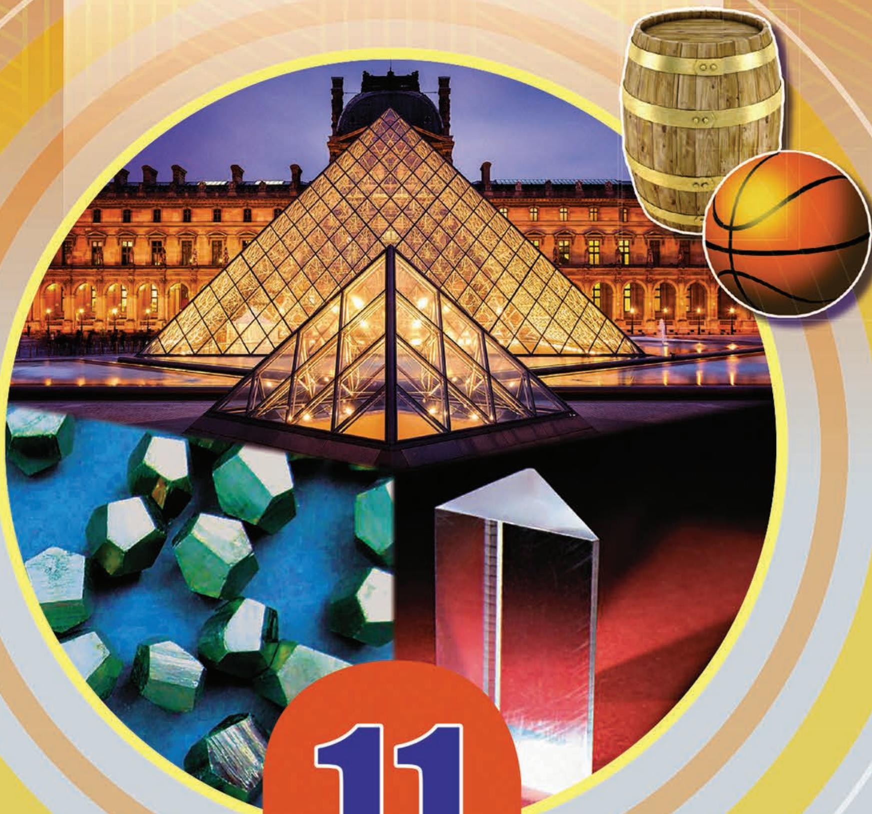
видавництво Генеза

ОЛЕКСАНДР ІСТЕР
ОКСАНА ЄРГІНА

ГЕОМЕТРІЯ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ



11

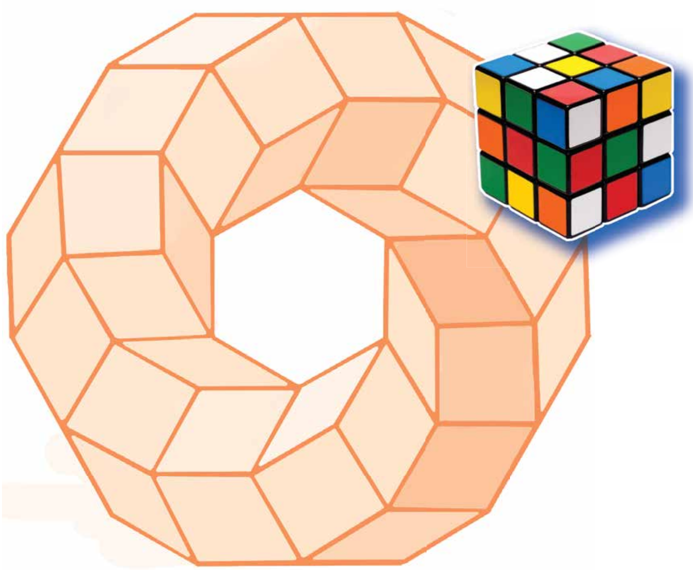
Олександр Істер
Оксана Єргіна

ГЕОМЕТРІЯ

(ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ)

Підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України



КИЇВ
«ГЕНЕЗА»
2019

УДК 514(075.3)
І-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 12.04.2019 № 472)

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Істер О.С.
І-89 Геометрія : (профіл. рівень) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер, Оксана Єргіна. — Київ : Генеза, 2019. — 288 с. : іл.
ISBN 978-966-11-0974-1.
УДК 514(075.3)

ISBN 978-966-11-0974-1

Шановні одинадцятикласниці та одинадцятикласники!

В 11 класі ви завершуєте вивчення шкільного курсу стереометрії.

Підручник, який ви тримаєте в руках, допоможе вам оволодіти такою системою знань з геометрії та набути таких компетентностей, які знадобляться не тільки в повсякденному житті, а й у майбутній трудовій діяльності і які дадуть змогу продовжити навчання у вищих навчальних закладах.

Для зручності користування підручником його матеріал поділено на розділи, параграфи, рубрики. Кожен параграф містить теоретичний матеріал, зразки розв’язування задач і вправ, запитання до теоретичного матеріалу, завдання для класної і домашньої робіт та практичної діяльності тощо.

Вивчення стереометрії потребує логічного мислення, просторової уяви та наполегливості. Теоретичний матеріал підручника авторський колектив намагався викласти простою, доступною мовою, проілюструвати малюнками та прикладами з повсякденного життя.

У підручнику використовуються такі умовні позначки:

! – треба запам’ятати;

? – запитання до параграфів;

– «ключова» задача (задача, висновки якої використовують для розв’язування інших задач);

Т – теорема; Н – наслідок з теореми; ■ – доведення закінчено;

1.24 – вправа для виконання у класі;

1.25 – вправа для виконання вдома.

Усі задачі та вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки 1 починаються вправи початкового рівня;

з позначки 2 починаються вправи середнього рівня;

з позначки 3 починаються вправи достатнього рівня;

з позначки 4 починаються вправи високого рівня.

Рубрика **«Розв’яжіть задачі та виконайте вправи»** містить значну кількість завдань для класної та домашньої робіт, усних вправ, завдань для проектної і практичної діяльності, що відповідають темі параграфа та допоможуть добре її опрацювати. Рубрика **«Задачі підвищеної складності»** містить завдання для поглиблення знань з геометрії та підготовки до різноманітних математичних змагань. У рубриці **«Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу»** пропонується розв’язати вправи, які допоможуть актуалізувати знання, потрібні для вивчення наступної теми.

У рубриці **«Життєва математика»** зібрано задачі, які відображають реальні життєві ситуації, пов’язані з економічною грамотністю та підприємливістю, екологічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, тобто всім тим, без чого неможливо уявити людину в повсякденному житті. Рубрика **«Цікаві задачі для учнів неледачих»** містить задачі, які зазвичай називають нестандартними, задачі математичних олімпіад різних країн світу, задачі, які сформулювали видатні математики, тощо. Наприкінці кожного параграфа в рубриці **«Перевірте свою компетентність»** ви знайдете тестові завдання, завдяки яким зможете повторити шкільний курс геометрії, перевірити рівень своєї готовності до складання зовнішнього незалежного оцінювання.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання ви зможете, виконавши завдання **«Домашньої самостійної роботи»** та **«Завдання для перевірки знань»**.

У кінці кожного розділу наведено вправи для його повторення.

Підручник містить багато цікавих фактів з історії становлення і розвитку геометрії, життєвого шляху українських математиків, що долучилися до створення шкільного курсу геометрії та олімпіадного руху.

Успіхів вам на шляху до знань!

Шановні вчительки та вчителі!

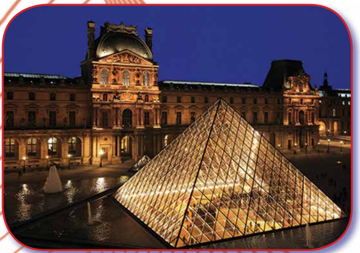
Сподіваємося, що підручник суттєво допоможе вам в організації процесу навчання учнів геометрії. Авторський колектив намагався створити його таким, щоб він у повній мірі реалізував мету державної програми з математики, сприяв формуванню в учнів наукового світогляду, усвідомленню математичних знань як невід'ємної складової загальної культури людини і необхідної умови повноцінного життя в сучасному суспільстві, допоміг оволодіти системою математичних знань, навичками та вміннями, потрібними в повсякденному житті та в майбутній професійній діяльності, забезпечив розвиток логічного мислення, інтуїції, просторової уяви, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури, формував життєві компетентності, загальнолюдські цінності особистості, виховував національну самосвідомість. Окрім традиційної структури (розділи, параграфи, рубрики), поділу навчального матеріалу на теоретичну і практичну складові, підручник містить рубрику «Життєва математика», що сприятиме реалізації наскрізних ліній програми з математики та формуватиме в учнів предметні та ключові компетентності. Диференційованість задач і вправ за чотирма рівнями складності, зміст рубрик «Цікаві задачі для учнів неледачих» і «Задачі підвищеної складності» допоможуть забезпечити особистісно-орієнтований підхід до організації процесу навчання та сприятимуть формуванню позитивної мотивації учнів до вивчення геометрії.

У підручник включено велику кількість задач і вправ, завдання для проектної та практичної діяльності, а в кінці кожного розділу розміщено додаткові вправи для повторення, систематизації та узагальнення навчального матеріалу розділу.

Успіхів вам у вашій нелегкій праці!

РОЗДІЛ 1

МНОГОГРАННИКИ



У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

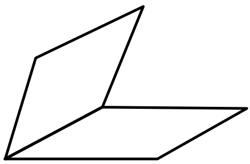
- ***пригадаєте***, що таке прямокутний паралелепіпед, піраміда та їхні елементи; як будувати перерізи цих фігур;
- ***дізнаєтеся***, що таке призма та її елементи;
- ***познайомитеся*** з поняттям правильного многогранника та видами правильних многогранників;
- ***навчитеся*** зображувати призму, паралелепіпед, піраміду; обчислювати їхні елементи; знаходити площі поверхонь многогранників.

§ 1. ДВОГРАННІ ТА МНОГОГРАННІ КУТИ. МНОГОГРАННИК. ПРИЗМА

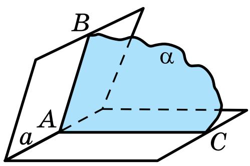
У цьому параграфі пригадаємо вже відоме нам з 10 класу поняття *двогранного кута* та розглянемо *многогранний кут*.

1. Двогранні та многогранні кути

Двогранним кутом **називають фігуру, яка утворена двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує.**



Мал. 1.1



Мал. 1.2

На малюнку 1.1 зображено двогранний кут. Півплощини, що утворюють двогранний кут, називають *гранями*, а пряму, що їх обмежує, – *ребром двогранного кута*.

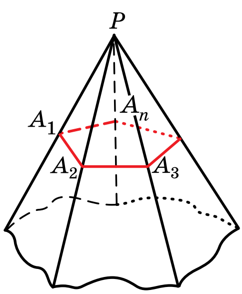
У повсякденному житті нам часто трапляються предмети, що мають форму двогранного кута. Прикладами таких предметів є відкритий або частково відкритий ноутбук, дві суміжні стіни кімнати, двоскатний дах будівлі тощо.

Площина α, що перпендикулярна до ребра a двогранного кута, перетинає грані двогранного кута по променях AB і AC (мал. 1.2). Кут BAC називають *лінійним кутом двогранного кута*. Двогранний кут має безліч лінійних кутів. Оскільки всі вони суміщаються паралельним перенесенням, то є рівними між собою.

Градусною мірою двогранного кута **називають градусну міру його лінійного кута.**

Зазвичай, замість «градусна міра двогранного кута дорівнює...» кажуть «двогранний кут дорівнює...».

У геометрії розглядають також і *многогранні кути*.



Мал. 1.3

Нехай $A_1A_2...A_n$ – довільний плоский многокутник, а точка P не належить площині цього многокутника. *Многогранним* (n-гранним) *кутом* називають множину всіх променів з початком у точці P, що перетинають даний многокутник (мал. 1.3).

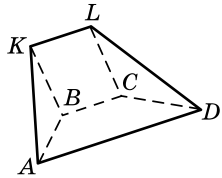
Точку P називають *вершиною*, промені PA_1, PA_2, ..., PA_n – *ребрами*, а плоскі кути A_1PA_2, A_2PA_3, ..., A_nPA_1 – *гранями многогранного кута*.

2. Многогранники

У попередніх класах ми вже розглядали прямокутні паралелепіпеди, куби й піраміди. Усі вказані тіла є прикладами многогранників.

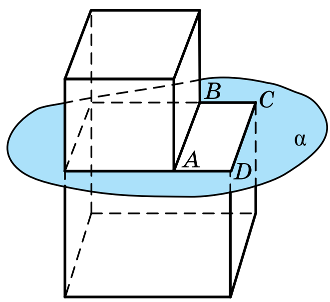
Многогранником **називають тіло, поверхня якого складається із скінченної кількості плоских многокутників.**

На малюнку 1.4 зображено многогранник, поверхня якого складається з трапецій $ABCD$ і $AKLD$, трикутників ABK і CLD та паралелограма $BKLC$. Многокутники, які обмежують многогранник, називають *гранями*, сторони цих многокутників – *ребрами*, а кінці ребер – *вершинами многогранника*. Гранями многогранника, зображеного на малюнку 1.4, є многокутники $ABCD$, $AKLD$, ABK, CLD, $BKLC$, ребрами – відрізки AB, BC, CD, DA, BK, CL, AK, KL і LD, вершинами – точки A, B, C, D, K і L.



Мал. 1.4

Многогранники бувають *опуклі* і *неопуклі*. Многогранник називають опуклим, якщо він лежить по один бік від площини кожної з його граней. На малюнку 1.4 зображено опуклий многогранник. Зауважимо, що всі грані опуклого многогранника є опуклими многокутниками. На малюнку 1.5 зображено неопуклий многогранник, оскільки площина α, якій належить грань $ABCD$ цього многогранника, розбиває многогранник на дві частини.

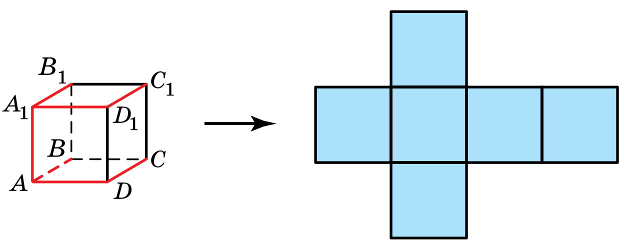


Мал. 1.5

Усі многогранники, які ми розглядали раніше, є опуклими.

Якщо поверхню многогранника розрізати по деяких його ребрах і розгорнути в площину однієї з його граней, то отримаємо *розгортку* даного многогранника.

Наприклад, якщо куб розрізати по ребрах AB, CD, A_1B_1, C_1D_1, AD, AA_1, A_1D_1 (мал. 1.6), то отримаємо його розгортку.



Мал. 1.6

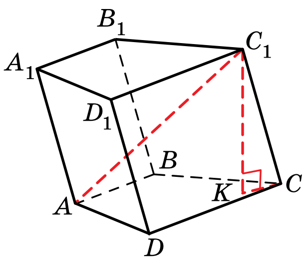
Площа поверхні многогранника – це сума площ усіх його граней. Площа поверхні многогранника дорівнює площі його розгортки.

У шкільному курсі геометрії розглядатимемо найпростіші многогранники: призми і піраміди.

3. Призма

Одним з найпростіших многогранників є *призма*. З деякими видами призм (прямокутним паралелепіпедом і кубом) ви ознайомилися ще в початковій школі. Призмою також є кузов вантажівки, шестигранний олівець, коробка з-під офісного паперу тощо.

***Призмою* називають многогранник, у якого дві грані між собою рівні і лежать у паралельних площинах (їх називають *основами призми*), а всі інші грані – паралелограми (їх називають *бічними гранями призми*).**



Мал. 1.7

На малюнку 1.7 зображено призму, основами якої є чотирикутники $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$. Призму прийнято називати за назвою її основ, наприклад, на малюнку 1.7 зображено призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сторони бічних граней призми, які не належать основам, називають *бічними ребрами призми*.

На малюнку 1.7 паралелограми AA_1D_1D, ABB_1A_1, BB_1C_1C і CC_1D_1D – бічні грані призми; AA_1, BB_1, CC_1 і DD_1 – бічні ребра призми. Зрозуміло, що *всі бічні ребра призми паралельні і рівні між собою*.

Призму називають n-кутною, якщо її основою є n-кутник.

На малюнку 1.7 зображено чотирикутну призму.

Перпендикуляр, проведений з деякої точки однієї основи до площини іншої основи, називають *висотою призми*.

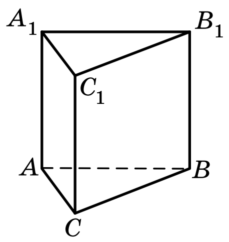
На малюнку 1.7 відрізок C_1K – висота призми.

Відрізок, що сполучає дві вершини призми, які не лежать в одній грані, називають *діагоналлю призми*.

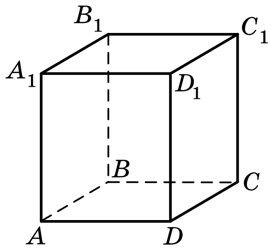
На малюнку 1.7 відрізок C_1A – діагональ призми.

Зауважимо, що під поняттям діагоналі, як і під поняттям відрізка, матимемо на увазі як відрізок, що є діагоналлю, так і довжину цього відрізка. Тому замість «*довжина діагоналі дорівнює 4 см*» будемо казати «*діагональ дорівнює 4 см*». Так само використовують і поняття висоти, бічного ребра, сторони основи тощо, оскільки всі вони є відрізками.

Призму називають *прямою*, якщо її бічні ребра перпендикулярні до її основ, в іншому випадку призму називають *похилою*.



Мал. 1.8



Мал. 1.9

На малюнку 1.7 зображено похилу чотирикутну призму, а на малюнку 1.8 – пряму трикутну призму. Зрозуміло, що *бічні грані прямої призми – прямокутники, а висота прямої призми дорівнює її бічному ребру*.

***Пряму* призму називають *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник.**

На малюнку 1.9 зображено правильну чотирикутну призму. У правильній призмі всі бічні грані – рівні прямокутники.

***Площею повної поверхні призми* називають суму площ усіх її граней, а *площею бічної поверхні призми* – суму площ її бічних граней.**

Площу повної поверхні призми $S_{\text{повн}}$ можна записати через площі її бічної поверхні $S_{\text{біч}}$ і її основи $S_{\text{осн}}$ формулою:

$$\boldsymbol{S_{\text{повн}} = S_{\text{біч}} + 2S_{\text{осн}}}.$$

Теорема (про площу бічної поверхні прямої призми). **Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра основи P на висоту призми, тобто на довжину її бічного ребра l:**

$$\boldsymbol{S_{\text{біч}} = Pl}.$$

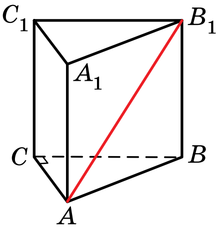
Доведення. Нехай a_1, a_2, ..., a_n – сторони основи, а l – довжина бічного ребра прямої призми. Враховуючи, що всі бічні грані – прямокутники, одна сторона яких дорівнює відповідно a_1, a_2, ..., a_n, а друга – є однаковою для всіх і дорівнює l, маємо:

$$S_{\text{біч}} = a_1 l + a_2 l + ... + a_n l = (a_1 + a_2 + ... + a_n)l = Pl,$$

оскільки $P = a_1 + a_2 + ... + a_n$ – периметр основи. ■

Задача 1. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із катетами 3 см і 4 см. Висота призми дорівнює 12 см. Знайдіть діагональ тієї грані призми, яка містить гіпотенузу трикутника.

Розв'язання. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ – дана призма (мал. 1.10), $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, $\angle ACB = 90°$, $BB_1 = 12$ см. Знайдемо довжину діагоналі AB_1.



Мал. 1.10

1) Із $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$):

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (см);

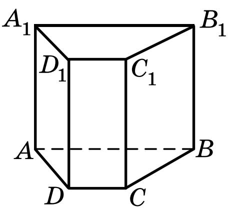
2) Із $\triangle ABB_1$ ($\angle B = 90°$):

$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ (см).

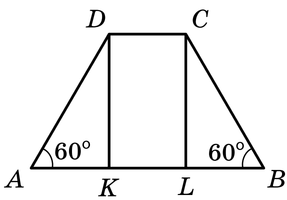
Відповідь. 13 см.

Задача 2. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, більша основа якої дорівнює 11 см, бічна сторона – 6 см, а кут при основі – 60°. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її висота дорівнює меншій основі трапеції.

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – дана призма (мал. 1.11), $AB = 11$ см, $AD = BC = 6$ см, $\angle A = 60°$. Знайдемо бічну поверхню призми: $S_{\text{біч}} = Pl = (AB + DC + 2BC) \cdot BB_1$.



Мал. 1.11



Мал. 1.12

1) Розглянемо трапецію $ABCD$, що є основою призми (мал. 1.12), проведемо в ній висоти DK і CL. Оскільки $AD = BC$, то $\angle A = \angle B = 60°$ і $AK = BL$.

2) Із $\triangle ADK$ ($\angle K = 90°$): $\cos A = \dfrac{AK}{AD}$, тоді $AK = AD\cos A =$ $= 6\cos 60° = 3$ (см). Оскільки $BL = AK$, то $BL = 3$ см.

3) Оскільки $KDCL$ – прямокутник, то $DC = KL =$ $= AB - 2AK = 11 - 2 \cdot 3 = 5$ (см).

4) За умовою $BB_1 = DC$, тому $BB_1 = 5$ см.

5) $S_{біч} = (AB + DC + 2BC) \cdot BB_1 = (11 + 5 + 2 \cdot 6) \cdot 5 = 140$ (см²).

Відповідь. 140 см².

Задача 3. Бічне ребро похилої призми дорівнює 16 см і утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть висоту призми.

Розв'язання. У цій задачі не має значення, який саме многокутник є основою призми, тому використаємо малюнок 1.7. Тоді за умовою $CC_1 = 16$ см, C_1K – висота призми, кут нахилу ребра CC_1 до площини основи дорівнює 60°.

1) Оскільки $C_1K \perp (ABC)$, C_1C – похила до (ABC), CK – її проекція, то $\angle C_1CK$ – кут нахилу бічного ребра до площини основи, отже, $\angle C_1CK = 60°$.

2) Із $\triangle CC_1K$ ($\angle K = 90°$): $\sin C = \dfrac{C_1K}{CC_1}$, тоді

$$C_1K = CC_1 \cdot \sin C = CC_1 \cdot \sin 60° = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

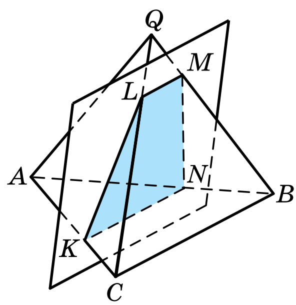
Відповідь. $8\sqrt{3}$ см.

4. Поняття перерізу многогранника

Умови багатьох геометричних задач використовують поняття перерізу многогранника. Тож для розв'язування таких задач треба навчитися будувати *переріз многогранника* площиною. У 10 класі ми вже дізналися, як побудувати перерізи деяких многранників, зокрема прямокутного паралелепіпеда і піраміди.

Нагадаємо, що *січною площиною многогранника* називають будь-яку площину, по обидва боки якої є точки даного многогранника. Січна площина перетинає грані многогранника по відрізках. Многокутник, сторонами якого є ці відрізки, називають *перерізом многогранника*.

Наприклад, на малюнку 1.13 чотирикутник $KLMN$ є перерізом трикутної піраміди $QABC$.



Мал. 1.13

Зауважимо, що січна площина може бути задана одним із відомих нам способів: трьома точками, що не лежать на одній прямій, або прямою і точкою, що їй не належить, або двома прямими, що перетинаються.

Нагадаємо, що для побудови перерізів можна використовувати метод слідів або метод внутрішнього проекціювання, а також використовувати властивості паралельних прямих і площин.

Далі розглянемо деякі перерізи призми.

5. Побудова перерізу призми

Переріз призми, який проходить через два бічних ребра, що не лежать в одній грані, називають *діагональним перерізом призми*.

На малюнку 1.14 чотирикутник AA_1C_1C – діагональний переріз прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Цей переріз є прямокутником, одна зі сторін якого – діагональ основи AC, а інша – бічне ребро AA_1. У похилій призмі діагональним перерізом є паралелограм.

У задачах, пов'язаних із перерізом многогранника, може ставитися вимога знайти певні властивості цього перерізу, його площу або периметр тощо.

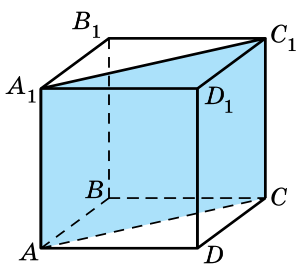
Задача 4. Основою прямої призми є ромб зі стороною 8 см і гострим кутом 60°. Бічне ребро призми дорівнює $\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу діагонального перерізу призми, одна зі сторін якого є більшою діагоналлю ромба.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – пряма призма (мал. 1.14), $CC_1 = \sqrt{3}$ см, $ABCD$ – ромб, $AB = 8$ см, $\angle A = 60°$, тому AC – більша діагональ ромба. Тоді AA_1C_1C – діагональний переріз, площу якого треба знайти. Оскільки AA_1C_1C – прямокутник, то $S_{AA_1C_1C} = AC \cdot CC_1 = AC\sqrt{3}$ (см²). Знайдемо AC.

1) У ромбі $ABCD$:
$\angle D = 180° - 60° = 120°$.

2) Із $\triangle ADC$ за теоремою косинусів:
$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos D =$
$= 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cos 120° = 3 \cdot 8^2$,
тоді $AC = 8\sqrt{3}$ (см).

3) Маємо:
$S_{AA_1C_1C} = AC\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 24$ (см²).



Мал. 1.14

В і д п о в і д ь. 24 см².

Часто в задачах розглядають перерізи призми, що проходять через сторону основи призми і перетинають бічні ребра призми.

Задача 5. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 4 см. Через сторону основи проведено переріз, який утворює з площиною основи кут 30° і перетинає бічне ребро в його середині. Знайдіть площу повної поверхні призми.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ – дана правильна призма з основою ABC (мал. 1.15), $AB = 4$ см. Запишемо формулу для знаходження площі повної поверхні даної призми:

$$S_{повн} = S_{біч} + 2S_{осн} = Pl + 2S_{ABC} =$$

$$= 3AB \cdot CC_1 + 2 \cdot \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 12 \cdot CC_1 + 8\sqrt{3}.$$

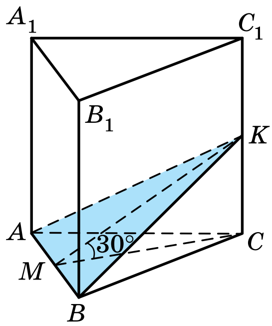
Отже, залишається знайти CC_1.

1) Побудуємо переріз. Нехай точка K – середина ребра CC_1. Через пряму AB і точку K проведемо площину. Перерізом призми є $\triangle ABK$.

2) У трикутнику ABC проведемо висоту і медіану CM, тоді

$$CM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (см).}$$

3) Проведемо відрізок KM. Оскільки $CC_1 \perp (ABC)$, CM – проекція похилої KM на (ABC), $CM \perp AB$, то $KM \perp AB$ (за теоремою про три перпендикуляри). Тоді $\angle KMC$ – кут, що утворює переріз із площиною основи. За умовою $\angle KMC = 30°$.



Мал. 1.15

4) Із $\triangle KMC$ ($\angle C = 90°$): $\text{tg} M = \dfrac{KC}{CM}$. Тоді

$$KC = CM \cdot \text{tg} M = 2\sqrt{3}\,\text{tg}\,30° = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2 \text{ (см).}$$

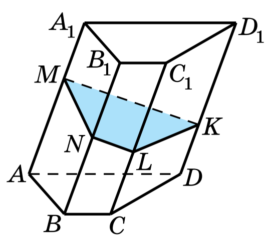
5) Оскільки K – середина CC_1, то $CC_1 = 2KC = 2 \cdot 2 = 4$ (см).

6) $S_{повн} = 12 \cdot CC_1 + 8\sqrt{3} = 12 \cdot 4 + 8\sqrt{3} = 48 + 8\sqrt{3}$.

В і д п о в і д ь. $48 + 8\sqrt{3}$ см^2.

Розглянемо переріз похилої призми площиною, яка проходить через точку M бічного ребра AA_1 перпендикулярно до цього ребра та перетинає кожне з інших бічних ребер цієї призми (мал. 1.16).

Зрозуміло, що площина перерізу буде перпендикулярною до всіх інших бічних ребер призми. Такий переріз називають *перпендикулярним перерізом призми*. На малюнку 1.16 чотирикутник $MNLK$ – перпендикулярний переріз.

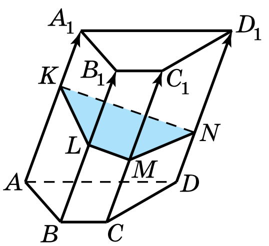


Мал. 1.16

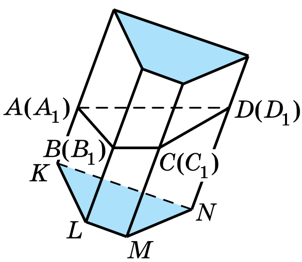
Перпендикулярний переріз прийнято розглядати лише в похилій призмі, оскільки, очевидно, що у прямій призмі він дорівнює многокутнику, що є основою призми.

Задача 6. Нехай у похилій призмі проведено перпендикулярний переріз. Довести, що бічну поверхню призми можна знайти за формулою $S_{\text{біч}} = P_{\text{пер}} \cdot l$, де $P_{\text{пер}}$ – периметр перпендикулярного перерізу призми, l – довжина бічного ребра (мал. 1.16).

Д о в е д е н н я. Розглянемо перпендикулярний переріз похилої призми $KLMN$ (мал. 1.16). Він ділить призму на дві частини. Застосуємо до нижньої частини призми паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{AA_1}$ (мал. 1.17). Тоді основи $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ призми сумістяться, і ми отримаємо нову призму, основами якої буде перпендикулярний переріз призми (мал. 1.18), а бічні ребра дорівнюватимуть l. Очевидно, що отримана призма має таку саму площу бічної поверхні, як і початкова. Площа бічної поверхні отриманої призми дорівнює $P_{MNLK} \cdot l$, оскільки вона є прямою. Тому і бічна поверхня початкової призми теж дорівнює $P_{\text{пер}} \cdot l$, де $P_{\text{пер}}$ – периметр перпендикулярного перерізу, l – довжина бічного ребра. ■



Мал. 1.17



Мал. 1.18

А ще раніше...

Евклід означив призму як «геометричну фігуру, що міститься між двома рівними і паралельними площинами (основами), бічні грані якої – паралелограми».

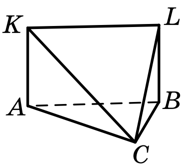
Зазначимо, що Евклід використовував термін «площина» і у сенсі необмеженості її в усіх напрямках, і у сенсі кінцевої, обмеженої її частини, зокрема грані.

У XVIII ст. англійський математик Брук Тейлор (1685–1731) дав призмі таке означення: «це многогранник, у якого всі грані, крім двох, паралельні одній прямій».

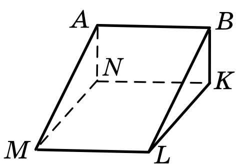
• Що називають двогранним кутом? • Що називають гранями двогранного кута, ребром двогранного кута? • Що називають многогранним кутом? • Що називають вершиною многогранного кута, ребрами многогранного кута, гранями многогранного кута? • Що називають многогранником? • Що називають гранями, ребрами, вершинами многогранника? • Який многогранник називають опуклим? • Як отримати розгортку многогранника? • Що називають призмою? • Що називають основами, бічними гранями та бічними ребрами призми? • Які властивості основ та бічних ребер призми вам відомі? • Яку призму називають *n*-кутною? • Що називають висотою призми? • Що таке діагональ призми? • Яку призму називають прямою, а яку – похилою? • Яку призму називають правильною? • Що розуміють під площею бічної поверхні призми; площею повної поверхні призми? • Сформулюйте та доведіть теорему про площу бічної поверхні прямої призми. • Що розуміють під перерізом многогранника? • Який переріз призми називають діагональним?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **1.1.** Укажіть грані, ребра та вершини многогранника, зображеного на малюнку 1.19.



Мал. 1.19



Мал. 1.20

1.2. Укажіть грані, ребра та вершини многогранника, зображеного на малюнку 1.20.

1.3. Скільки ребер і граней у чотирикутної призми?

1.4. Скільки ребер і граней у п’ятикутної призми?

1.5. Площа основи призми дорівнює 5 см^2, а площа бічної поверхні – 12 см^2. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.6. Площа бічної поверхні призми дорівнює 10 см^2, а площа основи – 4 см^2. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.7. Площа основи трикутної призми дорівнює 6 см^2, а площі її бічних граней – 9 см^2, 12 см^2 і 15 см^2. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.8. Площа основи чотирикутної призми дорівнює 16 см^2, а площа кожної з її бічних граней – 8 см^2. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.9. Основою прямої призми є чотирикутник, одна зі сторін якого дорівнює 4 см, кожна наступна на 1 см більша за попередню. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 5 см.

1.10. Основою прямої призми є п’ятикутник, одна зі сторін якого дорівнює 20 см, а кожна наступна на 2 см менша за попередню. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.

1.11. Основою прямої призми є квадрат зі стороною 3 см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.

1.12. Основою прямої призми є прямокутник зі сторонами 2 см і 5 см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 6 см.

2 **1.13.** Яку найменшу кількість:
1) ребер може мати многогранник;
2) граней може мати многогранник?

1.14. Чи існує многогранник, у якого кількість вершин дорівнює кількості граней? У разі позитивної відповіді зобразіть його.

1.15. Визначте кількість вершин многокутника, що є основою призми, якщо ця призма має 11 граней.

1.16. Призма має 9 граней. Скільки сторін у многокутника, що є її основою?

1.17. Який многокутник є основою призми, якщо у призми 12 ребер?

1.18. Який многокутник є основою призми, якщо у призми 18 ребер?

1.19. У правильній трикутній призмі сторона основи дорівнює 4 см, а діагональ бічної грані – 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.20. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її висота дорівнює 5 см.

1.21. Основою прямої призми є прямокутник зі сторонами 6 см і 5 см. Знайдіть висоту призми, якщо площа її повної поверхні дорівнює 126 см^2.

1.22. Площа повної поверхні правильної чотирикутної призми – 250 см^2. Знайдіть висоту призми, якщо сторона її основи дорівнює 5 см.

1.23. Бічне ребро похилої призми дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть висоту призми.

1.24. Висота похилої призми дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть бічне ребро призми, якщо воно утворює з площиною основи кут 60°.

1.25. У правильній чотирикутній призмі сторона основи дорівнює 6 см, а бічне ребро – 3 см. Знайдіть площу діагонального перерізу цієї призми.

1.26. Знайдіть площу діагонального перерізу прямої чотирикутної призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см, а основою є прямокутник зі сторонами 8 см і 15 см.

1.27. Чи існує призма, у якої:
1) 99 ребер; 2) 101 ребро?

1.28. Чи існує призма, у якої:
1) 68 ребер; 2) 72 ребра?

1.29. Висота основи правильної трикутної призми дорівнює $4\sqrt{3}$ см, а висота призми – 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.30. Радіус кола, вписаного в основу правильної трикутної призми, дорівнює $2\sqrt{3}$ см, а висота призми дорівнює 7 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.31. Радіус кола, описаного навколо основи правильної трикутної призми, дорівнює $6\sqrt{3}$ см, а діагональ бічної грані утворює кут 45° із площиною основи. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.32. Висота основи правильної трикутної призми дорівнює $9\sqrt{3}$ см, а діагональ бічної грані утворює кут 45° з висотою призми. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.33. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 4 см, 13 см і 15 см, а висота призми – 10 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.34. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 5 см, 29 см і 30 см, а висота призми – 4 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.35. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює $\sqrt{3}$ см, а діагональ призми утворює з висотою кут 30°. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.36. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 6 см, а діагональ призми утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.37. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 6 см, а діагональ призми дорівнює 9 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.38. Діагональ основи правильної чотирикутної призми дорівнює $2\sqrt{2}$ см, а діагональ призми дорівнює 3 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.39. Тумба для тварин, яку використовують дресирувальники під час своїх виступів на арені цирку, має форму правильної трикутної призми, сторона основи якої дорівнює 60 см, а висота – 50 см. Треба пофарбувати бічну поверхню цієї тумби. Скільки фарби буде використано, якщо на 1 дм^2 поверхні витрачають 3 г фарби?

1.40. Одним з елементів дитячого ігрового майданчика є правильна шестикутна призма, сторона основи якої дорівнює 50 см, а висота – 40 см. Треба пофарбувати бічну поверхню цієї призми. Скільки фарби буде використано, якщо на 1 дм^2 поверхні витрачають 3 г фарби?

1.41. У правильній чотирикутній призмі знайдіть відношення площі діагонального перерізу до площі бічної грані.

1.42. Основою прямої призми є ромб із діагоналями 9 см і 6 см. Знайдіть відношення площ діагональних перерізів цієї призми.

3 **1.43.** Площа основи правильної чотирикутної призми дорівнює 81 см^2, а площа її бічної поверхні – 144 см^2. Знайдіть діагональ призми.

1.44. Площа основи правильної чотирикутної призми дорівнює 144 см^2, а площа однієї з її бічних граней – 168 см^2. Знайдіть діагональ призми.

1.45. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ точка M – середина AB. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо відрізок C_1M утворює з площиною основи кут 60° і $C_1M = 6$ см.

1.46. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ точка N – середина BC. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо відрізок A_1N утворює з висотою призми кут 60° і $A_1N = 12$ см.

1.47. $ABCA_1B_1C_1$ – правильна трикутна призма, точка O – центр основи ABC, AM – медіана трикутника ABC,

$\sin\angle MC_1O = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Знайдіть $\angle C_1OM$.

1.48. $ABCA_1B_1C_1$ – правильна трикутна призма, точка O – центр основи ABC, AM – бісектриса трикутника ABC, $\angle C_1OM = 45°$. Знайдіть $\cos\angle OC_1M$.

1.49. Мале підприємство випускає подарункові коробки у вигляді прямої призми, основою якої є ромб із діагоналями 24 см і 10 см. Площа повної поверхні такої коробки дорівнює 760 см^2. Знайдіть висоту коробки.

1.50. Потрібно виготовити короб із кришкою для зберігання картоплі у формі прямої призми висотою 0,7 м. Основою короба є рівнобічна трапеція з основами 0,4 м і 0,6 м і бічною стороною 0,5 м. Скільки фанери знадобиться для виготовлення такого короба? Округліть відповідь до десятих м^2.

1.51. $ABCA_1B_1C_1$ – правильна трикутна призма, точка K – середина AB, M – середина A_1B_1. Відомо, що в чотирикутник CC_1MK можна вписати коло. Знайдіть кут C_1BC.

1.52. $ABCA_1B_1C_1$ – правильна трикутна призма, точка M – точка перетину медіан трикутника AC_1B_1, $MK \perp (ABC)$, $MK = \frac{AB}{3}$. Знайдіть $\angle C_1BC$.

1.53. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильна чотирикутна призма, $\angle DB_1C = 30°$. Знайдіть $\angle B_1AB$.

1.54. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильна чотирикутна призма, $\angle BDB_1 = 45°$. Знайдіть $\angle C_1AC$.

1.55. Перпендикулярним перерізом похилої трикутної призми є рівнобедрений трикутник з основою 8 см і площею 12 см^2. Знайдіть довжину бічного ребра призми, якщо площа бічної поверхні призми дорівнює 144 см^2.

1.56. Перпендикулярним перерізом похилої трикутної призми є рівнобедрений трикутник з основою 6 см і площею 12 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо бічне ребро призми дорівнює 7 см.

1.57. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, якщо периметри двох її граней дорівнюють 30 см і 24 см. Скільки випадків треба розглянути?

1.58. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, якщо периметри двох її граней дорівнюють 24 см і 36 см. Скільки випадків треба розглянути?

1.59. Сторони основи прямої трикутної призми відносяться як $5:9:10$. Діагоналі двох менших її бічних граней дорівнюють 26 см і 30 см. Знайдіть периметр основи призми.

1.60. Сторони основи прямої трикутної призми відносяться як $8:9:16$. Діагоналі двох більших її бічних граней дорівнюють 30 см і 40 см. Знайдіть периметр основи призми.

1.61. Основа прямої призми – трикутник, дві сторони якого відносяться як $7:8$ та утворюють між собою кут $120°$. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо площа більшої бічної грані призми дорівнює 52 см^2.

1.62. Основою прямої призми є трикутник, дві сторони якого відносяться як $3\sqrt{2}:1$ та утворюють між собою кут $135°$. Площа більшої бічної грані призми дорівнює 30 см^2. Знайдіть висоту призми.

1.63. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильна шестикутна призма. Знайдіть кут між прямими:

1) AC і B_1E_1; 2) AD і B_1E_1; 3) AD і A_1C_1.

1.64. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильна шестикутна призма. Знайдіть кут між прямими:

1) AA_1 і DE; 2) AC і B_1D.

1.65. Більша діагональ правильної шестикутної призми утворює кут $45°$ із площиною основи. Знайдіть кут, який діагональ бічної грані утворює з площиною основи.

1.66. Діагональ бічної грані правильної шестикутної призми утворює з площиною основи кут $45°$. Знайдіть кут, який утворює більша діагональ призми з площиною основи.

1.67. Діагональ бічної грані правильної шестикутної призми дорівнює більшій діагоналі основи. Знайдіть кут між діагоналями бічної грані цієї призми.

1.68. Основа призми – прямокутний трикутник, а дві бічні грані призми – квадрати. Знайдіть кут між діагоналями двох рівних між собою граней, якщо ці діагоналі виходять з однієї вершини.

1.69. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з основою 6 см і бічною стороною 5 см. Через основу цього трикутника проведено переріз, який утворює кут $45°$ із площиною основи і перетинає бічне ребро. Знайдіть площу цього перерізу.

1.70. Основою прямої призми є рівносторонній трикутник зі стороною 2 дм. Через сторону цього трикутника проведено переріз, який утворює з площиною основи кут $60°$ і перетинає бічне ребро. Знайдіть площу цього перерізу.

1.71. Основою прямої призми є ромб із гострим кутом $60°$ і площею $8\sqrt{3}$ см². Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми, якщо діагональ бічної грані нахилена до площини основи під кутом $60°$.

1.72. У правильній чотирикутній призмі діагональ основи дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми, якщо діагональ призми утворює з площиною основи кут $45°$.

1.73. Основою прямої призми є прямокутник, сторони якого відносяться як $1:2$. Площа бічної поверхні призми дорівнює 90 см², а повної поверхні – 126 см². Знайдіть висоту призми.

1.74. Основа прямої призми – ромб із гострим кутом $30°$. Площа повної поверхні призми дорівнює 33 см², а площа її бічної поверхні – 24 см². Знайдіть висоту призми.

1.75. Основою призми є рівносторонній трикутник зі стороною $8\sqrt{3}$ см. Одна з вершин верхньої основи призми ортогонально проектується в центр нижньої основи. Знайдіть висоту призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.

1.76. Основою призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадрат зі стороною 10 см. Вершина A_1 призми ортогонально проектується в середину сторони AB. Знайдіть довжину бічного ребра призми, якщо її висота дорівнює 12 см.

1.77. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, бічна сторона якої дорівнює 20 см, а основи – 41 см і 9 см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює висоті основи.

1.78. В основі прямої призми лежить прямокутна трапеція з меншою основою 5 см і бічними сторонами 12 см і 20 см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює меншій діагоналі основи.

1.79. Знайдіть відношення площі найменшого діагонального перерізу правильної шестикутної призми до площі її найбільшого діагонального перерізу.

1.80. Основою прямої призми є ромб із кутом $60°$. Знайдіть відношення площі більшого діагонального перерізу призми до площі її меншого діагонального перерізу.

1.81. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см, а висота призми – 7 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через бічне ребро та меншу висоту основи призми.

1.82. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см, а висота призми – 5 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через бічне ребро та середню за довжиною висоту основи.

1.83. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильна шестикутна призма, сторона основи якої дорівнює 2 см, а висота – 1 см. Знайдіть площу перерізу AB_1C_1D.

1.84. У правильній шестикутній призмі площа основи дорівнює $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см^2, а бічне ребро – 1 см. Знайдіть площу меншого діагонального перерізу призми.

1.85. Бічна грань правильної шестикутної призми є квадратом, периметр якого – 16 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через діагоналі паралельних бічних граней призми.

1.86. $ABCA_1B_1C_1$ – пряма трикутна призма, основа якої – рівнобедрений трикутник ABC, $\angle C = 90°$. Висота призми дорівнює 8 см, а діаметр кола, описаного навколо трикутника AB_1C, дорівнює 10 см. Знайдіть площу цього трикутника.

1.87. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см, а найбільша бічна грань рівновелика основі. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.88. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 19 см, 20 см і 37 см. Найменша бічна грань має площу вдвічі меншу за площу основи. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.89. На скільки частин поділяють простір площини всіх граней правильної чотирикутної призми?

1.90. На скільки частин поділяють простір площини всіх граней правильної трикутної призми?

4 **1.91.** Основою прямої призми є ромб з меншою діагоналлю завдовжки d, площа якого дорівнює Q. Більша діагональ призми нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.92. Площа основи правильної трикутної призми дорівнює $S\sqrt{3}$, а діагональ бічної грані утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.93. Діагоналі правильної шестикутної призми дорівнюють 17 см і 15 см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми.

1.94. Діагоналі правильної шестикутної призми дорівнюють 8 см і 7 см. Знайдіть висоту призми.

1.95. У похилій трикутній призмі дві бічні грані взаємно перпендикулярні. Їхнє спільне бічне ребро віддалене на 3 см і 4 см від двох інших бічних ребер. Знайдіть довжину бічного ребра призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює 120 см^2.

1.96. Ребро похилої трикутної призми дорівнює 8 см. Дві бічні грані призми взаємно перпендикулярні, а їхнє спільне бічне ребро віддалене на 5 см і 12 см від двох інших бічних ребер. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.97. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильна шестикутна призма, у якої висота дорівнює 2 см, а площа перерізу AB_1C_1D дорівнює 24 см^2. Знайдіть сторону основи призми.

1.98. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, у яку можна вписати коло. Відношення площі діагонального перерізу призми до площі бічної грані, що містить бічну сторону основи, дорівнює $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Знайдіть гострий кут трапеції.

1.99. Основою прямої призми є трапеція, у якої одна сторона дорівнює 23 см, а інші – по 13 см, бічне ребро призми дорівнює 16 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через паралельні сторони основ.

1.100. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, у яку можна вписати коло. Периметр трапеції дорівнює 32 см, а гострий кут – 30°. Знайдіть площу перерізу призми, проведеного через паралельні сторони основ, якщо висота призми дорівнює 3 см.

1.101. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція з бічною стороною 13 см і основами 21 см та 11 см. Площа діагонального перерізу призми дорівнює 180 см^2. Знайдіть:
1) площу повної поверхні призми;
2) площу перерізу, проведеного через паралельні сторони основ.

1.102. Доведіть, що більша діагональ правильної шестикутної призми менша від подвоєної діагоналі бічної грані.

1.103. Діагоналі бічних граней прямої трикутної призми дорівнюють 9 см, $10\sqrt{2}$ см і 15 см. Основою призми є прямокутний трикутник. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.104. Основа прямої призми – прямокутний трикутник. Діагоналі бічних граней призми дорівнюють 4 см, 7 см і 8 см. Знайдіть висоту призми.

1.105. Сторони основи і бічне ребро прямої трикутної призми відносяться як $3:4:5:7$, а площа повної поверхні призми дорівнює 864 см^2. Знайдіть висоту призми.

1.106. Діагоналі двох бічних граней прямої трикутної призми нахилені до площини основи під кутами $30°$ і $60°$. Основою призми є рівнобедрений трикутник, периметр якого дорівнює 14 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.107. Площа бічної поверхні правильної шестикутної призми в 4 рази більша за площу її основи. Знайдіть кут, який утворює з площиною основи:
1) діагональ бічної грані;
2) менша діагональ призми.

1.108. Відстані між бічними ребрами похилої трикутної призми відносяться як $5:29:30$, площа перпендикулярного перерізу дорівнює 288 см^2. Бічне ребро призми у 8 разів менше за периметр перпендикулярного перерізу. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.109. Відстані між бічними ребрами похилої трикутної призми дорівнюють 7 см, 15 см і 20 см, а бічне ребро втричі більше за радіус кола, вписаного у перпендикулярний переріз. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.110. П'єдестал має форму правильної призми, основою якої є многокутник з парною кількістю сторін. Проходячи повз п'єдестал, можна бачити то 3, то 4 бічні грані. Скільки бічних граней у цього п'єдестала?

1.111. Діагональ бічної грані правильної шестикутної призми дорівнює 17 см, а менша діагональ призми дорівнює 19 см. Знайдіть сторону основи призми.

1.112. У правильній шестикутній призмі кут між площиною основи та діагоналлю бічної грані на $15°$ більший за кут між цією площиною і меншою діагоналлю призми. Знайдіть ці кути.

1.113. Довжина кожного ребра правильної шестикутної призми дорівнює 2 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через середини двох паралельних сторін основи під кутом $45°$ до площини основи.

1.114. Довжина кожного ребра правильної шестикутної призми дорівнює 3 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через найбільшу діагональ основи під кутом 60° до площини основи.

1.115. Площа основи прямої трикутної призми дорівнює 24 см², а площі її бічних граней – 16 см², 52 см² і 60 см². Знайдіть висоту призми.

1.116. У правильній трикутній призмі сторона основи дорівнює a, а висота – H. Через сторону нижньої основи під кутом φ до неї проведено площину. Знайдіть площу перерізу (розгляньте два випадки).

Життєва математика

1.117. Друзі Сергій і Світлана ведуть здоровий спосіб життя, тому кілька разів на тиждень тренуються, бігаючи по колу, радіус якого 50 м. Сергій пробігає 8 кіл, а Світлана – 6 кіл. Швидкість бігу Сергія – 16 км/год, а Світлани – 14 км/год. Хто з друзів витрачає більше часу на тренування і на скільки (дати відповідь з точністю до секунди)?

1.118. Потрібно пофарбувати стелю у двох класах, один з яких квадратної форми зі стороною 4 м, а другий – прямокутної розміром 5 × 4 м. На 1 м² стелі витрачається 240 г фарби. Яку найменшу кількість банок фарби треба придбати, якщо фарбу продають у банках місткістю 2,5 кг.

Цікаві задачі для учнів неледачих

1.119. (*Київська міська олімпіада, 1991 р.*) У гострокутному трикутнику ABC на сторонах AB, BC і CA позначено точки C_1, A_1 і B_1 відповідно так, що відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в деякій точці O і $\angle AA_1C = \angle BB_1A = \angle CC_1B$. Доведіть, що AA_1, BB_1 і CC_1 – висоти трикутника.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

1.120. Скільки ребер, граней, вершин має прямокутний паралелепіпед?

1.121. Знайдіть площу поверхні куба, ребро якого дорівнює:
1) 2 дм; 2) 7 см.

1.122. Знайдіть площу повної поверхні прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють:
1) 3 см, 5 см і 7 см; 2) 1 дм, 8 см і 60 мм.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 1

1. З деякої точки до площини проведено перпендикуляр завдовжки 5 см та похилу завдовжки 12 см. Знайдіть проекцію цієї похилої на площину.

А	Б	В	Г	Д
7 см	8 см	$\sqrt{119}$ см	13 см	інша відповідь

2. При якому значенні m вектори $\vec{a}(m;\ 1;\ -2)$ і $\vec{b}(4;\ 4;\ 2)$ перпендикулярні?

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

3. На скільки відсотків збільшиться площа прямокутника, якщо дві його паралельні сторони збільшити на 10 %, а дві інші – на 20 %?

А	Б	В	Г	Д
на 10 %	на 15 %	на 20 %	на 30 %	на 32 %

4. MN – діаметр кола, а MK – хорда, яка дорівнює половині діаметра. Знайдіть величину кута KNM.

А	Б	В	Г	Д
15°	30°	45°	60°	75°

5. Установіть відповідність між властивістю правильного многокутника (1–4) та кількістю його сторін (А–Д).

Властивість правильного многокутника

1 внутрішній кут дорівнює 150°

2 зовнішній кут дорівнює 36°

3 кількість діагоналей дорівнює 44

4 внутрішній кут на 100° більший за зовнішній

Кількість сторін

А 9

Б 10

В 11

Г 12

Д 13

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Сторони прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть тангенс меншого гострого кута цього трикутника.

§ 2. ПАРАЛЕЛЕПІПЕД

У попередніх класах ви познайомилися з прямокутним паралелепіпедом і кубом. Обидва ці тіла є видами *паралелепіпеда*. Розглянемо паралелепіпед детальніше.

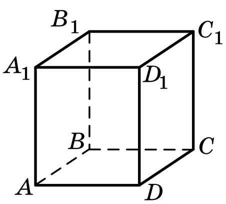
1. Паралелепіпед

***Паралелепіпед* – це призма, основою якої є паралелограм.**

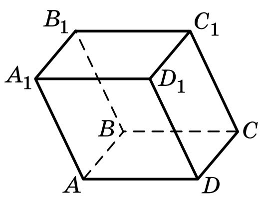
У паралелепіпеда всі грані – паралелограми.

Оскільки паралелепіпед є призмою, то всі властивості призми справджуються і для паралелепіпеда.

Паралелепіпед, бічні ребра якого перпендикулярні до площини основи, називають *прямим паралелепіпедом*. Його бічні грані – прямокутники. На малюнку 2.1 зображено прямий паралелепіпед.



Мал. 2.1



Мал. 2.2

Якщо бічні ребра паралелепіпеда не перпендикулярні до площини основи, його називають *похилим паралелепіпедом*. На малюнку 2.2 зображено похилий паралелепіпед.

Грані паралелепіпеда, які не мають спільних вершин, називають *протилежними гранями*. На малюнку 2.2 протилежними є грані $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 і CDD_1C_1, AA_1D_1D і BB_1C_1C.

Розглянемо *властивості паралелепіпеда*.

Теорема 1 (властивість протилежних граней паралелепіпеда). **Протилежні грані паралелепіпеда паралельні і рівні.**

Доведення. 1) Розглянемо паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, зображений на малюнку 2.2. Грані $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ цього паралелепіпеда паралельні і рівні, оскільки є основами паралелепіпеда.

2) Покладемо паралелепіпед, наприклад, на грань AA_1D_1D. Тоді грані AA_1D_1D і BB_1C_1C є основами паралелепіпеда. А тому вони паралельні і рівні.

3) Аналогічно доводимо, що паралельними і рівними є грані AA_1B_1B і DD_1C_1C. ■

Т е о р е м а 2 (властивість діагоналей паралелепіпеда). **Діагоналі паралелепіпеда перетинаються і точкою перетину діляться навпіл.**

Д о в е д е н н я. 1) Розглянемо будь-які дві діагоналі паралелепіпеда, наприклад A_1C і B_1D (мал. 2.3).

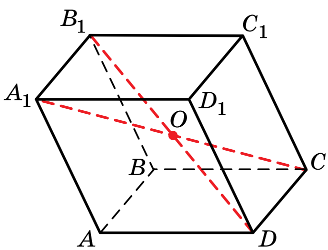
2) Оскільки $AB \parallel CD$ і $AB \parallel A_1B_1$, то $CD \parallel A_1B_1$, тому прямі CD і A_1B_1 лежать в одній площині.

3) Оскільки $AB = CD$ і $AB = A_1B_1$, то $A_1B_1 = CD$.

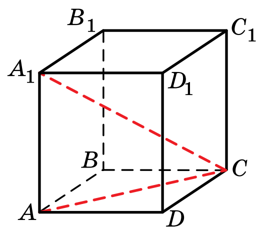
4) $A_1B_1 \parallel CD$ і $A_1B_1 = CD$. За ознакою чотирикутник A_1B_1CD є паралелограмом. Його діагоналі A_1C і B_1D перетинаються в точці O і цією точкою вони діляться навпіл.

5) Аналогічно доводять, що діагоналі A_1C і AC_1 перетинаються в точці O (яка є серединою A_1C). Ця точка ділить навпіл і діагональ AC_1. Так само доводимо і щодо діагоналей A_1C і BD_1.

6) Отже, усі чотири діагоналі паралелограма перетинаються в одній точці і цією точкою діляться навпіл. ■



Мал. 2.3



Мал. 2.4

Задача 1. Основою прямого паралелепіпеда є ромб зі стороною 8 см і тупим кутом 120°. Знайдіть довжину більшої діагоналі паралелепіпеда, якщо його висота дорівнює 2 см.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай на малюнку 2.4 зображено прямий паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $ABCD$ – ромб, $AB = BC = 8$ см, $\angle ABC = 120°$.

1) Оскільки AC – більша діагональ ромба, то A_1C – більша діагональ паралелепіпеда.

2) У $\triangle ABC$ за теоремою косинусів:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B =$

$= 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8^2 \cos 120° = 192.$

3) Із $\triangle AA_1C$ ($\angle A = 90°$):

$$A_1C = \sqrt{AA_1^2 + AC^2} = \sqrt{2^2 + 192} = 14 \text{ (см)}.$$

В і д п о в і д ь. 14 см.

Задача 2. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 10 см і 17 см, а одна з діагоналей основи – 21 см. Більша діагональ паралелепіпеда дорівнює 29 см. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

Розв'язання. Оскільки прямий паралелепіпед є прямою призмою, то $S_{біч} = Pl$, де P – периметр основи, l – довжина бічного ребра.

1) Нехай a і b – сторони основи, d_1 і d_2 – її діагоналі, тоді $a = 10$ см, $b = 17$ см, $d_1 = 21$ см. За властивістю діагоналей паралелограма: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$. Тоді

$d_2^2 = 2(10^2 + 17^2) - 21^2 = 337$, отже, $d_2 = \sqrt{337}$ (см).

Оскільки $\sqrt{337} < 21$, а більшою діагоналлю паралелепіпеда є та, що має більшу проекцію на площину основи, то більшою діагоналлю паралелепіпеда є та, проекцією якої на площину основи є діагональ основи довжиною 21 см.

2) $AC = 21$ см, $A_1C = 29$ см (мал. 2.4). Із $\triangle AA_1C$ ($\angle A = 90°$):

$$l = AA_1 = \sqrt{A_1C^2 - AC^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20 \text{ (см)}.$$

3) Маємо: $P = 2(10 + 17) = 54$ см, тоді

$S_{біч} = Pl = 54 \cdot 20 = 1080$ (см^2).

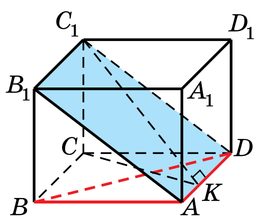
Відповідь. 1080 см^2.

Задача 3. У прямому паралелепіпеді з основою $ABCD$ $AB = 29$ см, $AD = 5$ см, $BD = 30$ см, $CC_1 = 21,6$ см. Знайдіть площу перерізу ADC_1B_1.

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – даний прямий паралелепіпед (мал. 2.5).

1) Розглянемо трикутник ABD. Оскільки $30^2 > 5^2 + 29^2$, то $BD^2 > AD^2 + AB^2$, тому $\angle BAD$ – тупий, отже, $ABCD$ – паралелограм, відмінний від прямокутника, і $\angle BCD = \angle BAD$.

2) Оскільки $AD \parallel BC$ і $BC \parallel B_1C_1$, то $AD \parallel B_1C_1$. Крім того, $AD = BC$, $BC = B_1C_1$, а тому $AD = B_1C_1$. Отже, ADC_1B_1 – паралелограм (за ознакою).



Мал. 2.5

3) Проведемо в паралелограмі $ABCD$ висоту CK. Зауважимо, що оскільки $\angle BCD$ – тупий, то точка K належить відрізку AD.

4) Доведемо, що C_1K – висота паралелограма ADC_1B_1. Маємо: $C_1C \perp (ABC)$, C_1K – похила до (ABC), CK – її проекція, $CK \perp AD$, тоді $C_1K \perp AD$ (за теоремою про три перпендикуляри), тобто C_1K – висота паралелограма ADC_1B_1.

5) $S_{ADC_1B_1} = AD \cdot C_1K$.

6) $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (за формулою Герона). Маємо:

$$p = \frac{1}{2}P_{ABD} = \frac{5+29+30}{2} = 32 \text{ (см), тоді}$$

$$S_{ABCD} = 2\sqrt{32\cdot(32-5)(32-29)(32-30)} = 144 \text{ (см}^2\text{)}.$$

7) З іншого боку, $S_{ABCD} = AD \cdot CK$, тоді

$$CK = \frac{144}{5} = 28,8 \text{ (см)}.$$

8) Із $\triangle CC_1K$ ($\angle C = 90°$):

$$C_1K = \sqrt{CK^2 + CC_1^2} = \sqrt{28,8^2 + 21,6^2} = 36 \text{ (см)}.$$

9) Отже, $S_{ADC_1B_1} = 5 \cdot 36 = 180$ (см²).

Відповідь. 180 см².

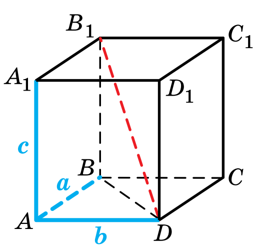
2. Прямокутний паралелепіпед

***Прямокутним паралелепіпедом* називають прямий паралелепіпед, основою якого є прямокутник.**

Зауважимо, що всі грані прямокутного паралелепіпеда є прямокутниками, а всі двогранні кути – прямими.

Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, називають *вимірами* (або *лінійними вимірами*) *прямокутного паралелепіпеда*.

На малюнку 2.6 $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$ – виміри прямокутного паралелепіпеда. Зрозуміло, що даний прямокутний паралелепіпед має чотири ребра завдовжки a, чотири – завдовжки b і чотири – завдовжки c.



Мал. 2.6

У попередніх класах виміри прямокутного паралелепіпеда ми зазвичай називали довжиною, шириною і висотою, ці самі терміни використовують і на практиці. Наприклад, так ми називаємо виміри кімнати, коробки, що має форму прямокутного паралелепіпеда, тощо.

З'ясуємо, як довжина діагоналі прямокутного паралелепіпеда залежить від його лінійних вимірів.

Теорема 3 (про довжину діагоналі прямокутного паралелепіпеда). **Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.**

Д о в е д е н н я. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 2.6), $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$, $B_1D = d$.

1) Із $\triangle ABD$ ($\angle A = 90°$): $BD^2 = a^2 + b^2$.

2) $BB_1 = AA_1 = c$. Із $\triangle BB_1D(\angle B = 90°)$:
$B_1D^2 = BD^2 + BB_1{}^2 = (a^2 + b^2) + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
Отже, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. ■

Зауважимо, що ця теорема є просторовим аналогом теореми Піфагора на площині.

Н а с л і д о к. **Усі чотири діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.**

Прямокутний паралелепіпед, усі три виміри якого рівні, називають *кубом*.

Усі грані куба – рівні між собою квадрати.

Задача 4. Довести, що площу повної поверхні $S_{повн}$ прямокутного паралелепіпеда можна знайти за формулою $S_{повн} = 2(ab + ac + bc)$, де a, b, c – виміри прямокутного паралелепіпеда.

Р о з в ' я з а н н я. Повна поверхня прямокутного паралелепіпеда складається з двох прямокутників, довжини сторін яких a і b, двох прямокутників, довжини сторін яких a і c, та двох прямокутників, довжини сторін яких b і c (мал. 2.6). Тому
$S_{повн} = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc)$. ■

Задача 5. Дві сусідні сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 5 см, а його діагональ – $\sqrt{38}$ см. Знайти площу повної поверхні паралелепіпеда.

Р о з в ' я з а н н я. Уведемо позначення: $a = 3$ см, $b = 5$ см, $d = \sqrt{38}$ см.

1) Маємо: $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ (за теоремою про довжину діагоналі). Тоді $c^2 = d^2 - (a^2 + b^2) = (\sqrt{38})^2 - (3^2 + 5^2) = 4$, отже, $c = 2$ см.

2) $S_{повн} = 2(ab + ac + bc) = 2(3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2) = 62$ (см^2).

В і д п о в і д ь. 62 см^2.

• Яку фігуру називають паралелепіпедом; прямим паралелепіпедом; похилим паралелепіпедом? • Сформулюйте і доведіть властивості паралелепіпеда. • Що називають прямокутним паралелепіпедом; його вимірами? • Сформулюйте і доведіть теорему про довжину діагоналі прямокутного паралелепіпеда. • Що називають кубом?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **2.1.** (*Усно*). Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища, що мають форму:

1) прямокутного паралелепіпеда; 2) куба.

2.2. Чи є паралелепіпедом чотирикутна призма, основою якої є чотирикутник, усі сторони якого відповідно дорівнюють:

1) 3 см; 7 см; 3 см і 6 см; 2) 2 см; 5 см; 2 см і 5 см?

2.3. Чи є паралелепіпедом чотирикутна призма, основою якої є чотирикутник, усі сторони якого відповідно дорівнюють:

1) 7 см; 5 см; 7 см і 5 см; 2) 3 см; 4 см; 3 см і 5 см?

2.4. Чи є паралелепіпедом чотирикутна призма, основою якої є чотирикутник, усі кути якого відповідно дорівнюють:

1) $20°$; $160°$; $20°$ і $160°$; 2) $160°$; $20°$; $90°$ і $90°$?

2.5. Чи є паралелепіпедом чотирикутна призма, основою якої є чотирикутник, кути якого відповідно дорівнюють:

1) $70°$; $110°$; $80°$ і $100°$; 2) $130°$; $50°$; $130°$ і $50°$?

2.6. Знайдіть площу повної поверхні прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 3 см, 5 см і 7 см.

2.7. Знайдіть площу повної поверхні прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 4 см, 7 см і 2 см.

2.8. Фабрика іграшок виробляє набори пластмасових кубиків. Кожний набір містить по 10 кубиків червоного, зеленого, синього та жовтого кольорів. Скільки пластмаси (у см^2) кожного кольору йде на виготовлення одного такого набору, якщо ребро кубика дорівнює 8 см?

2.9. Всесвітньо відома іграшка кубик Рубіка має ребро завдовжки 5,5 см. Знайдіть площу поверхні такого кубика.

2 **2.10.** Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 см і 6 см, а діагональ – 7 см. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.11. Сторона основи прямокутного паралелепіпеда і його висота дорівнюють по 2 дм, а діагональ – 3 дм. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.12. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 12 см, а висота – 10 см. Знайдіть:

1) площу діагонального перерізу паралелепіпеда;
2) площу повної поверхні паралелепіпеда.

2.13. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 8 см і 15 см, а висота – 5 см. Знайдіть площу:
1) діагонального перерізу паралелепіпеда;
2) повної поверхні паралелепіпеда.

2.14. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм зі сторонами 3 см і 5 см та тупим кутом 120°. Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо більша діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом 45°.

2.15. Основою прямого паралелепіпеда є ромб зі стороною $4\sqrt{3}$ см і гострим кутом 60°. Менша діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом 30°. Знайдіть висоту паралелепіпеда.

2.16. Знайдіть виміри прямокутного паралелепіпеда, якщо вони відносяться як $2:3:4$, а сума всіх його ребер дорівнює 72 см.

2.17. Знайдіть виміри прямокутного паралелепіпеда, якщо сума всіх його ребер дорівнює 96 см, а відношення вимірів дорівнює $1:3:4$.

2.18. Площа діагонального перерізу прямокутного паралелепіпеда дорівнює 12 см^2, а бічне ребро – 3 см. Знайдіть довжину діагоналі паралелепіпеда.

2.19. Площа діагонального перерізу прямокутного паралелепіпеда дорівнює 60 см^2, а діагональ основи – 12 см. Знайдіть довжину діагоналі паралелепіпеда.

2.20. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 8 см. Повна поверхня паралелепіпеда дорівнює 158 см^2. Знайдіть:
1) площу бічної поверхні паралелепіпеда;
2) висоту паралелепіпеда.

2.21. Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат зі стороною 4 см. Площа повної поверхні паралелепіпеда дорівнює 112 см^2. Знайдіть:
1) площу бічної поверхні паралелепіпеда;
2) висоту паралелепіпеда.

2.22. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, O – точка перетину діагоналей грані $ABCD$. Знайдіть $\angle A_1OA$.

2.23. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть $\angle B_1AB$.

2.24. Кімната, яку треба поштукатурити, має довжину 4,6 м, ширину 3,8 м і висоту 2,5 м. У кімнаті є вікно розміром 1,5×1,5 м та двері розміром 0,8×2 м. Скільки кілограмів штукатурки буде використано на цю кімнату, якщо на 1 м^2 площі витрачають 20 кг штукатурки?

2.25. Потрібно пофарбувати стіни кімнати, довжина якої 4,8 м, ширина – 3,5 м, а висота – 2,8 м. У кімнаті є вікно розміром $2\times1,5$ м та двері розміром $0,9\times2$ м. Щоб пофарбувати 1 м^2 стіни, треба 240 г фарби. Скільки кг фарби знадобиться для фарбування стін цієї кімнати?

2.26. Знайдіть діагоналі прямого паралелепіпеда, кожне ребро якого дорівнює a, а гострий кут основи дорівнює $60°$.

2.27. У прямому паралелепіпеді сторони основи завдовжки 4 см і 6 см утворюють між собою кут $150°$, а бічне ребро дорівнює 10 см. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

2.28. У прямому паралелепіпеді сторони основи завдовжки 2 см і 7 см утворюють між собою кут $30°$, а довжина бічного ребра – 5 см. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

2.29. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 8 см і 15 см, а діагональ паралелепіпеда утворює з висотою кут $45°$. Знайдіть:
1) висоту паралелепіпеда;
2) площу бічної поверхні;
3) площу повної поверхні.

2.30. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 7 см і 24 см, а діагональ паралелепіпеда утворює кут $45°$ із площиною основи. Знайдіть:
1) висоту паралелепіпеда;
2) площу бічної поверхні;
3) площу повної поверхні.

2.31. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 14 см, а його лінійні виміри відносяться як $2:3:6$. Знайдіть лінійні виміри прямокутного паралелепіпеда.

2.32. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 9 см, а його лінійні виміри відносяться як $1:2:2$. Знайдіть лінійні виміри прямокутного паралелепіпеда.

2.33. Площа повної поверхні прямокутного паралелепіпеда дорівнює 432 см^2, його виміри відносяться як $2:5:14$. Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда.

2.34. Лінійні виміри прямокутного паралелепіпеда відносяться як $1:4:8$, а площа його повної поверхні дорівнює 176 см^2. Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда.

3 **2.35.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть $\angle DB_1C$.

2.36. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть $\angle DAC_1$.

2.37. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 5 см, а одна з діагоналей основи – 4 см. Менша діагональ паралелепіпеда утворює з висотою паралелепіпеда кут 30°. Знайдіть діагоналі паралелепіпеда.

2.38. Бічне ребро прямого паралелепіпеда дорівнює 5 см, сторони основи – 6 см і 8 см, а одна з діагоналей основи – 12 см. Знайдіть діагоналі паралелепіпеда.

2.39. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 2 см і 5 см, а більша висота основи – 4 см. Знайдіть діагоналі паралелепіпеда, якщо його висота дорівнює $2\sqrt{2}$ см.

2.40. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 4 см, а площа основи – $6\sqrt{3}$ см². Висота паралелепіпеда дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть діагоналі паралелепіпеда.

2.41. Основою прямого паралелепіпеда є квадрат. Діагональ паралелепіпеда дорівнює $2\sqrt{6}$ см, а діагональ бічної грані – $2\sqrt{5}$ см. Знайдіть:

1) сторону основи паралелепіпеда;
2) висоту паралелепіпеда;
3) площу бічної поверхні паралелепіпеда;
4) площу повної поверхні паралелепіпеда;
5) площу діагонального перерізу.

2.42. У прямому паралелепіпеді ребра, що виходять з однієї вершини, дорівнюють 2 см, 4 см і 6 см, а кут між меншими з них дорівнює 60°. Знайдіть більшу діагональ паралелепіпеда.

2.43. Перпендикулярним перерізом похилого паралелепіпеда є ромб із діагоналями 10 см і 24 см. Знайдіть бічне ребро паралелепіпеда, якщо площа його бічної поверхні дорівнює 936 см².

2.44. Перпендикулярним перерізом похилого паралелепіпеда є ромб із гострим кутом 60° і більшою діагоналлю $6\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо його бічне ребро дорівнює 7 см.

2.45. Основою прямого паралелепіпеда є квадрат. Діагональ бічної грані паралелепіпеда дорівнює 8 см, а діагональ паралелепіпеда дорівнює 10 см. Знайдіть:

1) сторону основи паралелепіпеда;
2) висоту паралелепіпеда;
3) площу бічної поверхні паралелепіпеда;
4) площу повної поверхні паралелепіпеда;
5) площу діагонального перерізу паралелепіпеда.

2.46. Знайдіть площу повної поверхні прямокутного паралелепіпеда, якщо його діагональ більша за лінійні виміри на 5 см, 4 см і 1 см.

2.47. Діагональ прямокутного паралелепіпеда більша за сторони основи на 1 см і 9 см, а висота паралелепіпеда дорівнює 3 см. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

2.48. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 8 см, а тупий кут – 120°. Площа меншого з діагональних перерізів паралелепіпеда дорівнює 70 см^2. Знайдіть площу:
1) більшого діагонального перерізу паралелепіпеда;
2) бічної поверхні паралелепіпеда.

2.49. Основою прямого паралелепіпеда є ромб із гострим кутом 60° і стороною 4 см. Площа більшого з діагональних перерізів паралелепіпеда дорівнює $20\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу:
1) меншого діагонального перерізу паралелепіпеда;
2) бічної поверхні паралелепіпеда.

2.50. Основою прямого паралелепіпеда є ромб із гострим кутом 60° і меншою діагоналлю 6 см. Більша діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом 30°. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

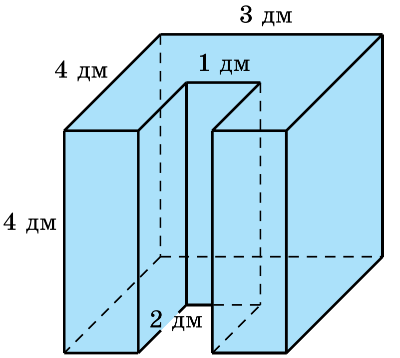
2.51. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 5 см, а кут між ними – 120°. Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює більшій діагоналі основи. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.52. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, одна з діагоналей якого дорівнює його стороні. Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює $5\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо площа його повної поверхні дорівнює $96\sqrt{3}$ см^2.

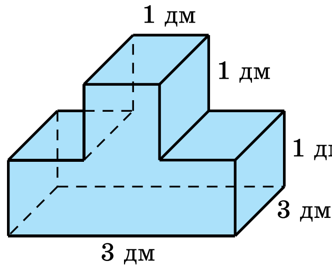
2.53. Основою прямого паралелепіпеда є ромб із гострим кутом 30°. Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 5 см, а площа повної поверхні паралелепіпеда – 156 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.54. Деталь, усі двогранні кути якої – прямі (мал. 2.7), треба пофарбувати. Скільки фарби для цього потрібно, якщо на 1 дм^2 поверхні витрачають 3 г фарби?

2.55. Деталь, усі двогранні кути якої – прямі (мал. 2.8), треба полакувати. Скільки лаку для цього потрібно, якщо на 1 дм^2 поверхні витрачають 3,5 г лаку?



Мал. 2.7



Мал. 2.8

2.56. Площа меншої бічної грані прямокутного паралелепіпеда дорівнює Q. Знайдіть площу перерізу цього паралелепіпеда, який ділить навпіл кут між двома суміжними бічними гранями.

