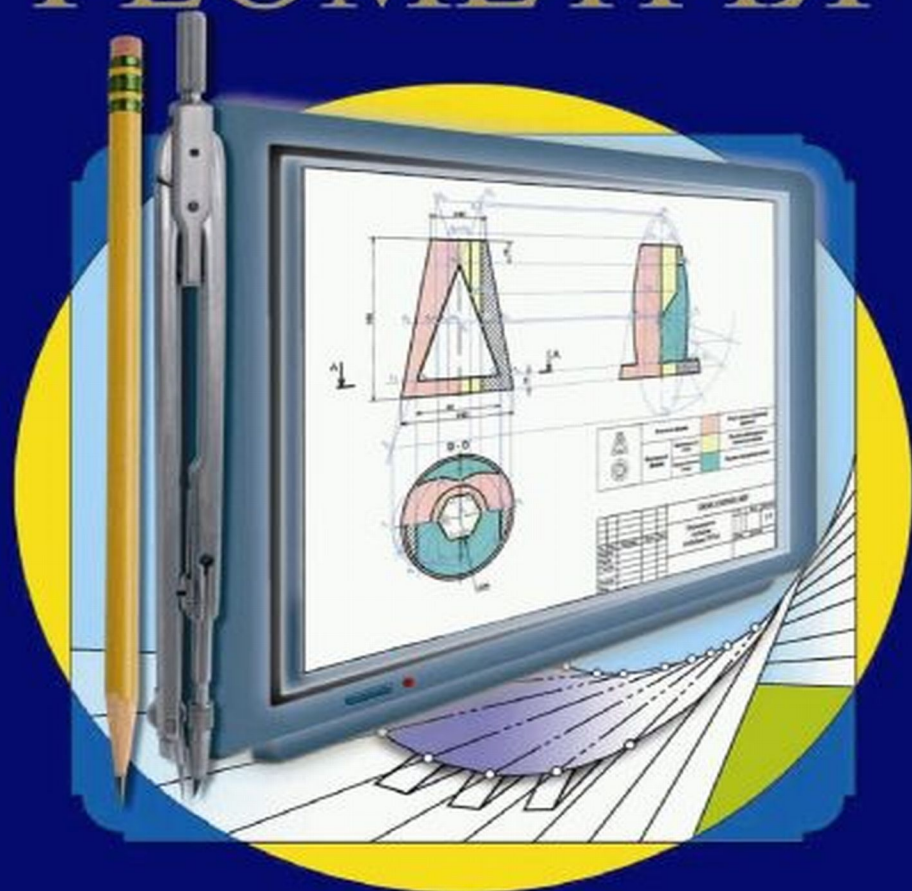


О. С. Хмеленко

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ



КОНДОР

О. С. Хмеленко

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

**Теорія та приклади
рішення задач**

Підручник

*Затверджено Міністерством освіти і науки України як підручник
для студентів вищих навчальних закладів*



2008

ББК 22.151я72

X 43

*Затверджено Міністерством освіти і науки України як підручник
для студентів вищих навчальних закладів
(Лист МОНУ №14/18.2-993 від 20.04.2006 р.)*

Рецензенти:

Ковальов Ю.М. – завідувач кафедру прикладної геометрії та комп'ютерної графіки Національного авіаційного університету, доктор технічних наук, професор;

Пилипака С.Ф. – завідувач кафедру нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну Національного аграрного університету, доктор технічних наук, професор.

О.С. Хмеленко

X 43 Нарисна геометрія. Підручник. – К.: Кондор, 2008 р. – 440 с.

ISBN 978-966-351-142-9

У підручнику розглядається: розділ I – „Паралельність і перпендикулярність”; розділ II – Методи перетворення ортогональних проєкцій”; розділ III – „Поверхні”, викладених у п'ятнадцяти темах.

Матеріал підручника викладений в розширеному обсязі й охоплює інформацію по утворенню проєкцій, виконанню проєкцій точок, прямих, площин, поверхонь та їх взаємного розташування, – як елементів-визначників технічного виробу.

Викладення матеріалу наведено у формі оповідання про дії в просторі та їх символічного запису, що, на погляд автора, сприяє уявленню дій, які виконуються в просторі.

У кожній темі є теоретична частина, приклади розв'язку задач, завдання та запитання по темі. У додатках наведено умови епюрних задач які виконуються при вивченні матеріалу кожного розділу.

В підручнику показано нарисну геометрію як основу побудови зображень на машинобудівних кресленнях.

Підручник відповідає програмі курсу „Інженерна графіка” (розділ „Нарисна геометрія”), яка затверджена Міністерством освіти і науки України і рекомендована для вузів (крім архітектурних та будівельних).

ББК 22.151я72

ISBN 978-966-351-142-9

© Хмеленко О.С., 2006

© Кондор, 2006

– Нарисна геометрія –

основа побудови креслення;

– Креслення –

технічна мова спілкування;

– Геометричні форми зображень на кресленні –

засіб комунікації між фахівцями
в різних галузях знань.

О. С. Хмеленко

Зміст

Передмова	14
Прийняті умовні позначення, знаки та скорочення	16
Вступ	21
В.1. Методи проектування	22
В.1.1. Центральне проектування	22
В.1.2. Паралельне проектування	22
В.2. Окремі властивості паралельного проектування	23
В.3. Метод Монжа	24
В.4. Площини проекцій і осі координат	24
Розділ І. Паралельність і перпендикулярність	26
Тема 1. Точка	26
1.1. Зображення елементів простору на епюрі	26
1.2. Координати точки та її проекції	26
1.3. Утворення епюра точки	29
1.4. Методи побудови третьої проекції точки за її двома даними	29
1.5. Розв'язання прямої задачі н. г. (побудова кресленика)	31
1.6. Розв'язання зворотної задачі н. г. (читання кресленика)	31
1.7. Належність точок елементам тригранного кута (першого октанта).	32
1.8. Задачі для розв'язку	32
Запитання для самоконтролю	35
Тема 2. Пряма	36
2.1. Положення прямих відносно площин проекцій	36
2.2. Пряма загального положення	36
2.3. Пряма рівня	37
2.3.1. Горизонтальна пряма	37
2.3.2. Фронтальна пряма	37
2.3.3. Профільна пряма	38
2.4. Прямі проектуючі	38
2.4.1. Горизонтально проектуюча пряма	39
2.4.2. Фронтально проектуюча пряма	39
2.4.3. Профільно проектуюча пряма	40
2.5. Визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення і кутів нахилу його до площин проекцій	40
2.5.1. Метод прямокутного трикутника	40
2.5.2. Метод Монжа	43

2.6. Ділення відрізка в заданому співвідношенні	44
2.7. Сліди прямої.	44
2.7.1. Сліди прямих окремого положення	45
2.8. Взаємне положення прямих.	46
2.8.1. Паралельні прямі	47
2.8.2. Прямі, які перетинаються	47
2.8.3. Мимобіжні прямі	48
2.9. Графічне дослідження параметрів прямої лінії	48
2.10. Задачі для розв'язку	52
Запитання для самоконтролю	55
Тема 3. Площина	56
3.1. Способи задання площин	56
3.2. Сліди площин	57
3.3. Площина загального положення	60
3.3.1. Прямі і точки в площині	60
3.3.1.1. <i>Ознаки належності прямої до площини</i>	60
3.3.1.2. <i>Ознака належності точки до площини</i>	61
3.3.2. Прямі окремого положення в площині.	61
3.3.2.1. <i>Горизонталь в площині</i>	61
3.3.2.2. <i>Фронталь в площині</i>	62
3.4. Перезадання площини	64
3.5. Лінія найбільшого нахилу площини	65
3.6. Площини окремого положення	66
3.6.1. Проектуючі площини	67
3.6.1.1. <i>Горизонтально проектуюча площина</i>	67
3.6.1.2. <i>Фронтально проектуюча площина</i>	68
3.6.1.3. <i>Властивості проектуючих площин</i>	69
3.6.2. Площини рівня.	69
3.6.2.1. <i>Горизонтальна площина</i>	69
3.6.2.2. <i>Фронтальна площина</i>	70
3.6.2.3. <i>Профільна площина</i>	71
3.6.2.4. <i>Висновки стосовно площин рівня</i>	71
3.7. Приклади розв'язків задач	72
3.8. Задачі для розв'язку	78
Запитання для самоконтролю	81
Тема 4. Взаємне положення площин.	82
4.1. Відсіки, які зливаються (належать одній площині)	82
4.2. Паралельні площини	83
4.3. Площини, які перетинаються	85
4.3.1. Загальний метод побудови лінії перетину площин.	85

4.3.2. Побудова лінії перетину двох площин заданих слідами. . . .	88
4.3.2.1. Побудова лінії перетину двох площин з парою паралельних однойменних слідів	89
4.3.2.2. Побудова лінії перетину площин рівня з площиною загального положення	90
4.3.2.3. Побудова лінії перетину площини проєктуючої з площиною загального положення	90
4.4. Побудова лінії перетину площини проєктуючої з площиною заданою не слідами	91
4.5. Приклади розв'язків задач	92
4.6. Задачі для розв'язку	95
Запитання для самоконтролю	96
Тема 5. Положення прямої і площини.	97
5.1. Пряма і площина перетинаються.	97
5.1.1. Часткові випадки	100
5.2. Пряма і площина паралельні	102
5.2.1. Паралельність прямої до площини	102
5.2.2. Паралельність площини до прямої	103
5.3. Приклади розв'язків задач	103
5.4. Задачі для розв'язку	106
Запитання для самоконтролю	108
Тема 6. Перпендикулярність прямих і площин	109
6.1. Проекції прямого кута	109
6.2. Перпендикулярність прямої і площини	110
6.2.2. Перпендикулярність виду 1.2	111
6.3. Перпендикулярність двох прямих	112
6.3.1. Перпендикулярність виду 2.1	112
6.3.2. Перпендикулярність виду 2.2	113
6.4. Перпендикулярність двох площин	114
6.4.1. Перпендикулярність виду 3.1	114
6.4.2. Перпендикулярність виду 3.2	115
6.5. Приклади розв'язків задач	116
6.6. Задачі для розв'язку	123
Запитання для самоконтролю	126
Тема 7. Геометричні місця простору.	127
7.1. Геометричні місця точок у просторі.	127
7.2. Геометричні місця прямих у просторі.	129
7.3. Геометричні місця площини у просторі.	130

7.4. Приклади розв'язків задач	131
7.5. Задачі для розв'язку	135
Запитання для самоконтролю	137
Епюр № 1	138
Розділ II. Методи перетворення ортогональних проєкцій	147
II.1. Види перетворень ортогональних проєкцій	147
Тема 8. Метод заміни площин проєкцій	150
8.1. Заміна однієї площини проєкцій	151
8.2. Виконання перетворень методом заміни площин проєкцій	152
8.2.1. Перетворення прямої загального положення в пряму рівня (перетворення виду № 1)	152
8.2.2. Перетворення прямої рівня в пряму проєктуючу (перетворення виду № 2).	153
8.2.3. Перетворення площини загального положення в площину проєктуючу (перетворення виду № 3)	154
8.2.4. Перетворення площини проєктуючої в площину рівня (перетворення виду № 4)	155
8.3. Заміна двох площин проєкцій	156
8.3.1. Перетворення прямої загального положення в проєктуючу пряму (перетворення виду № 1+2)	158
8.3.2. Перетворення площини загального положення в площину рівня (перетворення виду № 3+4)	159
8.4. Приклади розв'язків задач	160
8.5. Задачі для розв'язку	165
Запитання для самоконтролю	167
Графічна робота № 1	168
Тема 9. Метод обертання	173
9.1. Обертання об'єкта навколо проєктуючої прямої	173
9.2. Виконання перетворень методом обертання навколо проєктуючої осі.	174
9.2.1. Перетворення виду № 1	174
9.2.2. Перетворення виду № 2.	176
9.2.3. Перетворення виду № 3	177
9.2.4. Перетворення виду № 4	179
9.2.5. Перетворення виду № 3 + № 4	180
9.3. Обертання об'єкта навколо лінії рівня	182
9.3.1. Перетворення виду № 3 + № 4	184
9.4. Обертання об'єкта навколо прямої загального положення.	185
9.5. Обертання об'єкта навколо лінії нульового рівня (метод суміщення)	186
9.5.1. Виконання перетворень методом суміщення	189

9.5.1.1. Перетворення виду № 1	189
9.5.1.2. Перетворення виду № 3 + № 4	191
9.6. Обертання безвісне. Метод плоско-паралельного переміщення	193
9.6.1. Виконання перетворень методом плоско-паралельного переміщення	195
9.6.1.1. Перетворення виду № 1	195
9.6.1.2. Перетворення виду № 2	196
9.6.1.3. Перетворення виду № 1 + № 2	197
9.6.1.4. Перетворення виду № 3	198
9.6.1.5. Перетворення виду № 4	200
9.6.1.6. Перетворення виду № 3 + № 4	201
II. 2. Приклади розв'язування задач із застосуванням методів перетворення проєкцій	202
9.7. Задачі для розв'язку	203
Запитання для самоконтролю	212
Епюр № 2	214
Розділ III. Поверхні	222
Тема 10. Криві лінії і поверхні	222
10.1. Криві лінії	222
10.1.1. Плоскі криві лінії	222
10.1.2. Проєкції плоских кривих	223
10.1.3. Властивості кривих та їх проєкцій	226
10.2. Поверхні	227
10.2.1. Багатогранники	227
10.2.2. Криві поверхні та їх визначники	228
10.2.3. Лінійчаті розгортувальні поверхні	230
10.2.3.1. Циліндрична поверхня	230
10.2.3.2. Конічна поверхня	231
10.2.3.3. Апроксимація кривих поверхонь	233
10.2.4. Лінійчаті нерозгортні поверхні	233
10.2.5. Поверхні обертання	235
10.3. Приклади розв'язку задач	237
10.4. Задачі для розв'язку	243
Запитання для самоконтролю	245
Тема 11. Перерізи та розгортки поверхонь	246
11.1. Загальна методика побудови лінії перерізу поверхні – січною площиною	246
11.1.1. Особливості вибору посередників	247
11.1.2. Види задач на побудову лінії перерізу	247

11.2. Рішення задач першого виду (в яких січна площина – площина окремого положення перерізає довільну поверхню)	248
11.2.1. Перерізи поверхонь гранних тіл	248
11.2.2. Перерізи циліндричних поверхонь.	251
11.2.3. Перерізи поверхні прямих кругових конусів.	254
11.2.3.1. <i>Переріз поверхні конуса площиною, паралельною до його основи</i>	254
11.2.3.2. <i>Переріз поверхні конуса площиною, яка проходить через його вершину</i>	255
11.2.3.3. <i>Переріз поверхні конуса площиною, яка паралельна його одній твірній</i>	256
11.2.3.4. <i>Переріз поверхні конуса площиною, яка паралельна його двом твірним</i>	256
11.2.3.5. <i>Переріз поверхні конуса площиною, яка розташована під гострим кутом до його осі</i>	258
11.2.4. Перерізи замкнених поверхонь.	259
11.2.4.1. <i>Перерізи поверхні сфери</i>	259
11.2.4.2. <i>Перерізи поверхні тору</i>	261
11.2.4.3. <i>Перерізи поверхні еліпсоїда обертання</i>	262
11.2.4.4. <i>Перерізи поверхні триосьового еліпсоїда</i>	263
11.2.5. Перерізи поверхонь гіперболоїдів	264
11.2.5.1. <i>Перерізи поверхні однопорожнинного гіперболоїда</i>	264
11.2.5.2. <i>Перерізи поверхні двопорожнинного гіперболоїда</i>	266
11.2.6. Перерізи поверхні параболоїда.	266
11.3. Розв'язок задач другого виду (в яких січна площина – площина загального положення перерізає довільну поверхню).	269
11.3.1. Переріз поверхні похилого конуса.	270
11.4. Розгортки поверхонь	272
11.4.1. Побудова розгортки методом суміщення.	273
11.4.1.1. <i>Розгортка поверхні прямої шестигранної піраміди, зрізаної проектуючою площиною</i>	273
11.4.2. Побудова розгорток методом трикутників	276
11.4.2.1. <i>Розгортка поверхні похилої тригранної піраміди, перерізаної площиною загального положення</i>	276
11.4.3. Побудова розгортки методом триангуляції	281
11.4.3.1. <i>Розгортка поверхні прямого коноїда</i>	281
11.4.4. Побудова розгортки методом розкочування	284
11.4.4.1. <i>Розгортка поверхні похилого кругового циліндра</i>	284
11.4.5. Побудова наближених розгорток	285
11.4.5.1. <i>Розгортка поверхні сфери</i>	285
11.5. Задачі для розв'язку	286
Запитання для самоконтролю	292

Тема 12. Перетин прямої з поверхнею.	293
12.1. Загальна методика визначення взаємного положення прямої і поверхні.	293
12.1.1. Рекомендації по виконанню загальної методики визначення взаємного положення прямої і поверхні	294
12.2. Групи задач на побудову точок зустрічі прямої з поверхнею	295
12.3. Деякі властивості поверхонь другого порядку	296
12.4. Окремі випадки розв'язків задач.	296
12.5. Розв'язок задач Групи 1, в розв'язанні яких застосовують посередники – площини окремого положення з наступним перетворенням перерізу	298
12.5.1. Приклади розв'язку задач з застосуванням методу А (перетворення проєкцій)	299
12.5.2. Приклади розв'язку задач з застосуванням методу В (перетворення перерізу в обрисову методом обертання)	301
12.5.3. Родинність геометричних образів	302
12.5.3.1. Родинність в паралельному проєктуванні (паралельна родинність)	303
12.5.3.2. Застосування паралельної родинності в розв'язку задач	304
12.5.3.3. Родинність в центральному проєктуванні (центральна родинність)	306
12.5.4. Приклади розв'язку задач з застосуванням методу В (перетворення перерізу в обрисову поверхні способом родинної відповідності)	307
12.5.5. Приклади розв'язку задач з застосуванням методу С (перетворення складної лінії перерізу в просте його родинне зображення)	309
12.6. Рішення задач Групи 2, в яких застосовуються посередники – площини загального положення	310
12.6.1. Загальний алгоритм побудови точок перетину прямої з поверхнею піраміди або конуса.	311
12.6.2. Загальний алгоритм побудови точок перетину прямої з поверхнею похилої призми або циліндра	312
12.7. Рішення задач Групи 3, в яких застосовується перетворення методом родинності поверхонь.	315
12.7.1. Виконання переходу від заданої поверхні до родинної.	315
12.7.2. Алгоритм розв'язку задач Групи 3 способом центрального проєктування.	318
12.7.3. Приклади розв'язку задач Групи 3.	319

12.8. Розв'язок задач Групи 4, в яких визначається відстань від точки до поверхні.	325
12.8.1. Приклади рішення задач Групи 4	325
12.9. Задачі для рішення	328
Запитання для самоконтролю	330
Тема 13. Перетин поверхонь.	331
13.1. Загальна методика побудови лінії перетину поверхонь	331
13.1.1. Особливості побудови лінії перетину поверхонь	333
13.1.2. Типи задач в залежності від виду посередника	334
13.2. Задачі типу А, в розв'язку яких застосовуються посередники – площини окремого положення	334
13.2.1. Перетин гранних поверхонь	335
13.2.2. Перетин гранної проектуючої поверхні з довільною кривою поверхнею	338
13.2.3. Перетин довільних кривих поверхонь, одна з яких проектує	342
13.2.4. Перетин кривих поверхонь	345
13.3. Задачі типу В, в розв'язку яких застосовуються посередники – поверхні сфери	349
13.3.1. Побудова лінії перетину співвісних поверхонь обертання.	349
13.3.1.1. Утворення співвісних поверхонь обертання та їх ліній перетину	349
13.3.1.2. Утворення та побудова ліній перетину співвісних поверхонь циліндра і сфери	351
13.3.1.3. Утворення та побудова перетину співвісних поверхонь конуса і сфери	353
13.3.2. Побудова лінії перетину поверхонь обертання, осі яких – лінії окремого положення	354
13.3.2.1. Приклади розв'язку задачі першої групи, в якій перетинаються поверхні обертання	355
13.3.2.2. Вид лінії перетину поверхонь, в задачах першої групи та її проекції	358
13.3.2.3. Приклад розв'язку задач другої групи, в яких перетинаються поверхні обертання, осі яких – мимобіжні прямі	360
13.4. Задачі типу С, в розв'язку яких застосовують посередники – площини загального положення	363
13.4.1. Спільні точки лінії перетину поверхонь та вибір посередників – площин для їх побудови	363

13.4.1.1. Перетин поверхонь двох похилих конусів, двох пірамід, або конуса і піраміди.	363
13.4.1.2. Перетин поверхонь двох похилих циліндрів, призми, або циліндра і призми.	365
13.4.1.3. Перетин поверхонь похилих конуса, або піраміди з циліндром, чи з призмою	367
13.4.2. Рекомендації по утворенню та розташуванню посередників – площин	368
13.4.3. Визначення виду лінії перетину поверхонь.	369
13.4.4. Приклади розв'язку задач типу С	371
13.5. Задачі для розв'язку	374
Запитання для самоконтролю	376
Тема 14. Зображення на кресленні моделі	377
14.1. Види.	377
14.2. Розрізи	379
14.2.1. Особливості виконання розрізів.	380
14.3. Зображення креслень моделей з одним горизонтальним отвором (одинарне проникнення)	381
14.3.1. Модель призматична.	382
14.3.2. Модель пірамідальна.	384
14.3.3. Модель циліндрична.	386
14.3.4. Модель конічна.	387
14.3.5. Модель кульовидна	390
14.4. Зображення креслення моделі з двома (горизонтальним та вертикальним) отворами. Епюр № 3 (подвійне проникнення)	392
14.5. Задачі для розв'язку	404
Запитання для самоконтролю	405
Тема 15. Аксонометричні проєкції	406
15.1. Основні визначники аксонометричної проєкції	406
15.2. Види, осі, показники спотворення аксонометричних проєкцій	407
15.3. Аксонометрія точки.	408
15.4. Аксонометрія багатокутника	409
15.5. Аксонометричні проєкції кола	410
15.5.1. Ізометрія кола.	411
15.5.2. Диметрія кола.	412
15.5.3. Фронтальна ізометрія кола	415

15.6. Штриховка в розрізах, умовності та нанесення розмірів на аксонометричних проекціях	415
15.7. Послідовність виконання аксонометричної проекції деталі	416
15.7.1. Ізометрія деталі	417
15.7.2. Прямокутна та фронтальна диметрія деталей	419
15.8. Задачі для розв'язку	421
Запитання для самоконтролю	422
Додатки	423
Список використаної літератури	438

Передмова

Підручник призначено для студентів вищих технічних навчальних закладів (крім архітектурних та будівельних). За своїм змістом він ґрунтується на багаторічному досвіді викладання курсу “інженерна графіка” на кафедрі нарисної геометрії, інженерної і комп’ютерної графіки Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут” та на досвіді роботи на цій кафедрі самого автора.

Курс “Інженерна графіка”, який вивчають студенти інженерно-технічних спеціальностей, складається з трьох частин:

- перша частина: нарисна геометрія;
- друга частина: кресленики машинобудівні;
- третя частина: комп’ютерна графіка.

Вивчення нарисної геометрії пропонується проводити на технічних факультетах по “повній програмі”, а на інженерних та не механічних факультетах по “короткій програмі”.

Цей підручник може бути використаний при вивченні нарисної геометрії як по “повній програмі”, так і по “короткій програмі”.

При вивченні нарисної геометрії по “повній програмі” вивчається теоретична частина всіх наведених 15^{ти} тем, розглядаються приклади розв’язків задач по темах, а також практично проводяться контрольні роботи, виконуються аудиторні і домашні задачі в робочому зошиті цієї програми, а також виконуються домашні графічні роботи:

- Титульний лист;
- Кресленик технічний;
- Епюр №1 по розділу “Паралельність і перпендикулярність”;
- Епюр №2 по розділу “Методи перетворення ортогональних проєкцій”;
- Епюр №3 по розділу “Поверхні” – Проникнення подвійне.

При вивченні нарисної геометрії по “короткій програмі” рекомендується вивчення теоретичної частини тем №№ 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 11, 14, 15; а також практично виконати аудиторні та домашні задачі в робочому зошиті цієї програми (малий зошит), а також виконуються домашні графічні роботи:

- Титульний лист;
- Кресленик технічний;
- Проекції кола;
- Аксонометрія моделі;
- Проникнення (одинарне, або подвійне).

Для забезпечення виконання креслеників з нарисної геометрії попередньо пропонується вивчення ДСТУ формати, лінії креслеників, шрифти креслярські, нанесення розмірів, що закріплюється виконанням графічної роботи Гр-1 “Кресленик технічний”.

Особливість підручника – докладність викладення матеріалу з нарисної геометрії за принципом “від простого до складного”, що прослідковується в кожній темі, та від теми до теми, що є доцільним особливо для студентів, які в сучасній середній школі були позбавлені вивчення графічних дисциплін (а таких більшість), а засвоєння теоретичних основ графічного зображення, - запорука відповідного рівня інженера.

Звертається увага читача на те, що в зв'язку з відсутністю відповідних стандартів в нарисній геометрії, в різних підручниках автори приймають різні, зручні на їх погляд позначення елементів простору на фоні загальноприйнятих, тому необхідно брати до уваги прийняті автором умовні позначення в цьому посібнику, що на його погляд більш зручніше і не порушує зв'язків між проекціями елементів простору.

В підручниках різних авторів матеріал викладено за баченням предмету з точки зору його призначення. В цьому підручнику матеріал з нарисної геометрії викладено переважно як граматику побудови кресленика, його читання та розвитку просторового уявлення студента.

Для полегшення читання креслеників застосовано їх виконання лініями різного кольору, а надання більшої наочності розташуванню елементів в просторі застосовані наочні зображення.

Автор приносить щирі вдячність к.т.н., доценту кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки НТУУ “КПІ” Сарнацькій К. В., за зроблені зауваження та побажання, які сприяли покращенню змісту підручника та вдячний своїм студентам за технічну допомогу при оформленні робіт. Від усіх читачів автор з вдячністю прийме побажання направлені на покращення змісту підручника.

Прийняті умовні позначення, знаки та скорочення

Позначення геометричних образів та їх проєкцій, а також стислий запис геометричних дій, алгоритмів рішення задач пропонується виконувати за допомогою наступних позначень та символів, прийнятих в даному курсі.

1. Позначення геометричних образів та їх проєкцій.

1.1. **Точки** позначають прописними „великими” буквами латинського алфавіту, або арабськими цифрами, наприклад: буквами A, B, C, D, \dots або цифрами $1, 2, 3, 4, \dots$

— Проєкції точок позначають тими самими буквами або цифрами, що й оригінали, тільки з індексами, які відповідають індексам площин проєкцій, відповідно:

горизонтальні проєкції $A_1, B_1, C_1, D_1, \dots$ або $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, \dots$;

фронтальні проєкції $A_2, B_2, C_2, D_2, \dots$ або $1_2, 2_2, 3_2, 4_2, \dots$;

профільні проєкції $A_3, B_3, C_3, D_3, \dots$ або $1_3, 2_3, 3_3, 4_3, \dots$

— Переміщене положення точок A, B або $1, 2$ позначають $\overline{A}, \overline{B}$ або $\overline{1}, \overline{2}$;

а двічі переміщене положення цих точок позначають $\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{B}}$ або $\overline{\overline{1}}, \overline{\overline{2}}$.

1.2. **Лінії** (прямі і криві) довільно розташовані відносно площин проєкцій, позначають строчними „маленькими” буквами латинського алфавіту, наприклад: буквами a, b, c, d, \dots

— Лінії рівня позначають: h -горизонталь, f -фронталь, p -профільна пряма.

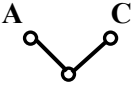
— Проєкції ліній відповідно:

горизонтальні: $a_1, b_1, c_1, d_1, \dots h_1, f_1, p_1, \dots$;

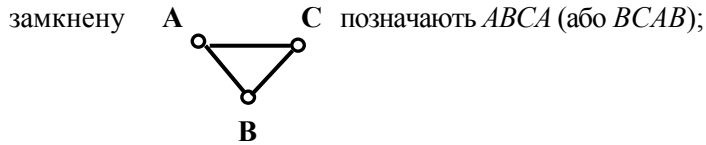
фронтальні: $a_2, b_2, c_2, d_2, \dots h_2, f_2, p_2, \dots$;

профільні: $a_3, b_3, c_3, d_3, \dots h_3, f_3, p_3, \dots$

— Відрізок прямої, виділений двома точками, позначають AB, EF або $1.2, 5.12$.

— Ламану лінію: розімкнену A  позначають ABC ;

B



1.3. **Площини** позначають прописними буквами грецького алфавіту, наприклад: $\Delta, \Sigma, P, \Omega, \dots$

Щоб підкреслити спосіб задання площини, вказують геометричні елементи, які визначають площину, наприклад: $\Delta(a||b)$ – площина Δ задана прямими a і b , які паралельні між собою.

— Сліди площин позначають, наприклад:

Δ_1 або h° – горизонтальний слід,

Δ_2 або f° – фронтальний слід,

Δ_3 або p° – профільний слід, площини Δ .

— Площини проекцій позначають:

P_1 – горизонтальна площина проекцій;

P_2 – фронтальна площина проекцій;

P_3 – профільна площина проекцій.

1.4. **Поверхні** позначають прописними буквами грецького алфавіту, наприклад:

Φ, X, Ψ, \dots яким додається індекс з першої букви (чи двох) назви поверхні, або без індексу наприклад:

Φ^H – поверхня циліндра,

Φ^K – поверхня конуса,

$\Phi^{c\phi}$ – поверхня сфери,

– Проекції поверхні відповідно:

Φ^K_1 – горизонтальна проекція поверхні конуса,

Φ^K_2 – фронтальна проекція поверхні конуса.

1.5. **Кути** нахилу прямих чи площин позначають строчними буквами грецького алфавіту, прийняті кути нахилу:

α – до горизонтальної площини проекції,

β – до фронтальної площини проекції,

γ – до профільної площини проекцій,

φ – кут між двома прямими чи площинами.

2. Знаки, які визначають відношення між геометричними образами:

Вид знака	Призначення знака	Приклади застосування знака в символічному запису дій
1	2	3
\subset або \supset	Належність одного геометричного образу іншому (менше належить більшому)	<ul style="list-style-type: none"> $A \subset \Sigma$ – точка A належить площині Σ; $\Sigma \supset A$ – площині Σ належить точка A.
\cap	Перетин геометричних образів	<ul style="list-style-type: none"> $l \cap \Sigma$ – пряма l перетинається з площиною Σ; $\Delta \cap \Sigma$ – площина Δ перетинається з площиною Σ.
\cup	З'єднання геометричних образів	<ul style="list-style-type: none"> $A \cup B$ – точка A з'єднується з точкою B;
\Rightarrow або \Leftarrow	Наслідок дії	<ul style="list-style-type: none"> $l \cap \Sigma \Rightarrow K$ – пряма l перетинається з площиною Σ і в наслідок цієї дії отримується точка K; $a \Leftarrow \Delta \cap \Sigma$ – пряма a отримана в наслідок перетину площини Δ з площиною Σ
\rightarrow	Перетворення (перехід, перезадання)	<ul style="list-style-type: none"> $\chi \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow \chi_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}$ – перехід від системи $\chi \frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ до системи $\chi_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}$; $\Sigma (a \cap b) \rightarrow \Sigma (h \cap f)$ – площина Σ задана двома прямими a і b, що перетинаються, перезадана двома лініями рівня h і f, що перетинаються.
$=$	Рівність	<ul style="list-style-type: none"> $A_1 B_1 = n.v. AB$ – горизонтальна проекція $A_1 B_1$ дорівнює натуральній величині AB
\perp	Перпендикулярність	<ul style="list-style-type: none"> $r \perp \Sigma$ – пряма r перпендикулярна площині Σ

\parallel	Паралельність	$a \parallel b$ пряма a паралельна прямій b .
$\not\parallel$	Мимобіжність	$c \not\parallel d$ – пряма c мимобіжна відносно прямої d
\sphericalangle або \wedge	Кут	$\sphericalangle a$ – кут a ; $b \sphericalangle d$ – кут між прямими b і d
	Прямий кут - графічне позначення на епюрах	a  b – пряма a розташована відносно прямої b під прямим кутом
$\nabla, \nparallel, \nparallel, \nparallel$	Заперечення	$c \nabla a \nparallel b \nparallel d \nparallel \Sigma$ – пряма c не перпендикулярна прямій a , яка не паралельна прямій b , що не перетинається з прямою d , що не належить площині Σ
\equiv	Збігання (співпадання)	$A_1 \equiv B_1$ горизонтальна проекція точки A злилась з горизонтальною проекцією точки B
\cup	Обертання	$A \cup i$ – точка A обертається навколо осі i
\oslash	Дотик	$a \oslash \Phi^{ky}$ – пряма a дотична до поверхні кулі Φ^{ky}
$ $	Відстань	$ A a $ – відстань від точки A до прямої a

3. Прийняті скорочення

- в.л.з.** – вертикальна лінія зв'язку;
- г.л.з.** – горизонтальна лінія зв'язку;
- г.-в.л.з.** – горизонтально-вертикальна лінія зв'язку;
- з.п.** – загальне положення (прямої або площини);
- г.п.** – горизонтальна проекція;
- ф.п.** – фронтальна проекція;
- н.в.** – натуральна величина;
- ГПП** – горизонтально проектуюча площина;
- ФПП** – фронтально проектуюча площина;
- ЛПП** – лінія перетину площин;
- ЛПП_о** – лінія перетину поверхонь;
- ЛНН** – лінія найбільшого нахилу;
- ЛП** – лінія перерізу;
- ГМ** – геометричні місця.

Вступ

Нарисна геометрія в своєму розвитку має значні коріння, які сягають глибокої давнини, де люди застосовували окремі прийоми зображень предметів на площині. Розвиток наук вимагав більш удосконалених методів і прийомів зображень просторових форм. З метою вирішення вимог, поставлених часом, в 1799 р. Гаспар Монж (1746 – 1818 рр.) французький військовий інженер, узагальнив досвід зображень і дав теоретичне обґрунтування методу.

Більш глибокий розвиток нарисної геометрії знайшов в працях російських вчених, таких, як Я. А. Ринін, В. О. Гордон, Н. Ф. Четверухін, С. О. Фролов, О. В. Бубенніков та інших, а також українських вчених, таких як В. Є. Михайленко, О. Т. Чалий, О. М. Крот, А. В. Павлов, В. В. Ванін, М. С. Гумен та інших.

Задачі нарисної геометрії:

- дати теоретичні основи методів побудови зображень просторових форм на площині, навчити будувати кресленик;
- розвинути здібності уявного відтворення просторової форми за її плоским зображенням, тобто читати кресленик;
- надати необхідний об'єм знань, для графічного розв'язку задач по складанню креслеників просторових форм та їх читання.

В.1. Методи проектування

Проекцією предмета зветься його зображення на площині, “відображене” на неї за допомогою проєктуючих променів. В залежності від способу проведення проєктуючих променів, найбільш поширеним проєктуванням є:

– *центральне та паралельне.*

В.1.1. Центральне проектування

Проектування зветься *центральним*, якщо всі проєктуючі промені проходять через одну і ту ж точку, яка зветься *центр (полюс) проектування*.

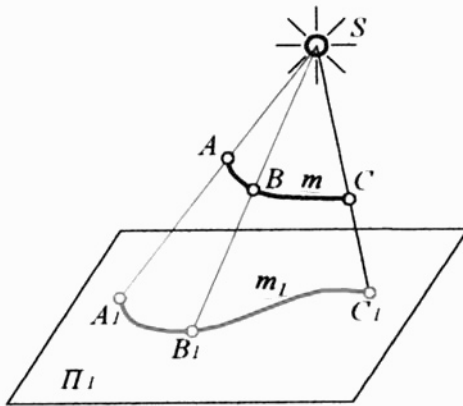


Рис. В-1

Нехай задані площина Π_1 і точка S . Приймаємо Π_1 за площину проєкцій, а S за центр проєктування, з якого виходять проєктуючі промені. Візьмемо, наприклад, m просторову криву лінію і за допомогою центрального проєктування на площині Π_1 буде отримано m_1 , яка є проєкцією m , що показано на рис. В-1.

Це виконується шляхом проведення проєктуючого променя з точки S через точку A належну m і далі цей промінь проходить до перетину з Π_1 , утворюючи в перетині з нею точку A_1 . Для отримання проєкцій всіх точок кривої m , з полюса S через кожну з них проводять окремі промені, які проходять далі до перетину з Π_1 при перетині з якою отримується m_1 центральну проєкцію m . Дві центральні проєкції точки A однозначно визначають її положення в просторі.

Цей метод переважно застосовується в архітектурі.

В.1.2. Паралельне проектування

Проектування зветься *паралельним*, якщо всі проєктуючі промені паралельні між собою і паралельні заданому напрямку проектування.

Нехай задано: s – напрямок проектування; Π_1 – площина проєкцій; m – об’єкт проектування;

якщо: s – неперпендикулярне Π_1 – проектування буде *косокутне*, s – перпендикулярне Π_1 – проектування буде *прямокутне*.

Для отримання проєкції точки A , належної m , необхідно через точку A провести паралельно заданому напрямку проєктування s проєктуючий промінь, при перетині цього променя з Π_1 утворюється точка A_1 , яка і є паралельною проєкцією точки A .

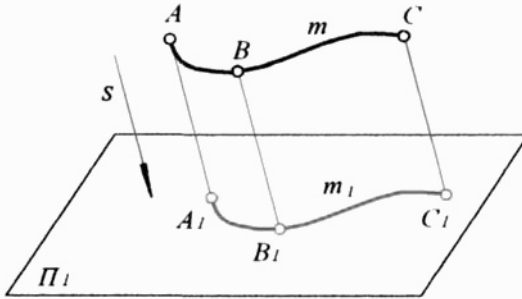


Рис. В-2

Для отримання паралельної проєкції m проводимо проєктуючі промені паралельно s через всі точки об'єкта, що наведено на рис. В-2.

Для отримання положення точки A (та всіх інших точок об'єкта) в просторі, необхідно мати не менше двох її паралельних проєкцій отриманих при різних напрямках проєктування.

Окремий випадок паралельного проєктування при якому напрямок проєктування s перпендикулярний площині проєкцій, називається *прямокутним*, або *ортогональним* проєктуванням.

Метод паралельного прямокутного проєктування застосовується для зображення геометричних фігур на площині в машинобудівних кресленнях.

В.2. Окремі властивості паралельного проєктування

Зображення проєкції об'єкта на площині в загальному випадку спотворене порівняно з дійсним. При проєктуванні між оригіналом об'єкта і його проєкцією устанавлюються проєктувальні взаємозв'язки:

- проєкція точки є точка;
- проєкція прямої є пряма;
- якщо точка належить лінії, то проєкція точки належить однойменній проєкції лінії;
- якщо точка ділить відрізок в якомусь співвідношенні, то проєкція цієї точки ділить проєкцію відрізка в тому ж співвідношенні;
- відрізок прямої, який паралельний площині проєкцій, проєктується на цю площину в натуральну величину;
- відрізок прямої, який паралельний напрямку проєктування, проєктується на площину проєкцій у вигляді точки;
- однойменні проєкції відрізків паралельних прямих – паралельні між собою і їх довжини знаходяться в такому ж співвідношенні, як і довжини відрізків, що проєктуються.

В.3. Метод Монжа

Для забезпечення виразності, точності і зручності вимірювання зображень просторових об'єктів на площині при складанні технічних креслеників, Гаспар Монж запропонував свій метод виконання креслення, при якому кресленик складається з двох, або більше прямокутних паралельних проєкцій об'єкта на дві, або більше взаємно перпендикулярні площини, суміщені з площиною кресленика.

Епюр – кресленик, складений з двох або трьох чи більше зв'язаних між собою ортогональних проєкцій геометричної фігури.

В.4. Площини проєкцій і осі координат

Припустимо, що в просторі проведено горизонтальну площину, – увесь простір вона поділить на дві частини – верхню і нижню. Другу площину розташуємо фронтально перед взірцем і перпендикулярно до першої площини, – при такому діленні верхньої і нижньої частини, простір буде розділено на чотири частини. Третю площину розташують профільно відносно взірця, перпендикулярно до першої і другої площини. Третя площина ділить навпіл всі попередньо отримані частини простору. Таким чином, три площини ділять простір на вісім частин – октантів, що і наведено на рис. В-3. Кожен октант є прямокутним тригранником, грані якого, частини площин, прийняті надалі за площини проєкцій, ці грані називають полами площини, або площинами проєк-

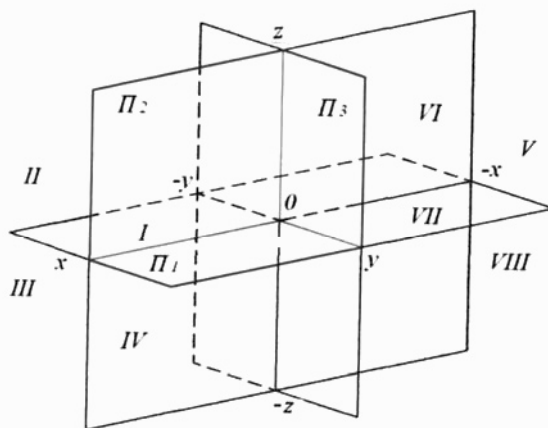


Рис. В-3

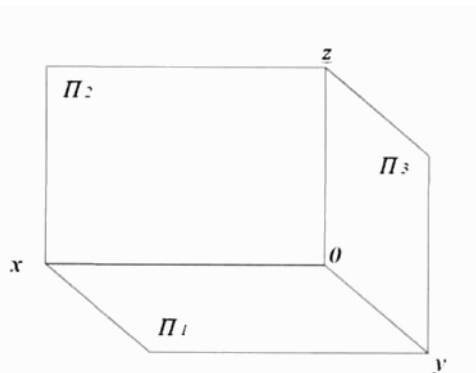


Рис. В-4

цій. Лінії перетину площин проєкцій називають осями координат. Прийmemo, що:

P_1 – горизонтальна площина проєкцій;

P_2 – фронтальна площина проєкцій;

P_3 – профільна площина проєкцій;

$$P_1 \perp P_2 \perp P_3;$$

$$P_1 \cap P_2 \Rightarrow \text{вісь } Ox;$$

$$P_1 \cap P_3 \Rightarrow \text{вісь } Oy;$$

$$P_2 \cap P_3 \Rightarrow \text{вісь } Oz;$$

Працювати, в подальшому, будемо переважно з об'єктами, розташованими в першому октанті (рис. В-4).

Розділ I

Паралельність і перпендикулярність

Тема 1 Точка

1.1. Зображення елементів простору на епюрі

Розглядаючи просторовий об'єкт, наприклад, багатогранник, для його відображення проєкцій треба побудувати проєкції кожної його грані, а для побудови окремої грані треба побудувати кожну сторону грані, якими є відрізки прямих; а для побудови проєкції відрізка треба вміти будувати проєкції точок. Таким чином, задавши одну точку в просторі отримаємо проєкції однієї вершини об'єкта. З'єднавши з іншою заданою вершиною, – отримуємо проєкцію відрізка ребра об'єкта. Побудувавши проєкції трьох та більше ребер, – отримуємо проєкцію грані об'єкта. Побудувавши проєкції декількох граней, – отримуємо проєкції цілого об'єкта. Тому розгляд побудови проєкції об'єкта (частки простору) розпочнемо з розгляду побудови проєкції точки.

1.2. Координати точки та її проєкції

Нехай задано перший октант і точка A в його просторі. Застосовуємо прямокутний паралельний метод проєктування.

Коли проєктуючі промені направлені зверху вниз і перпендикулярні до Π_1 , то один з променів проходить через точку A і йде далі до перетину з Π_1 і при перетині з нею утворюється точка A_1 . Частина променя від точки A до A_1 наче дротик, зветься **висотою точки**, яка визначає відстань від точки A до площини Π_1 , а A_1 – горизонтальна проєкція точки A .

Коли проєктуючі промені направлені від взірця перпендикулярно до Π_2 , один промінь проходить через точку A і йде далі до перетину з Π_2 і при пере-

тині з нею утворюється точка A_2 . Частина променя від точки A до A_2 (наче другий дрітик) зветься **глибина точки** і вона визначає відстань від точки A до площини Π_2 , а A_2 – фронтальна проекція точки A .

Коли проектуючі промені перпендикулярні до Π_3 , один промінь проходить через точку A і далі йде до перетину з Π_3 , і при перетині з нею утворюється точка A_3 . Частина променя від точки A до A_3 (наче третій дрітик) зветься **широта точки** і вона визначає відстань від точки A до площини Π_3 , а A_3 – профільна проекція точки A .

Отримані три координати, які наче дротики, утримують точку A в просторі першого октанта.

Знову повернемося до проектуючих променів, з допомогою яких на площини проєкцій спроектується не тільки точка A , а й її координати (дротики).

При цьому (на рис. 1-1 показано):

- на Π_1 спроектуються координати широти (ш) і глибини (г);
- на Π_2 спроектуються координати висоти (в) і широти (ш);
- на Π_3 спроектуються координати висоти (в) і глибини (г).

Таким чином, отримаємо в першому октанті: точку A і її проєкції A_1, A_2, A_3 ; три координати точки B, Γ і Ш та їх проєкції, які видно на просторовому зображенні:

A – точка в просторі;

A_1 – горизонтальна проєкція точки A ;

A_2 – фронтальна проєкція точки A ;

A_3 – профільна проєкція точки A ;

AA_1 – висота (в) точки A ;

AA_2 – глибина (г) точки A ;

AA_3 – широта (ш) точки A ;

A_x, A_y, A_z – точки сходу проєкцій координат точки на осях.

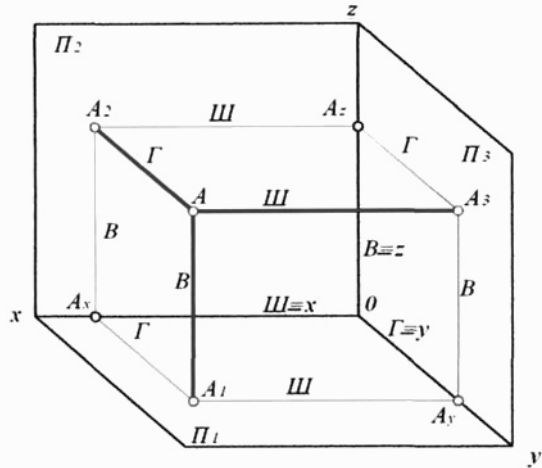


Рис. 1-1

Координата $Ш$ = координаті $Ox = OA_x$;
 Координата Γ = координаті $Oy = OA_y$;
 Координата B = координаті $Oz = OA_z$.

1.3. Утворення епюра точки

Надалі, щоб перейти від просторового зображення до епюра виконується найважливіша “операція” нарисної геометрії. Умовно, наче „ножницями” розрізаємо навпіл вісь y разом з точкою A_y до точки O . Одна половина осі $y - y_1$ та точки $A - A_{y1}$ залишається з Π_1 , друга половина осі $y - y_3$ та $A - A_{y3}$ залишається з Π_3 . Площину Π_1 , разом з проєкціями $A_1, Ш$ і Γ , обертаємо навколо осі Ox до суміщення Π_1 з Π_2 , а площина Π_3 разом з проєкцією A_3, B і Γ , обертаємо навколо осі Oz до суміщення Π_3 з Π_2 .

Точка A разом з „дротиками” – координатами умовно прибирається з поля зору візця, а розгорнуті площини Π_1 та Π_3 до співпадання з Π_2 суміщається з аркушем і отримуємо зображення, наведене на рис. 1-2.

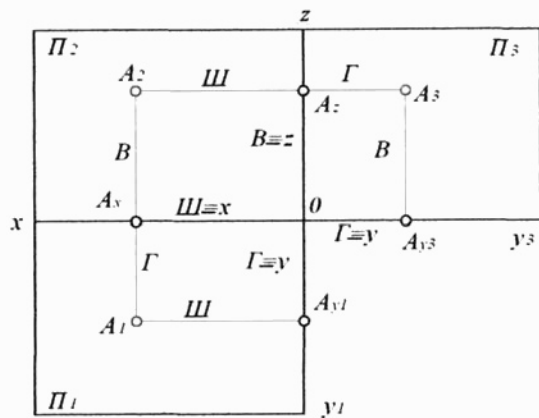


Рис. 1-2

$A_1 A_2 = A_1 A_x + A_x A_2 = \Gamma + B = A_1 A_2$ – і називається **вертикальна лінія зв'язку** (В.Л.З). $\perp Ox$;

$A_2 A_3 = A_2 A_z + A_z A_3 = Ш + \Gamma = A_2 A_3$ – і називається **горизонтальна лінія зв'язку** (Г.Л.З). $\perp Oz$;

$A_1 A_3 = A_1 A_{y1} + A_{y1} A_3 = Ш + B = A_1 A_3$ – і називається **горизонтально-вертикальна лінія зв'язку** (Г-В.Л.З). $\perp Oy$.

Беручи до уваги, що прямокутні обмеження розгорнутих площин проєкцій Π_1, Π_2, Π_3 є умовним, ці площини можуть бути продовжені безмежно, то отримане зображення полів площин розділяємо осями координат, це дає можливість перейти до наступного зображення на рис. 1-3.

Отримане зображення є **епюром точки** A спроектованої на три площини проєкцій. Саму точку A , задану трьома координатами записують визначником $A(X, Y, Z)$.

