ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

НАВЧАННЯ
БЕЗ МЕЖ

Геометрія 10

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

Алла Єршова, Вадим Голобородько,
Олександр Крижановський, Сергій Єршов

«Геометрія (профільний рівень)»

підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти

Видавництво «Ранок»

Створено відповідно до навчальної програми

з математики

для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів

Профільний рівень

Геометрія

Профільний рівень

Підручник для 10 класу
закладів загальної середньої освіти

2-ге видання, оновлене

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

rnk.com.ua/103376
Електронний інтерактивний
додаток до підручника

Харків
Видавництво «Ранок»
2023

Дорогі десятикласники і десятикласниці!

У вашому шкільному житті розпочався новий етап — ви прийшли до старшої школи. На новий рівень виходить і вивчення геометрії. Наш подальший курс буде присвячено стереометрії — розділу геометрії, який вивчає фігури в просторі.

Навіщо потрібна стереометрія? По-перше, вона знайомить із різноманіттям просторових форм, законами сприйняття і зображення тривимірних тіл — і завдяки цьому допомагає орієнтуватися в навколишньому світі. Архітектура, конструювання, будівництво неможливі без уміння відтворювати на кресленні уявні тривимірні об'єкти, їхні деталі та вузли. За статистикою, кожен десятий винахід людства здійснений із застосуванням геометрії, зокрема стереометрії, — за рахунок вибору оптимальної форми, вдалого розміщення тощо. Видатний архітектор XX ст. Ле Корбюзьє не випадково назвав піраміду Хеопса «німим трактатом з геометрії», а саму геометрію — «граматикою архітектури».

По-друге, стереометрія відкриває нові методи наукового пізнання, сприяє розвитку логічного мислення. Ви вже звикли до того, що вивчення геометрії щоразу змушує звертатися до логіки, опановувати закономірності правильного мислення. Курс стереометрії в цьому розумінні не є винятком, адже, за влучним спостереженням видатних математиків, стереометрія є таким поєднанням живої уяви і строгої логіки, завдяки якому вони взаємно організують і спрямовують одна одну.

І, нарешті, стереометрія сама по собі надзвичайно цікава. Чимало дивовижних просторових форм створено не людиною, а самою природою. Такими є, наприклад, кристали — природні многогранники, властивості яких визначаються їхньою будовою. Давньогрецькі філософи надавали геометричної форми елементам першооснов буття — вогню, землі, воді й повітрю. Історія розвитку стереометрії пов'язана з іменами відомих учених — Евкліда, Піфагора, Ейлера, Лобачевського, Декарта.

Сподіваємося, що перше знайомство зі скарбами наукової думки, зібраними під обкладинкою цього підручника, подарує вам те вишукане задоволення, яке завжди відчуває людина, доторкаючись до Вічного.

Бажаємо вам успіхів!

Як користуватися підручником

Підручник має чотири розділи, кожен з яких складається з параграфів, а параграфи — з пунктів. У тексті міститься як теоретичний матеріал, так і приклади розв'язування задач. Найважливіші поняття й факти виділені **напівжирним шрифтом**. Вправи й задачі, які подано в підручнику, поділяються на декілька груп. Усні вправи (рубрика ***«Обговорюємо теорію»***) допоможуть вам зрозуміти, наскільки успішно ви засвоїли теоретичний матеріал. Ці вправи не обов'язково виконувати подумки — для їх розв'язування ви можете використати рисунки, провести необхідні міркування в чернетці. Після усних можна переходити до практичних вправ (рубрика ***«Моделюємо»***). Далі йдуть письмові задачі (рубрика ***«Розв'язуємо задачі»***). Спочатку перевірте свої знання, виконуючи завдання ***рівня* А**. Деякі з усних і практичних вправ і задач рівня А мають позначення «•» як такі, що відповідають *початковому* рівню, решта завдань рівня А відповідають *середньому* рівню. Більш складними є задачі ***рівня* Б** (*достатній* рівень). Якщо ви добре опанували матеріал і бажаєте виявити свої творчі здібності, на вас чекають задачі ***рівня* В** (*високий* рівень). Позначення і біля номерів вправ означають, що ці вправи на розсуд учителя можуть бути використані для роботи в парах і групах відповідно. Після кожного параграфа в рубриці ***«Повторення»*** зазначено, які саме поняття й факти* слід пригадати для успішного вивчення наступного матеріалу, та наведено задачі, що підготують вас до сприйняття наступної теми. Для самостійної роботи вдома призначені задачі, номери яких мають позначення . Розв'язувати всі задачі всіх груп не обов'язково.

Оскільки вивчення геометрії у просторі має сприяти всебічному розвитку та вихованню особистості, до підручника включено як класичні задачі з геометрії (зокрема, задачі практичного змісту), так і завдання, призначені для формування й розвитку, окрім математичної, інших ключових компетентностей. Такі завдання мають позначення К. Їхня тематика присвячена оволодінню державною й іноземними мовами, опануванню природничих наук, використанню інформаційно-комунікативних технологій, усвідомленню необхідності розв'язування актуальних екологічних і соціальних проблем тощо.

У підручнику розміщено ***тестові завдання для самоперевірки***, завдяки яким ви зможете краще підготуватися до тематичного оцінювання. Крім того, ви маєте змогу самостійно перевірити рівень вашої підготовки, пройшовши онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua. Про можливість скористатися матеріалами сайта вам нагадуватиме позначення i. ***Додаткові задачі*** до розділів допоможуть вам узагальнити вивчене, а ***задачі підвищеної складності*** відкриють нові грані геометрії, красу нестандартного мислення.

Підсумкові огляди наприкінці кожного розділу — своєрідний геометричний компас, за допомогою якого ви зможете орієнтуватися у вивченому матеріалі. Рубрика ***«Історична довідка»*** познайомить із цікавими фактами з розвитку геометрії.

* Наведено посилання на навчальний матеріал підручників з геометрії для 7–9 класів ЗЗСО авторів А. П. Єршової, В. В. Голобородька, О. Ф. Крижановського, С. В. Єршова.

Розділ I
ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ

Інженер має споглядати простір, інакше він не буде здатний до розробки самостійних проєктів... Вивчення геометрії якнайкраще розвиває просторове мислення.

Леон де Баньоль,
французький математик

Першим етапом вивчення стереометрії є дослідження прямих і площин у просторі.

Так само, як і планіметрія, стереометрія розпочинається з низки основних положень (аксіом), які приймаються без доведення і слугують фундаментом для подальших міркувань і доведень.

Радимо звернути особливу увагу на розбіжності у формулюваннях окремих тверджень про одні й ті самі фігури на площині та в просторі.

Пам'ятний знак на честь заснування міста Києва

§ 1 Аксіоми стереометрії

1.1. Вступ до стереометрії. Просторові фігури

Стереометрія — від грецького «стерео» — просторовий і «метріо» — вимірюю — просторове вимірювання.

Вивчення геометрії в просторі, як і на площині, розпочнемо з уведення основних неозначуваних фігур, властивості яких виражаються аксіомами. У планіметрії такими фігурами були точка і пряма; у стереометрії до них додається також площина. Зауважимо, що геометрична роль площини змінюється: якщо скористатися мовою театру, то в планіметрії площина слугувала лише декорацією, на тлі якої розгорталися геометричні «події», а в стереометрії вона стає повноправною дійовою особою.

Отже, **основними неозначуваними фігурами в просторі є точка, пряма і площина.**

Площину можна уявити як рівну поверхню стола, стіни або лану. Площину, як і пряму, вважають нескінченною, тому на рисунках зображають лише частину площини — у вигляді паралелограма або області, обмеженої замкненою лінією (рис. 1). Площину прийнято вважати непрозорою, тому частини ліній, які «сховані» під площиною, зображають пунктиром.

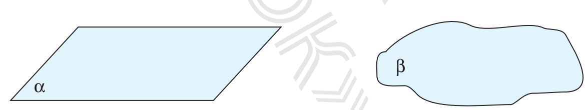


Рис. 1. Зображення площини

Площини зазвичай позначаються грецькими буквами α, β, γ і т. д. Окремо зазначимо, що **в будь-якій площині справджуються всі твердження планіметрії.**

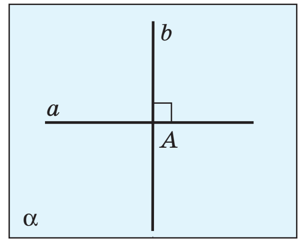
У зв'язку із цим виникає питання: чи всі твердження, які справджуються для фігур на площині, є правильними для них у просторі? Аби переконатися, що це не завжди так, розглянемо такі приклади. Нехай через дану точку A необхідно провести найбільшу можливу кількість попарно перпендикулярних прямих. Очевидно, що на площині можна провести лише дві такі прямі (рис. 2, *а*). Але якщо не обмежувати розв'язання задачі однією площиною, то через дану точку можна провести принаймні три попарно перпендикулярні прямі (рис. 2, *б*).

Розглянемо ще одну задачу: із шістьох однакових сірників необхідно скласти чотири рівносторонні трикутники зі стороною, що дорівнює довжині сірника. Розв'язати таку задачу на площині неможливо. Але якщо «вийти в простір» і скласти сірники у вигляді піраміди (рис. 3), ми отримаємо чотири шукані трикутники.

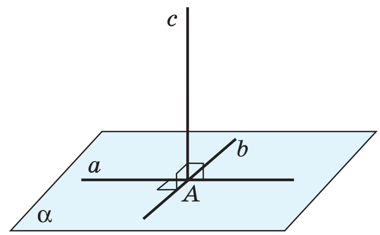
Отже, наведені приклади переконливо доводять, що розв'язання задачі на площині і в просторі можуть суттєво відрізнятися, а розгляд стереометричних задач потребує знання додаткових закономірностей і співвідношень.

Очевидно також, що не завжди існує площина, яка містить усі елементи фігур, що розглядаються. Не лежать в одній площині всі елементи просторових фігур, зокрема многогранників.

Многогранник являє собою тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості плоских многокутників (тобто многокутників



а



б

Рис. 2. Розв'язання задачі про перпендикулярні прямі на площині й у просторі

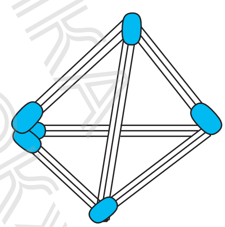


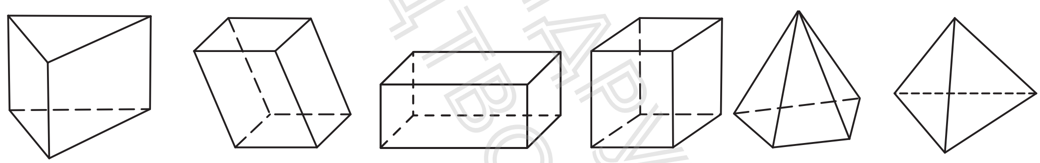
Рис. 3. Розв'язання задачі про шість сірників

з їх внутрішніми областями). Ці многокутники є ***гранями многогранника***, а їхні сторони — ***ребрами многогранника***.

Тетраедр — від грецького «тетра» — чотири і «едра» — грань

Призма є многогранником, дві грані якого — рівні n-кутники (***основи призми***), площини яких не мають спільних точок, а решта n граней (***бічні грані***) — паралелограми (рис. 4, *а*). Окремим випадком призми є ***паралелепіпед*** (рис. 4, *б*), усі грані якого — паралелограми. Окремим випадком паралелепіпеда є прямокутний паралелепіпед (рис. 4, *в*), усі грані якого — прямокутники. Якщо всі грані прямокутного паралелепіпеда є квадратами, то одержимо куб (рис. 4, *г*).

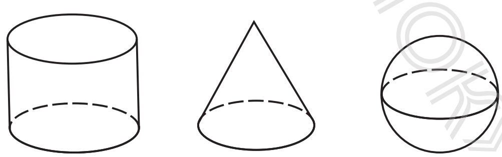
Многогранником є також **піраміда** (рис. 4, *д*), одна з граней якої — многокутник (***основа піраміди***), а решта граней — трикутники зі спільною вершиною (***вершиною піраміди***). Піраміду з основою-трикутником називають також ***тетраедром***, а тетраедр, усі ребра якого рівні,— ***правильним тетраедром*** (рис. 4, *е*).



а б в г д е

Рис. 4. Многогранники

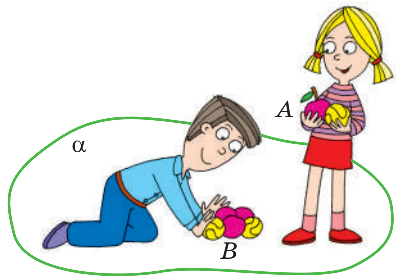
Окреме місце в стереометрії займають ***тіла обертання***, які утворюються внаслідок обертання плоских фігур навколо прямої. Найбільш відомі серед них — ***циліндр*** (рис. 5, *а*), ***конус*** (рис. 5, *б*) і ***куля*** (рис. 5, *в*).



а б в

Рис. 5. Тіла обертання

Ґрунтовне вивчення многогранників і тіл обертання чекає на вас далі, але вже зараз ми будемо використовувати їх для вивчення окремих властивостей взаємного розміщення прямих і площин у просторі.



$A \notin \alpha$, $B \in \alpha$

1.2. Основні аксіоми стереометрії

Включення площини до переліку основних геометричних фігур потребує введення нових аксіом, які описують властивості площини й особливості взаємного розміщення точок, прямих і площин у просторі. Сформулюємо чотири основні аксіоми стереометрії.

Аксіома належності точок площині

Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, що не належать їй.

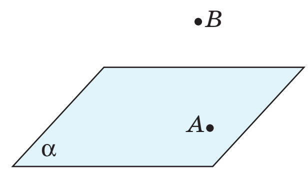


Рис. 6. До аксіоми належності точок площині

Дана аксіома стверджує, що для довільної площини в просторі можна вибрати будь-яку кількість точок цієї площини і будь-яку кількість точок поза нею. На рис. 6 точка A належить площині α (інакше кажуть, що точка A лежить у площині α або площина α проходить через точку A), а точка B не належить площині α. Коротко це позначають так: $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$.

Аксіома проведення прямої в просторі

Через будь-які дві точки простору можна провести пряму, і тільки одну.

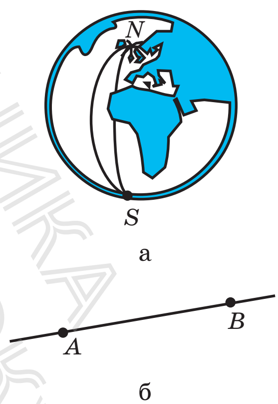


Рис. 7. До обговорення аксіоми проведення прямої в просторі

Нагадаємо, що на площині за аксіомою через дві точки* проходить єдина пряма. Але чи не виникне випадку, коли прямі, проведені через дві дані точки у двох різних площинах, будуть

* Тут і далі, кажучи «дві точки» («дві прямі», «дві площини» тощо), вважатимемо, що ці точки (прямі, площини) різні.

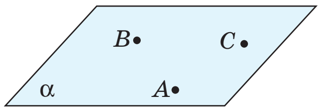


Рис. 8. До аксіоми проведення площини

різними? Адже, наприклад, на площині через точки N і S проходить єдине коло з діаметром NS, а в просторі таких кіл безліч — пригадаємо меридіани, які проходять через Північний і Південний полюси (рис. 7, *а*). Щойно сформульована аксіома унеможливлює такий випадок для прямих у просторі. Отже, пряма, проведена через будь-які дві точки простору, єдина (рис. 7, *б*).

Аксіома проведення площини

Через три точки, що не належать одній прямій, можна провести площину, і тільки одну.

Зміст даної аксіоми ілюструє рис. 8: площина, яка проходить через точки A, B і C, єдина. На підставі цього факту прийнято ще один спосіб позначення площини в просторі — за трьома її точками, що не належать одній прямій. Так, площину α на рис. 8 можна позначити так: (ABC). Цей запис читають «площина ABC».

Рис. 9. Ілюстрація аксіоми проведення площини

Аксіома проведення площини має наочну побутову ілюстрацію: журнальний стіл на трьох ніжках або штатив у формі триноги (рис. 9) не хитатимуться на підлозі, адже кінці трьох ніжок не лежать на одній прямій, але лежать в одній площині — площині підлоги. А ось одна із чотирьох ніжок звичайного прямокутного столу може «висіти в повітрі», унаслідок чого такий стіл буде нестійким.

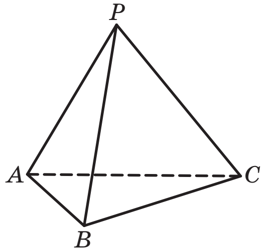


Рис. 10. Чотири вершини тетраедра не лежать в одній площині

Зауважимо також, що поряд із формулюванням «три точки належать одній площині» у стереометрії часто кажуть і про чотири точки (декілька точок, прямі, фігури), що *не лежать в одній площині*. Таке формулювання означає, що неможливо провести площину, яка містила б усі дані точки (прямі, фігури). Наприклад, вершини P, A, B і C тетраедра $PABC$ не лежать в одній площині (рис. 10), хоча будь-які три з них належать одній площині (назвіть ці площини самостійно).

Звернемось тепер до розгляду взаємного розміщення двох площин. Для цього розглянемо чотирикутну піраміду $PABCD$, основа якої — прямокутник $ABCD$ (рис. 11, *а*), і спробуємо визначити, скільки спільних точок мають площини PAD і PBC. На перший погляд відповідь очевидна: одну — точку P. Але така відповідь неправильна. Аби переконатися в цьому, прикладемо зігнутий аркуш паперу до піраміди так, щоб одна його частина лежала на грані PAD, а інша — на грані PBC (рис. 11, *б*). При такому моделюванні стає зрозумілим, що всі точки прямої l перегину аркуша (у тому числі й точка P) є спільними точками площин PAD і PBC.

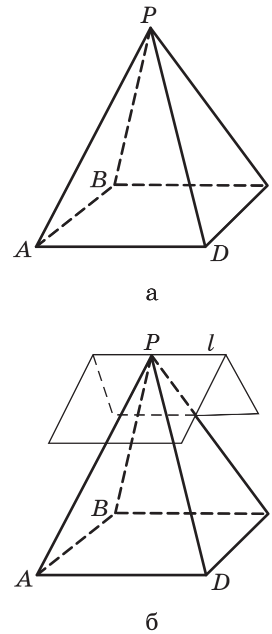


Рис. 11. До обговорення перетину двох площин

Аксіома перетину площин

> Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

Площини α і β, які мають спільну точку C і перетинаються по прямій c, яка містить цю точку, зображено на рис. 12. З даної аксіоми, зокрема, випливає, що площини α і β не мають інших спільних точок, крім точок прямої c. У такому випадку кажуть, що площини α і β перетинаються по прямій c, і записують так: $\alpha \cap \beta = c$. Очевидно також, що коли точки C і D — спільні точки площин α і β, то дані площини перетинаються по прямій CD.

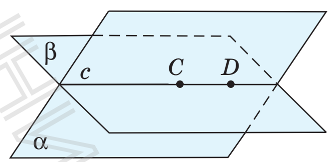


Рис. 12. До аксіоми перетину площин

Наочними прикладами перетину двох площин по прямій є розкритий зошит, стіна й підлога кімнати тощо.

За допомогою наведеної аксіоми знаходять перетин площин з іншими просторовими фігурами, зокрема многогранниками. Такий перетин — спільну частину даної площини й многогранника — називають **перерізом многогранника**, а дану

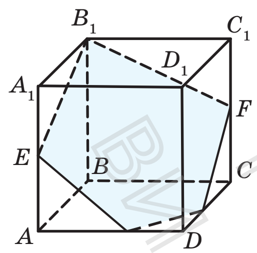
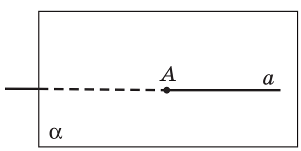


Рис. 13. Переріз куба площиною

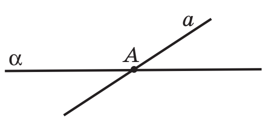
площину — **січною площиною**. На рис. 13 показано переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною B_1EF. Розглядати й зображати перерізи ми почнемо вже з перших занять, а згодом будемо розв'язувати задачі на побудову перерізів більш докладно.

Крім основних властивостей точок, прямих і площин у просторі, чотири з яких щойно було сформульовано, система аксіом стереометрії включає в себе також аксіоми планіметрії. Докладніше питання про аксіоми стереометрії висвітлено в Додатку 1.

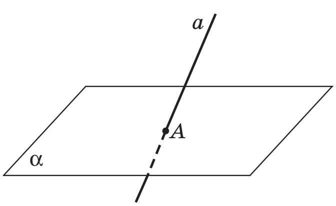
1.3. Рисунки і моделі в стереометрії



а



б



в

Рис. 14. Пошук оптимальної конфігурації для розв'язування задачі

Ключем до розуміння стереометрії є поєднання строгої логіки міркувань з інтуїтивною просторовою уявою. Першим етапом розв'язування просторової задачі є навіть не побудова рисунка, а спроба уявити геометричну ситуацію, яка описана в умові, і пошук найбільш зручного способу її відтворення на кресленні.

Розглянемо найпростішу умову: пряма a і площина α мають єдину спільну точку A. Кожен із рис. 14, *а–в* відображає описану умову, але корисним для розв'язування задач буде лише рис. 14, *в*. Досить часто під час пошуку найбільш вдалої геометричної конфігурації для розв'язування задачі доводиться робити декілька рисунків або розглядати деякі фрагменти розв'язання на окремих рисунках.

Але навіть вдало побудований рисунок не гарантує правильності подальшого розв'язування задачі. Справа в тому, що рисунок у стереометрії якісно відрізняється від рисунка в планіметрії. У стереометрії навіть вдалий рисунок може містити безліч прихованих «пасток», які ускладнюють розв'язування задачі. Як приклад проаналізуємо зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$

на рис. 15. Достатньо розглянути разом із цим рисунком будь-яку модель куба, аби переконатися, що:

- прямі DD_1 і BC, які на рисунку «перетинаються», насправді не мають спільних точок;
- кут ABC, який видається тупим, є прямим, адже $ABCD$ — квадрат;
- сума кутів A_1AB і BAD не дорівнює, як у планіметрії, куту A_1AD, більш того, усі ці кути прямі;
- «нерівні» відрізки CD і CC_1 насправді рівні;
- точки E, F і H, які начебто належать одній прямій, насправді є вершинами трикутника;
- «паралельні» на рисунку прямі C_1D і D_1K насправді не є паралельними.

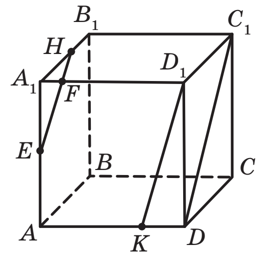
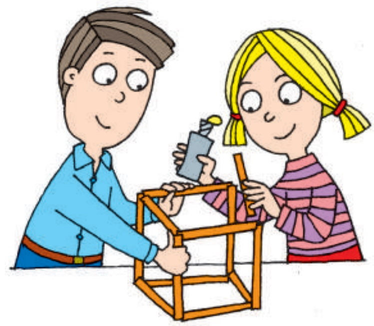


Рис. 15



Зрозуміло, що під час розв'язування задач недостатня увага до цих «тонкощів» може призвести до помилок. Але в стереометрії існують рецепти їх уникнення. Один із них — використання моделей. Моделювати взаємне розміщення прямих і площин можна навіть за допомогою олівців та аркушів паперу.

1.4. Поняття про аксіоматику та побудову науки

Становлення будь-якої природничої науки починається з накопичення певних фактів. Далі вони систематизуються та перетворюються на струнку теорію. Як приклад можна навести механіку Ньютона у фізиці, теорію Дарвіна в біології, періодичний закон Менделєєва в хімії. Після того як наукова система створена, учені вдосконалюють її, зокрема суто теоретичними логічними міркуваннями. Але при цьому неодмінно перевіряють, чи відповідають теоретичні надбання практичній сфері їх застосування.

На початку III ст. до н. е. в роботах давньогрецького філософа Аристотеля (384–322 рр. до н. е.) була остаточно сформульована така ідея побудови наукової теорії. Фундаментом теорії ставали положення, основані на даних, отриманих на підставі досвіду, тобто таких, які не викликають сумніву. Усі інші положення мали бути отримані з них логічним шляхом. Стосовно геометрії її реалізував Евклід (III ст. до н. е.). Так геометрія перетворилася з емпіричної (досвідної) науки на дедуктивну (логічну). Не випадково герой

Евклід

М. Лобачевський

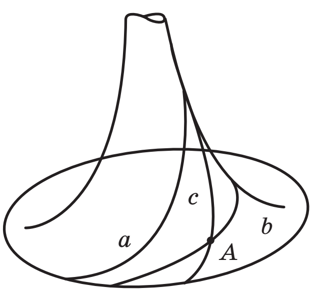


Рис. 16. Псевдосфера

А. Конана Дойла детектив Шерлок Холмс так говорив про суть свого дедуктивного методу: «...людину, яка вміє спостерігати та аналізувати, обдурити просто неможливо. Її висновки будуть безпомилкові, як теореми Евкліда...»

Наукова система Евкліда проіснувала понад два тисячоліття практично без змін. Але в XIX–XX ст. у ній були усунені певні недоліки, а сама система набула більш стрункого, сучасного та чіткого вигляду. У її основі лежить аксіоматичний метод, сутність якого полягає в наступному. Називаються всі основні (неозначувані) поняття або об'єкти. Решта понять повинна бути означена через основні поняття або такі, що були означені раніше за дані. Формулюються аксіоми — твердження, які приймаються без доведення. Всі інші твердження мають бути логічними наслідками з аксіом або раніше доведених тверджень. Одну з найвідоміших сучасних аксіоматичних систем було створено із суто теоретичних міркувань на рубежі XIX–XX ст. видатним німецьким математиком Давидом Гільбертом (1862–1943). Але досліджувати інтерпретацію, або модель, яка відповідає геометричній теорії, буває дуже корисним.

Отже, геометрії притаманна подвійність. З одного боку, вона вивчає абстрактні ідеальні поняття — точку, пряму, площину і т. д. З іншого боку, якщо ми хочемо отримати наочне уявлення, про що йде мова у тому чи іншому твердженні, або збагнути якийсь геометричний факт, ми звертаємося до оточуючих нас у тривимірному просторі предметів чи самостійно робимо моделі для таких досліджень.

Наприкінці обговоримо, якою має бути система аксіом — аксіоматика.

По-перше, вона має бути *несуперечливою* (не містити явних або прихованих суперечностей).

По-друге, бажано, щоб вона була *незалежною* — тобто щоб жодна з аксіом не випливала

М. Мірзахані

логічно з інших. Так, у XIX ст. було остаточно з'ясовано, що аксіому Евкліда про єдиність проведення через точку прямої, паралельної даній, неможливо одержати з інших аксіом. До речі, геометрію, що містить, зокрема, таке твердження, називають евклідовою. Саме її ви й вивчаєте в школі. Але існують інші абстрактні геометрії та їхні моделі. Зокрема, у геометрії Лобачевського (1792–1856) через точку, що не належить даній прямій, проходить безліч прямих, паралельних цій прямій (рис. 16). Геометрія Лобачевського не втратила своєї актуальності і посьогодні. Зокрема, її вже в наш час досліджувала Маріам Мірзахані — перша у світі жінка, нагороджена медаллю Філдса, найпочеснішою нагородою для молодих математиків.

По-третє, треба, щоб аксіоматика була *повною*. Тоді до неї неможливо додати нову аксіому, яка не буде логічним наслідком уже існуючих аксіом.

Насамкінець, по-четверте, бажано, щоб аксіоматика не містила поняття з іншої теорії, тобто була *замкненою*. У нашому підручнику для спрощення сприйняття наведено незамкнену систему аксіом стереометрії, бо в ній використовується алгебраїчне поняття — число — та його властивості.

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

1•. Чи є грань куба площиною? Чи є грань куба частиною площини?

2•. Точка A належить площині α, а точка B не належить площині α. Чи правильно, що точки A і B не лежать в одній площині?

3. Перекладіть англійською (або іншою іноземною мовою) умову та власне розв'язання задачі 2. Порівняйте одержаний результат з перекладами інших учнів і з електронним перекладом. Зробіть висновки.

4. Перекладіть англійською (або іншою іноземною мовою) терміни «точка», «пряма», «площина», «належить до», «перетинаються». Перекладіть стереометричні аксіоми. Порівняйте одержаний результат з перекладами інших учнів.

5. Точки A, B і C не лежать на одній прямій. Чи збігаються площини α і ABC, якщо:

а) $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \notin \alpha$; б) $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$?

6• (задача-жарт). Три бджоли одночасно злетіли з однієї квітки. У якому випадку вони опиняться в одній площині?

7•. Через точки A, B і C проходять дві різні площини. Як розміщені дані точки? Відповідь обґрунтуйте.

8•. Чому мотоцикл із коляскою стоїть на дорозі стійко, а для мотоцикла без коляски потрібна додаткова підпора?

9. Останніми роками класичні електронно-променеві монітори з опуклим екраном повсюдно замінюють плоскими рідкокристалічними моніторами. Користуючись додатковою літературою або інтернетом, з'ясуйте, які монітори безпечніші для здоров'я. Обговоріть із друзями та подругами, яку шкоду для здоров'я людини спричиняє електромагнітне поле, джерелом якого є класичний монітор, і як цьому запобігти. Дізнайтеся в шкільного лікаря чи за допомогою інтернету, яку шкоду для очей може спричинити довге безперервне користування стаціонарним комп'ютером чи ноутбуком із плоским рідкокристалічним монітором, як цьому запобігти. Організуйте обговорення в класі із цього питання.

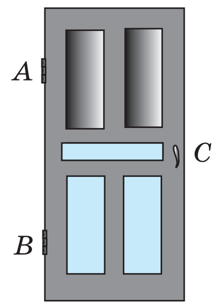


Рис. 17

10•. Чому замкнені двері (рис. 17) нерухомі, а незамкнені двері можна відчинити?

11. Чи можуть дві різні площини мати лише одну спільну точку; лише дві спільні точки; безліч спільних точок?

12. Прочитайте твердження, записане за допомогою символів: «Якщо $A\in\alpha$, $A\in\beta$, то $\alpha\cap\beta=c$, $A\in c$». Чи правильне це твердження за умови, що площини α і β не збігаються?

Моделюємо

13•. Уявіть стіни, стелю й підлогу класної кімнати як частини площин, укажіть: а) дві прямі, що перетинаються; б) три прямі, що перетинаються в одній точці й не належать одній площині; в) дві площини, що не перетинаються; г) дві площини, що перетинаються; д) три площини, що попарно перетинаються.

14•. Сконструюйте модель:

а) двох площин, що перетинаються;

б) прямої, яка перетинає площину;

в) трьох площин, що перетинаються по одній прямій.

15. Зобразіть на рисунку взаємне розміщення точок, прямих і площин за даними умовами:

а) $\alpha \cap \beta = c$, $A \in c$;

б) $\alpha \cap \beta = a$, $\gamma \cap \beta = b$, $\alpha \cap \gamma = c$.

16. Зобразіть на рисунку взаємне розміщення точок, прямих і площин за даними умовами:

а) $\alpha \cap (ABC) = BC$; б) $\alpha \cap \beta = c$, $\beta \cap \gamma = c$.

17. У тетраедрі $PABC$ точка D — середина ребра AB (рис. 18). Змоделюйте переріз тетраедра площиною PDC і назвіть прямі перетину площин:

а) PDC і ABC;

б) PDC і APB;

в) PDC і PBC.

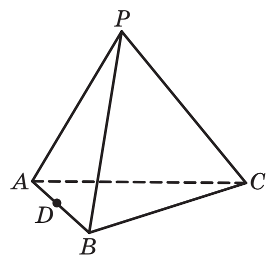


Рис. 18

18. Змоделюйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною B_1AC і назвіть прямі перетину січної площини з площинами A_1AB, DAB і BCC_1. Запишіть відповіді за допомогою символів.

Розв'язуємо задачі

Рівень А

19•. Точки A і B лежать у площині α, а точка C не лежить у цій площині. Доведіть, що площини α і ABC перетинаються по прямій AB.

20•. Дві площини мають спільні точки A, B і C. Доведіть, що точки A, B і C лежать на одній прямій.

21. У просторі дано чотири точки, причому жодні три з них не лежать на одній прямій. Скільки прямих можна провести через різні пари цих точок?

22. У просторі дано чотири точки, причому жодні три з них не лежать на одній прямій. Скільки площин можна провести через різні трійки цих точок?

Рівень Б

23. Площини ABC і DBC мають спільну точку K. Знайдіть довжину відрізка BC, якщо $BK = 8$ см, $CK = 3$ см.

24. Точки A, B і C — спільні точки двох різних площин. Знайдіть довжину відрізка AC, якщо $AB = BC = 4$ см.

25. Площини α і β перетинаються по прямій c. Пряма a лежить у площині α і перетинає пряму c в точці A. Доведіть, що $A \in \beta$.

26. Паралелограм $ABCD$ і трикутник ABK не лежать в одній площині. Визначте пряму перетину площин:

а) KBC і AKC; б) AKC і ABD; в) AKD і ABC.

Рівень В

27. Три площини попарно перетинаються. Доведіть, що коли дві прямі перетину цих площин перетинаються, то третя пряма проходить через точку їх перетину.

28. Площини α і β перетинаються по прямій c. Площина γ перетинає дані площини по прямих a і b відповідно. Доведіть, що коли прямі a і b перетинаються, то точка їх перетину лежить на прямій c.

29. Якщо одна із чотирьох точок не належить жодній площині, яка проходить через інші три точки, то таку властивість має будь-яка з даних точок. Доведіть.

30. Яка найбільша кількість прямих може утворитися в результаті попарного перетину трьох площин; чотирьох площин; n площин?

Повторення перед вивченням § 2

Теоретичний матеріал

- аксіоми планіметрії; Додаток 1
- нерівність трикутника. 7 клас, § 18

Задачі

31. Прямі a, b і c перетинаються в точці O. Знайдіть $\angle(ab)$, якщо $\angle(ac) = 60°$, $\angle(bc) = 30°$. Скільки розв'язків має задача на площині? Чи можна за даними умовами розв'язати цю задачу в просторі?

32. Дано точки A, B, C і D, причому $AB = 8{,}4$ см, $BC = 4{,}6$ см, $AC = 3{,}8$ см. Чи лежать точки A, B і C на одній прямій? Чи лежать точки A, B, C і D в одній площині? Висловте припущення.

§2 Найпростіші наслідки з аксіом стереометрії

2.1. Належність прямої площині

Безпосередньо з аксіом стереометрії випливає чимало властивостей взаємного розміщення точок, прямих і площин, які будуть встановлені в цьому параграфі. Розглянемо пряму a, усі точки якої належать даній площині α (рис. 19).

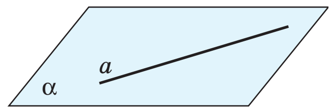
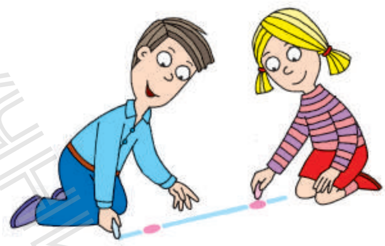


Рис. 19. Пряма a належить площині α

Означення

Пряма a належить площині α (або лежить у площині α), якщо всі її точки належать даній прямій.

Коротко це записують так: $a \subset \alpha$. Запис $a \not\subset \alpha$ означає, що пряма a не належить площині α. Звертаємо увагу на те, що символи $\in$ і $\notin$ для запису належності прямої площині не використовують (докладніше про це йтиметься в п. 2.3).



Теорема (ознака належності прямої площині)

Якщо дві точки прямої належать площині, то вся пряма належить цій площині.

Доведення

□ Нехай точки A_1 і A_2 прямої a лежать у площині α (рис. 20). Оскільки в площині α справджуються аксіоми планіметрії, то в цій площині через дані точки проходить єдина пряма A_1A_2. Якщо вона не збігається з прямою a, то в просторі існують дві різні прямі, які проходять через точки A_1 і A_2, що суперечить аксіомі проведення прямої в просторі. Отже, прямі A_1A_2 і a збігаються, тобто пряма a належить площині α. Теорему доведено. ■

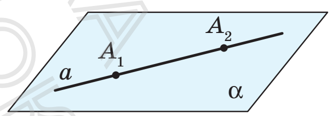


Рис. 20. До доведення ознаки належності прямої площині

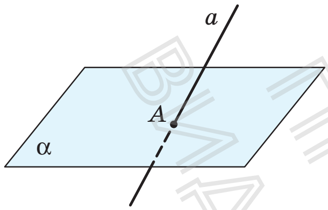


Рис. 21. Пряма a перетинає площину α в точці A

З даної теореми випливає, що пряма, яка не належить площині, має із цією площиною не більше однієї спільної точки.

Означення

Пряма перетинає площину, якщо пряма і площина мають єдину спільну точку.

На рис. 21 пряма a перетинає площину α в точці A (записують так: $a \cap \alpha = A$).

Щойно доведену теорему на практиці застосовують, наприклад, під час вишивання: для того щоб пряма нитка щільно прилягала до поверхні тканини, натягненої на п'яльці, тканину проколюють у двох місцях (рис. 22).

а

б

Рис. 22. Використання ознаки належності прямої площині під час вишивання

Задача

Вершини трикутника ABC лежать у площині α. Доведіть, що медіана AM цього трикутника лежить у площині α.

Розв'язання

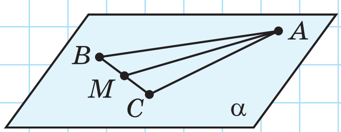


Рис. 23

Оскільки вершини B і C даного трикутника ABC лежать у площині α (рис. 23), то за ознакою належності прямої площині $BC \subset \alpha$. Тоді точка M прямої BC також лежить у площині α. Таким чином, кінці A і M медіани AM лежать у площині α, отже, за ознакою належності прямої площині $AM \subset \alpha$.

2.2. Теореми про проведення площини в просторі

Згідно з аксіомою проведення площини, площина в просторі однозначно задається трьома точками, які не лежать на одній прямій. Розглянемо інші способи проведення площини* в просторі.

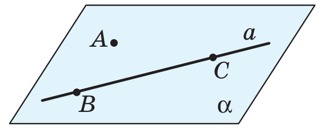


Рис. 24. До доведення теореми про проведення площини через пряму і точку

Теорема (про проведення площини через пряму і точку)

Через пряму і точку, яка не лежить на ній, можна провести площину, і тільки одну.

Доведення

□ Нехай точка A не лежить на прямій a (рис. 24). Позначимо на прямій a точки B і C і за аксіомою проведення площини проведемо площину α через точки A, B і C. Оскільки за побудовою дві точки прямої a належать площині α, то і вся пряма a належить цій площині, тобто площина α шукана.

Доведемо, що така площина єдина. Справді, якщо існує інша площина, яка проходить через точку A і пряму a, то така площина містить точки A, B і C, отже, вона за аксіомою проведення площини збігається з площиною α. Теорему доведено. ■

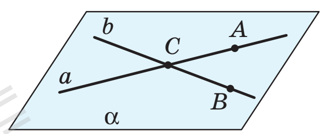


Рис. 25. До доведення теореми про проведення площини через дві прямі, що перетинаються

Теорема (про проведення площини через дві прямі, що перетинаються)

Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і тільки одну.

Доведення

□ Нехай прямі a і b перетинаються в точці C (рис. 25). Позначимо на цих прямих точки A і B, відмінні від C. Оскільки точки A, B і C не

---

* Зауважимо, що вже під час вивчення планіметрії ми вживали термін «проведення прямої» в тому сенсі, що така пряма однозначно задана (наприклад, проходить через дві дані точки). Далі, у разі потреби, ми будували її зображення за допомогою лінійки. У стереометрії під терміном «проведення площини» так само розуміють, що така площина однозначно задана (наприклад, проходить через три дані точки, що не лежать на одній прямій). Зважаючи на умовність відображення на плоскому рисунку просторових фігур, далі, у разі потреби, будують лише зображення частини даної площини.

лежать на одній прямій (обґрунтуйте це самостійно), то за аксіомою проведення площини існує площина α, яка проходить через ці точки. За ознакою належності прямої площині прямі a і b належать площині α.

Доведемо, що така площина єдина. Припустимо, що через прямі a і b проходить інша площина, відмінна від α. Тоді ця площина, як і площина α, містить точки A, B і C. Отже, вона за аксіомою проведення площини збігається з площиною α. Теорему доведено. ■

Практичну цінність доведеної теореми ілюструє такий приклад. Під час рятування потопаючих треба розпластатися на площині тонкої криги у вигляді букви Х, щоб ваша вага розподілялася рівномірно і крига не провалилася (рис. 26).

Рис. 26. Рятування на тонкій кризі

Задача

Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Доведіть, що:

а) жодні три з даних точок не лежать на одній прямій;

б) прямі AB і CD не перетинаються.

Розв'язання

а) Припустимо, що точки A, B і C лежать на одній прямій. Тоді за теоремою про проведення площини через пряму і точку проведемо площину через пряму AB і точку D. Побудована площина міститиме всі чотири дані точки, що суперечить умові задачі. Отже, жодні три з даних точок не лежать на одній прямій.

б) Припустимо, що прямі AB і CD перетинаються. Тоді за теоремою про проведення площини через дві прямі, що перетинаються, проведемо площину через дані прямі.

Побудована площина міститиме всі чотири дані точки, що суперечить умові задачі.

Отже, прямі AB і CD не перетинаються.

2.3. Використання символів у записі геометричних тверджень

У процесі вивчення планіметрії ви вже використовували позначення для окремих геометричних фігур (кута, трикутника), а також відношень між фігурами (паралельності й перпендикулярності прямих, рівності й подібності трикутників тощо). З метою скорочення запису умов і розв'язань стереометричних задач і теорем додамо до вже відомих позначень низку символів, пов'язаних із множинами. Задля уникнення можливих помилок зміст цих символів необхідно обговорити окремо.

Символ належності «$\in$» в записі $x \in X$ означає належність об'єкта (елемента) x множині X, яка складається з деяких об'єктів (елементів): наприклад, пряма є множиною точок, тому належність точки A прямій a позначається так: $A \in a$. У випадку, коли елемент не належить множині, вживають символ $\notin$.

Символ включення «$\subset$» порівняно із символом належності $\in$ має дещо інший зміст: запис $Y \subset X$ означає, що певна множина Y є частиною (підмножиною) іншої множини X. Наприклад, пряма й площина є множинами точок простору: якщо пряма a лежить у площині α, то множина точок прямої a є частиною (підмножиною) множини точок площини α, тому записують $a \subset \alpha$ (а не $a \in \alpha$). У випадку, коли одна множина не є частиною іншої, вживають символ $\not\subset$.

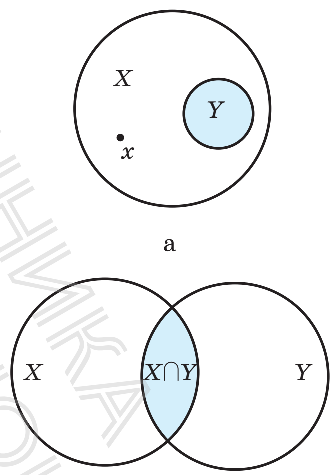


Рис. 27. Особливості вживання символів, пов'язаних із множинами

Діаграма на рис. 27, *а* ілюструє описані особливості вживання таких символів.

Символ перерізу (спільної частини) множин «$\cap$» теж має свою специфіку: запис $X \cap Y$ означає множину спільних елементів множин X і Y (рис. 27, *б*). Наприклад, запис $a \cap \alpha$ означає множину спільних точок прямої a і площини α. Звертаємо особливу увагу: цей запис не може замінити фразу «пряма a перетинає площину α», оскільки спільна частина прямої a і площини α може складатися з однієї точки A (тоді записують $a \cap \alpha = A$), з усіх точок прямої a (запис $a \cap \alpha = a$ означає те саме, що й запис $a \subset \alpha$) або взагалі не містити жодної точки (записують $a \cap \alpha = \varnothing$, Про логічне відношення еквівалентності ви можете дізнатися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

де $\varnothing$ — «порожня множина» — множина, яка не містить жодного елемента).

Для скорочення запису геометричних тверджень використовують також символи слідування й рівносильності, запозичені з математичної логіки.

Символ слідування «$\Rightarrow$» в записі $M \Rightarrow N$ означає, що з твердження M випливає твердження N. Наприклад, ознаку належності прямої площині в символьному вигляді можна записати* так: $(A_1 \in a, A_2 \in a, A_1 \in \alpha, A_2 \in \alpha) \Rightarrow a \subset \alpha$.

Символ рівносильності «$\Leftrightarrow$» в записі $M \Leftrightarrow N$ означає, що з твердження M випливає твердження N, і, навпаки, з твердження N випливає твердження M.

Спробуйте самостійно записати в символьному вигляді вивчені аксіоми й теореми стереометрії. Такі вправи є дуже корисними, адже культура математичного запису є складовою культури міркувань, яка, у свою чергу, є невід'ємною частиною загальнолюдської культури. Великий німецький учений Ґотфрід Вільгельм Лейбніц казав: «Якщо позначення зручні для відкриттів, то вони вражаюче скорочують роботу думки».

2.4. Побудова перерізів многогранників методом слідів

У процесі розв'язування задач про побудову перерізів часто виникає необхідність побудувати пряму перетину січної площини з площиною грані многогранника. Таку пряму називають ***слідом*** січної площини на площині даної грані. Слід легко побудувати, якщо відомі дві точки площини даної грані, які належать січній площині. Але такі точки не завжди задано — для їх знаходження існує спеціальний **метод слідів**.

Розглянемо його на прикладі задачі.

Нехай необхідно побудувати переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки M, N і K (рис. 28, *а*). Оскільки точки M і N належать грані AA_1B_1B, а точки N і K — грані BB_1C_1C, то відрізки MN і NK — сторони шуканого перерізу.

* Узагалі, якщо теорема $M \Rightarrow N$ справджується і має місце твердження M, то обов'язково має місце твердження N.

Побудуємо тепер точку перетину прямої MN із площиною основи ABC. Для цього визначимо пряму перетину грані AA_1B_1B, у якій лежить пряма MN, з площиною ABC — це пряма AB. Побудуємо точку E — точку перетину прямих MN і AB (рис. 28, *б*), яка і є точкою перетину прямої MN з площиною основи ABC. Аналогічно побудуємо точку F — точку перетину прямої NK з площиною ABC, яка є точкою перетину прямих NK і BC. Пряма EF (рис. 28, *в*) — слід січної площини MNK на площині основи ABC. Як бачимо, ця пряма перетинає ребра AD і CD у точках G і T відповідно. Отже, відрізок GT — сторона шуканого перерізу.

Оскільки точки M і G належать грані AA_1D_1D, а точки T і K — грані CC_1D_1D, то залишається провести відрізки MG і TK та отримати шуканий переріз — п'ятикутник $MNKTG$ (рис. 28, *г*).

Як бачимо, найбільш «тонким» моментом застосування методу слідів є побудова точки перетину прямої, яка належить січній площині, з площиною грані многогранника. Узагальнимо різні випадки таких побудов для піраміди та прямокутного паралелепіпеда.

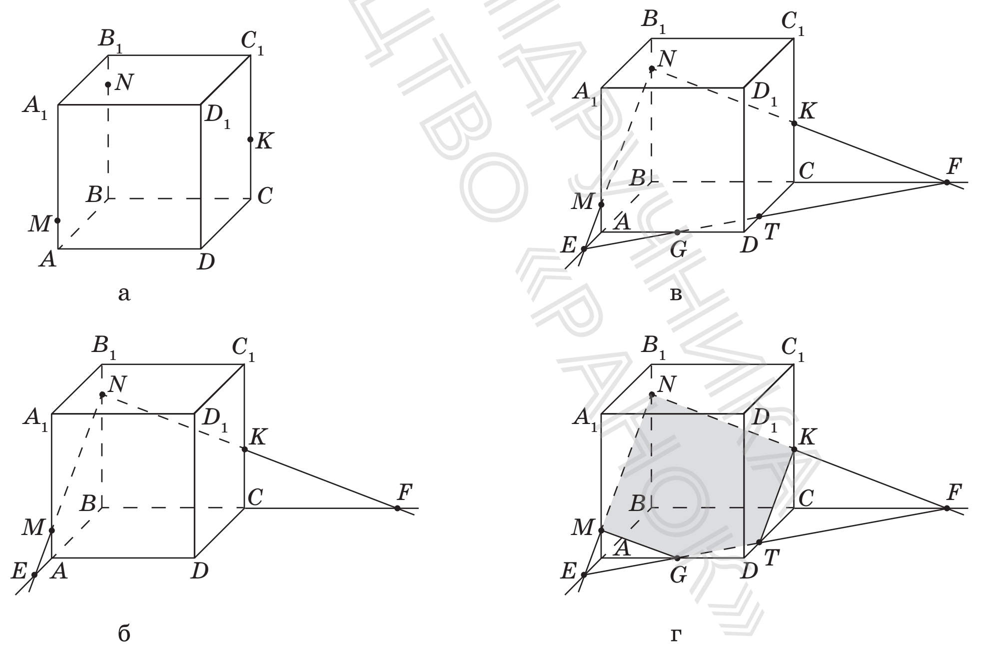
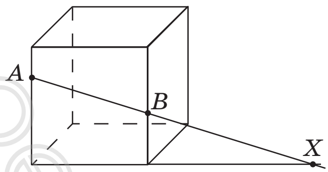
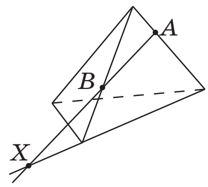
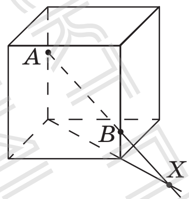
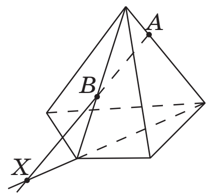
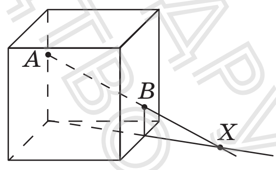
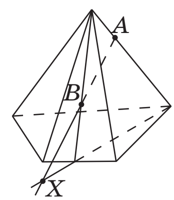
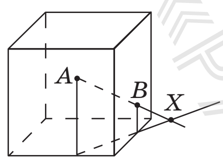
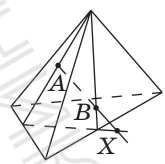
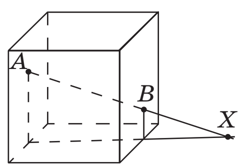
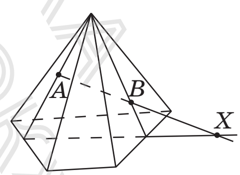


Рис. 28. Побудова перерізу куба методом слідів

Побудова точки X перетину прямої AB із площиною основи многогранника

Розміщення точок A і B	Побудова в призмі	Побудова в піраміді
На бічних ребрах однієї бічної грані		
На бічних ребрах, що не належать одній грані		
На бічній грані й на ребрі, що не належить даній грані		
На двох сусідніх бічних гранях		
На двох бічних гранях, які не є сусідніми		

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

33•. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 29). Назвіть:

а) площини, у яких лежить пряма B_1C_1;
б) точки, які лежать у площинах DD_1C і DAA_1;
в) точки перетину прямої KM з площиною ABC та прямої DK з площиною $A_1B_1C_1$;
г) прямі перетину площин ABC і ADD_1, B_1BD і $A_1B_1C_1$, B_1BD і CC_1D_1.

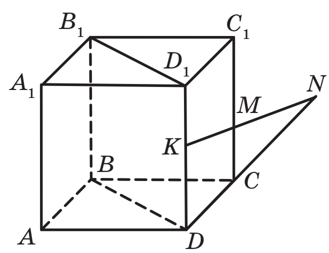


Рис. 29

34. Під час теслярських робіт для перевірки якості поверхні дошки (бруска) до неї прикладають вивірену на прямизну лінійку. На чому ґрунтується така перевірка? Чи можлива зворотна операція — за допомогою добре обробленої поверхні бруска перевірити прямизну лінійки?

35. Під час столярських робіт для перевірки, чи лежать кінці чотирьох ніжок стільця в одній площині, до цих кінців прикріпляють навхрест дві нитки. На чому ґрунтується така перевірка?

36•. Поясніть принцип конструкції розкладного столу-книжки (рис. 30). Яку теорему стереометрії застосовано?

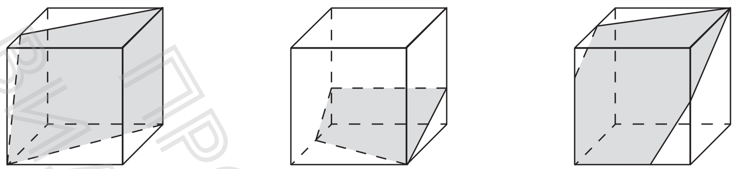
37. Чи правильно, що коли три із чотирьох точок лежать на одній прямій, то через чотири дані точки можна провести площину? Чи правильне обернене твердження?

38. Скільки площин у просторі можна провести через пряму й точку? Розгляньте всі можливі випадки.

39•. Чи може переріз тетраедра бути трикутником; чотирикутником; п'ятикутником?


Рис. 30

40. На рис. 31, *а–в* зображено перерізи куба. Чи є на цих зображеннях помилки? У чому вони полягають?



а б в

Рис. 31

Моделюємо

41. Одним із найбільш зручних засобів для моделювання частини площини є папір або картон. Ви вже розв'язували завдання на моделювання й будете розв'язувати їх надалі. Але при цьому варто згадати, що для виробництва паперу використовується деревина, а картонно-паперові виробництва шкідливо впливають на екологію. Знайдіть в інтернеті факти щодо шкідливого впливу виробництва паперу та картону на навколишнє середовище. Обговоріть у соціальних мережах, що саме ви можете зробити для зменшення використання паперу. За можливості, разом з однокласниками й однокласницями здайте на переробку макулатуру та посадіть дерево. Надалі економно використовуйте картон у задачах на моделювання.

42•. Виріжте з картону паралелограм. Прикладаючи його до площини столу, дослідіть, чи лежить паралелограм у даній площині, якщо цій площині належать:

а) лише дві з його вершин;
б) сторона й один із кінців протилежної сторони;
в) дві протилежні вершини й точка перетину діагоналей;
г) дві сусідні вершини й точка перетину діагоналей.

43•. Сконструюйте з дроту каркас чотирикутної піраміди. За допомогою двох ниток (див. задачу 35) перевірте, чи лежать вершини основи піраміди в одній площині.

44•. Виготовте з дроту модель куба. За допомогою нитки змоделюйте переріз куба, який має форму трикутника; чотирикутника; п'ятикутника; шестикутника.

45. Інсталюйте на комп'ютер, ноутбук або смартфон програму Geogebra або інший графічний редактор із підтримкою 3D-моделювання. Засобами встановленої програми змоделюйте дві площини, одна з яких проходить через три дані точки, а друга — через дві прямі, що перетинаються. Пофарбуйте ці площини двома різними кольорами. Визначте лінію перетину площин. Засобами програми поверніть рисунок у найбільш сприятливе для його розуміння положення. Надішліть отриманий результат однокласнику чи однокласниці електронною поштою.

Розв'язуємо задачі

Рівень А

46•. Точка A належить площині α, а точка B не належить площині α. Чи належить площині α середина відрізка AB? Відповідь обґрунтуйте.

47•. Кінці відрізка AB належать площині β. Доведіть, що середина даного відрізка також належить площині β.

48. Якщо прямі AB і CD не лежать в одній площині, то прямі AC і BD також не лежать в одній площині. Доведіть.

49. Дві прямі перетинаються в точці O. Доведіть, що всі прямі, які перетинають обидві дані прямі й не проходять через точку O, лежать в одній площині.

50. Точка A не належить прямій a. Доведіть, що всі прямі, які проходять через точку A і перетинають пряму a, лежать в одній площині.

51. Доведіть, що через будь-яку пряму можна провести дві різні площини.

52. Кожна з двох різних площин містить прямі AB і BC. Доведіть, що точка C лежить на прямій AB.

53•. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через:

а) ребра A_1B_1 і CD;
б) вершину B_1 і діагональ основи AC;
в) ребро CC_1 і середину ребра A_1B_1;
г) середини ребер AD і A_1D_1 паралельно діагоналі основи AC.

54•. Побудуйте переріз даного куба площиною MNK (рис. 32, *а–в*).

55•. Побудуйте переріз деякої трикутної піраміди $PABC$ площиною, яка проходить через:

а) ребро AB і середину ребра PC;

б) вершину P і висоту основи AD.

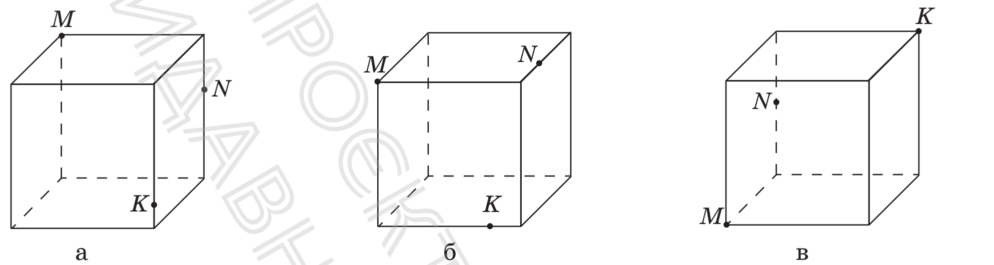


Рис. 32

Рівень Б

56. Вершина D паралелограма $ABCD$ лежить у площині α. Прямі BA і BC перетинають площину α в точках E і F відповідно (рис. 33). Чи правильно, що точки E, D і F не лежать на одній прямій? Відповідь обґрунтуйте.

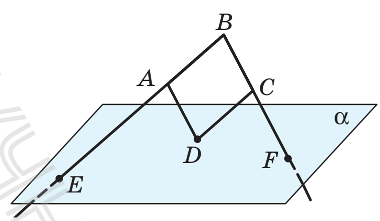
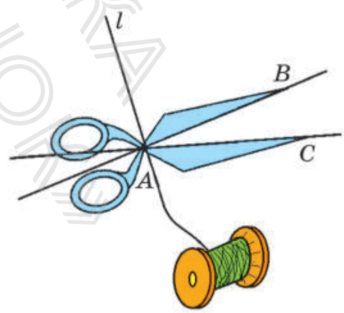


Рис. 33

57. Дві сусідні вершини й точка перетину діагоналей паралелограма лежать у площині α. Доведіть, що решта вершин паралелограма також лежать у площині α.

58. У трикутнику ABC вершини A і B та середина сторони BC лежать у площині α. Доведіть, що всі сторони трикутника лежать у площині α.



59. Через точку перетину прямих AB і AC проведено пряму l, яка не лежить з ними в одній площині. Доведіть, що прямі l і BC не перетинаються.

60. Пряма a лежить у площині α. Пряма b перетинає площину α в точці C, яка не належить прямій a. Доведіть, що прямі a і b не перетинаються.

61. У тетраедрі $PABC$ точки A_1, B_1 і C_1 лежать на ребрах PA, PB і PC відповідно (рис. 34). Побудуйте точку перетину:

а) прямої B_1A_1 з площиною ABC;

б) прямої B_1C_1 з площиною ABC.

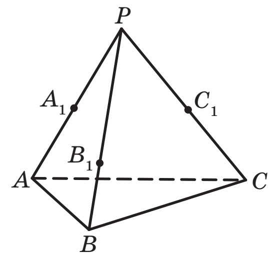


Рис. 34

62. Розв'яжіть задачу 61 засобами графічного редактора Geogebra, DG чи іншого. Порівняйте розв'язання, записане вами в зошиті, і отримане програмними засобами. Як ви вважаєте, яким способом зручніше побудувати відповідні точки? Аргументуйте свою позицію.

63. Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 не лежать в одній площині. Точки M і N — середини відрізків CB і AD_1 відповідно. Побудуйте точку перетину:

а) прямої DM з площиною ABC_1;

б) прямої C_1N з площиною ABC.

64. Зобразіть переріз тетраедра $PABC$ площиною, яка проходить через:

а) пряму BC і середину ребра PA;

б) прямі A_1B_1 і B_1C_1, де A_1, B_1 і C_1 — середини ребер PA, PB і PC відповідно.

65. Зобразіть переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через:

а) пряму BD і точку C_1; б) прямі AC_1 і A_1C.

66. Побудуйте переріз даного куба площиною MNK (рис. 35, *а–г*).

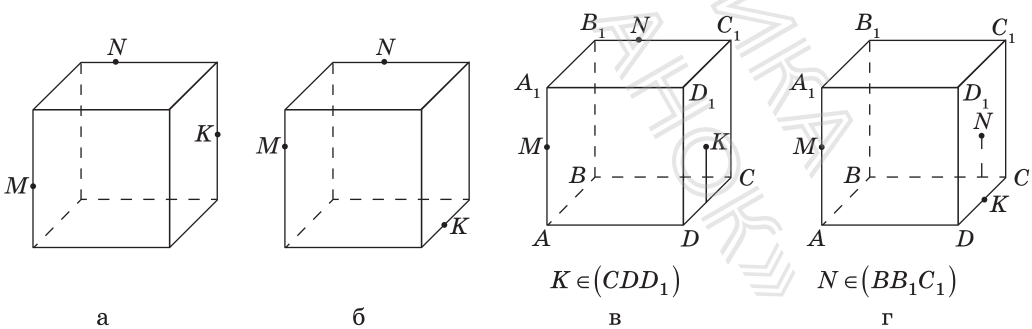
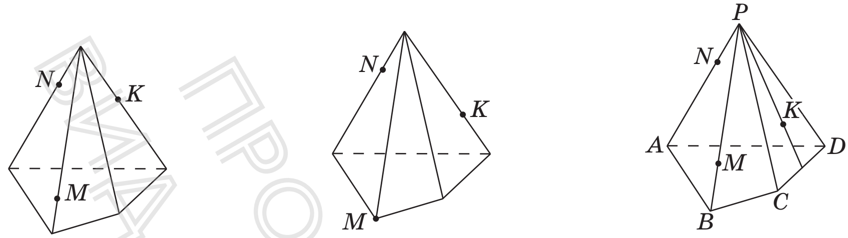


Рис. 35

67. Побудуйте переріз даної чотирикутної піраміди площиною MNK (рис. 36, *а–в*).



$K \in (PCD)$

а б в

Рис. 36

Рівень В

68. У трикутнику ABC через вершини A і C та центр O описаного кола можна провести принаймні дві різні площини. Знайдіть площу трикутника, якщо $OB = 5$ см, $BC = 8$ см.

69. Дві вершини трикутника належать площині α. Чи належить цій площині третя вершина, якщо в даній площині лежить:

а) центр кола, вписаного в трикутник;

б) центр кола, описаного навколо трикутника?

Проведіть дослідження.

70. Середини сторін трикутника лежать у площині α. Доведіть, що сторони даного трикутника належать площині α.

71. Якщо будь-які дві з n прямих $(n > 2)$ перетинаються і всі точки їх попарних перетинів різні, то всі дані прямі лежать в одній площині. Доведіть.

72. Зобразіть переріз тетраедра $PABC$ площиною, яка проходить через пряму KM і точку N (рис. 37).

73. В налаштуваннях програми Geogebra, DG чи іншого графічного редактора виберіть англійську або будь-яку іншу іноземну мову. Пригадайте переклади відповідних термінів та розв'яжіть задачу 72 засобами встановленої програми.

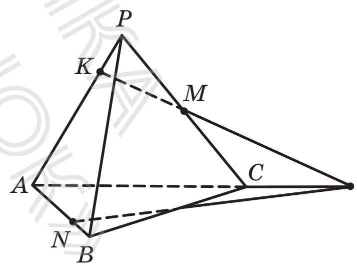
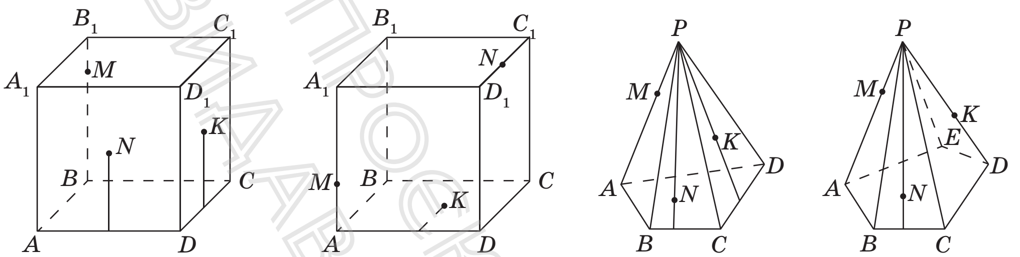


Рис. 37

74. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M і N — середини ребер AA_1 і CC_1 відповідно. Зобразіть переріз куба площиною, яка проходить через прямі B_1M і B_1N.

75. Побудуйте переріз даної фігури площиною MNK (рис. 38, *а–г*).



$N \in (ADD_1)$, $K \in (CDD_1)$

а

$K \in (ABC)$

б

$N \in (PBC)$, $K \in (PCD)$

в

$N \in (PBC)$

г

Рис. 38

76. Доведіть, що через будь-яку точку простору можна провести безліч прямих, жодні три з яких не лежать в одній площині.

77. Кінці відрізка AB належать двом площинам, які перетинаються по прямій a, що не проходить через точки A і B. Доведіть, що існує площина, яка проходить через пряму a, така, що точки A і B лежать по різні боки від цієї площини.

Повторення перед вивченням § 3

Теоретичний матеріал

- паралельні прямі; 7 клас, § 4
- паралелограм; 8 клас, § 2
- трапеція; середні лінії трикутника і трапеції; 8 клас, § 5, 6
- ознаки подібності трикутників; 8 клас, § 11
- властивості відношень; транзитивність. 9 клас, § 12

Задачі

78. Пряма, паралельна стороні AC трикутника ABC, перетинає сторони AB і BC в точках A_1 і C_1 відповідно. Знайдіть AC, якщо $A_1C_1 = 6$ см, $BA_1 : A_1A = 3:1$.

79. На площині проведено прямі a, b і c, причому $a \parallel b$, $b \parallel c$. Як розміщені прямі a і c? Які дані в умові задачі є зайвими? Висловте припущення.

Тестове завдання для самоперевірки № 1

1. Закінчіть речення так, щоб утворилося правильне твердження. Через дві точки простору можна провести...

А єдину пряму. **В** єдиний промінь.
Б єдину площину. **Г** єдиний відрізок.

2. Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Серед даних прямих виберіть пряму, яка не належить площині ACD.

А AC **Б** AD **В** CD **Г** BD

3. Скільки різних площин можна провести через три точки, які належать одній прямій?

А Одну **В** Три **Б** Жодної **Г** Безліч

4. Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Серед даних прямих виберіть пряму перетину площин ABD і ACD.

А AB **Б** AD **В** BD **Г** BC

5. Прямі a, b і c попарно перетинаються і не мають спільної для всіх трьох точки. Скільки різних площин можна провести через ці прямі?

А Три **Б** Безліч **В** Одну **Г** Жодної

6. Дано п’ять точок A, B, M, N і K. Відомо, що площина проходить через точки A і B , але не проходить через точки M, N і K. Серед даних точок назвіть точку, яка не може належати прямій AM.

А Точка N **Б** Точка B **В** Точка K **Г** Інша відповідь

Онлайн-тестування № 1

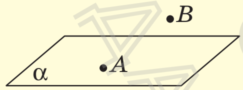
Теми повідомлень, рефератів, навчальних проєктів

Підсумки розділу I

АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Аксіома належності точок площині

Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, що не належать їй

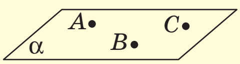


Аксіома проведення прямої в просторі

Через будь-які дві точки простору можна провести пряму, і тільки одну

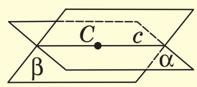
Аксіома проведення площини

Через три точки, що не належать одній прямій, можна провести площину, і тільки одну



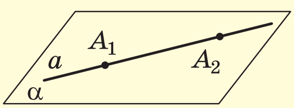
Аксіома перетину площин

Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку



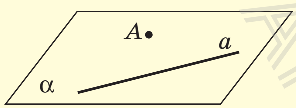
Ознака належності прямої площині

Якщо дві точки прямої належать площині, то вся пряма належить цій площині



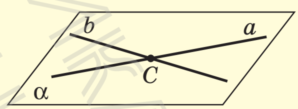
Теорема про проведення площини через пряму і точку

Через пряму і точку, яка не лежить на ній, можна провести площину, і тільки одну



Теорема про проведення площини через дві прямі, що перетинаються

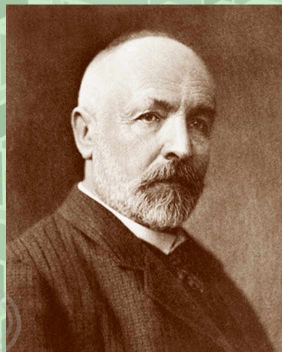
Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і тільки одну



Контрольні запитання до розділу I

1. Назвіть основні геометричні фігури в просторі.
2. Сформулюйте чотири аксіоми стереометрії.
3. Сформулюйте ознаку належності прямої площині.
4. Сформулюйте теореми про проведення площини в просторі.

Д. Гільберт



Г. Кантор

Р. Дедекінд

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Стереометрія як розділ геометрії зароджувалася й розвивалася разом із планіметрією. Останні три книги «Елементів» Евкліда присвячені саме геометрії в просторі. З тих самих часів наукові основи стереометрії майже не змінювалися, але аксіоматика й методика її викладання значно вдосконалювалися.

Відкриття російським геометром М. І. Лобачевським неевклідової геометрії дало відчутний поштовх до осучаснення і систематизації евклідових аксіом. Визначних результатів у цьому досягли німецькі математики: у 1892 р. М. Паш (1843–1930) розробив так звані аксіоми порядку, пов'язані з логічним обґрунтуванням поняття «лежати між»; ще раніше Г. Кантор (1845–1918) і Р. Дедекінд (1831–1916) дослідили групу аксіом неперервності, а класична робота Д. Гільберта (1862–1943) «Основи геометрії» (1899) узагальнила напрацювання багатьох геометрів XVII–XIX ст. Цікаво, що доволі часто Гільберт довіряв читати замість себе лекції в Ґетінґенському університеті Еммі Нетер, надалі всесвітньо відомій жінці-математику.

