти у вікно налаштування аналізу (Analysis/Transient), вставити виклик функції `harm()` в стовпчик Y Expression у таблиці опису графіків (в стовпчику X Expression задати F). По закінченні налаштування натиснути кнопку Run.
5. Визначити і записати частоти гармонік, їх рівні.
6. Повторити попередні пункти для іншого голосного звуку.
7. Порівняти спектри звуків, які аналізувалися.
8. Реалізувати попередні пункти аналізу в блокноті `colab`.
9. Зробити висновки.

### 2.4. Питання для самоперевірки

1. Які існують форми ряду Фур'є?
2. В чому полягає гармонічний аналіз сигналу?
3. До яких сигналів застосовується гармонічний аналіз?
4. Опишіть особливості сигналів, які відповідають голосним.
5. Чим відрізняються спектри різних голосних звуків?

# Лабораторна робота № 3. ЧАСТОТНИЙ АНАЛІЗ МОВНИХ СИГНАЛІВ

## 3.1. Мета роботи

Мета роботи полягає в опануванні методами аналізу сигналів в частотній області і в дослідженні особливостей спектрів приголосних звуків мови.

## 3.2. Короткі теоретичні відомості.

З досвіду виконання попередніх лабораторних робіт можна зробити висновок, що не всі звуки мови можуть бути описані періодичними функціями, тому гармонічний аналіз до них не може бути застосований. Але перехід до частотного представлення сигналів виявився настільки ефективним і потрібним на практиці, що виникла необхідність модифікувати гармонічний аналіз таким чином, щоб можна було застосувати його до аналізу і неперіодичних сигналів. Для цього використовується наступний прийом: неперіодичний сигнал можна представити як періодичний з нескінченним періодом. При цьому різниця частот сусідніх гармонік, яка дорівнює  $1/T$ , зменшується до нескінченно малої величини  $df$ , і дискретна множина частот, на яких визначені гармоніки,  $i/T = i \cdot f_1$  перетворюється на неперервну множину  $f$ , а множина дискретних коефіцієнтів комплексного ряду Фур'є  $c_i$  перетворюється на функцію неперервної частоти  $S(f)$ .

В результаті комплексний ряд Фур'є, розглянутий в попередній роботі, перетворюється в таку форму:

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i e^{j2\pi f_i t} \rightarrow \left[ \begin{array}{l} \Delta f = \frac{1}{T} \rightarrow df \\ T = \frac{1}{df} \\ i f_1 \rightarrow f \\ c_i \rightarrow \dot{S}(f) \end{array} \right] \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} df \left[ \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt \right] e^{j2\pi f t}$$

Перехід з часової області в частоту називають прямим перетворенням Фур'є:

$$\dot{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$\dot{S}(f)$  називають комплексним спектром сигналу.

Відновлення часової форми сигналу по його спектру називають зворотним перетворенням Фур'є:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(f) e^{j2\pi f t} df$$

Як бачимо, спектр сигналу є комплексною функцією частоти. Його можна представити як суму дійсної і уявної частин:

$$\dot{S}(f) = \text{Re}(\dot{S}(f)) + j\text{Im}(\dot{S}(f))$$

Або в експоненціальній формі як

$$\dot{S}(f) = A(f)e^{j\Phi(f)}$$

$$A(f) = |\dot{S}(f)| = \sqrt{\text{Re}(\dot{S}(f))^2 + \text{Im}(\dot{S}(f))^2}$$

$$\Phi(f) = \text{atan}\left(\frac{\text{Im}(\dot{S}(f))}{\text{Re}(\dot{S}(f))}\right)$$

$A(f)$  називають амплитудним спектром сигналу. Він характеризує собою щільність розподілу амплітуд гармонічних складових за частотою (В/Гц).

$\Phi(f)$  називають фазовим спектром сигналу. Він характеризує щільність розподілу фаз гармонічних складових за частотою (рад/Гц).

Для дійсних сигналів  $A(f)$  є парною функцією, а  $\Phi(f)$  - непарною функцією частоти (Рисунок 4).

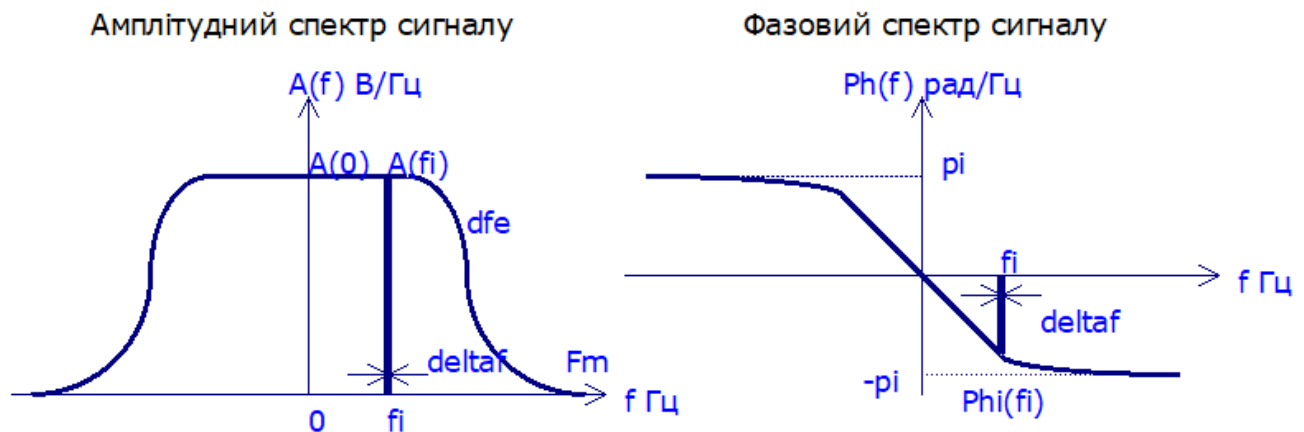


Рисунок 4. Типові графіки амплітудного і фазового спектрів.

Описане перетворення дає так званий аналітичний спектр, як визначений на інтервалі частот від  $-\infty$  до  $\infty$ . Фізичний спектр визначений лише для позитивних частот. Фізичний амплітудний спектр дає значення амплітуд вдвічі більші, ніж аналітичний. Фізичний і аналітичний фазові спектри співпадають.

На практиці часто використовують поняття енергетичного спектру, який характеризує розподіл потужності сигналу по частотам в Вт/Гц. Енергетичний спектр обчислюється як квадрат модуля комплексного спектру:

$$E(f) = |\dot{S}(f)|^2$$

Згідно з теоремою Парсеваля повну енергію неперіодичного сигналу можна обчислити як



$$P = \int_{-\infty}^{\infty} E(f)df$$

Важливою характеристикою сигналу є ширина його спектру. Вона визначається граничними частотами, на яких щільність енергії зменшується до половини максимального значення. Ширина спектру і тривалість сигналу тісно пов'язані: зменшення тривалості призводить до розширення спектру, зі збільшенням тривалості ширина спектру зменшується. Це можна виразити як принцип невизначеності, який виглядає так:

$$\Delta f \Delta t = const$$

При обробці сигналу в ЕОМ він представляється послідовністю чисел, які відображають значення сигналу в дискретні моменти часу. Такий сигнал називають цифровим. Щоб перетворити аналоговий сигнал на цифровий, необхідно виконати дві операції:

1. Дискретизацію, тобто фіксацію значень сигналу в дискретні моменти часу, в результаті чого утворюється аналоговий дискретний сигнал.
2. Квантування, тобто представлення неперервних значень відліків дискретного сигналу дискретною множиною значень, які можуть бути закодовані числами скінченної розрядності.

Дискретний аналоговий сигнал аналітично може бути записаний у вигляді:

$$sd(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

Тут  $T_s = 1/F_s$  – період дискретизації,  $\delta(t)$  – дельта-функція Дірака:

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t = 0 \\ 0 & \text{при } t \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

Дельта-функція Дірака має корисну властивість, яку називають фільтруючою властивістю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)$$

Пряме перетворення Фур'є від дискретного сигналу виглядає наступним чином:

$$\begin{aligned} \dot{S}_d(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_s)\delta(t - nT_s) \right) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_s) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} \delta(t - nT_s) dt \end{aligned}$$

Згідно з фільтруючою властивістю дельта-функції

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} \delta(t - nT_s) dt = e^{-j2\pi fnT_s}$$

В результаті отримуємо спектр дискретного сигналу у вигляді:

$$\dot{S}_d(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_s) e^{-j2\pi fnT_s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_s) e^{-j2\pi n \frac{f}{F_s}}$$

З цього виразу видно, що спектр дискретного сигналу є періодичною функцією частоти з періодом  $F_s$ . Періодичними є також амплітудний і фазовий спектри (Рисунок 5).

Отримане таким чином перетворення сигналу називають дискретно-часовим перетворенням Фур'є. Результатом такого перетворення є неперервні функції частоти. Крім того, воно перетворює сигнал нескінченної тривалості. Таке перетворення корисне при аналітичному дослідженні спектрів.

При обробці сигналу в цифровій ЕОМ сигнал представлений послідовністю чисел скінченної довжини  $N$ , а спектр, як і сигнал, має бути представлений дискретним набором чисел, які відображають значення спектру на дискретній множині частот. Для цього оберемо деяку частоту  $f_0$  і сформуємо послідовність

$$\dot{S}_{dd}(k) = S_d(kf_0) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_s) e^{-j2\pi n \frac{kf_0}{F_s}}, k = 0, 1, 2, \dots, N_f - 1$$

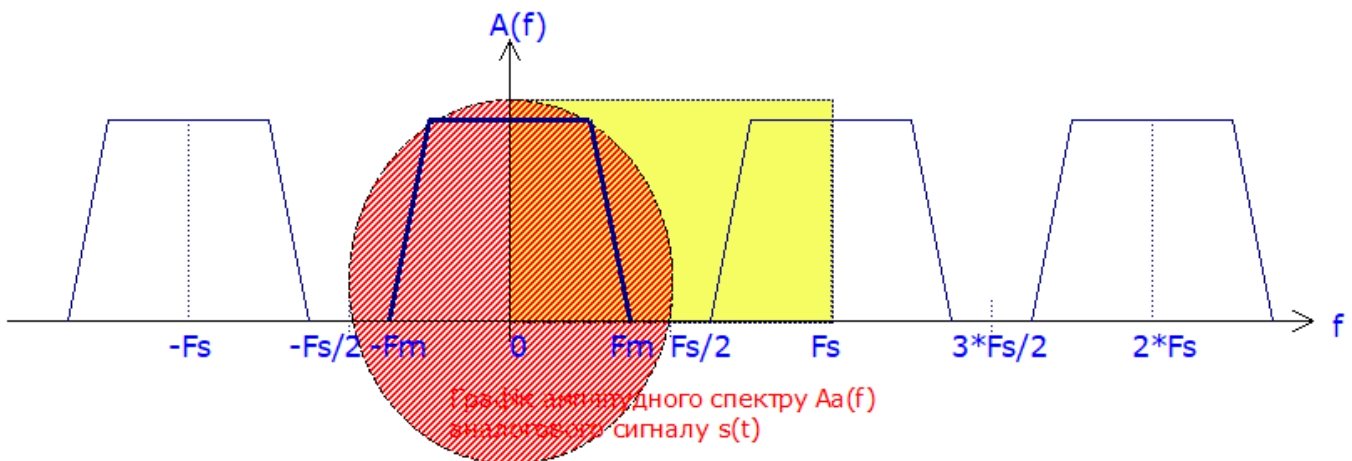


Рисунок 5. Типовий графік амплітудного спектру дискретного сигналу.

Зменшуючи крок дискретизації по частоті  $f_0$ , ми збільшуємо необхідний для зберігання даних об'єм пам'яті. Збільшуючи  $f_0$ , ми можемо втратити деякі важливі деталі спектру. Можна показати що найменшим значенням кроку, при якому відсутні спотворення, є  $f_0 = F_s/N$ . Врахувавши це, отримуємо остаточне дискретне перетворення Фур'є:

$$\dot{S}_{dd}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_s) e^{-j2\pi n \frac{k \frac{F_s}{N}}{F_s}} = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Можна показати, що зворотнє дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) має вигляд

$$s(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \dot{S}_{dd}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Комплексна експонента під знаком суми є обертаючим множником, оскільки множення комплексного числа на нього повертає в комплексній площині відповідний радіус-вектор без зміни його довжини. Для нього зазвичай використовують символ  $W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$ .

$$\dot{S}_{dd}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$s(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \dot{S}_{dd}(k) W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Для реалізації ДПФ розроблений ефективний алгоритм, який називають Швидким Перетворенням Фур'є (ШПФ). В багатьох бібліотеках програм цей алгоритм реалізується процедурою FFT() (Fast Fourier Transform).

### 3.3. Програма роботи

1. Для аналізу використовується сигнал за файлу `rib.wav`, записаного при виконанні попередньої лабораторної роботи.
2. Виділити на графіку сигналу інтервал, який відповідає приголосному звуку і зафіксувати час його початку `tgp` і кінця `tgk`.
3. Задати початок і кінець інтервалу гармонічного аналізу за допомогою директив:
 

```
.define t1 tgp
.define tu tgk.
```
4. Для виконання аналізу перейти у вікно налаштування аналізу (Analysis/Transient), вставити виклик функції `fft()` в стовпчик Y Expression у таблиці опису графіків (в стовпчику X Expression задати F). По закінченні налаштування натиснути кнопку Run.
5. Визначити і записати частоти гармонік, їх рівні.
6. Повторити попередні пункти для іншого приголосного звуку.
7. Порівняти спектри звуків, які аналізувалися.
8. Реалізувати попередні пункти аналізу в блокноті `colab`.

9. Зробити висновки.

### 3.4. Запитання для самоперевірки.

1. Чим відрізняється спектр неперіодичного сигналу від спектру періодичного сигналу?
2. Як зміниться спектр імпульсу, якщо тривалість імпульсу збільшиться або зменшиться в 3 рази?
3. В чому полягає фільтруюча властивість дельта функції Дірака?
4. Яку особливість має спектр дискретного сигналу?
5. Навіщо потрібен фізичний спектр?
6. Який алгоритм використовується для обчислення дискретного перетворення Фур'є?
7. Чому множник  $W_N$  називають обертаючим множником?
8. Як співвідносяться множники  $W_N^{nk}$  і  $W_{\frac{N}{2}}^{nk}$  ?
9. Якого розміру масив потрібен для запису результату ДПФ від сигналу довжиною  $N$  відліків?
10. Що відбувається, коли гармонічний сигнал частоти  $1100$  Гц дискретизується з частотою  $1000$  Гц?
11. Як запобігти накладанню спектрів при дискретизації сигналу?

# Лабораторна робота № 4. АПРОКСИМАЦІЯ ХАРАКТЕРИСТИК РЕКУРСИВНОГО ЦИФРОВОГО ФІЛЬТРУ

## 4.1. Мета роботи

Дослідити особливості реалізації апроксимації АЧХ передавальною характеристикою рекурсивного цифрового фільтру методом перетворення аналогового прототипу.

## 4.2. Короткі теоретичні відомості

### 4.2.1. Опис об'єкту проектування

Алгоритм цифрової фільтрації, що проектується, оснований на розв'язанні різницевого рівняння с постійними коефіцієнтами:

$$b_0 y(n) + b_1 y(n-1) + \dots + b_R y(n-R) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + \dots + a_P x(n-P)$$

або

$$\sum_{i=0}^R b_i y(n-i) = \sum_{i=0}^P a_i x(n-i), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (1.1)$$

$a_i, b_i$  - постійні коефіцієнти;

$x(n), y(n)$  - вихідні та результуючі дані для поточного і попередніх дискретних значень часу;

$R$  - порядок різницевого рівняння;

$P$  - кількість відліків вхідних даних;

$n$  - поточний номер ( $n = 1, 2, \dots, N$ ).

Для реалізації алгоритм зручніше представити у вигляді розв'язку відносно поточного значення вихідного сигналу:

$$y(n) = \frac{1}{b_0} \left[ \sum_{i=0}^P a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^R b_i y(n-i) \right]$$

або, запровадивши позначення  $A_i = a_i/b_0$ ,  $B_i = b_i/b_0$ , запишемо розв'язок (1.1) у вигляді

$$y(n) = \sum_{i=0}^P A_i x(n-i) - \sum_{i=1}^R B_i y(n-i) \quad (1.2)$$

Поточне значення розв'язку обчислюється як різниця зваженої суми поточного та  $P$  попередніх значень вхідного сигналу і суми  $R$  обчислених раніше значень розв'язку.

Реалізація алгоритму (1.2) називається рекурсивним цифровим фільтром (ЦФ),  $x(n)$  - вхідний сигнал,  $y(n)$  - вихідний сигнал. Для того, щоб фільтр був придатним для фізичної реалізації, необхідно виконання умови  $R \geq P$ .

Якщо всі  $b_i = 0$ , то (1.2) перетворюється на

$$y(n) = \sum_{i=0}^P A_i x(n-i) \quad (1.3)$$

Пристрій, який реалізує (1.3), називають нерекурсивним ЦФ.

Реалізацією алгоритмів (1.2), (1.3) є лінійна цифрова система, характеристики якої однозначно визначаються коефіцієнтами  $A_i$ ,  $B_i$ . Задача проектування алгоритму зводиться до розрахунку його коефіцієнтів таким чином, щоб характеристики спроектованої системи знаходились в межах допусків, заданих технічними вимогами до системи, що проектується. Для лінійної системи найбільш важливими характеристиками є:

імпульсна характеристика  $h(n)$  - реакція системи на  $\delta$  - імпульс:

$$h(n) = y(n) \Big|_{x(n)=\delta(n)}, \quad \delta(n) = 1, 0, 0, \dots$$

частотні характеристики  $H(e^{j\omega})$  - реакція системи на гармонійні сигнали.