Враховуючи, що на епюрі OA_z = координаті Z , а $A_xA_2 = OA_z$, то $A_xA_2 = Z^A$, з тих же міркувань: $A_xA_1 =$ координаті Y^A , а $OA_x = X^A$, то від епюра з трьома полами зображень є можливість перейти до епюра з двома полами, розділених віссю Ox , що дає скорочення обся-

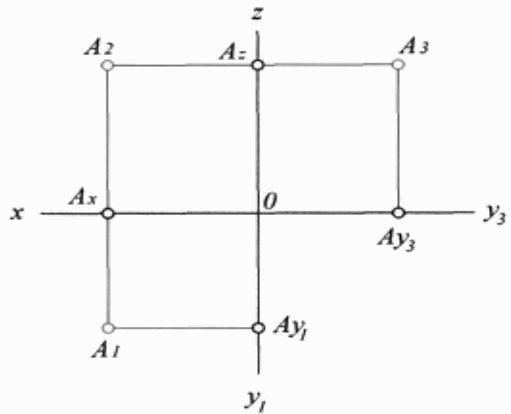


Рис. 1-3

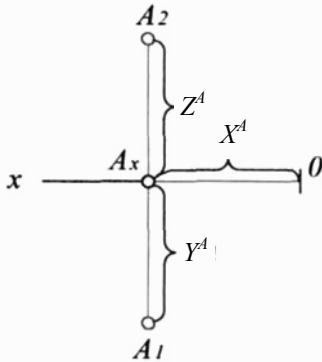


Рис. 1-4

гу побудови, при такому виконанні епюр має вид (рис. 1-4):

Це зображення і є епюр точки A , спроектованої на дві площини проєкцій Π_1 та Π_2 . Над віссю Ox є половина площини Π_2 , а під віссю Ox є половина площини Π_1 .

$OA_x =$ координаті X ;
 $A_xA_1 =$ координаті Y ;
 $A_xA_2 =$ координаті Z .

Коли є потреба повернутись від епюра рис. 1-4 до епюра точки, спроектованої на три площини (на Π_1, Π_2, Π_3), це можливо виконати одним з нижченаведених методів.

1.4. Методи побудови третьої проєкції точки за її двома даними

1.4.1. Метод переносу проєкцій (рис. 1-5):

Від точки O вниз пройде вісь y_1 , а в право від неї вісь y_3 , вгору від O пролягає вісь z . З точки A_2 проводимо горизонтальну лінію зв'язку, перпендикулярну Oz . З A_1 проводимо горизонтальну частину (горизонтально-вертикальної лінії зв'язку), отримуємо A_{y1} .

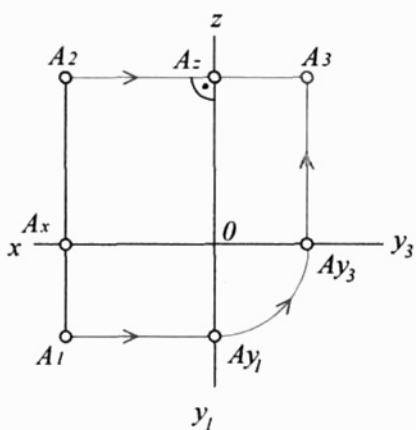


Рис. 1-5

1.4.2. Метод координатний (рис. 1-6):

Виконуються побудови осі y_1 , y_3 , z та з A_2 проводиться горизонтальна Л.З. як наведено в попередньому методі. Розмір координати $Y = Ax A_1$ відкладаємо від A_z на горизонтальній Л.З. і отримуємо A_3 .

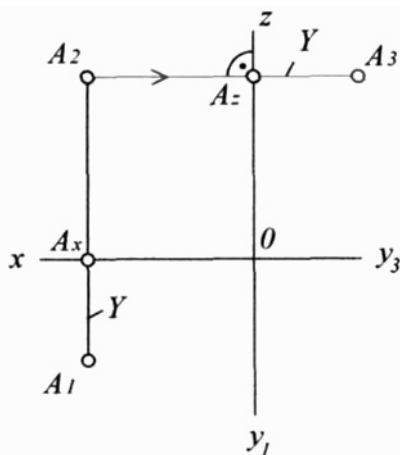


Рис. 1-6

1.4.3. Метод із застосуванням сталої прямої кресленика (рис. 1-7):

Побудувавши осі y_1 , y_3 , z та з A_2 провівши горизонтальну Л.З. $\perp Oz$, проводимо з точки O сталу пряму кресленика під кутом 45° до y_1 . З A_1 проводимо горизонтальну частину Л.З. до перетину з сталою із точки перетину проводимо вертикальну частину Г-В Л.З. до перетину з Г.Л.З., проведеною з A_2 , отримана точка перетину є A_3 .

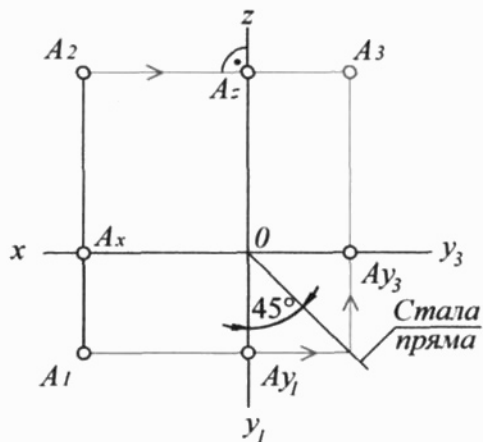


Рис. 1-7

Циркулем, радіус якого дорівнює OA_{y_1} , з точки O як із центра, точку A_{y_1} , переносимо на y_3 , отримуємо A_{y_3} , з якої проводимо перпендикулярно y_3 вертикальну частину горизонтально – вертикальної лінії зв'язку і її точка перетину з горизонтальною Л.З. є шукана A_3 – профільна проекція точки A .

1.5. Розв'язання прямої задачі Н.Г. (побудова кресленика)

Припустимо, що конструктор виконує проєкцію об'єкта, в конструкції якого одна з характерних точок – точка A має координати в мм $X = 30$; $Y = 10$; $Z = 20$. Необхідно побудувати епюр точки A .

Розв'язок: враховуючи, що визначник A $(30, 10, 20)$, вибираємо масштаб виміру: 10, будується вісь Ox (рис. 1-8). Від початку координат O відкладається координата $X = 30$ мм, отримуємо точку A_x .

Через $A_x \perp Ox$ проводимо В.Л.З., на якій від A_x вниз відкладаємо координату $Y = 10$, отримуємо A_1 , а вгору від A_x відкладаємо координату $Z = 20$ і отримуємо A_2 . Отримано епюр точки A заданої координатами, – це і є розв'язок прямої задачі, яку виконує конструктор.

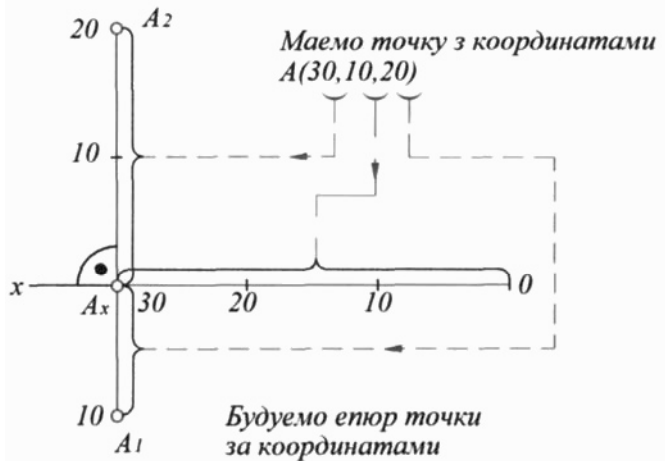


Рис. 1-8

1.6. Розв'язання зворотної задачі Н.Г. (читання кресленика)

Припустимо, що технолог отримав кресленик і по зображенню просторового об'єкта, необхідно визначити координати точки A його конструкції.

Визначаємо на епюрі (рис. 1-9): $OA_x = 30 = X$; $A_xA_1 = 10 = Y$; $A_xA_2 = 20 = Z$.

Це і є координати точки A $(30, 10, 20)$.

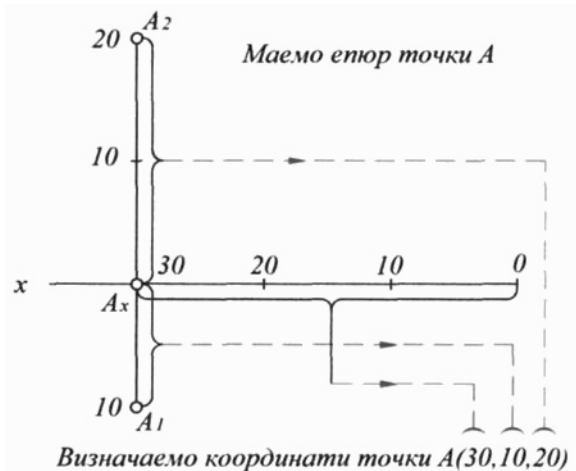


Рис. 1-9

По епіюрному зображенню точки A визначено її координати, розв’язана зворотна задача Н.Г., яку виконує технолог.

1.7. Належність точок елементам тригранного кута (першого октанта)

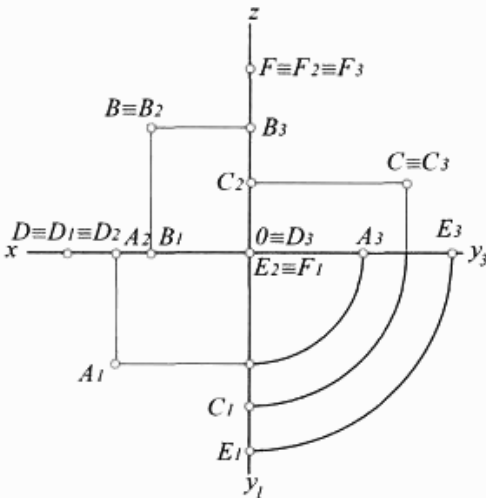


Рис. 1-10

Точка з координатами	Належність точки
$A (X, Y, Z = 0)$	$\bullet A \subset \Pi_1$
$B (X, Y = 0, Z)$	$\bullet B \subset \Pi_2$
$C (X = 0, Y, Z)$	$\bullet C \subset \Pi_3$
$D (X, Y = 0, Z = 0)$	$\bullet D \subset X$
$E (X = 0, Y, Z = 0)$	$\bullet E \subset Y$
$F (X = 0, Y = 0, Z)$	$\bullet F \subset Z$

Коли точка з трьох координат має одну координату, яка дорівнює нулю, то ця точка належить площині, а коли точка має дві координати, які дорівнюють нулю, то вона належить осі координат. (рис. 1-10).

1.8. Задачі для розв’язку

1.8.1. Задачі для позааудиторного розв’язку

Задача №1-1. Записати відповіді на запитання (за зразком першого).

1	Умова належності точки A площині Π_1 .	$Z^A = 0$
2	Якою координатою визначається відстань від точки до площини Π_2 ?	
3	Умова належності точки B осі y .	
4	За якої умови точки A і B будуть рівновіддалені від площини Π_3 ?	
5	До якої з площин проєкцій найближче розміщено точку $K (50; 30; 20)$?	

6	Якими координатами визначається фронтальна проекція точки?	
7	Якими координатами визначається горизонтальна проекція точки?	
8	За якої умови точка A буде рівновіддалена від площин проєкцій Π_1, Π_2 і Π_3 ?	

Задача № 1-2. Задано проєкції точок A, B, C, D, E, F, L, M . (Рис. 1-11).

Необхідно:

1. Позначити на рисунку координати кожної точки (див. приклад).
2. Визначити і записати положення точок відносно площин і осей проєкцій.
3. Побудувати третю проєкцію кожної точки.

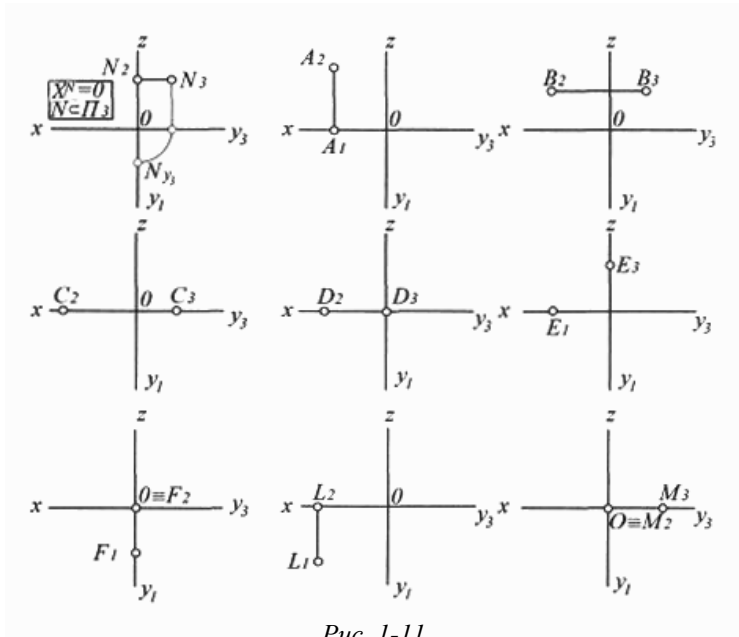


Рис. 1-11

Задача № 1-3. Побудувати проєкції точок A, B, C і D так, щоб точка A належала площині Π_2 ; B – площині Π_1 ; C – осі Ox ; D – була рівновіддалена від площин проєкцій Π_1, Π_2, Π_3 . (Значення координат беруться довільними). (Рис.1-12)

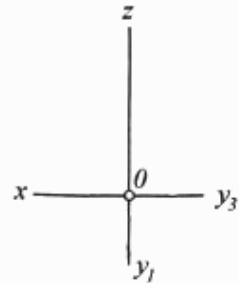


Рис. 1-12

1.8.2. Задачі для аудиторного розв'язку

Задача № 1-4. Задано точки A, B, C, D . (Рис.1-13). Побудувати:

1. Точку E , розміщену під точкою A на відстані 15 мм;
2. Точку N , розміщену над точкою B на відстані 20 мм;
3. Точку M , розміщену за точкою C на відстані 10 мм;
4. Точку K , розміщену перед точкою D на відстані 5 мм.

Виміряти і записати координати точок.

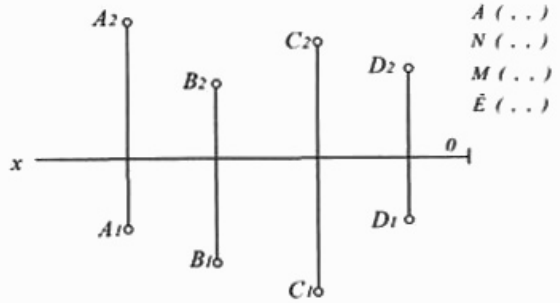


Рис. 1-13

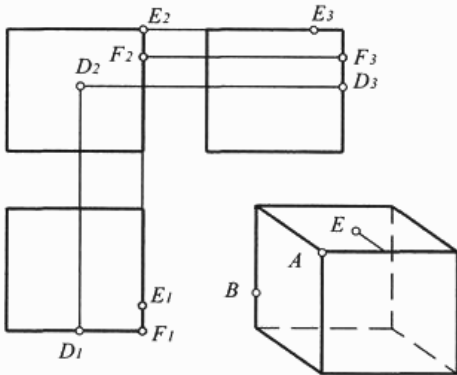


Рис. 1-14

Задача № 1-5. Побудувати:

- а) за наочним зображенням точок A, B і C їх проекції;
- б) за трьома проекціями точок D, E і F їх наочні зображення. (Рис.1-14).

Задача № 1-6. Задано паралелепіпед з точкою A всередині (рис.1-15). Побудувати:

1. Точку B , симетричну точці A відносно верхньої грані.
2. Точку C , симетричну точці A відносно передньої грані.
3. Точку D , симетричну точці A відносно правого верхнього ребра.

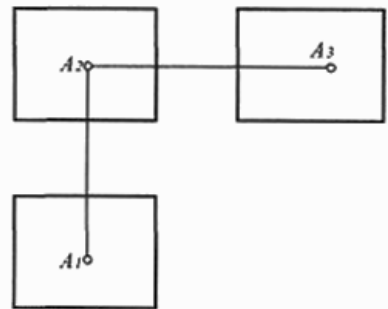


Рис. 1-15

Запитання для самоконтролю

1. В чому різниця між центральним і паралельним методами проектування?
2. Чи може паралельна проекція прямої мати вид точки?
3. Якщо точка належить прямій лінії, то як взаємно розташовані будуть їх проекції?
4. Що таке „метод Монжа”?
5. Які площини утворюють перший октант простору?
6. Чим відрізняється утворення осі x та осі y ?
7. Які координати визначають розташування точки в просторі?
8. Яким чином просторове розташування точки в першому октанті відтворюється на площині (кресленику)?
9. З чого складаються лінії зв'язку?
10. Що таке вертикальна лінія зв'язку?
11. Як можна побудувати профільну проекцію точки по її горизонтальній і фронтальній проекції?
12. В чому спільне рішення прямої та зворотної задачі нарисної геометрії, та чим вони відрізняються?
13. Умова належності точки до площини проекцій, та до осі координат?
14. Які координати на епюрі визначають фронтальну та горизонтальну проекції точки?

Тема 2 Пряма

2.1. Положення прямих відносно площин проєкцій

Пряма може бути задана відрізком, або променем. По відношенню до площин проєкцій пряма може займати:

– загальне положення;

– окреме положення: пряма *рівня*, або пряма *проектуюча*.

Орієнтація прямої відносно площин проєкцій визначається її кутами нахилу: α – до площини Π_1 ; β – до площини Π_2 , γ – до площини Π_3 .

2.2. Пряма загального положення

Це пряма не паралельна ні одній з площин проєкцій. Проекції прямої (її відрізка) не паралельні і не перпендикулярні осям координат. Кожна з проєкцій по величині менша від самого відрізка. A_1B_1 і A_2B_2 не паралельні осі Ox і A_1B_1 та A_2B_2 менше натуральної величини AB (рис. 2-1). **Точка належить**

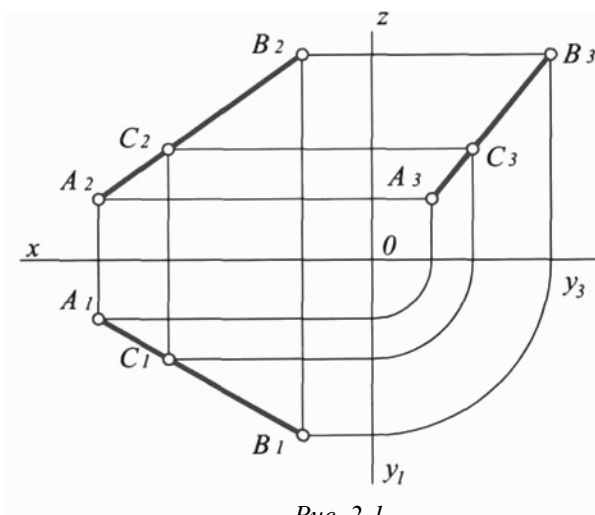


Рис. 2-1

прямої, якщо її проєкції належать однойменним проєкціям цієї прямої і знаходяться між собою в проєкційному зв'язку (рис. 2-1). Точка C належить відрізку AB , якщо проєкції точки C належать однойменним проєкціям відрізка AB , тобто: якщо

• $C \subset AB$,

то:

• $C_1 \subset A_1B_1$;

• $C_2 \subset A_2B_2$;

• $C_3 \subset A_3B_3$ при цьому:

$C_1C_2 \perp Ox$, а $C_2C_3 \perp Oz$.

2.3. Пряма рівня

Така пряма, паралельна одній площині проєкцій. Своїм розташуванням відносно площин проєкцій, прямі поділяються на: горизонтальні, фронтальні та профільні прямі. Якщо точки прямої мають координату:

- Z – сталу – це горизонталь;
- Y – сталу – це фронталь;
- X – сталу – профільна пряма.

2.3.1. Горизонтальна пряма

Така пряма паралельна горизонтальній площині проєкцій Π_1 (рис. 2-2).

Пряма задана відрізком $AB \parallel \Pi_1$, на епюрі:

- $A_1B_1 = \text{н. в. } AB, A_2B_2 \parallel Ox;$
- $Ox \wedge A_1B_1 = \angle \beta = AB \wedge \Pi_2$
- $Oy_1 \wedge A_1B_1 = \angle \gamma = AB \wedge \Pi_3$
- $AB \wedge \Pi_1 = \angle \alpha = 0^\circ,$

тобто: фронтальна проєкція A_2B_2 паралельна осі Ox , а A_3B_3 паралельна y_3 , при цьому величина A_2B_2 і A_3B_3 менші н. в. AB . (н.в. – натуральна величина).

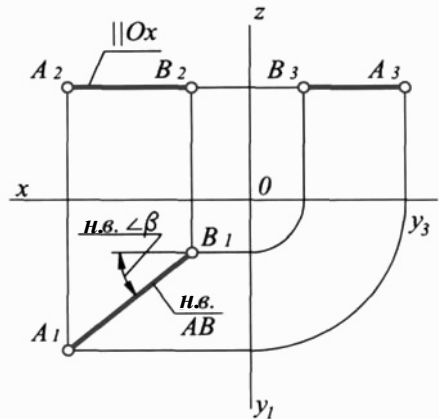


Рис. 2-2

2.3.2 Фронтальна пряма

Така пряма паралельна фронтальній площині проєкцій Π_2 (рис. 2-3).

Відрізок $CD \parallel \Pi_2$, на епюрі:

- $C_2D_2 = \text{н.в. } CD; C_1D_1 \parallel Ox;$
- $Ox \wedge C_2D_2 = \angle \alpha = CD \wedge \Pi_1;$
- $Oz \wedge C_2D_2 = \angle \gamma = CD \wedge \Pi_3;$
- $CD \wedge \Pi_2 = \angle \beta = 0^\circ.$

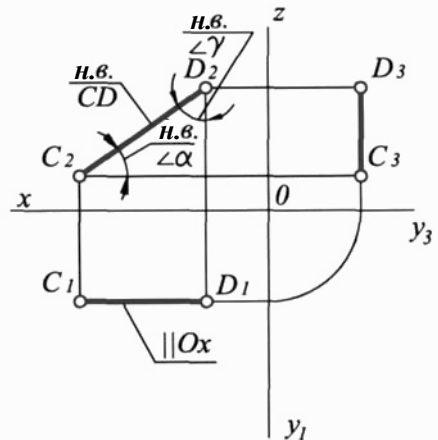


Рис. 2-3

2.3.3. Профільна пряма

Така пряма паралельна профільній площині проекцій Π_3 (рис. 2-4).

Відрізок $EF \parallel \Pi_3$, на епюрі:

$$E_1F_1 \text{ і } E_2F_2 \perp O_x;$$

$$E_3F_3 = \text{н.в. } EF;$$

$$Oz \wedge E_3F_3 = \angle \beta = EF \wedge \Pi_2;$$

$$Oy_3 \wedge E_3F_3 = \angle \alpha = EF \wedge \Pi_1$$

$$EF \wedge \Pi_3 = \angle \gamma = 0^\circ.$$

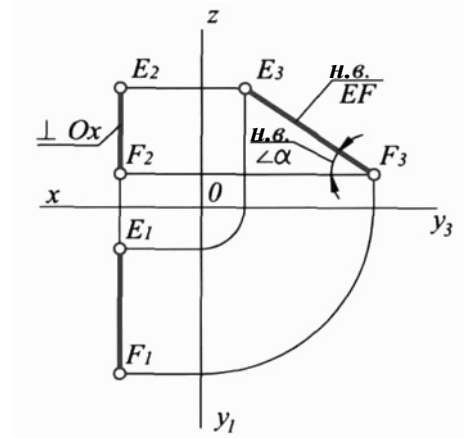


Рис. 2-4

ВИСНОВКИ СТОСОВНО ПРЯМИХ РІВНЯ

– Якщо відрізок прямої паралельний одній з площин проекцій, то він на цю площину проектується в натуральну величину, а кути, які ця проекція утворює з відповідними осями, дорівнюють натуральній величині кутів нахилу відрізка до інших двох площин проекцій.

– Якщо у прямої постійна одна біжуча координата, то така пряма зветься прямою рівня.

2.4. Прямі проектуючі

Такі прямі перпендикулярні до однієї площини проекцій (при такому розташуванні ці прямі будуть паралельні двом іншим площинам проекцій). Проектуюча пряма зливається з проектуючим променем.

Проектуючі прямі бувають:

- горизонтально проектуюча $\perp \Pi_1$, в неї будь-яка точка має координати X, Y – постійні;
- фронтально проектуюча $\perp \Pi_2$, в неї координати X, Z – постійні;
- профільно проектуюча $\perp \Pi_3$, в неї координата Y, Z – постійна для будь-якої її точки.

2.4.1. Горизонтально проектуюча пряма

Така пряма перпендикулярна до горизонтальної площини проєкцій Π_1 (рис. 2-5).

Відрізок $AB \perp \Pi_1$, на епюрі:

$$A_2B_2 = \text{н.в. } AB = A_3B_3;$$

$$A_2B_2 \perp Ox; A_3B_3 \perp Oy_3;$$

$$Ox \wedge A_2B_2 = AB \wedge \Pi_1 = \angle \alpha = 90^\circ;$$

$$AB \wedge \Pi_2 = \angle \beta = 0^\circ;$$

$$AB \wedge \Pi_3 = \angle \gamma = 0^\circ,$$

тобто: його горизонтальна проєкція A_1B_1 відтворена у вигляді точки, так як точки A і B зливаються з одним проектуючим променем \perp до Π_1 . Фронтальна проєкція A_2B_2 розташована \perp до Ox , а $A_3B_3 \perp$ до Oy_3 . Величина A_2B_2 і A_3B_3 дорівнює натуральній величині відрізка AB . Кут між Ox та $A_2B_2 = 90^\circ$ дорівнює $\angle \alpha =$ куту нахилу AB до Π_1 .

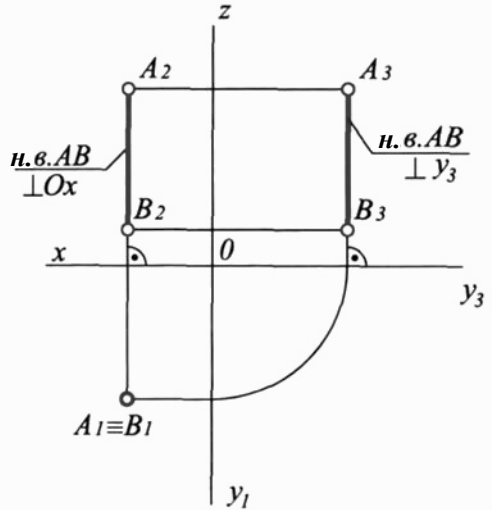


Рис. 2-5

2.4.2. Фронтально проектуюча пряма

Така пряма перпендикулярна до фронтальної площини проєкцій Π_2 (рис. 2-6).

Відрізок $CD \perp \Pi_2$ на епюрі: фронтальна проєкція його – точка,

$$C_2 \equiv D_2; C_1D_1 = \text{н.в. } CD = C_3D_3;$$

$$C_1D_1 \perp Ox; C_3D_3 \perp Oz;$$

$$Ox \wedge C_1D_1 = CD \wedge \Pi_2 = \angle \beta = 90^\circ;$$

$$CD \wedge \Pi_1 = \angle \alpha = 0^\circ;$$

$$CD \wedge \Pi_3 = \angle \gamma = 0^\circ.$$

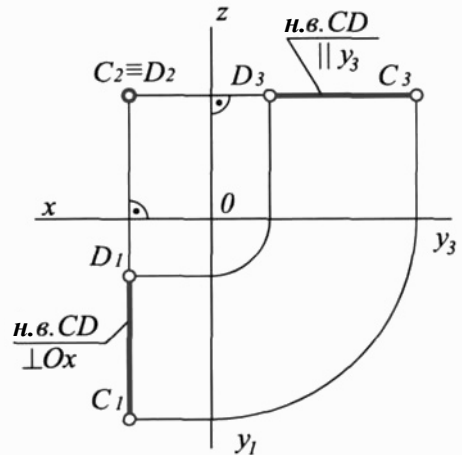


Рис. 2-6

2.4.3. Профільно проектуюча пряма

Така пряма перпендикулярна до профільної площини проєкцій Π_3 (рис. 2-7).

Відрізок $EF \perp \Pi_3$ на епюрі: профільна проєкція його – точка, $E_3 \equiv F_3$;

$$E_1F_1 \parallel E_2F_2 \parallel Ox;$$

$$Oz \wedge E_2F_2 = EF \wedge \Pi_3 = \angle \gamma = 90^\circ;$$

$$EF \wedge \Pi_1 = \angle \alpha = 0^\circ;$$

$$EF \wedge \Pi_2 = \angle \beta = 0^\circ.$$

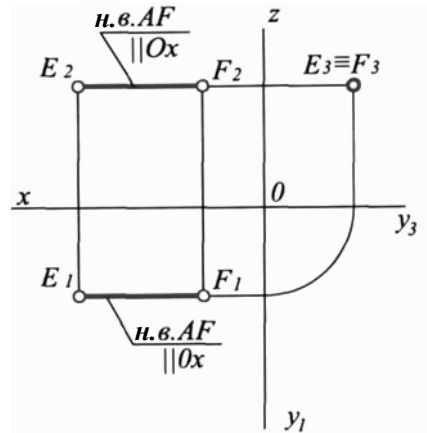


Рис. 2-7

ВИСНОВОК СТОСОВНО ПРОЕКТУЮЧИХ ПРЯМИХ:

– Якщо відрізок прямої перпендикулярний площині проєкцій, то він проєктується на цю площину у вигляді точки, а його дві інші проєкції розташовані паралельно (або перпендикулярно) відповідним осям координат і за розміром ці дві проєкції дорівнюють натуральній величині відрізка.

2.5. Визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення і кутів нахилу його до площин проєкцій

2.5.1. Метод прямокутного трикутника

Кут нахилу прямої до горизонтальної площини проєкцій є кут нахилу її відрізка AB до Π_1 , який дорівнює куту нахилу AB до його проєкції A_1B_1 на цю площину і $\epsilon \angle \alpha$.

Зображення задачі по визначенню $\angle \alpha$, та її розв'язку наведено на просторовому зображенні (рис. 2-8). Для визначення $\angle \alpha$ проведемо з точки B пряму $BC \parallel B_1A_1$, отриманий $\triangle ABC$ – прямокутний,

$BB_1 \parallel AA_1$ – як проєктуючі промені паралельні між собою і перпендикулярні до Π_1 .

$BC \parallel B_1A_1$; BB_1 – висота точки $B = Z^B$, AA_1 – висота точки $A = Z^A$.

$Z^A - Z^B = \Delta Z = AC$ – різниця висот точок A і B .

В прямокутного трикутника ABC відомі два катета: $BC=B_1A_1$ і $AC = \Delta Z$, гіпотенуза прямокутного трикутника є натуральна величина AB , а кут $\angle ABC = \angle AMA_1 = \angle \alpha$.

Відповідно, відрізок AB – це гіпотенуза прямокутного трикутника, у якого один катет-проекція дорівнює проекції відрізка на площину, а другий катет дорівнює різниці відстаней кінців відрізка до цієї площини проекцій, а натуральна величина кута нахилу відрізка до цієї площини проекцій є кут між гіпотенузою трикутника та його катетом – проекцією.

Побудова натуральної величини AB та його кутів нахилу до площин проекцій наведена на епюрі (рис. 2-9).

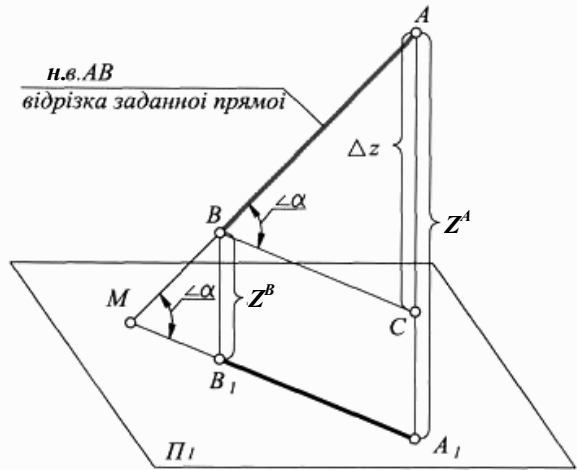


Рис. 2-8

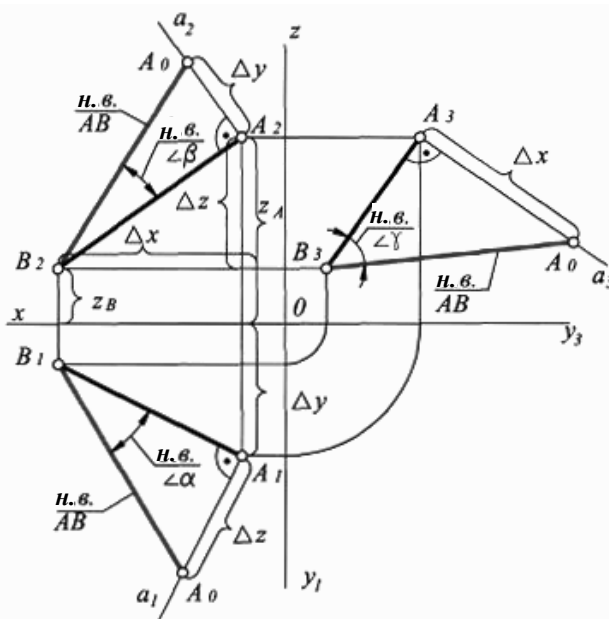


Рис. 2-9

Для визначення н.в. AB і $\angle \alpha$:

– A_1B_1 – приймаємо за катет;

– з точки A_1 проводиться допоміжна пряма $a_1 \perp A_1B_1$;

– на прямій a_1 від точки A_1 відкладається ΔZ , визначена на полі Π_2 . $\Delta Z = Z^A - Z^B$. Отриманий трикутник $A_1A_0B_1$, в якого A_0B_1 – натуральна величина AB , $\angle A_0B_1A_1 = \angle \alpha$.

Для визначення н.в. AB і $\angle \beta$:

– A_2B_2 – один катет;

– ΔY (що визначається на полі Π_1) – другий катет;

$\Delta A_2B_2A_0$ в якого $A_0B_2 =$ н.в. AB , $\angle A_0B_2A_2 = \angle \beta$.

Для визначення $\angle \gamma$ – будується трикутник на полі Π_3 , а ΔX беруть з Π_2 .

Для визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення, заданого своїми проекціями, необхідно побудувати прямокутний трикутник, у якого один катет є проекція відрізка на одну з площин проєкцій, а другим катетом є різниця відстаней кінців відрізка до цієї площини, гіпотенуза такого трикутника дорівнює натуральній величині відрізка.

Так, якщо визначається натуральна величина відрізка та кут α його нахилу до Π_1 , то горизонтальна проєкція A_1B_1 приймається за один катет (катет-проєкція) прямокутного трикутника, а другий його катет треба взяти як ΔZ – різницю висот його кінців, тобто $Z^A - Z^B = \Delta Z$ (рис. 2-8).

При визначенні н.в. AB і $\angle \beta$, A_2B_2 – один катет, а ΔY визначена на Π_1 є другим катетом. Натуральна величина відрізка визначається як гіпотенуза побудованого прямокутного трикутника.

Кут між натуральною величиною відрізка AB – гіпотенузою і катетом-проєкцією дорівнює куту нахилу відрізка до площини проєкцій (до тієї площини проєкцій, на якій проєкція відрізка прийнята за катет-проєкцію прямокутного трикутника).

Приклад 2-1:

Дано: відрізок $AB(A_1B_1, A_2B_2)$, (рис. 2-10):

Визначити: д.в. AB та $\angle \alpha$.

Розв'язок (рис. 2-11):

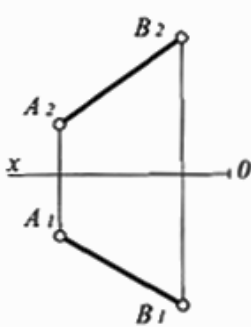


Рис. 2-10

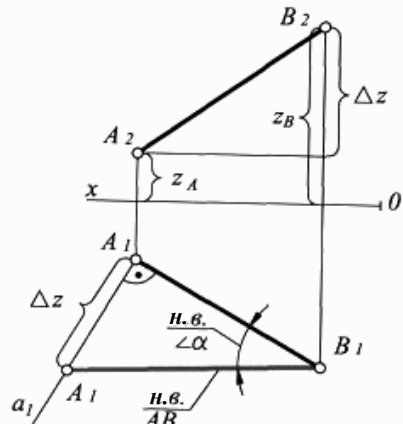


Рис. 2-11

Розв'язок виконується за допомогою методу прямокутного трикутника. A_1B_1 приймається за один катет. З точки A проводять пряму a_1 під прямим кутом до A_1B_1 . На полі Π_2 визначають $\Delta Z = Z^A - Z^B$. Від точки A_1 на a_1 відкладаємо ΔZ і отримуємо точку A_0 , яку з'єднуємо з точкою B_1 . Отримуємо $\Delta A_1B_1A_0$, в якого A_0B_1 – гіпотенуза є натуральною величиною AB , а кут $A_1B_1A_0$ є натуральною величиною кута α – кут нахилу AB до Π_1 .

Якби треба було визначити н.в. AB і $\angle \beta$, то за катет-проекцію було б прийнято A_2B_2 , а другий катет мав би величину ΔY , яка визначається на Π_1 (рис. 2-11-а).

Для визначення н.в. AB і $\angle \gamma$ за катет-проекцію приймаємо A_3B_3 , а другий катет дорівнює Δx , яка визначається на Π_2 (рис. 2-11-б).

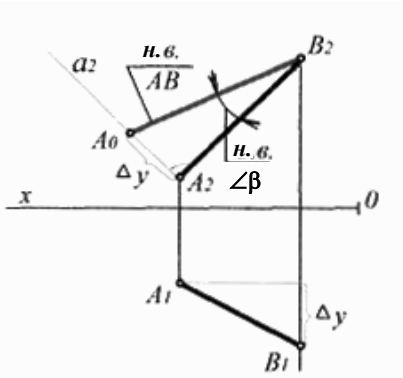


Рис. 2-11, а

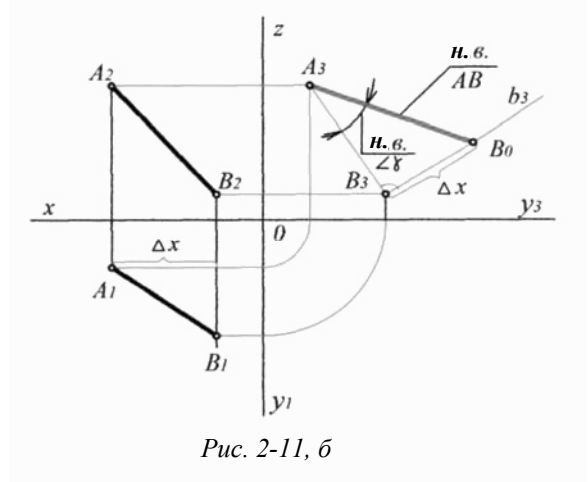


Рис. 2-11, б

2.5.2. Метод Монжа (показано на рис. 2-12)

Задано: відрізок AB (A_1B_1, A_2B_2): $A_1B_1 - z$ – горизонтальна проекція;

$A_2B_2 - \phi$ – фронтальна проекція.

Визначити: н.в. AB , $\angle \alpha$, $\angle \beta$.

Розв'язок: На полі Π_1 від точки 2 ($B_12 = \Delta Y$) відкладаємо $\Phi = A_2B_2$ і отримуємо точку 4, з'єднавши її з B_1 отримали н.в. AB , а кут між Φ та $B_14 = \angle \beta$ і на полі Π_2 : аналогічно отримуємо $B_23 =$ н.в. AB та $\angle \alpha$.

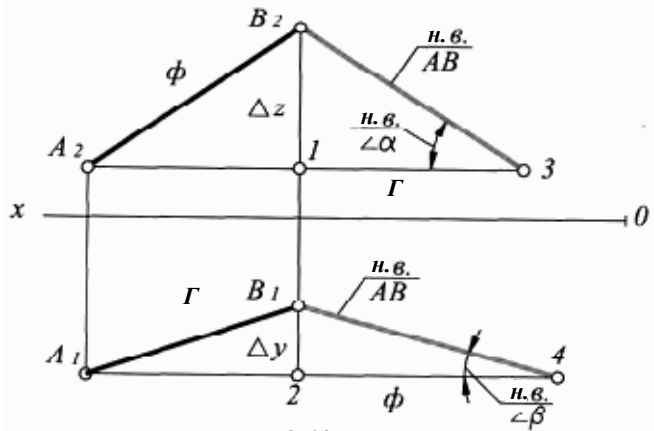


Рис. 2-12

Побудова виконана з врахуванням того, що

трикутник $B_12.4$ прямокутний і в нього один катет дорівнює $\Phi = A_2B_2$, а другий катет $B_12 =$ різниці координат до Π_2 , аналогічно на полі $\Pi_2 - \Delta B_21.3$.

2.6. Ділення відрізка в заданому співвідношенні

Згідно з властивостями паралельних проєкцій: *співвідношення відрізків прямої дорівнює співвідношенню їх проєкцій*. Відповідно, щоб розділити на епюрі проєкції відрізка, достатньо розділити в заданому співвідношенні одну з проєкцій відрізка і отриману точку поділу перенести на іншу проєкцію відрізка (за теоремою Фалеса).

Приклад: Дано: проєкції відрізка AB на полях Π_1 і Π_2 .

Необхідно: поділити проєкції AB в співвідношенні $AC/CB = 1/3$.

Розв'язок: Наприклад з B_1 проводимо довільну допоміжну пряму a_1 і від точки B_1 відкладаємо довільних чотири однакових відрізки (їх кількість дорівнює сумі чисельника і знаменника заданого співвідношення). Отриману точку 4 з'єднуємо з точкою A_1 , з точки 3 проводимо пряму, паралельну до $4A_1$, і точка її перетину з A_1B_1 є C_1 , яка ділить A_1B_1 в співвідношенні $1/3$, з C_1 проводиться вертикальна лінія зв'язку і на A_2B_2 отримуємо C_2 , яка ділить фронтальну проєкцію A_2B_2 в тому ж співвідношенні, $1/3$.

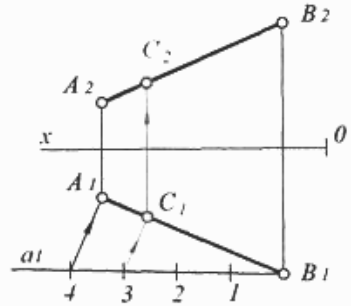


Рис. 2-13

2.7. Сліди прямої

Сліди прямої – це точки перетину прямої з площинами проєкцій (рис. 2-14).

Точка перетину прямої a з площиною Π_1 – точка M – горизонтальний слід прямої, $Z^M = 0$.

Точка перетину прямої a з площиною Π_2 – точка N – фронтальний слід прямої, $Y^N = 0$.

Точка перетину прямої a з площиною Π_3 – точка P – профільний слід, $X^P = 0$.

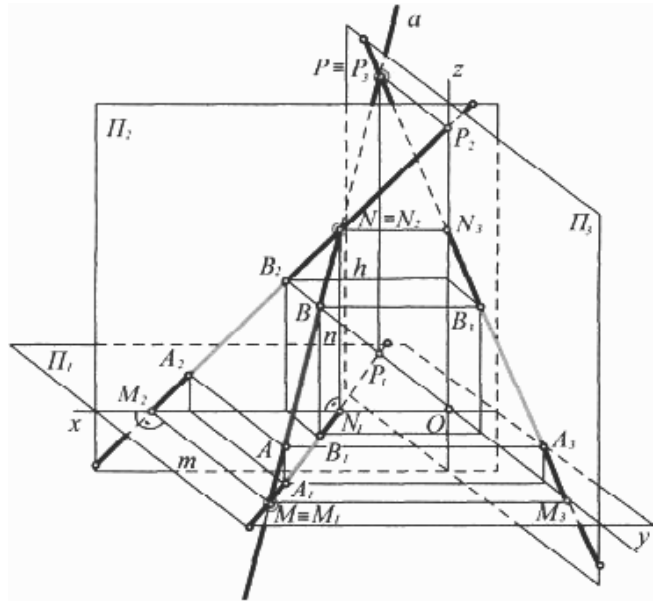


Рис. 2-14

Пряма загального положення має три сліди (M, N, P).

На епюрі (рис.2-15), коли задано дві проекції відрізка AB , побудова слідів на Π_1 і Π_2 наступна:

Для побудови проекцій горизонтального сліду прямої продовжуємо фронтальну проекцію A_2B_2 до перетину з віссю Ox , отримуємо M_2 – фронтальну проекцію горизонтального сліду, з M_2 перпендикулярно до Ox проводимо допоміжну лінію зв'язку m_1 , яку проводимо до перетину з продовженням горизонтальної проекції A_1B_1 , – отримана точка M_1 – горизонтальна проекція горизонтального сліду M_1 .

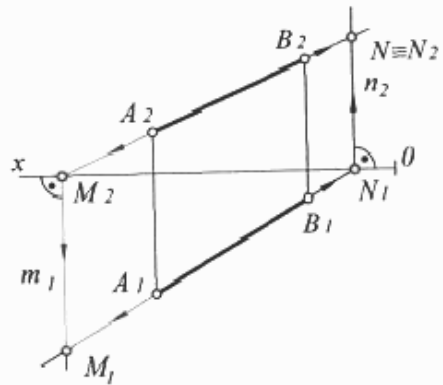


Рис. 2-15

Для побудови проекцій фронтального сліду: продовжуємо горизонтальну проекцію A_1B_1 до перетину з Ox – отримана точка N_1 є горизонтальна проекція фронтального сліду; з N_1 проводиться під прямим кутом до Ox допоміжна пряма n_2 , перетин продовження A_2B_2 з n_2 – точка N_2 – фронтальна проекція фронтального сліду, $N_2 \equiv N$.

2.7.1. Сліди прямих окремого положення:

Пряма рівня, паралельна одній площині проекцій, має тільки два сліди, т.я. перетинається тільки з двома площинами проекцій.

Наприклад, горизонтальна пряма (рис. 2-16) перетинається з двома площинами проекцій, з фронтальною Π_2 – утворює фронтальний слід N , з профільною – Π_3 – утворює профільний слід P . Побудова слідів N і P показана на епюрі (рис. 2-17):

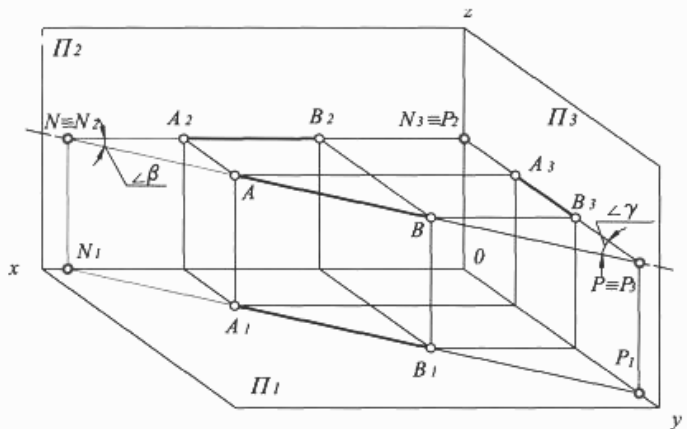


Рис. 2-16

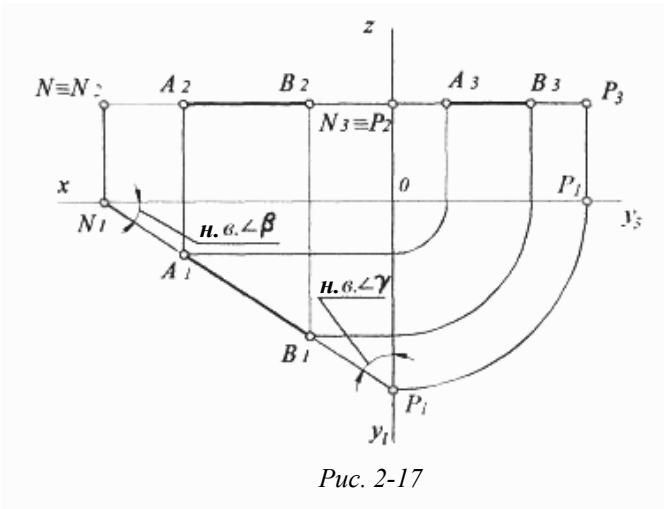


Рис. 2-17

Пряма проєктуюча, паралельна двом площинам проєкцій, має тільки один слід, т. я. перетинається тільки з однією площиною проєкцій.

Наприклад, горизонтально проєктуюча пряма (рис. 2-18) перетинається з однією площиною проєкцій P_1 , (до якої вона перпендикулярна) і має тільки горизонтальний слід M .