Визначний український геометр О. В. Погорєлов (1919–2002) у своїх «Основах геометрії» (1969) створив власну аксіоматику евклідової геометрії та блискуче розв'язав низку проблем, сформульованих попередниками.

Е. Нетер

О. В. Погорєлов

Розділ II

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

Щоб найкраще зрозуміти метод проведення переконливих доведень, потрібно лише продемонструвати той, який застосовується в геометрії.

Блез Паскаль,
видатний французький учений

У цьому розділі розглядатимуться паралельні об'єкти у просторі. Ви дізнаєтеся, що паралельними бувають не тільки прямі, а й площини; що прямі, які не перетинаються, у просторі можуть бути як паралельними (належати одній площині), так і мимобіжними (не належати одній площині). Узагалі, вивчати просторову геометрію порівняно з «плоскою» хоч і складніше, але дуже цікаво.

Пам'ятник Т. Г. Шевченку.
м. Харків

§3 Прямі в просторі

3.1. Паралельні й мимобіжні прямі

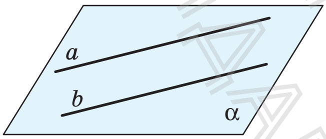


Рис. 39. Паралельні прямі

Як відомо з планіметрії, дві прямі на площині можуть або перетинатися, або бути паралельними. У стереометрії можливостей для взаємного розміщення двох прямих більше.

Означення

Дві прямі в просторі називаються такими, що **перетинаються**, якщо вони лежать в одній площині і мають єдину спільну точку.

Випадок, коли дві прямі в просторі перетинаються, розглядався в попередньому параграфі. Виділимо інші випадки взаємного розміщення прямих у просторі. Спочатку розглянемо паралельні прямі.

Означення

Дві прямі в просторі називаються **паралельними**, якщо вони лежать в одній площині і не мають спільних точок.

а

б

Рис. 40. Приклади паралельності прямих у просторі:
а — двотаврова балка;
б — прямозуба шестірня

Паралельність прямих a і b (рис. 39) у просторі позначається так само, як і на площині: $a \parallel b$. Наочне уявлення про паралельні прямі в просторі дають, наприклад, ребра двотаврової балки (рис. 40, *а*).

Звернемо увагу також на те, що площина, про яку йдеться в означенні, містить дві паралельні прямі, але не обов'язково містить третю пряму, паралельну двом даним. Наочне уявлення про це дають паралельні ребра прямозубої шестірні (рис. 40, *б*): будь-які два з них лежать в одній площині, але всі вони разом — ні.

Теорема (про проведення площини через дві паралельні прямі)

Через дві паралельні прямі можна провести площину, і тільки одну.

Доведення

□ Нехай дано паралельні прямі a і b. Через них за означенням можна провести площину. Позначимо її α. Доведемо методом від супротивного, що така площина єдина.

Припустимо, що існує площина β, відмінна від α, яка містить дані прямі. Позначимо на прямій a точки A і B, а на прямій b — точку C (рис. 41). Оскільки $a \parallel b$, точки A, B і C не належать одній прямій. Кожна з площин α і β містить обидві дані прямі, тобто проходить через точки A, B і C. Але це суперечить аксіомі проведення площини, за якою через точки A, B і C можна провести єдину площину. Отже, площина, проведена через a і b, єдина. Теорему доведено. ■

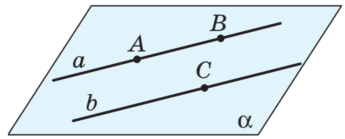


Рис. 41. До доведення теореми про проведення площини через дві паралельні прямі

Таким чином, із вивчених аксіом і теорем випливають такі ***чотири способи проведення площини в просторі***:

- через три точки, що не належать одній прямій;
- через пряму і точку, яка не належить даній прямій;
- через дві прямі, що перетинаються;
- через дві паралельні прямі.

Задача

Доведіть, що всі прямі, які перетинають кожну з двох даних паралельних прямих, лежать в одній площині.

Розв'язання

Нехай дано паралельні прямі a і b. На підставі щойно доведеної теореми через дані прямі проходить єдина площина α (рис. 42). Нехай c — довільна пряма, яка перетинає прямі a і b в точках A і B відповід-

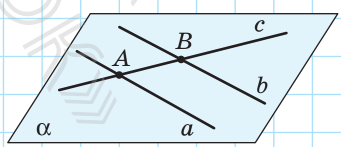
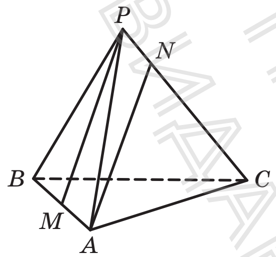
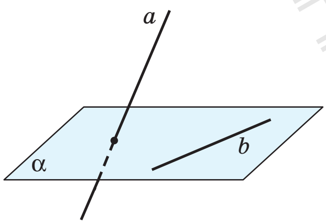


Рис. 42

но. Оскільки пряма c має з площиною α спільні точки A і B, то за теоремою про належність прямої площині $c \subset \alpha$. Отже, усі прямі, які перетинають дві дані паралельні прямі, лежать в одній площині.



а



б

Рис. 43. До означення мимобіжних прямих

Крім паралельних прямих і прямих, що перетинаються, у просторі існують також пари прямих, через які неможливо провести площину. Такими, наприклад, є прямі, що містять ребра PA і BC тетраедра $PABC$ (рис. 43, *а*), або прямі a і b на рис. 43, *б*.

Означення

Дві прямі в просторі називаються **мимобіжними**, якщо вони не лежать в одній площині.

Це означає, що не існує площини, яка містила б обидві мимобіжні прямі.

Очевидно, що мимобіжні прямі не паралельні й не перетинаються, хоча на «плоскому» рисунку вони можуть виглядати і як паралельні (прямі PM і AN на рис. 43, *а*), і як такі, що перетинаються (прямі PA і BC на рис. 43, *а*).

Наочне уявлення про мимобіжні прямі дають дві дороги, одна з яких проходить під естакадою, а друга — по естакаді (рис. 44), або 3D-лабіринт (рис. 45).

Іноді в задачах розглядають також ***паралельні або мимобіжні відрізки (промені)***, тобто відрізки (промені), які лежать на паралельних (або мимобіжних) прямих.

Отже, взаємне розміщення двох прямих у просторі можна описати такою схемою.

Рис. 44. Естакада

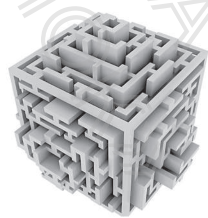


Рис. 45. 3D-лабіринт

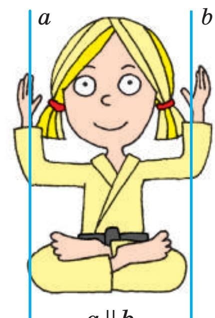
Дві прямі

лежать в одній площині | не лежать в одній площині (мимобіжні)

мають спільну точку (перетинаються) | не мають спільних точок (паралельні)

3.2. Ознаки паралельних і мимобіжних прямих

У процесі доведення теорем і розв'язування задач на обґрунтування взаємного розміщення прямих у просторі користуватися лише означеннями не завжди буває зручно. Доведемо ознаки, за якими можна встановити, чи є дані прямі паралельними або мимобіжними.



$a \parallel b$

Теорема (ознака паралельності прямих)

Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою:

$$(a \parallel b, b \parallel c) \Rightarrow a \parallel c.$$

Доведення

□ Нехай дано прямі a, b і c, причому $a \parallel b$, $b \parallel c$. Доведемо, що $a \parallel c$. Випадок, коли прямі a, b, c лежать в одній площині, було розглянуто в курсі планіметрії. Припустимо, що прямі a, b і c не лежать в одній площині. Нехай паралельні прямі a і b лежать в площині α, паралельні прямі b і c — в площині β (рис. 46).

Через пряму a і довільну точку C прямої c проведемо площину γ; нехай $\gamma \cap \beta = c_1$, тобто пряма c_1 належить кожній із площин γ і β. Доведемо, що пряма c_1 не може перетинати площину α. Справді, якщо c_1 перетинає α, то точка їх перетину як спільна точка площин α і β має належати прямій b. З другого боку, та сама точка перетину

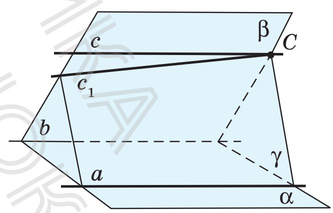


Рис. 46. До доведення ознаки паралельності прямих

як спільна точка площин γ і α має належати прямій a, а це неможливо, оскільки $a \parallel b$ за умовою. Отже, пряма c_1 не перетинає ані пряму a, ані пряму b. Прямі c_1 і b лежать в одній площині й не перетинаються. Це означає, що $c_1 \parallel b$, а тоді прямі c і c_1 збігаються за аксіомою паралельних прямих, застосованою в площині β. Звідси випливає, що пряма c_1 (тобто пряма c) лежить в одній площині з прямою a і не перетинає її. Отже, за означенням паралельних прямих $a \parallel c$. Теорему доведено. ■

Нагадаємо, що твердження $(a \parallel b, b \parallel c) \Rightarrow a \parallel c$ означає транзитивність відношення паралельності прямих у просторі, тому доведену теорему інакше називають ***теоремою про транзитивність відношення паралельності для прямих***.

Ознака паралельності прямих використовується для вивчення багатьох просторових фігур, зокрема ***просторового чотирикутника*** — чотирикутника, вершини якого не лежать в одній площині.

Задача

Доведіть, що середини сторін просторового чотирикутника є вершинами паралелограма.

Розв'язання

Нехай точки K, L, M і N — середини сторін AB, BC, CD і AD просторового чотирикутника $ABCD$ відповідно (рис. 47). Проведемо діагональ AC. За означенням середньої лінії трикутника відрізки KL і MN — середні лінії трикутників ABC і ADC відповідно. За теоремою про середню лінію трикутника $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$, $KL = MN = \frac{1}{2}AC$. Тоді за ознакою паралельності прямих $KL \parallel MN$ і точки K, L, M і N лежать в одній площині. Отже, в чотирикутнику $KLMN$ дві сторони паралельні й рівні, звідси $KLMN$ — паралелограм за ознакою.

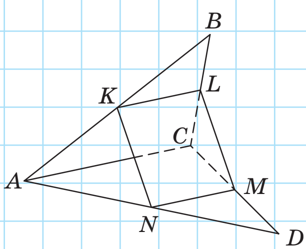


Рис. 47

Теорема (ознака мимобіжних прямих)

Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину в точці, що не належить першій прямій, то такі прямі мимобіжні.

Доведення

☐ Нехай дано прямі a і b та площину α, $a \subset \alpha$, $b \cap \alpha = B$, $B \notin a$ (рис. 48). Доведемо методом від супротивного, що прямі a і b мимобіжні.

Припустимо, що прямі a і b не є мимобіжними, тоді через дані прямі можна провести деяку площину β. Ця площина міститиме пряму a і точку B. А оскільки через пряму і точку поза нею можна провести єдину площину, то площина β збігається з площиною α. Тоді пряма b має лежати в площині α, що суперечить умові. Отже, наше припущення хибне: прямі a і b не лежать в одній площині, тобто є мимобіжними. Теорему доведено. ■

Іноді зручно користуватися іншою ознакою мимобіжних прямих: *якщо точки A, B, C і D не лежать в одній площині, то прямі AB і CD, AC і BD, AD і BC мимобіжні*. Доведіть це самостійно.

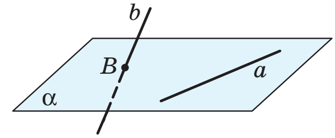
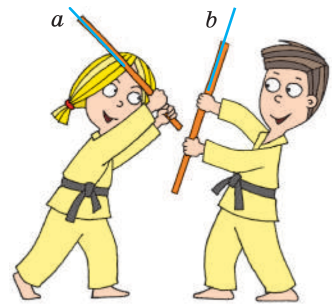


Рис. 48. До доведення ознаки мимобіжних прямих



Прямі a і b мимобіжні

Задача

Площини α і β перетинаються по прямій c. Точка A лежить у площині α, точка B — у площині β, причому жодна з цих точок не належить прямій c. Доведіть, що прямі c і AB мимобіжні.

Розв'язання

Спочатку покажемо, що пряма AB перетинає площину β в точці B (рис. 49). Справді, якщо $AB \subset \beta$, то $A \in \beta$, а отже, точка A як спільна точка площин α і β має належати прямій c, що суперечить умові. Тоді оскільки $c \subset \beta$, $AB \cap \beta = B$, $B \notin c$, то за ознакою мимобіжних прямих прямі c і AB мимобіжні.

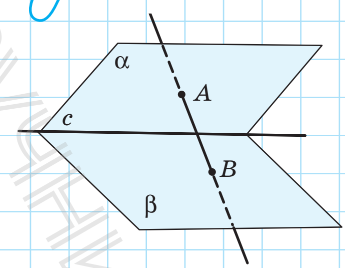


Рис. 49

3.3. Властивості паралельних прямих

Однією з найважливіших аксіом планіметрії є аксіома паралельних прямих (аксіома Евкліда) і пов'язана з нею теорема, яка стверджує, що на площині через будь-яку точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і тільки одну. Аналогічне твердження справджується і в просторі.

Теорема (про існування і єдиність прямої, паралельної даній)

Через точку простору, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і тільки одну.

Доведення

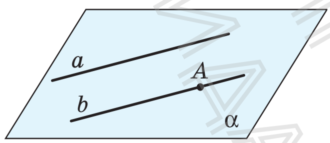


Рис. 50. До доведення теореми про існування і єдиність прямої, паралельної даній

□ Нехай дано пряму a і точку A, $A \notin a$. За теоремою про проведення площини через пряму і точку проведемо через пряму a і точку A площину α (рис. 50). У цій площині за теоремою планіметрії існує єдина пряма b, яка проходить через точку A і паралельна прямій a.

Доведемо, що така пряма є єдиною не тільки на площині, але й у просторі. Припустимо, що існує пряма b_1, відмінна від прямої b, яка проходить через точку A і паралельна прямій a. Тоді площина α_1, яка містить паралельні прямі a і b_1, проходить через точку A і пряму a, а отже, за теоремою про проведення площини через пряму і точку, збігається з площиною α. А оскільки на площині пряма, яка проходить через точку A паралельно прямій a, єдина, то прямі b і b_1 також збігаються, що суперечить припущенню. Теорему доведено. ■

Опорна задача

(про площину, яка містить паралельні прямі, що перетинають дану пряму)

Усі паралельні прямі, що перетинають дану пряму, лежать в одній площині. Доведіть.

Розв'язання

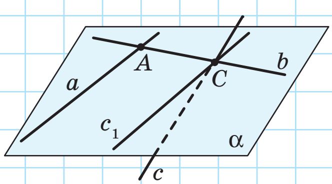


Рис. 51

Нехай прямі a і b перетинаються в точці A (рис. 51). За теоремою про проведення площини через дві прямі, що перетинаються, проведемо єдину площину α через прямі a і b. Доведемо, що будь-яка пряма, яка паралельна прямій a і перетинає пряму b, лежить у площині α.

Припустимо, що існує пряма c, яка паралельна прямій a, перетинається з прямою b в деякій точці C і не лежить у площині α. Тоді проведемо в площині α

через точку C пряму, паралельну a. За щойно доведеною теоремою в просторі через точку C можна провести єдину пряму, паралельну a. Отже, прямі c і c_1 збігаються, тобто $c \subset \alpha$.

На практиці доведене твердження застосовується, наприклад, в конструкції деяких видів телевізійних антен (рис. 52).

Рис. 52. Телевізійна антена

3.4. Протилежні й суперечні твердження

У стереометрії, як і у планіметрії, паралельність прямих часто доводять методом від супротивного. У планіметрії відповідне доведення зазвичай розпочиналося так: «Припустимо, що дані прямі не паралельні; тоді вони перетинаються». У стереометрії у зв'язку з існуванням мимобіжних прямих таке міркування не є правильним. Отже, виникає необхідність більш ретельно дослідити відношення між твердженнями за значенням істинності.

Два твердження називають ***суперечними***, якщо вони не можуть одночасно справджуватися і не можуть бути одночасно хибними. Наприклад, суперечними є твердження «прямі a і b паралельні» і «прямі a і b не паралельні»: якщо одне з них справджується, то інше обов'язково хибне, і навпаки.

Суперечні твердження не слід плутати з ***протилежними***. Два твердження є протилежними, якщо вони не можуть бути одночасно істинними, але можуть бути одночасно хибними. Зокрема, для прямих у просторі протилежними є твердження «прямі a і b паралельні» і «прямі a і b перетинаються», адже у випадку, коли прямі a і b мимобіжні, обидва ці твердження хибні.

Використовуючи метод доведення від супротивного, ми маємо висувати припущення, суперечне (а не протилежне) твердженню, яке треба довести. Таким завжди є ***заперечення*** даного твердження, яке зазвичай утворюється за допомогою частки «не» (або через її вилучення, якщо вона вже є в даному твердженні). Отже, доводячи паралельність двох прямих у просторі методом від супротивного, ми припускаємо, що дані прямі не паралельні, а далі маємо розглянути два випадки — коли дані прямі перетинаються або є мимобіжними.

Наведемо приклади суперечних і протилежних тверджень з інших розділів математики і повсякденного життя. Твердження «число x додатне $(x>0)$» і «число x від'ємне $(x<0)$» протилежні, адже у випадку $x=0$ обидва вони хибні. Суперечним твердженню $x>0$ буде твердження $x \leqslant 0$, тобто «число x недодатне». А ось ще один приклад: протилежними є твердження «ця дівчина — білявка» і «ця дівчина — брюнетка». Одночасно білявкою і брюнеткою дівчина бути не може, але якщо вона руденька, то обидва ці твердження хибні. Суперечними в цьому випадку є твердження «ця дівчина — білявка» і «ця дівчина — не білявка».

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

80•. Чи правильно, що:

а) дві прямі, які не є паралельними, мають спільну точку;

б) дві прямі, які не є мимобіжними, лежать в одній площині;

в) дві прямі, які лежать в одній площині, паралельні;

г) дві паралельні прямі лежать в одній площині?

81. Перекладіть англійською (або іншою іноземною мовою) терміни «паралельні прямі», «мимобіжні прямі» та найголовніші факти § 3.

82. Перекладіть англійською (або іншою іноземною мовою) умову та власне розв'язання завдання 80. Обговоріть одержаний переклад з однокласниками й однокласницями.

83•. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 53). Визначте взаємне розміщення прямих:

а) CD і B_1D;
б) AB і C_1D_1;
в) AC і DD_1;
г) A_1D і B_1C;
д) A_1C і AC_1.

84. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 53). Назвіть прямі, які містять ребро куба і є:

а) паралельними прямій A_1B_1;

б) такими, що перетинаються з прямою CC_1;

в) мимобіжними з прямою BC.

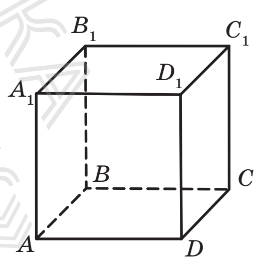


Рис. 53

85. Чи може кожна з двох мимобіжних прямих бути паралельною деякій третій прямій; перетинатися з деякою третьою прямою?

86. Прямі a і b паралельні. Пряма a лежить у площині α. Чи може пряма b перетинати цю площину? Відповідь обґрунтуйте.

87. На рис. 54 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$. Чи лежать точки A_1, B_1 і C_1 на одній прямій? Чи зміниться відповідь у випадку, коли існує пряма l, яка перетинає всі дані прямі?

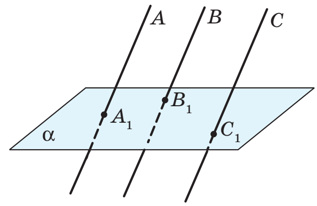


Рис. 54

88. Наведіть приклад твердження про взаємне розміщення прямих, яке:
а) справджується і на площині, і в просторі;
б) справджується на площині, але не справджується в просторі.

89. Визначте, якими є дані твердження: суперечними чи протилежними.
а) «Точки A, B і C лежать на одній прямій» і «Точки A, B і C не лежать на одній прямій»;
б) «Прямі a і b не лежать в одній площині» і «Прямі a і b паралельні»;
в) «Прямі a і b лежать в одній площині» і «Прямі a і b мимобіжні».

Моделюємо

90•. Уявіть лінії перетину стін, підлоги й стелі класної кімнати як прямі та вкажіть: а) три паралельні прямі, які не лежать в одній площині; б) дві мимобіжні прямі; в) дві прямі, що перетинаються, і третю пряму, паралельну одній із них і мимобіжну з другою.

91•. Сконструюйте моделі просторових фігур, які містять паралельні й мимобіжні прямі.

92•. Нарисуйте на цупкому папері паралелограм $ABCD$ і трапецію AB_1C_1D $(AD \parallel B_1C_1)$, які лежать по різні боки від прямої AD. Виріжте рисунок і перегніть його по прямій AD так, щоб побудовані фігури не лежали в одній площині. Чи збереглася при перегині паралельність прямих? Яких саме? Назвіть усі прямі, які разом із прямою AD складають пару мимобіжних прямих.

93•. Нарисуйте на цупкому папері паралелограм $ABCD$. Виріжте рисунок і перегніть його так, щоб утворився просторовий чотирикутник $ABCD$. Назвіть усі пари мимобіжних прямих, що утворилися.

94. Засобами програми Geogebra чи іншого графічного редактора з підтримкою 3D-моделювання нарисуйте пару паралельних прямих і пару мимобіжних прямих. Програмними засобами зробіть першу пару прямих жовтого кольору, а другу — блакитного. Поверніть рисунок засобами 3D-моделювання таким чином, щоб обидві пари прямих уявлялись паралельними. Потім поверніть рисунок таким чином, щоб друга пара уявлялась парою прямих, що перетинаються. Насамкінець, поверніть рисунок таким чином, щоб обидві пари прямих на вигляд відповідали умові задачі. Зробіть висновки з проведеного моделювання.

Розв'язуємо задачі

Рівень А

95•. Визначте, яким може бути взаємне розміщення прямих a і c, якщо:

а) прямі a і b перетинаються, а прямі b і c паралельні;

б) прямі a і b паралельні, а прямі b і c мимобіжні.

Зробіть відповідні рисунки.

96. Дано мимобіжні прямі a і b та точку O, яка не належить жодній із них. Доведіть, що через точку O неможливо провести дві прямі, кожна з яких перетинала б обидві прямі a і b.

97•. Прямі AB і CD мимобіжні. Доведіть, що прямі AD і BC також мимобіжні.

98. Пряма a лежить у площині α. Пряма b паралельна прямій a і проходить через точку B площини α. Доведіть, що пряма b також лежить у площині α.

99. Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини відрізків BC і CD, паралельна прямій, яка проходить через середини відрізків BA і AD.

100. Паралелограми $ABCD$ і A_1B_1CD не лежать в одній площині. Доведіть, що ABB_1A_1 — паралелограм.

Рівень Б

101. Дано прямі a, b, a_1 і b_1, причому $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$. Визначте взаємне розміщення прямих a і b, якщо прямі a_1 і b_1:

а) паралельні;

б) мимобіжні.

102. Прямі m і n мимобіжні. Точки A і B належать прямій m, а точки C і D — прямій n. Чи можуть відрізки AC і BD мати спільну середину? Відповідь обґрунтуйте.

103. Паралелограми $ABCD$ і $ABEF$ не лежать в одній площині. Доведіть рівність трикутників CBE і DAF.

104. Ромб $AMND$ і трапеція $ABCD$ з основою BC не лежать в одній площині.

а) Визначте взаємне розміщення прямих MN і BC.

б) Знайдіть площу ромба, якщо $MN = 5$ см, $BC = 3$ см, а висота ромба дорівнює середній лінії трапеції.

105. Трапеції $ABCD$ і AB_1C_1D мають спільну основу AD і не лежать в одній площині, причому $BC \uparrow B_1C_1$.

а) Доведіть, що чотирикутник BB_1C_1C — трапеція.

б) Знайдіть основи трьох даних трапецій, якщо їхні середні лінії дорівнюють 7 см, 8 см і 9 см.

106. Площина α проходить через кінець A відрізка AB. Через кінець B і точку C даного відрізка проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть:

а) BB_1, якщо $CC_1 = 6$ см, $AC : AB = 3 : 4$;

б) AB, якщо $CC_1 = 4$ см, $BB_1 = 6$ см, $AC = 8$ см;

в) CC_1, якщо $BB_1 = 12$ см, $AC = 16$ см, $CB = 8$ см.

107. Дано площину α і відрізок AB. Через кінці відрізка і його середину C проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно.

а) Доведіть, що точки A_1, B_1 і C_1 лежать на одній прямій.

б) Знайдіть CC_1, якщо $AA_1 = 6$ см, $BB_1 = 10$ см.

Розгляньте два випадки — коли відрізок AB перетинає площину α і коли не перетинає.

108. Пряма m не лежить у площині трикутника ABC (рис. 55). Визначте взаємне розміщення прямих DD_1 і FF_1.

109. Точка P не лежить у площині чотирикутника $ABCD$, точка K — середина відрізка PA. Доведіть, що прямі PB і KD мимобіжні.

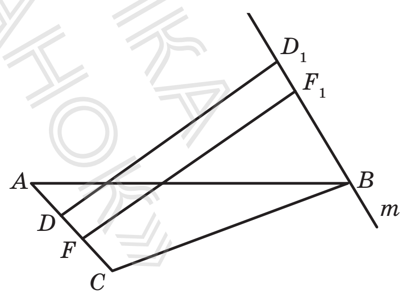


Рис. 55

Рівень В

110. Доведіть, що відрізки, які сполучають середини мимобіжних ребер тетраедра, перетинаються в одній точці й діляться цією точкою навпіл.

111. Точка P не належить площині квадрата $ABCD$. Доведіть, що пряма, яка проходить через точки перетину медіан трикутників PAB і PCD, паралельна прямим BC і AD.

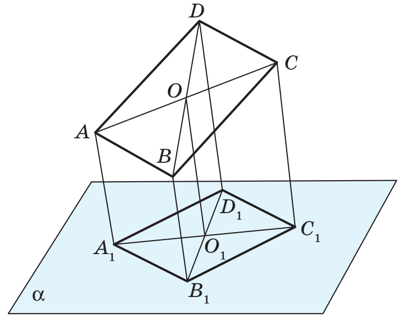


Рис. 56

112. Паралелограм $ABCD$ і площина α не мають спільних точок (рис. 56). Через вершини паралелограма проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, C_1 і D_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка DD_1, якщо:

а) $AA_1 = 7$ см, $BB_1 = 6$ см, $CC_1 = 11$ см; б) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$.

113. Вершина D паралелограма $ABCD$ лежить у площині α. Через точки A, B і C проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка BB_1, якщо:

а) $AA_1 = 3$ см, $CC_1 = 13$ см; б) $AA_1 = a$, $CC_1 = c$.

Повторення перед вивченням § 4

Теоретичний матеріал

- ознаки подібності трикутників; 8 клас, § 11
- теорема Фалеса. 8 клас, § 6

Задачі

114. Пряма, паралельна стороні AC трикутника ABC, перетинає сторони AB і BC в точках A_1 і C_1 відповідно. Знайдіть BC_1, якщо $CC_1 = 3$ см, $BA_1 : A_1A = 3:1$.

115. Вершини A і D паралелограма $ABCD$ лежать у площині α, а вершини B і C не лежать у цій площині. Пряма a лежить у площині α. Яким може бути взаємне розміщення прямих a і AB, a і BC? Чи може пряма BC перетинати площину α? Висловте припущення.

§ 4 Паралельність прямої і площини

4.1. Ознака паралельності прямої і площини

З ознаки належності прямої площині випливає, що пряма, яка не належить даній площині, не може мати з площиною більше однієї спільної точки. У випадку, коли пряма і площина мають одну спільну точку, вони перетинаються. Розглянемо випадок, коли пряма і площина не мають спільних точок.

Означення

> Пряма і площина називаються **паралельними**, якщо вони не мають спільних точок.

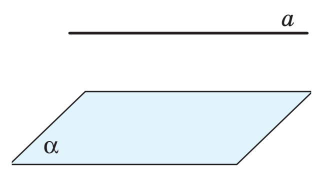


Рис. 57. Паралельність прямої і площини

На рис. 57 пряма a паралельна площині α. Коротко це позначають так: $a \parallel \alpha$.

Розглядають також ***відрізки (промені)***, ***паралельні площині***, тобто відрізки (промені), які лежать на прямих, паралельних цій площині.

Взаємне розміщення прямої і площини в просторі можна відобразити за допомогою такої схеми.

Пряма і площина
- мають спільні точки
  - мають одну спільну точку (перетинаються)
  - мають більше від однієї спільної точки (пряма належить площині)
- не мають спільних точок (паралельні)

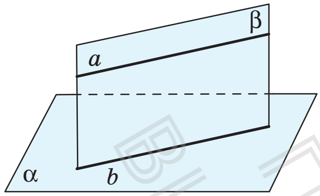


Рис. 58. До доведення ознаки паралельності прямої і площини

а

б

Рис. 59. Приклади прямої, паралельної площині

У процесі розв'язування задач доводити відсутність спільних точок прямої і площини (тобто встановлювати їх паралельність за означенням) не завжди буває зручно. Тому доведемо відповідну ознаку паралельності.

Теорема (ознака паралельності прямої і площини)

Якщо пряма, яка не належить площині, паралельна якій-небудь прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині:

$$(a \not\subset \alpha, b \subset \alpha, a \parallel b) \Rightarrow a \parallel \alpha.$$

Доведення

□ Нехай пряма a не належить площині α і паралельна прямій b, яка лежить у цій площині (рис. 58). Проведемо через паралельні прямі a і b площину β. Площини α і β перетинаються по прямій b. Якби площина α і пряма a мали спільну точку, то вона належала би прямій b. Це неможливо, оскільки $a \parallel b$ за умовою. Отже, пряма a і площина α паралельні. ■

Наочне уявлення про паралельність прямої і площини дають лінії електропередач, прокладені паралельно поверхні Землі (рис. 59, *а*), гімнастичні споруди (рис. 59, *б*) тощо.

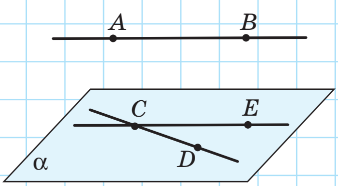


Рис. 60

Задача

Доведіть, що через одну з двох мимобіжних прямих можна провести площину, паралельну другій прямій.

Розв'язання

Нехай прямі AB і CD мимобіжні (рис. 60). За теоремою про існування і єдиність прямої, паралельної даній, проведемо через точку C пряму CE, паралельну AB. Через прямі CD і CE проведемо площину α (за теоремою про проведення площини через дві прямі, що перетинаються). Оскільки площина α містить пряму, паралельну AB, то за ознакою паралельності прямої і площини площина α паралельна прямій AB.

4.2. Властивості прямої, паралельної площині

Теорема
(властивість прямої, паралельної площині)

Якщо пряма паралельна площині, то через будь-яку точку даної площини можна провести пряму, що лежить у цій площині та паралельна даній прямій.

Доведення

□ Нехай пряма a паралельна площині α, точка A належить площині α (рис. 61). Згідно з теоремою про проведення площини через пряму і точку проведемо через пряму a і точку A площину β. Тоді площини α і β мають спільну точку A, отже, перетинаються по прямій b, яка проходить через цю точку. Таким чином, прямі a і b лежать в одній площині β. Крім того, вони не мають спільних точок, оскільки пряма a паралельна площині α, а пряма b лежить у цій площині. Отже, за означенням паралельних прямих $a \parallel b$. ■

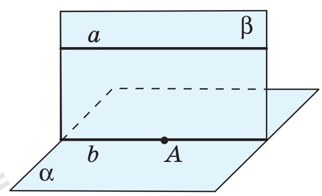


Рис. 61. До доведення властивості прямої, паралельної площині

Щойно доведену властивість можна об'єднати з ознакою паралельності прямої і площини в одне твердження — ***необхідну і достатню умову (критерій) паралельності прямої і площини***:

для того щоб пряма, яка не належить даній площині, була паралельна даній площині, необхідно і достатньо, щоб у даній площині існувала пряма, паралельна даній.

Опорна задача
(про пряму, паралельну двом площинам, що перетинаються)

Якщо пряма паралельна кожній із двох площин, що перетинаються, то вона паралельна прямій їх перетину. Доведіть.

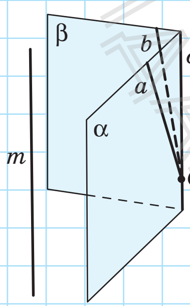


Рис. 62

Розв'язання

Нехай пряма m паралельна кожній із двох площин α і β, які перетинаються по прямій c (рис. 62). Позначимо на прямій c точку C. Згідно з властивістю прямої, паралельної площині, через точку C можна провести прямі a і b в площинах α і β відповідно, причому $a \parallel m$, $b \parallel m$. Але проведені прямі мають спільну точку C, отже, збігаються одна з одною і з прямою c. Таким чином, $m \parallel c$.

Задача

Через точку, яка не належить даній прямій, проведіть площину, паралельну даній прямій.

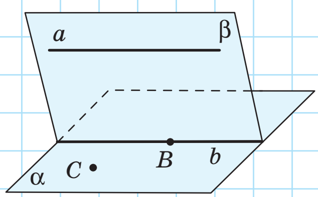


Рис. 63

Розв'язання

Нехай точка B не належить прямій a (рис. 63). За теоремою про проведення площини через пряму і точку проведемо через пряму a і точку B площину β. У цій площині через точку B проведемо пряму b, паралельну даній прямій a. Виберемо поза площиною β довільну точку C і проведемо через точку C і пряму b площину α. Площина α не містить дану пряму a, але містить пряму b, паралельну a. Отже, за ознакою паралельності прямої і площини $a \parallel \alpha$, тобто площина α шукана.

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

116•. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 64). Назвіть:

а) ребра, паралельні площині BCC_1;
б) площини граней, паралельні ребру AD.

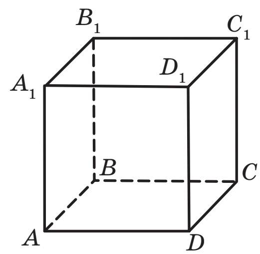


Рис. 64

117•. Відрізок AB і площина γ не мають спільних точок. Чи правильно, що:

а) відрізок AB паралельний площині γ;
б) пряма AB паралельна площині γ?

118. Пряма a паралельна площині α. Чи правильно, що пряма a паралельна будь-якій прямій площини α? Чи правильно, що в площині α існує пряма, паралельна прямій a?

119. Чи можна вважати правильним таке формулювання ознаки паралельності прямої і площини: «Пряма, паралельна якій-небудь прямій даної площини, паралельна й самій площині»? Відповідь обґрунтуйте.

120. Перекладіть англійською (чи іншою іноземною мовою) основні факти § 4. Проконсультуйтесь зі вчителем іноземної мови щодо правильності перекладу.

121. Перекладіть англійською (чи іншою іноземною мовою) умову та власне розв'язання задачі 119. Обговоріть розв'язання з однокласниками й однокласницями в чаті на будь-якій відповідній платформі в мережі Інтернет.

122. У тетраедрі $PABC$ (рис. 65) проведено переріз $KLMN$, паралельний прямій PB. Яким є взаємне розміщення прямих PB і KL, PB і MN? Відповідь обґрунтуйте.

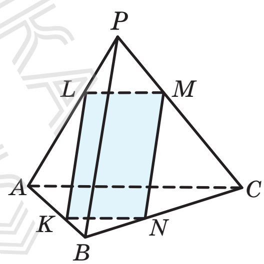
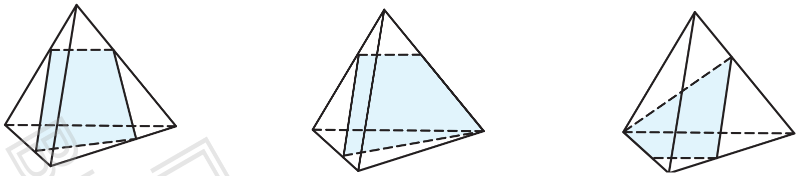


Рис. 65



а б в

Рис. 66

123. На рис. 66, *а–в* побудовано перерізи тетраедра площинами. Чи є на даному рисунку помилки? Якщо є, у чому вони полягають?

124. Сторона BC трикутника ABC паралельна площині α, яка містить вершину A. Площини ABC і α перетинаються по прямій l (рис. 67). Чи є мимобіжними прямі BC і l? Відповідь обґрунтуйте.

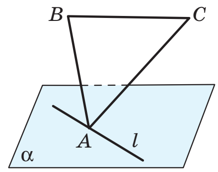


Рис. 67

Моделюємо

125•. Прямі a і b паралельні площині α. Яким може бути взаємне розміщення даних прямих? Змоделюйте всі можливі випадки.

126•. Пряма a і площина α паралельні прямій b. Яким може бути взаємне розміщення прямої a і площини α? Змоделюйте всі можливі випадки.

127•. Нарисуйте на аркуші цупкого паперу трапецію $ABCD$ (рис. 68). Розріжте рисунок по відрізках AB, BC і CD та відігніть трапецію по відрізку AD так, щоб площина трапеції і площина аркуша не збігалися. Як розміщена пряма BC відносно площини аркуша? Відповідь обґрунтуйте.

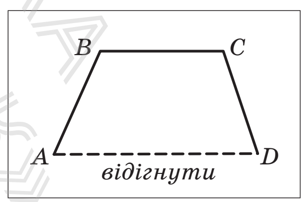


Рис. 68

128. Засобами програми Geogebra чи іншого графічного редактора з підтримкою 3D-моделювання зобразіть пряму, паралельну площині. Змоделюйте графічне відтворення властивостей прямої, паралельної площині.

129•. Сконструюйте модель, яка відображає умову: «Площина, що не збігається з площиною трикутника, проходить через середини двох його сторін». Як розміщені сторони трикутника відносно даної площини? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язуємо задачі

Рівень А

130•. Пряма a паралельна площині α, а пряма b перетинає пряму a. Яким може бути взаємне розміщення прямої b і площини α?

131•. Основа BC трапеції $ABCD$ паралельна площині β, яка містить точку A. Доведіть, що:

а) основа AD даної трапеції лежить у площині β;

б) середня лінія даної трапеції паралельна площині β.

132•. Вершини B і C паралелограма $ABCD$ належать площині α, яка не збігається з площиною паралелограма. Доведіть, що пряма AD паралельна площині α.

133. Доведіть, що через точку, яка не належить даній площині, можна провести пряму, паралельну даній площині.

134. Площини α і β перетинаються по прямій c. Пряма a паралельна прямій c і не належить жодній із площин α і β. Доведіть, що $a \parallel \alpha$ і $a \parallel \beta$.

135. Площина, паралельна стороні AC трикутника ABC, перетинає сторони AB і BC в точках A_1 і C_1 відповідно.

а) Доведіть подібність трикутників ABC і A_1BC_1.

б) Знайдіть сторону AC, якщо $A_1C_1 = 4$ см, $BA_1 : BA = 2 : 3$.

136. Вершина C трикутника ABC не належить площині α, яка містить сторону AB. На сторонах CA і CB позначено точки A_1 і B_1 відповідно, причому $CA_1 : CA = CB_1 : CB = 3 : 5$.

а) Доведіть, що пряма A_1B_1 паралельна площині α.

б) Знайдіть довжину відрізка A_1B_1, якщо $AB = 25$ см.

Рівень Б

137. Пряма a не лежить у площині α. Доведіть, що коли пряма a і площина α паралельні тій самій прямій b, то вони паралельні між собою.

138. Доведіть, що площина, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає і другу пряму.

139. «Якщо пряма паралельна лінії перетину двох площин, то вона паралельна кожній із даних площин». Скоригуйте дане твердження так, щоб воно справджувалося, і доведіть скориговане твердження.

140. Пряма a паралельна площині α. Через точку B площини α проведено пряму b, паралельну a. Доведіть, що $b \subset \alpha$.

141. Прочитайте і доведіть твердження:
$(a \parallel b, a \subset \alpha, b \subset \beta, \alpha \cap \beta = c) \Rightarrow (b \parallel \alpha, a \parallel \beta)$.

142. Якщо дві площини, які перетинаються по прямій c, перетинають третю площину γ по паралельних прямих, то $c \parallel \gamma$. Доведіть.

143. Доведіть, що через дану точку простору C можна провести пряму, яка перетинає кожну з двох мимобіжних прямих a і b (рис. 69).

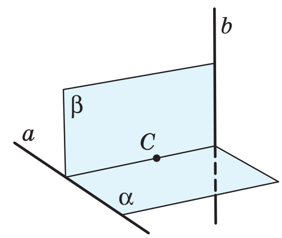


Рис. 69

144. Зобразіть переріз трикутної піраміди $PABC$ площиною, яка проходить через середини ребер PB і BC паралельно ребру AB. Визначте вид многокутника, що утворився.

145. Зобразіть переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через середини ребер AB і BC паралельно ребру BB_1.

146. Використовуючи графічний редактор Geogebra, DG чи інший, налаштований для використання англійською (чи іншою іноземною мовою), розвяжіть задачу 145. Зробіть презентацію, яка б відтворювала всі кроки побудови.

147. Площина α паралельна стороні AC трикутника ABC і проходить через середину сторони AB. Доведіть, що площина α проходить через середину сторони BC.

Рівень В

148. Опишіть побудову:

а) прямої, яка лежить у даній площині α і паралельна даній прямій l (розгляньте всі випадки взаємного розміщення прямої l і площини α);

б) площини, яка проходить через дану пряму a і паралельна даній прямій b (розгляньте всі випадки взаємного розміщення прямих a і b).

149. Опишіть побудову:

а) прямої, паралельної кожній із двох даних площин, що перетинаються;

б) площини, паралельної кожній із двох даних прямих, що перетинаються.

150. Якщо три площини, які не мають спільної прямої, попарно перетинаються, то прямі їх перетину або паралельні, або перетинаються в одній точці. Доведіть.

151. Доведіть, що в тетраедрі $PABC$ пряма, яка проходить через точки перетину медіан трикутників PAB і PBC, паралельна площині ABC.

152. Точка M не лежить у площині паралелограма $ABCD$. Побудуйте лінію перетину площин MBC і MAD.

Повторення перед вивченням § 5

Теоретичний матеріал

- ознаки рівності трикутників; 7 клас, § 8, 10, 13
- ознаки подібності трикутників. 8 клас, § 11

Задачі

153. Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 5 см і 7 см. Знайдіть сторони трикутника, подібного даному, якщо його периметр дорівнює 48 см.

154. Точки A, B і C не належать площині α. Чи перетинається площина α з площиною, яка містить дані точки? Розгляньте всі можливі випадки, висловте припущення. Змоделюйте відповідні ситуації засобами програми Geogebra чи іншого графічного редактора з підтримкою 3D-моделювання.

§5 Паралельність площин

5.1. Паралельні площини в просторі

Відповідно до аксіоми перетину площин дві площини, які мають спільну точку, перетинаються по прямій. Розглянемо випадок, коли дві площини не мають спільних точок.

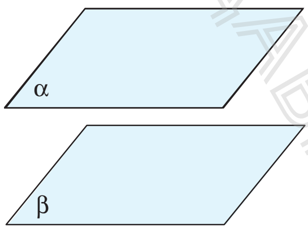


Рис. 70. Паралельні площини

Означення

Дві площини називаються **паралельними**, якщо вони не мають спільних точок.

На рис. 70 зображено паралельні площини α і β. Їх паралельність коротко записують так: $\alpha \parallel \beta$. Отже, можливі два випадки взаємного розміщення площин у просторі.

Дві площини

- мають спільні точки (перетинаються)
- не мають спільних точок (паралельні)

Для доведення паралельності площин зручно використовувати відповідну ознаку.

Теорема (ознака паралельності площин)

Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні:

$$(a_1 \subset \alpha, a_2 \subset \alpha, a_1 \cap a_2 = A, b_1 \subset \beta, b_2 \subset \beta, a_1 \parallel b_1, a_2 \parallel b_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha \parallel \beta.$$

Доведення

☐ Нехай прямі a_1 і a_2 площини α, які перетинаються в точці A, відповідно паралельні прямим b_1 і b_2 площини β (рис. 71). Доведемо, що $\alpha \parallel \beta$.

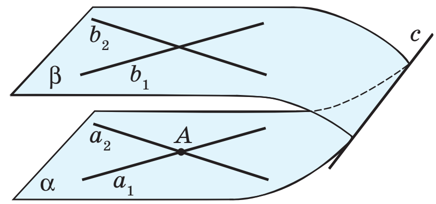


Рис. 71. До доведення ознаки паралельності площин

Припустимо, що площини α і β не паралельні. Тоді за аксіомою перетину площин вони мають спільну пряму c. За ознакою паралельності прямої і площини прямі a_1 і a_2 паралельні площині β. З цього випливає, що дані прямі не перетинаються з прямою c, яка належить площині β. Тоді прямі a_1 і c, а також a_2 і c лежать в одній площині α і не перетинаються, тобто $a_1 \parallel c$, $a_2 \parallel c$. Ми отримали суперечність, оскільки через точку A не можуть проходити дві прямі, паралельні c. Звідси випливає, що наше припущення хибне, тобто $\alpha \parallel \beta$. Теорему доведено. ■

Ознаку паралельності площин можна сформулювати ще і в такий спосіб: **якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини паралельні другій площині, то ці площини паралельні.**

Справді, у процесі доведення ознаки паралельності площин ми показали, що кожна з прямих a_1 і a_2 паралельна площині β, а вже звідси отримали висновок теореми.

З ознаки паралельності площин випливає, що площини протилежних граней паралелепіпеда, зокрема прямокутного, паралельні. Тому моделями паралельних площин можна вважати перекриття в новобудові, стелю й підлогу класної кімнати або її протилежні стіни (рис. 72 *а*, *б*).

Щойно доведена теорема вказує також спосіб побудови площини, паралельної даній. Застосуємо цей спосіб на практиці.

а

б

Рис. 72. Приклади паралельних площин

Опорна задача
(про існування і єдиність площини, паралельної даній площині)

Через точку поза даною площиною можна провести площину, паралельну даній, і тільки одну. Доведіть.

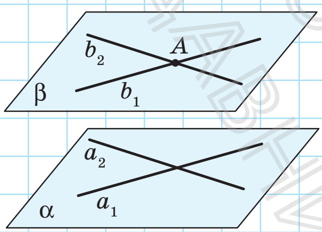


Рис. 73. Побудова площини, паралельної даній площині

Розв'язання

Існування. Нехай точка A не належить площині α (рис. 73). Проведемо в площині α прямі a_1 і a_2, що перетинаються. Через точку A проведемо прямі b_1 і b_2, відповідно паралельні прямим a_1 і a_2. Проведемо через прямі b_1 і b_2 площину β. Тоді за ознакою паралельності площин $\beta \parallel \alpha$.

Єдиність. Доведемо методом від супротивного, що побудована площина β єдина. Припустимо, що існує площина γ, яка проходить через точку A, відмінна від β і паралельна площині α (рис. 74). Оскільки площини β і γ мають спільну точку, вони перетинаються по деякій прямій c.

За означенням паралельних площин площина α не має спільних точок із площинами β і γ, отже, будь-яка пряма площини α паралельна кожній із площин β і γ, тобто паралельна прямій їх перетину c (відповідну опорну задачу розглянуто в п. 4.2). Тоді через будь-яку точку площини α можна провести безліч прямих, паралельних c, що неможливо.

Отже, площина β, яка паралельна площині α і проходить через точку A, єдина.

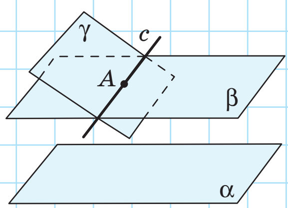


Рис. 74. До обґрунтування єдиності площини, паралельної даній площині

Із доведеного факту, зокрема, випливає, що ***дві площини, паралельні третій, паралельні між собою.***

Опорна задача
(про паралельні площини, що проходять через дві мимобіжні прямі)

Через дві мимобіжні прямі можна провести відповідно дві паралельні площини, причому така пара площин єдина. Доведіть.

Розв'язання

Нехай дано мимобіжні прямі a і b (рис. 75). Через довільну точку прямої a проведемо пряму a_1, паралельну b, а через довільну точку прямої b — пряму b_1, паралельну a.

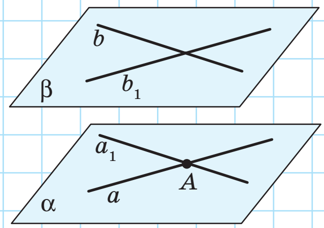


Рис. 75

Площина α, проведена через прямі a і a_1, за ознакою паралельності площин буде паралельною площині β, яка проходить через прямі b і b_1.

Доведемо методом від супротивного, що пара площин α і β єдина. Для цього припустимо, що існує пара паралельних площин α' і β', відмінних від α і β, які також задовольняють умову задачі.

Оскільки пряма b лежить у площині β', $\beta' \parallel \alpha'$, то $b \parallel \alpha'$. Площина, яка містить пряму b і точку A — точку перетину прямих a і a_1, перетинає площину α' по прямій a', паралельній b. Але за теоремою про існування і єдиність прямої, паралельної даній, прямі a_1 і a' збігаються. Тоді площина α', яка містить прямі a і a_1, збігається з площиною α.

Аналогічно доводимо, що площини β і β' також збігаються.

Отже, α і β — єдина пара шуканих площин.

5.2. Властивості паралельних площин

Розглянемо дві найважливіші властивості паралельних площин.

Теорема (властивості паралельних площин)

Якщо дві площини паралельні, то:
1) прямі, по яких вони перетинаються з третьою площиною, паралельні;
2) відрізки паралельних прямих, що містяться між ними, рівні.

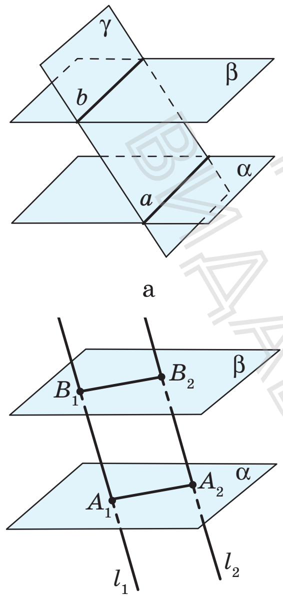


Рис. 76. До доведення властивостей паралельних площин

Доведення

□ Розглянемо α і β — дані паралельні площини.

1) Нехай площина γ перетинає дані площини по прямих a і b відповідно (рис. 76, *а*). Доведемо, що $a \parallel b$.

Прямі a і b лежать в одній площині γ і не перетинаються, адже точка їх перетину була б спільною точкою площин α і β, що суперечило б умові. Отже, за означенням паралельних прямих $a \parallel b$.

2) Нехай паралельні прямі l_1 і l_2 перетинають дані площини в точках A_1, B_1 і A_2, B_2 відповідно (рис. 76, *б*). Доведемо, що $A_1B_1 = A_2B_2$.

Чотирикутник $A_1B_1A_2B_2$ — паралелограм, оскільки $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ за умовою, а площина, визначена паралельними прямими l_1 і l_2, перетинає дані площини по паралельних прямих A_1A_2 і B_1B_2 відповідно.

Тоді $A_1B_1 = A_2B_2$ як протилежні сторони паралелограма. ■

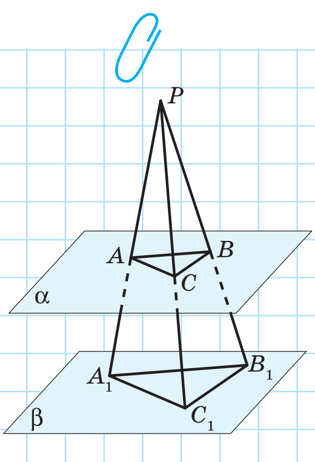


Рис. 77

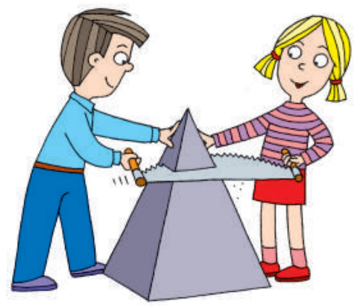
Задача

Через точку P проведено три промені, які перетинають паралельні площини α і β в точках A, B, C і A_1, B_1, C_1 відповідно (рис. 77). Доведіть подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$.

Розв'язання

За властивістю паралельних площин площина прямих PA і PB перетинає дані паралельні площини по паралельних прямих AB і A_1B_1. Звідси випливає, що трикутники PAB і PA_1B_1 подібні за двома кутами, отже, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{PA}{PA_1} = \dfrac{PB}{PB_1} = k$. Аналогічно доводимо подібність трикутників PAC і PA_1C_1, PBC і PB_1C_1. Оскільки ці пари трикутників мають із трикутниками PAB і PA_1B_1 спільні сторони, то коефіцієнт подібності також дорівнює k. Отже, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = k$, тобто трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні за трьома сторонами.

Дана задача має цікаве узагальнення: ***переріз піраміди площиною, паралельною площині основи, є многокутником, подібним основі піраміди.***



Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

155•. Площини α і β паралельні. Чи правильно, що:

а) будь-яка пряма площини α паралельна площині β;

б) будь-яка пряма площини α паралельна будь-якій прямій площини β?

156. Перекладіть англійською (або іншою іноземною мовою) терміни «паралельні площини», «пряма належить площині», «пряма паралельна площині», «існування», «єдиність». Перекладіть умову та власне розв'язання задачі 155. У форумі на будь-якій інтернет-платформі створіть тему щодо обговорення даної задачі. Залучіть до обговорення своїх друзів та подруг.

157•. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 78). Назвіть площину, паралельну:

а) площині AA_1B_1;

б) площині BCC_1;

в) площині EFH, де E, F і H — середини ребер AB, BB_1 і BC відповідно.

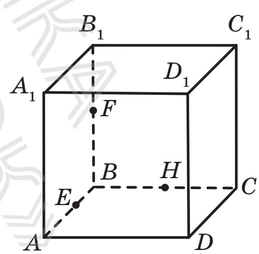


Рис. 78

158•. Чи є правильними твердження:

а) якщо пряма площини α паралельна прямій площини β, то $\alpha \parallel \beta$;

б) якщо дві прямі площини α паралельні двом прямим площини β, то $\alpha \parallel \beta$?

Якщо відповідь не є ствердною, наведіть контрприклади.

Рис. 79. Вимірювання ватерпасом

159. Чи можна провести паралельні площини через основи трапеції; через бічні сторони трапеції?

160. Для перевірки горизонтальності підлоги (вертикальності стін) використовують переносний рівень — ватерпас (рис. 79). Чому його прикладають по прямих, що перетинаються, а не по паралельних прямих?

161. Площини α і β паралельні. Пряма a лежить у площині α, а пряма b — у площині β. Яким може бути взаємне розміщення прямих a і b?

162. Однією з найрозповсюдженіших у наш час моделей паралельних площин є стекла в сучасних металопластикових вікнах. У склопакеті може бути 2, 3, 4, 5 та більше стекол. Чим більше стекол, тим більше шарів сухого повітря між ними, які й сприяють збереженню тепла в оселі. Дізнайтесь із інтернету, скільки коштів можна заощадити на опаленні, замінивши звичайні вікна у вашій класній кімнаті, оселі склопакетами. З якою кількістю стекол треба встановлювати вікна — із двома або більше? Від чого це залежить? Обговоріть результати із друзями, батьками або рідними, класним керівником.

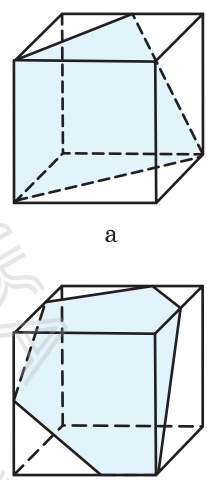


Рис. 80

163. Чи є правильними твердження:

а) якщо відрізки двох прямих, що містяться між двома паралельними площинами, рівні, то дані прямі паралельні;

б) якщо лінії перетину двох площин третьою паралельні, то дані площини паралельні?

У випадку негативної відповіді наведіть контрприклади.

164. На рис. 80, *а*, *б* побудовано перерізи куба площинами. Чи є на даному рисунку помилки? У чому вони полягають?

Моделюємо

165•. Змоделюйте дві паралельні площини і проведіть у кожній із них по дві прямі, що перетинаються. Чи обов'язково серед проведених прямих є паралельні? Сформулюйте твердження, обернене до ознаки паралельності площин. Чи справджується воно?

166•. Виготовте модель куба з пластиліну і розріжте її так, щоб площина перерізу перетинала чотири паралельних ребра куба. Чи паралельні прямі, по яких площина перерізу перетинає протилежні грані куба? Яка фігура утворилася в перерізі?

167•. Розмістіть моделі трьох рівних відрізків так, щоб ці відрізки були паралельними і не лежали в одній площині. Чи є серед площин, утворених кінцями відрізків, паралельні?

168•. Сконструюйте моделі взаємного розміщення площин у просторі, описаного в символьному вигляді:

а) $\alpha \cap \gamma = a,\ \beta \cap \gamma = b,\ \alpha \parallel \beta;$

б) $\alpha \cap \beta = a,\ \beta \cap \gamma = b,\ \alpha \parallel \gamma.$

Розв'язуємо задачі

Рівень А

169•. Площини α і β паралельні, пряма a лежить у площині α. Доведіть, що пряма a паралельна площині β.

170. Пряма b перетинає площину β в точці B. Площина α проходить через пряму b. Чи можуть площини α і β бути паралельними? Відповідь обґрунтуйте.

171. Паралелограми $ABCD$ і ABC_1D_1 не лежать в одній площині. Доведіть паралельність площин DAD_1 і CBC_1.

172. З точки M проведено відрізки MA, MB і MC, які не лежать в одній площині. Доведіть, що площина, яка проходить через середини цих відрізків, паралельна площині ABC.

173. Дві сторони трикутника паралельні площині α. Доведіть, що третя сторона трикутника також паралельна площині α.

174. Доведіть, що дві площини, паралельні третій, паралельні. Яку назву можна дати цьому твердженню?

175. Площини α і β перетинаються. Доведіть, що будь-яка третя площина перетинає хоча б одну з площин α і β.

176. Через пряму a, паралельну площині α, проведіть площину β, паралельну α.

177. Через дану точку проведіть площину, паралельну кожній із двох прямих, що перетинаються. У якому випадку така побудова неможлива?

178. Дві паралельні площини перетинають сторону OA кута AOB в точках A_1 і A_2, а сторону OB — в точках B_1 і B_2 відповідно. Знайдіть:

а) A_1B_1, якщо $A_2B_2 = 24$ см, $OA_1 : A_1A_2 = 2:1$;

б) OB_1 і B_1B_2, якщо $OB_2 = 15$ см, $OA_1 : OA_2 = 2:3$.

179. Точки A_1, B_1 і C_1 — середини ребер PA, PB і PC тетраедра $PABC$. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо площа трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює 16 см^2.

180. Площина паралелограма $ABCD$ паралельна площині β. Через вершини паралелограма проведено паралельні прямі, які перетинають β. Доведіть, що ці прямі перетинають площину β у вершинах іншого паралелограма.

181. Паралельні прямі перетинають одну з двох паралельних площин у точках A_1 і A_2, а другу — у точках B_1 і B_2 відповідно. Знайдіть B_1B_2, якщо $A_1A_2 = 12$ см.

Рівень Б

182 (опорна). ***Якщо площини α і β паралельні, то будь-яка пряма, яка проходить через точку площини α і паралельна площині β, лежить у площині α.*** Доведіть.

183 (опорна).

а) ***Пряма, яка перетинає одну з двох паралельних площин, перетинає і другу площину.***

б) ***Площина, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає і другу пряму.***

Доведіть.

184. Пряма паралельна одній із двох паралельних площин. Доведіть, що дана пряма паралельна другій площині або належить їй.

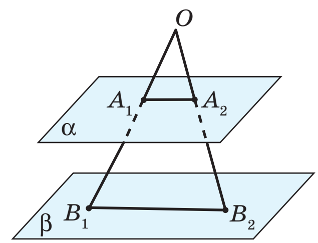


Рис. 81

185. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть паралельність площин AB_1C і A_1DC_1.

186. Визначте, чи паралельна площина γ площині трапеції, якщо площина γ паралельна:

а) основам даної трапеції;
б) діагоналям даної трапеції.

187. Кожна з двох площин паралельна прямим *a* і *b*. Чи будуть дані площини паралельними? У якому випадку? Виконайте відповідні побудови засобами програми Geogebra або іншого графічного редактора з підтримкою 3D-моделювання.

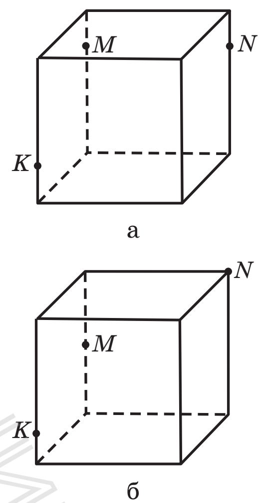


Рис. 82

188. Точка *A* не належить площині α. Доведіть, що всі прямі, які проходять через точку *A* і паралельні площині α, лежать в одній площині. Як розміщена ця площина відносно площини α?

189. Через точку *O*, яка не належить жодній із паралельних площин α і β, проведено пряму, яка перетинає дані площини в точках A_1 і B_1 відповідно (рис. 81). Доведіть, що відношення $OA_1 : OB_1$ не залежить від вибору прямої.

190. Розв'яжіть попередню задачу за умови, що точка *O* лежить між площинами α і β.

191. За даними рис. 82, *а*, *б* зобразіть переріз куба площиною *KMN*. Розвяжіть задачу засобами програми Geogebra, DG або іншого графічного редактора. Створіть презентацію, яка б висвітлювала кроки відповідних побудов.

192. Зобразіть переріз тетраедра *PABC* площиною, яка проходить через:

а) внутрішню точку *K* грані *ABC* паралельно грані *PAB*;
б) середину ребра *PA* паралельно грані *ABC*.

Рівень В

193. Доведіть, що в умовах ознаки паралельності площин прямі a_1 і a_2 не можуть належати площині β.

194. Площина паралельна двом діагоналям правильного шестикутника. Чи обов'язково вона паралельна площині шестикутника?

195 (опорна). ***Відношення відрізків, які відтинають на прямій три паралельні площини, не залежить від вибору прямої (теорема Фалеса в просторі).*** Доведіть.

196. Мимобіжні прямі a і b перетинають три паралельні площини в точках A_1, A_2, A_3 і B_1, B_2, B_3 відповідно. Знайдіть довжини відрізків A_1A_3 і B_1B_3, якщо $A_1A_2 = B_2B_3$, $A_2A_3 = 9$ см, $B_1B_2 = 16$ см.

197. Мимобіжні прямі a і b паралельні площині γ. Через точку C площини γ проведено пряму, яка перетинає дані прямі в точках A і B відповідно. Доведіть, що відношення $AC:CB$ не залежить від вибору точки C в площині γ.

198. Опишіть побудову лінії перетину площин, які мають спільну точку C і перетинають дану площину γ по прямих a і b ($C \notin a$, $C \notin b$).

Повторення перед вивченням § 6

Теоретичний матеріал

- коло; задачі на побудову; 7 клас, § 19, 21
- теорема про пропорційні відрізки; 8 клас, § 10
- паралельне перенесення, центральна та осьова симетрії; 9 клас, § 10, 11

Задачі

199. У колі через середини двох паралельних хорд проведено пряму. Доведіть, що дана пряма проходить через центр кола.

200. Відрізок AM — медіана трикутника ABC. Побудуйте фігуру, в яку переходить даний трикутник унаслідок паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{MA}$.

§ 6 Паралельне проєкціювання. Зображення плоских і просторових фігур у стереометрії

6.1. Паралельне проєкціювання. Зображення просторових фігур на площині

Зобразити тривимірний об'єкт на двовимірному (плоскому) кресленні з абсолютною точністю неможливо. Але за допомогою плоского рисунка можна отримати достатньо чітке уявлення про окремі властивості просторових фігур — саме такими рисунками ми й користувалися до цього часу. На підставі вивчених закономірностей взаємного розміщення прямих і площин у просторі узагальнимо основні правила зображення просторових фігур на площині способом **паралельного проєкціювання**.

Оберемо довільну площину π (її називають ***площиною проєкції***) і пряму l, яка перетинає цю площину. Пряма l задає ***напрям проєкціювання***. Через довільну точку A фігури F проведемо пряму, паралельну l (рис. 83). Тоді точка A' — точка перетину цієї прямої з площиною π — буде проєкцією точки A. Побудувавши таким чином зображення всіх точок фігури F, одержимо в площині π фігуру F' — ***паралельну проєкцію*** фігури F на площину π. Наочним прикладом паралельної проєкції можна вважати тінь, яку залишає предмет на плоскій поверхні під дією пучка сонячних променів (рис. 84). Справді, через значне віддалення Землі від Сонця їх можна вважати паралельними.

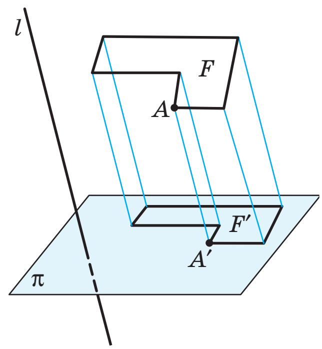


Рис. 83. Паралельне проєкціювання

Рис. 84. Тінь як приклад паралельної проєкції предмета

6.2. Властивості паралельного проєкціювання

Зауважимо, що ***будь-яка пряма або частина прямої, паралельної l, під час паралельного проєкціювання в напрямі прямої l проєктується в точку.*** Таке проєкціювання застосовують найчастіше у випадках, не пов'язаних із дослідженням властивостей взаємного розміщення фігур у просторі. Тому наступні властивості паралельного проєкціювання будемо встановлювати для випадку, коли відрізки, прямі і площини фігур, що проєктуються, не паралельні напряму проєкціювання.

Отже, розглянемо основні властивості паралельного проєкціювання.

> 1. Паралельною проєкцією прямої є пряма, а паралельною проєкцією відрізка — відрізок.

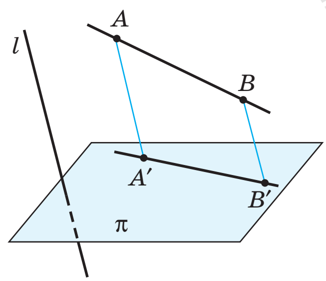


Рис. 85. Паралельне проєкціювання прямої

Справді, усі прямі, які проєктують точки прямої AB на площину проєкції π (рис. 85), лежать в одній площині, що перетинає площину π по прямій $A'B'$. При цьому будь-яка точка відрізка AB проєктується в точку відрізка $A'B'$.

> 2. Паралельні відрізки проєктуються в паралельні відрізки або у відрізки однієї прямої.

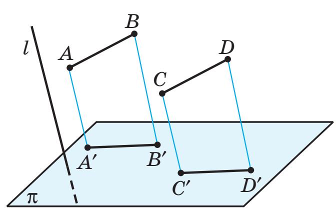


Рис. 86. Паралельне проєкціювання паралельних відрізків

Нехай $A'B'$ і $C'D'$ — проєкції паралельних відрізків AB і CD на площину π, не паралельну площині ABC (рис. 86). За ознакою паралельності площин площини ABB' і CDD' паралельні. Тоді площина π перетинає їх по паралельних прямих, тобто $A'B' \parallel C'D'$ (випадок, коли відрізки $A'B'$ і $C'D'$ належать одній прямій, розгляньте самостійно).

3. Під час паралельного проєкціювання зберігаються відношення довжин відрізків однієї прямої або паралельних прямих.

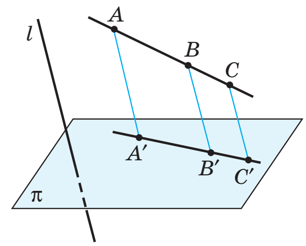


Рис. 87. Паралельне проєкціювання відрізків однієї прямої

Обґрунтуємо це твердження для відрізків однієї прямої. Оскільки паралельні прямі AA', BB' і CC' лежать в одній площині, то в цій площині за теоремою про пропорційні відрізки $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ (рис. 87).

Випадок, коли дані відрізки лежать на паралельних прямих, розгляньте самостійно за допомогою рис. 88.

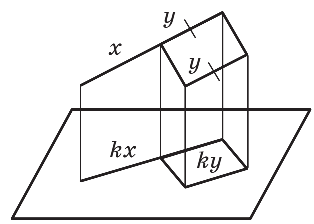


Рис. 88. Паралельне проєкціювання відрізків, які лежать на паралельних прямих

З цього твердження, зокрема, випливає:

1) рівні відрізки, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, мають рівні проєкції;

2) проєкцією середини відрізка є середина його проєкції.

Задача

Трикутник $A'B'C'$ — паралельна проєкція трикутника ABC (рис. 89). Побудуйте проєкцію середньої лінії трикутника, паралельної стороні AB.

Розв'язання

Оскільки проєкцією середини відрізка є середина його проєкції, то точка M' — середина відрізка $A'C'$ — є паралельною проєкцією середини сторони AC даного трикутника. Подальше розв'язування задачі можна провести одним із двох способів.

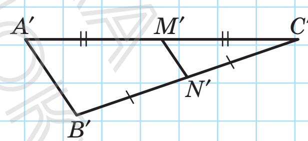


Рис. 89

1-й спосіб. Аналогічно будуємо точку N' — середину відрізка $C'B'$.

2-й спосіб. Оскільки середня лінія трикутника паралельна його стороні, а проєкції паралельних відрізків паралельні, проведемо через точку M' пряму, паралельну $A'B'$. Тоді точка N' — точка її перетину зі стороною $C'B'$ — є паралельною проєкцією середини відрізка CB.

Отже, відрізок $M'N'$ — шукана проєкція середньої лінії трикутника.

6.2. Паралельні проєкції плоских фігур

На підставі властивостей паралельного проєкціювання неважко визначити, як виглядають паралельні проєкції основних плоских фігур, площини яких не паралельні напряму проєкціювання.