Частотні характеристики можуть бути обчислені аналітично на основі опису алгоритма (1.2) в  $Z$  - області.  $Z$  - перетворення виразу (1.2) має вигляд [2]

$$Y(z) = X(z) \sum_{i=0}^P A_i z^{-i} - Y(z) \sum_{i=1}^R B_i z^{-i}$$

Розв'язуючи це рівняння відносно  $Y(z)$ , отримуємо

$$Y(z) = X(z) \frac{\sum_{i=0}^P A_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^R B_i z^{-i}}$$

Відношення  $H(z) = Y(z) / X(z)$  називається передаточною функцією і може бути записане як

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^P A_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^R B_i z^{-i}} \quad (1.4)$$

Для обчислення частотних характеристик ЦФ в (1.4) виконується заміна  $Z = e^{j2\pi f T_s}$ , де  $T_s$  - період дискретизації:

$$\begin{aligned}
H(e^{j2\pi f T_s}) &= H(z) \Big|_{z=e^{j2\pi f T_s}} = \frac{\sum_{i=0}^P A_i z^{-j2\pi f T_s i}}{1 + \sum_{i=1}^R B_i z^{-j2\pi f T_s i}} = \\
&= \frac{\sum_{i=0}^P A_i \cos(i2\pi f T_s) - j \sum_{i=0}^P A_i \sin(i2\pi f T_s)}{1 + \sum_{i=1}^R B_i \cos(i2\pi f T_s) - \sum_{i=1}^R B_i \sin(i2\pi f T_s)} = \\
&= \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=0}^P A_i \cos(i2\pi f T_s)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^P A_i \sin(i2\pi f T_s)\right)^2}{\left(1 + \sum_{i=1}^R B_i \cos(i2\pi f T_s)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^R B_i \sin(i2\pi f T_s)\right)^2}} \times \\
&\times \exp \left\{ -\operatorname{arctg} \frac{\sum_{i=0}^P A_i \sin(i2\pi f T_s)}{\sum_{i=0}^P A_i \cos(i2\pi f T_s)} + \operatorname{arctg} \frac{\sum_{i=1}^R B_i \sin(i2\pi f T_s)}{1 + \sum_{i=1}^R B_i \cos(i2\pi f T_s)} \right\} = \\
&= |H(e^{j2\pi f T_s})| \exp\{j\phi(e^{j2\pi f T_s})\}
\end{aligned}$$

Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) ЦФ обчислюється за формулою

$$A(f) = |H(e^{j2\pi f T_s})| \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=0}^P A_i \cos(i2\pi f T_s)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^P A_i \sin(i2\pi f T_s)\right)^2}{\left(1 + \sum_{i=1}^R B_i \cos(i2\pi f T_s)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^R B_i \sin(i2\pi f T_s)\right)^2}} \quad (1.5)$$

Фазо-частотна характеристика обчислюється за формулою

$$\begin{aligned}
\Phi(f) &= \arg(H(e^{j2\pi f T_s})) = \phi(e^{j2\pi f T_s}) = \\
&= -\operatorname{arctg} \frac{\sum_{i=0}^P A_i \sin(i2\pi f T_s)}{\sum_{i=0}^P A_i \cos(i2\pi f T_s)} + \operatorname{arctg} \frac{\sum_{i=1}^R B_i \sin(i2\pi f T_s)}{1 + \sum_{i=1}^R B_i \cos(i2\pi f T_s)} \quad (1.6)
\end{aligned}$$

Часто АЧХ задається в логарифмічному масштабі:

$$LA(f) = 20 \lg A(f)$$

Імпульсна характеристика описує поведінку ЦФ в часовому просторі і використовується частіше для моделювання спроектованого фільтра, а також для чисельного розрахунку частотних характеристик за допомогою дискретного перетворення Фур'є [2-4]. Найчастіше технічне завдання на проектування фільтра задає вимоги до частотних характеристик. Ці вимоги звичайно задаються для деяких характерних значень частот. В процесі проектування коефіцієнти розраховуються так, щоб частотна характеристика фільтра, яка представляє собою апроксимацію заданої характеристики, була достатньо близькою до заданих значень. Тому розрахунок коефіцієнтів передаточної функції ЦФ називають апроксимацією характеристик ЦФ.

Обчислювальний алгоритм (1.2) з передаточною функцією (1.4) може бути реалізований безпосередньо як програма або як спеціалізований обчислювальний

пристрій. Така форма реалізації, яка отримала назву прямої форми, застосовується досить рідко, тому що вона має ряд недоліків, які ускладнюють її реалізацію.

Більш поширеною є каскадна форма реалізації, яка може бути отримана розкладанням передаточної функції (1.4) на множники:

$$H(z) = A_0 \prod_{\mu=1}^M H_{\mu}(z) \quad (1.7)$$

де  $H_{\mu}(z)$ - передаточні функції ланок першого або другого порядку:

$$H_{\mu}(z) = \begin{cases} \frac{1 + A_{1\mu}z^{-1}}{1 + B_{1\mu}z^{-1}}; \\ \frac{1 + A_{1\mu}z^{-1} + A_{2\mu}z^{-2}}{1 + B_{1\mu}z^{-1} + B_{2\mu}z^{-2}}; \end{cases}$$

$A_0$  - постійний коефіцієнт (масштабний множник)

$M$  - кількість ланок.

Кожна ланка реалізує передаточну функцію  $H_{\mu}(z)$  в тій чи іншій формі. Всі ланки з'єднуються послідовно.

Форму реалізації ЦФ називають структурою ЦФ. Кожна структура описується своїм алгоритмом обчислень, параметри (коефіцієнти) якого розраховуються згідно з формулами, які визначають їх зв'язок з коефіцієнтами передаточної функції.

При реалізації ЦФ його коефіцієнти, вхідні дані і результати обчислень представляються словами обмеженої розрядності. Це викликає відхилення реальних характеристик фільтра від розрахованих, яке має бути враховане при проектуванні ЦФ. Розрахунок коефіцієнтів обраної форми реалізації і розрядностей слів коефіцієнтів та даних є змістом проектування структури ЦФ.

#### 4.2.2. Етапи проектування ЦФ

Проектування ЦФ можна розділити на наступні етапи [1, 2]:

- 1) апроксимацію – розрахунок коефіцієнтів передаточної функції ЦФ виходячи із заданих вимог до частотних або часових характеристик;
- 2) проектування структури ЦФ - вибір структури (алгоритму обчислень) ЦФ і розрахунок її коефіцієнтів с заданою розрядністю;
- 3) реалізацію - розробку апаратурних і програмних засобів ЦФ.

Перші два етапи в результаті розвитку теорії цифрової фільтрації доведені до формалізованих процедур, завдяки чому вони можуть бути значною мірою автоматизовані. На етапі апроксимації використовуються добре відомі математичні співвідношення, а результат апроксимації зазвичай однозначний. Тому цей етап може бути повністю автоматизований.

Однозначних рекомендацій щодо вибору структури ЦФ зараз не існує.

Прийняття рішення щодо вибору структури значною мірою ґрунтується на інтуїції



та досвіді розробника. Однак після того, як структура (або клас структур ) обрана, розрахунок її коефіцієнтів може бути автоматизований. Автоматизувати можна також перетворення структур і уточнення їх коефіцієнтів.

В розрахунково-графічній роботі студенти виконують перші два етапи, використовуючи математичні пакети програм (наприклад, Matlab).

Завдання на проектування включає наступні вихідні дані: параметри АЧХ, вид апроксимації, форму реалізації, розрядність коефіцієнтів и слів даних. Проектування виконується в такій послідовності:

1. Апроксимація частотних характеристик:

- а) розрахунок коефіцієнтів передаточної функції ЦФ;
- б) розрахунок частотних характеристик за спроектованою передаточною функцією;
- в) моделювання ЦФ в часовому просторі шляхом обчислення імпульсної характеристики;
- г) перевірка характеристик ЦФ за допомогою тестових сигналів.

2. Проектування структури ЦФ для заданої форми реалізації з заданою розрядністю коефіцієнтів:

- а) розрахунок коефіцієнтів заданої структури;
- б) складання опису заданої структури;
- в) розрахунок передаточної функції на основі матричних рівнянь.  
Розрахунок частотних характеристик з урахуванням розрядності коефіцієнтів і їх порівняння з результатами, отриманими в п. 1;
- г) розрахунок імпульсної характеристики ЦФ, описаного матричними рівняннями та перевірка його характеристик за допомогою тестових сигналів;
- д) порівняння характеристик спроектованого ЦФ з завданням на проектування. При необхідності корекція завдання і перепроєктування ЦФ.

Результати розрахунків оформляються у вигляді пояснювальної записки і захищаються у встановленому порядку.

### **4.2.3. Апроксимація частотних характеристик ЦФ**

#### **4.2.3.1. Постановка задачі апроксимації**

Взагалі при проектуванні ЦФ може бути поставлена задача апроксимації заданих частотних або часових характеристик. На практиці частіше задаються

вимоги до частотних характеристик фільтра [1, 2, 3]. Загально прийнятий спосіб завдання таких вимог до ЦФ показаний на наступних малюнках.

Як видно з виразів для частотних характеристик (1.5), (1.6), ці характеристики є функціями добутку  $fT_s = f/F_s$ . Цей добуток має зміст відношення поточної частоти  $f$  до частоти дискретизації  $F_s$ . І хоча це відношення безрозмірне, його прийнято називати відносною, або цифровою, частотою. Тому проектування цифрових фільтрів зазвичай виконується в цифрових частотах. В подальшому ми будемо використовувати цифрові частоти, якщо не обумовлене інше.

АЧХ задається на інтервалі цифрових частот  $0 \leq f \leq 0.5$ , тому що частотні характеристики ЦФ симетричні відносно частоти  $f=0.5$ . В смузі пропускання ( $0 \leq f \leq f_p$ ) АЧХ фільтра не повинна відхилятися від нормованого значення, що дорівнює 0 дБ, більше, ніж на  $A_p$  дБ, а в смузі затримання (придушення) ( $f_a \leq f \leq 0.5$ ) її значення не повинно перевищувати величину  $A_a$  дБ. Величини  $A_p$  і  $A_a$  задаються в децибелах. Рис. 1 надає приклад вимог до АЧХ цифрового ФНЧ. Для ЦФ верхніх частот (ВЧ), смугових (СФ) і режекторних (РФ) вимоги до АЧХ задаються аналогічним чином (Рис. 2, Рис. 3, Рис. 4). Для ЦФ с багатосмуговими АЧХ ці вимоги формуються для кожної смуги частот. Таким чином, вимоги до АЧХ ЦФ задаються за допомогою наступних числових величин: границі смуги (або смуг) пропускання  $f_p$ ; границі смуги (або смуг) затримання  $f_a$ ; нерівномірності АЧХ в смузі (смугах) пропускання  $A_p$ ; мінімального придушення в смузі (смугах) затримання  $A_a$ .

Задачею апроксимації є розрахунок коефіцієнтів  $A_i$ ,  $B_i$  передаточної функції ЦФ таким чином, щоб АЧХ фільтра  $H(e^{j2\pi f}) = H(z)|_{z=e^{j2\pi f}}$  задовольняла заданим вимогам. Апроксимація виконується в два етапи: вибір апроксимуючої функції з невідомими параметрами та розрахунок її параметрів. В якості апроксимуючих функцій найчастіше використовують поліноми Батерворта, Чебишева, функції Золотарева-Кауера. Параметри функцій розраховуються так, щоб отримана АЧХ знаходилась в дозволених межах.

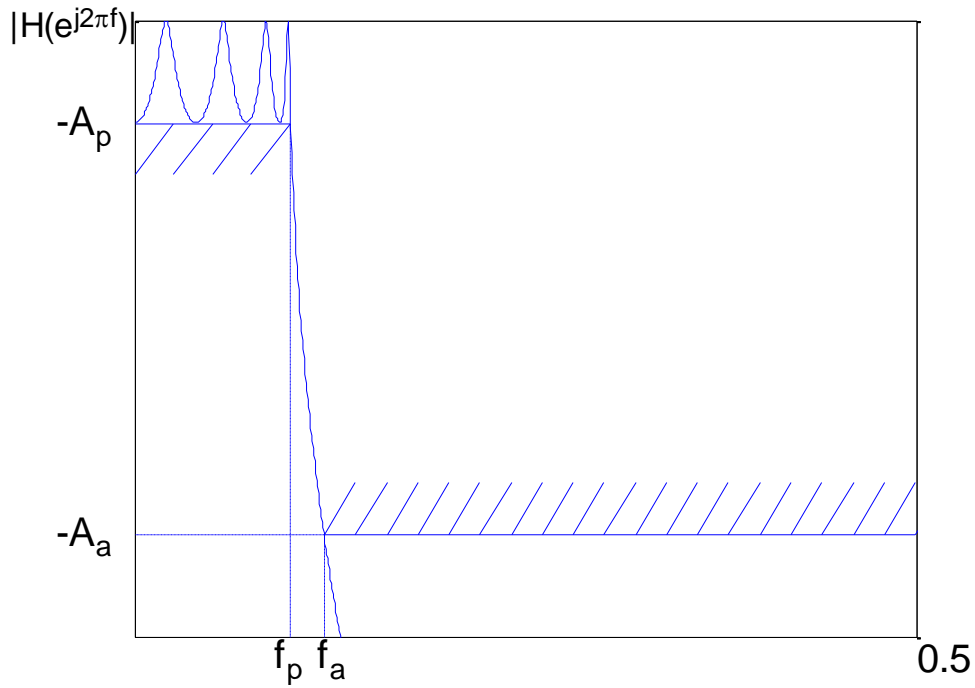


Рис. 1. Завдання вимог до АЧХ цифрового ФНЧ.  
 Сму́га пропускання:  $0 \leq f \leq f_p$ . Сму́га затримання  $f_a \leq f \leq 0.5$ .

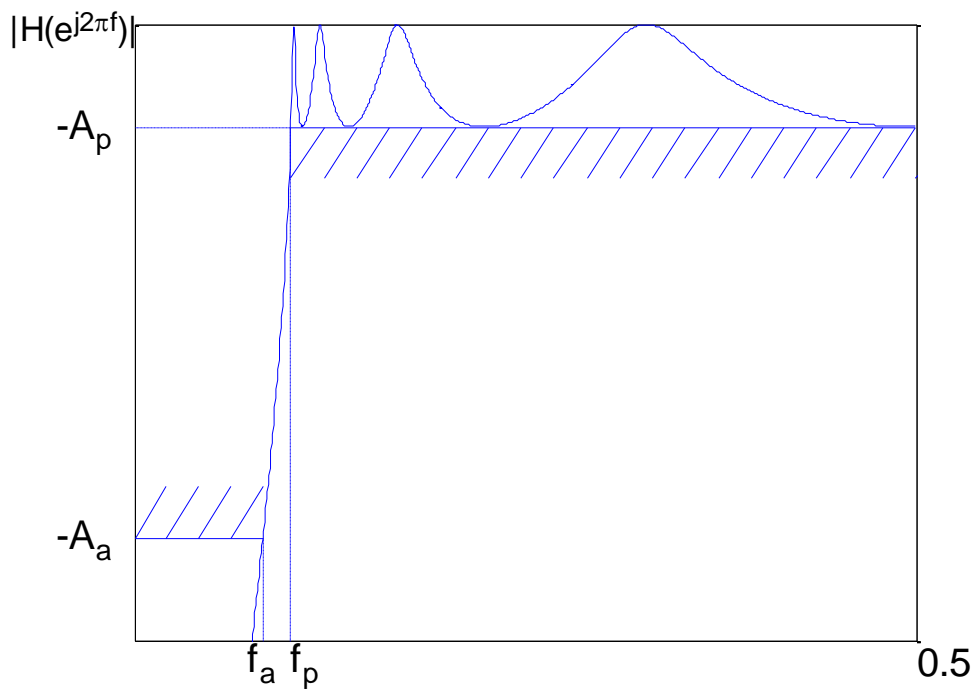


Рис. 2. Завдання вимог до АЧХ цифрового ФВЧ.  
 Сму́га пропускання:  $f_p \leq f \leq 0.5$ . Сму́га затримання:  $0 \leq f \leq f_a$ .

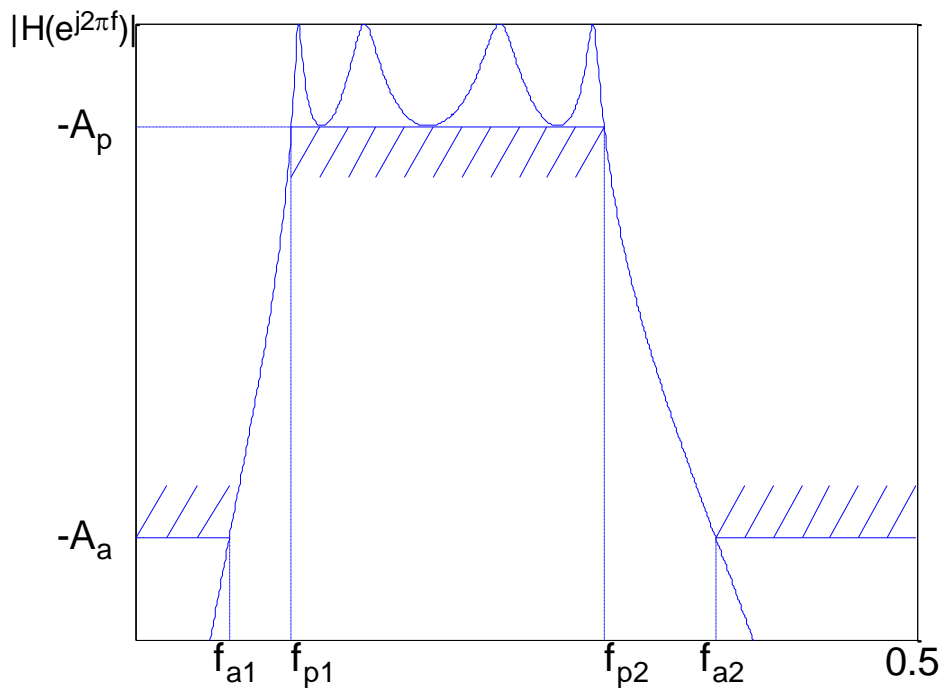


Рис. 3. Завдання вимог до АЧХ цифрового СФ.

Смуга пропускання:  $f_{p1} \leq f \leq f_{p2}$ . Смуги затримання:  $0 \leq f \leq f_{a1}; f_{a2} \leq f \leq 0.5$

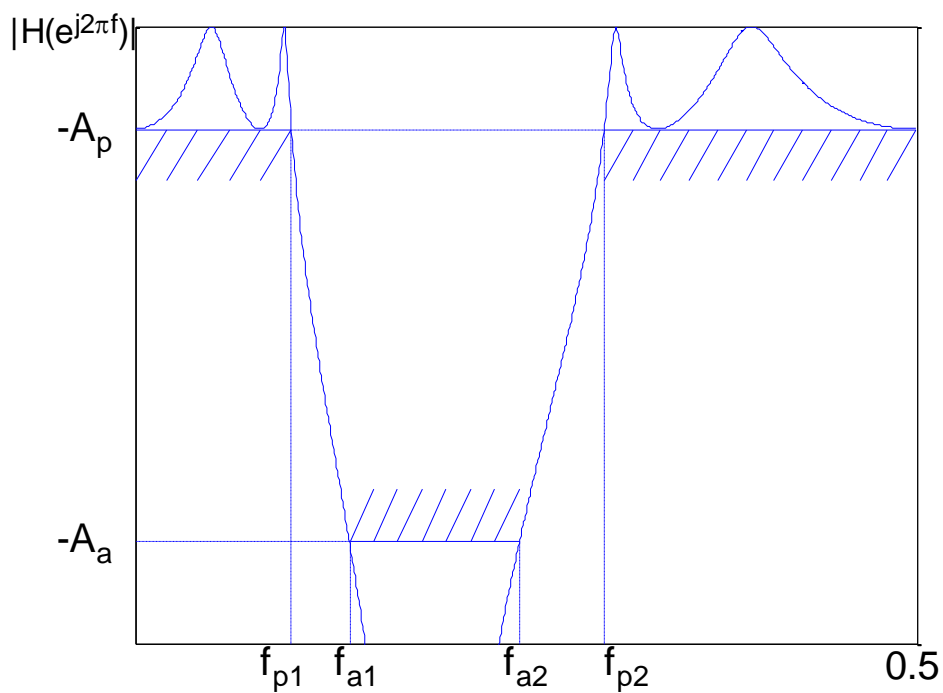


Рис. 4. Завдання вимог до АЧХ цифрового РФ.

Смуги пропускання:  $0 \leq f \leq f_{p1}; f_{p2} \leq f \leq 0.5$ . Смуга затримання  $f_{a1} \leq f \leq f_{a2}$

#### 4.2.3.2. Вибір метода апроксимації

Апроксимація частотних характеристик може бути виконана одним з трьох методів [2]:

- 1) прямою апроксимацією в  $z$ -області;
- 2) за аналоговим прототипом;
- 3) за допомогою методів оптимізації.

На практиці пряма апроксимація виявляється занадто складною і майже не використовується, тому найбільш розповсюджені апроксимація за аналоговим прототипом і оптимізаційні методи.