Побудова сліду M показана на епюрі (рис. 2-19):

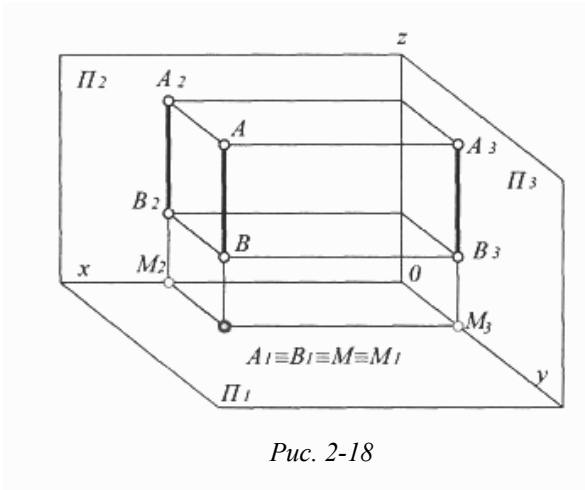


Рис. 2-18

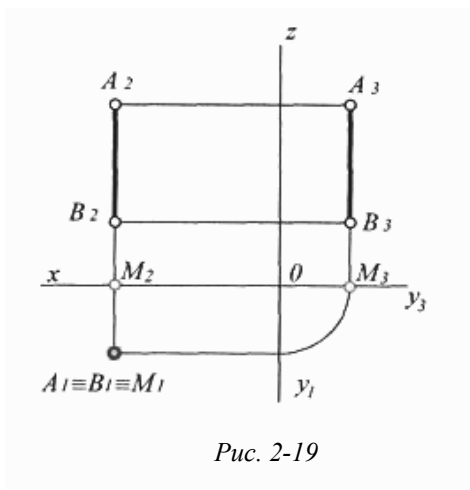


Рис. 2-19

2.8. Взаємне положення прямих

В просторі дві прямі (або більше) взаємно можуть бути:

- паралельними;
- які перетинаються;
- мимобіжними.

2.8.1. Паралельні прямі

Із властивостей паралельного проектування відомо, якщо *прямі паралельні між собою, то і однойменні їхні проєкції теж паралельні між собою.*

Якщо на епюрі (рис.2-20) $A_2B_2 \parallel C_2D_2$, а $A_1B_1 \parallel C_1D_1$, то в просторі $AB \parallel CD$ і навпаки. Паралельність прямих загального положення підкреслюється паралельністю їх проєкцій на двох полях площин проєкцій.

Паралельність двох прямих окремого положення визначається і по тій проєкції, на якій прямі паралельні до площини проєкції та по іншій.

Якщо прямі паралельні одній площині проєкцій, то їх паралельність визначається по проєкції на тій площині, відносно якої прямі паралельні, та по іншій проєкції.

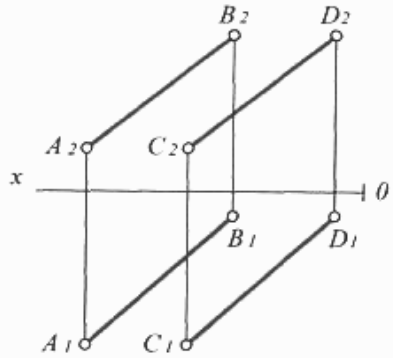


Рис. 2-20

2.8.2. Прямі, які перетинаються

Якщо AB перетинається з CD , то точка їх перетину точка K має свої проєкції K_2 і K_1 які розташовані на лінії $K_2K_1 \perp O_x$. (K_1 і K_2 розташовані на одній лінії зв'язку).

Якщо дві прямі перетинаються між собою, то точки перетину їх однойменних проєкцій на епюрі розташовані на одній лінії зв'язку, тобто проєкції точки перетину однойменних проєкцій цих прямих на одному полі і іншому зв'язані однією лінією зв'язку, яка перпендикулярна до відповідної осі координат (рис. 2-21).

Якщо одна з прямих, що перетинаються, є пряма рівня, то про взаємне положення цих прямих на епюрі судять по проєкції на тій площині проєкцій, відносно до якої одна з прямих (чи обое) паралельна, та іншій проєкції.

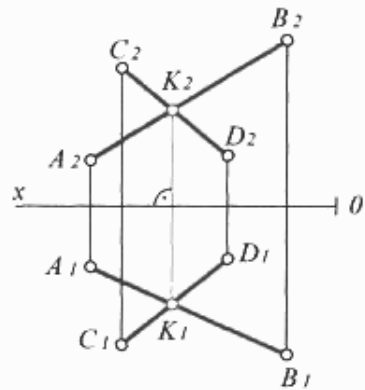


Рис. 2-21

2.8.3. Мимобіжні прямі

Такі прямі між собою не перетинаються і не паралельні. Точки перетину однойменних проєкцій прямих не належать одному перпендикуляру до осі, тобто не зв'язані між собою однією лінією зв'язку.

Точка перетину однойменних проєкцій мимобіжних прямих – проєкція двох точок, із яких одна належить одній прямій, а друга іншій. Ці точки називаються – *конкуруючі точки*. Такі точки застосовуються для з'ясування, яка із двох мимобіжних прямих проходить вище другої, або ближче в місцях уявного їх перетину.

На рис.2-22, із розглянутих точок 1 і 2 видно, що точка 1 має більшу глибину Y^1 , вона перед точкою 2 і на фронтальній проєкції точка 1 закриває точку 2, $Y^1 > Y^2$, а точка 3 має більшу висоту Z^3 ніж висота точки 4, яка дорівнює Z^4 , бо точка 3 вище точки 4 і на горизонтальній проєкції точка 3₁ закриває точку 4₁, тобто на Π_1 – C_1D_1 накриває A_1B_1 , бо $Z^3 > Z^4$.

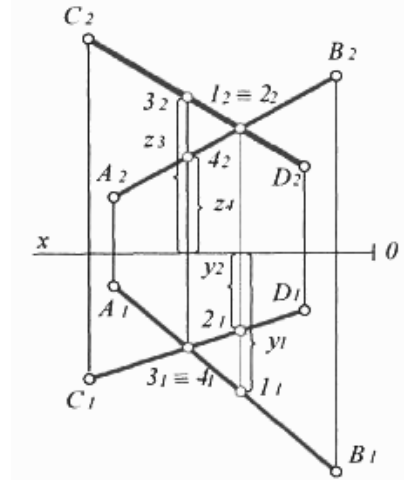


Рис. 2-22

2.9. Графічне дослідження параметрів прямої лінії

Приклад:

Дано: відрізок прямої загального положення AB (A_1B_1, A_2B_2), (рис.2-23).

Визначити: н.в. AB , α і $\angle \beta$.

Можливі два розв'язання:

– методом прямокутного трикутника (рис.2-24),

A_1B_1 – приймається за катет-проєкцію, на полі Π_2 визначається ΔZ , з A_1 проводимо допоміжну пряму a_1 , на a_1 від A_1 відкладаємо ΔZ і отримуємо A_o , $A_o \cup B_1 \Rightarrow A_oB_1 =$ н.в. AB , а кут між гіпотенузою A_oB_1 і катетом A_1B_1 дорівнює куту α , утвореному AB з Π_1 .

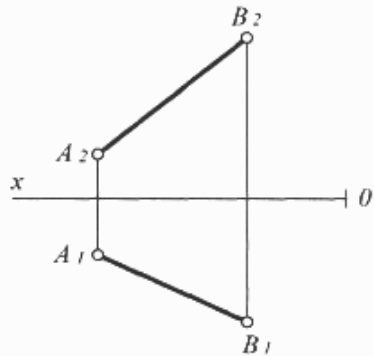


Рис. 2-23

Для визначення кута β і н.в. AB застосовується трикутник $A_2B_2B_0$.
 – метод трикутника Монжа, (рис. 2-25), який будується на базі катета – різниці координат і другого катета – проекції.

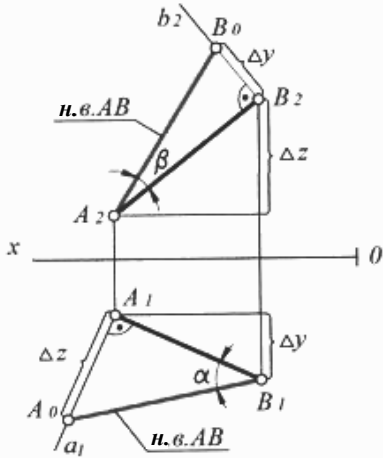


Рис. 2-24

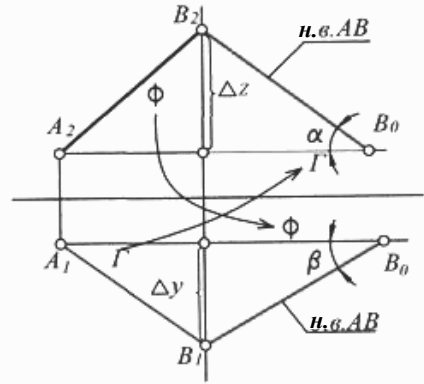


Рис. 2-25

Приклад:

Дано: $A(A_1A_2)$ та н.в. AB (рис. 2-26).

Визначити: A_2B_2 , $\angle \alpha$ і $\angle \beta$.

Побудова (рис. 2-27): з $\bullet A_1$, як із центра радіусом $R = д.в. AB$ проводиться дуга до перетину з проведеною $b_1 \perp A_1B_1 \Rightarrow \bullet B_0$, ΔZ переносимо на поле $\Pi_2 \Rightarrow B_2 \Rightarrow A_2B_2$, а $\angle \alpha = \angle B_0A_1B_1$, а $\angle \beta$ будується на Π_2 .

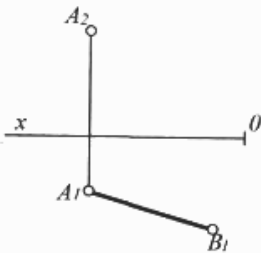


Рис. 2-26

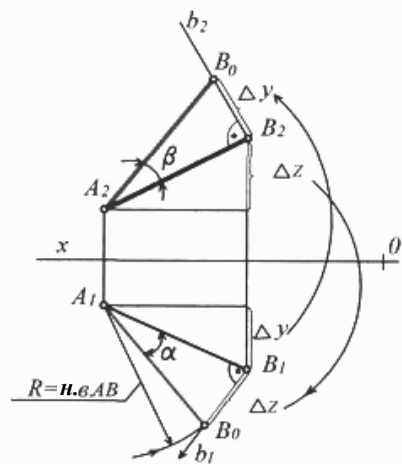


Рис. 2-27

Аналогічно вирішується задача, коли замість н.в. AB , відомий кут α .

Приклад:

Дано: $\angle \alpha$, $\angle \beta$, відрізок $AB(A_0B_0)$;

Побудувати: A_1B_1, A_2B_2 .

I-й етап: визначення ΔY та ΔZ .

В колі (рис. 2-28) діаметром A_0B_0 будується з A_0 $\angle \alpha$ і прямокутний трикутник, вписаний в коло і спирається на діаметр, має один катет, який дорівнює горизонтальній проекції, а другий = ΔZ . Аналогічно визначається ΔY .

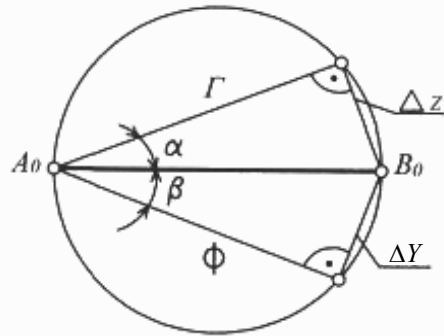


Рис. 2-28

На рис. 2-29 показаний розв'язок задачі.

Від точки A_2 вгору і вниз відкладаємо відрізок, довжиною ΔZ , від A_1 вгору і вниз відкладаємо відрізок, довжиною ΔY .

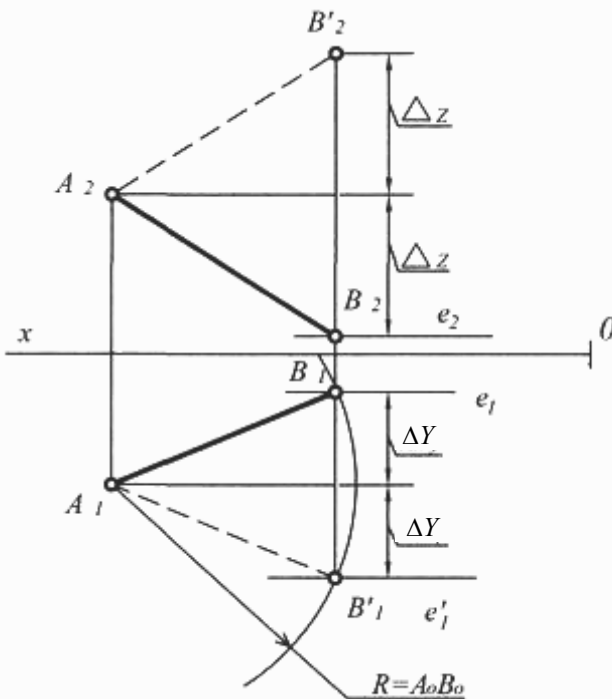


Рис. 2-29

Через кінцеві точки побудованих відрізків проводимо лінії паралельні осі Ox . Із точок A_2 і A_1 , прокреслюємо засічки на лініях e і e' , отримаємо точки B_1 і B'_1 . Задача має чотири розв'язки. Цю задачу можна вирішувати не задаючи A_0B_0 , при цьому залишається невизначеними н.в. AB , але кут α і β будуть витримані.

– Рівнонахилена пряма має $\angle \alpha = \angle \beta$, то $\Delta Y = \Delta Z$. $\Gamma = \phi$. У таких прямих, коли їх $\angle \alpha = \angle \beta$, має місце $\Delta Y = \Delta Z$, відрізки Γ -горизонтальних

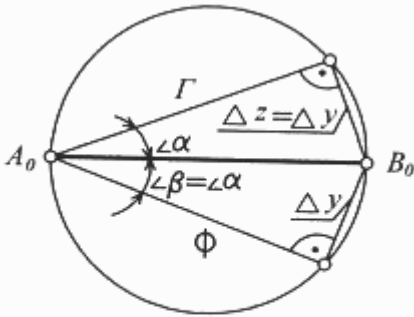


Рис. 2-30

Π_2 – є геометричним місцем (Г.М.) прямих, у яких $\angle \alpha = \angle \beta$. Таким же Г.М. будуть площини, паралельні бісекторній площині та їй перпендикулярній (рис. 2-32, а).

Прямі з паралельними проєкціями розташовані в площинах, перпендикулярних бісекторній (рис. 2-32, б), а з рівнонахиленими проєкціями до осі – розташовані в бісекторній площині, або їй паралельних площинах (рис. 2-32, а, б і в).

і Φ -фронтальних проєкцій однакові між собою (рис.2-30).

У рівнонахилених прямих проєкції взаємно паралельні, або однаково нахилені до осі проєкцій (рис. 2-31).

Бісекторна площина двогранного кута, утвореного площинами Π_1 і

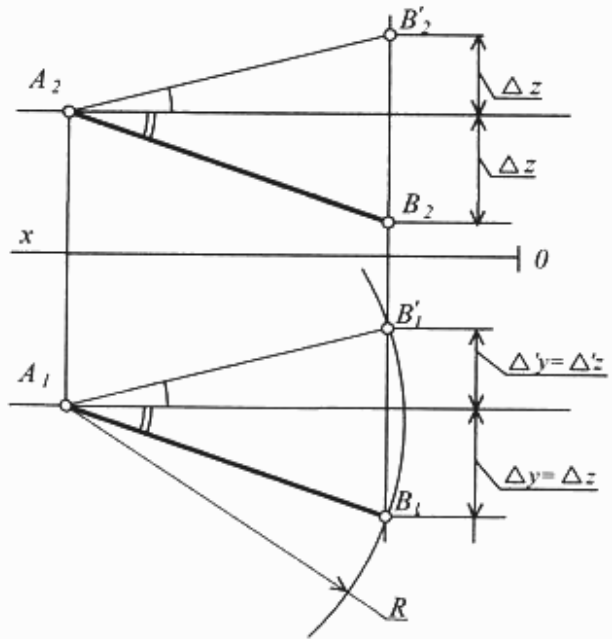


Рис. 2-31

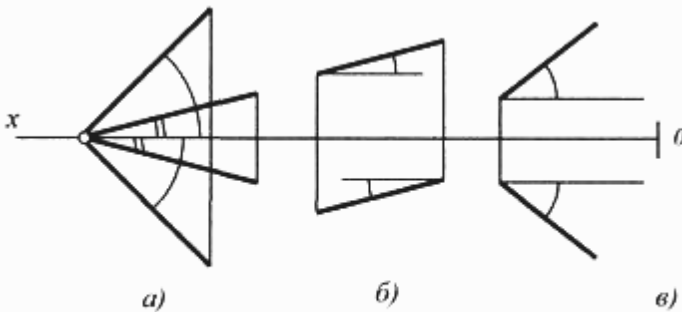


Рис. 2-32

2.10. Задачі для розв'язку

2.10.1. Задачі для позааудиторного розв'язку

Задача 2-1. Зобразити проєкції прямих, що проходять через точку A під заданими кутами до площин проєкцій (рис. 2-33).

- а) $AB \parallel \Pi_1, \angle \beta = 60^\circ$;
- б) $AB \parallel \Pi_2, \angle \alpha = 30^\circ$;
- в) $AB \parallel \Pi_3, \angle \alpha = 60^\circ$.

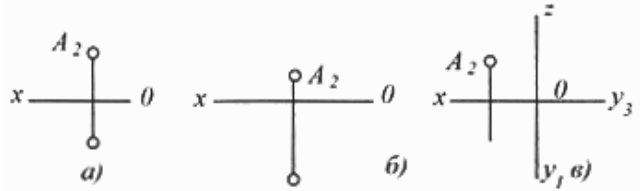


Рис. 2-33

Задача 2-2.

Вказати точки (рис. 2.34), розміщені:

- а) під прямою _____;
- б) перед прямою _____;
- в) над прямою _____;
- г) на прямій _____;

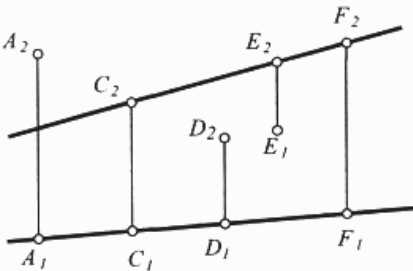


Рис. 2-34

Задача 2-3.

Побудувати горизонтальну проєкцію точки C , що лежить на відрізку AB (рис. 2-35):

- а) діленням у даному відношенні;
- б) за профільною проєкцією.

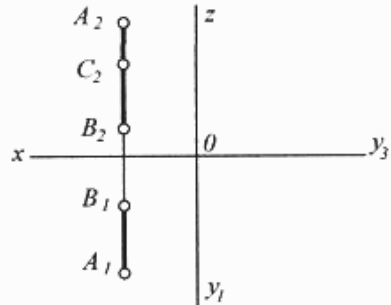


Рис. 2-35

Задача 2-4. Визначити сліди заданих прямих (рис.2-36).

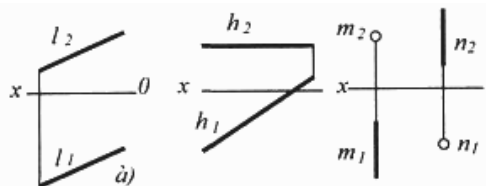
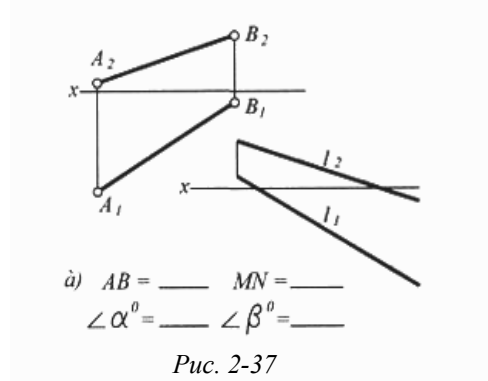


Рис. 2-36

Задача 2-5. Визначити натуральну величину відстані між слідами прямої l і AB та кути їх нахилу β і α до площини Π_1 і Π_2 (рис. 2-37).



Задача 2-6. Визначити взаємне розташування прямих на кожному з рисунків (рис. 2-38), (записати символами).

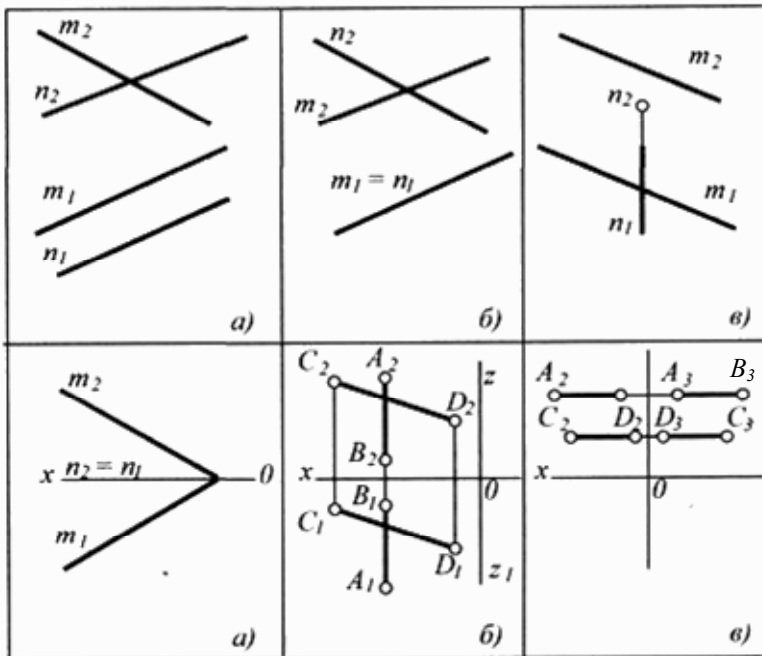


Рис. 2-38

2.10.2 Задачі для аудиторного розв'язку

Задача 2-7. На прямій l відкласти відрізок $AB = 30$ мм (рис. 2-39).

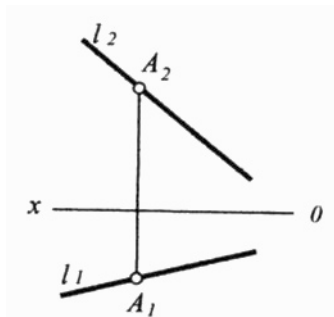


Рис. 2-39

Задача 2-8. Через точку A провести пряму, паралельну площині Π_1 так, щоб вона перетинала заданий відрізок BC (рис. 2-40).

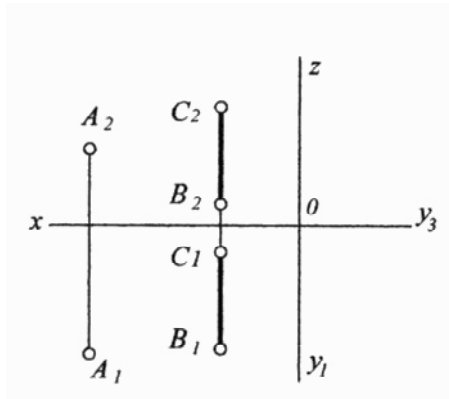


Рис. 2-40

Задача 2-9. Через точку A провести пряму, паралельну площині Π_1 так, щоб вона перетинала задану пряму l і вісь Ox (рис. 2-41).

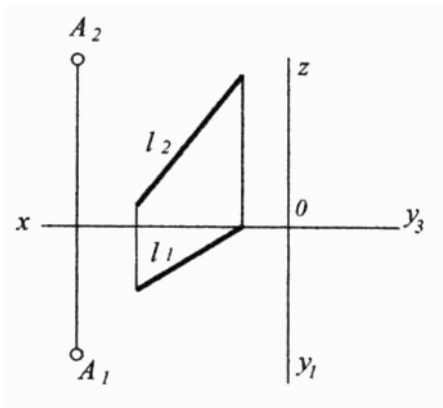


Рис. 2-41

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. В чому полягає різниця між прямими загального та окремого положення?
2. В чому полягає, на епюрі, ознака належності точки до прямої?
3. Як визначити натуральну величину відрізка прямої окремого положення?
4. Що спільне та чим відрізняються горизонтально проєктуюча пряма та горизонтальна пряма?
5. Як визначити натуральну величину відрізка прямої загального положення?
6. Як визначити кути нахилу прямої рівня та прямої загального положення (їх відрізків) до Π_1 та Π_2 ?
7. Скільки слідів має пряма загального положення та пряма проєктуюча?
8. Що висвітлює розташування відносно осі x , лінія яка зв'язує точку перетину фронтальних проєкцій двох прямих з точкою перетину їх горизонтальних проєкцій?
9. Що визначають конкуруючі точки прямих?
10. Дайте визначення та способи побудови слідів прямої.

Тема 3

Площина

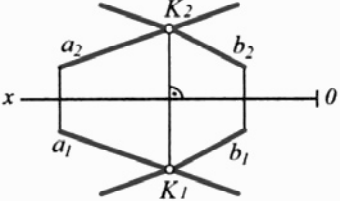
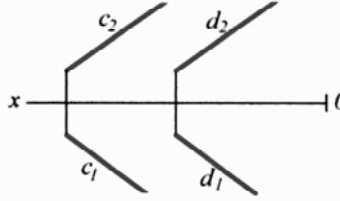
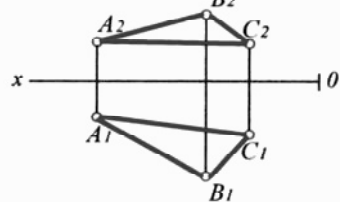
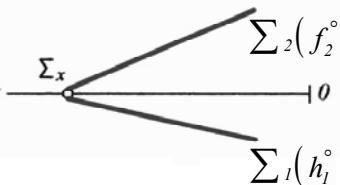
Площина відносно площин проекцій може бути розташована по різному і її положення визначається залежно від кутів нахилу заданої площини до площин проекцій. Приймається: кут нахилу площини до $\Pi_1 - \angle \alpha$; до $\Pi_2 - \angle \beta$; до $\Pi_3 - \angle \gamma$.

Залежно від кутів нахилу площини до площин проекцій, площина в просторі може бути:

- **загального положення**, коли кути її нахилу α , β і γ довільні але відрізняються від 0° і 90° ;
- **окремого положення**:
- площини рівня – паралельні до однієї площини проекцій, коли один з кутів дорівнює 0° , а два інші 90° ;
- площини проєктуючі – площини перпендикулярні до однієї площини проекцій, коли один з кутів нахилу $= 90^\circ$, а два інші більше 0° і менше 90° .

3.1. Способи задання площини

№	Назва визначників (чим задана площина)	Визначник площини Σ	Зображення площини
1	Трьома точками, які не належать одній прямій. Точки A, B, C .	$\Sigma(A, B, C)$	
2	Прямою і точкою, яка не належить прямій. Пряма $a, a \not\perp A$.	$\Sigma(a, A)$	

3	Двома перетинаючими прямими, наприклад, $a \cap b$	$\Sigma (a \cap b)$	
4	Двома паралельними прямими, $c \parallel d$	$\Sigma (c \parallel d)$	
5	Плоскою фігурою (наприклад, трикутником ABC)	$\Sigma (\triangle ABC)$	
6	Слідами або лініями нульового рівня	$\Sigma (\Sigma_1, \Sigma_2)$, або $\Sigma (f^\circ \cap h^\circ)$	

3.2. Сліди площин

Положення площини в просторі визначається її слідами, які є прямими лініями, утвореними при перетині довільної площини з площинами проєкцій.

При перетині площини, наприклад Δ (рис. 3.1), з площинами проєкцій, утворюються прямі лінії, які називають слідами, в тому числі:


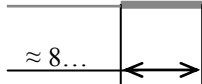

- якщо площина Δ перетинається з горизонтальною площиною проєкцій Π_1 , то утворюється пряма лінія, яку називають – горизонтальний слід площини Δ , тобто:
 - якщо: $\Delta \cap \Pi_1 \rightarrow \Delta_1$ – горизонтальний слід площини Δ ;
 - якщо: $\Delta \cap \Pi_2 \rightarrow \Delta_2$ – фронтальний слід площини Δ ;
 - якщо: $\Delta \cap \Pi_3 \rightarrow \Delta_3$ – профільний слід площини Δ .

При перетині площини з площиною проєкцій, до якої площина перпендикулярна, утворюється слід-проєкція з яким співпадає проєкція всієї площини на цю площину проєкцій. Позначення такого сліду-проєкції, при необхідності його виділення серед інших слідів, виконується з підкреслюванням позначення:

- коли площина $\Delta \perp \Pi_1$, то $\Delta \cap \Pi_1 \Rightarrow \underline{\Delta}_1$ — горизонтальний слід-проєкція;
- коли площина $\Delta \perp \Pi_2$, то $\Delta \cap \Pi_2 \Rightarrow \underline{\Delta}_2$ — фронтальний слід-проєкція;
- коли площина $\Delta \perp \Pi_3$, то $\Delta \cap \Pi_3 \Rightarrow \underline{\Delta}_3$ — профільний слід-проєкція.

При зображенні площини своїм одним слідом-проєкцією допускається його позначення без підкреслювання.

Зображення слідів площин пропонується виконувати як наведено в наступній таблиці:

№	Зображення	Товщ.	Призначення
1		$S \approx 0,5 \dots 1,4$ мм.	Зображення слідів площини, яка є основним елементом розглядаємого простору
2	місце позн. площини 	$S/2 + S$	Зображення слідів площини, яка є другорядним елементом простору
3		$S/2$	Зображення слідів площини, яка є допоміжним елементом застосованим в рішенні задачі

Позначення слідів довільної площини складається з її буквенного позначення (виконане прописною буквою грецького алфавіту) з індексом, таким же, який має площина проєкцій, з якою перетинається площина. Можливе позначення слідів площини загального положення строчними буквами f^o , h^o та p^o які є лініями нульового рівня цієї площини (див. п. 3.3.2). Додаток індексу “ o ” підкреслює “нульове” положення цих ліній рівня площини. Тобто лінії нульового рівня – це лінії рівня площини, які співпадають з лініями перетину досліджуваної заданої площини з площиною проєкцій.

Рекомендовані переважно розмежувальні позначення слідів:

- Δ_1, Σ_1, P_2 та інші – позначення слідів площин загального (п. 3.3) та окремого (п. 3.6) положення;
- f^o, h^o, p^o – позначення слідів площин загального (п. 3.3) положення, переважно в яких розглядаються їх проміжні лінії рівня (п. 3.3.2).

Кожна пара слідів площини Δ перетинається (наприклад) з віссю проєкцій x в одній точці Δx – то така точка зветься точкою збігу слідів на осі Ox .

Сліди довільних прямих, які лежать в заданій площині, обов'язково повинні розташовуватись на однойменних слідах площини, це й показано на рис. 3-1 та 3-2.

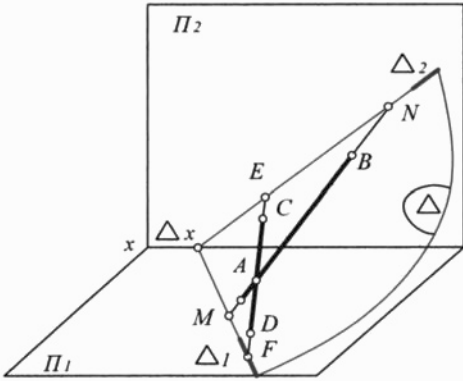


Рис. 3-1

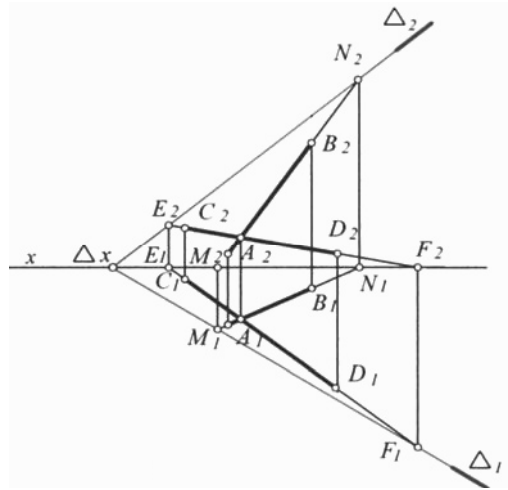


Рис. 3-2

Для побудови на епюрі слідів площини, яка задана не слідами, достатньо побудувати сліди двох прямих, якими вона задана, і через ці однойменні сліди прямих провести однойменні сліди площини (рис. 3-2).

Через фронтальні проекції фронтальних слідів E_2 і N_2 проведено Δ_2 – фронтальний слід площини, а через горизонтальні проекції горизонтальних слідів M_1 і F_1 проведено Δ_1 – горизонтальний слід площини Δ .

Якщо розглядати площину в системі Π_1, Π_2, Π_3 , то площина має сліди на трьох відповідних площинах проекцій і три точки сходу слідів на трьох осях координат (рис. 3-3, рис. 3-4).

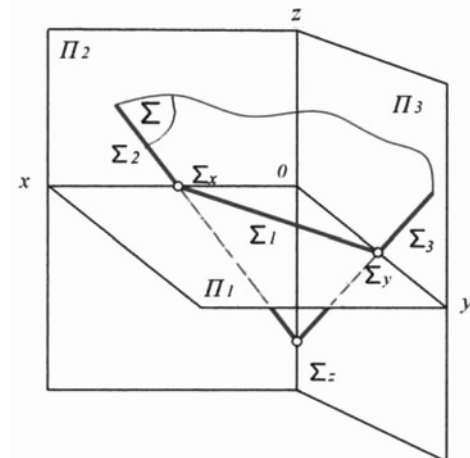


Рис. 3-3

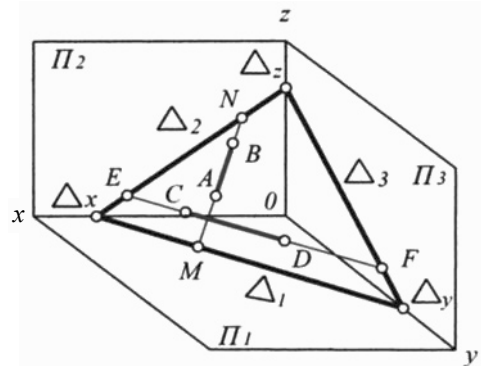


Рис. 3-4

3.3. Площина загального положення (П.З.П)

Площина, нахилена до усіх площин проєкцій під кутами які $>0^\circ$, але $<90^\circ$, називається площиною загального положення.

В просторі площина загального положення може бути розташована довільно, але не паралельно і не перпендикулярно відносно площин проєкцій Π_1, Π_2, Π_3 (Π_{123}). На епюрі (рис. 3-5) її сліди розташовуються відповідно довільно, але не паралельно і не перпендикулярно відносно осей координат.

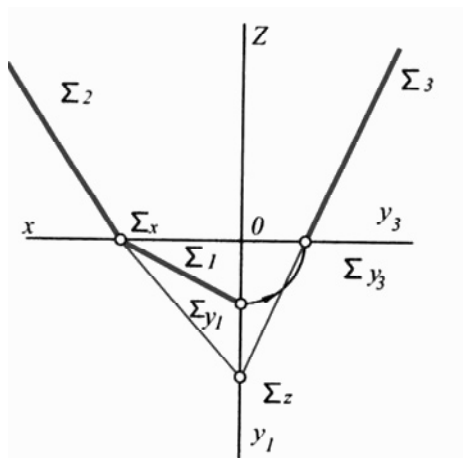


Рис. 3-5, а

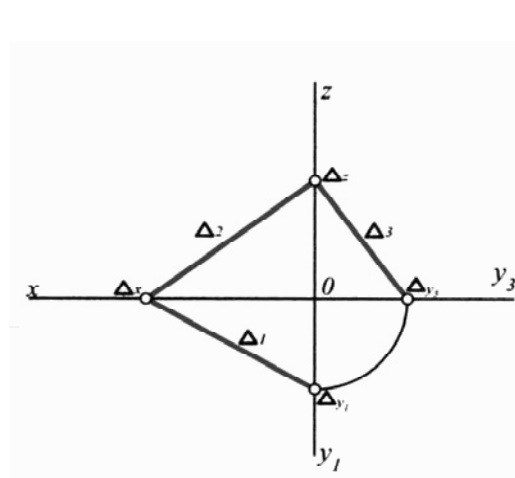


Рис. 3-5, б

3.3.1. Прямі і точки в площині

3.3.1.1. Ознаки, належності прямої до площини

- пряма належить площині, якщо вона має з нею дві спільні точки;
- пряма належить площині, якщо вона має з нею одну спільну точку і паралельна іншій прямій, що лежить в цій площині, або в площині їй паралельній;
- пряма належить площині, якщо її сліди лежать на однойменних слідах площини. Такими спільними для прямої AB і площини будуть сліди M і N прямої AB , які лежать на слідах Δ_1 і Δ_2 площини Δ .

Якщо проведемо (на рис. 3-4) $CD \parallel \Pi_1$, тобто вона буде паралельна Δ_1 і буде мати сліди E та F на Π_2 і Π_3 , які зіллються із слідами Δ_2 і Δ_3 .

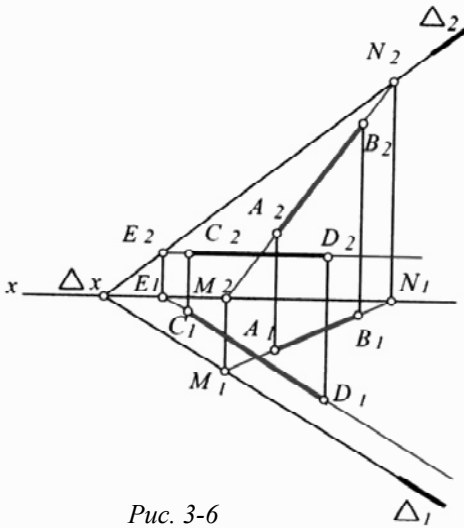


Рис. 3-6

Точка F – не належить площині Δ , т.я. вона розташована в 3-у октанті, тому що на епюрі її горизонтальна проекція F_1 лежить на фронтальній проекції A_2D_2 .

3.3.2. Прямі окремого положення в площині

3.3.2.1. Горизонталь – це пряма в площині, паралельна горизонтальній площині проекцій (рис. 3-8).

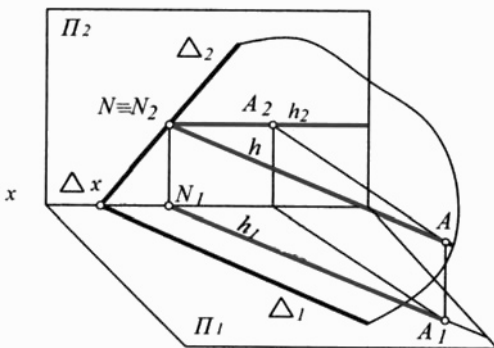


Рис. 3-8

Із цього:

– пряма належить площині, якщо вона паралельна одному із слідів цієї площини, а з другим слідом має спільну точку (рис.3-6).

3.3.1.2. Ознака належності точки до площини

Точка належить площині, якщо вона лежить на довільній прямій, яка належить цій площині.

Точка E (на рис. 3-7) належить площині, заданої $\Delta(ABC)$, т.я. лежить на прямій AD , яка лежить в площині Δ (при цьому $E_1 \in A_1D_1$, $E_2 \in A_2D_2$).

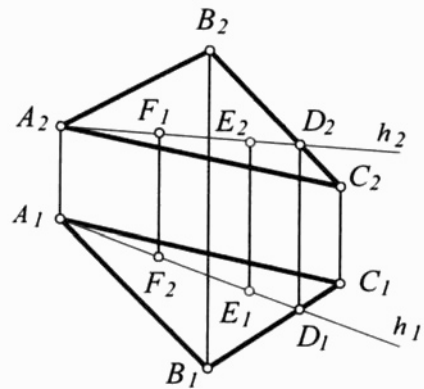


Рис. 3-7

В площині ΔNA – горизонталь (позначається – h) так як паралельна горизонтальному слідові Δ_1 (рис. 3-9).

Так як горизонталь площини паралельна площині проекцій Π_1 , то проекція горизонталі завжди паралельна горизонтальному сліду площини (як проекції паралельних прямих).

Тобто: $h_2 \parallel x$; $h_1 \parallel \Delta_1$ (горизонтальному сліду площини).

Алгоритм побудови довільної горизонталі площини $\Delta (\Delta_1, \Delta_2)$ (рис. 3-9).

Якщо h – горизонталь площини Δ , $\Delta \supset h \parallel P_1$; $h \cap P_2 \rightarrow \bullet N$; на епюрі: $\Delta_2 \supset \bullet N_2 \subset h_2 \parallel Ox$; $\Delta_2 \supset N_2 \Rightarrow \bullet N_1 \subset Ox$; $\bullet N_1 \subset h_1 \parallel \Delta_1$.

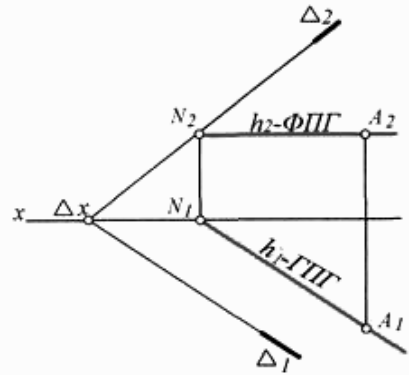


Рис. 3-9

Для побудови довільної горизонталі h в площині Σ (рис. 3-10) необхідно довільно провести $h_2 \parallel Ox$, наприклад, з точки C_2 , а h_1 побудуємо по належності її до площини Σ , тобто $\bullet C_2 \subset h_2 \parallel Ox$; $h_2 \cap A_2B_2 \Rightarrow \bullet I_2$, $\Rightarrow \bullet I_1 \cup \bullet C_1 \Rightarrow h_1$.

Всі горизонталі належні одній площині паралельні між собою.

Для побудови на епюрі горизонталі h , спочатку будують $h_2 \parallel Ox$, а потім будується h_1 , (по належності h до площини), що й показано на рис. 3-11 та рис. 3-12.

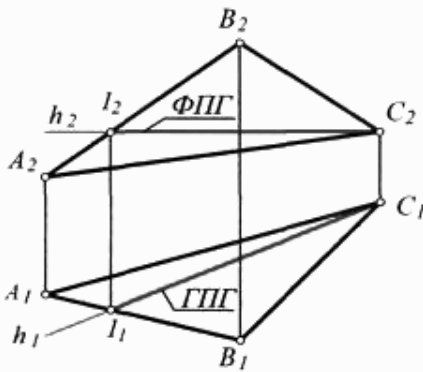


Рис. 3-10

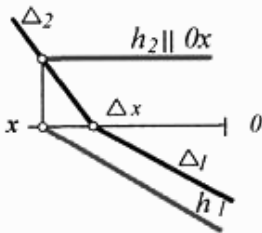


Рис. 3-11

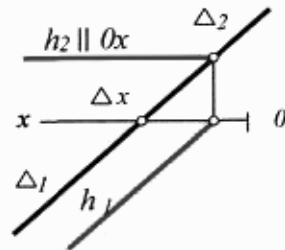


Рис. 3-12

3.3.2.2. Фронталь – це лінія належна площині і паралельна фронтальній площині проєкції P_2 .

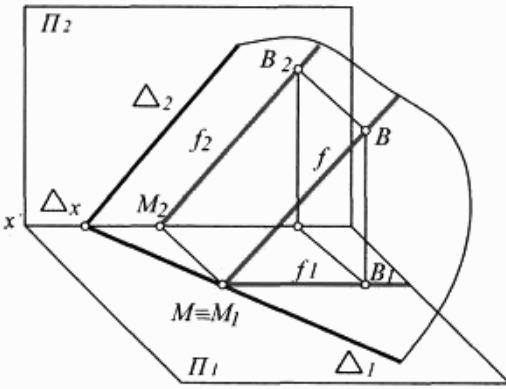


Рис. 3-13

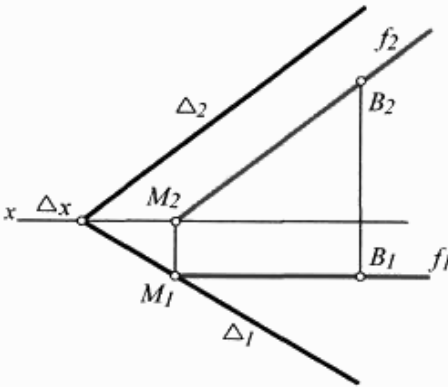


Рис. 3-14

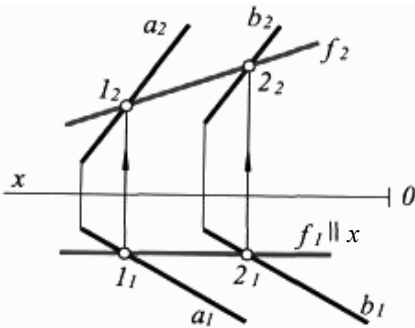


Рис. 3-15

В площині ΔMB – фронталь (позначається f), так як вона паралельна фронтальному слідові Δ_2 (рис. 3-13).

$M_1B_1 - f_1$ завжди паралельна осі x , а фронтальна проекція фронталі $M_2B_2 - f_2$ завжди паралельна фронтальному сліду площини:

Тобто: $f_1 \parallel x, f_2 \parallel \Delta_2$.

Якщо f -фронталь площини Δ , то $f \parallel \Pi_2; f \cap \Pi_1 \Rightarrow \bullet M$. На епюрі (рис. 3-14) $\Delta_1 \supset \bullet M_1 \subset f_1 \parallel Ox; \bullet M_2 \subset f_2 \parallel \Delta_2$.

Приклад:

Припустимо, що площина Σ задана двома паралельними прямими a і b , тобто $\Sigma (a \parallel b)$. Необхідно побудувати фронталь цієї площини.

Для побудови довільної фронталі f в площині Σ (рис. 3-15), довільно проводимо $f_1 \parallel Ox$, а f_2 побудуємо по належності її до площини Σ , тобто: $f_1 \parallel Ox; f_1 \cap a_1 \Rightarrow I_1, f_1 \cap b_1 \Rightarrow 2_1$, побудувавши $I_2 \subset a_2; 2_2 \subset b_2, I_2 \cup 2_2 \Rightarrow f_2$.

Одночасно відмітимо, що профільна пряма площини – це пряма p в площині паралельна профільній площині проєкцій. (3-15, а) (профільна пряма, наведена на рис. 2-4).

Ця ж сама площина може бути задана лініями рівня f і h , а може бути задана двома перетинаючими прямими a і b .

Тобто, площина $\Delta (\Delta_1, \Delta_2)$ задана слідами: $\Delta (f \cap h)$ – задана проміж-

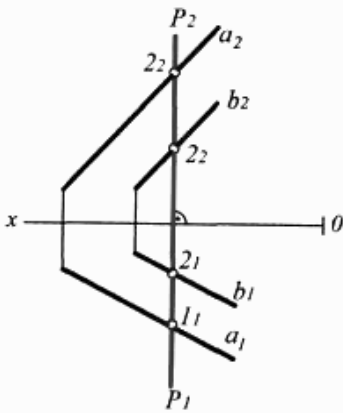


Рис. 3-15, а

льний слід Δ_2 – є фронталь нульового рівня і позначаємо її надалі f^o , тобто Δ_2 і f^o – це одна і та ж лінія перетину Δ з Π_2 , при цьому $f^o \equiv f_2^o$, $f_1^o \equiv Ox$. З цих же міркувань $\Delta \cap \Pi_1 \Rightarrow \Delta_1$ вона ж є $h^o \equiv h_1^o$ а $h_2^o \equiv Ox$.

ними лініями рівня, $\Delta(f^o \cap h^o)$ – задана лінією нульового рівня, $\Delta(a \cap b)$ – задана двома довільними прямими a і b , що перетинаються між собою. Одна і та ж площина Δ , але задана вона різними прямими, що перетинаються (рис. 3-16).

Візьмемо до уваги, що слід Δ_2 – це теж фронталь цієї площини, належна Π_2 , тобто фронта-

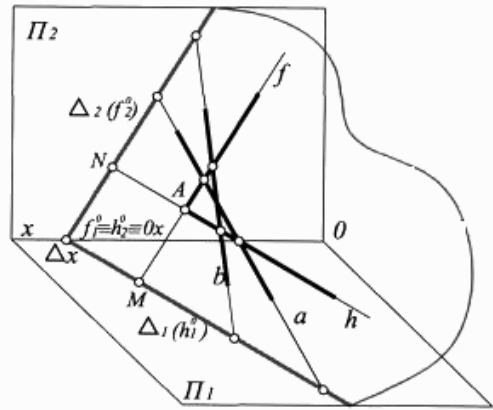


Рис. 3-16

3.4. Perezadannya площини

Якщо на епюрі площина Δ задана проміжними лініями рівня і необхідно побудувати її сліди, то виконується побудова горизонтального сліду фронталі, через який паралельно горизонталі пройде Δ_1 при перетині якого з віссю x отримується Δ_x з якої паралельно фронталі пройде Δ_2 – фронтальний слід площини.

Коли $\Delta(f \cap h) \Rightarrow \Delta(\Delta_2, \Delta_1)$, то на епюрі $f_2 \cap x \Rightarrow M_2 \Rightarrow M_1 \subset f_1$;

- $M_1 \subset \Delta_1 \parallel h_1$; $\Delta_1 \cap x \Rightarrow \Delta_x \subset \Delta_2 \parallel f_2$.

Можливе виконання Perezadannya площини шляхом побудови фронтального сліду N горизонталі і далі, як видно на рис. 3-17.

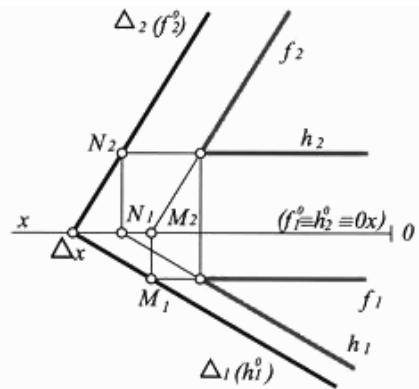


Рис. 3-17

Перезадання площини $\Delta(\Delta_1, \Delta_2) \Rightarrow \Delta(f \cap h)$, показано на рис.3-17, для цього: довільно, взявши $\bullet M_1$ на Δ_1 , будемо $\bullet M_2 \subset Ox$. $\bullet M_1 \subset f_1 \parallel Ox$;

$\bullet M_2 \subset f_2 \parallel \Delta_2$.