Паралельною проєкцією нерозгорнутого кута є кут.

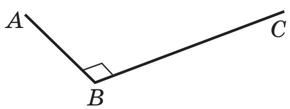


Рис. 90. Паралельна проєкція прямого кута

Паралельне проєкціювання не зберігає величин кутів, що проєктуються. Наприклад, проєкцією прямого кута може бути гострий, прямий або тупий кут. На рис. 90 кут *ABC*, який є проєкцією прямого кута, тупий. Щоб показати, що дана проєкція зображає саме прямий кут, використовують традиційне позначення ⌉ прямого кута. Очевидно, що паралельною проєкцією розгорнутого кута є розгорнутий кут.

Паралельною проєкцією трикутника є трикутник*.

Оскільки сторони трикутника не належать паралельним прямим, їх рівність при пара-

* Зауважимо, що формулювання «Паралельною проєкцією відрізка (кута, трикутника) є довільний відрізок (кут, трикутник)» не є коректним — зокрема, тому, що довжини проєкцій відрізків і градусні міри проєкцій кутів залежать від напряму проєкціювання (про окремі випадки такої залежності йтиметься в § 13).

лельному проєктуванні не завжди зберігається. На рис. 91 зображено паралельну проєкцію рівностороннього трикутника. Рівність сторін і кутів, яку не збережено на рисунку, можна показати традиційним способом — за допомогою рисочок і дужок.

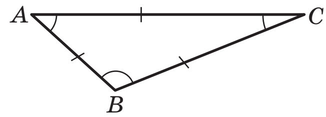


Рис. 91. Паралельна проєкція рівностороннього трикутника

> Паралельною проєкцією паралелограма є паралелограм.

Справді, оскільки паралельність прямих і рівність відрізків паралельних прямих у проєкції зберігаються, чотирикутник, який є паралельною проєкцією паралелограма, також буде паралелограмом (рис. 92). Але зазначимо, що в загальному випадку специфічні властивості прямокутника, ромба, квадрата під час проєкціювання не зберігаються, тобто, наприклад, проєкція прямокутника або ромба може бути довільним паралелограмом, і навпаки, проєкцією довільного паралелограма може бути прямокутник або ромб.

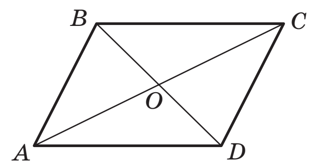


Рис. 92. Паралельна проєкція паралелограма

> Паралельною проєкцією трапеції є трапеція.

Очевидно, що проєкції паралельних сторін трапеції є паралельними відрізками, а проєкції непаралельних сторін — непаралельними. Але паралельна проєкція не завжди зберігає властивості трапеції, яка проєктується. На рис. 93 зображено паралельну проєкцію рівнобічної трапеції $ABCD$: рівність бічних сторін і кутів при основі, яку втрачено під час проєкціювання, позначено рисочками і дужками.

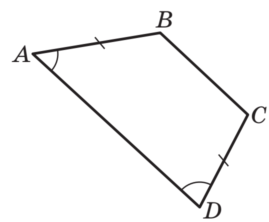


Рис. 93. Паралельна проєкція рівнобічної трапеції

> Паралельною проєкцією кола є або коло, або фігура, яка називається еліпсом.

У еліпсі (рис. 94) цікаво розглянути не тільки центр — паралельну проєкцію центру відповідного кола, а й дві інші точки — фокуси. Сума

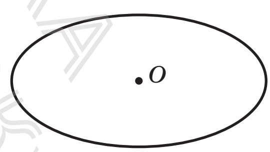
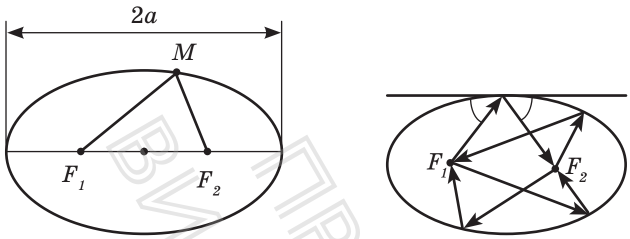


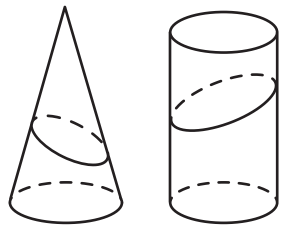
Рис. 94. Еліпс — паралельна проєкція кола



$$MF_1 + MF_2 = 2a > F_1F_2$$

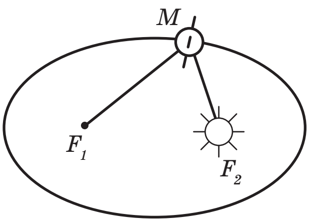
а б

Рис. 95



а б

Рис. 96



$$MF_1 + MF_2 = \text{const}$$

Рис. 97

М. В'язовська

відстаней від будь-якої точки еліпса до фокусів є величиною сталою (рис. 95, *а*). Світлові промені, які виходять з одного фокуса, збираються в іншому після віддзеркалення від еліпса (рис. 95, *б*). Еліпси можуть бути перерізами циліндра та конуса (рис. 96, *а*, *б*). Наочно це можна показати, якщо нахилити склянку, частково наповнену водою, або розглянути переріз площиною столу світлового конуса від лампи.

Великий німецький астроном Йоганн Кеплер (1571–1630) сформулював закони обертання планет навколо зірок, зокрема Землі навколо Сонця. Згідно з першим законом Кеплера траєкторією руху планети є еліпс, в одному з фокусів якого розташована зірка (рис. 97). Цікаво, що Кеплер займався не тільки астрономією. Зокрема, він поставив суто геометричну задачу про щільне пакування куль. Для певних випадків вона була розвязана Мариною В'язовською, яка навчалася в Києві та Бонні (Німеччина), а згодом отримала за свої дослідження престижні математичні премії, зокрема медаль Філдса.

У процесі розв'язування стереометричних задач часто виникає необхідність відтворити просторову фігуру F на плоскому рисунку. У таких випадках ми будуємо фігуру, подібну до фігури F' — паралельної проєкції фігури F. Інакше побудовану фігуру називають ***зображенням*** фігу-

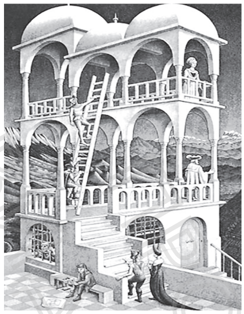


Рис. 98. М. Ешер. Бельведер

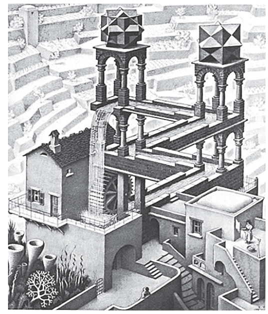


Рис. 99. М. Ешер. Водоспад

ри F. Через властивості подібності всі правила, сформульовані для паралельних проєкцій, справджуються і для зображень. Як бачимо, зображення просторових фігур на площині «перекручує» вигляд фігур і певною мірою ускладнює їх вивчення порівняно з фігурами на площині. Але те, що заважає науці, може допомагати мистецтву. У сучасному живописі існує навіть окремий напрям — імпосибілізм (від англійського *impossible* — неможливий). Його прихильники, порушуючи правила паралельного проєкціювання (які вони, безумовно, добре вивчили), зображають неможливі об'єкти, які не існують у реальності. Придивіться уважно до гравюр голландського художника Моріца Ешера «Бельведер» (рис. 98) та «Водоспад» (рис. 99), до «неможливих фігур» шведського художника Оскара Рутерсварда (рис. 100) і спробуйте пояснити, у чому полягає неможливість існування зображених об'єктів.

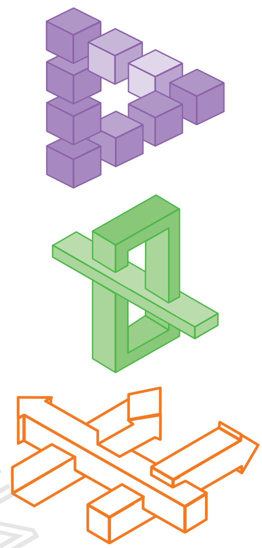


Рис. 100. «Неможливі фігури» О. Рутерсварда

6.3. Паралельне перенесення плоских фігур у просторі

Якщо при паралельному проєкціюванні площина фігури, що проєктується, паралельна площині проєкції, то всі відрізки, які сполучають точку фігури з проєкцією цієї точки, паралельні й рівні. Таким чином здійснюється ***паралельне перенесення*** фігури в просторі. Отже, під час паралельного перенесення

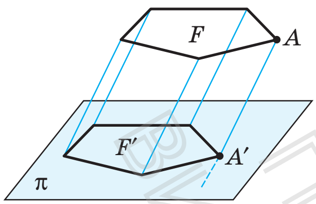


Рис. 101. Паралельне перенесення в просторі

в напрямку променя AA' на відстань* AA' всі точки даної фігури зміщуються по співнапрямлених променях на однакову відстань (рис. 101).

Теорема (основна властивість паралельного перенесення в просторі)

Паралельне перенесення в просторі зберігає відстані між точками.

Доведення

□ Нехай під час паралельного перенесення точки A і B переходять у точки A' і B' відповідно. Покажемо, що $AB = A'B'$.

Якщо точки A, B, A' і B' не лежать на одній прямій (рис. 102, *а*), то відрізки AA' і BB' паралельні й рівні, а $AA'B'B$ — паралелограм, звідки $AB = A'B'$. У випадку, коли точки A, B, A' і B' лежать на одній прямій (рис. 102, *б*), маємо: $A'B' = AB' - AA' = AB' - BB' = AB$.

Інші випадки розміщення точок A, B, A' і B' на одній прямій розгляньте самостійно. ■

Наслідок

Паралельне перенесення в просторі переводить пряму в паралельну пряму (або в ту саму пряму), відрізок — у рівний йому відрізок, кут — у рівний йому кут.

Справді, покажемо, наприклад, що паралельне перенесення зберігає величини кутів. Нехай паралельне перенесення відображає кут ABC на кут $A'B'C'$ (рис. 102, *в*). За щойно доведеною теоремою $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, тобто $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ за трьома сторонами, звідки $\angle A'B'C' = \angle ABC$.

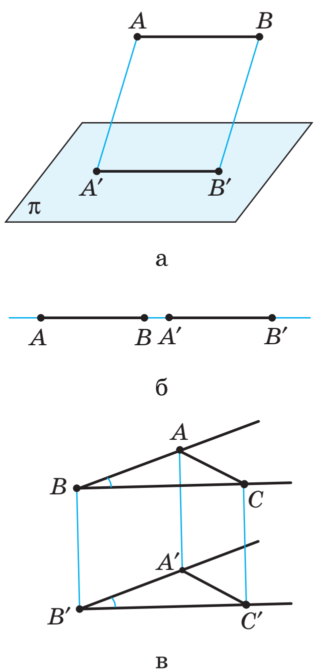


Рис. 102. До доведення властивостей паралельного перенесення

* Далі, під час вивчення векторів у просторі, ми розглядатимемо паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{AA'}$.

Більш того, якщо площини ABC і $A'B'C'$ не збігаються, то $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, отже, за ознакою паралельності площин $(A'B'C') \parallel (ABC)$. З цього випливає такий висновок: якщо внаслідок паралельного перенесення плоска фігура F переходить у фігуру F', то фігури F і F' лежать у паралельних площинах або в одній площині.

6.4. Побудова перерізів многогранників методом слідів і методом внутрішнього проєкціювання

Для побудови перерізу многогранника достатньо побудувати всі точки перетину січної площини з ребрами даного многогранника, після чого сполучити відрізками кожні дві побудовані точки, які належать одній грані.

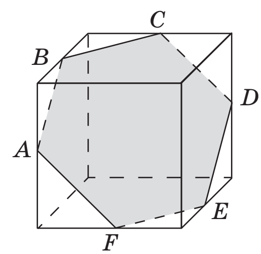


Рис. 103. Переріз куба

Очевидно, що коли многогранник має n граней, то кількість сторін многокутника, який є перерізом даного многогранника, не перевищує n. Наприклад, перерізом паралелепіпеда (який має 6 граней) може бути лише трикутник, чотирикутник, п'ятикутник або шестикутник. На рис. 103 перерізом куба є шестикутник $ABCDEF$.

Застосуємо відомий вам метод слідів у поєднанні з використанням властивостей паралельних площин для розв'язання вже розглянутої в п. 2.4 задачі.

Задача

Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки M, N і K (рис. 104, *а*).

Розв'язання

Оскільки точки M і N належать грані AA_1B_1B, а точки N і K — грані BB_1C_1C, то MN і NK — прямі перетину січної площини з площинами цих граней. Отже, відрізки MN і NK — сторони шуканого перерізу (рис. 104, *б*).

Оскільки грані куба BB_1C_1C і AA_1D_1D паралельні, то січна площина перетинає їх по паралельних прямих. Отже, проведемо через точку M пряму, паралельну NK.

Нехай G — точка перетину цієї прямої з ребром AD (рис. 104, *в*). Міркуючи аналогічно, проводимо через точку K пряму, паралельну MN.

Нехай T — точка перетину проведеної прямої з ребром CD. Оскільки точки G і T належать одній грані $ABCD$, то відрізок GT — сторона шуканого перерізу. Отже, шуканим перерізом є п'ятикутник $MNKTG$ (рис. 104, *г*).

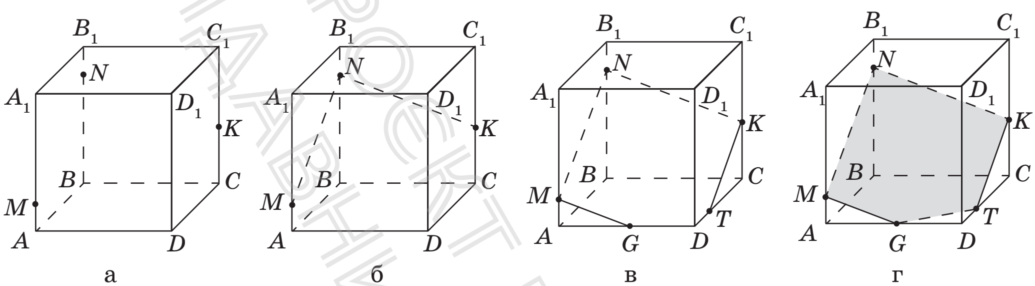


Рис. 104. Побудова перерізу куба

Зауважимо, що метод слідів не завжди зручно застосовувати, якщо побудована пряма перерізу «майже паралельна» площині основи многокутника (тобто перетинає її під кутом, близьким до 0°), адже в такому випадку шукана точка перетину X може вийти за межі рисунка.

Розглянемо ще один метод, використовуючи який можна будувати перерізи многогранників, не виходячи за їхні межі.

Задача

Побудуйте переріз чотирикутної піраміди $PABCD$ площиною, що проходить через точки M, N і K на ребрах піраміди (рис. 105, *а*).

Розв'язання

Спочатку, як зазвичай, побудуємо відрізки MN і NK, які є сторонами шуканого перерізу. Але для побудови точки перетину січної площини MNK з ребром PC застосуємо метод, відмінний від методу слідів.

Проведемо діагоналі основи AC і BD та позначимо точку їх перетину T. Сполучимо отриману точку T з вершиною піраміди P (рис. 105, *б*). Площина діагонального перерізу PBD і січна площина MNK мають спільні точки M і K, а отже, перетинаються по прямій MK. Прямі MK і PT перетинаються (поясніть чому) у деякій точці T_1 (рис. 105, в), яка також належить січній площині MNK.

Аналогічно площини PAC і MNK мають спільні точки N і T_1, отже, перетинаються по прямій NT_1. Пряма NT_1 перетинає ребро PC в деякій точці L (рис. 105, г), яка також є спільною точкою площин MNK і PAC, а отже, належить шуканому перерізу. Сполучивши точку L з точками M і K, дістанемо шуканий переріз $MNKL$.

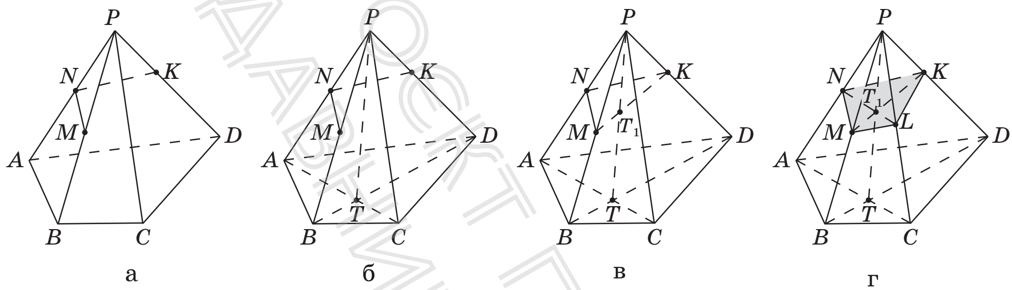


Рис. 105. Побудова перерізу методом проєкцій

Описаний метод побудови перерізів називають ***методом внутрішнього проєкціювання*** або ***методом проєкцій***. Таку назву неважко пояснити: справді, точка T основи піраміди є проєкцією точки перерізу T_1 на площину основи в напрямі прямої PT; отже, отримавши спочатку проєкцію точки T_1, ми «відновили» й саму точку.

Запитання і задачі*

Обговорюємо теорію

201°. Назвіть фігури, які можуть бути паралельними проєкціями:
а) відрізка; б) променя; в) кута; г) трикутника.

202°. Назвіть декілька плоских фігур, паралельною проєкцією яких може бути:
а) точка; б) пряма; в) паралелограм.

* У вправах цього параграфа немає обмежень щодо взаємного розміщення фігур, які проєктуються, відносно напряму проєкціювання.

203. Яким може бути взаємне розміщення двох прямих у просторі, якщо їхніми проєкціями є:

а) дві точки;

б) пряма й точка поза нею;

в) пряма й точка на ній?

204. Чи можуть:

а) проєкції двох рівних відрізків бути нерівними;

б) проєкції двох нерівних відрізків бути рівними;

в) проєкції двох паралельних відрізків бути непаралельними;

г) проєкції двох непаралельних відрізків бути паралельними?

205. Перекладіть англійською (або іншою іноземною мовою) основні терміни та факти § 6.

206. У якому випадку паралельна проєкція многокутника дорівнює даному многокутнику?

207. Трикутник $A'B'C'$ є паралельною проєкцією трикутника ABC. Чи правильно, що:

а) бісектриси трикутника $A'B'C'$ є проєкціями бісектрис трикутника ABC;

б) медіани трикутника $A'B'C'$ є проєкціями медіан трикутника ABC;

в) висоти трикутника $A'B'C'$ є проєкціями висот трикутника ABC?

208. Опишіть умови, за яких паралельною проєкцією трикутника є:

а) відрізок; б) трикутник, що дорівнює даному.

209. Чи може паралельна проєкція паралелограма бути:

а) квадратом;

б) трапецією;

в) чотирикутником зі сторонами 4 см, 5 см, 6 см і 7 см;

г) чотирикутником з кутами 60°, 120°, 60°, 120°?

210. Чи існує паралельне перенесення, яке переводить:

а) одну з двох мимобіжних прямих в другу;

б) одну з граней куба в іншу;

в) одну з граней тетраедра в іншу?

211. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 106) унаслідок паралельного перенесення ребро BB_1 переходить у ребро CC_1. Визначте, у яку фігуру переходить:

а) вершина A_1;

б) ребро A_1B_1;

в) грань AA_1B_1B.

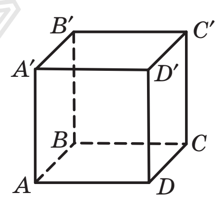


Рис. 106

Моделюємо

212°. За допомогою моделей двох прямих і віддаленого джерела світла дослідіть, якими можуть бути проєкції двох прямих у випадку, коли дані прямі:

а) паралельні; б) перетинаються; в) мимобіжні.

213°. За допомогою моделей двох прямих і віддаленого джерела світла дослідіть, яким може бути взаємне розміщення двох прямих, якщо їхніми проєкціями є:

а) паралельні прямі; б) прямі, що перетинаються.

214. Виріжте з цупкого паперу модель паралелограма $ABCD$ і перегніть її по діагоналі BD. Задайте напрям проєкціювання так, щоб проєкцією трикутника ABD на площину CBD був:

а) трикутник CBD; б) відрізок BD.

215. Виготовте модель просторового чотирикутника. За допомогою цієї моделі та віддаленого джерела світла визначте і нарисуйте фігури, які можуть бути паралельними проєкціями просторового чотирикутника на площину.

216. Як розміщені три точки в просторі відносно площини проєкції та напряму проєкціювання, якщо їхніми паралельними проєкціями є:

а) одна точка;
б) дві точки;
в) три точки однієї прямої?

Для кожного випадку виконайте рисунок.

Розв'язуємо задачі

Рівень А

217. Точки A' і B' — паралельні проєкції точок A і B на площину ≠ (рис. 107). Пряма AB перетинає дану площину в точці C. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $AA'=18$ см, $BB'=12$ см, $AC=27$ см.

218. За умовою попередньої задачі знайдіть довжину проєкції відрізка BC на площину ≠, якщо $\angle A=\angle A'$.

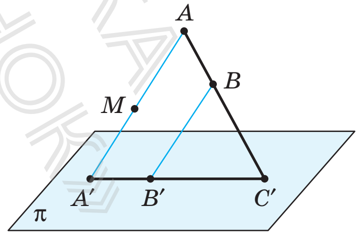


Рис. 107

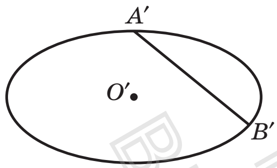


Рис. 108

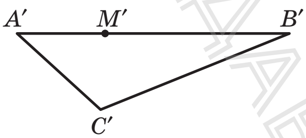


Рис. 109

219•. Дано паралельну проєкцію трикутника. Побудуйте проєкції його медіан.

220. Дано точки A', B' і O' — проєкції двох сусідніх вершин і точки перетину діагоналей паралелограма. Побудуйте проєкцію решти вершин.

221. Дано паралельну проєкцію кола із центром O і хордою AB (рис. 108). Побудуйте проєкцію діаметра кола, перпендикулярного до даної хорди.

222. Трикутник $A'B'C'$ — проєкція рівностороннього трикутника (рис. 109). Побудуйте проєкцію перпендикуляра, проведеного з точки M' до сторони $A'C'$.

Рівень Б

223. Трикутник $A'B'C'$ і відрізок $B'D'$ — паралельні проєкції трикутника ABC і його бісектриси BD. Чи правильно, що:

а) $B'D'$ — бісектриса трикутника $A'B'C'$;

б) $AB : BC = A'D' : D'C'$? Відповіді обґрунтуйте.

224. Дано паралельну проєкцію трикутника і двох його висот. Побудуйте проєкцію центра кола, описаного навколо трикутника.

225. Дано паралельну проєкцію ромба, гострий кут якого дорівнює 60°. Побудуйте проєкцію висоти ромба, проведеної з вершини тупого кута.

226. Дано паралельну проєкцію кола. Побудуйте проєкцію:

а) діаметра кола;

б) центра кола.

227. Дано паралельну проєкцію рівнобічної трапеції. Побудуйте проєкцію її висоти, проведеної з вершини тупого кута.

228. Точки A' B' і C' — проєкції точок A, B і C на площину α (рис. 110). Зобразіть пряму перетину площин ABC і α.

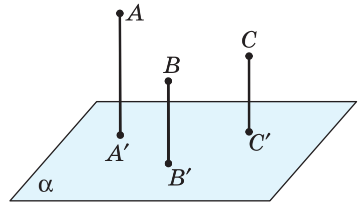


Рис. 110

229. Розв'яжіть задачу 228 засобами програми Geogebra, DG чи іншого графічного редактора. Змоделюйте ситуацію, у якій ця задача не має розв'язання. Як розміщені в цій ситуації площини ABC і α?

230. Унаслідок паралельного перенесення площина α переходить у площину α'. Площина β перетинає площини α і α' по прямих c і c' відповідно. Доведіть, що $c \parallel c'$.

231. Унаслідок паралельного перенесення точки A і B переходять у точки A' і B' відповідно. Доведіть, що точки A, B, A' і B' лежать в одній площині.

232. **(Опорна).** ***Дано пряму, непаралельну площині проєкції. Точка перетину цієї прямої з її проєкцією є точкою перетину прямої з площиною проєкції.*** Доведіть.

Рівень В

233. Доведіть, що внаслідок паралельного проєкціювання:
а) три точки, що не належать одній прямій, не можуть проєктуватися в три точки, що належать одній прямій;
б) дві прямі, що перетинаються, не можуть проєктуватися в дві паралельні прямі.

234. Побудуйте проєкцію правильного шестикутника за даними проєкціями трьох його послідовних вершин.

235. Точки A, B і O — паралельні проєкції двох вершин і центра правильного трикутника. Побудуйте проєкцію цього трикутника.

236. Трикутник $A'B'C'$ — паралельна проєкція трикутника ABC, в якому $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$. Побудуйте проєкцію бісектриси BD.

237. Дано паралельну проєкцію прямокутного трикутника, у якому тангенс одного з кутів дорівнює $\dfrac{2}{3}$. Побудуйте проєкцію серединного перпендикуляра до гіпотенузи.

238. За даними рис. 110 побудуйте проєкцію внутрішньої точки D трикутника ABC на площину α.

Повторення перед вивченням § 7

Теоретичний матеріал

- мимобіжні прямі; 10 клас, § 3
- кут між прямими на площині. 7 клас, § 6

Задачі

239. Прямі a, b і c лежать в одній площині й перетинаються в одній точці. Яким може бути кут між прямими a і c, якщо $\angle(ab)=55°$, $\angle(bc)=35°$? Чи зміниться відповідь, якщо дані прямі не лежать в одній площині?

240. Дано мимобіжні прямі a і b. Через точки прямої a провели прямі, паралельні b. Чи рівні кути, які проведені прямі утворюють із прямою a? Відповідь обґрунтуйте.

Тестове завдання для самоперевірки № 2

1. Визначте взаємне розміщення прямих a і c, якщо $a \parallel b$, $b \parallel c$.
А Паралельні
Б Перетинаються
В Мимобіжні
Г Визначити неможливо

2. Площини α і β паралельні. Пряма a лежить у площині α, а пряма b — у площині β. Яким може бути взаємне розміщення прямих a і b?
А Паралельні або перетинаються
Б Паралельні або мимобіжні
В Мимобіжні або перетинаються
Г Мимобіжні

3. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 111). Серед даних пар прямих виберіть пару мимобіжних прямих.

А B_1C і A_1D

Б B_1D і A_1C

В BC і DD_1

Г AD і B_1D

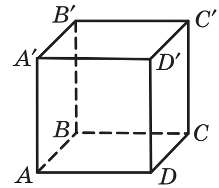


Рис. 111

4. Точки M і N не належать площині паралелограма $ABCD$ (рис. 112). Серед даних умов виберіть ту, за якої $(ABM)\parallel(CDN)$.

А $BM = CN$

Б $AM \parallel DN$

В $AM \perp MB$

Г $MN = AD$

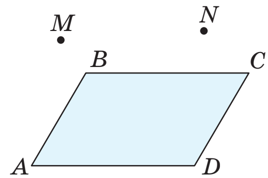
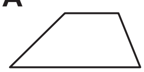


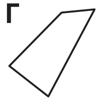
Рис. 112

5. Серед даних фігур виберіть ту, яка може бути паралельною проєкцією трапеції.

А


Б


В


Г


6. Дано трикутник ABC, у якому $AB = 15$ см, $BC = 12$ см, $AC = 9$ см. На стороні AB взято точку M, причому $AM : MB = 1 : 2$. Через точку M проведено площину, яка паралельна стороні AC і перетинає сторону BC у точці N. Знайдіть площу чотирикутника $AMNC$ (рис. 113).

А 18 см^2 **Б** 10,8 см^2 **В** 30 см^2 **Г** 60 см^2

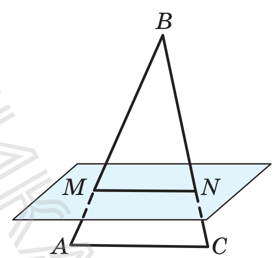


Рис. 113

Онлайн-тестування № 2

Теми повідомлень, рефератів, навчальних проєктів

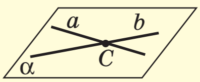
Підсумки розділу II

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ

Лежать в одній площині

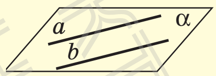
Перетинаються

Дві прямі в просторі називаються такими, що перетинаються, якщо вони лежать в одній площині і мають єдину спільну точку



Паралельні

Дві прямі в просторі паралельні, якщо вони лежать в одній площині і не мають спільних точок



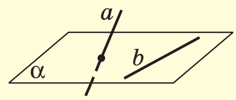
Ознака паралельності прямих

Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою

Не лежать в одній площині

Мимобіжні

Дві прямі в просторі мимобіжні, якщо вони не лежать в одній площині



Ознака мимобіжних прямих

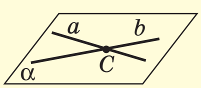
Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину в точці, що не належить першій прямій, то такі прямі мимобіжні

Теорема про існування і єдиність прямої, паралельної даній

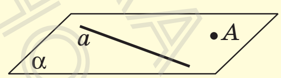
Через точку простору, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і тільки одну

СПОСОБИ ПОБУДОВИ ПЛОЩИНИ В ПРОСТОРІ

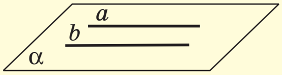
Через дві прямі, що перетинаються



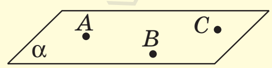
Через пряму і точку, яка не належить цій прямій

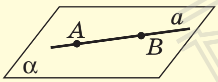
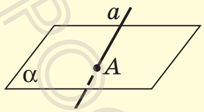
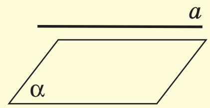


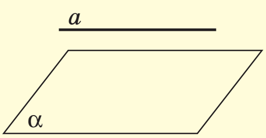
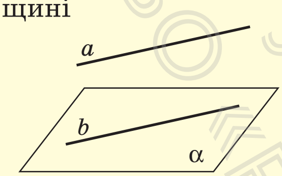
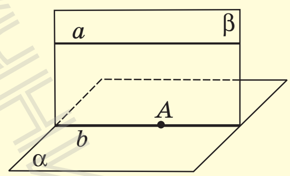
Через дві паралельні прямі

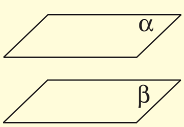
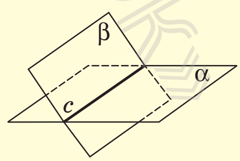


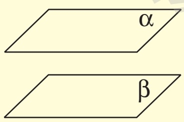
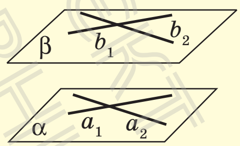
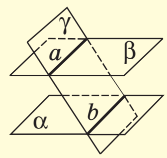
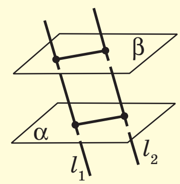
Через три точки, що не лежать на одній прямій



ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ В ПРОСТОРІ		
Мають спільні точки		***Не мають спільних точок***
Пряма лежить у площині 	Пряма перетинає площину 	Пряма паралельна площині 

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ		
Означення	***Ознака***	***Властивість***
Пряма й площина називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок 	Якщо пряма, яка не належить площині, паралельна якій-небудь прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині 	Якщо пряма паралельна площині, то через будь-яку точку даної площини можна провести пряму, що лежить у цій площині та паралельна даній прямій. 

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ	
Дві площини паралельні 	Дві площини перетинаються по прямій 

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПЛОЩИН		
Означення	***Ознака***	***Властивості***
Дві площини називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок 	Якщо дві прямі однієї площини, які перетинаються, відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні 	Якщо дві площини паралельні, то: 1) прямі, по яких вони перетинаються з третьою площиною, паралельні; 2) відрізки паралельних прямих, що містяться між ними, рівні  

Контрольні запитання до розділу II

1. Дайте означення паралельних прямих у просторі. Сформулюйте ознаку паралельності прямих.
2. Дайте означення мимобіжних прямих. Сформулюйте ознаку мимобіжних прямих.
3. Назвіть чотири способи проведення площини в просторі.
4. Назвіть випадки взаємного розміщення прямої і площини.
5. Дайте означення паралельних прямої і площини. Сформулюйте ознаку паралельності прямої і площини.
6. Сформулюйте властивість прямої, паралельної площині.
7. Назвіть випадки взаємного розміщення двох площин у просторі.
8. Дайте означення паралельності площин у просторі. Сформулюйте ознаку паралельності площин.
9. Опишіть паралельне проєкціювання як спосіб зображення фігур на площині. Назвіть основні властивості паралельного проєкціювання.

Додаткові задачі до розділу II


Рис. 114

241. Дано паралельні прямі a і b та точку C, яка не лежить у площині даних прямих. Як побудувати пряму, яка проходить через точку C і паралельна прямим a і b?

242. На двох непаралельних площинах позначено по точці (дані точки не лежать на прямій перетину площин). Як провести через ці точки паралельні прямі, що лежать у даних площинах?

243. Проведіть опитування серед своїх однокласників та однокласниць, хто з них має штатив для тримання смартфону (рис. 114). Зробіть за допомогою такого штатива селфі-фото свого класу чи групи. Що спільного в конструкції таких штативів? Який стереометричний факт використано в цій конструкції? Знайдіть відповідні фото в інтернеті.

244. Через бічну сторону AB трапеції $ABCD$ проведено площину α, яка не містить точки C і D. Доведіть, що пряма CD перетинає площину α, і знайдіть відстань від точки A до точки їх перетину, якщо $AD = 8$ см, $BC = 6$ см, $AB = 3$ см.

245. Пряма a паралельна площині α. Чи правильно, що:

а) будь-яка пряма, яка перетинає пряму a, перетинає площину α;
б) будь-яка площина, яка перетинає пряму a, перетинає площину α?

246. Паралельні прямі a і b перетинають площину α в точках A_1 і B_1, а площину β — у точках A_2 і B_2 відповідно, причому $A_1A_2 = B_1B_2$. Чи правильно, що $\alpha \parallel \beta$?

247. Через сторони AB і CD плоского чотирикутника $ABCD$ проведено паралельні площини. Доведіть, що коли $AB = CD$, то чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

248. Розбийтеся на мінікоманди й організуйте гру-дебати «Плоскі предмети. За і проти». В аргументації можна використовувати геометричні факти, міркування щодо функціональності, дизайну, легкості у відтворенні таких предметів тощо. За допомогою смартфона чи іншої сучасної техніки запишіть відео дебатів і виставте його в інтернеті. Надішліть своїм друзям QR-код відповідної вебсторінки.

249. Доведіть, що всі прямі, які перетинають одну з двох мимобіжних прямих і паралельні другій прямій, лежать в одній площині.

250. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 і 9. На паралельній проєкції трикутника побудуйте проєкцію бісектриси кута між даними сторонами.

251. Роздивіться вдома, у меблевій крамниці або в інтернеті конструкцію шафи-купе. Чому її двері повинні рухатися в паралельних площинах? Які стереометричні теореми є теоретичним підґрунтям конструкції шафи-купе? Обговоріть у будь-якій соціальній мережі тему, як встановлення шафи-купе економить місце у приміщенні. Знайдіть або зробіть самостійно фото шафи-купе, дизайн якої вам найбільше до вподоби. Поділіться цим фото зі своїми співрозмовниками та співрозмовницями.

252. Одним із прикладів застосування паралельних площин у будівництві є утеплюючі панелі, які кріплять паралельно площинам відповідних зовнішніх стін будівлі. Дізнайтесь із інтернету, яким чином такі панелі сприяють енергозбереженню. Чому панелі встановлюють паралельно стінам? Висловіть припущення та обговоріть їх із друзями та подругами. Порівняйте умови різних банків щодо кредитування утеплення будівлі панелями. Які банки пропонують найбільш вигідні умови? Проконсультуйтесь із цього питання з батьками або рідними.

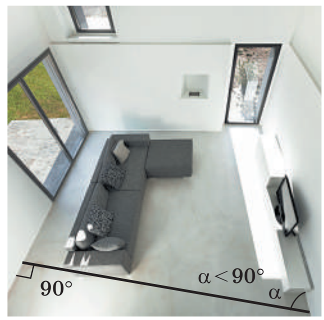


Рис. 115

253. В офісному приміщенні виконуються ремонтні роботи, у ході яких знадобилося визначити, чи паралельні одна одній протилежні стіни кімнати. На підлогу поклали рейку перпендикулярно до плінтуса однієї стіни (рис. 115). Виявилося, що ця рейка не є перпендикулярною до плінтуса протилежної стіни. Було зроблено висновок, що ці стіни не є паралельними. Чи можна обґрунтувати цей висновок, спираючись на положення геометрії? Відповідь поясніть.

254. Екран для мультимедійного проєктора зазвичай натягують між двома паралельними металевими рейками (рис. 116). При цьому поверхня екрану є плоскою. Поясніть, чому рейки роблять паралельними одна одній.

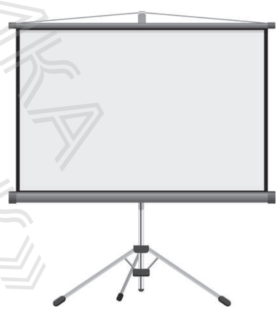


Рис. 116

255. Поясніть конфігурацію ножиць. Яка теорема обумовлює той факт, що леза двох їхніх частин майже лежать в одній площині?

256. Дано паралельну проєкцію кола із центром у точці O. Побудуйте зображення квадрата, описаного навколо цього кола.

257. Дано паралельну проєкцію кола із центром у точці O. Побудуйте зображення правильного трикутника, вписаного в це коло.

258. Знайдіть в інтернеті презентації, пов'язані з еліпсом та іншими перерізами конуса, використанням властивостей еліпса в законах Кеплера. Організуйте обмін знайденими матеріалами.

Задачі підвищеної складності

259. Дано тетраедр $ABCD$. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Точки M, N, K лежать на відрізках AD, BD, CD відповідно. Точка E лежить усередині трикутника ABC. Побудуйте точку перетину прямої DE з площиною MNK.

260. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Точки E, F, G лежать на відрізках AD, CD, BC відповідно, причому $\frac{AE}{ED}=\frac{CF}{FD}=\frac{CG}{GB}$. Доведіть, що площина EFG перетинає відрізок AB в деякій точці H, і визначте вид чотирикутника $EFGH$.

261. Побудуйте переріз даного многогранника січною площиною α, якщо:

а) $ABCA_1B_1C_1$ — призма (рис. 117, *а*), $D\in(BB_1C_1)$, $D\in\alpha$, $E\in\alpha$, $\alpha\parallel CK$;

б) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — призма (рис. 117, *б*), $P\in(AA_1B_1)$, $Q\in(A_1B_1C_1)$, $R\in(AA_1D_1)$, $\alpha=(PQR)$;

в) $SABC$ — тетраедр (рис. 117, *в*), $K\in(ASC)$, $L\in(BSC)$, $M\in(ASB)$, $\alpha=(KLM)$.

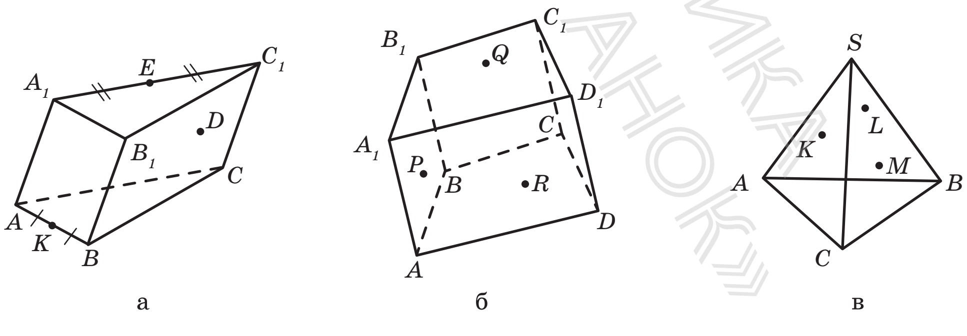


Рис. 117

262. Доведіть, що:

а) дві прямі паралельні тоді й тільки тоді, коли будь-яка площина, що перетинає одну з них, перетинає й другу;

б) дві площини паралельні тоді й тільки тоді, коли будь-яка пряма, що перетинає одну з них, перетинає й другу.

263. Дано: $a \subset \alpha$, $M \in \alpha$, $M \notin a$, $K \notin a$. Побудуйте площину β, яка паралельна прямій a і проходить через точки M і K, якщо $K \notin \alpha$. Скільки існує таких площин? Чи можливо побудувати таку площину за умови, що $K \in \alpha$?

264. У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка L — середина ребра DD_1, точка K — середина ребра CC_1, точка P належить ребру BB_1, причому:

а) $0 < \frac{B_1P}{PB} < 1$; б) $\frac{B_1P}{PB} = 1$; в) $\frac{B_1P}{PB} > 1$.

Через точку D проходить площина α, паралельна площині PKL. Зобразіть переріз даного паралелепіпеда площиною α.

265. Дано трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Точка K лежить на відрізку AC, точка M — на відрізку AK. Через точку M проведено площину, паралельну площині B_1BK. Зобразіть лінію перетину цієї площини з площиною AA_1B_1.

266. Побудуйте зображення квадрата, вписаного в коло.

267. Через вершини трикутника і точку перетину його медіан проведено паралельні прямі, які перетинають площину, що не має з трикутником спільних точок. Довжини відрізків цих прямих від вершин трикутника до відповідних точок перетину з площиною дорівнюють a, b, c. Знайдіть довжину відрізка від точки перетину медіан даного трикутника до точки перетину відповідної прямої з даною площиною.

268. Бічна сторона рівнобедреного трикутника відноситься до його основи як $5:6$. Через вершини трикутника і центр описаного навколо нього кола проведено паралельні прямі, які перетинають площину, що не має з трикутником спільних точок. Довжини відрізків цих прямих від вершин при основі трикутника до відповідних точок перетину з площиною дорівнюють 21 см і 51 см, а від третьої вершини — 68 см. Знайдіть довжину відрізка від центра описаного кола даного трикутника до точки перетину відповідної прямої з даною площиною.

269. Доведіть, що зображенням рівностороннього трикутника може бути будь-який трикутник, і навпаки, зображенням будь-якого трикутника може бути рівносторонній трикутник. На підставі доведеного твердження обґрунтуйте, що оскільки в правильному трикутнику медіани перетинаються в одній точці та діляться цією точкою у відношенні $2:1$, починаючи від вершин, то таку саму властивість має будь-який трикутник.

270. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ та точки P, Q, R на ребрах AA_1, A_1D_1, A_1B_1 відповідно. Точки M, N, K лежать усередині многокутників PQR, $B_1C_1D_1QR$, CC_1D_1D відповідно. Побудуйте переріз многогранника $ABCDPQD_1C_1B_1R$ (куба зі «спилом») площиною MNK.

271. Дано паралельну проєкцію рівнобічної трапеції, у яку можна вписати коло. Побудуйте проєкції точок дотику сторін трапеції до вписаного кола.

272. Дано паралельну проєкцію рівнобедреного прямокутного трикутника. Побудуйте проєкцію квадрата, вписаного в цей трикутник так, що дві вершини квадрата лежать на гіпотенузі, а дві інші — на катетах.

273. Дано паралельну проєкцію правильного шестикутника $ABCDEF$. Побудуйте проєкцію:

а) бісектриси кута ABD;

б) бісектриси кута між відрізками AC і BE.

274. Дано паралельну проєкцію кола та точки A цього кола. Побудуйте зображення правильного шестикутника, описаного навколо цього кола, для якого точка A є точкою дотику до однієї зі сторін.

275. На ребрах SA, SB, SC трикутної піраміди $SABC$ позначено точки A_1, B_1, C_1 відповідно. Відомо, що $AB \cap A_1B_1 = X$, $BC \cap B_1C_1 = Y$, $AC \cap A_1C_1 = Z$. Доведіть, що точки X, Y, Z належать одній прямій.

276. На площині дано три попарно паралельних прямих a, b і c та точки M, N, P (рис. 118). Побудуйте трикутник так, щоб його вершини лежали на даних прямих, а сторони проходили через дані точки (кожній стороні має належати одна точка).

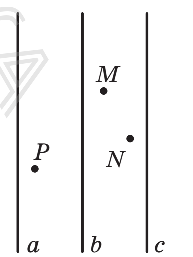
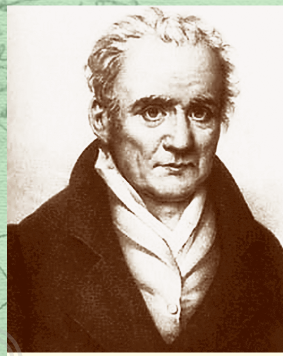


Рис. 118

А. Дюрер



Г. Монж

Ф. Брунеллескі

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Паралельні прямі та площини з давніх часів використовувалися під час будівництва. Зокрема, паралельні й рівні за довжиною колони з'єднували паралельні підлогу і стелю в храмах, наприклад у храмі Ніки Аптерос (V ст. до н. е.). У своїй роботі будівельники, художники і вчені вдавалися до елементарних проєкційних прийомів. Але сучасного вигляду наука про зображення предметів — нарисна геометрія — набула значно пізніше, завдяки французькому вченому Гаспару Монжу (1746–1818). Монж розробив теорію побудови ортогональних проєкцій тривимірних об'єктів.

Але крім паралельного проєкціювання для зображення просторових фігур у живописі та технічних кресленнях застосовується також центральне проєкціювання, або теорія перспективи. Цей спосіб був відомий ще за часів античності й детально описаний у роботах римського архітектора Марка Вітрувія (прибл. I ст. до н. е.). В епоху Відродження основи теорії перспективи розробив італійський архітектор Філіппо Брунеллескі (1377–1446), а на практиці її досягнення втілили визначні митці Леонардо да Вінчі, Альбрехт Дюрер та інші.

Ідеї та методи стереометрії і сьогодні знаходять застосування у витворах архітектури, живопису, фотографії, комп'ютерної графіки.

Церква Сан-Лоренцо у Флоренції. Архітектор — Ф. Брунеллескі

Розділ III

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

Багато хто, кому ніколи не траплялося випадку більш глибоко пізнати математику, ... вважають її наукою сухою. По суті ж це наука, яка потребує найбільше фантазії.

Софія Ковалевська,
перша у світі жінка, яка
працювала на посаді
професора з математики

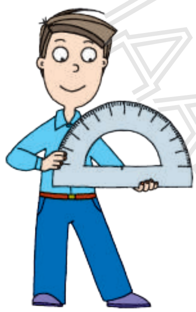
Від основних відомостей про взаємне розміщення просторових фігур перейдемо до визначення відстаней і кутів між ними. Особливу роль у цьому процесі відіграє поняття перпендикулярності прямих і площин.

У повсякденному житті ми щоразу зустрічаємося з перпендикулярами: ніжки стола перпендикулярні до підлоги, цвях вбивають перпендикулярно до поверхні стіни, сусідні стіни будівлі зазвичай взаємно перпендикулярні. Отже, вчення про перпендикулярність можна без перебільшення назвати основою «будівельної геометрії».

Собор Св. Юра.
м. Львів

§7 Кути між прямими в просторі

7.1. Кут між прямими, що перетинаються



Означення кута між прямими в просторі ґрунтується на відповідних означеннях кутів на площині. Тому розглянемо спочатку кути між прямими, які лежать в одній площині.

Отже, **кут між паралельними прямими вважається таким, що дорівнює нулю.**

Якщо дві прямі в просторі перетинаються, то через них можна провести площину і скористатися означенням кута між прямими в планіметрії.

Означення

Кутом між прямими, що перетинаються, називається найменший із кутів, які утворилися в результаті перетину даних прямих.

Так само, як і на площині, дві прямі, що перетинаються, у просторі називаються **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90°.

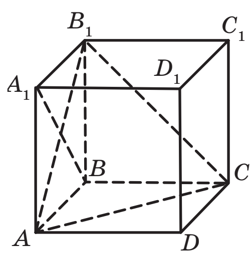


Рис. 119

Наприклад, два ребра куба (рис. 119), які мають спільний кінець, перпендикулярні. Діагоналі грані куба AB_1 і A_1B також перетинаються під прямим кутом, кут між відрізками AB_1 і B_1B дорівнює 45°, а кут B_1AC дорівнює 60° (поясніть чому).

Теорема
(про кути між відповідно паралельними прямими)

Кут між прямими, що перетинаються, дорівнює куту між прямими, які перетинаються і відповідно паралельні даним:

$$\left(a_1 \parallel a_2, b_1 \parallel b_2, a_1 \cap b_1 = O_1, a_2 \cap b_2 = O_2\right) \Rightarrow \angle\left(a_1 b_1\right) = \angle\left(a_2 b_2\right)$$

Доведення

□ Нехай площина, в якій лежать прямі a_1 і b_1, не збігається з площиною, в якій лежать прямі a_2 і b_2 (рис. 120).

Паралельне перенесення, яке переводить точку O_1 в точку O_2, переводить пряму a_1 в паралельну пряму, яка проходить через точку O_2, тобто в пряму a_2. Аналогічно пряма b_1 у результаті такого перенесення переходить у пряму b_2. Оскільки паралельне перенесення зберігає величини кутів, то менший із кутів між прямими a_1 і b_1 дорівнює меншому з кутів між прямими a_2 і b_2, тобто $\angle(a_1b_1) = \angle(a_2b_2)$. Випадок, коли дані прямі лежать в одній площині, розглядається аналогічно. ■

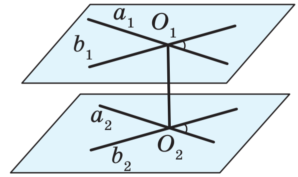


Рис. 120. До доведення теореми про кути між відповідно паралельними прямими

Наслідок (ознака перпендикулярності прямих)

Якщо дві прямі, що перетинаються, відповідно паралельні двом перпендикулярним прямим, то вони також перпендикулярні.

7.2. Кут між мимобіжними прямими

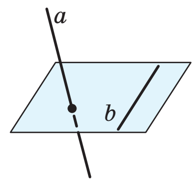


Рис. 121. До означення кута між мимобіжними прямими

Нехай прямі a і b мимобіжні (рис. 121). Проведемо через довільну точку O простору прямі a_1 і b_1, відповідно паралельні даним прямим a і b. Градусну міру кута між цими прямими можна прийняти за градусну міру кута між мимобіжними прямими a і b.

Обґрунтуємо коректність такого підходу до введення поняття кута між мимобіжними прямими, тобто покажемо, що кут між прямими a і b не залежить від вибору точки O. Нехай через точку O_1 проведено прямі a_1 і b_1, а через точку O_2 — прямі a_2 і b_2, відповідно паралельні даним прямим a і b (рис. 122). За ознакою паралельності прямих прямі a_1 і a_2, а також прямі b_1 і b_2 паралельні (або збігаються). Тоді за щойно доведеною теоремою $\angle(a_1b_1) = \angle(a_2b_2)$. Отже, кут між

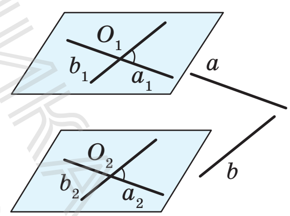


Рис. 122. До обґрунтування коректності означення кута між мимобіжними прямими

прямими a і b не залежить від вибору точки O, тобто можна сформулювати таке означення.

Означення

Кутом між мимобіжними прямими називається кут між прямими, що перетинаються, паралельними даним мимобіжним прямим.

Часто за точку O беруть точку, яка належить одній із даних мимобіжних прямих. Нехай, наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (див. рис. 119) необхідно визначити кут між прямими BB_1 і AD. Оскільки через точку B проходить пряма BC, паралельна AD, то шуканий кут дорівнює куту B_1BC, тобто є прямим.

Означення

Дві прямі в просторі називаються **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90°.

Отже, на рис. 119 прямі AA_1 і AD, AB_1 і A_1B, BB_1 і AD перпендикулярні.

Зазначимо, що ми розширили означення перпендикулярних прямих, увівши до розгляду перпендикулярність мимобіжних прямих. Коротко перпендикулярність прямих у просторі записують так: $a \perp b$.

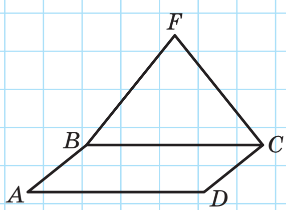


Рис. 123

Задача

Правильний трикутник FBC і паралелограм $ABCD$ не лежать в одній площині (рис. 123). Знайдіть кут між прямими BF і AD.

Розв'язання

Оскільки за означенням паралелограма $AD \parallel BC$, кут між прямими BF і AD дорівнює куту між прямими BF і BC і дорівнює куту FBC. За умовою трикутник FBC рівносторонній, отже, шуканий кут становить 60°.

Відповідь: 60°.

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

277°. Кут між прямими a і b дорівнює α. Чи правильно, що:
а) прямі a і b перетинаються;
б) прямі a і b мимобіжні;
в) $\alpha \leqslant 90°$?

278°. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 124). Назвіть:
а) дві прямі, що перетинаються під прямим кутом;
б) дві мимобіжні перпендикулярні прямі;
в) дві прямі, що перетинаються під кутом 45°;
г) дві мимобіжні прямі, кут між якими дорівнює 45°.

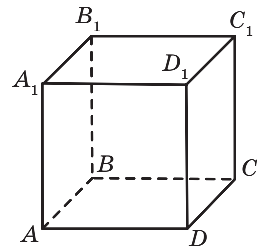


Рис. 124

279. Скільки прямих, перпендикулярних до прямої a, можна провести на площині через дану точку прямої a? Чи зміниться відповідь, якщо дану задачу розв'язати не на площині, а в просторі?

280. Дві прямі відповідно паралельні двом бічним сторонам рівнобедреного трикутника. Чи правильно, що кут між даними прямими дорівнює одному з кутів трикутника? Чи зміниться відповідь, якщо замість бічних сторін розглянути бічну сторону й основу трикутника?

281. Перекладіть англійською (чи іншою іноземною мовою) умову та власне розв'язання задачі 280. Обговоріть виконання завдання із сусідом чи сусідкою по парті.

Моделюємо

282°. На площині справджується твердження «Дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні». За допомогою моделювання визначте, чи справджується це твердження в просторі за умови, що:
а) три дані прямі паралельні одній площині;
б) будь-які дві з даних прямих мимобіжні?

283°. Через точку перетину двох даних прямих проведено третю пряму. За допомогою моделювання визначте, чи може ця пряма:
а) бути перпендикулярною до кожної з двох даних прямих;
б) бути перпендикулярною лише до однієї з двох даних прямих;
в) не бути перпендикулярною до жодної з даних прямих.

Розв'язуємо задачі

Рівень А

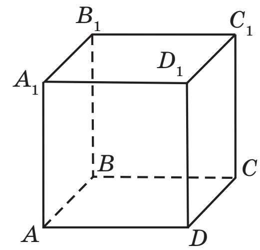


Рис. 125

284. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 125). Знайдіть кут між прямими:

а) AD і CC_1; в) DA_1 і DC_1;

б) A_1C_1 і CD; г) B_1C_1 і AD.

285. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Заповніть таблицю:

Прямі	Взаємне розміщення	Кут між прямими
B_1C і BC_1		
BD і A_1D_1		
B_1C і A_1D		
AC і B_1C		

286. Прямі OA, OB і OC попарно перпендикулярні. Знайдіть довжину відрізка:

а) BC, якщо $AB = 17$ см, $AC = 25$ см, $OB = 8$ см;

б) AB, якщо $OC = 10$ см, $AC = 5\sqrt{5}$ см, $BC = 2\sqrt{61}$ см.

287. Прямі OA, OB і OC попарно перпендикулярні. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $OA = OB = OC = 4$ см.

Рівень Б

288. Прямі a, b і c паралельні одній і тій самій площині. Яким може бути кут між прямими a і c, якщо:

а) $\angle(ab) = 80°$, $\angle(bc) = 50°$;

б) $\angle(ab) = 30°$, $\angle(bc) = 20°$?

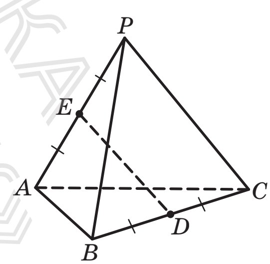


Рис. 126

289. Усі ребра тетраедра $PABC$ дорівнюють a (рис. 126). Точки D і E — середини ребер BC і PA відповідно. Доведіть, що $DE \perp PA$ і $DE \perp BC$. Знайдіть довжину відрізка DE.

290. У тетраедрі $PABC$ $\angle ABC = \alpha$. Знайдіть кут між прямою, яка проходить через середини ребер AB і AC, і прямою, яка проходить через середини ребер PA і PB. Скільки розв'язків має задача?

291. Дано куб. Знайдіть:
а) кут між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней;
б) синус кута між діагоналлю куба і діагоналлю його основи, які виходять з однієї вершини;
в) синус кута між діагоналлю куба і бічним ребром.

292. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда відносяться як $1:\sqrt{3}$. Знайдіть кут між мимобіжними діагоналями основ паралелепіпеда.

Рівень В

293. Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Знайдіть кут між прямими AC і BD, якщо відстань між серединами відрізків AB і CD дорівнює відстані між серединами відрізків AD і BC.

294. Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Знайдіть кут між прямими AC і BD, якщо $AC = 16$, $BD = 10$, а відстань між серединами відрізків AD і BC дорівнює 7.

295. Дано куб. Знайдіть кут між його діагоналлю та діагоналлю його грані за умови, що вказані відрізки належать мимобіжним прямим.

Повторення перед вивченням § 8

Теоретичний матеріал

- існування і єдиність перпендикуляра до прямої; — 7 клас, § 9
- рівнобедрений трикутник. — 7 клас, § 11

Задачі

296. Відрізок BD — висота і медіана трикутника ABC. На промені BD позначено точку E. Доведіть, що трикутник AEC рівнобедрений.

297. Точка M не лежить у площині квадрата $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Чи можуть кути MOA, MOB, MOC і MOD бути рівними? Висловте припущення.

§ 8 Перпендикулярність прямої і площини

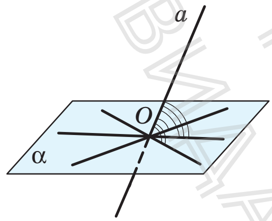


Рис. 127. Кути між прямою *a* і прямими площини α

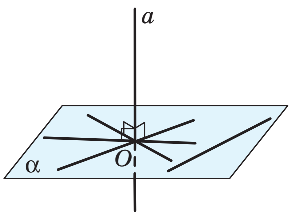


Рис. 128. Пряма *a* перпендикулярна до площини α

Рис. 129. Корабельна щогла

8.1. Ознака перпендикулярності прямої і площини

Нехай пряма *a* перетинає площину α в точці *O* (рис. 127). Кути, які утворює дана пряма з прямими площини α, можуть мати різні градусні міри. Виявляється, що лише в одному випадку взаємного розміщення прямої та площини усі ці кути рівні,— коли вони є прямими.

Означення

Пряма називається **перпендикулярною до площини**, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у даній площині.

На рис. 128 пряма *a* перпендикулярна до площини α. Коротко це записують так: $a \perp \alpha$.

Очевидно, що пряма, перпендикулярна до площини, перетинає цю площину. Справді, якби пряма не перетинала площину, то вона або лежала б у цій площині, або була б паралельною їй. Але, як відомо, в обох цих випадках у площині існували б прямі, паралельні даній, що суперечить наведеному означенню. Отже, пряма, перпендикулярна до площини, перетинає її.

Необхідність перевіряти перпендикулярність прямої до площини на практиці виникає досить часто, наприклад, під час встановлення антенної або корабельної щогли (рис. 129). Зрозуміло, що перевірити перпендикулярність даної прямої до всіх прямих площини неможливо. Але в цьому немає потреби, адже достатньо здійснити перевірку лише для двох прямих площини, які перетинаються. Це випливає з такої теореми.

Теорема (ознака перпендикулярності прямої і площини)

Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, які лежать у площині і перетинаються, то вона перпендикулярна до даної площини.

Доведення

□ Нехай пряма a перпендикулярна до прямих b і c, які лежать у площині α і перетинаються. Доведемо, що $a \perp \alpha$.

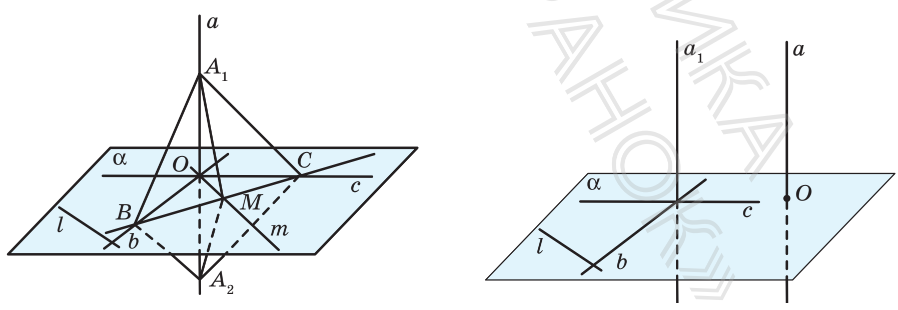
Розглянемо спочатку випадок, коли прямі b і c проходять через точку O перетину прямої a і площини α (рис. 130, *а*). За означенням прямої, перпендикулярної до площини, треба показати, що пряма a перпендикулярна до довільної прямої l площини α.

Проведемо через точку O пряму m, паралельну l (якщо $O \in l$, то замість прямої m можна розглядати саму пряму l). Нехай деяка пряма площини α перетинає прямі b, c і m у точках B, C і M відповідно. На прямій a відкладемо по різні боки від точки O рівні відрізки OA_1 і OA_2.

Трикутник A_1BA_2 рівнобедрений з основою A_1A_2, оскільки його медіана BO є висотою. З тієї самої причини рівнобедреним є трикутник A_1CA_2. Звідси маємо $BA_1 = BA_2$, $CA_1 = CA_2$. Тоді трикутники A_1BC і A_2BC рівні за трьома сторонами. З рівності цих трикутників випливає, що $\angle A_1BM = \angle A_2BM$, таким чином, $\triangle A_1BM = \triangle A_2BM$ за двома сторонами і кутом між ними.

З рівності сторін $A_1M = A_2M$ випливає, що трикутник A_1MA_2 рівнобедрений з основою A_1A_2. Тоді його медіана MO є також висотою, тобто $m \perp a$, а за означенням кута між мимобіжними прямими $l \perp a$. Оскільки l — довільна пряма площини α, пряма a перпендикулярна до цієї площини за означенням.

У випадку, коли пряма a не проходить через точку перетину прямих b і c (рис. 130, *б*), через цю точку проведемо пряму a_1, паралельну прямій a.



а б

Рис. 130. До доведення ознаки перпендикулярності прямої і площини

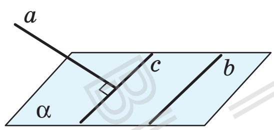


Рис. 131. Пряма *a* перпендикулярна до двох прямих площини α, але не перпендикулярна до цієї площини

а б

Рис. 132. Практичне застосування ознаки перпендикулярності прямої і площини

За доведеним $a_1 \perp l$, отже, і паралельна прямій a_1 пряма *a* перпендикулярна до *l*, тобто $a \perp \alpha$. ■

Зазначимо важливість вимоги теореми про перетин прямих *b* і *c*.

Справді, якщо пряма *a* перпендикулярна до кожної з двох паралельних прямих площини α, то вона не обов'язково перпендикулярна до даної площини (рис. 131).

Доведена теорема має широке практичне застосування. Наприклад, вертикальні стійки каркаса теплиці перпендикулярні до сусідніх горизонтальних рейок (рис. 132, *а*); новорічну ялинку часто встановлюють на підпору в формі хрестовини так, щоб стовбур ялинки був перпендикулярним до кожної з двох частин хрестовини (рис. 132, *б*). Оскільки дві прямі, що перетинаються, задають єдину площину, така підпора є стійкою.

Задача

Пряма *MA* перпендикулярна до сторін *AB* і *AC* трикутника *ABC* (рис. 133). Доведіть, що прямі *MA* і *BC* перпендикулярні.

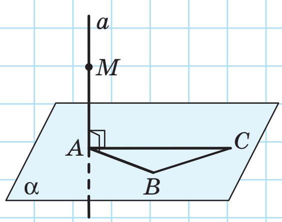


Рис. 133

Розв'язання

За ознакою перпендикулярності прямої і площини пряма *MA* перпендикулярна до площини *ABC*. Тоді за означенням перпендикулярності прямої і площини пряма *MA* перпендикулярна до будь-якої прямої цієї площини, зокрема і до прямої *BC*. Отже, $MA \perp BC$.

8.2. Побудова перпендикулярних прямої і площини

З точки зору логічної строгості міркувань, важливою умовою коректності означення будь-якої фігури є обґрунтування того, що дана фігура існує. Для перпендикулярних прямої і площини таке обґрунтування зводиться до побудови площини, перпендикулярної до даної прямої, і прямої, перпендикулярної до даної площини.

Опорна задача
(про побудову площини, перпендикулярної до даної прямої)

Через дану точку прямої можна провести площину, перпендикулярну до даної прямої, і тільки одну. Доведіть.

Розв'язання

Нехай точка O належить прямій a (рис. 134). Проведемо через дану пряму дві площини і в цих площинах через точку O проведемо відповідно прямі b і c, перпендикулярні до прямої a. Тоді площина γ, що проходить через прямі b і c, перпендикулярна до прямої a за ознакою перпендикулярності прямої і площини.

Доведемо, що побудована площина єдина. Припустимо, що через точку O проходить площина γ', відмінна від γ і перпендикулярна до прямої a (рис. 135). Тоді деяка площина, що містить пряму a, перетинає площини γ і γ' по різних прямих b і b', кожна з яких перпендикулярна до a. Таким чином, у деякій площині через точку O проходять дві різні прямі, перпендикулярні до a, що неможливо через єдиність перпендикуляра до прямої на площині. Отже, побудована площина γ єдина.

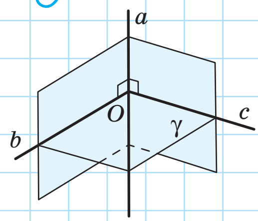


Рис. 134.
Побудова площини, перпендикулярної до даної прямої

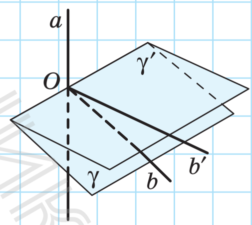


Рис. 135.
До доведення єдиності перпендикулярної площини

Зауважимо, що як точка O може розглядатися довільна точка простору (відповідне твердження доведіть самостійно).

Опорна задача

(про побудову прямої, перпендикулярної до даної площини)

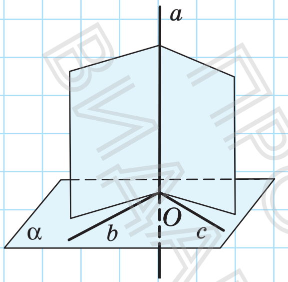


Рис. 136. Побудова прямої, перпендикулярної до даної площини

Через дану точку площини можна провести пряму, перпендикулярну до даної площини, і тільки одну. Доведіть.

Розв'язання

Нехай точка O належить площині α (рис. 136). Проведемо в даній площині через точку O прямі b і c та побудуємо площини, які проходять через точку O і перпендикулярні до прямих b і c відповідно. Пряма a, по якій перетинаються ці площини, перпендикулярна до b і c, отже, перпендикулярна до площини α.

Доведемо, що побудована пряма єдина. Припустимо, що через точку O проходить пряма a', відмінна від прямої a і перпендикулярна до площини α. Площина, проведена через прямі a і a', перетинає площину α по деякій прямій d (рис. 137). Тоді в побудованій площині через точку O проходять дві прямі, перпендикулярні до прямої d, що неможливо. Отже, побудована пряма a єдина.

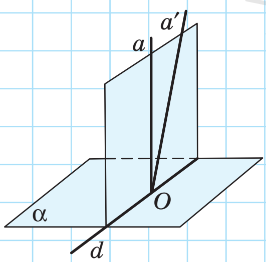


Рис. 137. До доведення єдиності перпендикулярної прямої

Аналогічне твердження для випадку, коли O — довільна точка простору, буде обґрунтоване далі.

Проаналізуємо означення й ознаку перпендикулярності прямої і площини з точки зору логіки.

Ознака перпендикулярності прямої і площини дозволяє перейти від окремого випадку взаємного розміщення прямих (дві прямі площини α, що перетинаються, перпендикулярні до прямої a) до загального випадку (всі прямі площини α перпендикулярні до прямої a). Такий перехід ***від окремого випадку до загального*** («якщо деякі, то всі») є **індукцією.**

На основі індуктивних міркувань не завжди можна зробити правильні висновки. На підтвердження цієї думки розглянемо два приклади міркувань учня на уроці хімії:

1) «Алюміній, мідь, цинк, срібло, платина проводять електричний струм. Отже, усі метали проводять електричний струм».
2) «Алюміній, мідь, цинк, срібло, платина — тверді тіла. Отже, усі метали — тверді тіла».

В обох випадках з окремих прикладів учень робив загальний висновок. Але в першому випадку цей висновок правильний, а в другому — ні (адже ртуть є металом і водночас рідиною).

У процесі розв'язування геометричних задач ми маємо спиратися лише на правильні твердження. Отже, у геометрії застосовувати індуктивні міркування можна лише тоді, коли вони підкріплені відповідними геометричними доведеннями.

Означення перпендикулярності прямої і площини в задачах, навпаки, застосовується для переходу від загального випадку до окремого: якщо за означенням пряма *a* перпендикулярна до будь-якої прямої площини α, то вона перпендикулярна до конкретної прямої даної площини. Такий перехід ***від загального випадку до окремого*** («якщо всі, то деякі») є **дедукцією**. Знаменитий герой романів А. Конана Дойла Шерлок Холмс недарма називав свій метод розслідування злочинів дедуктивним, адже дедукція є переходом від достовірних умов до достовірних висновків. Дедуктивні міркування завжди дають істинні висновки. Наприклад, знаючи, що всі кути правильного шестикутника $ABCDEF$ рівні між собою, ми можемо без додаткових обґрунтувань стверджувати, що $\angle A = \angle D$ або $\angle C = \angle E$.