Апроксимація характеристик ЦФ за аналоговим прототипом базується на використанні методів розрахунку передаточних функцій аналогових фільтрів і складається з:

- а) розрахунку передаточної функції аналогового фільтра-прототипа;
- б) перетворення передаточної функції аналогового фільтра в передаточну функцію ЦФ.

Передаточна функція аналогового прототипу розраховується згідно з відомими методиками проектування аналогових фільтрів [1].

Тип апроксимації визначає форму АЧХ фільтра. Апроксимація по Батерворту забезпечує максимально гладку АЧХ як в смузі пропускання, так і в смузі затримання. Апроксимація по Чебишеву дає АЧХ з рівновеликими пульсаціями в смузі пропускання (або затримання) і гладку в смузі затримання (або пропускання), при цьому перехідна смуга вужче, а подавлення в смузі затримання більше, ніж у фільтрів Батерворта. АЧХ фільтрів, отриманих за допомогою еліптичних функцій (апроксимація по Кауеру), має пульсації як в смузі пропускання, так і в смузі затримання, а перехідна смуга виходить найвужча.

Для перетворення передаточних функцій аналогових фільтрів- прототипів в передаточні функції цифрових фільтрів можна використовувати наступні методи [1-4]:

- 1) метод погодженого  $Z$ -перетворення, оснований на заміщенні полюсів (нулів) аналогової передаточної функції  $H_a(s)$   $s = -p$  полюсами (нулями) цифрової передаточної функції  $e^{-pT}$  (тобто виконується заміна  $s + p \rightarrow 1 - z^{-1}e^{-pT}$ ). Цей метод використовується для розрахунку фільтрів ВЧ та режекторних по прототипу, що має полюси і нулі. Якщо прототип має нулі  $p$  такі, що  $\text{Im}(p) > \frac{2\pi F_s}{2}$ , де  $F_s$ - частота дискретизації, то

характеристики ЦФ будуть спотворені внаслідок накладення;

- 2) метод інваріантного перетворення імпульсної характеристики (ІХ), оснований на використанні відліків ІХ аналогового прототипу, взятих з частотою дискретизації, в якості відліків ІХ цифрового фільтра, тобто ІХ цифрового фільтра отримуються із ІХ аналогового фільтра згідно з виразом

$$h(n) = h_a(nT_s)$$

де  $T_s$  - період дискретизації.

Аналогова передаточна функція перетворюється в цифрову шляхом заміни:

$$\frac{1}{s - p_i} \rightarrow \frac{1}{1 - z^{-1} e^{p_i T_s}}$$

де  $p_i$  - полюси аналогової передаточної функції. Метод може використовуватись для розрахунку фільтрів НЧ і смугових фільтрів, для яких  $|H_a(j\omega)| = 0$  при  $|\omega| \geq \frac{\pi}{T_s}$ . Цей метод забезпечує лінійне перетворення аналогових частот в цифрові;

- 3) метод білінійного Z-перетворення, яке має вигляд

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \quad (2.1)$$

Цей метод зв'язаний з методами чисельного інтегрування [1]. В цьому випадку уявна вісь комплексної  $s$ -площини відображається на одиничне коло  $z$ -площини однозначно, завдяки чому ефекти накладання в частотній області відсутні і значення АЧХ фільтра на різних частотах не спотворюються. Співвідношення аналогових і цифрових частот в цьому випадку має вигляд

$$2\pi f T_s = 2 \arctg \frac{\omega T_s}{2}$$

где  $f$  - цифрова частота;

$\omega$  - аналогова частота.

Оскільки це співвідношення нелінійне, білінійне  $z$ -перетворення спотворює співвідношення між смугами пропускання і затримання, але нерівномірність АЧХ в цих смугах ( $A_p$  і  $A_a$ ) залишається незмінною. Нелінійність перетворення частот для ЦФ НЧ, ВЧ, смугових та режекторних легко компенсується за допомогою корегувальних множників. Завдяки цьому білінійне  $z$ -перетворення є єдиним методом,

який придатний для проектування всіх 4-х згаданих типів ЦФ. Крім того, позитивним моментом є те, що при незначній модифікації співвідношення (2.1) ми можемо використовувати нормовані аналогові фільтри-прототипи (для яких границя полоси пропускання, або частота зрізу,  $\omega_p=1$ ).

Апроксимація на основі оптимізаційних методів використовується при проектуванні ЦФ з нестандартними АЧХ. Це можуть бути цифрові диференціатори, інтегратори і компенсатори, багатосмугові ЦФ та ін., апроксимація яких аналітичними методами неможлива. Оптимізаційні методи використовуються для мінімізації відхилення АЧХ ЦФ, що проектується, від заданої форми. При цьому найчастіше використовують методи нелінійного програмування.

Таким чином, при проектуванні ЦФ НЧ, ВЧ, смугових і режекторних рекомендується використовувати апроксимацію за аналоговим прототипом методом білінійного  $z$ -перетворення, а для проектування ЦФ з АЧХ довільного вигляду - оптимізаційні методи.

#### 4.2.3.3. Проектування ЦФ за допомогою білінійного перетворення аналогового фільтра-прототипа

Проектування ЦФ за аналоговим прототипом обіймає наступні етапи:

- 1) вибір виду апроксимації і розрахунок параметрів апроксимуючої функції;
- 2) розрахунок порядку фільтра;
- 3) розрахунок передаточної функції аналогового фільтра-прототипа;
- 4) розрахунок передаточної функції цифрового фільтра;
- 5) розрахунок частотних характеристик ЦФ і перевірка їх відповідності заданими вимогам;
- 6) моделювання ЦФ.

#### 4.2.3.4. Обчислення передаточної функції цифрового фільтра

Перетворення аналогового нормованого фільтра-прототипу НЧ в цифрові фільтри НЧ, ВЧ, СФ і РФ із заданими параметрами АЧХ виконується за допомогою білінійного та біквдратного перетворень, які забезпечують необхідне нелінійне перетворення шкали аналогових частот в цифрові частоти. Рис. 5 ілюструє перетворення ФНЧ - прототипу в ЦФ НЧ та ВЧ, а Таблиця 1 вміщує формули перерахунку з компенсацією спотворення шкали частот.

Таблиця 1. Формули білінійного перетворення аналогового фільтра-прототипу в цифрові фільтри.

Тип ЦФ	Формули перетворення	Вимоги до прототипу
ФНЧ	$s = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, c = \operatorname{ctg} \frac{2\pi f_p}{2}$	$\omega_a = \operatorname{tg} \frac{2\pi f_a}{2} / \operatorname{tg} \frac{2\pi f_p}{2}$
ФВЧ	$s = c \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}, c = \operatorname{tg} \frac{2\pi f_p}{2}$	$\omega_a = \operatorname{tg} \frac{2\pi f_p}{2} / \operatorname{tg} \frac{2\pi f_a}{2}$
СФ	$s = \alpha \frac{1 - 2\beta z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}}, \alpha = \operatorname{ctg} \frac{2\pi(f_{p2} - f_{p1})}{2}$ $\beta = \frac{\sin(2\pi(f_{p1} + f_{p2}))}{\sin 2\pi f_{p1} + \sin 2\pi f_{p2}}$	$-\omega_a \geq \frac{\alpha(\beta - \cos 2\pi f_{a1})}{\sin 2\pi f_{a1}}$ $\omega_a \leq \frac{\alpha(\beta - \cos 2\pi f_{a2})}{\sin 2\pi f_{a2}}$
РФ	$s = \alpha \frac{1 - z^{-2}}{1 - 2\beta z^{-1} + z^{-2}},$ $\alpha = \frac{\cos 2\pi f_{p1} - \cos 2\pi f_{p2}}{\sin 2\pi f_{p1} + \sin 2\pi f_{p2}}$ $\beta = \frac{\sin(2\pi(f_{p1} + f_{p2}))}{\sin 2\pi f_{p1} + \sin 2\pi f_{p2}}$	$-\omega_a \geq \frac{\alpha \sin 2\pi f_{a1}}{\beta - \cos 2\pi f_{a1}}$ $\omega_a \leq \frac{\alpha \sin 2\pi f_{a2}}{\beta - \cos 2\pi f_{a2}}$

Передаточна функція ЦФ розраховується в формі

$$H(z) = A_0 H_0 \prod_{\mu=1}^M H_{\mu}(z) \quad (2.22)$$

де

$A_0$  - нормовочний коефіцієнт;

$$A_0 = \begin{cases} a_0 A_{00} \prod_{\mu=1}^M A_{0\mu} & \text{для непарних } N \\ a_0 \prod_{\mu=1}^M A_{0\mu} & \text{для парних } N \end{cases}$$

$$H_0 = \begin{cases} H_0(z) & \text{— передаточна функція ланки ЦФ для непарних } N \\ 1 & \text{— для парних } N \end{cases}$$

$$H_0(z) = \begin{cases} \frac{1 + A_{10}z^{-1}}{1 + B_{10}z^{-1}} & \text{для ФНЧ і ФВЧ} \\ \frac{1 + A_{10}z^{-1} + A_{20}z^{-2}}{1 + B_{10}z^{-1} + B_{20}z^{-2}} & \text{для ПФ і РФ} \end{cases}$$



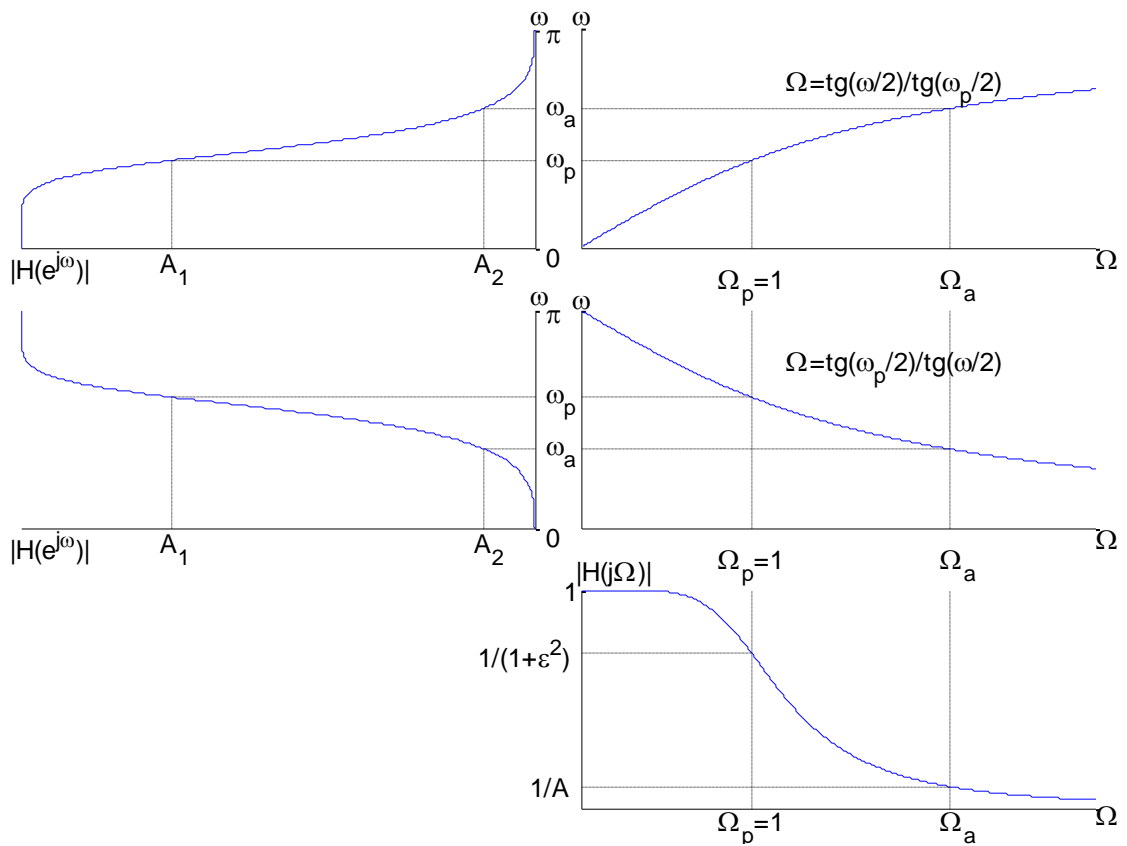


Рис. 5. Перетворення аналогового нормованого ФНЧ-прототипу в ЦФ НЧ та ВЧ.

$H_\mu(z)$  - передаточні функції ланок ЦФ, що формуються по передаточним функціям ланок другого порядку аналогового фільтру-прототипу;

$$H_\mu(z) = \begin{cases} \frac{1 + A_{1\mu}z^{-1} + A_{2\mu}z^{-2}}{1 + B_{1\mu}z^{-1} + B_{2\mu}z^{-2}} & \text{для ФНЧ і ФВЧ} \\ \frac{1 + A_{1\mu}z^{-1} + A_{2\mu}z^{-2} + A_{3\mu}z^{-3} + A_{4\mu}z^{-4}}{1 + B_{1\mu}z^{-1} + B_{2\mu}z^{-2} + B_{3\mu}z^{-3} + B_{4\mu}z^{-4}} & \text{для ПФ і РФ} \end{cases}$$

Співвідношення, які зв'язують коефіцієнти передаточних функцій цифрових фільтрів і аналогових фільтрів-прототипів, наведені в розташованих нижче таблицях (Таблиця 2, Таблиця 3, Таблиця 4).

Ланки четвертого порядку, що отримані при розрахунку СФ і РФ, необхідно розкласти на ланки другого порядку [1]. Процедуру розкладання поліному четвертого ступеня на множники другого ступеня, яка потребує значних затрат часу і може внести значні помилки в кінцевий результат, можна обійти, якщо виконувати перетворення не над передаточними функціями, а над нулями і полюсами прототипу. Виведення відповідних формул не є дуже складним і залишається для самостійного виконання студентами.

Таблиця 2. Формули перерахунку передаточної функції ланки аналогового фільтра першого порядку в ланку ЦФ

$H_0(z) = \begin{cases} \frac{1+z^{-1}}{1+B_{10}z^{-1}} & \text{ФНЧ} \\ \frac{1-z^{-1}}{1+B_{10}z^{-1}} & \text{ФВЧ} \\ \frac{1-z^{-1}}{1+B_{10}z^{-1}+B_{20}z^{-2}} & \text{ПФ} \\ \frac{1-A_{10}z^{-1}+z^{-2}}{1+B_{10}z^{-1}+B_{20}z^{-2}} & \text{РФ} \end{cases}$				
Тип ЦФ	$A_{00}$	$A_{10}$	$B_{10}$	$B_{20}$
ФНЧ	$\frac{1}{b_{00}+c}$	1	$\frac{b_{00}-c}{b_{00}+c}$	—
ФВЧ		-1	$\frac{b_{00}+c}{b_{00}+c}$	
СФ	$\frac{1}{b_{00}+\alpha}$	0	$-\frac{2\alpha\beta}{b_{00}+\alpha}$	$-\frac{b_{00}-\alpha}{b_{00}+\alpha}$
РФ		$-2\beta$	$-\frac{2b_{00}\beta}{b_{00}+\alpha}$	$\frac{b_{00}-\alpha}{b_{00}+\alpha}$

Таблиця 3. Формули перерахунку аналогових ланок Батерворта і Чебишева другого порядку в ланку ЦФ

$H_\mu(z) = \begin{cases} \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+B_{1\mu}z^{-1}+B_{2\mu}z^{-2}} & \text{ФНЧ} \\ \frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{1+B_{1\mu}z^{-1}+B_{2\mu}z^{-2}} & \text{ФВЧ} \\ \frac{1-A_{2\mu}z^{-2}+z^{-4}}{1+B_{1\mu}z^{-1}+B_{2\mu}z^{-2}+B_{3\mu}z^{-3}+B_{4\mu}z^{-4}} & \text{ПФ} \\ \frac{1+A_{1\mu}z^{-1}+A_{2\mu}z^{-2}+A_{1\mu}z^{-3}+z^{-4}}{1+B_{1\mu}z^{-1}+B_{2\mu}z^{-2}+B_{3\mu}z^{-3}+B_{4\mu}z^{-4}} & \text{РФ} \end{cases}$				
Тип ЦФ	$A_{0\mu}$	$A_{1\mu}$	$A_{2\mu}$	
ФНЧ	$\frac{1}{b_{0\mu}+b_{1\mu}c+c^2}$	—	—	—
ФВЧ		—	—	
СФ	$\frac{1}{b_{0\mu}+b_{1\mu}\alpha+\alpha^2}$	—	—	-2
РФ		$-4\beta$	$2(1+2\beta^2)$	

Тип ЦФ	$B_{1\mu}$	$B_{2\mu}$	$B_{3\mu}$	$B_{4\mu}$
ФНЧ	$\frac{2(b_{0\mu} - c^2)}{b_{0\mu} + b_{1\mu}c + c^2}$	$\frac{b_{0\mu} - b_{1\mu}c + c^2}{b_{0\mu} + b_{1\mu}c + c^2}$	—	—
ФВЧ	$\frac{-2(b_{0\mu} - c^2)}{b_{0\mu} + b_{1\mu}c + c^2}$			
СФ	$-2\frac{b_{1\mu}\alpha\beta + 2\alpha^2\beta}{b_{0\mu} + b_{1\mu}\alpha + \alpha^2}$	$2\frac{\alpha^2(1 + 2\beta^2) - b_{0\mu}}{b_{0\mu} + b_{1\mu}\alpha + \alpha^2}$	$2\frac{b_{1\mu}\alpha\beta - 2\alpha^2\beta}{b_{0\mu} + b_{1\mu}\alpha + \alpha^2}$	$\frac{b_{0\mu} - b_{1\mu}\alpha + \alpha^2}{b_{0\mu} + b_{1\mu}\alpha + \alpha^2}$
РФ	$-2\frac{b_{1\mu}\alpha\beta + 2b_{0\mu}\beta}{b_{0\mu} + b_{1\mu}\alpha + \alpha^2}$	$2\frac{2b_0(1 + \beta^2) - \alpha^2}{b_{0\mu} + b_{1\mu}\alpha + \alpha^2}$	$2\frac{b_{1\mu}\alpha\beta - 2b_{0\mu}\beta}{b_{0\mu} + b_{1\mu}\alpha + \alpha^2}$	

Таблиця 4. Формули перерахунку аналогової ланки Кауера другого порядку в ланку ЦФ.