Довільно, вибираємо

$\bullet N_2 \subset \Delta_2 \Rightarrow N_1 \subset Ox$.

$\bullet N_2 \subset h_2 \parallel Ox$; $\bullet N_1 \subset h_1 \parallel \Delta_1$.

Виконаємо на епюрі перезадання площини $\Delta(a \cap b) \Rightarrow \Delta(f \cap h)$

Це показано на рис. 3-18.

На довільній висоті проведемо $h_2 \parallel Ox$, отримуємо $\bullet 1_2$ і $\bullet 2_2$ точки перетину цієї горизонталі з прямими a і b ; горизонтальну проекцію горизонталі будемо за належністю h до площини за точками 1 і 2, що належать заданій площині, з'єднавши $\bullet 1_1$ з $\bullet 2_1$, і отримуємо h_1 .

Аналогічно виконуємо побудову фронталі: довільно проводимо: $f_1 \parallel Ox \Rightarrow 3_1$ і 4_1 , будемо 3_2 і 4_2 ; $\bullet 3_2 \cup \bullet 4_2 \Rightarrow f_2$.

Таким чином, виконано перезадання площини, заданої двома перетинаючими прямими $a \cap b$ на умову завдання цієї площини, лініями рівня $f \cap h$, що теж перетинаються та належать заданій площині Δ , тобто:

$$\Delta(a \cap b) \Rightarrow \Delta(f \cap h).$$

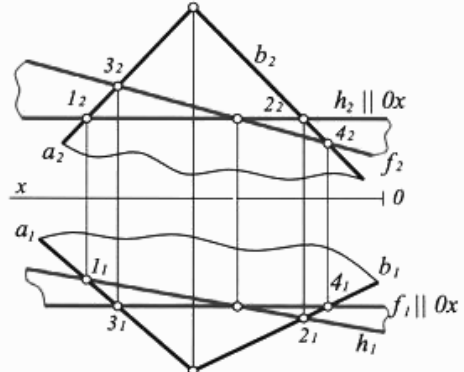


Рис. 3-18

3.5. Лінія найбільшого нахилу (ЛНН) площини

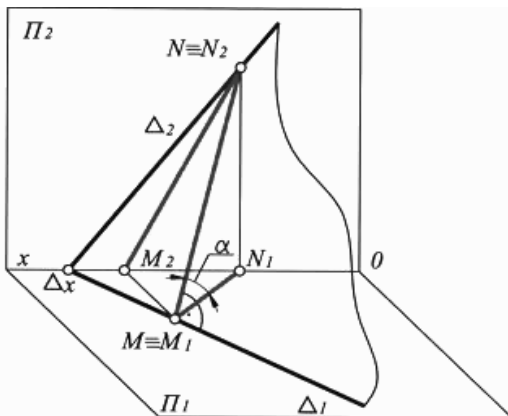


Рис. 3-19

Лінія найбільшого нахилу – це пряма в площині перпендикулярна до одного сліду цієї площини (або до її проміжної лінії рівня).

Наприклад, на рис. 3-19 лінія найбільшого скату (нахилу) площини Δ до Π_1 є пряма MN в площині, перпендикулярна до горизонтального сліду Δ_1 площини і її всіх проміжних горизонталей.

Лінія MN може бути застосована, наприклад, для визначення $\angle \alpha$ – кута нахилу площини Δ до Π_1 .

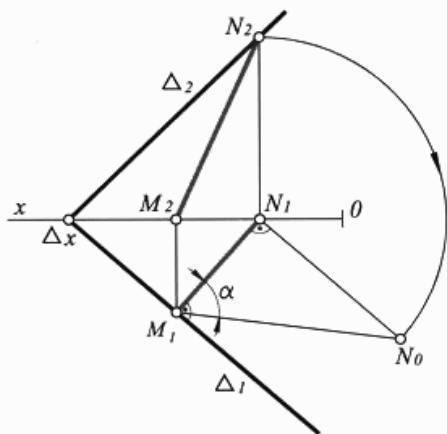


Рис. 3-20

В площині Δ – MN – лінія найбільшого нахилу (ЛНН).

$\angle NMN_1 = \angle \alpha$ – кут нахилу площини Δ до Π_1 ,

$MN \perp$ до Δ_1 ; $\angle M_1N_1N_2 = 90^\circ$, то $M_1N_1 \perp \Delta_1$, а N_2M_2 – будемо, як відсутню проекцію прямої MN – належної площині Δ .

На епюрі (рис. 3-20) за допомогою прямокутного трикутника $N_1M_1N_0$ визначаємо натуральну величину MN як гіпотенузу ΔNMN_1 , при цьому $M_1N_0 =$ н.в. MN , а кут цієї гіпотенузи з катетом – проекцію M_1N_1 – дорівнює $\angle \alpha$ – кут нахилу Δ до Π_1 .

Приклад:

Задано: площину $\Delta(ABC)$ (рис. 3-21). Необхідно побудувати ЛНН до Π_1 .

Розв'язок:

– спочатку будемо горизонталь цієї площини, для цього з A_2 проводиться $h_2 \parallel Ox$, отримуємо при цьому точку I_2 , побудувавши I_1 , через A_1 і I_1 пройде h_1 ;

– з B_1 будемо горизонтальну проекцію ЛНН, яка пройде \perp до h_1 – отримаємо точку 2_1 ;

– фронтальну проекцію ЛНН отримаємо як відсутню проекцію прямої B_22_2 .

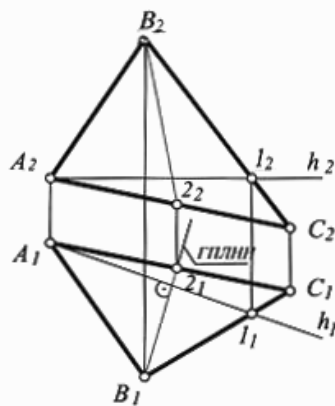


Рис. 3-21

3.6. Площини окремого положення

Площини окремого (часткового) положення, це площини:

- проєктуючі – які перпендикулярні до однієї площини проєкцій;
- рівня – які паралельні до однієї площини проєкцій.

Площина в просторі займає окреме положення, якщо її один (або два) сліди розташовані паралельно (чи перпендикулярно) до однієї осі координат.

3.6.1. Проекуючі площини

Площина, перпендикулярна до однієї з площини проєкції зветься проєктуючою. Дивлячись до якої площини проєкцій площина перпендикулярна, вона може бути:

- горизонтально проєктуюча $\perp \Pi_1$;
- фронтально проєктуюча $\perp \Pi_2$;
- профільно проєктуюча $\perp \Pi_3$.

3.6.1.1. Горизонтально проєктуюча площина (ГПП), це площина перпендикулярна до горизонтальної площини проєкцій.

Припустимо, що площина $\Delta \perp \Pi_1$, то її наочне зображення та епюр мають вигляд, наведений відповідно на рис. 3-22 і рис. 3-23.

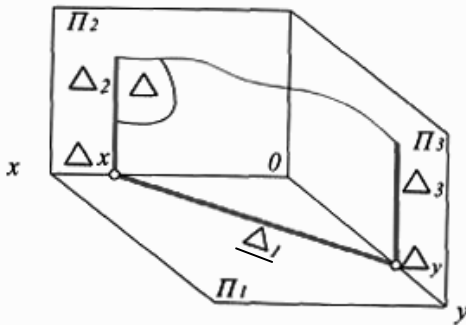


Рис. 3-22

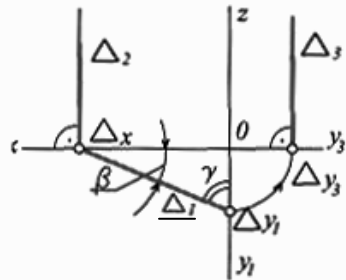


Рис. 3-23

Горизонтальна проєкція точки, прямої, фігури, які належать горизонтально проєктуючій площині є точка чи пряма, які розташовуються на її горизонтальному сліді, тому горизонтальний слід горизонтально проєктуючої площини зветься слід-проєкція (з цим слідом збігаються горизонтальні проєкції елементів належних горизонтально проєктуючій площині), а їх проєкції на Π_2 та Π_3 не лежать на слідах.

Кут, утворений слідом-проєкцією і віссю $x = \angle \beta$, тобто дорівнює куту нахилу горизонтально проєктуючої площини до площини проєкцій Π_2 , а кут утворений горизонтально проєктуючою площиною та Π_3 дорівнює $\angle \gamma = 90^\circ - \angle \beta$.

Для того, щоб через точку, або пряму AB (рис. 3-24) на епюрі провести горизонтально проєктуючу площину (рис. 3-25), достатньо через горизонтальну проєкцію точки прямої провести слід-проєкцію горизонтально проєктуючої площини, інші сліди розташуються перпендикулярно до осі Ox і Oy_3 .

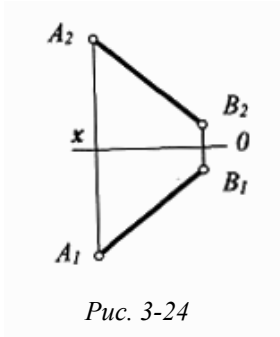


Рис. 3-24

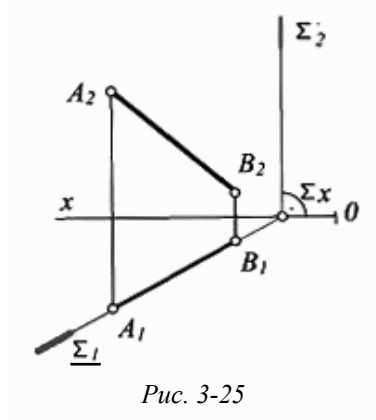


Рис. 3-25

Якщо задано проєкції відрізка AB , то для проведення горизонтально проєктуючої площини через цей відрізок: A_1B_1 продовжуємо до перетину з віссю Ox . Отримали Σx , з якої \perp осі Ox пролягає Σ_2 , при цьому $\Sigma_1 \equiv A_1B_1$.

3.6.1.2. Фронтально проєктуюча площина (ФПП) – це площина, перпендикулярна до фронтальної площини проєкцій.

Припустимо, що площина $\Sigma \perp P_2$, то її наочне зображення, та епюр має вигляд, наведений відповідно на рис. 3-26 і рис. 3-27.

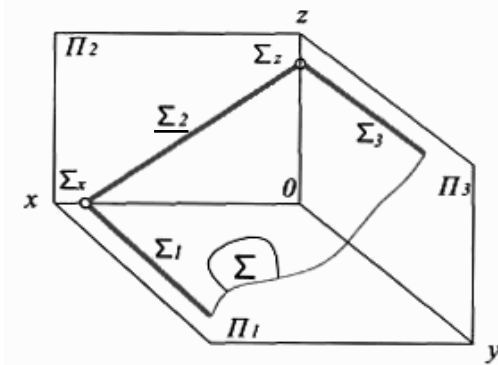


Рис. 3-26

Фронтальна проєкція точки, прямої, фігури, які належать фронтально проєктуючій площині є точка або відповідно пряма, які розташовуються (зливаються) на фронтальному сліді її, тому фронтальний слід фронтально проєктуючої площини зветься слід-проєкція, а проєкції на P_1 та P_3 не лежать на її слідах.

Кут, утворений слідом-проєкцією Σ_2 фронтально проєктуючої площини з віссю $Ox = \angle \alpha$, тобто дорівнює куту нахилу площини Δ до площини проєкцій P_1 , а кут, утворений ФПП та P_3 дорівнює $\angle \gamma = 90^\circ - \angle \alpha$.

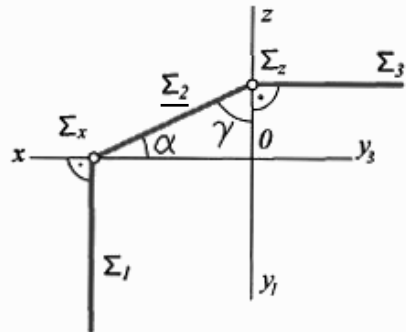


Рис. 3-27

3.6.1.3. Властивості проєктуючих площин:

- Слід проєктуючої площини на тій площині проєкцій, до якої вона перпендикулярна, зветься слідом-проєкцією.
- На епюрі слід-проєкція розташовується під гострим кутом до осей, два інших сліди – завжди перпендикулярні відповідним осям.
- Кут, утворений слідом-проєкцією і віссю координат дорівнює куту нахилу проєктуючої площини до відповідної площини проєкцій, на якій слід площини перпендикулярний до заданої осі.
- Все, що розташоване в проєктуючій площині, проєктується на її слід-проєкцію, при цьому на сліди-проєкції розташовуються тільки однойменні з ним проєкції точок, прямих, фігур, належних проєктуючій площині, а інші їх проєкції не зливаються зі слідами.
- Для того, щоб через точку або пряму провести проєктуючу площину, достатньо на епюрі через проєкцію точки чи прямої провести однойменний слід-проєкцію проєктуючої площини, інші два сліди її розташуються перпендикулярно відповідним осям.
- Через пряму, перпендикулярну до площини проєкції, проходить площина, перпендикулярна до тієї ж площини проєкцій.

3.6.2. Площини рівня

Площина, паралельна одній площині проєкцій, зветься площиною рівня, вона одночасно перпендикулярна двом іншим площинам проєкції.

Залежно від того, до якої площини проєкцій задана площина паралельна, ці площини рівня бувають: – горизонтальні, фронтальні або профільні.

3.6.2.1. Горизонтальна площина – паралельна горизонтальній площині проєкцій (одночасно вона перпендикулярна Π_2 і Π_3 , тобто проєктує відносно їх).

Якщо задана площина Σ паралельна горизонтальній площині проєкцій Π_1 (рис. 3-28), то на епюрі вона буде відтворена двома слідами-проєкціями, фронтальним слідом-проєкцією $\Sigma_2 \parallel O_x$ і профільним слідом – проєкцією $\Sigma_3 \parallel O_y$ (рис. 3-29), а точка A , розташована в площині Σ , на епюрі має свої проєкції: на полі

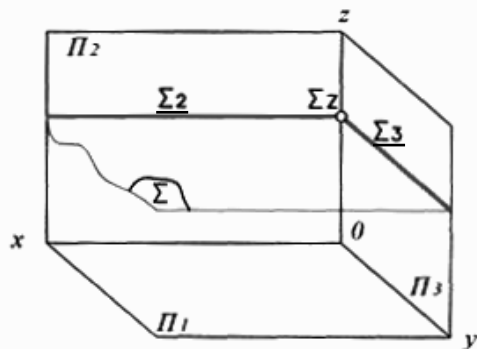


Рис. 3-28

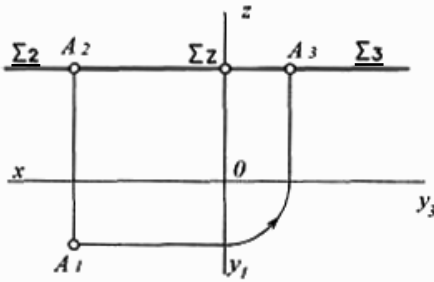


Рис. 3-29

3.6.2.2. Фронтальна площина – паралельна фронтальній площині проєкцій (одночасно перпендикулярна Π_1 і Π_3 , тобто двічі проєктуюча).

Якщо задана площина Δ паралельна фронтальній площині проєкцій Π_2 , то на епюрі вона буде відтворена двома слідами-проєкціями, – горизонтальним слідом-проєкцією $\Delta_1 \parallel Ox$ і профільним слідом $\Delta_3 \parallel Oz$ (рис. 3-31), а точка В, розташована в площині Δ , на епюрі має свої проєкції: на полі $\Pi_1 - B_1 \in \Delta_1$, на полі $\Pi_3 - B_3 \in \Delta_3$. Плошка фігура, наприклад трикутник ABC , розташований в площині $\Delta \parallel \Pi_2$ має фронтальну проєкцію $A_2B_2C_2$, яка дорівнює натуральній величині трикутника ABC , а горизонтальна та профільна проєкції цього трикутника є відрізки співпадаючи з слідами-проєкціями відповідно $A_1B_1C_1 \in \Delta_1$, а $B_3A_3C_3 \in \Delta_3$ (рис. 3-32).

$\Pi_2 - A_2 \in \Sigma_2$, на полі $\Pi_3 - A_3 \in \Sigma_3$. Плошка фігура, наприклад трикутник ABC , розташований в площині $\Sigma \parallel \Pi_1$, має горизонтальну проєкцію $A_1B_1C_1$, яка дорівнює натуральній величині трикутника ABC , а фронтальна та профільна проєкції цього трикутника є відрізки прямої, які зливаються з слідами-проєкціями, відповідно $A_2B_2C_2 \in \Sigma_2$, а $B_3A_3C_3 \in \Sigma_3$ (рис. 3-30).

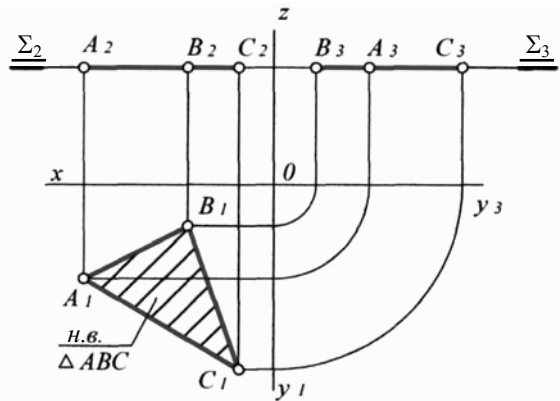


Рис. 3-30

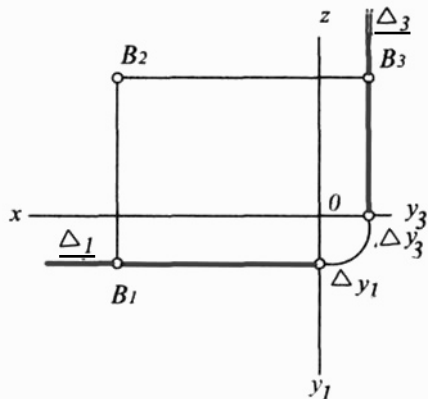


Рис. 3-31

3.6.2.3. Профільна площина паралельна профільній площині проєкцій Π_3 (одночасно перпендикулярна Π_1 і Π_2 , тобто проєктуюча відносно цих площин).

Якщо задана площина P паралельна профільній площині проєкцій Π_3 , то на епюрі вона буде відтворена двома слідами-проєкціями, – горизонтальним слідом-проєкцією $P_1 \parallel Oy_1$ і фронтальним слідом-проєкцією $P_2 \parallel Oz$ (рис.3-33), тобто $\bullet P_x \subset Ox$; $\bullet P_x \subset P_1 \perp Ox$; $\bullet P_x \subset P_2 \perp Oz$, а точка C розташована в площині P , на епюрі має свої проєкції: на полі $\Pi_1 - C_1 \subset P_1$, на полі $\Pi_2 - C_2 \subset P_2$. Плошка фігура, наприклад, трикутник ABC , розташований в площині $P \parallel \Pi_3$ має профільну проєкцію $A_3B_3C_3$, яка дорівнює натуральній величині трикутника ABC , а горизонтальна та профільна проєкції цього трикутника є відрізки, які зливаються з слідами-проєкціями відповідно $A_2B_2C_2 \subset P_2$, а $C_1A_1B_1 \subset P_1$ (рис. 3-34).

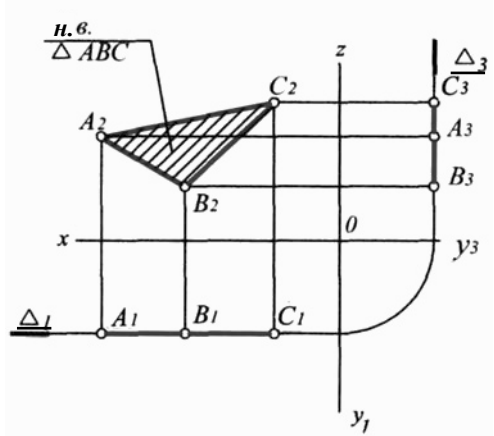


Рис. 3-32

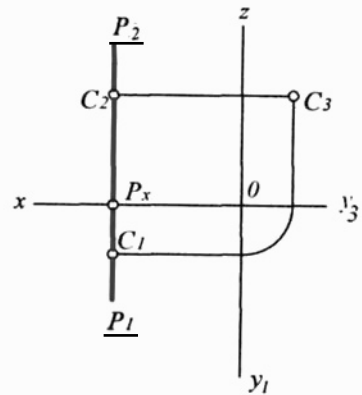


Рис. 3-33

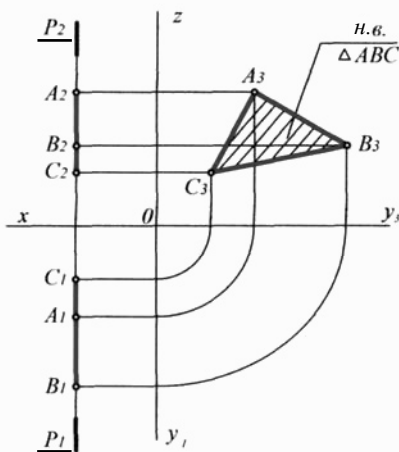


Рис. 3-34

3.6.2.4. Висновки стосовно площин рівня

– Площина рівня на епюрі відтворюється двома слідами-проєкціями, які паралельні тим двом осям, які визначають площину проєкцій, відносно якої площина рівня паралельна, а на епюрі з двох полів площина рівня визначається одним слідом, який паралельний осі, яка розділяє ці два поля.

– Будь-яка плоска фігура, розташована в площині рівня, проектується на ту площину проєкцій, відносно якої площина рівня паралельна в натуральну величину, а на дві інші – у вигляді відрізків прямих, які збігаються з її слідами-проєкціями.

3.7. Приклади розв'язків задач

Приклад 3-1.

Дано: точку $A(A_1, A_2)$ і кут α (рис. 3-35).

Необхідно: побудувати площину Δ , яка проходить через точку A і нахилена до Π_1 під $\angle \alpha$.

Розглянемо узагальнений розв'язок задачі на просторовій моделі (рис. 3-36). Площина Δ може бути побудована за допомогою допоміжної прямої AB загального положення, для цього:

1. Через точку A проведемо пряму AB так, щоб вона з Π_1 утворила $\angle \varphi = 90^\circ - \angle \alpha$.

($\bullet A \subset AB \wedge \Pi_1 = \angle \varphi = 90^\circ - \angle \alpha$) (рис. 3-37).

2. Через точку A , перпендикулярно до прямої AB проводимо площину Δ , яка і є шуканою площиною ($\bullet A \subset \Delta \perp AB$) (рис. 3-38).

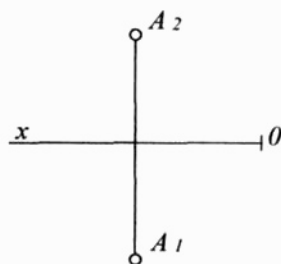


Рис. 3-35

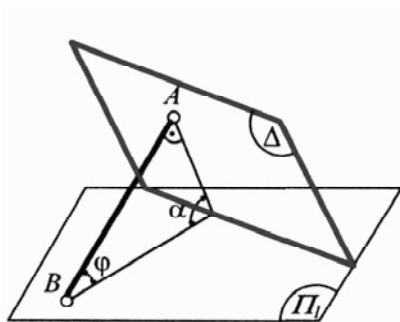


Рис. 3-36

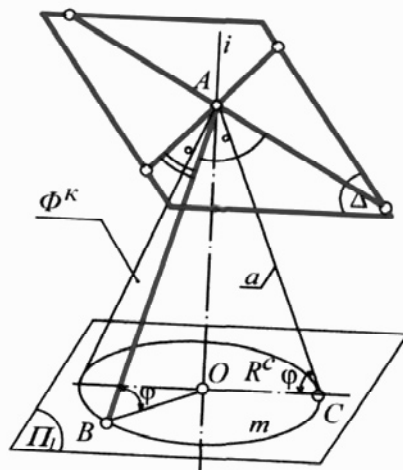


Рис. 3-37

Задача має безліч розв'язків, бо з точки A до Π_1 під $\angle \varphi$ можливо провести безліч допоміжних прямих, і до кожної з них проведена на площина через точку A під прямим кутом до AB , буде шуканою площиною.

Алгоритм розв'язку (по просторовій моделі, рис. 3-37 та епюрі розв'язку наведеного на рис. 3-38):

1. $\bullet A \in AB \wedge \Pi_1 = \angle \varphi = 90^\circ - \angle \alpha$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet A \in a \parallel \Pi_2; a \wedge \Pi_1 = \angle \varphi; \\ a \cap \Pi_1 \Rightarrow \bullet C \in \Pi_1; AC! \end{array} \right\}$$

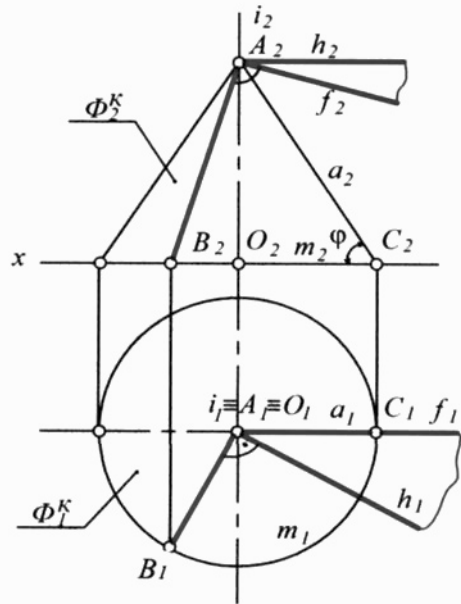


Рис. 3-38

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet A_2 \in a_2 \wedge Ox = \angle \varphi; \bullet A_1 \in a_1 \parallel Ox \\ a_2 \cap Ox \Rightarrow C_2 \Rightarrow C_1 \in a_1; \end{array} \right\}$$

$$\bullet A \in i \perp \Pi_1 \left\{ \bullet A_2 \in i_2 \perp Ox; \bullet A_1 \equiv i_1; \right\}$$

$$\left\{ i \cap \Pi_1 \Rightarrow \bullet O \right\} \quad \left\{ i_2 \cap Ox \Rightarrow O_2; A_1 \equiv i_1 \equiv O_1 \right\}$$

$AC \cup i \rightarrow \Phi^k - \text{ГМПП} \wedge \Pi_1 = \angle \varphi$ (ГМПП – геометричне місце прямих простору, Φ^k – поверхня прямого кругового конуса з вершиною в точці A і віссю $i \perp \Pi_1$, всі твірні цього конуса дорівнюють AC і є прямими, проведеними з точки A до площини Π_1 під кутом φ).

$\bullet C \cup i \Rightarrow m \subset \Pi_1$ (m – коло основи конуса з центром в $\bullet O$; R^C – радіус кола основи, $R^C = OC$)

$$\left\{ \bullet C_2 \in m_2 \text{ (пряма)} \equiv Ox; C_1 \in m_1 \text{ (коло з центром в } \bullet O_1) \right\}$$

$m \supset \bullet B \cup \bullet A \Rightarrow AB!$ ($\bullet B$ довільно взята на m).

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet B_1 \subset m_1 \Rightarrow B_2 \subset m_2; \\ \bullet B_1 \cup \bullet A_1 \Rightarrow A_1B_1; \bullet B_2 \cup \bullet A_2 \Rightarrow A_2B_2 \end{array} \right\}$$

$$2. \bullet A \subset \Delta \perp AB \left(\bullet A \subset \Delta (f \cap h) \perp AB \wedge \Pi_1 = \angle \varphi = 90^\circ - \angle \alpha \right) \Rightarrow \Delta \wedge \Pi_1 = \angle \alpha;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet A_2 \subset f_2 \perp A_2B_2; \bullet A_2 \subset h_2 \parallel Ox \\ \bullet A_1 \subset h_1 \perp A_1B_1; \bullet A_1 \subset f_1 \parallel Ox \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta (f \cap h)! \Delta \wedge \Pi_1 = \angle \alpha.$$

Приклад 3-2:

Дано: точку $A(A_1, A_2)$ (рис. 3-35) та кут α і кут β .

Необхідно: побудувати площину Δ , яка проходить через точку A і нахилена до Π_1 під $\angle \alpha$, а до Π_2 під $\angle \beta$.

Розв’язок цього прикладу виконується із застосуванням методики та послідовності розв’язку попереднього прикладу № 3-1.

Шукана площина Δ пройде через точку A і розташується перпендикулярно до допоміжної прямої AB , яка буде займати конкретне положення відносно Π_1 і Π_2 , при якому кут нахилу прямої AB до Π_1 дорівнює $\angle \varphi = 90^\circ - \angle \alpha$, а до Π_2 $\angle \varphi' = 90^\circ - \angle \beta$. Побудова AB показана на просторовій моделі рис. 3-39. Згідно з п.1 алгоритму рішення прикладу № 3-1, з точки A (рис. 3-40):

– відносно Π_1 будуюмо один конус Φ^k з основою m , всі твірні цього конуса за розміром дорівнюють AD і нахилені до Π_1 під $\angle \varphi = 90^\circ - \angle \alpha$;

– відносно Π_2 будуюмо другий конус Φ^k з основою m' , всі твірні цього конуса за розміром дорівнюють AC (при умові $AC = AD$) і нахилені до Π_2 під $\angle \varphi' = 90^\circ - \angle \beta$.

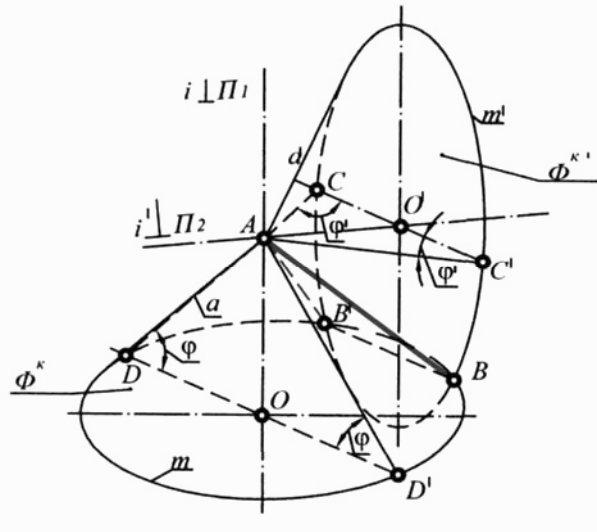


Рис. 3-39

Перетин двох конусів Φ^k і Φ^k , зі спільною вершиною в точці A , дають конкретний напрямок допоміжної прямої AB . Побудова якої впливає з визначення загальних твірних побудованих конусів, що легко виконати в тому випадку, коли довжини твірних обох конусів однакові, тому натуральну величину твірної конуса Φ^k , яка дорівнює A_2D_2 (як фронтальна проекція фронтальної обрисової твірної), відкладаємо по напрямку горизонтальної проекції a'_1 горизонтальної очиркової твірної конуса Φ^k , отримуємо $A_1C'_1 = A_2D_2$. Таким чином, твірна AD конуса Φ^k дорівнює твірній AC' конуса Φ^k . Перетин двох основ конусів на полі Π_1 ($m_1 \cap m'_1 \Rightarrow \bullet B_1$ і B'_1) визначить точки B і B' через які пройдуть шукані твірні AB і AB' . Згідно з п. 2 алгоритма розв'язку прикладу № 3-1, через точку A проводимо шукану площину $\Delta(f \cap h)$, перпендикулярну до прямої AB (та $\Delta'(f' \cap h') \perp AB'$).

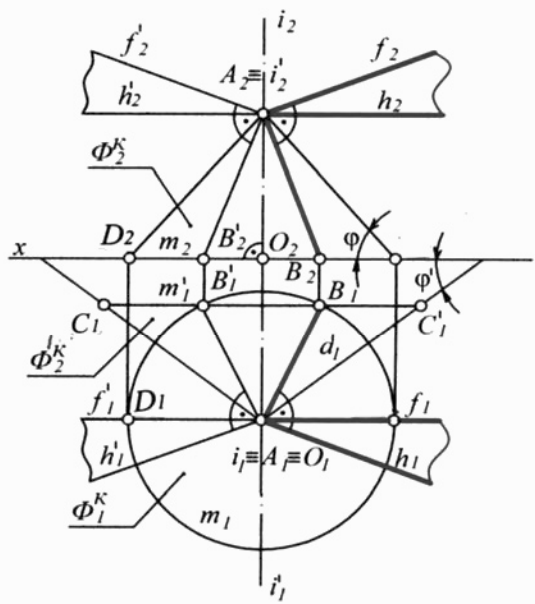


Рис. 3-40

На рис. 3-40 наведені два розв'язки задачі.

Якщо: $\angle \alpha + \angle \beta < 90^\circ$ – задача може мати чотири рішення;

$\angle \alpha + \angle \beta = 90^\circ$ – задача може мати два рішення;

$\angle \alpha + \angle \beta > 90^\circ$ – задача рішення немає.

Приклад 3-3.

Дано: точку $A(A_2, A_1)$

Необхідно: побудувати площину Δ , яка проходить паралельно осі Ox і рівнонахилена до Π_1 і Π_2 (без застосування Π_3).

Розглядаючи просторове зображення першого розв'язку задачі на рис. 3-41, з'ясуємо, що шукана площина Δ паралельна осі Ox є профільно проектуючою і її сліди Δ_1 і Δ_2 пройдуть паралельно осі Ox , і розташуються на однаковій відстані від Ox ($O\Delta_y = O\Delta_z$).

Виходячи з властивості про належність точки A до площини Δ , через точку A проведемо довільну пряму і побудуємо її горизонтальний слід M і фронтальний слід N . Побудувавши горизонтальну M_1N_1 та фронтальну M_2N_2

проекції прямої MN , з'ясуємо, що трикутник $M_2N_1N_2$ прямокутний, і трикутник $M_2N_1M_1$ теж прямокутний. В цих трикутниках катет M_2N_1 – спільний, а катет M_1M_2 дорівнює катету N_1N_2 , звідси: $\Delta M_2N_1N_2 = \Delta M_2N_1M_1$, гіпотенуза M_2N_2 утворює кут зі спільним катетом M_2N_1 , який зливається з віссю Ox , і гіпотенуза M_1N_1 з спільним катетом M_2N_1 утворюють рівні кути. Взявши довільну пряму, яка проходить

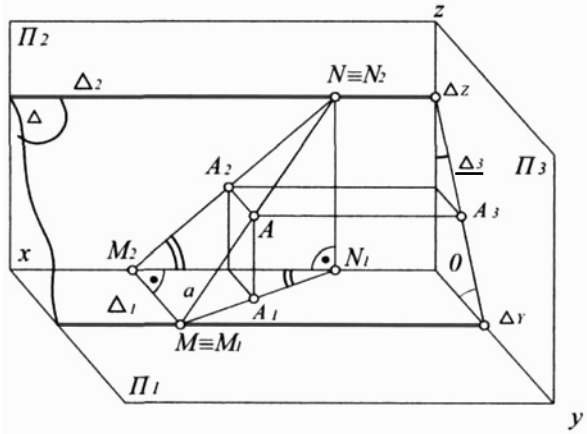


Рис. 3-41

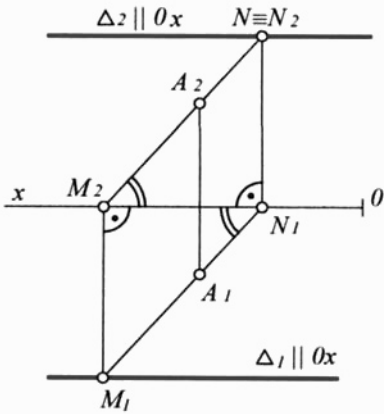


Рис. 3-42

через точку A в площині Δ , отримали фронтальну і горизонтальну проекції, рівнонахилені до осі Ox і проходять через однойменні проекції точки A , що і видно на епюрі (рис. 3-42). Побудувавши сліди довільної прямої a , через точку N_2 пройде фронтальний слід $\Delta_2 \parallel Ox$ і точку M_1 через яку пройде горизонтальний слід $\Delta_1 \parallel Ox$.

Розглянемо другий розв'язок задачі, коли через точку A пройде площина Σ' , паралельна бісекторній площині Σ двогранного кута Π_1 і Π_2 , яка теж рівнонахилена до Π_1 і Π_2 і паралельна осі Ox (рис. 3-43). На цьому рисунку видно, що бісекторна площина Σ має горизонтальний слід

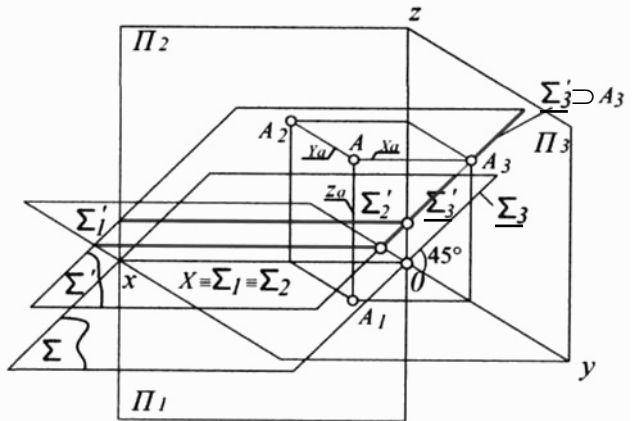


Рис. 3-43

Σ_1 і фронтальний Σ_2 , які зливаються між собою і віссю Ox . Профільний слід Σ_3 розташований під кутом 45° до осі Oz і Oy .

Врахувавши, що площина $\Sigma' \parallel \Sigma$ і Σ' проходить через точку A , то $\Sigma'_3 \supset A_3$, $\Sigma'_3 \cap Oz \Rightarrow \Sigma'_z$ і $\Sigma'_3 \cap Oy \rightarrow \Sigma'_y$ (в другому октанті).

Точка $\Sigma'_z \subset \Sigma'_2 \parallel Ox$, а точка $\Sigma'_y \subset \Sigma'_1 \parallel Ox$ і, беручи до уваги, що $O\Sigma'_z = O\Sigma'_y$ і при повертанні площини Π_1 до збігання з Π_2 : $O\Sigma'_z = O\Sigma'_y$, то $\Sigma'_1 \equiv \Sigma'_2$, (рис. 3-44). На рис. 3-45 показано зображення слідів площини Σ' , яка проходить через точку A , де видно, що сліди $\Sigma'_1 \equiv \Sigma'_2 \parallel Ox$, і сліди віддалені від осі Ox на відстань, що дорівнює різниці, координат точки A , тобто $Z^A - Y^A$.

Одночасно, підкреслимо, якщо координата Y^A більше координати Z^A (тобто, точка A розташована перед бісекторною площиною Σ), то слід $\Sigma'_1 \equiv \Sigma'_2$ будуть розташовані нижче осі Ox на відстані $Y^A - Z^A$.

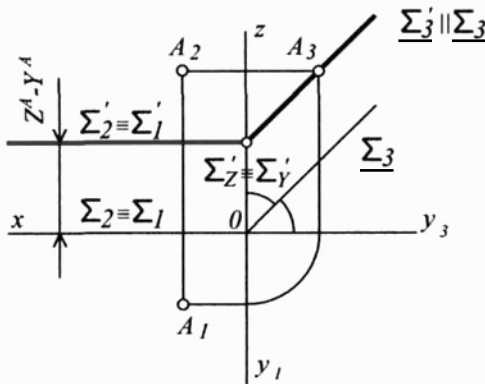


Рис. 3-44

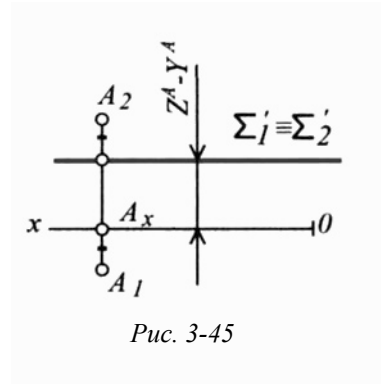
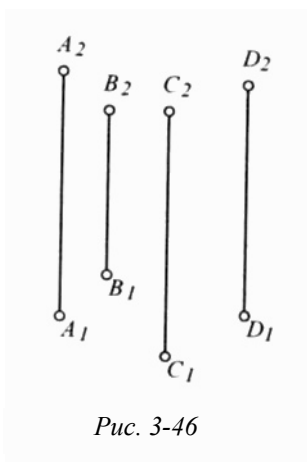


Рис. 3-45

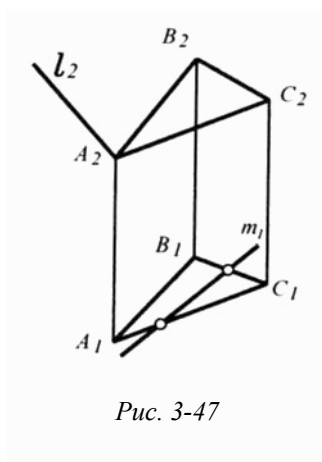
3.8. Задачі для розв'язку

3.8.1. Задачі для позааудиторного розв'язку

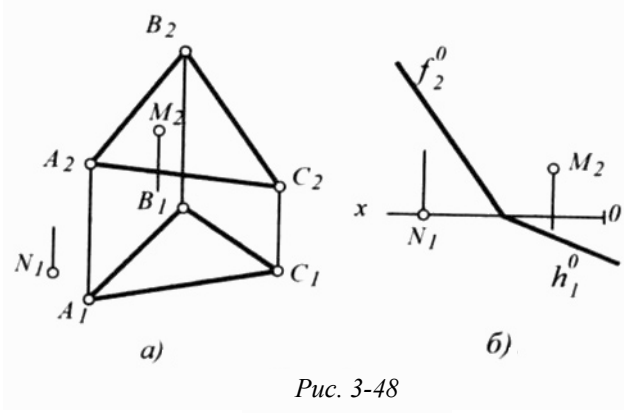
Задача 3-1. Визначити належність точок А, В, С і Д одній площині (рис. 3-46).



Задача 3-2. Побудувати проєкції l_1 та m_2 прямих l і m , які лежать в площині трикутника ABC ($l \parallel B_2C_2$) (рис. 3-47).



Задача 3-3. Визначити відсутні проєкції точок M і N , які лежать у заданій площині (рис. 3-48).



Задача 3-4. Включити пряму l у такі площини (рис. 3-49).

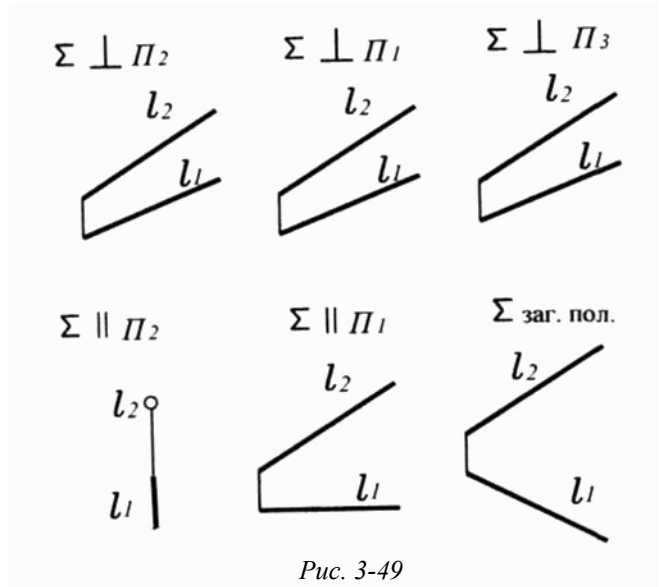


Рис. 3-49

Задача 3-5. Побудувати сліди заданих площин (горизонталь і фронталь нульового рівня) (рис. 3-50).

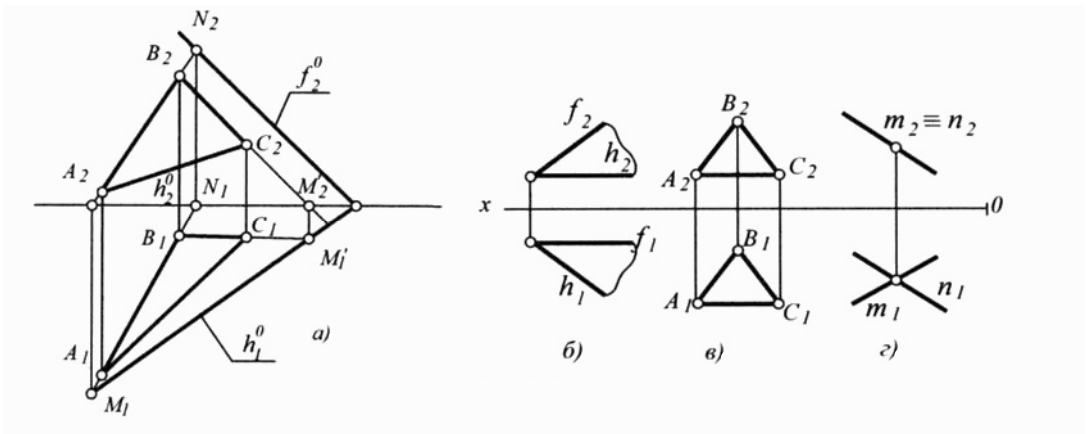


Рис. 3-50

3.8.2. Задачі для аудиторного розв'язання

Задача 3-6. Побудувати проекцію $A_1B_1C_1 \triangle ABC$, що лежить у заданій площині $\Sigma (m \cap n)$ (рис. 3-51).

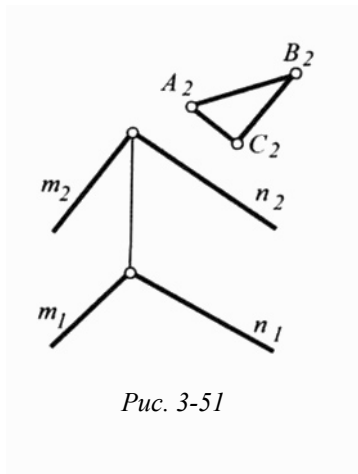


Рис. 3-51

Задача 3-7. Добудувати фронтальну проекцію п'ятикутника (рис. 3-52).

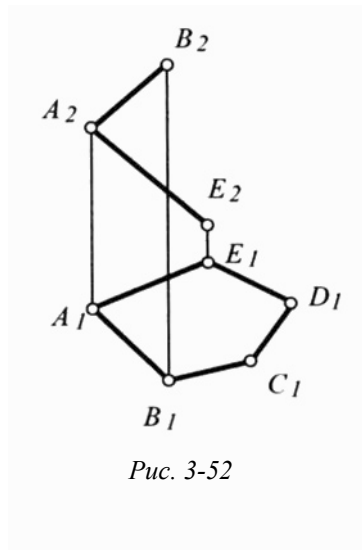


Рис. 3-52

Задача 3-8. Добудувати сліди площини загального положення, що проходить через пряму AB і рівно нахилена до площин Π_1 та Π_2 (рис. 3-53).

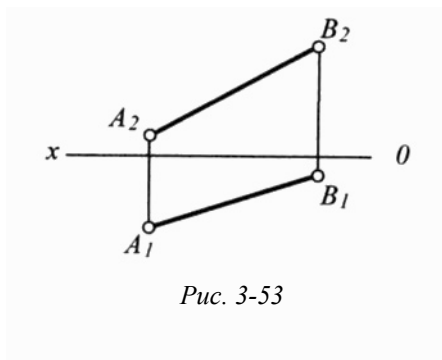


Рис. 3-53

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що визначає розташування площини відносно площин проекцій? Дайте визначення та способи побудови слідів площини.
2. Які визначники можуть задати площину в просторі?
3. Як можуть бути розташовані сліди площин відносно осі x і що можливо визначити по їх розташуванню?
4. В чому полягає ознака належності точки до площини?
5. В чому полягає ознака належності прямої до площини?
6. Як розташовані прямі окремого положення площини відносно площин проекцій, та їх проекції?
7. В чому полягає перезадання площини?
8. Як визначити кут нахилу площини загального положення відносно площини Π_1 ?
9. Як визначити кут α для фронтально проектуючої площини та фронтальної площини?
10. Що таке слід – проекція площини окремого положення?
11. Що спільне для фронтального та горизонтального сліду профільної площини?
12. В якій площині повинен бути розташованим трикутник, щоб одна з його проекцій дорівнювала натуральній величині цього трикутника?
13. В яких випадках трикутник проектується на площину проекцій у вигляді відрізка прямої?
14. Як побудувати площину, яка проходить через задану точку простору і нахилена під заданим кутом α ?
15. Послідовність побудови площини, яка проходить через задану точку, що належить площині Π_2 і розташовану під заданими кутами α і β .

Тема 4

Взаємне положення площин

Відрізняють три взаємних положення площин (або їх відсіків):

- які збігаються;
- паралельні (не співпадаючі);
- які перетинаються.

Методика визначення взаємного розташування відсіків двох площин:

Дві прямі, які перетинаються, однієї площини (її відсіку) перевіряються на належність їх до другої площини (до другого відсіку) і далі аналізують взаємне розташування прямих однієї площини і побудованих прямих другої площини і:

– Якщо дві прямі, які перетинаються належать одному відсіку і другому відсіку (в своєму продовженні), то один та другий відсік належать одній площині. Такі відсіки називаються збігаючими (компланарними).

– Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини паралельні двом прямим, які перетинаються другої площини, то ці дві площини паралельні між собою.

– Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини мимобіжні (або перетинаючі) відносно двох прямих, які перетинаються другої площини, то такі дві площини перетинаються між собою.