У стереометричних задачах, пов'язаних із перпендикулярністю прямих і площин, міркування часто здійснюються за схемою «окреме $\rightarrow$ загальне $\rightarrow$ окреме», причому перехід від окремого до загального повинен мати належне геометричне обґрунтування. Саме так розв'язано задачу п. 8.1: від окремих умов ($MA \perp AB$, $MA \perp AC$) на підставі ознаки перпендикулярності прямої і площини ми переходили до загального висновку ($MA \perp (ABC)$, тобто пряма MA перпендикулярна до будь-якої прямої площини ABC), а від нього — знов до окремого випадку $(MA \perp BC)$.

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

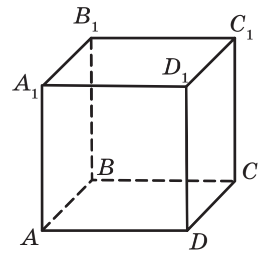


Рис. 138

298•. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 138). Назвіть:

а) дві прямі, перпендикулярні до площини ABC;
б) усі ребра, що належать прямим, перпендикулярним до площини CC_1D_1;
в) площину, перпендикулярну до прямої BD;
г) дві площини, перпендикулярні до прямої A_1D_1.

299•. Точки A, B і O лежать на прямій, перпендикулярній до площини α, а точки O, C і D належать площині α. Серед кутів ACO, BOD і AOB назвіть прямі.

300•. Чи правильно, що пряма a перпендикулярна до площини α, якщо ця пряма перпендикулярна до:

а) деякої прямої площини α;
б) будь-якої прямої площини α;
в) двох прямих площини α;
г) двох прямих площини α, що перетинаються?

301. Перекладіть англійською (чи іншою іноземною мовою) основні терміни та факти § 8.

302•. Пряма a не лежить у площині паралелограма $ABCD$. Серед даних тверджень оберіть правильні:

а) якщо $a \perp (ABC)$, то $a \perp AC$;
б) якщо $a \perp AC$, то $a \perp (ABC)$;
в) якщо $a \perp BC$ і $a \perp AD$, то $a \perp (ABC)$;
г) якщо $a \perp BC$ і $a \perp AB$, то $a \perp (ABC)$.

303•. Пряма a і площина α не перпендикулярні. Визначте, чи є правильним твердження:

а) жодна пряма площини α не перпендикулярна до a;
б) у площині α існує пряма, перпендикулярна до a;
в) у площині α існують дві прямі, перпендикулярні до a;
г) у площині α існують дві прямі, які перетинаються і перпендикулярні до a.

304. На шляху зі школи додому зверніть увагу на предмети чи об'єкти, які мають бути перпендикулярними до певної площини. Як підтвердити або спростувати відповідну їх властивість? Яке приладдя або підручні засоби для цього варто використати? Перевірте свої міркування разом із друзями та подругами наступного дня на шляху з дому до школи.

305 («логічний конструктор»). Для прямих a і b та площини α сформульовано твердження:

1 $a \perp b$ **2** $b \subset \alpha$ **3** $a \perp \alpha$

Чи є правильними твердження:

а) якщо 1 і 2, то 3; б) якщо 1 і 3, то 2; в) якщо 2 і 3, то 1?

Моделюємо

306•. Розкрийте підручник і поставте його на стіл так, щоб корінець книги був перпендикулярним до площини столу. Поясніть на отриманій моделі ознаку перпендикулярності прямої і площини.

307•. Пряма MA перпендикулярна до сторін AB і CD трапеції $ABCD$. Уточніть умову і змоделюйте описану геометричну ситуацію так, щоб:

а) пряма MA була перпендикулярною до площини трапеції;

б) пряма MA не була перпендикулярною до площини трапеції.

308•. Виготовте модель для дослідження геометричної ситуації: «Пряма CD перпендикулярна до площини прямокутного трикутника ABC з гіпотенузою AB». За допомогою моделі визначте, чи перпендикулярні:

а) пряма BC і площина ADC;

б) пряма AC і площина BDC;

в) пряма AB і площина BDC.

309. За допомогою програми Geogebra або іншого графічного редактора з підтримкою 3D-графіки змоделюйте пряму, перпендикулярну до площини. Спробуйте на базі даної конфігурації зробити цікавий дизайнерський мініпроєкт.

Розв'язуємо задачі

Рівень А

310•. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 138). Доведіть перпендикулярність:

а) прямої AD і площини C_1CD;

б) прямих AC і BB_1.

311•. Пряма MB перпендикулярна до сторін AB і BC квадрата $ABCD$ (рис. 139). Доведіть перпендикулярність:

а) прямих MB і AC;
б) прямої AB і площини MBC;
в) прямої AD і площини MAB.

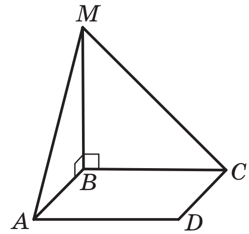


Рис. 139

312•. Діагоналі ромба $ABCD$ перетинаються в точці O. Пряма MO перпендикулярна до прямих AC і BD (рис. 140). Доведіть перпендикулярність:

а) прямих MO і AB;
б) прямої AC і площини BMD.

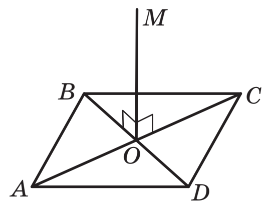


Рис. 140

313. Через сторону AC трикутника ABC проведено площину, перпендикулярну до сторони BC. Визначте вид трикутника і знайдіть довжину сторони AB, якщо $AC = 4$ см, $\angle B = 30°$.

314. Пряма MO перпендикулярна до площини кола з центром O. Знайдіть відстань від точки M до точки кола B, якщо довжина кола дорівнює 14≠ см, а $MO = 24$ см.

315 (опорна). ***Дві площини, перпендикулярні до однієї й тієї самої прямої, паралельні.*** Доведіть.

316 (опорна). ***Пряма, перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, перпендикулярна і до другої площини.*** Доведіть.

317. Пряма DA перпендикулярна до площини трикутника ABC, у якому $\angle B = 90°$ (рис. 141). Доведіть, що пряма CB перпендикулярна до:

а) площини BDA;
б) прямої BD.

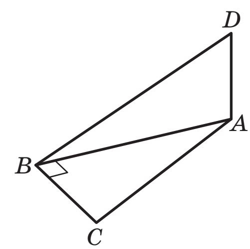


Рис. 141

318. Діагоналі ромба $ABCD$ перетинаються в точці O. Пряма MC перпендикулярна до площини ромба (рис. 142). Доведіть, що $MO \perp BD$.

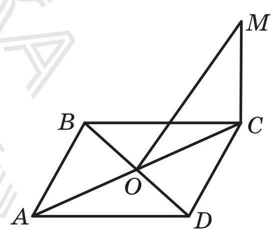


Рис. 142

Рівень Б

319. Кожне ребро тетраедра $PABC$ дорівнює a. Зобразіть переріз тетраедра площиною, яка перпендикулярна до ребра PA і проходить через його середину. Знайдіть площу перерізу.

320. Зобразіть переріз куба з ребром a площиною, яка перпендикулярна до ребра куба і проходить через його середину. Знайдіть площу перерізу.

321. Точка M не лежить у площині паралелограма $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O, причому $MA = MC$, $MB = MD$. Доведіть, що пряма MO перпендикулярна до площини паралелограма.

322. Через вершину прямого кута B трикутника ABC проведено пряму DB, перпендикулярну до сторін AB і BC. Точка M — середина сторони AC. Знайдіть DM, якщо $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $BD = 12$ см.

323. У трикутнику ABC $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см, AD — висота. Пряма AM перпендикулярна до площини трикутника. Знайдіть довжину відрізка MA, якщо $MD = 15$ см.

324. Площина α, перпендикулярна до катета AB прямокутного трикутника ABC, перетинає відрізок AB в точці B_1, а гіпотенузу AC — у точці C_1. Знайдіть довжину відрізка B_1C_1, якщо $AB = 15$ см, $AB_1 = 6$ см, $AC = 25$ см.

325. У трикутнику ABC $AB = BC = 35$ см. Площина, перпендикулярна до медіани BD, ділить її на відрізки 24 см і 4 см, починаючи від вершини B. Знайдіть відстань між точками перетину даної площини зі сторонами AB і BC.

326. Площина α і пряма b, яка не належить α, перпендикулярні до прямої a. Доведіть, що $b \parallel \alpha$.

327. Пряма a і площина α перпендикулярні до прямої b. Доведіть, що коли пряма a і площина α мають спільну точку, то пряма a лежить у площині α.

328. Пряма MA перпендикулярна до площини паралелограма $ABCD$, $MD \perp CD$. Доведіть, що $ABCD$ — прямокутник.

329. Пряма MC перпендикулярна до площини паралелограма $ABCD$, $MA \perp BD$. Доведіть, що $ABCD$ — ромб.

Рівень В

330. Визначте, яку фігуру утворюють усі прямі, які проходять через точку A прямої a і перпендикулярні до даної прямої.

331. Пряма MA перпендикулярна до площини прямокутника $ABCD$. Знайдіть довжину відрізка MA, якщо $MB = b$, $MC = c$, $MD = d$.

332 (опорна). ***Геометричним місцем точок простору, рівновіддалених від кінців відрізка AB, є площина, яка перпендикулярна до цього відрізка і проходить через його середину.*** Доведіть.

333. Пряма BM перпендикулярна до площини трикутника ABC, точка D — середина сторони AC, $MD \perp AC$. Знайдіть кут ABC, якщо $\angle BAC = 70°$.

334. Пряма BM перпендикулярна до площини трикутника ABC, $MC \perp AC$. Знайдіть довжину відрізка MC, якщо $BM = 6$ см, $AB = 17$ см, $AC = 15$ см.

Повторення перед вивченням § 9

Теоретичний матеріал

- описане коло трикутника; — 7 клас, § 23
- описане коло многокутника; — 9 клас, § 18
- перпендикуляр і похила; — 8 клас, § 13
- паралельність прямої і площини. — 10 клас, § 4

Задачі

335. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами $5\sqrt{3}$ см і 2 см та кутом між ними 30°.

336. Із точки A до прямої a проведено похилі AB і AC. Знайдіть довжину відрізка BC, якщо $AB = 30$ см, $AC = 25$ см, а проєкції похилих відносяться як $7:18$.

§ 9 Перпендикуляр до площини

9.1. Властивості прямих, перпендикулярних до площини

Теорема
(про паралельні прямі, перпендикулярні до площини)

Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то друга пряма також перпендикулярна до цієї площини:

$$\left(l_1 \parallel l_2, l_1 \perp \alpha\right) \Rightarrow l_2 \perp \alpha.$$

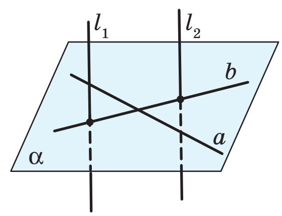


Рис. 143. До доведення теореми про паралельні прямі, перпендикулярні до площини

Доведення

☐ Проведемо в площині α прямі a і b, що перетинаються (рис. 143). Оскільки $l_1 \perp \alpha$, то пряма l_1 перпендикулярна до кожної з прямих a і b за означенням прямої, перпендикулярної до площини. Тоді пряма l_2, паралельна l_1, також перпендикулярна до прямих a і b. Отже, за ознакою перпендикулярності прямої і площини $l_2 \perp \alpha$. ■

Наслідок

Через будь-яку точку простору можна провести пряму, перпендикулярну до даної площини, і тільки одну.

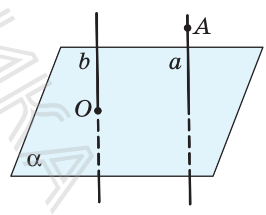


Рис. 144. До обґрунтування побудови прямої, перпендикулярної до даної площини

Справді, нехай дано точку A і площину α (рис. 144). Через довільну точку O площини α проведемо пряму b, перпендикулярну до α. Якщо побудована пряма не проходить через точку A, то проведемо через точку A пряму a, паралельну прямій b. За щойно доведеним $a \perp \alpha$. Єдиність шуканої прямої обґрунтуйте самостійно.

Теорема
(про прямі, перпендикулярні до однієї площини)

Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, є паралельними:

$$(a_1 \perp \alpha, a_2 \perp \alpha) \Rightarrow a_1 \parallel a_2.$$

Доведення

☐ Припустимо, що прямі a_1 і a_2 не паралельні. Тоді проведемо через деяку точку M прямої a_1 пряму a, паралельну a_2 (рис. 145). За попередньою теоремою $a \perp \alpha$. Нехай прямі a і a_1 перетинають площину α в точках A і A_1 відповідно. Тоді внаслідок означення прямої, перпендикулярної до площини, трикутник A_1MA має два прямі кути, що неможливо. Отже, $a_1 \parallel a_2$. ■

Застосування доведених теорем у задачах розглянемо в п. 9.3.

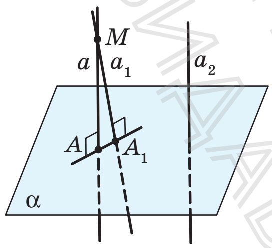


Рис. 145. До доведення теореми про прямі, перпендикулярні до однієї площини

9.2. Перпендикуляр і похила

У просторі поняття перпендикуляра до площини і пов'язаних з ним відрізків вводяться аналогічно відповідним поняттям на площині.

Означення

Перпендикуляром до даної площини, проведеним з точки A, яка не належить їй, називається відрізок прямої, перпендикулярної до даної площини, який сполучає точку A з точкою площини.

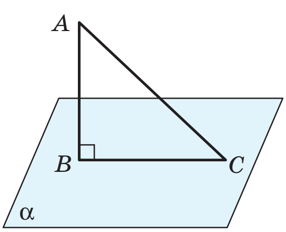


Рис. 146. Перпендикуляр до площини

На рис. 146 $AB \perp \alpha$, відрізок AB — перпендикуляр, проведений з точки A до площини α, точка B — ***основа перпендикуляра***.

Будь-який відрізок, що сполучає точку A з точкою площини α і не збігається з перпендикуляром, називається **похилою** *до площини α.* На рис. 146 відрізок AC — похила до площини α, точка *C* — ***основа похилої AC***. *Відрізок BC, який сполучає основи перпендикуляра і похилої, є* **проєкцією*** *похилої AC на площину* α.

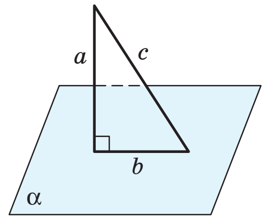
Сформулюємо ***властивості перпендикуляра, похилих і проєкцій***.

Нехай з однієї точки до площини проведено перпендикуляр і похилі. Тоді:

1) **будь-яка похила більша за перпендикуляр і більша за свою проєкцію на дану площину (рис. 147, *а*);**
2) **рівні похилі мають рівні проєкції, і навпаки: якщо проєкції двох похилих рівні, то рівні й самі похилі (рис. 147, *б*);**
3) **більша похила має більшу проєкцію, і навпаки: з двох похилих більша та, яка має більшу проєкцію (рис. 147, *в*).**

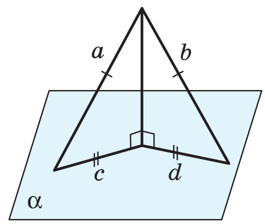
Усі ці властивості випливають із теореми Піфагора (обґрунтуйте їх самостійно).

Зазначимо, що, на відміну від площини, де з даної точки до прямої можна провести лише дві рівні похилі (рис. 148, *а*), у просторі з точки до площини можна провести безліч рівних похилих (рис. 148, *б*). Неважко довести, що основи цих похилих утворюють коло. Саме із цією геометричною ситуацією пов'язане твердження, що доводиться в наступній опорній задачі.



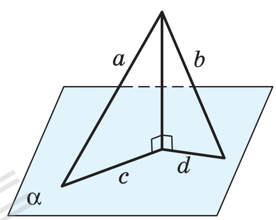
$c > a$ і $c > b$

а



Якщо $a = b$, то $c = d$, і навпаки: якщо $c = d$, то $a = b$

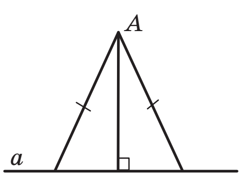
б



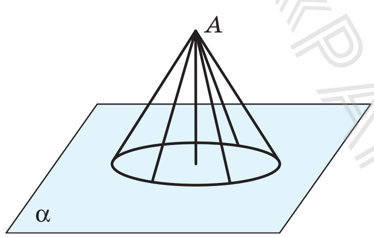
Якщо $a > b$, то $c > d$, і навпаки: якщо $c > d$, то $a > b$

в

Рис. 147. Властивості перпендикуляра і похилих



а



б

Рис. 148. Рівні похилі на площині й у просторі

* Тут і далі йдеться про прямокутну (ортогональну) проєкцію, тобто проєкцію на площину, перпендикулярну до напряму проєкціювання. Докладно цей спосіб проєкціювання розглядатиметься в § 13.

Опорна задача
(про точку, рівновіддалену від усіх вершин многокутника)

Якщо точка поза площиною многокутника рівновіддалена від усіх його вершин, то основою перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини многокутника, є центр кола, описаного навколо многокутника. Доведіть.

Розв'язання

Проведемо доведення для трикутника (для інших многокутників доведення аналогічне).

Нехай точка P не лежить у площині трикутника ABC, $PA = PB = PC$ (рис. 149). Проведемо з точки P перпендикуляр PO до площини ABC. Відрізки OA, OB і OC — проєкції похилих PA, PB і PC відповідно на площину ABC. Оскільки рівні похилі мають рівні проєкції, $OA = OB = OC$. Отже, точка O площини ABC рівновіддалена від вершин трикутника ABC, тобто є центром кола, описаного навколо трикутника, що й треба було довести.

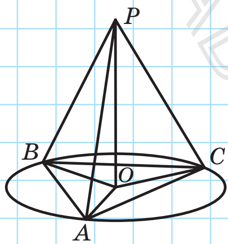


Рис. 149. До доведення властивості точки, рівновіддаленої від вершин трикутника


Рис. 150. Антенна щогла

З доведеного факту, зокрема, випливає, що ***коли в просторі існує точка, рівновіддалена від усіх вершин многокутника, то навколо даного многокутника можна описати коло.***

Щойно доведену властивість важливо знати для правильної побудови рисунків у багатьох стереометричних задачах. На практиці вона використовується, наприклад, при встановленні щогли для антени стільникового зв'язку (рис. 150).

9.3. Відстані в просторі

Як відомо з курсу планіметрії, відстанню від точки до прямої є довжина перпендикуляра, проведеного з даної точки на дану пряму, а відстанню між двома паралельними прямими — довжина їхнього спільного перпендикуляра. Схожий підхід до визначення відстаней застосовується і в стереометрії.

Означення

Відстанню від точки до площини, яка не містить цю точку, називається довжина перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної площини.

Відстанню від точки до площини називають також і сам цей перпендикуляр. Під час розв'язування задач побудову відстаней від точок до прямих і площин необхідно обґрунтовувати.

Задача

Точки A і B лежать по один бік від площини α і віддалені від неї на 6 см і 10 см відповідно (рис. 151). Знайдіть відстань від середини відрізка AB до площини α.

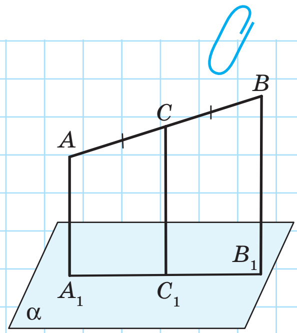


Рис. 151

Розв'язання

Проведемо з даних точок перпендикуляри до даної площини: $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$. Тоді AA_1 і BB_1 — відстані від точок A і B до площини α. За умовою $AA_1 = 6$ см, $BB_1 = 10$ см.

Нехай точка C — середина відрізка AB. Проведемо перпендикуляр CC_1 до площини α. Тоді CC_1 — шукана відстань від середини відрізка AB до площини α.

Оскільки прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перпендикулярні до площини α, то за теоремою про прямі, перпендикулярні до однієї площини, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$. Ці паралельні прямі перетинають пряму AB, отже, вони лежать в одній площині, яка перетинає площину α по прямій A_1B_1. Таким чином, $C_1 \in A_1B_1$. Оскільки $AC = CB$, то за теоремою Фалеса $A_1C_1 = C_1B_1$.

За доведеним чотирикутник AA_1B_1B — трапеція; тоді CC_1 — середня лінія цієї трапеції. За теоремою про середню лінію трапеції $CC_1 = \dfrac{AA_1 + BB_1}{2}$, отже,

$$CC_1 = \frac{6 + 10}{2} = 8 \text{ (см).}$$

Відповідь: 8 см.

Звернемо увагу на те, що основну частину розв'язання цієї «розрахункової» (на перший погляд) задачі складають доведення й обґрунтування.

Означення

Відстанню від прямої до паралельної їй площини називається відстань від будь-якої точки даної прямої до даної площини.

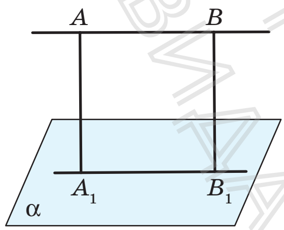


Рис. 152. До обґрунтування коректності означення відстані від прямої до паралельної їй площини

Для обґрунтування коректності цього означення необхідно показати, що коли пряма паралельна площині, то всі її точки рівновіддалені від даної площини. Справді, нехай пряма a паралельна площині α, AA_1 і BB_1 — перпендикуляри, проведені з двох довільних точок прямої a до площини α (рис. 152). Оскільки $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$, то $AA_1 \parallel BB_1$. Площина, яка проходить через ці паралельні прямі, перетинає площину α по прямій A_1B_1, яка за властивістю прямої, паралельної площині, паралельна прямій AB. Таким чином, чотирикутник AA_1B_1B за означенням є паралелограмом, звідки $AA_1 = BB_1$. Отже, всі точки прямої a рівновіддалені від площини α.

Означення

Відстанню між двома паралельними площинами називається відстань від будь-якої точки однієї площини до другої площини.

Коректність цього означення обґрунтуйте самостійно.

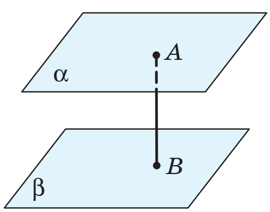


Рис. 153. Відстань між паралельними площинами

На рис. 153 відрізок AB — відстань між паралельними площинами α і β. Оскільки $AB \perp \alpha$ і $AB \perp \beta$, то можна сказати, що ***відстанню між паралельними площинами є довжина їхнього спільного перпендикуляра***.

Ще одну відстань у просторі — відстань між мимобіжними прямими — буде розглянуто в п. 13.3.

Узагалі рівновіддаленість точок однієї з паралельних прямих (площин) від іншої є властивістю, яка має широке практичне застосування, зокрема в будівництві: дах або міжповерхові перекриття будівлі часто спираються на вертикальні колони однакової висоти (рис. 154).

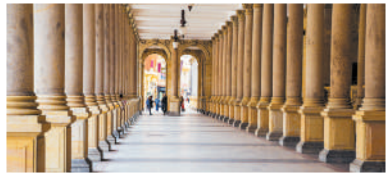


Рис. 154. Колонада у м. Карлові Вари (Чехія)

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

337•. Сторона AB паралелограма $ABCD$ перпендикулярна до площини α. Як розміщена пряма CD відносно площини α? Відповідь обґрунтуйте.

338•. Сторони AB і CD чотирикутника $ABCD$ перпендикулярні до площини α. Визначте вид даного чотирикутника, якщо сторони AD і BC не рівні між собою.

339. Перекладіть англійською (чи іншою іноземною мовою) основні факти § 9.

340. Точка B лежить у площині β, відрізки AB і CB — перпендикуляри до площини β.

а) Яким є взаємне розміщення прямої AC і площини β?

б) Чи лежать точки A, B і C на одній прямій? Яким може бути їх взаємне розміщення, якщо $AB > CB$?

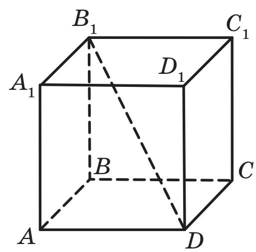


Рис. 155

341. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 155). Назвіть проєкцію діагоналі B_1D на площину:

а) ABC;

б) ABB_1;

в) A_1AD.

342. Відрізок AB впирається кінцями у дві паралельні площини (рис. 156). Чи рівні проєкції відрізка AB на дані площини? Відповідь обґрунтуйте.

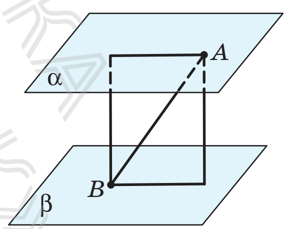


Рис. 156

343. З точки A до площини проведено перпендикуляр AB і рівні похилі AC_1 і AC_2. Чи обов'язково:

а) $AC_1 > AB$;

б) $BC_1 > AB$;

в) точки B, C_1 і C_2 лежать на одній прямій?

344. Знайдіть в інтернеті інформацію про те, яка відстань між мультимедійним проєктором і екраном є оптимальною. У разі встановлення такого проєктора у вашому класі виміряйте цю відстань та порівняйте її з оптимальною. Зробіть презентацію за темою «Оптимальна відстань від проєктора до екрана» та покажіть її в класі.

Моделюємо

345•. За допомогою моделювання визначте, яким може бути взаємне розміщення прямої a і площини α, якщо площина α перпендикулярна до прямої b, а прямі a і b мимобіжні.

346•. Виготовте модель для дослідження геометричної ситуації «Точка P лежить поза площиною квадрата $ABCD$ і рівновіддалена від його вершин». Змоделюйте перпендикуляр PO до площини квадрата і визначте, чи лежать в одній площині прямі PA, PO і PC.

Розв'язуємо задачі

Рівень А

347. З точки A до площини α проведено перпендикуляр AB і похилу AC. Знайдіть:

а) AC, якщо $AB = BC = 2\sqrt{2}$ см;

б) AB і AC, якщо $BC = 12$ см, $\angle BAC = 30°$;

в) AB і BC, якщо $AB : BC = 3 : 4$, $AC = 15$ см.

348. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу, довжина якої дорівнює 8 см. Знайдіть:

а) довжину перпендикуляра, якщо кут між перпендикуляром і похилою дорівнює 45°;

б) довжину проєкції похилої, якщо вона утворює з похилою кут 60°.

349. Площа рівностороннього трикутника дорівнює $27\sqrt{3}$ см². Знайдіть відстань від площини трикутника до точки, віддаленої від кожної з його вершин на 10 см.

350. Точка, віддалена від усіх вершин правильного трикутника на 5 см, розміщена на відстані 4 см від площини трикутника. Знайдіть периметр даного трикутника.

351. Сторони прямокутника дорівнюють 12 см і 16 см. Точка простору віддалена від усіх вершин прямокутника на 26 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини прямокутника.

352. Точка простору віддалена від площини квадрата на 12 см і рівновіддалена від усіх його вершин. Знайдіть відстані від даної точки до вершин квадрата, якщо його площа дорівнює 50 см^2.

353. Точки A і B лежать по один бік від площини α. Доведіть, що коли дані точки рівновіддалені від площини α, то $AB \parallel \alpha$.

354. Сторона AD паралелограма $ABCD$ лежить у площині α, а сторона BC віддалена від цієї площини на відстань d. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей паралелограма до площини α.

355. Один із кінців відрізка лежить у площині α. Знайдіть відстань від другого кінця відрізка до даної площини, якщо середина відрізка віддалена від неї на 4 см.

356. Відрізки завдовжки 41 см і 50 см упираються кінцями у дві паралельні площини. Знайдіть проєкцію меншого відрізка на одну з даних площин, якщо проєкція більшого відрізка на цю площину дорівнює 30 см.

357. Два відрізки впираються кінцями у дві паралельні площини. Знайдіть відстань між даними площинами, якщо довжини відрізків відносяться як $13:15$, а проєкції даних відрізків на одну з площин дорівнюють 5 см і 9 см.

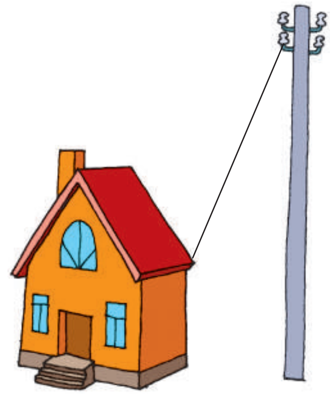
Рівень Б

358. Дано прямі a, b, c, d і площину α, причому $a \perp \alpha$, $b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$, $d \perp b$, $d \perp c$. Серед даних прямих назвіть паралельні.

359. Товщина кожного тому чотиритомника (рис. 157) становить 4 см, а без обкладинки — 3,5 см. Хробак, рухаючись перпендикулярно до обкладинок, прогризає відстань від першої сторінки першого тому до останньої сторінки четвертого тому. Яку відстань має прогризти хробак?

Рис. 157

360. Від верхнього кінця вертикального стовпа заввишки 13 м до даху будинку заввишки 6 м необхідно протягнути провід. Відстань між стовпом і будинком становить 24 м. Скільки метрів проводу знадобиться, якщо вважати, що він не провисає?



361. Відрізок AB перетинає площину α в точці C. Знайдіть його довжину, якщо проєкції відрізків AC і CB на площину α дорівнюють 4 см і 8 см відповідно, а відстань від точки B до площини α на 3 см більша, ніж від точки A.

362. Доведіть, що відстань від середини відрізка до площини, яка перетинає його, дорівнює модулю піврізниці відстаней від кінців відрізка до даної площини.

363. З точки до площини проведено дві рівні похилі завдовжки $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть відстань від даної точки до площини, якщо кут між похилими дорівнює 60°, а їхні проєкції взаємно перпендикулярні.

364. З точки, віддаленої від площини на 12 см, проведено дві взаємно перпендикулярні похилі, проєкції яких дорівнюють 9 см і 16 см. Знайдіть відстань між основами похилих.

365. З точки до площини проведено дві похилі. Довжина однієї з них дорівнює 20 см, а довжина її проєкції 16 см. Кут між проєкціями похилих становить 120°, а основи похилих сполучені відрізком завдовжки 19 см. Знайдіть довжину другої похилої.

366. З точки, віддаленої від площини на 24 см, проведено дві похилі завдовжки 26 см і 40 см. Знайдіть кут між проєкціями даних похилих, якщо відстань між їхніми основами дорівнює 38 см.

367 (опорна). ***Якщо через центр кола, описаного навколо многокутника, проведено пряму, перпендикулярну до площини многокутника, то точки даної прямої рівновіддалені від усіх вершин многокутника.*** Доведіть.

368. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Точка простору віддалена від кожної вершини трикутника на 13 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини трикутника.

369. Точка, рівновіддалена від усіх вершин рівнобедреного трикутника, розміщена на відстані 60 см від площини трикутника. Знайдіть відстані від даної точки до вершин трикутника, якщо його основа дорівнює 48 см, а бічна сторона 40 см.

370. Периметр прямокутника дорівнює 28 см, а площа 48 см^2. Точка простору віддалена від площини прямокутника на 12 см. Знайдіть відстані від даної точки до вершин прямокутника, якщо ці відстані рівні.

371. Точка простору віддалена від площини прямокутника на 8 см і від кожної з його вершин на 17 см. Знайдіть площу прямокутника, якщо його сторони відносяться як $3:4$.

372. Площина, проведена через вершину прямого кута трикутника, паралельна його гіпотенузі. Знайдіть довжину гіпотенузи трикутника, якщо його катети відносяться як $3:4$, а їхні проєкції на дану площину дорівнюють 9 см і 16 см.

373. Вершини трикутника ABC рівновіддалені від площини α і лежать по один бік від неї. Доведіть, що $(ABC)\parallel\alpha$.

374. Два відрізки, сума яких дорівнює 28 см, упираються кінцями у дві паралельні площини. Знайдіть відстань між даними площинами, якщо проєкції відрізків на кожну з них дорівнюють 5 см і 9 см відповідно.

Рівень В

375. З точки до площини проведено дві рівні взаємно перпендикулярні похилі. Знайдіть кут, який утворює кожна з похилих із перпендикуляром до площини, якщо кут між проєкціями похилих дорівнює 120°.

376. З точки M до площини проведено перпендикуляр MA та похилі MB і MC, причому $MA^2 = AB \cdot AC$. Доведіть, що $\angle MBA = \angle AMC$.

377. Більша основа, бічна сторона й діагональ рівнобічної трапеції дорівнюють 10 см, 6 см і 8 см відповідно. Точка простору віддалена від кожної з вершин трапеції на 13 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини трапеції.

378. Сторона трикутника дорівнює $6\sqrt{3}$ см, а протилежний до неї кут 120°. Точка, віддалена від площини трикутника на 8 см, рівновіддалена від усіх його вершин. Знайдіть відстані від даної точки до вершин трикутника.

379. Точка простору віддалена від усіх вершин квадрата на 40 см. Інша точка віддалена від даної точки і від усіх вершин даного квадрата на 25 см. Знайдіть площу квадрата.

380. Точку простору сполучено рівними відрізками завдовжки 25 см з усіма вершинами прямокутного трикутника, катет якого дорівнює 18 см. Перпендикуляр, проведений із середини гіпотенузи до одного з цих відрізків, дорівнює 12 см. Знайдіть площу даного трикутника. Скільки розв'язків має задача?

381. Вершини трикутника віддалені від площини α на 4 см, 6 см і 8 см. Знайдіть відстань від точки перетину медіан трикутника до площини α.

382. Три послідовні вершини ромба віддалені від площини, яка не перетинає сторін ромба, на відстані d, $d+1$ і $d+2$. Доведіть, що одна з діагоналей ромба паралельна даній площині.

383. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від двох паралельних:

а) прямих; б) площин.

384. Точка A не лежить у площині α. Знайдіть геометричне місце середин відрізків, одним із кінців яких є точка A, а другим — точка площини α.

385. Знайдіть геометричне місце середин усіх відрізків, які впираються кінцями у дві паралельні площини.

Повторення перед вивченням § 10

Теоретичний матеріал

- вписане коло трикутника; 7 клас, § 23
- вписане коло многокутника. 8 клас, § 8; 9 клас, § 18

Задачі

386. Знайдіть радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник з основою 48 см і бічною стороною 40 см.

387. Площа рівнобічної трапеції дорівнює 156 см^2, а бічна сторона 13 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в трапецію.

§ 10 Теорема про три перпендикуляри та її застосування

10.1. Теорема про три перпендикуляри

Одним із важливих етапів розв’язування стереометричних задач є побудова й обґрунтування відстаней від точок до прямих і площин. Теоретичним підґрунтям для багатьох таких побудов є теорема про три перпендикуляри — одна з центральних теорем стереометрії.

Теорема (про три перпендикуляри)

Пряма, проведена на площині перпендикулярно до проєкції похилої на дану площину, перпендикулярна до цієї похилої, і навпаки: якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до її проєкції на дану площину.

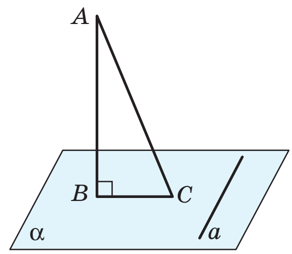


Рис. 158. До доведення теореми про три перпендикуляри

Доведення

□ Нехай $AB \perp \alpha$, BC — проєкція похилої AC на площину α, пряма a лежить у площині α (рис. 158). Доведемо перше твердження теореми. Оскільки $AB \perp \alpha$ і $a \subset \alpha$, то $a \perp AB$. Крім того, $a \perp BC$ за умовою. За ознакою перпендикулярності прямої і площини пряма a перпендикулярна до площини ABC, звідки $a \perp AC$, що й треба було довести.

Для оберненого твердження маємо: $a \perp AB$ (оскільки $AB \perp \alpha$ і $a \subset \alpha$) і $a \perp AC$ (за умовою), тоді знов-таки за ознакою перпендикулярності прямої і площини пряма a перпендикулярна до площини ABC, отже, $a \perp BC$, що й треба було довести. Теорему доведено повністю. ■

У символьному вигляді доведену теорему можна записати так:

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp \alpha, \\ a \perp BC \end{array}\right. \Leftrightarrow a \perp AC.$$

Саме цим трьом перпендикулярам дана теорема завдячує своєю назвою.

Зазначимо також, що в багатьох випадках як пряму a розглядають пряму площини α, що проходить через основу похилої.

Наведемо приклад застосування теореми про три перпендикуляри для побудови відстаней у просторі.

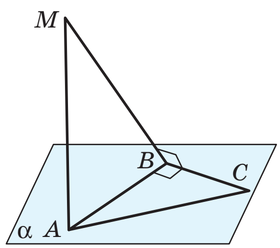


Рис. 159. Побудова відстані від точки до прямої за допомогою теореми про три перпендикуляри

Нехай MA — перпендикуляр до площини прямокутного трикутника ABC $(\angle B = 90^\circ)$ і необхідно побудувати відстань від точки M до прямої BC (рис. 159). Зрозуміло, що для цього треба провести перпендикуляр із точки M до прямої BC. Але яка саме точка цієї прямої буде основою даного перпендикуляра? Оскільки шуканий відрізок є похилою до площини ABC, перпендикулярною до прямої BC, то за доведеним проєкція цієї похилої має проходити через точку A перпендикулярно до BC. Але такий відрізок єдиний, і це відрізок AB. Тому за теоремою про три перпендикуляри маємо $MA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$, отже, $MB \perp BC$. Таким чином, шуканою відстанню є відрізок MB.

Узагалі в стереометричних задачах іноді застосовують такий підхід: перш ніж проводити перпендикуляр до прямої або площини, обґрунтовують розміщення основи цього перпендикуляра і тільки потім будують шуканий відрізок.

Задача

До площини рівнобедреного трикутника ABC проведено перпендикуляр MB (рис. 160) завдовжки 9 см. Знайдіть відстань від точки M до прямої AC, якщо $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см.

Розв'язання

Проведемо $MD \perp AC$; MD — відстань від точки M до прямої AC. Оскільки $MB \perp (ABC)$, то відрізок BD — проєкція похилої MD на площину ABC. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $BD \perp AC$, отже, BD — висота рівнобедреного трикутника ABC, проведена до основи, яка також є його медіаною, тобто $AD = DC = 5$ см.

Із трикутника ABD ($\angle D = 90°$, $AB = 13$ см, $AD = 5$ см) за теоремою Піфагора $BD = 12$ см. Із трикутника MBD ($\angle B = 90°$, $MB = 9$ см, $BD = 12$ см) за теоремою Піфагора $MD = 15$ см.

Відповідь: 15 см.

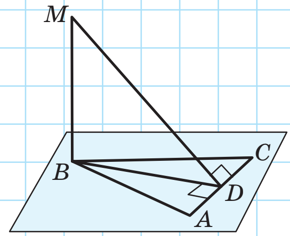


Рис. 160

10.2. Властивість точки, рівновіддаленої від усіх сторін многокутника*

Опорна задача

(про точку, рівновіддалену від усіх сторін многокутника)

Якщо точка поза площиною многокутника рівновіддалена від усіх його сторін, то основою перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини многокутника, є центр кола, вписаного у многокутник. Доведіть.

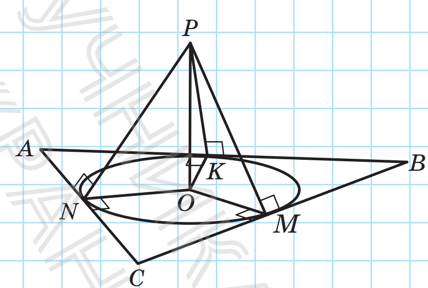


Рис. 161. До доведення властивості точки, рівновіддаленої від сторін многокутника

Розв'язання

Проведемо доведення для трикутника (для інших многокутників доведення аналогічне).

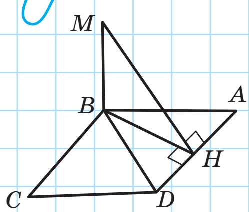
* Тут і далі, кажучи про точку, рівновіддалену від сторін многокутника (кута), матимемо на увазі, що основи перпендикулярів, проведених з даної точки до прямих, які містять сторони многокутника (кута), належать цим сторонам, а самі перпендикуляри рівні між собою.

Нехай точка P не лежить у площині трикутника ABC (рис. 161). Проведемо перпендикуляри PK, PM і PN до сторін AB, BC і AC відповідно; PK, PM і PN — відстані від точки P до сторін трикутника ABC. За умовою $PK = PM = PN$. Опустимо з точки P перпендикуляр PO до площини ABC. Відрізки OK, OM і ON — проєкції похилих PK, PM і PN на площину ABC. Оскільки за побудовою $PK \perp AB$, $PM \perp BC$, $PN \perp AC$, то за теоремою про три перпендикуляри $OK \perp AB$, $OM \perp BC$, $ON \perp AC$. Крім того, $OK = OM = ON$ як проєкції рівних похилих. Отже, точка O площини ABC рівновіддалена від сторін трикутника ABC, тобто є центром кола, вписаного в трикутник, що й треба було довести.

Із доведеного факту, зокрема, випливає, що ***коли в просторі існує точка, рівновіддалена від усіх сторін многокутника, то в цей многокутник можна вписати коло.***

10.3. Зведення стереометричних задач до планіметричних

Розв'язування багатьох просторових задач, особливо задач на обчислення, зводиться до розгляду плоских фігур, властивості яких відомі з курсу планіметрії. При цьому теореми стереометрії відіграють роль математичних інструментів, за допомогою яких стереометрична задача «розбирається» на планіметричні деталі. Для зручності роботи з цими деталями корисно застосовувати додаткові («винесені») креслення і поділяти розв'язання задачі на частини.



а

Рис. 162

Задача

З вершини B ромба $ABCD$, площа якого дорівнює $96\sqrt{3}$ см^2, проведено перпендикуляр MB до площини ромба (рис. 162, *а*). Знайдіть довжину перпендикуляра, якщо точка M віддалена від прямої AD на 15 см, $\angle B = 120°$.

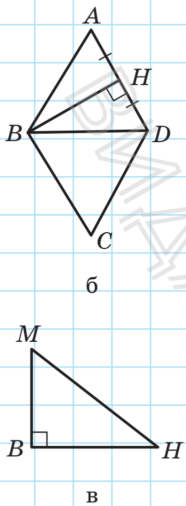


Рис. 162

Розв'язання

1. Проведемо $MH \perp AD$; MH — відстань від точки M до сторони AD. За умовою задачі $MH = 15$ см.

2. Відрізок BH — проєкція похилої MH на площину ABC. Оскільки $MB \perp (ABC)$, $MH \perp AD$, то за теоремою про три перпендикуляри $BH \perp AD$. Отже, BH — висота ромба $ABCD$.

3. Розглянемо ромб $ABCD$ (рис. 162, б). У ньому $S_{ABCD} = AD^2 \sin B$, тобто $AD = \sqrt{\frac{S}{\sin B}}$. Отже, $AD = \sqrt{\frac{96\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}} = 8\sqrt{3}$ (см).

4. Оскільки $S_{ABCD} = AD \cdot BH$, то $BH = \frac{S_{ABCD}}{AD}$, тобто $BH = \frac{96\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} = 12$ (см).

5. Оскільки $MB \perp (ABC)$, то $MB \perp BH$. Тоді з трикутника MBH (рис. 162, в), де $\angle B = 90^\circ$, $MH = 15$ см, $BH = 12$ см, за теоремою Піфагора $MB = 9$ см.

Відповідь: 9 см.

Отже, на першому етапі розв'язання було обґрунтовано геометричний зміст даних задачі, на другому — за допомогою теореми про три перпендикуляри з'ясовано розміщення відрізка BH у ромбі. Три останні етапи розв'язання являють собою планіметричні фрагменти, на які «розпалася» дана стереометрична задача.

Зазначимо, що перехід від розгляду одного плоского многокутника до розгляду іншого зазвичай обумовлений наявністю у цих многокутників спільних елементів, а теореми стереометрії застосовуються для обґрунтування геометричного змісту даних задачі й взаємного розміщення елементів фігур.

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

388°. Чи правильно, що будь-яка пряма, перпендикулярна до похилої, перпендикулярна до її проєкції на дану площину? Якщо ні, скоригуйте дане твердження так, щоб воно справджувалося.

389. Викладіть основні факти § 10 англійською (чи будь-якою іншою іноземною мовою).

390•. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 163). Укажіть і обґрунтуйте відстань:

а) від точки B_1 до прямої CD;
б) від точки C до прямої A_1D_1;
в) від точки D_1 до прямої AC;
г) від точки A_1 до прямої BD.

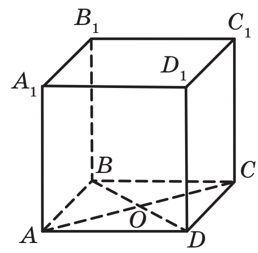
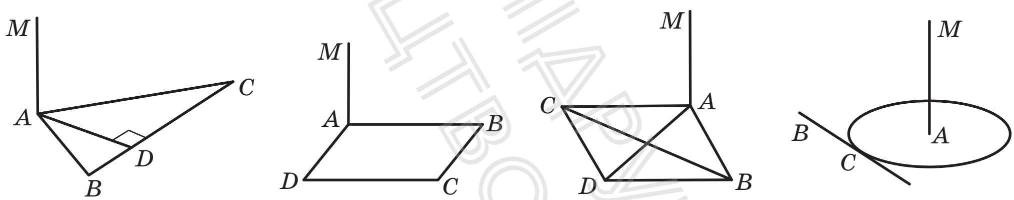


Рис. 163

391. На рис. 164, *а–г* $MA \perp (ABC)$. За даними рисунка обґрунтуйте відстань від точки M до прямої BC.

392. На рис. 165, *а*, *б* $MA \perp (ABC)$. За даними рисунка обґрунтуйте відстань від точки A до прямої BC.

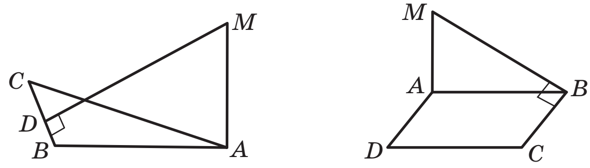
393. З точки M до площини α проведено перпендикуляр MA та похилі MB і MC (рис. 166). Чи можуть одночасно справджуватись умови $MB \perp BC$ і $AC \perp BC$? Відповідь обґрунтуйте.



$ABCD$ — прямокутник; $ABDC$ — ромб; BC — дотична до кола з центром A

а б в г

Рис. 164



а б

Рис. 165

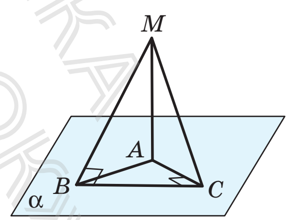


Рис. 166

Моделюємо

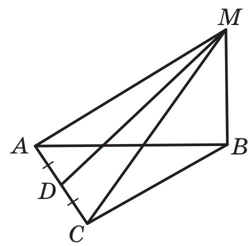


Рис. 167

394°. Змоделюйте контрприклади для спростування тверджень:

а) будь-яка пряма, перпендикулярна до похилої, лежить у площині, до якої проведена дана похила;

б) будь-яка пряма, перпендикулярна до проєкції даної похилої на дану площину, перпендикулярна і до самої похилої.

395°. На рис. 167 $AB = BC$, $AD = DC$, $MB \perp (ABC)$. За даним рисунком виготовте модель. Користуючись цією моделлю, визначте вид трикутника AMC.

Розв'язуємо задачі

Рівень А

396. У трикутнику ABC $\angle B = 90°$. Відрізок MC — перпендикуляр до площини трикутника. Знайдіть відстань від точки M до прямої AB, якщо: а) $AC = 17$ см, $AB = 15$ см, $MC = 6$ см;

б) $AC = 5\sqrt{2}$ см, $\angle A = 45°$, $\angle MBC = 60°$.

397. На рис. 167 $MB \perp (ABC)$, $MD \perp AC$, $AD = DC$. За даним рисунком доведіть теорему про три перпендикуляри для випадку, коли пряма AC, проведена в площині ABC, проходить через основу похилої MD.

398. За даними рис. 165, *б* доведіть, що коли $ABCD$ — паралелограм, то він є прямокутником.

399. Точка простору віддалена від кожної сторони квадрата на 13 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини квадрата, якщо його периметр дорівнює 40 см.

400. Точка, віддалена від кожної сторони квадрата на 10 см, розміщена на відстані 8 см від площини квадрата. Знайдіть площу квадрата.

401. Відрізок MA — перпендикуляр до площини трикутника ABC. Відрізок MD — відстань від точки M до сторони BC, причому точка C лежить на відрізку DB. Доведіть, що трикутник ABC тупокутний, і назвіть його тупий кут.

402. Точка D — середина сторони AB трикутника ABC, MD — перпендикуляр до площини трикутника. Відрізок ME — перпендикуляр, проведений із точки M до сторони BC, $DE \parallel AC$. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний, і назвіть його прямий кут.

Рівень Б

403. Пряма a перетинає площину α в точці A і не перпендикулярна до цієї площини. Доведіть, що в площині α через точку A можна провести пряму, перпендикулярну до a, і тільки одну.

404. Сторони трикутника дорівнюють 6 см, 25 см і 29 см. З вершини найменшого кута трикутника проведено перпендикуляр до його площини завдовжки 15 см. Знайдіть відстань від вершини цього перпендикуляра до меншої сторони трикутника.

405. У трикутнику ABC $AB = BC$, $\angle B = 120°$. Відрізок MA завдовжки 8 см — перпендикуляр до площини трикутника. Знайдіть площу трикутника, якщо відстань від точки M до сторони BC становить 10 см.

406. У трикутнику ABC $\angle B = 90°$, $BC = 15$ см, $AC = 25$ см. Через середину катета AB проведено перпендикуляр до площини трикутника завдовжки 8 см. Знайдіть відстані від вершини цього перпендикуляра до сторін AC і BC.

407. Із середини сторони правильного трикутника до площини трикутника проведено перпендикуляр. Знайдіть його довжину, якщо площа трикутника дорівнює $36\sqrt{3}$ см^2, а другий кінець перпендикуляра віддалений від двох інших сторін на 6 см.

408 (опорна). ***Якщо через центр кола, вписаного в многокутник, проведено пряму, перпендикулярну до площини многокутника, то точки даної прямої рівновіддалені від усіх сторін многокутника.*** Доведіть.

409. Основа і бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнюють відповідно 48 см і 40 см. Точка простору віддалена від кожної сторони трикутника на 20 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини трикутника.

410. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 12 см і 16 см. Точка, рівновіддалена від усіх сторін трикутника, розміщена на відстані 3 см від площини трикутника. Знайдіть відстань від даної точки до сторін трикутника.

411. Точка, віддалена від кожної сторони ромба на 13 см, розміщена на відстані 12 см від площини ромба. Знайдіть площу ромба, якщо його сторона дорівнює 20 см.

412. Діагоналі ромба дорівнюють 30 см і 40 см. Знайдіть відстань від площини ромба до точки, віддаленої від кожної його сторони на 20 см.

Рівень В

413 (опорна). ***Якщо точка поза площиною кута рівновіддалена від його сторін, то основа перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини кута, належить його бісектрисі.*** Доведіть.

414. З точки до площини трикутника зі сторонами 15 см, 21 см і 24 см проведено перпендикуляр, основа якого належить більшій стороні трикутника. Знайдіть довжину цього перпендикуляра, якщо дана точка віддалена від кожної з двох інших сторін трикутника на 10 см.

415. Точка простору віддалена на 15 см від катетів прямокутного трикутника, довжини яких становлять 21 см і 28 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини трикутника, якщо основа цього перпендикуляра належить гіпотенузі.

416. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 4 см і 16 см. Точка, рівновіддалена від усіх сторін трапеції, віддалена від площини трапеції на 3 см. Знайдіть відстані від даної точки до сторін трапеції.

417. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 10 см і 15 см. Знайдіть відстань від площини трапеції до точки, віддаленої від кожної сторони трапеції на 10 см.

Повторення перед вивченням § 11

Теоретичний матеріал

- розв'язування прямокутних трикутників; 8 клас, § 21
- кути між прямими в просторі; 10 клас, § 8
- паралельність прямих у просторі. 10 клас, § 3

Задачі

418. У трикутнику ABC $\angle B = 90°$, $\angle A = \alpha$, $AC = c$. Знайдіть висоту трикутника, проведену до гіпотенузи AC.

419. До площини α проведено перпендикуляр AB і похилу AC. У площині α через точку C проходить пряма CD. Який із кутів ACB і ACD є меншим? Висловте припущення.

§ 11 Кути між прямими і площинами

11.1. Кут між прямою і площиною

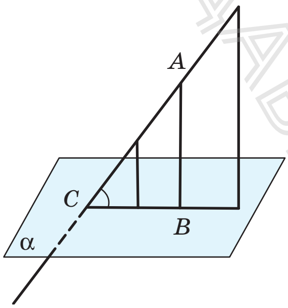


Рис. 168. До означення кута між прямою і площиною

Нехай пряма AC перетинає площину α в точці C і не перпендикулярна до цієї площини, $AB \perp \alpha$ (рис. 168). Оскільки всі перпендикуляри, проведені з точок прямої AC до площини α, паралельні, вони лежать в одній площині, а їхні основи — на одній прямій BC, яка є проєкцією прямої AC на площину α.

Скористаємось поняттям проєкції прямої на площину для визначення кута між прямою і площиною.

Означення

Кутом між прямою і площиною, яка перетинає дану пряму і не перпендикулярна до неї, називається кут між прямою і її проєкцією на дану площину.

На рис. 168 кут ACB — кут між прямою AC і площиною α. Оскільки градусною мірою кута між двома прямими є градусна міра найменшого з кутів, які утворюються в результаті їх перетину, кут між прямою і площиною не більший за 90°.

У випадку, коли дана пряма перпендикулярна до площини, кут між прямою і площиною вважають таким, що дорівнює 90°.

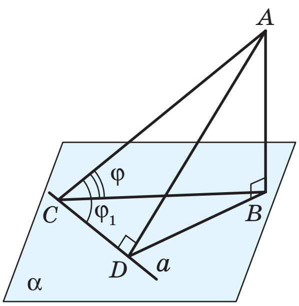


Рис. 169. До обґрунтування властивості кута між прямою і площиною

Покажемо, що кут між прямою і площиною є найменшим із кутів, які дана пряма утворює з прямими даної площини. Для цього в площині α проведемо через точку C пряму a, відмінну від CB (рис. 169). Нехай $AD \perp a$, прямі BC

і a утворюють з прямою AC кути φ і φ_1 відповідно. Із прямокутних трикутників ACB і ACD знаходимо: $\sin\varphi = \frac{AB}{AC}$, $\sin\varphi_1 = \frac{AD}{AC}$. Оскільки $AB < AD$, то $\sin\varphi < \sin\varphi_1$. Для гострих кутів φ і φ_1 з цього випливає, що $\varphi < \varphi_1$. А це й треба було показати.

Еклімeтр — від грецького «екліо» — відхиляю і «метріо» — вимірюю — вимірювач відхилу.

Для вимірювання кутів між прямою і площиною на місцевості використовують екліметр (рис. 170). Він являє собою металеву коробку із закріпленою на ній трубкою для візування. Усередині коробки навколо осі під дією сили тяжіння рухається диск із поділками, які показують значення шуканого кута.

Рис. 170. Екліметр

Для обґрунтування кута між прямою (похилою) і площиною необхідно вказати:

1) перпендикуляр, проведений із точки даної прямої (похилої) до даної площини;
2) проєкцію даної прямої (похилої) на дану площину.

Задача

Під кутом φ до площини α проведено похилу. Знайдіть градусну міру кута φ, якщо проєкція даної похилої вдвічі менша від похилої.

Розв'язання

Нехай AC — похила до площини α. Проведемо $AB \perp \alpha$ (рис. 171). Тоді BC — проєкція похилої AC на площину α. Отже, кут ACB — кут між похилою AC і площиною α; за умовою задачі $\angle ACB = \varphi$. Оскільки за умовою $AC = 2BC$, то в прямокутному трикутнику ABC $(\angle B = 90^\circ)$ кут A дорівнює 30°, звідки $\varphi = 60^\circ$.

Відповідь: 60°.

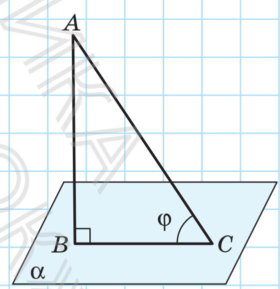


Рис. 171

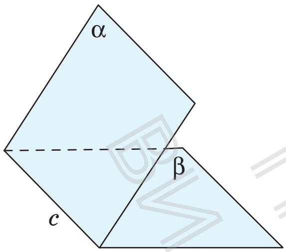


Рис. 172. Двогранний кут

Рис. 173. Моделі двогранних кутів

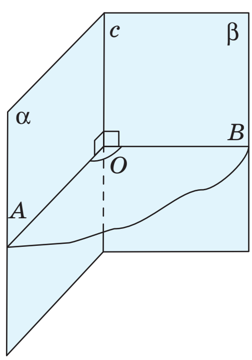


Рис. 174. Лінійний кут двогранного кута

11.2. Двогранний кут. Кут між площинами

У планіметрії кутом називається фігура, що складається з двох променів зі спільним початком. Введемо поняття кута між площинами в просторі. Перегнемо по прямій аркуш паперу. Ми отримали модель просторової фігури, яку називають двогранним кутом.

Означення

Двогранним кутом називається фігура, яка складається з двох півплощин (граней двогранного кута) зі спільною граничною прямою (ребром двогранного кута).

На рис. 172 зображено двогранний кут із гранями α і β та ребром c.

Наочне уявлення про двогранні кути дають напіврозкрита книжка або папка, двосхилий дах будинку, стіни кімнати тощо (рис. 173).

Вимірювання двогранних кутів зводиться до вимірювання кутів між променями. Здійснити його можна завдяки додатковим побудовам.

Через точку O на ребрі даного двогранного кута (рис. 174) проведемо площину, перпендикулярну до ребра кута. Вона перетне грані кута по променях OA і OB, перпендикулярних до ребра даного кута. Кут AOB, утворений цими променями, називають **лінійним кутом двогранного кута**. Часто для побудови лінійного кута двогранного кута площину, перпендикулярну до ребра, не проводять, обмежуючись проведенням у гранях даного кута променів зі спільним початком, перпендикулярних до ребра кута.

Очевидно, що двогранний кут має безліч лінійних кутів. Покажемо, що **всі лінійні кути даного двогранного кута рівні.**

Справді, нехай $A_1O_1B_1$ і $A_2O_2B_2$ — лінійні кути двогранного кута (рис. 175). Паралельне перенесення, яке переводить точку O_1 в точку O_2, переводить кут $A_1O_1B_1$ у кут $A_2O_2B_2$. Оскільки під час паралельного перенесення величини кутів зберігаються, то $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$. Це дозволяє дати таке означення.

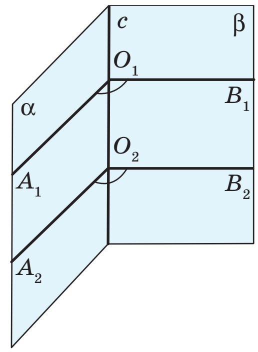


Рис. 175.
До обґрунтування рівності лінійних кутів двогранного кута

Означення

Градусною мірою двогранного кута називається градусна міра його лінійного кута.

За доведеним градусна міра двогранного кута не залежить від вибору лінійного кута.

Згідно з означенням кута в планіметрії градусна міра двогранного кута лежить у межах від 0° до 180° (випадки, коли грані двогранного кута збігаються або належать одній площині, зазвичай не розглядаються). Як і серед кутів на площині, серед двогранних кутів розрізняють ***гострі*** (менші від 90°), ***прямі*** (ті, що дорівнюють 90°) і ***тупі*** (більші за 90° і менші від 180°).

Отже, для обґрунтування градусної міри двогранного кута необхідно побудувати його лінійний кут, тобто вказати на гранях даного двогранного кута два промені зі спільним початком, перпендикулярні до ребра кута.

Один зі способів побудови таких променів описаний у розв'язанні такої задачі.

Задача

На одній із граней гострого двогранного кута позначено точку на відстані 8 см від ребра кута. Знайдіть величину двогранного кута, якщо дана точка віддалена від іншої грані на $4\sqrt{2}$ см.

Розв'язання

Нехай точка A належить грані α даного двогранного кута (рис. 176). Проведемо $AB \perp \beta$; AB — відстань від точки A до грані β; за умовою $AB = 4\sqrt{2}$ см.

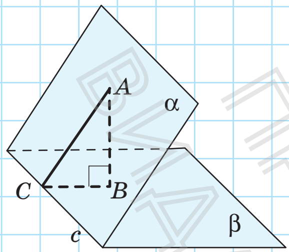


Рис. 176

Проведемо $AC \perp c$; AC — відстань від точки A до ребра c; за умовою $AC = 8$ см. Відрізок BC — проєкція похилої AC на площину β. За теоремою про три перпендикуляри $BC \perp c$. Отже, кут ACB — лінійний кут двогранного кута. Знайдемо його градусну міру. Із трикутника ABC $(\angle B = 90^\circ)$ $\sin C = \frac{AB}{AC}$, $\sin C = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Оскільки за умовою даний двогранний кут є гострим, його величина дорівнює куту ACB, тобто 45°.

Відповідь: 45°.

Кажуть, що точка M лежить усередині двогранного кута, якщо існує лінійний кут даного двогранного кута, у внутрішній області якого лежить точка M. Множина всіх точок, які лежать усередині двогранного кута, є внутрішньою областю двогранного кута.

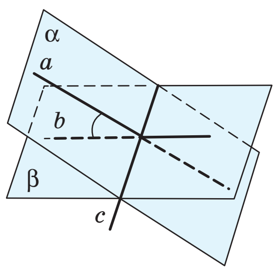


Рис. 177.
До означення кута між площинами

Аналогічно кутам на площині, у просторі можна розглядати суміжні й вертикальні двогранні кути (відповідні означення спробуйте дати самостійно). При цьому для двогранних кутів зберігаються відповідні властивості суміжних і вертикальних кутів на площині. Зокрема, у результаті перетину двох площин (рис. 177) утворюються дві пари рівних двогранних кутів зі спільним ребром.

Означення

Кутом між двома площинами, що перетинаються, називається найменший із двогранних кутів, утворених у результаті цього перетину.

Кут між паралельними площинами вважають таким, що дорівнює 0°.

Ураховуючи означення лінійного кута двогранного кута, можна стверджувати, що **кут між площинами, які перетинаються, дорівнює куту між прямими, по яких третя площина, перпендикулярна до лінії перетину даних площин, перетинає ці площини.** Інакше кажучи, кут між площинами α і β дорівнює куту між прямими a і b, які лежать у даних площинах і перпендикулярні до прямої їх перетину (рис. 177).

Звідси, зокрема, випливає, що кут між площинами не перевищує $90°$.

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

420•. Точка A не належить площині α. Скільки прямих, нахилених до площини α під кутом $60°$, можна провести через точку A?

421•. Кут між прямою і площиною дорівнює $50°$. Чи може дана пряма утворювати з деякою прямою даної площини кут $30°$, $40°$, $90°$?

422•. Кут між прямою і площиною дорівнює φ (рис. 160). Який кут утворює дана пряма з перпендикуляром до даної площини?

423. Пригадайте, які елементи фізичної зарядки ви виконували на уроці фізичної культури. Зробіть нахили у такий спосіб, щоб зігнута частина тулуба утворила з площиною підлоги кут, якомога ближчий до прямого. Влаштуйте мінізмагання з нахилів.

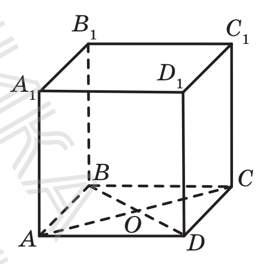


Рис. 178

424•. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 178). Назвіть кут між:

а) прямою D_1B і площиною ABC;

б) прямою CB_1 і площиною A_1AB;

в) прямою C_1A і площиною C_1CD;

г) прямою C_1O і площиною ABC.

425•. Протягом сонячного дня ви спостерігаєте за тінню від дерева. Як змінюється її довжина? Відповідь обґрунтуйте.

426. Якщо ви багато часу проводите за комп'ютером, важливо правильно налаштувати своє робоче місце. При цьому слід звернути увагу як на поставу, так і на кут нахилу монітора до лінії погляду. Розгляньте схему правильного положення учня (учениці) за комп'ютером (рис. 179). Кути між якими просторовими об'єктами в ній ураховуються? Як саме? Правильно налаштуйте своє робоче місце за комп'ютером.

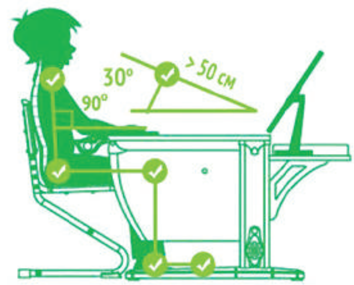


Рис. 179

427. Визначте градусну міру кута між ребром двогранного кута і прямою, яка лежить у площині лінійного кута даного двогранного кута.

428•. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (див. рис. 178). Назвіть ребро та лінійний кут двогранного кута з гранями:

а) ABC і B_1BC;

б) A_1BD і ABD;

в) B_1AC і ACD.

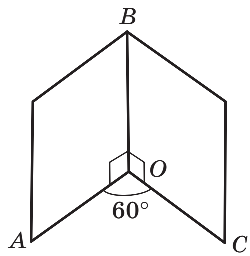


Рис. 180

429. Один із двогранних кутів, утворених у результаті перетину двох площин, дорівнює 150°. Знайдіть кут між даними площинами.

430. За даними рис. 180 знайдіть кут між площинами:

а) AOC і AOB; б) AOC і BOC; в) AOB і BOC.

Моделюємо

431. Виготовте з картону модель двох півплощин, обмежених спільною прямою. Побудуйте на моделі лінійний кут двогранного кута між даними півплощинами і позначте на його сторонах по точці. Дослідіть, як змінюється відстань між позначеними точками залежно від величини двогранного кута.

432. Приєднавши до транспортира висок, сконструюйте модель екліметра. Поясніть принцип його дії.

Розв'язуємо задачі

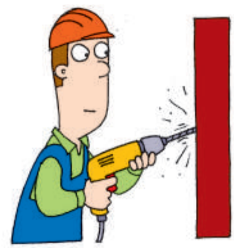
Рівень А

433°. За рис. 171 знайдіть:

а) довжину похилої AC, якщо вона утворює з площиною α кут $30°$, а її проєкція BC дорівнює $3\sqrt{3}$ см;

б) довжину перпендикуляра AB, якщо кут між похилою AC і площиною α дорівнює φ, $AC = l$.

434°. Знайдіть довжину ескалатора в торгівельному центрі, якщо відстань між поверхами дорівнює 10 м, а кут нахилу ескалатора до підлоги становить $35°$.



435. Необхідно зробити наскрізний отвір у бетонній стіні завтовшки 10 см. Чи можна це зробити, якщо довжина свердла становить 25 см і воно входить у стіну під кутом $30°$ до площини стіни?

436. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут нахилу:

а) прямої C_1B до площини ABC;

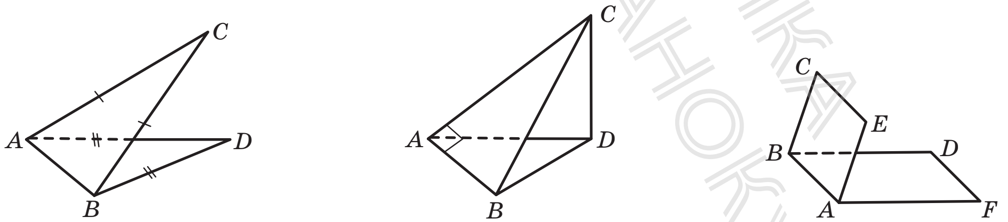
б) прямої AD до площини AA_1C_1.

437. З точки A до площини проведено перпендикуляр AB і похилі AC та AD. Знайдіть:

а) кут нахилу прямої AD до даної площини, якщо $AC = 6\sqrt{2}$ см, $AD = 12$ см, а пряма AC утворює з даною площиною кут $45°$;

б) довжину похилої AC, якщо $AD = 6\sqrt{3}$ см, а похилі AC і AD утворюють із даною площиною кути $45°$ і $60°$ відповідно.

438. Для кожного з випадків, поданих на рис. 181, *а–в*, побудуйте лінійний кут двогранного кута з гранями ABC і ABD та обґрунтуйте правильність побудови.



$CD \perp (ABD)$

$ABCE$ — квадрат,
$ABDF$ — прямокутник

а б в

Рис. 181

439. Для кожного з випадків, поданих на рис. 182, *а*, *б*, побудуйте лінійний кут двогранного кута з гранями ABC і ABD та обґрунтуйте правильність побудови.

440. На одній із граней двогранного кута позначено точку. Знайдіть відстань від даної точки:

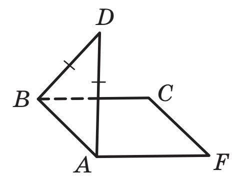
а) до ребра кута, якщо ця точка віддалена від другої грані на $8\sqrt{2}$ см, а градусна міра двогранного кута дорівнює 45°;

б) до другої грані кута, якщо ця точка віддалена від ребра кута на 12 см, а градусна міра двогранного кута дорівнює 30°.

441. Знайдіть величину гострого двогранного кута, якщо пряма, яка паралельна ребру і належить одній із граней кута, віддалена від ребра і від другої грані кута на 12 см і $6\sqrt{3}$ см відповідно.

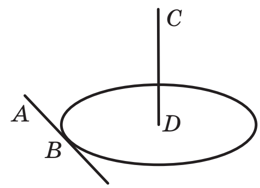
442. На одній із граней гострого двогранного кута позначено дві точки, віддалені від іншої грані на 6 см і 15 см відповідно. Знайдіть відстань від другої точки до ребра кута, якщо перша точка віддалена від нього на 10 см.