2.57. У прямому паралелепіпеді бічне ребро дорівнює 1 м, сторони основи – 23 дм і 11 дм, а діагоналі основи відносяться як $2:3$. Знайдіть площі діагональних перерізів.

2.58. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 8 см і 14 см, а діагоналі основи відносяться як $7:9$. Знайдіть площі діагональних перерізів цього паралелепіпеда, якщо його висота дорівнює 5 см.

2.59. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямий паралелепіпед, основою якого є ромб $ABCD$, $\angle BAD = 60°$, $AB = 2$ см, $AA_1 = 1$ см. Знайдіть площу перерізу AB_1C.

2.60. У прямому паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з основою $ABCD$ $AB = 29$ см, $AD = 36$ см, $BD = 25$ см, $AA_1 = 48$ см. Знайдіть площу перерізу AB_1C_1D.

2.61. У прямому паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основою є ромб $ABCD$ зі стороною 6 см, $\angle BAD = 30°$, $AA_1 = 4$ см. Знайдіть площу перерізу AB_1C_1D.

2.62. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб із ребром 3 см. Точка K – середина ребра AA_1, M – середина ребра DC, L – точка на ребрі AD. Знайдіть довжину відрізка AL, якщо прямі B_1K і ML перетинаються.

2.63. Основою похилого паралелепіпеда є квадрат зі стороною 2 см, бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 3 см. Одна з вершин верхньої основи рівновіддалена від усіх вершин нижньої основи. Знайдіть площі діагональних перерізів паралелепіпеда.

2.64. Чотири грані похилого паралелепіпеда є квадратами зі стороною завдовжки 2 см. Бічне ребро паралелепіпеда нахилене до площини основи під кутом $30°$. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

2.65. У прямому паралелепіпеді бічне ребро дорівнює 12 см, більша сторона основи – 7 см, більша діагональ основи – 9 см. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо його більша діагональ утворює з більшою стороною основи кут $60°$.

4 **2.66.** Кінці трьох ребер паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, сполучили відрізками. Доведіть, що центроїд трикутника, який при цьому утворився, належить діагоналі паралелепіпеда, яка виходить із тієї самої вершини і ділить цю діагональ у відношенні $1:2$, рахуючи від спільної вершини.

2.67. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть відстань між двома мимобіжними ребрами суміжних граней куба.

2.68. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм із гострим кутом $30°$ і площею 10 см². Площі бічних граней паралелепіпеда дорівнюють 35 см² і 28 см². Знайдіть висоту паралелепіпеда.

2.69. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площа якого – 12 см². Площі діагональних перерізів паралелепіпеда дорівнюють 20 см² і 30 см². Знайдіть висоту паралелепіпеда.

2.70. Бічне ребро AA_1 похилого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ утворює рівні гострі кути з ребрами AB і AD цього паралелепіпеда. A_1K – висота паралелепіпеда. Доведіть, що точка K належить бісектрисі кута BAD.

2.71. Основою похилого паралелепіпеда є ромб із гострим кутом $60°$. Бічне ребро, що виходить із вершини цього кута, утворює зі сторонами кута кути по $45°$. Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо його бічне ребро дорівнює $3\sqrt{3}$ см.

2.72. Основою похилого паралелепіпеда є квадрат, а бічне ребро завдовжки 4 см утворює зі сторонами основи кути по $60°$. Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо його бічне ребро дорівнює 4 см.

2.73. Діагоналі граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см, 6 см і 7 см. Знайдіть діагональ паралелепіпеда.

2.74. Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда, якщо діагоналі трьох його граней дорівнюють 11 см, 19 см і 20 см.

2.75. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 12 см^2, 18 см^2 і 54 см^2. Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда.

2.76. Периметри трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 24 см, 26 см і 42 см. Знайдіть:
1) діагональ прямокутного паралелепіпеда;
2) площу повної поверхні.

2.77. Бічне ребро прямокутного паралелепіпеда дорівнює l. Діагональ паралелепіпеда вдвічі менша від периметра основи. Знайдіть площу основи.

2.78. Одна з діагоналей основи прямого паралелепіпеда дорівнює $6\sqrt{2}$ см і утворює кут 45° зі стороною основи. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо більша діагональ паралелепіпеда дорівнює 19 см, а площа його основи дорівнює 21 см^2.

2.79. Площа бічної поверхні прямого паралелепіпеда дорівнює 168 см^2, а площа повної поверхні – 224 см^2. Менша з діагоналей основи дорівнює $4\sqrt{2}$ см і утворює з більшою стороною основи кут 45°. Знайдіть меншу діагональ основи.

2.80. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 7 см і 17 см, а його діагоналі утворюють кути 30° і 45° із площиною основи. Знайдіть висоту паралелепіпеда.

2.81. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 17 см і 31 см, а його діагоналі утворюють із площиною основи кути 45° і 60°. Знайдіть висоту паралелепіпеда.

2.82. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 25 см, а діагоналі двох його бічних граней – 15 см і $4\sqrt{34}$ см. Знайдіть площу повної поверхні цього паралелепіпеда.

2.83. Діагоналі двох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і $4\sqrt{10}$ см, а діагональ паралелепіпеда дорівнює 13 см. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

2.84. Площі двох граней прямокутного паралелепіпеда відносяться як $9:16$, а діагоналі цих граней дорівнюють 30 см і 40 см. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

2.85. Діагоналі двох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 10 см і 17 см, а площі цих граней відносяться як $2:5$. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

2.86. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед. Чи може $\triangle AB_1C$ бути:
1) прямокутним; 2) тупокутним?

2.87. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 21 см і 22 см, а висота – 20 см. Діагоналі паралелепіпеда відносяться як $9:5$. Знайдіть площі діагональних перерізів.

2.88. У прямому паралелепіпеді висота дорівнює 20 см, сторони основ – 17 см і 28 см. Площа перерізу, проведеного через дві більші сторони основ, дорівнює 700 см^2. Знайдіть діагоналі паралелепіпеда.

2.89. Доведіть, що сума квадратів діагоналей будь-якого паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів усіх його ребер.

2.90. Відстані від точки перетину діагоналей паралелепіпеда до його вершин дорівнюють 18 см, 15 см, 11 см і 20 см. Довжини трьох ребер паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, є послідовними натуральними числами (у см). Знайдіть периметри граней паралелепіпеда.

2.91. Сторони основи паралелепіпеда дорівнюють 10 см і 11 см, а бічне ребро – 3 см. Довжини діагоналей паралелепіпеда є послідовними парними натуральними числами (у см). Знайдіть довжину найбільшої діагоналі паралелепіпеда.

2.92. Основою похилого паралелепіпеда є ромб $ABCD$, у якого $\angle BAD = 60°$, бічні ребра нахилені до площини основи під кутом $60°$, а площина AA_1C_1 перпендикулярна до площини основи. Доведіть, що площі перерізів AA_1C_1C і BB_1D_1D відносяться як $3:2$.

2.93. Діагональ AC_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ утворює з площинами ABB_1 і ADD_1 відповідно кути α і β. Знайдіть кут, який утворює AC_1 із площиною ABC.

2.94. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d і утворює з меншою бічною гранню кут α, а з площиною основи – кут φ. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.95. Знайдіть площу повної поверхні прямокутного паралелепіпеда, у якого діагональ завдовжки d утворює з бічними гранями кути $30°$ і $45°$.

2.96. Площі діагональних перерізів прямого паралелепіпеда – 105 см^2 і 135 см^2, а площі бічних граней відносяться як $4:7$. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.97. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 11 см і 29 см, а площі діагональних перерізів дорівнюють 480 см^2 і 512 см^2. Знайдіть діагоналі паралелепіпеда.

2.98. Три ребра прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, видно з точки перетину діагоналей паралелепіпеда під кутами α, β і γ. Доведіть, що $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$.

2.99. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 8 см і 15 см та утворюють між собою кут 60°. Площа меншого з діагональних перерізів дорівнює 130 см^2. Знайдіть:
1) площу другого діагонального перерізу;
2) площу бічної поверхні паралелепіпеда;
3) площу повної поверхні паралелепіпеда;
4) площі перерізів паралелепіпеда, що проходять через протилежні сторони його верхньої і нижньої основ.

2.100. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда, дорівнюють 3 см і 4 см, а бічне ребро – 12 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через:
1) діагональ паралелепіпеда паралельно мимобіжній діагоналі основи;
2) середини двох суміжних ребер основи паралелепіпеда паралельно його діагоналі, що проходить через спільну точку вказаних сторін;
3) середини двох суміжних сторін основи під кутом 60° до площини основи.

2.101. Основою паралелепіпеда є ромб зі стороною a і гострим кутом α, а бічні грані – паралелограми з гострим кутом β. Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює l. Знайдіть:
1) площу бічної поверхні паралелепіпеда;
2) площу меншого діагонального перерізу;
3) висоту паралелепіпеда.

2.102. Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з трьома гранями, що мають спільну вершину, кути α, β і γ. Доведіть, що $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma \geqslant 1{,}5$.

Життєва математика

2.103. Відомо, що 1 га лісу очищує за рік 18 млн м^3 повітря. Скільки м^3 повітря очистить за рік ліс площею:
1) 4 га; 2) 3 км^2?

2.104. У магазині є три види керамічної плитки:

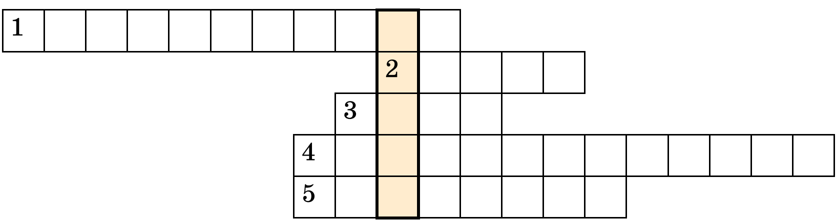
Вид плитки	Ціна плитки, грн/од.
Квадратна плитка зі стороною 2 дм	24 грн
Плитка, що має довжину 2 дм і ширину 1 дм	13 грн
Квадратна плитка зі стороною 3 дм	50 грн

У приміщенні треба обкласти плиткою стіну, довжина якої – 6 м, а висота – 3 м. Яку плитку з наявних треба придбати, щоб обкладання цієї стіни плиткою було найдешевшим? Обчисліть ці витрати.

Цікаві задачі для учнів неледачих

2.105. *Видатні українки.* Запишіть по горизонталі імена та прізвища видатних українок (за потреби використовуйте додаткову літературу чи Інтернет) і прочитайте у виділеному стовпчику назву геометричної фігури, яку ми детально розглянемо в наступному розділі підручника.

1. Народна художниця України, лауреатка Національної премії імені Тараса Шевченка.
2. Політик, княгиня, очільниця Давньоруської держави.
3. Дочка Ярослава Мудрого, королева Франції.
4. Видатна оперна співачка, педагогиня.
5. Українська поетеса, письменниця, лауреатка Шевченківської премії.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

2.106. З точки A до площини α проведено перпендикуляр AK і похилу AM. Знайдіть:

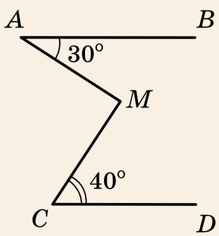
1) AM, якщо $AK = 6$ см, $MK = 8$ см;
2) AK, якщо $MK = 9$ см, $AM = 15$ см.

2.107. З точки O – точки перетину діагоналей квадрата $ABCD$ до його площини проведено перпендикуляр OK. Знайдіть OK, якщо $AB = 4$ см, $AK = 3$ см.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 2

1. Прямі AB і CD паралельні. Знайдіть градусну міру кута AMC.



А	Б	В	Г	Д
60°	70°	80°	85°	90°

2. Прямі a і b паралельні. Пряма c перетинає пряму a. Як можуть бути розташовані прямі b і c?

А	Б	В	Г	Д
перетинатися	перетинатися або бути паралельними	бути мимобіжними	перетинатися або бути мимобіжними	бути паралельними або мимобіжними

3. При яких значеннях m і n вектори $\vec{a}(m;\ 2;\ -3)$ і $\vec{b}(9;\ -6;\ n)$ колінеарні?

А	Б	В	Г	Д
$m = -3$; $n = 9$	$m = 3$; $n = -9$	$m = -3$; $n = -9$	$m = 3$; $n = 9$	інша відповідь

4. Укажіть, при якому значенні x відстань між точками $A(x;\ 2;\ -7)$ і $B(0;\ -1;\ -1)$ дорівнює 7.

А	Б	В	Г	Д
$x = 2$	$x = -2$	$x = -2$ або $x = 2$	$x = 0$ або $x = 2$	таких значень x немає

5. Установіть відповідність між довжинами сторін трикутника (1–4) та його видом (А–Д):

Довжини сторін

1 6 см; 6 см; 6 см
2 6 см; 8 см; 10 см
3 6 см; 7 см; 9 см
4 6 см; 7 см; 11 см

Вид трикутника

А рівнобедрений
Б прямокутний
В рівносторонній
Г різносторонній гострокутний
Д різносторонній тупокутний

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

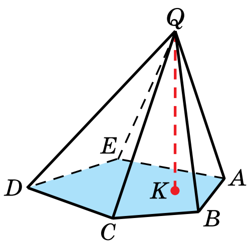
6. Сторони основ прямої трикутної призми дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см. Площа перерізу, проведеного через бічне ребро і меншу висоту основи, дорівнює 24 см^2. Знайдіть довжину (у см) бічного ребра призми.

§ 3. ПІРАМІДА

Вивчаючи геометрію в попередніх класах ви вже познайомилися з пірамідою. Розглянемо це геометричне тіло детальніше.

1. Піраміда

***Піраміда* – це многогранник, у якого одна з граней, яку називають *основою*, є довільним многокутником, а інші грані – трикутники зі спільною вершиною.**



Мал. 3.1

На малюнку 3.1 зображено піраміду, основа якої – многокутник $ABCDE$, інші грані – трикутники ABQ, BCQ, CDQ, DEQ і AEQ. Ці грані називають *бічними гранями піраміди*. Їхню спільну точку – точку Q – називають *вершиною піраміди*. Піраміду, зображену на малюнку 3.1, називають пірамідою $QABCDE$. Ребра піраміди, які сполучають вершину піраміди з вершинами основи піраміди, називають *бічними ребрами піраміди*. На малюнку 3.1 відрізки QA, QB, QC, QD і QE – бічні ребра піраміди.

Піраміду називають *n-кутною*, якщо її основою є *n*-кутник.

На малюнку 3.1 зображено п'ятикутну піраміду. Трикутну піраміду прийнято називати *тетраедром*.

Перпендикуляр, проведений з вершини піраміди до площини основи, називають *висотою піраміди*.

На малюнку 3.1 відрізок QK є висотою піраміди, точка K – основа висоти.

***Площею повної поверхні піраміди* називають суму площ усіх її граней, а *площею бічної поверхні піраміди* – суму площ її бічних граней.**

Площу повної поверхні піраміди $S_{\text{повн}}$ можна задати формулою через площу її бічної поверхні $S_{\text{біч}}$ і площу її основи $S_{\text{осн}}$:

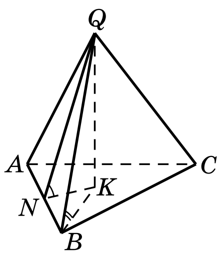
$$S_{\text{повн}} = S_{\text{біч}} + S_{\text{осн}}.$$

У піраміді розрізняють такі кути: *двогранні кути при сторонах основи* (їх іще називають *двогранними кутами при основі*), *кути, що утворюють бічні ребра із площиною основи, плоскі кути при вершині та двогранні кути при бічних ребрах*.

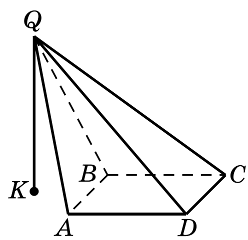
Двогранним кутом при стороні основи називатимемо двогранний кут, ребром якого є ця сторона і який містить цю піраміду.

Нехай маємо трикутну піраміду $QABC$, у якій проведено висоту QK (мал. 3.2). Тоді кути AQB, BQC і AQC – плоскі кути при вершині піраміди, кут QBK – кут, що утворює бічне ребро QB із площиною основи.

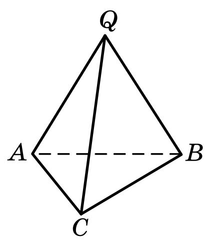
Проведемо $KN \perp AB$, тоді, за теоремою про три перпендикуляри, $QN \perp AB$, отже, кут QNK – лінійний кут двогранного кута при стороні основи. Зауважимо, що існують піраміди, у яких один чи більше двогранних кутів при основі більші за $90°$. Наприклад, на малюнку 3.3 зображено піраміду, у якій двогранний кут при стороні AB більший за $90°$, тому висота QK цієї піраміди лежить поза пірамідою. Можна також сказати, що висота QK не перетинає внутрішню область многокутника, який є основою піраміди.



Мал. 3.2



Мал. 3.3



Мал. 3.4

Задача 1. Усі плоскі кути при вершині тетраедра дорівнюють $30°$. Знайти площу бічної поверхні цього тетраедра, якщо його бічні ребра дорівнюють 2 см, 3 см і 4 см.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай на малюнку 3.4 зображено тетраедр $QABC$, у якого $\angle AQB = \angle BQC = \angle AQC = 30°$, $QA = 2$ см, $QB = 3$ см, $QC = 4$ см. Тоді

$$S_{\text{біч}} = S_{QAB} + S_{QBC} + S_{QAC} = \frac{1}{2} \cdot QA \cdot QB\sin\angle AQB +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot QB \cdot QC\sin\angle BQC + \frac{1}{2} \cdot QA \cdot QC\sin\angle QAC =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sin 30°(2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4) = 6{,}5\ (\text{см}^2).$$

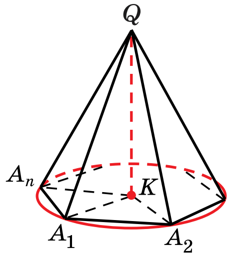
Відповідь. 6,5 см^2.

2. Деякі види пірамід

Розглянемо окремо деякі види пірамід, що мають певні властивості.

Задача 2. Довести, що якщо в піраміді виконується одна з двох таких умов: усі бічні ребра утворюють із площиною основи рівні кути або довжини всіх бічних ребер рівні, то основою висоти піраміди є центр кола, описаного навколо основи піраміди.

Доведення. Нехай $QA_1A_2...A_n$ – дана піраміда, точка K – основа її висоти QK (мал. 3.5).



Мал. 3.5

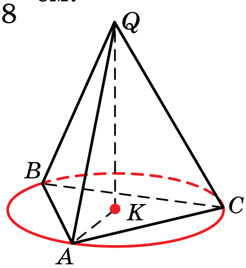
1) A_1K – проекція бічного ребра A_1Q на площину основи, тому $\angle QA_1K$ – кут, який утворює бічне ребро QA_1 із площиною основи. Аналогічно $\angle QA_2K$ – кут, який утворює бічне ребро QA_2 із площиною основи, ... , $\angle QA_nK$ – кут, що утворює бічне ребро QA_n із площиною основи.

2) Якщо $\angle QA_1K = \angle QA_2K = ... = \angle QA_nK$, тобто маємо першу з двох умов задачі, то $\triangle QA_1K = \triangle QA_2K = ... = \triangle QA_nK$ (за катетом і протилежним гострим кутом). Якщо $QA_1 = QA_2 = ... = QA_n$, тобто маємо другу з двох умов задачі, то $\triangle QA_1K = \triangle QA_2K = ... = \triangle QA_nK$ (за катетом і гіпотенузою). Для будь-якого із цих випадків отримаємо, що $KA_1 = KA_2 = ... = KA_n$.

3) Отже, точка K належить площині основи піраміди і рівновіддалена від усіх вершин многокутника $A_1A_2 ... A_n$ (оскільки $KA_1 = KA_2 = ... = KA_n$), отже, K є центром кола, описаного навколо основи. ■

Задача 3. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 5 см, 5 см і 6 см. Знайти висоту піраміди, якщо всі бічні ребра тетраедра між собою рівні і дорівнюють $\frac{65}{8}$ см.

Розв'язання. Нехай $QABC$ – даний тетраедр (мал. 3.6), у якого $QA = QB = QC = \frac{65}{8}$ см, $AB = AC = 5$ см, $BC = 6$ см, QK – висота тетраедра.



Мал. 3.6

1) Оскільки всі бічні ребра тетраедра рівні, то K – центр кола, описаного навколо трикутника ABC, і $AK = R$ – радіус цього кола.

2) Радіус описаного кола можна знайти за формулою $R = \dfrac{abc}{4S}$, де a, b, c – сторони трикутника, S – його площа. Площу трикутника знайдемо за формулою Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – півпериметр трикутника.

3) Маємо: $p = \dfrac{5+5+6}{2} = 8$ (см), тоді

$S = \sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)} = 12$ (см^2).

4) Отже, $R = \dfrac{5 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot 12} = \dfrac{25}{8}$ (см).

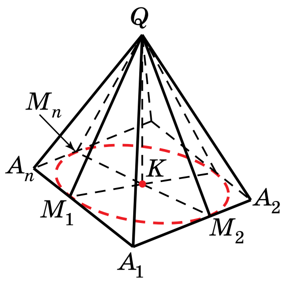
5) Із $\triangle AQK$ ($\angle K = 90°$):

$$QK = \sqrt{AQ^2 - AK^2} = \sqrt{\left(\frac{65}{8}\right)^2 - \left(\frac{25}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ (см).}$$

Відповідь. 7,5 см.

Задача 4. Довести, що коли висота піраміди перетинає її основу і виконується одна з двох умов: усі двогранні кути при основі піраміди між собою рівні або всі висоти бічних граней піраміди між собою рівні, то основою висоти піраміди є центр кола, вписаного в основу піраміди.

Доведення. Розглянемо малюнок 3.7, на якому зображено дану піраміду, точка K – основа її висоти. Тоді $\triangle QKM_1 = \triangle QKM_2 = \ldots = \triangle QKM_n$ (доведіть самостійно), а значить, точка K рівновіддалена від усіх сторін основи, отже, вона є центром кола, вписаного в основу піраміди. ■

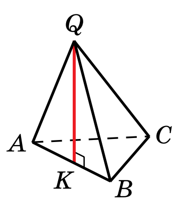


Мал. 3.7

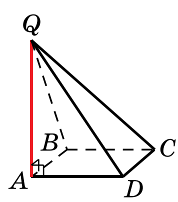
Розглянемо ще два види пірамід.

Якщо лише одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до площини основи (мал. 3.8), то її висота QK лежить в цій грані, причому QK буде і висотою цієї грані.

А якщо дві сусідні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи (мал. 3.9), то висотою піраміди є спільне ребро QA цих граней.



Мал. 3.8

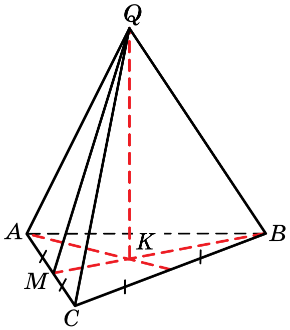


Мал. 3.9

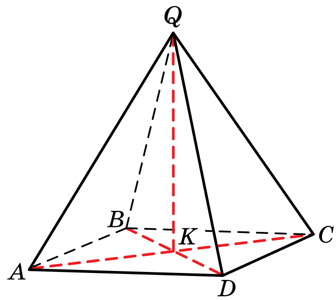
3. Правильна піраміда

Піраміду **називають** ***правильною*****, якщо її основа – правильний многокутник, а основа висоти збігається із центром цього многокутника.**

Нагадаємо, що центром правильного многокутника називають центр описаного навколо нього (або вписаного в нього) кола. На малюнку 3.10 зображено правильну трикутну піраміду, а на малюнку 3.11 – правильну чотирикутну піраміду, висоти яких – відрізки QK, де точка K – центр правильного многокутника, що є основою піраміди.



Мал. 3.10



Мал. 3.11

Віссю правильної піраміди називають пряму, яка містить її висоту.

Оскільки $AK = BK = CK = DK$ (мал. 3.11), то $\triangle QKA = \triangle QKB =$ $= \triangle QKC = \triangle QKD$ (за двома катетами), тому $QA = QB = QC = QD$. Отже,

усі бічні ребра правильної піраміди між собою рівні.

Оскільки $AB = BC = CD = DA$ (мал. 3.11), то $\triangle QAB = \triangle QBC =$ $= \triangle QCD = \triangle QDA$ (за трьома сторонами). Отже,

усі бічні грані правильної піраміди – рівні між собою рівнобедрені трикутники.

Висоту бічної грані правильної піраміди, що виходить із вершини піраміди, називають ***апофемою піраміди*****.**

Оскільки QM – висота бічної грані QAC (мал. 3.10), що виходить із вершини піраміди, то QM – одна з апофем піраміди. Зрозуміло, що всі апофеми правильної піраміди між собою рівні. Якщо піраміда не є правильною, то і апофем у неї немає.

Т е о р е м а 1 (про площу бічної поверхні правильної піраміди). **Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра основи на апофему.**

Д о в е д е н н я. Нехай P – периметр основи правильної n-кутної піраміди, a – довжина сторони її основи, l – довжина її апофеми. Знайдемо S – площу однієї грані:

$$S = \frac{al}{2}, \text{ тоді } S_{\text{біч}} = n \cdot S = n \cdot \frac{al}{2} = \frac{an}{2} \cdot l.$$

Але $an = P$, тому $\frac{an}{2} = p$ – півпериметр основи. Отже,

$$\boldsymbol{S_{\text{біч}} = pl.}$$ ■

Задача 5. Знайти площу повної поверхні правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої – 6 см, а висота – 4 см.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай на малюнку 3.12 зображено правильну чотирикутну піраміду $QABCD$, QK – висота піраміди, $QK = 4$ см, $ABCD$ – квадрат, $AD = 6$ см.

1) $S_{\text{повн}} = S_{\text{біч}} + S_{\text{осн}}$.

2) $S_{\text{осн}} = AD^2 = 6^2 = 36$ (см^2).

3) Проведемо відрізок QM – апофему бічної грані, тоді M – середина CD, K – середина AC, отже, KM – середня лінія трикутника ACD. Тоді

$$KM = \frac{AD}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ (см)}.$$

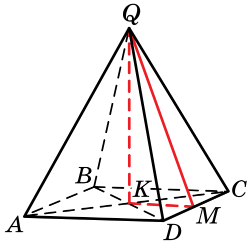
4) Із $\triangle QKM$ ($\angle K = 90°$):

$$QM = \sqrt{QK^2 + KM^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ (см)}.$$

5) $S_{\text{біч}} = pl = \frac{4 \cdot 6}{2} \cdot 5 = 60$ (см^2).

6) $S_{\text{повн}} = 60 + 36 = 96$ (см^2).

В і д п о в і д ь. 96 см^2.



Мал. 3.12

4. Залежність між кутами в правильній n-кутній піраміді

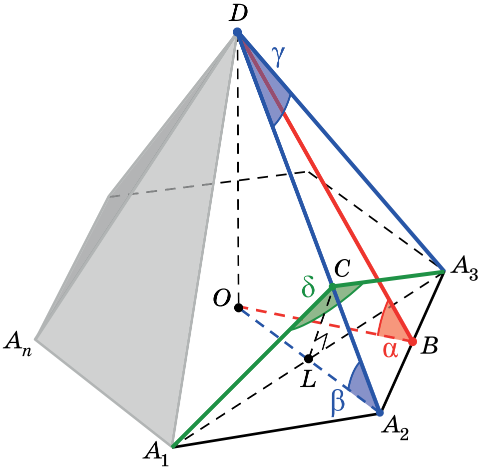
Нехай дано правильну n-кутну піраміду $DA_1A_2A_3...A_n$, у якої основа $A_1A_2A_3...A_n$ – правильний n-кутник, точка O – центр основи, DO – висота (мал. 3.13). Розглянемо в цій піраміді такі кути:

α – кут нахилу бічної грані до площини основи, $\alpha = \angle OBD$, $0° < \alpha < 90°$;

β – кут нахилу бічного ребра до площини основи, $\beta = \angle OA_2D$, $0° < \beta < 90°$;

γ – плоский кут при вершині піраміди, $\gamma = \angle A_2DA_3$, $0° < \gamma < \frac{360°}{n}$;

δ – двогранний кут при бічному ребрі. Оскільки $A_1C \perp DA_2$ і $A_3C \perp DA_2$, то $\angle A_1CA_3$ – лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі DA_2, $\delta = \angle A_1CA_3$.



Мал. 3.13

Часто в задачах на правильну піраміду дано один із вищевказаних кутів, але при цьому в задачі треба знайти той лінійний розмір піраміди, який від цього кута не залежить, але залежить від одного з трьох інших кутів. Розв'язати таку задачу буде важко, якщо не знати, що всі чотири вищезгадані кути попарно пов'язані між собою формулами. Ці формули зазвичай називають *формулами переходу (або залежності) між кутами в правильних n-кутних пірамідах*.

Формулу залежності для кожної пари вищезгаданих кутів можна знайти за таким алгоритмом:

1. Вибрати в піраміді два прямокутних трикутники зі спільною стороною, кожен з яких містить один із двох кутів шуканої залежності.

2. Виразити спільну сторону вибраних трикутників через тригонометричні функції цих кутів і довжину сторони основи піраміди.

3. Прирівнявши праві частини отриманих формул та поділивши отриману при цьому рівність на довжину сторони основи, знайти формулу залежності між кутами.

Нехай $A_1A_2 = a$ – довжина сторони основи даної правильної n-кутної піраміди. Для зручності застосування згаданого алгоритму подамо деякі лінійні елементи цієї піраміди через сторону її основи. Як відомо з курсу планіметрії, $OA_2 = R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$ – радіус описаного навколо основи кола, а $OB = r = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$ – радіус вписаного в основу кола.

Оскільки $A_1A_2 = A_2A_3$, то A_2L – бісектриса, медіана та висота рівнобедреного $\Delta A_1A_2A_3$ і $A_1L = A_3L$. Тоді з $\triangle A_1LA_2$ $(\angle L = 90^\circ)$ маємо:

$$A_3L = A_1L = A_1A_2 \cdot \sin\angle A_1A_2O,$$

де $\angle A_1A_2O = \frac{\angle A_1A_2A_3}{2} = \frac{180^\circ(n-2)}{n \cdot 2} = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}.$

Отже, $A_3L = A_1L = a\sin\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) = a\cos\frac{180^\circ}{n};$

$$A_2L = A_1A_2\cos\angle A_1A_2O = a\cos\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) = a\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Знайдемо за вищезгаданим алгоритмом залежність, наприклад, між кутом нахилу бічної грані та кутом нахилу бічного ребра до площини основи піраміди, тобто між кутами α і β. Для цього в піраміді виберемо два прямокутних трикутники DOB і DOA_2, у кожному з яких $\angle O = 90^\circ$, а DO – спільний катет (мал. 3.13).

Із $\triangle DOB$: $DO = r\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tg}\alpha.$

Із $\triangle DOA_2$: $DO = R\operatorname{tg}\beta = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}\operatorname{tg}\beta.$

Отримаємо, що $\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}\operatorname{tg}\beta$, тоді

$$\boldsymbol{\operatorname{tg}\alpha\cos\frac{180^\circ}{n} = \operatorname{tg}\beta.}$$

Тепер знайдемо залежність між плоским кутом при вершині та двогранним кутом при бічному ребрі, тобто між кутами γ і δ. Розглянемо в піраміді $\triangle A_3CA_2$ $(\angle C = 90^\circ)$ і $\triangle DBA_2$ $(\angle B = 90^\circ)$. Маємо:

$\triangle A_3CA_2 \sim \triangle DBA_2$ (за гострим кутом), тоді $\angle CA_3A_2 = \frac{\gamma}{2}.$

Виберемо тепер два прямокутних трикутники A_3CA_2 $(\angle C = 90^\circ)$ і CLA_3 $(\angle L = 90^\circ)$ зі спільною стороною CA_3 (мал. 3.13), у яких ця сторона є відповідно катетом і гіпотенузою.

Із $\triangle A_3CA_2$: $CA_3 = A_2A_3\cos\angle CA_3A_2 = a\cos\frac{\gamma}{2}.$

Із ΔCLA_3: $CA_3 = \dfrac{A_3L}{\sin\angle LCA_3} = \dfrac{a\cos\dfrac{180^\circ}{n}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}$.

Отримаємо, що $a\cos\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{a\cos\dfrac{180^\circ}{n}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}$, тоді $\boldsymbol{\cos\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{\cos\dfrac{180^\circ}{n}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}}$.

Так само можна знайти всі інші формули переходу (залежності) між кутами.

Систематизуємо всі ці формули в загальному вигляді та для правильних трикутних, чотирикутних та шестикутних пірамід у таблиці.

Кути	**Загальна формула**	$\boldsymbol{n=3}$	$\boldsymbol{n=4}$	$\boldsymbol{n=6}$
$\alpha\leftrightarrow\beta$	$\operatorname{tg}\alpha\cos\dfrac{180^\circ}{n}=\operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta$	$\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\beta$
$\alpha\leftrightarrow\gamma$	$\cos\alpha=\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}$	$\sqrt{3}\cos\alpha=\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$	$\cos\alpha=\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$	$\cos\alpha=\sqrt{3}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$
$\gamma\leftrightarrow\beta$	$\sin\dfrac{\gamma}{2}=\sin\dfrac{180^\circ}{n}\cos\beta$	$2\sin\dfrac{\gamma}{2}=\sqrt{3}\cos\beta$	$\sqrt{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}=\cos\beta$	$2\sin\dfrac{\gamma}{2}=\cos\beta$
$\gamma\leftrightarrow\delta$	$\cos\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{\cos\dfrac{180^\circ}{n}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}$	$\cos\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\delta}{2}}$	$\sqrt{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{1}{\sin\dfrac{\delta}{2}}$	$2\cos\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}$
$\beta\leftrightarrow\delta$	$\operatorname{ctg}\dfrac{\delta}{2}=\sin\beta\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$	$\operatorname{ctg}\dfrac{\delta}{2}=\sqrt{3}\sin\beta$	$\operatorname{ctg}\dfrac{\delta}{2}=\sin\beta$	$\sqrt{3}\operatorname{ctg}\dfrac{\delta}{2}=\sin\beta$
$\alpha\leftrightarrow\delta$	$\cos\dfrac{\delta}{2}=\sin\alpha\sin\dfrac{180^\circ}{n}$	$2\cos\dfrac{\delta}{2}=\sqrt{3}\sin\alpha$	$\sqrt{2}\cos\dfrac{\delta}{2}=\sin\alpha$	$2\cos\dfrac{\delta}{2}=\sin\alpha$

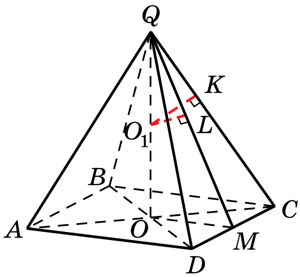
Запам'ятовувати ці формули не треба, адже ви завжди зможете скористатися наведеним вище алгоритмом і вивести потрібну вам формулу в процесі розв'язування кожної конкретної задачі.

Також звернемо увагу, що з формули $\cos\dfrac{\delta}{2}=\sin\alpha\sin\dfrac{180^\circ}{n}$ можна отримати обмеження для кута δ. Оскільки $0<\sin\alpha<1$, то $\cos\dfrac{\delta}{2}<\sin\dfrac{180^\circ}{n}$, тому $\dfrac{\delta}{2}>\arccos\left(\sin\dfrac{180^\circ}{n}\right)$, звідси маємо $\dfrac{\delta}{2}>\arccos\left(\cos\left(90^\circ-\dfrac{180^\circ}{n}\right)\right)$, $\dfrac{\delta}{2}>90^\circ-\dfrac{180^\circ}{n}$, отже, $\delta>180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}$.

Також очевидно, що $\delta < 180°$. Тому остаточно отримаємо, що $180° - \dfrac{360°}{n} < \delta < 180°$.

Задача 6. Із середини висоти правильної чотирикутної піраміди проведено перпендикуляр завдовжки a до бічного ребра та перпендикуляр завдовжки b до бічної грані. Знайти площу основи піраміди.

Розв'язання. Нехай $QABCD$ – дана піраміда (мал. 3.14), $ABCD$ – квадрат, $QO_1 = OO_1$, $O_1K = a$, $O_1L = b$. Тоді $S_{ABCD} = AB^2$.



Мал. 3.14

Позначимо $\angle QMO = \alpha$, $\angle QCO = \beta$. Тоді із $\triangle QKO_1$ і $\triangle QLO_1$ маємо:

$QO_1 = \dfrac{a}{\cos\beta} = \dfrac{b}{\cos\alpha}$, звідки

$$\frac{a^2}{\cos^2\beta} = \frac{b^2}{\cos^2\alpha}. \qquad (1)$$

Використаємо залежність між α і β (з таблиці на с. 52): $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}\operatorname{tg}\beta$, тоді $\operatorname{tg}^2\alpha = 2\operatorname{tg}^2\beta$.

Перепишемо останню рівність у вигляді $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{2\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$, звідки отримаємо, що

$$\cos^2\alpha = \frac{\cos^2\beta}{2-\cos^2\beta}. \qquad (2)$$

Тоді з рівностей (1) і (2) маємо: $\dfrac{a^2}{\cos^2\beta} = \dfrac{b^2(2-\cos^2\beta)}{\cos^2\beta}$,

тобто $\cos^2\beta = \dfrac{2b^2-a^2}{b^2}$, тоді $\cos^2\alpha = \dfrac{2b^2-a^2}{a^2}$,

а $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\dfrac{2b^2-a^2}{a^2} = \dfrac{2(a^2-b^2)}{a^2}$.

Тоді $OM = QO\operatorname{ctg}\angle QMO = \dfrac{2b}{\cos\alpha}\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{2b}{\sin\alpha}$,

$AB = 2OM = \dfrac{4b}{\sin\alpha}$; $S_{ABCD} = AB^2 = \dfrac{16b^2}{\sin^2\alpha} = \dfrac{16b^2}{\dfrac{2(a^2-b^2)}{a^2}} = \dfrac{8a^2b^2}{a^2-b^2}$.

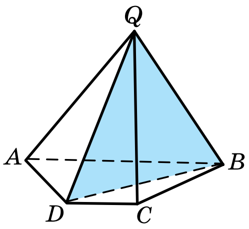
Відповідь. $\dfrac{8a^2b^2}{a^2-b^2}$.

5. Побудова перерізів піраміди

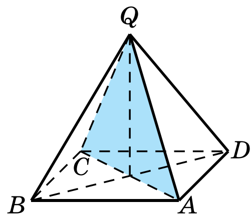
Розглянемо деякі перерізи піраміди.

Переріз піраміди, який проходить через два бічних ребра, що не лежать в одній грані, називають *діагональним перерізом піраміди*.

Наприклад, BQD – діагональний переріз чотирикутної піраміди $QABCD$ (мал. 3.15). Будь-який діагональний переріз піраміди є трикутником, одна з вершин якого є вершиною піраміди.



Мал. 3.15



Мал. 3.16

Задача 7. Знайти периметр діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює $5\sqrt{2}$ см, а бічне ребро – 7 см.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $QABCD$ – правильна чотирикутна піраміда (мал. 3.16), $ABCD$ – квадрат, $AD = 5\sqrt{2}$ см, $QA = 7$ см, трикутник AQC – діагональний переріз піраміди. Оскільки $QA = QC$, то $P_{AQC} = AC + 2QA$,

1) Оскільки $ABCD$ – квадрат, то

$AC = AD \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 10$ (см).

2) Отже, $P_{AQC} = 10 + 2 \cdot 7 = 24$ (см).

В і д п о в і д ь. 24 см.

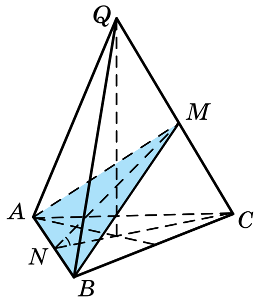
Часто в задачах розглядають переріз піраміди, що проходить через сторону основи і перетинає бічні ребра піраміди.

Задача 8. У правильній трикутній піраміді через сторону основи завдовжки 4 см перпендикулярно до бічного ребра проведено переріз. Знайти площу цього перерізу, якщо він утворює з площиною основи піраміди кут 30°.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Проведемо у правильній піраміді $QABC$ з основою ABC висоту BM бічної грані BQC (мал. 3.17).

2) $\triangle BMC = \triangle AMC$ (за двома сторонами і кутом між ними), тому $\angle AMC = \angle BMC = 90°$ і $AM = BM$.

3) Оскільки $AM \perp QC$ і $BM \perp QC$, то $(ABM) \perp QC$ (за ознакою перпендикулярності прямої і площини). Отже, трикутник ABM – шуканий переріз, площу якого треба знайти.



Мал. 3.17

4) Проведемо $CN \perp AB$. Оскільки $\triangle ABC$ – правильний, то N – середина AB.

5) Проведемо відрізок MN. Оскільки $AM = MB$, то $MN \perp AB$.

6) Маємо: $CN \perp AB$, $MN \perp AB$. Отже, $\angle MNC$ – лінійний кут двогранного кута між площиною перерізу і площиною основи, за умовою $\angle MNC = 30°$.

7) $S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MN$.

8) Оскільки $\triangle ABC$ – рівносторонній, CN – його висота, то $CN = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (см).

9) Із $\triangle MNC$ ($\angle M = 90°$): $\cos N = \frac{MN}{CN}$, тоді

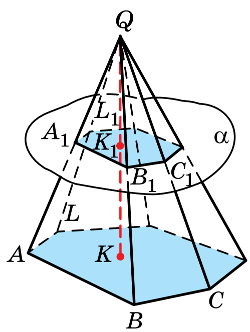
$$MN = CN \cos N = 2\sqrt{3} \cos 30° = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \text{ (см)}.$$

10) Отже, $S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$ (см^2).

Відповідь. 6 см^2.

6. Зрізана піраміда

Розглянемо довільну піраміду $QABC...L$. Проведемо площину α, яка паралельна її основі. Ця площина перетинає бічні ребра піраміди в точках A_1, B_1, C_1, ..., L_1 (мал. 3.18) і розбиває піраміду на два многогранники.



Мал. 3.18

Многогранник, паралельними гранями якого є многокутники $ABC...L$ і $A_1B_1C_1...L_1$, чотирикутники AA_1B_1B, BB_1C_1C, ..., LL_1A_1A, називають *зрізаною пірамідою*. Многокутники $ABC...L$ і $A_1B_1C_1...L_1$ називають відповідно її *нижньою* і *верхньою основами*, а чотирикутники AA_1B_1B, BB_1C_1C, ..., LL_1A_1A – *бічними гранями*. Відрізки AA_1, BB_1, CC_1, ..., LL_1 називають *бічними ребрами зрізаної піраміди*.

Зрізану піраміду з основами $ABC...L$ і $A_1B_1C_1...L_1$ позначають за назвами всіх її вершин: $ABC...LA_1B_1C_1...L_1$.

Перпендикуляр, проведений із деякої точки однієї основи до площини іншої основи, називають *висотою зрізаної піраміди*. На малюнку 3.18 відрізок KK_1 – висота зрізаної піраміди.

Оскільки площини основ зрізаної піраміди паралельні, то, за властивістю паралельних площин, $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, ..., $AL \parallel A_1L_1$, тобто дві сторони кожної бічної грані паралельні, а дві інші – не паралельні, бо їхні продовження перетинаються в точці Q. Отже,

бічними гранями зрізаної піраміди є трапеції.

Можна також довести, що

основи зрізаної піраміди – подібні многокутники.

Зрізану піраміду називають *правильною*, якщо вона отримана з правильної піраміди перетином її площиною, паралельною основі.

Основи правильної зрізаної піраміди – правильні многокутники, а бічні грані – рівні між собою рівнобічні трапеції. Висоти цих трапецій називають *апофемами зрізаної піраміди*.

Площею бічної поверхні **зрізаної піраміди називають суму площ усіх її бічних граней, а** ***площею повної поверхні*** **– суму площ усіх її граней.**

Теорема 2 (про площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди). **Площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів основ на апофему.**

Доведення. Нехай у правильній n-кутній зрізаній піраміді довжини сторін верхньої і нижньої основ відповідно дорівнюють a і b, а довжина апофеми – l.

Тоді $S_{\text{біч}} = n \cdot \dfrac{a+b}{2} \cdot l = \dfrac{na+nb}{2} \cdot l$.

Оскільки $na = P_1$ – периметр верхньої основи, а $nb = P_2$ – периметр нижньої основи, то $\dfrac{na+nb}{2} = \dfrac{P_1+P_2}{2}$ – півпериметри основ. Отже, $S_{\text{біч}} = \dfrac{P_1+P_2}{2} \cdot l$. ■

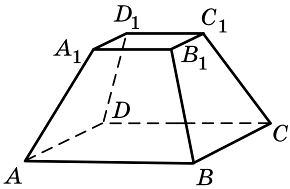
Задача 9. Сторони основ правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнюють 12 см і 2 см, а бічне ребро – 13 см. Знайдіть площу повної поверхні цієї піраміди.

Розв'язання. Нехай на малюнку 3.19 зображено дану піраміду. Тоді $S_{\text{повн}} = S_{\text{біч}} + S_1 + S_2$, де $S_{\text{біч}}$ – площа бічної поверхні, S_1 і S_2 – площі основ.

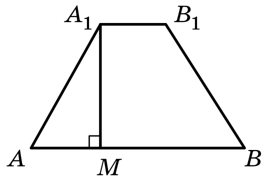
1) $S_1 = 12^2 = 144$ (см²), $S_2 = 2^2 = 4$ (см²).

2) Розглянемо бічну грань зрізаної піраміди – рівнобічну трапецію AA_1B_1B (мал. 3.20), A_1M – висота трапеції і апофема піраміди. Тоді $AM = \dfrac{AB - A_1B_1}{2} = \dfrac{12-2}{2} = 5$ (см).

3) Із $\triangle AMA_1$ ($\angle M = 90°$):



Мал. 3.19



Мал. 3.20

$$A_1M = \sqrt{AA_1^{\,2} - AM^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (см)}.$$

4) $S_{\text{біч}} = \dfrac{P_1 + P_2}{2} \cdot l = \left(\dfrac{4 \cdot 12 + 4 \cdot 2}{2}\right) \cdot 12 = 336$ (см^2).

5) Тоді $S_{\text{повн}} = 336 + 144 + 4 = 484$ (см^2).

Відповідь. 484 см^2.

А ще раніше...

Пірамідою Евклід називав «геометричну фігуру, що обмежена площинами, які від однієї площини (основи) сходяться в одній точці (вершині)». Це означення критикували ще в стародавні часи. Наприклад, Герон запропонував таке означення піраміди: «Це фігура, що обмежена трикутниками, які сходяться в одній точці, і основою якої є многокутник». Брук Тейлор назвав пірамідою многогранник, у якого всі грані, окрім однієї, сходяться в одній точці.

Французький математик А.М. Лежандр (1752–1833) у своїй праці «Початки геометрії» (1794 р.) дав піраміді таке означення: «Геометричне тіло, утворене трикутниками, що сходяться в одній точці і закінчуються на різних сторонах плоскої основи». Після цього пояснювалося поняття основи. Означення Лежандра було надмірним, оскільки містило ознаки, які можна було отримати з інших ознак.

• Який многокутник називають пірамідою? • Що називають основою, бічними гранями, вершиною та бічними ребрами піраміди? • Яку піраміду називають n-кутною? • Що називають висотою піраміди? • Що називають площею повної поверхні піраміди, а що – площею бічної поверхні? • Яку піраміду називають правильною? • Що таке вісь і апофема правильної піраміди? • Назвіть властивості правильної піраміди. • Сформулюйте та доведіть теорему про площу бічної поверхні правильної піраміди. • Що називають діагональним перерізом піраміди? • Як отримують зрізану піраміду? • Що є її бічними гранями? • Що називають висотою зрізаної піраміди? • Назвіть властивості зрізаної піраміди. • Яку зрізану піраміду називають правильною? • Що називають площею бічної поверхні і що – площею повної поверхні зрізаної піраміди? • Сформулюйте і доведіть теорему про площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

3.1. Накресліть п'ятикутну піраміду $QABCDM$ із вершиною в точці Q. Назвіть її основу, бічні грані, бічні ребра.

3.2. Накресліть чотирикутну піраміду $TKLMN$ із вершиною в точці T. Назвіть її основу, бічні грані, бічні ребра.

3.3. Скільки граней і скільки ребер має семикутна піраміда?

3.4. Скільки граней і скільки ребер має шестикутна піраміда?

3.5. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди, якщо площа однієї бічної грані піраміди дорівнює 15 см^2.

3.6. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди, якщо площа однієї бічної грані дорівнює 20 см^2.

3.7. Периметр основи правильної піраміди дорівнює 10 см, а апофема – 3 см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї піраміди.

3.8. Апофема правильної піраміди дорівнює 5 см, а периметр основи – 20 см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї піраміди.

3.9. Площа повної поверхні піраміди дорівнює 250 см^2, а площа її бічної поверхні – 200 см^2. Знайдіть площу основи піраміди.

3.10. Площа основи піраміди дорівнює 16 см^2, а площа бічної поверхні – 30 см^2. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.11. Чи існує піраміда, у якої кількість ребер дорівнює:
1) 13; 2) 16; 3) 2011; 4) 2012?

3.12. Чи існує піраміда, у якої кількість ребер дорівнює:
1) 12; 2) 13; 3) 2008; 4) 2009?

3.13. Сторона основи правильної восьмикутної піраміди дорівнює 5 см, а апофема – 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.14. Апофема правильної шестикутної піраміди дорівнює 7 см, а сторона основи – 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.15. Сторони основ правильної восьмикутної зрізаної піраміди дорівнюють 5 см і 3 см, а апофема – 7 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.16. Сторони основ правильної шестикутної зрізаної піраміди дорівнюють 6 см і 2 см, а апофема – 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

2 **3.17.** Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 5 см, а сторона основи – 4 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.18. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 2 см, а апофема – 3 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.19. Знайдіть суму всіх плоских кутів чотирикутної піраміди.

3.20. Знайдіть суму всіх плоских кутів трикутної піраміди.

3.21. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 8 см, а висота – 5 см. Знайдіть площу перерізу піраміди, що проходить через її висоту і бічне ребро.

3.22. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює $3\sqrt{2}$ см, а висота – 8 см. Знайдіть площу діагонального перерізу цієї піраміди.

3.23. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює $4\sqrt{2}$ см і утворює кут $45°$ із площиною основи. Знайдіть висоту піраміди та сторону її основи.

3.24. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює $4\sqrt{3}$ см і утворює кут $60°$ із площиною основи. Знайдіть висоту піраміди та сторону її основи.

3.25. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює $6\sqrt{3}$ см і утворює кут $60°$ із висотою піраміди. Знайдіть висоту піраміди та площу її основи.

3.26. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює $6\sqrt{2}$ см і утворює кут $45°$ із висотою піраміди. Знайдіть висоту піраміди та периметр її основи.

3.27. Бічне ребро правильної шестикутної піраміди дорівнює $2\sqrt{3}$ см і утворює кут $30°$ із площиною основи. Знайдіть висоту піраміди та периметр її основи.

3.28. Бічне ребро правильної шестикутної піраміди дорівнює $\sqrt{3}$ см і утворює кут $30°$ із висотою піраміди. Знайдіть висоту піраміди та площу її основи.

3.29. Бічне ребро правильної шестикутної піраміди дорівнює 4 см, а плоский кут при вершині дорівнює $60°$. Знайдіть площу основи піраміди.

3.30. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см, а плоский кут при вершині дорівнює $60°$. Знайдіть площу основи піраміди.

3.31. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а двогранний кут при основі дорівнює $45°$. Знайдіть апофему піраміди та площу основи піраміди.

3.32. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює $2\sqrt{3}$ см, а двогранний кут при основі – $60°$. Знайдіть висоту піраміди та сторону основи піраміди.

3.33. Апофема правильної шестикутної піраміди дорівнює $4\sqrt{3}$ см і утворює кут $60°$ із висотою. Знайдіть висоту піраміди та сторону основи піраміди.

3.34. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює $8\sqrt{3}$ см і утворює кут $30°$ з апофемою. Знайдіть апофему піраміди та площу основи піраміди.

3.35. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює $6\sqrt{3}$ см і утворює кут $30°$ з апофемою. Знайдіть апофему піраміди та сторону основи піраміди.

3.36. Апофема правильної шестикутної піраміди дорівнює $6\sqrt{2}$ см і утворює кут $45°$ із висотою піраміди. Знайдіть висоту піраміди та сторону основи піраміди.

3.37. Намет являє собою правильну чотирикутну піраміду, усі вісім ребер якої – по 2 м. Скільки $м^2$ тканини використано для пошиття такого намету (округліть до десятих $м^2$).

3.38. Піраміда Мефферта – іграшка у формі тетраедра, усі ребра якого – по 9 см. Обчисліть площу повної поверхні цієї іграшки (округліть до десятих $см^2$).

3.39. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см, а основою висоти піраміди є точка перетину діагоналей цього прямокутника.

1) Доведіть, що всі бічні ребра піраміди між собою рівні.
2) Знайдіть висоту піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює 13 см.

3.40. Основою піраміди є ромб із діагоналями 32 см і 18 см, а основою висоти піраміди є точка перетину діагоналей ромба. Знайдіть бічні ребра піраміди, якщо її висота дорівнює 12 см.

3 **3.41.** У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює $4\sqrt{3}$ см і утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть площу основи піраміди та її апофему.

3.42. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює $5\sqrt{2}$ см і утворює з площиною основи кут $45°$. Знайдіть площу основи піраміди та її апофему.

3.43. У правильній чотирикутній піраміді бічні грані утворюють із площиною основи кути по $30°$. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо апофема піраміди дорівнює $2\sqrt{3}$ см.

3.44. У правильній трикутній піраміді бічні грані утворюють із площиною основи кути $60°$. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо сторона основи піраміди дорівнює 4 см.

3.45. Піраміда Хеопса в Єгипті являє собою правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої приблизно дорівнює 230 м, а бічне ребро – 225 м. Знайдіть з точністю до десятих метра висоту піраміди Хеопса.

3.46. Піраміда Хефрена в Єгипті являє собою правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої приблизно дорівнює 210,5 м, а висота – 136,4 м. Знайдіть з точністю до десятих метра довжину бічного ребра піраміди Хефрена.

3.47. Сторони основ правильної шестикутної зрізаної піраміди дорівнюють 8 см і 2 см, а бічне ребро утворює зі стороною більшої основи кут $45°$. Знайдіть площу бічної поверхні цієї піраміди.

3.48. Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 11 см і 3 см, а бічне ребро утворює зі стороною меншої основи кут $135°$. Знайдіть площу бічної поверхні цієї піраміди.

3.49. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою 8 см і бічною стороною 5 см. Бічні грані піраміди, що містять бічні сторони рівнобедреного трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя нахилена до неї під кутом 60°. Знайдіть висоту піраміди.

3.50. Основою піраміди є рівносторонній трикутник зі стороною 8 см. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а третя нахилена до неї під кутом 30°. Знайдіть висоту піраміди.

3.51. У правильній трикутній піраміді площа бічної поверхні дорівнює 24 см^2, а плоский кут при вершині – 90°. Знайдіть площу основи піраміди.

3.52. У правильній чотирикутній піраміді площа бічної поверхні дорівнює $24\sqrt{3}$ см^2, а плоский кут при вершині – 60°. Знайдіть площу основи піраміди.

3.53. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під однаковим кутом. Знайдіть бічні ребра піраміди, якщо її висота дорівнює 19,5 см.

3.54. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 4 см, 13 см і 15 см. Усі бічні ребра піраміди – по $12\frac{1}{8}$ см. Знайдіть висоту піраміди.

3.55. Доведіть, що у правильній трикутній піраміді будь-які два мимобіжних ребра взаємно перпендикулярні.

3.56. У правильній трикутній піраміді $QABC$ сторона основи дорівнює $3\sqrt{3}$ см, а висота – 8 см. M – середина ребра QC. Знайдіть площу перерізу ABM.

3.57. У правильній трикутній піраміді $QABC$ сторона основи дорівнює 8 см, а апофема – 3 см. Через пряму AB проведено переріз перпендикулярно до ребра QC. Знайдіть площу цього перерізу.

3.58. $QABCD$ – правильна чотирикутна піраміда, у якої бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 60°. Точка E – середина ребра QC. Знайдіть відношення площі діагонального перерізу піраміди до площі перерізу площиною BDE.

3.59. $QABCD$ – правильна чотирикутна піраміда, точка E – середина ребра QC. Площа діагонального перерізу піраміди дорівнює площі перерізу піраміди площиною BDE. Знайдіть кут нахилу бічного ребра до площини основи.

3.60. Усі ребра правильної n-кутної піраміди рівні між собою. Яких значень може набувати n?

3.61. Кут між бічним ребром і стороною основи правильної n-кутної піраміди дорівнює 48°. Яких значень може набувати n?

3.62. У правильній чотирикутній піраміді відношення площі діагонального перерізу до площі основи дорівнює $\sqrt{6} : 4$. Знайдіть градусну міру двогранного кута при основі піраміди.

3.63. У правильній чотирикутній піраміді площа бічної грані вдвічі більша за площу перерізу, що проходить через висоту і апофему піраміди. Знайдіть градусну міру двогранного кута при основі піраміди.

3.64. Чи існує піраміда, у якої сума плоских кутів при вершині перевищує суму кутів основи? Наведіть приклад.

3.65. У правильній чотирикутній піраміді діагональний переріз є правильним трикутником. Знайдіть відношення площі бічної поверхні до площі перерізу, що проходить через висоту та апофему піраміди.

3.66. У правильній чотирикутній піраміді діагональний переріз є прямокутним трикутником. Знайдіть відношення площі бічної поверхні до площі діагонального перерізу.

3.67. У правильній трикутній піраміді площа бічної поверхні вдвічі більша за площу основи. Знайдіть кут нахилу бічного ребра до площини основи.

3.68. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 2 см, а площа бічної поверхні – 18 см^2. Знайдіть кут нахилу бічної грані до площини основи.

3.69. Основою піраміди є рівнобічна трапеція з основами 30 см і 48 см і висотою 13 см. Кожне з бічних ребер трапеції дорівнює 65 см. Знайдіть висоту трапеції.

3.70. Основою піраміди є паралелограм зі сторонами 30 см і 42 см та площею 840 см^2. Висота піраміди дорівнює 10,5 см, основою висоти є точка перетину діагоналей основи. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.71. Основою піраміди є паралелограм зі сторонами 8 см і 19 см, діагоналі якого відносяться як $5 : 3$. Висота піраміди дорівнює 30 см і проходить через точку перетину діагоналей основи. Знайдіть довжини бічних ребер піраміди.

3.72. Основою піраміди $LABCD$ є квадрат $ABCD$ зі стороною 4 см. Ребро BL перпендикулярне до площини основи, а ребро LA утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.73. Основою піраміди є квадрат зі стороною 4 см. Одне з бічних ребер піраміди дорівнює 3 см і перпендикулярне до площини основи. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.74. Висота трикутної піраміди дорівнює 8 см, перетинає основу та рівновіддалена від сторін основи. Сторони основи дорівнюють 25 см, 29 см і 36 см. Знайдіть двогранні кути при основі піраміди.

3.75. Висота трикутної піраміди дорівнює 1 см, перетинає основу та рівновіддалена від сторін основи. Сторони основи дорівнюють 19 см, 16 см і 5 см. Знайдіть двогранні кути при основі піраміди.

3.76. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Усі бічні грані піраміди утворюють із площиною основи кути $45°$, а висота піраміди перетинає основу. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.77. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 11 см, 25 см і 30 см. Висоти всіх бічних граней рівні між собою, а висота піраміди дорівнює 3 см і перетинає основу. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.78. Основою чотирикутної піраміди є прямокутна трапеція з гострим кутом $30°$ та середньою лінією 3 см. Усі бічні грані піраміди утворюють однакові кути із площиною основи. Знайдіть ці кути, якщо висота піраміди дорівнює 1 см.

3.79. Основою чотирикутної піраміди є прямокутна трапеція з висотою 8 см. Усі висоти бічних граней піраміди дорівнюють по 5 см. Знайдіть висоту піраміди.

3.80. Основа піраміди – трапеція, у якої одна з бічних сторін дорівнює 13 см, а паралельні сторони – 5 см і 45 см. Двогранні кути при основі рівні між собою, а висота піраміди дорівнює 8 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.81. Основою піраміди є ромб із діагоналями 40 см і 30 см. Висоти всіх бічних граней піраміди – по 13 см. Знайдіть довжину висоти піраміди.

3.82. У правильній зрізаній трикутній піраміді сторони основ дорівнюють 6 см і 3 см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом $60°$. Знайдіть висоту зрізаної піраміди.

3.83. У правильній зрізаній чотирикутній піраміді сторони основ дорівнюють 8 см і 4 см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 45°. Знайдіть бічне ребро зрізаної піраміди.

Задачі 3.84–3.97 пропонуємо розв'язати, не використовуючи таблицю зі с. 52.

3.84. У правильній чотирикутній піраміді кут нахилу бічного ребра до площини основи дорівнює 60°. Знайдіть тангенс кута нахилу бічної грані до площини основи.

3.85. У правильній трикутній піраміді кут, що утворює бічна грань із площиною основи, дорівнює 45°. Знайдіть тангенс кута, який утворює бічне ребро з площиною основи.

3.86. У правильній шестикутній піраміді кут, що утворює бічна грань із площиною основи, дорівнює 30°. Знайдіть тангенс кута нахилу бічного ребра до площини основи.

3.87. У правильній чотирикутній піраміді кут, який бічна грань утворює з площиною основи, дорівнює 60°. Знайдіть тангенс кута нахилу бічного ребра до площини основи.

3.88. У правильній трикутній піраміді кут, який бічне ребро утворює з площиною основи, дорівнює 45°. Знайдіть кут, який бічна грань утворює з площиною основи.

3.89. У правильній шестикутній піраміді кут, який бічне ребро утворює з площиною основи, дорівнює 30°. Знайдіть кут, який із площиною основи утворює бічна грань.

3.90. Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди дорівнює 60°. Знайдіть косинус кута, який бічна грань утворює з площиною основи.

3.91. Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює 60°. Знайдіть кут, що утворює бічне ребро з площиною основи.

4 **3.92.** Двогранний кут при бічному ребрі правильної трикутної піраміди дорівнює 120°. Знайдіть синус кута нахилу бічної грані до площини основи.

3.93. Двогранний кут при бічному ребрі правильної чотирикутної піраміди дорівнює 120°. Знайдіть кут, який бічна грань піраміди утворює з площиною основи.

3.94. Двогранний кут при бічному ребрі правильної чотирикутної піраміди дорівнює 120°. Знайдіть синус кута, який бічне ребро утворює з площиною основи.

3.95. Двогранний кут при бічному ребрі правильної трикутної піраміди дорівнює $90°$. Знайдіть синус кута, який утворює бічне ребро з площиною основи.

3.96. Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди дорівнює $60°$. Знайдіть двогранний кут при бічному ребрі.

3.97. Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює $60°$. Знайдіть двогранний кут при бічному ребрі піраміди.

3.98. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою 6 см і бічною стороною 5 см. Бічна грань піраміди, що містить основу трикутника, перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до площини основи під кутом $45°$. Знайдіть висоту піраміди.

3.99. Основою піраміди є рівносторонній трикутник зі стороною 4 см. Одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до площини основи під кутом $60°$. Знайдіть висоту піраміди.

3.100. Знайдіть бічну поверхню правильної трикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 6 см, якщо площина, яка проходить через сторону основи і середину висоти піраміди, нахилена до площини основи під кутом $60°$.

3.101. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює 4 см, а плоский кут при вершині дорівнює $60°$. Через одну із сторін основи перпендикулярно до протилежного бічного ребра проведено переріз. Знайдіть його площу.

3.102. У правильній шестикутній піраміді апофема утворює кут $30°$ із висотою піраміди. Знайдіть відношення площі меншого діагонального перерізу до площі більшого діагонального перерізу.

3.103. Менший діагональний переріз правильної шестикутної піраміди – правильний трикутник. Знайдіть кут нахилу бічного ребра до площини основи.

3.104. У піраміді паралельно її основі проведено два перерізи, які ділять бічне ребро на три рівні частини. Знайдіть площі цих перерізів, якщо різниця площ дорівнює 12 см^2.

3.105. У піраміді паралельно її основі проведено два перерізи, відстані від яких до вершини піраміди відносяться як $5:8$, а сума площ перерізів дорівнює 178 см^2. Знайдіть площі перерізів.

3.106. Через сторону основи правильної чотирикутної піраміди і точку перетину медіан протилежної бічної грані проведено переріз.

1) Доведіть, що цей переріз є рівнобічною трапецією.

2) Знайдіть площу основи піраміди, якщо площа перерізу дорівнює 16 см^2, а висота трапеції, що є перерізом, – 4 см.

3.107. Через сторону основи правильної чотирикутної піраміди і точку перетину висот протилежної бічної грані проведено переріз.

1) Доведіть, що цей переріз є рівнобічною трапецією.

2) Знайдіть площу цього перерізу, якщо сторона основи піраміди дорівнює 6 см, а бічне ребро – 5 см.

3.108. Через сторону основи правильної чотирикутної піраміди та центр кола, описаного навколо протилежної їй бічної грані, проведено переріз.

1) Доведіть, що цей переріз є рівнобічною трапецією.

2) Знайдіть площу цього перерізу, якщо сторона основи дорівнює 6 см, а бічне ребро – 5 см.

3.109. Бічні ребра піраміди завдовжки 2 см, 4 см і 16 см попарно перпендикулярні. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.110. Сторона основи правильної шестикутної піраміди дорівнює 16 см, а бічне ребро – 17 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через центр основи паралельно бічній грані.

3.111. Бічна грань правильної чотирикутної піраміди належить горизонтальній площині α. Площа основи піраміди дорівнює 36 см^2, а площа бічної поверхні – 60 см^2. На якій висоті над площиною α міститься найвища точка піраміди?

3.112. Основою піраміди є ромб, площа якого дорівнює $24\sqrt{3}$ см^2, а гострий кут – 60°. Основою висоти піраміди є точка перетину діагоналей ромба. Піраміду поклали бічною гранню на горизонтальну площину β. На якій висоті над площиною β міститься найвища точка піраміди, якщо площа бічної поверхні піраміди дорівнює $30\sqrt{3}$ см^2.

3.113. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро b утворює з площиною основи кут α. Через діагональ основи проведено площину паралельно бічному ребру. Знайдіть площу утвореного перерізу.

3.114. Основою піраміди є квадрат. Одне з бічних ребер піраміди перпендикулярне до площини основи. Площі діагональних перерізів піраміди дорівнюють 3 дм^2 і 5 дм^2. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.115. Основою піраміди є ромб із діагоналями 15 см і 20 см. Бічне ребро завдовжки 9 см перпендикулярне до площини основи. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.116. Площі основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 90 см^2 і 360 см^2. Знайдіть площу паралельного основам перерізу піраміди, проведеного через точку перетину її діагоналей.

3.117. Площі основ зрізаної піраміди дорівнюють 25 см^2 і 49 см^2. Знайдіть площу перерізу, який проходить через середину одного з бічних ребер паралельно основам піраміди.

3.118. Кола, описані навколо всіх граней правильної чотирикутної піраміди, рівні між собою. Знайдіть градусну міру кута між бічним ребром і площиною основи піраміди.

3.119. У правильній чотирикутній піраміді $QABCD$ сторона основи дорівнює a, бічне ребро – l. Побудуйте переріз піраміди, що проходить через середини сторін AB і BC паралельно ребру QB, та знайдіть площу цього перерізу.

3.120. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 10 см, а бічне ребро – 13 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через сторону основи перпендикулярно до протилежної бічної грані.

3.121. Усі плоскі кути при вершині трикутної піраміди – прямі. Доведіть, що висота піраміди проходить через точку перетину висот основи.

3.122. У правильній трикутній піраміді сума кута нахилу апофеми до площини основи та кута нахилу бічного ребра до площини основи дорівнює 45°. Знайдіть ці кути.

3.123. Правильну трикутну піраміду перетинає площина, яка проходить через її бічне ребро і висоту. У перерізі утворився трикутник із кутом 45° при вершині піраміди. Знайдіть кут між бічною гранню і площиною основи піраміди.

3.124. Через вершину C основи ABC правильної трикутної піраміди $QABC$ проведено площину, що перпендикулярна до бічного ребра QA. Ця площина утворює з площиною основи кут, косинус якого дорівнює $\frac{2}{3}$. Знайдіть косинус кута між двома бічними гранями.

3.125. Основою піраміди є квадрат. Двогранні кути при основі піраміди відносяться як $1:2:7:2$. Знайдіть ці кути.

3.126. Відношення площі повної поверхні правильної n-кутної піраміди до площі основи дорівнює t. Знайдіть кут між бічним ребром і площиною основи.

3.127. Бічне ребро правильної трикутної піраміди утворює зі стороною основи кут μ. Знайдіть кут між бічним ребром і висотою піраміди та допустимі значення μ.

3.128. Плоский кут при вершині правильної шестикутної піраміди дорівнює куту нахилу бічного ребра до площини основи. Знайдіть міру цього кута.

3.129. Косинус кута між двома суміжними гранями правильної чотирикутної піраміди дорівнює k. Знайдіть косинус кута між бічною гранню і площиною основи та допустимі значення k.

3.130. Кут між бічним ребром правильної чотирикутної піраміди і площиною основи дорівнює плоскому куту при вершині піраміди. Знайдіть кут між бічною гранню і площиною основи.

3.131. Середина бічного ребра правильної трикутної піраміди віддалена від центра основи на відстань m, а плоский кут при вершині дорівнює γ. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.132. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює h, а плоский кут при вершині – γ. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.133. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при бічному ребрі дорівнює $120°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо площа її діагонального перерізу дорівнює Q.

3.134. Усі діагональні перерізи правильної шестикутної піраміди рівновеликі між собою. Знайдіть двогранний кут при основі піраміди.

3.135. Двогранний кут при основі правильної шестикутної піраміди дорівнює $30°$. Обчисліть кут між площиною основи і площиною, що проходить через вершину піраміди і меншу діагональ основи.

3.136. Площа основи правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює сумі площ другої основи і двох бічних граней. Сторони основ піраміди дорівнюють a і b ($a > b$). Знайдіть довжину апофеми піраміди.

3.137. Основою піраміди $QABC$ є рівносторонній трикутник ABC зі стороною $4\sqrt{2}$. Бічне ребро QC перпендикулярне до площини основи і дорівнює 2. Знайдіть кут і відстань між мимобіжними прямими, одна з яких проходить через точку Q і середину ребра BC, а інша – через точку C і середину ребра AB.

3.138. Основою піраміди $QABC$ є рівнобедрений прямокутний трикутник ABC, у якого гіпотенуза $AB = 4\sqrt{2}$. Бічне ребро QC перпендикулярне до площини основи і дорівнює 2. Знайдіть кут і відстань між мимобіжними прямими, одна з яких проходить через точку Q і середину ребра AC, а інша – через точку C і середину ребра AB.

Життєва математика

3.139. Пришкільний газон має форму прямокутника, розмір якого – 10×15 (у метрах). Посеред нього учні зробили квітник так, що навколо квітника утворилася доріжка однакової ширини. Знайдіть ширину доріжки, якщо площа квітника – 126 м^2.

3.140. Щоб обклеїти шпалерами смугу від підлоги до стелі завширшки 1,6 м, вистачає одного рулону. Скільки рулонів шпалер треба придбати, щоб обклеїти прямокутну кімнату розміром $3,7 \times 4,6$ м?

Цікаві задачі для учнів неледачих

3.141. (*Всеукраїнська математична олімпіада школярів, 1975 р.*) В опуклому п'ятикутнику $ABCDE$ площа кожного з п'яти трикутників ABC, BCD, CDE, DEA і EAB дорівнює 1. Знайдіть площу п'ятикутника $ABCDE$.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 3

1. Одна з основ трапеції на 4 см менша за іншу, а середня лінія трапеції дорівнює 7 см. Знайдіть довжину більшої основи трапеції.

А	Б	В	Г	Д
5 см	7 см	8 см	9 см	10 см

2. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 17 см, а висота – 15 см.

А	Б	В	Г	Д
120 см^2	127,5 см^2	225 см^2	240 см^2	інша відповідь

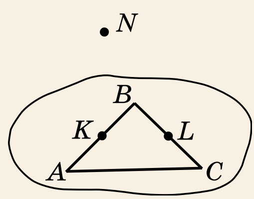
3. Відомо, що пряма b перпендикулярна до площини α, площина α паралельна прямій c. Яким може бути взаємне розміщення прямих b і c?

А	Б	В	Г	Д
паралельні або перетинаються	перетинаються або мимобіжні	мимобіжні	паралельні або мимобіжні	перетинаються

4. Знайдіть координати вектора $\vec{m}$, якщо $\vec{m} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, $B(-1; 2; 3)$, $C(0; 1; -3)$, A – довільна точка простору.

А	Б	В	Г	Д
$\vec{m}(1; -1; -6)$	$\vec{m}(-1; 3; 0)$	$\vec{m}(-1; 1; 6)$	$\vec{m}(-1; -1; 6)$	знайти неможливо

5. На малюнку зображено трикутник ABC і точки K і L, які є відповідно серединами сторін AB і BC цього трикутника. Точка N не лежить у площині трикутника ABC. Установіть відповідність між парою прямих (1–4) та випадком взаємного розміщення цих прямих у просторі (А–Д).



Пара прямих

1 KN і BC
2 KL і AC
3 KN і KL
4 NL і BC

Взаємне розміщення

А перетинаються в точці K
Б паралельні
В перетинаються в точці L
Г мимобіжні
Д перетинаються, але не в точці K і не в точці L

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AC = CB$) бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці N, $\angle ANC = 93°$. Знайдіть (у градусах) менший із кутів трикутника.

§ 4. ПРАВИЛЬНІ МНОГОГРАННИКИ

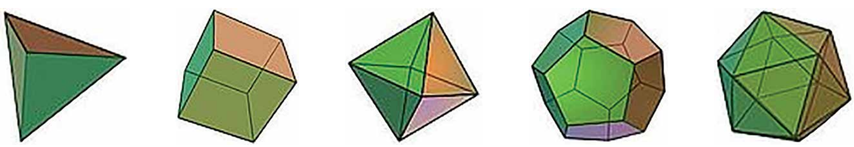
У попередніх класах уже вивчалося поняття *правильного многокутника*. Нагадаємо, що правильним многокутником називають многокутник, у якого всі сторони рівні і всі кути рівні. Аналогічно в стереометрії розглядають і поняття *правильного многогранника*.

1. Означення та властивості правильних многогранників

Опуклий *многогранник* називають *правильним*, якщо всі його грані – рівні між собою правильні многокутники, а в кожній його вершині сходиться одна й та сама кількість ребер.

Прикладом правильного многогранника є куб. Усі його грані – рівні між собою квадрати, і в кожній із восьми вершин сходиться по три ребра.

Існує нескінченно багато видів правильних многокутників. Це випливає з того, що правильний многокутник може мати будь-яку кількість сторін, не меншу за три. Натомість правильних многогранників існує усього п'ять: *правильний тетраедр*, *куб*, *октаедр* (правильний восьмигранник), *додекаедр* (правильний дванадцятигранник) та *ікосаедр* (правильний двадцятигранник) (мал. 4.1).



Правильний тетраедр *Куб* *Октаедр* *Додекаедр* *Ікосаедр*

Мал. 4.1

Кількість сторін грані, вершин і ребер та деякі інші *властивості* кожного з правильних многогранників подано в таблиці.