4.1. Відсіки які збігаються (належать одній площині)

A і B – два задані відсіки.

1. Π – площина-посередник, що наведена на рис. 4-1.

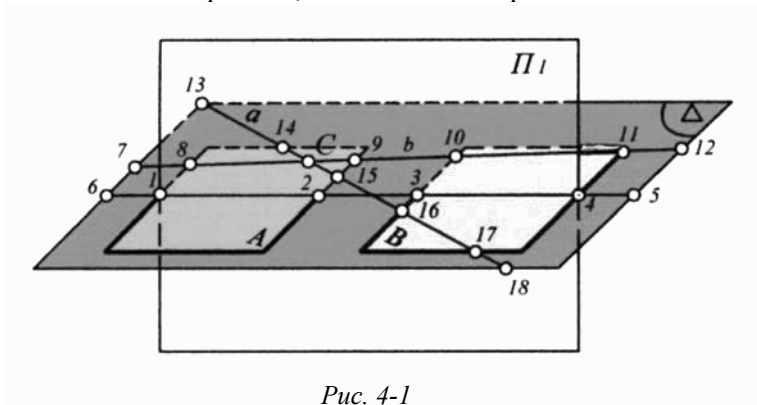


Рис. 4-1

Лінії перетину заданих відрізків з площиною – посередником лежать на одній прямій, відрізки компланарні, так як:

$П \cap A \Rightarrow 1 \dots 2$; $П \cap B \Rightarrow 3 \dots 4$; $1 \dots 2$ і $3 \dots 4$ належать одній прямій $1 \dots 4$.

2. Прямі a і b – які перетинаються, належать відріку A ; $a(14, 15) \cap b(8, 9) \Rightarrow \bullet C$. Продовження прямих a і b належать відріку B , тому що $a \cap B \Rightarrow \bullet 16$ і $\bullet 17$, які належать відріку B , а $b \cap B \Rightarrow \bullet 10$ і $\bullet 11$, які належать відріку B . Згідно з ознакою належності прямої до площини: $a \supset B$ т. я. a проходить через точки 16 і 17, що належать відріку B , $b \supset B$ т. я. b проходить через точки 10 і 11, що належать відріку B . Враховуючи те, що дві перетинаючі прямі a і b належать одному відріку A , а продовження прямих a і b належать відріку B , то відрік A і B збігаються (належать одній площині Δ , компланарні).

4.2. Площини паралельні

Розглянемо взаємне положення площин P і θ , на рис. 4-2:

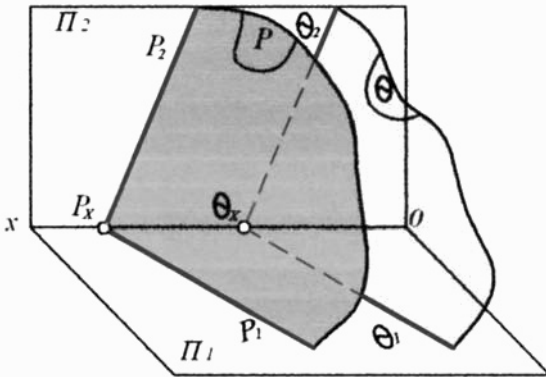


Рис. 4-2

$$П_1 \cap P \Rightarrow P_1; \quad П_1 \cap \theta \Rightarrow \theta_1;$$

$$П_2 \cap P \Rightarrow P_2; \quad П_2 \cap \theta \Rightarrow \theta_2;$$

Якщо: $P_1 \parallel \theta_1$, а $P_2 \parallel \theta_2$, то $P \parallel \theta$.

Тобто, якщо дві паралельні площини P і θ перетинаються площиною $П_1$ або $П_2$, то лінії їх перетину будуть паралельні між собою.

В площині P : P_1 і P_2 – дві прямі, що перетинаються, належні цій площині P .

В площині θ : θ_1 і θ_2 – дві прямі, що перетинаються, належні цій площині θ .

Звідси витікає ознака паралельності двох площин:

- дві площини паралельні, якщо дві прямі, що перетинаються однієї площини паралельні двом прямим, що перетинаються другої площини.

Такими прямими, що перетинаються можуть бути і сліди площин, і їх прямі рівня, або довільні дві прямі цієї площини (рис. 4-4).

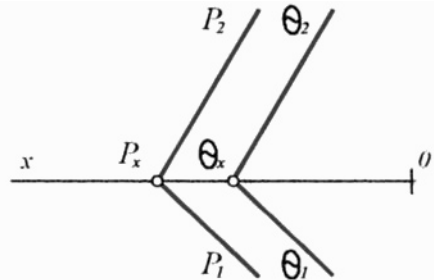


Рис. 4-3

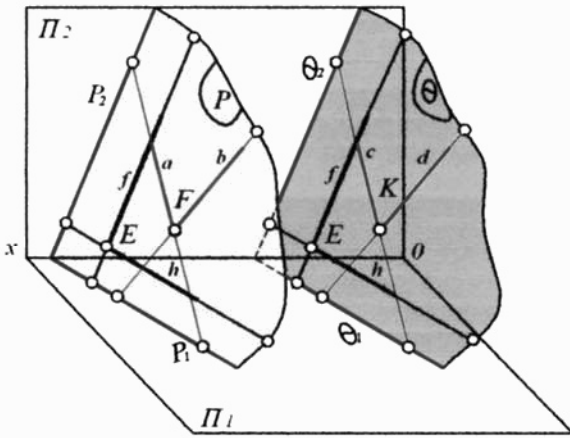


Рис. 4-4

Якщо дві площини P і θ задані, наприклад, двома прямими, що перетинаються, то може бути, що: площина P задана $P(P_1, P_2)$ або $P(f \cap h)$ або $P(a \cap b)$, а площина θ задана $\theta(\theta_1, \theta_2)$ або $\theta(f' \cap h')$ або $\theta(c \cap d)$ і $P \parallel \theta$, то на епюрі:

Якщо: $P(P_1, P_2) \parallel \theta(\theta_1, \theta_2)$, то $P_2 \parallel \theta_2$, а $P_1 \parallel \theta_1$ (рис.4-3).

Якщо: $P(f \cap h) \parallel \theta(f' \cap h')$, то $f_2 \parallel f'_2$, $h_1 \parallel h'_1$ (рис. 4-5).

Якщо: $P(a \cap b) \parallel \theta(c \cap d)$, то $(a_2 \cap b_2) \parallel (c_2 \cap d_2)$, $(a_1 \cap b_1) \parallel (c_1 \cap d_1)$ (рис. 4-6).

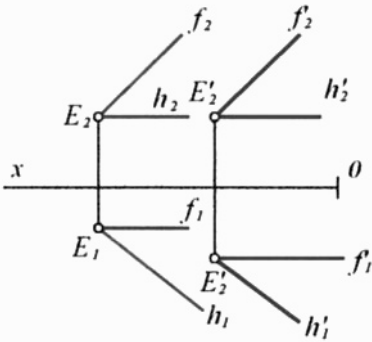


Рис. 4-5

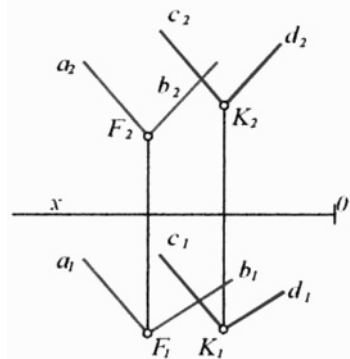


Рис. 4-6

Якщо площини P і θ – паралельні між собою, то вони паралельні, коли паралельні дві будь-які однойменні пари слідів, а якщо P і θ проектуючі, то їх паралельність достатньо підкреслюється, коли одна з цих паралельних однойменних пар є сліди на площині проєкції, до якої P і θ перпендикулярні (рис. 4-7) (коли сліди – проєкції паралельні).

Паралельність двох площин (або їх відсіків) можна визначити за допомогою методу

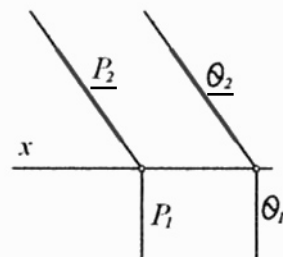


Рис. 4-7

допоміжних площин-посередників, застосований на рис. 4-10. Якщо 1...2 і 3...4 паралельні між собою, як і 5...6 \parallel 7...8, тоді площини P і θ паралельні.

4.3. Площини, які перетинаються

Коли дві площини перетинаються, то утворюється їх лінія перетину – пряма лінія, яка є геометричним місцем точок, що одночасно належать кожній із заданих площин.

Для побудови прямої в просторі достатньо:

– щоб було задано дві точки, з'єднавши які – отримуємо пряму. Коли точки A і B задано, то: $A \cup B \Rightarrow AB \subset l$ (рис. 4-8);

– щоб було задано одну точку і напрямок прямої, тоді з точки паралельно вказаному напрямку пройде пряма (промінь). Коли задані одна точка C і напрямок s , то: з $\bullet C$ проводимо пряму $\parallel s$ отримуємо промінь і далі пряму l .

• $C \subset l \parallel s$ (рис. 4-9).

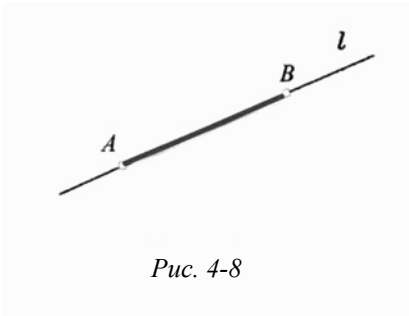


Рис. 4-8

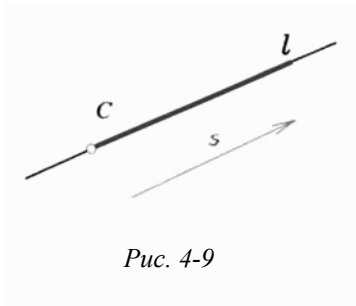


Рис. 4-9

4.3.1. Загальний метод побудови лінії перетину площин (ЛПП)

Лінія перетину площин є пряма лінія і для її побудови визначається дві точки, спільні для двох площин, які перетинаються. Для побудови лінії перетину площин застосовується метод допоміжних площин-посередників.

Наприклад, площина P , задана трикутником EFG , перетинається з площиною θ , яка задана двома паралельними прямими AB і CD , при цьому буде отримана лінія перетину площин, задана відрізком MN .

$$P(\triangle ABC) \cap \theta(AB \parallel CD) \Rightarrow MN.$$

Покажемо побудову лінії перетину площин, відтворену відрізком MN .

4.3.1.1. На просторовому зображенні (рис. 4-10):

Розв'язок: Вибираємо площину – посередник Δ і перерізаємо нею площини P і θ , при цьому:

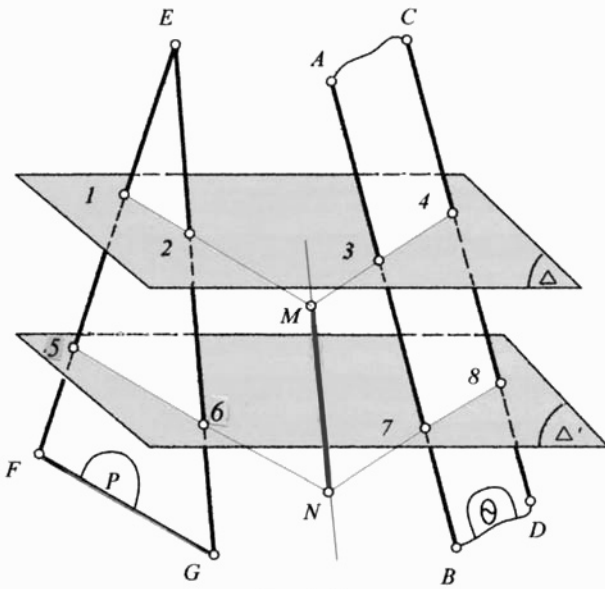


Рис. 4-10

$\Delta \cap P \Rightarrow 1...2$ (ЛППД Δ і P);
 $\Delta \cap \theta \Rightarrow 3...4$ (ЛППД Δ і θ);
 $1...2 \cap 3...4 \Rightarrow M$ – точка,
 яка є спільною для площин
 P і θ .

Для побудови другої
 спільної точки для площин
 P і θ , вибираємо дру-
 гу площину – посеред-
 ник $\Delta' \parallel \Delta$, при цьому:

$\Delta' \cap P \Rightarrow 5...6$ (ЛППД Δ' і P);
 $\Delta' \cap \theta \Rightarrow 7...8$ (ЛППД Δ' і θ);
 $5...6 \cap 7...8 \Rightarrow N$ – це друга
 точка, яка є спільною для
 площин P і θ ;

• $M \cup \bullet N \Rightarrow MN$!

Площина – посередник (сiчна площина) може бути розташована в просторі довільно, але зручніше, щоб вона була площиною окремого положення, при цьому спрощується побудова лінії перетину площин.

4.3.1.2 - на епюрі (рис. 4-11):

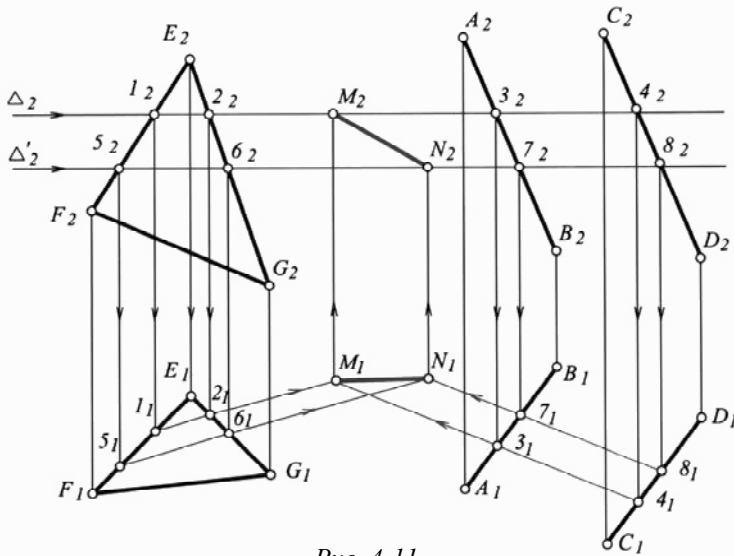


Рис. 4-11

Алгоритм розв'язку:

Вибираємо:

– Δ – площину-посередник $\parallel P_1$;

$\{ \Delta_2 \text{ пройде } \parallel O_x; \}$

– $\Delta \cap P \Rightarrow 1\dots 2$;

$\{ \Delta_2 \cap E_2F_2G_2 \Rightarrow 1_22_2 \Rightarrow 1_12_1 \subset E_1F_1G_1 \}$

– $\Delta \cap \theta \Rightarrow 3\dots 4$;

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 \cap A_2B_2 \Rightarrow 3_2 \Rightarrow 3_1 \subset A_1B_1; \\ \Delta_2 \cap C_2D_2 \Rightarrow 4_2 \Rightarrow 4_1 \subset C_1D_1; \\ \bullet 3_1 \cup 4_1 \Rightarrow 3_14_1; \end{array} \right\}$$

– $1\dots 2 \cap 3\dots 4 \Rightarrow \bullet M$

$\{ 1_12_1 \cap 3_14_1 \Rightarrow M_1 \Rightarrow M_2 \subset \Delta_2 \}$

Вибираємо:

– $\Delta' \parallel \Delta$;

$\{ \Delta'_2 \text{ пройде } \parallel \Delta_2 \}$

– $\Delta' \cap P \Rightarrow 5\dots 6$;

$\{ \Delta'_2 \cap E_2F_2G_2 \Rightarrow 5_26_2 \Rightarrow 5_16_1 \subset E_1F_1G_1 \}$

– $\Delta' \cap \theta \Rightarrow 7\dots 8$;

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta'_2 \cap A_2B_2 \Rightarrow 7_2 \Rightarrow 7_1 \subset A_1B_1; \\ \Delta'_2 \cap C_2D_2 \Rightarrow 8_2 \Rightarrow 8_1 \subset C_1D_1; \\ \bullet 7_1 \cup \bullet 8_1 \Rightarrow 7_18_1 \\ - 5\dots 6 \cap 7\dots 8 \Rightarrow N! \end{array} \right\}$$

$$\{ 5_1 6_1 \cap 7_1 8_1 \Rightarrow N_1 \Rightarrow N_2 \subset \Delta'_2 \}$$

$$- \bullet M \cup \bullet N \Rightarrow MN!$$

$$\{ M_1 \cup N_1 \Rightarrow M_1 N_1; M_2 \cup N_2 \Rightarrow M_2 N_2 \}.$$

4.3.2. Побудова лінії перетину двох площин, заданих слідами

Для побудови цієї лінії перетину площин необхідно побудувати дві спільні точки для них, для цього можуть бути застосовані площини проєкцій Π_1 і Π_2 , які розглядаються як допоміжні площини-посередники.

Наприклад: $\Delta(\Delta_1, \Delta_2) \cap \Sigma(\Sigma_1, \Sigma_2) \Rightarrow MN - ?$ (рис. 4-12).

Алгоритм рішення:

$$- \Pi_1 \cap \Delta \Rightarrow \Delta_1$$

$$\Pi_1 \cap \Sigma \Rightarrow \Sigma_1$$

$\Delta_1 \cap \Sigma_1 \Rightarrow \bullet M_1 \equiv M$ – одна точка спільна для Δ і Σ ;

M_2 – розташується на осі Ox ;

$$\Pi_2 \cap \Delta \Rightarrow \Delta_2;$$

$$\Pi_2 \cap \Sigma \Rightarrow \Sigma_2;$$

$\Delta_2 \cap \Sigma_2 \Rightarrow \bullet N_2 \equiv N$ – друга точка, спільна для Δ і Σ ;

N_1 – розташується на осі Ox ; $\bullet M \cup \bullet N \Rightarrow MN!$ – ЛПП Δ і Σ .

Тобто, з'єднавши: M_1 і N_1 отримується $M_1 N_1$ – горизонтальна проєкція лінії перетину площин; M_2 і N_2 отримується $M_2 N_2$ – фронтальна проєкція лінії перетину площин.

Перетин двох пар однойменних слідів площин Δ і Σ дають дві точки M і N , які одночасно належать одній і другій площині, тобто належать лінії перетину площин Δ і Σ .

Висновок. Якщо перетинаються дві площини загального положення, які задані своїми слідами, то їх лінія перетину пройде від точки перетину однієї пари однойменних слідів до точки перетину другої пари однойменних слідів.

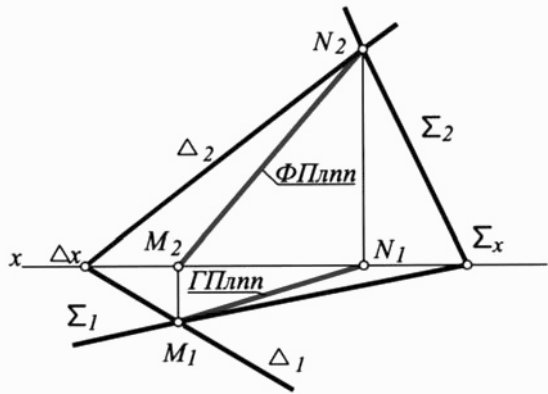


Рис. 4-12

4.3.2.1. Побудова лінії перетину двох площин з парю паралельних однойменних слідів

Лінія перетину таких площин будується по одній точці та відомому напрямку. Спільною точкою є точка перетину пари слідів, які між собою не паралельні, а відомим напрямком буде напрямком, паралельний паралельним слідам площин, які перетинаються.

Якщо: $\Delta (\Delta_1, \Delta_2) \cap \Sigma (\Sigma_1, \Sigma_2) \Rightarrow$ ЛПП то на епюрі (рис.4-13):

$\Delta_1 \parallel \Sigma_1, \Sigma_2 \cap \Delta_2 \Rightarrow \bullet N_2 \equiv N, a \bullet N_1 \in OX$;

$\bullet N_2 \in \PhiПлпп \parallel OX$; $\bullet N_1 \in ГПлпп \parallel \Sigma_1 \parallel \Delta_1$.

Якщо $\Delta \perp \Pi_1$ і $\Sigma \perp \Pi_1$; $\Delta \cap \Sigma \Rightarrow$ ЛПП – ?, то на епюрі (рис.4-14):

$\Delta_1 \cap \Sigma_1 \Rightarrow \bullet M_1 \equiv M$; $ГПлпп \equiv M_1$, а $\PhiПлпп$ пройде з $\bullet M_2$ і розташується $\parallel \Delta_2 \parallel \Sigma_2$.

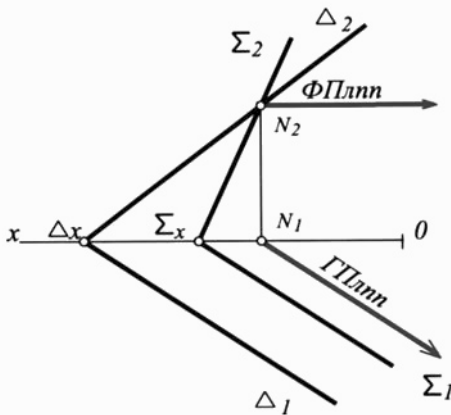


Рис. 4-13

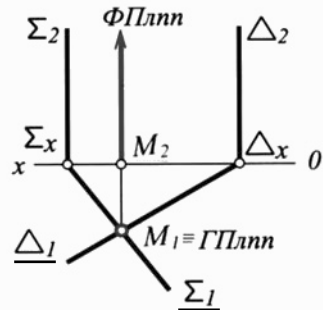


Рис. 4-14

Висновок. Якщо перетинаються будь-які дві площини, які задані слідами і коли, принаймні, одна пара їх однойменних слідів паралельні між собою, то лінія перетину таких площин пройде з точки перетину не паралельних однойменних слідів і розташується паралельно паралельним слідам цих площин.

4.3.2.2. Побудова лінії перетину площини рівня з площиною загального положення (рис. 4-15)

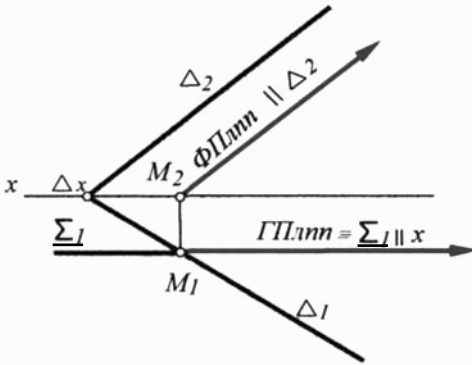


Рис. 4-15

Лінія перетину площини будуватиметься за однією точкою та відомим напрямом. Якщо, Δ – площина загального положення перетинається з площиною Σ – площиною рівня, наприклад, $\Sigma \parallel P_2$. При цьому, площина проєкцій P_2 і площина Σ , які є паралельні між собою перетинаються площиною Δ , то лінія перетину площин Δ з P_2 і Δ з Σ є паралельні прямі, тобто $\Delta \cap P_2 \Rightarrow \Delta_2$, значить лінія перетину площин

$\Delta \cap \Sigma \Rightarrow$ ЛПП, яка паралельна Δ_2 – це напрямок лінії перетину площин, а спільною точкою є точка перетину однойменних слідів.

$\Sigma_1 \cap \Delta_1 \Rightarrow M_1$ – горизонтальна проєкція спільної точки M_1 , а M_2 розташується на Ox . Таким чином, якщо:

$\Delta (\Delta_1, \Delta_2) \cap \Sigma (\Sigma_1) \Rightarrow$ ЛПП – ? то на епюрі: $\Sigma_1 \cap \Delta_1 \Rightarrow M_1, \Rightarrow M_2$;

- $M_1 \subset$ горизонтальній проєкції ЛПП $\equiv \Sigma_1$;
- $M_2 \subset$ фронтальній проєкції ЛПП $\parallel \Delta_2$.

Висновок: Будь-яка площина загального положення перетинається з фронтальною площиною по фронталі, яка паралельна її фронтальному слідові, а з горизонтальною площиною – по горизонталі, яка паралельна її горизонтальному слідові.

4.3.2.3. Побудова лінії перетину проєктуючої площини з площиною загального положення (рис. 4-16)

Лінія перетину площин будуватиметься за двома спільними точками. Беручи до уваги, що одна з площин проєктуюча, то одна з проєкцій лінії перетину площин зливається з її слідом-проєкцією.

Якщо площина $\Sigma \perp P_2$; а P – площина загального положення

$\Sigma (\Sigma_1, \Sigma_2) \cap P(P_1, P_2) \Rightarrow MN$ – ЛПП – ?

$\Sigma_2 \cap P_2 \Rightarrow N_2$, а N_1 розташується на Ox ;

$\Sigma_1 \cap P_1 \Rightarrow M_1$; а M_2 розташується на Ox і $M_2 \equiv \Sigma_x$; з'єднавши одноіменні проєкції $\bullet M$ і $\bullet N$, отримуємо:

- $\bullet M_1 \cup \bullet N_1 \Rightarrow M_1N_1 - \Gamma\text{ПЛПП}$;
- $\bullet M_2 \cup \bullet N_2 \Rightarrow M_2N_2 - \Phi\text{ПЛПП} \equiv \Sigma_2$.

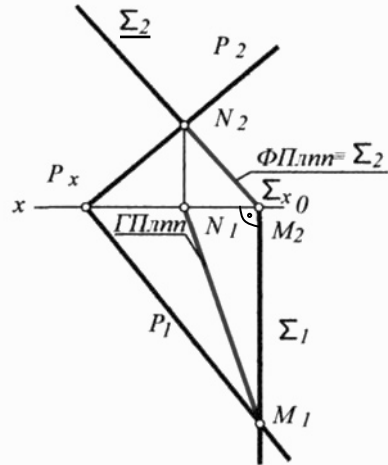


Рис. 4-16

Висновок: Якщо одна з площин є площиною загального положення, а друга площина проєктуюча, то одна проєкція лінії перетину площин зливається зі слідом-проєкцією проєктуючої площини (або за висновком до п. 4.3.2), а друга проєкція ЛПП визначається із умови належності цієї прямої до площини загального положення.

4.4. Побудова лінії перетину проєктуючої площини з площиною загального положення, заданою не слідами

$\Sigma (\Sigma_2) \perp P_2$; $P(\Delta ABC)$; $\Sigma (\Sigma_2) \cap P(\Delta ABC) \Rightarrow 1...2 - ?$ (рис. 4-17).

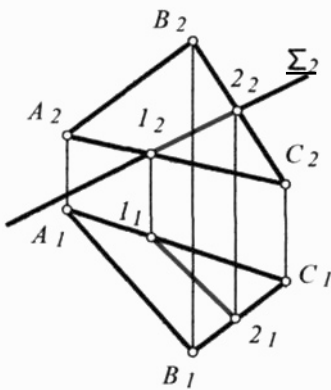


Рис. 4-17

Лінія перетину площини пройде через дві точки 1 і 2, які є точками перетину AC з площиною Σ , та відповідно BC з Σ :

На полі P_2 : $A_2C_2 \cap \Sigma_2 \Rightarrow 1_2$, будуємо 1_1 на A_1C_1 , $B_2C_2 \cap \Sigma_2 \Rightarrow 2_2$, будуємо 2_1 на B_1C_1 ; $\Phi\text{ПЛПП}$ пройде від точки 1_2 до точки 2_2 , зливається з слідом-проєкцією Σ_2 .

На полі P_1 : $\bullet 1_1 \cup \bullet 2_1 \rightarrow 1_1...2_1 - \Gamma\text{ПЛПП}$.

Висновки:

1. Коли дві площини перетинаються і обоє задані слідами, то будуються точки перетину однойменних слідів і ці точки визначають лінію перетину площини;

2. Коли одна площина загального положення задана проміжними прямими (не слідами), а інша площина задана слідом-проекцією, то будуються точки перетину проміжних прямих з слідом-проекцією (починаючи з поля, на якому дано слід-проекцію, а на іншому полі – будуюмо за незалежністю точок до площини заданої проміжними прямими). Отримані точки визначають лінію перетину площин.

4.5. Приклади розв'язання задач:

Приклад 4-1. Дано: площина Δ (Δ_2, Δ_1) і точка A , яка не належить цій площині (рис. 4-18).

Необхідно через точку A провести площину Σ паралельно заданій площині Δ .

Через точку A проводимо горизонталь шуканої площини, на епюрі (рис. 4-19).

На полі Π_2 : $\bullet A_2 \subset h_2 \parallel Ox$; На полі Π_1 : $\bullet A_1 \subset h_1 \parallel \Delta_1$; $h_1 \cap Ox \rightarrow \bullet N_1$, побудувавши $\bullet N_2$, отримуємо точку, яка належить фронта-

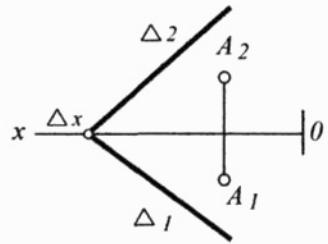


Рис. 4-18

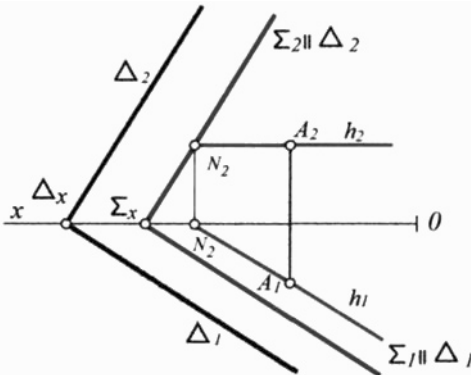


Рис. 4-19

Коли задано площину $\Delta \perp \Pi_3$, то площина Σ пройде через точку A і розташується $\parallel \Delta$, при цьому на епюрі (рис. 4-21) $\bullet A_3 \subset \Sigma_3 \parallel \Delta_3$, а Σ_2 і $\Sigma_1 \parallel Ox$ відповідно з точок сходу слідів Σ_z і Σ_y .

льному сліду Σ_2 , який пройде через $\bullet N_2$ і розташується $\parallel \Delta_2$. $\Sigma_2 \cap Ox \rightarrow \Sigma_x \subset \Sigma_1 \parallel \Delta_1$; $\Sigma \parallel \Delta$, так як $\Sigma_2 \parallel \Delta_2$, а $\Sigma_1 \parallel \Delta_1$.

Приклад 4-2. Для побудови $\Sigma \parallel \Delta$, коли $\Delta \perp \Pi_1$, і точка $A \in \Sigma$, достатньо побудувати $\Sigma_1 \supset \bullet A_1$ і розташується $\Sigma_1 \parallel \Delta_1$, що показано на рис. 4-20.

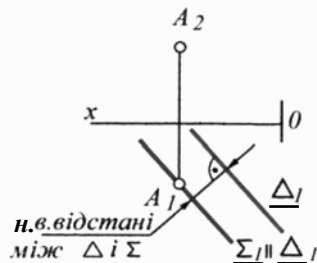


Рис. 4-20

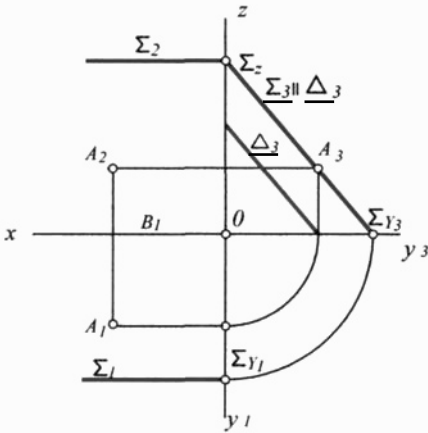


Рис. 4-21

нію перетину площин, де $P \cap \Sigma$, на Π_1 отримуємо їх точку перетину M_1 , а $M_2 \in P_2$. $\bullet M \cup \bullet N \Rightarrow MN$ – лінія перетину двох площин.

Ця задача може бути вирішена, як показано на рис. 4-23, за допомогою ділення в заданому співвідношенні Ox , по діленню Ox точками $\Delta'_x, 1'_2, 2'_1, \Sigma'_x$ на прикладі визначення лінії перетину двох площин, паралельних заданим, тільки коли їх сліди перетинаються в межах кресленка (рис. 4-24).

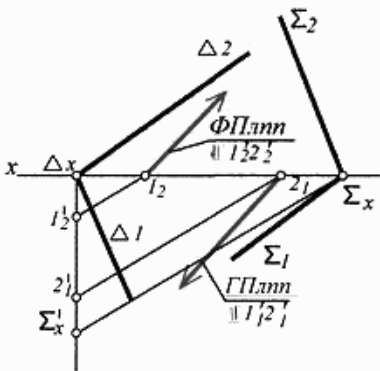


Рис. 4-23

Приклад 4-3. Якщо перетинаються дві площини, які задані слідами, і одна пара слідів в межах кресленка не перетинається:

$$\Delta(\Delta_1, \Delta_2) \cap \Sigma(\Sigma_1, \Sigma_2) \Rightarrow \text{ЛПП} - ?$$

На епюрі (рис. 4-22):

$\Delta_2 \cap \Sigma_2 \Rightarrow \bullet N_2 \equiv N, N_1$ – на Ox , $\bullet N$ – спільна для Δ і Σ , другу точку будемо за загальною методикою за допомогою площини-посередника $P \parallel \Pi_1$, побудувавши лінію перетину площин, де $P \cap \Delta$ і лі-

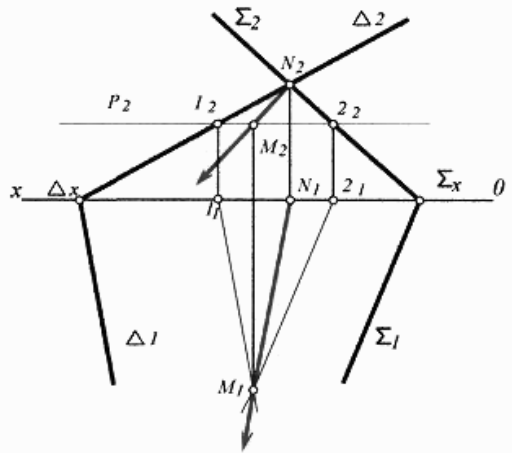


Рис. 4-22

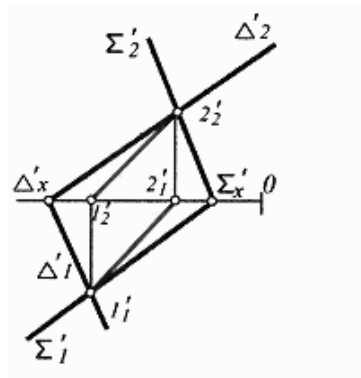


Рис. 4-24

Можлива побудова ЛПП за допомогою висот трикутників, утворених віссю Ox та однією парою слідів на Π_2 та іншою парою на Π_1 . Точки перетину висот трикутників належать проєкціям лінії перетину площин.

Приклад 4-4. Дано: $\theta (m \cap n)$, $\Sigma (\Sigma_2) \perp \Pi_2$.

Визначити: $\theta \cap \Sigma \Rightarrow \text{ЛПП} \equiv l$.

Рішення наведено на рис. 4-25.

Одна проєкція лінії перетину зливається з слідом-проєкцією Σ_2 площини Σ , а друга будується із умови належності прямої l до площини загального положення θ за двома точками – B і C .

Алгоритм розв'язку:

1. $l_2 \equiv \Sigma_2$;
2. $m_2 \cap \Sigma_2 \Rightarrow B_2 \Rightarrow B_1 \supset m_1$;
3. $n_2 \cap \Sigma_2 \Rightarrow C_2 \Rightarrow C_1 \supset n_1$;
4. $\bullet B_1 \cup \bullet C_1 \Rightarrow B_1C_1 - \text{ГПЛПП} \equiv l_1$;
5. $B_2C_2 - \text{ФПЛПП} \equiv \Sigma_2 \equiv l_2$.

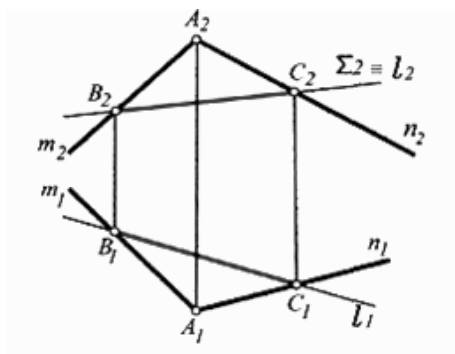


Рис. 4-25

4.6. Задачі для розв'язку

4.6.1. Задачі для позааудиторного розв'язку

Задача 4-1. Побудувати лінію перетину двох площин (рис. 4-26).

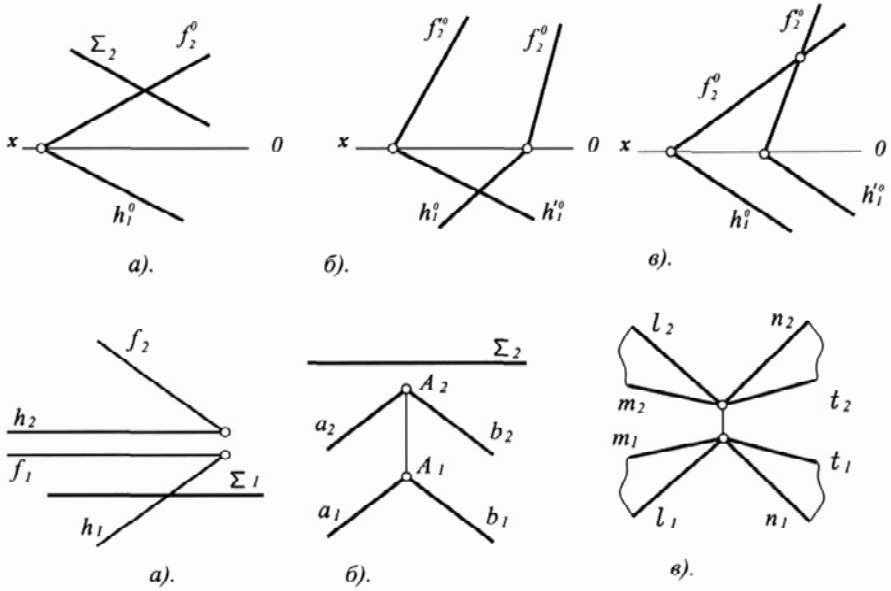


Рис. 4-26

Задача 4-2. Побудувати площину, яка проходить через точку A паралельно заданій площині (рис. 4-27 а, б, в).

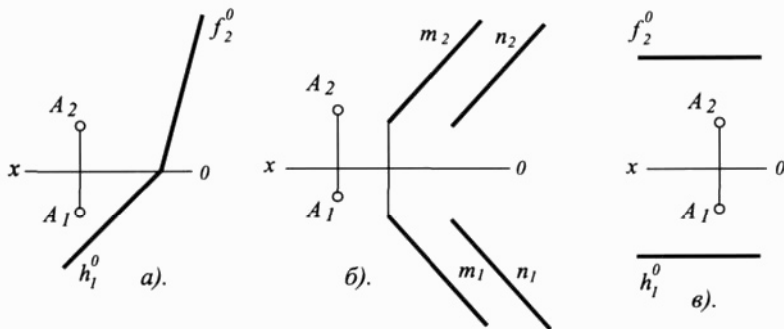


Рис. 4-27

4.6.2. Задачі для аудиторного розв'язку

Задача 4-3. Побудувати горизонтальну проекцію трикутника ABC так, щоб його площина була паралельна заданій площині $\Sigma (m \parallel n)$ (рис. 4-28).

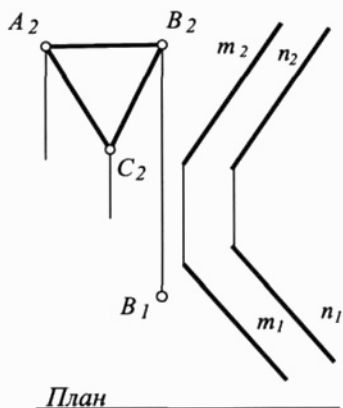


Рис. 4-28

Задача 4-4. Побудувати точку перетину трьох площин: $\theta (f^o \cap h^o)$, $\Sigma (\Sigma_2)$ і $\Delta (f \cap h)$ (рис. 4-29). Записати координати точки K .

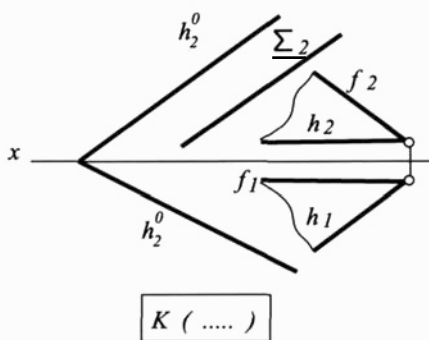


Рис. 4-29

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як визначити взаємне розташування відсіків площин?
2. В чому полягає ознака паралельності двох площин?
3. Що спільного в двох площин, що перетинаються?
4. В чому полягає загальна методика побудови лінії перетину двох площин?
5. Особливості побудови лінії перетину площин заданих слідами залежно від їх взаємного розташування?
6. Послідовність побудови лінії перетину двох площин, одна з яких задана не слідами?

Тема 5

Положення прямої і площини

Відрізняють взаємне положення прямої і площини, коли:

- пряма і площина перетинаються;
- пряма і площина паралельні;
- пряма і площина збігаються.

Якщо пряма і площина задані на епюрі своїми визначниками, то застосується наступна методика визначення їх взаємного положення (рис. 5-1):

- пряму l включаємо в допоміжну площину Σ : $l \subset \Sigma$;
- будуємо лінію перетину допоміжної площини Σ і заданої площини: $\Sigma \cap \Delta \rightarrow 1...2$ (ЛПП);

– порівнюється взаємне розташування проекції заданої прямої l і побудованої лінії перетину $1...2$.

Якщо:

- пряма l перетинається з лінією $1...2$, то $l \cap \Delta$;
- пряма l (на рис. 5-1- l') паралельна лінії $1...2$, то $l \parallel \Delta$;
- пряма l (на рис. 5-1- l'') зливається з лінією $1...2$, то $l \equiv \Delta$.

На епюрі, вибір допоміжної площини Σ (її розташування

відносно площин проекцій) виконується з таким розрахунком, щоб побудови ЛПП були як найбільш простими. При цьому, переважно, площина Σ повинна бути окремого положення.

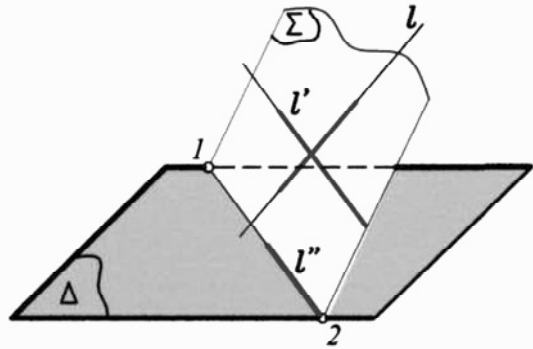


Рис. 5-1

5.1. Пряма і площина перетинаються ($l \cap \Delta \rightarrow K - ?$)

Розглянемо задачу, коли задана пряма l перетинається з площиною Δ . Розв'язок такої задачі зводиться до побудови проекції точки K – точки перетину прямої l з площиною Δ . Просторовий розв'язок задачі наведено на рис. 5-2.

Візьмемо в просторі площину Δ і нахилену до неї пряму l , для побудови точки K – перетину l з Δ , – виконуються наступні дії:

1) – через пряму l проведемо допоміжну площину Σ ;

2) – будуюмо лінію $1...2$ – лінію перетину заданої площини Δ і допоміжної площини Σ ;

3) – будуюмо точку K , точку перетину заданої прямої l з побудованою лінією $1...2$; (коли треба, то будуюмо точку перетину продовження цих прямих).

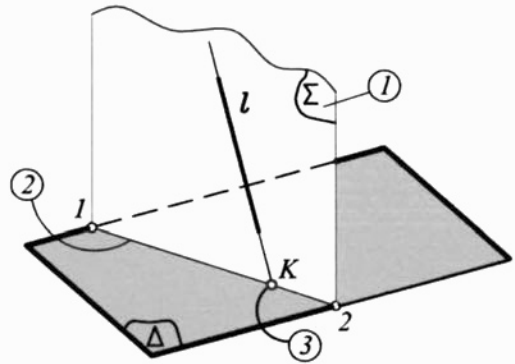


Рис. 5-2

Таким чином, задача виконується рішенням дій 1) \rightarrow 2) \rightarrow 3), а загальний алгоритм рішення наступний:

- 1) $l \subset \Sigma \perp \Pi$;
- 2) $\Sigma \cap \Delta \rightarrow 1...2$;
- 3) $l \cap 1...2 \rightarrow \bullet K!$

Розв'яжемо таку задачу на епюрі. Нехай задана площина Δ визначена на епюрі своїми слідами Δ_1 і Δ_2 , а пряма l – своїми проєкціями l_1 , l_2 (рис.5-3). Для побудови проєкцій точки перетину l з площиною Δ , будемо вирішувати задачу за вищенаведеним алгоритмом.

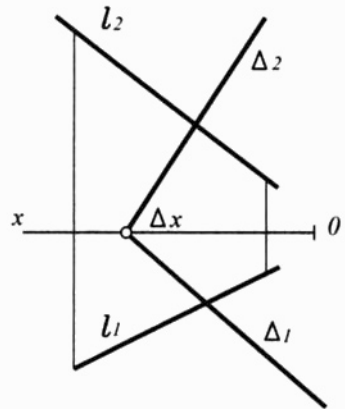


Рис. 5-3

Виконуємо дію 1) – $l \subset \Sigma \perp \Pi$, для розв'язку цієї дії на епюрі: беремо до уваги, що в нашому випадку площина Σ вибрана як фронтально проєктуюча $\Sigma \perp \Pi_2$, тобто дія 1) має вигляд: $l \subset \Sigma \perp \Pi_2$, і виконується так: $l_2 \equiv \Sigma_2$; $\Sigma_2 \cap Ox \rightarrow \Sigma_x$; $\Sigma_x \subset \Sigma_1 \perp Ox$, розв'язок дії 1) наведено на рис. 5-4.

Виконуємо дію 2) – $\Sigma \cap \Delta \rightarrow 1...2$, для рішення цієї дії, беремо до уваги, що в нашому випадку площина Σ задана своїми слідами Σ_1 і Σ_2 , площина Δ задана своїми слідами Δ_1 і Δ_2 . Лінія перетину цих площин будується за двома точками, що виконується на епюрі так:

$\Sigma_2 \cap \Delta_2 \rightarrow l_2$, будемо 1_1 на Ox ;

$\Sigma_1 \cap \Delta_1 \rightarrow 2_1$, будемо 2_2 на осі Ox .

• $l_2 \cup 2_2 \rightarrow l_2 2_2 - \Phi П Л П П$;

• $l_1 \cup 2_1 \rightarrow l_1 2_1 - Г Г Л П П$;

епюрний розв'язок дії 2) наведено на рис. 5-5.

Виконуємо дію 3) $l \cap 1...2 \rightarrow \bullet K$, розв'язок цієї дії виконується на полі Π_1 , де $l_1 \cap 1_1...2_1 \rightarrow K_1$, з K_1 проводимо вертикальну лінію зв'язку до перетину з $l_2 \equiv l_2...2_2$, при цьому отримана $\bullet K_2$, це рішення дії 3) наведено на рис. 5-6.

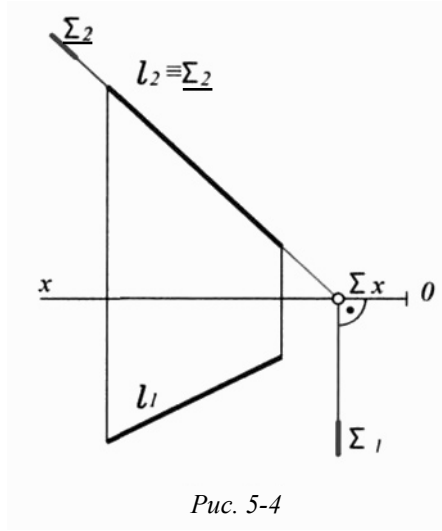


Рис. 5-4

Примітка: Проекцію точки K будемо спочатку на тому полі, де проекція прямої l і проекція лінії перетину площин, лінія $1...2$, перетинаються, а не збігаються між собою. На рис. 5-6: спочатку $l_1 \cap 1_1...2_1 \rightarrow K_1$, потім за допомогою лінії зв'язку будемо $K_2 \subset l_2$.

Суміщені дії 1) \rightarrow 2) \rightarrow 3) на одному епюрі, дають розв'язок поставленої задачі, що наведено на рис. 5-7.