$H_{\mu}(z) = \begin{cases} \frac{1 + A_{1\mu}z^{-1} + z^{-2}}{1 + B_{1\mu}z^{-1} + B_{2\mu}z^{-2}} & \text{ФНЧ, ФВЧ} \\ \frac{1 + A_{1\mu}z^{-1} + A_{2\mu}z^{-2} + A_{1\mu}z^{-3} + z^{-4}}{1 + B_{1\mu}z^{-1} + B_{2\mu}z^{-2} + B_{3\mu}z^{-3} + B_{4\mu}z^{-4}} & \text{ПФ, РФ} \end{cases}$			
Тип ЦФ	$A_{0\mu}$	$A_{1\mu}$	$A_{2\mu}$
ФНЧ	$\frac{a_{0\mu} + c^2}{b_{0\mu} + b_{1\mu}c + c^2}$	$\frac{2(a_{0\mu} - c^2)}{a_{0\mu} + c^2}$	—
ФВЧ		$\frac{2(c^2 - a_{0\mu})}{a_{0\mu} + c^2}$	—
СФ	$\frac{a_{0\mu} + \alpha^2}{b_{0\mu} + b_{1\mu}\alpha + \alpha^2}$	$-\frac{4\alpha^2\beta}{a_{0\mu} + \alpha^2}$	$2\frac{\alpha^2(1 + 2\beta^2) + a_{0\mu}}{a_{0\mu} + \alpha^2}$
РФ		$-\frac{4a_{0\mu}\beta}{a_{0\mu} + \alpha^2}$	$2\frac{a_{0\mu}(1 + \beta^2) - \alpha^2}{a_{0\mu} + \alpha^2}$

Тип ЦФ	$B_{1\mu}$	$B_{2\mu}$	$B_{3\mu}$	$B_{4\mu}$
ФНЧ	$\frac{2(b_{0\mu} - c^2)}{b_{0\mu} + b_{1\mu}c + c^2}$	$\frac{b_{0\mu} - b_{1\mu}c + c^2}{b_{0\mu} + b_{1\mu}c + c^2}$	—	—
ФВЧ	$\frac{2(c^2 - b_{0\mu})}{b_{0\mu} + b_{1\mu}c + c^2}$			

СФ	$-2 \frac{\alpha\beta(b_{1\mu} + \alpha)}{b_{0\mu} + b_{1\mu}\alpha + \alpha^2}$	$2 \frac{\alpha^2(1+2\beta^2) - b_{0\mu}}{b_{0\mu} + b_{1\mu}\alpha + \alpha^2}$	$2 \frac{\alpha\beta(b_{1\mu} - 2\alpha)}{b_{0\mu} + b_{1\mu}\alpha + \alpha^2}$	$\frac{b_{0\mu} - b_{1\mu}\alpha + \alpha^2}{b_{0\mu} + b_{1\mu}\alpha + \alpha^2}$
РФ	$-2 \frac{\beta(2b_{0\mu} + b_{1\mu}\alpha)}{b_{0\mu} + b_{1\mu}\alpha + \alpha^2}$	$2 \frac{b_{0\mu}(1 + \beta^2) - \alpha^2}{b_{0\mu} + b_{1\mu}\alpha + \alpha^2}$	$2 \frac{\beta(b_{1\mu}\alpha - 2b_{0\mu})}{b_{0\mu} + b_{1\mu}\alpha + \alpha^2}$	

#### 4.2.3.5. Обчислення частотних характеристик ЦФ по передаточній функції

Частотні характеристики ЦФ обчислюються аналітично по виразах для АЧХ і ФЧХ, які отримані з передаточної функції ЦФ шляхом підстановки  $z=e^{j\omega}$ . Для дискретних значень частоти  $\omega_k=2\pi kF_0T_s$ , де  $F_0$  - шаг дискретизації по частоті,  $k=0,1,2,\dots,K$ ,  $K$  – кількість відліків частотної характеристики, що обчислюються.

Обираючи  $F_0=1/KT_s$ , отримуємо  $\omega_k = 2\pi \frac{k}{K}$

Тоді для (1.5), (1.6) можна записати

$$|H(k)| = |H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_k} = \sqrt{\frac{(\sum_{i=0}^P A_i \cos \frac{2\pi}{L} ik)^2 + (\sum_{i=0}^P A_i \sin \frac{2\pi}{L} ik)^2}{(1 + \sum_{i=1}^R B_i \cos \frac{2\pi}{L} ik)^2 + (\sum_{i=1}^R B_i \sin \frac{2\pi}{L} ik)^2}} \quad (2.23)$$

$$\Phi(l) = \arctg \frac{\sum_{i=1}^R B_i \sin \frac{2\pi}{L} ik}{1 + \sum_{i=1}^R B_i \cos \frac{2\pi}{L} ik} - \arctg \frac{\sum_{i=0}^P A_i \sin \frac{2\pi}{L} ik}{\sum_{i=0}^P A_i \cos \frac{2\pi}{L} ik} \quad (2.24)$$

Логарифмічна АЧХ для ЦФ в каскадній формі реалізації обчислюється згідно з виразом

$$LH(k) = 20 \lg A_0 H_0 \prod_{\mu=1}^M H_{\mu}(k) = 20[\lg A_0 + \sum_{\mu=0}^M \lg H_{\mu}(k)] \quad (2.25)$$

де  $H_{\mu}(k)$  обчислюються згідно з (2.23), а коефіцієнти передаточних функцій ланок обчислюються по наведеним вище формулам перетворення аналогового прототипу в ЦФ (Таблиця 2, Таблиця 3, Таблиця 4).

Враховуючи, що порядок ланок не перевищує двох, вираз для  $H_{\mu}(l)$  запишемо у вигляді

$$|H_{\mu}(k)| = |H_{\mu}(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_k} = \sqrt{\frac{(1 + \sum_{i=1}^2 A_{i\mu} \cos \frac{2\pi}{L} ik)^2 + (\sum_{i=1}^2 A_{i\mu} \sin \frac{2\pi}{L} ik)^2}{(1 + \sum_{i=1}^2 B_{i\mu} \cos \frac{2\pi}{L} ik)^2 + (\sum_{i=1}^2 B_{i\mu} \sin \frac{2\pi}{L} ik)^2}} \quad (2.26)$$

АЧХ ланки першого порядку для фільтрів непарного порядку може бути обчислена згідно з (2.26) при  $A_{20}, B_{20} = 0$ .

Фазо-частотна характеристика обчислюється за формулою

$$\Phi(k) = \sum_{\mu=0}^m \Phi_{\mu}(k)$$

де

$$\Phi_{\mu}(k) = \arctg \frac{\sum_{i=1}^2 B_{i\mu} \sin \frac{2\pi}{L} ik}{1 + \sum_{i=1}^2 B_{i\mu} \cos \frac{2\pi}{L} ik} - \arctg \frac{\sum_{i=1}^2 A_{i\mu} \sin \frac{2\pi}{L} ik}{1 + \sum_{i=1}^2 A_{i\mu} \cos \frac{2\pi}{L} ik} \quad (2.27)^1$$

Вирази (2.26) - (2.27) легко програмуються на ЕОМ. Вони використовуються для обчислення частотних характеристик спроектованих фільтрів. Порівняння останніх з вимогами до частотних характеристик, які задавалися в завданні на проектування ЦФ, необхідне для контролю отриманих результатів.

#### 4.2.3.6. Приклади проектування цифрових фільтрів за аналоговим прототипом.

**Приклад 1.** Розрахувати ЦФ НЧ, АЧХ якого має наступні параметри:

$$A_p = -1\text{дБ}, \quad f_p = 0.1$$

$$A_a = -15\text{дБ}, \quad f_a = 0.15$$

##### А. Апроксимація Батерворта

1) Гранична частота смуги затримання аналогового фільтра (Таблиця 1):

$$\omega_a = \frac{\operatorname{tg} \frac{2\pi f_a}{2}}{\operatorname{tg} \frac{2\pi f_p}{2}} = \frac{\operatorname{tg} 0.15\pi}{\operatorname{tg} 0.1\pi} = 1.5682$$

2) Порядок фільтра (Таблиця 7)

$$D = \frac{10^{A_a/10} - 1}{10^{A_p/10} - 1} = \frac{10^{1.5} - 1}{10^{0.1} - 1} = 118.2687$$

$$N \geq \frac{\ln D}{2 \ln \omega_a} = \frac{\ln 118.2687}{2 \ln 1.5682} = 5.304$$

Необхідно прийняти  $N=6$ .

Реальне ослаблення на границі смуги затримання дорівнює

$$AA = 10 \lg \left( 1 + \left( 10^{\frac{A_p}{10}} - 1 \right) \omega_a^{2N} \right) = 10 \lg \left( 1 + (10^{0.1} - 1) 1.5682^{12} \right) = 17.65 \text{ дБ}$$

3) Передаточна функція аналогового прототипу складається з трьох ланок другого порядку:

<sup>1</sup> При обчисленні ФЧХ треба мати на увазі, що бібліотечні функції обчислення  $\arctg(x)$ , наприклад  $\operatorname{atan}(x)$  в Matlab, повертають головне значення, яке знаходиться в діапазоні від  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ , тоді як значення ФЧХ можуть лежати в будь-якому квадранті площини. Тому для отримання правильного результату необхідно або корегувати значення, що повертає функція, з врахуванням знаків дійсної та уявної частин частотної характеристики, або використовувати функцію двох змінних, наприклад  $\operatorname{atan2}(x,y)$  в Matlab, яка сама виконує таку корекцію.

$$H(s) = a_0 \prod_{\mu=1}^3 \frac{1}{b_{0\mu} + b_{1\mu}s + s^2}$$

Таблиця 8 дозволяє обчислити

$$\sigma_0 = (10^{A/10} - 1)^{-1/2N} = (10^{0.1} - 1)^{-1/12} = 1.1192$$

Коефіцієнти ланок:

$$b_{01} = b_{02} = b_{03} = \sigma_0^2 = 1.2527$$

$$b_{11} = 2\sigma_0 \sin \frac{\pi}{2N} = 2 * 1.1192 \sin \frac{\pi}{12} = 0.5793$$

$$b_{12} = 2\sigma_0 \sin \frac{3\pi}{2N} = 2 * 1.1192 \sin \frac{\pi}{4} = 1.5828$$

$$b_{13} = 2\sigma_0 \sin \frac{5\pi}{2N} = 2 * 1.1192 \sin \frac{5\pi}{12} = 2.1621$$

$$a_0 = \prod_{i=1}^3 b_{0i} = b_0^3 = 1.9658$$

Таким чином,

$$H(s) = \frac{1.9658}{(1.2527 + 0.5793s + s^2)(1.2527 + 1.5828s + s^2)(1.2527 + 2.1621s + s^2)}$$

4) Передаточну функцію ЦФ Батерворта шукаємо у вигляді

$$H(z) = A_0 \prod_{\mu=1}^3 \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + B_{1\mu}z^{-1} + B_{2\mu}z^{-2}}$$

$$c = ctg \frac{2\pi f_p}{2} = ctg 0.1\pi = 3.0777$$

$$B_{11} = \frac{2(b_{01} - c^2)}{b_{01} + b_{11}c + c^2} = \frac{2(1.2527 - 3.0777^2)}{1.2527 + 0.5793 * 3.0777 + 3.0777^2} = -1.3142$$

$$B_{21} = \frac{b_{01} - b_{11}c + c^2}{b_{01} + b_{11}c + c^2} = \frac{1.2527 - 0.5793 * 3.0777 + 3.0777^2}{1.2527 + 0.5793 * 3.0777 + 3.0777^2} = 0.7149$$

$$A_{01} = \frac{1}{b_{01} + b_{11}c + c^2} = \frac{1}{1.2527 + 0.5793 * 3.0777 + 3.0777^2} = 0.07995$$

$$B_{12} = \frac{2(b_{02} - c^2)}{b_{02} + b_{12}c + c^2} = \frac{2(1.2527 - 3.0777^2)}{1.2527 + 1.5828 * 3.0777 + 3.0777^2} = -1.0540$$

$$B_{22} = \frac{b_{02} - b_{12}c + c^2}{b_{02} + b_{12}c + c^2} = \frac{1.2527 - 1.5828 * 3.0777 + 3.0777^2}{1.2527 + 1.5828 * 3.0777 + 3.0777^2} = 0.3753$$

$$A_{02} = \frac{1}{b_{02} + b_{12}c + c^2} = \frac{1}{1.2527 + 1.5828 * 3.0777 + 3.0777^2} = 0.6412$$

$$B_{13} = \frac{2(b_{03} - c^2)}{b_{03} + b_{13}c + c^2} = \frac{2(1.2527 - 3.0777^2)}{1.2527 + 2.1621 * 3.0777 + 3.0777^2} = -0.9459$$

$$B_{23} = \frac{b_{03} - b_{13}c + c^2}{b_{03} + b_{13}c + c^2} = \frac{1.2527 - 2.1621 * 3.0777 + 3.0777^2}{1.2527 + 2.1621 * 3.0777 + 3.0777^2} = 0.2342$$

$$A_{03} = \frac{1}{b_{03} + b_{13}c + c^2} = \frac{1}{1.2527 + 2.1621 * 3.0777 + 3.0777^2} = 0.05754$$

$$A_0 = a_0 A_{01} A_{02} A_{03} = 1.9658 * 0.07995 * 0.06412 * 0.05754 = 5.799 * 10^{-4}$$

Таким чином, передаточна функція, яку ми шукаємо, має вигляд:

$$H(z) = \frac{0.0005799(1+2z^{-1}+z^{-2})^3}{(1-1.3142z^{-1}+0.7149z^{-2})(1-1.0540z^{-1}+0.3753z^{-2})(1-0.9459z^{-1}+0.2342z^{-2})}$$

### Б. Аппроксимация Чебишева

1) Гранична частота смуги затримання (Таблиця 1)

$$\omega_a = \frac{\operatorname{tg} \frac{2\pi f_a}{2}}{\operatorname{tg} \frac{2\pi f_p}{2}} = \frac{\operatorname{tg} 0.15\pi}{\operatorname{tg} 0.1\pi} = 1.5682$$

2) Порядок фільтра (Таблиця 7)

$$D = \frac{10^{A_a/10} - 1}{10^{A_p/10} - 1} = \frac{10^{1.5} - 1}{10^{0.1} - 1} = 118.2687$$

$$N = \frac{\ln 4D}{2 \ln(\omega_a + \sqrt{\omega_a^2 - 1})} = \frac{\ln 4 * 118.2687}{2 \ln(1.5682 + \sqrt{1.5682^2 - 1})} = 3.0148$$

Приймаємо  $N=4$ . При цьому реальне ослаблення становить

$$AA = 10 \lg(1 + (10^{0.1} - 1)ch^2(4ch^{-1}(1.5682))) = 23.607 \text{ дБ}$$

3) Передаточна функція аналогового фільтра складається з двох ланок другого порядку:

$$H(s) = a_0 \prod_{\mu=1}^2 \frac{1}{b_{0\mu} + b_{0\mu}s + s^2}$$

Згідно з формулами обчислення коефіцієнтів (Таблиця 8):

$$\Lambda = \frac{1}{2N} \ln \frac{10^{A_a/10} - 1}{10^{A_p/10} - 1} = \frac{1}{8} \ln \frac{10^{0.05} - 1}{10^{0.05} - 1} = 0.357$$

$$\sigma_0 = sh\Lambda = \frac{e^{0.357} - e^{-0.357}}{2} = 0.3646$$

$$\Omega_0 = ch\Lambda = \frac{e^{0.357} + e^{-0.357}}{2} = 1.0644$$

$$b_{01} = (\sigma_0 \sin \frac{\pi}{2N})^2 + (\Omega_0 \cos \frac{\pi}{2N})^2 = (0.3646 \sin \frac{\pi}{8})^2 + (1.0644 \cos \frac{\pi}{8})^2 = 0.9865$$

$$b_{11} = 2\sigma_0 \sin \frac{\pi}{2N} = 2 * 0.3646 * \sin \frac{\pi}{8} = 0.279$$

$$b_{02} = (\sigma_0 \sin \frac{3\pi}{2N})^2 + (\Omega_0 \cos \frac{3\pi}{2N})^2 = (0.3646 \sin \frac{3\pi}{8})^2 + (1.0644 \cos \frac{3\pi}{8})^2 = 0.2794$$

$$b_{12} = 2\sigma_0 \sin \frac{3\pi}{2N} = 2 * 0.3646 * \sin \frac{3\pi}{8} = 0.5736$$

$$a_0 = 10^{-A_p/20} \prod_{i=1}^2 b_{0i} = 10^{-0.05} * 0.9865 * 0.2794 = 0.2456$$

Таким чином, передаточна функція прототипу має вигляд:

$$H(s) = \frac{0.2456}{(0.9865 + 0.279s + s^2)(0.2794 + 0.6736s + s^2)}$$

4. Передаточну функцію ЦФ, що проектується, шукаємо у вигляді:

$$H(z) = A_0 \prod_{\mu=1}^2 \frac{(1 + z^{-1})}{1 + B_{1\mu}z^{-1} + B_{2\mu}z^{-2}}$$

Згідно з формулами перетворення (Таблиця 1, Таблиця 3) маємо:

$$c = ctg \frac{2\pi f_p}{2} = 3.0777$$

$$B_{11} = \frac{2(b_{01} - c^2)}{b_{01} + b_{11}c + c^2} = \frac{2(0.9865 - 3.0777^2)}{0.9865 + 0.277 * 3.0777 + 3.0777^2} = -1.4996$$

$$B_{21} = \frac{b_{01} - b_{11}c + c^2}{b_{01} + b_{11}c + c^2} = \frac{0.9865 - 0.277 * 3.0777 + 3.0777^2}{0.9865 + 0.277 * 3.0777 + 3.0777^2} = 0.84831$$

$$A_{01} = \frac{1}{b_{01} + b_{11}c + c^2} = \frac{1}{0.9865 + 0.277 * 3.0777 + 3.0777^2} = 0.08841$$

$$B_{12} = \frac{2(b_{02} - c^2)}{b_{02} + b_{12}c + c^2} = \frac{2(0.2794 - 3.0777^2)}{0.2794 + 0.6736 * 3.0777 + 3.0777^2} = -1.5549$$

$$B_{22} = \frac{b_{02} - b_{12}c + c^2}{b_{02} + b_{12}c + c^2} = \frac{0.2794 - 0.6736 * 3.0777 + 3.0777^2}{0.2794 + 0.6736 * 3.0777 + 3.0777^2} = 0.8494$$

$$A_{02} = \frac{1}{b_{02} + b_{12}c + c^2} = \frac{1}{0.2794 + 0.6736 * 3.0777 + 3.0777^2} = 0.08457$$

$$A_0 = a_0 A_{01} A_{02} = 0.2456 * 0.08841 * 0.08457 = 0.001836$$

Нарешті, передаточна функція ЦФ має вигляд:

$$H(z) = \frac{0.001836(1 + z^{-1})^4}{(1 - 1.4996z^{-1} + 0.8483z^{-2})(1 - 1.5549z^{-1} + 0.8494z^{-2})}$$

### В. Аппроксимация Кауера

1) Гранична частота смуги затримання (Таблиця 1)

$$\omega_a = \frac{tg \frac{2\pi f_a}{2}}{tg \frac{2\pi f_p}{2}} = \frac{tg 0.15\pi}{tg 0.1\pi} = 1.5682$$

2) Порядок фільтра (Таблиця 7):

$$k = 1/\omega_a = 0.6377$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = 0.7703$$

$$q_0 = \frac{1}{2} * \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = 0.03257$$



$$q = q_0 + 2q_0^5 + 15q_0^9 + 150q_0^{13} \approx q_0 = 0.03257$$

$$D = \frac{10^{A_a/10} - 1}{10^{A_p/10} - 1} = 118.2687$$

$$N \geq \frac{\ln 16D}{\ln(1/q)} = \frac{\ln 16 * 118.2687}{\ln(1/0.03257)} = 2.2035$$

Обираємо порядок  $N=3$ , який забезпечує ослаблення на частоті  $\omega_a$ :

$$AA = 10 \lg\left(\frac{10^{A_p/10} - 1}{16q^N} + 1\right) = 26.7 \text{ Дб}$$

3) Передаточна функція аналогового фільтра складається із ланок першого і другого порядку:

$$H(s) = a_0 \frac{1}{b_{00} + s} \cdot \frac{a_{01} + s^2}{b_{01} + b_{11}s + s^2}$$