№	Назва правильного многогранника	Кількість сторін грані	Кількість ребер у кожній вершині	Кількість вершин	Кількість ребер	Сума плоских кутів при вершині
1	Правильний тетраедр	3	3	4	6	180°
2	Куб	4	3	8	12	270°
3	Октаедр	3	4	6	12	240°
4	Додекаедр	5	3	20	30	324°
5	Ікосаедр	3	5	12	30	300°

Доповнимо властивості правильних многогранників, які зазначено в таблиці, ще однією.

У кожному з правильних многогранників усі двогранні кути, які утворено двома гранями зі спільним ребром, рівні.

Поняття *діагоналі* розглядають для всіх правильних многогранників, крім правильного тетраедра.

Діагональ октаедра **– це відрізок, який сполучає дві вершини октаедра, які не лежать в одній грані.**

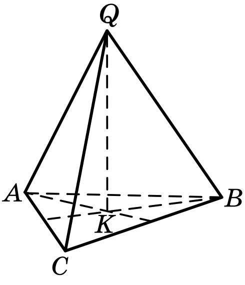
Навколишній світ дає нам багато прикладів об'єктів, що мають форму правильних многогранників. Наприклад, форму куба мають не лише відомі нам дитячі іграшки («кубики»), а й кристали кухонної солі і деякі алмази. Алмази також кристалізуються у формі октаедрів, а кристали залізного колчедану мають форму додекаедра.

2. Приклади задач із правильними многогранниками

Задача 1. Знайдіть висоти правильного тетраедра, ребро якого дорівнює a.

Розв'язання. Нехай на малюнку 4.2 зображено правильний тетраедр $QABC$ з ребром завдовжки a і висотою QK, де K – центр трикутника ABC.

1) Тоді KB – радіус описаного навколо правильного трикутника кола, тобто $KB = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Мал. 4.2

2) Із $\triangle QKB$ $(\angle K = 90°)$:

$$QK = \sqrt{QB^2 - BK^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

3) Аналогічно можна обчислити й інші висоти правильного тетраедра, але всі вони між собою рівні і дорівнюють $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Відповідь. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

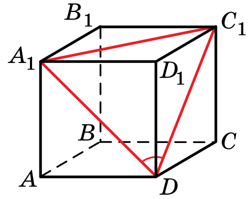
Задача 2. Знайдіть кут між діагоналями двох граней куба, що мають спільну точку.

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – даний куб (мал. 4.3). Знайдемо, наприклад, кут між діагоналями DA_1 і DC_1.

1) Проведемо відрізок A_1C_1 і розглянемо $\triangle A_1C_1D$, сторони якого є діагоналями рівних між собою квадратів, тому $A_1D = A_1C_1 = C_1D$.

2) Отже, $\triangle A_1C_1D$ – рівносторонній, тому $\angle A_1DC_1 = 60°$.

Відповідь. $60°$.



Мал. 4.3

Задача 3. Знайдіть площу S поверхні ікосаедра, ребро якого дорівнює a.

Розв'язання. 1) Усі грані ікосаедра – рівні між собою рівносторонні трикутники. Позначимо площу однієї грані через $S_{\text{гр}}$. Тоді $S_{\text{гр}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

2) Всього граней в ікосаедрі – 20. Тому

$$S = 20 \cdot S_{\text{гр}} = 20 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 5\sqrt{3}a^2.$$

Відповідь. $5\sqrt{3}a^2$.

А ще раніше...

Учення про правильні многогранники міститься в останній, XIII, книзі Евкліда «Начала». У своїй праці Евклід встановив сам факт існування цих многогранників, показав, як їх можна вписати у сферу, і довів, що, крім цих п'яти правильних многогранників, інших не існує.

Певні знання про многогранники були вже у стародавніх єгиптян, а побудову п'яти правильних многогранників античний філософ і математик Прокл (V ст.) приписував Піфагору. Проте, як було встановлено пізніше, Піфагор знав щонайбільше про гексаедр (куб), тетраедр і додекаедр. А октаедр та ікосаедр, імовірно, було відкрито тільки в IV ст. до н. е. Теететом Афінським, який перший довів існування лише п'яти правильних многогранників.

• Який многогранник називають правильним? • Які види правильних многогранників ви знаєте? • Сформулюйте, користуючись таблицею, властивості правильних многогранників. • Що називають діагоналлю октаедра?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

4.1. Знайдіть площу повної поверхні октаедра, якщо площа однієї грані дорівнює 2 дм^2.

4.2. Знайдіть площу повної поверхні куба, якщо площа однієї грані дорівнює 9 см^2.

4.3. Знайдіть площу повної поверхні куба, якщо його ребро дорівнює 2 см.

4.4. Знайдіть площу повної поверхні правильного тетраедра, ребро якого дорівнює 4 см.

4.5. Знайдіть діагональ куба, ребро якого дорівнює 1 дм.

4.6. Знайдіть площу грані куба, якщо діагональ цієї грані дорівнює 6 см.

4.7. Площа поверхні октаедра дорівнює $8\sqrt{3}$ см. Знайдіть довжину ребра октаедра.

4.8. Площа поверхні ікосаедра дорівнює $80\sqrt{3}$ см. Знайдіть довжину ребра ікосаедра.

4.9. Ребро куба дорівнює 8 см. Площа поверхні додекаедра дорівнює площі повної поверхні куба. Знайдіть площу однієї грані додекаедра.

4.10. Площа однієї грані додекаедра дорівнює 8 дм^2. Площа поверхні додекаедра дорівнює площі повної поверхні куба. Знайдіть довжину ребра куба.

4.11. Знайдіть суму всіх плоских кутів при всіх вершинах ікосаедра.

4.12. Знайдіть суму всіх плоских кутів при всіх вершинах октаедра.

4.13. $QABC$ – правильний тетраедр, точка O – центр грані ABC, точки A_1, B_1, C_1 – середини ребер QA, QB і QC відповідно. Доведіть, що $QA_1B_1C_1$ – також правильний тетраедр.

4.14. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ центр Q верхньої основи сполучено з вершинами A, B, C і D. Доведіть, що $QABCD$ – правильна піраміда.

4.15. Ребро октаедра дорівнює a. Знайдіть відстань між протилежними вершинами октаедра.

4.16. Висота правильного тетраедра дорівнює 4. Знайдіть довжину його ребра.

4.17. Два правильних тетраедри мають спільну основу. Чи є многогранник, що при цьому утворився, правильним?

4.18. З однієї вершини куба проведено три діагоналі його граней, їхні кінці сполучено відрізками. Чи є правильним многогранником піраміда, ребрами якої є шість побудованих відрізків?

4.19. Чи можна побудувати переріз правильного тетраедра так, щоб отримати правильний n-кутник? Якщо відповідь позитивна, виконайте побудову для всіх можливих значень n.

4.20. Доведіть, що діагоналі октаедра перетинаються в одній точці.

4.21. Площі поверхонь правильного тетраедра і октаедра між собою рівні. Доведіть, що ребро тетраедра дорівнює діагоналі октаедра.

4 **4.22.** Знайдіть двогранні кути правильного тетраедра.

4.23. Знайдіть кути, що утворюють бічні ребра правильного тетраедра з площиною основи.

4.24. 1) Доведіть, що центри граней октаедра є вершинами куба.
2) Знайдіть ребро куба, якщо ребро октаедра дорівнює a.
3) Знайдіть площу поверхні куба.

4.25. 1) Доведіть, що центри граней куба є вершинами октаедра.
2) Знайдіть ребро октаедра, якщо ребро куба дорівнює a.
3) Знайдіть площу поверхні октаедра.

4.26. 1) Доведіть, що центри граней правильного тетраедра є вершинами правильного тетраедра.
2) Ребро даного тетраедра дорівнює a. Знайдіть площу поверхні тетраедра, вершинами якого є центри граней даного.

4.27. У якому відношенні ділить висоти правильного тетраедра точка їхнього перетину?

4.28. Доведіть, що двогранний кут правильного тетраедра і двогранний кут між двома суміжними гранями октаедра в сумі дають 180°.

4.29. Доведіть, що середини ребер правильного тетраедра є вершинами октаедра.

4.30. Ребро октаедра дорівнює a. Знайдіть площу поверхні чотирикутної призми, вершинами якої є центри граней октаедра.

4.31. Площа поверхні правильного октаедра дорівнює Q. Знайдіть площу поверхні многогранника, вершинами якого є центри граней цього октаедра.

4.32. 1) Доведіть, що переріз куба площиною, яка проходить через центр куба перпендикулярно до діагоналі куба, є правильним шестикутником.

2) Знайдіть площу цього шестикутника, якщо ребро куба дорівнює 2 см.

4.33. Доведіть, що протилежні грані октаедра паралельні. Знайдіть відстань між ними, якщо ребро октаедра дорівнює a.

4.34. *Відрізок, що сполучає середини протилежних ребер тетраедра, називають його бімедіаною*. Доведіть, що переріз правильного тетраедра площиною, яка перпендикулярна до його бімедіани та проходить через її середину, є квадратом.

4.35. *Відрізок, що сполучає вершину тетраедра із центроїдом протилежної грані, називають медіаною тетраедра*. Доведіть, що точка перетину медіан правильного тетраедра збігається з точкою перетину його бімедіан (цю точку називають *центром правильного тетраедра*).

4.36. Площа поверхні октаедра дорівнює Q. Його чотиригранні кути при вершинах зрізано площинами так, що утворився многогранник, у якого шість граней – квадрати, а вісім граней – правильні шестикутники. Знайдіть площу поверхні цього многогранника.

4.37. (*Проектне завдання*). Купіть два пакетики соку однакового об’єму: один, що має форму прямокутного паралелепіпеда, інший – правильного тетраедра. Встановіть, виконавши відповідні обчислення, на упаковку якого з пакетиків соку пішло менше матеріалу.

Життєва математика

4.38. Дослідне сільськогосподарське підприємство займається селекцією буряку. Для вирощування однієї рослини буряка потрібна площа, що має форму квадрата зі стороною 30 см. Скільки рослин буряка можна виростити на городі, що має форму квадрата зі стороною 31,5 м?

4.39. Для штукатурення стін кімнати треба придбати розфасовану в мішки штукатурну суміш із розрахунку 6 мішків суміші на 5 м^2 поверхні стін. Ширина кімнати – 3,3 м, довжина – 5 м, а висота – 2,7 м. Кімната має одні двері та одне вікно. Ширина дверей – 0,9 м, висота – 2 м, ширина вікна – 2 м, висота – 1,75 м. Скільки мішків сухої суміші доведеться придбати, якщо стіни треба штукатурити повністю (від підлоги до стелі)?

Цікаві задачі для учнів неледачих

4.40. (*Національна олімпіада Болгарії, 1966 р*). Доведіть, що в будь-якому тетраедрі знайдуться три ребра, що виходять з однієї вершини, з яких можна побудувати трикутник.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

4.41. Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює:
1) 3 дм; 2) 5 см.

4.42. Знайдіть площу круга, радіус якого дорівнює:
1) 7 см; 2) 4 дм.

4.43. У колі, радіус якого дорівнює 13 см, проведено хорду завдовжки 24 см. Знайдіть відстань від центра кола до хорди.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 4

1. Діагональ прямокутника дорівнює 12 см. Знайдіть меншу сторону прямокутника, якщо його діагоналі перетинаються під кутом 60°.

А	Б	В	Г	Д
4 см	6 см	$6\sqrt{3}$ см	9 см	неможливо визначити

2. Сторона *AB* ромба *ABCD* належить площині α, а сторона *CD* їй не належить. Як розміщена пряма *CD* відносно площини α?

А	Б	В	Г	Д
паралельна або перетинає	перпендикулярна	паралельна	перетинає або перпендикулярна	перетинає

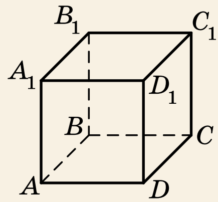
3. У правильній чотирикутній призмі діагональ основи дорівнює $5\sqrt{2}$ см, а бічне ребро – 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

А	Б	В	Г	Д
160 см^2	$40\sqrt{2}$ см^2	$160\sqrt{2}$ см^2	80 см^2	інша відповідь

4. Укажіть градусну міру кута між векторами $\vec{a}(-1;\ 2;\ 4)$ і $\vec{b}(8;\ 0;\ 2)$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
0°	30°	45°	60°	90°

5. На малюнку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установіть відповідність між заданим кутом (1–4) та його градусною мірою (А–Д).



Заданий кут

1 між прямими A_1B_1 і CD
2 між прямими A_1D і DC
3 між прямою C_1D і площиною ABC
4 між площинами A_1AC і BB_1D

Градусна міра

А 0°
Б 30°
В 45°
Г 60°
Д 90°

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1					
2					
3					
4					

6. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, відноситься до основи трикутника як 2 : 3, бічна сторона трикутника дорівнює 20 см. Знайдіть периметр трикутника у см.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 1

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. У призмі площа бічної поверхні дорівнює 24 см², а площа повної поверхні – 36 см². Знайдіть площу основи.

А. 60 см² **Б.** 12 см² **В.** 6 см² **Г.** 4 см²

2. Один із кутів чотирикутника, який є основою паралелепіпеда, дорівнює 100°. Укажіть значення, якому може дорівнювати інший кут цього чотирикутника.

А. 120° **Б.** 110° **В.** 90° **Г.** 80°

3. Знайдіть площу однієї грані правильного тетраедра, якщо площа повної поверхні тетраедра дорівнює 48 см².

А. 24 см² **Б.** 8 см² **В.** 12 см² **Г.** 16 см²

4. Висота похилої призми дорівнює 6 см. Знайдіть бічне ребро призми, якщо воно утворює кут 45° із площиною основи.

А. $6\sqrt{2}$ см **Б.** 6 см **В.** 12 см **Г.** $6\sqrt{3}$ см

5. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 12 см, а висота – 4 см. Знайдіть площу діагонального перерізу паралелепіпеда.

А. 20 см^2 **Б.** 48 см^2 **В.** 52 см^2 **Г.** 136 см^2

6. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 5 см, а сторона основи – 8 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

А. 80 см^2 **Б.** 144 см^2

В. 224 см^2 **Г.** $(60 + 16\sqrt{3})$ см^2

3 **7.** У правильній трикутній призмі медіана основи дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми, якщо діагональ бічної грані утворює кут 45° із висотою призми.

А. 16 см^2 **Б.** 36 см^2 **В.** 96 см^2 **Г.** 48 см^2

8. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 3 см і 4 см. Усі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом 60°. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

А. 18 см^2 **Б.** 12 см^2 **В.** 24 см^2 **Г.** 20 см^2

9. У правильній чотирикутній зрізаній піраміді радіуси кіл, вписаних в основи, дорівнюють 4 см і 6 см, а бічне ребро утворює кут 30° із висотою піраміди. Знайдіть висоту зрізаної піраміди.

А. $2\sqrt{2}$ см **Б.** $2\sqrt{3}$ см **В.** $2\sqrt{6}$ см **Г.** 4 см

4 **10.** Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площа якого – 24 см^2. Площі діагональних перерізів паралелепіпеда дорівнюють 30 см^2 і 40 см^2. Знайдіть висоту паралелепіпеда.

А. 4 см **Б.** 3 см **В.** 6 см **Г.** 5 см

11. Бічне ребро похилої трикутної призми дорівнює 20 см. Дві бічні грані призми взаємно перпендикулярні, а їхнє спільне ребро віддалене на 7 см і 24 см від двох інших бічних ребер. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

А. 620 см^2 **Б.** 1120 см^2 **В.** 560 см^2 **Г.** 1680 см^2

12. Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює 60°. Знайдіть двогранний кут при бічному ребрі піраміди.

А. $2\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ **Б.** $\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

В. $2\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ **Г.** $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 1–4

1 **1.** У призмі площа бічної поверхні дорівнює 28 см^2, а площа основи – 12 см^2. Знайдіть площу повної поверхні призми.

2. Чи є паралелепіпедом чотирикутна призма, основа якої – чотирикутник, кути якого відповідно дорівнюють:
1) 30°; 150°; 30°; 150°; 2) 20°; 160°; 30°; 150°?

3. Знайдіть площу повної поверхні правильного тетраедра, площа однієї грані якого дорівнює 5 см^2.

2 **4.** Бічне ребро похилої призми дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть висоту цієї призми.

5. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 7 см і 24 см, а висота – 5 см. Знайдіть:
1) площу діагонального перерізу паралелепіпеда;
2) площу повної поверхні паралелепіпеда.

6. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 5 см, а сторона основи – 6 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3 **7.** У правильній чотирикутній призмі діагональ основи дорівнює $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми, якщо діагональ призми утворює з бічним ребром кут 45°.

8. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Усі бічні ребра піраміди дорівнюють 13 см. Знайдіть висоту піраміди.

4 **9.** Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм із тупим кутом 150° і площею 15 см^2. Площі бічних граней паралелепіпеда дорівнюють 20 см^2 і 24 см^2. Знайдіть висоту паралелепіпеда.

Додаткові завдання

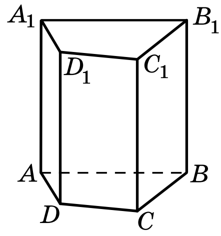
3 **10.** У правильній зрізаній трикутній піраміді сторони основ дорівнюють 9 см і 6 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть висоту зрізаної піраміди.

11. У похилій трикутній призмі дві бічні грані взаємно перпендикулярні. Їхнє спільне ребро віддалене на 8 см і 15 см від двох інших бічних ребер. Знайдіть довжину бічного ребра призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює 200 см^2.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 1

До § 1

1 **1.** Укажіть основи, бічні грані, сторони основ, бічні ребра та вершини призми, зображеної на малюнку 4.4.



Мал. 4.4.

2. Скільки бічних ребер і граней у шестикутній призмі?

3. Площа повної поверхні призми дорівнює 24 см², а площа основи дорівнює 5 см². Знайдіть площу бічної поверхні призми.

4. У трикутній призмі всі бічні грані між собою рівні. Знайдіть площу однієї такої грані, якщо площа бічної поверхні призми дорівнює 27 см².

2 **5.** Визначте кількість сторін многокутника, що є основою призми, якщо у призми: 1) 15 граней; 2) 9 ребер.

6. Основою прямої призми є правильний шестикутник зі стороною 5 см. Діагональ бічної грані дорівнює 13 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

7. У правильній трикутній призмі сторона основи дорівнює 2 дм, а площа бічної поверхні в $\sqrt{3}$ разів більша за площу основи. Знайдіть бічне ребро призми.

8. Проекція бічного ребра на площину основи похилої призми дорівнює $5\sqrt{2}$ см. Знайдіть бічне ребро призми, якщо воно утворює з площиною основи кут 45°.

9. Основою прямої призми є ромб зі стороною 6 см і гострим кутом 60°. Знайдіть площі діагональних перерізів призми, якщо її бічне ребро дорівнює 5 см.

3 **10.** Через сторону основи правильної трикутної призми під кутом 30° до основи проведено переріз, який перетинає бічне ребро. Знайдіть сторону основи призми, якщо площа перерізу дорівнює 8 см².

11. Основою прямої чотирикутної призми є прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює 6 см, а діагональ – 10 см. Діагональ бічної грані, що містить більшу сторону основи, нахилена до площини основи під кутом 45°. Знайдіть площу повної поверхні призми.

12. Висота ромба, що є основою прямої призми, дорівнює 1 дм. Площа бічної поверхні призми – 24 дм², а площа її повної поверхні – 32 дм². Знайдіть висоту призми.

13. Основою похилої призми є прямокутний трикутник із катетами 12 см і 16 см. Одна з вершин верхньої основи призми проектується в середину гіпотенузи нижньої основи. Знайдіть висоту призми, якщо її бічне ребро дорівнює 26 см.

14. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, більша основа якої дорівнює 8 см, бічна сторона – 3 см, а кут між ними – 60°. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її висота дорівнює діагоналі основи.

15. Знайдіть відношення площі діагонального перерізу правильної чотирикутної призми до площі її бічної поверхні.

4 **16.** Площа основи правильної чотирикутної призми дорівнює S, а діагональ призми утворює з бічною гранню кут γ. Знайдіть площу повної поверхні призми.

17. Площа бічної грані правильної шестикутної призми дорівнює Q. Знайдіть площі її діагональних перерізів.

18. У похилій трикутній призмі дві грані утворюють кут 60°. Їхнє спільне бічне ребро віддалене на 5 см і 8 см від двох інших бічних ребер. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 20 см.

До § 2

1 **19.** Чи є паралелепіпедом чотирикутна призма, основа якої – чотирикутник, діагоналі якого перетинаються і точкою перетину діляться навпіл?

20. Чи може бути паралелепіпедом чотирикутна призма, одна з граней якої є трапецією?

2 **21.** 1) Чи означають терміни «правильна чотирикутна призма» і «прямокутний паралелепіпед» одне й те саме?
2) Які властивості є спільними для правильної чотирикутної призми і прямокутного паралелепіпеда? А які – відмінними?

22. Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат зі стороною 1 дм. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо його діагональ дорівнює $\sqrt{6}$ дм.

23. Одна зі сторін основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює 4 см, діагональ основи – 5 см, а висота паралелепіпеда – 8 см. Знайдіть:
1) площу діагонального перерізу паралелепіпеда;
2) площу повної поверхні паралелепіпеда.

24. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм зі сторонами 3 см і 8 см та гострим кутом 60°. Знайдіть меншу діагональ паралелепіпеда, якщо вона нахилена до площини основи під кутом 60°.

25. Висота прямокутного паралелепіпеда дорівнює 5 см. Знайдіть сторони основи цього паралелепіпеда, якщо вони відносяться як 2 : 1, а сума всіх ребер паралелепіпеда дорівнює 56 см.

26. Площі діагональних перерізів прямого паралелепіпеда дорівнюють 120 см^2 і 300 см^2, а висота паралелепіпеда – 15 см. Знайдіть довжини діагоналей паралелепіпеда.

27. Основою прямого паралелепіпеда є ромб зі стороною 6 см і гострим кутом 30°. Площа повної поверхні паралелепіпеда дорівнює 132 см^2. Знайдіть:
1) площу бічної поверхні паралелепіпеда;
2) висоту паралелепіпеда.

3 **28.** У прямокутному паралелепіпеді діагональ дорівнює 13 см, а діагоналі бічних граней – 12 см і $\sqrt{133}$ см. Знайдіть:
1) сторони основи паралелепіпеда;
2) висоту паралелепіпеда;
3) площу бічної поверхні паралелепіпеда;
4) площу повної поверхні паралелепіпеда.

29. Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат, сторона якого на 2 см менша за діагональ. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда, якщо діагональ паралелепіпеда на 4 см більша за його висоту.

30. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм зі сторонами $2\sqrt{3}$ см і 4 см та гострим кутом 30°. Площа меншого з діагональних перерізів паралелепіпеда дорівнює 10 см^2. Знайдіть площу:
1) більшого діагонального перерізу;
2) площу повної поверхні паралелепіпеда.

31. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 20 см і 30 см, а діагоналі відносяться як 11 : 23. Висота паралелепіпеда дорівнює 5 см. Знайдіть площі діагональних перерізів паралелепіпеда.

4 **32.** Сторони основ прямого паралелепіпеда відносяться як 1 : 3 і утворюють кут 30°. Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 10 см, а площа повної поверхні – 172 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

33. Площа основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює 12 см^2, а площі його бічних граней – 18 см^2 і 24 см^2. Знайдіть:

1) висоту паралелепіпеда;
2) площу його діагонального перерізу.

34. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює l і утворює з площиною основи кут β. Діагональ основи утворює з однією зі сторін основи кут α. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

35. Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з його гранями кути α, β і γ. Доведіть, що $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$.

До § 3

1 **36.** Намалюйте шестикутну піраміду $SABCDEF$ з вершиною в точці S. Укажіть її основу, бічні грані та бічні ребра.

37. Скільки граней і скільки ребер має п'ятикутна піраміда?

38. Площа бічної поверхні правильної восьмикутної піраміди дорівнює 56 см^2. Знайдіть площу однієї бічної грані цієї піраміди.

39. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 5 см, а апофема – 6 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

40. Площа повної поверхні піраміди дорівнює 100 см^2, а площа її основи – 20 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

41. Сторона основи правильної п'ятикутної піраміди дорівнює 6 см, а апофема – 9 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

2 **42.** Площа основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 9 см^2, а її апофема дорівнює 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

43. Знайдіть суму всіх плоских кутів восьмикутної піраміди.

44. Сторона основи правильної шестикутної піраміди дорівнює 3 см, а висота – 8 см. Знайдіть площу діагонального перерізу піраміди, який проходить через її висоту.

45. Висота основи правильної трикутної піраміди – $6\sqrt{3}$ см, а бічне ребро утворює кут $30°$ із площиною основи. Знайдіть бічне ребро та висоту піраміди.

46. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 18 см і 24 см, а основою висоти піраміди є середина гіпотенузи цього трикутника.
1) Доведіть, що всі бічні ребра піраміди між собою рівні.
2) Знайдіть довжину бічного ребра, якщо висота піраміди дорівнює 12 см.

47. Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 7 см і 3 см, а апофема – 5 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3 **48.** У правильній чотирикутній піраміді радіус кола, вписаного в основу, дорівнює 2 см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 30°. Знайдіть апофему піраміди та площу її бічної поверхні.

49. У правильній трикутній піраміді бічні грані утворюють із площиною основи кути по 45°. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо її апофема дорівнює $\sqrt{6}$ см.

50. Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 10 см і 2 см, а бічне ребро – 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

51. Основою піраміди є квадрат зі стороною a. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а дві інші нахилені до площини основи під кутом α. Знайдіть висоту піраміди.

52. У правильній шестикутній піраміді площа бічної поверхні дорівнює 24 см^2, а плоский кут при вершині – 30°. Знайдіть площу основи піраміди.

53. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 5 см, 5 см і 8 см. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 60°. Знайдіть довжину висоти піраміди.

54. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 12 см, 10 см і 10 см. Усі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом 60°. Знайдіть:

1) висоту піраміди; 2) площу бічної поверхні піраміди.

55. Основою піраміди є рівнобічна трапеція з основами 4 см і 16 см. Висоти всіх бічних граней трапеції дорівнюють 5 см. Знайдіть довжину висоти піраміди.

56. У правильній зрізаній чотирикутній піраміді сторони основ дорівнюють 10 см і 2 см, а висота дорівнює 3 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

4 **57.** Основою піраміди є рівносторонній трикутник зі стороною 2 см. Одна з бічних граней – також рівносторонній трикутник, який перпендикулярний до площини основи. Обчисліть площу повної поверхні піраміди.

58. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут 60°. Через сторону основи піраміди і середину бічного ребра проведено переріз. Знайдіть його площу.

59. У правильній шестикутній піраміді бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 30°. Знайдіть тангенс кута, який бічна грань утворює з площиною основи.

60. Через сторону основи правильної трикутної піраміди перпендикулярно до протилежного бічного ребра проведено площину. Ця площина утворює з площиною основи кут, косинус якого дорівнює $\frac{2}{3}$. Знайдіть косинус кута між двома бічними гранями піраміди.

До § 4

1 **61.** Знайдіть площу повної поверхні додекаедра, якщо площа однієї грані дорівнює 5 см^2.

62. Знайдіть площу повної поверхні октаедра, ребро якого дорівнює 2 дм.

2 **63.** Площа однієї грані куба дорівнює 16 см^2. Знайдіть діагональ грані куба.

64. Площа повної поверхні правильного тетраедра дорівнює $16\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть довжину його ребра.

65. Площа повної поверхні правильного тетраедра дорівнює площі повної поверхні октаедра.
1) Знайдіть відношення площі однієї грані тетраедра до площі однієї грані октаедра.
2) Знайдіть відношення ребер тетраедра і октаедра.

66. Знайдіть суму всіх плоских кутів при всіх вершинах додекаедра.

3 **67.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Доведіть, що A_1C_1BD – правильний тетраедр.

68. Відстань від вершини октаедра до площини, що містить чотири вершини, сусідні із цією вершиною, дорівнює h. Знайдіть довжину ребра октаедра.

69. Відрізок сполучає середини двох мимобіжних ребер правильного тетраедра. Який кут він утворює з кожним із них?

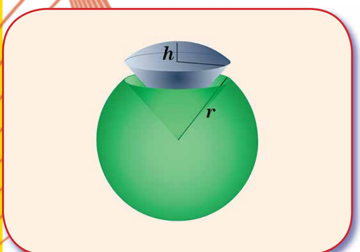
4 **70.** Знайдіть градусні міри двогранних кутів октаедра.

71. Доведіть, що трикутна піраміда з вершинами в центрах граней правильного тетраедра є також правильним тетраедром.

72. Площі поверхонь правильних тетраедра і октаедра між собою рівні. Доведіть, що ребро тетраедра дорівнює діагоналі октаедра.

РОЗДІЛ 2

ТІЛА ОБЕРТАННЯ



У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- ***познайомитеся*** з тілами обертання: циліндром, конусом, кулею, їхніми елементами та перерізами;
- ***дізнаєтеся*** про властивості тіл обертання; окремі види конусів і циліндрів;
- ***навчитеся*** будувати зображення тіл обертання та їхніх елементів, розв'язувати задачі на обчислення елементів та площ перерізів тіл обертання.

§ 5. ТІЛА І ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ. ЦИЛІНДР

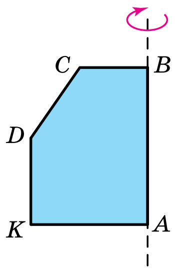
Один із видів геометричних тіл – многогранники – ми вже розглянули. Тепер роглянемо інший вид геометричних тіл – *тіла обертання*: *циліндр*, *конус* і *кулю*.

Спочатку дізнаємося, що таке тіло обертання.

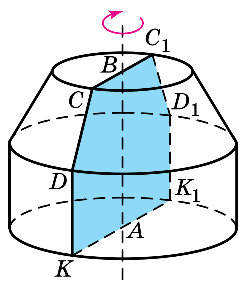
1. Тіла і поверхні обертання

Нехай деякий плоский опуклий многокутник $ABCDK$ обертають навколо нерухомої прямої, що містить одну з його сторін, наприклад навколо прямої AB (мал. 5.1). Тоді кожна точка многокутника, крім точок відрізка AB, описує коло, центр якого лежить на прямій AB. Множина всіх таких кіл утворює *тіло обертання*, а пряму AB при цьому називають *віссю тіла обертання* (мал. 5.2).

Якщо через вісь тіла обертання провести площину, то в перерізі отримаємо деяку фігуру, яку називають *осьовим перерізом тіла обертання*. Наприклад, осьовим перерізом тіла обертання, яке зображено на малюнку 5.2, є многокутник $CDKK_1D_1C_1$.



Мал. 5.1



Мал. 5.2

Поверхню, яка утворилася внаслідок обертання ламаної $BCDKA$ навколо прямої AB, називають *поверхнею обертання*.

Якщо тіло, яке утворилося внаслідок обертання многокутника $ABCDK$, перетнути площиною, перпендикулярною до прямої AB, то в перерізі отримаємо круг, центр якого лежатиме на прямій AB.

Отже, можемо сформулювати означення тіла обертання (у найпростішому випадку), яким будемо користуватися в шкільному курсі геометрії.

! ***Тілом обертання*** **називають таке геометричне тіло, перерізи якого площинами, перпендикулярними до деякої прямої (осі обертання), є кругами, центри яких лежать на цій прямій.**

Інакше кажучи, *тілом обертання називають геометричне тіло, яке утворилося внаслідок обертання деякої плоскої фігури навколо фіксованої прямої, яку називають віссю обертання.*

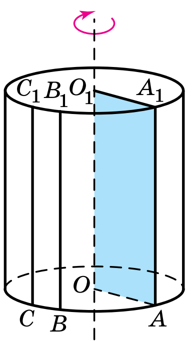
Тіла обертання оточують нас у повсякденному житті. Це, наприклад, іграшки, предмети побуту, овочі та фрукти і навіть астрономічні тіла (мал. 5.3).

Мал. 5.3

2. Циліндр

! ***Циліндром* називають геометричне тіло, яке утворилося внаслідок обертання прямокутника навколо осі, що містить одну з його сторін.**

Наприклад, на малюнку 5.4 циліндр отримали внаслідок обертання прямокутника OO_1A_1A навколо прямої, що містить сторону OO_1. Цю пряму називають *віссю циліндра*. Сторони прямокутника OA і O_1A_1 описують рівні між собою круги, що лежать у паралельних площинах. Ці круги називають *основами циліндра*, їхній радіус – *радіусом циліндра*, діаметр – *діаметром циліндра*. На малюнку 5.4 OA і O_1A_1 – радіуси циліндра. Поверхню, що утворилася внаслідок обертання сторони AA_1, паралельної осі циліндра, називають *бічною поверхнею циліндра*. Кожний відрізок цієї поверхні, що є паралельним і рівним відрізку AA_1, називають *твірною циліндра*. На малюнку 5.4 AA_1, BB_1, CC_1 – твірні



Мал. 5.4

циліндра. Відстань між площинами основ, яка дорівнює довжині твірної циліндра, називають *висотою циліндра*.

Задача 1. Прямокутник, діагональ якого дорівнює 13 см, а одна зі сторін на 7 см менша за іншу, обертається навколо своєї більшої сторони. Знайдіть радіус та висоту отриманого циліндра.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай прямокутник AOO_1A_1 обертається навколо осі OO_1, $OO_1 > OA$ (мал. 5.4).

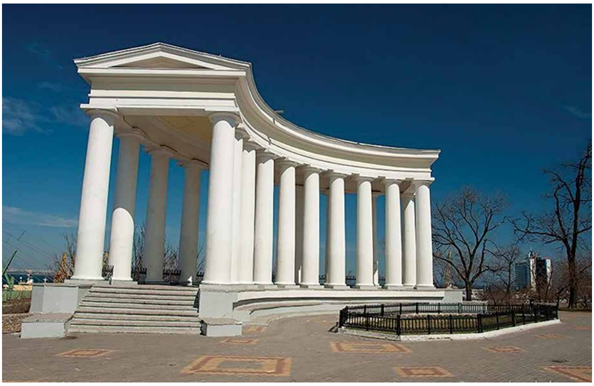
1) Нехай $OA = x$ см, тоді $OO_1 = (x + 7)$ см. За умовою $O_1A = 13$ см. Оскільки $OA^2 + OO_1{}^2 = O_1A^2$, маємо рівняння: $x^2 + (x + 7)^2 = 13^2$, тобто $x^2 + 7x - 60 = 0$, звідки отримаємо, що $x_1 = 5$; $x_2 = -12$. Отже, $OA = 5$ см – радіус циліндра.

2) Тоді $AA_1 = OO_1 = 5 + 7 = 12$ (см) – висота циліндра.

В і д п о в і д ь. 5 см; 12 см.

Зауважимо, що радіус циліндра прийнято позначати літерою r, а висоту – літерою h. Тоді відповідь до задачі 1 можна записати так: $r = 5$ см; $h = 12$ см.

Предмети, що мають форму циліндра, називають предметами циліндричної форми. До таких можна віднести певні башти, архітектурні елементи колонади, металеві або пластикові труби, парафінові свічки, залізничні цистерни, стовбури дерев тощо.

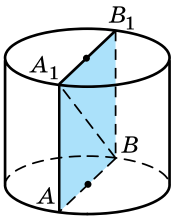


Воронцовська колонада
в Одесі

Пізанська вежа
(Італія)

3. Перерізи циліндра площиною

Переріз циліндра площиною, яка проходить через його вісь, називають *осьовим перерізом циліндра* (мал. 5.5). Осьовий переріз циліндра – прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює діаметру циліндра, а інша – його висоті. На малюнку 5.5 прямокутник ABB_1A_1 – осьовий переріз циліндра, AB – діаметр циліндра, AA_1 – твірна, що дорівнює висоті циліндра.



Мал. 5.5

Якщо осьовим перерізом циліндра є квадрат, то такий циліндр іноді називають *рівносторонній*.

Задача 2. Довжина кола основи циліндра дорівнює 15π см, а діагональ осьового перерізу – 17 см. Знайдіть твірну циліндра.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай A_1B – діагональ осьового перерізу циліндра, $A_1B = 17$ см (мал. 5.5). Знайдемо твірну AA_1.

1) Нехай радіус циліндра дорівнює r. Тоді за умовою та формулою довжини кола маємо: $2\pi r = 15\pi$.

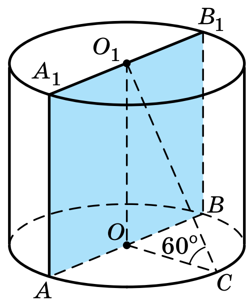
Отже, $AB = 2r = 15$ см.

2) Із $\triangle AA_1B$: $AA_1 = \sqrt{A_1B^2 - AB^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$ (см).

В і д п о в і д ь. 8 см.

Задача 3. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, дорівнює 12 см і утворює з площиною нижньої основи кут $60°$. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай на малюнку 5.6 зображено даний циліндр, AA_1B_1B – його осьовий переріз, O_1C – відрізок, що сполучає центр верхньої основи – точку O_1 із точкою C кола нижньої основи, $O_1C = 12$ см. Знайдемо $S_{AA_1B_1B}$.



Мал. 5.6

1) OC – проекція похилої O_1C на площину нижньої основи, тому $\angle O_1CO$ – кут нахилу відрізка O_1C до площини нижньої основи. За умовою $\angle O_1CO = 60°$.

2) Із $\triangle OO_1C$ ($\angle O = 90°$):

$$OO_1 = O_1C \cdot \sin C = 12 \cdot \sin 60° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ (см)};$$

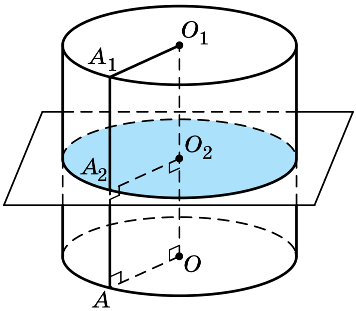
$$OC = O_1C \cdot \cos C = 12 \cdot \cos 60° = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6 \text{ (см)}.$$

3) AA_1B_1B – осьовий переріз; $AA_1 = OO_1 = 6\sqrt{3}$ см, $AO = OC = 6$ см, тоді $AB = 2 \cdot AO = 2 \cdot 6 = 12$ (см).

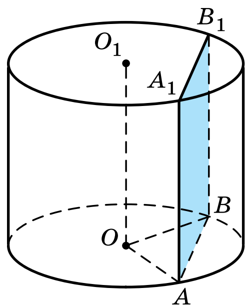
4) Отже, $S_{AA_1B_1B} = AB \cdot AA_1 = 12 \cdot 6\sqrt{3} = 72\sqrt{3}$ (см²).

Відповідь. $72\sqrt{3}$ см².

Переріз циліндра площиною, паралельною його основі, є кругом, який є рівним основі циліндра (мал. 5.7). Справді, оскільки AOO_2A_2 – прямокутник, то кожна точка A_2 твірної AA_1 віддалена від осі OO_1 на відстань A_2O_2, що дорівнює радіусу AO.



Мал. 5.7



Мал. 5.8

Переріз циліндра площиною, паралельною осі циліндра, є прямокутником. На малюнку 5.8 прямокутник AA_1B_1B – переріз циліндра площиною, паралельною його осі OO_1. Дві його сторони – AA_1 і BB_1 – твірні циліндра, а дві інші – AB і A_1B_1 – паралельні і рівні між собою хорди основ.

Задача 4. Паралельно осі циліндра проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу в 60°. Знайти периметр отриманого перерізу, якщо радіус основи циліндра дорівнює 4 см, а висота циліндра – 3 см.

Розв'язання. Нехай ABB_1A_1 – отриманий за умовою переріз циліндра (мал. 5.8), $OA = OB = 4$ см, $AA_1 = 3$ см, $\angle AOB = 60°$. Знайдемо $P_{ABB_1A_1}$.

1) Оскільки $OA = OB$, то $\triangle AOB$ – рівнобедрений і тому

$\angle OAB = \angle OBA = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$. Тоді $\triangle AOB$ – рівносторонній, тому $AB = OA = 4$ см.

2) Отже, $P_{ABB_1A_1} = 2(AA_1 + AB) = 2(3 + 4) = 14$ (см).

Відповідь. 14 см.

А ще раніше...

Поняття тіла обертання відоме ще з догрецьких часів.

В XI книзі «Начал» Евклід дає означення циліндра, розглядаючи обертання прямокутника навколо однієї його сторони, але в цій праці поняття циліндричної поверхні не згадується. Це поняття сформулював пізніше Серен з Антиної (IV ст.) у своєму трактаті «Про переріз циліндра».

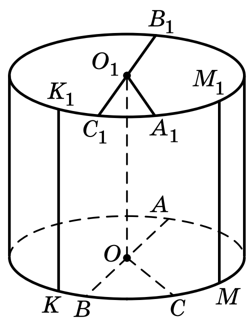
• Поясніть, що таке тіло обертання. • Що називають його віссю та осьовим перерізом? • Поясніть, що таке поверхня обертання. • Дайте означення тіла обертання. • Яке тіло називають циліндром? • Що називають його віссю, основами, радіусом і діаметром? • Що називають бічною поверхнею циліндра, твірними циліндра? • Що називають висотою циліндра? • Що називають осьовим перерізом циліндра? • Що є перерізом циліндра площиною, паралельною площині його основи? • Що є перерізом циліндра площиною, паралельною осі циліндра?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

5.1 (*Усно*). **Наведіть приклади предметів із навколишнього середовища, що мають форму циліндра.**

5.2. На малюнку 5.9 зображено циліндр, O і O_1 – центри його основ. Як називають відрізок:

1) KK_1; 2) O_1A_1; 3) AB?



Мал. 5.9

5.3. На малюнку 5.9 зображено циліндр, O і O_1 – центри його основ. Як називають відрізок:

1) MM_1; 2) B_1C_1; 3) OC?

5.4. На малюнку 5.9 зображено циліндр, O і O_1 – центри його основ, $KK_1 = 5$ см, $O_1A_1 = 6$ см. Знайдіть довжину відрізка:

1) MM_1; 2) OC; 3) AB.

5.5. На малюнку 5.9 зображено циліндр, O і O_1 – центри його основ, $AB = 8$ см, $MM_1 = 7$ см. Знайдіть довжину відрізка:

1) KK_1; 2) B_1C_1; 3) O_1A_1.

5.6. Прямокутник зі сторонами 5 см і 8 см обертається навколо більшої сторони. Знайдіть довжини радіуса, діаметра та висоти циліндра, що при цьому утворився.

5.7. Прямокутник зі сторонами 4 см і 7 см обертається навколо меншої сторони. Знайдіть довжини висоти, радіуса та діаметра циліндра, що при цьому утворився.

5.8. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 13 см. Знайдіть радіус циліндра, якщо висота циліндра – 5 см.

5.9. Радіус циліндра дорівнює 4 см, а висота – 15 см. Знайдіть діагональ осьового перерізу циліндра.

5.10. Площина, паралельна основі циліндра, перетинає його поверхню по колу, довжина якого – 8π см. Знайдіть радіус циліндра.

5.11. Циліндр, радіус якого – 5 см, перетинає площина, яка паралельна основі. Знайдіть довжину кола, по якому ця площина перетинає поверхню циліндра.

5.12. Циліндр, радіус якого – 7 см, перетинає площина, яка паралельна основі. Знайдіть площу перерізу, що при цьому утворився.

5.13. Переріз циліндра площиною, паралельною його основі, має площу 36π см^2. Знайдіть радіус циліндра.

2 **5.14.** Прямокутник, діагональ якого дорівнює 10 см і нахилена до площини основи під кутом 30°, є осьовим перерізом циліндра. Знайдіть:

1) висоту циліндра;
2) радіус циліндра;
3) довжину кола основи циліндра.

5.15. Прямокутник, діагональ якого дорівнює 12 см і нахилена до площини основи під кутом 60°, є осьовим перерізом циліндра. Знайдіть:

1) радіус циліндра;
2) висоту циліндра;
3) площу основи циліндра.

5.16. Площа основи циліндра дорівнює 144π см^2, а діагональ осьового перерізу – 25 см. Знайдіть:

1) довжину твірної циліндра;
2) площу осьового перерізу циліндра.

5.17. Довжина кола основи циліндра дорівнює 4π см, а довжина твірної – 3 см. Знайдіть:

1) діагональ осьового перерізу циліндра;
2) площу осьового перерізу циліндра.

5.18. Висота циліндра вдвічі більша за його радіус, а площа осьового перерізу циліндра дорівнює 36 см^2. Знайдіть радіус і висоту циліндра.

5.19. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює 32 см^2. Знайдіть радіус та висоту циліндра, якщо вони між собою рівні.

5.20. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, дорівнює $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть радіус та висоту циліндра, якщо вони між собою рівні.

5.21. Висота циліндра втричі більша за його радіус, а відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, дорівнює $2\sqrt{10}$ см. Знайдіть радіус та висоту циліндра.

5.22. Площа осьового перерізу рівностороннього циліндра дорівнює 36 см^2. Знайдіть площу основи циліндра.

5.23. Площа основи рівностороннього циліндра дорівнює 16π см^2. Знайдіть площу його осьового перерізу.

5.24. Довжина кола основи рівностороннього циліндра дорівнює 12π см. Знайдіть периметр осьового перерізу циліндра.

5.25. Периметр осьового перерізу рівностороннього циліндра – 40 см. Знайдіть довжину кола основи.

3 **5.26.** Висота циліндра дорівнює 10 см, а радіус основи – 5 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного паралельно осі циліндра на відстані 4 см від неї.

5.27. Висота циліндра – 6 см, а радіус основи – 5 см. Циліндр перетинає площина, паралельна його осі. Переріз, що при цьому утворився, є квадратом. Знайдіть відстань від центра основи до цього перерізу.

5.28. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 29 см, а радіус циліндра на 11 см менший за висоту циліндра. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

5.29. Діагональ осьового перерізу циліндра на 13 см більша за радіус циліндра. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, якщо його висота дорівнює 15 см, а довжина радіуса є цілим числом сантиметрів.

5.30. Діагональ перерізу циліндра, який паралельний його осі, дорівнює 10 см і утворює з площиною основи кут 30°. Переріз відтинає від кола основи дугу в 120°. Знайдіть:

1) висоту циліндра;
2) площу перерізу циліндра;
3) радіус циліндра;
4) площу основи циліндра.

5.31. Діагональ перерізу циліндра, який паралельний його осі, дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут $60°$. Переріз відтинає від кола основи дугу в $60°$. Знайдіть:
1) висоту циліндра;
2) площу перерізу циліндра;
3) радіус циліндра;
4) довжину кола основи.

5.32. Перерізом циліндра площиною, паралельною його осі, є квадрат, що відтинає від кола основи дугу в $90°$. Знайдіть відстань від осі циліндра до цього перерізу, якщо висота циліндра дорівнює 8 см.

5.33. Паралельно осі циліндра на відстані 3 см від неї проведено переріз, який відтинає від кола основи дугу в $90°$. Знайдіть площу отриманого перерізу, якщо висота циліндра дорівнює 5 см.

5.34. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, дорівнює l і утворює з віссю циліндра кут β. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

5.35. Радіус циліндра дорівнює r. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

5.36. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 10 см. Паралельно осі циліндра проведено переріз, що є квадратом, площа якого – 36 см^2. Знайдіть довжину кола основи циліндра.

5.37. Осьовий переріз циліндра – квадрат, діагональ якого дорівнює $5\sqrt{2}$ см. Паралельно осі циліндра проведено переріз, діагональ якого дорівнює 13 см. Знайдіть площу цього перерізу.

5.38. У циліндрі паралельно його осі проведено переріз, який відтинає від кола основи дугу в $120°$. Знайдіть відстань від центра основи до площини перерізу, якщо висота циліндра дорівнює 10 см, а площа перерізу – 60 см^2.

5.39. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу в $120°$. Твірна циліндра дорівнює 10 см, а відстань від центра основи до січної площини – 2 см. Знайдіть площу перерізу.

5.40. Периметр і діагональ осьового перерізу циліндра відповідно дорівнюють 46 см і 17 см. Знайдіть площу осьового перерізу.

5.41. Діагональ і периметр осьового перерізу циліндра відповідно дорівнюють 25 см і 62 см. Знайдіть площу осьового перерізу.

5.42. Висота циліндра дорівнює h. На відстані d від осі циліндра, паралельно їй, проведено переріз. Знайдіть площу цього перерізу, якщо площа осьового перерізу циліндра дорівнює Q.

5.43. Радіус і висота циліндра дорівнюють відповідно r і h, а площа перерізу, паралельного осі, дорівнює Q. Знайдіть відстань від осі циліндра до січної площини.

5.44. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює Q. Знайдіть площу перерізу, який проходить через одну з твірних осьового перерізу під кутом 45° до нього.

5.45. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює Q. Знайдіть площу перерізу, який проходить через одну з твірних осьового перерізу під кутом 30° до нього.

5.46. Кут між діагоналями осьового перерізу циліндра дорівнює 60°. Знайдіть відношення площі основи циліндра до площі його осьового перерізу.

5.47. Площа основи циліндра відноситься до площі його осьового перерізу як $\pi : 4$. Знайдіть кут між діагоналями осьового перерізу.

5.48. Через твірну циліндра проведено два перерізи, кут між якими – β. Один із перерізів проходить через вісь циліндра. Знайдіть відношення площ перерізів.

5.49. Через твірну циліндра проведено два взаємно перпендикулярних перерізи, площа кожного з яких дорівнює Q. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

5.50. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює Q. Знайдіть площу перерізу циліндра, який паралельний осі циліндра та віддалений від неї на відстань, що дорівнює $\frac{4}{5}$ радіуса циліндра.

5.51. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює Q. Знайдіть площу перерізу циліндра, який паралельний осі циліндра і віддалений від неї на відстань, що дорівнює половині радіуса циліндра.

4 **5.52.** Через твірну циліндра проведено два перерізи, площі яких дорівнюють 6 см^2 і 16 см^2. Кут між площинами перерізів дорівнює 60°. Знайдіть площу перерізу циліндра, який проходить через дві інші твірні цих перерізів.

5.53. Через твірну циліндра проведено перерізи, що утворюють між собою кут $120°$. Площі перерізів дорівнюють 12 см^2 і 20 см^2. Знайдіть площу перерізу циліндра, який проходить через дві інші твірні цих перерізів.

5.54. Паралельно осі циліндра проведено площину, що перетинає основу по хорді, яка стягує дугу в $90°$. Із центра іншої основи цю хорду видно під кутом $60°$. Площа перерізу, що при цьому утворився, дорівнює $4\sqrt{2}$ см^2. Знайдіть радіус циліндра.

5.55. Паралельно осі циліндра проведено площину, що перетинає основу по хорді, яка стягує дугу в $120°$. Із центра іншої основи цю хорду видно під кутом $90°$. Знайдіть радіус циліндра, якщо його висота дорівнює $2\sqrt{2}$ см.

5.56. Паралельно осі циліндра проведено переріз, діагональ якого дорівнює d і утворює з площиною основи кут α. Переріз перетинає основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом β. Знайдіть відстань від осі циліндра до площини перерізу.

5.57. Паралельно осі циліндра проведено переріз, діагональ якого утворює з площиною основи кут γ. Переріз перетинає основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом α. Знайдіть діагональ перерізу, якщо відстань від осі циліндра до площини перерізу дорівнює m.

5.58. Висота циліндра дорівнює 15 см, а радіус основи – 5 см. Кінці відрізка завдовжки 17 см лежать на колах основ. Знайдіть відстань від середини відрізка до осі циліндра.

5.59. Кінці відрізка AB завдовжки 13 см лежать на колах різних основ циліндра. Відстань від прямої AB до осі циліндра дорівнює 8 см. Знайдіть висоту циліндра, якщо радіус його основи – 10 см.

5.60. Кінці відрізка CD завдовжки 10 см належать колам різних основ циліндра, радіус якого дорівнює 5 см, а висота – 6 см. Знайдіть відстань від прямої CD до осі циліндра.

5.61. Ребро куба дорівнює a. У куб вкладено три однакових циліндри висотою a, кожний з яких дотикається до поверхні куба та до двох інших циліндрів. Знайдіть радіус циліндра.

5.62. Висота циліндра – 2 дм, а радіус основи – 7 дм. У цей циліндр під кутом до його осі вписано квадрат так, що всі його вершини належать колам основ. Знайдіть сторону квадрата.

5.63. Площина α перетинає основи циліндра по хордах завдовжки 6 см і 8 см. Знайдіть тангенс кута нахилу площини α до площини основи циліндра, якщо радіус циліндра дорівнює 5 см, а висота – 15 см.

5.64. Дві вершини прямокутника, сторони якого відносяться як $1:4$, належать одному з кіл основи циліндра, а дві інші – іншому колу. Знайдіть площу прямокутника, якщо радіус основи циліндра дорівнює 13 см, а висота – 32 см.

5.65. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Два його ребра є діаметрами основ циліндра. Знайдіть площу осьового перерізу цього циліндра.

5.66. Ребро октаедра дорівнює a. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, на поверхні якого лежать усі вершини октаедра.

Життєва математика

5.67. Щоб визначити діаметр стовбура дерева, лісник виміряв обхват стовбура за допомогою мотузки і отримав 3,8 м. Який діаметр має стовбур цього дерева (результат округліть до сотих метра)?

5.68. Щоб засіяти 1 м² газону, треба 40 г насіння газонної трави. Кілограм такого насіння коштує 80 грн. Скільки коштів треба витратити, щоб засіяти газонною травою клумбу, що має форму круга, діаметр якого – 30 м?

Цікаві задачі для учнів неледачих

5.69. (*Задача Стенфордського університету*). Периметр прямокутного трикутника дорівнює 60 дюймів, а висота, проведена до гіпотенузи, має довжину 12 дюймів. Знайдіть усі сторони трикутника.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 5

1. Градусні міри двох кутів паралелограма відносяться як 2 : 7. Знайдіть різницю цих кутів паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
20°	40°	80°	100°	120°

2. Скільки сторін має правильний многокутник, внутрішній кут якого на 120° більший за зовнішній?

А	Б	В	Г	Д
9	12	15	18	24

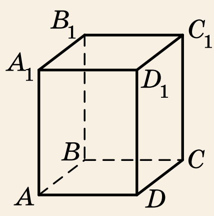
3. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із катетами 5 см і 12 см. Висота призми дорівнює радіусу кола, вписаного в основу. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

А	Б	В	Г	Д
60 см^2	120 см^2	195 см^2	240 см^2	180 см^2

4. Знайдіть модуль вектора $\vec{c}$, якщо $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a}(-2; 3; 4)$, $\vec{b}(0; 1; 5)$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	$\sqrt{5}$

5. На малюнку зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого $AB = 3$, $AD = 4$, а $AA_1 = 12$. Установіть відповідність між геометричною величиною (1–4) та її числовим значенням (А–Д).



Геометрична величина

1 діагональ паралелепіпеда
2 площа діагонального перерізу паралелепіпеда
3 сума довжин усіх ребер паралелепіпеда
4 площа повної поверхні паралелепіпеда

Числове значення

А 192
Б 144
В 76
Г 60
Д 13

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

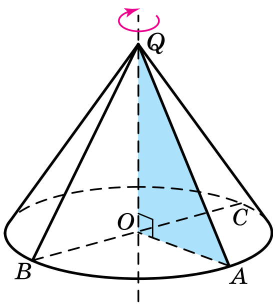
6. Два ребра трикутної піраміди, що не мають спільних точок, дорівнюють по 6 см, а всі інші ребра піраміди – по 5 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди (у см^2).

§ 6. КОНУС

1. Конус

Конусом **називають геометричне тіло, яке утворилося в результаті обертання прямокутного трикутника навколо осі, що містить один із його катетів.**

На малюнку 6.1 прямокутний трикутник QOA з прямим кутом O обертається навколо прямої, що містить його катет QO. Пряма QO є *віссю конуса*, що утворився внаслідок цього обертання. Точку Q називають *вершиною конуса*, катет QO (та його довжину) – *висотою конуса*.



Мал. 6.1

Інший катет OA цього трикутника описує круг, який називають *основою конуса*. Радіус цього круга називають *радіусом основи конуса*, діаметр – *діаметром основи конуса*. На малюнку 6.1 OA, OB, OC – радіуси основи конуса, BC – її діаметр.

Поверхню, що утворилася в результаті обертання гіпотенузи QA трикутника QOA, називають *бічною поверхнею конуса*. Кожний відрізок цієї поверхні, який сполучає вершину Q конуса з точкою кола основи, називають *твірною конуса*. На малюнку 6.1 QA і QB – твірні конуса. Усі твірні конуса між собою рівні і нахилені до площини основи під одним і тим самим кутом. Зауважимо, що радіус основи конуса прийнято позначати літерою r, висоту – літерою h, твірну – літерою l.

Задача 1. Прямокутний трикутник із гіпотенузою завдовжки 17 см обертається навколо катета, довжина якого – 8 см. Знайдіть площу основи конуса, що утворився внаслідок цього обертання.

Розв'язання. Нехай $QA = l = 17$ см, $QO = h = 8$ см (мал. 6.1). Позначимо площу основи через S та знайдемо її числове значення.

1) Із $\triangle QOA$: $OA = r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (см).

2) Тоді $S = \pi r^2 = \pi \cdot 15^2 = 225\pi$ (см^2).

В і д п о в і д ь. 225π см^2.

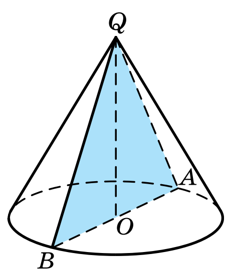
Багато предметів, що оточують нас у повсякденному житті, мають форму конуса: це деталі механізмів і машин, дахи на циліндричних баштах, лійки, купол цирку-шапіто, відра для гасіння пожежі, вафельні ріжки для морозива тощо. Предмети конічної форми досить зручні для транспортування, бо їх можна вкладати один в одного.

Башта Тракайського замку (Литовська Республіка)

Цирк-шапіто

2. Перерізи конуса площиною

Переріз конуса площиною, яка проходить через його вісь, називають *осьовим перерізом конуса* (мал. 6.2). Осьовий переріз конуса є рівнобедреним трикутником, основа якого – діаметр конуса, а бічні сторони – твірні конуса. Висота цього рівнобедреного трикутника, проведена до основи, збігається з висотою конуса. На малюнку 6.2 трикутник QBA – осьовий переріз конуса, AB – діаметр конуса, QA і QB – твірні конуса, OQ – висота конуса.



Мал. 6.2

Якщо осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник, такий конус інколи називають *рівностороннім*.

Задача 2. Довжина кола основи конуса дорівнює 8π см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо він є прямокутним трикутником.

Розв'язання. Нехай QAB – осьовий переріз конуса, $\angle BQA = 90°$ (мал. 6.2). Знайдемо S_{QAB}.

1) Позначимо $OB = OA = r$. За умовою $2\pi r = 8\pi$, тоді $r = 4$ см.

2) $\triangle QAB$ – рівнобедрений, $\angle Q = 90°$, тому

$$\angle QBO = \frac{180° - 90°}{2} = 45°.$$

3) Із $\triangle QOB$: $\angle BQO = 90° - 45° = 45°$, тому $QO = BO = 4$ см.

4) $S_{QAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot QO = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$ (см²).

Відповідь. 16 см².

Якщо конус перетнути площиною, паралельною площині його основи, то в перерізі отримаємо круг (мал. 6.3). Центр цього круга – точка O_1 лежить на осі конуса.

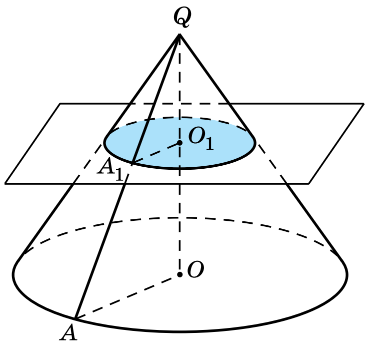
Задача 3. Висота конуса дорівнює 12 см, а радіус основи – 15 см. На відстані 4 см від вершини конуса проведено переріз площиною, паралельною основі конуса. Знайдіть радіус цього перерізу.

Розв'язання. Нехай на малюнку 6.3 зображено даний конус, у якого $OA = 15$ см, $QO = 12$ см, $QO_1 = 4$ см.

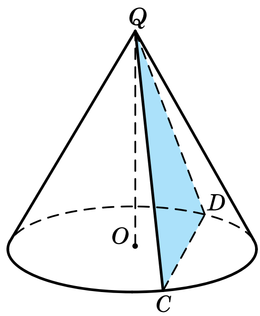
1) $\triangle QA_1O_1 \sim \triangle QAO$ (за двома кутами), тоді $\frac{QO_1}{QO} = \frac{A_1O_1}{AO}$,

отже, $A_1O_1 = \frac{QO_1 \cdot AO}{QO} = \frac{4 \cdot 15}{12} = 5$ (см).

Відповідь. 5 см.



Мал. 6.3

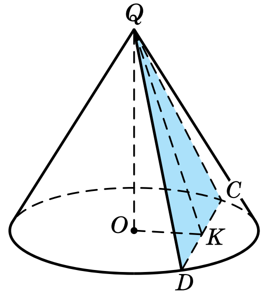


Мал. 6.4

Перерізом конуса площиною, яка проходить через вершину конуса, є рівнобедрений трикутник, бічні сторони якого є твірними конуса. На малюнку 6.4 перерізом конуса площиною, що проходить через вершину Q конуса, є трикутник QDC. Його бічними сторонами є твірні QD і QC конуса, а основою – хорда DC основи конуса.

Задача 4. Через вершину конуса проведено переріз, кут нахилу якого до площини основи дорівнює $60°$. Знайдіть висоту конуса, якщо відстань від центра основи до хорди, по якій переріз перетинає основу, дорівнює $5\sqrt{3}$ см.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай QCD – даний в умові задачі переріз конуса (мал. 6.5).



Мал. 6.5

1) $\triangle QCD$ – рівнобедрений з основою CD. Проведемо відрізок QK, що є висотою і медіаною трикутника QCD.

2) Оскільки OK – проекція похилої QK на площину основи конуса, $QK \perp CD$, то $OK \perp CD$ (за теоремою про три перпендикуляри). Отже, OK – відстань від точки O до хорди CD, $OK = 5\sqrt{3}$ см (за умовою).

3) Оскільки $QK \perp CD$ і $OK \perp CD$, то $(OQK) \perp CD$, тоді $\angle QKO$ – кут нахилу перерізу QCD до площини основи, отже, $\angle QKO = 60°$ (за умовою).

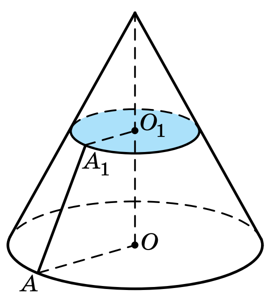
4) Із $\triangle QKO$ ($\angle O = 90°$): $\operatorname{tg} K = \dfrac{QO}{OK}$, тоді

$QO = OK \operatorname{tg} K = 5\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 60° = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 15$ (см).

В і д п о в і д ь. 15 см.

3. Зрізаний конус

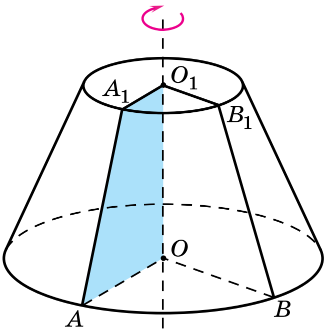
Розглянемо довільний конус і проведемо площину, паралельну його основі. Ця площина перетне конус по кругу і поділить конус на дві частини (мал. 6.6). Верхня із цих частин є конусом, а нижню називають *зрізаним конусом*. Основу початкового конуса і круг, отриманий у перерізі, називають *основами зрізаного конуса*, а відрізок, що сполучає їхні центри, – *висотою зрізаного конуса*. На малюнку 6.6 OA і O_1A_1 – *радіуси основ зрізаного конуса*, OO_1 – *висота зрізаного конуса*.



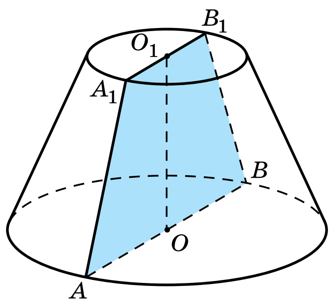
Мал. 6.6

Зрізаний конус можна розглядати і як тіло обертання, яке можна отримати внаслідок обертання прямокутної трапеції навколо прямої, що містить її меншу бічну сторону. На малюнку 6.7 прямокутна трапеція OO_1A_1A з прямими кутами O і O_1 обертається навколо прямої OO_1. Цю пряму називають *віссю зрізаного конуса*. Бічна сторона OO_1 трапеції OO_1A_1A є висотою зрізаного конуса, а основи трапеції – радіусами основ зрізаного конуса.

Поверхню, що є результатом обертання більшої бічної сторони AA_1 трапеції OO_1A_1A навколо прямої OO_1, називають *бічною поверхнею зрізаного конуса*. Кожний відрізок цієї поверхні (а також його довжину), який сполучає найближчі точки кіл основ зрізаного конуса, називають *твірними зрізаного конуса*. На малюнку 6.7 AA_1 і BB_1 – твірні зрізаного конуса. Вони між собою рівні.



Мал. 6.7



Мал. 6.8

Переріз зрізаного конуса площиною, яка проходить через його вісь, називають *осьовим перерізом зрізаного конуса* (мал. 6.8). Осьовий переріз зрізаного конуса – рівнобічна трапеція, основи якої – діаметри основ зрізаного конуса, бічні сторони – твірні зрізаного конуса, висота цієї трапеції дорівнює висоті зрізаного конуса.

Зауважимо, що радіуси більшої та меншої основ зрізаного конуса прийнято позначати відповідно через R і r, висоту – через h, а твірну – через l.

Задача 5. Твірна зрізаного конуса дорівнює 5 см, висота – 4 см, а менший із радіусів основ – 2 см. Знайдіть площу осьового перерізу зрізаного конуса.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай AA_1B_1B – осьовий переріз зрізаного конуса (мал. 6.8), $AA_1 = 5$ см, $OO_1 = 4$ см, $O_1A_1 = 2$ см.

1) Виконаємо планіметричний малюнок перерізу (мал. 6.9) і проведемо в трапеції AA_1B_1B висоту A_1K, тоді $A_1K = OO_1 = 4$ см.

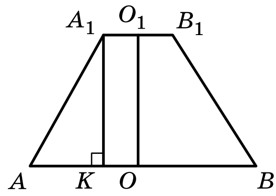
2) Із $\triangle AA_1K$ ($\angle K = 90°$):

$$AK = \sqrt{AA_1^2 - A_1K^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ (см)}.$$

Тоді $AO = AK + KO = 3 + 2 = 5$ (см).

3) $AB = 2AO = 2 \cdot 5 = 10$ (см),

$A_1B_1 = 2A_1O_1 = 2 \cdot 2 = 4$ (см).



Мал. 6.9

Отже,

$$S_{AA_1B_1B} = \frac{AB + A_1B_1}{2} \cdot A_1K = \frac{10 + 4}{2} \cdot 4 = 28 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. 28 см².

А ще раніше...

За означенням, яке дав Евклід, конус утворюється обертанням прямокутного трикутника навколо одного з катетів. У працях Евкліда не згадується про конічну поверхню. Поняття конічної поверхні було введено Аполлонієм Пергським у його праці «Конічні перерізи».

• Яке тіло називають конусом? • Що називають віссю, вершиною, висотою конуса? • Що називають основою конуса, радіусом та діаметром його основи? • Що називають бічною поверхнею конуса? • Що називають твірними конуса? • Що називають осьовим перерізом конуса? • Що є перерізом конуса площиною, паралельною площині основи конуса? • Що є перерізом конуса площиною, яка проходить через вершину конуса? • Яке тіло називають зрізаним конусом? • Що називають основами зрізаного конуса, висотою зрізаного конуса та радіусами його основ? • Обертанням якої фігури можна отримати зрізаний конус? • Що називають віссю зрізаного конуса? • Що називають бічною поверхнею зрізаного конуса, твірними зрізаного конуса? • Що називають осьовим перерізом зрізаного конуса?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

6.1. Накресліть конус, висота якого – QK, а твірна – QM.

6.2. Накресліть конус, висота якого – SK, а радіус основи – KL.

6.3. Радіус основи конуса дорівнює 8 см, а твірна – 10 см. Знайдіть висоту конуса.

6.4. Висота конуса дорівнює 24 см, а твірна – 25 см. Знайдіть радіус основи конуса.

6.5. Твірна конуса дорівнює 6 см і утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть радіус основи та висоту конуса.

6.6. Радіус основи конуса дорівнює 2 см. Твірна конуса утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть твірну та висоту конуса.

2 **6.7.** Висота конуса дорівнює 8 см, а твірна утворює з висотою кут 60°. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

6.8. Твірна конуса дорівнює 6 см і утворює з висотою кут 30°. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

6.9. Твірна конуса вдвічі довша за висоту. Який кут утворює твірна конуса із площиною основи?

6.10. Радіус основи конуса дорівнює його висоті. Який кут утворює твірна конуса з його висотою?

6.11. Осьовий переріз конуса – прямокутний трикутник із гіпотенузою 10 см. Знайдіть:
1) радіус основи конуса; 2) твірну конуса;
3) висоту конуса; 4) площу осьового перерізу конуса.

6.12. Осьовий переріз конуса – правильний трикутник зі стороною 6 см. Знайдіть:
1) радіус основи конуса; 2) твірну конуса;
3) висоту конуса; 4) площу осьового перерізу конуса.

6.13. Радіус основи конуса дорівнює 6 см. Через середину висоти конуса перпендикулярно до неї проведено переріз. Знайдіть площу цього перерізу.

6.14. Через середину висоти конуса проведено переріз, паралельний основі конуса. Радіус утвореного в перерізі круга дорівнює 4 см. Знайдіть площу основи конуса.

6.15. Унаслідок перетину конуса площиною, паралельною його основі, утворилася фігура, площа якої – 4π см². У якому відношенні переріз ділить висоту конуса, якщо радіус основи конуса дорівнює 4 см?

6.16. Діаметри основ зрізаного конуса дорівнюють 24 см і 14 см, а висота – 12 см. Знайдіть твірну цього конуса.

6.17. Твірна зрізаного конуса дорівнює 10 см, а радіуси його основ – 3 см і 9 см. Знайдіть висоту зрізаного конуса.

6.18. У зрізаному конусі твірна дорівнює 10 см і утворює з площиною більшої основи кут 60°. Знайдіть висоту зрізаного конуса та різницю радіусів його основ.

6.19. Висота зрізаного конуса дорівнює 8 см і утворює з твірною кут 45°. Знайдіть твірну конуса та різницю радіусів його основ.

6.20. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 4 см і 8 см, а твірна – 5 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

6.21. Діаметри основ зрізаного конуса дорівнюють 2 см і 14 см, а твірна – 10 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

6.22. Відношення площі основи конуса до площі осьового перерізу дорівнює π. Знайдіть кут нахилу твірної до площини основи.

6.23. Твірна конуса утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть відношення площі осьового перерізу конуса до площі його основи.

3 **6.24.** Висота конуса дорівнює 6 см, а різниця твірної і радіуса основи дорівнює 2 см. Знайдіть периметр осьового перерізу конуса.

6.25. Радіус основи конуса дорівнює 7 см, а його твірна на 1 см більша за висоту. Знайдіть периметр осьового перерізу конуса.

6.26. Прямокутний трикутник із катетами 3 см і 4 см обертається навколо катета. Знайдіть периметр осьового перерізу конуса, що при цьому утворився. Скільки розв’язків має задача?

6.27. Висота конуса дорівнює 9 см, а радіус основи – 3 см. Площина, перпендикулярна до осі конуса, перетинає його бічну поверхню по колу, довжина якого – 4π см. Знайдіть відстань від вершини конуса до площини перерізу.

6.28. Радіус основи конуса дорівнює 6 см, а висота – 18 см. Площина, паралельна основі конуса, перетинає його по кругу, площа якого – 16π см^2. Знайдіть відстань від вершини конуса до площини перерізу.

6.29. Площа меншої основи зрізаного конуса дорівнює 4π см^2, твірна дорівнює 10 см, а висота – 6 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

6.30. Довжина кола більшої основи зрізаного конуса дорівнює 22π см, висота конуса – 4 см, а твірна – 5 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

6.31. Твірна зрізаного конуса відноситься до його висоти як $5:4$. Знайдіть периметр осьового перерізу зрізаного конуса, якщо радіуси його основ дорівнюють 4 см і 10 см.

6.32. Радіуси основ зрізаного конуса відносяться як $2:5$. Знайдіть периметр осьового перерізу конуса, якщо його висота дорівнює 12 см, а твірна – 15 см.

6.33. Радіус основи конуса дорівнює 2 см, а його висота – $\sqrt{6}$ см. Через дві твірні конуса проведено переріз, який перетинає основу конуса по хорді, що стягує дугу в 60°. Знайдіть площу перерізу.

6.34. Хорда основи конуса дорівнює 3 см і стягує дугу в 90°. Через цю хорду і вершину конуса проведено переріз. Знайдіть його площу, якщо висота конуса дорівнює 2 см.

6.35. Твірна конуса дорівнює $4\sqrt{3}$ см і нахилена до площини основи під кутом 30°. Через дві твірні конуса проведено площину під кутом 60° до площини основи. Знайдіть відстань від центра основи конуса до хорди, по якій площина перерізу перетинає площину основи конуса.

6.36. Висота конуса дорівнює $3\sqrt{2}$ см і утворює з твірною кут 45°. Через дві твірні конуса, що утворюють між собою кут 60°, проведено площину. Знайдіть відстань від центра основи конуса до хорди, по якій площина перерізу перетинає площину основи конуса.

6.37. Радіус основи конуса дорівнює R, а висота конуса дорівнює радіусу основи. Через вершину конуса проведено площину, яка відтинає від основи дугу в 60°. Знайдіть площу перерізу, що при цьому утворився.

6.38. Висота конуса дорівнює h, а радіус основи конуса дорівнює його висоті. Через вершину конуса проведено площину, яка відтинає від основи дугу в 90°. Знайдіть площу перерізу, що при цьому утворився.

6.39. Через вершину конуса і хорду основи, що стягує дугу в 120°, проведено переріз, який утворює кут 45° із площиною основи. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус основи дорівнює 2 см.

6.40. Осьовий переріз конуса можна вписати в коло основи конуса. Знайдіть кут між твірною і висотою конуса.

6.41. Осьовий переріз конуса рівновеликий квадрату, побудованому на радіусі основи конуса. Знайдіть кут між твірною і висотою конуса.

6.42. Площа осьового перерізу конуса в 1,5 раза менша від площі правильного шестикутника, вписаного в основу конуса. Знайдіть кут нахилу твірної конуса до площини основи.

6.43. Периметр осьового перерізу конуса дорівнює 50 см, а висота – 5 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

6.44. Твірна конуса дорівнює 10 см, а сума довжин висоти і радіуса основи – 14 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

6.45. Висота конуса дорівнює 20 см, радіус його основи – 25 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через вершину конуса паралельно основі, якщо відстань від центра основи конуса до цього перерізу дорівнює 12 см.

6.46. Радіус основи конуса дорівнює 15 см, а відстань від середини висоти конуса до бічної поверхні – 6 см. Знайдіть твірну конуса.

6.47. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 11 см і 16 см, а твірна конуса – 13 см. Знайдіть відстань від центра меншої основи до кола більшої.

6.48. Площі основ зрізаного конуса – 4 дм^2 і 16 дм^2. Через середину його висоти паралельно основам проведено площину. Знайдіть площу перерізу, що при цьому утворився.