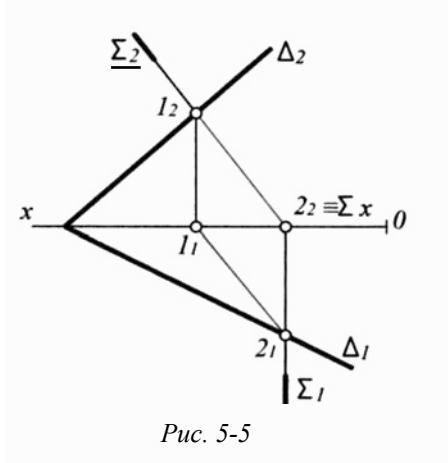


Рис. 5-5

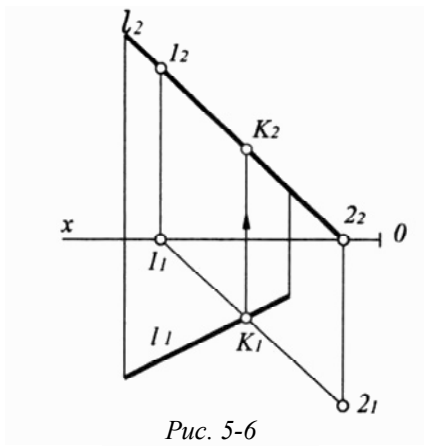


Рис. 5-6

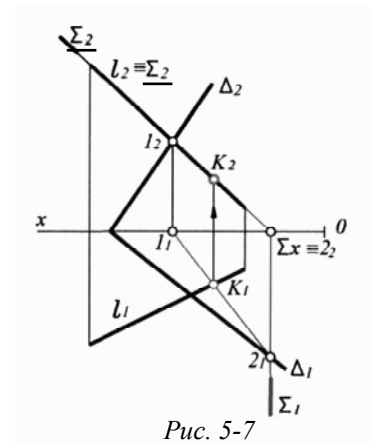


Рис. 5-7

Якщо: $l \cap \Delta \rightarrow \bullet K - ?$

Алгоритми розв'язку:

1) $l \subset \Sigma \perp P_2$:

$$l_2 \equiv \Sigma_2 \cap Ox \rightarrow \Sigma_X \subset \Sigma_1 \perp Ox;$$

2) $\Sigma \cap \Delta \rightarrow 1...2$:

$$\Sigma_2 \cap \Delta_2 \rightarrow \bullet 1_2 \rightarrow 1_1 \subset Ox;$$

$$\Sigma_1 \cap \Delta_1 \rightarrow \bullet 2_1 \rightarrow 2_2 \subset Ox;$$

$$\bullet 1_1 \cup \bullet 2_1 \rightarrow 1_1...2_1;$$

$$1_1...2_1 \equiv \Sigma_2.$$

3) $l \cap 1...2 \rightarrow \bullet K!$:

$$l_1 \cap 1_1...2_1 \rightarrow \bullet K_1 \rightarrow K_2 \subset l_2,$$

$K(K_1, K_2)$ – шукана точка.

Приклад побудови точки перетину прямої l (l_1, l_2) з площиною Δ ($a \cap b$); наведено на рис. 5-8.

Розв'язок виконується за загальним алгоритмом:

1) $l \subset \Sigma \perp P_2$:

$$l_2 \equiv \Sigma_2$$

2) $\Sigma \cap \Delta \rightarrow 1...2$:

$$\Sigma_2 \cap a_2 \rightarrow \bullet 1_2 \rightarrow 1_1 \subset a_1;$$

$$\Sigma_2 \cap b_2 \rightarrow \bullet 2_2 \rightarrow 2_1 \subset b_1;$$

$$\bullet 1_1 \cup \bullet 2_1 \rightarrow 1_1...2_1; \quad 1_1...2_1 \equiv \Sigma_2.$$

3) $l \cap 1...2 \rightarrow \bullet K!$:

$$l_1 \cap 1_1...2_1 \rightarrow \bullet K_1 \rightarrow K_2 \subset l_2.$$

Отримали шукану точку $K(K_1, K_2)$.

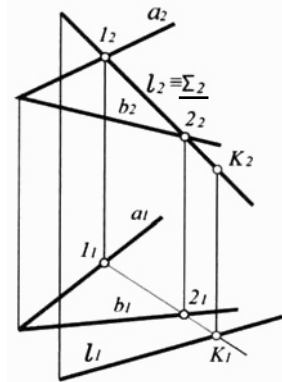


Рис. 5-8

Звертаємо увагу на те, що коли задана площина Δ на епюрі відтворена своїми слідами Δ_1 і Δ_2 (рис. 5-3), то, виконуючи дію 1) допоміжна площина Σ теж відтворюється слідами Σ_2 і Σ_1 (рис. 5-4), що дає найпростіший розв'язок дії 2), а коли площина Δ , задана не слідами, а, наприклад, двома перетинаючими прямими $a \cap b$ (рис. 5-8), то допоміжна площина Σ відтворюється своїм слідом-проекцією (наприклад Σ_2).

5.1.1. Часткові випадки

– Перетин прямої проєктуючої з площиною загального положення.

Наприклад: $l \perp P_1$; $\Delta (\Delta_2, \Delta_1)$; $l \cap \Delta \Rightarrow \bullet K - ?$

Розв'язок цієї задачі (рис. 5-9) спрощений тим, що: беручи до уваги, що на Π_1 l має свою проекцію l_1 у вигляді точки. Точка зустрічі прямої l з Δ , точка K – одна з точок прямої l , то на Π_1 горизонтальна проекція шуканої точки K – K_1 співпадає з l_1 . Фронтальну проекцію K_2 будемо за ознакою належності точки K до площини Δ , наприклад, за допомогою горизонталі h . Отримані K_1 і K_2 визначають на епюрі точку зустрічі (перетину) прямої l з площиною Δ .

– Перетин прямої рівня з площиною загального положення.

Наприклад: $l \parallel \Pi_1$; $\Delta (\Delta_2, \Delta_1)$;

$l \cap \Delta \Rightarrow \bullet K - ?$

Розв'язок цієї задачі (рис. 5-10) виконується за допомогою горизонталі h , належної площині Δ і проведеної на рівні (по висоті) прямої l .

$l_2 \equiv h_2 \cap \Delta_2 \rightarrow \bullet N_2 \Rightarrow \bullet N_1 \in Ox$;

$\bullet N_1 \in h_1 \parallel \Delta_1$; $h_1 \cap l_1 \Rightarrow \bullet K_1 \Rightarrow K_2 \in l_2$

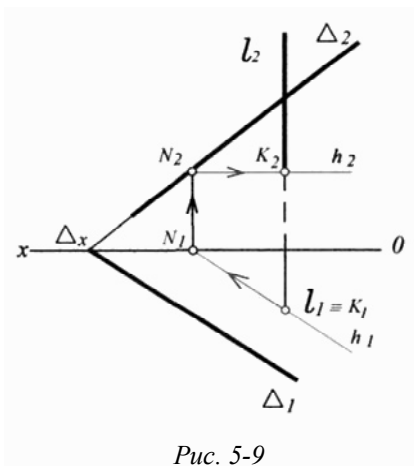


Рис. 5-9

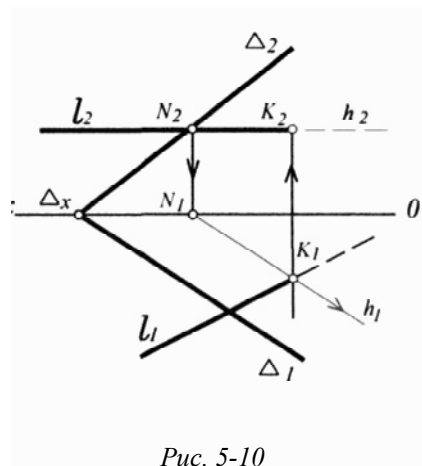


Рис. 5-10

Точка $K (K_1, K_2)$ – шукана точка.

– Побудова точки зустрічі прямої загального положення з площиною, яка задана слідом-проекцією (площиною окремого положення).

Розв'язок такої задачі починається з визначення точки перетину проекції прямої l на тому полі, де площина задана слідом-проекцією. Беручи до уваги, що слід-проекція має збиральні властивості, то така точка є проекцією шуканої точки на полі

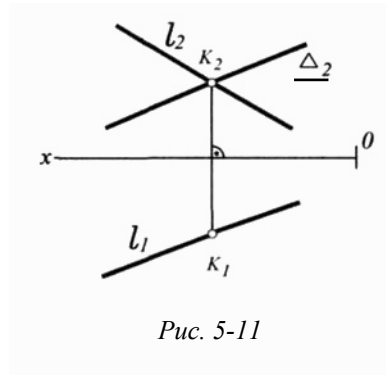


Рис. 5-11

побудови, а іншу проекцію точки визначаємо по належності її до заданої прямої.

В нашому випадку (рис. 5-11):

$$l_2 \cap \Delta_2 \Rightarrow \bullet K_2 \Rightarrow K_1 \subset l_1.$$

• $K(K_2, K_1)$ – шукана точка.

5.2. Пряма і площина паралельні

Задачі побудови проекції прямої, паралельної довільній площині, або вирішення зворотної задачі, базуються на ознаках, що витікають з теореми стереометрії: *пряма паралельна площині, якщо в площині можна провести пряму, їй паралельну.*

5.2.1. Паралельність прямої до площини

Перша ознака паралельності прямої до площини:

Пряма l' паралельна площині Δ в тому випадку, якщо в площині Δ можливо провести пряму b , паралельну l' , тобто: якщо $b \subset \Delta$; а $l' \parallel b$, то $l' \parallel \Delta$.

На рис.5-12 наведено приклад побудови прямої l' , проведену через точку A , і розташовану паралельно площині Δ (просторове зображення та розв'язок задачі на епюрі, рис. 5-12).

Побудову необхідно розпочинати з проведення довільної прямої b (в нашому випадку пряма b задана відрізком 1...2) в площині Δ , потім через точку A простору проводимо пряму l' паралельно прямій b , на епюрі:

$$\bullet A_2 \subset l'_2 \parallel b_2; \bullet A_1 \subset l'_1 \parallel b_1;$$

Тоді: $l' \parallel \Delta$, так як $l' \parallel b \subset \Delta$. Через точку A можна провести безліч прямих паралельних площині Δ і всі вони будуть належати іншій площині, яка паралельна заданій площині.

Друга ознака паралельності прямої до площини: *пряма паралельна площині, якщо через задану пряму можна провести другу площину, паралельну заданій площині.*

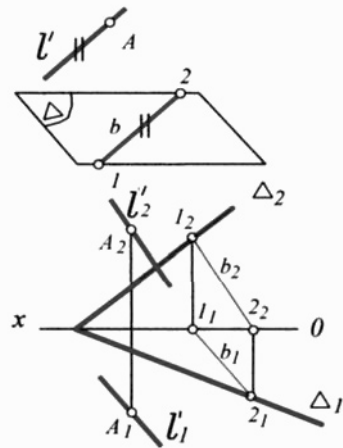


Рис. 5-12

5.2.2. Паралельність площини до прямої

Ознака паралельності площини до прямої: *площина Δ паралельна прямій a , якщо ця площина містить пряму b , паралельну даній прямій a .*

На рис. 5-13 наведено приклад, як через точку A провести площину Δ паралельно прямій a .

Щоб площина Δ була паралельна прямій a , необхідно, щоб ця площина містила пряму b , яка була б паралельна заданій прямій a .

Для побудови шуканої площини Δ достатньо через проекції довільної точки A провести проекції прямої $b \parallel a$, а також через точку A проведемо довільну пряму c .

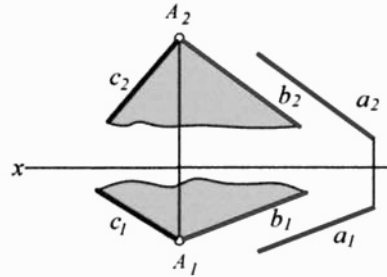


Рис. 5-13

Пряма b , перетинаюча в точці A з прямою c утворюють шукану площину $\Delta \parallel a$. Так як площина Δ визначена прямою b , яка паралельна прямій a .

На епюрі: на полі Π_2 : $\bullet A_2 \subset b_2 \parallel a_2$; $\bullet A_2 \subset c_2$ – довільно:

$\bullet A_1 \subset b_1 \parallel a_1$; $\bullet A_1 \subset c_1$ – довільно.

Тоді: $\Delta (b \cap c) \parallel a$, так як $\Delta \supset b \parallel a$. Задача має безліч розв'язків, бо пряма c – довільна. Тобто, через точку A можливо провести пучок площин, паралельних прямій a і всі вони пройдуть через пряму b , яка паралельна прямій a .

Для визначення паралельності прямої і площини проводимо в цій площині деяку пряму, паралельну заданій прямій. Якщо таку пряму в площині провести неможливо, то задана пряма і площина не паралельні.

Якщо спробувати побудувати точку перетину заданої прямої з площиною і така точка не може бути побудована, то задана пряма і площина паралельні між собою.

5.3. Приклади розв'язків задач

Приклад 5-1. Дано: пряма l – загального положення, площина Δ – загального положення.

Побудувати: точку K – в якій $l \cap \Delta \rightarrow \bullet K$ – ?

Розв'язок (рис. 5-14) виконується за вищенаведеним алгоритмом:

1) $l \subset \Sigma \perp \Pi_2$;

$\{l_2 \equiv \Sigma_2 \cap Ox \Rightarrow \Sigma_x \subset \Sigma_1 \perp Ox\}$

- 2) $\Sigma \cap \Delta \Rightarrow MN$;
- $\Sigma_2 \cap \Delta_2 \Rightarrow N_2 \Rightarrow N_1 \subset Ox$;
- $\Sigma_1 \cap \Delta_1 \Rightarrow M_1 \Rightarrow M_2 \subset Ox$;
- $\bullet N_2 \cup \bullet M_2 \Rightarrow N_2M_2$;
- $\bullet N_1 \cup \bullet M_1 \Rightarrow N_1M_1$
- 3) $l \cap MN \Rightarrow \bullet K!$
- $\{l_1 \cap M_1N_1 \Rightarrow \bullet K_1 \Rightarrow K_2 \subset l_2\}$.

Точка $K (K_2, K_1)$ – шукана точка.

Приклад 5-2. Дано: пряма l – профільна пряма задана відрізком AB , площина Δ – загального положення, задана лініями рівня $f \cap h$.

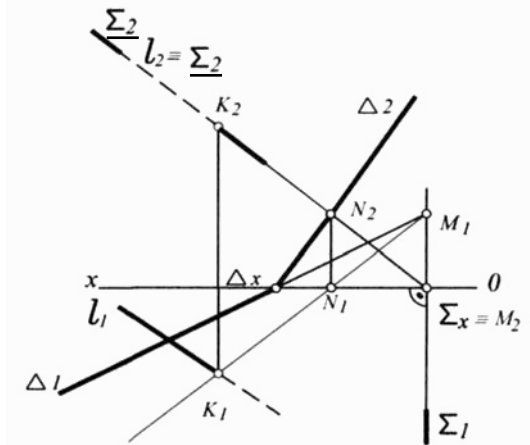


Рис. 5-14

Побудувати: точку K – в якій $l \cap \Delta \rightarrow \bullet K$ – ?

Перший варіант розв’язку:

Розв’язок виконується за вищенаведеним алгоритмом (п. 5.1) з застосуванням профільної проекції, так як на полях Π_1, Π_2 проекції лінії l і лінії перетину площин Δ , і допоміжної Σ – збігаються між собою. На рис. 5-15:

- 1) $l \subset \Sigma \parallel \Pi_3$:
 $A_2B_2 \equiv \Sigma_2$; $A_1B_1 \equiv \Sigma_1$,
- 2) $\Sigma \cap \Delta \Rightarrow 1...2$
 $\Sigma_2 \cap f_2 \Rightarrow 1_2$; $\Sigma_1 \cap f_1 \Rightarrow 1_1 \Rightarrow 1_3$;
 $\Sigma_2 \cap h_2 \Rightarrow 2_2$;
 $\Sigma_1 \cap h_1 \Rightarrow 2_1 \Rightarrow 2_3$;
- $\bullet 1_3 \cup \bullet 2_3 \Rightarrow 1_3...2_3$;
- 3) $l \cap 1...2 \Rightarrow K!$
по $A_1, A_2 \Rightarrow A_3$;
по $B_1, B_2 \Rightarrow B_3 \cup A_3 \Rightarrow A_3B_3$;
 $A_3B_3 \cap 1_3...2_3 \Rightarrow K_3 \Rightarrow K_2 \subset \subset A_2B_2$;
по $K_3 \Rightarrow K_1 \subset A_1B_1$.

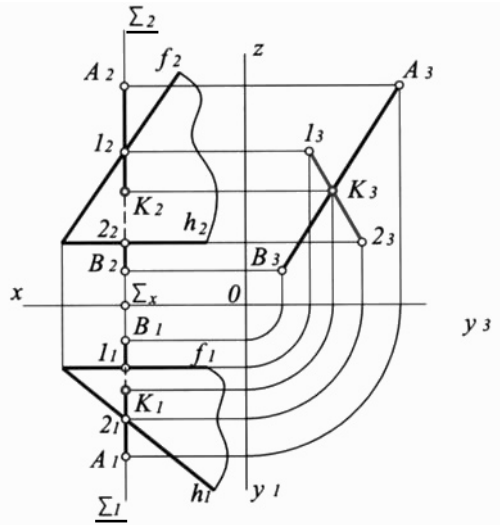


Рис. 5-15

Точка K , проекції якої побудовані (K_1, K_2, K_3) – є шукана точка.

Другий варіант розв'язку: коли розв'язок виконується на полях Π_1, Π_2 без застосування поля Π_3 . На рис. 5-16:

- 1) $AB \subset \Sigma (a \parallel b) \perp \Pi_3$; площина Σ задана прямою a , проведеною через точку A , тобто $\bullet A \subset a \perp \Pi_3$, і прямою b , проведеною через точку $B, \bullet B \subset b \perp \Pi_3$.
- 2) $\Sigma \cap \Delta \Rightarrow 1...2$

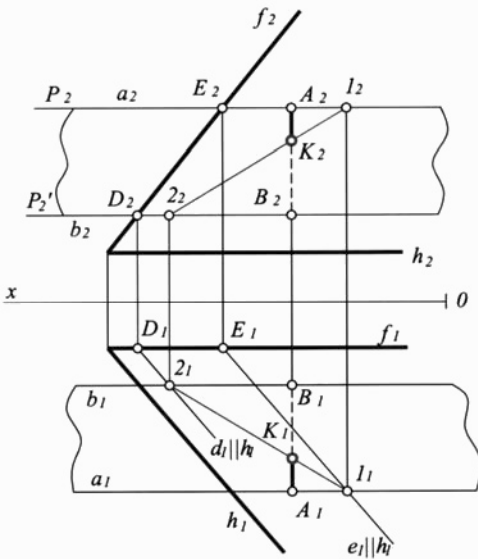


Рис. 5-16

Для побудови 1...2 спочатку побудуємо точку 1 зустрічі прямої a з площиною Δ , для цього пряму a включимо в допоміжну площину $P \parallel \Pi_1$, будемо $P \cap \Sigma \Rightarrow e \parallel h$, при цьому:

- $P_2 \cap f_2 \Rightarrow \bullet E_2 \Rightarrow E_1 \subset f_1$; $\bullet E_1 \subset e_1 \parallel h_1$;
- $e_1 \cap a_1 \Rightarrow \bullet I_1 \Rightarrow I_2 \subset a_2$; $\bullet I!$

Для побудови точки 2, будемо аналогічно точку перетину прямої b з площиною Δ , для цього пряму b включимо в допоміжну площину $P' \parallel P$, та далі отримуємо точку 2.

- 3) $AB \cap 1...2 \Rightarrow \bullet K!$, $1...2_1 \cap A_1B_1 \Rightarrow K_1$, $1...2_2 \cap A_2B_2 \Rightarrow K_2$. $K(K_2, K_1)$ – шукана точка.

Приклад 5-3. Дано: точка A і площини Σ і Δ загального положення.

Побудувати: пряму a , яка б проходила через точку A і була б паралельна площинам Σ і Δ .

Розв'язок виконується на основі ознаки паралельності прямої до площини. Щоб шукана пряма a була паралельна двом площинам Σ і Δ , будеться лінія перетину MN цих двох площин і через точку A пройде пряма a розташована паралельно лінії MN , яка одночасно належить і площині Σ і Δ .

На епюрі, рис. 5-17: M_2N_2 і M_1N_1 – проекції лінії перетину площин Σ і Δ .

- $\bullet A_2 \subset a_2 \parallel M_2N_2$, $\bullet A_1 \subset a_1 \parallel M_1N_1$.

Така пряма a паралельна Σ і Δ .

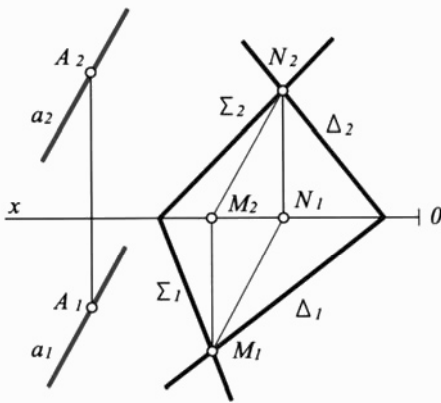


Рис. 5-17

Приклад 5-4. Дано: мимобіжні прямі m, e і точка A .

Необхідно: через точку A провести площину Δ , яка була б паралельна прямій m і прямій e .

Розв'язок виконується на основі ознаки паралельності площини до прямої.

На рис. 5-18 наведено розв'язок, коли з точки A проводимо пряму $m' \parallel m$ і $e' \parallel e$, то $m' \cap e'$ – утворюють шукану площину Δ ($m' \cap e'$), яка паралельна прямій m і прямій e .

На епюрі: $\bullet A_2 \subset m'_2 \parallel m_2$; $\bullet A_2 \subset e'_2 \parallel e_2$; $\bullet A_1 \subset m'_1 \parallel m_1$; $\bullet A_1 \subset e'_1 \parallel e_1$.

Побудовані проекції прямих m' і e' – утворюють проекції шуканої площини Δ .

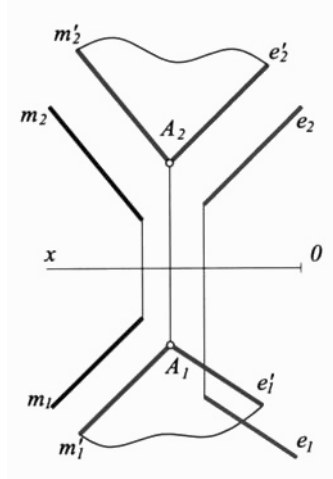


Рис. 5-18

5.2. Задачі для розв'язку

5.4.1. Задачі для позааудиторного розв'язку

Задача 5-1. Побудувати точку К перетину прямої із заданою площиною (рис. 5-19).

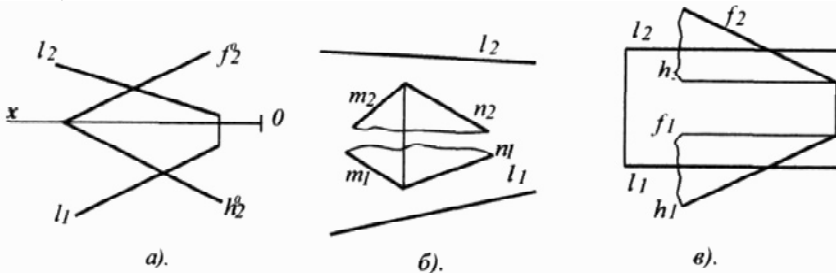


Рис. 5-19

Задача 5-2. Через точку A провести площину, паралельну прямій, і записати її визначник (рис. 5-20).

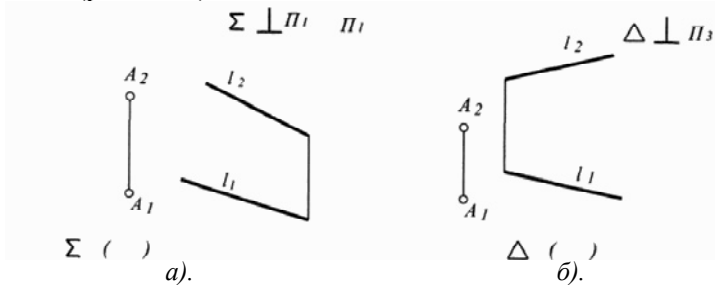


Рис. 5-20

5.3.2. Задачі для аудиторного розв'язку

Задача 5-3. Через точку A провести пряму так, щоб вона була паралельна заданій площині і перетинала пряму l (рис. 5-21).

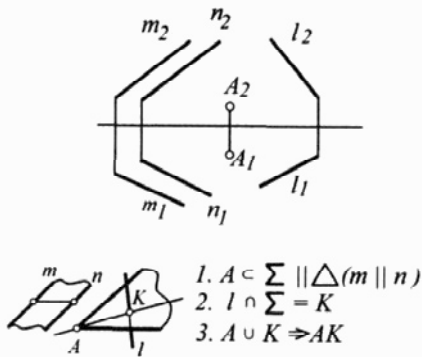


Рис. 5-21

Задача 5-4. Провести пряму так, щоб вона перетинала три задані прямі l, m і n (рис. 5-22).

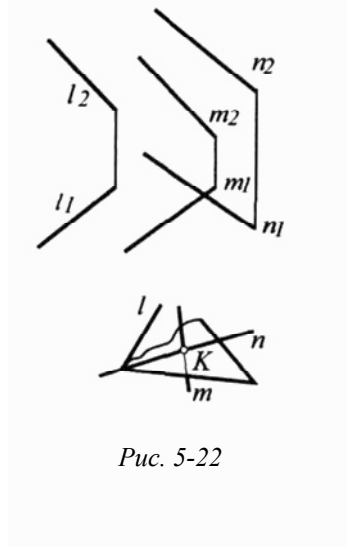


Рис. 5-22

Задача 5-5. Провести пряму так, щоб вона була паралельна прямій l і перетинала прямі m і n (рис. 5-23).

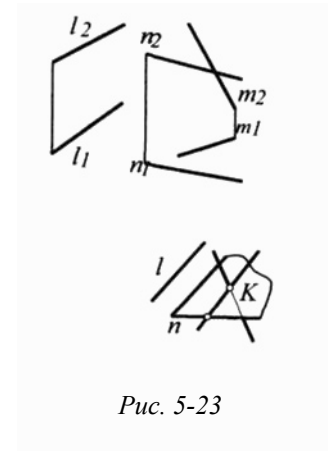


Рис. 5-23

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як визначити взаємне розташування прямої і площини?
2. Пункти алгоритму побудови прямої і площини.
3. В чому полягають окремі випадки побудови точки зустрічі прямої з площиною?
4. Як через точку в просторі провести пряму, паралельну до заданої площини?
5. Що спільного і чим відрізняються ознака паралельності прямої відносно площини, та площини відносно прямої?
6. Особливість побудови точки перетину прямої загального положення з площиною окремого положення?
7. Особливість побудови точки перетину прямої окремого положення з площиною загального положення?
8. Як розташується пряма, проведена через задану точку простору і паралельно двом площинам?

Тема 6

Перпендикулярність прямих і площин

Розв'язок метричних задач з взаємно перпендикулярними елементами розглядає можливі випадки:

- перпендикулярність прямої і площини;
- перпендикулярність двох прямих;
- перпендикулярність двох площин.

Графічні побудови, які необхідно при цьому виконувати, базуються на застосуванні теореми про окремих випадок проектування прямого кута:

якщо кут прямий і одна його сторона паралельна площині, а друга сторона до цієї площини не перпендикулярна, то проекція прямого кута на цю площину дорівнює дев'яносто градусів.

6.1. Проекції прямого кута

Якщо: $\angle ABC = 90^\circ$, $BC \parallel \Pi_1$, а AB не перпендикулярно Π_1 (рис. 6-1).

В такому випадку $BC \parallel B_1C_1$. Нехай друга сторона AB прямого кута перетинає свою проекцію A_1B_1 в точці K . Проводимо в площині Π_1 через точку K , пряму паралельну B_1C_1 . Пряма $KL \parallel BC$, кут $BKL = 90^\circ$. Згідно з теоремою про три перпендикуляри кут B_1KL – прямий. Відповідно кут $A_1B_1C_1 = 90^\circ$.

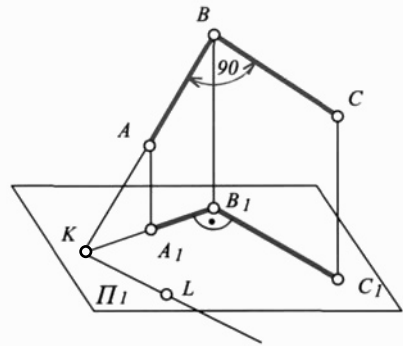


Рис. 6-1

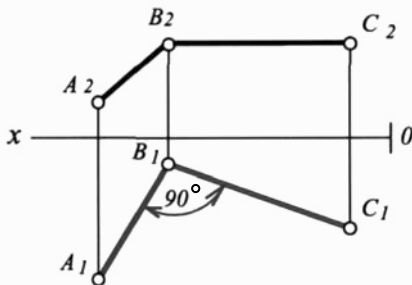


Рис. 6-2

На епюрі: рис. 6-2 AB – пряма загального положення і має проекції A_2B_2 і A_1B_1 , які розташовані під довільними гострими кутами, відносно осі x .

BC – пряма, паралельна Π_1 – горизонтальна, має $B_2C_2 \parallel Ox$; а B_1C_1

розташована під прямим кутом до A_1B_1 – згідно з теоремою про проєкції прямого кута, що й показано на рис. 6-2.

Якщо розглянемо кут $ABD = 90^\circ$. AB – спільна сторона і попередньо розглянутого кута ABC , а сторона $BD \parallel \Pi_2$, тобто BD – фронтальна пряма, то проєкції кута ABD на Π_2 будуть мати вигляд, показаний на рис. 6-3, коли $\angle A_2B_2D_2 = 90^\circ$ за вищенаведеною теоремою.

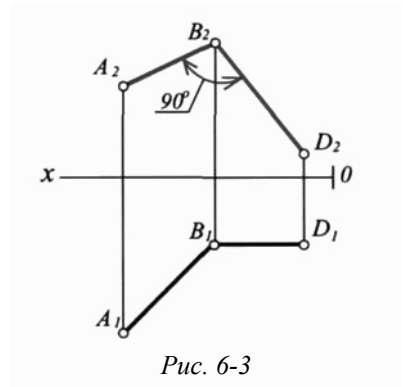


Рис. 6-3

6.2. Перпендикулярність прямої і площини (перпендикулярність виду 1)

Розглядаючи кут ABC і кут ABD (п. 6.1), відзначаємо, що AB може бути спільною стороною цих кутів, а сторона $BC \parallel \Pi_1$, а $BD \parallel \Pi_2$. Беручи до уваги, що BC – горизонталь, а BD – фронталь і перетинаються в точці B , то горизонталь і фронталь утворюють площину, задану її лініями рівня. Пряма AB є перпендикуляром до площини, утвореної лініями рівня, що й показано на рис. 6-4.

Прийнявши: AB – r – перпендикуляр, а BC – є горизонталь – h ; BD є фронталь – f , тобто h перетинається з f і тоді: $r \perp \Sigma (f \cap h)$, якщо на епюрі $r_1 \perp h_1, r_2 \perp f_2$.

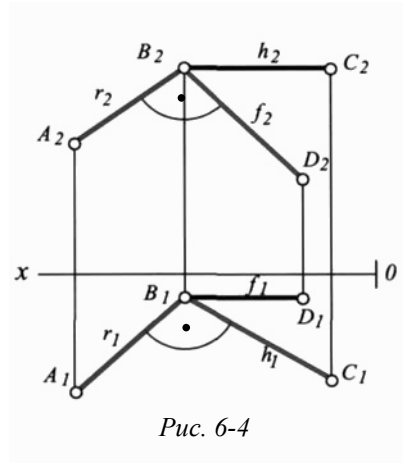


Рис. 6-4

Ознака перпендикулярності прямої до площини:

– пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох перетинаючих прямих, цієї площини.

На епюрі: $r \perp \Sigma (f \cap h)$, якщо горизонтальна проєкція перпендикуляра перпендикулярна до горизонтальної проєкції горизонталі, а фронтальна проєкція перпендикуляра перпендикулярна до фронтальної проєкції фронталі площини $\Sigma (f \cap h)$.

6.2.1. Перпендикулярність виду 1.1, рис. 6-5

За допомогою цього виду розв'язується задача, в якій дано точку і площину. Необхідно з заданої точки провести перпендикуляр до площини. Модель цієї задачі показаний на рис. 6-5.

Приклад 6-1:

Дано: точка A і площина Σ ($f \cap h$); $\Sigma \not\perp A$. (рис. 6-6).

Необхідно: провести з точки A перпендикуляр r до Σ .

Розв'язок виконується за ознакою перпендикулярності прямої до площини, коли на епюрі: $r_1 \perp h_1$, $r_2 \perp f_2$. З точки A проводимо перпендикуляр r до площини Σ : $A \subset r \perp \Sigma$; на епюрі: $\bullet A_1 \subset r_1 \perp h_1$; $\bullet A_2 \subset r_2 \perp f_2$ (рис. 6-7).

Така задача дає можливість визначити відстань від точки A до площини Σ . Рішення виконується в наступній послідовності.

1) з точки A проведемо перпендикуляр r до площини Σ , при цьому $r_1 \perp h_1$, а $r_2 \perp f_2$;

2) побудуємо точку K -точку зустрічі прямої r з площиною Σ ;

3) визначимо натуральну величину перпендикуляра від точки A до точки K , що і буде натуральною величиною відстані від точки A до площини Σ .

1. $A \subset r \perp \Sigma$; 2. $r \cap \Sigma \Rightarrow \bullet K$; 3. н. в. AK !

Розгорнутий алгоритм розв'язку наведено на прикладі 6-7.

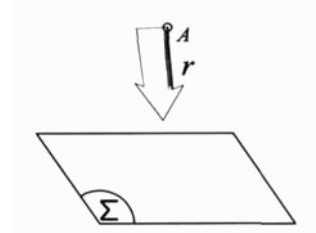


Рис. 6-5

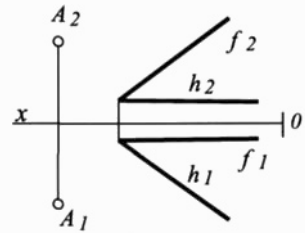


Рис. 6-6

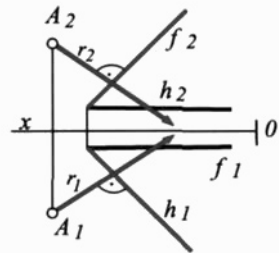


Рис. 6-7

6.2.2. Перпендикулярність виду 1.2, рис. 6-8

За допомогою цього виду розв'язується задача, в якій дано точку і пряму. Необхідно через задану точку провести площину, перпендикулярну заданій прямій.

Розв'язок цієї задачі показано в прикладі 6-2.

Приклад 6-2:

Дано: точка A і пряма r (рис. 6-9).

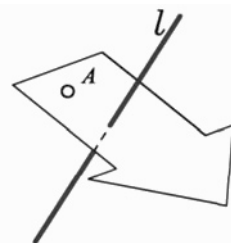


Рис. 6-8

Необхідно: з точки A провести площину Σ , перпендикулярну до прямої r .

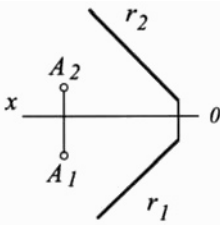


Рис. 6-9

Беручи до уваги, що при проведенні площини лініями рівня:

$f_2 \perp r_2, h_1 \perp r_1$. На епюрі (рис. 6-10) це буде виконано:

- $A_2 \subset f_2 \perp r_2$;
- $A_2 \subset h_2 \parallel Ox$;
- $A_1 \subset h_1 \perp r_1$;
- $A_1 \subset f_1 \parallel Ox$.

Точка $A \subset \Sigma (f \cap h) \perp r$.

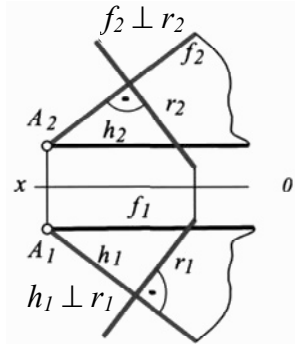


Рис. 6-10

6.3. Перпендикулярність двох прямих (перпендикулярність виду 2)

Розгляд перпендикулярних прямих виконується з дотриманням ознаки перпендикулярності двох прямих: *дві прямі перпендикулярні між собою, якщо одна з цих прямих належить площині, яка перпендикулярна другій прямій.*

Послідовність побудови двох перпендикулярних прямих: якщо пряма a – задана, то будуюмо площину, наприклад, Δ , перпендикулярну до заданої прямої a і в цій площині проводимо другу пряму b . Задана пряма a і побудована пряма b перпендикулярні між собою. Бувають перпендикулярні прямі: мимобіжні або які перетинаються.

6.3.1. Перпендикулярність виду 2.1

За допомогою цього виду розв'язується задача, в якій дано точку і пряму. Необхідно з заданої точки A провести пряму, перпендикулярну до заданої прямої l . Побудована пряма відносно заданої прямої буде перпендикулярна мимобіжна (рис. 6-11).

Розв'язок цієї задачі показано на прикладі 6-3.

Приклад 6-3: Дано: точка A і пряма a (рис. 6-12).

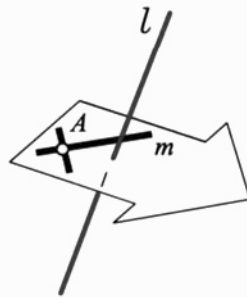


Рис. 6-11

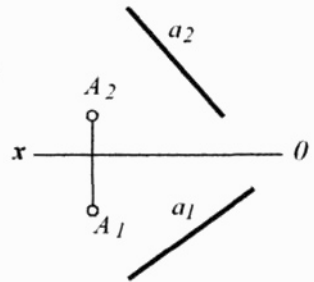


Рис. 6-12

Необхідно: через точку A провести пряму m перпендикулярну до a .

Для побудови прямої $m \perp a$ за ознакою перпендикулярності двох прямих, через точку A проводимо (рис. 6-13) площину $\Delta(f \cap h)$, яка перпендикулярна заданій прямій a , в отриманій площині Δ будемо довільну пряму m (задану, наприклад, відрізком $1...2$) і отримана пряма $m \perp a$, так як $m \subset \Delta \perp a$. Пряма m і пряма a – перпендикулярні – мимобіжні. Задача має безліч розв’язків.

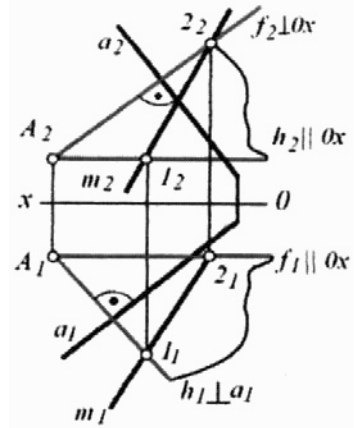


Рис. 6-13

6.3.2. Перпендикулярність виду 2.2

За допомогою цього виду розв’язується задача, в якій дано точку і пряму, необхідно з даної точки провести перпендикуляр до заданої прямої. Побудований перпендикуляр до заданої прямої (рис. 6-14) буде прямою перпендикулярною, яка перетинається із заданою прямою.

Приклад 6-4: Дано: точка A і пряма l (рис. 6-15).

Необхідно: з даної точки A провести перпендикуляр до заданої прямої l , та визначити відстань від точки A до прямої l .

Послідовність розв’язку показано на рис. 6-16.

1) з точки A проводимо площину Δ , перпендикулярну до прямої l .

$$A \subset \Delta (f \cap h) \perp l;$$

2) будемо точку перетину прямої l з площиною Δ :

$$l \cap \Delta \Rightarrow \bullet K;$$

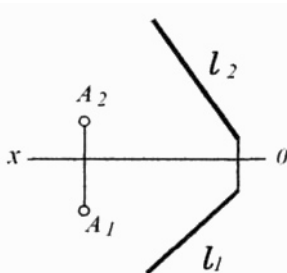


Рис. 6-15

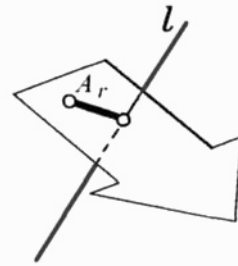


Рис. 6-14

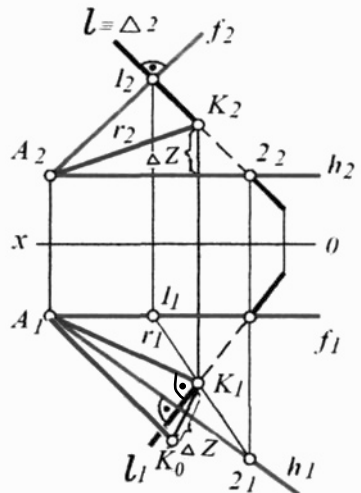


Рис. 6-16

3) точку A з'єднаємо з побудованою точкою K , отримана AK і є прямою $r \perp l$ ($\bullet A \cup \bullet K \Rightarrow AK - r \perp l$). Пряма r і пряма l – перпендикулярні і перетинаючі та AK (частина перпендикуляра r) є відстань від точки A до прямої l , (A_2K_2 та A_1K_1 – проєкції шуканої відстані). Натуральна величина відстані AK дорівнює A_1K_0 (визначена з застосуванням методу прямокутного трикутника).

Якщо задана пряма перпендикулярна до якоїсь площини проєкцій, то відстань від точки простору до заданої прямої буде спроектована на цю ж площину проєкцій в натуральну величину і буде дорівнювати відстані від проєкції точки до точки, в яку задана пряма буде спроектована на площину проєкцій.

Якщо задана пряма паралельна якійсь площині проєкцій, то відстань від точки простору до прямої рівня дорівнює натуральній величині відстані від проєкції точки до точки перетину перпендикуляра, проведеного з цієї точки до проєкції прямої на площині проєкцій, до якої пряма паралельна.

6.4. Перпендикулярність двох площин (перпендикулярність виду 3)

Ознака перпендикулярності двох площин: *дві площини перпендикулярні між собою, якщо одна з площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини.*

Якщо задана площина Δ , то площину Σ перпендикулярну до заданої площини можна побудувати двома шляхами:

- площину Σ проводять через пряму l , перпендикулярну заданій площині Δ ;
- або, площину Σ проводять перпендикулярно до прямої, яка лежить в заданій площині Δ , або в площині паралельній цій площині.

6.4.1. Перпендикулярність виду 3.1, рис. 6–17

За допомогою цього виду розв'язується задача, в якій дано точку і площину, точка не належить площині. Необхідно через задану точку провести площину, перпендикулярну заданій площині.

Розв'язок цієї задачі показано на прикладі 6-5.

Приклад 6-5: Дано: точка A і площина Δ ($f \cap h$) (рис. 6-18), точка A не належить площині Δ .

Необхідно: через точку A провести площину Σ перпендикулярно Δ .

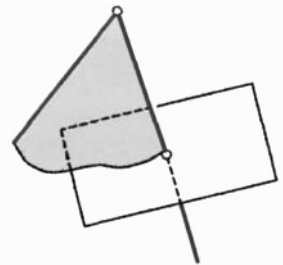


Рис. 6-17

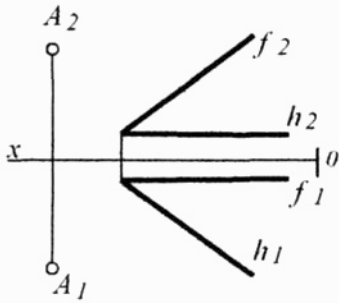


Рис. 6-18

на полі Π_1 : $\bullet A_1 \subset e_1$ – проведено довільно;

на полі Π_2 : $\bullet A_2 \subset e_2$ – проведено довільно.

Перпендикуляр r , як пряма, перетинаючись з прямою e утворюють площину Σ перпендикулярну площині Δ , так як містить пряму r перпендикулярну Δ .

Задача має безліч розв’язків, тому що пряму e проведено довільно.

Послідовність розв’язку показано на рис. 6-19, де з точки A проводимо перпендикуляр r , проєкцію якого на епюрі буде відтворено:

на полі Π_1 : $\bullet A_1 \subset r_1 \perp h_1$;

на полі Π_2 : $\bullet A_2 \subset r_2 \perp f_2$.

З точки A проводимо довільну пряму e , проєкція якої на епюрі:

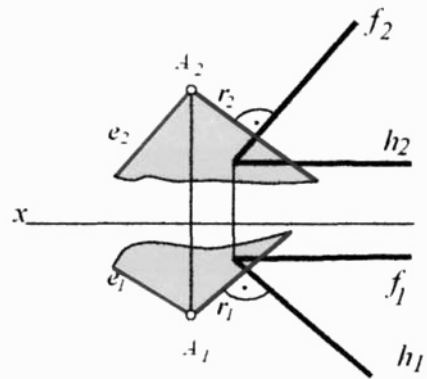


Рис. 6-19

6.4.2. Перпендикулярність виду 3.2 рис.6-20

За допомогою цього виду перпендикулярності розв’язується задача, в якій дано точку A , площину і пряму, належну цій площині. Необхідно, через точку провести площину перпендикулярну до заданої площині.

Розв’язок цієї задачі показано на прикладі 6-6.

Приклад 6-6: Дано (рис. 6-21): точка A і площина Δ , задана двома перетинаючими прямими a і b . Пряма l належить площині Δ .

Необхідно через точку A провести площину Σ перпендикулярно до $\Delta(a \cap b)$.

Площина Σ буде перпендикулярна до заданої площини Δ , коли площину Σ проведемо перпендикулярно до прямої, яка лежить в заданій площині Δ .

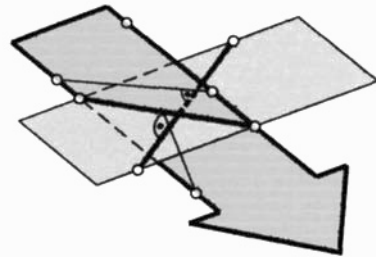


Рис. 6-20

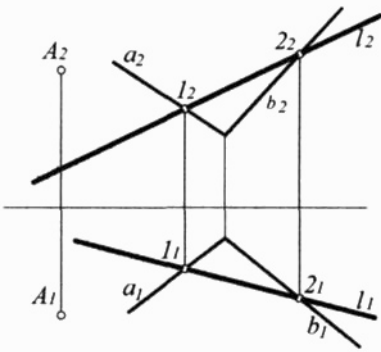


Рис. 6-21

Алгоритм розв'язку:

- на полі Π_2 : $\bullet A_2 \in f_2 \perp l_2$;
- $\bullet A_2 \in h_2 \parallel Ox$;
- на полі Π_1 : $\bullet A_1 \in h_1 \perp l_1$;
- $\bullet A_1 \in f_1 \parallel Ox$.

Площина $\Sigma(f \cap h) \perp \Delta$, бо $\Sigma(f \cap h) \perp l \subset \Delta$.

Якщо в умові прикладу задана пряма l паралельна площині Δ , то розв'язок аналогічний попередньому, тільки буде:

- $\Sigma(f \cap h) \perp \Delta$, так як
- $\Sigma(f \cap h) \perp l \parallel \Delta$.

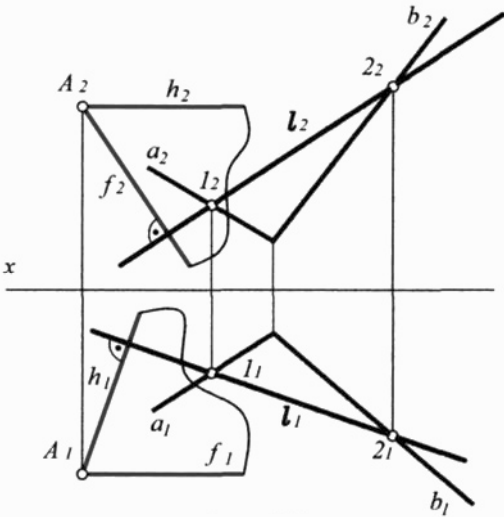


Рис. 6-22

Розв'язок на епюрі (рис.6-22) виконується згідно перпендикулярності виду 1.2, коли з точки A проведемо площину $\Sigma(f \cap h)$ перпендикулярно до прямої l , то побудована площина Σ буде перпендикулярна до заданої площини Δ , бо $\Sigma \perp l \subset \Delta$.

6.5. Приклади розв'язку задач

6.5.1. Задачі на перпендикулярність виду 1.1

Приклад 6-7.

Дано: точка A і площина $\Delta(f \cap h)$, визначити відстань від точки A до площини Δ .

Розв'язання проводиться в такій послідовності (рис. 6-23):

- 1) з точки A проводимо перпендикуляр r до площини $\Delta(f \cap h)$, (виконується перпендикулярність виду 1.1);
- 2) будуюмо точку K – точку перетину перпендикуляра r з площиною Δ ;

3) визначаємо натуральну величину відрізка перпендикуляра від точки A до точки K , яка будується, наприклад, методом прямокутного трикутника, отримана натуральна величина AK – є шукана відстань від точки A до площини Δ .

Алгоритм:

1. $\bullet A \in r \perp \Sigma$;

на Π_2 : $\bullet A_2 \in r_2 \perp f_2$;

на Π_1 : $\bullet A_1 \in r_1 \perp h_1$.

2. $r \cap \Delta \Rightarrow \bullet K$

$-r \subset \Sigma \perp \Pi_1$; $\{r_1 \equiv \Sigma_1\}$

$\Sigma \cap \Delta \Rightarrow 1...2$: $\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_1 \cap h_1 \rightarrow \bullet 1_1 \rightarrow 1_2 \subset h_2 \\ \Sigma_1 \cap f_1 \rightarrow \bullet 2_1 \rightarrow 2_2 \subset f_2 \end{array} \right\} \rightarrow 1_2...2_2$

$1...2 \cap r \rightarrow \bullet K$; $\{1_2...2_2 \cap r_2 \rightarrow K_2 \rightarrow K_1 \subset r_1\}$

3. д.в. AK ! На $\Pi_2 \rightarrow \Delta Z = Z^A - Z^K$;

$\bullet K_1 \in e_1 \perp A_1 K_1$;

$\Delta Z \subset e_1 \rightarrow K_1 K_0$;

$\bullet A_1 \cup K_0 \rightarrow$ н.в. AK ! $= A_1 K_0$.