Використовуючи формули розрахунку коефіцієнтів прототипу (Таблиця 8), отримуємо:

$$\Lambda = \frac{1}{2N} \ln \frac{10^{A_p/20} + 1}{10^{A_a/20} - 1} = 0.476$$

$$\sigma_0 = \frac{2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \text{sh}(2m+1)\Lambda}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \text{ch}2m\Lambda} = \frac{2q^{1/4} (\text{sh}\Lambda - q^2 \text{sh}3\Lambda)}{1 - 2q \text{ch}2\Lambda} = 0.463$$

$$W = \frac{\sqrt{(1 + K\sigma_0^2)(1 + \frac{\sigma_0^2}{K})}}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{(1 + 0.6377 * 0.463^2)(1 + \frac{0.463^2}{0.6377})}}{\sqrt{0.6377}} = 1.5433$$

$$\Omega_{k1} = \frac{2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sin \frac{2m+1}{N} \pi}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos \frac{2m}{N} \pi} = \frac{2q^{1/4} (\sin \frac{\pi}{N} - q^2 \sin \frac{3\pi}{N})}{1 - 2q \cos \frac{2\pi}{N}} = 0.7126$$

$$V_1 = \frac{\sqrt{(1 - k\Omega_{k1}^2) \left(1 - \frac{\Omega_{k1}^2}{k}\right)}}{\sqrt{k}} = 0.4646$$

$$b_{00} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{k}} = 0.5798$$

$$a_{01} = \frac{1}{\Omega_{k1}^2} = 3.0879$$

$$b_{01} = \frac{(\sigma_0 V_1)^2 + (\Omega_{k1} W)^2}{(1 + \sigma_0^2 \Omega_{k1}^2)^2} = 1.0214$$

$$b_{11} = \frac{2\sigma_0 V_1}{1 + \sigma_0^2 \Omega_{k1}^2} = 0.3880$$

$$a_0 = b_{00} \frac{b_{01}}{a_{01}} = 0.1918$$

Таким чином, передаточна функція прототипу має вигляд:

$$H(s) = \frac{0.1918(3.0879 + s^2)}{(0.5798 + s)(1.0214 + 0.3880s + s^2)}$$

4) Таблиця 1, Таблиця 2, Таблиця 4 дають формули для розрахунку передаточної функції цифрового фільтра:

$$H(z) = A_0 \frac{1 + z^{-1}}{1 + B_{10}z^{-1}} \frac{1 + A_{11}z^{-1} + z^{-2}}{1 + B_{11}z^{-1} + B_{21}z^{-2}}$$

$$c = \operatorname{ctg} \frac{2\pi f_p}{2} = 3.0777$$

$$B_{10} = \frac{b_{00} - c}{b_{00} + c} = -0.6829$$

$$A_{11} = \frac{2(a_{01} - c^2)}{a_{01} + c^2} = -1.0166$$

$$B_{11} = \frac{2(b_{01} - c^2)}{b_{01} + b_{11}c + c^2} = -1.4461$$

$$B_{21} = \frac{b_{01} - b_{11}c + c^2}{b_{01} + b_{11}c + c^2} = 0.7956$$

$$A_0 = a_0 \frac{1}{b_{00} + c} \frac{a_{01} + c^2}{b_{01} + b_{11}c + c^2} = 0.0563$$

В результаті отримуємо передаточну функцію ЦФ у вигляді:

$$H(z) = \frac{0.0563(1 + z^{-1})(1 - 1.0166z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 0.6829z^{-1})(1 - 1.4461z^{-1} + 0.7956z^{-2})}$$

Для перевірки отриманого результату побудуємо графіки загального вигляду АЧХ (Рис. 6) та АЧХ в смузі пропускання фільтра (Рис. 7).

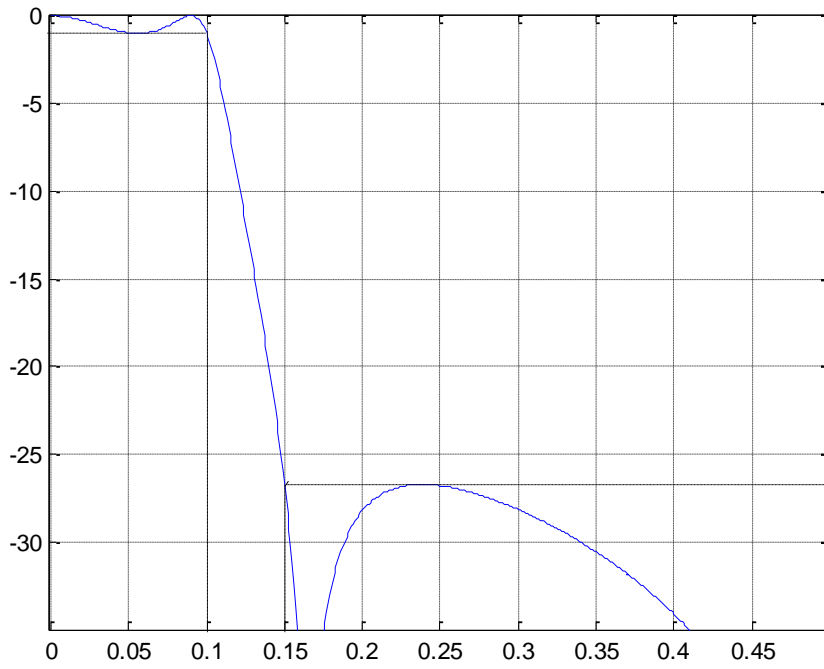


Рис. 6. Загальний вигляд АЧХ розрахованого фільтра Золотарева-Кауера в логарифмічному масштабі.

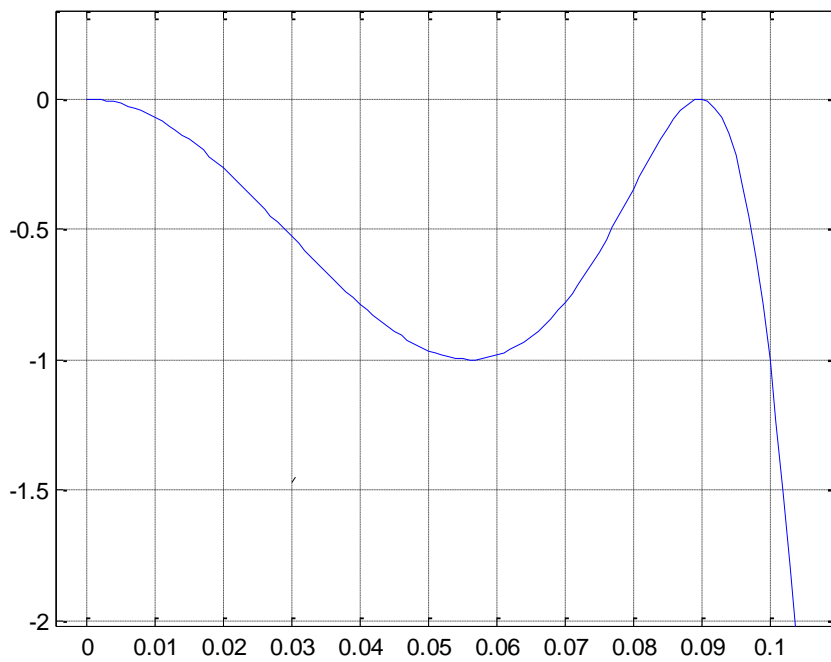


Рис. 7. Смуга пропускання АЧХ розрахованого фільтра Золотарева-Кауера в логарифмічному масштабі.

### **4.3. Програма роботи**

1. Написати програму розрахунку рекурсивних ЦФ по аналоговому прототипу в онлайн блокноті Colab. Програма має розраховувати:
  - полюси фільтру-прототипу;
  - коефіцієнти передаточної функції фільтру-прототипу;
  - коефіцієнти ЦФ, що проектується, з використанням білінійного  $z$ -перетворення.
2. Розрахувати ати рекурсивний ЦФ по параметрам, наведеним в таблиці Додатку. Номер варіанту має співпадати з номером по списку в поточній відомості виконання навчальних завдань.
3. Побудувати графіки АЧХ і ФЧХ фільтру - прототипу, а також карту його нулів і полюсів.
4. Побудувати графіки частотних характеристик розрахованого ЦФ, а також карту його полюсів і нулів без врахування довжини слова коефіцієнтів.

### **4.4. Запитання для самоперевірки**

1. Чим відрізняються частотні характеристики ЦФ, отримані за допомогою апроксимацій Батерворта, Чебишева, Золотарьова - Кауера?
2. Який параметр АЧХ ЦФ найбільше впливає на порядок фільтру?
3. В якій частинні комплексної площини групуються полюси ФНЧ?
4. Які з методів перетворення аналогового прототипу в ЦФ забезпечують збереження нерівномірностей АЧХ в смугах пропускання і затримання?
5. Для який видів АЧХ можна застосовувати білінійне перетворення?

## **Лабораторна робота № 5. ПРОЕКТУВАННЯ СТРУКТУРИ ЦФ**

### **5.1. Мета роботи**

Ознайомитися зі структурами реалізацій рекурсивних ЦФ. Дослідити методи розрахунку коефіцієнтів структури і вплив довжини слова коефіцієнтів на частотні характеристики ЦФ. Освоїти матрично – топологічний опис цифрових ланцюгів довільної структури.

### **5.2. Короткі теоретичні відомості**

#### **5.2.1. Постановка задачі**

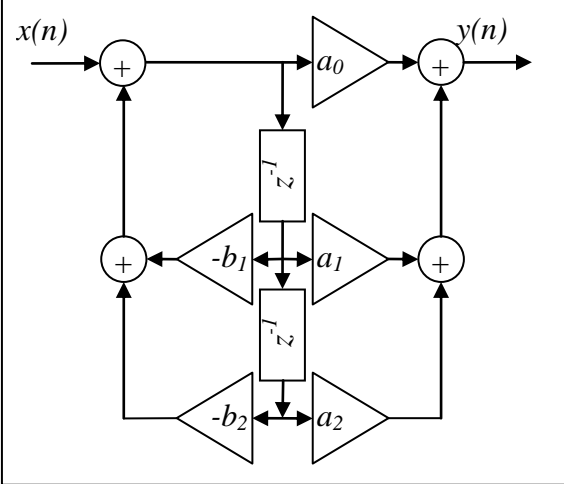
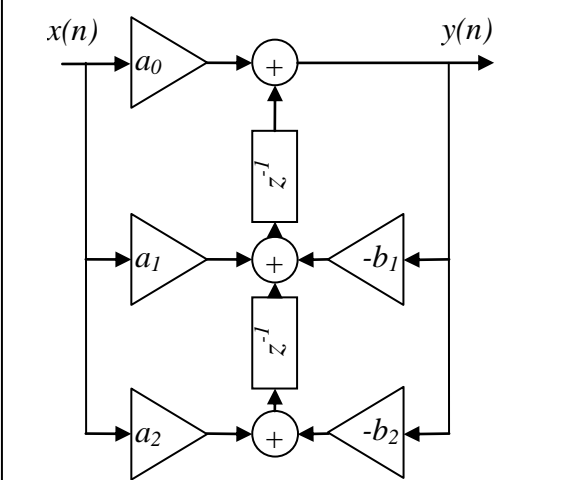
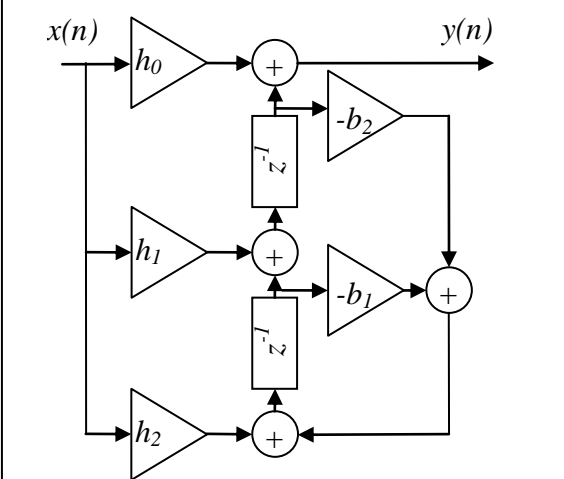
Під проектуванням структури ЦФ ми розуміємо вибір форми реалізації ЦФ і його ланок по заданій передаточній функції, яка отримана на етапі апроксимації, а також обчислення коефіцієнтів множників структури по коефіцієнтам передаточної функції при заданій довжині слів даних і коефіцієнтів [6].

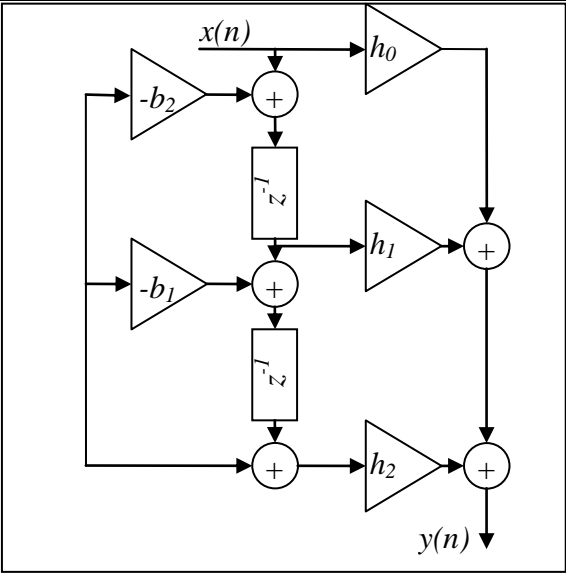
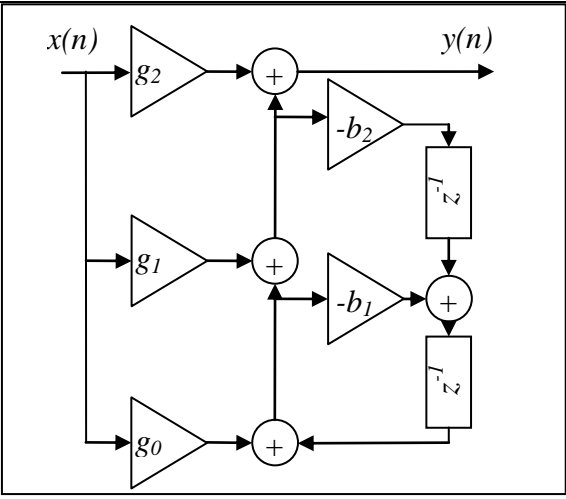
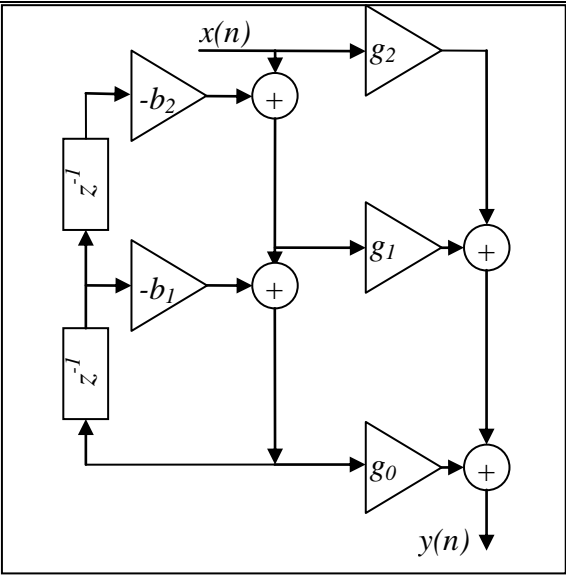
Отримана структура досліджується на моделі для співставлення отриманих характеристик з тими, які задані. При виявленні відхилень характеристик від заданих можна спробувати покращити їх за допомогою параметричної оптимізації. Якщо оптимізація не привела до покращення характеристик, треба повернутися до одного з попередніх етапів проектування (апроксимації, вибору структури).

#### **5.2.2. Вибір структури ЦФ і розрахунок її коефіцієнтів**

Таблиця 5 вміщує деякі відомі форми реалізації ланок другого порядку і розрахункові формули для коефіцієнтів. Структури ланок першого порядку отримують автоматично завдяки тому, що відповідні коефіцієнти передаточної функції дорівнюють нулю.

Таблиця 5. Форми реалізації ланок другого порядку.

Назва	Структурна схема	Формули перерахунку
Перша канонічна		$a_i = A_i$ $b_i = B_i$
Друга канонічна		$a_i = A_i$ $b_i = B_i$
Третя канонічна		$h_0 = A_0$ $h_1 = A_1 - h_0 B_1$ $h_2 = A_2 - h_0 B_2 - h_1 B_1$ $b_1 = B_1$ $b_2 = B_2$

Четверта канонічна		$h_0 = A_0$ $h_1 = A_1 - h_0 B_1$ $h_2 = A_2 - h_0 B_2 - h_1 B_1$ $b_1 = B_1$ $b_2 = B_2$
П'ята канонічна		$g_2 = A_2 / B_2$ $g_1 = A_1 / B_1 - A_2 / B_2$ $g_0 = A_0 - A_1 / B_1$ $b_1 = B_1$ $b_2 = B_2$
Шоста канонічна		$g_2 = A_2 / B_2$ $g_1 = A_1 / B_1 - A_2 / B_2$ $g_0 = A_0 - A_1 / B_1$ $b_1 = B_1$ $b_2 = B_2$

Сьома канонічна		$d_0 = A_0$ $a_1 = -A_1/d_0$ $a_2 = -A_2/d_0$ $d_1 = (-B_1 - a_1)/d_0$ $d_2 = -(B_2 + a_2 - a_1 d_0 d_1)/d_0$
Восьма канонічна		$d_0 = A_0$ $a_1 = -A_1/d_0$ $a_2 = -A_2/d_0$ $d_1 = (-B_1 - a_1)/d_0$ $d_2 = -(B_2 + a_2 - a_1 d_0 d_1)/d_0$
Решіткова другого порядку		<p>Коефіцієнти обчислюються з виразів для передаточних функцій:</p> $H_1(z) = \frac{1}{1 + k_1(k_2 + 1)z^{-1} + k_2 z^{-1}}$ $H_2(z) = \frac{k_1 + z^{-1}}{1 + k_1(k_2 + 1)z^{-1} + k_2 z^{-1}}$ $H_3(z) = \frac{k_2 + k_1(k_2 + 1)z^{-1} + z^{-2}}{1 + k_1(k_2 + 1)z^{-1} + k_2 z^{-1}}$



### 5.2.3. Моделювання ЦФ довільної структури

Структура ЦФ може бути довільною. Тому для повноцінного її моделювання необхідно використовувати не розв'язання різницевого рівняння, а топологію структури ЦФ.

Моделювання ЦФ базується на матрично-топологічному описі цифрових кіл (ЦК) [2], згідно з яким ЦФ зображується у вигляді сигнального графа або системи матричних рівнянь.

Якщо в якості координатного базису обрані сигнали вузлів графа, математичну модель ЦФ, який має  $N$  вузлів, можна записати в матричній формі в  $z$  - області у вигляді системи  $N$  вузлових рівнянь:

$$\begin{cases} W(z) = CX(z) + AW(z) + z^{-1}BW(z) \\ Y(z) = DW(z) \end{cases}$$

де  $W(z)$  - вектор-стовпчик вузлових сигналів кола  $w_i(z)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ );

$C$  - матриця коефіцієнтів передач витокових гілок розміру  $N \times L$  ( $L$  - кількість витокових вузлів);

$X(z)$  - вектор-стовпчик вхідних сигналів розміру  $L$ ;

$A$  - матриця розміру  $N \times N$  коефіцієнтів передач гілок без затримки;

$B$  - матриця розміру  $N \times N$  коефіцієнтів передач гілок з затримкою;

$Y(z)$  - вектор-стовпчик вихідних сигналів розміру  $R$  ( $R$  - кількість стокових вузлів);

$D$  - матриця коефіцієнтів передач стокових гілок розміру  $R \times N$ .