6.49. Через середину висоти зрізаного конуса паралельно основам проведено площину. Переріз, що утворився, має площу 9 дм^2. Площа меншої основи конуса – 1 дм^2. Знайдіть площу більшої основи.

6.50. 1) Доведіть, що навколо осьового перерізу зрізаного конуса можна описати коло.

2) Чи може це коло дорівнювати колу однієї з основ зрізаного конуса?

6.51. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 36 см і 16 см, а в його осьовий переріз можна вписати коло. Знайдіть радіус цього кола.

6.52. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 9 см і 16 см, а в його осьовий переріз можна вписати коло. Знайдіть висоту конуса.

6.53. Радіуси основ зрізаного конуса – 20 см і 30 см, а його твірна – 26 см. На яких відстанях від основ лежить точка перетину діагоналей осьового перерізу конуса?

6.54. Твірна зрізаного конуса дорівнює 25 см, а діаметри його основ – 10 см і 40 см. На яких відстанях від основ лежить точка перетину діагоналей осьового перерізу конуса?

6.55. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 2 см і 7 см, а діагональ осьового перерізу утворює з площиною більшої основи кут 30°. Знайдіть:

1) твірну зрізаного конуса;

2) площу його осьового перерізу.

6.56. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють $\sqrt{3}$ і $2\sqrt{3}$ см, а діагональ осьового перерізу утворює з площиною більшої основи кут $60°$. Знайдіть:
1) твірну зрізаного конуса;
2) площу його осьового перерізу.

4 **6.57.** Площа основи конуса дорівнює πS, а твірна конуса утворює з висотою кут β. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

6.58. Твірна конуса утворює з площиною основи кут γ, а площа осьового перерізу конуса дорівнює S. Знайдіть площу основи конуса.

6.59. Хорду основи конуса видно із центра основи під кутом β, а з вершини конуса – під кутом α. Знайдіть кут нахилу твірної конуса до площини основи.

6.60. В основі конуса проведено хорду завдовжки a, яку видно із центра основи під кутом β. Твірна конуса утворює з площиною основи кут γ. Знайдіть висоту конуса.

6.61. Висота конуса дорівнює h. Три його твірні попарно взаємно перпендикулярні. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

6.62. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює α. Через вершину конуса під кутом $\beta\left(\beta < \frac{\alpha}{2}\right)$ до його осі проведено площину. Знайдіть кут між двома твірними конуса, по яких ця площина перетинає його поверхню.

6.63. Радіус основи конуса дорівнює R, а твірна нахилена до площини основи під кутом α. Через вершину конуса проведено площину під кутом φ до його висоти. Знайдіть площу перерізу, що при цьому утворився.

6.64. Ребро октаедра дорівнює a. Його діагональ є висотою конуса, бічній поверхні якого належать чотири ребра октаедра. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

6.65. Твірна зрізаного конуса, через яку проходить осьовий переріз, перпендикулярна до діагоналі цього перерізу. Радіуси основ дорівнюють 7 см і 25 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

6.66. Довжина твірної зрізаного конуса – 25 см, висота – 24 см, а радіус однієї з основ – 12 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

6.67. Радіуси основ зрізаного конуса – 13 см і 8 см, а твірна дорівнює радіусу однієї з основ. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

6.68. У зрізаному конусі висота дорівнює 10 см, а радіуси основ – 8 см і 18 см. На якій відстані від більшої основи треба провести переріз, паралельний основам, щоб його площа була середнім пропорційним площ основ?

6.69. Твірна зрізаного конуса дорівнює сумі радіусів основ, а висота – різниці цих радіусів. Знайдіть відношення радіусів основ зрізаного конуса?

6.70. Вершина конуса збігається з вершиною октаедра, а коло основи конуса проходить через центри чотирьох граней. Ребро октаедра дорівнює a. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

6.71. Діагональ осьового перерізу зрізаного конуса ділиться його віссю на частини, що дорівнюють $\sqrt{61}$ см і $3\sqrt{61}$ см. Твірна конуса – 26 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

6.72. Твірна зрізаного конуса дорівнює 104 см, а діагональ його осьового перерізу ділиться віссю конуса на відрізки завдовжки 55 см і 105 см. Знайдіть периметр осьового перерізу конуса.

6.73. Радіус основи конуса дорівнює 9 см, а висота – 7 см. Яку найбільшу площу може мати переріз конуса площиною, проведеною через його вершину?

Життєва математика

6.74. Над площею 1 км^2 зелених насаджень у повітрі міститься на 50 т менше пилу, ніж над такою самою площею поля. На скільки менше пилу міститься над 4 га лісосмуги, ніж над такою самою площею поля?

6.75. Кімната у формі прямокутника має розмір 3,5×4,8 м. У кімнаті є двері завширшки 80 см.

1) Скільки метрів плінтуса треба придбати для цієї кімнати?

2) Скільки коштуватиме ця покупка, якщо ціна одного погонного метра плінтуса – 40 грн?

Цікаві задачі для учнів неледачих

6.76. (*Міжнародна математична олімпіада, 1961 р.*). Відомо довжини a, b, c сторін трикутника, площа якого дорівнює S. Доведіть, що $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}$. У якому випадку матимемо рівність?

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 6

1. Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, у 2 рази більший за радіус кола, вписаного у цей трикутник. Визначте вид трикутника ABC.

А	Б	В	Г	Д
гострокутний	прямокутний	прямокутний рівнобедрений	правильний	тупокутний рівнобедрений

2. Серед векторів $\vec{a}(1; -2)$, $\vec{b}(-2; -4)$, $\vec{c}(0; 1)$, $\vec{d}(1; 2)$ знайдіть пару колінеарних.

А	Б	В	Г	Д
$\vec{a}$ і $\vec{b}$	$\vec{a}$ і $\vec{c}$	$\vec{a}$ і $\vec{d}$	$\vec{b}$ і $\vec{c}$	$\vec{b}$ і $\vec{d}$

3. Радіус кола, вписаного в основу правильної трикутної призми, дорівнює $\sqrt{3}$ см, а висота призми дорівнює 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

А	Б	В	Г	Д
30 см^2	45 см^2	60 см^2	90 см^2	120 см^2

4. Діаметр циліндра утричі більший за його висоту. Знайдіть радіус циліндра, якщо діагональ його осьового перерізу дорівнює $4\sqrt{10}$ см.

А	Б	В	Г	Д
4 см	9 см	6 см	12 см	інша відповідь

5. Установіть відповідність між видом многогранника (1–4) та кількістю його ребер (А–Д).

Вид многогранника	*Кількість ребер многогранника*
1 п'ятикутна призма	**А** 12
2 паралелепіпед	**Б** 15
3 правильна десятикутна піраміда	**В** 18
4 шестикутна зрізана піраміда	**Г** 20
	Д 24

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. З вершини A прямокутника $ABCD$ проведено перпендикуляр AT до його площини. Знайдіть (у см) довжину перпендикуляра AT, якщо $TB = 15$ см, $TC = 24$ см, $TD = 20$ см.

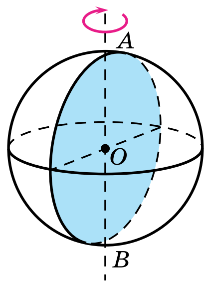
§ 7. КУЛЯ І СФЕРА

Розглянемо ще одне тіло обертання – кулю.

1. Куля і сфера

Кулею **називають геометричне тіло, яке утворилося внаслідок обертання круга навколо осі, що містить його діаметр.**

Центр і радіус круга, який обертається, називають відповідно *центром* і *радіусом кулі*, а діаметр круга – *діаметром кулі*. На малюнку 7.1 точка O – центр кулі, OA і OB – радіуси кулі, AB – діаметр кулі.



Мал. 7.1

Поверхню кулі називають *сферою*.

Центр, радіус і діаметр кулі також є *центром*, *радіусом* і *діаметром сфери*.

Усі точки сфери рівновіддалені від центра сфери на відстань, що дорівнює радіусу. Точки кулі, що не належать сфері, називають *внутрішніми точками кулі*, і про них кажуть, що вони *лежать всередині сфери*. Внутрішні точки кулі віддалені від центра кулі на відстань, меншу за радіус.

Таким чином, приходимо до ще одного означення сфери і кулі.

Сферою **називають поверхню, що складається з усіх точок простору, рівновіддалених від однієї і тієї самої точки. Цю точку називають *центром сфери*, а відстань від центра сфери до будь-якої її точки – *радіусом сфери*.**

Кулею **називають геометричне тіло, що складається з усіх точок простору, які віддалені від однієї і тієї самої точки на відстань, що не перевищує даної. Цю точку називають *центром кулі*, а дану відстань – *радіусом кулі*.**

Задача 1. Радіус сфери дорівнює 4,5 см. Усередині чи зовні сфери лежить точка A, якщо вона віддалена від центра сфери на:

1) $\sqrt{10}$ см; 2) 4 см; 3) $\sqrt{21}$ см; 4) 7 см?

Р о з в ' я з а н н я. 1) Оскільки $\sqrt{10} < 4,5$, то A розташована всередині сфери.

2) Аналогічно, $4 < 4,5$, тому A лежить всередині сфери.

3) Оскільки $\sqrt{21} > 4,5$, то точка A лежить зовні сфери.

4) Аналогічно, $7 > 4,5$, тому A лежить зовні сфери.

В і д п о в і д ь. 1) і 2) усередині сфери; 3) і 4) зовні сфери.

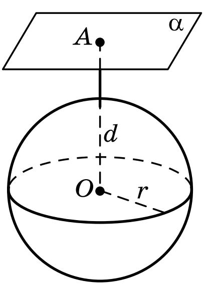
Багато предметів, що мають форму кулі, оточують нас у побуті. Це і намистинки, і м'ячі, і різноманітні ялинкові прикраси, металеві кульки підшипників, плафони деяких світильників тощо.

2. Взаємне розташування кулі і площини

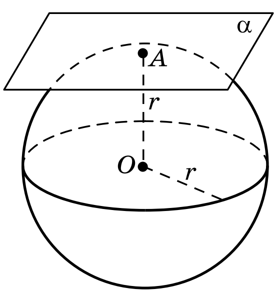
Розглянемо взаємне розташування кулі і площини.

Площина і куля можуть:

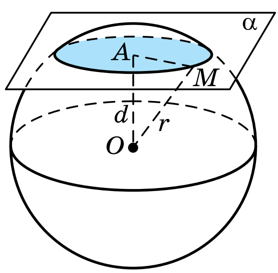
- не мати спільних точок (не перетинатися) (мал. 7.2);
- мати одну спільну точку (дотикатися) (мал. 7.3);
- мати безліч спільних точок (перетинатися) (мал. 7.4).



Мал. 7.2



Мал. 7.3



Мал. 7.4

Нехай α – площина, $OM = r$ – радіус кулі, а $OA = d$ – перпендикуляр, проведений із центра O кулі до площини α, тобто відстань від центра кулі до площини (мал. 7.4).

Тоді:

- якщо площина α і куля не мають спільних точок, то $d > r$;
- якщо площина α і куля мають одну спільну точку, то $d = r$;
- якщо площина α і куля мають безліч спільних точок, то $d < r$.

Зауважимо, що правильними є і обернені твердження:

- якщо $d > r$, то площина і куля не мають спільних точок;
- якщо $d = r$, то площина і куля мають одну спільну точку;
- якщо $d < r$, то площина і куля мають безліч спільних точок.

Задача 2. Радіус кулі дорівнює 5 см. Скільки спільних точок має куля із площиною, якщо відстань від центра кулі до площини дорівнює: 1) 4 см; 2) 5 см; 3) 6 см.

Відповідь. 1) Безліч; 2) одну; 3) жодної.

Розглянемо детальніше випадки, коли площина і куля мають одну або безліч спільних точок.

3. Площина, дотична до кулі (сфери)

Якщо площина має з кулею (сферою) лише одну спільну точку, то кажуть, що площина *дотикається до кулі (сфери)*.

На малюнку 7.3 площина α дотикається до сфери. Точку A, яка є спільною точкою площини і сфери, називають *точкою дотику*. Площина, дотична до кулі, має властивість, яка дуже схожа на властивість дотичної до кола.

Теорема (властивість площини, дотичної до кулі). **Дотична до кулі площина перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.**

Доведення. Розглянемо площину α, що дотикається до кулі із центром O в точці A (мал. 7.3).

Доведемо, що $OA \perp \alpha$, від супротивного.

Нехай площина α не є перпендикулярною до радіуса OA, тоді OA – похила до α, а тому відстань від точки O до площини α менша за радіус кулі. Тоді куля і площина α перетинаються і мають безліч спільних точок, що суперечить умові, адже, за умовою, площина α є дотичною до кулі.

Отже, наше припущення хибне, тому $OA \perp \alpha$. ■

Задача 3. До кулі, радіус якої – 4 см, проведено дотичну площину. Точка K цієї площини віддалена від точки дотику на 3 см. Знайдіть відстань від точки K до центра кулі.

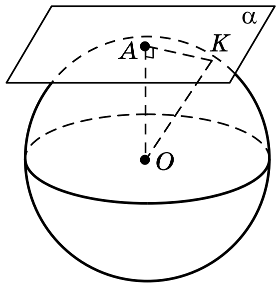
Р о з в ' я з а н н я. Нехай куля із центром у точці O дотикається до площини α у точці A, $OA = 4$ см, $K \in \alpha$, $AK = 3$ см (мал. 7.5). Знайдемо відстань OK.

1) Оскільки $OA \perp \alpha$, то $\angle OAK = 90°$.

2) Із $\triangle OAK$ маємо:

$OK = \sqrt{AO^2 + AK^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (см).

В і д п о в і д ь. 5 см.



Мал. 7.5

4. Переріз кулі площиною

Якщо площина і куля мають безліч спільних точок (мал. 7.4), це означає, що площина перетинає кулю, отже, маємо *переріз кулі площиною*. Переріз кулі площиною є кругом, відповідно, переріз сфери площиною є колом.

Якщо січна площина проходить через діаметр кулі (мал. 7.1), то її називають *діаметральною площиною*, а переріз, який при цьому утворився, – *великим кругом кулі*, радіус якого дорівнює радіусу кулі. Коло, що обмежує цей круг, називають *великим колом кулі*.

Радіус перерізу кулі площиною, відмінною від діаметральної площини, буде меншим від радіуса кулі. На малюнку 7.4 перерізом кулі площиною α є круг, центр якого – точка A – основа перпендикуляра, проведеного із центра кулі O до площини α. Радіус цього круга – AM, де M – точка, що належить перерізу площиною α сфери, яка обмежує кулю. При цьому $OM = r$ – радіус кулі.

Задача 4. Діаметр кулі дорівнює 34 см. Кулю перетинає площина на відстані 8 см від центра. Знайдіть площу перерізу, що при цьому утворився.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай кулю перетинає площина α (мал. 7.4), тоді $AO = 8$ см, OM – радіус кулі. Перерізом кулі є круг із центром у точці A і радіусом AM. Площу перерізу позначимо через S.

1) Знайдемо радіус кулі: $OM = 34 : 2 = 17$ (см).

2) $AM = \sqrt{OM^2 - AO^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (см).

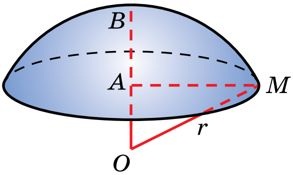
3) Тоді $S = \pi \cdot AM^2 = \pi \cdot 15^2 = 225\pi$ (см^2).

В і д п о в і д ь. 225π см^2.

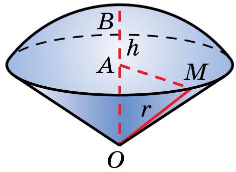
5. Частини кулі

Кульовим сегментом називають частину кулі, яку відтинає від неї січна площина (мал. 7.6). Його поверхня складається із *сферичного сегмента* і круга – *основи кульового сегмента*.

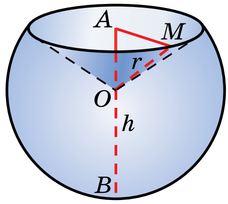
Відстань від основи до найвіддаленішої точки B кульового сегмента називають його *висотою*. На малюнку 7.6 зображено сегмент із висотою $AB = h$ кулі радіуса r.



Мал. 7.6

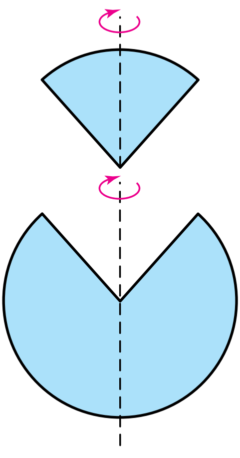


Мал. 7.7

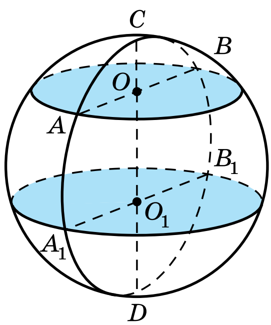


Мал. 7.8

Кульовим сектором називають геометричне тіло, яке утворюється з кульового сегмента і конуса (мал. 7.7 і 7.8). Якщо кульовий сегмент менший за півкулю, то його доповнюють конусом, основа якого збігається з основою сегмента, а вершина – із центром кулі (мал. 7.7). Якщо кульовий сегмент більший за півкулю, то згаданий конус із кульового сегмента вилучають (мал. 7.8). Зауважимо також, що кульовий сектор можна отримати обертанням кругового сектора навколо своєї осі симетрії (мал. 7.9).



Мал. 7.9



Мал. 7.10

Кульовим шаром називають частину кулі, яка міститься між двома паралельними січними площинами (мал. 7.10). Частину сфери, яка обмежує кульовий шар, називають *кульовим поясом*. Перерізи площин із кулею називають *основами кульового шару*. Радіуси перерізів, які при цьому утворилися, називають *радіусами кульового шару* (кульового поясу), а перпендикуляр, проведений із точки однієї січної площини до другої, називають *висотою кульового шару* (кульового поясу). На малюнку 7.10 OA і O_1A_1 – радіуси, OO_1 – висота кульового шару (кульового поясу).

А ще раніше...

У «Началах» (XII книга) Евклід не приділив кулі та її поверхні багато уваги. Вважають, що Евклід не знав формул для обчислення площі поверхні кулі та її об'єму, тому і не згадав про це у своїй праці. Першим відповідні формули знайшов Архімед. У своєму трактаті «Про кулю і циліндр» Архімед виклав строгі доведення цих формул.

• Яке тіло називають кулею? • Що називають центром, радіусом, діаметром кулі? • Що називають сферою? • Що називають центром, радіусом, діаметром сфери? • Яким може бути взаємне розташування кулі і площини? • Яку площину називають дотичною до кулі (сфери)? • Сформулюйте і доведіть теорему про властивість площини, дотичної до кулі. • У якому випадку кажуть про переріз кулі площиною? • Яку площину називають діаметральною? • Який переріз називають великим кругом? • Що називають кульовим сегментом, кульовим сектором, кульовим шаром та кульовим поясом?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

7.1. Знайдіть діаметр кулі, радіус якої дорівнює:
1) 3 дм; 2) 7,5 см.

7.2. Обчисліть діаметр кулі, радіус якої дорівнює:
1) 4 см; 2) 1,5 дм.

7.3. Обчисліть радіус кулі, діаметр якої дорівнює:
1) 8 см; 2) 1,2 дм.

7.4. Знайдіть радіус кулі, діаметр якої дорівнює:
1) 2 дм; 2) 5,6 см.

7.5. Радіус сфери дорівнює 6 см. Чи може відстань між деякими двома точками, що належать сфері, дорівнювати:
1) 6,1 см; 2) 9 см; 3) 12 см; 4) 13 см?

7.6. Діаметр сфери дорівнює 10 см. Чи може відстань між деякими двома точками, що належать сфері, дорівнювати:
1) 0,1 см; 2) 10 см; 3) 10,2 см; 4) 20 см?

7.7. Радіус кулі дорівнює 7,5 см. Усередині кулі, зовні чи на сферичній поверхні, що обмежує кулю, лежить точка, яка віддалена від центра кулі на:

1) 7 см; 2) 7,4 см; 3) $7\frac{1}{2}$ см; 4) 8 см?

7.8. Радіус кулі дорівнює 4,2 см. Усередині кулі, зовні чи на сферичній поверхні, що обмежує кулю, лежить точка, яка віддалена від центра кулі на:

1) 4 см; 2) $4\frac{1}{5}$ см; 3) 4,5 см; 4) 5 см?

7.9. Радіус кулі дорівнює 5 см. Знайдіть площу великого круга кулі.

7.10. Радіус кулі дорівнює 2 дм. Знайдіть довжину великого кола цієї кулі.

7.11. Дві паралельні площини дотикаються до сфери, радіус якої – 5 см. Знайдіть відстань між площинами.

7.12. Відстань між двома паралельними площинами дорівнює 6 см. Знайдіть радіус кулі, що дотикається до обох площин.

2 **7.13.** Діаметр кулі дорівнює 16 см. Точка A належить площині, дотичній до кулі, і віддалена на 15 см від точки дотику кулі з площиною. Знайдіть відстань від точки A до центра кулі.

7.14. Точка B належить площині, дотичній до сфери, і віддалена на 12 см від точки дотику сфери з площиною. Знайдіть діаметр сфери, якщо відстань від точки B до центра сфери дорівнює 13 см.

7.15. Кулю радіуса 25 см перетинає площина на відстані 24 см від її центра. Знайдіть довжину лінії, по якій площина перетинає поверхню кулі.

7.16. Кулю, радіус якої – 10 см, перетинає площина на відстані 6 см від центра кулі. Знайдіть площу перерізу, що при цьому утворився.

7.17. A і B – точки сфери, причому AB не є діаметром сфери; N – середина відрізка AB, O – центр сфери. Доведіть, що $ON \perp AB$.

7.18. AB – діаметр сфери, M – довільна точка сфери. Доведіть, що $\angle AMB = 90°$.

7.19. Площина перетинає сферу. Діаметр сфери, проведений в одну з точок лінії перетину сфери і площини, дорівнює $4\sqrt{2}$ см і утворює з площиною кут 45°. Знайдіть відстань від центра сфери до площини перерізу.

7.20. Площина перетинає сферу. Діаметр сфери, проведений в одну з точок лінії перетину сфери і площини, дорівнює $6\sqrt{3}$ см і утворює з площиною кут 60°. Знайдіть відстань від центра сфери до площини перерізу.

7.21. Радіус кулі дорівнює 4 см. Точка A належить сфері, що обмежує кулю. Де може лежати точка B (усередині кулі, зовні чи на сферичній поверхні), якщо:
1) $AB = 2$ см; 2) $AB = 4$ см;
3) $AB = 8$ см; 4) $AB = 10$ см?
Розгляньте всі можливі випадки.

7.22. Радіус кулі дорівнює 2 см. Точка Q належить сфері, що обмежує кулю. Де може лежати точка M (усередині кулі, зовні чи на сферичній поверхні), якщо:
1) $QM = 1$ см; 2) $QM = 2$ см;
3) $QM = 4$ см; 4) $QM = 9$ см?
Розгляньте всі можливі випадки.

7.23. Дві кулі радіусів 5 см і 3 см мають лише одну спільну точку[1]. Знайдіть відстань між їхніми центрами.

7.24. Дві кулі радіусів 4 см і 7 см мають лише одну спільну точку. Знайдіть відстань між їхніми центрами.

7.25. Відстань між двома паралельними площинами дорівнює 10 см. Центр сфери, яка дотикається до однієї із площин, віддалений від іншої площини на 3 см. Знайдіть радіус сфери.

7.26. Відстань між двома паралельними площинами – 3 см. Центр сфери, яка дотикається до однієї із площин, віддалений від іншої площини на 8 см. Знайдіть радіус сфери.

7.27. Чи перетинаються дві кулі, радіуси яких – 5 см і 7 см, якщо відстань між їхніми центрами:
1) 6 см; 2) 13 см?

7.28. Чи перетинаються дві кулі, радіуси яких – 4 см і 7 см, якщо відстань між їхніми центрами:
1) 20 см; 2) 5 см?

7.29. Визначте висоту кульового шару, якщо його основи віддалені на 7 см і 5 см від центра кулі.

7.30. Основи кульового шару віддалені на 2 см і 9 см від центра кулі. Знайдіть висоту кульового шару.

[1] У такому разі кажуть, що кулі дотикаються.

7.31. Точка C – середина відрізка AB, кінці якого лежать на сфері радіуса 10 см із центром O. Знайдіть OC, якщо $AB = 12$ см.

7.32. Точка D – середина відрізка AB, кінці якого лежать на сфері радіуса 13 см із центром O. Знайдіть AB, якщо $OD = 5$ см.

7.33. Точка A лежить на поверхні кулі радіуса 10 см, CD – діаметр кулі, $AC : AD = 3 : 4$. Знайдіть AC і AD.

7.34. Точка M лежить на поверхні кулі радіуса 25 см, AB – діаметр кулі, $MA : MB = 7 : 24$. Знайдіть MA і MB.

7.35. Дві паралельні площини перетинають сферу по рівних між собою колах радіуса 3 см. Знайдіть радіус сфери, якщо відстань між площинами дорівнює 8 см.

7.36. Сфера, радіус якої – 10 см, перетинає дві паралельні площини по рівних між собою колах радіуса 8 см. Знайдіть відстань між площинами.

7.37. Доведіть, що радіуси рівновіддалених від центра кулі перерізів між собою рівні.

7.38. Доведіть, що якщо радіуси двох перерізів кулі між собою рівні, то ці перерізи рівновіддалені від центра кулі.

7.39. Сфера, радіус якої – 4 см, дотикається до двох взаємно перпендикулярних площин. Знайдіть:
1) відстань від центра сфери до прямої перетину цих площин;
2) відстань між точками дотику.

7.40. Центр сфери, яка дотикається до обох граней двогранного прямого кута, віддалений від ребра кута на $2\sqrt{2}$ см. Знайдіть радіус сфери.

7.41. Сфера дотикається до обох граней двогранного кута градусної міри $60°$. Центр сфери віддалений від ребра кута на $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть радіус сфери.

7.42. Куля, радіус якої – 8 см, дотикається до обох граней двогранного кута, міра якого – $60°$. Знайдіть відстань від центра кулі до ребра кута.

7.43. Нехай C і D – деякі дві точки сфери. Скільки великих кіл можна провести через ці точки? Розгляньте всі випадки.

7.44. Площина α дотикається до сфери із центром O у точці A. Точка B належить площині α, відрізок OB перетинає сферу в точці K. Знайдіть довжину відрізка BK, якщо довжина великого кола цієї сфери дорівнює 16π см, а $AB = 6$ см.

7.45. Площина β дотикається до кулі із центром O в точці M. Точка K належить площині β, відрізок OK перетинає сферу, що обмежує кулю, у точці N. Знайдіть довжину відрізка MK, якщо $NK = 8$ см, а площа великого круга кулі дорівнює 25π см^2.

7.46. Через кінець радіуса сфери під кутом $45°$ до радіуса проведено площину. Знайдіть довжину кола отриманого перерізу, якщо радіус сфери – $8\sqrt{2}$ см.

7.47. Радіус кулі дорівнює 12 см. Через кінець радіуса під кутом $60°$ до нього проведено площину. Знайдіть площу перерізу, який при цьому утворився.

7.48. Відстань від центра кулі до прямої a дорівнює 2 см. Через пряму a проведено дві дотичні до кулі площини. Знайдіть кут між площинами, якщо радіус кулі дорівнює $\sqrt{3}$ см.

7.49. Відстань від центра кулі до прямої b дорівнює 8 см. Через пряму b проведено дві площини, що дотикаються до кулі. Знайдіть кут між площинами, якщо радіус кулі – 4 см.

3 **7.50.** Знайдіть геометричне місце центрів сфер, що проходять через дві задані точки.

7.51. Знайдіть геометричне місце центрів куль, що дотикаються до двох даних площин.

7.52. Доведіть, що з двох перерізів кулі більший радіус має той, площина якого лежить ближче до центра кулі.

7.53. Доведіть, що з двох перерізів кулі ближче до центра кулі лежить той, радіус якого більший.

7.54. Усі вершини правильного трикутника зі стороною 6 см лежать на сфері. Відстань від центра сфери до площини трикутника дорівнює $2\sqrt{13}$ см. Знайдіть діаметр сфери.

7.55. Усі вершини квадрата лежать на сфері. Сторона квадрата дорівнює 8 см, а відстань від центра сфери до площини квадрата – 7 см. Знайдіть радіус сфери.

7.56. Вершини трикутника зі сторонами 6 см, 8 см і 10 см лежать на поверхні кулі, радіус якої – 13 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.

7.57. Вершини рівностороннього трикутника зі стороною 6 см лежать на поверхні кулі, радіус якої – 4 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.

7.58. Сфера проходить через вершини рівнобедреного трикутника з основою a і кутом при вершині β. Відстань від центра сфери до площини трикутника дорівнює h. Знайдіть радіус сфери.

7.59. Куля дотикається до всіх сторін рівностороннього трикутника зі стороною 12 см. Знайдіть радіус кулі, якщо площина трикутника віддалена від центра кулі на 2 см.

7.60. Куля дотикається до всіх сторін квадрата зі стороною 16 см. Знайдіть радіус кулі, якщо площина квадрата віддалена від центра кулі на 6 см.

7.61. На відстані $5\sqrt{3}$ см від центра кулі проведено переріз, площа якого в 4 рази менша за площу великого круга. Знайдіть радіус кулі.

7.62. На відстані $2\sqrt{15}$ см від центра сфери проведено переріз, довжина кола якого в 4 рази менша за довжину великого кола сфери. Знайдіть радіус сфери.

7.63. Дві паралельні площини перетинають сферу радіуса 5 см по колах радіусів 3 см і 4 см. Знайдіть висоту кульового поясу, що при цьому утворився.

7.64. Дві паралельні площини перетинають сферу по колах радіусів 3,5 см і 12,5 см. Висота кульового поясу дорівнює 12 см. Знайдіть радіус сфери.

7.65. Куля, радіус якої – 3 см, дотикається до площини трикутника ABC у центрі вписаного в цей трикутник кола. Знайдіть відстань від центра кулі до сторін трикутника, якщо $AB = 12$ см, $BC = 16$ см, $AC = 20$ см.

7.66. Сфера, радіус якої – 6 см, дотикається до площини трикутника ABC у центрі кола, описаного навколо цього трикутника. Знайдіть відстань від центра сфери до вершин трикутника, якщо $AB = 5$ см, $BC = 4$ см, $AC = 3$ см.

7.67. Сфера дотикається до граней двогранного кута градусної міри 120°. Відстань від центра сфери до ребра кута дорівнює m. Знайдіть:

1) радіус сфери;

2) відстань між точками дотику.

7.68. Центр кулі радіуса 2 см лежить на одній із граней двогранного кута 30°. Радіус перерізу кулі другою гранню двогранного кута дорівнює $\sqrt{3}$ см. Визначте взаємне розташування кулі і ребра двогранного кута.

7.69. Куля радіуса 5 см дотикається до однієї з граней двогранного кута градусної міри 120° і перетинає другу його грань по кругу радіуса 3 см. Знайдіть відстань від центра кулі до ребра двогранного кута.

7.70. Сфера, радіус якої дорівнює 1, дотикається до двох взаємно перпендикулярних площин. Знайдіть радіус найменшої сфери, яка також дотикається до цих площин і дотикається до даної сфери (тобто має з нею одну спільну точку).

7.71. Одна з вершин куба є центром сфери, радіус якої дорівнює 1 дм. Знайдіть довжину лінії перетину сферичної поверхні з поверхнею куба, ребро якого дорівнює 2 дм.

7.72. Середина одного з ребер куба є центром кулі, радіус якої – 3 см. Знайдіть довжину лінії перетину сферичної поверхні з поверхнею куба, ребро якого – 6 см.

7.73. Ребро правильного тетраедра дорівнює $\sqrt{6}$ см. Одна з його вершин є центром сфери, радіус якої дорівнює висоті тетраедра. Знайдіть довжину лінії перетину сфери з поверхнею тетраедра.

4 **7.74.** Площа великого круга кулі дорівнює S, а площа перерізу кулі площиною – $\frac{16}{25}S$. На якій відстані від центра кулі проведено переріз?

7.75. Площа великого круга кулі дорівнює πQ, а площа перерізу кулі площиною – $\frac{9}{25}\pi Q$. На якій відстані від центра кулі проведено переріз?

7.76. Куля радіуса 37 см дотикається до всіх сторін рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 36 см і 16 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трапеції.

7.77. Куля, радіус якої – 10 см, дотикається до всіх сторін ромба, діагоналі якого дорівнюють 15 см і 20 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини ромба.

7.78. Діаметр кулі двома точками поділено на три частини у відношенні $1:12:13$. Знайдіть відношення площ перерізів кулі, які проходять через ці точки перпендикулярно до даного діаметра.

7.79. Точка ділить радіус кулі на дві частини у відношенні $3:2$, рахуючи від центра. Через цю точку перпендикулярно до даного радіуса проведено переріз. Знайдіть відношення площі цього перерізу до площі великого круга кулі.

7.80. Через точки M і N, які ділять радіус OA кулі на три рівні частини, проведено площини, перпендикулярні до цього радіуса. Знайдіть відношення площ перерізів кулі, що при цьому утворилися.

7.81. Сфера проходить через три вершини ромба, сторона якого – 6 см, а кут – $60°$. Знайдіть відстань від центра сфери до четвертої вершини ромба, якщо радіус сфери дорівнює 10 см. Скільки випадків слід розглянути?

7.82. У кулі проведено два взаємно перпендикулярних перерізи на відстанях 8 см і 12 см від центра. Довжина спільної хорди цих перерізів дорівнює 18 см. Знайдіть радіус кулі.

7.83. У кулі, радіус якої дорівнює 13 см, проведено два взаємно перпендикулярних перерізи на відстанях 4 см і 12 см від центра кулі. Знайдіть довжину їхньої спільної хорди.

7.84. Площина α дотикається до кулі в точці A. На продовженні діаметра AB у точці C розміщено точкове джерело світла. Радіус кулі дорівнює r, $BC = b$. Знайдіть площу тіні кулі на площині α.

7.85. Сфера радіуса 1 дотикається до кожної з трьох попарно перпендикулярних площин. Знайдіть радіус сфери, що дотикається до цих площин і до даної сфери.

7.86. Куля, радіус якої – 3 см, дотикається до сторін правильного трикутника в точках A, B і C. Визначте довжину найкоротшої відстані між точками A і B по поверхні кулі, якщо довжина сторони трикутника дорівнює 6 см.

7.87. Один із кінців діаметра кулі є спільною точкою трьох попарно перпендикулярних площин. Перерізи кулі цими площинами мають радіуси r_1, r_2 і r_3. Знайдіть радіус кулі.

7.88. Куля із центром у точці O і радіусом 6 см проходить через спільну точку A трьох попарно перпендикулярних площин. Пряма OA утворює з двома із даних площин кути $30°$ і $45°$. Знайдіть радіуси перерізів кулі з кожною із трьох даних площин.

7.89. Із точки поверхні сфери, радіус якої – 50 см, проведено три взаємно перпендикулярні хорди[1], довжини яких відносяться як $12:15:16$. Знайдіть довжини цих хорд.

[1] Хордою сфери називають відрізок, що сполучає дві будь-які точки сфери.

7.90. Сфера дотикається до всіх ребер правильного тетраедра з ребром a. Знайдіть радіус сфери.

7.91. Відрізки AA_1, BB_1 і CC_1, кінці яких лежать на сфері радіуса 10 см, попарно перпендикулярні і перетинаються в точці M, $AA_1 = 12$ см, $BB_1 = 18$ см. Знайдіть відстань від центра сфери до точки M, якщо $CM : MC_1 = 11 : 3$.

Життєва математика

7.92. Згідно із санітарними нормами відношення площі вікон до площі підлоги в класній кімнаті має бути не менше ніж 0,2. Чи дотримується ця норма у класній кімнаті, довжина якої – 12 м, а ширина становить 45 % від довжини, якщо в кімнаті три вікна розміром $2 \times 1{,}75$ м?

7.93. На дачі родини Нечипоруків потрібно пофарбувати бак для води з кришкою із зовнішнього й внутрішнього боків. Бак має форму прямої призми висотою 1,5 м. Основою призми є прямокутний трикутник із катетами 0,6 м і 0,8 м. У магазині є фарба в банках по 1 кг і 2,5 кг.

1) Скільки м^2 треба пофарбувати?

2) Скільки і яких банок фарби потрібно купити, якщо на 1 м^2 витрачається 0,2 кг фарби?

Цікаві задачі для учнів неледачих

7.94. (*Міжнародний математичний конкурс «Кенгуру»*). Відношення периметра чотирикутника до довжини вписаного в нього кола дорівнює $4 : 3$. Чому дорівнює відношення площі цього чотирикутника до площі круга, обмеженого цим колом?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

7.95. Чи можна описати коло, навколо чотирикутника $ABCD$, якщо:

1) $\angle A = 70°$, $\angle C = 110°$; 2) $\angle B = 100°$, $\angle D = 90°$?

7.96. Чи можна вписати коло в чотирикутник $ABCD$, якщо:

1) $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $CD = 5$ см, $DA = 6$ см;

2) $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $CD = 6$ см, $DA = 5$ см?

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 7

1. Знайдіть довжину кола, радіус якого на 5 см менший за діаметр.

А	Б	В	Г	Д
5π см	10π см	25π см	10 см	інша відповідь

2. Радіус основи конуса дорівнює 5 см, а його твірна на 1 см більша за висоту. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

А	Б	В	Г	Д
30 см^2	40 см^2	60 см^2	90 см^2	120 см^2

3. Усі ребра прямої трикутної призми дорівнюють 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

А	Б	В	Г	Д
12 см^2	24 см^2	36 см^2	48 см^2	96 см^2

4. На осі аплікат знайдіть точку, рівновіддалену від точок A (0; 2; 3) і B (2; 4; 5).

А	Б	В	Г	Д
(0; 0; 8)	(0; 0; 4)	(0; 8; 0)	(8; 0; 0)	(0; 0; –8)

5. Дано вектори $\vec{a}(4;0;4)$, $\vec{b}(-1;2;2)$, $\vec{p}(8;m;-1)$. Установіть відповідність між характеристикою векторів або результатом дії над ними (1–4) та відповідним числовим значенням (А–Д).

Характеристика векторів або результат дії над ними

1 модуль вектора $\vec{b}$

2 модуль вектора $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$

3 скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

4 значення m, при якому вектори $\vec{b}$ і $\vec{p}$ перпендикулярні

Числове значення

А 7

Б 6

В 5

Г 4

Д 3

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Основа тупокутного рівнобедреного трикутника дорівнює 16 см, а радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює 17 см. Знайдіть (у см^2) площу трикутника.

§ 8. КОМБІНАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

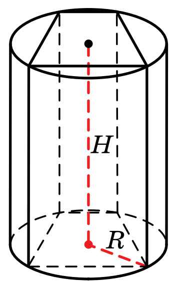
Ми вже розглянули призму, піраміду, циліндр, конус, кулю, їхні елементи та властивості. Але в геометрії та у практичній діяльності людини, у природі, техніці іноді виникає необхідність працювати ще й з *комбінаціями* згаданих геометричних тіл.

1. Призма, вписана в циліндр

***Призму* називають *вписаною в циліндр*, якщо її основи є вписаними в основи циліндра многокутниками, а бічні ребра є твірними циліндра** (мал. 8.1).

При цьому циліндр називають *описаним навколо призми*. Зрозуміло, що оскільки твірні циліндра перпендикулярні до площини основи, то призма, вписана в циліндр, є прямою.

Із означення призми, вписаної в циліндр (мал. 8.1), отримаємо її *властивості*:



Мал. 8.1

1. Основою вписаної в циліндр призми є многокутник, навколо якого можна описати коло, причому радіус цього кола дорівнює радіусу циліндра *R*.
2. Висота *H* призми, яка сполучає центри кіл, описаних навколо основ, належить осі циліндра.

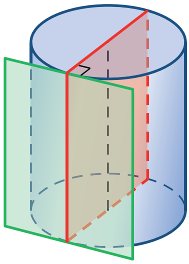
Задача 1. Чи можна описати циліндр навколо прямої призми, основою якої є:
1) трикутник; 2) ромб, що не є квадратом?

Р о з в ' я з а н н я. 1) Так, оскільки навколо будь-якого трикутника можна описати коло.
2) Ні, оскільки навколо ромба, який не є квадратом, не можна описати коло.

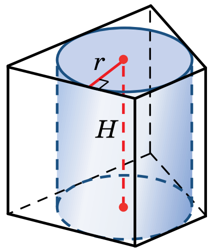
В і д п о в і д ь. 1) Так; 2) ні.

2. Призма, описана навколо циліндра

Дотичною до циліндра площиною **називають площину, що проходить через твірну циліндра перпендикулярно до площини осьового перерізу, який містить цю твірну** (мал. 8.2).



Мал. 8.2



Мал. 8.3

Призму **називають** ***описаною навколо циліндра***, **якщо її основи є описаними навколо основ циліндра многокутниками, а бічні грані належать дотичним до циліндра площинам** (мал. 8.3).

При цьому циліндр називають *вписаним у призму*. Оскільки твірні циліндра перпендикулярні до площин основ, то бічні грані призми, які містять твірні, також перпендикулярні до площин основ, тобто призма, описана навколо циліндра, є прямою.

З означення призми, описаної навколо циліндра, отримаємо такі її *властивості* (мал. 8.3):

1. Основою призми, описаної навколо циліндра, є многокутник, у який можна вписати коло. При цьому радіус цього кола дорівнює радіусу r циліндра.
2. Висота H призми, яка сполучає центри кіл, вписаних в основи, належить осі циліндра.

Задача 2. Навколо циліндра описано чотирикутну призму, три сторони основи якої в порядку слідування дорівнюють 3 см, 4 см і 7 см. Знайти площу бічної поверхні призми, якщо висота циліндра – 5 см.

Розв'язання. Нехай маємо описану навколо циліндра чотирикутну призму (мал. 8.3). Знайдемо її бічну поверхню за формулою $S_{біч} = P \cdot l$, де P – периметр основи, l – бічне ребро, яке дорівнює висоті циліндра, тобто $l = 5$ см.

1) Позначимо невідому сторону основи через x. За властивістю описаного навколо кола чотирикутника маємо: $3 + 7 = 4 + x$, отже, $x = 6$ (см).

2) Тоді $P = 3 + 7 + 4 + 6 = 20$ (см).

3) $S_{біч} = 20 \cdot 5 = 100$ (см^2).

Відповідь. 100 см^2.

3. Піраміда, вписана в конус

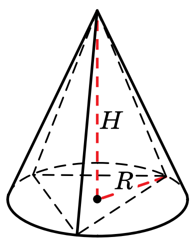
***Піраміду* називають *вписаною в конус*, якщо її основа є вписаним в основу конуса многокутником, а вершиною є вершина конуса** (мал. 8.4).

При цьому конус називають *описаним навколо піраміди*.

Зрозуміло, що бічні ребра піраміди, вписаної в конус, є твірними конуса.

Сформулюємо *властивості вписаної в конус піраміди* (мал. 8.4).

1. Основою вписаної в конус піраміди є многокутник, навколо якого можна описати коло, а висота піраміди проходить через центр цього кола.
2. Радіус основи конуса дорівнює радіусу R кола, описаного навколо основи піраміди, а висота H конуса дорівнює висоті піраміди.



Мал. 8.4

Задача 3. Навколо піраміди, сторони основи якої дорівнюють 10 см, 10 см і 12 см, а висота – 8 см, описано конус. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

Розв'язання. Нехай радіус основи конуса дорівнює R, а висота – H (мал. 8.4). Знайдемо площу осьового перерізу конуса за формулою $S_п = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot H = RH$.

1) Висота конуса дорівнює висоті піраміди, тому $H = 8$ см.

2) Радіус основи конуса дорівнює радіусу кола, описаного навколо основи призми – трикутника зі сторонами 10 см, 10 см і 12 см. Тоді $R = \frac{abc}{4S}$, де a, b, c – сторони трикутника, S – його площа.

3) За формулою Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$ – півпериметр трикутника, маємо:

$p = \dfrac{10 + 10 + 12}{2} = 16$ (см).

$S = \sqrt{16(16-10)(16-10)(16-12)} = 48$ (см^2).

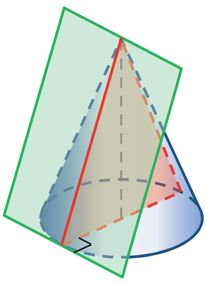
4) Тоді $R = \dfrac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot 48} = 6{,}25$ (см).

5) Отже, $S_п = 6{,}25 \cdot 8 = 50$ (см^2).

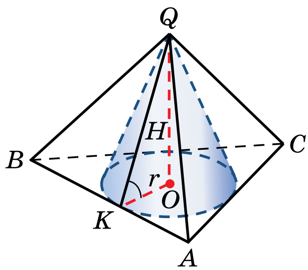
Відповідь. 50 см^2.

4. Піраміда, описана навколо конуса

***Дотичною до конуса площиною* називають площину, що проходить через твірну конуса перпендикулярно до площини осьового перерізу, який містить цю твірну** (мал. 8.5).



Мал. 8.5



Мал. 8.6

***Піраміду* називають *описаною навколо конуса*, якщо її основа є описаним навколо основи конуса многокутником, а вершиною є вершина конуса** (мал. 8.6).

При цьому конус називають *вписаним у піраміду*. Зауважимо, що бічні грані піраміди належать дотичним до конуса площинам.

Виходячи з означення, отримаємо *властивості піраміди, описаної навколо конуса* (мал. 8.6).

1. Основою піраміди, описаної навколо конуса, є многокутник, у який можна вписати коло, а висота піраміди проходить через центр цього кола.
2. Радіус *r* кола, вписаного в основу піраміди, дорівнює радіусу основи конуса, а висота піраміди дорівнює висоті *H* конуса.

Задача 4. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см, а всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють по $60°$. Знайти висоту конуса, вписаного в піраміду.

Розв'язання. Нехай у трикутну піраміду з основою ABC і вершиною Q вписано конус (мал. 8.6). Основа висоти конуса – точка O – центр кола, вписаного в $\triangle ABC$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см. QO – висота і піраміди, і конуса. Знайдемо QO.

1) Нехай точка K – точка дотику вписаного у $\triangle ABC$ кола до сторони AB, а OK – радіус цього кола та водночас радіус основи конуса. Нехай $OK = r$.

2) $OK \perp AB$, за теоремою про три перпендикуляри $QK \perp AB$, тому $\angle QKO$ – лінійний кут двогранного кута при основі піраміди. За умовою $\angle QKO = 60°$.

3) Радіус кола, вписаного у прямокутний трикутник, знайдемо за формулою $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, де a і b – катети, c – гіпотенуза.

4) Із $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$):

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см).

5) Тоді $OK = r = \dfrac{6+8-10}{2} = 2$ (см).

6) Із $\triangle OQK$ ($\angle O = 90°$): $\operatorname{tg}\angle QKO = \dfrac{OQ}{OK}$, тоді

$OQ = OK \operatorname{tg}\angle QKO = 2\operatorname{tg}60° = 2\sqrt{3}$ (см).

Відповідь. $2\sqrt{3}$ (см).

5. Многогранник, вписаний у кулю

***Многогранник* називають *вписаним у кулю*, якщо всі його вершини лежать на поверхні кулі.**

При цьому кулю називають *описаною навколо многогранника*.

Зауважимо, що

якщо навколо многогранника описано кулю, то центр кулі є точкою перетину всіх площин, які проходять перпендикулярно до ребер многогранника через їхні середини.

Справді, будь-яка точка, рівновіддалена від двох вершин многогранника, що є кінцями одного ребра, лежить у перпендикулярній до цього ребра площині, яка проходить через його середину. Оскільки центр кулі, описаної навколо многогранника, рівновіддалений від усіх вершин многогранника, то має належати кожній із таких площин, а тому є точкою їхнього перетину.

Правильним є і обернене твердження.

Кулю можна описати навколо многогранника, для якого всі площини, що перпендикулярні до його ребер і проходять через їхні середини, перетинаються в одній точці.

Оскільки вказана властивість справджується не для кожного многогранника, то і кулю можна описати не навколо кожного многогранника.

Розглянемо основні *властивості призми, вписаної в кулю* (мал. 8.7).

1. Пряму призму можна вписати в кулю, якщо основою призми є многокутник, навколо якого можна описати коло.
2. Центр кулі є серединою висоти призми, яка сполучає центри кіл, описаних навколо основ призми.
3. Основи призми є многокутниками, вписаними в рівні між собою паралельні перерізи кулі.

Задача 5. Навколо правильної трикутної призми, сторона основи якої дорівнює $5\sqrt{3}$ см, описано кулю. Радіус кулі дорівнює 13 см. Знайти висоту призми.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай навколо правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ описано кулю (мал. 8.7), $AB = 5\sqrt{3}$ см, $R = 13$ см – радіус кулі.

1) QB – радіус кола, описаного навколо $\triangle ABC$. Позначимо $QB = R_{ABC}$. Оскільки $\triangle ABC$ – правильний, то

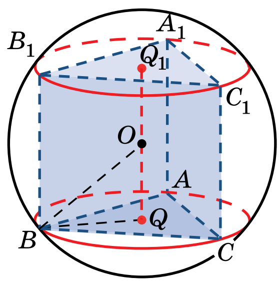
$$R_{ABC} = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3} = 5 \text{ (см)}.$$

2) Із $\triangle OQB$ ($\angle Q = 90°$):

$$OQ = \sqrt{OB^2 - QB^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (см)}.$$

3) Оскільки центр кулі – точка O – середина висоти QQ_1 призми, то $QQ_1 = 2\cdot 12 = 24$ (см).

В і д п о в і д ь. 24 см.

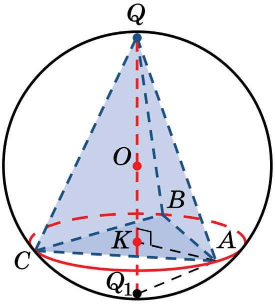


Мал. 8.7

Розглянемо основні *властивості вписаної в кулю піраміди* (мал. 8.8).

1. Піраміду можна вписати в кулю, якщо основою піраміди є многокутник, навколо якого можна описати коло. Центр кулі, описаної навколо піраміди, лежить на перпендикулярі до площини основи, який проходить через центр кола, описаного навколо основи.
2. Центр кулі, описаної навколо правильної піраміди, лежить на прямій, що містить висоту піраміди.
3. Центр кулі, описаної навколо правильної піраміди, збігається із центром кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, бічною стороною якого є бічне ребро піраміди, а висотою — висота піраміди. Радіус кулі дорівнює радіусу цього кола.

Зазначимо, що центр описаної кулі може лежати або на висоті правильної піраміди, або на її продовженні, тобто або всередині піраміди, або за її межами. На прикладі задачі 6 розглянемо такий спосіб розв'язання задач про вписану в кулю правильну піраміду, при якому немає значення, де лежить центр кулі (усередині чи поза пірамідою).



Мал. 8.8

Задача 6. Довести, що радіус R кулі, описаної навколо правильної піраміди, можна знайти за формулою $R = \dfrac{r^2 + H^2}{2H}$, де H — висота піраміди, r — радіус кола, описаного навколо основи піраміди.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай правильну піраміду, висота якої QK, вписано в кулю із центром O (мал. 8.8), $QK = H$, $KA = r$.

1) Продовжимо висоту QK до перетину з кулею в точці Q_1. Тоді $QQ_1 = 2R$ – діаметр кулі, а тому $\angle QAQ_1 = 90°$ і QQ_1 – гіпотенуза прямокутного трикутника QAQ_1.

2) Із $\triangle AQK$ ($\angle K = 90°$): $AQ^2 = QK^2 + AK^2 = H^2 + r^2$.

3) Оскільки катет у прямокутному трикутнику є середнім геометричним гіпотенузи і своєї проекції на гіпотенузу, то із $\triangle QAQ_1$ ($\angle A = 90°$) маємо: $AQ^2 = QQ_1 \cdot QK = 2R \cdot H$.

4) Отримали, що $AQ^2 = H^2 + r^2$ і $AQ^2 = 2RH$, тому $H^2 + r^2 = 2RH$. Отже, маємо, що $R = \dfrac{r^2 + H^2}{2H}$. ■

Задача 7. Довести, що навколо будь-якої трикутної піраміди можна описати кулю.

Д о в е д е н н я. Розглянемо довільну трикутну піраміду $ABCD$. Геометричним місцем точок, рівновіддалених від вершин A, B і C є пряма l, що проходить через точку O_1 – центр кола, описаного навколо грані ABC, перпендикулярно до цієї грані.

Геометричним місцем точок, рівновіддалених від точок A і D є площина α, що проходить через середину відрізка AD перпендикулярно до нього.

Нехай пряма l перетинається з площиною α в точці O. Тоді, з одного боку, $OA = OB = OC$, а з іншого – $OA = OD$. Маємо, що $OA = OB = OC = OD$, тобто точка O рівновіддалена від усіх вершин даної піраміди, а отже, є центром описаної навколо цієї піраміди кулі. ■

6. Многогранник, описаний навколо кулі

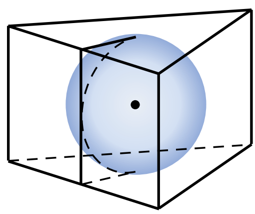
***Многогранник* називають *описаним навколо кулі*, якщо всі його грані дотикаються до поверхні кулі.**

При цьому кулю називають *вписаною у многогранник*.

Зауважимо, що

якщо в многогранник можна вписати кулю, то її центр є точкою перетину бісекторних площин усіх двогранних кутів цього многогранника.

Справді, будь-яка точка, рівновіддалена від обох граней двогранного кута, лежить на його бісекторній площині (за відомою властивістю бісекторної площини). Центр кулі, вписаної у многогранник, є рівновіддаленим від усіх його граней, тому має належати кожній із бісекторних площин, а отже, є точкою перетину бісекторних площин усіх двогранних кутів.



Мал. 8.9

Правильним є і обернене твердження:

у многогранник можна вписати кулю, якщо бісекторні площини всіх його двогранних кутів перетинаються в одній точці.

Оскільки ця властивість перетину бісекторних площин справджується не для кожного многогранника, то не в кожний многогранник можна вписати кулю.

Розглянемо основні *властивості призми, описаної навколо кулі* (мал. 8.9).

1. Пряму призму можна описати навколо кулі, якщо основою призми є многокутник, у який можна вписати коло, а висота призми дорівнює діаметру цього кола.
2. Центр кулі є серединою висоти призми, що сполучає центри кіл, вписаних в основи призми.

Задача 8. Відомо, що у трикутну призму, сторони основ якої дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см, можна вписати кулю. Знайти радіус цієї кулі.

Розв'язання. Нехай кулю вписано в дану трикутну призму. Позначимо радіус кола, вписаного в основу призми, через r.

1) Діаметр кулі дорівнює як висоті призми, так і діаметру кола, вписаного в основу призми. Отже, радіус r кола, вписаного в основу призми, дорівнює радіусу кулі.

2) Знайдемо r за формулою $r = \frac{S}{p}$, де S і p – відповідно площа і півпериметр трикутника основи.

3) Маємо: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21$ (см).

4) За формулою Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84 \text{ (см}^2\text{)}.$$

5) Отже, $r = \frac{84}{21} = 4$ (см).

6) Тоді радіус кулі також дорівнює 4 см.

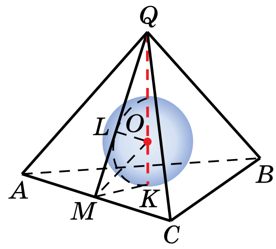
Відповідь. 4 см.

Розглянемо основні *властивості піраміди, описаної навколо кулі* (мал. 8.10).

1. Якщо в піраміді всі двогранні кути при основі між собою рівні, то в таку піраміду можна вписати кулю. Центр кулі лежить на висоті піраміди, точка дотику кулі до основи піраміди збігається із центром вписаного в основу кола, а точки дотику до бічних граней лежать на висотах цих граней.
2. У будь-яку правильну піраміду можна вписати кулю. Центр такої кулі лежить на висоті піраміди.
3. Центр кулі, вписаної у правильну піраміду, збігається із центром кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, бічною стороною якого є апофема правильної піраміди, а висотою – висота піраміди. Радіус кулі дорівнює радіусу цього кола.

Задача 9. Відомо, що у трикутній піраміді всі двогранні кути при основі між собою рівні. Висота піраміди дорівнює 20 см, а висота однієї з бічних граней – 25 см. Знайти радіус вписаної в цю піраміду кулі.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай QK – висота трикутної піраміди $QABC$, QM – висота її бічної грані, O – центр вписаної кулі, L – точка дотику кулі до бічної грані QAC, $QK = 20$ см, $QM = 25$ см (мал. 8.10).



Мал. 8.10

1) Оскільки всі двогранні кути при основі піраміди між собою рівні, то центр кулі лежить на висоті піраміди, а точка дотику кулі до бічної грані належить висоті цієї грані. Маємо: $L \in QM$.

2) Нехай r – радіус вписаної кулі, тоді $OK = OL = r$.

3) $\triangle OKM = \triangle OLM$ (за катетом і гіпотенузою), тому $\angle OMK = \angle OML$, отже, MO – бісектриса кута QMK, а тому і трикутника QMK.

4) Із $\triangle QMK$: $MK = \sqrt{MQ^2 - QK^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$ (см).

5) Оскільки $OQ = QK - OK$ і $\frac{QM}{MK} = \frac{OQ}{OK}$ (за властивістю бісектриси трикутника), то маємо:

$\frac{25}{15} = \frac{20 - r}{r}$, тоді $r = 8\frac{4}{7}$ (см).

В і д п о в і д ь. $8\frac{4}{7}$ см.

Задача 10. Довести, що в будь-яку трикутну піраміду можна вписати кулю.

Д о в е д е н н я. Розглянемо довільну трикутну піраміду $ABCD$.

Бісекторні площини двогранних кутів при ребрах AB, AC і BD мають єдину спільну точку O.

Оскільки точка O належить бісекторній площині при ребрі AB, то вона рівновіддалена від граней ABC і ABD. Оскільки вона належить і бісекторній площині при ребрі AC, то рівновіддалена від граней ABC і ACD, а оскільки належить бісекторній площині при ребрі BD, то рівновіддалена від граней ABD і CBD. Отже, точка O рівновіддалена від усіх граней тетраедра $ABCD$, а тому є центром вписаної кулі. ■

Зауважимо, що в геометрії існують й інші комбінації геометричних тіл, наприклад циліндра і піраміди, кулі і конуса тощо.

7. Комбінації двох тіл обертання

***Кулю* називають *вписаною в циліндр*, якщо кожна основа і кожна твірна циліндра дотикаються до кулі** (мал. 8.11).

При цьому *циліндр* називають *описаним навколо кулі*.

Вписати кулю в циліндр можна тоді і тільки тоді, коли він є рівностороннім.

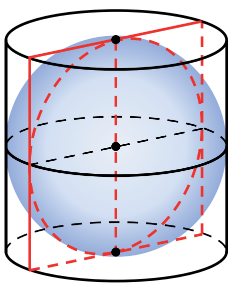
***Кулю* називають *вписаною в конус*, якщо основа і всі твірні конуса дотикаються до кулі** (мал. 8.12).

При цьому *конус* називають *описаним навколо кулі*.

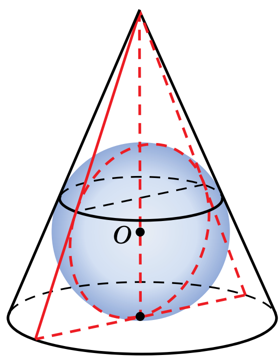
Сформулюємо властивості описаного навколо кулі конуса.

1. У будь-який конус можна вписати кулю.

2. Центр кулі збігається із центром круга, вписаного в осьовий переріз конуса, а радіус кулі дорівнює радіусу цього круга.



Мал. 8.11



Мал. 8.12

***Кулю* називають *описаною навколо циліндра*, якщо основи циліндра є перерізами кулі** (мал. 8.13).

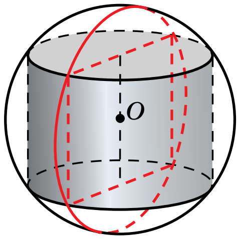
При цьому *циліндр* називають *вписаним у кулю*.

Сформулюємо властивості вписаного в кулю циліндра.

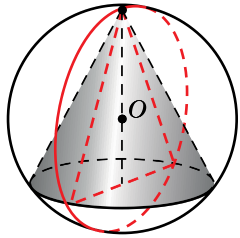
1. Навколо будь-якого циліндра можна описати кулю.

2. Центром кулі є середина відрізка, що сполучає центри основ циліндра.

3. Радіус кулі дорівнює радіусу круга, описаного навколо осьового перерізу циліндра.



Мал. 8.13



Мал. 8.14

***Кулю* називають *описаною навколо конуса*, якщо основа конуса є перерізом кулі, а вершина конуса лежить на поверхні кулі** (мал. 8.14).

При цьому *конус* називають *вписаним у кулю*.

Сформулюємо властивості вписаного в кулю конуса.

1. Навколо будь-якого конуса можна описати кулю.

2. Центр кулі збігається із центром круга, описаного навколо осьового перерізу конуса, а радіус кулі дорівнює радіусу цього круга.

Задача 11. У рівносторонній конус вписано кулю, радіус якої – 2 см. Знайдіть радіус основи і висоту конуса.

Розв'язання. Нехай на малюнку 8.15 зображено осьовий переріз даної в умові комбінації конуса і кулі, $OQ = 2$ см – радіус вписаної кулі.

1) Оскільки $\triangle ABC$ рівносторонній, то

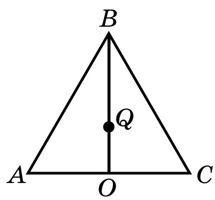
$$OQ = \frac{AC\sqrt{3}}{6}, \text{ тоді } AC = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

2) Знайдемо радіус основи конуса:

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

3) Тепер знайдемо висоту конуса:

$$BO = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 6 \text{ (см)}.$$



Мал. 8.15

Відповідь. $2\sqrt{3}$ см, 6 см.

Зверніть увагу, що під час розв'язування задач на комбінацію кулі з іншими тілами обертання на малюнку часто достатньо зображувати лише осьовий переріз даної в задачі комбінації тіл обертання.

• Яку призму називають вписаною в циліндр? Сформулюйте її властивості. • Яку призму називають описаною навколо циліндра? Сформулюйте її властивості. • Яку піраміду називають вписаною в конус? Сформулюйте її властивості. • Яку піраміду називають описаною навколо конуса? Сформулюйте її властивості. • Який многогранник називають вписаним у кулю? • Сформулюйте властивості призми, вписаної в кулю. • Сформулюйте властивості піраміди, вписаної в кулю. • Який многогранник називають описаним навколо кулі? Сформулюйте властивості призми, описаної навколо кулі. • Сформулюйте властивості піраміди, описаної навколо кулі. • Яку кулю називають вписаною в циліндр. За яких умов у циліндр можна вписати кулю? • Яку кулю називають вписаною в конус? Сформулюйте властивості конуса, описаного навколо кулі. • Яку кулю називають описаною навколо циліндра? Сформулюйте властивості циліндра, вписаного в кулю. • Яку кулю називають описаною навколо конуса? Сформулюйте властивості конуса, вписаного в кулю.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

8.1. Чи можна описати циліндр навколо прямої призми, основою якої є:
1) квадрат; 2) прямокутна трапеція?

8.2. Чи можна вписати циліндр у пряму призму, основою якої є:
1) трикутник; 2) прямокутник, який не є квадратом?

8.3. У конус вписано піраміду, основою якої є тупокутний трикутник. Як розташована основа висоти конуса відносно трикутника, що є основою піраміди?

8.4. У конус вписано піраміду, основою якої є гострокутний трикутник. Як розташована основа висоти конуса відносно трикутника, що є основою піраміди?

2

8.5. У циліндр, радіус основи якого дорівнює 3 см, а висота – $5\sqrt{2}$ см, вписано правильну чотирикутну призму. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

8.6. Навколо циліндра, радіус якого дорівнює 8 см, а висота – $6\sqrt{3}$ см, описано правильну трикутну призму. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

8.7. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, бічна грань нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть площу основи конуса, вписаного в цю піраміду.

8.8. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 9 см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом $30°$. Знайдіть площу основи конуса, описаного навколо цієї піраміди.

8.9. У куб вписано кулю, радіус якої дорівнює 3 см. Знайдіть площу повної поверхні куба.

8.10. У куб, площа грані якого дорівнює 64 см^2, вписано кулю. Знайдіть діаметр кулі.

8.11. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см і утворює з висотою кут $45°$. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо цієї піраміди.

8.12. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см і утворює з висотою кут $60°$. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, вписаного в цю піраміду.

8.13. Основа прямої призми – квадрат з діагоналлю $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, вписаного в цю призму, якщо площа діагонального перерізу призми дорівнює $24\sqrt{2}$ см^2.

8.14. Основа прямої призми – прямокутник зі сторонами 7 см і 24 см. Діагональ призми утворює з площиною основи кут $45°$. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, описаного навколо призми.

8.15. Знайдіть відношення радіуса кулі, вписаної в куб, до діагоналі цього куба.

8.16. Діагональ грані куба дорівнює $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть радіус кулі, вписаної у цей куб.

8.17. Ребро куба дорівнює 6 см. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо куба.

8.18. Радіус кулі, описаної навколо куба, дорівнює $8\sqrt{3}$ см. Знайдіть ребро куба.

8.19. Основою прямої призми, у яку можна вписати кулю, є рівнобедрений трикутник зі сторонами 5 см, 5 см і 6 см. Знайдіть радіус вписаної кулі.

8.20. Основою прямої призми, у яку можна вписати кулю, є прямокутний трикутник із катетами 3 см і 4 см. Знайдіть радіус вписаної кулі.

8.21. Радіус основи конуса дорівнює 6 см, а його осьовим перерізом є правильний трикутник. Знайдіть радіус кулі, вписаної в конус.

8.22. Радіус кулі, вписаної в конус, дорівнює 3 см, осьовим перерізом конуса є правильний трикутник. Знайдіть радіус основи конуса.

8.23. Радіус основи конуса дорівнює r, а кут при вершині його осьового перерізу дорівнює α. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо конуса.

8.24. Центр описаної навколо конуса кулі належить основі конуса. Знайдіть радіус кулі, якщо твірна конуса дорівнює 4 см.

8.25. Радіус основи циліндра дорівнює 3 см, а висота – 8 см. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо циліндра.

8.26. Радіус кулі, описаної навколо циліндра, дорівнює 10 см, а радіус основи циліндра – 8 см. Знайдіть висоту циліндра.

8.27. У циліндр вписано сферу радіуса 5 см. Знайдіть діагональ осьового перерізу циліндра.

8.28. У циліндр вписано сферу радіуса 3 см. Знайдіть периметр осьового перерізу циліндра та його площу.

8.29. Навколо прямокутного паралелепіпеда описано кулю, радіус якої – 7 см. Основою паралелепіпеда є прямокутник зі сторонами 6 см і 12 см. Знайдіть висоту паралелепіпеда.

8.30. Основою правильної чотирикутної призми є квадрат зі стороною 2 дм, а висота призми – 1 дм. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо призми.

3 **8.31.** Навколо правильної призми описано сферу. Знайдіть її радіус, якщо відстань від центра сфери до бічної грані призми дорівнює 4 см, а діагональ бічної грані дорівнює 6 см.

8.32. Навколо правильної призми описано кулю, радіус якої – 10 см. Знайдіть відстань від центра кулі до ребра призми, якщо довжина цього ребра дорівнює 12 см.

8.33. Основою трикутної піраміди є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо піраміди.

8.34. Основою трикутної піраміди є прямокутний трикутник із гіпотенузою 15 см і катетом 12 см. Висота кожної бічної грані дорівнює 5 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, вписаного в піраміду.

8.35. Радіус кола, вписаного в основу правильної трикутної призми, дорівнює 3 см, а бічне ребро призми – 16 см. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо призми.

8.36. Радіус кола, вписаного в основу правильної чотирикутної призми, дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а бічне ребро призми – 12 см. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо призми.

8.37. Навколо піраміди, у якої всі бічні ребра між собою рівні і дорівнюють b, а висота – h, описано кулю радіуса R. Доведіть, що $R = \frac{b^2}{2h}$.

8.38. У правильній п'ятикутній піраміді бічне ребро дорівнює 8 см, а радіус кулі, описаної навколо піраміди, – 10 см. Знайдіть висоту піраміди.

8.39. У правильній шестикутній піраміді бічне ребро дорівнює 6 см, а висота – 4 см. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо піраміди.

8.40. Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди прямий, а сторона основи дорівнює a. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо піраміди.

8.41. Кожне ребро чотирикутної піраміди дорівнює a. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо піраміди.

8.42. У кулю, радіус якої дорівнює 5 см, вписано правильну чотирикутну піраміду, висота якої дорівнює 8 см. Знайдіть:

1) бічне ребро піраміди; 2) площу основи піраміди.

8.43. У кулю, радіус якої дорівнює 10 см, вписано правильну трикутну піраміду, висота якої дорівнює 18 см. Знайдіть:

1) бічне ребро піраміди; 2) площу основи піраміди.

8.44. У правильну трикутну призму вписано кулю, площа великого круга якої дорівнює 9π см^2. Знайдіть площу повної поверхні призми.

8.45. Основою призми є ромб, площа якого дорівнює 80 см^2. У призму вписано кулю, площа великого круга якої дорівнює 16π см^2. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

8.46. У правильну чотирикутну піраміду вписано кулю. Висота піраміди дорівнює 9 см, а двогранний кут при основі – $60°$. Знайдіть радіус кулі.

8.47. У правильну трикутну піраміду вписано кулю, радіус якої дорівнює 4 см. Знайдіть висоту піраміди, якщо вона утворює кут $30°$ з апофемою.

8.48. У правильну трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$ можна вписати кулю, CK – висота основи призми. Знайдіть кут C_1KC.

8.49. У правильну трикутну призму можна вписати кулю. Знайдіть кут, який утворює діагональ бічної грані з площиною основи.

8.50. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція з периметром 16 см і гострим кутом 30°. Знайдіть радіус кулі, вписаної в призму.

8.51. Основою прямої призми є прямокутна трапеція з основами 8 см і 2 см та гострим кутом 30°. Знайдіть радіус сфери, вписаної у цю призму.

8.52. Навколо правильної трикутної призми, сторона основи якої дорівнює $3\sqrt{3}$ см, а бічне ребро – 8 см, описано кулю. Знайдіть її радіус.

8.53. Навколо правильної трикутної призми описано кулю, радіус якої – 10 см. Площа основи призми дорівнює $27\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть бічне ребро призми.

8.54. Основою прямої призми є прямокутний трикутник, бічне ребро призми дорівнює 6 см, а радіус описаної навколо призми кулі дорівнює 10 см. Знайдіть довжину кола, описаного навколо основи призми.

8.55. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з основою 12 см і бічною стороною 10 см. Бічне ребро призми дорівнює $\sqrt{26}$ см. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо призми.

8.56. У сферу радіуса 3 см вписано правильну чотирикутну призму, висота якої – 2 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

8.57. У правильній шестикутній призмі периметри двох граней дорівнюють 54 см і 178 см. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо призми.

8.58. Навколо правильної трикутної призми, усі ребра якої завдовжки a, описано кулю. Знайдіть радіус цієї кулі.

8.59. У правильній трикутній призмі висота дорівнює 4 см, а периметр основи – 72 см. Знайдіть радіус описаної кулі.

8.60. Знайдіть відношення радіуса вписаної у правильний тетраедр кулі до радіуса описаної навколо тетраедра кулі.

8.61. У якому відношенні (рахуючи від вершини) центр кулі, вписаної у правильний тетраедр, ділить його висоту.

8.62. У циліндр, який отримано обертанням прямокутника, площа якого – Q, навколо однієї з його сторін, вписано кулю. Знайдіть сторони прямокутника і радіус кулі.

8.63. Циліндр отримано обертанням прямокутника зі сторонами 5 см і 6 см навколо однієї зі сторін. Знайдіть радіус описаної навколо циліндра кулі.

8.64. У циліндрі паралельно його основам проведено переріз так, що в кожний з отриманих циліндрів можна вписати сферу. Знайдіть радіуси цих сфер, якщо діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює $4\sqrt{5}$ см.

8.65. Один із кутів осьового перерізу конуса дорівнює $120°$, а радіус вписаної в конус кулі дорівнює 4 см. Знайдіть довжину лінії дотику сферичної та конічної поверхонь.

8.66. Твірна конуса дорівнює 5 см, а радіус основи – 3 см. Знайдіть радіус кулі, вписаної в цей конус.

8.67. Твірна конуса утворює з основою кут 2α, а радіус кулі, вписаної в конус, дорівнює r. Знайдіть висоту конуса.

8.68. Нехай висота конуса дорівнює h, радіус основи – r, а радіус описаної навколо конуса кулі – R. Доведіть, що $(h - R)^2 + r^2 = R^2$.

8.69. У кулю радіуса 5 см вписано конус, радіус основи якого дорівнює 3 см. Знайдіть висоту конуса.

8.70. Висота конуса дорівнює 8 см, а радіус його основи – 4 см. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо конуса.

8.71. У правильну чотирикутну піраміду, двогранний кут при основі якої дорівнює $60°$, вписано кулю. Доведіть, що центр кулі ділить висоту піраміди у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершини піраміди.

8.72. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює $2\sqrt{3}$ см, а радіус кулі дорівнює 1 см. Знайдіть кут між апофемою піраміди та її висотою.

8.73. Основою піраміди є ромб із гострим кутом $60°$, основою висоти піраміди є точка перетину діагоналей ромба. Одна з бічних граней піраміди нахилена до площини основи під кутом $60°$. Радіус кулі, вписаної в піраміду, дорівнює 4 см. Знайдіть площу основи піраміди.

8.74. Площа основи правильної шестикутної піраміди дорівнює $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см^2, а кут між апофемою і висотою піраміди – $30°$. Знайдіть радіус кулі, вписаної в піраміду.

8.75. У правильній трикутній піраміді висота дорівнює 8 см, а радіус кола, вписаного в основу, – 6 см. Знайдіть радіус кулі, вписаної в піраміду.

8.76. У правильній чотирикутній піраміді апофема дорівнює 15 см, а радіус кола, вписаного в основу, – 9 см. Знайдіть радіус кулі, вписаної в піраміду.

4 **8.77.** Сторона основи правильної шестикутної піраміди дорівнює $\sqrt{3}$ см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо піраміди.

8.78. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює $3\sqrt{3}$ см, а бічне ребро утворює з висотою кут $45°$. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо піраміди.

8.79. Кут між висотою і бічним ребром правильної трикутної піраміди дорівнює $15°$. У якому відношенні центр описаної кулі ділить висоту піраміди?

8.80. Навколо кулі описано пряму призму, основою якої є ромб. Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут $30°$. Знайдіть гострий кут ромба.

8.81. У правильну чотирикутну піраміду вписано куб так, що одна з основ куба належить площині основи піраміди, а вершини іншої основи належать бічним ребрам піраміди. Знайдіть відношення бічного ребра піраміди до ребра куба.

8.82. У правильну трикутну піраміду вписано правильну трикутну призму так, що одна з основ призми належить площині основи піраміди, а вершини іншої основи належать бічним ребрам піраміди. Висота піраміди дорівнює 2 см, а сторона її основи – 3 см. Усі ребра призми рівні між собою. Знайдіть їхню довжину.

8.83. У рівносторонній циліндр, висота якого дорівнює $4\sqrt{2}$ см, вписано правильну чотирикутну призму. Знайдіть відстань і кут між діагоналлю бічної грані призми і віссю циліндра.

8.84. Радіуси кіл, описаних навколо основи та бічної грані правильної трикутної піраміди, відповідно дорівнюють 8 см і 7 см. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо піраміди.