Якщо в умові задачі площина Δ задана не лініями рівня, то треба цю площину перезадати лініями рівня, як це показано в темі площина, п. 3.4. і далі розв'язувати за вищенаведеним алгоритмом.

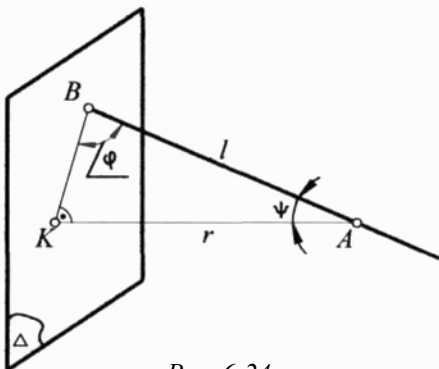


Рис. 6-24

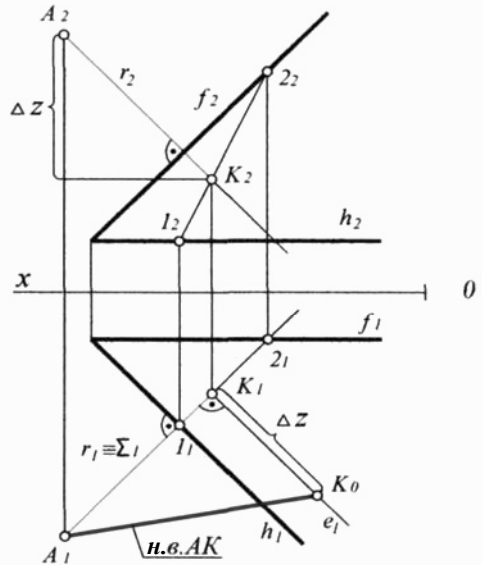


Рис. 6-23

Приклад 6-8.

Дано: пряма l і площина $\Delta (f \cap h)$, визначити кут між прямою l і площиною Δ .

Розв'язання проводиться в такій послідовності (рис. 6-24 на якому наведено просторовий розв'язок):

На прямій l вибирається довільна точка A ;

З точки A проводиться пряма r – перпендикуляр до Δ (ця дія виконується розв’язанням перпендикулярності виду 1.1).

Визначається кут ψ (кут між r і l), а шуканий кут $\varphi = 90^\circ - \psi$.

Приклад 6-9.

Дано: Дві точки A і B та площина Δ . Побудувати промінь, який виходить з точки A в точку B віддзеркалюючись від Δ .

Розв’язання проводиться в такій послідовності (рис.6-25 на якому наведено схему розв’язку):

- з точки A проводять перпендикуляр r до площини Δ (ця дія виконується розв’язанням перпендикулярності виду 1.1) і будують точку K – точку перетину r з Δ (тобто $r \cap \Delta \Rightarrow K$);

- AK продовжується і від точки K відкладається AK – отримується точка A' симетрична A відносно площини Δ ;

- точка A' з’єднується з точкою B , отримується точка C – точка перетину $A'B$ з Δ ;

- шлях променя пройде від A до C , віддзеркалюється від площини Δ в точці C і далі пройде по CB з точки C до точки B .

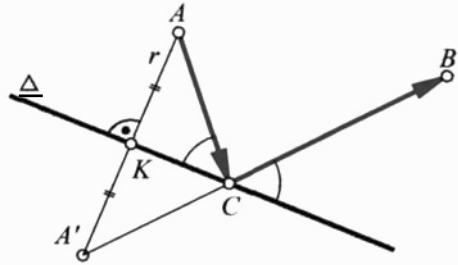


Рис. 6-25

Приклад 6-10.

Побудувати сферу з центром в даній точці A і дотичну до площини Δ .

Рішення (на рис. 6-26 наведено схему розв’язку):

З заданої точки A проводиться r – перпендикуляр до заданої площини Δ .

- Будується точка перетину r з Δ , отримується точка K ;

- Визначається натуральна величина AK , що і є радіусом шуканої сфери, проведеної з точки $O \equiv A$.

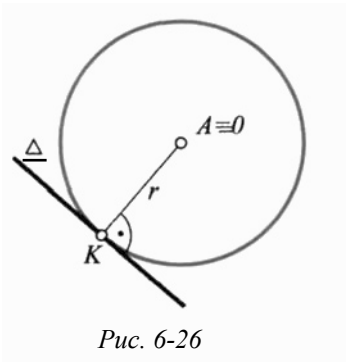


Рис. 6-26

Приклад 6-11.

Визначити кут між двома площинами Δ і Σ .

Рішення задачі виконується по схемі, наведеній на рис. 6-27.

– В просторі між площинами Δ і Σ довільно вибираємо точку A ;

– З точки A проводимо перпендикуляр r до площини Σ і r' до Δ (задачі на перпендикулярність виду 1.1);

– Визначається кут між r і r' , який є додатковим кутом ψ , а шуканий кут φ визначається: $\angle \varphi = 180^\circ - \angle \psi$.

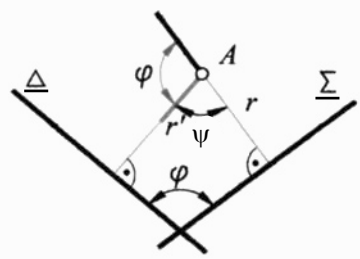


Рис. 6-27

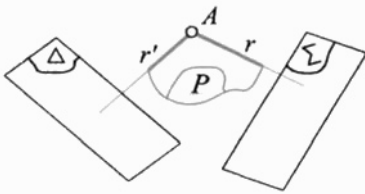


Рис. 6-28

Приклад 6-12.

Побудувати площину P , яка проходить через точку A і розташовану перпендикулярно до площин Δ і Σ .

Застосовуючи ознаку перпендикулярності двох площин, на просторовому рис.6-28 показано, що шукана площина P буде задана прямою $r \perp \Delta$ і прямою $r' \perp \Sigma$.

$P (r \cap r')$ – шукана площина. Задача має один розв'язок.

6.5.2. Задачі на перпендикулярність виду 1.2

Задача 6-1

Дано дві точки A і B .

Побудувати площину Δ , яка пройде через середину відстані від A до B і розташується до неї перпендикулярно. Розв'язок задачі виконується з

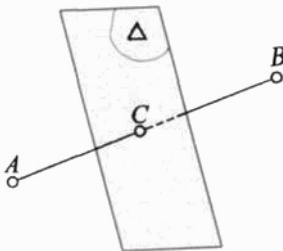


Рис. 6-29

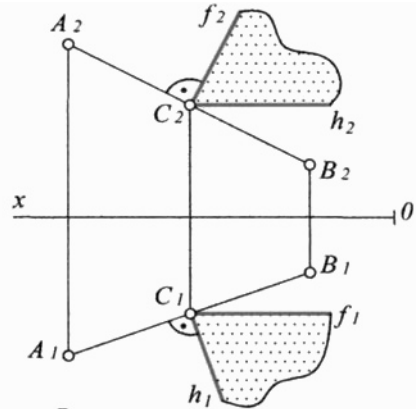


Рис. 6-30

дотриманням ознаки перпендикулярності площини до прямої. Просторовий розв'язок наведено на рис. 6-29, а епюрге – на рис. 6-30.

Алгоритм розв'язку:

$$\bullet A \cup \bullet B \Rightarrow AB; \bullet C \subset AB; AC = CB; \bullet C \subset \Delta(f \cap h) \perp AB.$$

6.5.3. Задача на перпендикулярність виду 2.1

Задача 6-2

Дано: дві прямі a і b та точка A .

З точки A провести пряму l перпендикулярну до прямих a і b .

Просторовий розв'язок наведено на рис.6-31, з якого видно, що двічі застосовується виконання перпендикулярності виду 2.1, це коли з точки A проводимо площину $\Delta \perp a$ і площину $\Sigma \perp b$. Лінія перетину $\Sigma \cap \Delta \Rightarrow 1...2$ – є шукана пряма, яка одночасно належить Δ і Σ , проведених перпендикулярно до прямої a і b .

Побудований відрізок $1...2$ визначає пряму, яка є перпендикулярною і мимобіжною до прямих a і b , тому що належить до площин перпендикулярних до відповідно заданих прямих.

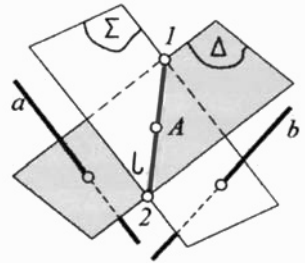


Рис. 6-31

6.5.4. Задачі на перпендикулярність виду 2.2

Задача 6-3

Дано: точка A і пряма l .

Визначити відстань від точки A до прямої l .

Послідовність розв'язку показано на рис.6-32, для цього:

1. Через точку A проводимо площину Δ , задану лініями рівня f і h і розташовану перпендикулярно до заданої прямої l .

2. Будуємо точку K – точку перетину прямої l з площиною Δ .

3. Точку A з'єднуємо з побудованою точкою K , отримуємо AK , визначаємо її натуральну величину яка і є шуканою відстанню від точки A до прямої l .

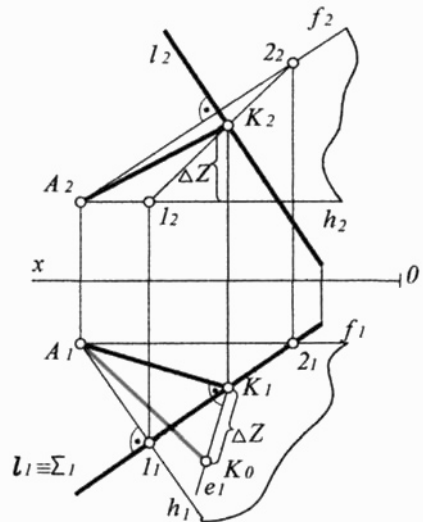


Рис. 6-32

Алгоритм розв'язку:

1. $\bullet A \subset \Delta (f \cap h) \perp l$; для цього:

на полі Π_2 : $\bullet A_2 \subset f_2 \perp l_2$,

$\bullet A_2 \subset h_2 \parallel Ox$;

на полі Π_1 : $\bullet A_1 \subset h_1 \perp l_1$,

$\bullet A_1 \subset f_1 \parallel Ox$;

2. $l \cap \Delta \Rightarrow \bullet K$; для цього:

$- l \subset \Sigma \perp \Pi_1$, на полі Π_1 : $l_1 \equiv \Sigma_1$;

$-\Sigma \cap \Delta \rightarrow 1\dots 2$, на полі Π_1 : $\Sigma_1 \cap h_1 \Rightarrow \bullet I_1 \Rightarrow \bullet I_2 \subset h_2$,

$\Sigma_1 \cap f_1 \Rightarrow \bullet 2_1 \Rightarrow \bullet 2_2 \subset f_2$,

$1_1\dots 2_1 \equiv \Sigma_1$;

на полі Π_2 : $\bullet 1_2 \cup \bullet 2_2 \Rightarrow 1_2\dots 2_2$;

$- 1\dots 2 \cap l \Rightarrow \bullet K$, на полі Π_2 : $\bullet 1_2\dots \bullet 2_2 \cap l_2 \Rightarrow K_2 \Rightarrow K_1 \subset l_1$.

3. $\bullet A \cup \bullet K$, для цього:

на полі Π_1 : $\bullet A_1 \cup \bullet K_1 \Rightarrow A_1K_1$ – г.п. відстані,

на полі Π_2 : $\bullet A_2 \cup \bullet K_2 \Rightarrow A_2K_2$ – ф.п. відстані.

4. н.в. АК! для цього:

на полі Π_2 : $Z^K - Z^A = \Delta Z$,

на полі Π_1 : $\bullet K_1 \subset e_1 \perp A_1K_1$, $\Delta Z \subset e_1 \Rightarrow K_0$,

$\bullet A_1 \cup \bullet K_0 \Rightarrow A_1K_0 = \text{н.в. АК}$.

Аналогічно розв'язуються задачі по визначенню:

– точки, симетричної заданій відносно прямої;

– кулі, дотичної до прямої, з центром в заданій точці;

– побудова геометричних фігур, два елемента яких розташовані під прямим кутом (рис. 6-33).

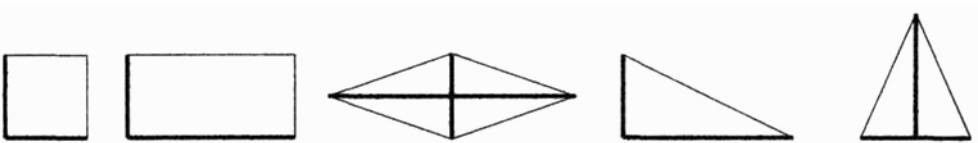


Рис. 6-33

6.5.5. Задача на перпендикулярність виду 3.1

Задача 6-4

Дано: відрізок AB і площина Σ , задана трикутником CDE , побудувати площину Δ , яка пройде через AB і розташується перпендикулярно до площини Σ .

Розв'язання задачі наведено на рис. 6-34.

Шукана площина визначається відрізком AB і перпендикуляром r до заданої площини трикутника (проведеного з A).

Для проведення r – перпендикулярно до трикутника CDE , перезадамо площину задану трикутником на задання її лініями рівня f і h . Тоді буде дотримано умову $r_1 \perp h_1$ і $r_2 \perp f_2$, і r буде \perp трикутнику CDE .

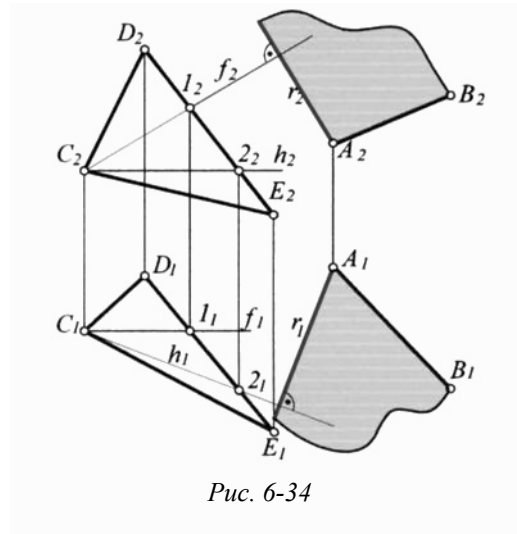


Рис. 6-34

6.5.6. Задача на перпендикулярність виду 3.2

Задача 6-5

1. Дано: точка K , площина Σ , задана трикутником ABC .

Побудувати площину Δ , проведену через точку K і розташовану перпендикулярно до Σ і P_1 .

Розв'язок наведено на рис. 6-35, де шукана площа Δ – горизонтально проєктуюча і перпендикулярна до площини Σ , так як проходить перпендикулярно до горизонталі h належної площині Σ .

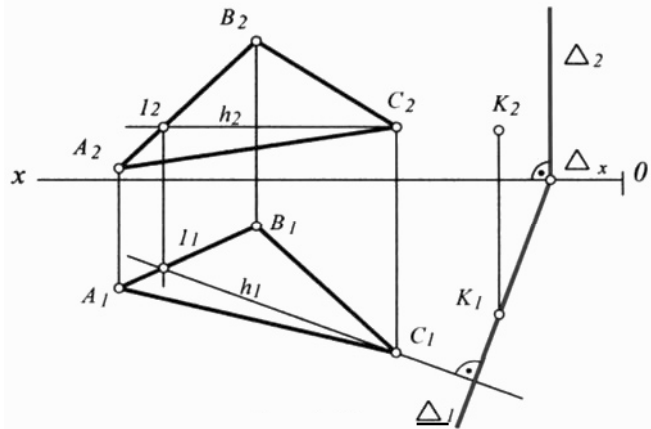


Рис. 6-35

6.6. Задачі для розв'язку

6.6.1. Задачі для позааудиторного розв'язку

Задача 6-6

1. Визначити відстань від точки A до заданої площини (рис. 6-36).

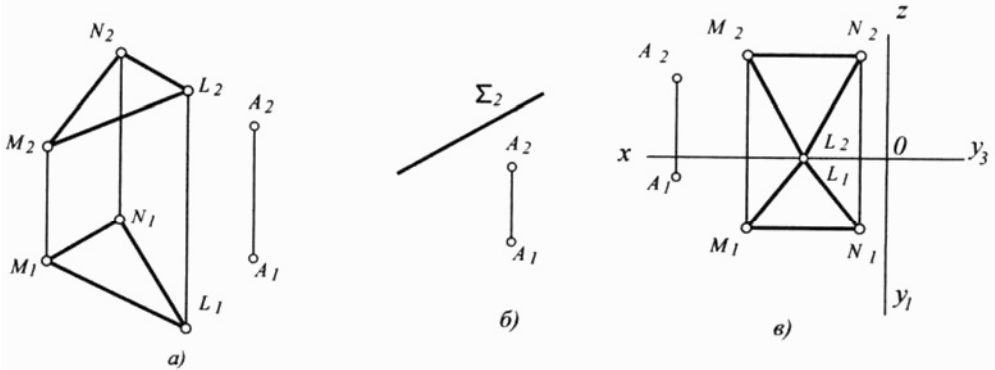


Рис. 6-36

Задача 6-7

2. Побудувати площину, яка проходить через точку A і перпендикулярна до заданої прямої l (рис. 6-37). Записати її визначник.

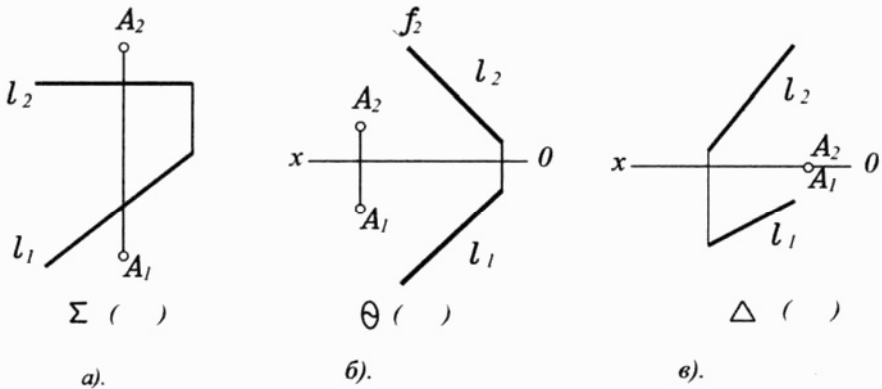
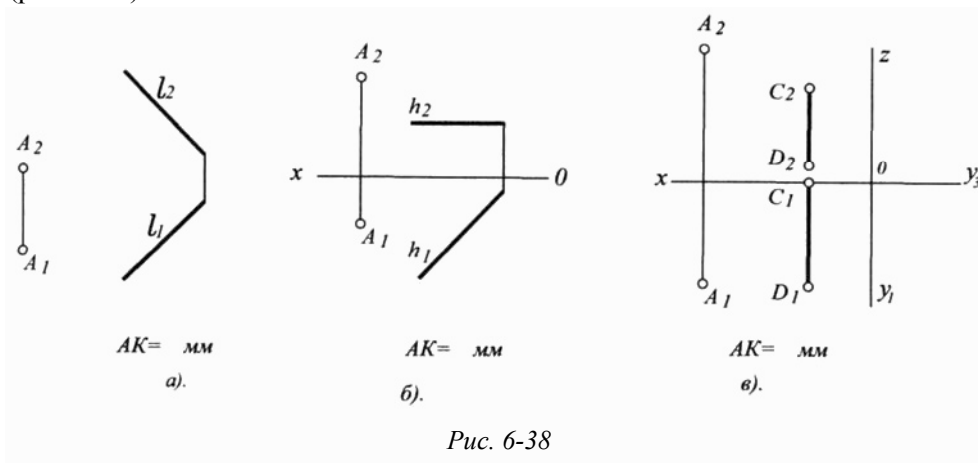


Рис. 6-37

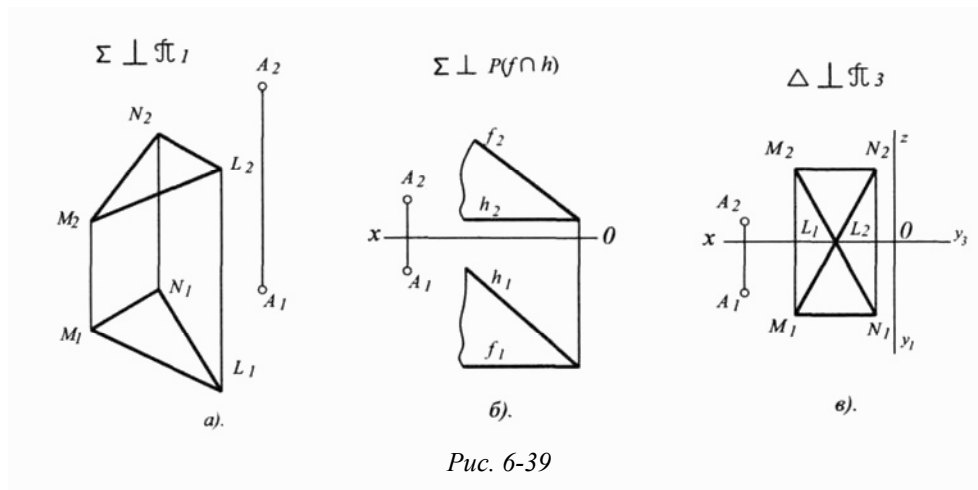
Задача 6-8

3. Визначити відстань від точки А до заданої прямої (виміряти і записати) (рис. 6-38).



Задача 6-9

4. Через точку А провести площину Σ , яка буде перпендикулярна до заданої. Записати її визначник (рис. 6-39).



6.6.2. Задачі для аудиторного розв'язання

Задача 6-10

5. Побудувати горизонтальну проекцію b_1 прямої b , яка перетинає задану пряму a під прямим кутом (рис. 6-40).

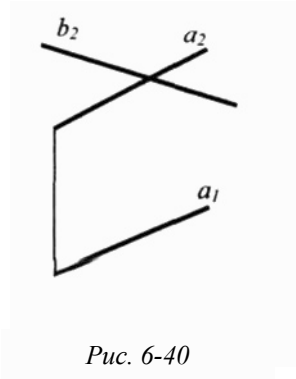


Рис. 6-40

Задача 6-11

6. Побудувати трикутник ABC з прямим кутом у вершині A і гіпотенузою BC на прямій l (рис. 6-41).

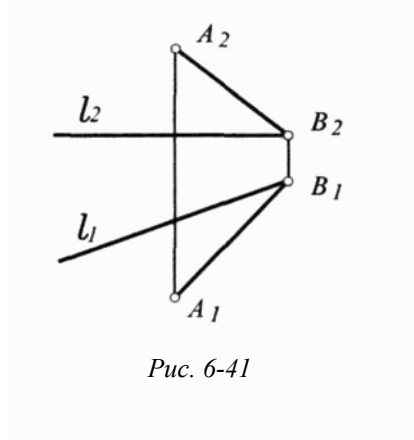


Рис. 6-41

Задача 6-12

7. Побудувати квадрат $ABCD$, який лежить у площині $\Sigma (m \parallel n)$ (рис. 6-42).

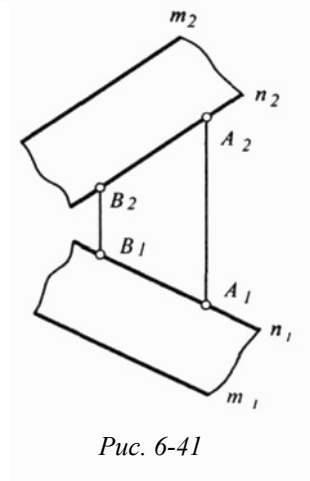


Рис. 6-41

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. В чому полягає особливість проектування прямого кута?
2. Ознаки перпендикулярності прямої до площини та площини до прямої, – спільне між ними.
3. Як відтворюються на епюрі проекції прямої, перпендикулярної до площини?
4. Ознака перпендикулярності двох прямих.
5. Що спільного у визначенні перпендикулярності двох прямих, що перетинаються та двох мимобіжних прямих?
6. Як з заданої точки простору провести перпендикуляр до площини, яка задана двома прямими, що перетинаються?
7. Ознака перпендикулярності двох площин.
8. Як з заданої точки простору провести площину, перпендикулярну іншій площині?
9. В чому полягає алгоритм визначення відстані від точки простору до заданої площини?
10. Етапи розв'язання задачі по визначенню відстані від точки простору до прямої лінії?
11. Особливість визначення кута між прямою та площиною.
12. В чому полягає послідовність розв'язання задачі по визначенню кута між двома площинами та між двома прямими?

Тема 7

Геометричні місця простору (ГМП)

Геометричне місце точок, прямих або площин в просторі називається сукупність однойменних елементів (геометричних образів, простору), які задовольняють заданій умові. Розглянемо деякі найбільш характерні ГМП.

7.1. Геометричні місця точок простору (ГМТП)

– ГМТП, віддалених від заданої однієї точки на задану відстань – ці ГМТП утворюють сферу з центром в заданій точці і радіусом, який дорівнює заданій відстані. Проекція сфери на всі площини проєкцій – це коло, радіус якого дорівнює заданій відстані, а центр – проєкції заданої точки.

– ГМТП, рівновіддалених від двох заданих точок – ці ГМТП утворюють площину, перпендикулярну до відрізка, який з'єднує задані точки і проходить через його середину.

ГМТП – площина $\Delta(f \cap h) \perp AB$;
 $\Delta \supset C \subset AB$; $AC = CB$. (рис. 7-1).

– ГМТП, рівновіддалених від трьох заданих точок, які не належать одній прямій, – ці ГМТП утворюють пряму, отриману при перетині двох площин, які проходять через середини відрізків, що попарно з'єднують задані точки і відповідно перпендикулярних до них.

ГМТП – пряма EF. (рис. 7-2).

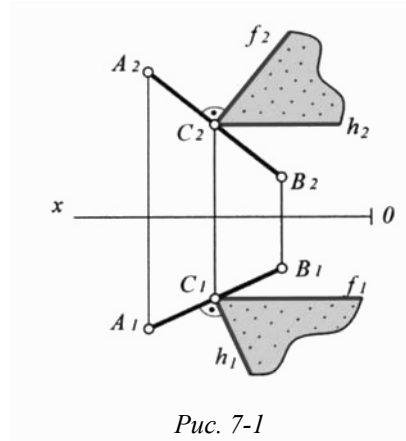


Рис. 7-1

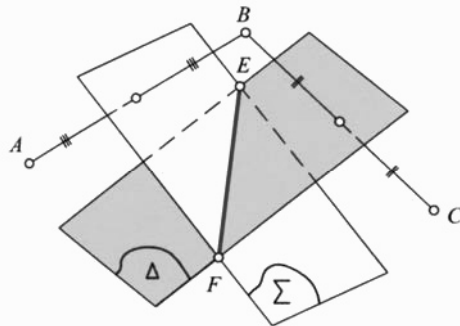


Рис. 7-2

– ГМТП, рівновіддалених від чотирьох заданих точок, які не належать одній площині, – таким ГМТП є точка, що служить центром сфери на поверхні якої розташовані всі чотири задані точки. Будеться точка – ГМТП як точка перетину трьох площин, які проходять через середини відрізків, що попарно з'єднують задані точки, і відповідно перпендикулярних до них. ГМТП – точка O на рис. 7-3.

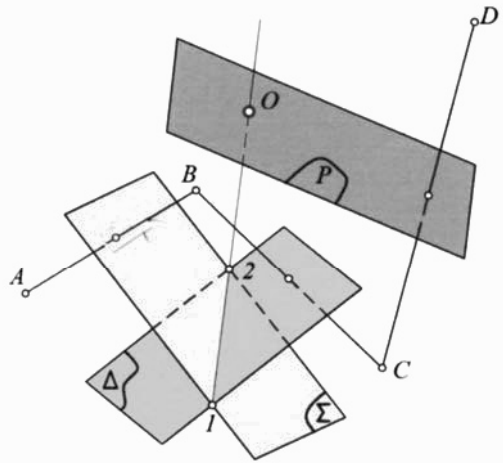


Рис. 7-3

– ГМТП, віддалених від заданої прямої на задану відстань, – ці ГМТП утворюють поверхню прямого кругового циліндра, вісь якого є задана пряма, а радіус кола нормального перерізу поверхні дорівнює заданій відстані.

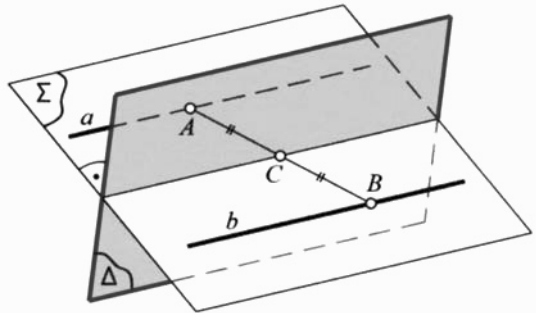


Рис. 7-4

– ГМТП, рівновіддалених від заданих двох паралельних прямих, – ці ГМТП утворюють площину перпендикулярну до площини яка утворена заданими прямими і проходить через середину відрізка, що з'єднує задані прямі, та їм паралельно. ГМТП – площина Δ на рис. 7-4.

– ГМТП, рівновіддалених від заданих трьох паралельних прямих, які не належать одній площині, – ці ГМТП утворюють пряму, прийняту за вісь прямого кругового циліндра, боковій поверхні якого належать задані прямі. ГМТП – пряма a на рис. 7-5.

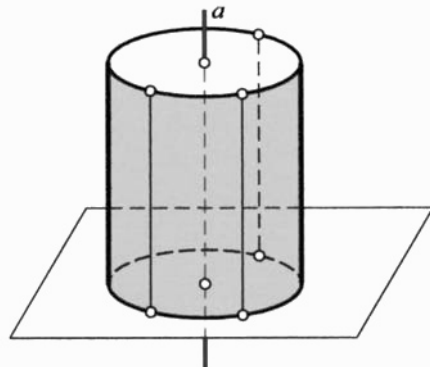


Рис. 7-5

– ГМТП, віддалених від заданої площини на заданій відстані, – ці ГМТП утворюють дві площини, які

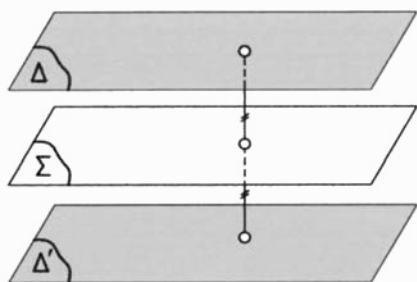


Рис. 7-6

паралельні заданій площині і розташовані з двох сторін від неї на заданій відстані. ГМТП – площини Δ і $\Delta' \parallel \Sigma$ на рис. 7-6.

– ГМТП, рівновіддалених від двох паралельних площин, – це ГМТП утворює площину, яка паралельна даним і ділить навпіл відрізок, виділений ними на рис. 7-6.

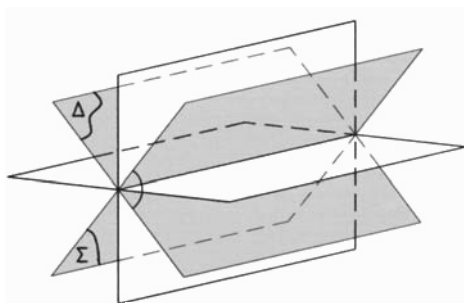


Рис. 7-7

– ГМТП, рівновіддалених від двох площин, що перетинаються, – ці ГМТП утворюють дві взаємно перпендикулярні площини, які є бісекторними площинами двогранних кутів, утворених заданими площинами. ГМТП – площини $\Delta \perp \Sigma$ на рис. 7-7.

– ГМТП – вершин прямокутних трикутників, які мають спільну гіпотенузу, – ці ГМТП утворюють поверхню сфери, діаметр якої є ця гіпотенуза.

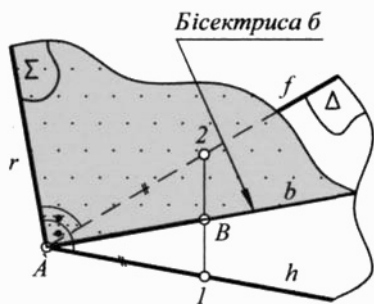


Рис. 7-8

– ГМТП – рівновіддалених від бокової поверхні кругового конуса або циліндра, – ці ГМТП утворюють вісь цієї поверхні.

– ГМТП рівновіддалених від прямих, що перетинаються, – ці ГМТП утворюють площину, яка проходить через бісектрису кута між заданими прямими і перпендикулярна до площини цих прямих. ГМТП – площина $\Sigma (b \cap h) \perp \Delta (f \cap r)$ на рис. 7-8

7.2. Геометричні місця прямих простору (ГМПП)

– ГМПП паралельних заданій прямих і віддалених від неї на задану відстань, – ці ГМПП як і ГМТП утворюють бічну поверхню прямого кругового циліндра, вісь якого є задана пряма, а радіус кола нормального перерізу поверхні дорівнює заданій відстані.

– ГМПП, віддалених від заданої площини на задану відстань, – ці ГМПП, як МТП, утворюють дві площини, які паралельні заданій площині і розташовані з двох сторін від неї на заданій відстані.

ГМПП – площини Δ і $\Delta' \parallel \Sigma$ на рис. 7-6

– ГМПП, які проходять через задану точку і нахилені до заданої прямої під заданим кутом, – ці ГМПП утворюють сукупність твірних бічної поверхні прямого кругового конуса з вершиною в даній точці і вісь його паралельна заданій прямій, а твірні утворюють кут з віссю, який дорівнює заданому. У випадку, коли задана точка розташована на заданій прямій, то ця пряма є віссю конуса, рис. 7-9.

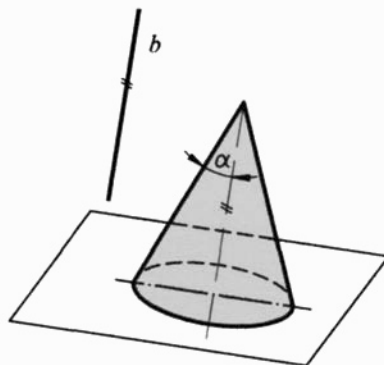


Рис. 7-9

– ГМПП, які проходять через задану точку і перетинають задану пряму, – ці ГМПП утворюють площину, яка визначається заданою точкою і прямою.

– ГМПП, які проходять через задану точку і паралельну заданій площині, – ці ГМПП утворюють площину, яка проходить через задану точку і паралельна заданій площині.

– ГМПП, які дотичні до сфери в даній точці на ній, – ці ГМПП утворюють площину, яка пройде через дану точку і перпендикулярна до радіуса сфери, направлено до цієї точки.

7.3. Геометричні місця площин простору (ГМПлП)

– ГМПлП, паралельних даній прямій і віддалених від неї на задану відстань, – ці ГМПлП утворюють багаточисельні площини, дотичні до циліндричної поверхні обертання, вісь якого є дана пряма, а радіус нормального перерізу поверхні дорівнює заданій відстані.

– ГМПлП, що проходять через задану точку під заданим кутом до даної площини, – ці ГМПлП утворюють багаточисельні площини, дотичні до конічної поверхні обертання з вершиною в даній точці, вісь якої перпендикулярна до даної площини, а твірні, нахилені до цієї площини під заданим кутом.

– ГМПлП, що проходять через задану точку під заданим кутом до деякої прямої, – ці ГМПлП утворюють багаточисельні площини, дотичні до конічної поверхні обертання з вершиною в заданій точці, та віссю, яка паралельна заданій прямій, і твірними, нахиленими до осі під заданим кутом.

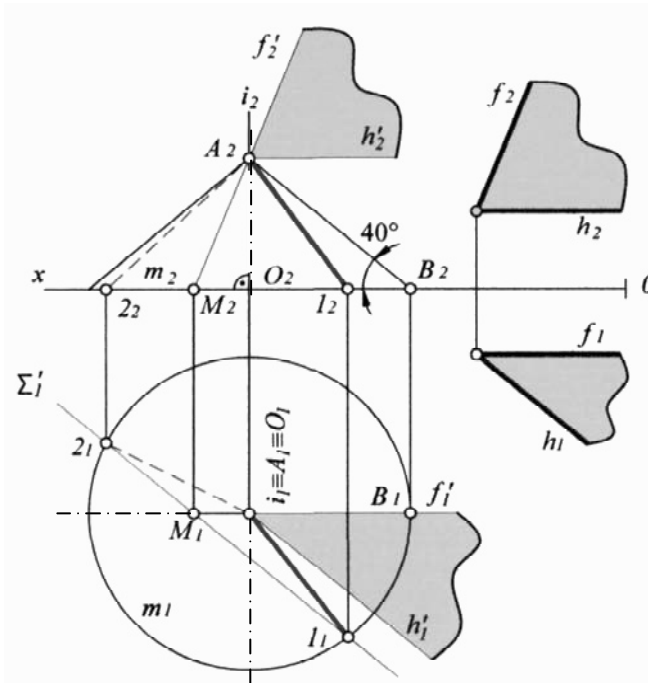


Рис. 7-12

Алгоритм розв'язку (розгорнутий):

1. $\bullet A \subset \Sigma' (f' \cap h') \parallel \Sigma (f \cap h)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet A_2 \subset f'_2 \parallel f_2 \\ \bullet A_2 \subset h'_2 \parallel h_2 \parallel Ox \\ \bullet A_1 \subset f'_1 \parallel f_1 \parallel Ox \\ \bullet A_1 \subset h'_1 \parallel h_1 \end{array} \right.$$

$\Sigma' (f' \cap h') - I^e \Gamma \text{МПП}$.

2. $\bullet A \subset \Phi^k \wedge \Pi_1 = 40$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet A \subset AB \parallel \Pi_2; AB \wedge \Pi_1 = 40 \quad \left\{ \bullet A_2 \subset A_2 B_2 \wedge Ox = 40 \Rightarrow A_1 B_1 \parallel Ox \right\} \\ \bullet A \subset i \perp \Pi_1 \quad \left\{ \bullet A_2 \subset i_2 \perp Ox; i_1 \equiv A_1 \right\} \\ AB \cup i \Rightarrow \Phi^k \\ \Pi_1 \supset \bullet B \cup i \Rightarrow m \quad \left\{ \bullet B_1 \cup i_1 \Rightarrow m_1 \Rightarrow m_2 \equiv Ox \right\} \end{array} \right.$$

$\Phi^k - II^e \Gamma \text{МПП}$.

3. $\Sigma' \cap \Phi^k \Rightarrow A1 (A2)!$

$$\Sigma' (f' \cap h') \Rightarrow \Sigma' (f' \cap \Sigma'_1) \left\{ \begin{array}{l} f'_2 \cap Ox \Rightarrow \bullet M_2 \Rightarrow M_1 \subset f'_1 \\ \bullet M_1 \subset \Sigma'_1 \parallel h'_1 \end{array} \right\}$$

$$\Sigma'_1 \cap m_1 \Rightarrow \bullet 1_1 \Rightarrow I_2 \subset m_2;$$

$$\Sigma'_1 \cap m_1 \Rightarrow \bullet 2_1 \Rightarrow 2_2 \subset m_2;$$

$$\bullet A \cup \bullet 1 \Rightarrow A1! (\bullet A \cup \bullet 2 \Rightarrow A2!) \left\{ \begin{array}{l} \bullet A_2 \cup \bullet 1_2 \Rightarrow A_2 1_2; \bullet A_1 \cup \bullet 1_1 \Rightarrow A_1 1_1 \\ \bullet A_2 \cup \bullet 2_2 \Rightarrow A_2 2_2; \bullet A_1 \cup \bullet 2_1 \Rightarrow A_1 2_1 \end{array} \right\}$$

Приклад 7-2.

Дано: точка A , належна площині проєкцій Π_1 і точка B в просторі (рис. 7-13).

Необхідно: побудувати сферу з точками A і B на її поверхні.

Послідовність розв'язку: Враховуючи, що точка A належить площині Π_1 , то по даній горизонтальній проєкції точки $A - A_1$ будемо $A_2 \subset Ox$. Точка $A -$ точка дотику шуканої сфери до Π_1 , тобто центр сфери буде належати перпендикуляру r до Π_1 , проведеного з точки A . Беручи до уваги, що точка A і точка B належать сфері, то центр сфери лежить в площині $\Sigma (f \cap h)$, яка є ГМТП, рівновіддалених від точок A і B , а проходить ця площина через точку $C -$ середину відрізка AB і перпендикулярна йому. Центр сфери є точка O , яка одночасно належить r і Σ . Точка перетину r з Σ є точкою O .

Просторове зображення розв'язку задачі наведено на рис. 7-14, розв'язок її на епюрі наведено на рис. 7-15.

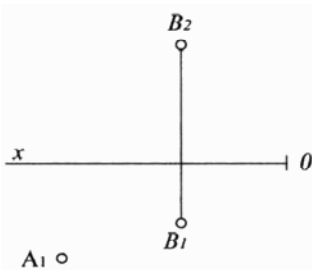


Рис. 7-13

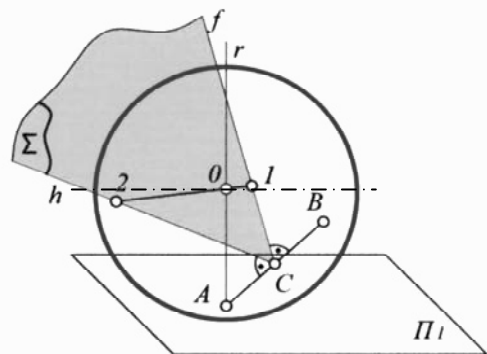
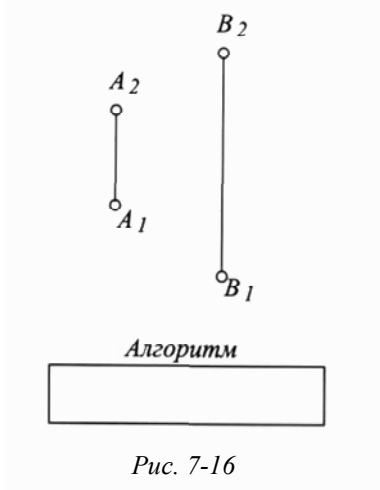


Рис. 7-14

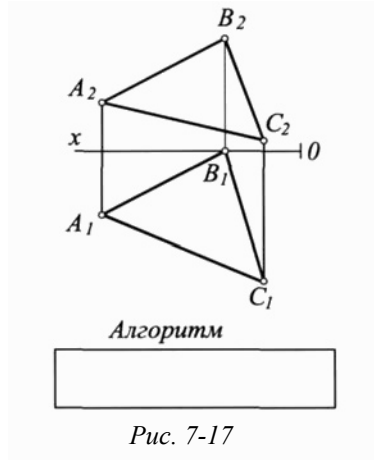
7.5. Задачі для розв'язку

7.5.1. Задачі для позааудиторного розв'язку

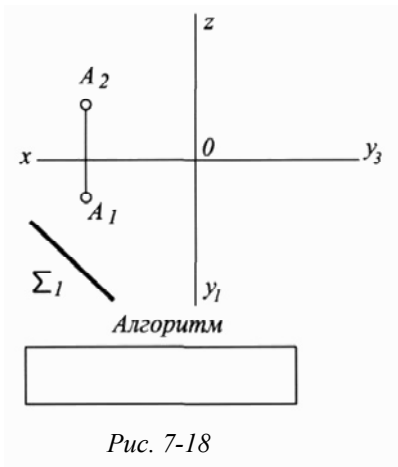
Задача 7-1. Побудувати ГМТ простору рівновіддалених від точок А і В (рис. 7-16).



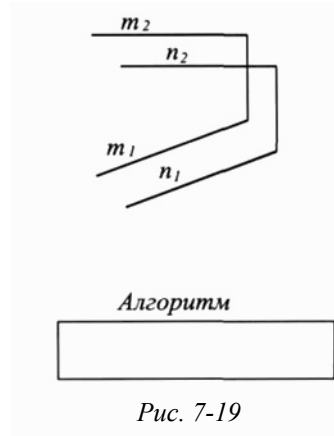
Задача 7-2. Побудувати ГМТ, розміщених від площини $\Sigma(\triangle ABC)$ на відстані 20 мм. (рис. 7-17).



Задача 7-3. Через точку А провести пряму, паралельну площині $\Sigma(\Sigma_1)$ і віддалену від осі у на 10 мм (рис. 7-18)



Задача 7-4. Побудувати, ГМТ віддалених від двох паралельних прямих m і n (Рис. 7-19).



7.5.2. Задачі для аудиторного розв'язку

Задача 7-5. На осі z знайти точку C , рівновіддалену від точок A і B (рис. 7-20).

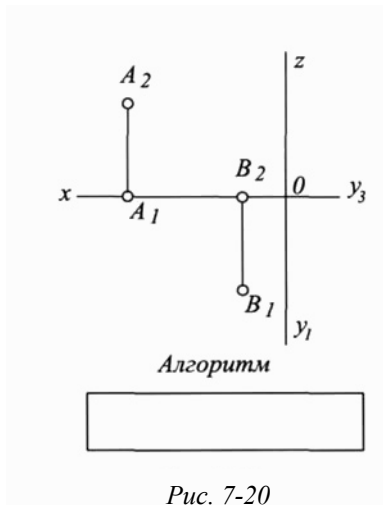


Рис. 7-20

Задача 7-6. Побудувати пряму a , паралельну Σ (Σ_2) і дотичну в точці K до сфери з центром у точці C (рис. 7-21).

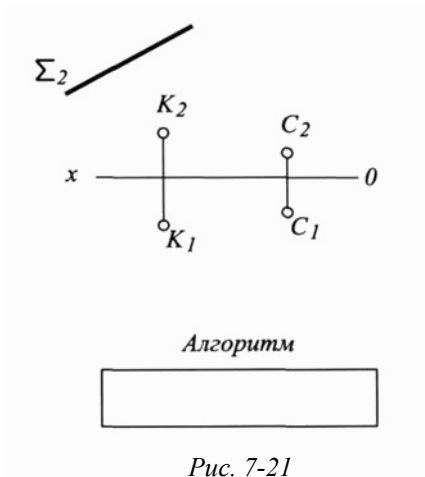


Рис. 7-21

Задача 7-7. Через точку A провести пряму, яка утворює з площиною Π_1 кут 45° , а з площиною Π_2 – кут 30° (рис.7-22).

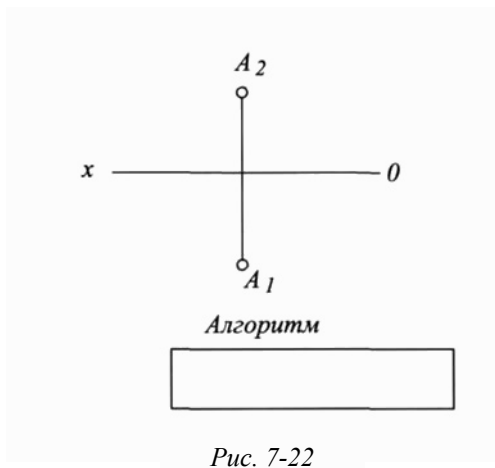


Рис. 7-22

Задача 7-8. Побудувати ГМТП, рівновіддалених від сторін лінійного кута, утвореного прямими h і f (рис.23).

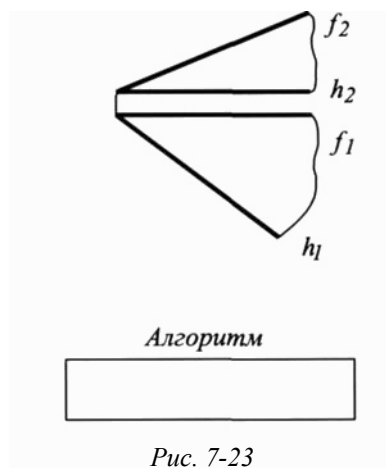


Рис. 7-23

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що є геометричним місцем точок рівновіддалених від двох точок простору, від трьох точок простору (не належних одній прямій), від чотирьох точок простору (не належних одній площині)?
2. Що таке геометричне місце точок рівновіддалених від двох паралельних прямих, від двох прямих, які перетинаються, чи від двох мимобіжних прямих?
3. Що утворюють прямі, проведені з однієї точки простору під заданим кутом до заданої прямої?
4. Що утворюється площинами, проведеними через задану точку під заданим кутом до даної площини?
5. Як через задану точку провести пряму, нахилену до площини проєкції під заданим кутом?
6. Як через задану точку провести площину під заданими кутами до двох площин проєкції?

Епюр №1

По закінченню вивчення розділу №1 „Паралельність та перпендикулярність”, кожен студент за варіантом, який йому присвоєно в групі, виконує епюр №1, а також в наступному – епюр №2 і епюр №3.

В таблиці №1 додатків наведені завдання на епюр №1, де передбачено в кожному варіанті по три задачі, наведено шифр задачі, умова її, та кресленик умови задачі. Шифр задачі, наприклад, 1.07.2, складається: перше число 1 – епюр №1, друге число 07 – сьомий варіант, третє число 2 – порядковий номер задачі в завданні.

Розв’язок задач епюра №1 безметодний, тобто, з застосуванням теоретичного матеріалу, викладеного в розділі №1 „Паралельність та перпендикулярність”.

Кожна задача епюра №1 виконується на окремому аркуші формату А4 (297×210), папір – ватман (креслярський папір). Оформлення кожного аркуша, та компанування розв’язку кожної задачі наведено на рис. Е-1. На форматі, оформленому рамкою і головним написом, наводиться: в лівому верхньому куті – умова задачі, праворуч від умови – просторове зображення розв’язку задачі, а в правому верхньому куті – узагальнений алгоритм розв’язку задачі.

Епюр виконується кольоровими лініями:

– *чорною* – умова задачі (зображення кресленика умови задачі, який приблизно в п’ять разів більше кресленика завдання);

– *синьою* – хід розв’язання;

– *червоною* – відповідь розв’язку задачі.