З наведеної вище системи рівнянь легко можемо обчислити передаточну функцію лагцюга. З першого рівняння отримуємо:

$$W(z) - AW(z) - z^{-1}BW(z) = CX(z)$$

$$(I - A - z^{-1}B)W(z) = CX(z)$$

$$W(z) = (I - A - z^{-1}B)^{-1}CX(z)$$

$$Y(z) = DW(z) = D(I - A - z^{-1}B)^{-1}CX(z)$$

$$H(z) = Y(z) / X(z) = D(I - A - z^{-1}B)^{-1}C$$

Матрицю  $S = (I - A - z^{-1}B)$  часто називають матрицею системи.

Внаслідок того, що елементи матриць  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  постійні і не залежать від  $z$ , зворотне  $z$ -перетворення від (3.1) відповідає математичній моделі цифрового кола в часовій області:

$$w(n) = Cx(n) + Aw(n) + Bw(n-1)$$

$$y(n) = Dw(n)$$

Рис. 8 зображує структурну схему ЦФ другого порядку, який реалізований в першій канонічній формі.

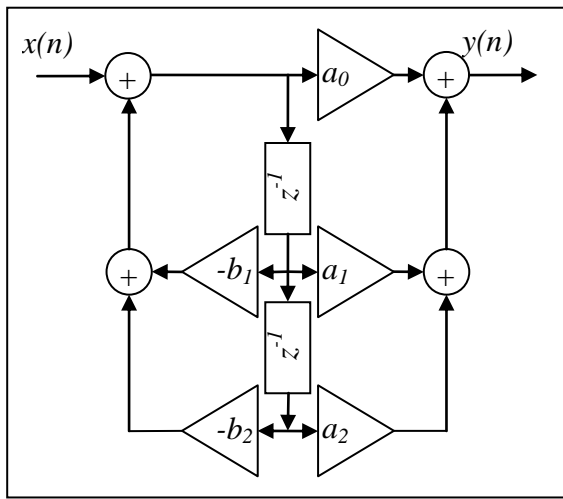


Рис. 8. Схема ЦФ в першій канонічній формі.

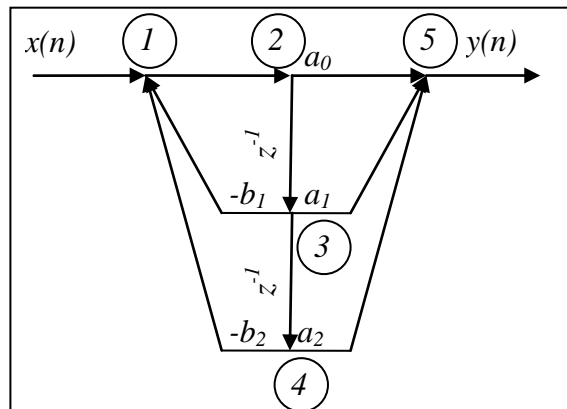


Рис. 9. Сигнальний граф ЦФ першої канонічної форми.

Згідно з сигнальним графом (Рис. 9) отримуємо матричний опис цифрового фільтра у вигляді:

$$\begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \\ w_4(n) \\ w_5(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b_1 & -b_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n-1) \\ w_2(n-1) \\ w_3(n-1) \\ w_4(n-1) \\ w_5(n-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n-1) \\ w_2(n-1) \\ w_3(n-1) \\ w_4(n-1) \\ w_5(n-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \\ w_4(n) \\ w_5(n) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

При побудові матриць коефіцієнти  $a_{jk}, b_{jk}, c_{jk}, d_{jk}$  записуються на перетині рядка  $j$  і стовпчика  $k$ . Перший індекс дорівнює номеру кінцевого вузла відповідної гілки, другий – номеру початкового вузла.

Для моделювання цифрового кола, що заданий матрично-топологічним описом, необхідно встановити послідовність обчислення сигналів вузлів. Якщо цей порядок не встановлений, можлива ситуація, коли для обчислення сигналу якогось вузла необхідно знати значення сигналів вузлів, які до цього моменту не були обчислені. Наприклад, в рівнянні (3.3) для обчислення сигналу  $w_1(n)$  необхідно мати значення сигналу  $w_3(n)$ , яке ще не обчислене. Для усунення таких проблем матричну модель ЦФ необхідно привести до вигляду, в якому розкриті відношення порядку. Якщо таке приведення неможливе, це є ознакою того, що в структурі ЦФ мають місце замкнуті контури без елементів затримки. Таке коло називають незчисленим, він потребує перетворення в обчислювану форму.

Алгоритм приведення обчислюваного кола к вигляду, в якому розкриті відношення порядку, який називають алгоритмом топологічного сортування, базується на зміні номерів рядків і стовпчиків матриці  $[A + z^{-1}B]$  таким чином, щоб всі елементи  $a_{ij}$  знаходились нижче головної діагоналі.

Робота алгоритму топологічного сортування починається з пошуку в матриці ненульового елемента вище головної діагоналі з наступним змінням номерів рядка і стовпчика, в наслідок чого цей елемент пересувається в позицію нижче головної діагоналі.

Матричне рівняння ЦФ (Рис. 8) після топологічного сортування набуває вигляду:

$$\begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \\ w_4(n) \\ w_5(n) \end{bmatrix} = x(n) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 & -b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & a_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \\ w_4(n) \\ w_5(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n-1) \\ w_2(n-1) \\ w_3(n-1) \\ w_4(n-1) \\ w_5(n-1) \end{bmatrix}$$

$$y(n) = [ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 ] \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \\ w_4(n) \\ w_5(n) \end{bmatrix}$$

Моделювання ЦФ в часовій області складається з розв'язання системи  $N$  скалярних рівнянь відносно  $y_i(n), i = 1, 2, \dots, N$  у  $n = 1, 2, \dots$  Для кожного моменту часу  $n$

обчислюється добуток рядків матриць А і В, починаючи з першого, відповідно на стовпчики  $w(n)$  и  $w(n-1)$ .

Для обчислення імпульсної характеристики використовують вхідний сигнал  $x(n) = \delta(n) = 1, 0, 0, \dots$

Матриця системи в даному випадку має вигляд

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -z^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z^{-1} & 0 \\ b_2 & b_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -a_2 & -a_1 & 0 & -a_0 & 1 \end{bmatrix}$$

Для отримання передаточної функції необхідно обернути цю матрицю. Але треба звернути увагу на те, що множення матриці зліва на рядок D і справа на стовпець C виділяє єдиний елемент оберненої матриці, що знаходиться на перетині 5-го рядка і 3-го стовпця, тобто  $S_{5,3}^{-1}$ . Звідси маємо:

$$H(z) = S_{5,3}^{-1} = \frac{\Delta_{3,5}}{\det S}$$

$$\det S = \begin{vmatrix} 1 & -z^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z^{-1} & 0 \\ b_2 & b_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -a_2 & -a_1 & 0 & -a_0 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{5+5} \begin{vmatrix} 1 & -z^{-1} & & & \\ & 1 & & & -z^{-1} \\ b_2 & b_1 & 1 & & \\ & & -1 & 1 & \\ & & & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & & -z^{-1} \\ b_1 & 1 & \\ & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -z^{-1}(-1)^{1+2} & & \\ b_2 & 1 & -z^{-1} \\ & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + bz^{-1} + z^{-1}(b_2z^{-1})$$

$$\det S = 1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}$$

$$\Delta_{3,5} = \begin{vmatrix} 1 & -z^{-1} & & & \\ & 1 & & -z^{-1} & \\ & & -1 & 1 & \\ -a_2 & -a_1 & & -a_0 & \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & & -z^{-1} & & \\ & -1 & 1 & & -z^{-1} \\ -a_1 & & -a_0 & & \\ & & & -a_2 & -a_0 \end{vmatrix} =$$

$$= a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}$$

Остаточно маємо передаточну функцію цифрового кола у вигляді

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}$$

Частотні характеристики обчислюються як перетворення Фур'є імпульсної характеристики :

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\frac{2\pi}{L}kn}$$

або з виразу для передаточної функції при підстановці  $z = e^{j\omega}$ .

Рисунок 6 підсумовує можливі шляхи обчислення частотних характеристик ЦФ на основі імпульсної характеристики.

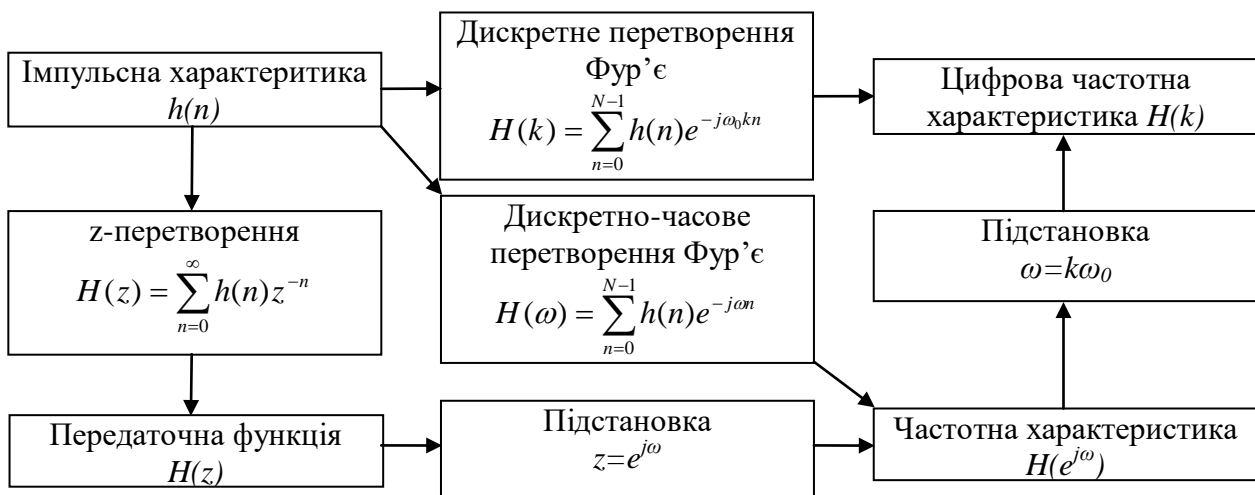


Рисунок 6. Розрахунок характеристик ЦФ, виходячи з імпульсної характеристики

### 5.3. Програма роботи

В якості початкових даних взяти результати розрахунку ЦФ, виконаного в попередній лабораторній роботі.

1. Розрахувати масштабні множники і обрати найкращий порядок включення ланок ЦФ.
2. Написати програму реалізації ЦФ.
3. Вивести графіки імпульсної, перехідної і частотних характеристик ЦФ без врахування довжини слова коефіцієнтів і результатів арифметичних операцій.
4. Вивести графіки імпульсної, перехідної і частотних характеристик ЦФ з врахуванням довжини слова коефіцієнтів і результатів арифметичних операцій.
5. Подати на вхід програмної реалізації ЦФ гармонічний сигнал, оцінити параметри вихідного сигналу і порівняти їх з очікуваними.
6. Подати на вхід програмної реалізації ЦФ білий шум, оцінити спектр вихідного шуму і порівняти його з очікуваним.
7. Накреслити функціональну схему апаратурної реалізації ЦФ на рівні регістрів, множників і суматорів. Оцінити максимально допустиму частоту дискретизації, задавши довільний час виконання окремих операцій.

### 5.4. Запитання для самоперевірки

1. Які структури ЦФ називаються канонічними?
2. На який параметр ЦФ впливає порядок підключення ланок?

3. Як обчислити передаточну функцію ЦФ, представлену матричною моделлю?
4. Який вигляд має мати матриця коефіцієнтів без затримки?
5. Яка ознака вказує на наявність в сигнальному графі замкнених контурів без елементів затримки?

# ДОДАТОК 1. АПРОКСИМАЦІЯ АНАЛОГОВОГО НОРМОВАНОГО ПРОТОТИПУ

## Види апроксимуючих функцій

Апроксимація частотних характеристик фільтра базується на квадраті модуля АЧХ, який представлений у вигляді

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 A_N^2(\omega/\omega_p)}$$

де  $A_N(\omega/\omega_p)$  - апроксимуюча функція порядку  $N$ ;

$\varepsilon$  - затухання АЧХ на межі смуги пропускання  $\omega_p$ ;

$\omega_p$  - гранична частота смуги пропускання, на якій квадрат модуля АЧХ зменшується до  $1/(1 + \varepsilon^2)$ .

Зазвичай спочатку розраховують нормовану АЧХ НЧ з  $\omega_p=1$  [1,2], а потім виконують її частотне перетворення. В цьому випадку

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 A_N^2(\omega)} \quad (2.2)$$

Знаменник (2.2) характеризує втрати, або затухання, АЧХ і є позитивною функцією аргумента  $\omega$ :

$$L(\omega) = 1 + \varepsilon^2 A_N^2(\omega) \quad (2.3)$$

При  $\omega=\omega_a$  придушення дорівнює  $A^2$ .

Частота  $\omega_a$  для нормованого прототипу розраховується в залежності від того, який фільтр проектується, аналоговий або цифровий. При проектуванні аналогових фільтрів границя полоси затримання прототипу розраховується в відповідності до використаного частотного перетворення. Ці перетворення виходять за рамки цих вказівок, їх легко можна знайти в літературі.

В випадку проектування цифрових фільтрів  $\omega_a$  аналогового прототипу обчислюється за формулами, які визначаються методом перетворення аналогового прототипу в цифровий фільтр. Таблиця 1 вміщує формули для білінійного перетворення.

Логарифмічну АЧХ фільтра можна обчислити через апроксимуючу функцію як

$$10 \lg |H(j\omega)|^2 = -10 \lg [1 + \varepsilon^2 A_N^2(\omega)]$$

або

$$20 \lg |H(j\omega)| = -10 \lg L(\omega)$$

Параметри апроксимуючої функції розраховуються на основі заданих вимог до АЧХ цифрового фільтра і в залежності від способу перетворення аналогового фільтра в цифровий.

При білінійному перетворенні нерівномірності АЧХ аналогового фільтра зберігаються, таким чином,

$$20\lg|H(j\omega_p)| \geq -A_p;$$

$$20\lg|H(j\omega_a)| \leq -A_a.$$

або

$$|H(j\omega_p)|^2 = 10^{-A_p/10} = \frac{1}{1+\varepsilon^2};$$

$$|H(j\omega_a)|^2 = 10^{-A_a/10} = \frac{1}{A^2}.$$

Звідси витікає

$$\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1}; \tag{2.4}$$

$$A = \sqrt{10^{A_a/10}}.$$

З другого боку, при білінійному перетворенні частоти пов'язані між собою однозначним, але нелінійним співвідношенням

$$\frac{\omega}{\omega_p} = \operatorname{tg}(\pi f T_s) / \operatorname{tg}(\pi f_p T_s)$$

Це дає можливість розрахувати  $\omega_a$  для нормованого аналогового прототипу.

В більшості практичних задач використовуються базові (стандартні) апроксимації (Таблиця 6).

Для апроксимації Батерворта функція  $A_N(\omega)$  є поліномом  $N$ -го ступеня відносно змінної  $\omega$ :

$$A_N(\omega) = \omega^N \tag{2.5}$$

Таблиця 6. Апроксимуючі функції фільтрів-прототипів

Тип	Форма	Опис
Батерворта		$ H(j\omega) ^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (j\omega)^{2N}}$



Чебишева		$ H(j\omega) ^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega)}$ $T_N(\omega) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} \omega), & \omega \leq 1 \\ \operatorname{ch}(N \operatorname{ch}^{-1} \omega), & \omega \geq 1 \end{cases}$
Кауера		$ H(j\omega) ^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 U_N^2(\omega)}$ $U_N(\omega) = \begin{cases} \operatorname{sn} \left[ N \frac{K_1}{K} \operatorname{sn}^{-1}(\omega, k); k_1 \right], & \text{нечетні } N \\ \operatorname{sn} \left[ K_1 + N \frac{K_1}{K} \operatorname{sn}^{-1}(\omega, k); k_1 \right], & \text{парні } N \end{cases}$ $k = 1/\omega_a$ $k_1 = \varepsilon / \sqrt{A^2 - 1}$

Коли  $\omega$  збільшується в межах  $0 \leq \omega \leq \infty$ ,  $A_N(\omega)$  монотонно зростає, а  $|H(j\omega)|^2$  монотонно зменшується. Апроксимація по Батерворту забезпечує максимально гладку АЧХ як в смузі пропускання, так і в смузі ослаблення.

Апроксимація за Чебишевим в якості функції  $A_N(\omega)$  використовує поліном Чебишева  $N$ -го ступеня:

$$A_N(\omega) = T_N(\omega) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} \omega), & |\omega| \leq 1 \\ \operatorname{ch}(N \operatorname{ch}^{-1} \omega), & |\omega| \geq 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

Для значень  $|\omega| \leq 1$   $T_0(\omega) = 1$ ;  $T_1(\omega) = \omega$ ;  $T_2(\omega) = 2\omega^2 - 1$ ;  $T_3(\omega) = 4\omega^3 - 3\omega$ ;  $T_{N+1}(\omega) = 2\omega T_N(\omega) - T_{N-1}(\omega)$ .

При зміні  $\omega$  в межах  $-1 \leq \omega \leq 1$  функція  $T_N(\omega)$  змінюється  $N$  раз в межах  $\pm 1$ . Функція  $T_N^2(\omega)$  при цьому змінюється в межах  $0 \dots 1$   $2N$  раз. Функція  $|H(j\omega)|^2$  змінюється  $N$  раз в межах від  $1$  до  $1/(1+\varepsilon^2)$  при змінненні  $\omega$  від  $0$  до  $1$ . Для  $\omega > 1$  функція  $T_N(\omega)$  монотонно зростає, а  $|H(j\omega)|^2$  монотонно зменшується до  $0$ . Результатом апроксимації по Чебишеву є АЧХ з рівновеликими пульсаціями в смузі пропускання, яка є гладкою в смузі затримання. Перехідна смуга при чебишевській апроксимації вузча, ніж при апроксимації за Батервортом.

При апроксимації за Кауером функція  $A_N(\omega)$  визначається через еліптичну функцію Якобі:

$$A_N(\omega) = U_N(\omega) = \begin{cases} sn\left[N \frac{K_1}{K} sn^{-1}(\omega, k); k_1\right] & \text{для непарних } N \\ sn\left[K_1 + N \frac{K_1}{K} sn^{-1}(\omega, k); k_1\right] & \text{для парних } N \end{cases} \quad (2.7)$$

Подібно до того, як тригонометрична функція  $x = \sin u$  є зворотною функцією інтеграла  $u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sin^{-1} x$ , еліптична функція  $\varpi = sn(z)$  є зворотною функцією

еліптичного інтеграла  $z = \int_0^{\varpi} \frac{d\theta}{\sqrt{(1-\theta^2)(1-k^2\theta^2)}} = sn^{-1}(\varpi, k)$ , де  $k = 1/\omega_a$ .

Зазвичай цей інтеграл записується через підстановку  $\varpi = \sin \varphi$  у вигляді

$$z = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = sn^{-1}(\varphi, k)$$

При цьому границю інтегрування  $\varphi$  називають амплітудою інтеграла  $\varphi = amZ$ , а функції  $\sin \varphi = sn(z)$  (синус амплітуди);  $\cos \varphi = cn(z) = \sqrt{1 - sn^2 z}$  (косинус амплітуди);  $\Delta \varphi = dn(z) = \sqrt{1 - k^2 sn^2 z}$  (дельта амплітуди) називають еліптичними функціями Якобі.