8.85. Радіуси кіл, описаних навколо основи та бічної грані правильної чотирикутної піраміди, відповідно дорівнюють 4 см і 3 см. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо піраміди.

8.86. У правильну шестикутну призму можна вписати кулю. Знайдіть відношення радіуса цієї кулі до радіуса кулі, описаної навколо призми.

8.87. У сферу, радіус якої – 4 см, вписано правильну трикутну піраміду, висота якої дорівнює стороні основи. Знайдіть площу основи піраміди.

8.88. У сферу, радіус якої – 3 см, вписано правильну трикутну піраміду, у якої висота дорівнює стороні основи. Знайдіть площу основи піраміди.

8.89. У сферу радіуса 14 см вписано правильну трикутну призму, у якої висота на 17 см більша за сторону основи. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

8.90. Основою призми є рівнобедрений трикутник з основою 6 см і висотою 1 см. Бічне ребро призми дорівнює 24 см. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо призми.

8.91. Менша діагональ основи правильної шестикутної призми дорівнює 9 см, а бічне ребро – 26 см. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо призми.

8.92. У сферу, радіус якої – 2 см, вписано правильну шестикутну призму. Радіус сфери, проведений у вершину призми, утворює з площиною бічної грані кут $30°$. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

8.93. У правильний тетраедр вписано кулю радіуса r. Знайдіть радіус перерізу цієї кулі площиною, яка перпендикулярна до висоти тетраедра і ділить її у відношенні $2:1$, починаючи від вершини тетраедра.

8.94. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 25 см, 29 см і 38 см, а всі висоти бічних граней піраміди дорівнюють по 10 см. Знайдіть радіус сфери, вписаної в піраміду.

8.95. У правильну піраміду, площа основи якої дорівнює $75\sqrt{3}$ см^2, вписано кулю. Косинус двогранного кута при основі дорівнює $\frac{8}{17}$. Знайдіть радіус кулі.

8.96. Основою піраміди є ромб із діагоналями 6 см і 8 см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи і дорівнює 1 см. Знайдіть радіус сфери, вписаної в піраміду.

8.97. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює 8 см, а бічне ребро – 8,5 см. Знайдіть радіус кулі, вписаної в піраміду.

8.98. У правильній трикутній піраміді центри вписаної та описаної куль збігаються. Знайдіть плоский кут при вершині піраміди.

8.99. У правильній чотирикутній піраміді центри вписаної та описаної куль збігаються. Знайдіть плоский кут при вершині піраміди.

8.100. Куля, радіус якої дорівнює 1 дм, дотикається до всіх ребер правильної шестикутної призми. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

8.101. Куля, радіус якої дорівнює 1 см, дотикається до всіх ребер правильної трикутної призми. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

8.102. Відомо, що центр кулі, вписаної в конус, збігається із центром кулі, описаної навколо конуса. Знайдіть кут нахилу твірної конуса до площини основи.

8.103. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см, а висота піраміди завдовжки 4 см проходить через вершину прямого кута основи. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо піраміди.

8.104. Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною завдовжки $3\sqrt{3}$ см. Одне з бічних ребер піраміди, що дорівнює 8 см, перпендикулярне до основи. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо піраміди.

8.105. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою 6 см і бічною стороною 5 см. Бічне ребро піраміди завдовжки 4 см, яке проходить через вершину, протилежну основі цього трикутника, є також і висотою піраміди. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо піраміди.

8.106. Основою піраміди $QABCD$ є прямокутник зі сторонами 12 см і 14 см. Висота піраміди QA дорівнює 12 см. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо піраміди.

8.107. Основою піраміди $QABCD$ є прямокутник зі сторонами 1 см і 2 см. Висота піраміди QD дорівнює 2 см. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо піраміди.

8.108. У куб із ребром a вписано кулю. Знайдіть найменший радіус кулі, яка дотикається до трьох граней куба та до даної кулі.

8.109. У чотирикутну піраміду, кожне ребро якої дорівнює a, вписано рівносторонній циліндр, у якого одна з основ лежить у площині основи піраміди, а друга – має спільну точку з кожною апофемою піраміди. Знайдіть радіус циліндра.

8.110. Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є рівнобічна трапеція $ABCD$, у якої $AB = CD$, а гострий кут дорівнює $30°$. Сума всіх ребер призми дорівнює 40 см. Знайдіть радіус кулі, вписаної в призму.

8.111. Центр кулі, описаної навколо правильної чотирикутної піраміди, збігається із центром кулі, вписаної в цю піраміду. Знайдіть кут нахилу бічного ребра до площини основи.

8.112. Знайдіть двогранний кут при основі правильної чотирикутної піраміди, якщо центри вписаної та описаної куль симетричні відносно площини основи.

8.113. Центри вписаної та описаної сфер правильної чотирикутної піраміди симетричні відносно площини основи. Знайдіть відношення радіуса описаної сфери до радіуса вписаної сфери.

8.114. Радіус кулі, описаної навколо правильної чотирикутної піраміди, у 6 разів більший за радіус кулі, вписаної у цю піраміду. Знайдіть міру плоского кута при вершині піраміди.

Життєва математика

8.115. Діаметр вала колодязя дорівнює 35 см, глибина колодязя до поверхні води – 8,7 м. Скільки разів треба повернути рукоятку вала, щоб витягти відро з водою?

8.116. Поле стадіону має форму прямокутника, до якого з двох протилежних сторін прилягають півкола. Довжина бігової доріжки навколо поля дорівнює 400 м. Довжина кожної з двох прямолінійних ділянок доріжки – 100 м. Знайдіть ширину поля стадіону.

Цікаві задачі для учнів неледачих

8.119. (*Зовнішнє незалежне оцінювання, 2018 р.*) У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ сторона основи $ABCD$ дорівнює c, а бічне ребро утворює з площиною основи кут α. Через основу висоти піраміди паралельно грані ASD проведено площину β.

1. Побудуйте переріз піраміди $SABCD$ площиною β.
2. Обґрунтуйте вид перерізу.
3. Визначте периметр перерізу.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

8.117. Знайдіть об'єм куба, ребро якого дорівнює:

1) 5 см; 2) 2 дм; 3) 1 м; 4) 6 см.

8.118. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, лінійні виміри якого дорівнюють:

1) 2 см, 4 см і 5 см; 2) 2 дм, 12 см і 15 см;
3) 9 см, 1 дм і 180 мм; 4) 45 мм, 4 см і 0,7 дм.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 8

1. Скільки хорд завдовжки 4 см можна провести в колі, радіус якого дорівнює 1,8 см?

А	Б	В	Г	Д
жодної	одну	дві	три	безліч

2. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 см і 4 см. Знайдіть синус меншого кута цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$

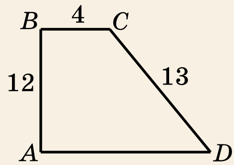
3. Діагональ основи правильної чотирикутної призми дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а висота призми – 5 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

А	Б	В	Г	Д
96 см^2	32 см^2	80 см^2	112 см^2	144 см^2

4. Радіус основи конуса в 4 рази більший за радіус основи циліндра. Висоти конуса і циліндра між собою рівні. Знайдіть відношення площі осьового перерізу циліндра до площі осьового перерізу конуса.

А	Б	В	Г	Д
1 : 1	1 : 2	1 : 3	1 : 4	2 : 1

5. На малюнку зображено прямокутну трапецію, у якої $BC = 4$ см, $AB = 12$ см, $CD = 13$ см. Установіть відповідність між проекцією відрізка на пряму (1–4) та довжиною цієї проекції (А–Д).



Проекція відрізка на пряму

1 Проекція відрізка BC на пряму AD

2 Проекція відрізка CD на пряму AD

3 Проекція відрізка BD на пряму AD

4 Проекція відрізка AD на пряму BD

Довжина проекції

А 9,6 см

Б 9 см

В 5,4 см

Г 5 см

Д 4 см

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Основи трапеції дорівнюють 9 см і 1 см, а бічні сторони – 15 см і 17 см. Знайдіть (у см^2) площу трапеції.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 2

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. Прямокутник зі сторонами 3 см і 7 см обертається навколо меншої сторони. Знайдіть діаметр циліндра, що при цьому утворився.

А. 3 см **Б.** 6 см **В.** 7 см **Г.** 14 см

2. Радіус основи та висота конуса відповідно дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть твірну конуса.

А. 7 см **Б.** 9 см **В.** 10 см **Г.** 14 см

3. Радіус кулі дорівнює 8 см. Знайдіть довжину великого кола цієї кулі.

А. 18π см **Б.** 16π см **В.** 8π см **Г.** 4π см

4. Осьовий переріз конуса – прямокутний трикутник, катет якого дорівнює 4 см. Знайдіть висоту конуса.

А. $2\sqrt{2}$ см **Б.** $4\sqrt{2}$ см **В.** 2 см **Г.** $\sqrt{2}$ см

5. Радіус кулі – 13 см, а площа перерізу кулі площиною дорівнює 25π см^2. Знайдіть відстань від центра кулі до площини перерізу.

А. 5 см **Б.** 8 см **В.** 10 см **Г.** 12 см

6. У циліндр, радіус основи якого дорівнює $6\sqrt{3}$ см, вписано правильну трикутну призму. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо висота циліндра дорівнює 5 см.

А. 180 см^2 **Б.** 270 см^2 **В.** 90 см^2 **Г.** 540 см^2

3

7. Висота конуса дорівнює 15 см, а радіус його основи – 12 см. На відстані 10 см від вершини конуса проведено переріз, паралельний основі. Знайдіть площу цього перерізу.

А. 62π см^2 **Б.** 81π см^2 **В.** 36π см^2 **Г.** 100π см^2

8. Вершини прямокутного трикутника з катетами 3 см і 4 см лежать на сфері, радіус якої – 6,5 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини трикутника.

А. 3 см **Б.** 4 см **В.** 5 см **Г.** 6 см

9. У правильну чотирикутну піраміду, апофема якої дорівнює 12 см, вписано кулю. Знайдіть радіус кулі, якщо бічна грань піраміди нахилена до площини основи під кутом 60°.

А. $6\sqrt{3}$ см **Б.** $2\sqrt{3}$ см **В.** $4\sqrt{3}$ см **Г.** 4 см

4

10. Паралельно осі циліндра проведено переріз, що перетинає основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом 120°, а із центра іншої основи – під прямим кутом. Площа перерізу, що при цьому утворився, дорівнює $2\sqrt{6}$ см^2. Знайдіть радіус циліндра.

А. 2 см **Б.** 3 см **В.** $2\sqrt{2}$ см **Г.** $2\sqrt{3}$ см

11. Твірна конуса утворює з його висотою кут α. Знайдіть площу основи конуса, якщо площа його осьового перерізу дорівнює S.

А. $\pi S \operatorname{ctg}\alpha$ **Б.** πS **В.** $\dfrac{\pi S}{\operatorname{ctg}\alpha}$ **Г.** $\dfrac{S}{\operatorname{ctg}\alpha}$

12. Радіус кола, вписаного в основу правильної чотирикутної піраміди, дорівнює 2 см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 60°. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо піраміди.

А. $\sqrt{6}$ см **Б.** $\dfrac{3}{4}\sqrt{6}$ см **В.** $\dfrac{4}{3}\sqrt{6}$ см **Г.** $2\sqrt{6}$ см

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 5–8

1 **1.** Прямокутник зі сторонами 3 см і 5 см обертається навколо меншої сторони. Знайдіть довжини висоти, радіуса та діаметра утвореного циліндра.

2. Радіус основи конуса дорівнює 5 см, а твірна – 13 см. Знайдіть висоту конуса.

3. Радіус сфери дорівнює 7 см. Чи може відстань між деякими двома точками, що належать сфері, дорівнювати:
1) 2 см; 2) 11 см; 3) 14 см; 4) 15 см?

2 **4.** Осьовий переріз конуса – прямокутний трикутник із гіпотенузою 8 см. Знайдіть:
1) твірну конуса; 2) радіус основи конуса;
3) висоту конуса; 4) площу осьового перерізу конуса.

5. Кулю, радіус якої – 17 см, на відстані 15 см від її центра перетинає площина. Знайдіть площу перерізу.

6. У циліндр, радіус якого дорівнює 4 см, а висота – 7 см, вписано правильну чотирикутну призму. Знайдіть:
1) діагональ призми; 2) площу бічної поверхні призми.

3 **7.** Висота конуса дорівнює 12 см, а радіус основи – 9 см. Площина, перпендикулярна до осі конуса, перетинає його бічну поверхню по колу, довжина якого – 6π см. Знайдіть відстань від вершини конуса до площини перерізу.

8. У правильну трикутну піраміду вписано кулю. Висота піраміди дорівнює 6 см і утворює кут $30°$ з апофемою. Знайдіть радіус вписаної у цю піраміду кулі.

4 **9.** Паралельно осі циліндра проведено переріз, що перетинає основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під прямим кутом, а із центра іншої основи – під кутом $60°$. Площа перерізу, що при цьому утворився, дорівнює $8\sqrt{2}$ дм^2. Знайдіть радіус циліндра.

Додаткові завдання

3 **10.** Вершини рівностороннього трикутника лежать на сфері, радіус якої – 6 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини трикутника, якщо сторона трикутника – 9 см.

4 **11.** Радіус кола, вписаного в основу правильної шестикутної піраміди, дорівнює 2 см, а бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо піраміди.

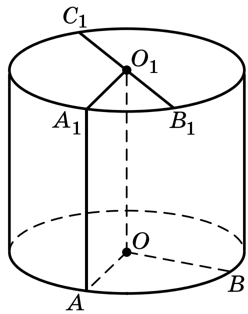
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 2

До § 5

1. (*Усно*). Наведіть приклади предметів побуту, що є тілами обертання.

2. На малюнку 8.16 зображено циліндр, у якого O і O_1 – центри основ, AA_1 – твірна. Які з тверджень є правильними:

1) $OO_1 \perp AO$; 2) $OO_1 > AA_1$;
3) $OA = OB_1$; 4) $\angle O_1A_1A < 90°$;
5) $OB = \dfrac{C_1B_1}{2}$; 6) $OB \neq O_1C_1$;
7) $AA_1 \parallel OO_1$; 8) $AA_1 \perp AO$?



Мал. 8.16

3. Квадрат зі стороною 4 см обертається навколо однієї зі своїх сторін. Знайдіть довжини радіуса, діаметра та висоти циліндра, що при цьому утворився.

4. Радіус основи циліндра дорівнює 3 см, а діагональ осьового перерізу – 10 см. Знайдіть висоту циліндра.

5. Осьовим перерізом циліндра є прямокутник, діагональ якого завдовжки $8\sqrt{2}$ см нахилена до площини основи під кутом 45°. Знайдіть:
1) радіус основи циліндра;
2) висоту циліндра;
3) площу осьового перерізу циліндра;
4) площу основи циліндра.

6. Довжина кола основи циліндра дорівнює 12π см, а діагональ осьового перерізу – 37 см. Знайдіть:
1) довжину висоти циліндра;
2) площу осьового перерізу циліндра.

7. Осьовий переріз циліндра – квадрат, площа якого – 16 см^2. Знайдіть площу основи циліндра.

8. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть радіус та висоту циліндра.

9. Діагональ осьового перерізу циліндра на 8 см більша за твірну і на 7 см більша за радіус циліндра. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

10. Паралельно осі циліндра проведено площину. Переріз, що при цьому утворився, є квадратом із діагоналлю $6\sqrt{2}$ см. Ця площина відтинає від кола основи дугу в $90°$. Знайдіть:
1) висоту циліндра; 2) площу перерізу циліндра;
3) радіус циліндра; 4) площу основи циліндра.

11. Висота циліндра дорівнює 6 см, а радіус його основи – 5 см. Циліндр перетинає паралельна його осі площина так, що в перерізі утворився квадрат. Знайдіть відстань від осі циліндра до цього перерізу.

12. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра із серединою радіуса нижньої основи, дорівнює m і утворює з площиною основи циліндра кут γ. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

13. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює 48 см^2. Паралельно осі циліндра проведено переріз, який є квадратом із периметром 24 см. Знайдіть площу основи циліндра.

4 **14.** Через твірну циліндра проведено два взаємно перпендикулярних перерізи, площі яких – 15 см^2 і 20 см^2. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

15. Діагоналі паралельного осі циліндра перерізу взаємно перпендикулярні. Хорду, по якій цей переріз перетинає нижню основу, видно із центра верхньої основи під кутом $30°$. Площа перерізу дорівнює 16 см^2. Знайдіть площу основи циліндра.

16. Паралельно осі циліндра проведено переріз, який перетинає нижню основу циліндра по хорді, яку видно із центра верхньої основи під кутом β. Відстань від центра верхньої основи до цієї хорди дорівнює l, а радіус циліндра – r. Знайдіть відстань від осі циліндра до площини перерізу.

До § 6

1 **17.** Побудуйте зображення конуса з радіусом основи OT і твірною BT.

18. Висота конуса дорівнює 5 см, а радіус його основи – 12 см. Знайдіть твірну конуса.

19. Твірна конуса дорівнює 4 см і утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть висоту та радіус основи конуса.

2 **20.** Радіус основи конуса дорівнює 4 см, а твірна утворює з висотою кут $45°$. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

21. Твірна конуса вдвічі довша за радіус його основи. Який кут утворюють між собою твірна та висота конуса?

22. Осьовим перерізом конуса є рівнобедрений трикутник із кутом при вершині $120°$ і бічною стороною 4 см. Знайдіть:
1) висоту конуса; 2) радіус основи конуса;
3) площу осьового перерізу конуса.

23. Радіус основи конуса дорівнює 8 см. Перпендикулярно до висоти конуса проведено переріз. Чи може його площа дорівнювати: 1) 16π см^2; 2) 64π см^2; 3) 100π см^2?

24. У зрізаному конусі твірна дорівнює 17 см, а висота – 15 см. Знайдіть радіус більшої основи конуса, якщо радіус його меншої основи дорівнює 4 см.

25. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 6 см і 2 см, а твірна нахилена до площини більшої основи під кутом $30°$. Знайдіть висоту та твірну зрізаного конуса.

3 **26.** Твірна конуса дорівнює 13 см, а його висота на 7 см більша за радіус основи. Знайдіть периметр осьового перерізу конуса.

27. Висота конуса дорівнює 10 см, а радіус основи – 5 см. Паралельно основі конуса на відстані 6 см від його вершини проведено переріз. Знайдіть його площу.

28. Довжини кіл основ зрізаного конуса дорівнюють 4π см і 20π см, висота конуса дорівнює 15 см, а твірна – 17 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

29. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 3 см і 9 см, а твірна в 1,25 раза більша за висоту. Знайдіть периметр осьового перерізу зрізаного конуса.

30. Осьовим перерізом конуса є правильний трикутник. Через дві твірні конуса, кут між якими – α, проведено переріз. Знайдіть площу цього перерізу, якщо радіус основи конуса дорівнює r.

31. У конусі, радіус основи якого – 3 см, а твірна нахилена до площини основи під кутом $30°$, через вершину конуса під кутом $45°$ до його основи проведено площину. Знайдіть площу перерізу, що при цьому утворився.

32. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює $30°$, проведено переріз, площа якого – 9 см^2. Кут між твірною і висотою конуса дорівнює $30°$. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

33. У зрізаному конусі твірна завдовжки 18 см утворює з площиною основи кут $30°$ і є перпендикулярною до діагоналі осьового перерізу. Знайдіть:
1) радіуси основ зрізаного конуса;
2) площу його осьового перерізу.

34. Довжина кола основи конуса дорівнює πl, а твірна конуса утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

35. Через дві твірні конуса проведено переріз, площа якого дорівнює S. Твірна конуса утворює кут β із хордою, по якій переріз перетинає основу, а з площиною основи – кут α. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

До § 7

36. Знайдіть діаметр сфери, якщо її радіус дорівнює:

1) 3,2 см; 2) $\frac{3}{4}$ дм.

37. Знайдіть радіус кулі, якщо її діаметр дорівнює:

1) 1,8 дм; 2) $\frac{4}{5}$ м.

38. Радіус кулі дорівнює 4 см. Чи може відстань між двома деякими точками сфери, що є поверхнею цієї кулі, дорівнювати:

1) 3,9 см; 2) 4,1 см; 3) 8 см; 4) 8,1 см?

39. Діаметр кулі дорівнює 10 см. Усередині кулі, зовні чи на сферичній поверхні, що обмежує кулю, лежить точка, яка віддалена від центра кулі на:

1) 4 см; 2) 5 см; 3) 6 см; 4) 10 см?

40. Діаметр кулі дорівнює 6 см. Знайдіть:
1) довжину великого кола цієї кулі;
2) площу великого круга цієї кулі.

41. Діаметр кулі – 48 см. Точка M належить площині, дотичній до кулі, і віддалена від центра кулі на 25 см. Знайдіть відстань від точки M до точки дотику кулі з площиною.

42. Довжина лінії, по якій площина перетинає сферу, дорівнює 16π см. Знайдіть відстань від центра сфери до січної площини, якщо діаметр сфери дорівнює 10 см.

43. Сферу перетинає площина на відстані 4 см від центра сфери. Радіус, проведений в одну з точок перетину площини і сфери, утворює із цією площиною кут 30°. Знайдіть діаметр сфери.

44. Діаметр кулі дорівнює 20 см. Точка C лежить на сфері, що обмежує кулю. Де може лежати точка D (усередині кулі, зовні чи на її сферичній поверхні), якщо:

1) $CD = 5$ см; 2) $CD = 10$ см; 3) $CD = 20$ см;
4) $CD = 21$ см; 5) $CD = \sqrt{15}$ см; 6) $CD = 10\sqrt{5}$ см?

45. Площина γ дотикається до сфери із центром O в точці C. Точка D належить площині γ і віддалена від точки C на 8 см. Відрізок OD перетинає сферу в точці M. Знайдіть радіус сфери, якщо $DM = 4$ см.

46. Через кінець діаметра кулі під кутом 30° до нього проведено переріз, площа якого – 27π см^2. Знайдіть радіус кулі.

47. Вершини прямокутника зі сторонами 12 см і 16 см належать сфері, радіус якої – 26 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини прямокутника.

48. Куля дотикається до всіх сторін трикутника зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Відстань від центра кулі до площини трикутника дорівнює 3 см. Знайдіть діаметр кулі.

49. На відстані $4\sqrt{2}$ см від центра кулі проведено переріз, площа якого в 9 разів менша за площу великого круга. Знайдіть довжину великого кола кулі.

50. Площа великого круга кулі дорівнює πS, а площа перерізу цієї кулі площиною – $\frac{\pi S}{3}$. На якій відстані від центра кулі проведено переріз?

51. Усі сторони рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 2 см і 18 см, дотикаються до сфери. Знайдіть радіус сфери, якщо відстань від центра сфери до площини трапеції дорівнює 4 см.

52. Діаметр кулі поділено двома точками на три частини у відношенні $5:3:2$. Знайдіть відношення площ перерізів кулі, які проходять через ці точки перпендикулярно до даного діаметра.

До § 8

53. Чи можна описати циліндр навколо прямої призми, основою якої є:
1) прямокутник;
2) паралелограм, у якого немає прямого кута?

54. У конус вписано піраміду, основою якої є прямокутний трикутник. Де міститься основа висоти конуса по відношенню до трикутника, що є основою піраміди?

55. У циліндр, радіус основи якого дорівнює 6 см, а висота – $6\sqrt{3}$ см, вписано правильну трикутну призму. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

56. Навколо циліндра, радіус основи якого дорівнює 8 см, а висота – 5 см, описано правильну чотирикутну призму. Знайдіть площу повної поверхні призми.

57. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом 45°. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, вписаного в цю піраміду.

58. Відомо, що у правильну чотирикутну призму можна вписати кулю. Доведіть, що ця призма є кубом.

59. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює l і утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу основи конуса, описаного навколо цієї піраміди.

60. Основа прямої призми – прямокутний трикутник із катетом 6 см і гіпотенузою 10 см. Найбільша за площею бічна грань призми – квадрат. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, описаного навколо призми.

61. У циліндр вписано правильну чотирикутну призму. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо осьовий переріз циліндра – квадрат зі стороною 4 см.

62. У правильну чотирикутну призму можна вписати кулю. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її висота – 6 см.

63. Діагональний переріз правильної чотирикутної піраміди – рівносторонній трикутник. Навколо піраміди описано кулю, радіус якої дорівнює $6\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу основи піраміди.

64. Основою піраміди є ромб зі стороною 5 см і площею 30 см^2. Висоти всіх бічних граней нахилені до площини основи під кутом 45°. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, вписаного в піраміду.

3 **65.** Основа піраміди – прямокутник, менша сторона якого дорівнює 9 см, а кут між діагоналями – 60°. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 30°. Знайдіть відношення площі осьового перерізу конуса, описаного навколо піраміди, до площі основи піраміди.

66. У правильній трикутній призмі діагональ бічної грані утворює з площиною основи кут 45°, а площа основи дорівнює $9\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо цієї призми.

67. У кулю вписано прямокутний паралелепіпед, лінійні виміри якого дорівнюють 4 см, 6 см і 12 см. Знайдіть радіус кулі.

68. Основою призми є рівнобічна трапеція з основами 2 см і 8 см. У призму вписано кулю, радіус якої дорівнює 4 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

4 **69.** Знайдіть радіус кулі, вписаної у трикутну піраміду, кожне ребро якої дорівнює $2\sqrt{6}$ см.

70. У правильній шестикутній піраміді апофема дорівнює 20 см, а висота – 16 см. Знайдіть радіус кулі, вписаної в піраміду.

71. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює $\sqrt{6}$ см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо піраміди.

72. У конус вписано трикутну піраміду, три бічні ребра якої попарно перпендикулярні. Знайдіть кут між твірною конуса і його висотою.

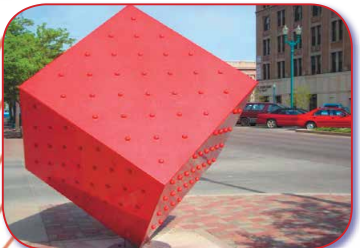
Україна у світі

У 2018 році українська шкільна команда вдало виступила на Міжнародній математичній олімпіаді. 59-та Міжнародна математична олімпіада відбулася 3–14 липня в м. Клуж-Напока (Румунія). Українські старшокласниця та п'ятеро старшокласників (на фото) здобули 4 золоті та 2 срібні медалі.

У загальному рейтингу українська команда посіла 4 місце з понад 100 країн світу, після США, Росії і Китаю. Це найбільше досягнення української команди за усі 26 років її виступів на цих престижних змаганнях. Досі найкращим результатом України на Міжнародній математичній олімпіаді було 6-те місце (у 2014, 2007 і 1997 роках).

Науковим керівником української команди вже багато років є професор кафедри обчислювальної математики КНУ імені Тараса Шевченка Богдан Владиславович Рубльов.

ОБ'ЄМИ МНОГОГРАННИКІВ



У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- ***пригадаєте*** поняття об'єму та формули для обчислення об'єму прямокутного паралелепіпеда і куба;
- ***дізнаєтеся*** про принцип Кавальєрі та його застосування;
- ***навчитеся*** знаходити об'єм призми, паралелепіпеда, піраміди, зрізаної піраміди.

§ 9. ОБ'ЄМ ТІЛА. ОБ'ЄМ ПРИЗМИ ТА ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

У цьому параграфі розглянемо одну з важливих характеристик геометричного тіла, а саме, *об'єм тіла*, а також дізнаємося, як знаходити об'єм призми.

1. Поняття об'єму

У повсякденному житті ми постійно стикаємося з поняттям об'єму. Наприклад, на упаковці рідких речовин (пакети із соком, ємності з напоями, олією, миючими засобами тощо) зазвичай вказують значення саме об'єму. При здійсненні оплати за природні ресурси або продукти їхньої переробки (вода, газ, бензин тощо) сума розраховується відповідно до спожитого об'єму. Вартість певних будівельних матеріалів або сировини (деревина, пісок, цегла тощо) також часто визначають за їхнім об'ємом.

З поняттям об'єму ми вже познайомилися в курсі математики 5 класу, а тепер розширимо та поглибимо ці знання.

Подібно до того, як для фігур на площині вводиться поняття площі, для геометричних тіл у просторі вводиться поняття об'єму. Так само, як плоска фігура займає деяку частину площини, геометричне тіло обмежує деяку частину простору. Кожному геометричному тілу можна поставити у відповідність значення його об'єму, тобто величину тієї частини простору, яку займає це тіло.

Сформулюємо *основні властивості об'єму*.

1. Об'єм геометричного тіла є додатним числом.
2. Рівні між собою геометричні тіла мають рівні об'єми.
3. Якщо геометричне тіло складається з кількох тіл, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів цих тіл.
4. Одиницею вимірювання об'єму є об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці вимірювання довжини.

Наприклад, якщо одиницею вимірювання довжини взяти 1 см, то відповідною одиницею вимірювання об'єму буде об'єм куба з ребром 1 см. Об'єм такого куба називають *один кубічний сантиметр* і позначають 1 см^3. У той самий спосіб можна визначити інші одиниці вимірювання об'єму, наприклад, 1 мм^3, 1 дм^3, 1 м^3.

Об'єм тіла прийнято позначати літерою V.

Тіла, які мають однакові об'єми, називають *рівновеликими*.

2. Об'єм прямокутного паралелепіпеда

Як нам відомо з 5 класу, якщо лінійні виміри прямокутного паралелепіпеда (довжина, ширина і висота) є натуральними числами a, b і c, то його *об'єм дорівнює добутку трьох його вимірів, тобто $V = abc$*.

Постає питання, як обчислити об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо хоча б один із його вимірів є числом дробовим або ірраціональним. Відповідь на це питання отримаємо з наступної теореми.

Т е о р е м а 1 (про об'єм прямокутного паралелепіпеда). **Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів.**

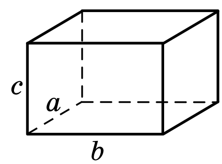
Доведення цієї теореми є досить громіздким і виконується аналогічно до доведення теореми про площу прямокутника, розглянутої у 8 класі. У цьому підручнику доведення теореми про об'єм прямокутного паралелепіпеда не наводимо. Розглянемо наслідок із цієї теореми.

Н а с л і д о к. **Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи на висоту.**

Справді, нехай, наприклад, грань із ребрами a і b є основою прямокутного паралелепіпеда (мал. 9.1), тоді площа основи S паралелепіпеда дорівнює ab, а висота h паралелепіпеда дорівнює c.

Тому $\boldsymbol{V = abc = Sh}$. ■

Розглянемо приклади розв'язування задач.



Мал. 9.1

Задача 1. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 см і 8 см, а діагональ більшої за площею бічної грані дорівнює 10 см. Знайти об'єм паралелепіпеда.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – даний прямокутний паралелепіпед, $AB = 2$ см, $AD = 8$ см, $A_1D = 10$ см (мал. 9.2). Тоді

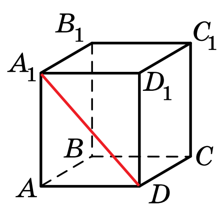
$V = AB \cdot AD \cdot AA_1 = 2 \cdot 8 \cdot AA_1 = 16AA_1$.

1) Знайдемо AA_1 із $\triangle AA_1D$:

$$AA_1 = \sqrt{A_1D^2 - AD^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ (см)}.$$

2) Тоді $V = 16AA_1 = 16 \cdot 6 = 96$ (см^3).

В і д п о в і д ь. 96 см^3.



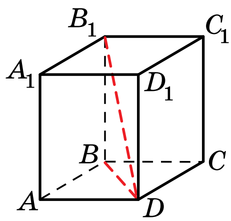
Мал. 9.2

Задача 2. Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат із діагоналлю 6 см. Знайти об'єм паралелепіпеда, якщо його діагональ нахилена до площини основи під кутом 60°.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $ABCD$ – квадрат, $BD = 6$ см (мал. 9.3), кут між діагоналлю B_1D і площиною ABC дорівнює 60°.

Знайдемо об'єм паралелепіпеда за формулою $V = Sh$.

1) Оскільки BD – проекція похилої B_1D на площину основи, то кут B_1DB – кут між діагоналлю B_1D і площиною основи. За умовою $\angle B_1DB = 60°$.



Мал. 9.3

2) Знайдемо площу основи:

$$S = \frac{1}{2} \cdot BD^2 = \frac{1}{2} \cdot 6^2 = 18 \text{ (см}^2\text{)}.$$

3) $BB_1 = h$. Тоді із $\triangle BB_1D$ маємо:

$h = BB_1 = BD\text{tg}\angle D = 6\text{tg}60° = 6\sqrt{3}$ (см).

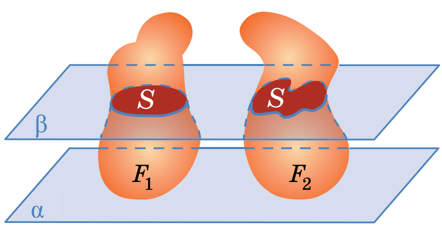
4) Тоді $V = Sh = 18 \cdot 6\sqrt{3} = 108\sqrt{3}$ (см³).

В і д п о в і д ь. $108\sqrt{3}$ см³.

3. Принцип Кавальєрі

У 1635 році італійський математик Бонавентура Кавальєрі (1598–1647) запропонував сукупність прийомів, які можна використовувати для обчислення площ фігур та об'ємів тіл, який у подальшому отримав назву *принцип Кавальєрі*.

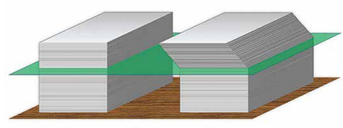
Принцип Кавальєрі. **Якщо в результаті перетину двох тіл F_1 і F_2 будь-якою з площин, паралельних деякій площині α, у перерізі завжди отримують фігури з рівними площами** (мал. 9.4), **то об'єми цих тіл рівні.**



Мал. 9.4

Щоб зрозуміти цей принцип, розглянемо його на простому прикладі. В якості геометричних тіл візьмемо дві однакові пачки офісного паперу. Зрозуміло, що об'єми цих пачок рівні. Вийміть папір з пачок і покладемо на стіл. Папір з першої пачки покладемо у формі прямокутного паралелепіпеда, тобто в тому ж вигляді, як він лежав у пачці. А верхню частину другої пачки трохи зсунемо вбік (мал. 9.5). Самі листки паперу при цьому можна вважати перерізами цих тіл усіма площинами, що паралельні поверхні столу. Усі листки паперу, хоч частина з них і зсунута вбік, мають однакові площі, а висота пачок також не змінилася. Тому, за принципом Кавальєрі, їхні об’єми рівні.

Обґрунтовуючи свій принцип, Кавальєрі також керувався наочними міркуваннями, а строге доведення цього факту з’явилося вже дещо пізніше.



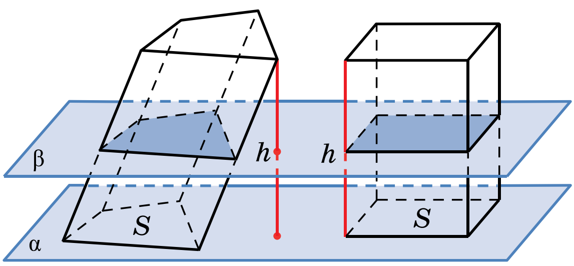
Мал. 9.5

За допомогою принципу Кавальєрі можна знайти формули для обчислення об’ємів деяких геометричних тіл.

4. Об’єм призми

Т Теорема 2 (про об’єм призми). **Об’єм призми дорівнює добутку площі її основи на висоту.**

Доведення. Нехай дано довільну призму (пряму або похилу) із площею основи S і висотою h. Нехай на площині α поряд з даною призмою є ще й прямокутний паралелепіпед із площею основи S і висотою h (мал. 9.6). Оскільки висоти призми і паралелепіпеда між собою рівні, то кожна площина β, паралельна до площини α, яка перетинає призму, перетинає і паралелепіпед. Усі відповідні перерізи мають однакові площі, оскільки ці перерізи рівні відповідним основам призми і паралелепіпеда. За принципом Кавальєрі дійдемо висновку: об’єми призми і паралелепіпеда між собою рівні. Оскільки об’єм паралелепіпеда дорівнює Sh, то об’єм призми також дорівнює Sh. ■



Мал. 9.6

Н Наслідок 1. **Об'єм похилого паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту.**

Н Наслідок 2. **Об'єм прямого паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту.**

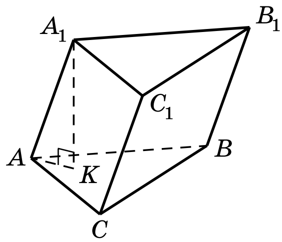
Н Наслідок 3. **Об'єм прямої призми дорівнює добутку площі її основи на бічне ребро.**

Розглянемо кілька прикладів розв'язування задач.

Задача 3. Основою похилої призми є правильний трикутник зі стороною 4 см. Бічне ребро призми дорівнює 6 см і нахилене до площини основи під кутом 30°. Знайти об'єм призми.

Розв'язання. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ – дана призма, $\triangle ABC$ – правильний, $AB = 4$ см, $AA_1 = 6$ см. Тоді $V = S_{ABC}h$.

1) Проведемо $A_1K \perp (ABC)$, тоді A_1K – висота призми, тобто $A_1K = h$. Оскільки AK – проекція бічного ребра AA_1 на площину основи, то $\angle A_1AK$ – кут нахилу бічного ребра до площини основи (мал. 9.7), за умовою $\angle A_1AK = 30°$.



Мал. 9.7

2) Знайдемо площу основи:

$$S_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

3) Із $\triangle AA_1K$ ($\angle K = 90°$), за властивістю катета, що лежить проти кута 30°, маємо: $h = A_1K = \frac{AA_1}{2} = \frac{6}{2} = 3$ (см).

4) Тоді $V = 4\sqrt{3} \cdot 3 = 12\sqrt{3}$ (см³).

Відповідь. $12\sqrt{3}$ см³.

Задача 4. Основою прямого паралелепіпеда є ромб зі стороною 8 см і гострим кутом 60°. Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює більшій діагоналі ромба. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – даний паралелепіпед, $ABCD$ – ромб, $AB = 8$ см, $\angle BAD = 60°$ (мал. 9.8). Тоді $V = Sh = S_{ABCD} \cdot BB_1 = AB^2 \sin A \cdot BB_1$.

1) Оскільки $\angle A = 60°$, то $\triangle ABD$ – рівносторонній, тому $BD = AB = 8$ см.

2) У ромбі $ABCD$ $\angle B = 120°$, тому, за теоремою косинусів:

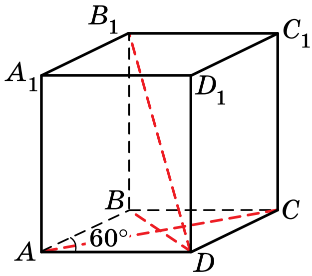
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos B =$

$= \sqrt{8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8^2 \cos 120°} = 8\sqrt{3}$ (см).

3) Оскільки $BD < AC$, то B_1D – менша діагональ паралелепіпеда, а за умовою: $B_1D = AC$.

Тоді $B_1D = 8\sqrt{3}$ см.

4) Із $\triangle BB_1D$ маємо:



Мал. 9.8

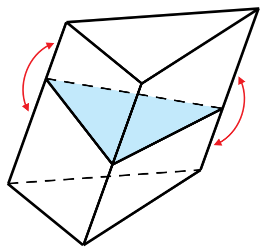
$$BB_1 = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 - 8^2} = 8\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

5) Тоді $V = 8^2 \sin 60° \cdot 8\sqrt{2} = 64 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 256\sqrt{6}$ (см^3).

Відповідь. $256\sqrt{6}$ см^3.

Задача 5. У похилій призмі перпендикулярно до бічних ребер проведено переріз, який перетинає всі бічні ребра (мал. 9.9). Доведіть, що об'єм цієї призми можна знайти за формулою: $V = S_{пер} \cdot l$, де $S_{пер}$ – площа перерізу, l – довжина бічного ребра призми.

Доведення. 1) Площина перерізу ділить призму на дві частини, тобто на верхню і нижню. Поміняємо частини місцями, сумістивши основи призми (мал. 9.9).



Мал. 9.9

2) Отримаємо пряму призму, об'єм якої дорівнює об'єму даної призми.

3) У цій прямій призмі основою буде переріз даної призми, а висотою – бічне ребро даної призми. Тоді об'єм отриманої прямої призми, а отже, і даної, можна отримати за формулою: $V = S_{пер} \cdot l$. ■

• Сформулюйте основні властивості об'єму. • Які геометричні тіла називають рівновеликими? • Сформулюйте теорему про об'єм прямокутного паралелепіпеда та наслідок з неї. • Сформулюйте та поясніть на прикладі принцип Кавальєрі. • Сформулюйте і доведіть теорему про об'єм призми. • Сформулюйте наслідки з теореми про об'єм призми.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

9.1. Запишіть у мм^3:

1) 4 см^3; 2) 2 см^3 115 мм^3;
3) 5 см^3 2 мм^3; 4) 3 дм^3.

9.2. Запишіть у см^3:

1) 5 дм^3; 2) 2 дм^3 517 см^3;
3) 3 дм^3 4 см^3; 4) 2 м^3.

9.3. Знайдіть об'єм куба, ребро якого дорівнює:

1) 5 см; 2) 7 дм.

9.4. Знайдіть об'єм куба, ребро якого дорівнює:

1) 4 дм; 2) 10 см.

9.5. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, лінійні виміри якого дорівнюють:

1) 2 дм; 7 дм; 5 дм; 2) 15 см; 0,2 дм; 30 мм.

9.6. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, лінійні виміри якого дорівнюють:

1) 3 см; 8 см; 9 см; 2) 12 дм; 0,3 м; 50 см.

9.7. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, площа основи якого дорівнює 30 см^2, а висота – 12 см.

9.8. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, площа основи якого дорівнює 24 дм^2, а висота – 5 дм.

9.9. Об'єм призми дорівнює 200 см^3, а площа її основи – 20 см^2. Знайдіть висоту призми.

9.10. Об'єм призми дорівнює 300 см^3, а її висота – 15 см. Знайдіть площу основи призми.

9.11. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють $2\sqrt{3}$ см і 7 см, а кут між ними – 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його бічне ребро дорівнює 5 см.

9.12. Основою прямого паралелепіпеда є ромб зі стороною 8 см і гострим кутом 30°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його бічне ребро дорівнює 10 см.

9.13. Дерев'яний брусок, що має форму прямокутного паралелепіпеда, розпиляли на 6 пірамід. Чи дорівнює сума об'ємів цих пірамід об'єму цього бруска?

9.14. Правильну чотирикутну призму діагональним перерізом поділено на дві частини. Ці частини можна прикласти одна до одної різними способами. Чи завжди при цьому утворюватимуться тіла одного й того самого об'єму?

2 **9.15.** Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 5 см, а діагональ більшої за площею бічної грані дорівнює 13 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

9.16. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 4 см і 8 см, а діагональ меншої за площею бічної грані дорівнює 5 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

9.17. Основа прямого паралелепіпеда – ромб зі стороною 4 см і кутом 60°. Менша діагональ паралелепіпеда нахилена до основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

9.18. Основа прямого паралелепіпеда – квадрат, периметр якого дорівнює 20 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо діагональ бічної грані утворює кут 45° із площиною основи.

9.19. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 6 см, а її об'єм – 180 см^3. Знайдіть висоту призми.

9.20. Основою прямої призми є трикутник зі стороною 6 см і висотою 10 см, проведеною до неї. Знайдіть висоту призми, якщо її об'єм дорівнює 150 см^3.

9.21. Відро вміщує 12 л. Скільки відер води необхідно, щоб заповнити ванну, яка має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 50 см, 1 м 60 см і 70 см (округлити до цілих)?

9.22. Відро вміщує 8 л. Скільки відер води потрібно, щоб заповнити скляний куб із ребром 50 см (округлити до цілих)?

9.23. Санітарними нормами передбачено, що у класних кімнатах на одного учня має припадати не менше ніж 6 м^3 повітря. Чи можна стверджувати, що коли у класній кімнаті, яка має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 8 м, 5,5 м і 3 м, навчаються 23 учні, це не є порушенням санітарних норм?

9.24. Об'єм куба дорівнює 64 см^3. Знайдіть повну поверхню куба.

9.25. Повна поверхня куба дорівнює 54 см^2. Знайдіть об'єм куба.

9.26. Бічне ребро прямокутного паралелепіпеда дорівнює $10\sqrt{3}$ см, а одна зі сторін основи – 8 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його діагональ нахилена до площини основи під кутом 60°.

9.27. Бічне ребро прямокутного паралелепіпеда дорівнює $4\sqrt{3}$ см, а діагональ основи – 20 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо одна з діагоналей бічної грані нахилена до площини основи під кутом 30°.

9.28. 1 $м^3$ золота важить приблизно 19 т. Чи може людина підняти куб золота, ребро якого – 30 см?

9.29. Основа прямої призми – рівнобедрений трикутник з основою 6 см і периметром 16 см. Знайдіть об'єм призми, якщо дві її бічні грані – квадрати.

9.30. Основа прямої призми – рівнобедрений трикутник із бічною стороною 10 см і периметром 36 см. Знайдіть об'єм призми, якщо одна з її бічних граней – квадрат, а дві інші – не є квадратами.

9.31. Об'єм прямої призми дорівнює 168 $см^3$, а її бічне ребро – 7 см. Основа призми – прямокутний трикутник із катетом 6 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

9.32. Основа прямої призми – прямокутний трикутник із катетами 5 см і 12 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її об'єм дорівнює 240 $см^3$.

9.33. Основа похилого паралелепіпеда – прямокутник із діагоналлю 10 см і кутом між діагоналями 30°. Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює $4\sqrt{2}$ см і утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

9.34. Основа похилого паралелепіпеда – квадрат із діагоналлю 6 см. Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює $4\sqrt{3}$ см і утворює кут 60° із площиною основи. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

9.35. Три алюмінієвих куби з ребрами 3 см, 4 см і 5 см переплавили в один куб. Знайдіть повну поверхню цього куба.

9.36. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 15 см, 36 см і 50 см. Знайдіть площу поверхні куба, який є рівновеликим цьому паралелепіпеду.

9.37. Побудуйте переріз прямої трикутної призми площиною, яка проходить через бічне ребро і розбиває призму на дві рівновеликі призми.

9.38. У похилому паралелепіпеді перпендикулярним перерізом є паралелограм зі сторонами 5 см і 6 см та кутом між ними 30°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його бічне ребро дорівнює 20 см.

9.39. У похилому паралелепіпеді перпендикулярним перерізом є ромб, сторона якого дорівнює 8 см, а гострий кут – 30°. Знайдіть довжину бічного ребра паралелепіпеда, якщо його об'єм дорівнює 320 $см^3$.

9.40. У скільки разів треба збільшити кожний із трьох лінійних вимірів прямокутного паралелепіпеда, щоб його об’єм збільшився: 1) у 125 разів; 2) у 7 разів?

9.41. У скільки разів треба зменшити кожний із трьох лінійних вимірів прямокутного паралелепіпеда, щоб його об’єм зменшився: 1) у 9 разів; 2) у 8 разів?

9.42. Розміри цеглини – $25 \times 12 \times 6{,}5$ см. Знайдіть масу однієї цеглини, якщо густина матеріалу цегли дорівнює 1700 кг/м^3.

9.43. Екскаватор викопав яму у формі куба, ребро якого дорівнює 4 м. Скільки вантажівок знадобиться, щоб вивезти всю землю, якщо одна вантажівка вміщує 2,5 м^3 землі?

9.44. Міська рада ухвалила рішення заасфальтувати двохсотметрову прямолінійну ділянку шляху завширшки 15 м. Товщина асфальту на цій дорозі має бути 5 см. Скільки машин асфальту потрібно для виконання цих робіт, якщо густина асфальту дорівнює 2,4 т/м^3, а вантажність машини – 5 т?

9.45. Скільки дощок завдовжки 2,5 м, завширшки 20 см і завтовшки 20 мм можна отримати з чотиригранного бруса завдовжки 10 м, перерізом якого є прямокутник розмірами 40×30 см.

9.46. Знайдіть об’єм деталі, зображеної на малюнку 2.7 (с. 37).

9.47. Знайдіть об’єм деталі, зображеної на малюнку 2.8 (с. 37).

9.48. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює a, а бічна поверхня рівновелика сумі основ. Знайдіть об’єм призми.

9.49. Сторона основи правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює 4 см, кут між площиною основи і перерізом AB_1C дорівнює $45°$. Знайдіть об’єм призми.

9.50. Основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівнобедрений прямокутний трикутник ($\angle ACB = 90°$). Бічне ребро призми дорівнює 3 см, а переріз призми площиною BC_1A утворює з площиною основи кут $45°$. Знайдіть об’єм призми.

9.51. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 6 см, а його лінійні виміри відносяться як $1:2:2$. Знайдіть площу повної поверхні та об’єм паралелепіпеда.

9.52. Лінійні виміри прямокутного паралелепіпеда відносяться як $2:3:6$, а його діагональ дорівнює 7 см. Знайдіть площу повної поверхні та об’єм паралелепіпеда.

9.53. Для технічних потреб виготовляють цеглу розмірами $120 \times 250 \times 142$ мм із порожнинами $12 \times 80 \times 142$ мм, які займають 22,4 % від загального об'єму. Визначте кількість порожнин у цеглі.

9.54. Каменерізна машина виготовляє за зміну 16,758 $м^3$ облицювальних каменів, розміри яких – $49 \times 24 \times 19$ см. Скільки таких каменів виготовляє машина за зміну?

3 **9.55.** Основою призми є прямокутний трикутник. Висота цього трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки завдовжки 1 см і 4 см. Відрізок, що сполучає прямий кут іншої основи з основою цієї висоти, нахилений до площини основи під кутом 30°. Знайдіть об'єм призми.

9.56. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 6 см, а відстань від вершини однієї основи призми до протилежної сторони іншої основи дорівнює 14 см. Знайдіть об'єм призми.

9.57. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює $8\sqrt{3}$ $см^3$, бічне ребро – 2 см. Знайдіть довжину відрізка, що сполучає одну з вершин верхньої основи із центром нижньої.

9.58. У правильній трикутній призмі відрізок, що сполучає одну з вершин верхньої основи із центром нижньої, дорівнює $4\sqrt{3}$ см і нахилений до площини основи під кутом 30°. Знайдіть об'єм призми.

9.59. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Відрізок, що сполучає одну з вершин верхньої основи із центром кола, описаного навколо нижньої основи, нахилений до площини основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм призми.

9.60. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 6 см, 8 см і 10 см, об'єм призми дорівнює 288 $см^3$. Знайдіть довжину відрізка, що сполучає одну з вершин верхньої основи із центром кола, описаного навколо нижньої основи.

9.61. Основою прямого паралелепіпеда є ромб із периметром 20 см і діагоналлю 8 см. Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

9.62. Основою прямого паралелепіпеда є ромб із периметром 40 см і діагоналлю 12 см. Більша діагональ паралелепіпеда дорівнює 20 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

9.63. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 12 см і нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо кут між діагоналями основи дорівнює 30°.

9.64. Діагональ прямокутного паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом $45°$. Діагональ основи утворює з однією зі сторін основи кут $30°$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його висота дорівнює 8 см.

9.65. У прямій трикутній призмі сторони основи дорівнюють 13 см, 21 см і 20 см. Через бічне ребро призми і середню за довжиною висоту основи проведено переріз, площа якого дорівнює 63 см^2. Знайдіть об'єм призми.

9.66. У прямій трикутній призмі сторони основи дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Через бічне ребро призми і найменшу за довжиною висоту основи проведено переріз, площа якого дорівнює 112 см^2. Знайдіть об'єм призми.

9.67. Основою прямого паралелепіпеда є квадрат із діагоналлю $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його повна поверхня дорівнює 240 см^2.

9.68. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм зі сторонами 4 см і 5 см та гострим кутом $30°$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його повна поверхня дорівнює 74 см^2.

9.69. Діагональ бічної грані прямокутного паралелепіпеда дорівнює $8\sqrt{2}$ см. Діагональ паралелепіпеда утворює з площиною цієї грані кут $45°$, а з площиною основи – кут $30°$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

9.70. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 10 см і утворює з бічними гранями кути $30°$ і $45°$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

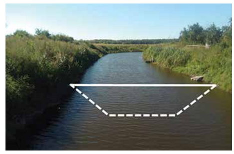
9.71. Основою похилої призми є правильний трикутник зі стороною $4\sqrt{3}$ см. Одна з вершин верхньої основи проектується в центр нижньої. Бічні ребра призми утворюють із площиною основи кут $60°$. Знайдіть об'єм призми.

9.72. Основою похилої призми є квадрат зі стороною 8 см. Одна з вершин верхньої основи проектується в центр нижньої. Бічні ребра призми утворюють із площиною основи кут $45°$. Знайдіть об'єм призми.

9.73. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із гострим кутом α. Діагональ бічної грані, що містить гіпотенузу, дорівнює d і утворює з площиною основи призми кут β. Знайдіть об'єм призми.

9.74. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із кутом α і гіпотенузою c. Діагональ грані, що містить катет, прилеглий до даного кута, утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об'єм призми.

9.75. Профіль русла річки має форму рівнобічної трапеції, основи якої – 15 м і 9 м, а висота – 3 м. Швидкість течії дорівнює 1 м/с. Який об'єм води протікає за 1 хв через цей профіль?



9.76. Переріз залізничного насипу має вигляд рівнобічної трапеції, верхня основа якої дорівнює 12 м, нижня – 27 м, а висота – 4,5 м. Знайдіть об'єм 1 км насипу.

9.77. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см. Знайдіть ребро куба такого, щоб відношення об'ємів цих тіл дорівнювало відношенню площ їхніх повних поверхонь.

9.78. Якщо кожне ребро куба збільшити на 2 см, то його об'єм збільшиться на 98 см^3. Знайдіть ребро цього куба.

9.79. Якщо кожне ребро куба зменшити на 1 см, то його об'єм зменшиться на 37 см^3. Знайдіть ребро цього куба.

9.80. Якщо кожне ребро куба зменшити на 1 дм, то його об'єм зменшиться у 125 разів. Знайдіть ребро цього куба.

9.81. Якщо кожне ребро куба збільшити на 2 дм, то його об'єм збільшиться у 27 разів. Знайдіть ребро цього куба.

9.82. Виміри прямокутного паралелепіпеда – 3 см, 4 см і 5 см. Кожне його ребро збільшили на x см. При цьому площа поверхні збільшилася на 54 см^2. У скільки разів збільшився об'єм прямокутного паралелепіпеда?

9.83. Виміри прямокутного паралелепіпеда – 2 см, 4 см і 6 см. Кожне його ребро збільшили на x см, при цьому площа поверхні збільшилася на 120 см^2. На скільки см^3 збільшився об'єм прямокутного паралелепіпеда?

9.84. Знайдіть об'єм правильної шестикутної призми, у якої периметри двох граней дорівнюють відповідно 36 см і 12 см.

9.85. Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, у якої периметри двох граней дорівнюють відповідно 48 см і 30 см.

9.86. Основою прямого паралелепіпеда є ромб із діагоналями 1 дм і 7 дм. Діагоналі паралелепіпеда відносяться як $13:37$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

9.87. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, діагоналі якого відносяться як $5:16$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його діагоналі дорівнюють 26 см і 40 см.

9.88. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 8 см і 14 см, а діагоналі основи відносяться як $7:9$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його більша діагональ нахилена до площини основи під кутом $45°$.

9.89. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 17 см і 25 см, а одна з діагоналей – 26 см. Менша діагональ паралелепіпеда утворює з висотою кут $45°$. Знайдіть об'єм цього паралелепіпеда.

9.90. Бічні ребра похилої трикутної призми дорівнюють 20 см, а відстані між ними – 4 см, 13 см і 15 см. Знайдіть об'єм призми.

9.91. Відстані між ребрами похилої трикутної призми дорівнюють 6 см, 25 см і 29 см, а її об'єм – 1500 см^3. Знайдіть бічне ребро призми.

9.92. Навколо кулі, радіус якої – $\sqrt{3}$ см, описано правильну шестикутну призму. Знайдіть її об'єм.

9.93. Навколо кулі, радіус якої – $\sqrt{3}$ см, описано правильну трикутну призму. Знайдіть її об'єм.

9.94. Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, вписаної у сферу радіуса 7 см, якщо сторона основи призми дорівнює 12 см.

9.95. У сферу радіуса 4 см вписано правильну трикутну призму, сторона основи якої також дорівнює 4 см. Знайдіть об'єм цієї призми.

4 **9.96.** Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник із бічною стороною a і кутом при вершині β. Через сторону основи і протилежну вершину іншої основи проведено переріз, який утворює з площиною основи кут γ. Знайдіть об'єм призми.

9.97. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює a. Через цю сторону і середину протилежного бічного ребра проведено переріз, який утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм призми.

9.98. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 12 см^2, 21 см^2 і 28 см^2. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда.

9.99. Периметри трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 12 см, 20 см і 14 см. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда.

9.100. Основою похилої призми є правильний трикутник зі стороною 10 см. Одна з бічних граней призми перпендикулярна до площини основи і є ромбом, діагональ якого дорівнює 12 см. Знайдіть об'єм призми.

9.101. Основою похилого паралелепіпеда є квадрат зі стороною 6 см. Одна з бічних граней призми перпендикулярна до площини основи і є паралелограмом, периметр якого дорівнює 20 см, а гострий кут – $30°$. Знайдіть об'єм призми.

9.102. Основою похилого паралелепіпеда є прямокутник зі сторонами 4 см і 5 см. Одне з бічних ребер паралелепіпеда дорівнює 2 см і утворює із суміжними сторонами основи кути по $60°$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

9.103. Основою похилого паралелепіпеда є квадрат зі стороною 8 см. Одне з бічних ребер паралелепіпеда дорівнює 4 см і утворює із суміжними сторонами основи кути по $60°$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

9.104. Дві бічні грані трикутної призми мають площі 20 см^2 і 30 см^2 і утворюють між собою кут $120°$. Знайдіть об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 5 см.

9.105. Дві бічні грані трикутної призми мають площі 24 см^2 і 30 см^2 і утворюють між собою прямий кут. Знайдіть об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 6 см.

9.106. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, діагональ якого дорівнює d і утворює з бічною гранню кут β, а з площиною основи – кут α.

9.107. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d і утворює з однією гранню кут $30°$, а з іншою – кут $45°$. Знайдіть об'єм цього паралелепіпеда.

9.108. Площі двох бічних граней прямого паралелепіпеда дорівнюють 17 см^2 і 28 см^2. Площа одного з його діагональних перерізів дорівнює 39 см^2, а інший діагональний переріз – квадрат. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

9.109. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 9 см і 13 см. Один з його діагональних перерізів рівновеликий основі, а другий має вдвічі більшу площу. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

9.110. Діагоналі прямого паралелепіпеда дорівнюють 41 см і 85 см, а площі бічних граней – 495 см^2 і 870 см^2. Знайдіть об'єм цього паралелепіпеда.

9.111. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 15 см і 16 см, а діагоналі – 92 см і 88 см. Знайдіть об'єм цього паралелепіпеда.

9.112. Основою прямої призми є трапеція з основами 10 см і 6 см, навколо якої можна описати коло. Один з гострих кутів трапеції дорівнює 30°. Відрізок, що сполучає одну з вершин верхньої основи призми із центром кола, описаного навколо нижньої основи, утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть об’єм призми.

9.113. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, у яку можна вписати коло. Периметр цієї трапеції дорівнює 16 см, а гострий кут – 30°. Діагональ призми утворює з висотою призми кут 30°. Знайдіть об’єм призми.

9.114. У правильну чотирикутну піраміду, висота якої дорівнює 3 см, а апофема – 5 см, вписано пряму чотирикутну призму так, що вершини верхньої основи призми є точками перетину медіан бічних граней піраміди, а нижня основа призми належить площині основи піраміди. Знайдіть об’єм призми.

9.115. $ABCA_1B_1C_1$ – похила призма. Точка K лежить на бічному ребрі BB_1, а точка L – на бічному ребрі CC_1, причому $B_1K : KB = 4$, $C_1L : LC = 3$. Через точки A, K і L проведено площину. Об’єм тієї частини призми, яка розміщена між цією площиною і основою ABC, дорівнює V. Знайдіть об’єм призми $ABCA_1B_1C_1$.

9.116. $ABCA_1B_1C_1$ – похила призма. Точка E – середина бічного ребра AA_1, точка F належить ребру BB_1, причому $BF : FB_1 = 1 : 2$. Через точки E, F і C проведено переріз. Знайдіть об’єм тієї частини призми, яка роміщена між площиною перерізу і основою ABC, якщо об’єм призми дорівнює V.

9.117. Основа похилої призми – правильний трикутник. Добуток ребер одного з тригранних кутів призми у $\frac{8}{3}$ разів більший за об’єм призми. Знайдіть кут нахилу бічного ребра до площини основи.

9.118. Основою похилої призми є квадрат. Добуток ребер одного з тригранних кутів удвічі більший за об’єм призми. Знайдіть кут нахилу бічного ребра до площини основи.

9.119. Кожна грань паралелепіпеда – ромб зі стороною a і кутом 60°. Знайдіть об’єм паралелепіпеда.

9.120. Кожна грань паралелепіпеда – ромб із діагоналями 6 дм і 8 дм. Плоскі кути одного з тригранних кутів – гострі. Знайдіть об’єм паралелепіпеда.

9.121. Основою похилого паралелепіпеда є ромб зі стороною a і гострим кутом $60°$, а всі бічні грані – ромби з гострим кутом $45°$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

9.122. Кожне ребро паралелепіпеда дорівнює a. Плоскі кути одного з тригранних кутів дорівнюють $45°$, $60°$ і $90°$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

9.123. Площа прямої трикутної призми – 24 см^2, а площі бічних граней – 8 см^2, 26 см^2 і 30 см^2. Знайдіть об'єм призми.

9.124. Основою прямої призми є трапеція, периметр якої дорівнює 29 см. Площі паралельних бічних граней – 24 см^2 і 66 см^2, а двох інших граней – 39 см^2 і 45 см^2. Знайдіть об'єм призми.

9.125. Основою прямої призми є трапеція, площа якої дорівнює 174 см^2. Площі паралельних бічних граней дорівнюють 10 см^2 і 135 см^2, а двох інших – 100 см^2 і 75 см^2. Знайдіть об'єм призми.

9.126. Основою похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ є трикутник ABC, периметр якого дорівнює 28 см, $\angle ACB = 60°$. Ребро $CC_1 = 3$ см і утворює зі сторонами AC і BC кути по $60°$, $AC_1 = 7$ см. Знайдіть об'єм призми.

9.127. Основою похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ є правильний трикутник ABC зі стороною a. Вершина A_1 ортогонально проектується в центр грані ABC, $\angle A_1AB = 45°$. Знайдіть об'єм призми.

9.128. Кут між сторонами основи прямого паралелепіпеда дорівнює α, а бічне ребро дорівнює l. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо площі його діагональних перерізів дорівнюють Q_1 і Q_2.

9.129. У паралелепіпеді довжини трьох ребер, що виходять з однієї вершини, дорівнюють a, b і c. Ребра a і b взаємно перпендикулярні, а ребро c утворює з кожним із них кут α. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

9.130. Відстань від точки перетину діагоналей прямого паралелепіпеда до його основи дорівнює 9 см, а до бічних граней – 8 см і 6 см. Периметр основи паралелепіпеда дорівнює 70 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

9.131. Відстані від точки перетину діагоналей прямого паралелепіпеда до трьох його граней відповідно дорівнюють 1 см, 2 см і 3 см, а площа повної поверхні дорівнює 176 см^2. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

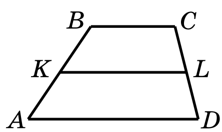
9.132. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда відносяться як $3 : 4$, а периметр діагонального перерізу дорівнює 30 см. Який найбільший об’єм може мати цей паралелепіпед?

9.133. Периметр основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює 1 см, а периметр однієї з бічних граней – 18 см. Серед множини таких паралелепіпедів визначте той, що має найбільшу діагональ, і знайдіть його об’єм.

Життєва математика

9.134. Шкільний психолог Ірина Іванівна веде здоровий спосіб життя та їздить на роботу велосипедом. Шлях, який щодня долає велосипедистка, зображено на малюнку, на якому точкою A позначено будинок, точкою C – роботу. $ABCD$ – трапеція, у якої $AD = 4$ км, $AB = 2{,}5$ км, $CD = 1{,}7$ км, висота трапеції дорівнює 1,5 км, точка K – середина AB, точка L – середина CD (мал. 9.10). Усі ділянки шляху, крім BC, заасфальтовано, ділянка BC – ґрунтова дорога. По асфальтованій дорозі Ірина Іванівна рухається зі швидкістю 20 км/год, а по ґрунтовій – удвічі повільніше. Коли Ірина Іванівна поспішає, то дістається роботи найкоротшим шляхом, а іноді обирає найдовший маршрут – для більших фізичних навантажень. Заповніть таблицю та допоможіть Ірині Іванівні визначитися з веломаршрутами.

Маршрут	Час у дорозі
AB, BC	
AD, DC	
AK, KL, LC	



Мал. 9.10

9.135. На городі грядка з огірками має форму прямокутника завдовжки 25 м і завширшки 10 м. Скільки відер води знадобиться для поливу огірків, якщо вони потребують 4 л на один $м^2$, а ємність відра – 12,5 л?

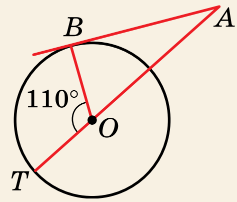
Цікаві задачі для учнів неледачих

9.136. (*Національна олімпіада Угорщини, 1980 р.*) Простір розбито на 5 непорожніх множин, жодні дві з яких не перетинаються між собою. Доведіть, що деяка площина має спільні точки принаймні із чотирма множинами.

Перевірте свою компетентність

Завдання № 9

1. До кола проведено дотичну AB (B – точка дотику) та січну AT, що проходить через центр кола. Знайдіть $\angle BAO$, якщо $\angle TOB = 110°$.



А	Б	В	Г	Д
10°	20°	30°	40°	інша відповідь

2. Довжина кола основи конуса дорівнює 6π см. Знайдіть довжину висоти конуса, якщо його твірна дорівнює 5 см.

А	Б	В	Г	Д
1 см	2 см	3 см	4 см	$\sqrt{11}$ см

3. Якому значенню НЕ може дорівнювати градусна міра плоского кута при вершині правильної чотирикутної піраміди?

А	Б	В	Г	Д
79°	82°	91°	45°	13°

4. Укажіть точку, що належить осі аплікат.

А	Б	В	Г	Д
(3; –1; 0)	(0; –3; 0)	(0; 0; –11)	(2; 0; 0)	(–2; –1; 8)

5. Установіть відповідність між видом многогранника (1–4) та кількістю його вершин (А–Д).

Вид многогранника

1 Паралелепіпед
2 Правильна шестикутна піраміда
3 П'ятикутна призма
4 Зрізана трикутна піраміда

Кількість вершин многогранника

А 6
Б 7
В 8
Г 9
Д 10

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює 6. Обчисліть $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$.

§ 10. ОБ'ЄМ ПІРАМІДИ. ОБ'ЄМ ЗРІЗАНОЇ ПІРАМІДИ

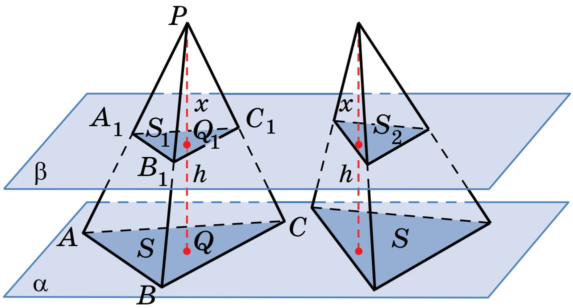
У цьому параграфі дізнаємося, як знайти об'єм будь-якої піраміди.

1. Об'єм піраміди

Спочатку доведемо допоміжну теорему – лему.

Т Л е м а (про рівновеликість трикутних пірамід із рівними висотами і рівновеликими основами). **Трикутні піраміди з однаковими площами основ і рівними між собою висотами мають однакові об'єми.**

Д о в е д е н н я. 1) Розглянемо дві трикутні піраміди, у кожної з яких площа основи дорівнює S, а висота – h. Розташуємо ці дві піраміди так, щоб їхні основи лежали в деякій площині α (мал. 10.1).



Мал. 10.1

2) Оскільки висоти пірамід між собою рівні, то кожна площина β, така, що $\beta \parallel \alpha$, перетинаючи першу піраміду, перетинатиме і другу. Проведемо площину β на відстані x від вершини піраміди.

3) Нехай перерізом першої піраміди є $\triangle A_1B_1C_1$, площа якого – S_1. За властивістю паралельних площин, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Тому $\frac{S_1}{S} = \left(\frac{l_1}{l}\right)^2$, де l_1 і l – деякі відповідні лінійні елементи цих трикутників.

4) Також $\triangle PQ_1B_1 \sim \triangle PQB$, тоді $\frac{x}{h} = \frac{B_1Q_1}{BQ}$.

5) Але B_1Q_1 і BQ – відповідні лінійні елементи трикутників $A_1B_1C_1$ і ABC. Тому $\frac{S_1}{S} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$.

6) Аналогічно, для другої піраміди, вважаючи, що площа її перерізу площиною β дорівнює S_2, матимемо: $\dfrac{S_2}{S} = \left(\dfrac{x}{h}\right)^2$.

7) Отже, отримали, що $\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{S_2}{S}$, тому $S_1 = S_2$.

8) За принципом Кавальєрі, піраміди, які ми розглянули, є рівновеликими. ■

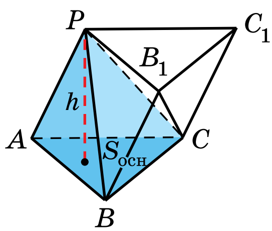
Зауважимо, що ця лема справджується не лише для трикутних пірамід, а й для будь-яких, у яких висоти між собою рівні, а основи – рівновеликі.

Т Теорема 1 (про об'єм піраміди). **Об'єм піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту:**

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h.$$

Доведення. 1) Спочатку доведемо теорему для трикутних пірамід.

2) Паралельно бічному ребру AP піраміди $PABC$ проведемо рівні йому відрізки BB_1 і CC_1 (мал. 10.2). Сполучимо відрізками точки P і B_1, B_1 і C_1, P і C_1. Маємо трикутну призму $ABCPB_1C_1$, об'єм якої дорівнює $S_{ABC}h$, де $S_{ABC} = S_{\text{осн}}$.



Мал. 10.2

3) Призма $ABCPB_1C_1$ складається з трьох пірамід: $PABC$, CPB_1C_1 і $PBCB_1$. У пірамід $PABC$ і CPB_1C_1 і основи, і висоти між собою рівні, а тому, за лемою, ці піраміди – рівновеликі.

4) Нехай для пірамід CPB_1C_1 і $PBCB_1$ трикутники C_1B_1C і BCB_1 є основами. Ці трикутники рівновеликі, а висоти пірамід CPB_1C_1 і $PBCB_1$ між собою рівні. Отже, піраміди CPB_1C_1 і $PBCB_1$ – рівновеликі.

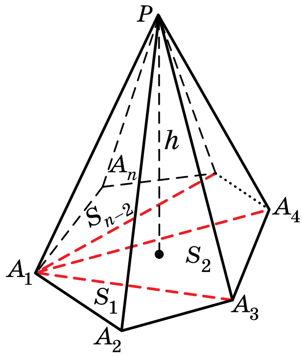
5) Таким чином, усі три піраміди $PABC$, CPB_1C_1 і $PBCB_1$ – рівновеликі, тому об'єм кожної з них дорівнює третині об'єму призми, тобто $\dfrac{1}{3}S_{ABC}h$. Для трикутних пірамід теорему доведено.

6) Розглянемо тепер n-кутну піраміду, висота якої дорівнює h, а площа основи – $S_{\text{осн}}$ (мал. 10.3). В основі з однієї з вершин проведемо всі можливі діагоналі (їх буде $n-3$), поділивши в такий спосіб основу на $(n-2)$ трикутники, а піраміду – на $(n-2)$ трикутних піраміди. Висота кожної із цих

пірамід дорівнює h, а площі основ відповідно позначимо через S_1, S_2, ..., S_{n-2}.

За властивістю об'ємів, об'єм $V_{\text{пір}}$ даної n-кутної піраміди дорівнює сумі об'ємів отриманих трикутних пірамід. Тоді

$$V_{\text{пір}} = V_1 + V_2 + ... + V_{n-2} =$$
$$= \frac{1}{3}S_1h + \frac{1}{3}S_2h + ... + \frac{1}{3}S_{n-2}h =$$
$$= \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + ... + S_{n-2})h = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h. \blacksquare$$

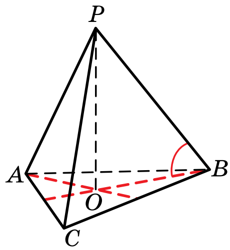


Мал. 10.3

Розглянемо кілька задач на знаходження об'єму піраміди.

Задача 1. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 45°. Знайти об'єм піраміди.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $PABC$ – дана піраміда, $\triangle ABC$ – правильний, $BC = 6$ см, O – центр основи піраміди, тоді PO – висота піраміди (мал. 10.4). Оскільки BO – проекція бічного ребра PB на площину основи, то $\angle PBO = 45°$. Знайдемо об'єм даної піраміди.



Мал. 10.4

1) $S_{ABC} = \frac{\text{BC}^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ (см²).

2) Оскільки O – центр трикутника ABC, то OB – радіус описаного навколо основи кола, тому

$$OB = \frac{\text{BC}\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

3) Із $\triangle POB$ ($\angle O = 90°$, $\angle B = 45°$) маємо: $\angle P = 90° - 45° = 45°$. Тоді $\triangle POB$ – рівнобедрений і $PO = OB = 2\sqrt{3}$ см.

4) Отже,

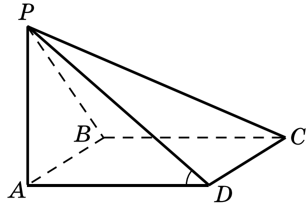
$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot PO = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 18 \text{ (см}^3\text{)}.$$

В і д п о в і д ь. 18 см³.

Задача 2. Основою піраміди є квадрат. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом 30°. Знайти об'єм піраміди, якщо середнє за довжиною бічне ребро дорівнює 8 см.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $PABCD$ – дана піраміда, $ABCD$ – квадрат, бічні грані PAB і PAD перпендикулярні до площини основи (мал. 10.5).

1) Оскільки бічні грані PAB і PAD перпендикулярні до площини основи, то бічне ребро PA, по якому перетинаються ці грані, також перпендикулярне до основи. Тому PA – висота піраміди.



Мал. 10.5

2) AD – проекція похилої PD на площину основи, $AD \perp DC$, тому за теоремою про три перпендикуляри, $PD \perp DC$. Тоді $(PAD) \perp DC$, а значить, $\angle PDA$ – кут, який утворює бічна грань PDC із площиною основи, тому $\angle PDA = 30°$ (за умовою).

3) Оскільки $\triangle PAD$ – прямокутний ($\angle A = 90°$), то $PD > PA$.

Також маємо $PD = PB$ (із рівності трикутників PAD і PAB), а у трикутнику PDC — $PD < PC$.

Тому PD – середнє за довжиною бічне ребро, $PD = 8$ см (за умовою).

4) Із $\triangle PAD$ ($\angle A = 90°$, $\angle D = 30°$): $PA = \dfrac{PD}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ (см),

$AD = \sqrt{PD^2 - PA^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$ (см).

5) $S_{ABCD} = AD^2 = (4\sqrt{3})^2 = 48$ (см²).