443. Кожна з половин прочиненого вікна утворює зі стіною двогранний кут 120°. Який кут утворюють між собою ці половини?



а

$ABCF$ — квадрат



б

AB — дотична до кола з центром D, $CD \perp (ABD)$

Рис. 182

Рівень Б

444 (опорна). ***Паралельні прямі перетинають площину під однаковими кутами.*** Доведіть. Чи правильним є обернене твердження?

445 (опорна). ***Пряма, яка перетинає паралельні площини, перетинає їх під рівними кутами.*** Доведіть. Чи правильним є обернене твердження?

446. Відрізок MB — перпендикуляр до площини правильного трикутника ABC, $MB = AB$, точка D — середина сторони AC (рис. 183). Заповніть таблицю кутів між прямими і площинами.

Пряма	Площина	Кут, що вимірюється	Величина кута
MA	ABC		
MD	ABC		
AC	MBD		
AB	MBD		
BC	MBA		
AM	MBD		

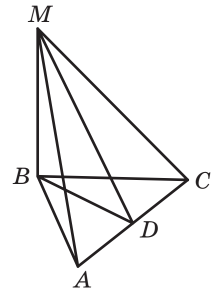


Рис. 183

447. Відрізок MB — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O, $MB = AB$ (рис. 184). Заповніть таблицю кутів між прямими і площинами.

Пряма	Площина	Кут, що вимірюється	Величина кута
MC	ABC		
MD	ABC		
MO	ABC		
AD	MBD		
CD	MBC		
AM	MBD		

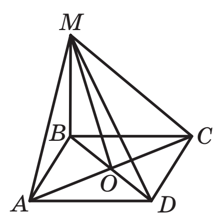


Рис. 184

448. За рис. 181, *а* знайдіть довжину відрізка CD, якщо $AC = 13$ см, $AB = 24$ см, $AD = 15$ см, а кут між площинами ABC і ABD дорівнює $60°$.

449. За рис. 181, *в* доведіть, що $CE \parallel DF$, і знайдіть відстань між цими прямими, якщо площі квадрата і прямокутника дорівнюють 32 см² і $28\sqrt{2}$ см² відповідно, а кут між площинами цих фігур становить $45°$.

450 (опорна). ***Якщо прямі, що сполучають точку поза площиною многокутника з його вершинами, однаково нахилені до площини многокутника, то основою перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної площини, є центр кола, описаного навколо многокутника.*** Доведіть.

451. З точки A до площини проведено перпендикуляр AB та похилі AC і AD. Знайдіть довжину відрізка CD, якщо $AB = 3$ см, $\angle CBD = 150°$, а дані похилі утворюють із площиною кути $30°$ і $45°$ відповідно.

452. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 25 см і лежить у площині α. Знайдіть кути нахилу катетів до даної площини, якщо вершина прямого кута віддалена від неї на 10 см, а площа трикутника дорівнює 150 см^2.

453. Промені OA, OB і OC не лежать в одній площині. Доведіть, що коли $\angle AOB = \angle AOC$, то проєкцією променя AO на площину BOC є бісектриса кута BOC.

454. Площина γ перетинає грані двогранного кута, що дорівнює $120°$, по паралельних прямих, віддалених від ребра кута на 5 см і 16 см відповідно. Знайдіть відстань між цими прямими.

455. У гранях двогранного кута проведено прямі, паралельні ребру кута і віддалені від нього на 7 см і 15 см відповідно. Знайдіть величину двогранного кута, якщо відстань між даними прямими становить 13 см.

456. За рис. 181, *б* знайдіть кут між площинами ABC і ABD, якщо площа трикутника ABC дорівнює 16 см^2, $DB = 4\sqrt{3}$ см, $AB = 4\sqrt{2}$ см.

457. За рис. 182, *а* знайдіть відстань від точки D до прямої CF, якщо $AD = 5$ см, $AB = 8$ см, а кут між площинами ABC і ABD дорівнює $60°$.

Рівень В

458. З точки до площини проведено дві рівні похилі, кут між якими дорівнює $60°$. Визначте кути, які утворюють ці похилі з даною площиною, якщо кут між їхніми проєкціями на площину прямий.

459. Через вершину прямого кута проведено пряму, яка утворює зі сторонами даного кута кути по $60°$. Знайдіть кут нахилу даної прямої до площини прямого кута.

460. Паралельні прямі a і b перетинають грані двогранного кута в точках A, B і C (рис. 185). Як побудувати четверту точку перетину?

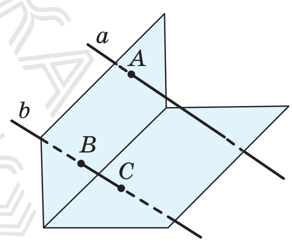


Рис. 185

461. Точки A і B, які лежать у різних гранях двогранного кута, віддалені від його ребра на 5 см і 8 см відповідно. Знайдіть величину даного кута, якщо відстань між даними точками становить 25 см, а між їхніми проєкціями на ребро кута — 24 см.

462. З точок A і B, які лежать у різних гранях двогранного кута, проведено перпендикуляри AC і BD до його ребра. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $CD = AC = BD = 5$ см, а градусна міра двогранного кута становить 120°.

463. Два рівнобедрені трикутники, площини яких утворюють кут 30°, мають спільну основу. Знайдіть її довжину, якщо бічна сторона першого трикутника дорівнює $2\sqrt{21}$ см, а основою перпендикуляра, проведеного з вершини першого трикутника до площини другого, є вершина прямого кута другого трикутника.

464 (опорна). ***Пряма, перпендикулярна до ребра двогранного кута, та її проєкції на грані даного кута лежать в одній площині.*** Доведіть.

465. Усередині двогранного кута з градусною мірою 60° обрано точку, віддалену від граней даного кута на 1 см і 22 см. Знайдіть відстань від даної точки до ребра кута.

Повторення перед вивченням § 12

Теоретичний матеріал

- перпендикулярність прямої і площини; 10 клас, § 8
- властивості прямих, перпендикулярних до площини. 10 клас, § 9

Задачі

466. Чи можуть дві площини, що перетинаються, бути перпендикулярними до однієї прямої? Чи може третя площина перетинати дані площини під кутом 90°? Висловте припущення.

467. Відрізок MA — перпендикуляр до площини трикутника ABC, у якому $\angle A = 30°$. Під яким кутом перетинаються площини BMA і CMA; BMA і ABC?

§ 12 Перпендикулярність площин

12.1. Ознака перпендикулярності площин

Означення

Дві площини називаються **перпендикулярними (взаємно перпендикулярними)**, якщо кут між ними дорівнює 90°.

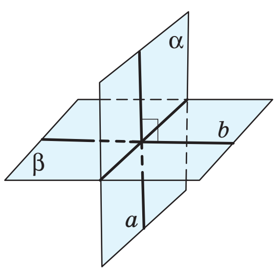


Рис. 186. Перпендикулярні площини

На рис. 186 зображено перпендикулярні площини α і β. У результаті їх перетину утворюються чотири прямі двогранні кути. Будь-яка площина, перпендикулярна до прямої перетину α і β, перетинає дані площини по взаємно перпендикулярних прямих (на даному рисунку це прямі a і b).

Перпендикулярність площин α і β коротко записують так: $\alpha \perp \beta$.

Прикладами взаємно перпендикулярних площин є стіни й підлога класної кімнати, площини сусідніх граней куба тощо.

На практиці перпендикулярність стіни й підлоги будівлі перевіряють за допомогою виска. А як під час розв'язування задачі перевірити перпендикулярність двох площин? Відповідь на це питання дає така теорема.

Теорема (ознака перпендикулярності площин)

Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої, то ці площини перпендикулярні:

$$(a \subset \alpha, a \perp \beta) \Rightarrow \alpha \perp \beta.$$

Доведення

□ Нехай пряма a площини α перпендикулярна до площини β (рис. 187). Тоді дана пряма перетинає площину β в деякій точці C, яка належить прямій c перетину даних площин.

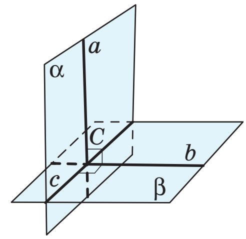


Рис. 187. До доведення ознаки перпендикулярності площин

Проведемо в площині β пряму b, яка перпендикулярна до прямої c і проходить через точку C. Оскільки $a \perp \beta$, $b \subset \beta$, то кут між прямими a і b дорівнює 90°. Але за побудовою кут між прямими a і b є лінійним кутом двогранного кута, утвореного при перетині площин α і β. Отже, площини α і β перпендикулярні, що й треба було довести. ■

Чому площина дверей, навішених на петлі (рис. 188), завжди залишається перпендикулярною до площини підлоги? Відповідь випливає зі щойно доведеної теореми: тому що пряма, на якій закріплено петлі, перпендикулярна до площини підлоги. Отже, маємо наочний приклад застосування ознаки перпендикулярності площин.

Рис. 188. Двері, навішені на петлі,— наочний приклад застосування ознаки перпендикулярності площин

Доведена теорема вказує також спосіб побудови площини, перпендикулярної до даної: через довільну точку даної площини проводимо перпендикулярну до неї пряму, а через цю пряму — площину, яка за ознакою перпендикулярності площин буде перпендикулярною до даної.

Задача

Діагоналі ромба $ABCD$ перетинаються в точці O, MO — перпендикуляр до площини ромба (рис. 189). Доведіть перпендикулярність площин AMC і BMD.

Розв'язання

Оскільки за умовою $MO \perp (ABC)$, то прямі MO і AC перпендикулярні. Тоді пряма AC перпендикулярна до двох прямих площини BMD ($AC \perp BD$ як діагоналі ромба, $AC \perp MO$ за доведеним), отже, за ознакою перпендикулярності прямої і площини

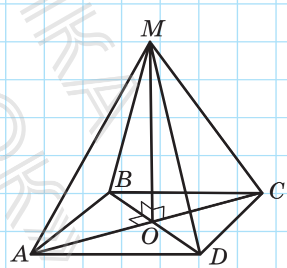


Рис. 189

$AC \perp (BMD)$. Таким чином, площина AMC, яка проходить через пряму AC, за ознакою перпендикулярності площин перпендикулярна до площини BMD, що й треба було довести.

12.2. Властивості перпендикулярних площин

Теорема (про перпендикуляр до лінії перетину перпендикулярних площин)

Якщо пряма в одній із двох перпендикулярних площин перпендикулярна до лінії їхнього перетину, то вона перпендикулярна до другої площини:

$$(\alpha \cap \beta = c, \alpha \perp \beta, a \subset \alpha, a \perp c) \Rightarrow a \perp \beta.$$

Доведення

□ Нехай пряма a, перпендикулярна до лінії перетину c площин α і β, перетинає її в точці C (рис. 190). У площині β проведемо через точку C пряму b, перпендикулярну до c. Тоді кут між прямими a і b дорівнює 90° як лінійний кут двогранного кута між перпендикулярними площинами. Таким чином, пряма a перпендикулярна до двох прямих площини β, які перетинаються. Отже, за ознакою перпендикулярності прямої і площини $a \perp \beta$. ■

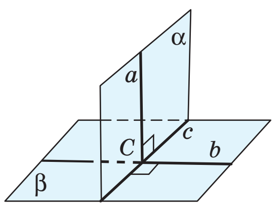


Рис. 190. До доведення теореми про перпендикуляр до лінії перетину перпендикулярних площин

Теорема (про дві площини, перпендикулярні до третьої)

Якщо дві площини, перпендикулярні до третьої, перетинаються, то пряма їхнього перетину перпендикулярна до третьої площини:

$$(\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma, \alpha \cap \beta = c) \Rightarrow c \perp \gamma.$$

Доведення

☐ Через довільну точку C прямої c проведемо в площині α пряму CA, перпендикулярну до лінії перетину площин α і γ, а в площині β — пряму CB, перпендикулярну до лінії перетину площин β і γ (рис. 191). Оскільки за умовою кожна з площин α і β перпендикулярна до γ, то за попередньою теоремою $CA \perp \gamma$, $CB \perp \gamma$. Оскільки через точку C проходить єдина пряма, перпендикулярна до γ, то прямі CA, CB і пряма c перетину даних площин збігаються, отже, $c \perp \gamma$. ■

Доведені теореми описують способи побудови прямих, перпендикулярних до площини.

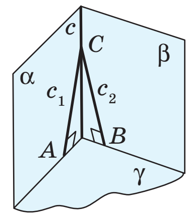


Рис. 191.
До доведення теореми про дві площини, перпендикулярні до третьої

Задача

Відрізок AB завдовжки 25 см упирається кінцями в перпендикулярні площини α і β (рис. 192). Точка A віддалена від площини β на 15 см, а точка B від площини α — на 7 см. Знайдіть проєкції відрізка на кожну з даних площин.

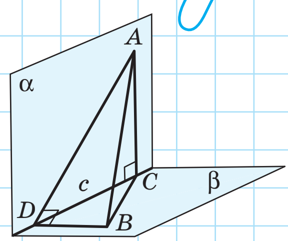


Рис. 192

Розв'язання

Нехай перпендикулярні площини α і β перетинаються по прямій c, $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $AB = 25$ см. Проведемо в площині α перпендикуляр AC до прямої c, а в площині β — перпендикуляр BD до прямої c. Оскільки $\alpha \perp \beta$, то за теоремою про перпендикуляр до лінії перетину перпендикулярних площин $AC \perp \beta$, $BD \perp \alpha$.

Отже, AC і BD — відстані від кінців відрізка AB до даних площин; за умовою $AC = 15$ см, $BD = 7$ см. Тоді відрізки BC і AD — шукані проєкції відрізка AB на дані площини. Знайдемо їхні довжини.

Із трикутника ABC $(\angle C = 90^\circ)$ за теоремою Піфагора $BC = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ (см). Аналогічно з трикутника BDA $(\angle D = 90^\circ)$ за теоремою Піфагора $AD = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ (см).

Відповідь: 20 см і 24 см.

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

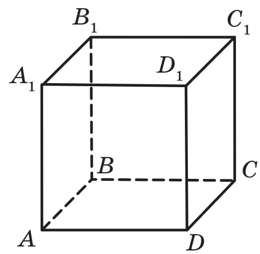


Рис. 193

468°. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 193). Визначте, чи перпендикулярні площини:

а) ABC і CDD_1;

б) A_1AC і B_1BD;

в) ABC_1 і A_1B_1C.

469°. Пряма a перпендикулярна до площини α. Чи можна через дану пряму провести площину, яка перетинає площину α під кутом 60°? Відповідь обґрунтуйте.

470°. Площини α і β перпендикулярні. Чи правильно, що:

а) будь-яка пряма площини α перпендикулярна до площини β;

б) у площині α існують прямі, перпендикулярні до площини β?

471°. Чи правильно, що:

а) через дану точку площини можна провести єдину площину, перпендикулярну до даної;

б) через дану точку прямої перетину двох площин можна провести єдину площину, перпендикулярну до кожної з даних площин?

472. Перекладіть англійською (чи будь якою іншою іноземною мовою) основні факти § 12.

473. Як провести через дану точку простору три взаємно перпендикулярні площини?

Моделюємо

474°. За допомогою моделі перпендикулярних площин α і β визначте, яким може бути взаємне розміщення прямих a і b, якщо $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$.

475°. Сконструюйте модель для дослідження геометричної ситуації: «Прямокутники $ABCD$ і $ABEF$ лежать у перпендикулярних площинах». За допомогою моделі визначте, чи перпендикулярні прямі AC і AF, AE і BC, DB і BF.

476. Використовуючи програму Geogebra чи інший графічний редактор із підтримкою 3D-моделювання, сконструюйте три взаємно перпендикулярні площини. Якими геометричними фактами вам довелось скористатися?

Розв’язуємо задачі

Рівень А

477°. Пряма MA перпендикулярна до площини трикутника ABC. Доведіть перпендикулярність площин AMB і ABC.

478°. Пряма MD перпендикулярна до площини прямокутника $ABCD$. Доведіть перпендикулярність площин:

а) MDA і ABC; б) MDA і MDC.

479. Площини α і β перпендикулярні. Пряма b не лежить у площині β і перпендикулярна до площини α. Доведіть, що $b \parallel \beta$.

480. На рис. 194 $AB \perp \alpha$, $AC \perp CD$. Доведіть перпендикулярність площин ABC і ACD.

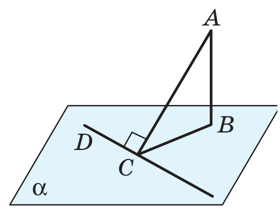


Рис. 194

481 (опорна). ***Площина, перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, перпендикулярна і до другої площини.*** Доведіть.

482. Наведіть приклади використання результату задачі 481 із власного досвіду.

483. Кінці відрізка завдовжки 6 см належать двом перпендикулярним площинам і віддалені від прямої перетину цих площин на 3 см і $3\sqrt{2}$ см відповідно (див. рис. 192). Знайдіть кути, які утворює відрізок із даними площинами.

484. З точок A і B, які лежать у двох перпендикулярних площинах, проведено перпендикуляри AC і BD до прямої перетину даних площин (рис. 192). Знайдіть довжину:

а) відрізка AB, якщо $AC = 9$ см, $CD = 12$ см, $BD = 8$ см;

б) відрізка CD, якщо $AB = 41$ см, $AC = 24$ см, $BD = 9$ см;

в) відрізків AC і BD, якщо $AB = 25$ см, $AD = 20$ см, $BC = \sqrt{369}$ см.

485. Кінці відрізка завдовжки 12 см належать двом перпендикулярним площинам. Знайдіть відстані від кінців відрізка до кожної з площин, якщо даний відрізок утворює з даними площинами кути 45° і 60°.

486. З точки D проведено перпендикуляри DA і DB до взаємно перпендикулярних площин α і β відповідно. Площина ADB перетинає пряму перетину площин α і β в точці C (рис. 195).

а) Доведіть, що $ADBC$ — прямокутник.

б) Обґрунтуйте й обчисліть відстань від точки D до прямої перетину площин α і β, якщо $AD = 24$ см, $BD = 18$ см.

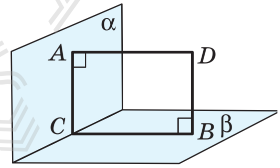


Рис. 195

487. Площини трикутників ABC і ADC перпендикулярні, $AC = 12$ см. Знайдіть довжину відрізка BD, якщо:

а) $AB = BC = 10$ см, $AD = DC$, $\angle ADC = 90°$;

б) трикутники ABC і ADC рівносторонні.

488. Площини квадратів $ABCD$ і AB_1C_1D зі стороною 10 см перпендикулярні. Знайдіть відстань:

а) від точки B до прямої B_1C_1; б) від точки C_1 до прямої AB.

Рівень Б

489. Доведіть, що всі прямі, які перпендикулярні до площини α і перетинають дану пряму a, лежать в одній площині. Як розміщена ця площина відносно площини α?

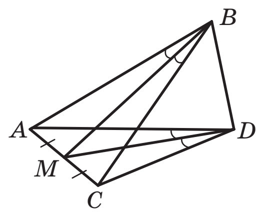


Рис. 196

490. За даними рис. 196 доведіть перпендикулярність площин BDM і ADC.

491. Точка P рівновіддалена від усіх вершин прямокутника $ABCD$. Доведіть перпендикулярність площин APC і ABC.

492. Точка P рівновіддалена від усіх сторін ромба $ABCD$. Доведіть перпендикулярність площин APC і BPD.

493. Зобразіть переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить:

а) через ребро AA_1 і перпендикулярна до площини BDD_1;

б) через ребро C_1D_1 і перпендикулярна до площини A_1DC.

494. Розв'яжіть задачу 493, використовуючи програми Geogebra, DG чи інший графічний редактор. Які теоретичні факти стали вам у пригоді під час цього комп'ютерного моделювання?

495. Відрізок AB лежить в одній із двох взаємно перпендикулярних площин і не перетинає другу. Точки A і B віддалені від прямої l перетину даних площин на 9 см і 5 см відповідно. У другій площині проведено пряму, паралельну l, причому точка A віддалена від неї на 15 см. Знайдіть відстань від точки B до даноїц прямої.

496. Дві паралельні прямі, відстань між якими становить 34 см, належать двом перпендикулярним площинам і паралельні прямій їхнього перетину. Знайдіть відстані від даних прямих до прямої перетину площин, якщо одна з цих відстаней на 14 см менша за другу.

497. Ромб $ABCD$ перегнули по прямій BD так, що площини ABD і CBD стали перпендикулярними. Знайдіть відстань між точками A і C, якщо в даному ромбі $\angle ABC = 120°$, $BD = 2$ см.

498. Площини квадрата $ABCD$ і прямокутника AB_1C_1D перпендикулярні. Знайдіть відстань між прямими BC і B_1C_1, якщо площі квадрата і прямокутника дорівнюють 36 см^2 і 48 см^2 відповідно.

Рівень В

499 (опорна). ***Якщо пряма, проведена через точку однієї з двох взаємно перпендикулярних площин, перпендикулярна до другої площини, то вона лежить у першій площині.*** Доведіть.

500. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від двох прямих, що перетинаються.

501. Знайдіть геометричне місце прямих, які проходять через вершину даного кута й утворюють рівні кути з його сторонами.

502. Відрізок лежить в одній із двох перпендикулярних площин і не перетинає другу. Кінці відрізка віддалені від прямої перетину площин на 5 см і 27 см. Перший із них віддалений на 13 см від прямої l, яка лежить у другій площині й паралельна прямій перетину даних площин. Знайдіть відстань від середини даного відрізка до прямої l.

503. Прямокутник $ABCD$ зі сторонами 15 см і 20 см перегнули по діагоналі AC так, що площини ABC і ADC стали перпендикулярними. Знайдіть відстань між вершинами B і D.

504. Точка P рівновіддалена від сторін правильного трикутника ABC з периметром $6\sqrt{3}$ см. З даної точки проведено перпендикуляр PO завдовжки $2\sqrt{2}$ см до площини трикутника. Обґрунтуйте й обчисліть відстань від точки O до площини APB.

505. Рівнобедрені трикутники ABC і DBC мають спільну основу завдовжки 30 см, $AD \perp (DBC)$, $AD = DC = 25$ см. Обґрунтуйте й обчисліть відстань від точки D до площини ABC.

Повторення перед вивченням § 13

Теоретичний матеріал

- мимобіжні прямі; 10 клас, § 3, 7
- паралельне проєкціювання. 10 клас, § 6

Задачі

506. За яких умов під час паралельного проєкціювання прямокутник проєктується у відрізок?

507. Точка P рівновіддалена від вершин правильного трикутника ABC. Знайдіть кут між прямими PA і BC.

§ 13 Ортогональне проєкціювання

13.1. Ортогональна проєкція многокутника

Ортогональний — від грецького «ортогон» (прямий кут) — прямокутний

Розглянемо паралельне проєкціювання фігури в напрямі прямої l, перпендикулярної до площини проєкції ≠ (рис. 197). Такий спосіб проєкціювання називається **ортогональним (прямокутним) проєкціюванням**.

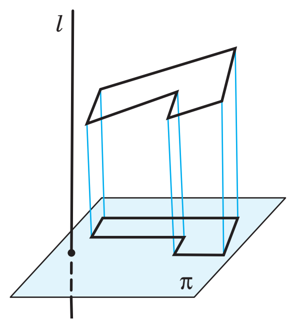


Рис. 197. Ортогональне проєкціювання

Ортогональне проєкціювання як окремий випадок паралельного проєкціювання має всі його властивості. Зокрема, під час розгляду проєкції прямої на площину ми використовували саме ортогональну проєкцію прямої. Узагальнюючи вивчене, зазначимо, що ортогональною проєкцією точки є основа перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини проєкції, а ортогональною проєкцією фігури — множина проєкцій усіх її точок на дану площину.

Ортогональне проєкціювання широко застосовується в кресленні (рис. 198).

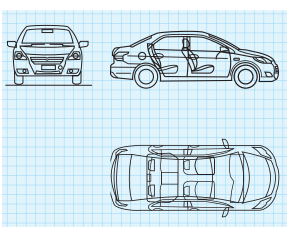


Рис. 198. Ортогональне проєкціювання в кресленні

Якщо площина многокутника не перпендикулярна до площини проєкції, ортогональна проєкція многокутника також є многокутником. Зв'язок між площами цих многокутників виражається такою теоремою.

Теорема (формула площі ортогональної проєкції многокутника)

Площа ортогональної проєкції многокутника на площину дорівнює добутку площі многокутника на косинус кута між площиною многокутника і площиною проєкції:

$$S_{\text{пр}} = S \cdot \cos\varphi .$$

Доведення

☐ Спочатку розглянемо випадок проєкціювання трикутника на площину α, яка містить одну з його сторін. Нехай $BB_1 \perp \alpha$, трикутник AB_1C — ортогональна проєкція трикутника ABC на площину α (рис. 199, *а*). Проведемо $BH \perp AC$. Оскільки B_1H — проєкція похилої BH на площину α, то за теоремою про три перпендикуляри $B_1H \perp AC$; отже, $\angle BHB_1$ — кут між площинами трикутника і його проєкції. За умовою $\angle BHB_1 = \varphi$.

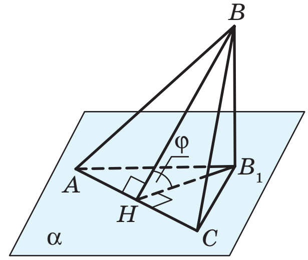
Із трикутника BB_1H $\left(\angle B_1 = 90°\right)$ $B_1H = BH\cos\varphi$.

Отже, $S_{AB_1C} = \frac{1}{2}B_1H \cdot AC = \frac{1}{2}BH \cdot AC \cdot \cos\varphi = S_{ABC} \cdot \cos\varphi$, тобто для даного випадку теорему доведено.

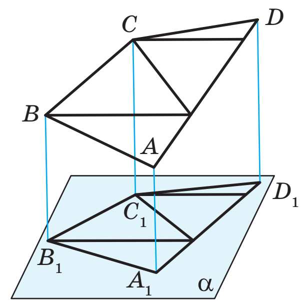
Теорема справджується і тоді, коли площина проєкції паралельна площині α. Дійсно, у цьому випадку $\cos\varphi = \cos 0 = 1$, $S_{AB_1C} = S_{ABC}$, а проєкції фігури на дві паралельні площини суміщаються паралельним перенесенням, тобто є рівними.

У загальному випадку даний трикутник (і взагалі будь-який многокутник) можна розбити на скінченну кількість трикутників, кожний із яких має сторону, паралельну площині проєкції, — для чотирикутника $ABCD$ це показано на рис. 199, *б* (опишіть самостійно спосіб такого поділу для довільного многокутника).

Якщо площі отриманих трикутників дорівнюють S_1, S_2, ..., S_k, то їхні проєкції мають площі $S_1 \cdot \cos\varphi$, $S_2 \cdot \cos\varphi$, ..., $S_k \cdot \cos\varphi$ відповідно. Таким чином, $S_{\text{пр}} = S_1 \cdot \cos\varphi + S_2 \cdot \cos\varphi + \ldots + S_k \cdot \cos\varphi = \left(S_1 + S_2 + \ldots + S_k\right) \cdot \cos\varphi = S\cos\varphi$. ■



а

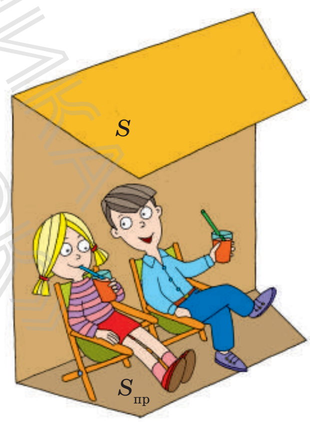


б

Рис. 199. До доведення формули площі ортогональної проєкції многокутника

Наслідок

Площа ортогональної проєкції многокутника не більша за площу многокутника.



Справді, оскільки $\cos\varphi \leqslant 1$, то $S_{\text{пр}} \leqslant S$. Випадок $S_{\text{пр}} = S$ можливий, якщо $\cos\varphi = 1$, тобто коли площини многокутника і його проєкції паралельні або збігаються.

Задача

Ортогональною проєкцією прямокутника, сторона якого належить площині проєкції, є квадрат. Знайдіть кут між площинами прямокутника і квадрата, якщо сторони прямокутника дорівнюють 6 см і $3\sqrt{3}$ см.

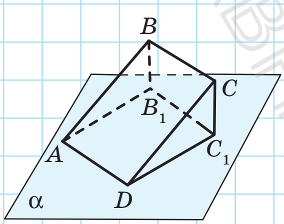


Рис. 200

Розв'язання

Нехай квадрат AB_1C_1D — ортогональна проєкція прямокутника $ABCD$ на площину α (рис. 200). Очевидно, що сторона квадрата дорівнює одній зі сторін прямокутника. Знайдемо площі цих фігур: $S_{ABCD} = 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ (см²); у випадку, коли $AD = 6$ см, $S_{AB_1C_1D} = 36$ см². Оскільки $36 > 18\sqrt{3}$, а площа проєкції не може бути більшою за площу многокутника, отримуємо суперечність. Отже, $AD = 3\sqrt{3}$ см, $S_{AB_1C_1D} = 27$ см². За формулою площі ортогональної проєкції многокутника $S_{AB_1C_1D} = S_{ABCD} \cdot \cos\varphi$, де φ — шуканий кут. Отже, $\cos\varphi = \dfrac{S_{AB_1C_1D}}{S_{ABCD}}$, $\cos\varphi = \dfrac{27}{18\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Оскільки $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$, то $\varphi = 30°$.

Відповідь: $30°$.

13.2. Відстань між мимобіжними прямими

Застосуємо ортогональне проєкціювання для визначення відстані між мимобіжними прямими.

Означення

Спільним перпендикуляром до двох мимобіжних прямих називається відрізок із кінцями на даних прямих, перпендикулярний до кожної з них.

Покажемо, що **дві мимобіжні прямі мають спільний перпендикуляр, і тільки один.**

Проведемо через дані мимобіжні прямі a і b паралельні площини α і β відповідно (рис. 201). Площина γ, що містить прямі, які перпендикулярні до площини α і перетинають пряму a, перпендикулярна до площин α і β і перетинає площину β по прямій a_1 — ортогональній проєкції прямої a на площину β. З точки B перетину прямих a_1 і b проведемо в площині γ перпендикуляр AB до прямої a. Тоді $AB \perp \alpha$, отже, унаслідок паралельності площин α і β $AB \perp \beta$, звідки $AB \perp b$. Таким чином, відрізок AB — спільний перпендикуляр до площин α і β — є також спільним перпендикуляром до прямих a і b.

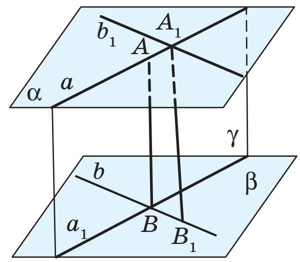


Рис. 201

Доведемо єдиність такого перпендикуляра. Припустимо, що A_1B_1 — інший спільний перпендикуляр прямих a і b. Проведемо через точку A_1 у площині α пряму b_1, паралельну b. Тоді $A_1B_1 \perp \alpha$ за ознакою перпендикулярності прямої і площини. Прямі AB і A_1B_1 перпендикулярні до площини α, отже, $AB \parallel A_1B_1$. Площина цих паралельних прямих міститиме дані прямі a і b, що суперечить означенню мимобіжних прямих. Отже, наше припущення хибне, тобто відрізок AB — єдиний спільний перпендикуляр до прямих a і b.

У процесі доведення ми обґрунтували також, що **спільний перпендикуляр до двох мимобіжних прямих є спільним перпендикуляром до двох паралельних площин, які містять дані прямі.**

Оскільки така пара площин існує і є єдиною (див. п. 5.1), то на підставі доведеного можемо дати таке означення.

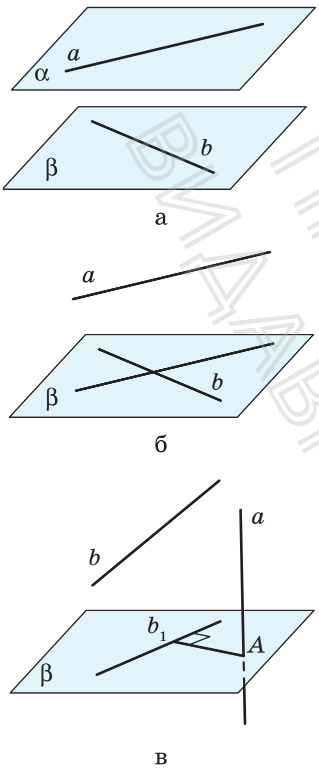


Рис. 202. Обчислення відстані між мимобіжними прямими

Означення

Відстанню між мимобіжними прямими називається довжина їхнього спільного перпендикуляра.

Під час розв'язування задач для обчислення відстані між мимобіжними прямими зазвичай застосовують один із таких способів:

1) будують спільний перпендикуляр до даних мимобіжних прямих і обчислюють його довжину;
2) проводять через дані мимобіжні прямі паралельні площини α і β (рис. 202, *а*); тоді шукана відстань дорівнює відстані між цими площинами;
3) проводять через одну з даних мимобіжних прямих b площину β, паралельну другій прямій a (рис. 202, *б*); тоді шукана відстань дорівнює відстані між прямою a і паралельною їй площиною β;
4) проводять площину β, перпендикулярну до однієї з даних прямих a, і ортогонально проєктують обидві дані прямі на цю площину (рис. 202, *в*); тоді проєкцією прямої a є точка A перетину цієї прямої з площиною β, проєкцією прямої b — деяка пряма b_1 площини β, а шукана відстань дорівнює відстані від точки A до прямої b_1 (обґрунтуйте це самостійно).

Задача

Рівні прямокутники $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у перпендикулярних площинах (рис. 203). Знайдіть відстань між мимобіжними прямими AD_1 і C_1D, якщо $AB = 15$ см, $BC = 20$ см.

Розв'язання

Оскільки D_1A і C_1B — перпендикуляри до прямої перетину двох перпендикулярних площин, то $D_1A \perp (ABC)$, $C_1B \perp (ABC)$. Побудуємо ортогональні про-

єкції прямих AD_1 і C_1D на площину ABC. Проєкцією прямої AD_1 на площину ABC є точка A, а проєкцією прямої C_1D — пряма BD. Отже, шукана відстань дорівнює відстані від точки A до прямої BD, тобто висоті AH прямокутного трикутника ABD $(\angle A = 90°)$. Оскільки за теоремою Піфагора $BD = 25$ см, то $AH = \frac{AB \cdot AD}{BD}$,
$AH = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$ (см).

Відповідь: 12 см.

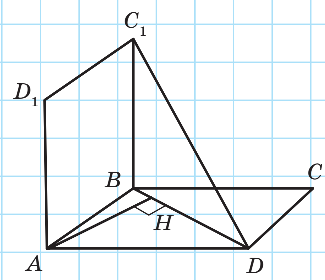


Рис. 203

13.3. Відстань від точки до фігури. Відстані між фігурами

Розглянемо загальний підхід до визначення відстаней між фігурами в просторі. Вивчаючи відстані між точками, прямими й площинами, ми щоразу зазначали, що відрізок, який зображає означувану відстань, є найкоротшим шляхом від точки до фігури (або між точками даних фігур). Отже, відстані в просторі вимірюються за найкоротшим шляхом.

Узагальнимо цю ідею на рівні означень.

Означення

Точка B фігури F називається **найближчою точкою** до точки A $(A \notin F)$, якщо для будь-якої точки X фігури F справджується нерівність $AB \leqslant AX$.

Відстанню від точки A до фігури F називається відстань від точки A до найближчої до неї точки фігури F.

На рис. 204 точка B — найближча до точки A точка фігури F. Інакше кажучи, якщо точка A не належить фігурі F, то відрізок AB — найкоротший серед усіх відрізків, що сполучають точку A з точками фігури F. У випадку, коли точка A належить фігурі F, відстань між нею і фігурою вважають такою, що дорівнює нулю.

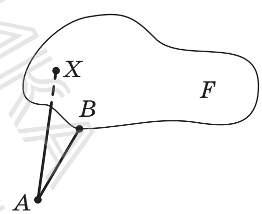


Рис. 204. До означення найближчої точки і відстані від точки до фігури

Найближча до даної точки точка фігури не обов'язково є єдиною: наприклад, точкою кола, найближчою до його центра, є будь-яка точка даного кола.

Прикладами відстаней від точки до фігури є вже відомі вам ***відстані від точки до прямої і площини***. Оскільки перпендикуляр, проведений із точки до прямої (площини), менший за будь-яку похилу, проведену до прямої (площини) з цієї точки, означення цих відстаней узгоджуються зі щойно введеним загальним означенням.

Розглянемо приклад визначення **відстані від точки *M* до відрізка *AB***. Якщо основа перпендикуляра *MC*, проведеного з точки *M* до прямої *AB*, є точкою відрізка *AB*, то шукана відстань дорівнює *MC* (рис. 205, *а*). Якщо ж точка *C* розміщена на прямій *AB* поза відрізком *AB*, відстанню від точки *M* до відрізка *AB* є відстань від точки *M* до кінця даного відрізка, найближчого до точки *C* (рис. 205, *б*).

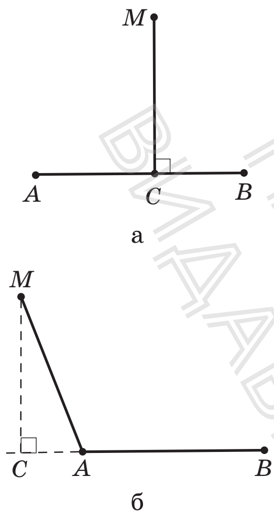


Рис. 205. Визначення відстані від точки до відрізка

Аналогічно, **відстанню від точки *A* до променя** або **півплощини** називається відстань від точки *A* до найближчої точки цього променя (рис. 206, *а*, *б*) або півплощини (рис. 207, *а*, *б*)

Нагадаємо, що зазвичай ми будемо розглядати такі випадки, в яких відстанню від точки до відрізка, променя й півплощини будуть довжини відповідних перпендикулярів.

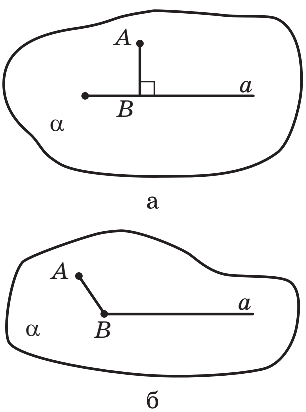


Рис. 206. Визначення відстані від точки до променя

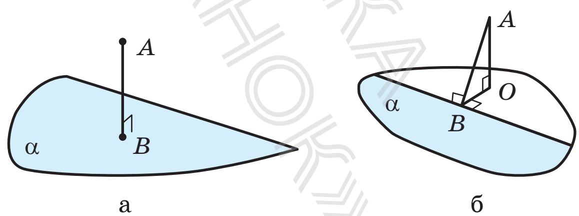


Рис. 207. Визначення відстані від точки до півплощини

Поняття найближчої точки дає можливість цікавого узагальнення теореми про три перпендикуляри. Якщо в цій теоремі замість прямої розглядати довільну фігуру F даної площини α, $AO \perp \alpha$ (рис. 208), то, оскільки менша похила має меншу проєкцію, з умови $OB \leqslant OX$ маємо $AB \leqslant AX$. Ці міркування є основою доведення такого твердження.

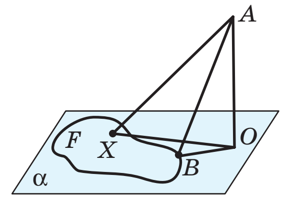


Рис. 208. До теореми про найближчу точку

Теорема (про найближчу точку)

Якщо фігура F належить площині α, точка A не лежить у площині α, AO — перпендикуляр до площини α, то точка фігури F буде найближчою до точки A тоді й тільки тоді, коли вона є найближчою до точки O.

Аналогічно введемо загальне поняття відстані між фігурами.

Уявімо, що необхідно прийняти рішення про будівництво мосту через річку (рис. 209). Очевидно, що з точки зору зменшення вартості проєкту і терміну проведення робіт міст варто будувати там, де русло річки найвужче, тобто між двома найближчими точками двох берегів.

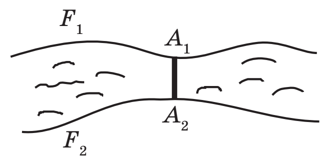


Рис. 209. Вибір місця будівництва мосту

Означення

Точки A_1 фігури F_1 і A_2 фігури F_2 називаються **найближчими точками** фігур F_1 і F_2, якщо для будь-яких точок $X_1 \in F_1$ і $X_2 \in F_2$ справджується нерівність $A_1A_2 \leqslant X_1X_2$. **Відстанню між фігурами** F_1 і F_2 називається відстань між найближчими точками цих фігур.

На рис. 210 відрізок A_1A_2, що сполучає найближчі точки фігур F_1 і F_2, зображає відстань між цими фігурами. Якщо фігури F_1 і F_2 мають спільні точки, відстань між ними вважають такою, що дорівнює нулю.

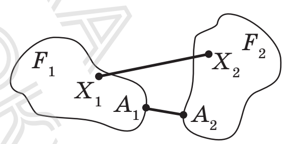


Рис. 210. До означення найближчих точок фігур і відстані між фігурами

Зазначимо, що найближчі точки фігур не завжди існують: наприклад, за даним означенням неможливо визначити відстань на площині між фігурою F_1, яка міститься всередині деякого круга, і фігурою F_2, що являє собою множину точок площини, які лежать поза даним кругом. Для визначення таких відстаней існують інші підходи. Прикладами відстаней між фігурами є відстані між паралельними прямими і площинами.

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

508°. Ортогональною проєкцією відрізка AB на площину α є точка B. Який відрізок є проєкцією похилої AC на площину α? Відповідь обґрунтуйте.

509°. Довжина ортогональної проєкції відрізка AB на площину α дорівнює довжині відрізка AB $\left(AB \not\subset \alpha\right)$. Чи випливає з цього, що $AB \parallel \alpha$?

510. Площа одного трикутника дорівнює 18 см^2, а площа другого — 36 см^2. Який із даних трикутників може бути ортогональною проєкцією іншого? Під яким кутом у цьому випадку перетинаються площини трикутників?

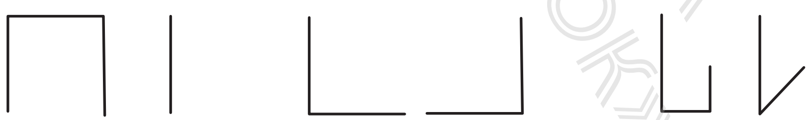
511. Знайдіть серед оточуючих вас предметів ілюстрації теореми про площу ортогональної проєкції многокутника.

512. Чи паралельні дві площини, якщо площі ортогональних проєкцій деякого многокутника на дані площини:

а) дорівнюють площі многокутника; б) рівні між собою?

Моделюємо

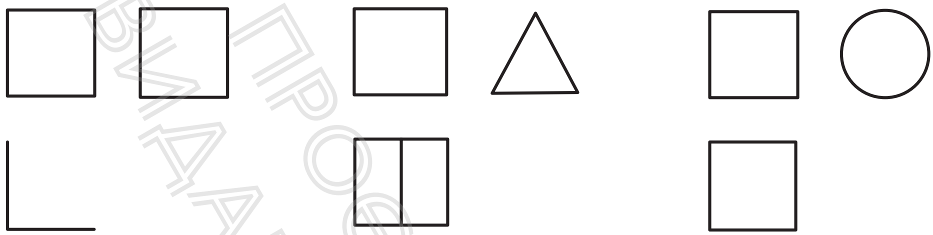
513°. На рис. 211, *а–в* дано ортогональні проєкції деяких ламаних, що складаються з трьох рівних ланок, на дві взаємно перпендикулярні площини. Змоделюйте ці ламані з дроту.



а б в

Рис. 211

514•. На рис. 212, *а–в* дано ортогональні проєкції деяких просторових фігур на три взаємно перпендикулярні площини. Змоделюйте ці фігури із цупкого паперу.



а б в

Рис. 212

Розв'язуємо задачі

Рівень А

515. Кут між площиною фігури F і площиною α дорівнює φ. Знайдіть площу фігури F, якщо ортогональною проєкцією даної фігури на площину α є:

а) трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см, а кут φ дорівнює $60°$;

б) прямокутник з діагоналлю 10 см і кутом між діагоналями $45°$, а кут φ дорівнює $45°$.

516. Основа рівнобедреного трикутника паралельна площині α, а його ортогональна проєкція на дану площину — рівносторонній трикутник зі стороною 6 см. Знайдіть кут між площинами трикутників, якщо бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює $3\sqrt{5}$ см.

517. Ортогональною проєкцією квадрата, одна з діагоналей якого паралельна площині проєкції, є ромб. Знайдіть кут між площинами ромба й квадрата, якщо сторона квадрата дорівнює 2 см, а одна з діагоналей ромба $\sqrt{2}$ см.

518. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 1. Знайдіть відстань між мимобіжними прямими:

а) AB і CC_1; б) AC і BB_1; в) A_1B і C_1D.

Рівень Б

519. Трикутник $A_1B_1C_1$ — ортогональна проєкція трикутника ABC на площину α, а трикутник $A_2B_2C_2$ — ортогональна проєкція трикутника $A_1B_1C_1$ на площину ABC. Знайдіть кут між площинами ABC і α, якщо:

а) площа трикутника $A_2B_2C_2$ становить 0,75 площі трикутника ABC;

б) площа трикутника ABC вдвічі більша за площу трикутника $A_2B_2C_2$.

520. Кут між площиною многокутника і площиною його ортогональної проєкції становить 60°. Знайдіть:

а) площу многокутника, якщо вона на 16 см^2 більша за площу проєкції;

б) площу проєкції, якщо сума площ многокутника та його проєкції дорівнює 48 см^2.

521. Основа сараю — прямокутник із площею 54 м^2. Знайдіть площу його двосхилого даху, якщо схили утворюють з горизонтальною площиною кути 30°. Урахуйте, що площа частин даху, які розташовані поза сараєм, дорівнює 5 % від площі частини даху, розташованої безпосередньо над сараєм.

522. Усі бічні грані піраміди нахилені до основи під кутом 60°. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її основа — трикутник зі сторонами 12 см, 39 см і 45 см.

523. Основа піраміди — ромб із більшою діагоналлю d і гострим кутом α. Усі бічні грані піраміди нахилені до основи під кутом φ. Знайдіть площу бічної грані піраміди.

524. Ортогональною проєкцією ромба на площину, що містить одну з його вершин, є квадрат. Знайдіть кут між площинами ромба і квадрата, якщо діагоналі ромба дорівнюють 6 см і 12 см.

525. Ортогональною проєкцією рівностороннього трикутника з площею $36\sqrt{3}$ см^2 на площину, що містить одну з його вершин, є рівнобедрений трикутник з бічною стороною $3\sqrt{13}$ см. Знайдіть кут між площинами трикутників.

526. Дано тетраедр $PABC$, усі ребра якого дорівнюють a. Знайдіть відстань між ребрами PA і BC.

527. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a. Знайдіть відстань між прямими:

а) AA_1 і B_1D; б) BD і A_1C.

Рівень В

528. Ортогональною проєкцією рівнобічної трапеції з висотою 12 см та основами 4 см і 9 см на площину, паралельну основам трапеції, є чотирикутник, у який можна вписати коло. Знайдіть кут між площинами трапеції та її проєкції.

529. Ортогональною проєкцією правильного трикутника на площину, що містить одну з його вершин, є рівнобедрений прямокутний трикутник. Знайдіть кут між площинами трикутників.

530. Точки A і B належать двом перпендикулярним площинам і віддалені від прямої їхнього перетину c на 30 см і 40 см відповідно. Знайдіть відстань між прямими AB і c.

531. Відрізки $AB = 13$ см і $CD = 15$ см лежать у двох паралельних площинах, причому AC — спільний перпендикуляр до мимобіжних прямих AB і CD (рис. 213). Знайдіть відстань між прямими AC і BD, якщо $AC = 48$ см, $BD = 50$ см.

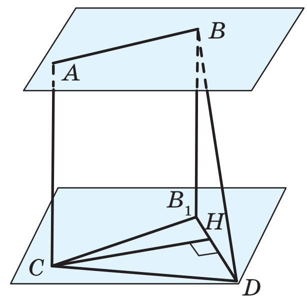


Рис. 213

532. Площини рівних прямокутників $ABCD$ і ABC_1D_1 взаємно перпендикулярні. Знайдіть відстань між прямими AB і CD_1, якщо $BC = a$.

533. Пряма l паралельна площині α. Знайдіть геометричне місце точок M площини α, таких, що будь-яка пряма, що проходить через M і перетинає l, утворює з площиною α та прямою l рівні кути.

Повторення перед вивченням § 14

Теоретичний матеріал

- прямокутна декартова система координат у площині;

9 клас, § 6

Задачі

534. Доведіть, що трикутник ABC, заданий в декартовій системі координат на площині координатами його вершин $A(1;1)$, $B(3;5)$, $C(14;-1)$, є прямокутним.

535. Трикутник ABC задано координатами його вершин: $A(2;1)$, $B(4;6)$, $C(10;2)$. Знайдіть довжину медіани AK цього трикутника.

Тестове завдання для самоперевірки № 3

1. Гострокутний трикутник A_1BC і трапеція $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ не лежать в одній площині (рис. 214). Серед даних кутів виберіть кут, що дорівнює куту між прямими A_1C і AD.

А A_1AD

Б ACA_1

В A_1CB

Г CAD

2. За даними рис. 215 знайдіть довжину відрізка MC, якщо $MA \perp (ABC)$.

А 13

Б $4\sqrt{10}$

В $\sqrt{119}$

Г 5

3. На рис. 216 $MA \perp (ABC)$. Відрізок MB — відстань від точки M до прямої BC. Визначте вид трикутника ABC.

А Прямокутний з гіпотенузою AC

Б Прямокутний з гіпотенузою AB

В Рівнобедрений з основою BC

Г Рівносторонній

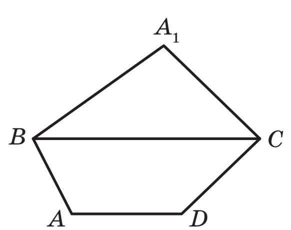


Рис. 214

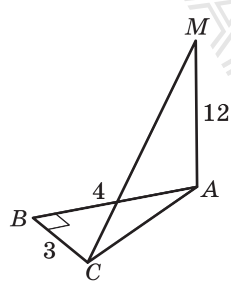


Рис. 215

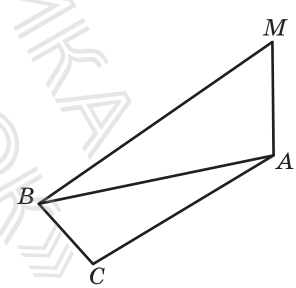


Рис. 216

4. На рис. 217 $ABCD$ — ромб, $MC \perp (ABC)$. Назвіть відрізок, який зображує відстань від точки M до прямої BD.

А MB **В** MD

Б MO **Г** MC

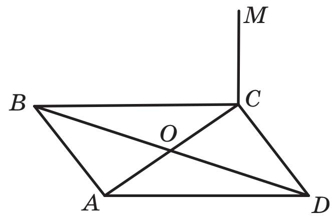


Рис. 217

5. Рівнобедрені трикутники ABC і DBC мають спільну основу BC (рис. 218). Назвіть лінійний кут двогранного кута з ребром BC.

А ABD **В** ADM

Б AMD **Г** ACD

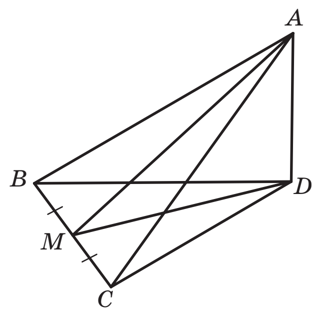


Рис. 218

6. Квадрат $ABCD$ і рівносторонній трикутник ABE не належать одній площині. Точка перетину діагоналей квадрата є ортогональною проєкцією точки E на площину квадрата. Знайдіть кут між площинами квадрата і трикутника.

А $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ **В** 30°

Б $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ **Г** 60°

Онлайн-тестування № 3

Теми повідомлень, рефератів, навчальних проєктів

Підсумки розділу III

КУТИ МІЖ ПРЯМИМИ В ПРОСТОРІ

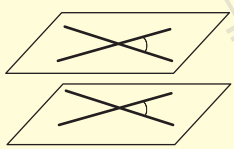
Кутом між прямими, що перетинаються, називається найменший із кутів, що утворилися в результаті перетину даних прямих

Кут між паралельними прямими дорівнює нулю

Кутом між мимобіжними прямими називається кут між прямими, що перетинаються, паралельними даним мимобіжним прямим

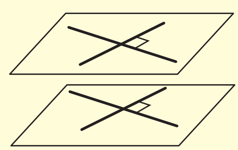
Теорема про кути між відповідно паралельними прямими

Кут між прямими, що перетинаються, дорівнює куту між прямими, які перетинаються і відповідно паралельні даним



Ознака перпендикулярності прямих

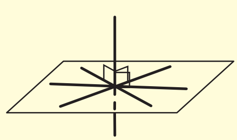
Якщо дві прямі, що перетинаються, відповідно паралельні двом перпендикулярним прямим, то вони також перпендикулярні



ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

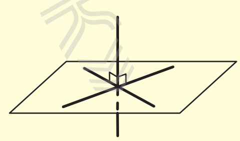
Означення

Пряма називається **перпендикулярною до площини,** якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у даній площині

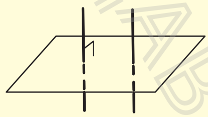
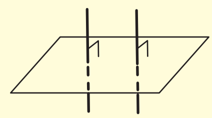


Ознака перпендикулярності прямої і площини

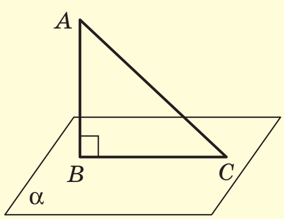
Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, які лежать у площині й перетинаються, то вона перпендикулярна до даної площини



Властивості

Теорема про паралельні прямі, перпендикулярні до площини	***Теорема про прямі, перпендикулярні до однієї площини***
Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то друга пряма також перпендикулярна до даної площини 	Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, є паралельними 

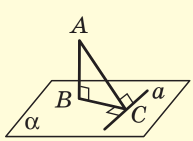
ПЕРПЕНДИКУЛЯР, ПОХИЛА, ПРОЄКЦІЯ

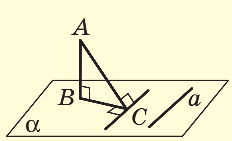


AB — перпендикуляр;
AC — похила;
BC — проєкція AC на α

Властивості перпендикуляра і похилих, проведених з однієї точки

Будь-яка похила більша за перпендикуляр і більша за свою проєкцію на дану площину	Рівні похилі мають рівні проєкції, і навпаки: якщо проєкції двох похилих рівні, то рівні й самі похилі	Більша похила має більшу проєкцію, і навпаки: з двох похилих більша та, яка має більшу проєкцію



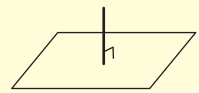
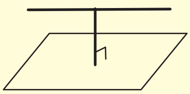
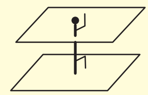
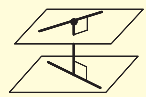
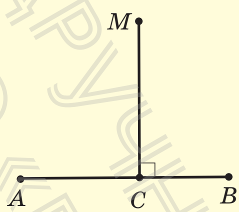
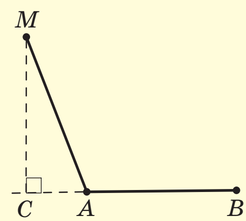
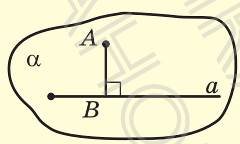
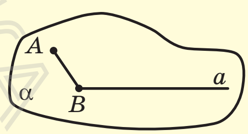
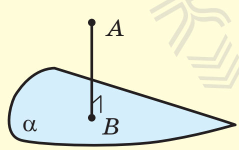
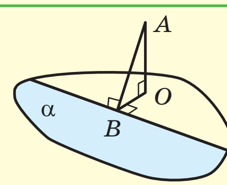


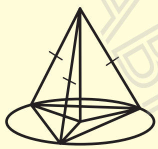
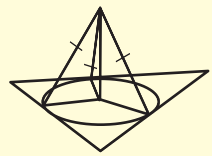
$AB \perp \alpha$

$a \perp BC \Leftrightarrow a \perp AC$

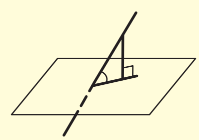
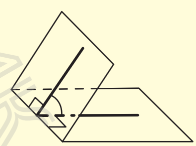
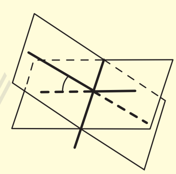
Теорема про три перпендикуляри

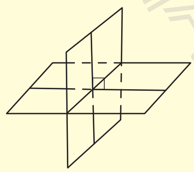
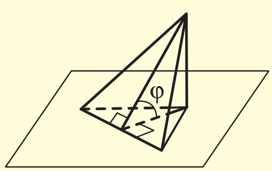
Пряма, проведена на площині перпендикулярно до проєкції похилої, перпендикулярна до цієї похилої, і навпаки: якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до її проєкції

ВІДСТАНІ В ПРОСТОРІ	
Відстанню від точки до площини, яка не містить цю точку, називається довжина перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної площини	
Відстанню від прямої до паралельної їй площини називається відстань від будь-якої точки даної прямої до даної площини	
Відстанню між двома паралельними площинами називається відстань від будь-якої точки однієї площини до другої площини (довжина їхнього спільного перпендикуляра)	
Відстанню між мимобіжними прямими називається довжина їхнього спільного перпендикуляра (відрізка з кінцями на даних прямих, перпендикулярного до кожної з них)	
Якщо основа перпендикуляра MC, проведеного з точки M до прямої AB, є точкою відрізка AB, то **відстань від точки *M* до відрізка *AB*** дорівнює MC. Якщо ж точка C розміщена на прямій AB поза відрізком AB, відстанню від точки M до відрізка AB є відстань від точки M до кінця даного відрізка, найближчого до точки C	 
Відстанню від точки до променя називається відстань від цієї точки до найближчої точки цього променя	 
Відстанню від точки до півплощини називається відстань від цієї точки до найближчої точки цієї півплощини	 

Точка, рівновіддалена від вершин многокутника Якщо точка поза площиною многокутника рівновіддалена від усіх його вершин, то основою перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини многокутника, є центр кола, описаного навколо многокутника 	***Точка, рівновіддалена від сторін многокутника*** Якщо точка поза площиною многокутника рівновіддалена від усіх його сторін, то основою перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини многокутника, є центр кола, вписаного в многокутник 

КУТИ МІЖ ПРЯМИМИ І ПЛОЩИНАМИ

Кут між прямою і площиною	**Кутом між прямою і площиною,** яка перетинає дану пряму і не перпендикулярна до неї, називається кут між прямою та її проєкцією на дану площину	
Двогранний кут	**Двогранним кутом** називається фігура, яка складається з двох півплощин (***граней двогранного кута***) зі спільною граничною прямою (***ребром двогранного кута***). **Градусною мірою двогранного кута** називається градусна міра його лінійного кута	
Кут між площинами	**Кутом між двома площинами,** що перетинаються, називається найменший із двогранних кутів, утворених у результаті їх перетину	

<table>
<tr><th colspan="3">ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПЛОЩИН</th></tr>
<tr><th>Означення</th><th>Ознака</th><th>Властивості</th></tr>
<tr>
<td>Дві площини називаються перпендикулярними (взаємно перпендикулярними), якщо кут між ними дорівнює 90°
</td>
<td>Ознака перпендикулярності площин
Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні</td>
<td>Теорема про перпендикуляр до лінії перетину перпендикулярних площин
Якщо пряма в одній із двох перпендикулярних площин перпендикулярна до лінії їхнього перетину, то вона перпендикулярна до другої площини.
Теорема про дві площини, перпендикулярні до третьої
Якщо дві площини, перпендикулярні до третьої, перетинаються, то пряма їхнього перетину перпендикулярна до третьої площини</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td colspan="2">Формула площі ортогональної проєкції многокутника
Площа ортогональної проєкції многокутника на площину дорівнює добутку площі многокутника на косинус кута між площиною многокутника і площиною проєкції:
$S_{пр} = S \cdot \cos\varphi$, де $0° \leqslant \varphi < 90°$
Наслідок
Площа ортогональної проєкції многокутника не більша за площу многокутника</td>
</tr>
</table>

Контрольні запитання до розділу III

1. Дайте означення кута між прямими в просторі для різних випадків взаємного розміщення прямих.
2. Дайте означення прямої, перпендикулярної до площини. Сформулюйте ознаку перпендикулярності прямої і площини.
3. Сформулюйте властивості прямих, перпендикулярних до площини.
4. Дайте означення відстаней від точки до прямої, від прямої до паралельної площини, між паралельними площинами.
5. Сформулюйте теорему при три перпендикуляри.
6. Дайте означення кута між прямою і площиною.
7. Дайте означення двогранного кута і його градусної міри. Зобразіть на рисунку двогранний кут і лінійний кут двогранного кута.
8. Дайте означення кута між площинами.
9. Дайте означення перпендикулярних площин. Сформулюйте ознаку перпендикулярності площин.
10. Сформулюйте властивості перпендикулярних площин.
11. Опишіть побудову ортогональної проєкції многокутника. Запишіть формулу площі ортогональної проєкції многокутника.

Додаткові задачі до розділу III

536. Відрізок DA — перпендикуляр до площини трикутника ABC, у якому $\angle B = 90°$.

а) Назвіть площини, які проходять через три з даних точок і перпендикулярні до площини DBA.

б) Знайдіть градусну міру двогранного кута між гранями ABC і DBC, якщо $BC = 16$ см, $\angle C = 60°$, а точка D віддалена від прямої BC на 32 см.

537. Точка M не лежить у площині прямого кута A і віддалена від його вершини на $5\sqrt{2}$ см, а від його сторін на $\sqrt{34}$ см і $\sqrt{41}$ см. Знайдіть кут нахилу прямої MA до площини даного кута.

538. Точка P рівновіддалена від усіх вершин прямокутного трикутника ABC з гіпотенузою AC. Доведіть перпендикулярність площин PAC і ABC.

539. Рівнобедрений прямокутний трикутник ABC $\left(\angle C = 90^\circ\right)$ перегнули по висоті CH так, що площини трикутників ABH і CBH стали перпендикулярними. Знайдіть кут ACB.

540. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть перпендикулярність прямої AC_1 і площини A_1BD.

541. Маленька дівчинка бажає взяти книжку з верхньої полиці. Для цього вона поставила драбину під кутом 60° до підлоги. Довжина драбини становить 1,5 м, висота дівчинки з піднятими руками дорівнює 1 м 30 см. Біля стіни одна на одній стоять 8 полиць заввишки 35 см кожна. Чи вдасться дівчинці зробити задумане?

542. Похила утворює з площиною α кут 45°. У площині α через основу похилої проведено пряму a під кутом 45° до проєкції похилої. Знайдіть кут між похилою і прямою a.

543. Два відрізки впираються кінцями у дві паралельні площини. Довжини відрізків відносяться як $1:\sqrt{3}$, а градусні міри кутів, які вони утворюють з даними площинами, — як $2:1$. Знайдіть ці кути.

544. З'ясуйте, які властивості й ознаки перпендикулярних площин використовуються в будівництві, меблевому виробництві, дизайні. Зробіть презентацію за цією темою.

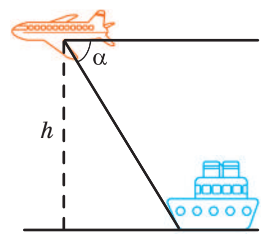


Рис. 219

545. На риболовецькому судні отримали радіограму з пошукового літака про те, що літак перебуває над косяком риби на висоті h (рис. 219). З корабля визначають кут піднесення α літака. Обчисліть, на якій відстані від судна розташований косяк риби.

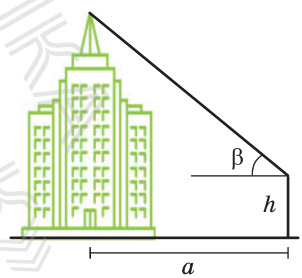


Рис. 220

546. Знайдіть висоту будівлі (рис. 220), якщо виміряний екліметром кут піднесення дорівнює β, екліметр розташований на відстані a від будівлі, а висота його триноги дорівнює h.

547 (опорна). ***Кут між площинами дорівнює куту між перпендикулярами до цих площин.*** Доведіть.

548. У правильному тетраедрі $PABC$ знайдіть двогранний кут із ребром AB.

549. Туристи розвели багаття і поставили триногу, щоб підвісити казанок. Висота казанка з ручкою 25 см, висота вогню в багатті 20 см, ніжки триноги завдовжки 80 см, їхні основи розташовані у вершинах рівностороннього трикутника зі стороною 60 см. Якою має бути довжина ланцюжка, щоб казанок висів точно над вогнем?

550. У процесі досліджень виявилося, що рідкокристалічні телевізори з плоским екраном завдають значно меншу шкоду здоров'ю, ніж електронно-променеві. Але для зменшення навантаження на очі важливо правильно підібрати розміри телевізора залежно від відстані між екраном і глядачем. Скориставшись інтернетом, знайдіть відповідність між розмірами екрана телевізора та рекомендованою відстанню до нього. Перевірте, чи відповідає розташування телевізора у вас вдома цим рекомендаціям. Зробіть висновки. За необхідності обговоріть їх із батьками або рідними.

551. З'ясуйте, яким має бути кут нахилу тулуба людини, що пересувається на лижах, до землі та кут нахилу її палиць для правильного та здорового способу катання на лижах. За можливості влаштуйте лижний похід. Перевірте, чи всі зрозуміли, які саме кути треба контролювати під час пересування на лижах.

552. Для людей з порушенням опорно-рухового апарату на входах до будинків часто влаштовують пандуси. При цьому замість кута нахилу пандуса до горизонтальної поверхні зазвичай указують тангенс цього кута у відсотках. Таким чином, під уклоном пандуса розуміють відношення його висоти до довжини вздовж горизонтального напряму, помножене на 100. Розрахуйте довжину пандуса, якщо його уклін дорівнює 5 %, а висота підйому становить 50 см.

Задачі підвищеної складності

553. Три площини попарно перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли прямі їхнього перетину також попарно перпендикулярні. Доведіть.

554. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a точки P, Q і R — середини відрізків B_1C_1, BC і CD відповідно. Знайдіть відстань між площинами BB_1D_1 і PQR.

555. Точка M рівновіддалена від усіх сторін правильного шестикутника $ABCDEF$ зі стороною a. За умови, що відстань від точки M до площини ABC дорівнює a, знайдіть:

а) кут між прямою AM і площиною ABC;

б) кут між площинами ABC і AMF;

в) кут між перпендикуляром MO, проведеним із точки M до площини ABC, і площиною AMF;

г) відстань від точки O до площини AMF.

556. Пряма утворює рівні кути величиною α з гранями прямого двогранного кута. Знайдіть кут між даною прямою та ребром даного кута.

557. Через гіпотенузу прямокутного трикутника проведено площину γ, яка утворює з катетами кути α і β. Знайдіть кут між площиною трикутника і площиною γ.

558. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a. Знайдіть відстань між мимобіжними прямими A_1D і D_1C.

559. Дано рівнобічну трапецію, висота якої дорівнює 12 см, а основи — 4 см та 9 см. Ортогональною проєкцією цієї трапеції на площину, паралельну її основам, є чотирикутник, в який можна вписати коло. Визначте кут між площиною трапеції та площиною її проєкції.

560. Ортогональною проєкцією квадрата зі стороною 8 см на деяку площину є ромб, одна з діагоналей якого дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Обчисліть кут між площинами ромба і квадрата.

561. Ортогональною проєкцією ромба з діагоналями 10 см і 20 см на деяку площину є квадрат. Обчисліть кут між площинами ромба і квадрата.

562. Ортогональною проєкцією квадрата зі стороною 10 см на деяку площину є прямокутник, діагональ якого дорівнює $5\sqrt{5}$ см. Обчисліть кут між площинами прямокутника і квадрата.

563. Ортогональною проєкцією прямокутника на деяку площину є квадрат. Сторони прямокутника дорівнюють 8 см і $4\sqrt{3}$ см. Обчисліть кут між площинами прямокутника і квадрата.

О.-Л. Коші

А.-М. Лежандр

Н. Тусі

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Питання про перпендикулярність прямих і площин було частково висвітлене Евклідом у XI книзі «Елементів». Однак наведене ним доведення ознаки перпендикулярності прямої і площини було значно складнішим, ніж запропоновані в XIX ст. доведення французьких математиків Оґюстена-Луї Коші (1789–1857) та Адрієна-Марі Лежандра (1752–1833). Доведення Коші увійшло в більшість сучасних підручників геометрії.

Теорему про три перпендикуляри було відкрито вченими Сходу: її доведення подається в одному з трактатів арабського математика Насреддіна Тусі (1201–1274). Серед європейців першим довів цю теорему А.-М. Лежандр. Цікаво, що Лежандр був членом журі конкурсу, який проводила Паризька Академія Наук. Першу премію в ньому отримала Софі Жермен, у подальшому всесвітньо відома жінка-математик.

С. Жермен

Цікаві напрацювання щодо викладання основ стереометрії належать українським ученим та методистам. Зокрема, професор Київського університету Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко (1825–1912) створив один із перших перекладів «Елементів» Евкліда з власними поясненнями і коментарями — книгу, яка стала джерелом наукових ідей для багатьох поколінь математиків. Крім того, Ващенко-Захарченко був автором одного з перших вітчизняних підручників з елементарної геометрії, багатьох робіт з історії математики, одним із фундаторів Київського математичного товариства, завдяки якому зародилася славетна Київська школа викладання математики. Саме пропозиції українських математиків М. Є. Ващенка-Захарченка, А. П. Кисельова, В. Ф. Кагана, викладені на початку XX ст., докорінно змінили підходи до викладання математики в Російській імперії.

Київ. Вид на університет (фотографія 1890–1900-х рр., опублікована в 1905 р.).