Еліптичні функції є дійсними функціями  $z$  і  $k$  при дійсних значеннях останніх і зводяться до елементарних функцій при  $k=0$  і  $k=1$ . Зокрема,  $sn(z, 0) = \sin z$ .

Коефіцієнти  $k = 1/\omega_a$  і  $k_1 = \varepsilon/\sqrt{A^2 - 1}$  називають коефіцієнтами селективності та затухання.

Функції  $K = K(k)$  і  $K_1 = K(k_1)$  являють собою повні еліптичні інтеграли

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = sn^{-1}\left(\frac{\pi}{2}, k\right);$$

$$K(k_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k_1^2 \sin^2 \theta}} = sn^{-1}\left(\frac{\pi}{2}, k_1\right).$$

Аналітичне обчислення еліптичних функцій виконується через  $\theta$ -функції:

$$\begin{aligned}
sn(z, k) &= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_1\left(\frac{z}{2K}, q\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K}, q\right)} \\
cn(z, k) &= \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\theta_2\left(\frac{z}{2K}, q\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K}, q\right)} \\
dn(z, k) &= \sqrt{k'} \frac{\theta_3\left(\frac{z}{2K}, q\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K}, q\right)}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

де

$$\begin{aligned}
\theta_0\left(\frac{z}{2K}, q\right) &= 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos\left(2m \frac{\pi z}{2K}\right); \\
\theta_1\left(\frac{z}{2K}, q\right) &= 2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sin\left((2m+1) \frac{\pi z}{2K}\right); \\
\theta_2\left(\frac{z}{2K}, q\right) &= 2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} q^{m(m+1)} \cos\left((2m+1) \frac{\pi z}{2K}\right); \\
\theta_3\left(\frac{z}{2K}, q\right) &= 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2} \cos\left(2m \frac{\pi z}{2K}\right); \\
q &= e^{-\pi K'/K}; \quad K' = K(k'); \quad k' = \sqrt{1-k^2}.
\end{aligned}$$

Функція  $sn(z)$  має два суттєво різних періоди. Тому апроксимація за Кауєром дає АЧХ з пульсаціями як в смузі пропускання, так і в смузі затримання.

### Розрахунок порядку апроксимуючої функції

Порядок апроксимуючої функції визначається, виходячи із умови забезпечення необхідного затухання на частоті  $\omega_a$ :

$$L(\omega_a) = 1 + \varepsilon^2 A_N^2(\omega_a) = A^2$$

або

$$A_N(\omega_a) = \sqrt{\frac{A^2 - 1}{\varepsilon^2}}$$

З урахуванням співвідношення між  $A$ ,  $\varepsilon$  і  $A_p$ ,  $A_a$ , отримуємо:

$$A_N(\omega_a) = \sqrt{\frac{10^{A_a/10} - 1}{10^{A_p/10} - 1}}.$$

Позначивши  $\frac{10^{A_a/10} - 1}{10^{A_p/10} - 1} = D$ , запишемо співвідношення для визначення порядку у

вигляді

$$A_N(\omega_a) = \sqrt{D}. \tag{2.9}$$

Для апроксимації Батерворта  $A_N(\omega_a) = \omega_a^N = \sqrt{D}$ , тому

$$N = \frac{\ln \sqrt{D}}{\ln \omega_a} = \frac{\ln D}{2 \ln \omega_a} \quad (2.10)$$

В більшості випадків отримане значення не є цілим, тому його треба округлити до найближчого більшого цілого. Це призводить до того, що гарантоване затухання на границі смуги затримання буде дещо більшим, ніж задане. Реальне затухання для отриманого значення порядку можна розрахувати за формулою:

$$AA = 10 \lg(1 + \varepsilon^2 A_N^2(\omega_a)) = 10 \lg(1 + \varepsilon^2 \omega_a^{2N}) = 10 \lg \left( 1 + \left( 10^{\frac{A_p}{10}} - 1 \right) \omega_a^{2N} \right)$$

Для апроксимації Чебишева

$$A_N(\omega_a) = T_N(\omega_a) = ch(Nch^{-1}\omega_a) = \sqrt{D}, \quad N = \frac{ch^{-1}\sqrt{D}}{ch^{-1}\omega_a}.$$

Враховуючи, що  $ch^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ , вираз для  $N$  можна записати у вигляді

$$N = \frac{\ln(\sqrt{D} + \sqrt{D-1})}{\ln(\omega_a + \sqrt{\omega_a^2 - 1})}.$$

Звичайно значення  $D = (10^{A_p/10} - 1)/(10^{A_p/10} - 1)$  набагато перевищує 1. Наприклад, для  $A_p \leq 1$  дБ і  $A_a \geq 30$  дБ отримуємо  $D > 3858$ . Тому  $\ln(\sqrt{D} + \sqrt{D-1}) \approx \ln 2\sqrt{D}$ , а

$$N = \frac{\ln 2\sqrt{D}}{\ln(\omega_a + \sqrt{\omega_a^2 - 1})} = \frac{\ln 4D}{2 \ln(\omega_a + \sqrt{\omega_a^2 - 1})} \quad (2.11)$$

Реальне ослаблення на границі смуги затримання в більшості випадків дещо більше від заданого і може бути обчислено за формулою

$$AA = 10 \lg(1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega_a)) = 10 \lg(1 + \varepsilon^2 ch^2(Nch^{-1}(\omega_a))) = 10 \lg \left( 1 + \left( 10^{\frac{A_p}{10}} - 1 \right) ch^2(Nch^{-1}(\omega_a)) \right)$$

Порядок апроксимуючої функції Кауера визначається із співвідношення

$$N \frac{K'}{K} = \frac{K'_1}{K_1},$$

де

$$K = K(k); \quad K' = K(k') = K(\sqrt{1-k^2});$$

$$K_1 = K(k_1); \quad K'_1 = K(k'_1) = K(\sqrt{1-k_1^2}).$$

Скористуємось співвідношенням  $sn(K_1, k_1) = 1$ . Тоді

$$\frac{1}{\sqrt{k_1}} \frac{2q_1^{\frac{1}{4}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q_1^{m(m+1)} \sin\left((2m+1)\frac{\pi K_1}{2K}\right)}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q_1^{m^2} \cos\left(2m\frac{\pi K_1}{2K}\right)} = 1,$$

де  $q_1 = e^{-\pi K'_1/K_1}$  або  $K_1 = 4\sqrt{q_1} \left( \frac{1 + q_1^2 + q_1^6 + K}{1 + 2q_1 + 2q_1^4 + K} \right)^2$

Звичайно величина  $k_1 = \sqrt{\frac{(10^{A_p/10} - 1)}{(10^{A_a/10} - 1)}} = \frac{1}{\sqrt{D}}$  мала. Наприклад,  $k_1 < 0.0161$  для

$A_p \leq -1$  дБ і  $A_a \geq -30$  дБ. Тому можна покласти  $k_1 \approx 0$ , а  $k'_1 = \sqrt{1 - k_1^2} \approx 1$ ,  $K'_1/K_1 \gg 1$  і  $q_1 \ll 1$ . Тоді  $K_1 \approx 4\sqrt{q_1}$  або  $K_1^2 = 16q_1 = 16e^{-\pi K'_1/K_1} = 16e^{-\pi N K'/K} = 16q^N$ .

Звідси витікає

$$N = \frac{\ln 16D}{\ln 1/q} \quad (2.12)$$

З цього виразу можна визначити значення  $A_2$ , якщо відоме  $N$ :

$$A_a = \lg \left( \frac{10^{A_p/10} - 1}{16q^N} + 1 \right)$$

Параметр  $q$  обчислюється, виходячи із співвідношення  $dn(0, k) = 1$ :

$$dn(0, k) = \sqrt{k'} \frac{\theta_3(0/2K, q)}{\theta_0(0/2K, q)} = 1$$

або

$$\sqrt{k'} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + K}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + K}$$

В першому наближенні  $q_0 = \frac{1 - \sqrt{k'}}{2 + \sqrt{k'}}$ , а з урахуванням наступних членів

$$q = q_0 + 2q_0^5 + 15q_0^9 + 150q_0^{13}.$$

Для більш зручного використання формули розрахунку порядків апроксимуючих функцій зібрані в одному місці (Таблиця 7)

Таблиця 7. Формули розрахунку порядку фільтрів-прототипів

Апроксимація	Формула	Примітки
Батерворта	$N \geq \frac{\ln D}{2 \ln \omega_a}$	$D = \frac{10^{A_a/10} - 1}{10^{A_p/10} - 1}$
Чебишева	$N \geq \frac{\ln 4D}{2 \ln(\omega_a + \sqrt{\omega_a^2 - 1})}$	
Кауера	$N \geq \frac{\ln 16D}{\ln(q^{-1})}$	$D = \frac{10^{A_a/10} - 1}{10^{A_p/10} - 1}$ $q = q_0 + 2q_0^5 + 15q_0^9 + 150q_0^{13}$ $q_0 = \frac{1 - \sqrt{k'}}{2 + \sqrt{k'}}$ $k' = \sqrt{1 - k^2}; k = \omega_a^{-1}$

## Розрахунок передаточної функції аналогового фільтру-прототипу

Будемо шукати передаточну функцію аналогового прототипу в формі

$$H(s) = a_0 \prod_{\mu=1}^M H_{\mu}(s) \quad (2.13)$$

де  $a_0$  - постійний нормуючий коефіцієнт;

$M$  – кількість ланок першого або другого порядку;

$H_{\mu}(s)$  - передаточні функції ланок;

$$H_{\mu}(s) = \begin{cases} \frac{a_{0\mu} + s}{b_{0\mu} + s} & \text{для ланцюга першого порядку} \\ \frac{a_{0\mu} + a_{1\mu}s + s^2}{b_{0\mu} + b_{1\mu}s + s^2} & \text{для ланцюга другого порядку} \end{cases}$$

Коефіцієнти поліномів чисельника і знаменника  $a_{0\mu}$ ,  $a_{1\mu}$ ,  $b_{0\mu}$ ,  $b_{1\mu}$  передаточних функцій ланок обчислюються на основі виразів для нулів та полюсів функції  $|H(j\omega)|_{\omega=s/j}^2 = H(s)H(-s)$ , які в свою чергу визначаються на основі коренів функції  $L(\omega^2)_{\omega=s/j} = L(-s^2)$ .

Полюси та нулі функції  $H(s)H(-s)$  розташовані симетрично відносно уявної вісі площини  $s$ . Для побудови стійкої функції  $H(j\omega)$  обираються ті полюси, які розміщені в лівій півплощині (всього може бути  $N$  полюсів і  $N$  нулів).

Передаточна функція в термінах нулів і полюсів має вигляд

$$H(s) = a_0 \prod_{\mu=1}^M \frac{s - z_{v-\mu}}{s - p_{v-\mu}},$$

де

$$v = \begin{cases} N-1 & \text{для непарних } N \\ N & \text{для парних } N \end{cases}$$

Дійсні полюси  $s_{v-\mu} = -\sigma_{v-\mu}$  дають ланки першого порядку:

$$1/(s_{v-\mu} + s) = 1/(b_{0\mu} + s), \quad b_{0\mu} = s_{v-\mu}.$$

Комплексні полюси  $s_{v-\mu} = -\sigma_{v-\mu} \pm j\Omega_{v-\mu}$  породжують ланки другого порядку:

$$1/(s + \sigma_{v-\mu} - j\Omega_{v-\mu})(s + \sigma_{v-\mu} + j\Omega_{v-\mu}) = 1/(b_{0\mu} + b_{1\mu}s + s^2).$$

Звідси

$$\begin{aligned} b_{0\mu} &= \sigma_{v-\mu}^2 + \Omega_{v-\mu}^2; \\ b_{1\mu} &= 2\sigma_{v-\mu}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Аналогічно обчислюються коефіцієнти чисельника.

Коефіцієнт  $a_0$  для нормалізованої передаточної функції обчислюється так, щоб її максимальне значення дорівнювало одиниці.

Для апроксимації Батерворта функція  $H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{s}{j}\right)^{2N}}$  має тільки

полюси, тому що функція  $L(-s^2) = 1 + \varepsilon^2(-s^2)^N$  має тільки нулі:

$$s_i = \begin{cases} \varepsilon^{-1/N} e^{j(2i-1)\pi/2N} & \text{для парних } N \\ \varepsilon^{-1/N} e^{j(i-1)\pi/N} & \text{для непарних } N \end{cases},$$

які розташовані рівномірно по колу з радіусом  $\sigma_0 = \varepsilon^{-1/N} = (10^{A_p/10} - 1)^{-1/2N}$  симетрично відносно дійсної вісі з угловою відстанню  $\pi/N$ .

Для побудови передаточної функції аналогового фільтра відбираються полюси, розташовані в лівій півплощині, які обчислюються за виразом

$$\sigma_{v-\mu} \pm j\Omega_{v-\mu} = \begin{cases} \sigma_0 \left( \sin \frac{2\mu+1}{2N} \pi \pm j \cos \frac{2\mu+1}{2N} \pi \right) & \text{для непарних } N \\ \sigma_0 \left( \sin \frac{2\mu-1}{2N} \pi \pm j \cos \frac{2\mu-1}{2N} \pi \right) & \text{для парних } N \end{cases},$$

де

$$\mu = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, K, \frac{N-1}{2}; & v = \frac{N+1}{2} \text{ для непарних } N \\ 1, 2, \dots, K, \frac{N}{2}; & v = \frac{N}{2} + 1 \text{ для парних } N \end{cases}$$

Передаточна функція фільтра Батерворта має вигляд

$$H(s) = a_0 H_0(s) \prod_{\mu=1}^M \frac{1}{b_{0\mu} + b_{1\mu}s + s^2}, \quad (2.15)$$

де

$$H_0(s) = \begin{cases} 1/(b_{00} + s) & \text{для непарного } N \\ 1 & \text{для парного } N \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} \frac{N-1}{2} & \text{для непарного } N \\ \frac{N}{2} & \text{для парного } N \end{cases}$$

$$b_{00} = \sigma_0 = (10^{\delta_i/10} - 1)^{-1/2N}$$

$$b_{0\mu} = \sigma_{v-\mu}^2 + \Omega_{v-\mu}^2 = \sigma_0^2$$

$$b_{1\mu} = 2\sigma_{v-\mu} = 2\sigma_0 \sin \frac{2\mu-1}{2N} \pi$$

Із умови  $H(s)|_{s=0} = 1$  знаходимо масштабний коефіцієнт

$$a_0 = \begin{cases} \prod_{\mu=0}^M b_{0\mu} & \text{для непарного } N \\ \prod_{\mu=1}^M b_{0\mu} & \text{для парного } N \end{cases} \quad (2.16)$$

Для апроксимації Чебишева функція  $H(s)H(-s)$  має полюси, що є коренями рівняння  $L(-s^2) = 1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{s}{j}\right) = 0$ , або  $1 + \varepsilon^2 \left[ ch\left(Nch^{-1}\frac{s}{j}\right) \right]^2 = 0$ .

Оскільки  $s = \sigma \pm j\Omega$ ,  $ch^{-1}\frac{s}{j} = ch^{-1}(-j\sigma + \Omega) = u + jv$  і  $ch[N(u + jv)] = \pm \frac{j}{\varepsilon}$ .

Із першого рівняння знаходимо:  $-j\sigma + \Omega = ch(u + jv) = chucosv + jshusinv$  або  $\sigma = -shusinv$ ;  $\Omega = chucosv$ .

Із другого рівняння  $ch(Nu + jNv) = chNucosNv + jshNusinNv = \pm \frac{j}{\varepsilon}$  або  $chNucosNv = 0$ ;  $shNusinNv = \pm \frac{1}{\varepsilon}$ .

Перше рівняння виконується при  $\cos Nv = 0$ , тому  $v = \frac{(2k-1)\pi}{2N}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . При цьому  $\sin Nv = \pm 1$ , і із другого рівняння отримуємо  $u = \pm \frac{1}{N} sh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}$ .

Таким чином,

$$\sigma_i = \pm sh\left(\frac{1}{N} sh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right) \sin \frac{2i-1}{2N} \pi;$$

$$\Omega_i = ch\left(\frac{1}{N} sh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right) \cos \frac{2i-1}{2N} \pi.$$

$\frac{\sigma_i^2}{sh^2 u} + \frac{\Omega_i^2}{sh^2 u} = 1$ , тому полюси  $s_k = \sigma_i \pm j\Omega_i$  розташовані на еліпсі, вісі якого мають довжину

$$\sigma_0 = sh\left(\frac{1}{N} sh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \Omega_0 = ch\left(\frac{1}{N} sh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Вводячи позначення  $\Lambda = \frac{1}{N} sh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}$  і підставляючи  $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1}$  так, що

$$\Lambda = \frac{1}{N} sh^{-1} \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{N} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}}\right) = \frac{1}{N} \ln \sqrt{\frac{10^{A_p/20} + 1}{10^{A_p/20} - 1}},$$

отримаємо остаточні вирази для обчислення полюсів апроксимації Чебишева у вигляді

$$\sigma_{v-\mu} \pm j\Omega_{v-\mu} = \sigma_0 \sin \frac{2\mu-1}{2N} \pi \pm j\Omega_0 \cos \frac{2\mu-1}{2N} \pi;$$



$$\mu = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, K, \frac{N+1}{2}; & \nu = \frac{N+1}{2} \text{ для непарних } N \\ 1, 2, \dots, K, \frac{N}{2}; & \nu = \frac{N}{2} \text{ для парних } N \end{cases}$$

$$\sigma_0 = sh\Lambda = \frac{1}{2}(e^\Lambda - e^{-\Lambda})$$

$$\Omega_0 = ch\Lambda = \frac{1}{2}(e^\Lambda + e^{-\Lambda})$$

$$\Lambda = \frac{1}{2N} \ln \left( \frac{10^{A_p/20} + 1}{10^{A_p/20} - 1} \right)$$

Передаточна функція фільтра Чебишева має вигляд

$$H(s) = a_0 H_0 \prod_{\mu=1}^M \frac{1}{b_{0\mu} + b_{1\mu}s + s^2}, \quad (2.17)$$

де

$$H_0 = \begin{cases} 1/(b_{00} + s) & \text{для непарного } N \\ 1 & \text{для парного } N \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} \frac{N-1}{2} & \text{для непарного } N \\ \frac{N}{2} & \text{для парного } N \end{cases}$$

$$b_{00} = \sigma_0$$

$$b_{0\mu} = \left( \sigma_0 \sin \frac{2\mu-1}{2N} \pi \right)^2 + \left( \Omega_0 \cos \frac{2\mu-1}{2N} \pi \right)^2$$

$$b_{1\mu} = 2\sigma_0 \sin \frac{2\mu-1}{2N} \pi$$

$$\sigma_0 = sh\Lambda \quad \Omega_0 = ch\Lambda$$

Коефіцієнт  $a_0$  визначається, виходячи із умови

$$H(s) = \begin{cases} 1 & \text{для непарного } N \\ 1/\sqrt{1+\varepsilon^2} = 10^{-A_p/20} & \text{для парного } N \end{cases}$$

$$a_0 = \begin{cases} \prod_{\mu=0}^{\infty} b_{0\mu} & \text{для непарного } N \\ 10^{-A_p/20} \prod_{\mu=1}^{\infty} b_{0\mu} & \text{для парного } N \end{cases} \quad (2.18)$$

Апроксимація Кауера дає як полюси, так і нулі функції  $H(s)H(-s)$ , які обчислюються із коренів функції  $L(-s^2) = L(\Omega^2)_{\Omega=s/j}$ , яка має вигляд [1]:

$$L(\Omega^2) = \begin{cases} 1 + \varepsilon^2 sn^2 \left[ N \frac{K_1}{K} sn^{-1}(\Omega, k), k_1 \right] & \text{для непарного } N \\ 1 + \varepsilon^2 sn^2 \left[ K_1 + N \frac{K_1}{K} sn^{-1}(\Omega, k), k_1 \right] & \text{для парного } N \end{cases}$$

Позначимо  $z = sn^{-1}(\Omega, k)$  і знайдемо спочатку корені функції  $L(z)$ . Для непарних  $N$  функцію  $L(z)$  можна записати у вигляді

$$L(z) = \left[ 1 + j\varepsilon sn\left(N \frac{K_1}{K} z, k_1\right) \right] \left[ 1 - j\varepsilon sn\left(N \frac{K_1}{K} z, k_1\right) \right].$$

Якщо  $z_l$  - корінь першого множника, то  $-z_l$  - корінь другого множника, тому що еліптичний синус є непарною функцією  $z$ . Отже, нулі і полюси  $L(z)$  можна визначити, розв'язуючи рівняння  $sn\left(N \frac{K_1}{K} z, k_1\right) = \frac{j}{\varepsilon}$ .