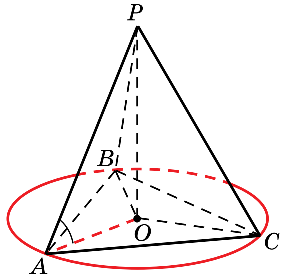
6) Тоді $V = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн}}h = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot PA = \dfrac{1}{3} \cdot 48 \cdot 4 = 64$ (см³).

В і д п о в і д ь. 64 см³.

Задача 3. Основа піраміди – трикутник зі сторонами 5 см, 6 см і 8 см. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 60°. Знайти об'єм піраміди.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $PABC$ – дана піраміда, $\triangle ABC$ – її основа, $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 8$ см.

Нехай PO – висота піраміди. Оскільки всі ребра піраміди нахилені до основи під однаковим кутом, то точка O – центр описаного навколо основи кола (мал. 10.6). Тоді $AO = R$. Знайдемо об'єм піраміди за формулою $V = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн}}h$.



Мал. 10.6

1) Оскільки OA, OB і OC відповідно проекції ребер PA, PB і PC на площину основи, то $\angle PAO = \angle PBO = \angle PCO = 60°$.

2) Із $\triangle POA$ ($\angle O = 90°$) $PO = AO\mathrm{tg}A = R\sqrt{3}$ (см).

3) $R = \dfrac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S_{ABC}} = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 8}{4S_{ABC}} = \dfrac{60}{S_{ABC}}$, тоді $PO = \dfrac{60\sqrt{3}}{S_{ABC}}$.

4) Тоді $V = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot PO = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot \dfrac{60\sqrt{3}}{S_{ABC}} = 20\sqrt{3}$ (см^3).

Відповідь. $20\sqrt{3}$ см^3.

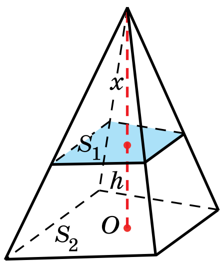
2. Об'єм зрізаної піраміди

Теорема 2 (про об'єм зрізаної піраміди). **Об'єм V зрізаної піраміди, висота якої дорівнює h, а площі основ – S_1 і S_2, можна знайти за формулою:**

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2).$$

Доведення. Нехай маємо зрізану піраміду.

1) Доповнимо дану зрізану піраміду до повної (мал. 10.7). Нехай висота зрізаної піраміди дорівнює x, тоді висота повної піраміди буде $h + x$.



Мал. 10.7

2) За доведеною лемою: $\dfrac{S_1}{S_2} = \left(\dfrac{x}{x+h}\right)^2$, $\dfrac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}} = \dfrac{x}{x+h}$. Тоді $x = \dfrac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}$.

3) Об'єм зрізаної піраміди знайдемо як різницю об'ємів повної піраміди та тієї, якою доповнювали:

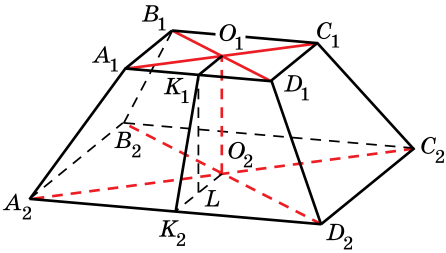
$$V = \frac{1}{3}S_2(h + x) - \frac{1}{3}S_1x = \frac{1}{3}(S_2h + (S_2 - S_1)x) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(S_2h + (S_2 - S_1)\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}h\left(S_2 + \frac{\sqrt{S_1}(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1})(\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1})}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}\right) = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2). \blacksquare$$

Задача 4. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, у якої сторони основ дорівнюють 4 см і 8 см, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом 60°.

Р о з в ’ я з а н н я. Нехай на малюнку 10.8 зображено дану зрізану піраміду, $A_1D_1 = 4$ см, $A_2D_2 = 8$ см, O_1O_2 – висота піраміди, де O_1 і O_2 – центри основ.



Мал. 10.8

1) Знайдемо площі основ: $S_1 = 4^2 = 16$ (см^2),

$S_2 = 8^2 = 64$ (см^2).

2) Нехай O_1K_1 і O_2K_2 – радіуси вписаних в основи кіл. Тоді $O_1K_1 \perp A_1D_1$, $O_1K_1 = \dfrac{4}{2} = 2$ (см),

$O_2K_2 \perp A_2D_2$, $O_2K_2 = \dfrac{8}{2} = 4$ (см).

3) Проведемо $K_1L \parallel O_1O_2$, $K_1L = O_1O_2$.

4) $K_1L \perp (A_2B_2D_2)$, K_2L – проекція похилої K_1K_2 на площину основи, $K_2L \perp A_2D_2$, тому $K_1K_2 \perp A_2D_2$ (за теоремою про три перпендикуляри). Тоді $\angle K_1K_2L$ – кут нахилу бічної грані до площини основи, $\angle K_1K_2L = 60°$.

5) $K_2L = K_2O_2 - LO_2 = K_2O_2 - K_1O_1 = 4 - 2 = 2$ (см).

6) У $\triangle K_1K_2L$ ($\angle L = 90°$):

$K_1L = K_2L\,\mathrm{tg}K_2 = 2\mathrm{tg}60° = 2\sqrt{3}$ (см).

7) Отже, $V = \dfrac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3}(16 + \sqrt{16 \cdot 64} + 64) = \dfrac{224\sqrt{3}}{3}$ (см^3).

В і д п о в і д ь. $\dfrac{224\sqrt{3}}{3}$ см^3.

А ще раніше...

Евклід у своїх працях не обчислював об’єми многогранників, а лише порівнював їх. Наприклад, Евклід зазначав, що трикутну призму можна розділити на три рівновеликі піраміди. Отже, можна вважати, що йому вдалося довести, що об’єм піраміди дорівнює третині об’єму призми з такими самими, як у піраміди, значеннями площі основи та довжини висоти.

А от об’єм чотирикутної піраміди, у якої дві бічні грані нахилені до основи під кутом 45°, вміли обчислювати ще в давньому Вавилоні.

Уперше формулу для обчислення об’єму будь-якої піраміди запропонував Демокріт Абдерський (IV ст. до н.е.), але припускають, що її строгого доведення він не надав.

Строге доведення цієї формули виконав Евдокс Кнідський.

• Сформулюйте і доведіть лему про рівновеликість трикутних пірамід з рівними висотами і рівновеликими основами. • Сформулюйте і доведіть теорему про об’єм піраміди. • Сформулюйте теорему про об’єм зрізаної піраміди.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

10.1. Площа основи піраміди дорівнює 30 см^2, а висота – 7 см. Знайдіть об’єм піраміди.

10.2. Висота піраміди дорівнює 12 см, а площа її основи – 19 см^2. Знайдіть об’єм піраміди.

10.3. Знайдіть об’єм піраміди, основою якої є прямокутник зі сторонами 4 см і 5 см, якщо висота піраміди дорівнює 9 см.

10.4. Знайдіть об’єм піраміди, основою якої є квадрат зі стороною 3 см, якщо висота піраміди дорівнює 5 см.

10.5. Об’єм піраміди дорівнює 32 см^3, а її висота – 6 см. Знайдіть площу основи піраміди.

10.6. Об’єм піраміди дорівнює 80 см^3, а площа її основи – 60 см^2. Знайдіть висоту піраміди.

10.7. Основою піраміди є трапеція, основи і висота якої відповідно дорівнюють 3 см, 5 см і 7 см. Знайдіть об’єм піраміди, якщо її висота дорівнює 6 см.

10.8. Основою піраміди є ромб зі стороною 6 см і висотою 4 см. Знайдіть об’єм піраміди, якщо її висота дорівнює 7 см.

2

10.9. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а двогранний кут при основі піраміди – 60°. Знайдіть об’єм піраміди.

10.10. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см, а двогранний кут при основі піраміди – 45°. Знайдіть об’єм піраміди.

10.11. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 9 см і утворює з бічним ребром кут $45°$. Знайдіть об'єм піраміди.

10.12. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 3 см і утворює з бічним ребром кут $60°$. Знайдіть об'єм піраміди.

10.13. Об'єм правильної трикутної піраміди дорівнює $15\sqrt{3}$ см³, а висота – 5 см. Знайдіть сторону основи піраміди.

10.14. Об'єм правильної чотирикутної піраміди дорівнює 216 см³, а висота – 8 см. Знайдіть сторону основи піраміди.

10.15. Як зміниться об'єм правильної піраміди, якщо кожну сторону основи збільшити вдвічі, а висоту зменшити вдвічі?

10.16. Основою піраміди є прямокутник. Висота піраміди проходить через одну з його вершин. Бічні грані, що не містять висоту, нахилені до площини основи під кутами $30°$ і $45°$. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 6 см.

10.17. Основою піраміди є квадрат. Висота піраміди проходить через одну з його вершин. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює $9\sqrt{3}$ см, а бічна грань, яка не містить висоти, нахилена до площини основи під кутом $60°$.

10.18. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетом 6 см і радіусом описаного кола 5 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо висота піраміди дорівнює 4 см.

10.19. Основою піраміди є прямокутник, одна сторона якого дорівнює 10 см, а радіус описаного кола – 13 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо висота піраміди дорівнює 7 см.

10.20. Піраміда Хефрена в Єгипті має форму правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює приблизно 210,5 м, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом $42°30'$. Знайдіть наближено об'єм цієї піраміди.

10.21. Піраміда Хеопса в Єгипті являє собою правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює приблизно 230,5 м, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом $51°50'$. Знайдіть наближено об'єм цієї піраміди.

10.22. Основою призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є паралелограм $ABCD$. Знайдіть об'єм піраміди $AB_1C_1D_1$, якщо об'єм призми дорівнює V.

10.23. Основою призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб $ABCD$. Об'єм піраміди $AA_1B_1C_1D_1$ дорівнює V. Знайдіть об'єм призми.

10.24. Площа бічної грані QAB трикутної піраміди $QABC$ дорівнює 12 см^2, ребро QC утворює з площиною QAB кут 30°. Знайдіть об'єм піраміди, якщо $QC = 8$ см.

10.25. Площа бічної грані TBC трикутної піраміди $TABC$ дорівнює 24 см^2. Ребро AC, що дорівнює $6\sqrt{2}$ см, утворює із площиною TBC кут 45°. Знайдіть об'єм призми.

10.26. Знайдіть об'єм правильної зрізаної трикутної піраміди, у якої сторони основ дорівнюють 2 см і 4 см, а висота – 6 см.

10.27. Знайдіть об'єм правильної зрізаної чотирикутної піраміди, у якої сторони основ дорівнюють 3 см і 5 см, а висота – 9 см.

10.28. Основою піраміди є прямокутник, сторони якого дорівнюють 18 см і 24 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 25 см. Знайдіть об'єм піраміди.

10.29. Основою піраміди є прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 12 см і 16 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 26 см. Знайдіть об'єм піраміди.

10.30. Основа піраміди – прямокутний трикутник, менший катет якого – 5 см, а гострий кут – 30°. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Знайдіть об'єм піраміди.

10.31. Основа піраміди – прямокутник, більша сторона якого – $6\sqrt{3}$ см, а діагональ утворює з меншою стороною кут 60°. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм піраміди.

10.32. Площина, що проходить через середини трьох ребер куба, які виходять з однієї вершини, відтинає від куба тіло. Знайдіть об'єм цього тіла, якщо ребро куба дорівнює 12 см.

10.33. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює V. Через сторону основи і середину протилежного їй бічного ребра проведено переріз. Знайдіть об'єм піраміди, що при цьому утворилася.

10.34. Об'єм прямої трикутної призми дорівнює V. Через одну зі сторін основи і протилежну вершину іншої основи проведено переріз. Знайдіть об'єм піраміди, що при цьому утворилася.

3 **10.35.** У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює 10 см і утворює кут 60° із площиною основи. Знайдіть об'єм піраміди.

10.36. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює $8\sqrt{2}$ см і утворює кут $45°$ із площиною основи. Знайдіть об'єм піраміди.

10.37. У правильній трикутній піраміді бічні грані утворюють із площиною основи кути по $60°$. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 6 см.

10.38. У правильній чотирикутній піраміді бічні грані утворюють із площиною основи кути по $30°$. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 6 см.

10.39. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює b і нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть об'єм піраміди.

10.40. У правильній чотирикутній піраміді апофема дорівнює l і утворює з висотою кут γ. Знайдіть об'єм піраміди.

10.41. Знайдіть об'єм правильної шестикутної піраміди, у якої висота дорівнює h, а двогранний кут при основі – $60°$.

10.42. Знайдіть об'єм правильної шестикутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює a, а двогранний кут при основі – $45°$.

10.43. Нехай $MABC$ – правильна трикутна піраміда з основою ABC. Площа бічної поверхні піраміди дорівнює 24 см^2, а відстань від точки A до площини MBC дорівнює 3 см. Знайдіть об'єм піраміди.

10.44. Об'єм правильної трикутної піраміди $QABC$, основа якої – ABC, дорівнює 60 см^3. Площа бічної поверхні піраміди – 108 см^2. Знайдіть відстань від точки C до площини QAB.

10.45. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою 12 см і бічною стороною 10 см. Усі бічні ребра піраміди утворюють із площиною основи кути по $45°$. Знайдіть об'єм піраміди.

10.46. Основою піраміди є рівнобедрений прямокутний трикутник, у якого медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює 3 см. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом $30°$. Знайдіть об'єм піраміди.

10.47. Сторони основи трикутної піраміди дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см, а кожне бічне ребро – $12\dfrac{1}{8}$ см. Знайдіть об'єм піраміди.

10.48. Кожне бічне ребро трикутної піраміди дорівнює $10\dfrac{1}{4}$ см, а сторони основи – 12 см, 16 см і 20 см. Знайдіть об'єм піраміди.

10.49. Основою чотирикутної піраміди є паралелограм, сторони основи якого дорівнюють 3 см і 4 см. Усі бічні ребра піраміди утворюють з висотою піраміди кути по 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

10.50. Основою чотирикутної піраміди є ромб зі стороною 12 см. Усі бічні ребра піраміди утворюють з висотою піраміди кути по 60°. Знайдіть об'єм піраміди.

10.51. Основою трикутної піраміди є рівнобедрений прямокутний трикутник. Бічна грань, яка містить гіпотенузу основи, перпендикулярна до площини основи і також є рівнобедреним прямокутним трикутником, основою якого є ця гіпотенуза. Знайдіть гіпотенузу основи піраміди, якщо об'єм піраміди – 72 см^3.

10.52. Основою трикутної піраміди є правильний трикутник, а одна з її бічних граней – також правильний трикутник. Площина цієї бічної грані перпендикулярна до площини основи. Об'єм піраміди дорівнює 8 см^3. Знайдіть сторону основи піраміди.

10.53. Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною a. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а третя нахилена до неї під кутом 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

10.54. Основою піраміди є квадрат зі стороною a. Одна з бічних граней піраміди – правильний трикутник, площина якого нахилена до основи під кутом 60°. Знайдіть об'єм піраміди.

10.55. У правильній шестикутній зрізаній піраміді сторони основ дорівнюють 2 см і 6 см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.

10.56. У правильній трикутній зрізаній піраміді сторони основ дорівнюють 6 см і 3 см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 60°. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.

10.57. Двогранний кут при основі правильної трикутної піраміди дорівнює 45°, а відрізок, що сполучає середину висоти і середину апофеми, дорівнює 2 см. Знайдіть об'єм піраміди.

10.58. Двогранний кут при основі правильної чотирикутної піраміди дорівнює 30°, а відрізок, що сполучає основу висоти піраміди і середину апофеми, дорівнює 4 см. Знайдіть об'єм піраміди.

10.59. Обчисліть об’єм правильного тетраедра, якщо радіус кола, описаного навколо його грані, дорівнює R.

10.60. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює l, а її висота дорівнює h. Знайдіть об’єм піраміди.

10.61. Три бічних ребра трикутної піраміди, що виходять з однієї вершини, попарно перпендикулярні і дорівнюють 4 см, 5 см і 6 см. Знайдіть об’єм цієї піраміди.

10.62. Бічні ребра трикутної піраміди попарно перпендикулярні, і кожне з них має довжину 6 см. Знайдіть об’єм піраміди.

10.63. Основою чотирикутної піраміди є прямокутник із діагоналлю d, яка утворює з однією зі сторін основи кут α. Усі бічні ребра піраміди мають довжину l. Знайдіть об’єм піраміди.

10.64. Основою трикутної піраміди є прямокутний трикутник із катетом b і протилежним до нього гострим кутом β. Усі бічні ребра піраміди мають довжину l. Знайдіть об’єм піраміди.

10.65. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 12 см, 10 см і 10 см, а висота піраміди перетинає її основу. Усі бічні грані піраміди нахилені до основи під кутом 45°. Знайдіть об’єм піраміди.

10.66. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 9 см і 12 см, а висота піраміди перетинає її основу. Висоти всіх бічних граней між собою рівні і дорівнюють 5 см. Знайдіть об’єм піраміди.

10.67. Основою піраміди є ромб зі стороною 15 см. Кожна бічна грань піраміди утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть об’єм піраміди, якщо площа її бічної поверхні дорівнює 300 см^2.

10.68. Основою піраміди є ромб зі стороною 4 см і гострим кутом 60°. Усі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом 45°. Знайдіть об’єм піраміди.

10.69. Знайдіть об’єм правильної трикутної піраміди, площа бічної поверхні якої дорівнює $12\sqrt{3}$ см^2, а площа повної поверхні – $16\sqrt{3}$ см^2.

10.70. Знайдіть об’єм правильної трикутної піраміди, у якої площа повної поверхні дорівнює $9\sqrt{3}$ дм^2, а площа бічної поверхні – $6\sqrt{3}$ дм^2.

10.71. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 10 см, 13 см і 13 см. Основою висоти піраміди є точка перетину медіан цього трикутника. Знайдіть об’єм піраміди, якщо її найбільше бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 45°.

10.72. У зрізаній піраміді об'єм дорівнює 76 см^3, висота – 6 см, а площа однієї з основ – 18 см^2. Знайдіть площу другої основи цієї піраміди.

10.73. У зрізаній піраміді різниця площ основ дорівнює 6 см^2, а об'єм – 42 см^3. Знайдіть площі основ піраміди, якщо висота піраміди – 9 см.

10.74. У зрізаній піраміді сума площ основ дорівнює 30 см^2, а висота – 2 см. Знайдіть площі основ, якщо об'єм піраміди дорівнює 26 см^3.

10.75. У зрізаній трикутній піраміді висота дорівнює 9 см, сторони однієї основи – 4 см, 13 см і 15 см, а периметр другої основи – 64 см. Знайдіть об'єм цієї піраміди.

10.76. У зрізаній трикутній піраміді сторони однієї основи дорівнюють 14 см, 30 см і 40 см, а периметр другої основи – 42 см. Знайдіть об'єм цієї піраміди, якщо її висота дорівнює 6 см.

10.77. У правильній трикутній піраміді бічні ребра попарно взаємно перпендикулярні, а сторона основи дорівнює a. Знайдіть об'єм піраміди.

10.78. Основою піраміди є паралелограм, сторони якого дорівнюють 2 дм і 3 дм. Бічне ребро піраміди, що проходить через тупий кут основи, є висотою піраміди. Висоти бічних граней, що не містять це бічне ребро, дорівнюють 2,5 дм і $\sqrt{5}$ дм. Знайдіть об'єм піраміди.

10.79. Площа меншого діагонального перерізу правильної шестикутної піраміди дорівнює $5\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть об'єм піраміди, якщо сторона її основи дорівнює 4 см.

10.80. Сторона основи правильної шестикутної піраміди вдвічі менша за бічне ребро. Знайдіть сторону основи, якщо об'єм піраміди дорівнює 40,5 см^3.

4 **10.81.** Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнюють 6 см і 18 см. Бічна грань утворює із площиною основи кут 60°. Знайдіть об'єм піраміди.

10.82. Сторони основ правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнюють 4 см і 10 см. Бічна грань утворює із площиною основи кут 30°. Знайдіть об'єм піраміди.

10.83. Основою піраміди є рівнобічна трапеція з тупим кутом 120° і діагоналлю $8\sqrt{3}$ см. Ця діагональ перпендикулярна до бічної сторони трапеції. Знайдіть об'єм піраміди, якщо всі її бічні ребра дорівнюють 10 см.

10.84. Основою чотирикутної піраміди є рівнобічна трапеція з основами 18 см і 6 см та гострим кутом 30°. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 30°. Знайдіть об'єм піраміди.

10.85. Основою чотирикутної піраміди є рівнобічна трапеція з гострим кутом 30° і бічною стороною 12 см. Усі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

10.86. Основою чотирикутної піраміди є прямокутна трапеція, гострий кут якої дорівнює 30°, а більша бічна сторона – 8 см. Усі бічні грані піраміди утворюють із площиною основи кути по 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

10.87. Знайдіть об'єм правильної трикутної зрізаної піраміди, у якої сторони основи дорівнюють 20 см і 30 см, а бічна поверхня рівновелика сумі основ.

10.88. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, у якої діагональ дорівнює 11 см, бічне ребро – 9 см, а різниця між сторонами основ дорівнює 8 см.

10.89. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, у якої діагональ дорівнює 9 см, а сторони основ – 7 см і 5 см.

10.90. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 6 см і 15 см, а висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи. Площа бічної поверхні піраміди – 126 см^2. Знайдіть об'єм цієї піраміди.

10.91. Переріз правильної трикутної піраміди, що проходить через бічне ребро й апофему протилежної бічної грані, рівновеликий основі. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює 4 см.

10.92. Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює 60°, а висота піраміди – 6 см. Знайдіть об'єм піраміди.

10.93. Двогранний кут при основі правильної шестикутної піраміди дорівнює 30°, а площа найбільшого діагонального перерізу – 6 дм^2. Знайдіть об'єм піраміди.

10.94. Висота правильної шестикутної піраміди дорівнює 2 дм, а відстань від середини висоти до бічного ребра в 4 рази менша від сторони основи. Знайдіть об'єм піраміди.

10.95. Основою піраміди є рівнобічна трапеція з гострим кутом 30°. Бічна грань піраміди, яка містить більшу основу цієї трапеції, нахилена до площини основи під кутом 60°. У піраміду вписано кулю радіуса 1 дм. Знайдіть об'єм піраміди.

10.96. Основою піраміди є ромб із гострим кутом 60°. Одна з бічних граней піраміди нахилена до площини основи під кутом 60°. У піраміду вписано кулю, радіус якої – 2 дм. Знайдіть об'єм піраміди.

10.97. Висоту піраміди поділили на три рівні частини і через кожну з точок поділу провели переріз, паралельний основі піраміди. Знайдіть об'єми кожного з многогранників, що при цьому утворилися, якщо об'єм піраміди дорівнює V.

10.98. У трикутній піраміді $QABC$ провели переріз через середини ребер BC, QC і AB. У якому відношенні цей переріз поділив об'єм піраміди?

10.99. Основою піраміди $QABC$ є трикутник ABC, у якого $AB = 4$ см, $AC = 2$ см. Відрізок AK – бісектриса трикутника ABC. Об'єм піраміди $QABK$ дорівнює 24 см^3. Знайдіть об'єм піраміди $QABC$.

10.100. Основою піраміди $QABC$ є трикутник ABC, у якого $CA = 4$ см, $CB = 12$ см. Відрізок CK – бісектриса трикутника ABC. Об'єм піраміди $QCKB$ дорівнює 15 см^3. Знайдіть об'єм піраміди $QABC$.

10.101. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 11 см, а сторона основи піраміди менша за бічне ребро на 1 см. Знайдіть об'єм піраміди.

10.102. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює $2\sqrt{5}$ дм, а її основа і діагональний переріз рівновеликі. Знайдіть об'єм піраміди.

10.103. Об'єм правильної трикутної піраміди в 6 разів більший за куб довжини бічного ребра. Знайдіть плоский кут при вершині піраміди.

10.104. $QABCD$ – правильна чотирикутна піраміда з основою $ABCD$, бічне ребро якої – 25 см, а відстань від точки C до ребра QA дорівнює 24 см. Знайдіть об'єм піраміди.

10.105. Знайдіть об'єм піраміди, основою якої є трикутник із кутами α і β та радіусом R кола, описаного навколо цього трикутника, якщо всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом γ.

10.106. Основою піраміди $QABC$ є трикутник ABC, у якого $AB = BC = b$, $\angle ABC = \beta$. Бічна грань QBC перпендикулярна до основи, а дві інші бічні грані нахилені до неї під кутом γ. Знайдіть об'єм піраміди.

10.107. Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною 12 см. Двогранні кути при двох сторонах основи дорівнюють по $60°$, а при третій стороні – $120°$. Знайдіть об'єм піраміди.

10.108. $QABC$ – правильна трикутна піраміда з основою ABC. Переріз піраміди, що проходить через центр її основи паралельно прямим AB і QC, є квадратом зі стороною 4 см. Знайдіть об'єм піраміди.

10.109. Одне з ребер тетраедра дорівнює $\sqrt{3}$ дм, а інші п'ять ребер – по 2 дм. Знайдіть об'єм тетраедра.

10.110. У тетраедра $ABCD$ усі ребра між собою рівні. Точка N лежить поза тетраедром, причому $ND = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$, $NA = NB = NC = \sqrt{\frac{97}{75}}$. Знайдіть об'єм тетраедра.

10.111. У тетраедра $ABCD$ усі ребра між собою рівні. Відрізок KA перпендикулярний до висоти трикутника BCD, проведеної з вершини B. Знайдіть об'єм тетраедра, якщо $KA = KB = KC = \sqrt{6}$.

10.112. Доведіть, що об'єм трикутної піраміди менший за $\frac{1}{6}$ квадратного кореня з добутку довжин усіх ребер.

10.113. Доведіть, що об'єм трикутної піраміди менший від третини квадратного кореня з подвоєного добутку площ її бічних граней.

10.114. Основою піраміди є прямокутний трикутник, а всі бічні ребра піраміди між собою рівні. Периметри бічних граней піраміди дорівнюють 16 см, 17 см і 18 см. Знайдіть об'єм піраміди.

10.115. Сторони основи трикутної піраміди – 16 см, 17 см і 18 см, а периметри бічних граней – 81 см, 75 см і 75 см, причому найбільший периметр має грань, що містить найменшу сторону основи. Знайдіть об'єм піраміди.

10.116. 1) Доведіть, що середини всіх ребер правильного тетраедра є вершинами правильного октаедра.

2) Знайдіть об'єм цього октаедра, якщо ребро тетраедра дорівнює a.

10.117. Нехай r – радіус кулі, вписаної в тетраедр, h_1, h_2, h_3, h_4 – висоти тетраедра. Доведіть, що $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}$.

10.118. Ребро куба дорівнює 8 см. Тригранні кути куба зрізано так, що утворився многогранник, у якого 8 граней – правильні трикутники, а 6 граней – правильні восьмикутники. Знайдіть об'єм цього многогранника.

10.119. Тригранні кути куба зрізано так, що утворився многогранник, у якого 8 граней – правильні трикутники, а 6 граней – квадрати. Об'єм цього многогранника – 180 см^3. Знайдіть об'єм початкового куба.

10.120. Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди дорівнює γ, а радіус кола, вписаного в основу піраміди, дорівнює r. Знайдіть об'єм піраміди.

10.121. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди дорівнює Q, а бічні ребра нахилені до площини основи під кутом α. Знайдіть об'єм піраміди.

10.122. У кулю радіуса R вписано правильну трикутну піраміду, бічна грань якої нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть об'єм піраміди та її повну поверхню.

10.123. З основи висоти правильної трикутної піраміди до бічного ребра проведено перпендикуляр завдовжки d. Знайдіть об'єм піраміди, якщо двогранний кут між її бічними гранями дорівнює δ.

Життєва математика

10.124. Ретрансляційна вишка спирається на основу у формі кільця. Діаметр зовнішнього кола дорівнює 28 м, а внутрішнього кола – 12 м. Обчисліть площу фундаменту вишки з точністю до десятих м^2.

10.125. Учителька біології Марина Олегівна замовила акваріум, який має форму правильної шестикутної призми. Скільки м^2 скла потрібно для виготовлення акваріума, якщо довжина сторони основи акваріума – 0,5 м, а його висота – 1,2 м? Відповідь округліть до сотих.

Цікаві задачі для учнів неледачих

10.126. (*Задача Адамара*[1]). Через кожну пару протилежних ребер тетраедра провели паралельні площини. Знайдіть відношення об'єму тетраедра до об'єму утвореного (описаного) навколо нього паралелепіпеда.

[1] *Жак Адамар* (1865–1963) – французький математик і механік.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 10

1. Знайдіть периметр квадрата, який рівновеликий ромбу зі стороною 6 см і гострим кутом 30°.

А	Б	В	Г	Д
24 см	$24\sqrt{2}$ см	12 см	$12\sqrt{2}$ см	18 см

2. Точка $P(4; -2)$ лежить на колі із центром у точці $O(1; 2)$. Знайдіть радіус кола.

А	Б	В	Г	Д
2	4	5	10	інша відповідь

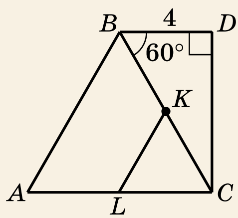
3. Знайдіть ребро куба, площа поверхні якого дорівнює 54 см^2.

А	Б	В	Г	Д
2 см	3 см	4 см	5 см	9 см

4. Укажіть вектор, колінеарний вектору $\vec{p}(-2; 1; 0)$.

А	Б	В	Г	Д
$\vec{a}(-4; -2; 0)$	$\vec{b}(-4; 2; 1)$	$\vec{c}(4; -2; 0)$	$\vec{d}(4; 2; 0)$	жодний з даних

5. На малюнку зображено рівносторонній трикутник ABC і прямокутний трикутник BCD, у якого $\angle D = 90°$, $\angle CBD = 60°$. K – середина BC, L – середина AC. Установіть відповідність між фігурою (1–4) та числовим значенням її площі (А–Д).



Фігура

1 Трикутник BDC

2 Трикутник ABC

3 Чотирикутник $ABDC$

4 Трикутник CKL

Числове значення площі

А $4\sqrt{3}$

Б $8\sqrt{3}$

В $16\sqrt{3}$

Г $24\sqrt{3}$

Д $36\sqrt{3}$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Паралелограм $ABCD$ побудовано на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах. Відомо, що $|\vec{a}| = 5$; $|\vec{b}| = 3$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$. Знайдіть градусну міру кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 3

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, лінійні виміри якого дорівнюють 4 см, 5 см і 8 см.

А. 184 см^3 **Б.** 140 см^3 **В.** 160 см^3 **Г.** 180 см^3

2. Сторони основи трикутної призми дорівнюють 8 см і 6 см, а кут між ними – 30°. Знайдіть об'єм призми, якщо її висота дорівнює 5 см.

А. 60 см^3 **Б.** 120 см^3 **В.** $60\sqrt{2}$ см^3 **Г.** $60\sqrt{3}$ см^3

3. Об'єм піраміди дорівнює 180 см^3, а площа її основи – 60 см^2. Знайдіть висоту піраміди.

А. 3 см **Б.** 6 см **В.** 12 см **Г.** 9 см

2

4. Основа прямого паралелепіпеда – ромб зі стороною 2 дм і гострим кутом 60°. Менша діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

А. $4\sqrt{2}$ дм^3 **Б.** $4\sqrt{3}$ дм^3 **В.** $2\sqrt{3}$ дм^3 **Г.** 4 дм^3

5. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть об'єм піраміди.

А. 36 см^3 **Б.** $36\sqrt{2}$ см^3 **В.** $36\sqrt{3}$ см^3 **Г.** $36\sqrt{6}$ см^3

6. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнюють 2 см і 8 см, а її висота – 9 см. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.

А. $63\sqrt{3}$ см^3 **Б.** $84\sqrt{3}$ см^3

В. $189\sqrt{3}$ см^3 **Г.** $126\sqrt{3}$ см^3

3

7. У прямій трикутній призмі сторони основи дорівнюють 7 см, 15 см і 20 см. Через бічне ребро призми і найменшу за довжиною висоту основи проведено переріз, площа якого дорівнює 21 см^2. Знайдіть об'єм призми.

А. 70 см^3 **Б.** 210 см^3 **В.** 176,4 см^3 **Г.** 105 см^3

8. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетом a та протилежним гострим кутом α. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом γ. Знайдіть об'єм піраміди.

А. $\dfrac{a^3 \operatorname{tg}\gamma \sin\alpha}{6\cos^2\alpha}$ **Б.** $\dfrac{a^3 \operatorname{tg}\gamma \cos\alpha}{6\sin^2\alpha}$

В. $\dfrac{a^3 \operatorname{tg}\gamma \cos\alpha}{2\sin^2\alpha}$ **Г.** $\dfrac{a^3 \operatorname{tg}\gamma \cos^2\alpha}{6\sin\alpha}$

9. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см, а висота піраміди перетинає її основу. Знайдіть об'єм піраміди, якщо висоти всіх бічних граней піраміди між собою рівні і дорівнюють $\sqrt{13}$ см.

А. $24\sqrt{3}$ см^3 **Б.** 48 см^3 **В.** 24 см^3 **Г.** 12 см^3

4

10. Основою похилого паралелепіпеда є прямокутник зі сторонами 4 см і 5 см. Бічна грань, що містить меншу сторону основи, перпендикулярна до площини основи і є ромбом, у якого один з кутів на $120°$ менший за інший. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

А. 20 см^2 **Б.** 60 см^2 **В.** 50 см^2 **Г.** 40 см^2

11. Периметри трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 10 см, 14 см і 16 см. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда.

А. 28 см^3 **Б.** 30 см^3 **В.** 60 см^3 **Г.** 48 см^3

12. Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди дорівнює $60°$. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює h.

А. $\dfrac{\sqrt{3}h^3}{8}$ **Б.** $\dfrac{\sqrt{3}h^3}{24}$ **В.** $\dfrac{\sqrt{3}h^3}{16}$ **Г.** $\dfrac{3\sqrt{3}h^3}{8}$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 9–10

1

1. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, лінійні виміри якого дорівнюють 3 см, 5 см і 7 см.

2. Знайдіть об'єм трикутної призми, сторони основи якої дорівнюють 2 см і 4 см, а кут між ними – $60°$, якщо висота призми дорівнює 8 см.

3. Об'єм піраміди дорівнює 30 см^3, а її висота – 9 см. Знайдіть площу основи піраміди.

2 **4.** Основа прямого паралелепіпеда – ромб зі стороною 4 см і тупим кутом 120°. Більша діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом 30°. Знайдіть об’єм паралелепіпеда.

5. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см і утворює з бічним ребром кут 30°. Знайдіть об’єм піраміди.

6. Знайдіть об’єм правильної зрізаної трикутної піраміди, у якої сторони основи дорівнюють 4 см і 6 см, а висота – 3 см.

3 **7.** У прямій трикутній призмі сторони основи дорівнюють 17 см, 25 см і 26 см. Через бічне ребро призми і найбільшу за довжиною висоту основи проведено переріз, площа якого дорівнює 72 см^2. Знайдіть об’єм призми.

8. Основою трикутної піраміди є прямокутний трикутник із гіпотенузою c і гострим кутом α. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом γ. Знайдіть об’єм піраміди.

4 **9.** Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди дорівнює 90°, а висота піраміди – $\sqrt{6}$ см. Знайдіть об’єм піраміди.

Додаткові завдання

3 **10.** Основою піраміди є прямокутний трикутник із гіпотенузою 15 см і катетом 12 см, а висота піраміди перетинає її основу. Усі бічні грані піраміди утворюють з її основою кути по 45°. Знайдіть об’єм піраміди.

4 **11.** Основою похилого паралелепіпеда є квадрат зі стороною 4 см. Одна з бічних граней паралелепіпеда перпендикулярна до площини основи і є ромбом, у якого один з кутів удвічі більший за інший. Знайдіть об’єм паралелепіпеда.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 3

До § 9

1 **1.** Переписавши дані рівності в зошит, заповніть пропуски числами так, щоб рівність була правильною:

1) 15 см^3 = … мм^3;
2) 7 дм^3 118 см^3 = … см^3;
3) 7 см^3 18 мм^3 = … мм^3;
4) 11 м^3 = … см^3.

2. Знайдіть об'єм куба, ребро якого дорівнює:
1) 2 м; 2) 6 дм.

3. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, лінійні розміри якого дорівнюють:
1) 12 мм, 10 мм і 20 мм; 2) 20 см, 3 дм і 0,7 м.

4. Знайдіть об'єм призми, площа основи якої дорівнює 36 $см^2$, а висота – 5 см.

5. Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює 100 $см^3$, а площа його основи – 25 $см^2$. Знайдіть висоту прямокутного паралелепіпеда.

6. Знайдіть об'єм прямої трикутної призми, дві сторони основи якої дорівнюють 8 см і $3\sqrt{2}$ см і утворюють між собою кут 45°, а бічне ребро призми дорівнює 5 см.

2 **7.** Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат зі стороною 8 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо діагональ бічної грані дорівнює 10 см.

8. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 12 см, а діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

9. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 6 см. Знайдіть висоту призми, якщо її об'єм – $72\sqrt{3}$ $см^3$.

10. Куб з ребром 40 см розрізали на маленькі кубики з ребром 5 см. Знайдіть кількість кубиків, що при цьому отримали.

11. Діагональ куба дорівнює 75 см. Знайдіть об'єм куба.

12. Основа прямокутного паралелепіпеда – квадрат. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його висота дорівнює 4 см, а діагональ нахилена до площини основи під кутом 45°.

13. Основа прямої призми – прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює 15 см, а діагональ – 17 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її об'єм дорівнює 600 $см^3$.

14. Основа похилої призми – правильний трикутник зі стороною 8 см. Бічне ребро призми дорівнює 6 см і утворює із площиною основи кут 30°. Знайдіть об'єм призми.

3 **15.** Висота прямокутного паралелепіпеда дорівнює 6 см. Діагональ більшої за площею бічної грані нахилена до площини основи під кутом 30°, а діагональ основи утворює з меншою стороною основи кут 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

16. У прямій трикутній призмі сторони основи дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Через бічне ребро призми і найбільшу висоту основи проведено переріз, площа якого дорівнює 168 см^2. Знайдіть об'єм призми.

17. Основою прямого паралелепіпеда є ромб із діагоналями 6 см і 8 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо площа його повної поверхні дорівнює 208 см^2.

18. Діагональ прямокутного паралелепіпеда завдовжки 8 см утворює з площиною основи кут 30°, а із площиною однієї з бічних граней – кут 45°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

19. Основою похилої призми є правильний шестикутник зі стороною 4 см. Одна з вершин верхньої основи проектується в центр нижньої основи. Бічні ребра призми утворюють із площиною основи кут 30°. Знайдіть об'єм призми.

20. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із катетом a і протилежним кутом α. Діагональ грані, що містить інший катет, утворює з площиною основи кут γ. Знайдіть об'єм призми.

4

21. Основою прямої призми є прямокутник із діагоналлю d та кутом α між діагоналями. Через протилежну даному куту сторону основи призми та протилежну їй сторону іншої основи проведено переріз. Площина перерізу утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об'єм призми.

22. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 7 см, а периметри двох граней – 10 см і 16 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

23. Основою похилої призми є прямокутник зі сторонами 10 см і 5 см. Бічна грань призми, що проходить через більшу сторону основи, перпендикулярна до площини основи і є ромбом, площа якого дорівнює площі основи. Знайдіть об'єм призми.

24. Основою похилого паралелепіпеда є квадрат зі стороною 10 см. Одне з бічних ребер паралелепіпеда дорівнює 5 см і утворює зі сторонами основи, що мають з ним спільну точку, рівні кути. Бічна грань, якій належить це ребро, є ромбом, висота якого – 8 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

25. Дві бічні грані трикутної призми, площі яких – 12 см^2 і 18 см^2, утворюють між собою кут 150°. Знайдіть об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 6 см.

До § 10

26. Площа основи піраміди дорівнює 20 см^2, а висота – 6 см. Знайдіть об'єм піраміди.

27. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 5 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 4 см.

28. Об'єм піраміди дорівнює 40 см^3, а площа її основи – 20 см^2. Знайдіть висоту піраміди.

29. Основою піраміди є ромб із діагоналями 6 см і 10 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 7 см.

30. У правильній чотирикутній піраміді радіус кола, вписаного в основу, дорівнює 3 см, а всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом 60°. Знайдіть об'єм піраміди.

31. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 5 см, а її висота – 4 см. Знайдіть об'єм піраміди.

32. Об'єм правильної чотирикутної піраміди дорівнює 42 см^3, а її висота – 7 см. Знайдіть діагональ основи піраміди.

33. Основою піраміди $TABCD$ є прямокутник $ABCD$, $AB = 6$ см. Ребро TD перпендикулярне до площини основи, а грані ABT і TBC утворюють із площиною основи кути 45° і 60° відповідно. Знайдіть об'єм піраміди.

34. Основою піраміди є прямокутник із кутом між діагоналями 30° і радіусом описаного кола 6 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 5 см.

35. Знайдіть об'єм правильної зрізаної чотирикутної піраміди, у якої сторони основ дорівнюють 4 см і 6 см, а висота дорівнює діагоналі більшої основи.

36. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

37. Основою піраміди є прямокутник, у якого діагональ завдовжки 16 см утворює з однією зі сторін основи кут 30°. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм піраміди.

38. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 12 см. Знайдіть висоту правильної чотирикутної призми, що є рівновеликою цій піраміді, якщо основи призми і піраміди збігаються.

39. Знайдіть об’єм правильної чотирикутної піраміди, бічне ребро якої завдовжки $6\sqrt{2}$ см утворює кут $45°$ з висотою піраміди.

40. У правильній шестикутній піраміді бічні грані нахилені до площини основи під кутом $45°$. Знайдіть об’єм піраміди, якщо її висота дорівнює 3 см.

41. У правильній чотирикутній зрізаній піраміді сторони основ дорівнюють 4 см і 10 см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом $30°$. Знайдіть об’єм зрізаної піраміди.

42. Двогранний кут при основі правильної трикутної піраміди дорівнює $60°$, а відрізок, що сполучає основу висоти піраміди і середину апофеми, дорівнює 6 см. Знайдіть об’єм піраміди.

43. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює l і утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об’єм піраміди.

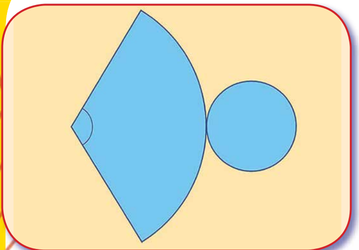
44. Усі бічні ребра чотирикутної піраміди дорівнюють l. Знайдіть об’єм цієї піраміди, якщо її основою є прямокутник із кутом α між діагоналями, а бічне ребро утворює з висотою кут γ.

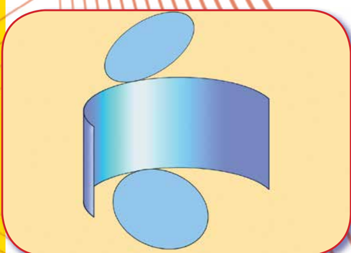
45. Основою піраміди є ромб із гострим кутом $30°$. Усі бічні грані нахилені до площини основи під кутом $60°$. Знайдіть об’єм піраміди, якщо радіус вписаного в ромб кола дорівнює 3 см.

4 **46.** Сторони основ правильної шестикутної піраміди дорівнюють 4 см і 6 см. Бічна грань утворює з площиною основи кут $45°$. Знайдіть об’єм піраміди.

47. Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 3 см і 6 см, а висота – 9 см. Через точку перетину діагоналей піраміди паралельно основам проведено площину, яка ділить піраміду на дві частини. Знайдіть об’єм кожної із цих частин.

ОБ'ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ТІЛ ОБЕРТАННЯ





У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- ***познайомитеся*** з розгортками циліндра, конуса, зрізаного конуса;
- ***дізнаєтесь***, як знайти площі поверхонь та об'єми тіл обертання за формулами;
- ***навчитеся*** знаходити об'єми та площі поверхонь циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі (сфери).

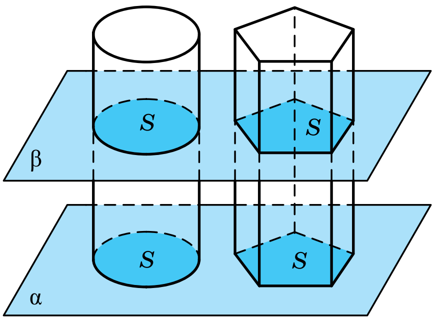
§ 11. ОБ’ЄМ ЦИЛІНДРА

У цьому параграфі розглянемо, як можна знайти об’єм циліндра.

Т Теорема (про об’єм циліндра). **Об’єм циліндра дорівнює добутку площі його основи S на висоту h:**

$$V_{цил} = Sh.$$

Доведення. 1) Нехай маємо циліндр, площа основи якого дорівнює S, а висота – h. Розмістимо циліндр так, щоб його основа належала площині α. У той самий спосіб поряд із циліндром розмістимо призму, площа основи і висота якої також дорівнюють S і h (мал. 11.1).



Мал. 11.1

2) Оскільки висоти циліндра і призми між собою рівні, то кожна площина β, що паралельна площині α та перетинає циліндр, також перетинає і призму.

3) Усі відповідні площі перерізів циліндра і призми, які при цьому утворяться, між собою рівні, оскільки площа кожного з них дорівнює S.

4) Отже, циліндр і призма задовольняють принцип Кавальєрі, а тому об’єм циліндра дорівнює об’єму призми. Оскільки об’єм призми дорівнює Sh, то і об’єм циліндра теж дорівнює Sh. ■

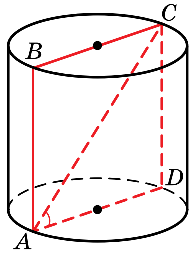
Н Наслідок. **Якщо радіус циліндра дорівнює R, а висота – h, то об’єм циліндра знаходимо за формулою**

$$V_{цил} = \pi R^2 h.$$

Розглянемо кілька задач на знаходження об’єму циліндра.

Задача 1. Осьовий переріз циліндра – прямокутник, діагональ якого дорівнює $4\sqrt{3}$ см і утворює кут $30°$ із площиною основи. Знайдіть об'єм циліндра.

Розв'язання. Нехай на малюнку 11.2 зображено даний циліндр, прямокутник $ABCD$ – його осьовий переріз, $AC = 4\sqrt{3}$ см. Знайдемо об'єм циліндра за формулою $V_{цил} = \pi R^2 h$.



Мал. 11.2

1) Пряма AD – проекція прямої AC на площину основи циліндра, тому $\angle CAD$ – кут між діагоналлю AC і площиною основи. За умовою, $\angle CAD = 30°$.

2) Із $\triangle ACD$ ($\angle D = 90°$):

$AD = AC\cos A = 4\sqrt{3}\cos 30° = 6$ (см) – діаметр основи,

$CD = AC\sin A = 4\sqrt{3}\sin 30° = 2\sqrt{3}$ (см) – твірна.

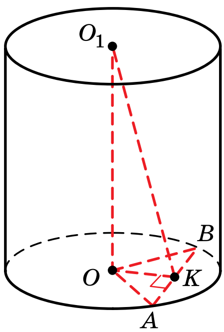
3) Тоді $h = CD = 2\sqrt{3}$ см, $R = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ (см).

4) Маємо: $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 2\sqrt{3} = 18\sqrt{3}\pi$ (см^3).

Відповідь. $18\sqrt{3}\pi$ см^3.

Задача 2. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра основи під кутом $120°$. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи із серединою даної хорди, дорівнює 10 см і утворює кут $60°$ із площиною нижньої основи. Знайдіть об'єм циліндра.

Розв'язання. Нехай на малюнку 11.3 зображено даний циліндр, $\angle BOA = 120°$, K – середина AB, $O_1K = 10$ см. Знайдемо об'єм циліндра за формулою $V_{цил} = \pi R^2 h$. Тоді $V_{цил} = \pi OA^2 \cdot OO_1$.



Мал. 11.3

1) OK – проекція O_1K на площину основи, тому $\angle O_1KO = 60°$ (за умовою).

2) Із $\triangle O_1KO$ ($\angle O = 90°$):
$OO_1 = O_1K\sin K = 10\sin 60° = 5\sqrt{3}$ (см);
$OK = O_1K\cos K = 10\cos 60° = 5$ (см).

3) Оскільки K – середина AB і $\triangle AOB$ – рівнобедрений ($OA = OB$), то OK – його медіана, бісектриса і висота. Тоді

$\angle OKA = 90°$, $\angle AOK = \dfrac{\angle AOB}{2} = \dfrac{120°}{2} = 60°$.

4) Із $\triangle OKA$ ($\angle K = 90°$):

$$OA = \frac{OK}{\cos\angle AOK} = \frac{5}{\cos 60^\circ} = 10 \text{ (см)}.$$

5) Маємо: $V_{\text{цил}} = \pi OA^2 \cdot OO_1 = \pi \cdot 10^2 \cdot 5\sqrt{3} = 500\sqrt{3}\pi$ (см^3).

Відповідь. $500\sqrt{3}\pi$ см^3.

• Сформулюйте і доведіть теорему про об’єм циліндра. • Сформулюйте наслідок із цієї теореми.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

11.1. Знайдіть об’єм циліндра, площа основи якого дорівнює 20 см^2, а висота – 3 см.

11.2. Висота циліндра дорівнює 7 см, а площа його основи – 10 см^2. Знайдіть об’єм циліндра.

11.3. Висота циліндра дорівнює 10 см, а його об’єм – 50 см^3. Знайдіть площу основи цього циліндра.

11.4. Площа основи циліндра дорівнює 25 см^2, а його об’єм – 100 см^3. Знайдіть висоту циліндра.

11.5. Знайдіть об’єм циліндра, радіус основи якого дорівнює 3 см, а висота – 7 см.

11.6. Висота циліндра дорівнює 8 см, а радіус основи – 2 см. Знайдіть об’єм циліндра.

2

11.7. Осьовим перерізом циліндра є прямокутник, площа якого – 40 см^2. Радіус основи циліндра дорівнює 5 см. Знайдіть об’єм циліндра.

11.8. Висота циліндра дорівнює 6 см, а площа його осьового перерізу – 24 см^2. Знайдіть об’єм циліндра.

11.9. Об’єм циліндра дорівнює 45π см^3, а його висота – 5 см. Знайдіть радіус основи циліндра.

11.10. Об’єм циліндра дорівнює 48π см^3, а діаметр його основи – 8 см. Знайдіть висоту циліндра.

11.11. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 17 см. Знайдіть об’єм циліндра, якщо його висота – 15 см.

11.12. Радіус основи циліндра дорівнює 3 см, а діагональ осьового перерізу – 10 см. Знайдіть об’єм циліндра.

11.13. Діагоналі осьового перерізу циліндра взаємно перпендикулярні. Знайдіть об’єм циліндра, якщо периметр осьового перерізу дорівнює 16 см.

11.14. Осьовий переріз циліндра – прямокутник, діагональ якого дорівнює 8 см і утворює кут $60°$ із площиною основи. Знайдіть об'єм циліндра.

11.15. Висота циліндра вдвічі більша за радіус основи, а відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, дорівнює $3\sqrt{5}$ см. Знайдіть об'єм циліндра.

11.16. Радіус основи циліндра втричі більший за його висоту, а відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої, дорівнює $2\sqrt{10}$ см. Знайдіть об'єм циліндра.

11.17. У посудину циліндричної форми налили 12 дм^3 води, а потім занурили в неї деталь. При цьому рівень води в посудині піднявся в 1,5 раза. Знайдіть об'єм деталі.

11.18. У циліндричну посудину з водою, внутрішній діаметр якої дорівнює 40 см, опустили деталь. При цьому рівень води в посудині піднявся на 10 см. Знайдіть об'єм деталі з точністю до цілих см^3.

11.19. Автоцистерна для перевезення молока має форму циліндра. Внутрішній діаметр цистерни дорівнює 1,8 м, а її довжина – 3,5 м. Скільки тонн молока вміщує заповнена цистерна, якщо густина молока – 1032 кг/м^3?

11.20. Підземне бензосховище має форму циліндра, внутрішній діаметр якого – 2,4 м, а довжина – 8 м. Скільки тонн бензину може вмістити це бензосховище, якщо густина бензину – 720 кг/м^3?

3 **11.21.** Об'єм циліндра дорівнює 6π дм^3, а діагональ його осьового перерізу утворює з площиною основи кут $30°$. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

11.22. Діагональ осьового перерізу циліндра утворює кут $45°$ із площиною основи. Об'єм циліндра дорівнює 2π дм^3. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

11.23. Хорда основи циліндра дорівнює 6 см і віддалена від центра цієї основи на 4 см. Відрізок, що сполучає центр іншої основи із серединою цієї хорди, утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть об'єм циліндра.

11.24. Хорда основи циліндра дорівнює 8 см і віддалена від центра цієї основи на 3 см. Відрізок, що сполучає центр іншої основи циліндра з кінцем даної хорди, утворює із площиною основи кут $45°$. Знайдіть об'єм циліндра.

11.25. У посудині циліндричної форми рівень води становить 36 см. Яким буде рівень води, якщо її перелити із цієї посудини в циліндричну посудину:

1) утричі більшого радіуса;
2) удвічі меншого діаметра?

11.26. Об’єми двох циліндрів рівні. Радіус першого в 4 рази більший за радіус другого. У скільки разів висота першого менша за висоту другого?

11.27. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 25 см, а висота циліндра на 5 см менша за його радіус. Знайдіть об’єм циліндра.

11.28. Діагональ осьового перерізу циліндра на 7 см більша за радіус циліндра. Знайдіть об’єм циліндра, якщо його висота дорівнює 5 см.

11.29. Переріз, паралельний осі циліндра, відтинає від кола основи дугу міри $120°$. Діагональ цього перерізу дорівнює $8\sqrt{3}$ см і утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть об’єм циліндра.

11.30. Переріз, паралельний осі циліндра, відтинає від кола основи дугу міри $90°$. Діагональ цього перерізу дорівнює 6 см і утворює з площиною основи кут $45°$. Знайдіть об’єм циліндра.

11.31. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої, утворює з віссю циліндра кут β. Відстань від центра нижньої основи до цього відрізка дорівнює m. Знайдіть об’єм циліндра.

11.32. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої, утворює з площиною основи кут α. Відрізок, що сполучає центр нижньої основи із серединою даного відрізка, дорівнює l. Знайдіть об’єм циліндра.

11.33. У кулю радіуса 5 см вписано циліндр так, що його основи є перерізами кулі. Висота циліндра – 6 см. Знайдіть об’єм циліндра.

11.34. У кулю радіуса 6,5 см вписано циліндр так, що його основи є перерізами кулі. Знайдіть об’єм циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 6 см.

11.35. Знайдіть об’єм циліндра, вписаного в правильну шестикутну призму, кожне ребро якої дорівнює a.

11.36. Знайдіть об’єм циліндра, вписаного в правильну трикутну призму, кожне ребро якої дорівнює a.

11.37. У циліндр вписано правильну трикутну призму, а в призму – інший циліндр. Знайдіть відношення об’ємів цих циліндрів.

11.38. Навколо циліндра описано правильну чотирикутну призму, а навколо призми – інший циліндр. Знайдіть відношення об’ємів цих циліндрів.

11.39. У циліндр вписано призму, основою якої є прямокутний трикутник із катетом b і прилеглим до нього кутом α. Знайдіть об’єм циліндра, якщо висота призми дорівнює h.

11.40. У циліндр вписано призму, основою якої є прямокутний трикутник із катетом a і протилежним до нього кутом α. Висота призми дорівнює h. Знайдіть об’єм циліндра.

4 **11.41.** Паралельно осі циліндра проведено площину, що перетинає основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під прямим кутом. Площа перерізу, що при цьому утворився, дорівнює $18\sqrt{3}$ см^2, а кут нахилу його діагоналі до площини основи дорівнює $60°$. Знайдіть об’єм циліндра.

11.42. У циліндрі, паралельно його осі, проведено площину, що перетинає основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом $60°$. Площа перерізу, що при цьому утворився, дорівнює $12\sqrt{3}$ см^2, а кут між діагоналлю перерізу і твірною циліндра дорівнює $60°$. Знайдіть об’єм циліндра.

11.43. Переріз, паралельний осі циліндра, перетинає його основу по хорді завдовжки b, яка стягує дугу градусної міри β. Кут між діагоналлю перерізу і твірною циліндра дорівнює α. Знайдіть об’єм циліндра.

11.44. Паралельно осі циліндра проведено площину, що перетинає його основу по хорді, яка стягує дугу міри γ. Діагональ перерізу дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть об’єм циліндра.

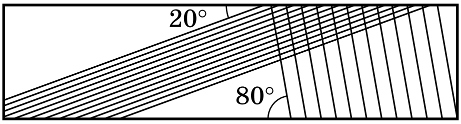
11.45. Периметр осьового перерізу циліндра дорівнює $2P$. Діагональ перерізу утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об’єм циліндра.

11.46. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює Q. Діагональ перерізу утворює кут β із твірною. Знайдіть об’єм циліндра.

11.47. У сферу вписано циліндр найбільшого об’єму. Знайдіть співвідношення між висотою цього циліндра h і радіусом його основи r.

Життєва математика

11.48. Знайдіть кут, що утворюють між собою лінії насічок у напилка, який зображено на малюнку.



11.49. Зіниця ока, що має форму круга, може змінювати свій діаметр залежно від освітлення від 1,5 до 7,5 мм. У скільки разів при цьому збільшується площа отвору зіниці?

Цікаві задачі для учнів нелегачих

11.50. Чи існує чотирикутна піраміда, дві грані якої, що не мають спільного ребра, перпендикулярні до площини основи?

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 11

1. У трикутнику ABC $AC = 6$ см, $\angle ABC = 60°$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

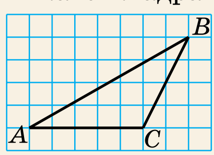
А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{3}$ см	$3\sqrt{2}$ см	6 см	$4\sqrt{3}$ см	інша відповідь

2. Дано вектор $\vec{a}(-8;\ 6)$. Знайдіть довжину вектора $-\frac{2}{5}\vec{a}$.

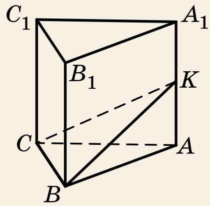
А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{5}$	2	4	6	10

3. На папері у клітинку зображено трикутник ABC, вершини якого збігаються з вершинами клітинок. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо клітинка є квадратом зі стороною 1 см.

А	Б	В	Г	Д
25 см^2	20 см^2	15 см^2	10 см^2	8 см^2

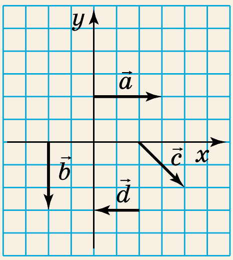


4. Точка K – середина ребра AA_1 прямої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$. Знайдіть об'єм цієї призми, якщо об'єм піраміди $KABC$ дорівнює 10 см³.



А	Б	В	Г	Д
20 см³	30 см³	60 см³	120 см³	180 см³

5. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ задано у прямокутній системі координат. Установіть відповідність між парою векторів (1–4) і правильним для цієї пари твердженням (*А*–Д).



	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Пара векторів	*Твердження для пари векторів*
1 $\vec{a}$ і $\vec{d}$	**А** Вектори рівні
2 $\vec{b}$ і $\vec{d}$	**Б** Вектори протилежно напрямлені
3 $\vec{b}$ і $\vec{c}$	**В** Скалярний добуток векторів дорівнює нулю
4 $\vec{d}$ і $\vec{c}$	**Г** Скалярний добуток векторів більший за нуль
	Д Кут між векторами тупий

6. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть (у см²) площу повної поверхні піраміди.

§ 12. ОБ'ЄМ КОНУСА І ЗРІЗАНОГО КОНУСА

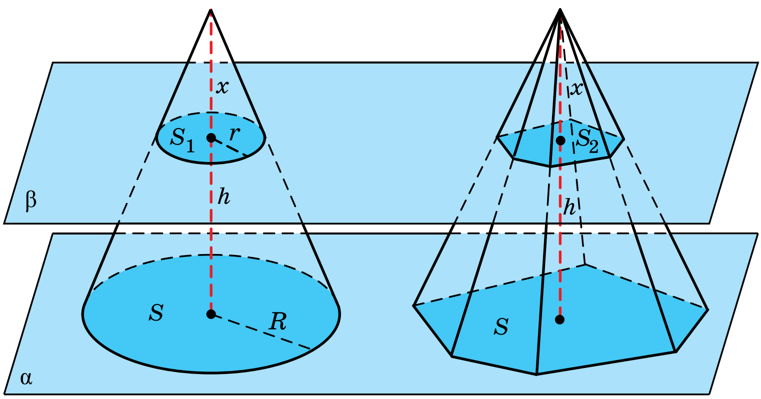
Тепер розглянемо, як знайти об'єм конуса і зрізаного конуса.

1. Об'єм конуса

Т Теорема 1 (про об'єм конуса). **Об'єм конуса дорівнює третині добутку площі його основи на висоту:**

$$V_{к} = \frac{1}{3}Sh.$$

Доведення. 1) Нехай маємо конус, площа основи якого – S, а висота – h. Розмістимо конус так, щоб його основа належала деякій площині α. У той самий спосіб поряд з конусом розмістимо піраміду, площа основи і висота якої також дорівнюють S і h (мал. 12.1).



Мал. 12.1

2) Оскільки висоти конуса і піраміди між собою рівні, то кожна площина β, що паралельна площині α та перетинає конус, перетинатиме також і піраміду.

3) Проведемо площину β на відстані x від вершини конуса. Нехай у перерізі конуса отримали круг із площею S_1, а в перерізі піраміди – многокутник із площею S_2. Міркуючи в той самий спосіб, що й у лемі про рівновеликість трикутних пірамід з рівними між собою висотами та рівновеликими основами, матимемо, що $\frac{S_1}{S} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$ і $\frac{S_2}{S} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$.

А значить, $S_1 = S_2$.

4) Тоді, за принципом Кавальєрі, конус і піраміда мають рівні об'єми. Оскільки об'єм піраміди дорівнює $\frac{1}{3}Sh$, то і об'єм конуса дорівнює $\frac{1}{3}Sh$. ■

Н *Наслідок.* **Якщо радіус основи конуса дорівнює R, а висота – h, то об'єм конуса**

$$V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Розглянемо кілька задач на знаходження об'єму конуса.

Задача 1. Знайдіть об'єм конуса, якщо його осьовим перерізом є правильний трикутник зі стороною 6 см.

Розв'язання. Нехай дано конус, $\triangle PAB$ – його осьовий переріз, $PA = PB = AB = 6$ см (мал. 12.2). Знайдемо об'єм конуса за формулою $V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. Тоді $V_к = \frac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot PO$.

1) $OA = \frac{AB}{2} = 3$ (см).

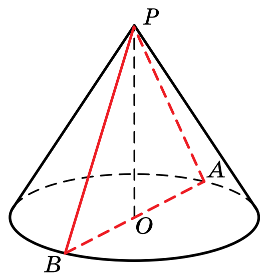
2) Оскільки $\triangle PAB$ – рівносторонній, а PO – його висота, то

$PO = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (см).

3) Маємо:

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3\sqrt{3} = 9\pi\sqrt{3}$ (см³).

Відповідь. $9\pi\sqrt{3}$ см³.



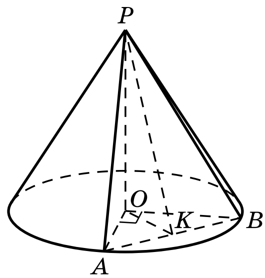
Мал. 12.2

Задача 2. Через вершину конуса проведено площину, яка перетинає основу по хорді завдовжки 8 см, яку видно із центра основи під прямим кутом. Площа перерізу, що при цьому утворився, дорівнює 20 см². Знайти об'єм конуса.

Розв'язання. Нехай на малюнку 12.3 зображено даний конус, $\triangle PAB$ – його переріз, $AB = 8$ см, $\angle AOB = 90°$, $S_{PAB} = 20$ см².

1) Оскільки $\angle AOB = 90°$, то $AB = OA\sqrt{2}$. Тоді

$R = OA = OB = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ (см).



Мал. 12.3

2) Проведемо PK – висоту трикутника PAB. Оскільки $S_{PAB} = \frac{1}{2}AB \cdot PK$; то $PK = \frac{2S_{PAB}}{AB} = \frac{2 \cdot 20}{8} = 5$ (см).

3) Оскільки OK – проекція похилої PK на площину основи конуса, $PK \perp AB$, то $OK \perp AB$ (за теоремою про три перпендикуляри).

4) Оскільки ΔAOB – прямокутний і рівнобедрений ($OA = OB$), $OK \perp AB$, то OK – його медіана, проведена до гіпотенузи. Тому $OK = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4$ (см).

5) Із $\triangle OPK$ ($\angle O = 90°$):

$h = OP = \sqrt{PK^2 - OK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$

6) Маємо:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot OP = \frac{1}{3}\pi \cdot (4\sqrt{2})^2 \cdot 3 = 32\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

В і д п о в і д ь. 32π см^3.

2. Об'єм зрізаного конуса

Т е о р е м а 2 (про об'єм зрізаного конуса). **Об'єм V зрізаного конуса з висотою h і радіусами основ R і r можна знайти за формулою**

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2).$$

Д о в е д е н н я. 1) Нехай дано зрізаний конус і зрізану піраміду, що містяться між площинами α і β (мал. 12.1). Обидва тіла задовольняють принцип Кавальєрі. Щоб це довести, достатньо провести довільну площину γ, що паралельна площині α і перетинає дані зрізаний конус і зрізану піраміду.

2) Отже, об'єм зрізаного конуса V можна знайти за формулою $V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS_1} + S_1)$, де S і S_1 – площі основ конуса, h – його висота.

3) Але $S = \pi R^2$, $S_1 = \pi r^2$, тому

$$V = \frac{1}{3}h(\pi R^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2} + \pi r^2) = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2). \blacksquare$$

Задача 3. У зрізаному конусі радіус меншої основи дорівнює 5 см. Висота конуса дорівнює 4 см, а його твірна утворює з площиною більшої основи кут 45°. Знайти об'єм конуса.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай на малюнку 12.4 зображено даний зрізаний конус, у якого $r_1 = A_1O_1 = 5$, $h = OO_1 = 4$ см.

1) Розглянемо трапецію AA_1B_1B – осьовий переріз конуса. Проведемо $A_1K \parallel OO_1$. Тоді A_1O_1OK – прямокутник і $A_1K = OO_1 = 4$ см, $KO = A_1O_1 = 5$ см.

2) AK – проекція похилої AA_1 на площину основи, тому $\angle A_1AO$ – кут нахилу твірної AA_1 до площини основи, тоді $\angle A_1AO = 45°$ (за умовою).

3) У трикутнику AA_1K $\angle K = 90°$, $\angle A = 45°$, тому $AK = A_1K = 4$ см.

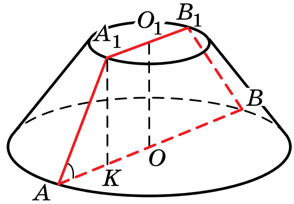
4) Тоді

$r = AO = AK + KO = 4 + 5 = 9$ (см).

5) Маємо:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot (5^2 + 5 \cdot 9 + 9^2) = \frac{604}{3}\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

В і д п о в і д ь. $\frac{604}{3}\pi$ см^3.



Мал. 12.4

А ще раніше...

У «Началах» Евкліда можна знайти лише означення об'ємів циліндра і конуса, а формули для їх обчислення там не наведено.

Об'єм конуса, а можливо, і об'єм піраміди, знайшов Демокріт Абдерський. Строге доведення формули для обчислення об'єму конуса належить Евдоксу Кнідському. Він довів, що об'єм конуса дорівнює третині об'єму циліндра, у якого ті самі основа і висота, що й у конуса.

Евдокс довів і те, що відношення об'ємів конусів (або циліндрів), висоти яких між собою рівні, дорівнює відношенню площ їхніх основ, а також те, що відношення об'ємів двох конусів (або циліндрів), площі основ яких однакові, дорівнює відношенню їхніх висот.

Формула для обчислення об'єму кулі вперше з'явилась у трактаті Архімеда «Про кулю і циліндр». У цьому трактаті Архімед навів доведення формули з точки зору механіки.

• Сформулюйте і доведіть теорему про об'єм конуса. • Сформулюйте наслідок із цієї теореми. • Сформулюйте і доведіть теорему про об'єм зрізаного конуса.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **12.1.** Знайдіть об’єм конуса, площа основи якого дорівнює 12 см^2, а висота – 5 см.

12.2. Висота конуса дорівнює 6 см, а площа його основи – 13 см^2. Знайдіть об’єм конуса.

12.3. Висота конуса дорівнює 12 см, а його об’єм – 20 см^3. Знайдіть площу основи конуса.

12.4. Об’єм конуса дорівнює 40 см^3, а площа його основи – 20 см^2. Знайдіть висоту конуса.

12.5. Знайдіть об’єм конуса, у якого радіус основи дорівнює 2 см, а висота – 3 см.

12.6. Знайдіть об’єм конуса, висота якого дорівнює 5 см, а радіус його основи – 3 см.

12.7. Знайдіть об’єм зрізаного конуса, у якого висота дорівнює 2 см, а радіуси основ – 3 см і 6 см.

12.8. Висота зрізаного конуса дорівнює 6 см, а радіуси його основ – 2 см і 5 см. Знайдіть об’єм зрізаного конуса.

12.9. Твірна конуса дорівнює 13 см, а радіус основи – 5 см. Знайдіть об’єм конуса.

12.10. Радіус основи конуса дорівнює 6 см, а твірна конуса – 10 см. Знайдіть об’єм конуса.

2 **12.11.** Твірна конуса дорівнює $6\sqrt{2}$ см і утворює з його висотою кут $45°$. Знайдіть об’єм конуса.

12.12. Радіус основи конуса дорівнює 3 см і утворює з твірною кут $60°$. Знайдіть об’єм конуса.

12.13. Осьовий переріз конуса – рівнобедрений трикутник із кутом $120°$ при вершині і основою 12 см. Знайдіть об’єм конуса.

12.14. Осьовий переріз конуса – правильний трикутник, висота якого дорівнює $\sqrt{3}$ см. Знайдіть об’єм конуса.

12.15. Площа основи конуса дорівнює 9π см^2, а його твірна – 5 см. Знайдіть об’єм конуса.

12.16. Довжина кола основи конуса дорівнює 14π см, а його твірна – 25 см. Знайдіть об’єм конуса.

12.17. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 1 см і 6 см, а твірна – 13 см. Знайдіть об’єм зрізаного конуса.

12.18. Твірна зрізаного конуса дорівнює 10 см. Знайдіть його об’єм, якщо радіуси основ конуса дорівнюють 2 см і 8 см.

12.19. Доведіть, що об'єм конуса дорівнює одній шостій частині добутку площі осьового перерізу на довжину кола основи.

3 **12.20.** Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки 1 см і 4 см. Трикутник обертається навколо меншого катета. Знайдіть об'єм конуса, що при цьому утворився.

12.21. Висота прямокутного трикутника, що проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки 3,2 см і 1,8 см. Трикутник обертається навколо більшого катета. Знайдіть об'єм конуса, що при цьому утворився.

12.22. Колба, що має форму конуса з висотою 15 см, доверху заповнена водою. Воду з колби перелили в посудину циліндричної форми, радіус основи якої дорівнює радіусу основи конуса. На якій висоті стоятиме вода в цій посудині?

12.23. Свинцевий циліндр, висота якого – 12 см, переплавили в конус із такою самою основою, як у циліндра. Знайдіть висоту цього конуса.

12.24. Висота конуса дорівнює 24 см, а сума твірної і радіуса основи дорівнює 32 см. Знайдіть об'єм конуса.

12.25. Радіус основи конуса дорівнює 6 см, а твірна на 4 см більша за висоту. Знайдіть об'єм конуса.

12.26. Через вершину конуса проведено площину під кутом $45°$ до площини основи. Ця площина перетинає основу по хорді довжиною $6\sqrt{3}$ см, яку видно із центра основи під кутом – $120°$. Знайдіть об'єм конуса.

12.27. Через дві твірні конуса проведено площину під кутом $60°$ до площини основи. Ця площина перетинає основу по хорді, яку видно із центра основи під прямим кутом. Знайдіть об'єм конуса, якщо його висота дорівнює 6 см.

12.28. Твірна конуса утворює кут α з його висотою. Знайдіть об'єм конуса, якщо відстань від центра основи до твірної дорівнює d.

12.29. Твірна конуса утворює кут β із площиною основи. Знайдіть об'єм конуса, якщо відстань від центра основи до середини твірної дорівнює m.

12.30. Осьовий переріз зрізаного конуса – рівнобічна трапеція з тупим кутом $135°$, більшою основою 10 см і висотою 2 см. Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

12.31. Осьовий переріз зрізаного конуса – рівнобічна трапеція з гострим кутом $45°$ та основами 4 см і 10 см. Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

12.32. Рівнобедрений трикутник зі сторонами 5 см, 5 см і 6 см обертається навколо своєї основи. Знайдіть об’єм тіла, що при цьому утворилося.

12.33. Рівнобедрений трикутник з основою 8 см і бічною стороною 5 см обертається навколо своєї основи. Знайдіть об’єм тіла, що при цьому утворилося.

4 **12.34.** Прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см обертається навколо гіпотенузи. Знайдіть об’єм тіла обертання, що при цьому утворилося.

12.35. Правильний трикутник зі стороною 6 см обертається навколо однієї зі своїх сторін. Знайдіть об’єм тіла обертання, що при цьому утворилося.

12.36. Площина проходить через середину висоти конуса, паралельно його основі і ділить його на частини, різниця об’ємів яких дорівнює 27 см^3. Знайдіть об’єм конуса.

12.37. Твірна конуса дорівнює 10 см, а площа його осьового перерізу – 24 см^2. Знайдіть об’єм конуса.

12.38. Площа осьового перерізу конуса дорівнює 60 см^2, а твірна – 13 см. Знайдіть об’єм конуса.

12.39. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом α, а радіус вписаної в конус кулі дорівнює 2 см. Знайдіть об’єм конуса.

12.40. У правильну шестикутну піраміду вписано конус і навколо неї описано конус. Знайдіть відношення об’ємів цих конусів.

12.41. Навколо правильної чотирикутної піраміди описано конус і в піраміду вписано конус. Знайдіть відношення об’ємів цих конусів.

12.42. Знайдіть об’єм конуса, твірна якого утворює кут α з висотою, а периметр осьового перерізу дорівнює $2p$.

12.43. Знайдіть об’єм конуса, твірна якого утворює кут γ із площиною основи, а периметр осьового перерізу конуса дорівнює $2p$.

12.44. Твірна зрізаного конуса дорівнює 4 см і утворює з площиною основи кут $60°$. Діагональ осьового перерізу ділить цей кут навпіл. Знайдіть об’єм зрізаного конуса.

12.45. Діагональ осьового перерізу зрізаного конуса перпендикулярна до його твірної і ділить навпіл гострий кут при основі перерізу. Знайдіть об’єм конуса, якщо його висота дорівнює $6\sqrt{3}$ см.

12.46. Трапеція, у якої основи дорівнюють 40 см і 4 см, а бічні сторони – 25 см і 29 см, обертається навколо більшої основи. Знайдіть об'єм отриманого тіла.

12.47. Рівнобічна трапеція з основами 8 см і 2 см, у яку можна вписати коло, обертається навколо більшої основи. Знайдіть об'єм тіла, що при цьому утворилося.