М. Є. Ващенко-Захарченко

Розділ IV

КООРДИНАТИ, ВЕКТОРИ ТА ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ В ПРОСТОРІ

Математика може відкрити певну послідовність навіть у хаосі.

Гертруда Стайн, американська письменниця

З координатами, векторами й геометричними перетвореннями ви знайомі з курсу планіметрії. На прикладах із фізики та інформатики ви мали змогу переконатися, що ці геометричні поняття відіграють важливу роль математичного підґрунтя для досліджень в інших науках.

Просторова геометрія відкриває нові можливості застосування вже відомих вам методів — векторного, координатного, геометричних перетворень.

Іллінська церква (церква-усипальниця гетьмана Б. Хмельницького). с. Суботів

§ 14 Декартові координати в просторі

14.1. Прямокутна декартова система координат у просторі

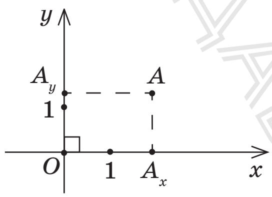


Рис. 221. Уведення координат точки на площині

Як відомо, розміщення точки на координатній прямій однозначно описується однією координатою. З курсу планіметрії ви знайомі з прямокутною декартовою системою координат на площині. Нагадаємо, що для її введення через довільну точку площини O проводять дві взаємно перпендикулярні координатні осі Ox і Oy (рис. 221). За таких умов довільній точці площини A ставиться у відповідність впорядкована пара чисел $(x; y)$ — координати основ перпендикулярів AA_x і AA_y, проведених із даної точки до координатних осей. Числа x і y називають **координатами точки A**; ці дві координати однозначно описують розміщення точки на площині.

Природно, що для описання розміщення точки в просторі необхідно мати три координати — адже, наприклад, метелик пересувається в повітрі не лише вперед-назад і праворуч-ліворуч, але й уверх-униз.

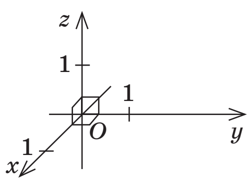


Рис. 222. Прямокутна система координат у просторі

Отже, розглянемо три взаємно перпендикулярні координатні осі Ox, Oy і Oz зі спільною точкою O (***початком координат***) і однаковими одиничними відрізками на осях (рис. 222). Вісь Ox називають **віссю абсцис**, вісь Oy — **віссю ординат**, вісь Oz — **віссю аплікат**, а площини Oxy, Oxz і Oyz — **координатними площинами**. Задану у такий спосіб систему координат називають **прямокутною декартовою системою координат** у просторі.

Для визначення координат довільної точки простору A проведемо з даної точки перпендикуляри AA_x, AA_y і AA_z до осей Ox, Oy і Oz відповідно (рис. 223). Тоді координати x, y, z точок A_x, A_y і A_z на осях Ox, Oy і Oz відповідно є координатами точки A в даній системі координат. Коротко це записують так: $A(x; y; z)$, де x — абсциса, y — ордината, z — апліката точки A.

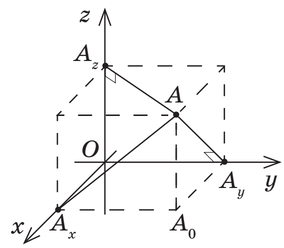


Рис. 223. Визначення координат точки в просторі

Визначення координат точки A можна проводити й інакше. Наприклад, для отримання координати A_x проведемо перпендикуляр AA_0 до площини Oxy, а потім із точки A_0 проведемо перпендикуляр A_0A_x до осі Ox (рис. 223). Тоді внаслідок теореми про три перпендикуляри $AA_x \perp Ox$, тобто отримана таким чином координата A_x збігається з визначеною раніше і є абсцисою точки A (аналогічні міркування для ординати й аплікати проведіть самостійно).

Значення координат точки A можна також отримати, провівши через дану точку три площини, паралельні координатним площинам Oyz, Oxz і Oxy (рис. 223). У цьому випадку точки A_x, A_y і A_z є точками перетину проведених площин із координатними осями (поясніть чому).

Отже, у прямокутній декартовій системі координат кожній точці простору ставиться у відповідність єдина впорядкована трійка чисел $(x; y; z)$, і навпаки: будь-якій трійці чисел $(x; y; z)$ відповідає єдина точка простору.

Очевидно, що коли точка належить одній із координатних площин, певна її координата дорівнює нулю. Так, на рис. 224 точка M належить площині Oxy і має координати $(2; -1; 0)$, а точка N площини Oyz — координати $(0; 2; -3)$. Відповідно точки, що належать координатним осям, мають дві нульові координати: наприклад, координати точки K осі Oz такі: $(0; 0; 2)$. Очевидно також, що всі три координати початку координат нульові: $O(0; 0; 0)$. Умови, за яких та чи інша координата точки дорівнює нулю, дослідіть самостійно.

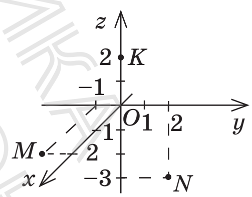


Рис. 224. Точки, що мають одну або декілька нульових координат

Задача

Знайдіть координати проєкцій точки $A(3;2;4)$ на координатні площини.

Розв'язання

Проведемо з даної точки перпендикуляр AA_0 до площини Oxy і перпендикуляри AA_x і AA_y до осей Ox і Oy відповідно (рис. 225). Знайдемо координати точки A_0.

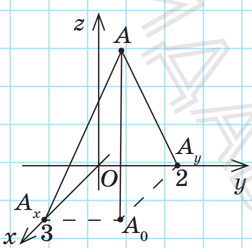


Рис. 225

Оскільки A_0A_x і A_0A_y — проєкції похилих AA_x і AA_y на площину Oxy, то за теоремою про три перпендикуляри $A_0A_x \perp Ox$, $A_0A_y \perp Oy$. Оскільки за означенням координат точки в просторі координата точки A_x на осі Ox і координата точки A_y на осі Oy дорівнюють відповідним координатам точки A, то $A_x(3;0;0)$, $A_y(0;2;0)$. Звідси $A_0(3;2;0)$.

Міркуючи аналогічно, визначимо, що проєкції точки A на площини Oxz і Oyz мають координати $(3;0;4)$ і $(0;2;4)$ відповідно.

Відповідь: $(3;2;0)$, $(3;0;4)$, $(0;2;4)$.

14.2. Основні задачі в координатах

Спираючись на відповідні властивості координат на площині, доведемо формули координат середини відрізка і відстані між точками в просторі.

Нагадаємо, що в планіметрії кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців. Така сама властивість зберігається і в стереометрії.

Теорема
(формули координат середини відрізка в просторі)

Координати середини відрізка обчислюються за формулами:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2},$$

де $A(x_1;y_1;z_1)$ і $B(x_2;y_2;z_2)$ — кінці відрізка, $C(x;y;z)$ — середина відрізка.

Доведення

□ Проведемо з точок A, B і C перпендикуляри на площину Oxy. Основами цих перпендикулярів є точки $A_0(x_1;y_1;0)$, $B_0(x_2;y_2;0)$ і $C_0(x;y;0)$ відповідно. Розглянемо випадок, коли точки A_0, B_0 і C_0 не збігаються (рис. 226). Оскільки проведені до однієї площини перпендикуляри паралельні й лежать в одній площині, а точка C — середина відрізка AB, то за теоремою Фалеса точка C_0 — середина відрізка A_0B_0. За формулами координат середини відрізка на площині маємо: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$. У випадку, коли точки A_0 і B_0, а отже, і C_0 збігаються, ці формули також виконуються (перевірте це самостійно).

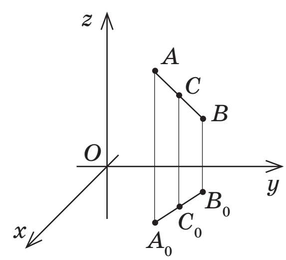


Рис. 226. До доведення формул координат середини відрізка

Аналогічно, провівши з даних точок перпендикуляри до площини Oxz, отримуємо $z=\frac{z_1+z_2}{2}$. Теорему доведено. ■

Як відомо з курсу планіметрії, відстань між точками $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$ обчислюється за формулою $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$. Виведемо просторовий аналог цієї формули.

Теорема
(формула відстані між точками в просторі)

Відстань між точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ обчислюється за формулою

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Доведення

☐ Розглянемо спочатку випадок, коли відрізок AB не паралельний площині Oxy (рис. 227).

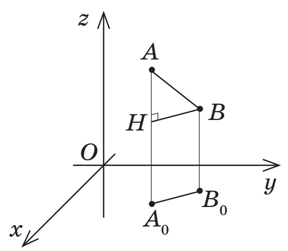


Рис. 227. До доведення формули відстані між точками в просторі

Проведемо з точок A і B перпендикуляри AA_0 і BB_0 на площину Oxy, $AA_0 \parallel BB_0$. Зрозуміло, що точки A_0 і B_0 мають координати $(x_1; y_1; 0)$ і $(x_2; y_2; 0)$ відповідно. За формулою відстані між точками на площині $A_0B_0 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Площина, яка проходить через точку B паралельно Oxy, перетинає пряму AA_0 в деякій точці H, причому $BH = A_0B_0$ як протилежні сторони утвореного паралелограма.

Більш того, $\angle AHB = 90°$, оскільки проведена площина паралельна Oxy, а пряма AA_0 перпендикулярна до цих площин. Оскільки $H(x_1; y_1; z_2)$, то $AH = |z_1 - z_2|$. Отже, з трикутника AHB за теоремою Піфагора маємо:

$$AB = \sqrt{BH^2 + AH^2} =$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

У випадку, коли відрізок AB паралельний осі Oz або належить їй, його довжина дорівнює $|z_1 - z_2|$ — той самий результат дає і щойно отримана формула за умов $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Випадок, коли відрізок AB паралельний площині Oxy, розгляньте самостійно. ■

Задача

Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(-2;1;0)$, $B(4;-3;2)$, $C(6;3;-4)$, $D(0;7;-6)$ є паралелограмом.

Розв'язання

Знайдемо координати середин відрізків AC і BD. Для відрізка AC маємо:

$$x=\frac{-2+6}{2}=2,\ y=\frac{1+3}{2}=2,\ z=\frac{0+(-4)}{2}=-2.$$

Для відрізка BD маємо:

$$x=\frac{4+0}{2}=2,\ y=\frac{-3+7}{2}=2,\ z=\frac{2+(-6)}{2}=-2.$$

Отже, відрізки AC і BD мають спільну середину. Це означає, що прямі AC і BD перетинаються, тобто точки A, B, C і D лежать в одній площині. Діагоналі чотирикутника $ABCD$ точкою перетину діляться навпіл, отже, $ABCD$ — паралелограм за ознакою.

Зазначимо, що під час розв'язування аналогічної задачі в курсі планіметрії ми використовували й інший спосіб — доводили попарну рівність протилежних сторін даного чотирикутника. Але в просторі цей спосіб неприйнятний, адже з рівностей $AB=CD$ і $AD=BC$ не випливає, що точки A, B, C і D лежать в одній площині. Справді, чотирикутник $ABCD$ може виявитися просторовим (на рис. 228 такий чотирикутник отримано перегинанням паралелограма $ABCD$ по прямій BD). Звичайно, у цьому випадку просторовий чотирикутник $ABCD$ задовольняє умови $AB=CD$ і $AD=BC$, але не є паралелограмом.

Другий спосіб розв'язування цієї задачі розглядатиметься в § 15.

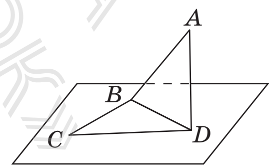


Рис. 228

Задача

На осі аплікат знайдіть точку C, рівновіддалену від точок $A(1;0;3)$ і $B(4;3;-1)$.

Розв'язання

Оскільки шукана точка лежить на осі аплікат, то $C(0;0;z)$.

Знайдемо z, користуючись умовою $AC=BC$. Маємо:

$AC^2=(1-0)^2+(0-0)^2+(3-z)^2$, $BC^2=(4-0)^2+(3-0)^2+(-1-z)^2$.

Прирівнявши ці вирази, отримаємо $1+(z-3)^2=25+(z+1)^2$, звідки $z=-2$. Отже, шукана точка $C(0;0;-2)$.

Відповідь: $(0;0;-2)$.

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

564°. Дано точки $A(-1;0;4)$, $B(7;0;0)$, $C(0;-3;-2)$, $D(1;7;0)$, $E(0;-5;0)$, $F(0;0;6)$. Визначте, які з даних точок належать:

а) площині Oxy;

б) площині Oyz;

в) осі Oz;

г) осі Oy.

565°. Визначте розміщення в прямокутній декартовій системі координат точки простору, в якої:

а) ордината дорівнює нулю;

б) апліката дорівнює нулю;

в) абсциса й апліката дорівнюють нулю;

г) абсциса й ордината дорівнюють нулю.

566. Перекладіть англійською (чи іншою іноземною мовою) основні терміни § 14.

567°. Точка C — середина відрізка AB. Назвіть:

а) аплікату точки C, якщо $A(8;-1;m)$, $B(-3;2;-m)$;

б) ординату точки B, якщо $A(4;m;-2)$, $C(-1;m;0)$;

в) абсцису точки A, якщо $B(-m;-1;0)$, $C(0;3;2)$.

568°. Відстань від точки A до початку координат дорівнює $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Якими можуть бути координати точки A? Назвіть декілька варіантів правильної відповіді.

Моделюємо

569•. За зразком, поданим на рис. 224, зобразіть у прямокутній декартовій системі координат точки $A(1;3;2)$, $B(1;-2;-1)$, $C(-3;1;0)$, $D(0;1;-4)$. Які з даних точок належать координатним площинам?

570•. Сконструюйте з цупкого паперу модель куба. Прийнявши одну з його вершин за початок координат, а ребра, що виходять із цієї вершини, за одиничні відрізки координатних осей (див. рис. 223), визначте координати решти вершин куба.

571. Використовуючи програму Geogebra або інший графічний редактор із підтримкою 3D-моделювання, змоделюйте відрізок, його середину. Перевірте формули довжини відрізка та координат середини відрізка для змодельованої ситуації.

Розв'язуємо задачі

Рівень А

572•. Дано точку $A(-1;3;4)$. Знайдіть координати основ перпендикулярів, проведених із даної точки:

а) до координатних площин; б) до осей координат.

573•. Заповніть таблицю за зразком:

Розміщення точки	Координати точки	Розміщення точки	Координати точки
Площина Oxy	$(x;y;0)$	Вісь Ox	
Площина Oxz		Вісь Oy	
Площина Oyz		Вісь Oz	

574•. Знайдіть відстані від точки $A(6;-8;15)$ до координатних площин.

575 (опорна). ***Координатні площини Oxy, Oxz і Oyz попарно перпендикулярні.*** Доведіть.

576. Дано точки $A(2;-3;4)$, $B(1;7;4)$, $C(-1;0;4)$. Яка координатна площина паралельна площині ABC? Відповідь обґрунтуйте.

577. Дано точки $A(-3;0;2)$, $B(5;0;2)$. Яка координатна вісь паралельна прямій AB? Відповідь обґрунтуйте.

578. Дано паралелограм $ABCD$. Знайдіть координати вершини D, якщо $A(-1;-3;-1)$, $B(6;-1;-3)$, $C(0;-6;6)$.

579. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(4;0;-2)$, $B(1;2;3)$, $C(-3;2;6)$, $D(0;0;1)$ є паралелограмом.

580. Знайдіть відстань між точками A і B, якщо:

а) $A(-1;2;0)$, $B(1;3;-2)$;

б) $A(6;-4;1)$, $B(2;-1;1)$;

в) $A(8;2;-6)$, $B(-4;1;6)$.

581. Яка з точок: $A(-2;2;4)$ або $B(0;-3;4)$ — розташована ближче до початку координат?

582. Доведіть, що трикутник ABC рівносторонній, якщо $A(7;1;-3)$, $B(0;8;-3)$, $C(0;1;4)$.

583. На осі ординат знайдіть точку, рівновіддалену від точок $M(2;-1;3)$ і $N(1;-2;5)$.

Рівень Б

584. На рис. 229 ребро куба дорівнює $2\sqrt{2}$. Визначте координати вершин куба.

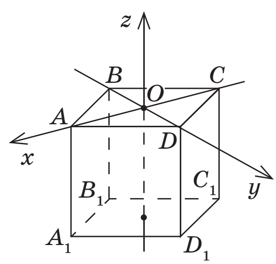


Рис. 229

585. Дано точки $M(a;-b;c)$ і $N(a;b;c)$, де $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$. Які координатні площини паралельні прямій MN? Які координатні площини перпендикулярні до прямої MN?

586. Дано точку $A(-2;-4;3)$. Яке співвідношення виконується для координат точки B, якщо пряма AB:

а) паралельна площині Oyz;

б) перпендикулярна до площини Oyz?

587. Середина відрізка MN належить осі ординат. Знайдіть a і b, якщо:

а) $M(a;-1;-3)$, $N(-2;9;b)$;

б) $M(a-b;-3;-4)$, $N(-1;7;a+2b)$.

588. Точка A лежить на осі аплікат, а точка B — у площині Oxy. Знайдіть координати цих точок, якщо середина відрізка AB має координати $(-4;3;-1)$.

589. На відрізку AB позначено точку M так, що $AM:MB=1:3$. Знайдіть координати:

а) точки M, якщо $A(-7;4;0)$, $B(5;0;-8)$;

б) точки B, якщо $A(2;-9;6)$, $M(1;-6;4)$.

590. Знайдіть довжину медіани BD трикутника ABC, якщо $A(-1;-5;3)$, $B(0;2;-5)$, $C(5;-3;5)$.

591. Доведіть, що трикутник із вершинами $A(-2;6;-3)$, $B(2;-2;5)$, $C(0;-4;1)$ прямокутний, і назвіть його гіпотенузу.

592. На координатній площині Oyz знайдіть точку, рівновіддалену від точок $(0;-2;2)$, $(-2;4;6)$ і $(-4;2;4)$.

593. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(0;1;2)$, $B(2;-4;0)$, $C(-2;-3;-4)$, $D(-4;2;-2)$ є ромбом.

594. Дано точки $A(1;0;0)$, $B(x;0;2)$, $C(1;2;2)$. При яких значеннях x трикутник ABC є рівностороннім?

Рівень В

595. Відстані від точки M до координатних площин Oxy, Oyz і Oxz дорівнюють 5, 6 і 7 відповідно. Знайдіть координати точки M. Скільки розв'язків має задача?

596. Відстані від точки M до координатних осей дорівнюють 16, 19 і 21. Знайдіть відстань від даної точки до початку координат.

597. Відрізок, що сполучає точку M із початком координат O, має довжину 1. Знайдіть координати точки M, якщо пряма OM утворює з осями абсцис і ординат кути, що дорівнюють 60°. Скільки розв'язків має задача?

598. Серединами сторін трикутника є точки $(1;-3;-3)$, $(6;3;-1)$ і $(2;-1;2)$. Знайдіть координати вершин трикутника.

599. Доведіть, що точки $A(2;3;-1)$, $B(0;-3;6)$, $C(6;15;-15)$ лежать на одній прямій. Яка з даних точок лежить між двома іншими?

600 (опорна). ***Якщо точка $C(c_1;c_2;c_3)$ ділить відрізок з кінцями $A(a_1;a_2;a_3)$ і $B(b_1;b_2;b_3)$ у відношенні $AC:CB=m:n$, то $c_i=\dfrac{n}{m+n}a_i+\dfrac{m}{m+n}b_i$, де $i=1,2,3$.*** Доведіть.

601. У трикутнику ABC проведено бісектрису BD. Знайдіть координати точки D, якщо $AB=6$, $BC=12$, $A(-6;1;2)$, $C(3;-5;-1)$.

602. На стороні AC трикутника ABC позначено точку D. Знайдіть її координати, якщо $A(-11;7;2)$, $C(5;-1;-6)$, а площі трикутників ABD і ABC відносяться як $7:8$.

603 (опорна). ***Точка перетину медіан трикутника ABC з вершинами $A(a_1;a_2;a_3)$, $B(b_1;b_2;b_3)$ і $C(c_1;c_2;c_3)$ має координати*** $\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3};\frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)$. Доведіть.

604. Точка M — точка перетину медіан трикутника ABC. Знайдіть координати точки A, якщо $B(3;\ 1;\ 2)$, $C(2;\ 3;\ 1)$, $M(2;\ 2;\ 2)$.

605. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник ABC, якщо $A(0;-1;1)$, $B(19;21;27)$, $C(-5;-3;15)$.

606. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо $A(2;-2;5)$, $B(-2;6;-3)$, $C(0;-4;1)$.

607. Дано точки $A(-1;-2;3)$ і $B(2;3;1)$. Знайдіть на осі аплікат усі точки C такі, щоб трикутник ABC був прямокутним.

608. Знайдіть кути й площу трикутника з вершинами $(-1;1;3)$, $(3;-1;1)$, $(1;-1;3)$.

Повторення перед вивченням § 15

Теоретичний матеріал

- геометричні перетворення на площині — 9 клас, § 9–11

Задачі

609. На площині дано трикутник ABC з вершинами $A(1;1)$, $B(3;5)$, $C(5;-1)$. Знайдіть координати вершин трикутника $A'B'C'$, симетричного трикутнику ABC відносно початку координат. Виконайте рисунок.

610. Побудуйте трикутник AB_1C, у який переходить рівнобедрений трикутник ABC внаслідок симетрії відносно прямої, що містить основу AC. Знайдіть відстань BB_1, якщо $AC=6$ см, а площа даного трикутника дорівнює 12 см^2.

§ 15 Переміщення в просторі

15.1. Властивості переміщень у просторі

Нагадаємо, що ***переміщенням*** (***рухом***) на площині ми називали геометричне перетворення, яке зберігає відстані між точками. Так само означають переміщення і в просторі, причому всі властивості переміщень, відомі з курсу планіметрії, у стереометрії зберігаються: унаслідок переміщення прямі переходять у прямі, промені — у промені, відрізки — у відрізки, і кути між променями не змінюються.

Аналогічно до планіметричного випадку можемо дослідити й перетворення подібності в просторі. При цих перетвореннях відстані між точками можуть не зберігатися, як при переміщеннях. Але тоді вони змінюються в одну й ту саму кількість разів.

Так само як і на площині, у просторі дві фігури називаються ***рівними***, якщо вони суміщаються переміщенням, а подібними — якщо вони суміщаються перетворенням подібності.

Подібність просторових фігур знаходить численні застосування на практиці. Наприклад, архітектори й будівельники, проєктуючи розміщення новобудов на місцевості, подають замовникам пропозиції у вигляді макетів об'єктів, що будуються (рис. 230).

Рис. 230. Макет спорткомплексу

Розглянемо властивість переміщення у просторі: ***переміщення переводить площину в площину***.

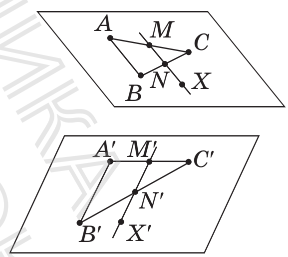


Рис. 231. До обґрунтування властивості переміщення в просторі

Справді, нехай точки A, B і C, які не лежать на одній прямій, унаслідок переміщення переходять у точки A', B' і C', які також не лежать на одній прямій (рис. 231). Покажемо, що внаслідок цього переміщення площина ABC переходить у площину $A'B'C'$. Через довільну точку X площи-

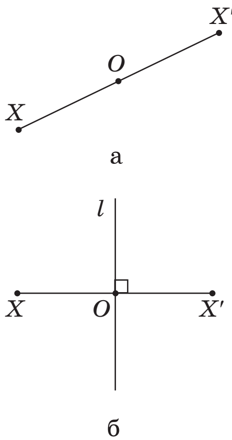


Рис. 232. Центральна та осьова симетрії

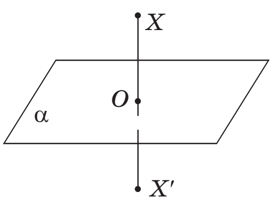


Рис. 233. Точки X і X' симетричні відносно площини α

ни ABC проведемо пряму, яка перетинає дві сторони трикутника ABC в точках M і N. Очевидно, що внаслідок переміщення ці точки перейдуть у точки M' і N', які лежать на відповідних сторонах трикутника $A'B'C'$. Таким чином, пряма $M'N'$, у яку переходить пряма MN, належить площині $A'B'C'$, тобто точка X', у яку переходить точка X, належить прямій $M'N'$, а отже, і площині $A'B'C'$. Це означає, що довільна точка площини ABC внаслідок переміщення переходить у точку площини $A'B'C'$. Аналогічно можна довести, що кожну точку площини $A'B'C'$ можна отримати з точки площини ABC внаслідок розглядуваного переміщення. Отже, внаслідок переміщення площина ABC переходить у площину $A'B'C'$.

15.2. *Симетрія в просторі*

Симетрія як один із видів геометричних перетворень знайома вам із курсу планіметрії. Перетворення **симетрії відносно точки (центральна симетрія)** і **відносно прямої (осьова симетрія)** у просторі означають так само, як і на площині:

- точки X і X' називаються ***симетричними відносно точки*** O, якщо точка O — середина відрізка XX' (рис. 232, *а*); точка O називається ***центром симетрії***;
- точки X і X' називаються ***симетричними відносно прямої*** l, якщо ця пряма перпендикулярна до відрізка XX' і проходить через його середину (рис. 232, *б*); пряма l називається ***віссю симетрії***.

Розглянемо ще один вид симетрії в просторі.

Нехай α — фіксована площина, X — довільна точка поза нею. Проведемо перпендикуляр XO до площини α і на промені XO відкладемо відрізок OX', який дорівнює XO, але лежить в іншому півпросторі відносно площини α (рис. 233). Ми отримали точку X', симетричну точці X відносно площини α.

Означення

Точки X і X' називаються симетричними відносно площини α, якщо ця площина перпендикулярна до відрізка XX' і проходить через його середину. Точки площини α вважаються симетричними самі до себе.

При цьому площина α називається ***площиною симетрії***.

Очевидно, що точкою, симетричною точці X' відносно площини α, є точка X.

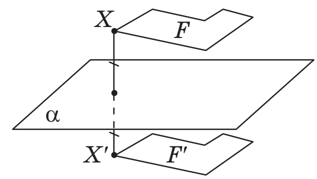


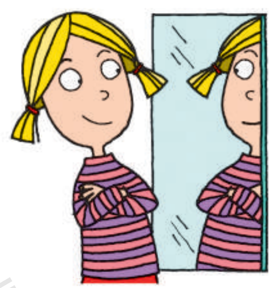
Рис. 234. Фігури F і F' симетричні відносно площини α

Означення

Перетворенням симетрії (симетрією) відносно площини α називають таке перетворення фігури F у фігуру F', при якому кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F', симетричну X відносно площини α.

При цьому фігури F і F' називаються ***симетричними відносно площини*** α (рис. 234).

Наочно уявити симетрію відносно площини можна за допомогою плоского дзеркала. Будь-який об'єкт і його зображення симетричні відносно площини дзеркала. Тому симетрію відносно площини інакше називають дзеркальною симетрією.



Якщо перетворення симетрії відносно площини α переводить фігуру F у себе, то така фігура називається ***симетричною відносно площини*** α, а сама площина α — ***площиною симетрії фігури*** F. Наприклад, площиною симетрії прямої є будь-яка перпендикулярна до неї площина (рис. 235).

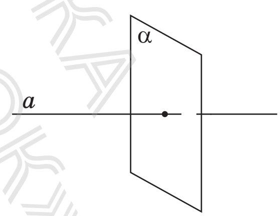


Рис. 235. Площина симетрії прямої

Центри, осі й площини симетрії фігури, якщо вони в неї є, називають ***елементами симетрії*** цієї фігури.

Неважко довести, що точки, симетричні точці $A(x; y; z)$ відносно координатних площин, осей і початку координат, мають такі координати:

Елемент симетрії	Координати симетричної точки
Площина Oxy	$(x; y; -z)$
Площина Oxz	$(x; -y; z)$
Площина Oyz	$(-x; y; z)$
Точка O	$(-x; -y; -z)$
Вісь Ox	$(x; -y; -z)$
Вісь Oy	$(-x; y; -z)$
Вісь Oz	$(-x; -y; z)$

Теорема (основна властивість симетрії відносно площини)

Симетрія відносно площини є переміщенням.

Доведення

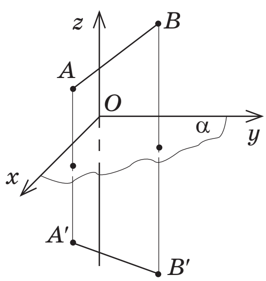


Рис. 236. До доведення основної властивості симетрії відносно площини

☐ Нехай точки A і B внаслідок симетрії відносно площини α переходять у точки A' і B' відповідно. Уведемо систему координат так, щоб площина Oxy збігалася з α (рис. 236). Оскільки точки, симетричні відносно площини Oxy, мають однакові абсциси й ординати, але протилежні аплікати, то для точок $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ маємо: $A'(x_1; y_1; -z_1)$, $B'(x_2; y_2; -z_2)$. Тоді за формулою відстані між точками

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

$$A'B' = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (-z_1 - (-z_2))^2} =$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Таким чином, $AB = A'B'$. Отже, симетрія відносно площини зберігає відстані між точками, тобто є переміщенням. Теорему доведено. ■

З доведеної теореми випливає, що симетрія відносно площини має всі властивості переміщення.

Задача

Доведіть, що коли дві прямі* симетричні відносно площини, то вони лежать в одній площині.

Розв'язання

Розглянемо довільні точки A і B прямої a, які внаслідок симетрії відносно площини α переходять у точки A' і B' прямої a'. За означенням симетрії відносно площини $AA' \perp \alpha$, $BB' \perp \alpha$, отже, $AA' \parallel BB'$. Очевидно, що точки A, A', B і B' лежать у площині, що проходить через ці паралельні прямі, тобто прямі a і a' також лежать у цій площині.

Рис. 237. Симетричні форми в природі

Різноманітні види просторової симетрії ми спостерігаємо в живій і неживій природі, мистецтві, техніці тощо. В основі будови живих форм лежить принцип симетрії, причому природа гармонійно поєднує різні види симетрій із майже математичною строгістю (рис. 237).

Довершену симетричну форму мають природні многогранники — кристали (рис. 238). Фізики стверджують, що симетрія є фундаментальною властивістю природи, з якою пов'язані закони збереження енергії та імпульсу, будова атомів і молекул, особливості природних явищ.

Рис. 238. Кристал аметисту

Неможливо переоцінити значення симетрії в мистецтві. У давньогрецькій архітектурі

* Нагадаємо: кажучи «дві точки», «дві прямі», «дві площини», ми маємо на увазі, що дані точки (прямі, площини) не збігаються.

Рис. 239. Храм Артеміди в Ефесі

Рис. 240. Добчинський і Бобчинський

симетрія була втіленням законів доцільності й гармонії (рис. 239). Ідеї дзеркальної симетрії широко застосовувалися в живописі Середньовіччя.

У літературних творах існує симетрія образів, ситуацій, мислення. Пригадаємо хоча б «закон помсти» у грецькій трагедії: винуватець злочину згодом стає жертвою такого самого злочину.

Яскравими прикладами симетрії образів є персонажі комедії М. В. Гоголя «Ревізор» Добчинський і Бобчинський (рис. 240), герої новели О. Генрі «Дари волхвів» Делла і Джим. Симетричними можна вважати також літературні образи героїв-антиподів, протистояння яких створює основний конфлікт літературного твору: такими є, наприклад, Шерлок Холмс і професор Моріарті у Артура Конана Дойла, доктор Джекіл і містер Хайд у Роберта Льюїса Стівенсона, мітляр Жильберт та герцог де Маликорн у Тамари Габбе.

У музиці побудова окремих мелодичних форм також підпорядковується законам симетрії. Прослухайте «Рондо-капричіо» великого Бетховена — композитор у своєму творі використовує основну тему як своєрідну площину симетрії, від якої ніби відбиваються окремі епізоди й варіації. Симетрія в музиці наочно проявляється навіть через нотний запис (рис. 241).

Невичерпні можливості симетрії і те широке застосування, якого вона набула в різних царинах людської діяльності, підтверджують універсальність геометричних знань і значущість геометрії в загальнолюдській культурі.

Рис. 241. Гама до-мажор

15.3. Паралельне перенесення в просторі

Паралельне перенесення в просторі є різновидом паралельного проєкціювання для випадку, коли площина фігури, що проєктується, паралельна площині проєкції (або збігається з нею).

Нагадаємо, що співнапрямленими променями ми називали:

1) два промені однієї прямої, один із яких є частиною іншого (такими є промені AC і BC на рис. 242, *а*);

2) два паралельні промені, які лежать у площині по один бік від прямої, що проходить через їхні початкові точки (такими є промені AB і CD на рис. 242, *б*).

Означення паралельного перенесення в стереометрії нічим не відрізняється від планіметричного. **Паралельним перенесенням** фігури F у напрямі променя OA на відстань a називається перетворення фігури F у фігуру F', унаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F' так, що промені XX' і OA співнапрямлені і $XX' = a$ (рис. 243).

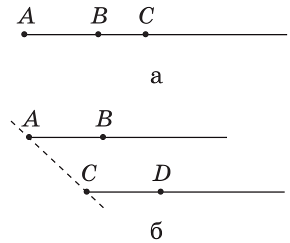


Рис. 242. Співнапрямлені промені

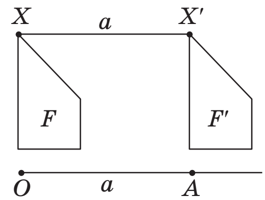


Рис. 243. Паралельне перенесення фігури F у напрямі променя OA на відстань a

Теорема (основна властивість паралельного перенесення в просторі)

> Паралельне перенесення в просторі є переміщенням.

Доведення

☐ Нехай унаслідок паралельного перенесення точки A і B переходять у точки A' і B' відповідно. Покажемо, що $AB = A'B'$. Якщо точки A, B, A' і B' не лежать на одній прямій (рис. 244, *а*), то відрізки AA' і BB' паралельні й рівні. Звідси $AA'B'B$ — паралелограм, тобто $AB = A'B'$ як протилежні сторони паралелограма. У випадку, коли точки A,

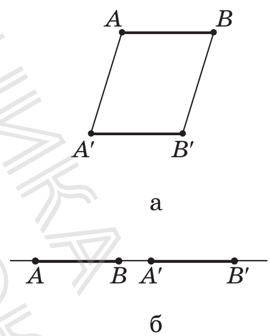


Рис. 244. До доведення основної властивості паралельного перенесення

B, A' і B' лежать на одній прямій (рис. 244, *б*), маємо: $A'B' = \left| AB' - AA' \right| = \left| AB' - BB' \right| = AB$. ■

Перевірте самостійно, що для інших випадків розміщення точок A, B, A' і B' на одній прямій щойно розглянуте доведення є правильним.

Наслідок 1

Паралельне перенесення переводить пряму в паралельну пряму (або в ту саму пряму), відрізок — у рівний йому відрізок, кут — у рівний йому кут.

Наслідок 2

Паралельне перенесення переводить площину в паралельну площину (або в ту саму площину).

Справді, оскільки паралельне перенесення є переміщенням, то воно переводить довільну площину α в площину β. Якщо ці площини не збігаються (рис. 245), то довільні прямі a_1 і a_2 площини α переходять у паралельні їм прямі b_1 і b_2 відповідно, і за ознакою паралельності площин $\alpha \parallel \beta$.

Так само як і на площині, у просторі за умови введення системи координат (рис. 246) паралельне перенесення, яке переводить точку $M(x; y; z)$ у точку $M'(x'; y'; z')$, можна задати формулами:

$$x' = x + a,\ \ y' = y + b,\ \ z' = z + c,$$

де a, b і c — деякі числа, одні й ті самі для всіх точок простору (доведення цього факту в стереометрії аналогічне планіметричному). Як приклад застосування цих формул розглянемо інший спосіб розв'язання задачі п. 14.2.

Про орієнтацію поверхні та випадки неорієнтованих поверхонь ви можете дізнатися за посиланням, звернувшися до інтернет-підтримки підручника.

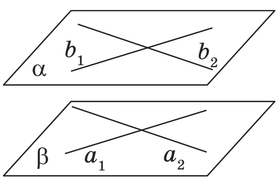


Рис. 245

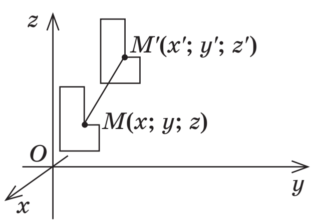


Рис. 246. Паралельне перенесення в прямокутній системі координат у просторі

Задача

Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(-2;1;0)$, $B(4;-3;2)$, $C(6;3;-4)$, $D(0;7;-6)$ є паралелограмом.

Розв'язання

Покажемо, що паралельне перенесення, яке переводить точку B в точку C, переводить точку A в точку D (рис. 247). Спочатку знайдемо формули цього перенесення. Підставивши в загальні формули паралельного перенесення координати точок B і C, одержимо рівняння, з яких визначимо a, b і c: $6=4+a$; $3=-3+b$; $-4=2+c$. Звідси $a=2$; $b=6$; $c=-6$.

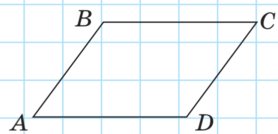


Рис. 247

Отже, шукане перенесення задається формулами $x'=x+2$, $y'=y+6$, $z'=z-6$.

Підставивши в отримані формули координати точок A і D, маємо правильні рівності: $0=-2+2$, $7=1+6$, $-6=0-6$.

Оскільки за умовою $ABCD$ — чотирикутник, його вершини не лежать на одній прямій. Отже, за властивістю паралельного перенесення в чотирикутнику $ABCD$ дві сторони паралельні й рівні, тобто $ABCD$ — паралелограм.

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

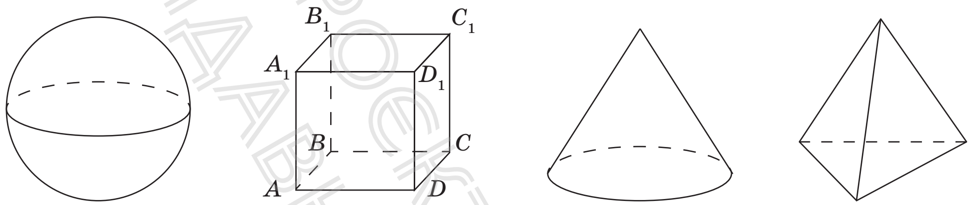
611°. Чи можуть два нерівні відрізки суміщатися переміщенням? Чи можуть гострий і тупий кути суміщатися переміщенням?

612. Два відрізки симетричні відносно площини α. Чи лежать дані відрізки в одній площині? Чи збігається ця площина з площиною α?

613. Перекладіть англійською (чи іншою іноземною мовою) умову та власне розв'язання задачі 612. Обміняйтесь зошитами із сусідом чи сусідкою по парті для взаємної перевірки правильності розв'язання.

614. Чи має площину симетрії відрізок; пряма; двогранний кут?

615. Серед даних просторових фігур (рис. 248) назвіть ті, які мають: а) центр симетрії; б) вісь симетрії; в) площину симетрії.



Куля а | Куб б | Конус в | Правильний тетраедр г

Рис. 248

616. Дано паралелограм, який не є ані прямокутником, ані ромбом. Чи має він вісь симетрії на площині, яка його містить; у просторі?

617. Чи збігаються множини осей симетрії кола на площині даного кола й у просторі?

618. У кубі пофарбували дві грані. Чи завжди існує поворот, унаслідок якого куб переходить у себе, а одна з пофарбованих граней — в іншу? У випадку ствердної відповіді опишіть такий поворот.

619•. Чи існує паралельне перенесення, яке переводить:

а) одну з двох паралельних прямих в іншу;
б) одну з двох мимобіжних прямих в іншу;
в) одну з двох основ циліндра в іншу;
г) одну з двох граней піраміди в іншу?

620. Ребро AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 248, *б*) унаслідок паралельного перенесення переходить у ребро DD_1. Визначте, у яку фігуру при такому перенесенні переходить:

а) вершина B; б) відрізок B_1A; в) трикутник A_1BB_1.

621. У яку рукавичку (праву чи ліву) переходить права рукавичка внаслідок центральної симетрії; осьової симетрії; симетрії відносно площини?

Моделюємо

622•. Виріжте з пінопласту дві фігури, симетричні відносно площини α (рис. 249). Чи можна в механізмі, який має такі деталі, замінити одну з них симетричною?

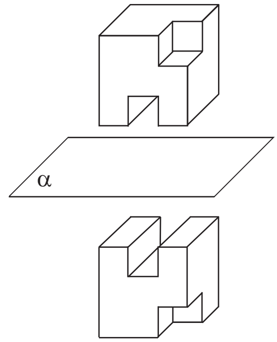


Рис. 249

623•. Сконструюйте фігуру, яка складається з куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ та фігури, отриманої з даного куба внаслідок паралельного перенесення в напрямі променя AD_1 на відстань, що дорівнює половині відрізка AD_1.

624. Використовуючи програму Geogebra чи інший графічний редактор із підтримкою 3D-моделювання, навчіться відображати точку відносно даної площини.

Розв'язуємо задачі

Рівень А

625•. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ діагоналі основи $ABCD$ перетинаються в точці O. Визначте:

а) точку, симетричну точці B відносно площини ACC_1;
б) пряму, симетричну прямій AB відносно точки O;
в) площину, симетричну площині BCC_1 відносно точки O;
г) пряму, симетричну прямій CC_1 відносно площини BDD_1;
д) площину, симетричну площині ADD_1 відносно прямої B_1D_1.

626•. Нарисуйте зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте фігуру, симетричну даному кубу відносно:

а) точки C_1; б) прямої BD; в) площини A_1AD.

627•. Дано точки $A(4;2;-1)$, $B(-3;5;2)$, $C(7;-1;-6)$. Назвіть координати точок, симетричних даним точкам відносно:

а) початку координат; б) площини Oyz; в) осі аплікат.

628. Змоделюйте умову та розв'язання задачі 627, використовуючи програму Geogebra чи інший графічний редактор із підтримкою 3D-моделювання.

629. Знайдіть координати точок, симетричних точці $M(5;-12;7)$ відносно:

а) точки $N(-1;0;2)$; б) площини Oxz; в) осі абсцис.

630. Точки A і B симетричні відносно точки M. Знайдіть координати:

а) точки M, якщо $A(-11;8;3)$, $B(-5;2;-1)$;

б) точки B, якщо $A(2;1;-3)$, а точка M лежить на додатній півосі осі аплікат і віддалена від початку координат на 1.

631. Точки $A(0;-2;1)$ і $B(4;0;5)$ симетричні відносно точки C. Знайдіть координати точки, симетричної точці C відносно точки A.

632. Нарисуйте зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте фігуру, у яку переходить даний куб унаслідок паралельного перенесення, що переводить:

а) вершину C у вершину B;

б) вершину A у вершину C_1.

633. Паралельне перенесення задане формулами $x'=x-1$, $y'=y+4$, $z'=z-2$. Знайдіть координати точки:

а) у яку переходить точка $A(8;1;0)$;

б) яка переходить у точку $B(-1;-2;-3)$.

634. Чи існує паралельне перенесення, унаслідок якого точка $M(0;-1;6)$ переходить у точку $M'(-1;1;4)$, а точка $N(1;-2;-2)$ — у початок координат?

635. Унаслідок паралельного перенесення в напрямі променя AB площина α переходить у себе. Доведіть, що пряма AB і площина α не перетинаються.

636. Пряма a і площина α перпендикулярні. Унаслідок паралельного перенесення пряма a переходить у пряму a'. Доведіть, що $a' \perp \alpha$.

Рівень Б

637. Нарисуйте зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте фігуру, у яку переходить даний куб унаслідок симетрії відносно:

а) середини ребра C_1D_1; б) прямої AC.

638. Дано точки $A(0;-2;3)$ і $B(8;0;-1)$. Знайдіть точку, симетричну середині відрізка AB відносно:

а) точки $(-1;2;3)$; б) площини Oxz; в) осі абсцис.

639. Точка $M(3;1;5)$ належить колу з центром O. Знайдіть радіус кола, якщо внаслідок симетрії відносно осі аплікат центр кола переходить у точку $O'(-5;1;4)$.

640. Дано площини α і β. Чи правильно, що завжди існує площина γ, відносно якої дані площини симетричні? Якщо так, то як побудувати площину γ?

641. Унаслідок симетрії відносно площини α площина β переходить у площину β'. Доведіть, що:

а) коли $\beta \parallel \alpha$, то $\beta' \parallel \alpha$; б) коли $\alpha \perp \beta$, то β' збігається з β.

642. Три вершини паралелограма $ABCD$ мають координати $A(0;-1;9)$, $B(3;8;4)$, $C(2;9;1)$. Унаслідок паралельного перенесення вершина D переходить у точку $(2;2;5)$. У яку точку переходить центр симетрії паралелограма?

643. Дано паралелограм $ABCD$. За допомогою геометричних перетворень знайдіть координати:

а) вершини A, якщо $B(-1;2;0)$, $C(3;4;1)$, $D(2;-2;4)$;

б) вершин C і D, якщо $A(-5;1;3)$, $B(0;-4;1)$, а точка $O(-3;0;2)$ — точка перетину діагоналей.

Рівень В

644. Усі ребра тетраедра $PABC$ рівні між собою. Точки E і F — середини ребер PA і BC відповідно. Доведіть, що пряма EF — вісь симетрії тетраедра.

645. У прямокутній системі координат точку M симетрично відобразили відносно площини Oxy, отриману точку — відносно початку координат, а отриману після цього точку — відносно площини Oxz. Доведіть, що точка M', отримана в результаті цих трьох перетворень, симетрична точці M відносно площини Oyz.

646. У якому напрямі і на яку відстань слід здійснити паралельне перенесення куба, щоб спільною частиною даного куба і куба, отриманого внаслідок перенесення, також був куб? Виконайте рисунок.

Повторення перед вивченням § 16

Теоретичний матеріал

- вектори на площині 9 клас, § 14

Задачі

647. На площині вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ відкладені від однієї точки, причому кут між будь-якими двома з них дорівнює 120°. Знайдіть суму $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, якщо $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$.

648. Визначте вид плоского чотирикутника $ABCD$, якщо $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.

§ 16 Вектори в просторі

16.1. Означення і властивості векторів у просторі

Переважна більшість понять і тверджень щодо векторів безпосередньо переноситься в стереометрію з планіметрії. Нагадаємо основні положення відповідної геометричної теорії, докладно зупиняючись на тих із них, які в просторі виглядають інакше, ніж на площині.

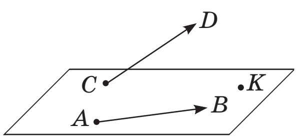


Рис. 250. Вектори в просторі

Як відомо з курсу геометрії 9 класу, **вектором** називається напрямлений відрізок. Напрям вектора (від початку до кінця) на рисунках позначають стрілкою. Вектор, початок і кінець якого збігаються, називають ***нульовим***. Напрям нульового вектора не визначається. На рис. 250 зображено ненульові вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ та нульовий вектор $\overrightarrow{KK}$. Нульовий вектор часто позначають $\vec{0}$.

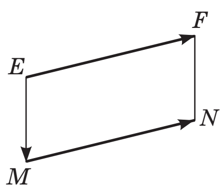


Рис. 251. Рівні вектори

Так само як і на площині, ненульовий вектор у просторі характеризується не лише напрямом, але й довжиною. Це дозволяє розглядати паралельне перенесення в напрямі променя AB на відстань, що дорівнює довжині відрізка AB, як ***паралельне перенесення на вектор*** $\overrightarrow{AB}$. У просторі, як і на площині, **рівними векторами** називаються вектори, які суміщаються паралельним перенесенням. На рис. 251 зображено рівні вектори $\overrightarrow{EF}$ і $\overrightarrow{MN}$, які суміщаються паралельним перенесенням на вектор $\overrightarrow{EM}$.

Унаслідок того, що розміщення точки в просторі задається трьома координатами, доповнюється означення координат вектора.

Означення

Координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ з початком у точці $A(x_1; y_1; z_1)$ і кінцем у точці $B(x_2; y_2; z_2)$ називають числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$.

Відповідно ***довжина (модуль) вектора*** $\overrightarrow{AB}(a_1; a_2; a_3)$ ***обчислюється за формулою***

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}.$$

Нульовий вектор має нульові координати, і його довжина дорівнює нулю: $\left|\vec{0}\right| = 0$.

Як і на площині, **у просторі рівні вектори мають рівні координати, і навпаки: якщо у векторів відповідні координати рівні, то ці вектори рівні.**

Нагадаємо, що в просторі, як і на площині, ненульові вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називають **колінеарними**. Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору.

У свою чергу, серед колінеарних векторів розрізняють ***співнапрямлені*** й ***протилежно напрямлені***. Якщо промені AB і CD співнапрямлені, то ненульові вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ також співнапрямлені (пишуть $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$); якщо промені AB і CD протилежно напрямлені, то вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ протилежно напрямлені (пишуть $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$). На рис. 252 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На цьому рисунку вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{CC_1}$ співнапрямлені, а вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{D_1D}$ протилежно напрямлені. Протилежно напрямлені вектори, довжини яких рівні, називають ***протилежними***. На рис. 252 такими є, наприклад, вектори $\overrightarrow{CC_1}$ і $\overrightarrow{D_1D}$ (пишуть $\overrightarrow{CC_1} = -\overrightarrow{D_1D}$).

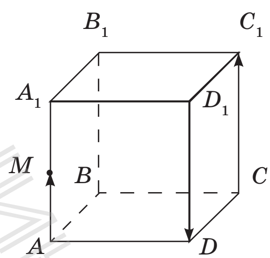


Рис. 252. Співнапрямлені та протилежно напрямлені вектори

Задача

Дано точки $A(-7;4;2)$ і $B(-2;0;-1)$. Знайдіть координати кінців вектора $\overrightarrow{CD}$, який дорівнює вектору $\overrightarrow{AB}$, якщо точка C лежить на осі аплікат, а точка D — у площині Oxy.

Розв'язання

Нехай $\overrightarrow{CD}(a_1;a_2;a_3)$. Оскільки $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$, то $a_1=-2-(-7)=5$, $a_2=0-4=-4$, $a_3=-1-2=-3$. Отже, $\overrightarrow{CD}(5;-4;-3)$. Ураховуючи умови розміщення точок C і D, маємо: $C(0;0;z)$, $D(x;y;0)$, тобто $\overrightarrow{CD}(x;y;-z)$. Звідси $x=5$, $y=-4$, $z=3$.

Відповідь: $C(0;0;3)$, $D(5;-4;0)$.

16.2. Операції над векторами в просторі

Операції **додавання** і **віднімання** для векторів у просторі означають аналогічно до того, як їх вводили на площині. Отже, для векторів $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ і $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)},$$
$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)}.$$

Так само зберігаються в просторі й відповідні ***властивості*** вищезгаданих операцій. Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;
3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
4) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Доведення тверджень 1–4 неважко одержати за допомогою геометричних побудов аналогічно до того, як це проводилося на площині.

Для дій із неколінеарними векторами в геометричній формі в просторі, як і на площині, можна користуватися ***правилом трикутника*** (рис. 253, *а*) і ***правилом паралелограма*** (рис. 253, *б*). Правила додавання двох колінеарних векторів ілюструє рис. 253, *в, г*.

Узагальненням правила трикутника для додавання декількох векторів є ***правило многокутника*** (рис. 254, *а*). Особливість його застосування в просторі полягає в тому, що вектори-доданки не обов'язково належать одній площині (тобто многокутник, який утворюється в процесі побудови вектора-суми, може бути просторовим). Наприклад, на рис. 254, *б* у тетраедрі $PABC$ маємо векторну рівність $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AC}$.

Опишемо ще одне правило, яким зручно користуватися для додавання трьох векторів у просторі. Нехай вектори-доданки $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ при відкладанні їх від спільного початку O не лежать в одній площині. Побудуємо паралелепіпед так, щоб відрізки OA, OB і OC, які зображають вектори-доданки, були його ребрами (рис. 255). Тоді, використовуючи правило паралелограма, маємо $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$. Отже, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{OD}$, тобто ***вектор-сума зображається діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на векторах-доданках***. Це правило додавання векторів є просторовим аналогом правила паралелограма і називається ***правилом паралелепіпеда***.

Добутком вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ **на число** k (або добутком числа k на вектор $\vec{a}$) у просторі називають вектор $\overrightarrow{(ka_1; ka_2; ka_3)}$, який позначають $k\vec{a}$ або $\vec{a}k$. Якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$, то вектор $k\vec{a}$ співнапрямлений із вектором $\vec{a}$ за умови $k>0$ і протилежно напрямлений вектору $\vec{a}$ за умови $k<0$, причому при будь-якому значенні k

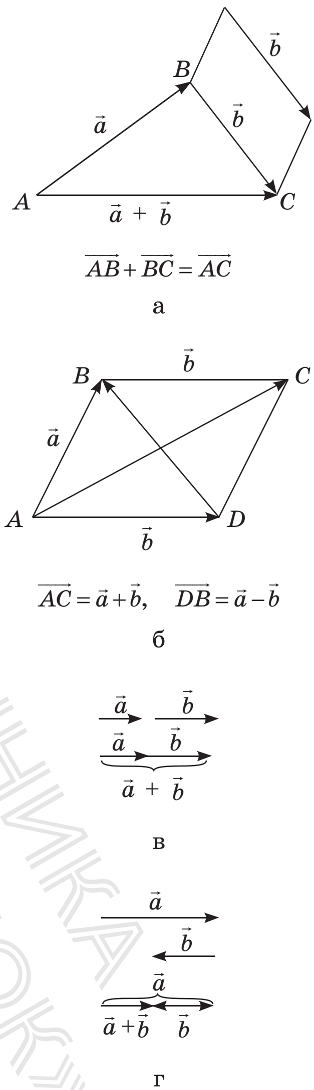


Рис. 253. Правила для дій з векторами

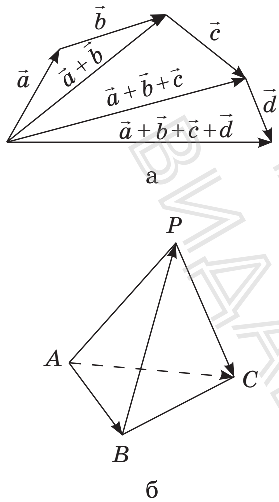


Рис. 254. Додавання векторів за правилом многокутника

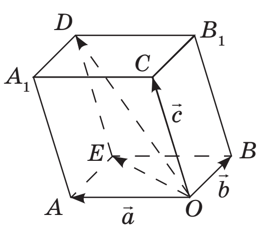


Рис. 255. Додавання векторів за правилом паралелепіпеда

$|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$. Зокрема, $(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$, де $-\vec{a}$ — вектор, протилежний вектору $\vec{a}$.

Основні властивості множення вектора на число, відомі з курсу планіметрії, у стереометрії зберігаються. Для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та чисел k, m:

1) $k\vec{a} = \vec{a}k$;

2) $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$;

3) $k\vec{0} = 0\vec{a} = \vec{0}$;

4) $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$;

5) $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

Доведення тверджень 1–5 є цілком аналогічним до випадку на площині. Доведемо, наприклад, твердження 4. Нехай дано вектор $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$. Тоді, за означеннями добутку вектора на число та суми векторів, маємо:

$$(k+m)\vec{a} = \overrightarrow{((k+m)a_1; (k+m)a_2; (k+m)a_3)} =$$

$$= \overrightarrow{(ka_1 + ma_1; ka_2 + ma_2; ka_3 + ma_3)} =$$

$$= \overrightarrow{(ka_1; ka_2; ka_3)} + \overrightarrow{(ma_1; ma_2; ma_3)} = k\vec{a} + m\vec{a}.$$

У просторі зберігається також необхідна й достатня умова колінеарності векторів: ***якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — колінеарні вектори, то існує число k таке, що $\vec{b} = k\vec{a}$, і навпаки: якщо для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справджується рівність $\vec{b} = k\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.***

Під час розв'язування задач векторну рівність $\vec{b} = k\vec{a}$ для векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ часто застосовують у координатній формі: $\begin{cases} b_1 = ka_1, \\ b_2 = ka_2, \\ b_3 = ka_3. \end{cases}$

При цьому за умови, що дані вектори не мають нульових координат, зручно використовувати пропорційні співвідношення $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = k$.

У просторі, як і на площині, необхідною і достатньою умовою належності точок A, B і C одній прямій є колінеарність векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Розглянемо ще одну векторну умову належності точок A, B і C одній прямій.

Опорна задача

(умова належності трьох точок одній прямій)

Якщо точки A, B і C лежать на одній прямій, то для будь-якої точки простору O справджується векторна рівність $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$, де k — деяке число. Доведіть.

Розв'язання

Оскільки точки A, B і C лежать на одній прямій, то вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{BA}$ колінеарні, тобто існує число k таке, що $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BA}$. Ураховуючи, що $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$, маємо:

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = k\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right),\ \overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB},$$

що й треба було довести.

16.3. Скалярний добуток векторів у просторі

Означення

Скалярним добутком векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ називається число $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Зазвичай скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ позначають $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $\vec{a}\vec{b}$.

Властивості скалярного добутку векторів, відомі з курсу планіметрії, у просторі зберігаються. Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ та числа k:
1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$; 2) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$; 3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Доведення тверджень 1–3 є цілком аналогічним до випадку на площині. Доведемо, наприклад, твердження 3. Нехай дано вектори $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ та $\vec{c}(c_1;c_2;c_3)$. Тоді, за означенням скалярного добутку, маємо:

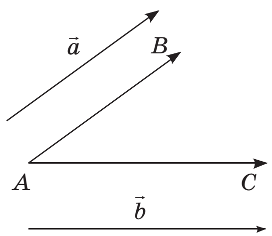
$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\overrightarrow{(a_1;a_2;a_3)}+\overrightarrow{(b_1;b_2;b_3)}\right)\cdot\overrightarrow{(c_1;c_2;c_3)}=$$

$$=\overrightarrow{(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)}\cdot\overrightarrow{(c_1;c_2;c_3)}=$$

$$=(a_1+b_1)\cdot c_1+(a_2+b_2)\cdot c_2+(a_3+b_3)\cdot c_3=$$

$$=(a_1\cdot c_1+a_2\cdot c_2+a_3\cdot c_3)+(b_1\cdot c_1+b_2\cdot c_2+b_3\cdot c_3)=$$

$$=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$



$\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\angle BAC$

Рис. 256. Кут між векторами

У просторі **кутом між ненульовими векторами** $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ називають кут BAC, а **кутом між довільними ненульовими векторами** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — кут між векторами, що дорівнюють даним векторам і мають спільний початок (рис. 256).

Так само як і на площині, у просторі доводять, що скалярний добуток векторів дорівнює добутку їхніх довжин на косинус кута між ними. Отже, $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)}$.

і $\boldsymbol{\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}}$. З формули скалярного добутку векторів випливає, що скалярний квадрат вектора $\vec{a}$ дорівнює квадрату його довжини: $\vec{a}^{\,2}=\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|a\right|^2$. Зберігається також необхідна й достатня умова перпендикулярності двох векторів: ***якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, і навпаки: якщо для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справджується рівність $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, то $\vec{a}\perp\vec{b}$.***

Задача

Доведіть за допомогою векторів, що пряма, перпендикулярна до двох сторін трикутника, перпендикулярна і до третьої його сторони.

Розв'язання

Нехай пряма MN перпендикулярна до сторін AB і BC трикутника ABC (рис. 257). Доведемо, що $MN \perp AC$. За властивістю перпендикулярних векторів $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Оскільки $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, то $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MN} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Отже, за ознакою перпендикулярності векторів вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{AC}$, а отже, і прямі MN і AC перпендикулярні.

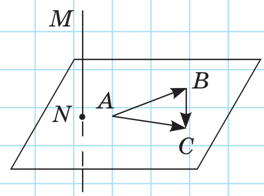


Рис. 257

Властивості векторів широко застосовуються у фізиці й техніці, де дослідникам часто доводиться розглядати в просторі векторні величини — силу, швидкість, переміщення тощо. Наприклад, електричний струм, напрям якого задано вектором $\vec{n}$, утворює магнітне поле, яке в кожній точці простору характеризується вектором магнітної індукції $\vec{B}$ (рис. 258). На тіло, занурене в рідину, діють одночасно сила тяжіння і виштовхувальна сила Архімеда (рис. 259). На тіло, що рухається по похилій площині, діють сили тяжіння, тертя та реакції опори (рис. 260).

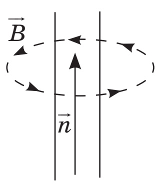


Рис. 258. Вектори магнітної індукції магнітного поля прямого провідника зі струмом

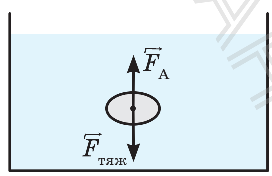


Рис. 259. Вектори сили тяжіння та сили Архімеда

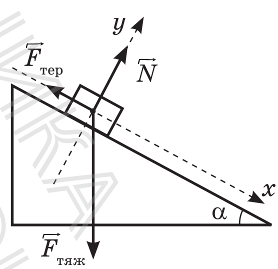


Рис. 260. Вектори сили тяжіння, сили тертя, сили реакції опори

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

649°. Дано вектор $\overrightarrow{AB}(a; b; c)$. Назвіть координати вектора $\overrightarrow{BA}$.

650°. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M і N — середини ребер AA_1 і CC_1 відповідно (рис. 261). Назвіть вектори з початком і кінцем у точках, позначених на рисунку, які:

а) дорівнюють вектору $\overrightarrow{AM}$;

б) співнапрямлені з вектором $\overrightarrow{CN}$, але не дорівнюють йому;

в) протилежно напрямлені з вектором $\overrightarrow{MN}$;

г) протилежні вектору $\overrightarrow{BC}$;

д) колінеарні вектору $\overrightarrow{A_1B_1}$.

651. Відомо, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Яким може бути взаємне розміщення:

а) прямих AC і BD;

б) точки D і площини, яка проходить через точки A, B і C;

в) прямої AB і площини, яка проходить через точки C і D?

652. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 261). Укажіть вектор із початком і кінцем у вершинах куба, що дорівнює:

а) $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1C}$; г) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC_1}$;

б) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A_1B_1}$; д) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1}$.

в) $\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BC}$;

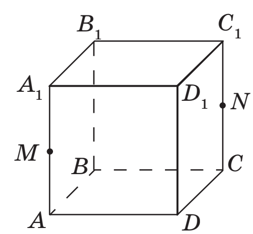


Рис. 261

653. Подайте вектори $\overrightarrow{A_1C_1}$ і $\overrightarrow{NM}$ у вигляді різниці двох векторів, початки і кінці яких збігаються з точками, позначеними на рис. 261.

654. На рис. 262 точки D, E, F і M — середини ребер тетраедра $PABC$. Визначте число k з векторної рівності:

а) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{ED} = k\overrightarrow{PC}$;

б) $\overrightarrow{PF} = k\overrightarrow{BP}$; г) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{MD}$.

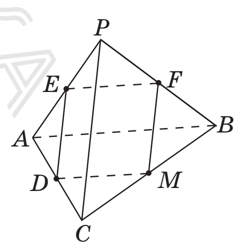


Рис. 262

655. Кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ дорівнює φ. Знайдіть кут між векторами:

а) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{DC}$.

б) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{CD}$;

656. За рис. 261 знайдіть кут між векторами:

а) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{CD_1}$ і $\overrightarrow{B_1A}$; д) $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB_1}$.

б) $\overrightarrow{B_1B}$ і $\overrightarrow{B_1C}$; г) $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{A_1B}$;

657. Назвіть декілька пар векторів, скалярний добуток яких дорівнює нулю, а початок і кінець збігаються з точками, позначеними на рис. 261.

658. Перекладіть англійською (чи іншою іноземною мовою) основні терміни § 16: «вектор», «довжина та напрям вектора», «сума та різниця векторів», «добуток вектора на число», «скалярний добуток векторів», «кут між векторами».

Моделюємо

659•. Виготовте з дроту модель паралелепіпеда. Продемонструйте застосування правила паралелепіпеда для додавання трьох векторів.

660•. Виготовте модель біпіраміди, усі ребра якої дорівнюють одне одному (рис. 263). На підставі правила многокутника запишіть суму векторів, які зображаються ребрами біпіраміди, так, щоб кожне ребро входило до суми рівно один раз, а сама сума дорівнювала нульовому вектору. Чи можна скласти таку нульову суму для трикутної піраміди?

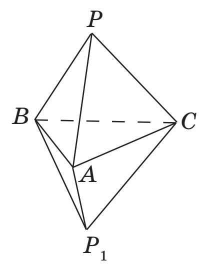


Рис. 263

Розв'язуємо задачі*

Рівень А

661•. Знайдіть координати й довжину вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:

а) $A(-4;0;2)$, $B(-1;4;2)$; в) $A(3;7;0)$, $B(-2;4;-1)$.

б) $A(6;1;-4)$, $B(0;-1;-7)$;

662. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо $A(4;-1;7)$, $B(-2;3;6)$, $C(-1;5;1)$, $D(5;1;2)$.

663. Знайдіть значення m, при якому:

а) довжина вектора $\vec{a}(-4;m;2)$ дорівнює 6;

б) вектор $\vec{a}(3m;8;-4m)$ має довжину 17.

* У відповідях до деяких задач цього параграфа подається один із можливих варіантів правильної відповіді.

664. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть вектор із початком і кінцем у вершинах куба, який дорівнює:

а) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1D}$;
б) $\overrightarrow{BC_1}-\overrightarrow{BA}$;
в) $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{C_1C}$;
г) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{A_1B_1}$;
д) $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{A_1D}$;
е) $\overrightarrow{DA_1}-\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1B}$.

665. Дано трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Укажіть вектор із початком і кінцем у вершинах призми, який дорівнює:

а) $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{CB}$;
б) $\overrightarrow{B_1A}-\overrightarrow{C_1C}$;
в) $\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{B_1A}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{AC}$.

666. Дано вектори $\vec{a}(2;-3;1)$, $\vec{b}(-8;0;2)$, $\vec{c}(4;-2;1)$. Знайдіть координати вектора:

а) $\vec{a}+2\vec{c}$;
б) $3\vec{a}-\vec{b}$;
в) $0{,}5\vec{b}-3\vec{c}$.

667. Знайдіть координати й довжини векторів $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$, якщо $\vec{a}(0;-1;4)$, $\vec{b}(2;-2;2)$.

668. Доведіть, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, якщо:

а) $\vec{a}(-3;9;6)$, $\vec{b}(1;-3;-2)$;
б) $\vec{a}(0;2;-3)$, $\vec{b}(0;8;-12)$;
в) $\vec{a}(10;-25;20)$, $\vec{b}(-14;35;-28)$.

669. Чи колінеарні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, якщо $A(8;-3;0)$, $B(-1;2;3)$, $C(0;6;-4)$, $D(9;1;-1)$?

670. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}(-3;2;-1)$, $\vec{b}(1;4;2)$;
б) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=120°$;
в) $\angle(\vec{a},\vec{b})=90°$.

671. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 1. Знайдіть скалярний добуток:

а) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CC_1}$;
б) $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{AD}$;
в) $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}$;
г) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{D_1A_1}$;
д) $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{DC_1}$.

672. Дано вектори $\vec{a}(4;1;-2)$ і $\vec{b}(-1;8;m)$. При якому значенні m:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$;
б) $\vec{a}\cdot\vec{b}=8$;
в) $\vec{a}\perp\vec{b}$?

673. Дано вектори $\vec{a}(-1;-2;1)$, $\vec{b}(3;-1;1)$, $\vec{c}(-5;1;0)$. Серед даних векторів виберіть пару векторів, кут між якими є:

а) тупим; б) прямим.

674. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 120°, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-9$. Знайдіть довжини цих векторів, якщо вектор $\vec{a}$ вдвічі довший за $\vec{b}$.

Рівень Б

675. Знайдіть координати кінців вектора $\overrightarrow{AB}(-9;1;3)$, якщо його початок лежить на осі ординат, а кінець — у площині Oxz.

676. За допомогою векторів знайдіть координати вершини A паралелограма $ABCD$, якщо $B(8;-1;3)$, $C(-2;0;1)$, $D(-3;4;5)$.

677. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть вектор $\vec{a}$ з початком і кінцем у вершинах куба, який задовольняє рівність:

а) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\vec{a}+\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{BD}$;

б) $\overrightarrow{BA}+\vec{a}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$.

678. Дано паралелограм $ABCD$, O — довільна точка простору. Доведіть, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

679. Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, O — довільна точка простору. Доведіть, що $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD_1}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB_1}$.

680. Точки M і N — середини ребер PA і BC тетраедра $PABC$, точка O — середина відрізка MN. Доведіть, що $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

681. Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{B_1D}=2\overrightarrow{BC}$.

682. Чи може дорівнювати нульовому вектору сума трьох векторів, довжини яких дорівнюють:

а) 1, 4 і 6; б) 2, 9 і 7; в) 5, 6 і 8?

Визначте закономірності й узагальніть отримані результати.

683. До точки $M(1;-2;4)$ прикладені сили $\vec{F_1}(2;-5;0)$ і $\vec{F_2}(-1;3;2)$ (рис. 264). Знайдіть точку, у яку переходить точка M під дією рівнодійної цих сил.

К **684.** Пригадайте, у якій темі з фізики використовуються властивості векторів у просторі. Сформулюйте деяку задачу за цією темою та запропонуйте друзям та подругам разом знайти її розв’язання. У разі потреби проконсультуйтеся зі вчителем фізики.

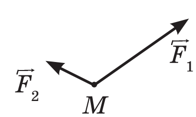


Рис. 264

685. Знайдіть координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{(4;-2;-1)}$, $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{(-4;-4;3)}$.

686. Діагоналі куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перетинаються в точці O. Знайдіть значення k, при якому:

а) $\overrightarrow{B_1A}=k\overrightarrow{DC_1}$;

б) $\overrightarrow{DA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=k\overrightarrow{DO}$;

в) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{C_1O}$.