В більшості випадків величина  $k_1 = \sqrt{(10^{A_p/10} - 1)(10^{A_a/10} - 1)} = 1/\sqrt{D}$  мала. Наприклад, при  $A_p = -1$  дБ,  $A_a \leq -30$  дБ отримуємо  $k_1 \leq 0.061$ . Тому ми можемо задати  $k_1 = 0$  і, враховуючи, що  $K_1(0) = \pi/2$ , можемо записати вираз  $sn\left(N \frac{K_1}{K} z, k_1\right) = \sin N \frac{\pi}{2} Kz = \frac{j}{\varepsilon}$ , або  $-jN \frac{\pi}{2K} z = sh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}$ .

Враховуючи, що  $sh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  отримуємо вираз для нуля функції  $L(z)$ :

$$z_0 = j \frac{K}{\pi N} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1}\right) = j \frac{K}{2\pi N} \ln \frac{10^{A_p/20} + 1}{10^{A_p/20} - 1}$$

Позначимо  $\Lambda = \frac{1}{2N} \ln\left(\frac{10^{A_p/20} + 1}{10^{A_p/20} - 1}\right)$ , тоді  $z_0 = j \frac{K}{\pi} \Lambda = j\nu_0$

Оскільки функція  $sn\left(N \frac{K_1}{K} z, k_1\right)$  має період повторення  $4K/N$ ,  $z_i = z_0 + \frac{4Ki}{N}$  також є нулями  $L(z)$ .

Нулі функції  $L(\omega^2)$  знаходимо на основі взаємозв'язку  $\omega$  і  $z$ :

$$z = sn^{-1}(\omega, k)$$

або

$$\frac{\omega}{\sqrt{k}} = sn(z, k)$$

Нулі  $L(-s^2)$  можна визначити, поклавши  $s = j\omega$ . Для  $i=0$  існує нуль функції  $L(-s^2)$   $s = \sigma_0$

$$\sigma_0 = j\Omega_0 = j\sqrt{k} sn(j\nu_0, k).$$

Всього існує  $N-1$  різних комплексних нулів для  $i=1, 2, \dots, N-1$ :

$$s = \sigma_i + j\Omega_i = j\sqrt{k} sn(j\nu_0 + 4Ki/N, k).$$

Можна показати, що  $sn\left(j\nu_0 + \frac{4Ki}{N}, k\right) = (-1)^i sn\left(j\nu_0 \pm \frac{2Ki}{N}, k\right)$ , тому

$$\sigma_i + j\Omega_i = j\sqrt{k}(-1)^i sn\left(j\nu_0 \pm \frac{2Ki}{N}, k\right), \quad i = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}.$$

Враховуючи формулу додавання

$$sn(z_1 + z_2, k) = \frac{sn(z_1, k)cn(z_2, k)dn(z_2, k) + cn(z_1, k)sn(z_2, k)dn(z_1, k)}{1 + k^2 sn^2(z_1, k)sn^2(z_2, k)},$$
 а також формули

взаємозв'язку між еліптичними функціями, можна записати вираз для комплексних нулів  $L(-s^2)$  у вигляді

$$\sigma_i + j\Omega_i = \frac{(-1)^i \sigma_0 V_i \pm j\Omega_{ki} W}{1 + \sigma_0^2 \Omega_{ki}^2},$$

де  $i = 1, 2, \dots, (N-1)/2$ ;

$$\sigma_0 = j\sqrt{k} sn(j\nu_0, k); \quad V_i = \sqrt{\left(1 - k\Omega_{ki}^2\right)\left(1 - \frac{\Omega_{ki}^2}{k}\right)};$$

$$\Omega_{ki} = \sqrt{k} sn\left(\frac{2Ki}{N}, k\right); \quad W = \sqrt{\left(1 + k\sigma_0^2\right)\left(1 + \frac{\sigma_0^2}{k}\right)}.$$

При парному  $N$  функція  $L(z) = sn\left(N \frac{K_1}{K} z + K_1, k_1\right)$  має нулі:

$$\pm(\sigma_i + j\Omega_i) = \frac{\pm(\sigma_0 V_i \pm j(-1)^i \Omega_{ki} W)}{1 + \sigma_0^2 \Omega_{ki}^2}.$$

Таким чином, нулі і полюси  $H(s)$  при парному  $N$  розраховуються аналогічно випадку непарного  $N$ , тільки  $i$  в виразі для  $\Omega_i$  змінюється на  $i-1/2$ .

Використовуючи формули обчислення еліптичного синуса через  $\theta$ -функції, отримуємо співвідношення для обчислення полюсів і нулів  $H(s)$ :

$$\sigma_0 = j\sqrt{k} sn(j\nu_0, k) = j \frac{\theta_1(j\nu_0/2K, q)}{\theta_0(j\nu_0/2K, q)} = j \frac{2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sin\left(\frac{2m+1}{2K} \pi j \nu_0\right)}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos\left(\frac{2m}{2K} \pi j \nu_0\right)}$$

Після підстановки  $\nu_0 = K\Lambda/\pi$  отримуємо

$$\sigma_0 = j \frac{2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sin j(2m+1)\Lambda}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos j2m\Lambda}$$

і, враховуючи, що  $\sin(jx) = -sh(x)/j$ ,  $\cos(jx) = ch(x)$ ,

$$\sigma_0 = - \frac{2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sin(2m+1)\Lambda}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos 2m\Lambda}$$

Аналогічно можна показати, що

$$\Omega_{ki} = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left( \frac{2K\lambda}{N}, k \right) = \frac{2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sin \left( \frac{2m+1}{N} \pi \lambda \right)}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos \left( \frac{2m}{N} \pi \lambda \right)};$$

$$\lambda = \begin{cases} i & \text{при непарному } N \\ i - \frac{1}{2} & \text{при парному } N \end{cases} \quad i = 1, 2, K, M$$

Розрахований таким чином прототип має частоту зрізу, що дорівнює  $\omega_p = \sqrt{k}$ .

Для отримання нормованого прототипу необхідно скорегувати отримані нулі і полюси, розділивши їх на  $\omega_p$ . Це можна виконати, замінивши вирази для обчислення коефіцієнтів  $V_i$ ,  $W$  наступним чином

$$V_i = \frac{\sqrt{\left(1 - k\Omega_{ki}^2\right) \left(1 - \frac{\Omega_{ki}^2}{k}\right)}}{\sqrt{k}},$$

$$W = \frac{\sqrt{\left(1 + k\sigma_0^2\right) \left(1 + \frac{\sigma_0^2}{k}\right)}}{\sqrt{k}}.$$

Передаточна функція фільтра Кауера має вигляд

$$H(s) = a_0 H_0(s) \prod_{\mu=1}^M \frac{a_{0\mu} + s^2}{b_{0\mu} + b_{1\mu}s + s^2} \quad (2.19)$$

де

$$H_0(s) = \begin{cases} 1/(b_{00} + s) & \text{при непарному } N \\ 1 & \text{при парному } N \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} \frac{N-1}{2} & \text{при непарному } N \\ \frac{N}{2} & \text{при парному } N \end{cases}$$

Коефіцієнти передаточної функції обчислюються згідно з виразами

$$\begin{aligned} b_{00} &= \frac{\sigma_0}{\sqrt{k}} \\ b_{0\mu} &= 1/\Omega_{k\mu}^2 \\ b_{0\mu} &= \sigma_\mu^2 + \Omega_\mu^2 = \frac{(\sigma_0 V_\mu)^2 + (\Omega_{k\mu} W)^2}{(1 + \sigma_0^2 \Omega_{k\mu}^2)^2} \\ b_{1\mu} &= 2\sigma_\mu = 2 \frac{\sigma_0 V_\mu}{1 + \sigma_0^2 \Omega_{k\mu}^2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Масштабний множник обчислюється згідно з

$$a_0 = \begin{cases} \prod_{\mu=0}^M b_{0\mu} / a_{0\mu} & \text{для непарних } N \\ 10^{-A_p/20} \prod_{\mu=1}^M b_{0\mu} / a_{0\mu} & \text{для парних } N \end{cases} \quad (2.21)$$

Таблиця 8 надає повний набір розрахункових формул для передаточних функцій аналогових фільтрів-прототипів.

Таблиця 8. Зведення формул розрахунку коефіцієнтів передаточних функцій аналогових фільтрів.

$H(s) = a_0 H_0(s) \prod_{\mu=1}^M H_{\mu}(s), \quad M = \begin{cases} \frac{N-1}{2} & \text{для непарних } N \\ \frac{N}{2} & \text{для парних } N \end{cases}$ $H_0(s) = \begin{cases} 1/(b_{00} + s) & \text{для непарних } N \\ 1 & \text{для парних } N \end{cases}$ $H_i(s) = \begin{cases} 1/(b_{0\mu} + b_{1\mu}s + s^2) & \text{для фільтрів Батерворта і Чебишева} \\ (\Omega_{k\mu}^2 + s^2)/(b_{0\mu} + b_{1\mu}s + s^2) & \text{для фільтрів Кауера} \end{cases}$ $a_0 = \begin{cases} \sigma_0 \prod_{\mu=1}^M b_{0\mu} & \text{для фільтрів Батерворта і Чебишева при непарному } N \\ \prod_{\mu=0}^M b_{0\mu} & \text{для фільтрів Батерворта при парному } N \\ 10^{-A_p/20} \prod_{\mu=1}^M b_{0\mu} & \text{для фільтрів Чебишева при парному } N \\ \sigma_0 \prod_{\mu=1}^M b_{0\mu} / \Omega_{0\mu}^2 & \text{для фільтрів Кауера при непарному } N \\ 10^{-A_p/20} \prod_{\mu=1}^M b_{0\mu} / \Omega_{0\mu}^2 & \text{для фільтрів Кауера при парному } N \end{cases}$			
Апроксимація	$b_{0\mu}$	$b_{1\mu}$	Примітки
Батерворта	$\sigma_0^2$	$2\sigma_0 \sin \frac{2\mu-1}{2N} \pi$	$\sigma_0 = (10^{A_p/10} - 1)^{-1/2N}$
Чебишева	$\left( \sigma_0 \sin \frac{2\mu-1}{2N} \pi \right)^2 + \left( \Omega_0 \cos \frac{2\mu-1}{2N} \pi \right)^2$	$2\sigma_0 \sin \frac{2\mu-1}{2N} \pi$	$\sigma_0 = sh\Lambda ; \Omega_0 = ch\Lambda$ $\Lambda = \frac{1}{2N} \ln \left( \frac{10^{A_p/20} + 1}{10^{A_p/20} - 1} \right)$

<p>Качера</p>	$\frac{(\sigma_0 V_\mu)^2 + (\Omega_{k\mu} W)^2}{(1 + \sigma_0^2 \Omega_{k\mu}^2)^2}$	$2\sigma_0 \frac{\sigma_0 V_\mu}{1 + \sigma_0^2 \Omega_{k\mu}^2}$	$\sigma_0 = -\frac{2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m} \times$ $\times \frac{q^{m(m+1)} \operatorname{sh}(2m+1)\Lambda}{q^{m^2} \operatorname{ch} 2m\Lambda}$ $\Omega_{k\mu} = \frac{2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m} \times$ $\times \frac{q^{m(m+1)} \sin\left(\frac{2m+1}{N} \pi \lambda\right)}{q^{m^2} \cos\left(\frac{2m}{N} \pi \lambda\right)}$ $\Lambda = \frac{1}{2N} \ln\left(\frac{10^{A_1/20} + 1}{10^{A_1/20} - 1}\right)$ $W = \frac{\sqrt{\left(1 + k\sigma_0^2\right)\left(1 + \frac{\sigma_0^2}{k}\right)}}{\sqrt{k}}$ $V_\mu = \frac{\sqrt{\left(1 - k\Omega_{k\mu}^2\right)\left(1 - \frac{\Omega_{k\mu}^2}{k}\right)}}{\sqrt{k}}$ $\lambda = \begin{cases} \mu & \text{для нечетных } N \\ \mu - \frac{1}{2} & \text{для четных } N \end{cases}$ $\mu = 1, 2, K, M$
---------------	---	---	---

## ДОДАТОК 2. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Таблиця варіантів завдань:

1.

№ Варіанту	Тип АЧХ	Тип апроксимації	Границі смуг пропускання, Гц	Границі смуг затримання, Гц	Нерівномірність АЧХ в смугі пропускання, дБ	Гарантоване придушення, дБ	Діапазон частот, що обробляється	Розрядність коефіцієнтів, біт	Розрядність результатів арифметичних операцій, біт	Реалізація	Структура ланки
1	НЧ	Чеб	3400	4000	1	50	0-20КГц	10	10	Паралельна	Пряма
2	ВЧ	Чеб	340	100	2	50	0-20КГц	10	10	Паралельна	1 канонічна
3	ПЛ	Батт.	200 3400	100 4000	3	40	0-20КГц	10	10	Каскадна	2 канонічна
4	РЖ	Батт.	40 60	45 55	1	40	0-20КГц	10	10	Каскадна	Пряма
5	НЧ	Чеб	8000	8500	2	40	0-20КГц	10	12	Паралельна	1 канонічна
6	ВЧ	Чеб	60	50	3	40	0-20КГц	10	12	Паралельна	2 канонічна
7	ПЛ	Батт.	461000 469000	459000 471000	3	30		10	12	Каскадна	Пряма
8	РЖ	Батт.	90	95	3	40	0-4	10	12	Каскадна	1 канонічна



			110	105			КГц				
9	НЧ	Чеб	20000	22000	0.1	50		12	12	Паралельна	2 канонічна
10	ВЧ	Чеб	340	100	2	60	0-8КГц	12	12	Паралельна	Пряма
11	ПЛ	Батт.	20 16000	10 17000	3	40	0-22.1 КГц	12	12	Каскадна	1 канонічна
12	РЖ	Батт.	20 16000	30 15000	3	30	0-22.1 КГц	12	12	Каскадна	2 канонічна
13	НЧ	Чеб	3400	4000	3	50	0- 20КГц	12	12	Паралельна	Пряма
14	ВЧ	Чеб	340	100	1	50	0- 20КГц	12	12	Паралельна	1 канонічна
15	ПЛ	Батт.	200 3400	100 4000	2	40	0- 20КГц	12	12	Каскадна	2 канонічна
16	РЖ	Батт.	40 60	45 55	3	40	0-20 КГц	12	12	Каскадна	Пряма
17	НЧ	Чеб	8000	8500	1	40	0-20 КГц	8	10	Паралельна	1 канонічна
18	ВЧ	Чеб	60	50	2	40	0-20 КГц	8	10	Паралельна	2 канонічна
19	ПЛ	Батт.	461000 469000	459000 471000	2	30		8	12	Каскадна	Пряма
20	РЖ	Батт.	90 110	95 105	1	40	0-4 КГц	8	12	Каскадна	1 канонічна
21	НЧ	Чеб	20000	22000	1	50		8	10	Паралельна	2 канонічна
22	ВЧ	Чеб	340	100	3	60	0-8КГц	8	10	Паралельна	Пряма
23	ПЛ	Батт.	20 16000	10 17000	1	30	0-22.1 КГц	10	12	Каскадна	1 канонічна

24	РЖ	Батт.	20 16000	30 15000	3	40	0-22.1 КГц	10	12	Каскадна	2 канонічна
25	НЧ	Чеб	16000	1800	1	40		10	12	Паралельна	Пряма
26	ВЧ	Чеб	18000	16000	2	50	0-20 КГц	10	12	Паралельна	1 канонічна
27	ПЛ	Батт.	100 16000	50 17000	1	40		12	14	Каскадна	2 канонічна
28	РЖ	Батт.	50 16000	60 15500	2	40	0-22.1 КГц	12	14	Каскадна	Пряма
29	НЧ	Чеб	1000	1200	3	60		10	12	Паралельна	1 канонічна
30	ВЧ	Чеб	4000	3600	1	50	0-16 КГц	10	12	Паралельна	2 канонічна
31	ПЛ	Батт.	16000	1800	1	40		12	14	Каскадна	Пряма
32	РЖ	Батт.	18000	16000	2	50	0-20 КГц	12	14	Каскадна	1 канонічна
33	НЧ	Чеб.	100 16000	50 17000	1	40		8	10	Паралельна	2 канонічна
34	ВЧ	Чеб.	50 16000	60 15500	2	40	0-22.1 КГц	8	10	Паралельна	Пряма

Примітки:

1. Якщо діапазон частот не заданий, його потрібно визначити, виходячи з параметрів фільтра.
2. Якщо задані параметри АЧХ не можна отримати при заданій довжині слова коефіцієнтів, необхідно розрядність до мінімально необхідного значення.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Andreas Antoniou, Digital Filters: Analysis and Design, McGraw Hill, 1st Edn., New York, 1979.
2. Бортник Г.Г. Цифрова обробка сигналів в телекомунікаційних системах: підручник / Г. Г. Бортник, В. М. Кичак. – Вінниця : ВНТУ, 2014. – 232 с.
3. Дробик О.В. Цифрова обробка аудіо- та відеоінформації у мультимедійних системах: Навчальний посібник / О.В. Дробик, В.В. Кідалов, В.В. Коваль, Б.Я. Костік, В.С. Лазебний, Г.М. Розорінов, Г.О. Сукач. – К.: Наукова думка, 2008. – 144 с.
4. Геранін В.О. Рекурсивні цифрові фільтри (розрахунок та синтез структурних схем, розрахунок похибок квантування)/ В.О. Геранін, Єрмоленко П.А., Макаренко В.В., Мовчан Т.В., Писаренко Л.Д., В.В.Пілінський, Хотяїнцев С.М.Г.М.Розорінов,: Навч. посібник. – Київ: ВПФ УкрІНТЕІ, 2001. – 184 с., іл. – Укр.

## ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

1. Alan V.Oppenheim, Ronald W.Shafer, Discrete-Time Signal Processing, 3rd ed. Pearson, 2014.
2. Richard.G.Lyons, Understanding Digital Signal Processing, 2nd ed. Pearson Education, Inc., 2004.
3. Francis F. Li, Trevor J.Cox. Digital signal processing in audio and acoustic engineering. CRC Press, 2019.
4. Andreas Antoniou, Wu-Sheng Lu. Practical optimization. Algorithms and engineering applications. Springer, 2007.
5. Ben Gold, Nelson Morgan, Dan Ellis. Speech and audio signal processing: Processing and perception of speech and music. Second Ed. Wiley, 2011.