12.48. Вершиною конуса є точка Q, AB і CD – хорди основи конуса. Площини QAB і QCD утворюють із площиною основи відповідно кути $45°$ і $60°$. Знайдіть об'єм конуса, якщо $AB = 10$ см, $CD = 14$ см.

12.49. Висоту конуса поділено на 3 рівні частини і через точки поділу паралельно основі проведено площини. Об'єм меншого зі зрізаних конусів, що при цьому утворилися, дорівнює 21 см^3. Знайдіть об'єм даного конуса.

12.50. Висоту конуса поділено на 3 рівні частини і паралельно основі через точки поділу проведено площини. Об'єм більшого зі зрізаних конусів, що при цьому утворилися, дорівнює 171 см^3. Знайдіть об'єм даного конуса.

12.51. Знайдіть об'єм конуса, у якого середина висоти віддалена від бічної поверхні на відстань a, а кут між твірною і висотою дорівнює β.

12.52. Знайдіть об'єм конуса, у якого середина висоти віддалена від твірної на відстань b, а кут нахилу твірної до площини основи дорівнює α.

12.53. Трикутник зі сторонами 13 см, 37 см і 40 см обертається навколо прямої, що проходить через вершину більшого кута і паралельна більшій стороні. Знайдіть об'єм тіла, що при цьому утворилося.

12.54. Трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см обертається навколо прямої, що проходить через вершину середнього за величиною кута і паралельна протилежній до цієї вершини стороні трикутника. Знайдіть об'єм тіла, що при цьому утворилося.

12.55. Зрізаний конус із радіусами основ R і r та конус із радіусом основи R_1 є рівновеликими, а їхні висоти між собою рівні. Знайдіть найбільший кут трикутника зі сторонами R, r і R_1.

12.56. Ромб зі стороною a і гострим кутом $30°$ обертається навколо однієї зі своїх сторін. Знайдіть об'єм тіла обертання, що при цьому утворилося.

12.57. Ромб зі стороною b і гострим кутом $60°$ обертається навколо однієї зі своїх сторін. Знайдіть об'єм тіла обертання, що при цьому утворилося.

12.58. Довжина ребра октаедра дорівнює a. Вершина конуса збігається з вершиною октаедра, а коло основи дотикається до чотирьох граней октаедра в їхніх центрах. Знайдіть об’єм конуса.

12.59. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Вершина конуса збігається із центром грані тетраедра, а коло основи проходить через центри інших граней. Знайдіть об’єм конуса.

12.60. Сторони трикутника дорівнюють 6 см, 25 см і 29 см. Трикутник обертається навколо прямої, що проходить через вершину меншого кута трикутника паралельно його меншій стороні. Знайдіть об’єм тіла обертання, що при цьому утворилося.

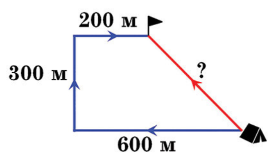
12.61. Периметри бічних граней трикутної піраміди дорівнюють 90 см, 97 см і 98 см. Навколо цієї піраміди описано конус. Висота конуса належить одній з бічних граней піраміди. Знайдіть об’єм конуса.

12.62. Твірна конуса дорівнює l. Якого найбільшого значення може набувати його об’єм?

Життєва математика

12.63. Скільки спиць у колесі, якщо кути між сусідніми спицями дорівнюють по 15°?

12.64. Старшокласники взяли участь у військово-патріотичній грі «Джура». За умовами гри перша команда пройшла від табору до пункту призначення 600 м у напрямку на захід, потім – 300 м на північ. Після цього – іще 200 м на схід. Друга команда до пункту призначення рухалася іншим шляхом (на малюнку його показано червоним кольором). Яку відстань подолала кожна з команд?



Цікаві задачі для учнів неледачих

12.65. (*Національна олімпіада Чехословаччини, 1980 р.*) Довжина найбільшої сторони рівнобічної трапеції дорівнює 13, а її периметр – 28.

1) Знайдіть сторони трапеції, якщо її площа дорівнює 27.

2) Чи може площа такої трапеції дорівнювати 27,001?

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 12

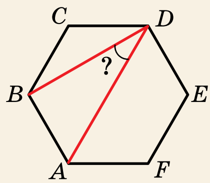
1. Бічна сторона гострокутного рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см, а висота, проведена до неї, – 6 см. Знайдіть довжину основи трикутника.

А	Б	В	Г	Д
6 см	8 см	$2\sqrt{10}$ см	$4\sqrt{2}$ см	інша відповідь

2. Точки C і D належать колу радіуса 6 см і ділять його на дві дуги, одна з яких удвічі довша за іншу. Знайдіть довжину меншої дуги кола.

А	Б	В	Г	Д
2π см	4π см	8π см	4 см	8 см

3. На малюнку зображено правильний шестикутник $ABCDEF$. Знайдіть градусну міру кута BDA.

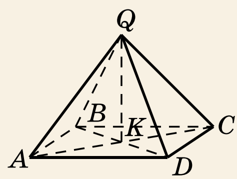


А	Б	В	Г	Д
20°	25°	30°	35°	60°

4. Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда, лінійні виміри якого дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см.

А	Б	В	Г	Д
7 см	8 см	9 см	10 см	12 см

5. На малюнку зображено правильну чотирикутну піраміду $QABCD$, висота якої дорівнює 12, а бічне ребро – 13. Установіть відповідність між геометричною величиною (1–4) та її числовим значенням (А–Д).



Геометрична величина

1 діагональ основи піраміди
2 площа діагонального перерізу піраміди
3 площа основи піраміди
4 об’єм піраміди

Числове значення

А 10
Б 50
В 60
Г 100
Д 200

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Основою прямого паралелепіпеда є ромб з тупим кутом $120°$ і більшою діагоналлю $8\sqrt{3}$ см. Менша діагональ паралелепіпеда утворює з його висотою кут $45°$. Знайдіть (у см^2) площу бічної поверхні паралелепіпеда.

§ 13. ОБ’ЄМ КУЛІ ТА ЇЇ ЧАСТИН

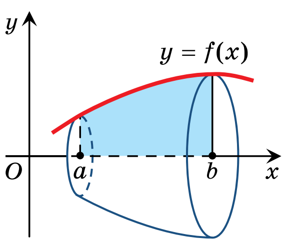
1. Об’єм тіла обертання

Щоб отримати формули для обчислення об’ємів кулі та її частин, пригадаємо, як ми знаходили об’єми тіл обертання в курсі алгебри і початків аналізу.

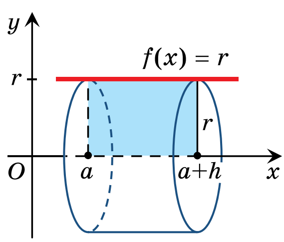
Нехай маємо криволінійну трапецію, яка обмежена графіком неперервної на проміжку $[a;\ b]$ функції $y = f(x)$, такої, що $f(x) > 0$ для кожного $x \in [a;\ b]$, та прямими $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (мал. 13.1).

Тоді об’єм V тіла, що утворилося внаслідок обертання цієї трапеції навколо осі абсцис, можна обчислити за формулою

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$



Мал. 13.1



Мал. 13.2

Задача 1. Використовуючи формулу для обчислення об’єму тіла обертання, знайти об’єм циліндра, радіус основи та висота якого відповідно дорівнюють r і h.

Р о з в’ я з а н н я. Нехай V – об’єм даного циліндра. Цей циліндр можна отримати в результаті обертання навколо осі абсцис криволінійної трапеції, яка обмежена графіком функції $f(x) = r$ та прямими $x = a$, $x = a + h$, $y = 0$ (мал. 13.2).

$$\text{Тоді } V = \pi\int_a^{a+h} r^2dx = \pi r^2x\Big|_a^{a+h} = \pi r^2(a+h-a) = \pi r^2h.$$

Відповідь. πr^2h.

Очевидно, що відповідь, яку ми отримали, збігається з раніше знайденою нами в § 11 формулою для обчислення об'єму циліндра.

2. Об'єм кулі

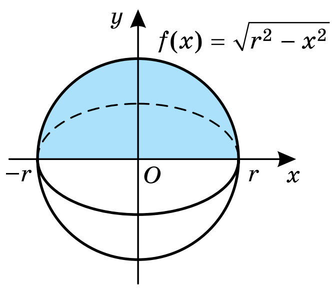
За допомогою формули об'єму тіла обертання знайдемо формулу для обчислення об'єму кулі.

Т е о р е м а (про об'єм кулі). **Об'єм V кулі, радіус якої дорівнює r, можна обчислити за формулою**

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Д о в е д е н н я. 1) Розглянемо кулю радіуса r у декартовій системі координат, узявши за початок координат центр кулі. Площина xy перетинає поверхню цієї кулі по колу, формула якого $x^2 + y^2 = r^2$ (мал. 13.3).

2) Тоді кулю радіуса r можна отримати в результаті обертання навколо осі абсцис криволінійної трапеції, що обмежена графіком функції $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ та віссю абсцис. Ця функція перетинає вісь x у точках із абсцисами r і $-r$.



Мал. 13.3

3) Маємо:

$$V = \pi\int_{-r}^{r}(\sqrt{r^2 - x^2})^2dx = \pi\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)dx = \pi\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r} =$$

$$= \pi\left(\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right)\right) = \frac{4}{3}\pi r^3. \blacksquare$$

Розглянемо кілька задач на застосування цієї формули.

Задача 2. Дві чавунні кулі, радіуси яких – 5 см і 7 см, переплавили в одну кулю. Знайти (із точністю до десятих сантиметра) радіус отриманої при цьому кулі.

Р о з в ' я з а н н я. За властивістю об'ємів зрозуміло, що об'єм нової кулі має дорівнювати сумі об'ємів двох даних куль.

1) Знайдемо об'єми V_1 і V_2 двох даних куль:

$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3$ і $V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 7^3$.

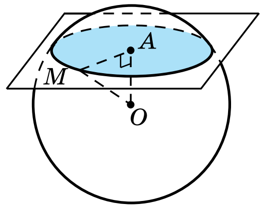
2) Знайдемо об’єм V отриманої кулі:

$V = V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot 7^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 468.$

3) Враховуючи формулу об’єму кулі $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, маємо: $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 468$. Із цієї рівності отримаємо, що $r^3 = 468$, тобто $r = \sqrt[3]{468} \approx 7{,}8$ см.

Відповідь. ≈ 7,8 см.

Задача 3. На відстані 3 см від центра кулі проведено переріз, площа якого дорівнює 27π см^2. Знайти об’єм кулі.



Мал. 13.4

Розв’язання. Нехай на малюнку 13.4 зображено кулю із центром у точці O і радіусом OM та її переріз – круг із центром у точці A, $OA = 3$ см.

1) AM – радіус перерізу, тоді $S_{\text{пер}} = \pi \cdot AM^2$ – площа перерізу.

За умовою $S_{\text{пер}} = 27\pi$ см^2, тому $\pi \cdot AM^2 = \pi \cdot 27$, отже $AM^2 = 27$ см^2.

2) Із $\triangle AOM$ ($\angle A = 90°$):

$OM = \sqrt{AO^2 + AM^2} = \sqrt{3^2 + 27} = 6$ (см) – радіус кулі.

3) Знаючи радіус кулі, можемо знайти її об’єм:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi$ (см^3).

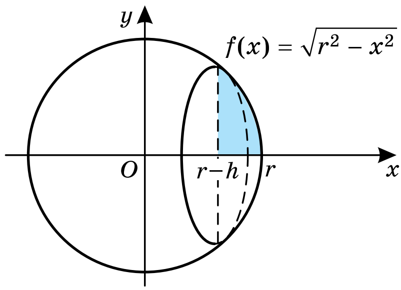
Відповідь. 288π см^3.

3. Об’єм кульового сегмента

Знайдемо формулу для обчислення об’єму кульового сегмента, як і у випадку кулі, за допомогою формули об’єму тіла обертання.

Кульовий сегмент, висота якого дорівнює h за умови, що радіус кулі дорівнює r, можна отримати в результаті обертання навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, прямою $x = r - h$ та віссю абсцис (мал. 13.5). Знайдемо об’єм V цього сегмента:

$$V = \pi\int_{r-h}^{r}(\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi\int_{r-h}^{r}(r^2 - x^2)dx = \pi\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{r-h}^{r} =$$



Мал. 13.5

$$= \pi\left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \left(r^2(r-h) - \frac{(r-h)^3}{3}\right)\right] = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right).$$

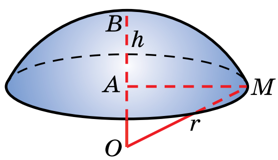
Отже, *об'єм кульового сегмента можна знайти за формулою*

$V = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right)$, де r – радіус кулі, h – висота сегмента.

Зауважимо, що отриману формулу можна використовувати і у випадку, коли висота сегмента h більша за радіус кулі r.

Задача 4. Знайти об'єм меншого з кульових сегментів, радіус основи якого дорівнює 4 см, а висота – 2 см.

Розв'язання. Розглянемо кульовий сегмент, у якого $AM = 4$ см – радіус основи, $AB = h = 2$ см – висота (мал. 13.6). Нехай O – центр кулі. Позначимо радіус кулі через r. Тоді $OM = OB = r$.



Мал. 13.6

1) $AO = OB - AB = r - h = r - 2.$

2) Із $\triangle AOM$ ($\angle A = 90°$): $OM^2 = AO^2 + AM^2$.

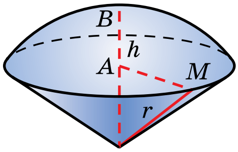
Маємо рівняння: $r^2 = (r-2)^2 + 4^2$, тоді $r = 5$.

3) Знайдемо об'єм сегмента: $V = \pi \cdot 2^2\left(5 - \frac{2}{3}\right) = \frac{52\pi}{3}$ (см^3).

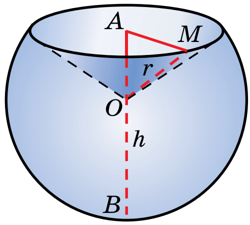
Відповідь. $\frac{52\pi}{3}$ см^3.

4. Об'єм кульового сектора

Об'єм кульового сектора, який менший за половину кулі, дорівнює сумі об'єму кульового сегмента $V_1 = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right)$ та об'єму V_2 конуса (мал. 13.7).



Мал. 13.7



Мал. 13.8

Знайдемо висоту AO цього конуса та радіус AM його основи: $AO = r - h$, $AM = \sqrt{MO^2 - AO^2} = \sqrt{r^2 - (r-h)^2} = \sqrt{2rh - h^2}$.

Отже, $V_2 = \frac{1}{3}\pi AM^2 \cdot AO = \frac{1}{3}\pi(2rh - h^2)\cdot(r-h)$.

Тоді маємо об’єм сектора:

$$V = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right) + \frac{1}{3}\pi(2rh - h^2)(r-h) = \frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

Щоб знайти об’єм кульового сектора, який більший за половину кулі, треба від об’єму кульового сегмента $V_1 = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right)$ відняти об’єм конуса V_2 (мал. 13.8). У цьому випадку $AO = h - r$, а $AM = \sqrt{MO^2 - AO^2} = \sqrt{r^2 - (h-r)^2} = \sqrt{2rh - h^2}$.

Отже, $V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot AM^2 \cdot AO = \frac{1}{3}\pi(2rh - h^2)(h-r)$.

Тоді маємо об’єм сектора:

$$V = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right) - \frac{1}{3}\pi(2rh - h^2)(h-r) = \frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

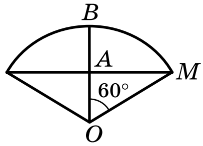
Отже, *об’єм кульового сектора можна знайти за формулою*

$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$, де r – радіус кулі, h – висота сегмента.

Задача 5. Круговий сектор, радіус якого дорівнює 6 см, а кут – 120°, обертається навколо своєї осі симетрії. Знайти об’єм кульового сектора, що при цьому утворився.

Р о з в ’ я з а н н я. Нехай на малюнку 13.9 зображено круговий сектор, BO – його вісь симетрії, $OM = 6$ см – його радіус.

1) Тоді $\angle BOM = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.



Мал. 13.9

2) Із $\triangle AOM$ ($\angle A = 90°$): $AO = OM\cos O = 6\cos 60° = 3$ (см).

3) Знайдемо висоту сегмента:
$h = OB - AO = 6 - 3 = 3$ (см).

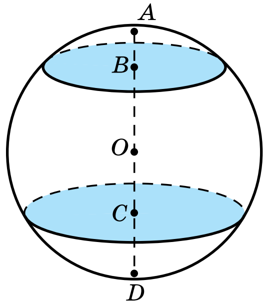
4) Маємо об’єм сектора:

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 3 = 72\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь. 72π см^3.

5. Об’єм кульового шару

Об’єм кульового шару можна знайти двома способами. Першим – як різницю об’ємів двох кульових сегментів. Наприклад, від об’єму кульового сегмента з висотою AC, тобто більшого за півкулю, відняти об’єм кульового сегмента з висотою AB (мал. 13.10). Другий спосіб – від об’єму кулі відняти суму двох кульових сегментів, а саме: від об’єму кулі відняти суму кульових сегментів із висотами AB і CD (мал. 13.10).



Мал. 13.10

Задача 6. Кулю радіуса 10 см перетнули двома паралельними площинами на відстанях 7 см і 5 см по різні боки від її центра. Знайдіть об’єм кульового шару, що при цьому утворився.

Розв’язання. Нехай на малюнку 13.10 зображено дану кулю і два її перерізи паралельними площинами. Тоді $OA = OD = 10$ см – радіус кулі, $OB = 7$ см, $OC = 5$ см – відстані від центра кулі до перерізів. Розглянемо обидва вищезгаданих способи розв’язання.

1-й спосіб. 1) Знайдемо об’єм V_1 кульового сегмента з висотою h_1, де $h_1 = AB = OA - OB = 10 - 7 = 3$ (см):

$$V_1 = \pi \cdot 3^2 \left(10 - \frac{3}{3}\right) = 81\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

2) Знайдемо об’єм V_2 кульового сегмента з висотою h_2, де $h_2 = AC = AO + OC = 10 + 5 = 15$ (см):

$$V_2 = \pi \cdot 15^2 \left(10 - \frac{15}{3}\right) = 1125\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

3) Для об’єму V кульового шару маємо:
$V = V_2 - V_1 = 1125\pi - 81\pi = 1044\pi$ (см^3).

2-й спосіб. 1) Знайдемо об’єм кулі:

$$V_к = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = \frac{4000}{3}\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

2) Знайдемо об'єм V_3 кульового сегмента з висотою h_3, де $h_3 = CD = OD - OC = 10 - 5 = 5$ (см):

$$V_3 = \pi \cdot 5^2 \left(10 - \frac{5}{3}\right) = \frac{625}{3}\pi \text{ (см}^3\text{)}$$

та врахуємо, що об'єм V_1 кульового сегмента з висотою h_1 знайдено вище: $V_1 = 81\pi$ см^3.

3) Для об'єму V кульового шару маємо:

$$V = V_к - (V_1 + V_3) = \frac{4000}{3}\pi - \left(81\pi + \frac{625}{3}\pi\right) = 1044\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь. 1044π см^3.

Використовуючи один з вищезгаданих способів знаходження об'єму кульового шару, можна довести, що:

об'єм кульового шару можна знайти за формулою $V = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$, де r_1 і r_2 — радіуси основ шару, h — його висота.

• Як знайти об'єм тіла обертання за допомогою інтеграла? • Сформулюйте та доведіть теорему про об'єм кулі. • За якою формулою можна знайти об'єм кульового сегмента? • За якою формулою можна знайти об'єм кульового сектора? • Як можна знайти об'єм кульового шару?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

13.1. Знайдіть об'єм кулі, у якої:
1) радіус дорівнює 4 см; 2) діаметр дорівнює 6 дм.

13.2. Знайдіть об'єм кулі, у якої:
1) радіус дорівнює 9 см; 2) діаметр дорівнює 4 дм.

13.3. Знайдіть об'єм кульового сегмента (r — радіус кулі, h — висота сегмента), якщо:
1) $r = 5$ см, $h = 3$ см; 2) $r = 5$ см, $h = 9$ см.

13.4. Знайдіть об'єм кульового сегмента (r — радіус кулі, h — висота сегмента), якщо:
1) $r = 8$ см, $h = 6$ см; 2) $r = 7$ см, $h = 12$ см.

13.5. Знайдіть об'єм кульового сектора, де r — радіус кулі, h — висота відповідного сегмента, якщо:
1) $r = 5$ см, $h = 6$ см; 2) $r = 9$ см, $h = 2$ см.

13.6. Знайдіть об'єм кульового сектора, де r – радіус кулі, h – висота відповідного сегмента, якщо:
1) $r = 6$ см, $h = 7$ см;
2) $r = 5$ см, $h = 3$ см.

13.7. Знайдіть, використовуючи формулу, об'єм кульового шару з радіусами основ r_1 і r_2 та висотою h, якщо:
1) $r_1 = 3$ см, $r_2 = 1$ см, $h = 6$ см;
2) $r_1 = 2$ см, $r_2 = 4$ см, $h = 3$ см.

13.8. Знайдіть, використовуючи формулу, об'єм кульового шару з радіусами основ r_1 і r_2 та висотою h, якщо:
1) $r_1 = 1$ см, $r_2 = 2$ см, $h = 9$ см;
2) $r_1 = 3$ см, $r_2 = 5$ см, $h = 2$ см.

13.9. Площа великого круга кулі дорівнює 16π см^2. Знайдіть об'єм кулі.

13.10. Довжина великого кола кулі дорівнює 12π см. Знайдіть об'єм кулі.

2 **13.11.** У кулі на відстані 5 см від центра проведено січну площину так, що довжина кола перерізу дорівнює 24π см. Знайдіть об'єм кулі.

13.12. Перерізом кулі площиною, що проходить на відстані 4 см від центра кулі, є круг із площею 9π см^2. Знайдіть об'єм кулі.

13.13. Свинцеву кулю переплавили в кульки, радіус яких у 4 рази менший за радіус кулі. Скільки отримали кульок?

13.14. Скільки однакових кульок треба взяти, щоб переплавити їх в одну кулю, радіус якої у 5 разів більший за радіус цих кульок?

13.15. Зовнішній радіус дюралюмінієвої порожнистої кулі дорівнює 10 см, товщина стінок – 1 см. Знайдіть:
1) об'єм дюралюмінію, з якого виготовили кулю;
2) масу кулі з точністю до грамів (густина дюралюмінію – 2,8 г/см^3).

13.16. Внутрішній радіус порожнистої чавунної кулі дорівнює 7 см, а її зовнішній радіус – 9 см. Знайдіть:
1) об'єм чавуну, з якого виготовлено кулю;
2) масу кулі з точністю до грамів (густина чавуну – 7,3 г/см^3).

13.17. Об'єм кулі дорівнює $\frac{500\pi}{3}$ см^3. Знайдіть діаметр кулі.

13.18. Об'єм кулі дорівнює $\frac{256\pi}{3}$ см^3. Знайдіть радіус кулі.

13.19. Знайдіть об'єм кульового сегмента, меншого за половину кулі, якщо радіус кулі дорівнює 15 см, а радіус кола основи сегмента – 9 см.

13.20. Знайдіть об'єм кульового сегмента, меншого за половину кулі, якщо її радіус – 25 см, а радіус кола основи сегмента – 24 см.

13.21. Круговий сектор, радіус якого дорівнює 12 см, а кут – $60°$, обертається навколо своєї осі симетрії. Знайдіть об'єм кульового сектора, що при цьому утворився.

13.22. Круговий сектор, радіус якого дорівнює 6 см, а кут – $90°$, обертається навколо своєї осі симетрії. Знайдіть об'єм кульового сектора, що при цьому утворився.

13.23. Три кулі, радіуси яких – 1 дм, 2 дм і 3 дм, переплавили в одну кулю. Знайдіть її радіус.

13.24. Дві кулі, радіуси яких – 4 см і 5 см, переплавили в одну кулю. Знайдіть її радіус.

13.25. Чавунний прямокутний паралелепіпед з лінійними вимірами 3 см, 4 см і 6 см переплавили в кулю. Знайдіть (із точністю до десятих сантиметра) її радіус.

13.26. Латунний куб із ребром 7 см переплавили в кулю. Знайдіть (із точністю до десятих сантиметра) її радіус.

13.27. Знайдіть відношення об'єму кулі до об'єму рівностороннього циліндра, радіус основи якого дорівнює радіусу кулі.

13.28. У циліндр вписано кулю. Який відсоток від об'єму циліндра займає куля?

3 **13.29.** Основа правильної чотирикутної призми дорівнює 8 см, а її висота – 4 см. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо цієї призми.

13.30. Лінійні виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 4 см, 6 см і 12 см. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо цього паралелепіпеда.

13.31. Знайдіть відношення об'ємів двох куль, одна з яких вписана в куб, а друга – описана навколо цього самого куба.

13.32. Знайдіть відношення об'єму куба до об'єму кулі, описаної навколо нього.

13.33. У кулі, об'єм якої дорівнює 288π см^3, проведено переріз. Відрізок, що сполучає центр кулі з точкою кола цього перерізу, утворює з площиною перерізу кут $45°$. Знайдіть площу перерізу.

13.34. Об'єм кулі дорівнює $\frac{2048}{3}\pi$ см^3. Перпендикуляр, проведений із центра кулі до площини перерізу кулі, утворює з радіусом, проведеним у точку кола перерізу, кут $30°$. Знайдіть площу перерізу.

13.35. Перпендикулярно до діаметра кулі проведено площину, яка ділить діаметр на дві частини завдовжки 6 см і 9 см. Знайдіть об'єми частин, на які ця площина поділила кулю.

13.36. Перпендикулярно до діаметра кулі проведено площину, яка ділить діаметр на дві частини завдовжки 9 см і 3 см. Знайдіть відношення об'ємів частин, на які ця площина поділила кулю.

13.37. Діаметр циліндра дорівнює його висоті. Чи вміститься у цей циліндр куля, об'єм якої вдвічі менший за об'єм циліндра?

13.38. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Куля, об'єм якої – $\frac{500}{3}\pi$ см^3, дотикається до всіх сторін трикутника. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.

13.39. Вершини правильного трикутника зі стороною 6 см належать кулі, об'єм якої дорівнює $\frac{256}{3}\pi$ см^3. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.

13.40. У кулі радіуса 25 см по один бік від її центра проведено два паралельних перерізи, площі яких – 225π см^2 і 49π см^2. Знайдіть об'єм кульового шару, що утворився між цими перерізами.

13.41. У кулі радіуса 5 см по різні боки від її центра проведено два паралельних перерізи, площі яких – 9π см^2 і 16π см^2. Знайдіть об'єм кульового шару, що міститься між цими перерізами.

13.42. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічна грань утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть об'єм кулі, вписаної у цю піраміду.

13.43. Висота правильного тетраедра дорівнює 9 см. Знайдіть об'єм кулі, вписаної у цей тетраедр.

13.44. Основою призми є ромб з діагоналями 8 см і 6 см. Призма описана навколо кулі. Знайдіть об'єм цієї кулі.

13.45. Пряма трикутна призма, сторони основи якої дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см, описана навколо кулі. Знайдіть об'єм цієї кулі.

13.46. У кулю вписано піраміду, основа якої – прямокутний трикутник із гіпотенузою завдовжки 2 см. Знайдіть об’єм кулі, якщо всі бічні ребра піраміди утворюють з її висотою кути по 30°.

13.47. У кулю вписано піраміду, основою якої є прямокутний трикутник із гіпотенузою завдовжки 4 см. Знайдіть об’єм кулі, якщо всі бічні ребра піраміди утворюють із площиною основи кути по 45°.

13.48. У кулю вписано циліндр, висота якого дорівнює h. Знайдіть об’єм кулі, якщо діагоналі осьового перерізу циліндра перетинаються під кутом α (розгляньте два випадки).

13.49. Твірна конуса дорівнює 4 см і нахилена до площини основи під кутом 30°. Знайдіть об’єм кулі, описаної навколо цього конуса.

13.50. Радіус основи конуса дорівнює 3 см, а кут у його осьовому перерізі – 150°. Знайдіть об’єм кулі, описаної навколо конуса.

13.51. Радіус основи конуса дорівнює 6 см, а твірна – 10 см. Знайдіть об’єм кулі, описаної навколо конуса.

13.52. Радіус основи конуса дорівнює 3 см, а висота – 4 см. Знайдіть об’єм кулі, описаної навколо конуса.

4 **13.53.** Висота прямої трикутної призми дорівнює 8 см. Її основою є рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює 3 см, а кут при вершині – 30°. Знайдіть об’єм кулі, описаної навколо цієї призми.

13.54. Основою прямої призми є прямокутний трикутник, у якого медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює 4 см. Висота призми – 6 см. Знайдіть об’єм кулі, описаної навколо цієї призми.

13.55. Навколо кулі описано рівносторонній циліндр і рівносторонній конус. Доведіть, що об’єм циліндра є середнім геометричним об’ємів кулі і конуса.

13.56. У кулю вписано рівносторонній циліндр і рівносторонній конус. Доведіть, що об’єм циліндра є середнім геометричним об’ємів кулі і конуса.

13.57. Навколо правильної трикутної піраміди, висота якої дорівнює 4 см, а бічне ребро – 5 см, описано кулю. Знайдіть об’єм кулі.

13.58. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 1 см, а бічне ребро – 4 см. Знайдіть об’єм кулі, описаної навколо цієї піраміди.

13.59. Перерізом правильної чотирикутної піраміди площиною, що проходить через її висоту і апофему, є правильний трикутник зі стороною 2 см. Знайдіть об’єм кулі, описаної навколо піраміди.

13.60. Основою піраміди є ромб зі стороною a і гострим кутом α. Усі двогранні кути при сторонах основи піраміди рівні і дорівнюють β. Знайдіть об'єм кулі, вписаної в піраміду.

13.61. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 11 см, 13 см і 20 см. Висота піраміди проходить через центр кола, вписаного в основу, і дорівнює 4 см. Знайдіть об'єм кулі, вписаної в піраміду.

13.62. Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною a. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а третя нахилена до неї під кутом β. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо піраміди.

13.63. Навколо правильної трикутної піраміди описано кулю радіуса R. Центр цієї кулі збігається із центром кулі, вписаної в піраміду. Знайдіть об'єм кулі, вписаної в піраміду.

13.64. Навколо кулі описано конус, висота якого вдвічі більша за діаметр кулі. Знайдіть відношення об'ємів цих тіл.

13.65. Одна з двох площин проходить через центр кулі – точку O перпендикулярно до радіуса OA, а інша – через середину цього радіуса, перпендикулярно до нього. Знайдіть відношення об'ємів частин, на які ці площини ділять кулю.

13.66. У кулю вписано рівносторонній конус. Знайдіть відношення об'ємів частин, на які площина основи конуса ділить кулю.

13.67. Дві кулі, радіуси яких між собою рівні, розташовано так, що центр однієї кулі лежить на поверхні іншої. Знайдіть відношення об'єму спільної частини цих куль до об'єму однієї з них.

13.68. Центр однієї з двох куль лежить на поверхні іншої кулі. Знайдіть об'єм спільної частини цих куль, якщо їхні радіуси між собою рівні і дорівнюють 12 см.

13.69. У кулю вписано правильну чотирикутну піраміду. Відстань від центра кулі до сторони основи піраміди дорівнює $\sqrt{5}$ дм, а до бічного ребра – $\sqrt{3}$ дм. Знайдіть об'єм кулі.

13.70. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник із кутом α при вершині. Усі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом φ. Знайдіть об'єм піраміди, якщо об'єм кулі, вписаної в піраміду, дорівнює V.

13.71. Діаметр кулі дорівнює 15 см і є відрізком, що сполучає центри двох основ циліндра, радіус яких – 6 см. Знайдіть об'єм частини кулі, що міститься всередині циліндра.

13.72. Діаметр кулі є відрізком, що сполучає центри двох основ циліндра. Знайдіть об'єм частини кулі, яка міститься зовні циліндра, якщо радіус кулі дорівнює 15 см, а радіус основи циліндра – 12 см.

13.73. Об’єм кулі, вписаної в конус, відноситься до об’єму конуса як $4:9$. Знайдіть кут нахилу твірної конуса до площини його основи.

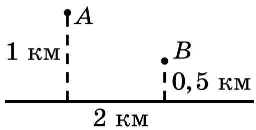
13.74. Відношення об’єму конуса до об’єму кулі, вписаної в конус, дорівнює $8:3$. Знайдіть кут нахилу твірної конуса до площини його основи.

13.75. Висота рівностороннього конуса дорівнює h і є діаметром кулі. Знайдіть об’єм тієї частини кулі, що міститься всередині конуса.

Життєва математика

13.76. Який кут опише годинна стрілка за 20 хв?

13.77. Населені пункти A і B розташовані по один бік від шосе на відстані відповідно 1 км і 0,5 км від нього. Біля шосе мають встановити автобусну зупинку і прокласти від неї доріжки до цих населених пунктів. Відстань між цими населеними пунктами вздовж шосе дорівнює 2 км. Знайдіть найменше можливе значення сумарної довжини доріжок.



Цікаві задачі для учнів неледачих

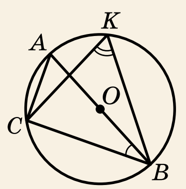
13.78. (***Національна олімпіада Болгарії***). Довжини сторін a, b і c трикутника ABC утворюють арифметичну прогресію. Арифметичну прогресію утворюють і довжини сторін трикутника $A_1B_1C_1$. Крім того, $\angle A = \angle A_1$. Доведіть, що $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Перевірте свою компетентність

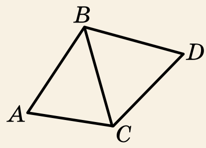
Завдання № 13

1. Точки A, B, C і K належать колу із центром O, зображеному на малюнку. Знайдіть градусну міру кута CKB, якщо $\angle CBA = 30°$.

А	Б	В	Г	Д
60°	55°	50°	40°	30°



2. На малюнку зображено рівнобедрений трикутник ABC з основою AC та рівносторонній трикутник BCD. Периметр трикутника ABC дорівнює 14 см, а трикутника BCD – 15 см. Знайдіть периметр чотирикутника $ABDC$.



А	Б	В	Г	Д
29 см	25 см	22 см	19 см	18 см

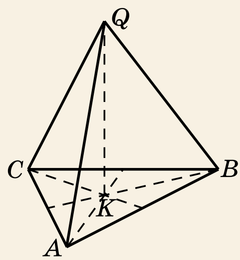
3. Довжина кола основи циліндра дорівнює 8π см, а висота циліндра дорівнює 5 см. Знайдіть об'єм циліндра.

А	Б	В	Г	Д
40π см^3	20π см^3	80π см^3	16π см^3	120π см^3

4. Діагональним перерізом куба є ...

А	Б	В	Г	Д
квадрат	три-кутник	трапеція	прямо-кутник	шести-кутник

5. На малюнку зображено правильну трикутну піраміду $QABC$, у якої $QB = 10$, QK – висота піраміди, $QK = 8$. Установіть відповідність між геометричною величиною (1–4) та її числовим значенням (А–Д).



Геометрична величина

1 Висота основи піраміди
2 Площа основи піраміди
3 Площа перерізу, що проходить через бічне ребро і апофему
4 Об'єм піраміди

Числове значення

А 9
Б 27
В 36
Г $27\sqrt{3}$
Д $72\sqrt{3}$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

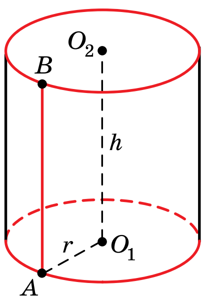
6. Паралелограм $ABCD$ не перетинає площину α. Відстані від вершин A, B і C до площини α відповідно дорівнюють 3 см, 7 см і 8 см. Знайдіть відстань (у см) від точки D до площини α.

§ 14. ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

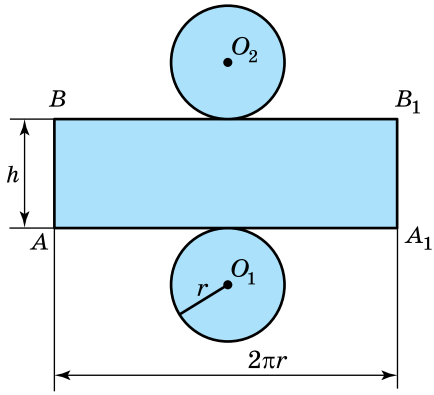
Ви вже знаєте, як знаходити площі поверхонь многогранників. Тепер розглянемо, як знайти площі поверхонь тіл обертання.

1. Площа поверхні циліндра

На малюнку 14.1 зображено циліндр, висота якого дорівнює h, а радіус основи – r. Якщо поверхню циліндра розрізати по твірній AB та по колах основ і розгорнути так, щоб усі твірні циліндра та всі точки основ належали деякій площині, то отримаємо *розгортку циліндра* (мал. 14.2). Зрозуміло, що розгортка циліндра складається із прямокутника та двох рівних між собою кругів – основ циліндра. Площа цієї розгортки дорівнює площі *повної поверхні циліндра*.



Мал. 14.1



Мал. 14.2

Прямокутник ABB_1A_1 зі сторонами завдовжки $AB = h$ і $AA_1 = 2\pi r$ (довжина кола основи) є розгорткою бічної поверхні циліндра. Зрозуміло, що площа бічної поверхні циліндра дорівнює площі цього прямокутника.

Запишемо згадані площі поверхонь циліндра у вигляді формул. Зокрема, $S_{біч} = S_{ABB_1A_1} = AB \cdot AA_1 = h \cdot 2\pi r = 2\pi rh$. Отже,

площу бічної поверхні циліндра $S_{біч}$ обчислюють за формулою $S_{біч} = 2\pi rh$, *де* h – висота, r – радіус основи циліндра.

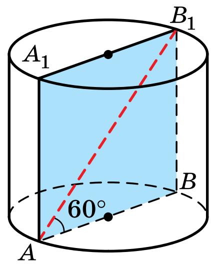
Щоб знайти *площу повної поверхні циліндра* $S_{повн}$, достатньо до площі його бічної поверхні $S_{біч}$ додати площі $S_{осн}$ двох його основ. Оскільки основою є круг, площа якого дорівнює πr^2, то отримаємо, що

$$S_{повн} = S_{біч} + 2S_{осн} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h).$$

Отже,

площу повної поверхні циліндра $S_{повн}$ обчислюють за формулою $S_{повн} = 2\pi r(r + h)$, де h – висота, r – радіус основи циліндра.

Задача 1. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 8 см і утворює кут 60° із площиною основи. Знайти площу бічної поверхні циліндра.



Мал. 14.3

Р о з в ' я з а н н я. Нехай на малюнку 14.3 зображено даний циліндр та його осьовий переріз – прямокутник ABB_1A_1, $AB_1 = 8$ см.

1) Оскільки AB – проекція похилої AB_1 на площину основи, то $\angle BAB_1 = 60°$ – кут між діагоналлю осьового перерізу і площиною основи.

2) Із $\triangle ABB_1$ ($\angle B = 90°$):

$$BB_1 = AB_1 \sin A = 8 \cdot \sin 60° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (см)},$$

$$AB = AB_1 \cos A = 8 \cdot \cos 60° = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \text{ (см)}.$$

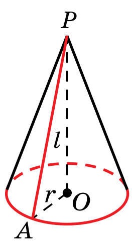
3) Отже, $h = BB_1 = 4\sqrt{3}$ см, $r = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$ (см).

4) Тоді $S_{біч} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2 \cdot 4\sqrt{3} = 16\pi\sqrt{3}$ (см²).

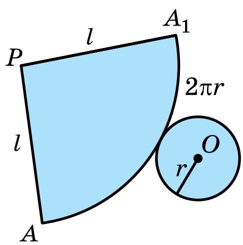
В і д п о в і д ь. $16\pi\sqrt{3}$ см².

2. Площа поверхні конуса

На малюнку 14.4 зображено конус із твірною завдовжки l та радіусом основи – r. Якщо поверхню циліндра розрізати по одній із твірних, наприклад AP, та по колу основи і розгорнути так, щоб усі твірні та всі точки основи належали деякій площині, то отримаємо *розгортку конуса* (мал. 14.5).



Мал. 14.4



Мал. 14.5

Розгорткою бічної поверхні конуса є круговий сектор, довжина дуги якого – $2\pi r$ (довжина кола основи), а радіус дорівнює l. Очевидно, що розгортка повної поверхні конуса складається з розгортки бічної поверхні та круга – основи конуса.

Зрозуміло, що *площа бічної поверхні конуса* дорівнює площі розгортки його бічної поверхні, тобто площі кругового сектора з довжиною дуги $2\pi r$ і радіусом завдовжки l. Площа бічної поверхні конуса $S_{біч}$ у стільки ж разів менша за площу круга радіуса l, у скільки разів довжина $2\pi r$ дуги менша за довжину $2\pi l$ кола радіуса l, тобто $\frac{S_{біч}}{\pi l^2} = \frac{2\pi r}{2\pi l}$. Із цієї рівності отримаємо, що $S_{біч} = \pi rl$.

Отже,

площу бічної поверхні конуса $S_{біч}$ обчислюють за формулою $S_{біч} = \pi rl$, де r – радіус основи, l – твірна конуса.

Очевидно, що *площа повної поверхні конуса* дорівнює площі розгортки його повної поверхні. Щоб знайти площу повної поверхні конуса $S_{повн}$, достатньо до площі його бічної поверхні $S_{біч}$ додати площу його основи $S_{осн}$. Оскільки основою конуса є круг, площа якого дорівнює πr^2, то отримаємо, що

$$S_{повн} = S_{біч} + S_{осн} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(r + l).$$

Отже,

площу повної поверхні конуса обчислюють за формулою $S_{повн} = \pi r(r + l)$, де r – радіус основи, l – твірна конуса.

Задача 2. Хорду, що лежить в основі конуса, видно з його вершини під кутом 60°, а із центра основи – під прямим кутом. Знайти площу повної поверхні конуса, якщо його твірна дорівнює 6 см.

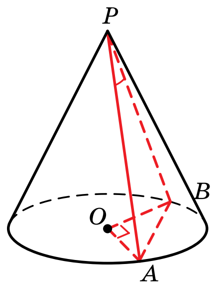
Р о з в ' я з а н н я. Нехай на малюнку 14.6 зображено даний конус, AB – хорда основи, $\angle APB = 60°$, $\angle AOB = 90°$, $PA = 6$ см.

1) Із $\triangle APB$ ($AP = PB$) $\angle P = 60°$, тому $\angle PAB = \angle PBA = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$, отже, $\triangle APB$ – рівносторонній, тоді $AB = 6$ см.

2) $\angle AOB = 90°$, $OA = OB$, тому $\triangle AOB$ – прямокутний і рівнобедрений. Тоді

$$OA = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

3) Отже, $r = OA = 3\sqrt{2}$ см, $l = PA = 6$ см.



Мал. 14.6

4) Маємо:

$S_{пов} = \pi r(r + l) = \pi \cdot 3\sqrt{2} \cdot (3\sqrt{2} + 6) = 18\pi(1 + \sqrt{2})$ (см^2).

Відповідь. $18\pi(1 + \sqrt{2})$ см^2.

3. Площа поверхні зрізаного конуса

Розглянемо, як знайти бічну і повну поверхні зрізаного конуса.

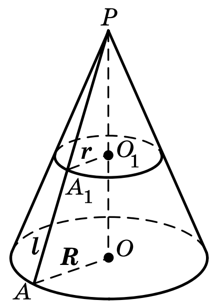
На малюнку 14.7 зображено зрізаний конус із твірною $AA_1 = l$ і радіусами основ $AO = R$ і $A_1O_1 = r$, $R > r$. Нехай точка P – вершина конуса, з якого отримано цей зрізаний конус.

Очевидно, що *площу бічної поверхні зрізаного конуса* $S_{біч}$ можна знайти як різницю бічних поверхонь двох конусів. А саме як різницю площі бічної поверхні конуса із твірною PA і площі бічної поверхні конуса із твірною PA_1. Тоді:

$$S_{біч} = \pi R \cdot PA - \pi r \cdot PA_1 = \pi R(AA_1 + PA_1) - \pi r \cdot PA_1 =$$
$$= \pi R \cdot AA_1 + \pi R \cdot PA_1 - \pi r \cdot PA_1 = \pi Rl + \pi(R - r)PA_1.$$

Оскільки $\triangle PA_1O_1 \sim \triangle PAO$, то $\frac{PA_1}{PA} = \frac{r}{R}$, тобто $\frac{PA_1}{PA_1 + l} = \frac{r}{R}$. Із останньої рівності отримаємо, що $PA_1 = \frac{lr}{R - r}$.

Тоді $S_{біч} = \pi Rl + \pi(R - r)\frac{lr}{R - r} = \pi Rl + \pi rl = \pi l(R + r)$.



Мал. 14.7

Отже,

площу бічної поверхні зрізаного конуса $S_{біч}$ обчислюють за формулою $S_{біч} = \pi l(R + r)$, де l – твірна, R і r – радіуси основ зрізаного конуса.

Зрозуміло, що для знаходження *площі повної поверхні зрізаного конуса* $S_{повн}$ треба до площі його бічної поверхні додати площі двох його основ. Оскільки основами є круги радіусів R і r, то

$$S_{повн} = S_{біч} + \pi R^2 + \pi r^2 = \pi l(R + r) + \pi(R^2 + r^2).$$

Задача 3. Знайти бічну поверхню зрізаного конуса, радіуси основ якого дорівнюють R і r, якщо в його осьовий переріз можна вписати коло.

Розв'язання. Нехай на малюнку 14.8 зображено даний зрізаний конус, трапеція AA_1B_1B – його осьовий переріз, $AO = R$, $A_1O_1 = r$. Тоді $AB = 2R$, $A_1B_1 = 2r$.

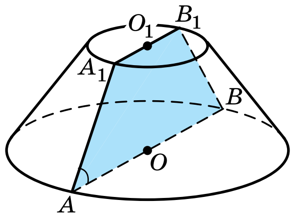
1) Оскільки в трапецію AA_1B_1B можна вписати коло, то

$$AB + A_1B_1 = AA_1 + BB_1.$$

2) Нехай $AA_1 = l$, але $AA_1 = BB_1$, тому $AB + A_1B_1 = 2l$, тобто $2R + 2r = 2l$. Тоді $l = R + r$.

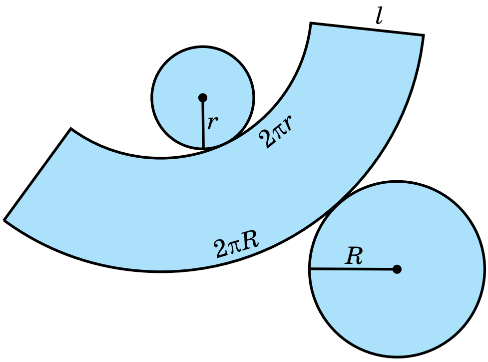
3) Отже, $S_{\text{біч}} = \pi l(R + r) = \pi(R + r)(R + r) = \pi(R + r)^2$.

В і д п о в і д ь. $\pi(R + r)^2$.



Мал. 14.8

Поверхню зрізаного конуса, як і поверхні конуса і циліндра, також можна розгорнути на площину. Розгортку повної поверхні зрізаного конуса зображено на малюнку 14.9.

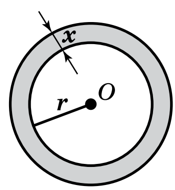


Мал. 14.9

4. Площа сфери

На відміну від поверхонь циліндра і конуса, розгортку сфери жодним чином отримати не можна. Тому для знаходження площі сфери застосуємо поняття границі функції, яке відоме вам із курсу алгебри і початків аналізу.

Нехай маємо сферу радіуса r. Розглянемо її переріз площиною, що проходить через центр сфери, тобто велике коло сфери (мал. 14.10). Сферичний шар товщиною x – це тіло, що міститься між двома сферами радіусів r і $r + x$ з одним і тим самим центром O.



Мал. 14.10

Скористаємося тим фактом, що, за означенням, *площею поверхні S кулі* прийнято називати границю відношення об'єму сферичного шару завтовшки x до цієї товщини за умови, що $x \to 0$. Тобто $S = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{V(x)}{x}$, де $V(x)$ – об'єм сферичного шару завтовшки x.

Знайдемо $V(x)$ як різницю об'ємів двох куль радіусів $r + x$ і r:

$$V(x) = \frac{4}{3}\pi(r+x)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2x + 3rx^2 + x^3 - r^3) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi(3r^2x + 3rx^2 + x^3) = \frac{4}{3}\pi x(3r^2 + 3rx + x^2).$$

Тоді $S = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{4}{3}\pi x(3r^2 + 3rx + x^2)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4}{3}\pi(3r^2 + 3rx + x^2) =$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4\pi r^2.$$

Отже,

площу сфери обчислюють за формулою $S = 4\pi r^2$, де r – радіус сфери.

Задача 4. Скільки треба фарби, щоб пофарбувати 20 куль, радіус кожної з яких дорівнює 5 см, якщо витрати фарби на 1 м² площі складають 180 г? Результат округлити до цілих грамів.

Р о з в' я з а н н я. 1) Знайдемо площу S поверхні однієї кулі: $S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$ (см²).

2) Позначимо через S_1 площу поверхонь 20 таких куль, тоді $S_1 = 20S = 20 \cdot 100\pi = 2000\pi$ (см²).

3) Оскільки 1 м² = 10 000 см², то $S_1 = \dfrac{2000\pi}{10\ 000} = 0{,}2\pi$ (м²).

4) Знайдемо m – масу фарби для фарбування цих куль: $m = 0{,}2\pi \cdot 180 \approx 113$ (г).

В і д п о в і д ь. ≈ 113 г.

А ще раніше...

Архімед у своїй праці «Про кулю і циліндр» доводить формулу для площі бічної поверхні циліндра, яка після перетворень набуває вигляду $S = 2\pi rh$, а також – формулу для площі бічної поверхні конуса, яка у сучасному записі має вигляд $S = \pi rl$.

У цій самій праці Архімед дав строге доведення формули для знаходження площі сфери.

• За якою формулою обчислюють площу бічної поверхні і за якою – площу повної поверхні циліндра? • За якою формулою обчислюють площу бічної поверхні і за якою – площу повної поверхні конуса? • За якою формулою обчислюють площу бічної поверхні і за якою – площу повної поверхні зрізаного конуса? • За якою формулою обчислюють площу сфери?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

14.1. Площа бічної поверхні циліндра – 20π см^2, а площа його основи – 16π см^2. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

14.2. Площа основи циліндра – 4π см^2, а площа його бічної поверхні – 16π см^2. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

14.3. Площа повної поверхні конуса дорівнює 18π см^2, а площа його основи – 4π см^2. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

14.4. Площа бічної поверхні конуса дорівнює 12π см^2, а площа його повної поверхні – 21π см^2. Знайдіть площу основи конуса.

14.5. Знайдіть площі бічної і повної поверхонь циліндра, радіус основи якого дорівнює 3 см, а висота – 5 см.

14.6. Радіус основи циліндра дорівнює 4 см, а висота – 7 см. Знайдіть площі бічної і повної поверхонь циліндра.

14.7. Радіус основи конуса дорівнює 7 см, а твірна – 9 см. Знайдіть площі бічної і повної поверхонь конуса.

14.8. Знайдіть площі бічної і повної поверхонь конуса, радіус основи якого дорівнює 2 см, а твірна – 3 см.

14.9. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса, радіуси основ якого дорівнюють 4 см і 7 см, а твірна – 5 см.

14.10. Твірна зрізаного конуса дорівнює 8 см, а радіуси його основ – 2 см і 3 см. Знайдіть площу бічної поверхні цього конуса.

14.11. Знайдіть площу поверхні кулі, радіус якої дорівнює:
1) 3 дм; 2) 7 см.

14.12. Знайдіть площу сфери, радіус якої дорівнює:
1) 4 см; 2) 2 дм.

14.13. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут $30°$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

14.14. Осьовим перерізом циліндра є квадрат, діагональ якого дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

14.15. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 17 см, а висота циліндра – 15 см. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

14.16. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 13 см, а радіус основи – 6 см. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

14.17. Бічна поверхня циліндра дорівнює 24π см^2, а його висота – 4 см. Знайдіть об'єм циліндра.

14.18. Бічна поверхня циліндра дорівнює 40π см^2, а радіус його основи – 4 см. Знайдіть об'єм циліндра.

14.19. Твірна конуса дорівнює 4 см і утворює з площиною основи кут $45°$. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

14.20. Радіус основи конуса дорівнює 5 см і утворює з твірною кут $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

14.21. Прямокутний трикутник із гіпотенузою 10 см і катетом 6 см обертається навколо цього катета. Знайдіть площу повної поверхні конуса, що при цьому утворився.

14.22. Прямокутний трикутник із катетами 7 см і 24 см обертається навколо більшого катета. Знайдіть площу повної поверхні конуса, що при цьому утворився.

14.23. Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник із гіпотенузою $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

14.24. Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник із висотою $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

14.25. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 2 см і 6 см, а його висота – 3 см. Знайдіть площу повної поверхні цього конуса.

14.26. Висота зрізаного конуса дорівнює 8 см, а твірна – 10 см. Радіус меншої основи конуса дорівнює 1 см. Знайдіть площу повної поверхні цього конуса.

14.27. У скільки разів збільшиться площа сфери, якщо її радіус збільшити втричі?

14.28. У скільки разів зменшиться площа поверхні кулі, якщо її радіус зменшити вдвічі?

14.29. Об'єм кулі дорівнює 36π см^3. Знайдіть площу її поверхні.

14.30. Площа поверхні кулі дорівнює 144 см^2. Знайдіть об'єм цієї кулі.

14.31. На відстані 5 см від центра сфери проведено переріз, що перетинає сферу по колу, довжина якого дорівнює 24π см. Знайдіть площу сфери.

14.32. Переріз кулі, площа якого – 36π см^2, віддалений від центра кулі на 8 см. Знайдіть площу поверхні цієї кулі.

14.33. У якому випадку буде витрачено більше фарби: на фарбування однієї кулі діаметра 6 дм чи на фарбування 8 куль діаметра 2 дм, якщо всі кулі виготовлено з однакового матеріалу?

14.34. Діаметр Сонця в 400 разів більший за діаметр Місяця. У скільки разів площа поверхні Сонця більша за площу поверхні Місяця?

14.35. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа його осьового перерізу дорівнює Q.

14.36. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює M. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

14.37. Висота циліндра дорівнює 4 см, а радіус основи – 1,5 см. Навколо циліндра описано кулю. Знайдіть площу її поверхні.

14.38. Діаметр циліндра дорівнює 8 см, а висота – 6 см. Знайдіть площу сфери, описаної навколо циліндра.

14.39. Площа повної поверхні рівностороннього циліндра на 32π см^2 більша за площу поверхні кулі, радіус якої дорівнює радіусу циліндра. Знайдіть радіус кулі.

14.40. Площа поверхні кулі на 18π см^2 менша за площу повної поверхні рівностороннього циліндра, радіус основи якого дорівнює радіусу кулі. Знайдіть радіус циліндра.

3 **14.41.** Хорда, що лежить в основі циліндра, дорівнює $6\sqrt{3}$ см і стягує дугу в $120°$. Відрізок, що сполучає один з кінців хорди із центром іншої основи, утворює з площиною основи кут $45°$. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

14.42. У циліндрі через середину радіуса основи перпендикулярно до цього радіуса проведено переріз. Перерізом виявився квадрат із діагоналлю $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

14.43. Діагональ прямокутника дорівнює d і утворює зі стороною кут α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, який утвориться внаслідок обертання прямокутника навколо осі, яка проходить через цю сторону.

14.44. Сторона прямокутника дорівнює a і утворює кут β із діагоналлю. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, який утвориться внаслідок обертання прямокутника навколо осі, яка проходить через іншу сторону прямокутника.

14.45. Відношення висоти конуса до діаметра основи дорівнює $2:3$. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо його твірна дорівнює 10 см.

14.46. Твірна конуса відноситься до діаметра основи як $13:24$. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо його висота дорівнює 10 см.

14.47. Хорду основи конуса видно з його вершини під кутом $60°$, а із центра основи – під прямим кутом. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо його твірна дорівнює l.

14.48. Хорду основи конуса видно з його вершини під прямим кутом, а із центра основи – під кутом $120°$. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо радіус основи дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

14.49. Діаметри основ зрізаного конуса дорівнюють 12 см і 4 см, а висота утворює кут $30°$ із твірною. Знайдіть площу повної поверхні цього конуса.

14.50. Діаметри основ зрізаного конуса дорівнюють 2 дм і 8 дм, а його висота – 4 дм. Знайдіть площу повної поверхні цього конуса.

14.51. Доведіть, що повна поверхня конуса, осьовим перерізом якого є рівносторонній трикутник, рівновелика сфері, побудованій на його висоті як на діаметрі.

14.52. Доведіть, що повна поверхня циліндра, який утворився в результаті обертання квадрата навколо однієї з його сторін, рівновелика поверхні кулі, радіус якої дорівнює стороні квадрата.

14.53. Вершини квадрата зі стороною 4 см лежать на сфері. Знайдіть площу сфери, якщо відстань від центра сфери до площини квадрата дорівнює 1 см.

14.54. Вершини рівностороннього трикутника зі стороною 6 см лежать на сфері. Площина трикутника віддалена від центра сфери на 2 см. Знайдіть площу сфери.

14.55. Діаметр відра циліндричної форми – 32 см, а висота відра – 5 дм. Скільки дм^2 листового заліза пішло на виготовлення цього відра, якщо на шви йде 6 % від площі поверхні відра?

14.56. Скільки м^2 жесті піде на виготовлення труби завдовжки 4 м, діаметр якої – 20 см, якщо на шви додають 5 % від площі поверхні труби?

14.57. Висота циліндра дорівнює 5 см, а діагональ його осьового перерізу на 7 см більша за радіус основи. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

14.58. Діагональ осьового перерізу циліндра на 7 см більша за радіус основи, а висота циліндра дорівнює 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

14.59. Висота циліндра на 3 см більша за його радіус, а площа повної поверхні циліндра дорівнює 28π см^2. Знайдіть висоту циліндра.

14.60. Висота циліндра на 2 см менша за його радіус, а площа повної поверхні циліндра дорівнює 120π см^2. Знайдіть радіус основи циліндра.

14.61. У пряму трикутну призму, основою якої є трикутник зі сторонами 5 см, 5 см і 6 см, вписано кулю. Знайдіть площу поверхні цієї кулі.

14.62. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із гіпотенузою 13 см і катетом 5 см. У призму вписано кулю. Знайдіть площу її поверхні.

14.63. Осьовим перерізом конуса є правильний трикутник зі стороною 12 см. Знайдіть площу поверхні кулі, вписаної в цей конус.

14.64. Радіус основи конуса дорівнює 3 см, а твірна – 5 см. Знайдіть площу сфери, вписаної в цей конус.

14.65. У циліндр вписано правильну трикутну призму. Знайдіть відношення площі бічної поверхні призми до площі бічної поверхні циліндра.

14.66. У циліндр вписано правильну чотирикутну призму. Знайдіть відношення площі бічної поверхні циліндра до площі бічної поверхні призми.

14.67. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 15 см, а площа бічної поверхні складає $\frac{3}{5}$ від площі повної поверхні. Знайдіть об’єм циліндра.

14.68. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює половині площі його повної поверхні. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо діагональ його осьового перерізу дорівнює 6 см.

14.69. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з основою 6 см і бічною стороною 5 см. Висота призми дорівнює 2 см. Знайдіть площу сфери, описаної навколо цієї призми.

14.70. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 3 см, а бічне ребро – 2 см. Знайдіть площу сфери, описаної навколо цієї призми.

14.71. Площа основи правильної шестикутної піраміди дорівнює $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ дм^2, а її бічна грань утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть площу сфери, вписаної в цю піраміду.

14.72. $ABCD$ – прямокутник, $AB = a$, $BC = b$. Один циліндр отримано обертанням прямокутника навколо сторони AB, а інший – навколо сторони BC.

1) Доведіть, що площі бічних поверхонь цих циліндрів між собою рівні.

2) Знайдіть відношення площ повних поверхонь цих циліндрів.

14.73. Площа повної поверхні циліндра дорівнює 42π см^2, а площа його осьового перерізу – 24 см^2. Знайдіть об'єм циліндра.

14.74. Діагональ осьового перерізу циліндра в 2,5 раза більша за радіус основи. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює 48π см^2. Знайдіть об'єм циліндра.

14.75. Знайдіть відношення площ бічних поверхонь рівностороннього конуса і рівностороннього циліндра, висоти яких між собою рівні.

14.76. Знайдіть об'єм зрізаного конуса, діагональ осьового перерізу якого дорівнює 15 см, твірна – 13 см, а площа бічної поверхні – 117π см^2.

14.77. Дві кулі мають одну спільну точку, а відстань між їхніми центрами дорівнює 8 см. Сума площ поверхонь цих куль – 136π см^2. Знайдіть радіуси куль.

14.78. Дві кулі мають одну спільну точку, а відстань між їхніми центрами дорівнює 9 см. Знайдіть радіуси цих куль, якщо різниця площ їхніх поверхонь – 108π см^2.

14.79. Площа перерізу циліндра, який проведено паралельно його осі, дорівнює Q. Переріз відтинає від кола основи дугу в $120°$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

14.80. Площа перерізу циліндра, що паралельний його осі, дорівнює M. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо переріз відтинає від кола його основи дугу в $90°$.

14.81. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює половині площі повної, а діагональ осьового перерізу дорівнює $4\sqrt{5}$ см. Знайдіть:

1) площу повної поверхні циліндра;
2) об’єм циліндра.

14.82. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює площі основи, а діагональ осьового перерізу циліндра – $2\sqrt{17}$ см. Знайдіть:
1) площу повної поверхні циліндра;
2) об’єм циліндра.

4 **14.83.** Рівнобедрений трикутник з основою 6 см і бічною стороною 5 см обертається навколо бічної сторони. Знайдіть площу поверхні тіла обертання, що при цьому утворилося.

14.84. Прямокутний трикутник із катетами 3 см і 4 см обертається навколо гіпотенузи. Знайдіть площу поверхні тіла обертання, що при цьому утворилося.

14.85. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює $120°$. Знайдіть градусну міру центрального кута розгортки бічної поверхні цього конуса (округлити до градусів).

14.86. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює $90°$. Знайдіть градусну міру центрального кута розгортки бічної поверхні конуса (округлити до градусів).

14.87. У кулі з одного боку від її центра проведено два паралельних перерізи, площі яких – 255π см^2 і 576π см^2. Відстань між площинами перерізів дорівнює 13 см. Знайдіть площу сфери, що обмежує цю кулю.

14.88. У кулі з різних боків від її центра проведено два паралельних перерізи, площі яких – 225π см^2 і 289π см^2. Відстань між площинами перерізів дорівнює 16 см. Знайдіть площу сфери, що обмежує цю кулю.

14.89. У сферу вписано рівносторонній конус і рівносторонній циліндр. Доведіть, що площа повної поверхні циліндра є середнім геометричним площ сфери і повної поверхні конуса.

14.90. Навколо сфери описано рівносторонній конус і рівносторонній циліндр. Доведіть, що площа повної поверхні циліндра є середнім геометричним площ сфери і повної поверхні конуса.

14.91. Кут між діагоналями розгортки бічної поверхні циліндра дорівнює φ. Знайдіть площі бічної і повної поверхонь циліндра, якщо діагональ розгортки дорівнює d.

14.92. У розгортці циліндра діагональ дорівнює d і утворює кут φ із твірною. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

14.93. Висота конуса дорівнює 4 см, радіус його основи – 3 см. Бічну поверхню конуса розгорнули на площину. Знайдіть градусну міру отриманого кругового сектора.

14.94. Висота конуса дорівнює 6 см, радіус основи – 8 см. Бічну поверхню конуса розгорнули на площину. Знайдіть градусну міру отриманого сектора.

14.95. Твірна конуса утворює з його висотою кут $30°$. Знайдіть градусну міру дуги сектора, що є розгорткою бічної поверхні цього конуса.

14.96. Півкруг згорнуто в конічну поверхню. Знайдіть кут між твірними осьового перерізу отриманого конуса.

14.97. Знайдіть кут при вершині осьового перерізу конуса, якщо розгорткою його бічної поверхні є сектор з дугою, міра якої $60°$.

14.98. Знайдіть кут при вершині осьового перерізу конуса, якщо розгорткою його бічної поверхні є сектор з дугою, міра якої $90°$.

14.99. У кулю вписано прямокутний паралелепіпед. Діагоналі двох бічних граней паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, дорівнюють 16 см і 21 см, а кут між ними – $60°$. Знайдіть площу поверхні кулі.

14.100. У кулю вписано пряму трикутну призму. Сторони основи призми дорівнюють 2 дм і 7 дм, а кут між ними – $60°$. Об'єм призми дорівнює 21 дм^3. Знайдіть площу поверхні кулі.

14.101. Площа осьового перерізу конуса дорівнює 60 см^2, а площа бічної поверхні – 65π см^2. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

14.102. Рівнобічна трапеція, одна з основ якої дорівнює 7 см, а діагоналі – 25 см і 20 см, обертається навколо меншої основи. Знайдіть площу поверхні тіла обертання, що при цьому утворилося.

14.103. Трикутник зі сторонами 51 см, 37 см і 20 см обертається навколо прямої, що проходить через вершину більшого кута трикутника паралельно протилежній до цієї вершини стороні. Знайдіть площу поверхні тіла обертання, що при цьому утворилося.

14.104. Паралелограм, сторони якого дорівнюють 17 см і 28 см, а сума діагоналей – 64 см, обертається навколо більшої сторони. Знайдіть площу поверхні тіла обертання, що при цьому утворилося.

14.105. Ромб, діагоналі якого дорівнюють 30 см і 40 см, обертається навколо своєї сторони. Знайдіть площу поверхні тіла обертання, що при цьому утворилося.

14.106. Периметр осьового перерізу конуса дорівнює P. Якого найбільшого значення може набувати площа бічної поверхні конуса?

14.107. Периметр осьового перерізу циліндра дорівнює P. Якого найбільшого значення може набувати площа бічної поверхні циліндра?

14.108. Рівнобедрений трикутник обертається навколо висоти, проведеної до основи. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 18 см, а площа повної поверхні отриманого тіла обертання – 18π см^2.

14.109. Прямокутний трикутник обертається навколо гіпотенузи завдовжки 25 см. Знайдіть площу поверхні тіла обертання, що при цьому утворилося, якщо його об’єм дорівнює 1200π см^3.

14.110. У циліндр вписано чотирикутну призму, у якої периметри бічних граней дорівнюють 15 см, 23 см, 28 см і 32 см. Один з діагональних перерізів призми містить відрізок, що сполучає центри основ циліндра. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

14.111. У циліндр вписано трикутну призму. Периметри трьох її бічних граней – 27 см, 28 см і 36 см. Одна з бічних граней містить відрізок, що сполучає центри основ циліндра. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

14.112. Через дві твірні конуса, кут між якими α, проведено площину. Площа перерізу відноситься до площі повної поверхні конуса як $2 : \pi$. Знайдіть кут між твірною і висотою конуса.

14.113. У сферу радіуса R вписано конус найбільшого об’єму. Знайдіть площу поверхні цього конуса.

14.114. Радіус основи конуса дорівнює r, а твірна – l. Знайдіть міру центрального кута розгортки бічної поверхні цього конуса.

14.115. У куб з ребром завдовжки a вписано сферу. Знайдіть площу сфери, яка дотикається до трьох граней куба і до вписаної в куб сфери.

14.116. Площа поверхні тіла, що утворилося в результаті обертання прямокутного трикутника навколо його гіпотенузи, складає $\frac{84}{125}$ від площі сфери, у яку вписано це тіло обертання. Знайдіть (із точністю до градуса) менший гострий кут прямокутного трикутника.

14.117. Площа поверхні тіла, що утворилося в результаті обертання прямокутного трикутника навколо його гіпотенузи, у $\sqrt{2}$ разів більша від площі сфери, вписаної в це тіло обертання. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника.

14.118. У правильну чотирикутну піраміду вписано кулю. Знайдіть площу поверхні кулі, якщо сторона основи піраміди дорівнює a, а плоский кут при вершині дорівнює γ.

14.119. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, а плоский кут при вершині – γ. Знайдіть площу сфери, вписаної в цю піраміду.

14.120. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює h, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом β. Знайдіть площу сфери, вписаної в піраміду.

Життєва математика

14.121. Щоб витягти з колодязя відро води, треба зробити 15 обертів вала. Знайдіть глибину колодязя, якщо діаметр вала дорівнює 26 см. Для спрощення обчислень вважайте, що $\pi \approx 3$.

14.122. Родинне фермерське господарство має поле завдовжки 1500 м і завширшки 600 м. Під вирощування помідорів відведено $\frac{2}{9}$ від площі поля.

1) Скільки тонн помідорів зберуть у цьому господарстві, якщо врожайність помідорів становить 40 т з гектара?
2) Якою буде виручка фермерського господарства від продажу всього врожаю мережі супермаркетів за гуртовою ціною, що складає 4 грн за 1 кг?

Цікаві задачі для учнів неледачих

14.123. Площа трикутника ABC дорівнює $\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$, де a, b і c – довжини сторін BC, AC і AB відповідно. Знайдіть градусну міру кута C.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 14

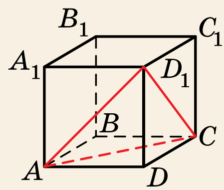
1. Сума градусних мір трьох кутів паралелограма дорівнює 230°. Укажіть градусну міру меншого кута паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
50°	60°	105°	115°	130°

2. Площа круга дорівнює 16π см². Знайдіть довжину кола, що обмежує цей круг.

А	Б	В	Г	Д
4π см	8π см	16π см	32π см	інша відповідь

3. На малюнку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть об'єм цього куба, якщо об'єм піраміди D_1ACD дорівнює V см³.

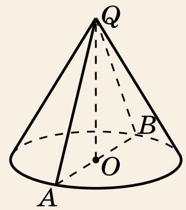


А	Б	В	Г	Д
$2V$ см³	$3V$ см³	$4V$ см³	$6V$ см³	$8V$ см³

4. Укажіть точку, відстань від якої до початку координат є найбільшою.

А	Б	В	Г	Д
(0; 2; 3)	(−1; 1; 5)	(1; −2; 4)	(−2; −3; −4)	(−4; −2; 4)

5. На малюнку зображено конус, висота якого дорівнює 6, а твірна на 6 менша від діаметра основи. Установіть відповідність між геометричною величиною (1–4) та її числовим значенням (А–Д).



Геометрична величина

1 площа основи конуса
2 площа бічної поверхні конуса
3 площа повної поверхні конуса
4 об'єм конуса

Числове значення

А 48π
Б 64π
В 80π
Г 128π
Д 144π

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Свинцеву кулю радіуса 1 дм переплавили в кульки однакового розміру. Виявилося, що при цьому отримали 64 кульки. Знайдіть (у см) радіуси цих кульок.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 4

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 3 см і 5 см, а його висота – 6 см. Знайдіть об’єм цього конуса.

А. 294π см^3 **Б.** 98π см^3 **В.** 46π см^3 **Г.** 196π см^3

2. Знайдіть об’єм кульового сегмента, висота якого дорівнює 3 см, якщо радіус кулі – 4 см.

А. 27π см^3 **Б.** 9π см^3 **В.** 18π см^3 **Г.** 54π см^3

3. Твірна конуса дорівнює 6 см, а радіус його основи – 2 см. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

А. 4π см^2 **Б.** 12π см^2 **В.** 16π см^2 **Г.** 20π см^2

2

4. Висота циліндра втричі більша за його радіус, а відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, дорівнює $2\sqrt{10}$ см. Знайдіть об’єм циліндра.

А. 24π см^3 **Б.** 12π см^3 **В.** 72π см^3 **Г.** 48π см^3

5. Твірна конуса дорівнює 10 см, а площа його основи – 36π см^2. Знайдіть об’єм конуса.

А. 288π см^3 **Б.** 96π см^3 **В.** 120π см^3 **Г.** 36π см^3

6. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут $30°$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

А. 48 см^2 **Б.** $16\pi\sqrt{2}$ см^2 **В.** 16π см^2 **Г.** $16\pi\sqrt{3}$ см^2

3

7. У кулі, об’єм якої дорівнює 288π см^3, проведено переріз на відстані 4 см від центра кулі. Знайдіть площу перерізу.

А. 12π см^2 **Б.** 16π см^2 **В.** 20π см^2 **Г.** 24π см^2

8. Висота конуса дорівнює 12 см, а радіус його основи на 6 см менший за його твірну. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

А. 135π см^2 **Б.** 216π см^2 **В.** 108π см^2 **Г.** 180π см^2

9. Усі вершини прямокутного трикутника з катетами 2 см і 4 см лежать на сфері. Знайдіть площу сфери, якщо відстань від її центра до площини трикутника дорівнює 2 см.

А. 9π см^2 **Б.** 36π см^2 **В.** 18π см^2 **Г.** 54π см^2

4 **10.** Навколо правильної трикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 4,5 см, а бічне ребро – 3 см, описано кулю. Знайдіть об’єм кулі.

А. 288π см^3 **Б.** $\frac{256}{3}\pi$ см^3 **В.** $121{,}5\pi$ см^3 **Г.** 36π см^3

11. Трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см обертається навколо середньою за довжиною сторони. Знайдіть площу поверхні тіла обертання, що при цьому утворилося.
А. 156π см^2 **Б.** 180π см^2 **В.** 336π см^2 **Г.** 392π см^2

12. У циліндрі паралельно його осі проведено переріз, що перетинає основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом 60°. Площа перерізу дорівнює $3\sqrt{3}$ см^2, а його діагональ нахилена до площини основи під кутом 30°. Знайдіть об’єм циліндра.

А. $9\sqrt{3}\pi$ см^3 **Б.** 27π см^3 **В.** $3\sqrt{3}\pi$ см^3 **Г.** $27\sqrt{3}\pi$ см^3

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 11–14

1 **1.** Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 4 см і 5 см, а його висота – 3 см. Знайдіть об’єм цього конуса.

2. Знайдіть об’єм кульового сегмента кулі радіуса 8 см, якщо висота сегмента – 6 см.

3. Радіус основи конуса дорівнює 2 см, а твірна – 4 см. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

2 **4.** Радіус основи циліндра вдвічі більший за його висоту, а відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, дорівнює $2\sqrt{5}$ см. Знайдіть об’єм циліндра.

5. Площа основи конуса дорівнює 16π см^2, а його твірна – 5 см. Знайдіть об’єм конуса.

6. Діагональ перерізу циліндра дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

3 **7.** У кулі, об’єм якої дорівнює $\frac{256\pi}{3}$ см^3, проведено переріз. Відрізок, що сполучає центр кулі з точкою кола цього перерізу, утворює з площиною перерізу кут 60°. Знайдіть площу перерізу.

8. Усі вершини прямокутника зі сторонами 3 см і 4 см лежать на сфері. Знайдіть площу сфери, якщо відстань від її центра до площини прямокутника дорівнює 6 см.

4 **9.** Трикутник зі сторонами 13 см, 20 см і 21 см обертається навколо більшої сторони. Знайдіть об'єм і площу поверхні тіла обертання, що при цьому утворилося.

Додаткові завдання

3 **10.** Радіус основи конуса дорівнює 12 см, а твірна – на 8 см більша за висоту. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

4 **11.** У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що перетинає основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом 120°. Площа перерізу, що при цьому утворився, дорівнює $36\sqrt{3}$ см^2, а кут нахилу діагоналі перерізу до площини основи дорівнює 30°. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 4

До § 11

1 **1.** Знайдіть об'єм циліндра, висота якого дорівнює 10 см, а площа основи – 13 см^2.

2. Об'єм циліндра дорівнює 75 см^3, а площа його основи – 15 см^2. Знайдіть висоту циліндра.