687. Чи лежать точки A, B і C на одній прямій, якщо:

а) $A(6;-1;0)$, $B(0;5;-3)$, $C(4;1;-1)$;

б) $A(-3;1;1)$, $B(-1;4;-5)$, $C(0;-2;-4)$;

в) $A(-7;3;-2)$, $B(-12;14;-9)$, $C(3;-19;12)$?

У випадку ствердної відповіді визначте, яка з даних точок лежить між двома іншими.

688. Вершини чотирикутника $ABCD$ мають координати $A(4;0;-2)$, $B(5;2;0)$, $C(-3;2;6)$, $D(0;0;1)$. Доведіть, що $ABCD$ — трапеція.

689. Дано точки $A(0;2;-1)$, $B(0;1;-2)$, $C(1;2;-2)$. Знайдіть кут ABC.

690. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 60°, $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$. Знайдіть:

а) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}$; б) $(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot\vec{a}$; в) $(\vec{a}-2\vec{b})^2$.

Рівень В

691. Дано тетраедр $PABC$. Побудуйте точку M, яка задовольняє векторну рівність $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PM}=\vec{0}$.

692. Точки K, M і N — середини сторін трикутника ABC, точка O — довільна точка простору. Доведіть, що $\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

693. Відрізки, що сполучають середини протилежних сторін чотирикутника $ABCD$, перетинаються в точці M, точка O — довільна точка простору. Доведіть, що $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

694. Пряма AB перетинає площину Oxy в точці C. Знайдіть її координати, якщо $A(3;-8;7)$, $B(-1;2;-7)$.

695. Знайдіть координати точки перетину прямої AB з віссю аплікат, якщо $A(2;6;7)$, $B(-1;-3;1)$.

696. Дано точки $A(2;3;5)$, $B(3;2;7)$, $C(6;-1;13)$, $D(5;0;11)$. Чи правильно, що чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом?

697. Дано точки $A(3;-2;7)$, $B(5;-4;9)$, $C(13;-8;-3)$, $D(0;-12;6)$. Доведіть, що пряма AB перпендикулярна до площини BCD.

698. Дано точки $A(2;-3;2)$, $B(6;-1;3)$, $C(9;-5;-1)$, $D(5;-7;-2)$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ є прямокутником.

699. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 60°. Кожен із даних векторів перпендикулярний до вектора $\vec{c}$. Знайдіть $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$, якщо $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1$.

700. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори. Знайдіть кути, які утворює вектор $\sqrt{2}\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ з кожним із даних векторів.

701 (опорна). ***Гомотетією з центром O та коефіцієнтом $k \uparrow 0$ називається таке перетворення фігури F у фігуру F', при якому кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F' так, що $\overrightarrow{OX'}=k\overrightarrow{OX}$.***

а) Доведіть, що гомотетія є перетворенням подібності, тобто для будь-яких точок A і B фігури F, що переходять у точки A' і B' фігури F', виконується рівність $A'B'=kAB$.

б) Доведіть, що гомотетія переводить площину в паралельну площину або в себе.

Повторення перед вивченням § 17

Теоретичний матеріал

- аксіоми стереометрії та наслідки з них 10 клас, § 1, 2
- метод координат і векторний метод на площині 9 клас, § 8, 17

Задачі

702. Точки M і N — середини сторін BC і CD паралелограма $ABCD$. Виразіть вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектори $\vec{a}=\overrightarrow{AM}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{AN}$.

703. Точки A, B, C і D не лежать на одній прямій. Доведіть, що коли $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$, то чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом.

§ 17 Координатний і векторний методи розв'язування стереометричних задач

17.1. Компланарні вектори. Розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами

Компланарні — від латинського «ком» — разом і «планум» — площина — розміщені в одній площині, спільноплощинні.

Розглядаючи вектори на площині, ми приділяли особливу увагу колінеарним векторам — векторам, які за умови відкладання їх від однієї точки лежать на одній прямій. У просторі важливу роль відіграють вектори, які за умови відкладання їх від однієї точки лежать в одній площині.

Означення

Вектори називаються **компланарними**, якщо при відкладанні їх від однієї точки вони лежать в одній площині.

З означення компланарних векторів випливає, що ***напрямлені відрізки, які зображають компланарні вектори, лежать в одній площині або в паралельних площинах.***

Очевидно, що будь-які два вектори компланарні. Компланарними є також три вектори, серед яких принаймні один нульовий, і три вектори, серед яких принаймні два колінеарні. Ці твердження безпосередньо випливають з означення (поясніть чому).

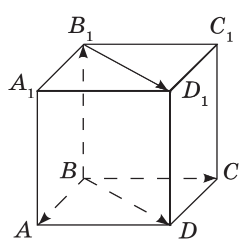


Рис. 265. Компланарні і некомпланарні вектори

На рис. 265 подано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вектори $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{BD}$ компланарні, оскільки відрізки BA, BC і BD лежать в одній площині; так само компланарними є вектори $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{B_1D_1}$, оскільки відрізки BA, BC і B_1D_1 лежать у паралельних площинах ABC і $A_1B_1C_1$. Вектори $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{BB_1}$ не є компланарними, оскільки відрізки BA, BC і BB_1 не лежать ані в одній площині, ані в паралельних площинах.

Опорна задача

(ознака компланарності трьох векторів)

Якщо вектор $\vec{c}$ можна розкласти за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто подати у вигляді $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$, де m і n — деякі числа, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні. Доведіть.

Розв'язання

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то компланарність векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ очевидна.

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні. Відкладемо від довільної точки простору O вектори $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ (рис. 266). Очевидно, що ці вектори, як і прямі OA і OB, лежать в одній площині. У тій самій площині лежать вектори $\overrightarrow{OA_1}=m\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB_1}=n\overrightarrow{OB}$, а отже, і їхня сума — вектор $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$, який дорівнює вектору $\vec{c}$. Таким чином, вектори $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ і $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ лежать в одній площині, тобто вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні.

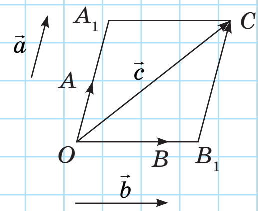


Рис. 266. До доведення ознаки компланарності трьох векторів

Зауважимо, що отримане векторне співвідношення $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ можна розглядати як ***умову належності точки O площині ABC.***

Нагадаємо: у 9 класі було доведено, що на площині для будь-якого вектора $\vec{c}$ існує єдине подання у вигляді $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$, де m і n — деякі числа, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — фіксовані неколінеарні вектори (таке подання називають розкладанням вектора $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$).

На відміну від площини, у просторі вектор не завжди можна розкласти за двома неколінеарними векторами, але завжди можна розкласти за трьома некомпланарними векторами.

Теорема (про розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами)

Будь-який вектор $\vec{d}$ можна розкласти за трьома некомпланарними векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто подати у вигляді $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, де m, n і p — деякі числа, причому таке розкладання єдине.

Доведення

□ Відкладемо від довільної точки простору O вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ і $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$. Проведемо через точку D пряму, паралельну OC. Вона перетинатиме площину AOB в деякій точці D_1. Розглянемо випадок, коли точка D_1 не належить жодній із прямих OA і OB (рис. 267). Проведемо через точку D_1 пряму, паралельну OB. Вона перетинатиме пряму OA в деякій точці D_2. За правилом многокутника

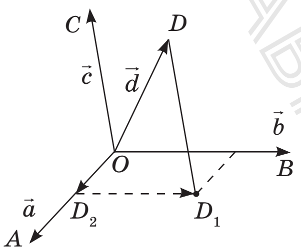


Рис. 267. До доведення теореми про розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD_2} + \overrightarrow{D_2D_1} + \overrightarrow{D_1D}. \qquad (1)$$

Але $\overrightarrow{OD_2}$ і $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{D_2D_1}$ і $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{D_1D}$ і $\overrightarrow{OC}$ — пари колінеарних векторів, отже, існують числа m, n і p такі, що $\overrightarrow{OD_2} = m\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{D_2D_1} = n\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{D_1D} = p\overrightarrow{OC}$. Підставивши ці вирази в рівність (1), отримаємо: $\overrightarrow{OD} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} + p\overrightarrow{OC}$, тобто

$$\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}. \qquad (2)$$

Інші випадки розміщення точки D_1 відносно площини AOB розгляньте самостійно.

Доведемо тепер єдиність розкладання (2) методом від супротивного. Нехай існує інший набір чисел m_1, n_1 і p_1 таких, що $\vec{d} = m_1\vec{a} + n_1\vec{b} + p_1\vec{c}$. Віднімаючи цю рівність від рівності (2), отримаємо $\vec{0} = (m - m_1)\vec{a} + (n - n_1)\vec{b} + (p - p_1)\vec{c}$.

Покажемо, що ця рівність має місце лише за умов $m-m_1=0$, $n-n_1=0$, $p-p_1=0$. Справді, якщо, наприклад, $p-p_1\neq 0$, то отримаємо $\vec{c}=-\frac{m-m_1}{p-p_1}\vec{a}-\frac{n-n_1}{p-p_1}\vec{b}$. Звідки за ознакою компланарності векторів випливає, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні, але це суперечить умові теореми. Отже, наше припущення хибне, тобто $m=m_1$, $n=n_1$, $p=p_1$, і отримане розкладання єдине. ■

Доведена теорема має широке практичне застосування. Наприклад, деякі космічні кораблі (рис. 268) мають три блоки двигунів, які дозволяють рухатися вздовж трьох некомпланарних векторів. Керуючи їх взаємодією, корабель у просторі можна спрямувати в будь-якому напрямку.

Рис. 268. Космічний корабель «Space Shuttle»

Зазначимо також зв'язок доведеної теореми з правилом паралелепіпеда. На рис. 269 діагональ DB_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ зображає суму трьох векторів: $\overrightarrow{DB_1}=\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

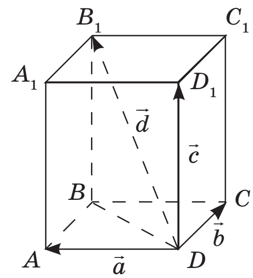


Рис. 269. Розкладання вектора за правилом паралелепіпеда

Ця теорема застосовується також і в прямокутній системі координат: вектор $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ часто розкладають за одиничними векторами $\vec{e}_1(1;0;0)$, $\vec{e}_2(0;1;0)$ та $\vec{e}_3(0;0;1)$, співнапрямленими з осями координат — такі вектори називають ***координатними векторами*** або ***ортами*** (рис. 270).

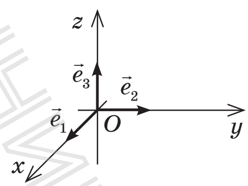


Рис. 270. Координатні вектори

Неважко довести, що коефіцієнти такого розкладання дорівнюють координатам вектора $\vec{a}$, тобто $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$.

Опорна задача

(про точку перетину медіан трикутника)

Якщо M — точка перетину медіан трикутника ABC, O — довільна точка простору, то $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$. Доведіть.

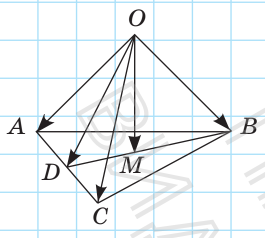


Рис. 271

Розв'язання

Нехай BD — медіана трикутника ABC (рис. 271). Оскільки за властивістю точки перетину медіан трикутника $\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$, то $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}=$

$$=\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}.$$

Оскільки $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)$ (поясніть чому), то

$$\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right).$$

Задача

У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ діагоналі грані CC_1D_1D перетинаються в точці O (рис. 272). Розкладіть вектор $\overrightarrow{AO}$ за векторами $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$.

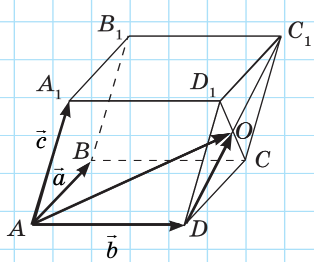


Рис. 272

Розв'язання

За правилом трикутника $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}$. Оскільки $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\vec{a}$,

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{DD_1}=\vec{c},\ \overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_1}\right)=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}).$$

Звідси маємо: $\overrightarrow{AO}=\vec{b}+\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

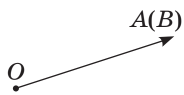
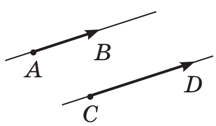
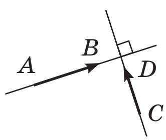
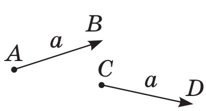
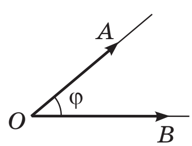
17.2. Векторний і координатний методи в просторі

Так само як і на площині, у просторі використання векторів і векторних співвідношень у багатьох випадках спрощує міркування й розрахунки в задачах і теоремах.

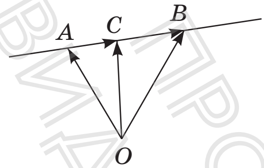
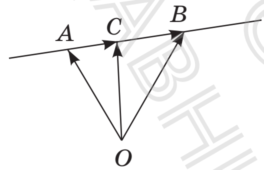
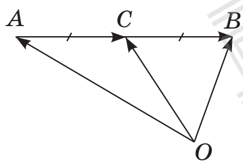
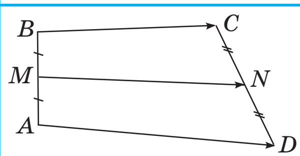
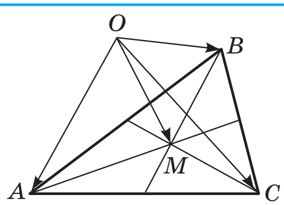
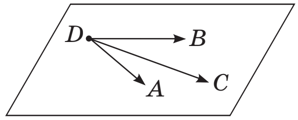
Застосування **векторного методу** передбачає три основні етапи:

1) сформулювати задачу «мовою векторів» — для цього необхідно розглянути вектори, пов'язані з даними відрізками, і скласти відповідні до умови задачі векторні рівності;
2) перетворити складені рівності, користуючись відомими векторними співвідношеннями;
3) перекласти отримані результати на «мову геометрії».

Для подання геометричних співвідношень «мовою векторів» і навпаки узагальнимо деякі отримані раніше результати в наведеній нижче таблиці.

№ з/п	Рисунок	Твердження «мовою геометрії»	Твердження «мовою векторів»
1		Точки A і B збігаються	$\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ або $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$, де O — деяка точка простору
2		$AB \parallel CD$	$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$, $k\neq 0$ (прямі AB і CD не збігаються)
3		$AB \perp CD$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$
4		$AB=CD=a$	$\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{CD}^2=a^2$
5		$\angle AOB=\varphi$	$\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\lvert\overrightarrow{OA}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{OB}\rvert}$

Закінчення таблиці

№ з/п	Рисунок	Твердження «мовою геометрії»	Твердження «мовою векторів»
6		Точка C лежить на прямій AB	$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ або $\overrightarrow{OC}=p\overrightarrow{OA}+(1-p)\overrightarrow{OB}$, де O — деяка точка простору
7		$C \in AB$, $AC:CB=m:n$	$\overrightarrow{AC}=\frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$ або $\overrightarrow{OC}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$, де O — деяка точка простору
8		C — середина AB	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ або $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$, де O — деяка точка простору
9		M — середина AB, N — середина CD	$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$
10		M — точка перетину медіан (центроїд) трикутника ABC	$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$, де O — деяка точка простору
11		Точка D лежить у площині ABC	$\overrightarrow{DC}=m\overrightarrow{DA}+n\overrightarrow{DB}$ або $\overrightarrow{OD}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}+$ $+(1-m-n)\overrightarrow{OC}$, де O — деяка точка простору

Розглянемо спочатку приклад застосування векторного методу для доведення вже відомого стереометричного факту.

Задача

Доведіть за допомогою векторів ознаку перпендикулярності прямої і площини: якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, які лежать у площині й перетинаються, то вона перпендикулярна до даної площини.

Розв'язання

Нехай $MN \perp AB$, $MN \perp AC$ (рис. 273). Доведемо, що $MN \perp (ABC)$.

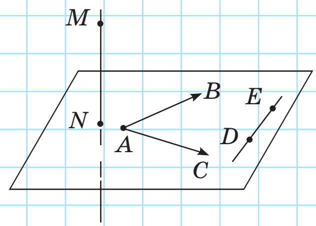


Рис. 273

За означенням перпендикулярності прямої і площини необхідно довести, що пряма MN перпендикулярна до будь-якої прямої площини ABC. Нехай DE — деяка пряма площини ABC. Доведемо, що $MN \perp DE$, тобто $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$.

Оскільки вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ не колінеарні, то будь-який вектор площини ABC можна розкласти за цими векторами, тобто існують числа m і n такі, що $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$. Отже, $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{MN}\left(m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}\right) = m\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC}$.

За умовою задачі $MN \perp AB$, $MN \perp AC$, отже, $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, звідки $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$. Таким чином, пряма MN перпендикулярна до будь-якої прямої площини ABC, тобто за означенням $MN \perp (ABC)$.

У процесі розв'язування задач векторний метод часто поєднують із методом координат. Нагадаємо, що розв'язування геометричної задачі **методом координат** також складається з трьох основних етапів:

1) задати систему координат і сформулювати дану задачу «мовою координат»;

2) перетворити алгебраїчні вирази, користуючись відомими співвідношеннями та формулами;
3) перекласти отриманий результат «мовою геометрії».

Зазвичай на першому етапі розв'язування систему координат вибирають так, щоб якнайбільше координат вершин фігури, що розглядається, дорівнювали нулю або одному й тому самому числу — це дозволяє максимально спростити подальші алгебраїчні перетворення. Методом координат у просторі найзручніше користуватися у випадку, коли елементами даної фігури є три взаємно перпендикулярні відрізки зі спільним кінцем. У такому разі систему координат доцільно вводити так, щоб ці відрізки лежали на осях координат.

Задача

Знайдіть кут між мимобіжними прямими, одна з яких містить діагональ куба, а інша — діагональ його грані.

Розв'язання

Розмістимо куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a в системі координат так, як показано на рис. 274, і знайдемо кут між прямими BD_1 і B_1A, користуючись формулою скалярного добутку векторів $\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{B_1A}=\left|\overrightarrow{BD_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B_1A}\right|\cdot\cos\angle\left(\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{B_1A}\right)$.

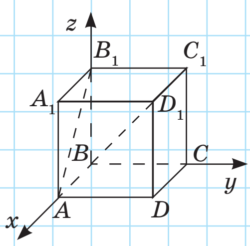


Рис. 274

Оскільки $B(0;0;0)$, $D_1(a;a;a)$, $B_1(0;0;a)$, $A(a;0;0)$, то $\overrightarrow{BD_1}(a;a;a)$, $\overrightarrow{B_1A}(a;0;-a)$.

Отже, $\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{B_1A}=a\cdot a+a\cdot 0+a\cdot(-a)=0$, тобто дані вектори перпендикулярні, і шуканий кут дорівнює $90°$.

Відповідь: $90°$.

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

704°. На рис. 275 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Визначте, чи компланарні вектори:

а) $\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{A_1A}$ і $\overrightarrow{A_1B_1}$;

б) $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$ і $\overrightarrow{AA_1}$;

в) $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{DC_1}$ і $\overrightarrow{A_1D_1}$;

г) $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{A_1D}$ і $\overrightarrow{AC}$.

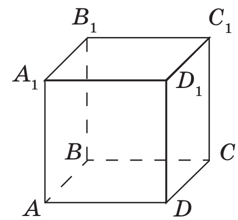


Рис. 275

705°. Дано тетраедр $PABC$ (рис. 276). Назвіть вектор із початком і кінцем у вершинах тетраедра, який разом із двома даними векторами складає трійку некомпланарних векторів (у кожному випадку наведіть усі можливі варіанти відповіді):

а) $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{AC}$, ... ;

б) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BP}$, ... ;

в) $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{AB}$, ...

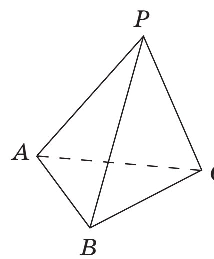


Рис. 276

706. Чи компланарні будь-які три колінеарні вектори? Чи завжди колінеарні будь-які три компланарні вектори?

707. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ лежать на трьох попарно мимобіжних прямих. Чи можуть дані вектори бути компланарними? Наведіть приклад.

708. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні. Чи компланарні вектори:

а) $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $2\vec{a}$;

б) $\vec{a}$, $\vec{c}$ і $\vec{a}+\vec{c}$;

в) $3\vec{a}$, $-2\vec{b}$ і $4\vec{c}$?

709. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні; вектори $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ також компланарні. Чи можуть вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{d}$ бути некомпланарними? У якому випадку?

710. Назвіть координати вектора $\vec{a}$, якщо $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ є координатними векторами і відомо, що:

а) $\vec{a}=-3\vec{e}_1+8\vec{e}_2+\vec{e}_3$;

б) $\vec{a}=2\vec{e}_1-\vec{e}_3$;

в) $\vec{a}=-9\vec{e}_2$.

711. Знайдіть коефіцієнти m, n і p в розкладанні $\vec{a} = m\vec{e}_1 + n\vec{e}_2 + p\vec{e}_3$, де $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — координатні вектори, якщо:

а) $\vec{a}(5; -3; 1)$; б) $\vec{a}(-7; 0; 3)$; в) $\vec{a} = \vec{e}_1$.

Моделюємо

712•. На моделі куба зафіксуйте два вектори, зображувані мимобіжними ребрами. Укажіть ребро, яке має зображати третій вектор так, щоб три зафіксовані вектори були некомпланарними. Чи можна вказати третє ребро таке, щоб три зафіксовані вектори були компланарними?

713•. Виготовте модель чотирьох векторів із рівними довжинами та спільним початком. Змоделюйте геометричну конфігурацію, при якій:

а) будь-які три з даних векторів компланарні;

б) лише три з даних векторів компланарні.

Розв'язуємо задачі

Рівень А

714•. Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Розкладіть за векторами $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ і $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$ вектор:

а) $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{A_1C_1}$; в) $\overrightarrow{B_1D}$.

715•. Точки D і E — середини ребер AB і PC тетраедра $PABC$ відповідно. Розкладіть вектор:

а) $\overrightarrow{AP}$ за векторами $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CE}$;

б) $\overrightarrow{BE}$ за векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{PC}$.

716. На тіло діють три сили, зображувані некомпланарними векторами. Доведіть, що рівнодійна цих сил не може дорівнювати нулю.

717. На тіло, розміщене в початку координат, діють три сили, зображувані координатними векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ та $\vec{e}_3$. Знайдіть величину їх рівнодійної, якщо величина кожної з даних сил 1 Н.

718. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні. Чи колінеарні вектори:

а) $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ і $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$;

б) $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ і $\vec{e} = -9\vec{a} + 6\vec{b} - 3\vec{c}$?

719. Відрізок MA — перпендикуляр до площини прямокутника $ABCD$. За допомогою векторного методу доведіть, що $MD \perp CD$.

720. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. За допомогою векторного методу знайдіть кут між прямими AB_1 і A_1D.

Рівень Б

721. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки K і M — середини ребер B_1C_1 і CD відповідно. Розкладіть за векторами $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ і $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$ вектор:

а) $\overrightarrow{AK}$; б) $\overrightarrow{MB_1}$; в) $\overrightarrow{KM}$.

722. Точки D і E — середини ребер AB і PC тетраедра $PABC$. Доведіть, що $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PB}\right)$. Чи компланарні вектори $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{PB}$?

723. Медіани грані ABC тетраедра $PABC$ перетинаються в точці O. Розкладіть вектор $\overrightarrow{PA}$ за векторами $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ і $\overrightarrow{PO}$.

724. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні. Доведіть, що вектори $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ і $\vec{a} + \vec{c}$ некомпланарні.

725. У тетраедрі $PABC$ медіани грані ABC перетинаються в точці O. Доведіть, що $PO < \frac{1}{3}(PA + PB + PC)$.

726. У тетраедрі $PABC$ $PA \perp BC$, $PB \perp AC$. Доведіть, що $PC \perp AB$.

727. Доведіть, що коли в тетраедрі $PABC$ $PC \perp AB$, то $AC^2 + PB^2 = PA^2 + BC^2$. Чи буде правильним обернене твердження?

728. Промені OA, OB і OC взаємно перпендикулярні. Знайдіть кут між бісектрисами кутів AOC і AOB.

Рівень В

729 (опорна). ***Для того щоб точка D належала площині ABC, необхідно й достатньо, щоб справджувалася векторна рівність*** $\overrightarrow{OD} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} + (1 - m - n)\overrightarrow{OC}$, ***де O — деяка точка простору, m і n — числа.*** Доведіть.

730. Доведіть, що діагональ AC_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходить через точки перетину медіан трикутників A_1BD і CB_1D_1 і ділиться ними на три рівні частини (рис. 277).

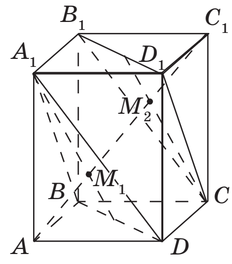


Рис. 277

731. Відомо, що $\overrightarrow{OK} = 3\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$, причому вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$ некомпланарні. У якому відношенні площина ABC ділить відрізок OK, рахуючи від точки O?

732. *Середньою лінією тетраедра* називають відрізок, що сполучає середини двох його мимобіжних ребер, а *медіаною тетраедра* — відрізок, що сполучає його вершину з точкою перетину медіан протилежної грані. Доведіть, що:

а) середні лінії тетраедра перетинаються в одній точці і діляться нею навпіл;

б) медіани тетраедра перетинаються в одній точці й діляться нею у відношенні $3:1$, рахуючи від вершини;

в) точка перетину медіан тетраедра збігається з точкою перетину його середніх ліній.

733. Доведіть, що коли M — точка перетину медіан тетраедра $PABC$, O — довільна точка простору, то $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}\right)$.

Повторення перед вивченням § 18

Теоретичний матеріал

- перпендикулярність прямої та площини — 10 клас, § 8
- кути між прямими та площинами — 10 клас, § 11
- рівняння прямої та кола — 9 клас, § 7

Задачі

734. У декартовій системі координат на площині дано точки $A(2;5)$ і $B(5;-1)$. Запишіть рівняння прямої AB.

735. На площині дано коло із центром в точці $Q(3;-4)$, яке проходить через початок координат. Запишіть рівняння даного кола.

§18 Рівняння фігур у просторі

18.1. Рівняння площини в просторі

Нагадаємо, що ***рівнянням фігури*** F на площині називається рівняння, яке задовольняють координати будь-якої точки фігури F і не задовольняють координати жодної точки, яка не належить фігурі F. Так само означають і рівняння фігури в просторі; але, на відміну від площини, де рівняння фігури містить дві змінні x і y, у просторі рівняння фігури є рівнянням із трьома змінними x, y і z.

Виведемо рівняння площини, прямої і сфери в просторі.

Для виведення рівняння площини розглянемо в прямокутній системі координат площину α (рис. 278) і визначимо властивість, за допомогою якої можна описати належність довільної точки даній площині. Нехай ненульовий вектор $\vec{n}(A; B; C)$ перпендикулярний до α (тобто належить прямій, перпендикулярній до даної площини,— такий вектор називають **вектором нормалі** або нормаллю до площини α), а точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ належить даній площині.

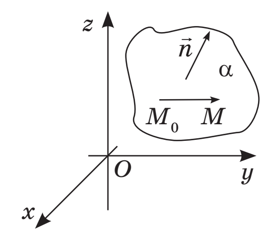


Рис. 278. До виведення рівняння площини

Оскільки $\vec{n} \perp \alpha$, то вектор $\vec{n}$ перпендикулярний до будь-якого вектора площини α. Тому якщо $M(x; y; z)$ — довільна точка площини α, то $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$, тобто $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$. Більш того, якщо вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярні, то, оскільки площина, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{n}$, єдина, маємо $M_0M \subset \alpha$, тобто $M \in \alpha$. Таким чином, рівняння $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ є критерієм належності точки M площині α. На підставі цього векторного критерію виведемо рівняння площини в просторі.

Теорема
(рівняння площини в просторі)

У прямокутній системі координат рівняння площини має вигляд $Ax+By+Cz+D=0$, де A, B, C і D — деякі числа, причому числа A, B і C одночасно не дорівнюють нулю.

Доведення

☐ Запишемо в координатній формі векторну рівність $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$, де $\vec{n}(A;B;C)$ — вектор нормалі до даної площини, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ — фіксована точка площини, $M(x;y;z)$ — довільна точка площини. Маємо $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$, отже:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

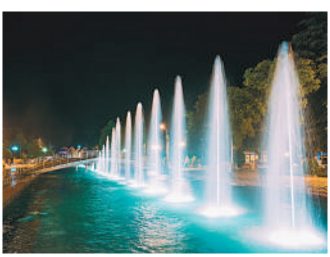
Після розкриття дужок і зведення подібних членів отримуємо:

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0.$$

Позначивши числовий вираз у дужках через D, одержуємо шукане рівняння, причому оскільки $\vec{n}\uparrow\vec{0}$, то числа A, B і C не дорівнюють нулю одночасно.

Покажемо тепер, що будь-яке рівняння вигляду $Ax+By+Cz+D=0$ задає в просторі площину. Справді, нехай $(x_0;y_0;z_0)$ — один із розв'язків даного рівняння. Тоді $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$. Віднімаючи цю рівність від даної, маємо $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Оскільки це рівняння є координатним записом векторної рівності $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$, то воно є рівнянням площини, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}(A;B;C)$. ■

Звернемо увагу на те, що в доведенні теореми подається спосіб складання рівняння площини за даними координатами довільної точки площини і вектора нормалі.



Задача

Запишіть рівняння площини, яка перпендикулярна до відрізка MN і проходить через його середину, якщо $M(-1;2;3)$, $N(5;-4;-1)$.

Розв'язання

Знайдемо координати точки O — середини відрізка MN:

$$x=\frac{-1+5}{2}=2,\ y=\frac{2+(-4)}{2}=-1,\ z=\frac{3+(-1)}{2}=1.$$

Отже, $O(2;-1;1)$. Оскільки дана площина перпендикулярна до відрізка MN, то вектор $\overrightarrow{ON}(3;-3;-2)$ — вектор нормалі до даної площини, отже, шукане рівняння має вигляд $3x-3y-2z+D=0$.

І нарешті, оскільки дана площина проходить через точку $O(2;-1;1)$, то, підставивши координати цієї точки в рівняння, маємо: $3\cdot2-3\cdot(-1)-2\cdot1+D=0$, $7+D=0$, $D=-7$.

Отже, рівняння $3x-3y-2z-7=0$ шукане.

Відповідь: $3x-3y-2z-7=0$.

Зауважимо, що правильною відповіддю в даній задачі є також будь-яке рівняння, отримане з наведеного множенням обох частин на число, відмінне від нуля.

Значення коефіцієнтів A, B, C і D в рівнянні площини визначають ***особливості розміщення площини в системі координат.*** Зокрема:

- якщо $A\neq0$, $B\neq0$, $C\neq0$, $D=0$, рівняння площини набуває вигляду $Ax+By+Cz=0$; очевидно, що така площина проходить через початок координат (рис. 279, *а*);

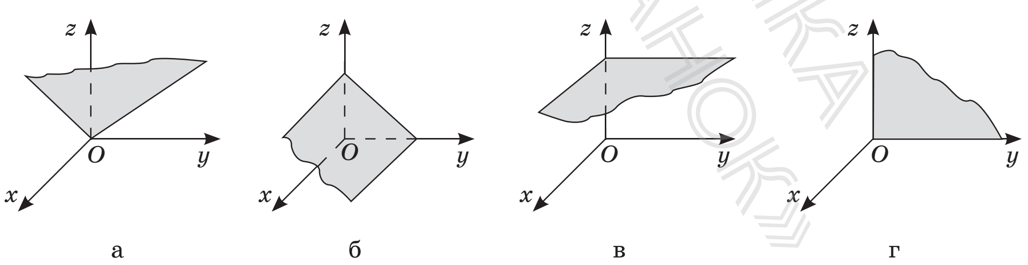


Рис. 279. Окремі випадки розміщення площини в системі координат

- якщо один із коефіцієнтів A, B і C дорівнює нулю, а $D \neq 0$, площина паралельна одній із координатних осей: наприклад, за умови $A = 0$ вектор нормалі $\vec{n}(0; B; C)$ перпендикулярний до осі Ox, а площина $By + Cz + D = 0$ паралельна осі Ox (рис. 279, *б*);
- якщо два з коефіцієнтів A, B і C дорівнюють нулю, а $D \neq 0$, площина паралельна одній із координатних площин: наприклад, за умов $A = 0$ і $B = 0$ вектор нормалі $\vec{n}(0; 0; C)$ перпендикулярний до площини Oxy, а площина $Cz + D = 0$ паралельна площині Oxy (рис. 279, *в*);
- якщо два з коефіцієнтів A, B і C дорівнюють нулю і $D = 0$, площина збігається з однією з координатних площин: наприклад, за умов $A \neq 0$ і $B = C = D = 0$ рівняння площини має вигляд $Ax = 0$, або $x = 0$, тобто є рівнянням площини Oyz (рис. 279, *г*).

Пропонуємо вам самостійно скласти повну таблицю окремих випадків розміщення площини $Ax + By + Cz + D = 0$ в прямокутній системі координат залежно від значень коефіцієнтів A, B, C і D.

Опорна задача
(про відстань від точки до площини)

Відстань від точки $K(x_0; y_0; z_0)$ до площини α, заданої рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, обчислюється за формулою $d(K, \alpha) = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$.

Доведіть.

Розв'язання

Якщо $K \in \alpha$, то за рівнянням площини $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, звідки $d(K, \alpha) = 0$.

Якщо $K \notin \alpha$, то проведемо перпендикуляр KM до площини α, $M(x_1; y_1; z_1) \in \alpha$.

Тоді $\overrightarrow{KM}(x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0) \parallel \vec{n}(A; B; C)$, тому $\overrightarrow{KM} = \lambda\vec{n}$, тобто $x_1 = x_0 + \lambda A$, $y_1 = y_0 + \lambda B$, $z_1 = z_0 + \lambda C$. Оскільки $M(x_1; y_1; z_1) \in \alpha$, то $A(x_0 + \lambda A) + B(y_0 + \lambda B) + C(z_0 + \lambda C) + D = 0$, звідки $\lambda = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$.

Таким чином, $d(K, \alpha) = |\overrightarrow{KM}| = |\overrightarrow{(\lambda A; \lambda B; \lambda C)}| =$

$$= \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}\right| \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|.$$

18.2. Дослідження взаємного розміщення площин у прямокутній декартовій системі координат у просторі

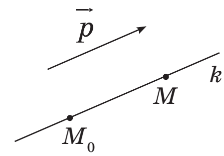


Рис. 280. Напрямний вектор прямої

Для дослідження взаємного розміщення площин у просторі ми будемо пов'язувати з ними певні прямі. Отже, спочатку знайдемо рівняння прямої у тривимірній прямокутній декартовій системі координат.

Нехай у просторі дано пряму k (рис. 280). Виберемо ненульовий вектор $\vec{p}(l; m; n)$, який паралельний даній прямій або належить їй (такий вектор називають ***напрямним вектором прямої*** k), і зафіксуємо точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, яка належить даній прямій. Маємо: довільна точка простору $M(x; y; z)$ належатиме прямій k тоді й тільки тоді, коли вектори $\vec{p}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарні, тобто існує число t таке, що $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{p}$.

Подамо цю векторну рівність у координатній формі.

Якщо жодна з координат напрямного вектора не дорівнює нулю, з даної рівності можна виразити t і прирівняти отримані результати:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Ці рівності називають ***канонічними рівняннями прямої в просторі***.

Задача

Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(1; -3; 2)$ і $B(-1; 0; 1)$.

Розв'язання

Оскільки точки A і B належать даній прямій, то $\overrightarrow{AB}(-2; 3; -1)$ — напрямний вектор прямої AB. Отже, підставивши замість x_0, y_0 і z_0 координати точки A, отримуємо рівняння прямої AB:

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y + 3}{3} = \frac{z - 2}{-1}.$$

Відповідь: $\frac{x - 1}{-2} = \frac{y + 3}{3} = \frac{z - 2}{-1}$.

Зауважимо, що відповідь у цій задачі може мати й інший вигляд: зокрема, в чисельниках дробів можна використати координати точки B, а як напрямний вектор розглядати будь-який ненульовий вектор, колінеарний $\overrightarrow{AB}$ (наприклад, вектор $\overrightarrow{BA}$).

Узагалі, якщо пряма в просторі задана двома точками $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і $M_1(x_1;y_1;z_1)$, то $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1-x_0;y_1-y_0;z_1-z_0)$ — напрямний вектор прямої, а у випадку, коли відповідні координати даних точок не збігаються, канонічні рівняння прямої M_0M_1 мають вигляд

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$

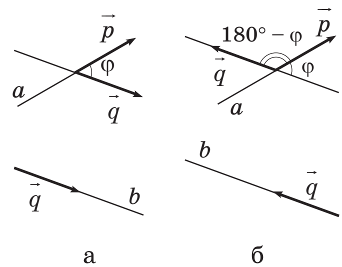


Рис. 281. Визначення кута між прямими в просторі

За допомогою рівнянь зручно досліджувати взаємне розміщення прямих і площин у просторі. Розглянемо прямі a і b з напрямними векторами $\vec{p}(l_1;m_1;n_1)$ і $\vec{q}(l_2;m_2;n_2)$ відповідно. Визначення кута між даними прямими пов'язане з визначенням кута між їхніми напрямними векторами. Справді, нехай φ — кут між прямими a і b. Оскільки за означенням $\varphi \in [0°;90°]$, а кут між векторами може бути більшим за 90°, то $\angle(\vec{p},\vec{q})$ або дорівнює куту φ (рис. 281, *а*), або доповнює його до 180° (рис. 281, *б*).

Оскільки $\cos(180°-\varphi)=-\cos\varphi$, маємо: $\cos\varphi=\left|\cos\angle(\vec{p},\vec{q})\right|$, тобто

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{p}\cdot\vec{q}|}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Звідси, зокрема, випливає необхідна й достатня умова перпендикулярності прямих a і b:

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

Крім того, прямі a і b паралельні тоді й тільки тоді, коли їхні напрямні вектори колінеарні, тобто існує число t таке, що $\vec{q}=t\vec{p}$, або, за умови відсутності у векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$ нульових координат,

$$\frac{l_2}{l_1}=\frac{m_2}{m_1}=\frac{n_2}{n_1}.$$

Проаналізуємо тепер окремі випадки взаємного розміщення двох площин у просторі. Очевидно, що коли $\vec{n}(A;B;C)$ — вектор нормалі до площини α, то всі ненульові вектори, колінеарні $\vec{n}$, також є векторами нормалі до площини α. З цього випливає, що дві площини, задані рівняннями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$:

- збігаються, якщо існує число t таке, що $\overrightarrow{(A_2;B_2;C_2)}=t\overrightarrow{(A_1;B_1;C_1)}$ і $D_2=tD_1$, або, якщо числа A_1, B_1, C_1 і D_1 ненульові, $\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{D_2}{D_1}$;
- паралельні, якщо існує число t таке, що $\overrightarrow{(A_2;B_2;C_2)}=t\overrightarrow{(A_1;B_1;C_1)}$ і $D_2\neq tD_1$, або, якщо координати A_1, B_1, C_1 і D_1 ненульові, $\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}\neq\frac{D_2}{D_1}$ (на практиці це означає, що рівняння даних площин можна звести до вигляду $Ax+By+Cz+D_1=0$ і $Ax+By+Cz+D_2=0$, де $D_1\neq D_2$).

У решті випадків дані площини α і β перетинаються, причому кут між ними пов'язаний із кутом між векторами нормалей $\vec{n}_1(A_1;B_1;C_1)$ і $\vec{n}_2(A_2;B_2;C_2)$. Пропонуємо вам самостійно обґрунтувати формулу для визначення кута між площинами α і β:

$$\cos\angle(\alpha,\beta)=\left|\cos\angle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\right|=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^{\,2}+B_1^{\,2}+C_1^{\,2}}\cdot\sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}+C_2^{\,2}}}.$$

Зокрема, необхідна й достатня умова перпендикулярності площин α і β виражається рівністю $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Зазначимо також, що пряма в просторі може бути описана як лінія перетину двох площин, тобто системою рівнянь

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

де вектори $\vec{n}_1(A_1;B_1;C_1)$ і $\vec{n}_2(A_2;B_2;C_2)$ неколінеарні.

Задача

Запишіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(4;2;3)$ і паралельна площині $x-y+2z-3=0$.

Розв'язання

Оскільки шукана площина паралельна даній, то вектор нормалі до даної площини $\vec{n}(1;-1;2)$ є також вектором нормалі до шуканої площини. Отже, шукане рівняння має вигляд $x-y+2z+D=0$. Оскільки точка M належить шуканій площині, її координати задовольняють рівняння площини, тобто $4-2+2\cdot 3+D=0$, $D=-8$. Отже, рівняння $x-y+2z-8=0$ шукане.

Відповідь: $x-y+2z-8=0$.

18.3. Рівняння сфери

Розглянемо тепер сферу в просторі. Вона складається з усіх точок простору, віддалених від даної точки на певну відстань — радіус.

Аналогічно до рівняння кола на площині, у просторовій декартовій системі координат можна вивести **рівняння сфери** із заданим центром і радіусом.

Теорема (рівняння сфери)

У прямокутній системі координат рівняння сфери радіуса R із центром у точці $O(a;b;c)$ має вигляд $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Доведення

□ Нехай $M(x;y;z)$ — довільна точка сфери з радіусом R і центром $O(a;b;c)$ (рис. 282). Відстань між точками O та M обчислюється за формулою $OM=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$. Оскільки $OM=R$, тобто $OM^2=R^2$, то координати точки M задовольняють рівняння $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. Якщо ж точка M не є точкою сфери, то $OM\neq R$, отже, координати точки M не задовольняють дане рівняння. ■

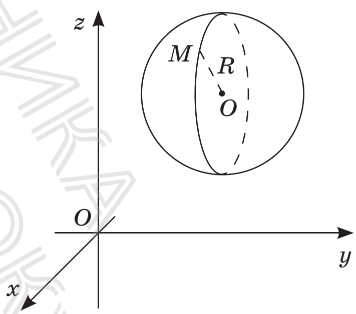


Рис. 282. До доведення теореми про рівняння сфери

Наслідок

Сфера радіуса R з центром у початку координат задається рівнянням вигляду

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Зазначимо, що фігури в просторі, як і на площині, можуть задаватися не лише рівняннями, але й нерівностями. Наприклад, куля радіуса R із центром у точці $O(a;b;c)$ задається нерівністю $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leqslant R^2$ (переконайтеся в цьому самостійно).

Задача

Запишіть рівняння сфери з центром $A(2;-8;16)$, яка проходить через початок координат.

Розв'язання

Оскільки дана сфера проходить через точку $O(0;0;0)$, то відрізок AO є її радіусом. Отже,

$$R=AO=\sqrt{(2-0)^2+(-8-0)^2+(16-0)^2}=18.$$

Таким чином, шукане рівняння має вигляд $(x-2)^2+(y+8)^2+(z-16)^2=324$.

Відповідь: $(x-2)^2+(y+8)^2+(z-16)^2=324$.

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

736. Назвіть координати вектора нормалі до площини, заданої рівнянням $3x-y+2z+5=0$. Чи є вектором нормалі до даної площини вектор $\vec{n}(6;-2;4)$? Чи можна записати рівняння даної площини у вигляді $6x-2y+4z+5=0$?

737. Площина задана рівнянням $x+4y-z+1=0$. Визначте взаємне розміщення цієї площини і площини, заданої рівнянням:

а) $x+4y-z=0$;
б) $x-4y+z+1=0$;
в) $2x+8y-2z+2=0$.

738. Назвіть центр і радіус сфери, заданої рівнянням:

а) $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=64$;
б) $(x+5)^2+y^2+(z-6)^2=121$;
в) $x^2+y^2+z^2=8$.

Моделюємо

739. Використовуючи програму Geogebra або інший графічний редактор із підтримкою 3D-моделювання, побудуйте зображення сфери із центром у точці $(2;1;-1)$ і радіусом 3.

740. За допомогою графічного редактора змоделюйте площину, яка проходить через точки з координатами $(1;2;0)$, $(2;-1;0)$, $(0;-2;1)$. З'ясуйте, чи проходить ця площина через початок координат.

Розв'язуємо задачі*

Рівень А

741. Запишіть рівняння площини, яка:

а) проходить через точку C перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(1;-2;3)$, $B(5;0;4)$, $C(2;1;-3)$;

б) проходить через початок координат O перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{OM}$, якщо $M(7;1;-2)$.

742. Запишіть рівняння площини, яка перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину, якщо $A(-6;1;0)$, $B(4;3;-8)$.

743. Запишіть рівняння прямої з напрямним вектором $\vec{p}(1;-4;3)$, яка проходить через точку $M(1;1;1)$.

744. Запишіть рівняння прямої AB, якщо $A(4;0;-3)$, $B(1;1;2)$.

745. Доведіть, що:

а) прямі $\frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{8}=\frac{z-7}{-4}$ і $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z}{2}$ паралельні;

б) площини $2x-y-z+9=0$ і $3x+2y+4z-1=0$ перпендикулярні.

746. Доведіть, що:

а) прямі $\frac{x+4}{-6}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{4}$ і $\frac{x}{3}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z+9}{6}$ перпендикулярні;

б) площини $y+z-1=0$ і $x+y+1=0$ перетинаються під кутом 60°.

747. Запишіть рівняння сфери:

а) з центром $O(-3;2;1)$ і радіусом 5;

б) з центром у початку координат і діаметром 14.

---

* До всіх задач, пов'язаних зі складанням рівнянь площин і прямих, наведено один із можливих варіантів запису правильної відповіді.

Рівень Б

748 (опорна). ***Площина, яка перетинає осі координат у точках $(a;0;0)$, $(0;b;0)$ і $(0;0;c)$, де $a \uparrow 0$, $b \uparrow 0$, $c \uparrow 0$, задається рівнянням $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (рівняння площини у відрізках на осях).*** Доведіть.

749. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точки:

а) $A(3;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;1)$;

б) $A(1;2;3)$, $B(4;3;2)$, $C(7;0;-1)$.

750. Запишіть рівняння площини, яка паралельна площині $x-2y+3z-4=0$ і проходить через точку $M(-1;1;3)$.

751. Одна з граней паралелепіпеда лежить у площині $3x-y-z+4=0$. Запишіть рівняння площини, яка містить протилежну грань, якщо одна з вершин паралелепіпеда має координати $(3;1;2)$.

752. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1;1;2)$ і паралельна прямій $\frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{6}=\frac{z-5}{5}$.

753. Знайдіть координати точки перетину прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{6}$ і площини $x+y+z-5=0$.

754. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через початок координат і ділить навпіл відрізок AB, якщо $A(-2;1;5)$, $B(6;-3;1)$.

755 (опорна). ***Кут φ між прямою з напрямним вектором $\vec{p}$ і площиною з вектором нормалі $\vec{n}$ визначається з формули $\sin\varphi=\frac{|\vec{p}\cdot\vec{n}|}{|\vec{p}|\cdot|\vec{n}|}$.*** Доведіть.

756. Знайдіть кут між:

а) площинами $x+y-2z+4=0$ і $x-z-5=0$;

б) прямими $\frac{x-3}{8}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+5}{-1}$ і $\frac{x}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+6}{4}$;

в) площиною $x-z-3=0$ і прямою $\frac{x+2}{1}=\frac{y+9}{-1}=\frac{z-3}{-2}$.

757. Знайдіть значення a і b, при яких:

а) пряма $\frac{x+8}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ і площина $ax+by+2z+7=0$ перпендикулярні;

б) площини $ax+by-z-3=0$ і $2x-6y-2z+5=0$ паралельні.

758. Запишіть рівняння сфери:

а) з діаметром AB, якщо $A(-3;2;0)$, $B(1;-2;2)$;

б) з центром $O(-2;3;4)$, яка дотикається до площини Oxy;

в) центр якої збігається з центром сфери $x^2-2x+y^2+4y+z^2-$ $-6z+10=0$, а радіус дорівнює діаметру цієї сфери.

759. Запишіть рівняння сфери:

а) з радіусом MN, якщо $M(0;1;2)$, $N(-1;5;-6)$;

б) з центром $O(-3;4;1)$, яка дотикається до осі аплікат.

Рівень В

760. Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від початку координат і точки $M(8;-4;6)$.

761. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точки $A(4;1;-3)$ і $B(10;-2;5)$ паралельно осі аплікат.

762. Запишіть рівняння площини, яка проходить через паралельні прямі $\dfrac{x}{7}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{5}$ і $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+2}{5}$.

763. Визначте взаємне розміщення прямих, заданих рівняннями:

а) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{6}$ і $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-5}{6}=\dfrac{z-9}{12}$;

б) $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{2}$ і $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+4}{-2}$;

в) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+1}{4}$ і $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{2}$;

г) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z+2}{5}$ і $\dfrac{x}{7}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z}{13}$.

764. Доведіть, що пряма $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+2}{5}$ належить площині $4x+3y-z+3=0$.

765. Знайдіть геометричне місце точок $C(x;y;z)$ таких, що трикутник ABC є прямокутним із гіпотенузою AB, якщо $A(-6;1;8)$, $B(12;-11;4)$.

766. Знайдіть відстань між паралельними площинами, які задані рівняннями $x+y+z-1=0$ і $x+y+z-3=0$.

767. Усі вершини куба належать сфері. За допомогою координатного методу доведіть, що сума квадратів відстаней від точки сфери, описаної навколо куба, до вершин куба не залежить від вибору точки.

768. Дано піраміду $PABC$, ребра якої $PA=a$, $PB=b$ і $PC=c$ попарно перпендикулярні. За допомогою координатного методу знайдіть відстань від точки P до площини (ABC).

769. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a. За допомогою координатного методу знайдіть:

а) кут та відстань між прямими A_1D і D_1C;

б) кут між площинами AB_1D_1 і A_1C_1D;

в) кут між прямою AB_1 і площиною AD_1C;

г) відстань між площинами A_1BD і CB_1D_1.

Тестове завдання для самоперевірки № 4

1. На рис. 283 $AB \perp \alpha$, $a \subset \alpha$, $AO=OB$. Серед даних тверджень виберіть неправильне.

А Точки A і B симетричні відносно точки O.

Б Точки A і B симетричні відносно прямої a.

В Точки A і B симетричні відносно площини α.

Г Паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{AB}$ переводить площину α в себе.

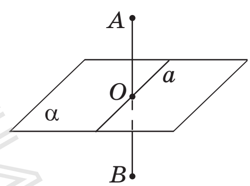


Рис. 283

2. На рис. 284 точка B не лежить у площині AOC. Закінчіть речення так, щоб утворилося правильне твердження. Вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$ є...

А колінеарними.

Б компланарними.

В співнапрямленими.

Г некомпланарними.

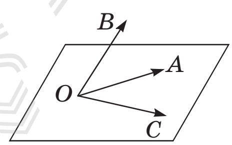


Рис. 284

3. Знайдіть координати середини відрізка з кінцями $M(-7;1;4)$ і $N(-1;-3;0)$.

А $(-4;-1;4)$ **В** $(-4;-2;2)$

Б $(-4;-1;2)$ **Г** $(-3;2;2)$

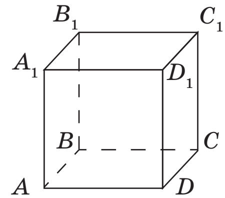


Рис. 285

4. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 285). Унаслідок паралельного перенесення відрізок A_1B переходить у відрізок D_1C. Назвіть площину, у яку внаслідок такого перенесення переходить площина AA_1B_1.

А DB_1B **В** AA_1C_1

Б DCC_1 **Г** ABC

5. Площина α є площиною симетрії трикутника ABC, який не лежить у даній площині. Серед даних тверджень виберіть неправильне.

А $(ABC)\perp\alpha$.

Б Трикутник ABC рівнобедрений.

В Трикутник ABC має центр симетрії.

Г Трикутник ABC має вісь симетрії.

6. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 285). Знайдіть $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DD_1}$.

А $\overrightarrow{A_1C}$ **В** $\overrightarrow{B_1D}$

Б $\overrightarrow{BD_1}$ **Г** $\overrightarrow{AC_1}$

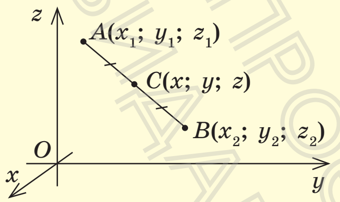
Онлайн-тестування № 4

Теми повідомлень, рефератів, навчальних проєктів

Підсумки розділу IV

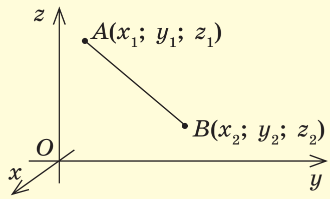
ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ В ПРОСТОРІ

Координати середини відрізка



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Відстань між точками



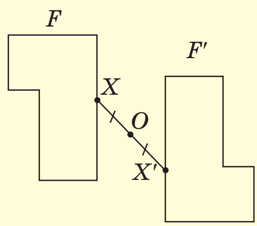
$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

ПЕРЕМІЩЕННЯ В ПРОСТОРІ

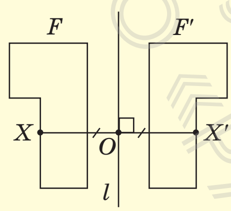
Переміщенням (або **рухом**) називається перетворення однієї фігури в іншу, під час якого зберігається відстань між точками.

Види переміщень

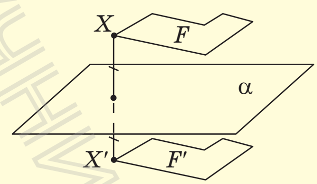
Симетрія відносно точки (центральна)



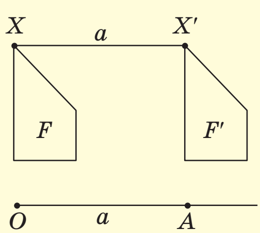
Симетрія відносно прямої (осьова)

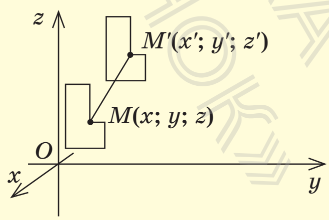


Симетрія відносно площини (дзеркальна)

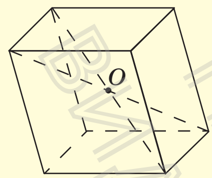
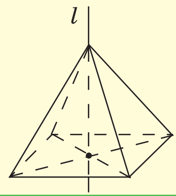
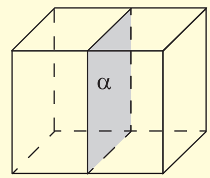


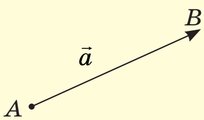
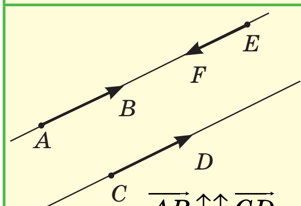
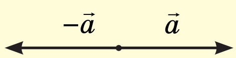
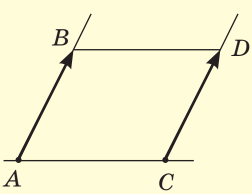
Паралельне перенесення





$$x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c$$

ЕЛЕМЕНТИ СИМЕТРІЇ ФІГУРИ		
Центр симетрії 	***Вісь симетрії*** 	***Площина симетрії*** 

ВЕКТОРИ	
 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$	**Вектором** називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого вказано, який із його кінців є початком, а який — кінцем. **Координатами вектора** з початком у точці $A(x_1;y_1;z_1)$ і кінцем у точці $B(x_2;y_2;z_2)$ називають числа $a_1=x_2-x_1$, $a_2=y_2-y_1$ і $a_3=z_2-z_1$: $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ ***Довжина (модуль) вектора*** $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ обчислюється за формулою $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
 $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{EF}$  $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$	Ненульові вектори називаються **колінеарними**, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ ***співнапрямлені.*** Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{EF}$ ***протилежно напрямлені.*** **Протилежними векторами** називаються два протилежно напрямлені вектори однакової довжини
	Два вектори називаються **рівними**, якщо вони суміщаються паралельним перенесенням. Від будь-якої точки можна відкласти вектор, що дорівнює даному, і притому тільки один. ***Критерії рівних векторів:*** 1) вектори співнапрямлені та мають рівні довжини; 2) вектори мають рівні координати

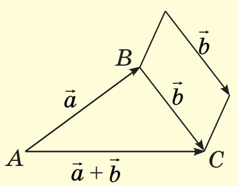
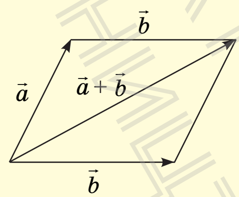
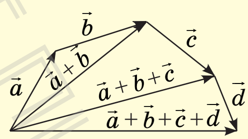
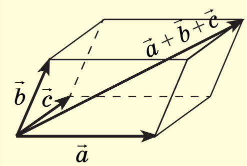
ОПЕРАЦІЇ З ВЕКТОРАМИ

Додавання векторів

Сумою векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ називається вектор $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$ з координатами $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$, $c_3 = a_3 + b_3$, тобто

$$\overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)} + \overrightarrow{(b_1; b_2; b_3)} = \overrightarrow{(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)}$$

Побудова суми векторів

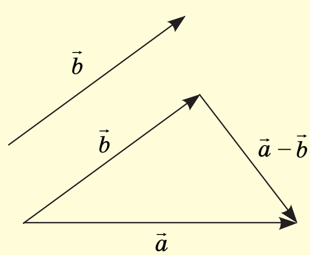
Правило трикутника	Правило паралелограма	Правило многокутника	Правило паралелепіпеда
			

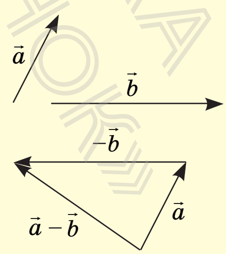
Віднімання векторів

Різницею векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ називається такий вектор $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$, який у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$, тобто $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$:

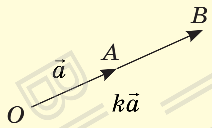
$$\overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)} - \overrightarrow{(b_1; b_2; b_3)} = \overrightarrow{(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)}$$

Побудова різниці векторів



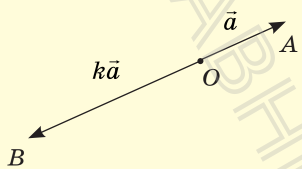


Множення вектора на число



$k > 0$

Вектор $k\vec{a}$ співнапрямлений із вектором $\vec{a}$



$k < 0$

Вектор $k\vec{a}$ протилежно напрямлений із вектором $\vec{a}$

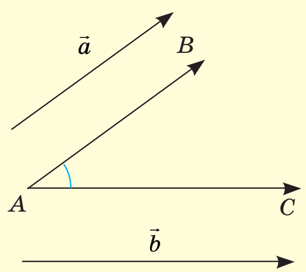
Добутком вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ **на число** k (або добутком числа k на вектор $\vec{a}$) називається вектор $\overrightarrow{(ka_1; ka_2; ka_3)}$, який позначають $k\vec{a}$ або $\vec{a}k$:

$$|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|.$$

Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — колінеарні вектори, то існує число k таке, що $\vec{b} = k\vec{a}$, і навпаки: якщо для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справджується рівність $\vec{b} = k\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

У колінеарних векторів відповідні координати пропорційні, і навпаки: якщо у двох векторів відповідні координати пропорційні, то ці вектори колінеарні

Скалярний добуток векторів



$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle BAC$$

Скалярним добутком векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ називається число $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Зазвичай скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ позначають $\vec{a} \cdot \vec{b}$ або $\vec{a}\vec{b}$.

Скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ називають ***скалярним квадратом*** вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a}^{\,2} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2.$$

Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їхніх довжин на косинус кута між ними:

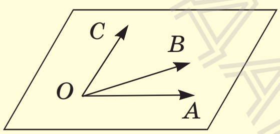
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Кут між векторами:

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

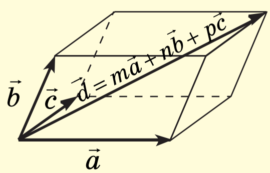
Властивість і ознака перпендикулярних векторів: якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, і навпаки: якщо для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справджується рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$

КОМПЛАНАРНІ ВЕКТОРИ



$A, B, C, O \in \alpha$

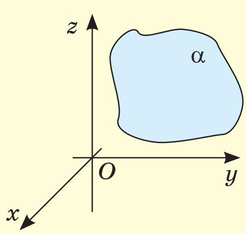
Ненульові вектори називаються **компланарними**, якщо при відкладанні їх від однієї точки вони лежать в одній площині



Будь-який вектор $\vec{d}$ можна розкласти за трьома некомпланарними векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто подати у вигляді $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, де m, n і p — деякі числа, причому таке розкладання єдине

РІВНЯННЯ ФІГУР У ПРОСТОРІ

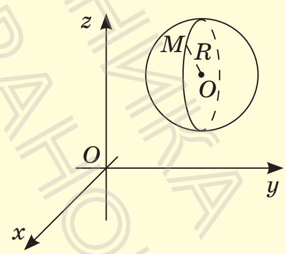
Рівняння площини



$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

де A, B, C, D — деякі числа, A, B, C не дорівнюють 0 одночасно

Рівняння сфери



$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2,$$

де $O(a; b; c)$ — центр сфери, R — радіус

Контрольні запитання до розділу IV

1. Доведіть формули координат середини відрізка і відстані між точками в просторі.
2. Опишіть види симетрії в просторі. Як побудувати точку, симетричну даній точці відносно даної площини?
3. Опишіть паралельне перенесення в просторі. Якими формулами воно задається?
4. Опишіть перетворення подібності й гомотетію в просторі.
5. Які поняття й властивості, пов'язані з векторами, у стереометрії збігаються з планіметричними? Дайте відповідні означення, запишіть формули.
6. Які поняття й властивості, пов'язані з векторами, у стереометрії відрізняються від планіметричних? Дайте відповідні означення, запишіть формули.
7. Які вектори називаються компланарними? Сформулюйте і доведіть теорему про розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами.
8. Доведіть рівняння площини в декартовій системі координат.
9. Опишіть застосування рівняння площини.
10. Доведіть рівняння сфери в декартовій системі координат.

Додаткові задачі до розділу IV

770. Знайдіть відстань від точки $A(-4;1;3)$ до точок, симетричних їй відносно:

а) координатних площин;
б) початку координат;
в) осей координат.

771. Вектори $\vec{a}(-7;1;4)$ і $\vec{b}(-1;4;2)$ відкладені від спільного початку. Знайдіть відстань між кінцями цих векторів.

772. Унаслідок переміщення точка $A(x;y;z)$ переходить у точку B. Наведіть приклад такого переміщення, якщо:

а) $B(-x;-y;z)$;
б) $B(x;-y;z)$;
в) $B(y;x;z)$.

773. Доведіть, що дві площини, симетричні відносно точки, через яку вони не проходять, паралельні.

774. Основа чотирикутної піраміди $PABCD$ — квадрат $ABCD$, а всі бічні ребра рівні. Унаслідок симетрії відносно площини основи точка P переходить у точку P_1 (рис. 286). Доведіть, що:

а) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PP_1}$;

б) $\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{BP_1}=\overrightarrow{DB}$.

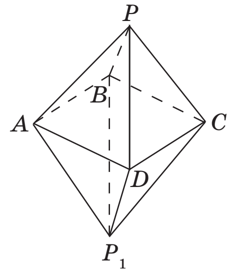


Рис. 286

775. Вектори $\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{a}-3\vec{b}$ колінеарні. Доведіть, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

776. Дано точки $A(-4;0;3)$ і $B(1;4;8)$. Під яким кутом відрізок AB видно з початку координат?

777. Доведіть, що точки $A(-1;2;1)$, $B(5;4;-2)$, $C(1;-1;7)$ є вершинами рівнобедреного трикутника.

778. Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо $A(1;1;-1)$, $B(-3;1;3)$, $C(-7;5;3)$, $D(-7;9;-1)$.

779. Промені OA, OB і OC попарно перпендикулярні. Доведіть векторним методом, що трикутник ABC гострокутний.

780. Розбийтеся на невеличкі команди. Влаштуйте змагання з пошуку в інтернеті фактів про застосування координат, векторів та переміщень у просторі. Кожній команді дозволяється використовувати лише один технічний пристрій (комп'ютер, ноутбук, смартфон, планшет і т. д.).

781. Знайдіть в інтернеті навчальні відеоролики з теми «Координати та вектори». Розповсюдьте посилання на відповідні ресурси серед своїх однокласників та однокласниць.

Задачі підвищеної складності

782. У площині Oxy знайдіть точку C, яка лежить на прямій AB, якщо $A(1;-7;7)$, $B(-3;3;-7)$. Яка з точок: A, B або C — лежить між двома іншими?

783. Доведіть за допомогою векторів, що для будь-яких чисел a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 справджується нерівність Коші — Буняковського — Шварца:

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2 \leqslant \left(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2\right)\left(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2\right).$$

784. Дано куб, у якому три грані зафарбовано одним кольором. Скільки площин симетрії може мати такий куб?

785. У трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ точки K, M і N належать бічним ребрам AA_1, BB_1 і CC_1 відповідно. Доведіть, що точки перетину медіан трикутників ABC, $A_1B_1C_1$ і KMN лежать на одній прямій.

786. Усі ребра тетраедра $PABC$ дорівнюють a. Знайдіть векторним методом кут і відстань між AB і PC.

787. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a. Знайдіть векторним методом відстань і кут між прямими:

а) AC і B_1D; б) A_1D і D_1C.

788. У тетраедрі $PABC$ точка O — точка перетину медіан трикутника ABC. На ребрах PA, PB, PC позначено точки M, N, K так, що $PM = \frac{1}{3}PA$, $PN = \frac{1}{4}PB$, $PK = \frac{1}{2}PC$. Відрізок PO перетинається з площиною MNK в точці S. Знайдіть векторним методом відношення $PS : SO$.

789. З вершини паралелепіпеда проведено три діагоналі його граней. На цих діагоналях (як на ребрах) побудували новий паралелепіпед. Доведіть, що протилежна вершина даного паралелепіпеда є серединою діагоналі побудованого паралелепіпеда.

790. Дано прямокутний паралелепіпед, діагоналі якого перетинаються в точці O. Три ребра паралелепіпеда, які мають спільну вершину, видно з точки O під кутами α_1, β_1, γ_1. Три діагоналі граней, які виходять з однієї вершини, видно з точки O під кутами α_2, β_2, γ_2. Доведіть, що:

а) $\cos\alpha_1 + \cos\beta_1 + \cos\gamma_1 = 1$; б) $\cos\alpha_2 + \cos\beta_2 + \cos\gamma_2 = -1$.

791. Дано тетраедр $PABC$; b_1, b_2, b_3 — бісектриси кутів BPC, CPA, APB відповідно. Доведіть, що за умови $b_1 \perp b_2$ кожна з бісектрис b_1, b_2 перпендикулярна до b_3.

792. Знайдіть кількість розв'язків рівняння

$\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} = a$ за умови:

а) $a = 1$; б) $a = \sqrt{2}$; в) $a = 2$.

П. Ферма

М. Ґ. Аньєзі

А. К. Клеро

В. Я. Буняковський

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Епоха великих географічних відкриттів і обумовлений ними розвиток виробництва, торгівлі, мореплавства стали поштовхом до виникнення аналітичної геометрії. Цей розділ геометрії, в основі якого лежать ідея координат і встановлення відповідності між алгебраїчними рівняннями й геометричними фігурами, став підсумком багаторічних математичних досліджень.

Творцями аналітичної геометрії вважають французьких учених Рене Декарта (1596–1660) і П'єра Ферма (1601–1665). Ферма на початку XVII століття займався відновленням утрачених робіт давньогрецьких учених, зокрема Аполлонія Перзького, і, вийшовши за межі суто відновлювальної роботи, установив загальний підхід до вивчення геометричних місць точок через алгебраїчні рівняння. Відкриття Декартом системи координат на площині надало математичний апарат для втілення ідей аналітичної геометрії в тому вигляді, у якому вони відомі нам сьогодні. Зокрема, за допомогою координат стало набагато зручніше досліджувати геометричні криві. Одна з них отримала назву «локон Аньєзі» на честь Марії Ґаетани Аньєзі, першої в світі жінки — професора з математики. Але як Ферма, так і Декарт лише натякали на можливість використання координат у просторі. Тривимірну систему координат першим почав застосовувати французький математик Алексі Клод Клеро (1713–1765), а систематичне викладення аналітичної геометрії в просторі подав у 1748 р. видатний учений Леонард Ейлер.

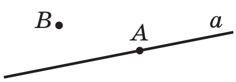
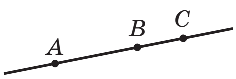
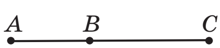
В історію аналітичної геометрії вписано також імена українських учених. Уродженець Вінниччини Віктор Якович Буняковський (1804–1889) закінчив Харківський університет, потім навчався математики в Парижі, у провідних учених свого часу — Коші, Лежандра, Пуасона, Лапласа, а пізніше працював у Петербурзі. Він був автором понад ста робіт із математичного аналізу, алгебри, геометрії, теорії чисел і теорії ймовірностей. Зокрема, відома вам нерівність $\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$ є векторним поданням математичного факту, який був узагальнений Буняковським на підставі ідей його вчителя Коші й отримав назву «нерівність Коші — Буняковського».