2 **3.** Осьовим перерізом циліндра є квадрат, площа якого – 36 см^2. Знайдіть об'єм циліндра.

4. Висота циліндра дорівнює 3 см, а його об'єм – 108π см^3. Знайдіть діаметр основи циліндра.

5. Довжина кола основи циліндра дорівнює 6π см, а довжина твірної – 5 см. Знайдіть об'єм циліндра.

6. Осьовий переріз циліндра – прямокутник, діагональ якого дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть об'єм циліндра.

7. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої, дорівнює $8\sqrt{2}$ см. Знайдіть об'єм циліндра, якщо радіус основи циліндра дорівнює його висоті.

3 **8.** Паралельно осі циліндра на відстані 15 см від неї проведено переріз, діагональ якого дорівнює 20 см. Знайдіть об'єм циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 17 см.

9. Два циліндри мають рівні об'єми. Висота першого в 9 разів більша за висоту другого. У скільки разів радіус основи першого циліндра менший за радіус основи другого?

10. Діагональ осьового перерізу циліндра – 17 см, а сума радіуса основи і висоти дорівнює 19 см. Знайдіть об’єм циліндра, якщо довжина його радіуса є цілим числом сантиметрів.

11. Діагональ перерізу циліндра, який паралельний його осі, дорівнює 6 см і утворює з площиною основи кут 30°. Переріз відтинає від кола основи дугу в 60°. Знайдіть об’єм циліндра.

12. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра із серединою радіуса нижньої, утворює з площиною основи кут γ. Відрізок, що сполучає центр нижньої основи і середину даного відрізка, дорівнює a. Знайдіть об’єм циліндра.

4

13. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що перетинає основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом 120°. Площа перерізу, що утворився, – 48 см^2, а кут між діагоналлю перерізу і твірною циліндра дорівнює 45°. Знайдіть об’єм циліндра.

14. Об’єм циліндра дорівнює V, а площа його основи – S. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

15. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом α. Відрізок, який сполучає центр верхньої основи із серединою хорди, утворює з площиною основи кут β. Відстань від центра нижньої основи до середини відрізка дорівнює m. Знайдіть об’єм циліндра.

16. Периметр осьового перерізу циліндра дорівнює $2P$, а кут між діагоналями перерізу, протилежний діаметру основи, дорівнює 2α. Знайдіть об’єм циліндра.

До § 12

1

17. Знайдіть об’єм конуса, висота якого дорівнює 7 см, а площа основи – 15 см^2.

18. Об’єм конуса дорівнює 10 см^3, а висота конуса – 5 см. Знайдіть площу основи конуса.

19. Діаметр основи конуса дорівнює 10 см, а висота конуса – 3 см. Знайдіть об’єм конуса.

20. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 4 см і 5 см, а висота – 3 см. Знайдіть об’єм зрізаного конуса.

2

21. Діаметр основи конуса і його твірна між собою рівні і дорівнюють 6 см. Знайдіть об’єм конуса.

22. Висота конуса дорівнює 6 см, а твірна утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть об’єм конуса.

23. Осьовий переріз конуса – прямокутний трикутник із катетом $3\sqrt{2}$ см. Знайдіть об'єм конуса.

24. Площа основи конуса чисельно дорівнює довжині основи конуса. Знайдіть об'єм конуса, якщо його висота дорівнює 6 см.

25. Осьовий переріз зрізаного конуса – рівнобічна трапеція з основами 2 см і 18 см і бічною стороною 17 см. Знайдіть об'єм цього конуса.

3 **26.** Радіус основи конуса дорівнює 5 см, а сума твірної і висоти конуса дорівнює 25 см. Знайдіть об'єм конуса.

27. Через дві взаємно перпендикулярні твірні конуса проведено переріз, який відтинає від кола основи дугу в $120°$. Знайдіть об'єм конуса, якщо його радіус дорівнює $6\sqrt{2}$ см.

28. Кут між твірною і висотою конуса дорівнює γ. Знайдіть об'єм конуса, якщо відстань від середини висоти конуса до твірної дорівнює n.

29. Висота зрізаного конуса дорівнює 6 см, а радіус однієї з основ удвічі більший за радіус іншої. Знайдіть об'єм зрізаного конуса, якщо його твірна утворює з площиною основи кут $45°$.

4 **30.** Трикутник зі сторонами 5 см, 5 см і 6 см обертається навколо більшої сторони. Знайдіть об'єм тіла обертання, що при цьому утворилося.

31. Твірна конуса утворює кут β із площиною основи. Знайдіть об'єм конуса, якщо площа його осьового перерізу дорівнює Q.

32. Твірна зрізаного конуса дорівнює 6 см. Один із кутів осьового перерізу вдвічі більший за інший. Знайдіть об'єм зрізаного конуса, якщо сума радіусів його основ дорівнює 7 см.

До § 13

1 **33.** Знайдіть об'єм кулі:
1) радіус якої дорівнює 1 дм;
2) діаметр якої дорівнює 12 см.

34. Знайдіть об'єм кульового сегмента кулі радіуса r, висота якого дорівнює h, якщо:
1) $r = 8$ см; $h = 3$ см; 2) $r = 8$ см; $h = 12$ см.

35. Знайдіть об'єм кульового сектора кулі радіуса r, якщо висота відповідного сегмента дорівнює h у випадку:
1) $r = 9$ см; $h = 10$ см; 2) $r = 7$ см; $h = 6$ см.

2 **36.** Кут між двома радіусами кулі дорівнює $60°$, а відстань між кінцями радіусів – 5 см. Знайдіть об’єм кулі.

37. Довжина кола перерізу кулі площиною, віддаленою від її центра на 8 см, дорівнює 12π см. Знайдіть об’єм кулі.

38. Штучні супутники Землі мають форму куль, діаметри яких дорівнюють відповідно 60 дм і 20 дм. У скільки разів об’єм більшого з них більший за об’єм меншого?

39. Зовнішній діаметр мідної порожнистої кулі дорівнює 12 см, а внутрішній – 6 см. Знайдіть:

1) об’єм міді, з якої виготовлено кулю;

2) масу кулі з точністю до грамів, якщо густина міді – 8,9 г/см^3.

40. Об’єм кулі дорівнює 288π см^3. Знайдіть площу великого круга кулі.

41. Знайдіть об’єм кульового сегмента, більшого за половину кулі, якщо радіус кола основи сегмента дорівнює 12 см, а радіус кулі – 13 см.

42. Круговий сектор, радіус якого дорівнює 6 см, а кут – $240°$, обертається навколо своєї осі симетрії. Знайдіть об’єм кульового сектора, що при цьому утворився.

43. Мідний циліндр, радіус основи якого дорівнює 2 дм, а висота – 4 дм, переплавлено в кулю. Знайдіть її радіус.

44. Два куби, ребро одного з яких дорівнює 2 см, а другого – 3 см, переплавили в кулю. Знайдіть (із точністю до сотих сантиметра) радіус цієї кулі.

3 **45.** Об’єм кулі дорівнює 36π см^3. У кулі проведено переріз, площа якого – 4π см^2. Знайдіть відстань від центра кулі до площини перерізу.

46. Площина, перпендикулярна до радіуса кулі, ділить його на частини завдовжки 3 см і 6 см, рахуючи від центра кулі. Знайдіть об’єми частин, на які ця площина поділила кулю.

47. Сторони рівнобічної трапеції з гострим кутом $60°$ і бічною стороною 4 см дотикаються до кулі, об’єм якої 36π см^3. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трапеції.

4 **48.** Внутрішній радіус посудини циліндричної форми дорівнює 5 см, а її висота – 20 см. Посудину доверху наповнили водою і помістили в неї дві кулі найбільшого радіуса. Знайдіть об’єм води, витісненої з посудини.

49. Круговий сектор, радіус якого – r, а кут – 2α $(2\alpha < \pi)$, обертається навколо осі симетрії. Знайдіть об’єм утвореного кульового сектора.

До § 14

50. Площа повної поверхні циліндра дорівнює 33π см^2, а площа його основи – 9π см^2. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

51. Довжина кола основи циліндра дорівнює 8π дм, а висота – 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

52. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо площа його основи – 4π см^2, а площа бічної поверхні – 10π см^2.

53. Знайдіть площі бічної і повної поверхонь циліндра з радіусом основи r і висотою h:
1) $r = 7$ см; $h = 2$ см; 2) $r = 3$ см; $h = 9$ см.

54. Знайдіть площі бічної і повної поверхонь конуса з радіусом основи r і твірною l:
1) $r = 3$ см; $l = 6$ см; 2) $r = 2$ см; $l = 8$ см.

55. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 3 см і 4 см, а твірна – 9 см. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.

56. Знайдіть площу поверхні кулі, діаметр якої дорівнює:
1) 10 дм; 2) 16 см.

57. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 10 см і утворює з його твірною кут $30°$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

58. Прямокутник, діагональ якого дорівнює 5 см, а сторона – 3 см, обертається навколо цієї сторони. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, що при цьому утворився.

59. Об'єм циліндра дорівнює 36π см^3, а радіус його основи – 3 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

60. Твірна конуса дорівнює 8 см і утворює з висотою кут $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

61. Прямокутний трикутник із катетами 5 см і 12 см обертається навколо меншого катета. Знайдіть площу повної поверхні конуса, що при цьому утворився.

62. Осьовим перерізом конуса є рівнобедрений трикутник із кутом $120°$ при вершині і основою $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

63. Твірна зрізаного конуса дорівнює 17 см, а висота – 15 см. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо радіус його більшої основи дорівнює 10 см.

64. Як зміниться площа сфери, якщо її радіус:
1) збільшити в 5 разів; 2) зменшити в 4 рази?

65. Площа великого круга кулі дорівнює 36π см^2. Знайдіть площу поверхні кулі.

66. Скільки квадратних метрів тканини треба для виготовлення повітряної кулі, радіус якої – 3 м, якщо на з'єднання та відходи буде витрачено 10 % від необхідної площі тканини (відповідь округліть до цілих)?

3

67. Хорда основи циліндра дорівнює 32 см. Відстані від центрів основ циліндра до цієї хорди дорівнюють 13 см і 12 см. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

68. Прямокутник зі сторонами a і b обертається спочатку навколо однієї сторони, а потім – навколо іншої. Площа бічної поверхні якого із циліндрів, що при цьому утворилися, буде більшою?

69. Твірна конуса вдвічі більша за діаметр основи, а висота конуса дорівнює $3\sqrt{15}$ см. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

70. Через вершину конуса проведено переріз, який відтинає від кола основи його чверть. Радіус основи конуса дорівнює 8 см, а кут при вершині перерізу – $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

71. Повна поверхня конуса дорівнює 36π см^2, а його твірна – 5 см. Знайдіть об'єм конуса.

72. Твірна зрізаного конуса нахилена до площини основи під кутом $60°$, а радіуси основ конуса дорівнюють r і r_1 ($r > r_1$). Знайдіть площу повної поверхні зрізаного конуса.

73. Площа поверхні кулі дорівнює площі повної поверхні конуса, радіус основи якого – 4 см, а висота – 3 см. Знайдіть радіус кулі.

74. Вершини прямокутника зі сторонами 6 см і 8 см лежать на сфері. Площина прямокутника віддалена від центра сфери на 12 см. Знайдіть площу сфери.

75. Площина, паралельна осі циліндра, ділить коло основи у відношенні $1:5$. Площа перерізу, що при цьому утворився, дорівнює Q. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

76. Площа бічної поверхні циліндра в 4 рази більша за площу його основи, а діагональ осьового перерізу дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть:

1) площу повної поверхні циліндра; 2) об'єм циліндра.

4

77. Площа бічної поверхні конуса дорівнює S, а відстань від центра основи до твірної дорівнює d. Знайдіть об'єм конуса.

78. Трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см обертається навколо середньої за довжиною сторони. Знайдіть площу поверхні тіла обертання, що при цьому утворилося.

79. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює 60°. Знайдіть градусну міру центрального кута розгортки бічної поверхні конуса.

80. Діагональ осьового перерізу зрізаного конуса дорівнює 12 см і ділиться точкою перетину діагоналей у відношенні 2 : 1. Кут між діагоналями, повернутий до основ конуса, дорівнює 120°. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.

81. Кулю поділено площиною на частини, об'єми яких дорівнюють 90π см^3 і $31{,}5\pi$ см^3. Знайдіть площу поверхні цієї кулі.

Українки у світі

Ніна Опанасівна Вірченко *народилася у 1930 році в Черкаській області. Доктор фізико-математичних наук, професорка кафедри вищої математики НТУУ «КПІ», одна з небагатьох жінок у світі, яка дістала міжнародне визнання в галузі математичної фізики. Непростий життєвий шлях випав на її долю. У 1948 році її було заарештовано з політичних мотивів та заслано до ГУЛАГу. На час арешту Ніна Опанасівна була 18-річною студенткою механіко-математичного факультету Київського університету (нині КНУ імені Тараса Шевченка). Майже 6 років провела в Тайшетських таборах Східного Сибіру. Але табори не зламали її, і після багаторічної розлуки з математикою вона в 1956 році поновлює навчання в університеті. У 1955–1958 роках викладала математику і фізику у школах України. З 1974 року і до цього часу працює у Київському політехнічному інституті (нині НТУУ «КПІ»).*

Саме Ніна Опанасівна Вірченко стала організатором низки громадських ініціатив щодо увіковічнення пам'яті одного з найвизначніших українських математиків Михайла Кравчука. Це й Міжнародні конференції ім. М. Кравчука, і відкриття у 2003 році пам'ятника Кравчукові на території НТУУ «КПІ».

Ніна Опанасівна багато разів відзначалася державними нагородами в галузі науки і техніки та громадської діяльності. Вона є членом наукового Товариства ім. Тараса Шевченка, Американського, Австралійського, Бельгійського, Единбурзького, Лондонського і Всеукраїнського математичних товариств, Соросівський професор. Вона є героїнею першої з книжок «Українки в історії», про неї знято документальний фільм «Ужма». Вона сповнена енергії і натхнення...

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

Розділ 1

§ 1

1.19. 36 см^2. **1.20.** 120 см^2. **1.21.** 3 см. **1.22.** 10 см. **1.23.** $18\sqrt{2}$ см^2. **1.24.** 170 см^2. **1.25.** 1) Так; 2) ні. **1.26.** 1) Ні; 2) так. **1.29.** 120 см^2. **1.30.** 252 см^2. **1.31.** 972 см^2. **1.32.** 972 см^2. **1.33.** 368 см^2. **1.34.** 400 см^2. **1.35.** $12\sqrt{3}$ см^2. **1.36.** $48\sqrt{3}$ см^2. **1.37.** 144 см^2. **1.38.** 16 см^2. **1.39.** 270 г. **1.40.** 360 г. **1.41.** $\sqrt{2}$. **1.42.** 3 : 2. **1.43.** $\sqrt{178}$ см^2. **1.44.** 22 см^2. **1.45.** $6\sqrt{3}+54$ см^2. **1.46.** $72\sqrt{3}+216$ см^2. **1.47.** 45°. **1.48.** $\sqrt{\frac{7}{8}}$. **1.49.** 10 см. **1.50.** 1,9 м^2. **1.51.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1.52.** 45°. **1.53.** 45°. **1.54.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **1.55.** 8 см. **1.56.** 112 см^2. **1.57.** 60 см^2 або 96 см^2. **1.58.** 240 см^2. **1.59.** 48 см. **1.60.** 90 см. **1.61.** 112 см^2. **1.62.** 6 см. **1.63.** 1) 90°; 2) 60°; 3) 30°. **1.64.** 1) 60°; 2) 90°. **1.65.** $\operatorname{arctg} 2$. **1.66.** $\operatorname{arctg} 0{,}5$. **1.67.** 60°. **1.68.** 60°. **1.69.** $12\sqrt{2}$ см^2. **1.70.** $2\sqrt{3}$ дм^2. **1.71.** $64\sqrt{3}$ см^2. **1.72.** $64\sqrt{2}$ см^2. **1.73.** 5 см. **1.74.** 2 см. **1.75.** 6 см. **1.76.** 13 см. **1.77.** 1380 см^2. **1.78.** 1066 см^2. **1.79.** $\sqrt{3} : 2$. **1.80.** $\sqrt{3} : 1$. **1.81.** 56 см. **1.82.** 60 см. **1.83.** 6 см^2. **1.84.** $\sqrt{3}$ см^2. **1.85.** 48 см^2. **1.86.** $3\sqrt{41}$ см^2. **1.87.** 360 см^2. **1.88.** 1140 см^2. **1.89.** 27. **1.90.** 21. **1.91.** $\frac{4Q\operatorname{tg}\beta}{d^2}\sqrt{d^4+Q^2}$. **1.92.** $12S\operatorname{tg}\alpha$. **1.93.** $48\sqrt{33}$ см^2. **1.94.** 2 см. **1.95.** 10 см. **1.96.** 240 см^2. **1.97.** 4 см. **1.98.** 30°. **1.99.** 360 см^2. **1.100.** 40 см^2. **1.101.** 1) 906 см^2; 2) 240 см^2. **1.103.** $60\sqrt{14}$ см^2. **1.104.** 1 см. **1.105.** 21 см. **1.106.** $28\sqrt{3}$ см^2. **1.107.** 1) 60°; 2) 45°. **1.108.** 2048 см^2. **1.109.** 252 см^2. **1.110.** 8. **1.111.** 6 см. **1.112.** 30° і 45° або 45° і 60°. **1.113.** $4(3\sqrt{2}-\sqrt{6})$ см^2. **1.114.** $10\sqrt{3}$ см^2. **1.115.** 4 см. **1.116.** Якщо $\operatorname{tg}\varphi \leqslant \frac{2H}{a\sqrt{3}}$, то $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\varphi}$; якщо $\operatorname{tg}\varphi > \frac{2H}{a\sqrt{3}}$, то $S=\frac{H(3a-\sqrt{3}H\operatorname{ctg}\varphi)}{3\sin\varphi}$. **1.117.** Сергій; на 1 хв 21 с. **1.118.** 4 банки.

§ 2

2.8. По 3840 см^2 пластмаси кожного кольору. **2.9.** 181,5 см^2. **2.10.** 48 см^2. **2.11.** 12 дм^2. **2.14.** 7 см. **2.15.** 4 см. **2.18.** 5 см. **2.19.** 13 см. **2.20.** 1) 78 см^2; 2) 3 см. **2.21.** 1) 80 см^2; 2) 5 см. **2.22.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **2.23.** $\operatorname{arcctg}\sqrt{2}$. **2.24.** 763 кг. **2.25.** ≈ 10,1 кг. **2.26.** $a\sqrt{2}$; $2a$. **2.31.** 4 см; 6 см; 12 см. **2.32.** 3 см; 6 см; 6 см. **2.33.** 30 см. **2.34.** 18 см. **2.35.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$. **2.36.** $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$. **2.37.** 8 см і 10 см. **2.38.** 13 см і 9 см. **2.39.** 7 см і 5 см. **2.40.** 5 см і 7 см. **2.41.** 8 см. **2.42.** 18 см. **2.43.** 168 см^2. **2.44.** 1) 2 см; 2) 4 см; 3) 32 см^2; 4) 40 см^2;

5) $8\sqrt{2}$ см². **2.45.** 1) 6 см; 2) $2\sqrt{7}$ см; 3) $48\sqrt{7}$ см²; 4) $72+48\sqrt{7}$ см²; 5) $12\sqrt{14}$ см². **2.46.** 72 см². **2.47.** 192 см². **2.48.** 1) $10\sqrt{97}$ см²; 2) 220 см². **2.49.** 1) 20 см²; 2) 80 см². **2.50.** 144 см². **2.51.** $16\sqrt{3}$ см². **2.52.** $80\sqrt{3}$ см². **2.53.** 120 см². **2.54.** 276 г. **2.55.** 133 г. **2.56.** $Q\sqrt{2}$. **2.57.** 2 м²; 3 м². Вказівка. Використайте властивість діагоналей паралелограма. **2.58.** 70 см²; 90 см². **2.59.** $\sqrt{6}$ см². **2.60.** 1872 см². **2.61.** 30 см². **2.62.** 2 см. **2.63.** $6\sqrt{2}$ см²; $2\sqrt{14}$ см². **2.64.** 20 см². **2.65.** 288 см². **2.67.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **2.68.** 7 см. **2.69.** 5 см. **2.71.** 3 см. **2.72.** $2\sqrt{2}$ см. **2.73.** $\sqrt{55}$ см. **2.74.** 21 см. **2.75.** 11 см. **2.76.** 1) 15 см; 2) 304 см². **2.77.** $\frac{l^2}{2}$. **2.78.** 360 см². **2.79.** 9 см. **2.80.** 13 см. **2.81.** 25 см. **2.82.** 1056 см². **2.83.** 192 см². **2.84.** 3552 см². **2.85.** 516 см². **2.86.** 1) Ні; 2) ні. **2.87.** 300 см²; $100\sqrt{65}$ см². **2.88.** $5\sqrt{41}$ см; $\sqrt{1921}$ см. **2.90.** 62 см, 64 см, 66 см. **2.91.** 18 см. **2.93.** $\arcsin\sqrt{1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta}$. **2.94.** $2d^2\sin\gamma(\sin\alpha+\sqrt{\cos(\gamma+\alpha)\cos(\gamma-\alpha)})$. **2.95.** $\frac{d^2}{2}(2\sqrt{2}+1)$. **2.96.** 330 см². **2.97.** 34 см; $16\sqrt{5}$ см. **2.99.** 1) $10\sqrt{409}$ см²; 2) 460 см²; 3) $20(23+6\sqrt{3})$ см²; 4) $30\sqrt{37}$ см²; $40\sqrt{43}$ см². **2.100.** 1) 31,2 см²; 2) 27,3 см² або 3,9 см²; 3) 21 см² або 3 см². **2.101.** 1) $4al\sin\beta$; 2) $2al\sin\frac{\alpha}{2}$; 3) $\frac{l\sqrt{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Вказівка. Доведіть, що менший діагональний переріз паралелепіпеда є прямокутником. **2.103.** 1) 72 млн м³; 2) 5400 млн м³. **2.104.** Квадратна плитка зі стороною 3 дм; 10 000 грн.

§ 3

3.37. ≈ 10,9 м². **3.38.** ≈ 116,8 см². **3.39.** 2) 12 см. **3.40.** 20 см і 15 см. **3.41.** $9\sqrt{3}$ см²; $\sqrt{39}$ см. **3.42.** 50 см²; $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ см. **3.43.** $36+24\sqrt{3}$ см. **3.44.** $12\sqrt{3}$ см². **3.45.** ≈ 155,5 м. **3.46.** ≈ 201,9 м. **3.47.** 90 см². **3.48.** 112 см². **3.49.** $3\sqrt{3}$ см. **3.50.** 4 см. **3.51.** $4\sqrt{3}$ см. **3.52.** 24 см². **3.53.** $21\frac{1}{8}$ см. **3.54.** 9 см. **3.56.** $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ см². **3.57.** $\frac{16\sqrt{11}}{5}$ см². **3.58.** $\sqrt{3}$. **3.59.** 30°. **3.60.** 3; 4; 5. **3.61.** 3 або 4. **3.62.** 60°. **3.63.** 30°. **3.64.** Так. **3.65.** $2\sqrt{42} : 3$. **3.66.** $2\sqrt{3} : 1$. **3.67.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.68.** 30°. **3.69.** 60 см. **3.70.** 1089 см². **3.71.** 32,5 см; $7,5\sqrt{17}$ см. **3.72.** $32+16\sqrt{3}$ см². **3.73.** 48 см². **3.74.** Усі по 45°. **3.75.** Усі по 30°. **3.76.** $24+24\sqrt{2}$ см².

3.77. 297 см^2. **3.78.** 45°. **3.79.** 3 см. **3.80.** 800 см^2. **3.81.** 5 см. **3.82.** 3 см. **3.83.** 4 см. **3.84.** $\sqrt{6}$. **3.85.** $\frac{1}{2}$. **3.86.** 0,5. **3.87.** $\sqrt{1,5}$. **3.88.** arctg 2. **3.89.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. **3.90.** $\frac{1}{3}$. **3.91.** 45°. **3.92.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **3.93.** 45°. **3.94.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **3.95.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **3.96.** $2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. **3.97.** $2\arcsin\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **3.98.** 2,4 см. **3.99.** 3 см. **3.100.** $9\sqrt{39}$ см^2. **3.101.** $4\sqrt{2}$ см^2. **3.102.** $\sqrt{30} : 6$. **3.103.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **3.104.** 16 см^2; 4 см^2. **3.105.** 50 см^2; 128 см^2. **3.106.** 2) 39,0625 см^2. **3.107.** 2) $\frac{207}{64}\sqrt{55}$ см^2. **3.108.** $28\frac{185}{256}$ см^2. **3.109.** 88 см^2. **3.110.** 90 см^2. **3.111.** 4,8 см. **3.112.** 3,6 см. **3.113.** $0,5b^2\cos\alpha$. **3.114.** $8+3\sqrt{2}+\sqrt{82}$ дм^2. **3.115.** 450 см^2. **3.116.** 160 см^2. **3.117.** 36 см^2. **3.118.** $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}$. **3.119.** $\frac{5}{16}al\sqrt{2}$. **3.120.** $\frac{2976}{432}\sqrt{119}$ см^2. **3.122.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{2}$; $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4}$. **3.123.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}+3}{2}$. **3.124.** $\frac{1}{7}$. **3.125.** 15°; 30°; 105°; 30°. Вказівка. За умовою задачі можна отримати рівняння $\frac{1}{\operatorname{tg}x}+\frac{1}{\operatorname{tg}7x}=\frac{1}{\operatorname{tg}2x}+\frac{1}{\operatorname{tg}2x}$. **3.126.** $\operatorname{arctg}\left(\cos\frac{\pi}{n}\sqrt{t^2-2t}\right)$. **3.127.** $\arcsin\frac{2\cos\mu}{\sqrt{3}}$; $30° < \mu < 90°$. **3.128.** $2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **3.129.** $\sqrt{-k}$, $-1 < k < 0$. **3.130.** $\operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{5}+1}$. **3.131.** $8\sqrt{3}m^3\sin\frac{\gamma}{2}\sin\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$. **3.132.** $2h^2\operatorname{tg}\gamma$. **3.133.** $4Q$. **3.134.** 45°. **3.135.** 45°. **3.136.** $a-b$. **3.137.** 45°; $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **3.138.** 60°; $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **3.139.** 0,5 м. **3.140.** 11 рулонів. **3.141.** $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

§ 4

4.9. 32 см^2. **4.10.** 4 см. **4.11.** 3600°. **4.12.** 1440°. **4.15.** $a\sqrt{2}$. **4.16.** $\frac{h\sqrt{6}}{2}$ **4.17.** Ні. **4.18.** Так. **4.19.** Побудувати можливо для $n = 3$ та $n = 4$. **4.22.** $\arccos\frac{1}{3}\approx 70°32'$. **4.23.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 54°44'$. **4.24.** 2) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$; 3) $\frac{4a^2}{3}$. **4.25.** 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 3) $a^2\sqrt{3}$. **4.26.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$. **4.27.** 3 : 1. **4.30.** $\frac{4}{3}a^2$.

4.31. $\frac{2Q}{3\sqrt{3}}$. **4.32.** $3\sqrt{3}$ см². **4.33.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **4.36.** $\frac{Q}{9}(6+\sqrt{3})$. **4.38.** 11 025. **4.39.** 48 мішків.

Вправи для повторення розділу 1

6. 360 см². **7.** 0,5 дм. **9.** 30 см²; $30\sqrt{3}$ см². **10.** 4 см. **11.** 320 см². **12.** 1,5 дм. **13.** 24 см. **14.** $133+19{,}5\sqrt{3}$ см². **15.** $\sqrt{2}:4$. **16.** $2S(1+2\sqrt{\operatorname{ctg}^2\gamma-1})$. **17.** $2Q$ і $Q\sqrt{3}$. **18.** 400 см². **22.** 8 дм². **26.** 1) 96 см²; 2) 4 см. **28.** 1) 5 см і 6 см; 2) $6\sqrt{3}$ см; 3) $132\sqrt{3}$ см²; 4) $60+132\sqrt{3}$ см²; 5) $6\sqrt{183}$ см². **29.** 64 см². **30.** 1) $10\sqrt{13}$ см²; 2) $40+28\sqrt{3}$ см². **31.** 110 см² і 230 см². **32.** 160 см². **33.** 1) 6 см; 2) 30 см². **34.** $l^2\sin 2\beta(\cos\alpha+\sin\alpha)$. **48.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ см; $\frac{16}{\sqrt{3}}$ см². **49.** $9(\sqrt{3}+\sqrt{6})$ см². **50.** 54 см². **51.** $a\operatorname{tg}\alpha$. **52.** $24\sqrt{3}$ см. **53.** $\frac{25}{6}\sqrt{3}$ см. **54.** 1) $3\sqrt{3}$ см; 2) 96 см². **55.** 3 см. **56.** 224 см². **57.** $\sqrt{3}(2+\sqrt{5})$ см². **58.** $9\sqrt{21}$ см². **59.** $\frac{2}{3}$. **60.** $\frac{1}{7}$. **65.** 1) 2 : 1; 2) $\sqrt{2}:1$. **66.** 6480°. **68.** $h\sqrt{2}$. **69.** 90°. **70.** $2\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 109°28'$.

Розділ 2

§ 5

5.18. 6 см – висота, 3 см – радіус. **5.19.** По 4 см. **5.20.** По 6 см. **5.21.** 2 см – радіус, 6 см – висота. **5.22.** 9π см². **5.23.** 64 см². **5.24.** 48 см. **5.25.** 10π см. **5.26.** 60 см². **5.28.** 420 см². **5.29.** 120 см². **5.30.** 1) 5 см; 2) $25\sqrt{3}$ см²; 3) 5 см; 4) 25 см². **5.31.** 1) $6\sqrt{3}$ см; 2) $36\sqrt{3}$ см²; 3) 6 см; 4) 12π см. **5.32.** 4 см. **5.33.** 30 см². **5.34.** $l^2\sin 2\beta$. **5.35.** $2r^2\operatorname{tg}\alpha$. **5.36.** 8π см. **5.37.** 60 см². **5.38.** $\sqrt{3}$ см. **5.39.** $40\sqrt{3}$ см². **5.40.** 120 см². **5.41.** 168 см². **5.42.** $\sqrt{Q^2-4h^2d^2}$. **5.43.** $\sqrt{r^2-\left(\frac{Q}{2h}\right)^2}$. **5.44.** $\frac{Q\sqrt{2}}{2}$. **5.45.** $\frac{Q\sqrt{3}}{2}$. **5.46.** $\pi:4\sqrt{3}$. **5.47.** 90°. **5.48.** $1:\cos\beta$. **5.49.** $Q\sqrt{2}$. **5.50.** $\frac{3}{5}Q$. **5.51.** $\frac{Q\sqrt{3}}{2}$. **5.52.** 14 см². **5.53.** 28 см². **5.54.** 2 см. **5.55.** 4 см. **5.56.** $\frac{1}{2}d\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$. **5.57.** $\frac{2m\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\gamma}$. **5.58.** 3 см. **5.59.** 5 см. **5.60.** 3 см. **5.61.** $\frac{2a(4-\sqrt{3})}{13}$. **5.62.** 10 дм. **5.63.** 15 або $\frac{15}{7}$. **5.64.** 256 см² або

400 см². **5.65.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **5.66.** $\frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$ або $\frac{2a^2\sqrt{2}}{9}$. **5.67.** $\approx$ 1,21 м. **5.68.** 2261 грн. **5.69.** 15 дюймів, 20 дюймів, 25 дюймів.

§ 6

6.22. 45°. **6.23.** $\sqrt{3} : \pi$. **6.24.** 36 см. **6.25.** 64 см. **6.26.** 16 см або 18 см. **6.27.** 6 см. **6.28.** 12 см. **6.29.** 72 см². **6.30.** 76 см². **6.31.** 48 см. **6.32.** 72 см. **6.33.** 3 см². **6.34.** 3,75 см². **6.35.** 2 см. **6.36.** 3 см. **6.37.** $\frac{R^2\sqrt{7}}{4}$. **6.38.** $\frac{h^2\sqrt{3}}{2}$. **6.39.** $\sqrt{6}$ см². **6.40.** 45°. **6.41.** 45°. **6.42.** 60°. **6.43.** 60 см². **6.44.** 48 см². **6.45.** 500 см². **6.46.** 25 см. **6.47.** 20 см. **6.48.** 9 дм². **6.49.** 25 дм². **6.50.** 2) Так, якщо $l^2 = 2r_2(r_2 - r_1)$, де l – твірна конуса, r_1 і r_2 – радіуси його основ. **6.51.** 24 см. **6.52.** 24 см. **6.53.** 9,6 см; 14,4 см. **6.54.** 4 см і 16 см. **6.55.** 1) $2\sqrt{13}$ см; 2) $27\sqrt{3}$ см². **6.56.** 1) $2\sqrt{21}$ см; 2) $13,5\sqrt{3}$ см². **6.57.** $S\operatorname{ctg}\beta$. **6.58.** $2\pi Q\operatorname{ctg}\gamma$. **6.59.** $\arccos\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)$. **6.60.** $\frac{a\operatorname{tg}\gamma}{2\sin\frac{\beta}{2}}$. **6.61.** $\frac{h^2\sqrt{6}}{3}$. **6.62.** $2\arccos\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}\right)$. **6.63.** $\frac{R^2\sin\alpha\sqrt{\cos(\alpha+\varphi)\cos(\alpha-\varphi)}}{\cos^2\alpha\cos^2\varphi}$. **6.64.** $2a^2$. **6.65.** 768 см². **6.66.** 744 см² або 408 см². **6.67.** 252 см² або $21\sqrt{39}$ см². **6.68.** 6 см. **6.69.** $(3 + 2\sqrt{2}) : 1$. **6.70.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{9}$ або $\frac{2a^2\sqrt{2}}{9}$. **6.71.** 480 см². **6.72.** 464 см. **6.73.** 65 см². Вказівка. Нехай h – висота перерізу, проведена з вершини конуса. Тоді площа перерізу $S = h\sqrt{130 - h^2}$. **6.74.** 2 т. **6.75.** 1) 15,8 м; 2) 632 грн. **6.76.** Рівність, якщо $a = b = c$. Вказівка. Використайте формулу Герона та нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$.

§ 7

7.23. 2 см або 8 см. **7.24.** 3 см або 11 см. **7.25.** 13 см або 7 см. **7.25.** 5 см або 11 см. **7.27.** 1) Так; 2) ні. **7.28.** 1) Ні; 2) так. **7.29.** 2 см або 12 см. **7.30.** 7 см або 11 см. **7.31.** 8 см. **7.32.** 24 см. **7.33.** AC = 12 см; AD = 16 см. **7.34.** 14 см і 48 см. **7.35.** 5 см. **7.36.** 12 см. **7.39.** 1) $4\sqrt{2}$ см; 2) $4\sqrt{2}$ см. **7.40.** 2 см. **7.41.** 4 см. **7.42.** $8\sqrt{3}$ см. **7.43.** Одне або безліч. **7.44.** 2 см. **7.45.** 12 см. **7.46.** 16π см². **7.47.** 36π см². **7.48.** 60°. **7.49.** 60°. **7.50.** Площина симетрії цих точок. **7.51.** Площина симетрії цих площин. **7.54.** 16 см. **7.55.** 9 см. **7.56.** 12 см. **7.57.** 2 см. **7.59.** 4 см. **7.60.** 10 см. **7.61.** 10 см. **7.62.** 8 см. **7.63.** 7 см або 1 см. **7.64.** 12,5 см. **7.65.** Усі по 5 см. **7.66.** Усі по 2,5 см. **7.67.** 1) $\frac{m\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{m\sqrt{3}}{2}$. **7.68.** Ребро дотикається до сфери, тобто має з нею одну спільну точку. **7.69.** $2\sqrt{7}$ см. **7.70.** $3-2\sqrt{2}$. **7.71.** 1,5π дм. **7.72.** 6π см. **7.73.** 2π см. **7.74.** $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$. **7.75.** $\frac{4}{5}\sqrt{Q}$. **7.76.** 35 см. **7.77.** 8 см. **7.78.** 25 : 169. **7.79.** 16 : 25. **7.80.** 8 : 5. **7.81.** 8 см або $\sqrt{115}$ см. **7.82.** 17 см. **7.83.** 6 см. **7.84.** $\frac{\pi r^2}{b}(2r+b)$. **7.85.** $2-\sqrt{3}$ або $2+\sqrt{3}$. **7.86.** π см. **7.87.** $\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2+r_3^2}{2}}$. **7.88.** $3\sqrt{3}$ см; $3\sqrt{3}$ см; $3\sqrt{2}$ см. **7.89.** 24 см; 30 см; 32 см. **7.90.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **7.91.** $\sqrt{67}$ см. **7.92.** Ні. **7.93.** 1) ≈ 8,16 м²; 2) ≈ 1,63 кг; 2 банки по 1 кг. **7.96.** 4 : 3.

§ 8

8.15. $\sqrt{3}:6$. **8.16.** 3 см. **8.17.** $3\sqrt{3}$ см. **8.18.** 8 см. **8.19.** 1,5 см. **8.20.** 1 см. **8.21.** $2\sqrt{3}$ см. **8.22.** $3\sqrt{3}$ см. **8.23.** $\frac{r}{\sin\alpha}$. **8.24.** $2\sqrt{2}$ см. **8.25.** 5 см. **8.26.** 12 см. **8.27.** $10\sqrt{2}$ см. **8.28.** 24 см; 36 см². **8.29.** 4 см. **8.30.** 1,5 см. **8.31.** 5 см. **8.32.** 8 см. **8.33.** 60 см². **8.34.** 12 см². **8.35.** 10 см. **8.36.** 10 см. **8.38.** 3,2 см. **8.39.** 4,5 см. **8.40.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **8.41.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **8.42.** 1) $4\sqrt{5}$ см; 2) 32 см². **8.43.** 1) $6\sqrt{10}$ см; 2) $27\sqrt{3}$ см². **8.44.** $162\sqrt{3}$ см². **8.45.** 320 см². **8.46.** 3 см. **8.47.** 12 см. **8.48.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. **8.49.** 30°. **8.50.** 1 см. **8.51.** $\sqrt{3}$ см. **8.52.** 5 см. **8.53.** 16 см. **8.54.** 8π см. **8.55.** 6,75 см. **8.56.** 64 см². **8.57.** 41 см. **8.58.** $\frac{a\sqrt{21}}{6}$. **8.59.** 14 см. **8.60.** 1 : 3. **8.61.** 1 : 3. **8.62.** $\sqrt{2Q}$; $\sqrt{0,5Q}$; $\sqrt{0,5Q}$. **8.63.** 6,5 см або $\sqrt{34}$ см. **8.64.** 2 см. **8.65.** 4π см. **8.66.** 1,5 см. **8.67.** $r\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha$. **8.69.** 1 см або 9 см. **8.70.** 5 см. **8.72.** 30°. **8.73.** $128\sqrt{3}$ см². **8.74.** 0,5 см. **8.75.** 3 см. **8.76.** 4,5 см. **8.77.** 2 см. **8.78.** 3 см. **8.79.** $\sqrt{3}:2$, починаючи від основи. **8.80.** $2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. **8.81.** $1+\sqrt{2}$. **8.82.** 1,2 см. **8.83.** 4 см; $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8.84.** $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ см. **8.85.** $3\sqrt{2}$ см. **8.86.** $\sqrt{\frac{3}{7}}$. **8.87.** $9\sqrt{3}$ см². **8.88.** 16 см². **8.89.** 702 см². **8.90.** 13 см. **8.91.** 14 см. **8.92.** $16\sqrt{2}$ см². **8.93.** $\frac{2r\sqrt{2}}{3}$. **8.94.** $2\frac{2}{3}$ см. **8.95.** 3 см. **8.96.** 0,48 см. **8.97.** $\frac{4}{23}\sqrt{161}$ см. **8.98.** 60°. **8.99.** 45°. **8.100.** 12 см². **8.101.** $6\sqrt{3}$ см².

8.102. 60°. **8.103.** $\sqrt{29}$ см. **8.104.** 5 см. **8.105.** $\frac{1}{8}\sqrt{881}$ см. **8.106.** 11 см. **8.107.** 1,5 см. **8.108.** $(1{,}5-\sqrt{2})a$. **8.109.** $\frac{a}{2}(\sqrt{2}-1)$. **8.110.** 1 см. **8.111.** $\operatorname{arctg}\sqrt{1+\sqrt{2}}$. **8.112.** $\operatorname{arctg}\frac{3\pm\sqrt{6}}{3}$. **8.113.** $1+\sqrt{6}$. **8.114.** $\operatorname{arctg}(6\pm\sqrt{23})$. **8.115.** 8 разів. **8.116.** $\approx$ 63,7 м. **8.119.** $3\cdot\frac{(3\cos\alpha+\sqrt{2})c}{2\cos\alpha}$.

Вправи для повторення розділу 2

7. 4π см². **8.** 4 см – висота, $4\sqrt{3}$ см – радіус. **9.** 60 см². **10.** 1) 6 см; 2) 36 см²; 3) $3\sqrt{2}$ см; 4) 18π см². **11.** 4 см. **12.** $2m^2\sin 2\gamma$. **13.** 16π см². **14.** 25 см². **15.** $16\pi(1+\sqrt{3})$ см². **16.** $\sqrt{r^2-l^2\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}$. **26.** 36 см. **27.** 9π см². **28.** 180 см². **29.** 44 см. **30.** $2R^2\sin\alpha$. **31.** 6 см². **32.** $9\sqrt{3}$ см². **33.** 1) 18 см і 9 см; 2) $243\sqrt{3}$ см². **34.** $\frac{l^2\operatorname{tg}\alpha}{4}$. **35.** $\frac{S\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$. **45.** 6 см. **46.** 6 см. **47.** 24 см. **48.** 10 см. **49.** 12π см. **50.** $\sqrt{\frac{2S}{3}}$. **51.** 5 см. **52.** 25 : 16. **64.** 9 см². **65.** 1 : 3. **66.** $\sqrt{21}$ см. **67.** 7 см. **68.** 200 см². **69.** 1 см. **70.** 6 см. **71.** 2 см. **72.** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Розділ 3

§ 9

9.21. 46 відер. **9.22.** 16 відер. **9.23.** Ні. **9.24.** 96 см². **9.25.** 27 см³. **9.26.** $480\sqrt{3}$ см³. **9.27.** $768\sqrt{3}$ см³. **9.28.** Ні. **9.29.** 60 см³. **9.30.** 768 см³. **9.31.** 168 см². **9.32.** 240 см². **9.33.** 100 см³. **9.34.** 108 см³. **9.35.** 216 см². **9.36.** 5400 см². **9.38.** 300 см³. **9.39.** 10 см. **9.40.** 1) 5 разів; 2) $\sqrt[3]{7}$ разів. **9.41.** 1) $\sqrt[3]{9}$ разів; 2) 2 рази. **9.42.** 3315 г. **9.43.** 26 машин. **9.44.** 72 машини. **9.45.** 120. **9.46.** 40 дм³. **9.47.** 87 750 м³. **9.48.** $\frac{a^3}{8}$. **9.49.** 48 см³. **9.50.** 54 см³. **9.51.** 64 см²; 32 см³. **9.52.** 72 см³. **9.53.** 7. **9.54.** 750. **9.55.** $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см³. **9.56.** $117\sqrt{3}$ см³. **9.57.** $\frac{2}{3}\sqrt{21}$ см. **9.58.** 162 см³. **9.59.** $\frac{455\sqrt{3}}{2}$ см³. **9.60.** 13 см. **9.61.** 192 см³. **9.62.** 1152 см³. **9.63.** $54\sqrt{3}$ см³. **9.64.** $128\sqrt{3}$ см³. **9.65.** 630 см³. **9.66.** 840 см³. **9.67.** 252 см³. **9.68.** 30 см³. **9.69.** $512\sqrt{2}$ см³. **9.70.** $125\sqrt{2}$ см³.

9.71. 144 см³. **9.72.** $256\sqrt{2}$ см³. **9.73.** $\frac{d^3}{4}\cos^2\beta\sin\beta\sin 2\alpha$. **9.74.** $\frac{c^3}{4}\sin 2\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$. **9.75.** 2160 м³. **9.76.** 87 750 м³. **9.77.** 3 см. **9.78.** 3 см. **9.79.** 4 см. **9.80.** 2,5 см. **9.81.** 1 дм. **9.82.** У 2 рази. **9.83.** На 144 см². **9.84.** $96\sqrt{3}$ см³. **9.85.** $350\sqrt{3}$ см³. **9.86.** 8,4 дм³. **9.87.** 3840 см³. **9.88.** $432\sqrt{5}$ см³. **9.89.** 10 608 см³. **9.90.** 480 см³. **9.91.** 25 см. **9.92.** 36 см³. **9.93.** 54 см³. **9.94.** $72\sqrt{3}$ см³. **9.95.** $96\sqrt{3}$ см³. **9.96.** $\frac{a^3}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma$. **9.97.** $\frac{3a^2}{4}\mathrm{tg}\,\alpha$. **9.98.** 84 см³. **9.99.** 40 см³. **9.100.** $240\sqrt{3}$ см³. **9.101.** 72 см³. **9.102.** $20\sqrt{2}$ см³. **9.103.** $128\sqrt{2}$ см³. **9.104.** $30\sqrt{3}$ см³. **9.105.** 60 см³. **9.106.** $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos(\beta+\alpha)\cos(\beta-\alpha)}$. **9.107.** $\frac{d^3\sqrt{2}}{8}$. **9.108.** 84 см³. **9.109.** 806,4 см³. **9.110.** 19 800 см³. **9.111.** 13 860 см³. **9.112.** $\frac{224\sqrt{3}}{9}$ см³. **9.113.** $16\sqrt{15}$ см³. **9.114.** $\frac{128}{9}$ см³. **9.115.** $\frac{20V}{3}$. **9.116.** $\frac{5V}{18}$. **9.117.** 60°. **9.118.** 30°. **9.119.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **9.120.** $18\sqrt{39}$ дм³. **9.121.** $\frac{a^3}{2}$. **9.122.** $\frac{a^3}{2}$. **9.123.** 48 см³. **9.124.** 270 см³. **9.125.** 870 см³. **9.126.** $2{,}52\sqrt{2}$ см³. **9.127.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$. **9.128.** $\frac{\left|Q_1^2-Q_2^2\right|\mathrm{tg}\,\alpha}{4l}$. **9.129.** $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$. **9.130.** 4320 см³. **9.131.** 96 см³. **9.132.** 237 см³. **9.133.** 20 см³. **9.134.** Якнайшвидше за маршрутом AK, KL, LC – за 14,1 хв; найповільніше за маршрутом AD, DC – за 17,1 хв. **9.135.** 80 відер.

§ 10

10.13. 6 см. **10.14.** 9 см. **10.15.** Збільшиться удвічі. **10.16.** $216\sqrt{3}$ см³. **10.17.** $243\sqrt{3}$ см³. **10.18.** 32 см³. **10.19.** 560 см³. **10.20.** ≈ 2 014 639 м³. **10.21.** ≈ 2 596 298 м³. **10.22.** $\frac{1}{6}V$. **10.23.** $3V$. **10.24.** 16 см². **10.25.** 48 см². **10.26.** $14\sqrt{3}$ см³. **10.27.** 147 см³. **10.28.** 2) 2880 см³. **10.29.** 2) 768 см³. **10.30.** $50\sqrt{3}$ см³. **10.31.** $96\sqrt{3}$ см³. **10.32.** 36 см³. **10.33.** $\frac{V}{6}$. **10.34.** $\frac{V}{3}$. **10.35.** $\frac{250\sqrt{3}}{3}$ см³. **10.36.** $128\sqrt{3}$ см³. **10.37.** $72\sqrt{3}$ см³. **10.38.** 864 см³. **10.39.** $\frac{2}{3}b^3\sin\alpha\cos^2\alpha$. **10.40.** $\frac{4}{3}l^3\sin^2\gamma\cos\gamma$. **10.41.** $\frac{2}{9}h^3\sqrt{3}$. **10.42.** $\frac{3}{4}a^3$. **10.43.** 8 см³. **10.44.** 5 см. **10.45.** 100 см³. **10.46.** $3\sqrt{3}$ см³. **10.47.** 252 см³. **10.48.** 72 см³. **10.49.** 10 см³. Вказівка. Доведіть, що основою піраміди є прямокутник. **10.50.** $96\sqrt{6}$ см³. Вказівка. Доведіть, що основою піраміди є квадрат. **10.51.** 12 см. **10.52.** 4 см. **10.53.** $\frac{a^3}{8}$. **10.54.** $\frac{a^3}{4}$. **10.55.** $104\sqrt{3}$ см³. **10.56.** $\frac{63\sqrt{3}}{4}$ см³. **10.57.** $64\sqrt{3}$ см³. **10.58.** 256 см³. **10.59.** $\frac{R^3\sqrt{6}}{4}$. **10.60.** $\frac{\sqrt{3}}{4}h(l^2-h^2)$. **10.61.** 20 см³. **10.62.** 36 см³. **10.63.** $\frac{d^2\sqrt{4l^2-d^2}}{12}\sin 2\alpha$. **10.64.** $\frac{b^2\operatorname{ctg}\beta}{6}\sqrt{l^2-\frac{b^2}{4\sin^2\beta}}$. **10.65.** 216 см³. **10.66.** 72 см³. **10.67.** 500 см³. **10.68.** 8 см³. **10.69.** $\frac{16}{3}\sqrt{2}$ см³. **10.70.** 3 дм³. **10.71.** 160 см³. **10.72.** 8 см². **10.73.** 8 см² і 2 см². **10.74.** 3 см² і 27 см². **10.75.** 504 см³. **10.76.** 588 см³. **10.77.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. **10.78.** 2 дм³. **10.79.** $12\sqrt{3}$ см³. **10.80.** 3 см. **10.81.** $351\sqrt{3}$ см³. **10.82.** $52\sqrt{3}$ см³. **10.83.** $96\sqrt{3}$ см³. **10.84.** $16\sqrt{39}$ см³. **10.85.** 72 см³. **10.86.** 16 см³. **10.87.** 1900 см³. **10.88.** $289\frac{1}{3}$ см³. **10.89.** 109 см³. **10.90.** 120 см³. **10.91.** 6 см³. **10.92.** 144 см³. **10.93.** 18 дм³. **10.94.** $12\sqrt{3}$ дм³. **10.95.** 24 дм³. **10.96.** $64\sqrt{3}$ дм³. **10.97.** $\frac{V}{27}$, $\frac{7V}{27}$, $\frac{19V}{27}$. **10.98.** 1 : 1. **10.99.** 36 см³. **10.100.** 18 см³. **10.101.** $132\sqrt{3}$ см³. **10.102.** $10\frac{2}{3}$ дм³. **10.103.** 90°. **10.104.** 3000 см³. **10.105.** $\frac{2}{3}R^3\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\gamma$. **10.106.** $\frac{b^3\sin^2\beta\operatorname{tg}\gamma}{6\left(1+2\sin\frac{\beta}{2}\right)}$. **10.107.** $36\sqrt{3}$ см³. **10.108.** $18\sqrt{11}$ см³. **10.109.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ дм³. **10.110.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$. **10.111.** $\frac{16\sqrt{2}}{3}$. **10.112.** Вказівка. Нехай a, b, c – три ребра тетраедра, що виходять з однієї вершини, V – об'єм тетраедра. Тоді $V \leqslant \frac{abc}{6}$ (доведіть це). **10.114.** 12 см³. **10.115.** 1008 см³. **10.116.** 2) $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. **10.118.** $\frac{3584}{3}(\sqrt{2}-1)$ см³. **10.119.** 216 см³. **10.120.** $r^3\frac{\sqrt{9-3\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$. **10.121.** $\frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{Q}{\sqrt{2\operatorname{tg}^2\alpha+1}}\right)^{\frac{3}{2}}$. **10.122.** $\frac{8\sqrt{3}R^3\operatorname{tg}^4\alpha}{(4+\operatorname{tg}^2\alpha)^3}$;

$\frac{12\sqrt{3}R^2\mathrm{tg}^2\alpha(1+\cos\alpha)}{(4+\mathrm{tg}^2\alpha)^2\cos\alpha}$. **10.123.** $\frac{9d^3\mathrm{tg}^3\frac{\delta}{2}}{4\sqrt{3\mathrm{tg}\frac{2\delta}{2}-1}}$. **10.124.** ≈ 502,4 м². **10.125.** ≈ 4,25 м². **10.126.** 1 : 3.

Вправи для повторення розділу 3

10. 512. **11.** 125 см³. **12.** 32 см³. **13.** 230 см². **14.** 96 см³. **15.** $27\sqrt{3}$ см³. **16.** 1092 см³. **17.** 192 см³. **18.** $64\sqrt{2}$ см³. **19.** 96 см³. **20.** $\frac{a^3}{2}\mathrm{ctg}^2\alpha\,\mathrm{tg}\gamma$. **21.** $\frac{d^3}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\beta$. **22.** 36 см³. **23.** 250 см³. **24.** $200\sqrt{7}$ см³. **25.** 9 см³. **33.** $24\sqrt{3}$ см³. **34.** 15 см³. **35.** $152\sqrt{2}$ см³. **36.** 40 см³. **37** $32\sqrt{3}$ см³. **38.** 4 см. **39.** 36 см³. **40.** $18\sqrt{3}$ см³. **41.** $156\sqrt{6}$ см³. **42.** 1944 см³. **43.** $\frac{\sqrt{3}l^3}{8}\sin 2\alpha\cos\alpha$. **44.** $\frac{2}{3}l^3\cos\gamma\sin^2\gamma\sin\alpha$. **45.** $72\sqrt{3}$ см³. **46.** 114 см³. **47.** 37 см³; 152 см³.

Розділ 4

§ 11

11.15. 54π см³. **11.16.** 72π см³. **11.17.** 6 дм³. **11.18.** ≈ 12 560 см³. **11.19.** ≈ 9,2 т. **11.20.** ≈ 26 т. **11.21.** $4\sqrt{3}$ дм². **11.22.** 4 дм². **11.23.** $100\pi\sqrt{3}$ см³. **11.24.** 125π см³. **11.25.** 1) 4 см; 2) 144 см. **11.26.** У 16 разів. **11.27.** 1008π см³. **11.28.** 180π см³. **11.29.** 192π см³. **11.30.** $27\pi\sqrt{2}$ см³. **11.31.** $\frac{\pi m^3}{\cos^2\beta\sin\beta}$. **11.32.** $8\pi l^3\cos^2\alpha\sin\alpha$. **11.33.** 96π см³. **11.34.** 180π см³. **11.35.** $\frac{3}{4}\pi a^3$. **11.36.** $\frac{\pi a^3}{12}$. **11.37.** 4 : 1. **11.38.** 1 : 2. **11.39.** $\frac{\pi b^2 h}{4\cos^2\alpha}$. **11.40.** $\frac{\pi a^2 h}{4\sin^2\alpha}$. **11.41.** $27\pi\sqrt{6}$ см³. **11.42.** $72\pi\sqrt{3}$ см³. **11.43.** $\frac{\pi b^3\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{4\sin^2\frac{\beta}{2}}$. **11.44.** $\frac{\pi d^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\sin^2\frac{\gamma}{2}}$. **11.45.** $\frac{\pi p^3\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4(1+\mathrm{tg}\,\alpha)^3}$. **11.46.** $\frac{\pi Q}{4}\sqrt{Q\,\mathrm{tg}\,\beta}$. **11.47.** $h=r\sqrt{2}$. **11.48.** 80°. **11.49.** У 25 разів. **11.50.** Так.

§ 12

12.20. $\frac{20\pi\sqrt{5}}{3}$ см³. **12.21.** 12π см³. **12.22.** 5 см. **12.23.** 36 см. **12.24.** 392π см³. **12.25.** 96π см³. **12.26.** 36π см³. **12.27.** 48π см³. **12.28.** $\frac{\pi d^3}{3\cos^2\alpha\sin\alpha}$. **12.29.** $\frac{8\pi}{3}m^3\cos^2\beta\sin\beta$. **12.30.** $\frac{98\pi}{3}$ см³.

12.31. 39π см³. **12.32.** 32π см³. **12.33.** 24π см³. **12.34.** $76{,}8\pi$ см³. **12.35.** 54π см³. **12.36.** 36 см³. **12.37.** 96π см³. **12.38.** 240π см³. **12.39.** $\frac{8}{3}\pi c\,\mathrm{tg}^3\alpha\,\mathrm{tg}\,2\alpha$. **12.40.** 3 : 4. **12.41.** 2 : 1. **12.42.** $\frac{\pi p^3}{3\,\mathrm{tg}\,\alpha(1+\sin\alpha)^3}$.

12.43. $\frac{\pi p^3}{3\,\mathrm{tg}\,\gamma(1+\cos\gamma)^3}$. **12.44.** $\frac{56\sqrt{3}\pi}{3}$ см³. **12.45.** $504\pi\sqrt{3}$ см³. **12.46.** 6400π см³. **12.47.** 56π см³. **12.48.** 122π см³. **12.49.** 81 см³. **12.50.** 243 см³. **12.51.** $\frac{16\pi a^3}{3\cos\beta\sin 2\beta}$. **12.52.** $\frac{16\pi b^3}{3\sin\alpha\sin 2\alpha}$.

12.53. 3840π см³. **12.54.** 1344π см³. **12.55.** 120°. **12.56.** $\frac{\pi a^3}{4}$.

12.57. $\frac{3\pi b^3}{4}$. **12.58.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{81}$ або $\frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{81}$. **12.59.** $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{729}$. **12.60.** 1600π см³.

12.61. $591{,}5\pi$ см³. В к а з і в к а. Врахуйте, що основою піраміди є прямокутний трикутник, а тому бічні ребра піраміди між собою рівні. **12.62.** $\frac{2\pi l^3\sqrt{3}}{27}$. **12.63.** 24. **12.64.** 1100 м; 500 м. **12.65.** 1) Усі невідомі сторони по 5; 2) ні.

§ 13

13.15. 1) $\frac{1084}{3}$ см³; 2) ≈ 3178 г. **13.16.** 1) $\frac{386\pi}{3}$ см³; 2) ≈ 8852 г.

13.17. 10 см. **13.18.** 4 см. **13.19.** 126π см³. **13.20.** 6156π см³. **13.21.** $96\pi(12-6\sqrt{3})$ см³. **13.22.** $24\pi(6-3\sqrt{2})$ см³. **13.23.** $\sqrt[3]{36}$ см. **13.24.** $3\sqrt{7}$ см. **13.25.** ≈ 2,6 см. **13.26.** ≈ 4,3 см. **13.27.** 2 : 3. **13.28.** $66\frac{2}{3}$%.

13.29. 288π см³. **13.30.** $\frac{1372\pi}{3}$ см³. **13.31.** $1:3\sqrt{3}$. **13.32.** $2:\pi\sqrt{3}$. **13.33.** 18π см². **13.34.** 16π см². **13.35.** 198π см³ і $364{,}5\pi$ см³. **13.36.** 27 : 5. **13.37.** Так, оскільки її радіус менший за радіус циліндра. **13.38.** 3 см. **13.39.** 2 см. **13.40.** $\frac{1676\pi}{3}$ см³. **13.41.** $\frac{434\pi}{3}$ см³.

13.42. $4\pi\sqrt{3}$ см³. **13.43.** 36π см³. **13.44.** $18{,}432\pi$ см³. **13.45.** $\frac{256\pi}{3}$ см³.

13.46. $\frac{32\pi\sqrt{3}}{81}$ см³. **13.47.** $\frac{64\pi\sqrt{2}}{3}$ см³. **13.48.** $\frac{\pi h^3}{6\cos^3\frac{\alpha}{2}}$ або $\frac{\pi h^3}{6\sin^3\frac{\alpha}{2}}$.

13.49. $\frac{256\pi}{3}$ см³. **13.50.** 288π см³. **13.51.** $\frac{15625\pi}{48}$ см³.

13.52. $\frac{15625\pi}{384}$ см³. **13.53.** $\frac{500\pi}{3}$ см³. **13.54.** $\frac{4000\pi}{3}$ см³.

13.57. $\frac{156265\pi}{384}$ см³. **13.58.** $\frac{2048\pi}{3}$ см³. **13.59.** $\frac{125\pi\sqrt{3}}{54}$ см³.

13.60. $\frac{\pi}{6}a^3\sin^3\alpha\,\mathrm{tg}^3\frac{\beta}{2}$. **13.61.** 4,5π см³. **13.62.** $\frac{\pi a^3\,\mathrm{tg}\,\beta}{8}$. **13.63.** $\frac{4\pi R^3}{81}$. **13.64.** 1 : 2. **13.65.** 5 : 11 : 16. **13.66.** 7 : 20. **13.67.** 5 : 16. **13.68.** 720π см³. **13.69.** 36π см³. **13.70.** $\frac{V\mathrm{ctg}^3\frac{\varphi}{2}\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\mathrm{tg}\varphi}{2\pi\sin\alpha}$. **13.71.** 441π см³. **13.72.** 972π см³. **13.73.** 60° або $2\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$. **13.74.** $2\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$ або $2\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$. **13.75.** $\frac{7\pi h^3}{96}$. **13.76.** 10°. **13.77.** 2,5 км.

§ 14

14.29. 36π см². **14.30.** 288π см³. **14.31.** 676π см². **14.32.** 400π см². **14.33.** Однієї кулі діаметром 6 дм. **14.34.** У 160 000 разів. **14.35.** πQ. **14.36.** $\frac{M}{Q}$. **14.37.** 25π см². **14.38.** 100π см². **14.39.** 4 см. **14.40.** 3 см. **14.41.** 144π см². **14.42.** $24\pi\sqrt{3}$ см². **14.43.** $\pi d^2\sin2\alpha$. **14.44.** $2\pi a^2(1+\mathrm{tg}\beta)$. **14.45.** 96π см². **14.46.** 1200π см². **14.47.** $\frac{\pi l^2\sqrt{2}}{2}$. **14.48.** $24\pi\sqrt{6}$ см². **14.49.** 104π см². **14.50.** 42π см². **14.53.** 9π см². **14.54.** 16π см². **14.55.** ≈ 61,8 дм². **14.56.** ≈ 2,6 м². **14.57.** 132π см². **14.58.** 48π см² або $\frac{80\pi}{3}$ см². **14.59.** 5 см. **14.60.** 6 см. **14.61.** 9π см². **14.62.** 36π см². **14.63.** 48π см². **14.64.** 9π см². **14.65.** $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$. **14.66.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **14.67.** 324π см³. **14.68.** 48π см². **14.69.** 43,0625π см². **14.70.** 16π см². **14.71.** π дм². **14.72.** 2) a : b. **14.73.** 36π см³. **14.74.** 96π см³. **14.75.** 2 : 3. **14.76.** 268π см³. **14.77.** 3 см і 5 см. **14.78.** 3 см і 6 см. **14.79.** $\frac{2\pi Q\sqrt{3}}{3}$. **14.80.** $\pi M\sqrt{2}$. **14.81.** 1) 100π см²; 2) 125π см³. **14.82.** 1) 48π см²; 2) 32π см³. **14.83.** 52,8π см². **14.84.** 16,8π см². **14.85.** ≈ 312°. **14.86.** ≈ 255°. **14.87.** 2500π см². **14.88.** 1300π см². **14.91.** $\frac{d^2\sin\varphi}{2}$; $\frac{d^2}{2}\left(\sin\varphi+\pi\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$ або $\frac{d^2}{2}\left(\sin\varphi+\pi\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)$. **14.92.** $\frac{d^2\sin\varphi(2\pi\cos\varphi+\sin\varphi)}{2\pi}$. **14.93.** 216°. **14.94.** 288°. **14.95.** 180°. **14.96.** 60°. **14.97.** $2\arcsin\frac{1}{4}$. **14.98.** $2\arcsin\frac{1}{6}$. **14.99.** 2116π см³. **14.100.** 529π дм². **14.101.** 90π см². **14.102.** 960 см². **14.103.** 1908π см². **14.104.** 1350π см². **14.105.** 1200π см². **14.106.** $\frac{\pi P^2}{16}$.

14.107. $\frac{\pi P^2}{16}$. **14.108.** 4 см; 7 см; 7 см. **14.109.** 420π см². **14.110.** $128\frac{1}{8}\pi$ см². **14.111.** $155\frac{7}{8}\pi$ см². **14.112.** $\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)\right)$. **14.113.** $\frac{8}{9}\pi R^2(1+\sqrt{3})$. **14.114.** $\frac{r}{l}\cdot 360^\circ$. **14.115.** $6\pi a^2(26-15\sqrt{3})$. **14.116.** $\approx 37^\circ$. **14.117.** По 45°. **14.118.** $\frac{\pi a^2\cos\gamma}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}$. **14.119.** $\frac{\pi a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\gamma}{2}\right)}{3\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\gamma}{2}\right)}$. **14.120.** $\frac{\pi h^2}{4}\operatorname{ctg}^4\beta(\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1)^2$. **14.121.** 11,7 м. **14.122.** 1) 800 т; 2) 3 200 000 грн. **14.123.** 45°.

Вправи для повторення розділу 4

8. 3468π см³. **9.** У 3 рази. **10.** 240π см³. **11.** 81π см³. **12.** $32a^3\pi\cos^2\gamma\sin\gamma$. **13.** $64\pi\sqrt{3}$ см³. **14.** $\frac{2V}{\sqrt{\pi S}}$. **15.** $\frac{8\pi m^3\cos^2\beta\sin\beta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **16.** $\frac{\pi p^3\operatorname{tg}^2\alpha}{4(1+\operatorname{tg}\alpha)^3}$. **26.** 100π см³. **27.** $4\pi\sqrt{6}$ см³. **28.** $\frac{8\pi n^3}{3\cos^2\gamma\sin\gamma}$. **29.** 504π см³. **30.** 32π см³. **31.** $\frac{\pi Q}{3}\sqrt{\frac{Q}{\operatorname{tg}\beta}}$. **32.** $39\pi\sqrt{3}$ см³. **39.** 1) 252π см³; 2) ≈ 7046 г. **40.** 36π см². **41.** 2268π см³. **42.** 216π см³. **43.** $2\sqrt[3]{12}$ дм. **44.** $\approx 2{,}03$ см. **45.** $\sqrt{5}$ см. **46.** 252π см³, 720π см³. **47.** $\sqrt{6}$ см. **48.** $\frac{1000\pi}{3}$ см³. **49.** $\frac{4}{3}\pi r^3\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **66.** ≈ 124 м². **67.** 1000π см². **69.** 45π см². **70.** $64\pi\sqrt{2}$ см². **71.** 16π см³. **72.** $\pi(3r^2 - r_1^2)$. **73.** 3 см. **74.** 169π см². **75.** $2\pi Q$. **76.** 1) 24π см²; 2) 16π см³. **77.** $\frac{1}{3}Sd$. **78.** 336π см². **79.** 180°. **80.** 72π см². **81.** 81π см².

Відповіді до завдань «Домашня самостійна робота»

№ завдання / № роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	В	Г	Б	А	В	Б	Г	А	В	Г	Б	А
2	Г	В	Б	А	Г	Б	А	Г	Б	А	В	В
3	В	А	Г	Б	Г	А	Б	Б	В	Г	Б	А
4	Б	А	В	А	Б	Г	В	А	Б	Г	В	А

Відповіді до завдань «Перевірте свою компетентність»

№ вправи / № завдання	1	2	3	4	5	6
1	В	А	Д	Б	1 – Г; 2 – Б; 3 – В; 4 – А	0,75
2	Б	Г	А	В	1 – В; 2 – Б; 3 – Г; 4 – Д	3
3	Г	А	Б	В	1 – Г; 2 – Б; 3 – А; 4 – В	56
4	Б	В	А	Д	1 – А; 2 – Г; 3 – В; 4 – Д	64
5	Г	Б	А	В	1 – Д; 2 – Г; 3 – В; 4 – А	48
6	Г	Д	Г	В	1 – Б; 2 – А; 3 – Г; 4 – В	7
7	Б	В	Г	А	1 – Д; 2 – А; 3 – Г; 4 – В	16
8	А	Б	Г	Б	1 – Д; 2 – Г; 3 – Б; 4 – В	75
9	Б	Г	В	В	1 – В; 2 – Б; 3 – Д; 4 – А	–18
10	Г	В	Б	В	1 – Б; 2 – В; 3 – Г; 4 – А	120
11	А	В	Г	В	1 – Б; 2 – В; 3 – Г; 4 – Д	144
12	В	Б	В	А	1 – А; 2 – В; 3 – Б; 4 – Д	256
13	А	Г	В	Г	1 – А; 2 – Г; 3 – В; 4 – Д	4
14	А	Б	Г	Д	1 – Б; 2 – В; 3 – Д; 4 – Г	2,5

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович
ЄРГІНА Оксана Володимирівна

ГЕОМЕТРІЯ
(профільний рівень)

Підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Головний редактор *Наталія Заблоцька*

Редактор *Оксана Єргіна*
Обкладинка *Тетяни Кущ*
Художнє оформлення, ілюстрації *Юрія Лебедєва*
Технічний редактор *Цезарина Федосіхіна*
Комп'ютерна верстка *Юрія Лебедєва*
Коректор *Любов Федоренко*

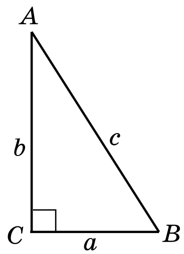
Формат 60×90/16.
Ум. друк. арк. 18,0. Обл.-вид. арк. 16,84.
Тираж 21 446 пр. Вид. № 1998.
Зам. № 19-05-1009.

Видавництво «Генеза»,
вул. Тимошенка, 2-л, м. Київ, 04212.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 5088 від 27.04.2016.

Віддруковано у ТОВ «ПЕТ»,
вул. Ольмінського, 17, м. Харків, 61024.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 4526 від 18.04.2013.

№	ПІП	Клас	Рік навчання

СПІВВІДНОШЕННЯ У ПРЯМОКУТНОМУ ТРИКУТНИКУ



$\angle A + \angle B = 90°$

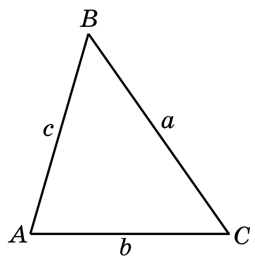
$a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Піфагора)

$\sin A = \cos B = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{a}{c}$

$\cos A = \sin B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{b}{c}$

$\operatorname{tg} A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a}{b}$, $\operatorname{tg} B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{b}{a}$

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ



ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

ТЕОРЕМА СИНУСІВ

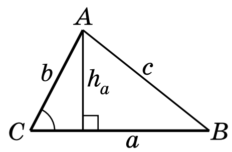
$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$,

R – радіус описаного кола

ЗНАЧЕННЯ СИНУСА, КОСИНУСА І ТАНГЕНСА ДЕЯКИХ КУТІВ

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

ПЛОЩА ТРИКУТНИКА



$S = \dfrac{1}{2}ah_a$ $\quad S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$

$S = \dfrac{abc}{4R}$, де R – радіус описаного кола

$S = pr$, де r – радіус вписаного кола

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ – формула Герона,
p – півпериметр трикутника

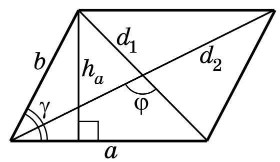
ПРАВИЛЬНИЙ ТРИКУТНИК

$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, де a – сторона

ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

$S = \dfrac{1}{2}ab$, де a і b – катети

ПЛОЩА ПАРАЛЕЛОГРАМА

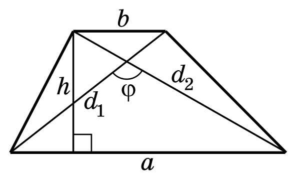


$S = ah_a$

$S = \dfrac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$

$S = ab\sin\gamma$

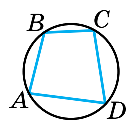
ПЛОЩА ТРАПЕЦІЇ



$S = \dfrac{a+b}{2}\cdot h$

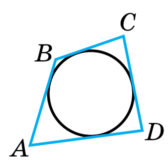
$S = \dfrac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$

ВПИСАНИЙ ЧОТИРИКУТНИК



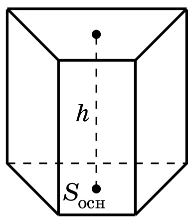
$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$

ОПИСАНИЙ ЧОТИРИКУТНИК



$AB + CD = AD + BC$

ПРИЗМА



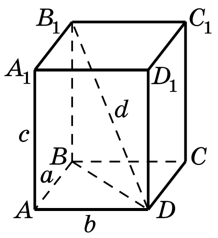
$S_{повн} = 2S_{осн} + S_{бічн}$

$V = S_{осн}h$

ПРЯМА ПРИЗМА

$S_{біч} = Pl$, де P – периметр основи,
l – бічне ребро

ПРЯМОКУТНИЙ ПАРАЛЕЛЕПІПЕД



$S_{повн} = 2(ab + ac + bc)$

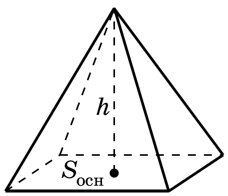
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$V = abc$

КУБ

$S_{повн} = 6a^2$, $V = a^3$, де a – ребро

ПІРАМІДА



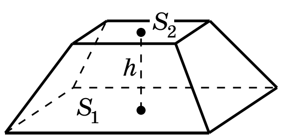
$S_{повн} = S_{осн} + S_{біч}$

$V = \frac{1}{3}S_{осн}h$

ПРАВИЛЬНА ПІРАМІДА

$S_{біч} = pl$, де p – півпериметр основи,
l – апофема

ЗРІЗАНА ПІРАМІДА



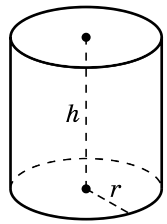
$S_{повн} = S_{біч} + S_1 + S_2$

$V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$

ПРАВИЛЬНА ЗРІЗАНА ПІРАМІДА

$S_{бічн} = (p_1 + p_2)l$, де p_1, p_2 – півпериметри основ,
l – апофема

ЦИЛІНДР

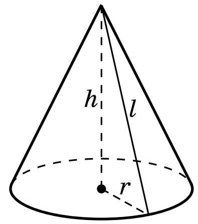


$S_{біч} = 2\pi rh$

$S_{повн} = 2S_{осн} + S_{біч} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$

$V = S_{осн}h = \pi r^2 h$

КОНУС

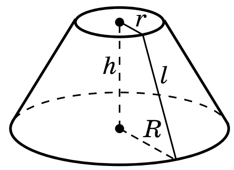


$S_{біч} = \pi rl$

$S_{повн} = S_{осн} + S_{біч} = \pi r^2 + \pi rl = \pi r(r + l)$

$V = \frac{1}{3}S_{осн}h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

ЗРІЗАНИЙ КОНУС

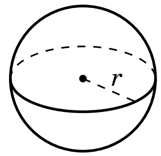


$S_{біч} = \pi l(R + r)$

$S_{пов} = S_{біч} + \pi R^2 + \pi r^2 = \pi l(R + r) + \pi(R^2 + r^2)$

$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$

КУЛЯ І СФЕРА



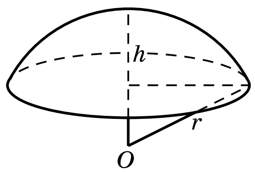
$S = 4\pi r^2$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

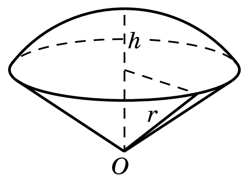
КУЛЬОВИЙ СЕГМЕНТ

КУЛЬОВИЙ СЕКТОР

O – центр кулі, r – радіус кулі, h – висота сегмента



$$\boldsymbol{V = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right)}$$



$$\boldsymbol{V = \frac{2}{3}\pi r^2 h}$$