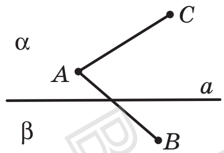
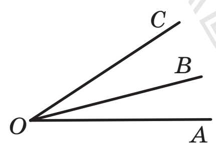
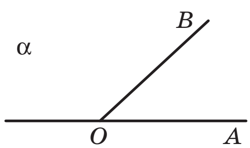
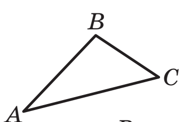
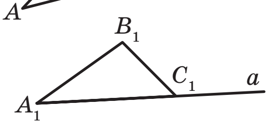
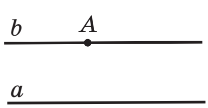
Додатки

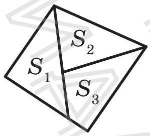
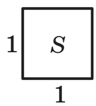
Додаток 1. Про аксіоми стереометрії та її зв'язок із планіметрією

Геометрія в просторі — стереометрія — виникла й розвивалася одночасно з геометрією на площині. З давніх часів людина спостерігала та вивчала як просторові предмети, що її оточували, так і їхні окремі плоскі частини. Цікаво, що термін «планіметрія», який має латинський корінь «планум» (площина), виник пізніше за термін «стереометрія», що походить від грецького кореня «стереос» (простір). Однак у процесі побудови теорії просторових тіл з'ясувалося, що саме планіметрія є головним науковим підґрунтям стереометрії. Саме тому, формулюючи низку аксіом просторової геометрії, ми пов'язуємо їх з аксіомами планіметрії та наслідками з них.

СИСТЕМА ПЛАНІМЕТРИЧНИХ АКСІОМ

 $A \in a,\ B \notin a$	I. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і тільки одну.
	II. Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.
 $AC = AB + BC$	III. Кожний відрізок має певну довжину (у заданих одиницях вимірювання), більшу за нуль. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.
	IV. На будь-якому промені від його початкової точки можна відкласти відрізок заданої довжини, і тільки один.

	V. Пряма розбиває площину на дві півплощини. Якщо кінці відрізка належать одній півплощині, то відрізок не перетинає пряму. Якщо кінці відрізка належать різним півплощинам, то відрізок перетинає пряму.
 $\angle AOB = 180°$  $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$	VI. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Якщо промінь ділить кут на два кути, то градусна міра даного кута дорівнює сумі градусних мір двох отриманих кутів.
	VII. Від будь-якого променя даної прямої можна відкласти в дану півплощину кут із заданою градусною мірою, меншою за 180°, і тільки один.
  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$	VIII. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому в заданому розміщенні відносно даного променя.
 $a \parallel b$	IX (аксіома паралельних прямих, або аксіома Евкліда). Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більш ніж одну пряму, паралельну даній.

 $S_1 = S_2$	X. Рівні многокутники мають рівні площі.
 $S = S_1 + S_2 + S_3$	XI. Якщо многокутник складений із кількох многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників.
 $S = 1$ кв. од.	XII. Площа квадрата зі стороною, що дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці площі.

Розглянемо деякі особливості взаємозв'язків аксіоматики планіметрії і стереометрії.

Насамперед, розширимо й уточнимо перелік аксіом, поданих у § 1.

1. **У просторі існують принаймні три точки, які не лежать на одній прямій.**
2. **Через три точки, що не належать одній прямій, можна провести площину, і тільки одну.**
3. **Яка б не була площина, існують точки***, **що належать цій площині, і точки, що не належать їй.**
4. **У будь-якій площині виконується планіметрія, тобто всі планіметричні аксіоми і теореми.**
5. **Через будь-які дві точки простору можна провести пряму, і тільки одну.**
6. **Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.**
7. **Довжина відрізка (у заданих одиницях вимірювання) не залежить від того, у якій площині, що містить даний відрізок, вона вимірюється.**

Виокремимо декілька важливих наслідків цієї системи аксіом, крім тих, про які йшлося в § 1–2.

* Принаймні дві.

З аксіом 1 і 5 випливає, що через будь-яку точку простору можна провести пряму, а для будь-якої прямої існують точки, які їй не належать. Також із цих аксіом випливає, що в просторі існує принаймні одна пряма.

З аксіом 1 і 2 випливає, що в просторі існує принаймні одна площина.

З аксіом 1 і 3 випливає, що не всі точки простору містяться в одній площині, а тим більше — на одній прямій. Так само і на площині — з аксіоми про те, що для будь-якої прямої існують точки, що їй не належать, випливає, що не всі точки площини лежать на одній прямій.

За відповідною теоремою, доведеною в п. 2.2, через пряму і точку, що не належить даній прямій, можна провести площину. За аксіомами планіметрії на даній прямій існують точки площини. Отже, і в просторі, як і на площині, для будь-якої прямої існують точки, що належать даній прямій, і точки, що не належать їй.

Звернемо особливу увагу на аксіому 4, згідно з якою в кожній площині виконуються всі аксіоми і теореми планіметрії. У зв'язку з цим зазначимо ще один важливий факт: усі аксіоми планіметрії (навіть якщо в їх формулюваннях відсутнє слово «площина») можна використовувати лише в певній площині, а не для тривимірного простору взагалі. Ось чому, наприклад, аксіома 5 не є наслідком відповідної аксіоми планіметрії. Більш того, окремі теореми планіметрії справедливі й для фігур у просторі — до таких належать, зокрема, ознаки рівності й подібності трикутників, які справджуються для трикутників, що не лежать в одній площині (подаємо цей факт без доведення).

Узагалі, проблема відповідності окремих понять і фактів на площині й у просторі цікавила вчених ще починаючи з Лобачевського, який свого часу запропонував не розділяти планіметрію та стереометрію, а викладати їх паралельно. Такий підхід не втратив свого значення й сьогодні. Далі ми застосуємо відповідності між планіметрією та стереометрією для обґрунтування деяких взаємопов'язаних фактів на площині й у просторі.

Задача 1.1

Доведіть, що на площині існує безліч прямих, які містять дану точку.

Розв'язання

Нехай пряма a містить дану точку A. За аксіомами планіметрії існує точка B, що не належить прямій a, та точка D, що належить цій прямій.

Розглянемо відрізок BD (рис. 287). Він має певну довжину, а отже, на ньому існує безліч точок C таких, що довжина відрізка CD менша за довжину відрізка BD. За відповідною аксіомою через точку A і будь-яку точку відрізка BD можна провести пряму. Доведемо методом від супротивного, що всі такі прямі є різними.

Справді, припустимо, що пряма c_1, яка містить точки A і C_1, збігається з прямою c_2, що містить точки A і C_2. Тоді обидві ці прямі збігаються з прямою C_1C_2, на якій лежать точки B і D. Отже, точки A, C_1, C_2, B і D лежать на одній прямій. Через точки A і D можна провести єдину пряму a, але за побудовою точка B їй не належить. Отже, ми отримали суперечність, тобто прямі c_1 і c_2 різні. Таким чином, усі побудовані прямі є різними, і через точку A на площині проходить безліч прямих.

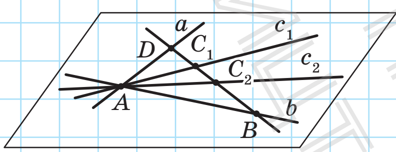


Рис. 287

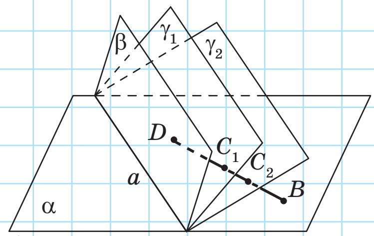


Рис. 288

Задача 1.2

Доведіть, що в просторі існує безліч площин, що містять дану пряму.

Розв'язання

Розглянемо точку B, яка не належить даній прямій a. За відповідною теоремою через пряму a і точку B можна провести єдину площину α. За аксіомою 3 існує точка D, яка не лежить у площині α. Через пряму a і точку D проведемо площину β (рис. 288).

На відрізку BD існує безліч точок C, жодна з яких, крім точки B, не належить площині α. Дійсно, якщо $C \in \alpha$, $B \in \alpha$, то $BC \subset \alpha$, а отже, $D \in \alpha$, що суперечить вибору точки D. Тому всі точки відрізка BD не є точками прямої a. Проведемо площини через пряму a та кожну з внутрішніх точок відрізка BD і доведемо методом від супротивного, що всі ці площини різні.

Справді, припустимо, що C_1 і C_2 — внутрішні точки відрізка BD, а площина γ_1, яка містить пряму a і точку C_1, збігається з площиною γ_2, що містить пряму a і точку C_2. Тоді ці площини містять точки C_1 і C_2, а отже, і пряму C_1C_2, зокрема точку B. Але ці площини містять також і пряму a, а тому за відповідною теоремою збігаються з площиною α. Отже, точки C_1 і C_2 належать площині α. Тоді пряма C_1C_2, а отже, і точка D лежать у площині α, що суперечить вибору точки D. Таким чином, усі побудовані площини є різними, і через пряму a в просторі проходить безліч площин.

Щойно розглянуті задачі свідчать про те, що формулювання й способи доведення деяких геометричних фактів на площині й у просторі аналогічні. Але така аналогія в деяких ситуаціях може порушуватися: інколи твердження, яке в планіметрії є аксіомою, допомагає сформулювати аналогічний стереометричний факт, але в просторі він уже потребує доведення. Найчастіше це доведення ґрунтується саме на відповідній аксіомі планіметрії: наприклад, у площині через точку поза даною прямою можна провести не більше від однієї прямої, паралельної даній (аксіома Евкліда), а в просторі цей факт є частиною теореми (див. п. 3.3), доведення якої зводиться зрештою до застосування аксіоми Евкліда.

Наведемо ще одну подібну аналогію.

За аксіомою планіметрії кожна пряма розбиває площину на дві частини — півплощини, причому якщо кінці відрізка належать одній півплощині, то відрізок не перетинає дану пряму, а якщо кінці відрізка належать різним півплощинам, то відрізок перетинає пряму (рис. 289).

Розглянемо розбиття простору площиною на дві частини — півпростори. Для них буде виконуватися властивість, аналогічна до щойно розглянутої властивості півплощин у планіметрії.

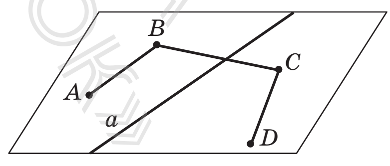


Рис. 289

Теорема (про розбиття простору на два півпростори)

Будь-яка площина розбиває простір на два півпростори. Якщо кінці відрізка належать одному півпростору, то відрізок не перетинає площину. Якщо кінці відрізка належать різним півпросторам, то відрізок перетинає площину.

Доведення

☐ Розділимо множину точок, які не належать даній площині α, на дві фігури F_1 та F_2 в такий спосіб. За аксіомою стереометрії існує точка A, яка не належить площині α. До фігури F_1 віднесемо точку A і всі точки X поза площиною α, для яких відрізок AX не перетинає α, до фігури F_2 — всі точки Y поза площиною α, для яких відрізок AY перетинає α. Отже, усі точки простору, які не містяться в площині α, належать або фігурі F_1, або фігурі F_2. Доведемо, що F_1 та F_2 задовольняють умови півпростору, наведені в теоремі.

Розглянемо точки X_1 і X_2 фігури F_1, які не збігаються з точкою A. Через них та точку A можна провести не менше від однієї площини. Якщо ця площина не має спільних точок з α, то відрізок X_1X_2, який належить площині AX_1X_2, не перетинає α.

Розглянемо випадок, коли $(AX_1X_2)\cap\alpha = a$. За аксіомою планіметрії про півплощини пряма a розбиває площину AX_1X_2 на дві півплощини β і γ (рис. 290, *а*).

Нехай $A\in\beta$. За побудовою фігури F_1 відрізки AX_1 і AX_2 не перетинають α, а отже, не перетинають і пряму a. Тому за аксіомою планіметрії $X_1\in\beta$, $X_2\in\beta$. Отже, відрізок X_1X_2 не перетинає a. Але тоді він не перетинатиме й α, оскільки точка перетину має лежати на прямій a, яка є прямою перетину площин α і AX_1X_2.

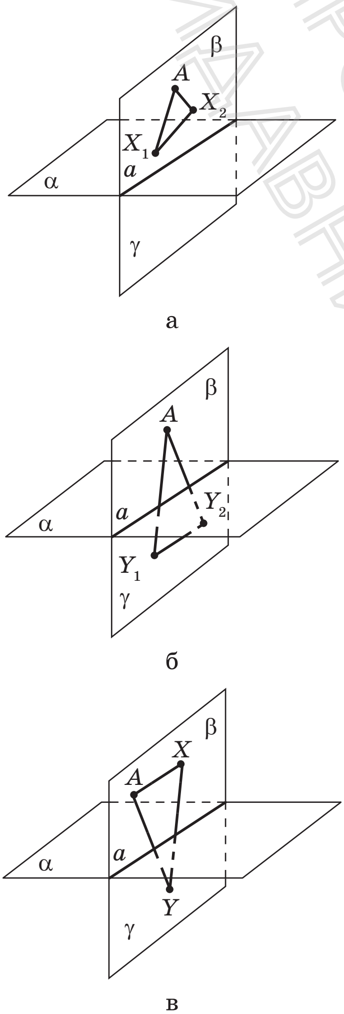


Рис. 290

Аналогічно доводиться, що коли точки Y_1 і Y_2 належать фігурі F_2, то відрізок Y_1Y_2 не перетинає α (рис. 290, *б*), а коли $X \in F_1$, $Y \in F_2$, то відрізок XY перетинає α (рис. 290, *в*). Доведіть ці твердження самостійно. ■

І нарешті, наведемо ще дві задачі на площині й у просторі, розв'язування яких ґрунтується відповідно на щойно розглянутій аксіомі про півплощини й теоремі про півпростори.

Задача 2.1

На площині пряма, яка не містить вершини трикутника і перетинає одну з його сторін, перетинає рівно одну з двох інших сторін даного трикутника. Доведіть.

Розв'язання

Нехай у площині α дано трикутник ABC і пряму a, яка не містить точок A, B і C та перетинає відрізок AB. За аксіомою планіметрії про півплощини ця пряма розбиває площину на дві півплощини β і γ (рис. 291).

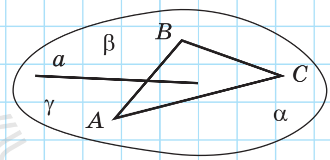


Рис. 291

Нехай $B \in \beta$, $A \in \gamma$. Оскільки точка C не належить прямій a, то або $C \in \beta$, або $C \in \gamma$.

У першому випадку за аксіомою про півплощини відрізок BC не перетинає a, а відрізок AC перетинає a. У другому випадку, навпаки, відрізок BC перетинає a, а відрізок AC не перетинає a.

Зауважимо, що в інших системах геометричних аксіом, зокрема в аксіоматиці Гільберта, доведений факт є аксіомою. На честь дослідника цієї властивості, німецького математика Моріца Паша, дану аксіому називають аксіомою Паша.

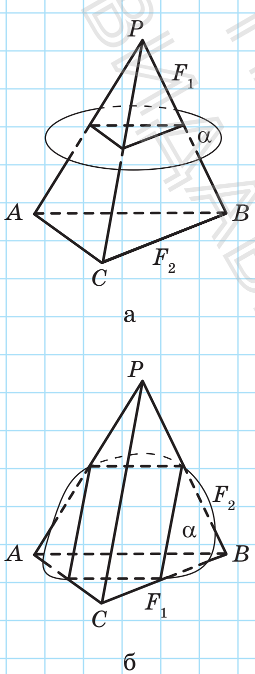


Рис. 292

Задача 2.2

Переріз тетраедра площиною, яка не містить вершини тетраедра і перетинає одне з його ребер, є або трикутником, або чотирикутником. Доведіть.

Розв'язання

Нехай дано тетраедр $PABC$ та площину α, яка не містить жодної з вершин даного тетраедра і перетинає відрізок PB. Площина α розбиває простір на два півпростори F_1 і F_2. За щойно доведеною теоремою точки P і B належать різним півпросторам. Нехай $P \in F_1$, $B \in F_2$. Розглянемо випадок, коли $A \in F_2$, $C \in F_2$ (рис. 292, *а*).

Тоді за теоремою про півпростори площина α перетинає відрізки PA, PB і PC, але не перетинає відрізки AB, AC і BC. Отже, переріз тетраедра площиною є трикутником.

У випадку, коли $A \in F_2$, $C \in F_1$ (рис. 292, *б*), площина α перетинає відрізки PA, PB, CA і CB, але не перетинає відрізки AB і PC. Отже, переріз тетраедра площиною є чотирикутником.

Усі випадки, коли $A \in F_1$, аналогічні до щойно розглянутих (проаналізуйте їх самостійно).

Додаток 2. Геометричні місця точок у просторі

У процесі дослідження просторових фігур, як і фігур на площині, доволі часто постають задачі на знаходження точок, які задовольняють певну умову, тобто задачі на знаходження геометричного місця точок. У стереометрії підходи до розгляду геометричних місць точок майже не відрізняються від тих, що застосовувалися в планіметрії.

Означення

Геометричним місцем точок (скорочено **ГМТ**), які задовольняють певну умову, в просторі називається фігура, що складається з усіх точок простору, які задовольняють цю умову.

Для доведення того, що фігура F є геометричним місцем точок, які задовольняють умову P, треба довести два твердження:

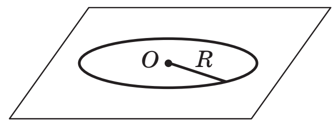
1) якщо точка X належить фігурі F, то вона задовольняє умову P;
2) якщо точка Y задовольняє умову P, то вона належить фігурі F.
   Очевидно, що замість другого твердження можна доводити таке:

2′) якщо точка Y не належить фігурі F, то вона не задовольняє умову P.

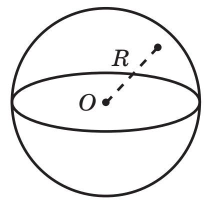
Нагадаємо три геометричних місця точок на площині, які використовуються найчастіше, та наведемо їх просторові аналоги.

1) Геометричним місцем точок площини, які розміщені на заданій відстані R від даної точки O цієї площини, є коло з центром O та радіусом R (рис. 293, *а*).
   У просторі геометричним місцем точок, які розміщені на заданій відстані R від даної точки O, є сфера з центром O та радіусом R (рис. 293, *б*). Цей факт безпосередньо випливає з означення сфери.
2) Геометричним місцем точок площини, рівновіддалених від даних точок A і B, є серединний перпендикуляр до відрізка AB (рис. 294).

У просторі існує безліч прямих, що проходять через середину відрізка перпендикулярно до нього. Доведемо, що ці прямі утворюють площину, перпендикулярну до даного відрізка.



а



б

Рис. 293. Геометричне місце точок, віддалених від даної точки на задану відстань

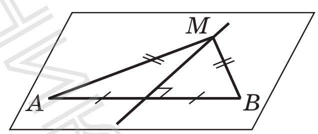


Рис. 294. Геометричне місце точок площини, рівновіддалених від двох даних точок

Теорема (про геометричне місце точок простору, рівновіддалених від двох даних точок)

Геометричним місцем точок простору, рівновіддалених від даних точок A і B, є площина, яка перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину.

Доведення

☐ Нехай точка C — середина відрізка AB. За доведеним у п. 8.2 існує єдина площина α, яка проходить через точку C і перпендикулярна до AB. Доведемо, що α є шуканим ГМТ.

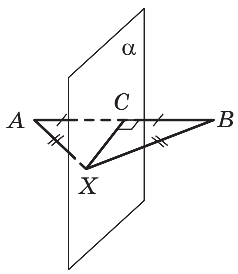
Очевидно, що точка C площини α належить шуканому ГМТ. Розглянемо довільну точку X, яка належить площині α і не збігається з C (рис. 295, *а*).

Тоді за означенням перпендикулярності прямої та площини $AB \perp CX$.

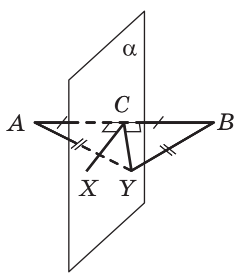
Отже, у трикутнику AXB медіана XC є висотою. Це означає, що трикутник AXB рівнобедрений з основою AB, отже, $AX = XB$, тобто точка X рівновіддалена від A і B. Оскільки X — довільна точка площини α, то всі точки площини α належать шуканому ГМТ.

Доведемо методом від супротивного, що, крім точок площини α, інших точок, рівновіддалених від A і B, у просторі немає. Дійсно, нехай деяка точка Y, рівновіддалена від A і B, не належить площині α (рис. 295, *б*). Тоді YC — медіана рівнобедреного трикутника AYB, проведена до основи, а отже, $YC \perp AB$. Проведемо площину XCY.

За ознакою перпендикулярності прямої і площини $(XCY) \perp AB$. Але площина XCY не збігається з α і проходить через точку C, що суперечить єдиності площини, яка проходить через дану точку прямої перпендикулярно до даної прямої. Отже, крім точок площини α, інших точок, рівновіддалених від A і B, у просторі не існує. Теорему доведено. ■



а



б

Рис. 295. До доведення теореми про геометричне місце точок простору, рівновіддалених від двох даних точок

3) Геометричним місцем точок площини, що лежать усередині кута й рівновіддалені від його сторін, є бісектриса цього кута (рис. 296).

Просторові аналоги цього твердження можна отримати двома способами — або розв'язати цілком аналогічну задачу в просторі, або ще й замінити кут на площині на двогранний кут у просторі.

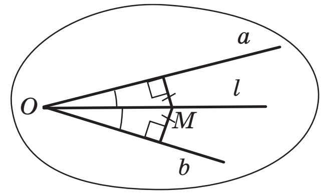


Рис. 296. Геометричне місце точок площини, рівновіддалених від сторін даного кута

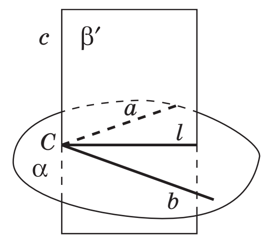
Теорема (про геометричне місце точок простору, рівновіддалених від сторін даного кута)

Геометричним місцем точок простору, рівновіддалених від сторін даного кута*, є півплощина, яка:
1) містить бісектрису цього кута;
2) є частиною площини, яка перпендикулярна до площини кута і містить його бісектрису;
3) обмежена прямою, що проходить через вершину кута перпендикулярно до площини даного кута.

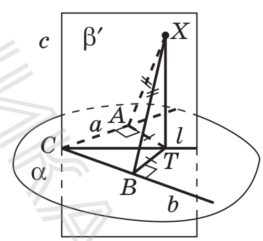
Доведення

☐ Нехай у площині α дано кут $\angle(a, b)$ з вершиною C, промінь l — його бісектриса (рис. 297, *а*). Проведемо через точку C пряму c, перпендикулярну до площини α, а через c і l проведемо площину β. Оскільки $c \perp \alpha$, $c \subset \beta$, то за ознакою перпендикулярності площин $\beta \perp \alpha$. Розглянемо півплощину β' площини β, яка містить l і обмежена прямою c. Доведемо, що β' є шуканим ГМТ.

З відповідної теореми планіметрії випливає, що всі точки променя l належать шуканому ГМТ. Розглянемо довільну точку X півплощини β', яка не належить променю l (рис. 297, *б*).



а



б

Рис. 297. До доведення теореми про геометричне місце точок простору, рівновіддалених від сторін даного кута

* Тут і далі домовимось, що формулювання «точка, рівновіддалена від сторін кута» означатиме: основи перпендикулярів, проведених із даної точки до прямих, що містять сторони кута, належать цим сторонам, а самі перпендикуляри рівні між собою.

Доведемо, що точка X рівновіддалена від променів a і b. Проведемо у півплощині β' перпендикуляр XT до l. Оскільки $\beta \perp \alpha$, то за властивістю перпендикулярних площин $XT \perp \alpha$. Нехай TA і TB — перпендикуляри, проведені в площині α до прямих a і b відповідно. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $XA \perp a$, $XB \perp b$. Отже, XA і XB — відстані від точки X до a і b відповідно. За властивістю бісектриси кута на площині $TA = TB$. Тоді $XA = XB$, оскільки ці відрізки є похилими до площини α, які мають рівні проєкції. Отже, будь-яка точка X півплощини β' рівновіддалена від a і b.

Нехай тепер деяка точка Y рівновіддалена від прямих a і b і не належить півплощині β'. Проведемо $YZ \perp \alpha$. Тоді точка Z також буде рівновіддалена від a і b, а отже, належатиме променю l (обґрунтуйте це самостійно). У площині β проведемо через точку Z пряму a, перпендикулярну до l. За властивістю перпендикулярних площин $a \perp \alpha$, тобто прямі a і YZ — дві різні прямі, які перпендикулярні до площини α і проходять через точку Z, що неможливо. З отриманої суперечності випливає, що $Y \in \beta'$. Теорему доведено. ■

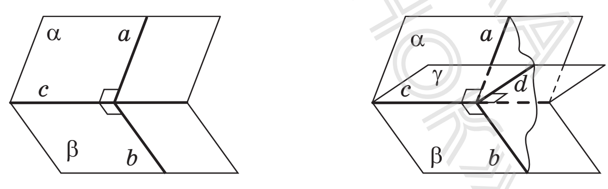
Для доведення наступного твердження нам знадобиться ще одне означення — аналог поняття бісектриси для двогранного кута.

Означення

Бісектором двогранного кута називається півплощина, яка обмежена ребром даного кута і ділить цей кут на два рівні (за градусною мірою) двогранні кути.

Очевидно, що бісектриса будь-якого лінійного кута даного двогранного кута належить його бісектору.

Дійсно, нехай дано двогранний кут з гранями α і β та ребром c, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $a \perp c$, $b \perp c$. Тоді кут між променями a і b — лінійний кут даного двогранного кута (рис. 298, *а*).



а б

Рис. 298. До обґрунтування побудови бісектора двогранного кута

Розглянемо бісектор даного кута γ і пряму d його перетину з площиною променів a і b. Оскільки за ознакою перпендикулярності прямої і площини пряма c перпендикулярна до площини променів a і b, то $c \perp d$ (рис. 298, *б*).

Тоді кут між a і d є лінійним кутом двогранного кута з гранями α і γ, а кут між променями b і d — лінійним кутом двогранного кута з гранями β і γ. За означенням бісектора вони рівні, отже, промінь прямої d — бісектриса кута між a і b, яка лежить у площині γ.

Таким чином, бісектор можна провести через ребро двогранного кута та бісектрису будь-якого його лінійного кута.

Теорема (про геометричне місце точок простору, рівновіддалених від граней двогранного кута)

Геометричним місцем точок, рівновіддалених від граней двогранного кута*, є бісектор цього кута.

Доведення

☐ Нехай дано двогранний кут із гранями α і β та ребром c; γ — його бісектор (рис. 299, *а*).

Оскільки пряма c є спільною для площин α і β, то всі точки прямої c можна вважати рівновіддаленими від α і β. Доведемо, що довільна точка X площини γ, яка не належить прямій c, рівновіддалена від α і β. Нехай A, B і C — основи перпендикулярів, проведених із точки X до площин α і β та прямої c відповідно. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $AC \perp c$, $BC \perp c$. З цього випливає, що відрізки AC, BC і XC ле-

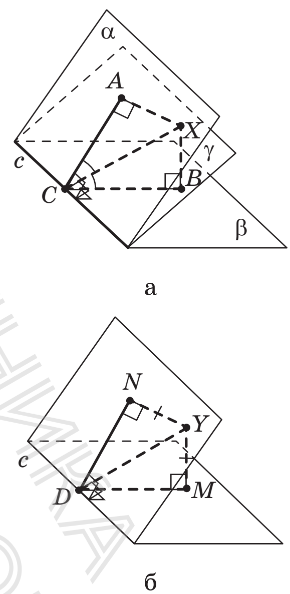


Рис. 299. До доведення теореми про геометричне місце точок, рівновіддалених від граней двогранного кута

* Тут і далі домовимось, що формулювання «точка, рівновіддалена від граней двогранного кута» означатиме: основи перпендикулярів, проведених із даної точки до площин, що містять грані кута, належать цим граням, а самі перпендикуляри рівні між собою.

жать у площині ACB, перпендикулярній до прямої c, причому за означенням бісектора промінь CX — бісектриса кута ACB. Звідси за властивістю бісектриси кута на площині $AX = BX$, тобто будь-яка точка X бісектора γ рівновіддалена від α і β.

Нехай тепер деяка точка Y рівновіддалена від α і β. Проведемо перпендикуляри YN, YM і YD до площин α і β та прямої c відповідно (рис. 299, *б*). За теоремою про три перпендикуляри $ND \perp c$, $MD \perp c$. Отже, YN, YM і YD лежать у площині NDM, перпендикулярній до прямої c, причому $YN = YM$. Отже, у площині NDM точка Y рівновіддалена від DM і DN, а тому DY — бісектриса кута NDM, який за означенням є лінійним кутом даного двогранного кута. Звідси $DY \subset \gamma$, а зокрема, $Y \in \gamma$. Теорему доведено. ■

Розглянемо тепер декілька задач на знаходження ГМТ, пов'язаних із паралельними площинами та мимобіжними прямими.

Задача

Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних паралельних площин.

Як ми вже бачили під час доведення теорем, перед початком розгляду ГМТ у просторі корисно пригадати аналогічну ситуацію на площині. Як відомо, на площині геометричне місце точок, рівновіддалених від двох паралельних прямих *a* і *b*, — це пряма *l*, паралельна даним прямим і рівновіддалена від них (рис. 300).

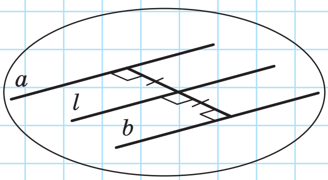


Рис. 300

Спробуємо відтворити аналогічну ситуацію в просторі.

Розв'язання

Проведемо пряму *l*, перпендикулярну до даних площин α і β; нехай *l* перетинає їх у точках *A* і *B* відповідно (рис. 301, *а*). Через середину відрізка *AB* — точку *C* — проведемо площину γ, паралельну площинам α і β. Очевидно, що $\gamma \perp l$. Доведемо, що побудована площина γ є шуканим ГМТ.

Очевидно, що точка *C* рівновіддалена від α і β. Розглянемо в площині γ довільну точку *X*, яка не збігається з точкою C. Проведемо через точку X пряму m, паралельну l (рис. 301, *б*). Нехай вона перетинає α і β в точках A_1 і B_1 відповідно. Оскільки $l \perp \alpha$, $m \parallel l$, $\alpha \parallel \gamma \parallel \beta$, то $m \perp \alpha$, $m \perp \beta$, $m \perp \gamma$, а XA_1 і XB_1 — відстані від точки X до площин α і β відповідно. У площині паралельних прямих l і m чотирикутники AA_1XC і CXB_1B — прямокутники за означенням, отже, $A_1X = AC = CB = XB_1$. Таким чином, будь-яка точка X площини γ належить шуканому ГМТ.

Нехай тепер деяка точка Y рівновіддалена від α і β, $Y \notin \gamma$. Проведемо через точку Y пряму n, яка перпендикулярна до даних площин і перетинає площину α в точці K, площину β — у точці M, а площину γ — у точці L. Можливі два основні випадки (решта їм аналогічні).

У випадку, поданому на рис. 301, *в*, YK і YM є відстанями від Y до α і β відповідно, але $YK < YM$. У випадку, поданому на рис. 301, *г*, $YK = YM$, але за доведеним $KL = LM$. Отже, Y збігається з L, $Y \in \gamma$, що суперечить припущенню про те, що $Y \notin \gamma$.

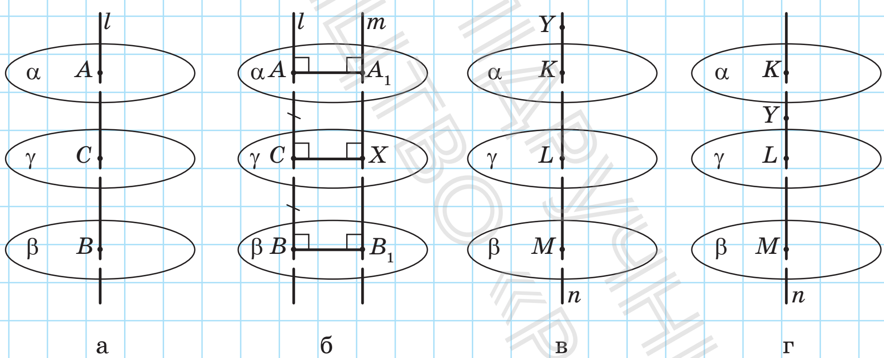


Рис. 301

Відтак, побудована площина γ є геометричним місцем точок, рівновіддалених від паралельних площин α і β.

Для розв'язування багатьох задач, пов'язаних із мимобіжними прямими, зокрема задач на відшукання ГМТ, використовується зв'язок між даними прямими і проведеними через них паралельними площинами: через дві дані мимобіжні прямі можна провести відповідно дві паралельні площини, і така пара площин єдина (див. п. 5.1). Дві наступні задачі показують, як використовується цей зв'язок прямих і площин під час дослідження ГМТ.

Задача

Знайдіть геометричне місце середин відрізків, кінці яких належать двом даним паралельним площинам.

Розв'язання

Нехай дано паралельні площини α і β. Розглянемо довільні точки $A \in \alpha$, $B \in \beta$, а також середину відрізка AB — точку C. Проведемо через точку C площину γ, паралельну площинам α і β (рис. 302, *а*). Доведемо, що площина γ є шуканим ГМТ.

Очевидно, що точка C належить шуканому ГМТ. Розглянемо довільну точку X площини γ, яка не збігається з точкою C (рис. 302, *б*). Якщо D — точка перетину променя AX з площиною β, то прямі CX і BD лежать в одній площині BAD і не мають спільних точок, оскільки $\gamma \parallel \beta$, $CX \subset \gamma$, $BD \subset \beta$. Звідси $CX \parallel BD$. Але $AC = BC$ за побудовою, отже, за теоремою Фалеса $AX = XD$. Тому будь-яка точка X площини γ належить шуканому ГМТ.

Нехай тепер деяка точка $У$ є серединою відрізка з кінцями на площинах α і β. Якщо точки $У$ і C збігаються, то $У \in \gamma$. Інакше можливі два випадки (решта їм аналогічні).

У випадку, поданому на рис. 302, *в*, відрізок $CУ$ є середньою лінією трикутника ABE, а тому паралельний його основі, а отже, паралельний площинам α і β та проходить через точку C. Тому $CУ \subset \gamma$, зокрема $У \in \gamma$.

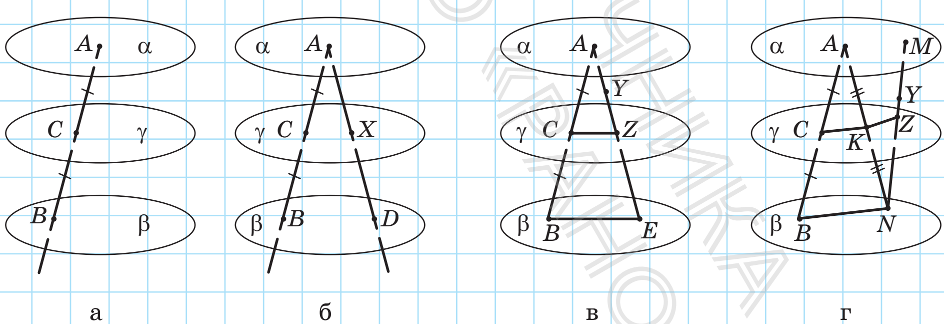


Рис. 302

У випадку, поданому на рис. 302, *г*, точка $У$ є серединою відрізка MN, $M \in \alpha$, $N \in \beta$. Нехай K — середина відрізка AN. Тоді згідно з попереднім випадком $K \in \gamma$. Отже, знову, з урахуванням доведеного за рис. 302, *в*, $У \in \gamma$.

Задача

Знайдіть геометричне місце середин відрізків, кінці яких лежать на двох даних мимобіжних прямих.

Розв'язання

Побудуємо паралельні площини α і β, які містять дані прямі a і b відповідно. Нехай $A \in a$, $B \in b$, C — середина відрізка AB, площина γ містить C і паралельна площинам α і β (рис. 303, *а*). Доведемо, що γ є шуканим ГМТ.

Спочатку доведемо, що кожна точка X площини γ є серединою відрізка з кінцями на прямих a і b. Побудуємо площину δ, яка проходить через пряму b і точку X (рис. 303, *б*). Оскільки $\alpha \parallel \beta$, то вона перетинає площину α по прямій b', паралельній b. Тому b' перетинає a в деякій точці T. У площині δ пряма TX перетинає пряму b'. Тому вона перетинає паралельну прямій b пряму b' у деякій точці R. За доведеним середина відрізка TR належить площині γ, а отже, збігається з X.

Нехай деяка точка Y є серединою відрізка з кінцями на прямих a і b. Тоді вона є серединою відрізка з кінцями на α і β, а отже, за результатами, отриманими в попередній задачі, $Y \in \gamma$.

Нескладно показати, що побудований у процесі розв'язування відрізок TR для точки X є єдиним (доведіть це самостійно).

Під час розв'язування даної задачі ми скористалися таким важливим міркуванням: якщо фігура F є геометричним місцем точок, які задовольняють умову P, а треба знайти геометричне місце точок, які задовольняють декілька умов, зокрема P, то шукане ГМТ є або фігурою F, або її частиною (виділіть самостійно умову P та фігуру F для щойно розглянутої задачі).

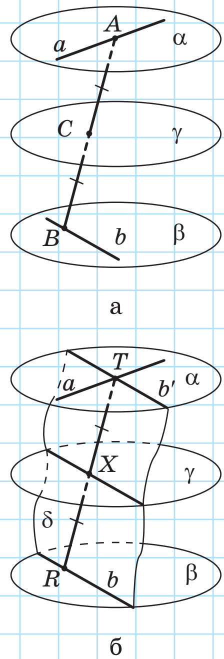


Рис. 303

Зв'язок між мимобіжними прямими та парою паралельних площин, що їх містять, стає у пригоді й під час розв'язування задач на побудову.

Задача

Дано мимобіжні прямі a і b та точку X. Як побудувати пряму, яка містить X та перетинає a і b? Чи завжди це можливо? Знайдіть кількість таких прямих залежно від положення точки X.

Розв'язання

Побудуємо паралельні площини α і β, які містять прямі a і b відповідно. Можливі три випадки розміщення точки X відносно даних прямих і площин: точка лежить на прямій a або на прямій b, у площині α або в площині β (але не належить ані прямій a, ані прямій b) і поза площинами α і β.

У випадку, поданому на рис. 304, *а*, точка X належить одній із даних мимобіжних прямих. Тоді через X і будь-яку точку другої прямої можна провести шукану пряму; отже, таких прямих безліч.

У випадку, поданому на рис. 304, *б*, точка X не належить даним прямим, але належить одній із площин α або β. Тому шукана пряма, дві точки якої належать одній із площин α або β, також має належати цій площині і не буде перетинати одну з прямих a або b. Отже, шуканих прямих — жодної.

Розглянемо випадок, поданий на рис. 304, *в*, коли $X \notin \alpha$, $X \notin \beta$.

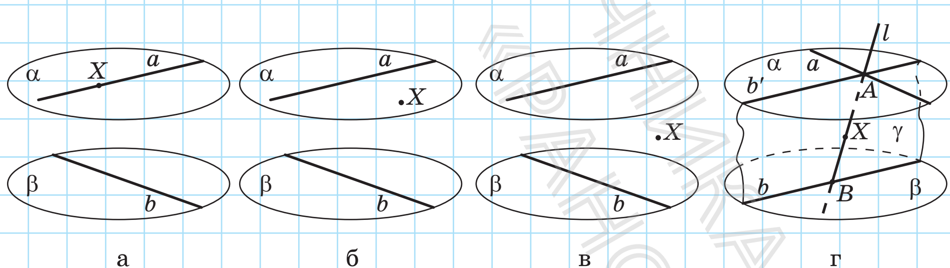


Рис. 304

Аналіз

Нехай l — шукана пряма. Тоді вона належить площині γ, яка проходить через точку X та пряму b.

Побудова

Побудуємо площину γ, яка проходить через пряму b і точку X. Нехай γ перетинає α по деякій прямій b', паралельній b. Оскільки прямі a і b мимобіжні, то b' перетинає a в деякій точці A. Будуємо пряму AX (рис. 304, г).

Доведення

Площина γ перетинає площину β по прямій b, а тому перетинає і площину α, паралельну β. У площині γ пряма AX перетинає пряму b', а тому й паралельну їй пряму b (нехай точкою перетину AX і b є точка B). Пряма AB перетинає a і b та проходить через X, а отже, є шуканою.

Дослідження

Оскільки $X \notin \alpha$, $X \notin \beta$, то описана побудова завжди можлива. Доведемо, що побудована пряма AB є єдиною, яка відповідає умові задачі. Нехай існує пряма l', відмінна від l, яка задовольняє умову задачі. Тоді пряма l' проходить через точку X і деяку точку прямої b, а тому лежить у площині γ. Але ж пряма l' має перетинати пряму a, а точка перетину — це точка, що лежить у площині γ на прямій a. Отже, це точка A. Таким чином, пряма l' збігається з прямою AX, а отже, і з прямою AB.

І нарешті, проілюструємо метод геометричних місць у просторі: якщо геометричним місцем точок, які задовольняють умову P_1, є фігура F_1, а геометричним місцем точок, які задовольняють умову P_2, є фігура F_2, то геометричним місцем точок, які задовольняють обидві умови P_1 та P_2, є спільна частина фігур F_1 і F_2.

Задача

Для даної піраміди, основа якої — многокутник, вписаний у коло, знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від усіх вершин піраміди.

Розв'язання

Як відомо, геометричним місцем точок, рівновіддалених від вершин вписаного многокутника, є пряма l, яка проходить через центр описаного кола перпендикулярно до площини многокутника. За доведеним, геометричним місцем точок, рівновіддалених від двох даних точок, є площина α, яка проходить через середину відрізка з кінцями в даних точках перпендикулярно до цього відрізка. Отже, шукані точки мають лежати як на прямій l, так і в площині α, яка проходить перпендикулярно до ребра AS і ділить його навпіл (рис. 305).

Оскільки пряма AS не лежить у площині ABC і не паралельна цій площині, то пряма l і площина α перетинаються в деякій точці O. Точка O рівновіддалена від вершин S, A, B, C, ... і є єдиною шуканою точкою.

Знайдена точка O є центром сфери, яка проходить через усі вершини піраміди (таку сферу називають описаною навколо піраміди), $OS = OA = OB = OC = \ldots = R$, де R — радіус сфери.

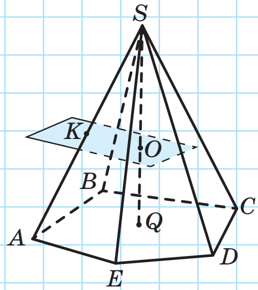


Рис. 305

На завершення пропонуємо застосувати щойно описані ідеї та методи для розв'язування таких задач.

1. У просторі знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних прямих, що перетинаються.
2. У просторі знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних площин, що перетинаються.
3. Три прямі попарно мимобіжні. Доведіть, що існує безліч прямих, які перетинають усі три дані прямі.
4. Три прямі попарно мимобіжні. Доведіть, що існує єдиний паралелепіпед, три ребра якого лежать на даних прямих.
5. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від граней піраміди, основа якої — правильний многокутник, а всі її бічні ребра рівні.

ВІДПОВІДІ

Розділ І

21. 6. **22.** 4. **23.** 11 см або 5 см. **24.** 8 см. **26.** а) *KC*; б) *AC*; в) *AD*. **30.** 3; 6; $\frac{n(n-1)}{2}$. **31.** 90° або 30°; ні. **68.** 24 см^2. **78.** 8 см.
Тестове завдання для самоперевірки № 1. **1.** А. **2.** Г. **3.** Г. **4.** Б. **5.** В. **6.** Б.

Розділ ІІ

95. а) Мимобіжні або перетинаються; б) мимобіжні або перетинаються. **101.** а) $a \parallel b$; б) мимобіжні або перетинаються. **102.** Ні. **104.** а) $MN \parallel BC$; б) 20 см^2. **105.** б) 6 см, 8 см, 10 см. **106.** а) 8 см; б) 12 см; в) 8 см. **107.** Якщо не перетинає — 8 см, якщо перетинає — 2 см. **109.** Мимобіжні. **110.** *Вказівка*. Указані відрізки, узяті попарно, є діагоналями трьох паралелограмів. **112.** а) 12 см; б) $a+c-b$. *Вказівка*. Знайдіть довжину відрізка OO_1. **113.** а) 16 см; б) $a+c$. *Вказівка*. Через точку *O* перетину діагоналей паралелограма проведіть пряму OO_1, паралельну даним прямим $(OO_1 \cap \alpha = O_1)$ і знайдіть довжину відрізка OO_1. **114.** 9 см. **130.** Паралельні або перетинаються. **135.** б) 6 см. **136.** б) 15 см. **139.** *Вказівка*. До даного твердження слід додати «або лежить в одній із них». **143.** *Вказівка*. Доведіть від супротивного, що пряма *a* перетинає площину β, а пряма *b* — площину α. **144.** Паралелограм. **152.** Пряма, яка проходить через точку *M* і паралельна сторонам *BC* і *AD*. **153.** 12 см, 15 см і 21 см. **177.** Коли дана точка лежить у площині даних прямих. **178.** а) 16 см; б) 10 см і 5 см. **179.** 64 см^2. **181.** 12 см. **186.** а) Ні; б) так. **187.** Якщо прямі *a* і *b* перетинаються. **188.** Паралельна α. **189.** *Вказівка*. Проведіть через точку *O* довільну пряму, яка перетинає α і β, і доведіть подібність трикутників, що утворилися (див. рис. 81). **194.** Ні. **196.** 21 см і 28 см або 3 см і 4 см. *Вказівка*. Розгляньте різні випадки взаємного розміщення на прямій точок A_1, A_2 і A_3. **197.** *Вказівка*. Проведіть через прямі *a* і *b* площини, паралельні γ. **198.** Якщо $a \cap b = M$, то шуканою є пряма *CM*; якщо $a \parallel b$, то шукана пряма проходить через точку *C* паралельно прямим *a* і *b*. **217.** 9 см. **218.** 18 см. **220.** *Вказівка*. Побудуйте точки, симетричні точкам A' і B' відносно точки O'. **221.** *Вказівка*. Шуканий діаметр проходить через середину хорди $A'B'$. **222.** *Вказівка*. Шуканий перпендикуляр паралельний медіані, проведеній із вершини B'. **224.** *Вказівка*. Серединні перпендикуляри до двох сторін трикутника паралельні даним висотам. **225.** *Вказівка*. Доведіть, що шукана висота проходить через середину сторони ромба. **226.** *Вказівка*. Діаметр кола проходить через середини двох паралельних хорд. **227.** *Вказівка*. Відрізок, що сполучає середини основ рівнобічної трапеції, є її висотою. **228.** *Вказівка*. Шукана пряма проходить через точку перетину прямих *AC* і $A'C'$ та точку перетину прямих *AB* і $A'B'$. **236.** *Вказівка*. Доведіть, що

$AD:DC = 2:1$. **237.** *Вказівка*. Доведіть, що висота трикутника ділить гіпотенузу у відношенні $4:9$. **238.** *Вказівка*. Через точку D і одну з вершин трикутника проведіть відрізок до перетину з протилежною стороною і побудуйте проєкцію цього відрізка на площину α. **239.** 90° або 20°; так.

Тестове завдання для самоперевірки № 2. **1.** А. **2.** Б. **3.** В. **4.** Б. **5.** А. **6.** В.

242. Паралельно лінії перетину даних площин. **244.** 12 см. **245.** а) Ні; б) так. **246.** Ні. **250.** *Вказівка*. Основа шуканої бісектриси ділить зображення третьої сторони у відношенні $2:3$. **253.** *Вказівка*. Проведіть довільну площину, яка не проходить через дану точку, і побудуйте в цій площині коло. Шукані прямі проходять через дану точку й три точки кола (рис. 306). **260.** Паралелограм. **263.** Одна; неможливо. **266.** *Вказівка*. Одна з діагоналей квадрата ділить навпіл будь-яку хорду, паралельну другій діагоналі. Отже, зображення двох перпендикулярних діаметрів кола (спряжені діаметри еліпса) мають таку саму властивість. **267.** $\frac{a+b+c}{3}$. **268.** 43 см. *Вказівка*. Доведіть, що центр описаного кола ділить висоту трикутника, проведену до основи, у відношенні $7:25$, починаючи від основи трикутника. **269.** *Вказівка*. Нехай ABC — зображення даного трикутника, AB_1C — зображення правильного трикутника, $B_1 \notin (ABC)$ (рис. 307). Унаслідок паралельного проєкціювання в напрямку B_1B медіани трикутника AB_1C перейдуть у медіани трикутника ABC, а точка перетину Z_1 медіан трикутника AB_1C — у точку перетину Z медіан трикутника ABC.

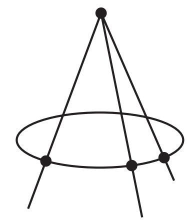


Рис. 306

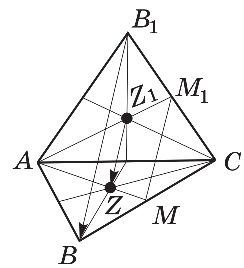


Рис. 307

Розділ III

284. а) 90°; б) 45°; в) 60°; г) 0°. **286.** а) $4\sqrt{29}$ см; б) 13 см. **287.** $8\sqrt{3}$ см². **288.** а) 30° або 50°; б) 50° або 10°. **289.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. *Вказівка*. Доведіть, що відрізок DE є медіаною і висотою трикутників ADP і BEC. **290.** α або $180° - \alpha$. **291.** а) 60°; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **292.** 60°. **293.** 90°. *Вказівка*. Доведіть, що середини відрізків BC, CD, AD і AB є вершинами прямокутника. **294.** 60°. *Вказівка*. Застосуйте теорему косинусів у трикутнику з вершинами в серединах відрізків AD, BC і AB. **313.** Прямокутний; 8 см. **314.** 25 см. **319.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

320. a^2. **322.** 13 см. **323.** 9 см. **324.** 8 см. **325.** 36 см. **328.** *Вказівка*. Доведіть, що $CD \perp (MAD)$. **329.** *Вказівка*. Доведіть, що $BD \perp (MAC)$. **330.** Площину, яка перпендикулярна до a і проходить через точку A. **331.** $\sqrt{b^2+d^2-c^2}$. **332.** *Вказівка*. З довільної точки прямої a проведіть пряму c, перпендикулярну до b. Площина прямих a і c перпендикулярна до b. **333.** 40°. *Вказівка*. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений з основою AC. **334.** 10 см. *Вказівка*. Доведіть, що $\angle ACB = 90°$. **335.** 7 см. **336.** 11 см або 25 см. **347.** а) 4 см; б) $12\sqrt{3}$ см, 24 см; в) 9 см, 12 см. **348.** а) $4\sqrt{2}$ см; б) 4 см. **349.** 8 см. **350.** $9\sqrt{3}$ см. **351.** 24 см. **352.** 13 см. **354.** $0{,}5d$. **355.** 8 см. **356.** 9 см. **357.** 12 см. **358.** a і d або b і c. **359.** 8,5 см. *Вказівка*. Урахуйте, що перша сторінка тому 1 є найближчою до тому 2. **360.** 25 м. **361.** 15 см. **363.** 6 см. **364.** 25 см. **365.** 13 см. **366.** 120°. **368.** 12 см. **369.** 65 см. **370.** 13 см. **371.** 432 см². **372.** 25 см. **374.** 12 см. **375.** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$. **377.** 12 см. *Вказівка*. Доведіть, що основа шуканого перпендикуляра є серединою більшої основи трапеції. **378.** 10 см. **379.** 1152 см². **380.** 216 см² або $18\sqrt{319}$ см². **381.** 6 см. **383.** а) Площина, паралельна даним прямим і рівновіддалена від них; б) площина, паралельна даним площинам і рівновіддалена від них. **384.** Площина, паралельна α і рівновіддалена від A і α. **385.** Площина, паралельна даним площинам і рівновіддалена від них. **386.** 12 см. **387.** 6 см. **396.** а) 10 см; б) 10 см. **399.** 12 см. **400.** 144 см². **401.** C. **402.** C. **404.** 25 см. **405.** $12\sqrt{3}$ см². **406.** 10 см, $2\sqrt{41}$ см. **407.** 3 см. **409.** 16 см. **410.** 5 см. **411.** 200 см². **412.** 16 см. **414.** 5 см. **415.** 9 см. **416.** 5 см. **417.** 8 см. **418.** $\frac{1}{2}c\sin 2\alpha$. **433.** а) 6 см; б) $l\sin\varphi$. **434.** ≈17,43 м. **435.** Так. **436.** а) 45°; б) 45°. **437.** а) 30°; б) $9\sqrt{2}$ см. **440.** а) 16 см; б) 6 см. **441.** 60°. **442.** 25 см. **443.** 60°. **444.** Ні. **445.** Ні.

446.

Пряма	Площина	Кут, що вимірюється	Величина кута
MA	ABC	MAB	45°
MD	ABC	MDB	$\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$
AC	MBD	—	90°
AB	MBD	ABD	30°
BC	MBA	CBA	60°
AM	MBD	AMD	$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$

447.

Пряма	Площина	Кут, що вимірюється	Величина кута
MC	ABC	MCB	$45°$
MD	ABC	MDB	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$
MO	ABC	MOB	$\operatorname{arctg}\sqrt{2}$
AD	MBD	ADO	$45°$
CD	MBC	—	$90°$
AM	MBD	AMO	$30°$

448. $\sqrt{61}$ см. **449.** 5 см. **451.** $3\sqrt{7}$ см. **452.** $30°$ і $\arcsin\frac{2}{3}$. **454.** 19 см. **455.** $60°$. **456.** $45°$. **457.** 7 см. **458.** $45°$. **459.** $45°$. **460.** *Вказівка*. Знайдіть точку перетину F прямої AB з ребром кута; шукана точка є перетином прямих FC і a. **461.** $60°$. **462.** 10 см. **463.** 12 см. **465.** 26 см. *Вказівка*. Нехай $MA=1$ см, $MB=22$ см, MC — шукана відстань. Тоді чотирикутник $MACB$ є вписаним у коло, $\angle AMB=120°$, MC — діаметр кола, який можна знайти з трикутника AMB за допомогою теореми синусів. **466.** Ні; так. **467.** $30°$, $90°$. **483.** $30°$, $45°$. **484.** а) 17 см; б) 32 см; в) 16 см і 15 см. **485.** $6\sqrt{2}$ см, $6\sqrt{3}$ см. **486.** б) 30 см. **487.** а) 10 см; б) $6\sqrt{6}$ см. **488.** а) $10\sqrt{2}$ см; б) $10\sqrt{2}$ см. **495.** 13 см. **496.** 16 см і 30 см. **497.** $\sqrt{6}$ см. **498.** 10 см. **500.** Дві площини, які проходять через бісектриси кутів, утворених даними прямими, і перпендикулярні до площини даних прямих. **501.** Площина, яка перпендикулярна до площини даного кута і проходить через його бісектрису. **502.** 20 см. **503.** $\sqrt{337}$ см. **504.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ см. *Вказівка*. Нехай D — середина сторони AB. Доведіть перпендикулярність площин APB і POD. **505.** 12 см. *Вказівка*. Нехай M — середина сторони BC. Доведіть перпендикулярність площин ABC і ADM. **507.** $90°$. **515.** а) 168 см^2; б) 50 см^2. **516.** $30°$. **517.** $60°$. **518.** а) 1; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) 1. **519.** а) $30°$; б) $45°$. **520.** а) 32 см^2; б) 16 см^2. **521.** ⊕65,47 м^2. **522.** 432 см^2. **523.** $\frac{d^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{8\cos\varphi}$. **524.** $60°$. *Вказівка*. Доведіть, що менша діагональ ромба паралельна площині квадрата. **525.** $30°$. **526.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. *Вказівка*. Доведіть, що спільний перпендикуляр даних ребер сполучає їхні середини. **527.** а) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **528.** $60°$. *Вказівка*. Доведіть, що проєкція даної трапеції — рівнобічна трапеція. **529.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. *Вказівка*. Доведіть, що сторона правильного трикутника дорівнює гіпотенузі прямокутного. **530.** 24 см. *Вказівка*. Спроєктуйте дані прямі на площину лінійного кута двогранного кута між даними площинами, яка проходить через одну з точок A або B. **531.** 12 см. **532.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. *Вказівка*. Спроєктуйте дані прямі на площину CBC_1. **533.** Ортогональна проєкція прямої l на площину α.

Тестове завдання для самоперевірки № 3. **1.** В. **2.** А. **3.** А. **4.** Б. **5.** Б. **6.** Б.

536. а) (ABC), (DBC); б) 30°. **537.** 45°. **539.** 60°. **540.** *Вказівка*. Доведіть, що кожна з точок A і C_1 рівновіддалена від вершин трикутника A_1BD. **541.** Так. *Вказівка*: долоні дівчинки опиняться вище 7-ї полиці. **542.** 60°. **543.** 60°, 30°. **545.** $\frac{h}{\operatorname{tg}\alpha}$. **546.** $h+a\operatorname{tg}\beta$. **548.** $\arccos\frac{1}{3}$. **549.** $\oplus 27$ см. **554.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **555.** а) 45°; б) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$; в) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **556.** $\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\alpha\right)$. **557.** $\arcsin\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$. **558.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$. *Вказівка*. Розгляньте ортогональні проєкції даних прямих на площину ABC_1, перпендикулярну до A_1D. У прямокутнику ABC_1D_1 точка K — проєкція точок A_1 і D, точка L — проєкція точок B_1 і C, D_1L — проєкція D_1C, $KM \perp D_1L$, KM — шукана відстань.

Розділ IV

576. Oxy. **577.** Ox. **578.** $D(-7;-8;8)$. **580.** а) 3; б) 5; в) 17. **581.** А. **583.** $(0;-8;0)$. **586.** а) $B(-2;y;z)$, де y, z такі, що точки A і B не збігаються; б) $B(x;-4;3)$, де $x \neq -2$. **587.** а) $a=2$, $b=3$; б) $a=2$; $b=1$. **588.** $A(0;0;-2)$, $B(-8;6;0)$. **589.** а) $M(-4;3;-2)$; б) $B(-2;3;-2)$. **590.** 11. **591.** AB. **592.** $(0;2;3)$. **594.** –1; 3. **595.** 8 розв'язків: $(\pm 6;\pm 7;\pm 5)$. **596.** 23. **597.** 8 розв'язків: $M\left(\pm\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2};\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **598.** $(-3;-7;0)$, $(5;1;-6)$, $(7;5;4)$. **599.** *А*. *Вказівка*. Скористайтеся нерівністю трикутника. **601.** $D(-3;-1;1)$. **602.** $D(3;0;-5)$. **604.** $A(1;2;3)$. **605.** 6. **606.** 6. *Вказівка*. Доведіть, що даний трикутник прямокутний із гіпотенузою AB. **607.** $(0;0;9{,}5)$, $(0;0;-9{,}5)$, $(0;0;-1)$, $(0;0;5)$. **608.** 120°, 30°, 30°; $2\sqrt{3}$. **610.** 8 см. **629.** а) $(-7;12;-3)$; б) $(5;12;7)$; в) $(5;12;-7)$. **630.** а) $M(-8;5;1)$; б) $B(-2;-1;5)$. **631.** $(-2;-3;-1)$. **633.** а) $(7;5;-2)$; б) $(0;-6;-1)$.

634. Ні. **638.** а) $(-6;5;5)$; б) $(4;1;1)$; в) $(4;1;-1)$. **639.** 3. **642.** (4; 6; 4). **643.** а) $A(-2;-4;3)$; б) $C(-1;-1;1)$, $D(-6;4;3)$. **646.** У напрямі променя, що містить діагональ куба, на відстань, яка менша за довжину діагоналі. **647.** $\vec{0}$. **648.** Прямокутна трапеція.

663. а) -4 і 4; б) -3 і 3. **664.** а) $\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{AC_1}$; в) $\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{DB_1}$; д) $\overrightarrow{AC}$; е) $\overrightarrow{C_1A}$. **665.** а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{CC_1}$. **669.** Ні. **671.** а) 0; б) 0; в) 1; г) -1; д) 2. **672.** а) 5; б) -2; в) 2. **673.** а) $\vec{b}$ і $\vec{c}$; б) $\vec{a}$ і $\vec{b}$. **674.** $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=3$. **675.** $A(0;-1;0)$, $B(-9;0;3)$. **676.** $A(7;3;7)$. **677.** а) $\overrightarrow{A_1D}$; б) $\overrightarrow{D_1D}$. **682.** а) Ні; б) так; в) так. **683.** $(2;-4;6)$. **685.** $\vec{a}(0;-3;1)$, $\vec{b}(4;1;-2)$. **686.** а) -1; б) 2; в) -2. **687.** а) C лежить між A і B; б) не лежать; в) A лежить між B і C. **689.** 60°. **690.** а) -3; б) 50; в) 28. **691.** *Вказівка*. Добудуйте даний тетраедр до паралелепіпеда. **694.** $C(1;-3;0)$. *Вказівка*. Скористайтеся колінеарністю векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BC}$. **696.** Ні. **699.** 2. *Вказівка*. Знайдіть $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$ або знайдіть $|\vec{a}+\vec{b}|$ і застосуйте теорему Піфагора. **700.** 45°, 120°, 60°. **702.** $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$. **709.** Так, якщо вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ колінеарні. **714.** в) $-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$. **715.** а) $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CE}$; б) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$. **717.** $\sqrt{3}$ *Н*. **718.** а) Ні; б) так. **720.** 60°. **721.** а) $\vec{a}+0{,}5\vec{b}+\vec{c}$; б) $0{,}5\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; в) $-0{,}5\vec{a}+0{,}5\vec{b}-\vec{c}$. **722.** Так. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{PD}$. **723.** $3\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}$. *Вказівка*. Скористайтеся опорною задачею про точку перетину медіан трикутника. **724.** *Вказівка*. Скористайтеся доведенням від супротивного й ознакою компланарності векторів. **725.** *Вказівка*. Скористайтеся опорною задачею про точку перетину медіан трикутника і нерівністю трикутника. **726.** Вказівка. Розкладіть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AC}$ за векторами $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ і $\overrightarrow{PC}$. **727.** *Вказівка*. Розкладіть вектори ребер основи за векторами $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ і $\overrightarrow{PC}$. **728.** 60°. *Вказівка*. Введіть систему координат із початком O так, щоб дані промені лежали на додатних півосях осей координат. **730.** *Вказівка*. Скористайтеся правилом паралелепіпеда й опорною задачею про точку перетину медіан трикутника. **731.** $1:8$. *Вказівка*. Скористайтеся результатом попередньої задачі.

734. 30°. **735.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **741.** а) $4x+2y+z-7=0$; б) $7x+9-2z=0$. **742.** $5x+y-4z-13=0$. **743.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-1}{3}$. **744.** $\frac{x-4}{-3}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{5}$. **747.** а) $(x+3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$; б) $x^2+y^2+z^2=49$. **749.** а) $2x-3y+6z-6=0$; б) $x-y+2z-5=0$. **751.** $3x-y-z-6=0$.

752. $\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-2}{5}$. **753.** (1; –1; 5). **754.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{3}$. **756.** а) 30°; б) 90°; в) 60°. **757.** а) $a=6$, $b=-4$; б) $a=1$, $b=-3$. **758.** а) $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=9$; б) $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=16$; в) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. **759.** а) $(x+1)^2+(y-5)^2+$ $+(z+6)^2=81$ або $x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=81$. б) $(x+3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=25$. **760.** Площина $4x-2y+3z-29=0$. **761.** $x+2y-6=0$. **762.** $17x-13y-16z-10=0$. **763.** а) збігаються; б) паралельні; в) перетинаються в точці (4; 4; 3); г) мимобіжні. **765.** Сфера $(x-3)^2+(y+5)^2+(z-6)^2=121$ без точок A та B. **766.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **768.** $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}}$.
769. а) 60°, $\frac{a}{\sqrt{3}}$; б) $\arccos\frac{1}{3}$; в) $\arcsin\frac{2}{3}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Тестове завдання для самоперевірки № 4. **1.** Г. **2.** Г. **3.** Б. **4.** Б. **5.** В. **6.** А.

770. а) 6, 2, 8; б) $2\sqrt{26}$; в) $2\sqrt{10}$, 10, $2\sqrt{17}$. **771.** 7. **776.** $\arccos\frac{4}{9}$. **778.** Трапеція. **779.** *Вказівка*. Розкладіть вектори, зображувані сторонами трикутника, за векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$. **782.** $C(-1;-2;0)$; точка C. **784.** Дві або три. **786.** 90°; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. *Вказівка*. Розгляньте вектор $\overrightarrow{LK}$, перпендикулярний до векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{PC}$. Розкладіть усі вказані вектори за векторами $\vec{a}=\overrightarrow{PA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{PB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{PC}$. **224.** а) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; 90°; б) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; 60°.
788. $1:2$. *Вказівка*. Розкладіть вектор $\overrightarrow{PS}=x\cdot\overrightarrow{PO}$ за векторами $\vec{a}=\overrightarrow{PM}$, $\vec{b}=\overrightarrow{PN}$, $\vec{c}=\overrightarrow{PK}$. Скористайтеся результатом задачі 729 для точок M, N, K, S та знайдіть x. **790.** *Вказівка*. Застосуйте властивості скалярного добутку векторів. **791.** *Вказівка*. Застосуйте векторний критерій перпендикулярності прямих. **792.** а) Жодного; б) безліч; в) безліч. *Вказівка*. Розгляньте відстані від точки $M(x;y;z)$ до точок $A(1;0;0)$ і $B(0;1;0)$.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК*

А

Аксіоми стереометрії 9–11

Б

Бісектор двогранного кута 268

В

Вектор 206
Вектори рівні 206
— компланарні 220
Віднімання векторів 208
Відстань у просторі
— від прямої до паралельної їй площини 120
— від точки до відрізка 162
— від точки до півплощини 162
— від точки до площини 119
— від точки до променя 162
— від точки до фігури 161
— між паралельними площинами
— між мимобіжними прямими 158
— між фігурами 163
Вісь абсцис 182
— аплікат 182
— ординат 182
Властивості
— паралельних площин 63
— паралельного проєкціювання 72–73
— перпендикуляра, похилих і проєкцій 117
— прямої, паралельної площині 53

Г

Геометричне місце точок (ГМТ) 277
Градусна міра двогранного кута 149

Д

Добуток вектора на число 220
Додавання векторів 219

Е

Еліпс 80

К

Координати вектора 218
— точки 193
Координатні площини 193
Кут
— двогранний 148
— лінійний двогранного кута 148
— між векторами 223
— між мимобіжними прямими 107
— між площинами, що перетинаються 150
— між прямими, що перетинаються 105
— між прямою і площиною 146

М

Метод векторний 236
— координат 238
— слідів 26, 84
Многогранник 8

* Основні поняття курсу планіметрії наведено на сайті interactive.ranok.com.ua

О

Ознака
- — мимобіжних прямих 42
- — належності прямої площині 19
- — паралельності площин 60
- — паралельності прямих 41
- — паралельності прямої і площини 52
- — перпендикулярності площин 148
- — перпендикулярності прямих 99
- — перпендикулярності прямої і площини 105

П

Паралельне перенесення в просторі 199
- — проєкціювання 71

Паралельні проєкції плоских фігур 74–75

Переріз многогранника 11

Перпендикуляр до площини 116

Піраміда 8

Площина симетрії 195

Площини паралельні 60
- — перпендикулярні 148

Похила до площини 116

Призма 8

Проєкціювання ортогональне 156
- — паралельне 71

Проєкція похилої на площину 117

Пряма, паралельна площині 51
- — перпендикулярна до площини 104

Прямі мимобіжні 40
- — паралельні 38
- — перпендикулярні 100
- — що перетинаються 38

Прямокутна декартова система координат 182

Р

Рівняння площини в просторі 234
- — сфери 240

С

Січна площина 12

Симетрія відносно площини (дзеркальна) 195
- — відносно прямої (осьова) 194
- — відносно точки (центральна) 194

Скалярний добуток векторів 211

Спільний перпендикуляр до двох мимобіжних прямих 159

Т

Теорема про ГМТ простору,
- — рівновіддалених від граней двогранного кута 269
- — рівновіддалених від двох даних точок 266
- — рівновіддалених від сторін даного кута 267

Ф

Формула відстані між точками в просторі 186
- — площі ортогональної проєкції многокутника 156

Формули координат середини відрізка в просторі 185

ЗМІСТ

Передмова 3
Як користуватися підручником 3

Розділ I
ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ

§1. Аксіоми стереометрії 6
§2. Найпростіші наслідки з аксіом стереометрії 19
Тестове завдання для самоперевірки № 1 34
Підсумки розділу I 35
Історична довідка 36

Розділ II
ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

§3. Прямі в просторі 38
§4. Паралельність прямої і площини 51
§5. Паралельність площин 60
§6. Паралельне проєкціювання. Зображення плоских і просторових фігур у стереометрії 71
Тестове завдання для самоперевірки № 2 86
Підсумки розділу II 88
Історична довідка 96

Розділ III
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

§7. Кути між прямими в просторі 98
§8. Перпендикулярність прямої і площини 104

§9. Перпендикуляр до площини 115
§10. Теорема про три перпендикуляри та її застосування 127
§11. Кути між прямими і площинами 136
§12. Перпендикулярність площин 148
§13. Ортогональне проєкціювання 156
Тестове завдання для самоперевірки № 3 168
Підсумки розділу III 170
Історична довідка 179

Розділ IV
КООРДИНАТИ, ВЕКТОРИ ТА ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ В ПРОСТОРІ

§14. Декартові координати в просторі 182
§15. Переміщення в просторі 193
§16. Вектори в просторі 206
§17. Координатний і векторний методи розв'язування стереометричних задач 220
§18. Рівняння фігур у просторі 233
Тестове завдання для самоперевірки № 4 245
Підсумки розділу IV 247
Історична довідка 255
Додатки 256
Додаток 1. Про аксіоми стереометрії та її зв'язок із планіметрією 256
Додаток 2. Геометричні місця точок у просторі 264
Відповіді 277
Предметний покажчик 284

Особливості підручника:

- багаторівнева побудова навчального матеріалу
- авторська система усних, графічних та письмових вправ
- тематичне узагальнення і систематизація матеріалу
- доступність викладення, зручність користування

Електронний інтерактивний додаток дозволить:

- здійснити інтерактивне онлайн-тестування за кожною темою
- отримати додаткову інформацію
- ознайомитися з темами навчальних проєктів, повідомлень і рефератів та джерелами інформації для їх підготовки

ВИДАВНИЦТВО
РАНОК