Зображення площин (сліди, обриси плоских фігур та інше) – відтворюється суцільною товстою лінією, з їх кольоровою заливкою дуже світло прозорого тону.

Зображення ходу побудови (лінії зв’язку, проміжні побудови та інше) – відтворюється суцільною тонкою лінією.

Всі букви та цифри позначення виконуються креслярським шрифтом №3,5 або №5 чорного кольору (допускається позначення: чорними – те, що задано, синім – проміжні дії, червоним – те, що побудовано, відповідь).

Послідовність виконання епюра:

– оформити аркуш формату А4, як показано на рис. Е-1;

– з’ясувати умову задачі, провести просторовий аналіз умови – що задано і що необхідно побудувати;

– уявити собі розв’язок задачі в просторі, розбивши розв’язок на прості складові задачі (етапи розв’язку), виділити можливі геометричні місця при їх розв’язанні, а об’єднавши їх розв’язання – отримуємо розв’язок поставленої задачі в умові;

– написати узагальнений алгоритм розв’язку, послідовного розв’язання простих складових задач;

– виконати епюр розв’язку задачі згідно алгоритму, попередньо виконавши ескіз розв’язку і погодити його з викладачем.

Приклад виконання епюра №1 наведено на рис. Е-1.6. На рис. Е-1.1... Е-1.5 наведено проміжні етапи послідовного розв’язку епюра №1 (розв’язок простих складових задач на які розбито розв’язок умови задачі епюра). На кожному з цих проміжних епюрів зверху символами написано розглядаємий пункт узагальненого алгоритму розв’язку задачі епюра та наведено розгорнутий алгоритм епюрного розв’язку розглядаємого етапу.

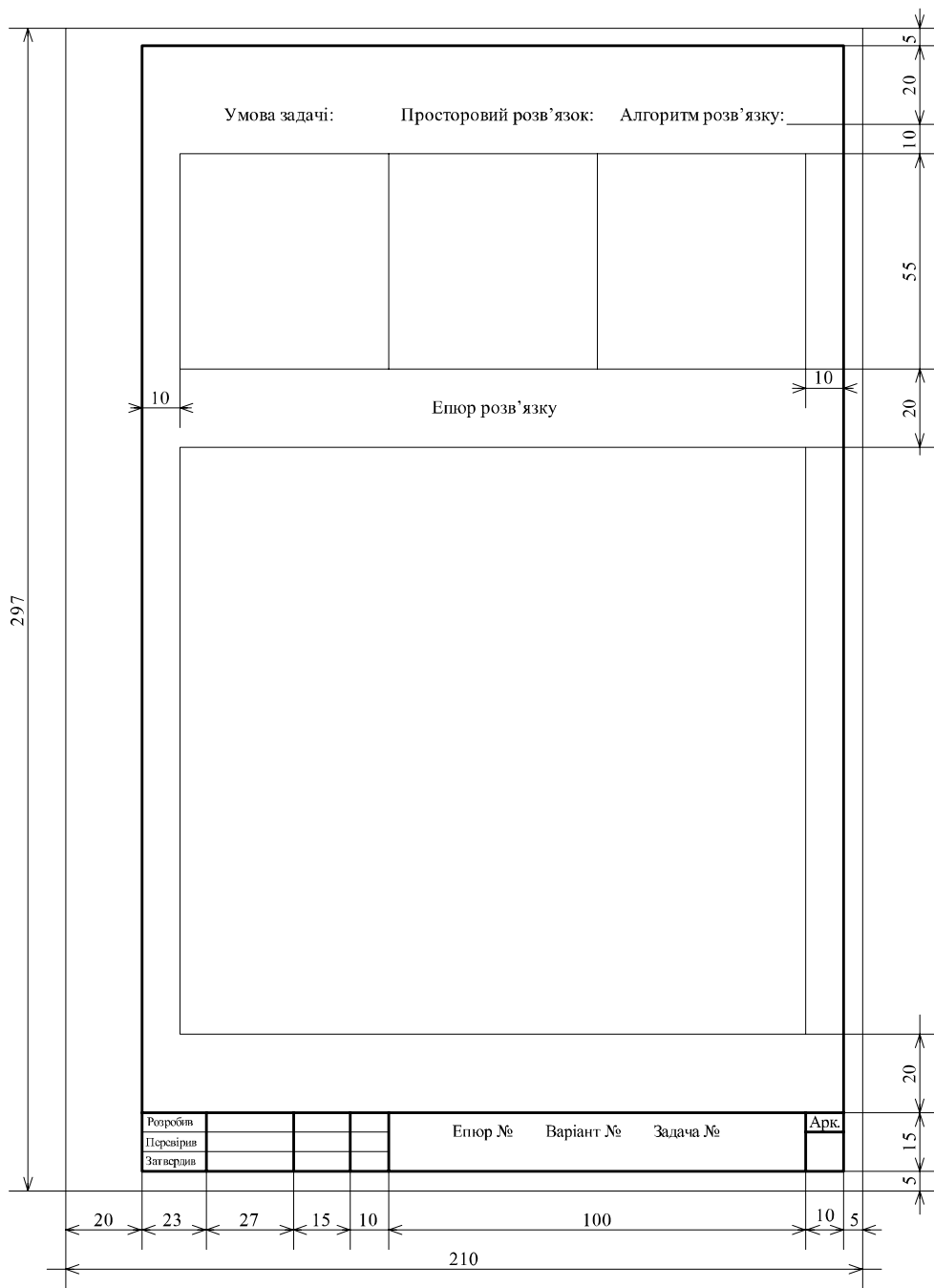


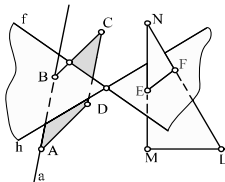
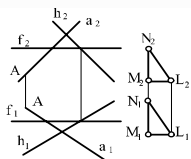
Рис. Е-1

Умова задачі:

Просторовий розв'язок:

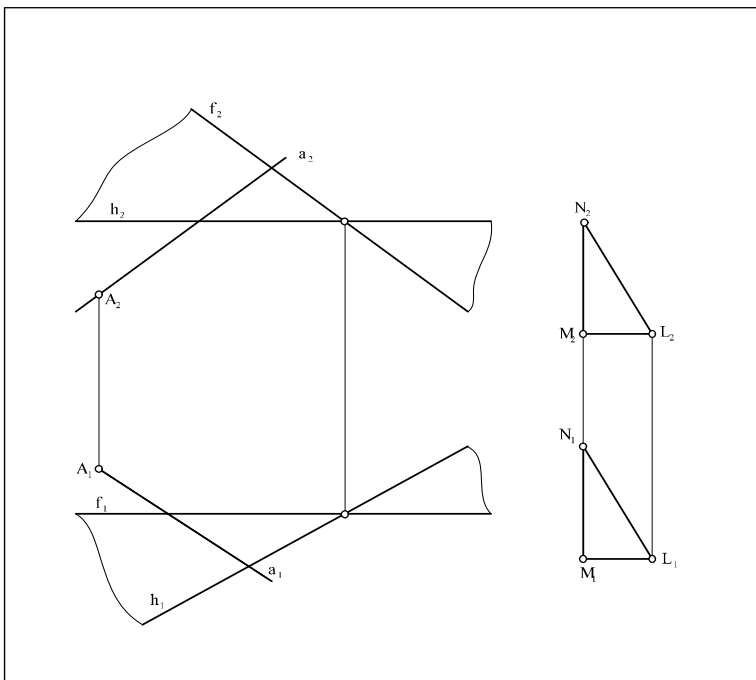
Алгоритм розв'язку:

1. Побудувати ромб $ABCD$, в якого $AB \subset \alpha$, $ABCD \parallel \Delta(MNL)$, $BC \subset \Sigma(f \cap h)$.



1. $A \subset \alpha \cap \Sigma \Rightarrow B \Rightarrow B \subset \alpha$.
2. $\Sigma(f \cap h) \cap \Delta(MNL) \Rightarrow EF$
3. $B \subset BC = AB$;
 $BC \parallel EF \subset \Delta$.
4. $A \subset AD \parallel BC$;
 $AD = BC \Rightarrow D \cup C \Rightarrow DC \Rightarrow ABCD!$

Епюр розв'язку



					Епюр №1	Варіант №...	Задача №...	Арх.
					Розділ I: „Паралельність та перпендикулярність”.			

Рис. E-1.1

1. $\cdot A \subset a \cap \Sigma \Rightarrow B \Rightarrow AB \subset a$

1.1. $a \subset \theta \perp \Pi_2$;

$-a_2 \equiv \theta_2 \cdot$

1.2. $\theta(\theta_2) \cap \Sigma(f \cap h) \Rightarrow 1...2$;

$-\theta_2 \cap h_2 \Rightarrow \cdot 1_2 \Rightarrow \cdot 1_1 \subset h_1$;

$-\theta_2 \cap f_2 \Rightarrow \cdot 2_2 \Rightarrow \cdot 2_1 \subset f_1$;

$-\cdot 1_1 \cup \cdot 2_1 \Rightarrow 1_1...2_1; 1_2...2_2 \equiv \theta_2 \cdot$

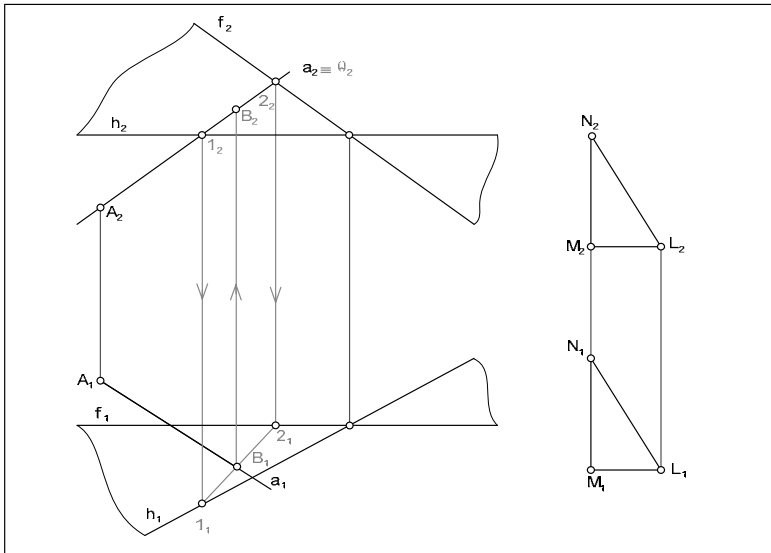
1.3. $1...2 \cap a \Rightarrow \cdot B$;

$-1_1...2_1 \cap a_1 \Rightarrow \cdot B_1 \Rightarrow \cdot B_2 \subset a_2 \cdot$

1.4. $\cdot A \cup \cdot B \Rightarrow AB \subset a$;

$-\cdot A_1 \cup \cdot B_1 \Rightarrow A_1 B_1 \subset a_1$

$-\cdot A_2 \cup \cdot B_2 \Rightarrow A_2 B_2 \subset a_2$



Епюр №1 Варіант №... Задача №...
Розділ I: „Паралельність та перпендикулярність”.

Арк.

Рис. E-1.2

2. $\Sigma (f \cap h) \cap \Delta(MNL) \Rightarrow EF$

2.1 Вибираємо посередник площину $P \parallel \Pi_1 \Rightarrow P(P_2) \Rightarrow P_2 \parallel O_x$;

- $P(P_2) \cap \Sigma (f \cap h) \Rightarrow h'' \parallel h$

$P_2 \cap f_2 \Rightarrow \cdot 7_2 \Rightarrow h'_2 \parallel h_2 \Rightarrow \cdot 7_1 \in f_1; \cdot 7_1 \in h'_1 \parallel h_1$

- $P(P_2) \cap \Delta(MNL) \Rightarrow 3 \dots 4 \perp \Pi_3$

$P_2 \cap M_2 N_2 L_2 \Rightarrow 3_2 \dots 4_2 \Rightarrow 3_1 \dots 4_1 \in M_1 N_1 L_1$

- $h' \cap 3 \dots 4 \Rightarrow \cdot E$

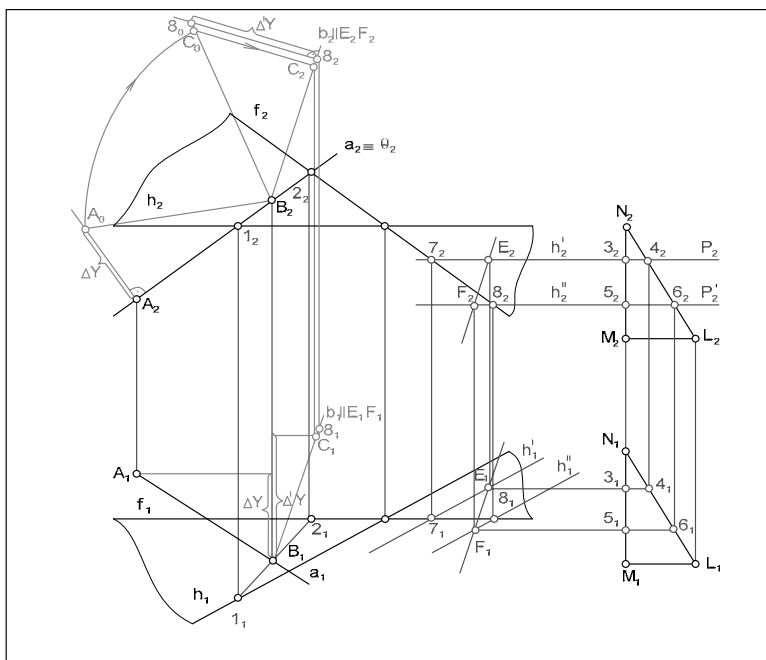
$h'_1 \cap 3_1 \dots 4_1 \Rightarrow \cdot E_1 \Rightarrow E_2 \in P_2$

2.2 Вибираємо $P' \parallel P \Rightarrow \cdot F$

2.3 $\cdot E \cup \cdot F \Rightarrow EF!$

$\cdot E_1 \cup \cdot F_1 \Rightarrow E_1 F_1$

$\cdot E_2 \cup \cdot F_2 \Rightarrow E_2 F_2$



Епюр №1 Варіант №... Задача №...
Розділ I: „Паралельність та перпендикулярність”.

Арк.

Рис. Е-1.3

3. $B \subset BC = AB; BC \parallel EF \subset \Delta$

3.1 $B \subset b \parallel EF;$

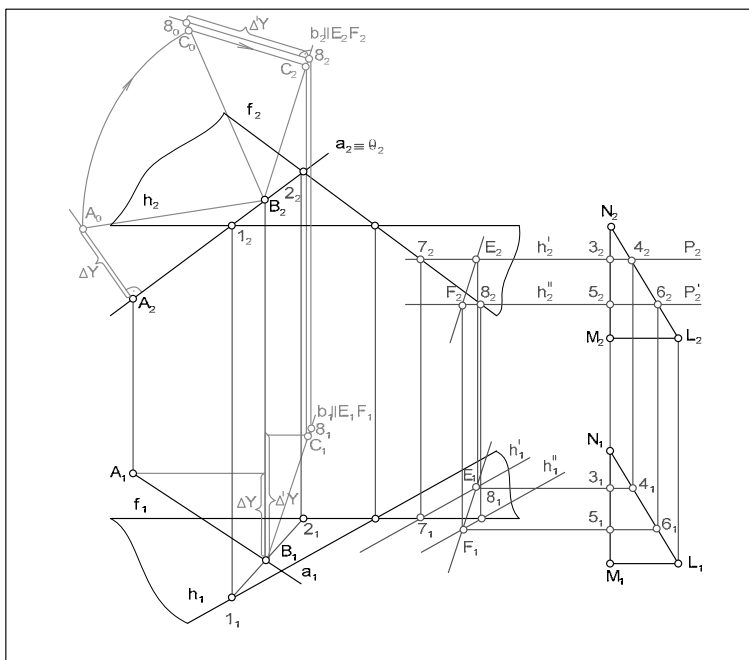
– $B_1 \subset b_1 \parallel E_1F_1$

– $B_2 \subset b_2 \parallel E_2F_2$

3.2 $BC \subset b; BC = AB$

– $B \subset b \Rightarrow \text{н.в.} B8$

– $\text{н.в.} AB \rightarrow \text{н.в.} B8 \Rightarrow \text{н.в.} BC \Rightarrow C_2 \subset b_2 \Rightarrow C_1 \subset b_1$



Епор №1 Варіант №... Задача №...
Розділ I: „Паралельність та перпендикулярність”.

Арк.

Рис. E-1.4

4. $\cdot A \subset AD \parallel BC; AD = BC \Rightarrow D \cup C \Rightarrow DC \Rightarrow ABCD!$

4.1. $\cdot A \subset d \parallel b$

- $\cdot A_2 \subset d_2 \parallel b_2$

- $\cdot A_1 \subset d_1 \parallel b_1$

4.2 $BC = AD \subset d \Rightarrow \cdot D$

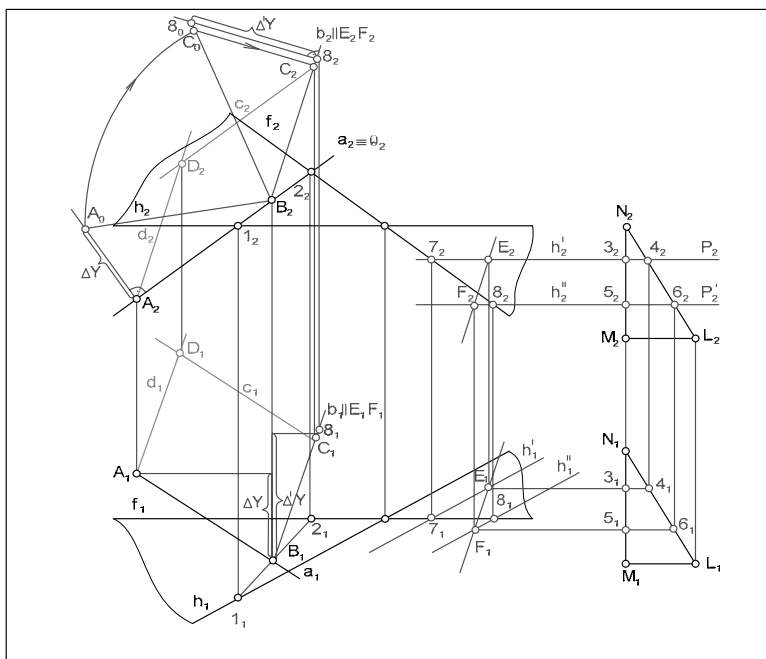
- $\cdot A_2 \subset d_2 \subset A_2D_2 = B_2C_2 \Rightarrow \cdot D_2 \subset d_2$

- $\cdot A_1 \subset d_1 \subset A_1D_1 = B_1C_1 \Rightarrow \cdot D_1 \subset d_1$

4.3 $\cdot D \cup \cdot C \Rightarrow DC \Rightarrow \text{ромб} - ABCD!$

- $D_2 \cup \cdot C_2 \Rightarrow D_2C_2 \Rightarrow A_2B_2C_2D_2$

- $D_1 \cup \cdot C_1 \Rightarrow D_1C_1 \Rightarrow A_1B_1C_1D_1$



					Епюр №1	Варіант №...	Задача №...	Арк.
					Розділ I: „Паралельність та перпендикулярність”.			

Рис. E-1.5

Розділ II

Методи перетворення ортогональних проєкцій

Розглядаючи кресленик об'єкта, для визначення його складових елементів, необхідно мати найбільш інформативні зображення, які можна отримати побудовою додаткових проєкцій об'єкта. В таких проєкціях розглядаємі елемент (геометричний образ) повинен займати переважно окреме положення відносно площин проєкцій, що можливо досягти зміною взаємного положення об'єкта і площини проєкцій. Це може бути досягнуто коли:

- об'єкт *нерухомий*, а змінюється розташування площин проєкцій відносно об'єкта;
- *нерухомими є площини проєкцій*, а змінюється розташування об'єкта відносно площин.

Крім цього, існує ряд спеціальних методів перетворення проєкцій.

II.1. Види перетворень ортогональних проєкцій

Розглянемо призначення найбільш поширених видів:

- *перетворення виду № 1* – дає можливість перетворити *пряму загального положення в пряму рівня*, це перетворення виконують для визначення натуральної величини прямої (її відрізка) та кутів нахилу її до площини проєкцій, чи інших метричних задач (рис. 8-1).

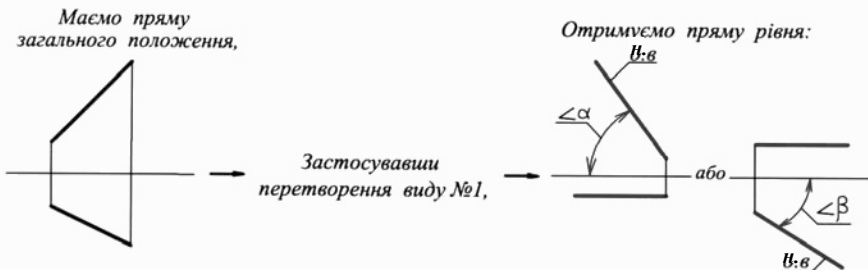


Рис. 8-1

– перетворення виду № 2 – дає можливість перетворити пряму рівня в пряму проєктуючу, це перетворення виконують для розв’язання ряду позиційних задач, наприклад, відстань від точки до прямої, відстань між прямими та інших (рис. 8-2).

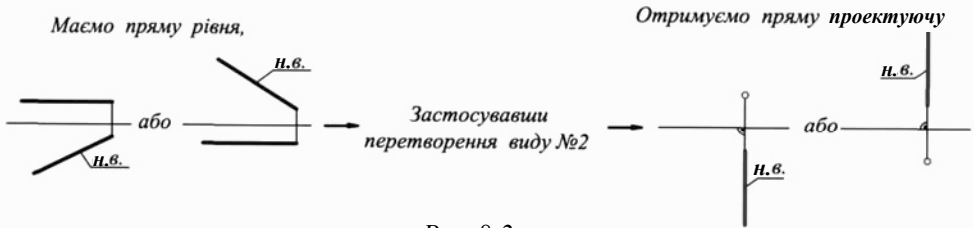


Рис. 8-2

– перетворення виду № 1 + № 2 – дає можливість перетворити пряму загального положення в пряму проєктуючу, це перетворення виконують для розв’язання ряду метричних чи позиційних задач стосовно прямих, характерних для об’єкта (рис. 8-3).

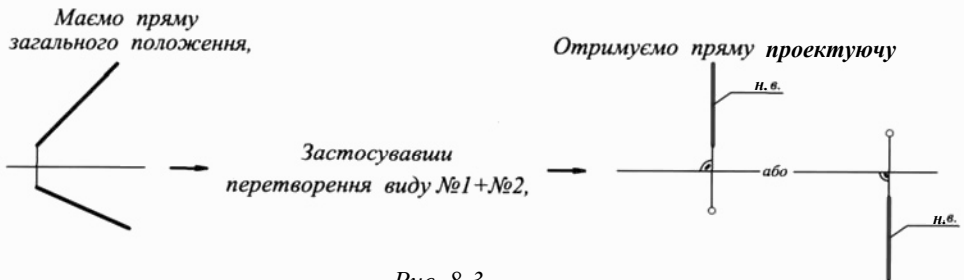


Рис. 8-3

– перетворення виду № 3 – дає можливість перетворити площину загального положення в площину проєктуючу, це перетворення виконується для розв’язання позиційних задач, наприклад, визначених кутів нахилу площин до площини проєкцій та інших (рис. 8-4).

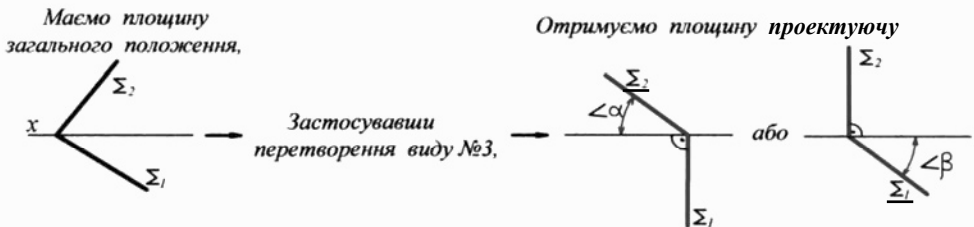


Рис. 8-4

– перетворення виду № 4 – дає можливість перетворити площину проєктуючу в площину рівня, це перетворення виконується для розв’язання задач по визначенню метричних характеристик плоских фігур (рис. 8-5).

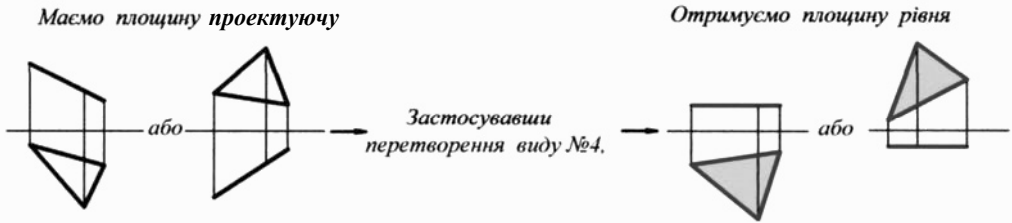


Рис. 8-5

– перетворення виду № 3 + № 4 – дає можливість перетворити площину загального положення в площину рівня, це перетворення виконується для розв’язання ряду позиційно-метричних задач, стосовно плоских фігур, характерних для об’єкта (рис. 8-6).

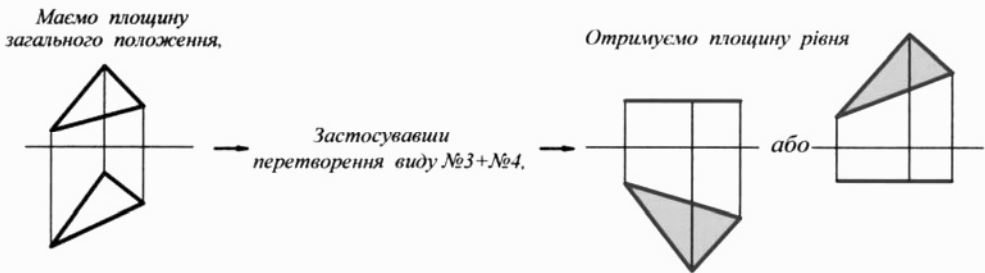


Рис. 8-6

Тема 8

Метод заміни площин проєкцій

Метод ґрунтується на виборі нової площини проєкцій, відносно якої елемент об'єкта, не змінюючи свого положення в просторі, займе окреме положення. При цьому, нова площина проєкцій розташовується перпендикулярно до однієї з "старих" заданих площин проєкцій.

Часто отримання необхідного зображення об'єкта (або його елемента), досягається заміною тільки однієї площини проєкцій, що може бути виконано за схемою А або по схемі В, виконання яких відбувається в такій послідовності:

схема А: (виконується однією заміною) $x \frac{P_2}{P_1} \rightarrow x_1 \frac{P_1}{P_4}$ при цьому замінюється площина P_2 на P_4 , яка розташовується перпендикулярно до площини P_1 , а P_4 , перетинаючись з P_1 , утворює вісь x_1 , яка розділяє нові поля $\frac{P_1}{P_4}$;

схема В: (виконується однією заміною) $x \frac{P_1}{P_2} \rightarrow x_1 \frac{P_2}{P_4}$ при цьому замінюється площина P_1 на P_4 , яка розташовується перпендикулярно до площини P_2 , а P_4 , перетинаючись з P_2 , утворює вісь x_1 , яка розділяє нові поля $\frac{P_2}{P_4}$.

У випадку, коли для розв'язку метричної задачі, однієї заміни недостатньо, то розв'язання виконується двома послідовними замінами за схемою С, або схемою D:

схема С: (виконується двома замінами) $x \frac{P_2}{P_1} \rightarrow x_1 \frac{P_1}{P_4} \rightarrow x_2 \frac{P_4}{P_5}$, при цьому виконується перша заміна, коли замінюється площина P_2 на $P_4 \perp P_1$ і $P_4 \cap P_1 \Rightarrow x_1$, яка розділяє поля $\frac{P_1}{P_4}$, далі виконується друга заміна, коли P_1 замінюється на $P_5 \perp P_4$ і $P_5 \cap P_4 \Rightarrow x_2$, яка розділяє нові поля $\frac{P_4}{P_5}$;

схема D: (виконується двома замінами) $x \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \rightarrow x_1 \frac{\Pi_2}{\Pi_4} \rightarrow x_2 \frac{\Pi_4}{\Pi_5}$ при цьому виконується перша заміна, коли замінюється площина Π_1 на $\Pi_4 \perp \Pi_2$ і $\Pi_4 \cap \Pi_2 \Rightarrow x_1$, яка розділяє поля $\frac{\Pi_2}{\Pi_4}$, далі виконується друга заміна, коли Π_2 замінюється на $\Pi_5 \perp \Pi_4$ і $\Pi_5 \cap \Pi_4 \Rightarrow x_2$, яка розділяє нові поля $\frac{\Pi_4}{\Pi_5}$.

Крім наведених схем, існують інші, наприклад, схема В. Л. Торохова, яка дозволяє отримати наслідок подвійної заміни площин без проміжної заміни.

8.1. Заміна однієї площини проєкцій

Нехай в просторі взаємно перпендикулярних площин Π_1 і Π_2 (рис. 8-7) розташована точка A і її горизонтальна проєкція A_1 , фронтальна проєкція A_2 та висота AA_1 і її проєкція A_2A_x , глибина AA_2 і її проєкція A_1A_x . Нову площину Π_4 розташуємо на довільній відстані від точки A перпендикулярно Π_1 і довільно до Π_2 . Побудуємо проєкцію на неї точки A і отримаємо A_4 . З рис. 8-7 видно, що висота AA_1 точки A проєктувалась на площину Π_2 і дорівнює A_2A_x і проєктується на площину Π_4 , і дорівнює $A_4A_{x_1}$, тобто: висота точки A на полі площини $\Pi_2 - A_2A_x$ і на полі $\Pi_4 - A_4A_{x_1}$ однакові. Площину Π_4 , разом з проєкцією A_4 і проєкцією висоти $A_4A_{x_1}$ повернемо навкруги осі x_1 до її суміщення з площиною Π_1 .

На рис. 8-8 показано епюр точки A , спроектованої на поля $x \frac{\Pi_2}{\Pi_1}$. На полях $x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}$, де виконано заміну за схемою A , розташували Π_4 на довільній відстані AA_4 від точки A . При цьому: $\Pi_4 \cap \Pi_1 \Rightarrow x_1$, яка проведена на довільній відстані $A_1A_{x_1}$ від A_1 . З точки A_1 перпендикулярно до осі x_1 проведено лінію зв'язку і в перетині її з x_1 отримали точку A_{x_1} , а на продовженні цієї лінії зв'язку

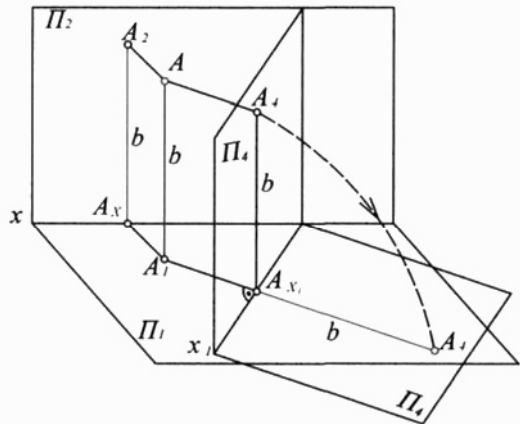


Рис. 8-7

від Ax_1 відкладено розмір Z^A , висота точки A_1 , взятої з площини Π_2 , так як на рис. 8-1 видно, що висота точки A однаково проектується на Π_2 і на Π_4 , які перпендикулярні до Π_1 .

Для побудови A_4 : на полі Π_2 міряємо відстань від A_2 до осі x – отримуємо Z^A , на полі Π_4 від осі x_1 на лінії зв'язку відкладаємо відстань Z^A – отримуємо A_4 .

В новій системі площин проєкцій $x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}$

отримано проєкції A_1 і A_4 , які також визначають положення точки A в просторі. Відзначимо, що координати на нову площину проєкцій Π_4 переносять з площини Π_2 , яка замінюється, тобто на нове поле, координати беруть з попереднього поля через одне.

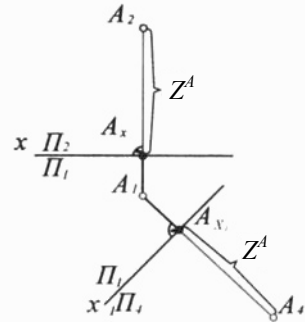


Рис. 8-8

8.2. Виконання перетворень методом заміни площин проєкцій

8.2.1. Перетворення прямої загального положення в пряму рівня (перетворення виду № 1)

На епюрі рис. 8-9 пряма загального положення задана відрізком AB . Необхідно визначити його натуральну величину і кут α (кут нахилу його до площини проєкцій).

Розв'язок такої задачі базується на тому, що коли відрізок прямої паралельний площині проєкцій, то на цю площину він і кут його нахилу проектується в натуральну величину.

На рис. 8-9 натуральна величина відрізка AB і його кут α – кут нахилу до Π_1 визначається по схемі A . Розташували площину Π_4 паралельно AB , а на епюрі вісь x_1 пройде паралельно горизонтальній проєкції A_1B_1 . На лініях зв'язку, проведених з A_1 і B_1 від точок їх перетину з віссю x_1 відкладаємо на полі Π_4 координати висот точок A і B , взявши їх з поля Π_2 . Отримані проєкції A_4 і B_4 з'єднуємо і отримана проєкція A_4B_4 , яка і є нату-

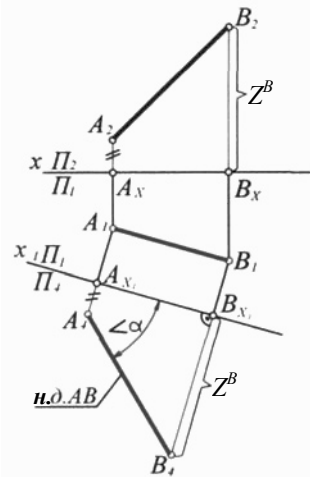


Рис. 8-9

ральною величиною відрізка AB заданої прямої, так як в системі полів $x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}$ відрізок AB є відрізком прямої

рівня і на $\Pi_4 \parallel AB$ спроектується в натуральну величину, а кут між A_4B_4 і віссю x_1 дорівнює куту α – куту нахилу AB до Π_1 .

Якщо необхідно визначити натуральну величину AB і кут β – розв’язання проводиться за схемою B (рис. 8-10), при цьому вісь x_1 пройде паралельно A_2B_2 і на полі Π_4 отримаємо натуральну величину AB , і кут β .

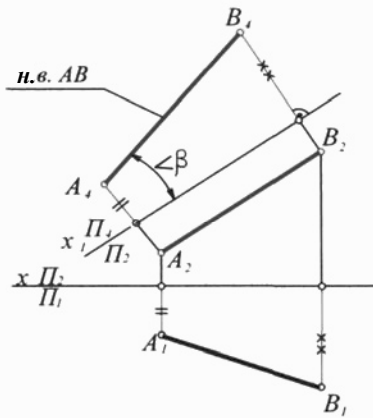


Рис. 8-10

8.2.2. Перетворення прямої рівня в пряму проєктуючу (перетворення виду №2)

На епюрі рис. 8-11 пряма рівня задана відрізком AB горизонтальної прямої, необхідно відрізок AB перетворити в пряму проєктуючу.

Розв’язок базується на тому, що коли відрізок прямої перпендикулярний до однієї площини проєкцій, то на цю площину відрізок проєктується у вигляді точки, а на інші площини проєкцій проєктується в натуральну величину, яка буде розташована перпендикулярно до відповідної осі.

Розв’язок задачі виконано по схемі A , при цьому вісь x_1 проведена перпендикулярно до A_1B_1 (яка дорівнює натуральній величині AB). На лінії зв’язку, проведеній в продовження A_1B_1 , перпендикулярній до осі x_1 , відкладаємо висоту точки A , взятую з поля Π_2 (вона дорівнює і висоті точки B), і на полі Π_4 отримаємо точку, в якій A_4 зливається

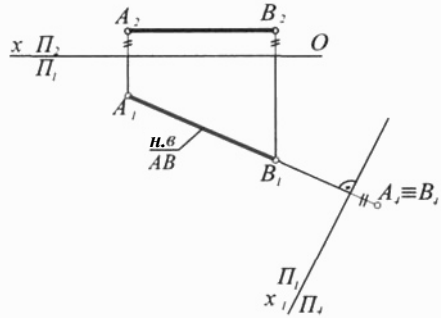


Рис. 8-11

з B_4 , в яку спроектується вся пряма AB . Таким чином на полях $x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}$ відрізок AB проєктуючий, бо він перпендикулярний до Π_4 .

Якщо треба перетворити відрізок CD фронтальної прямої в пряму проєктуючу, то розв'язання виконується по схемі B (рис. 8-12), при цьому вісь x_1 пройде перпендикулярно до C_2D_2 .

На полях $x_1 \frac{\Pi_2}{\Pi_4}$ відрізок CD фронтальної прямої перетворено в пряму проєктуючу.

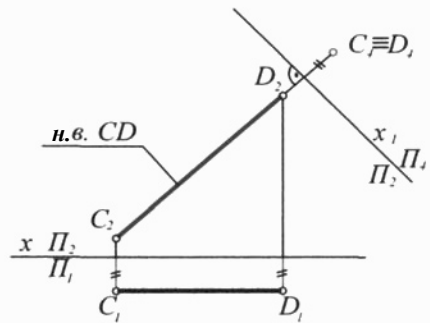


Рис. 8-12

8.2.3. Перетворення площини загального положення в площину проєктуючу (перетворення виду №3)

На епюрі рис. 8-13 площина Σ загального положення задана слідами Σ_2 і Σ_1 . Визначити натуральну величину кута α – кута нахилу Σ до площини проєкцій Π_1 .

Розв'язання такої задачі базується на тому, що у проєктуючій площині один слід (чи її лінія рівня) перпендикулярний до осі, а другий слід – слід-проєкція утворює з віссю кут, який дорівнює куту нахилу площини до площини проєкцій.

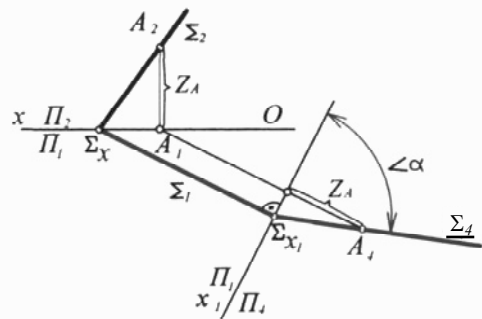


Рис. 8-13

Розв'язання цієї задачі виконується перетворенням виду № 3 за схемою A , де площина загального положення Σ перетворена в площину проєктуючу відносно Π_4 . На основі базового розв'язання (виконаного по схемі A), щоб площина Σ стала проєктуючою відносно Π_4 , проводимо x_1 перпендикулярно до сліду Σ_1 , який, перетинаючись з віссю x_1 , утворює точку Σ_{x_1} – точку збігу слідів, з якої пройде слід-проєкція Σ_4 . Для визначення напрямку Σ_4 достатньо побудувати одну довільну точку A , яка належить площині Σ , наприклад, належну Σ_2 . Побудувавши A_4 і з Σ_{x_1} , через A_4 пройде Σ_4 – слід-проєкція, який з віссю x_1 , утворює шуканий кут α .

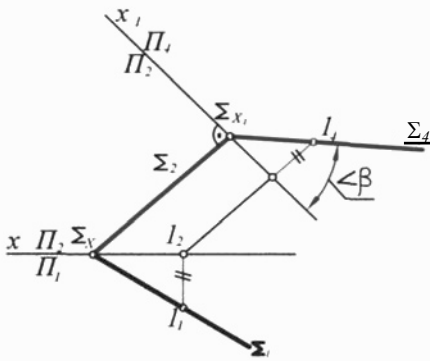


Рис. 8-14

Коли необхідно визначити кут β (кут нахилу площини Σ до площини проєкцій Π_2), то розв'язок необхідно провести за схемою B , при якому вісь x_1 пройде перпендикулярно до сліду Σ_2 (рис. 8-14) і побудувати слід-проєкцію Σ_4 , який з віссю x_1 утворить шуканий кут β .

Якщо площина Σ задана не слідами, а, наприклад, трикутником (рис. 8-15), то для визначення кута α (кут нахилу площини Σ до Π_1), в заданій Σ проводимо горизонталь h , і далі розв'язок виконується аналогічно вище наведеному розв'язку за схемою A відносно h_1 ($x_1 \perp h_1$).

Коли треба визначити кут β , то в площині Σ проводимо фронталь f і виконуємо перетворення за схемою B (рис. 8-16).

Коли треба визначити кут β , то в площині Σ проводимо фронталь f і виконуємо перетворення за схемою B (рис. 8-16).

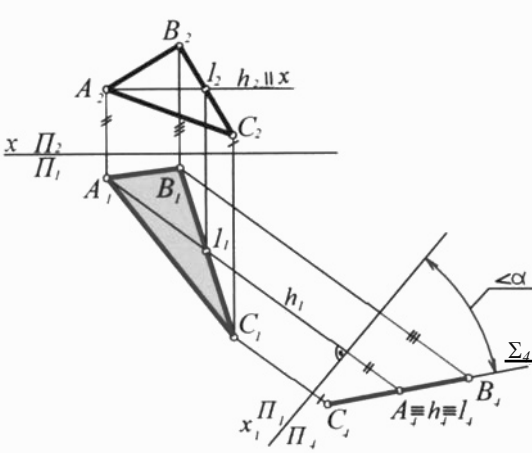


Рис. 8-15

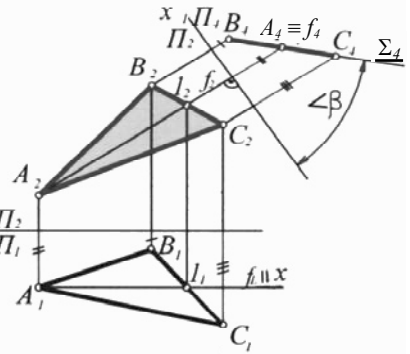


Рис. 8-15

8.2.4. Перетворення площини проєктуючої в площину рівня (перетворення виду №4)

Трикутник ABC належить фронтально проєктуючій площині Σ ($\Sigma \perp \Pi_2$). Необхідно визначити натуральну величину трикутника ABC .

Розв'язок такої задачі базується на тому, що на полях $x \frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ площина рівня відтворюється одним слідом, розташованим паралельно осі x і цей слід зветься слід-проекція, і з ним зливається однойменна проекція довільної фігури, що належить цій площині, а друга проекція фігури – є натуральна величина цієї довільної фігури.

Розв'язок поставленої (рис. 8-17) задачі виконується за схемою *B*. Трикутник *ABC* розташований у фронтально проектуючій площині має свою фронтальну проекцію $A_2B_2C_2$, яка співпадає з слідом-проекцією Σ_2 . В новій системі полів

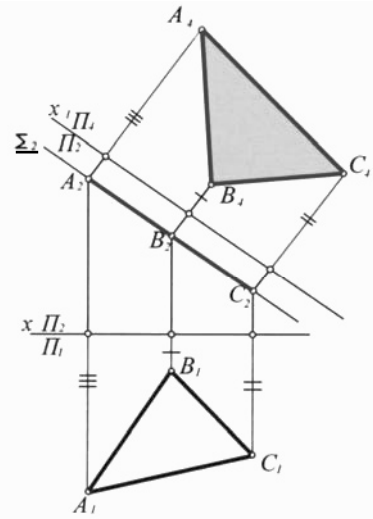


Рис. 8-17

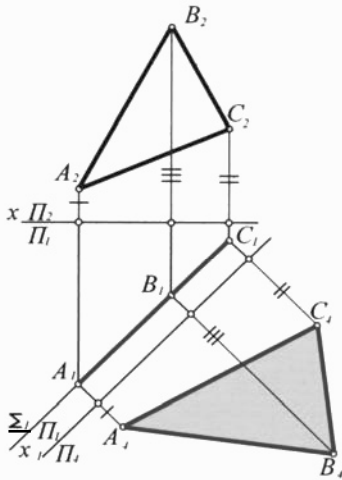


Рис. 8-18

на полі Π_4 отримемо проекцію $x_1 \frac{\Pi_2}{\Pi_4}$

$A_4B_4C_4$, яка дорівнює натуральній величині заданого трикутника *ABC*.

У випадку, коли трикутник *ABC* належить горизонтально проектуючій площині Σ і необхідно визначити його натуральну величину, то розв'язок виконується аналогічно попередньому випадку, тільки за схемою *A* (рис. 8-18). При цьому вісь x_1 розташовується паралельно Σ_1 і на полі Π_4 отримана проекція $A_4B_4C_4$ дорівнює натуральній величині трикутника *ABC*.

8.3. Заміна двох площин проєкцій

Під час розв'язку більш складних метричних задач, наприклад, для відтворення натуральної величини (наглядності зображення) якоїсь геометричної фігури, або перетворення елемента форми об'єкта, буває так, що однієї заміни площин недостатньо і виконуються послідовно нові заміни (одна, дві чи більше).

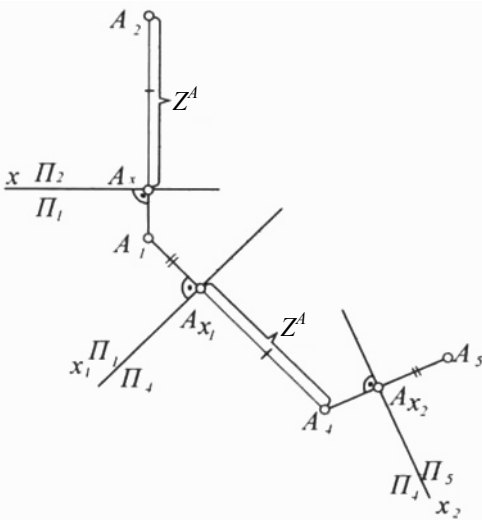


Рис. 8-19

Розглянемо утворення проєкцій точки в нових системах площин проєкцій. Нехай A_2 і A_1 проєкції точки A на вихідних полях $x \frac{P_2}{P_1}$, що наведено на рис. 8-19.

Виконуємо першу заміну, в якій нову площину проєкцій P_4 розташуємо, наприклад, перпендикулярно до горизонтальної площини проєкцій P_1 . При цьому P_4 розташовується на довільній (на потрібній) відстані від точки A .

P_4 , перетинаючись з P_1 , утворює вісь x_1 , яка пройде від A_1 на довільній відстані $A_1A_{x_1}$. Висота

точки A проєктується на P_2 і P_4 однаково. При суміщенні P_4 з P_1 , яке проведене шляхом обернання P_4 навколо осі x_1 висоту Z^A , задану на P_2 , переносимо на нове поле P_4 , відклавши від A_{x_1} на продовженні лінії зв'язку $A_1A_{x_1}$, і отримуємо A_4 .

На нових полях $x_1 \frac{P_1}{P_4}$ точка A відтворена своїми проєкціями A_1 і A_4 .

Виконуємо другу заміну, в якій нові поля $\frac{P_1}{P_4}$ першої заміни, приймають-

ся в другій заміні за вихідні поля. Нову площину проєкцій P_5 розташуємо перпендикулярно до площини проєкцій P_4 . При цьому P_5 розташовується на довільній (на потрібній) відстані від точки A . P_5 , перетинаючись з P_4 , утворює вісь x_2 яка пройде від A_4 на довільно вибраній відстані $Y^A = A_4A_{x_2}$, на якій P_5 розташується від точки A . Глибина Y^A (відстань від точки A до P_4) однаково проєктується на P_1 і P_5 . Повертаємо P_5 навколо осі x_2 до суміщення з P_4 ,

отримуємо нову систему полів $x_2 \frac{P_4}{P_5}$. Глибину Y^A , вибрану на полі P_1 , пере-

носимо на нове поле P_5 , відклавши від A_{x_2} на продовженні лінії зв'язку

$A_4A_{x_2}$, і отримуємо A_5 . На нових полях $x_2 \frac{P_4}{P_5}$ точка A відтворена своїми про-

екціями A_4 і A_5 .

8.3.1. Перетворення прямої загального положення в пряму проєктуючу (перетворення виду №1 + №2)

На епюрі рис. 8-20 пряма загального положення задана відрізком AB .

Необхідно визначити його натуральну величину, кут α – кут нахилу його до площини проєкцій Π_1 , а також перетворити його в проєктуюче положення.

Розв’язок задачі виконується за схемою С, в якій послідовно виконується перетворення виду № 1. Розв’язок цього виду виконується за схемою А і отримуємо натуральну величину AB і кут α . Далі виконується перетворення виду № 2 розв’язком за схемою А і отримуємо пряму, перетворену в проєктуючу.

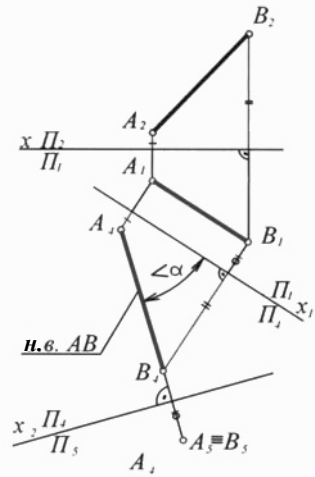


Рис. 8-20

Коли необхідно визначити натуральну величину відрізка AB , кут β – кут нахилу його до площини проєкцій Π_2 , а також перетворити його в проєктуюче положення, то:

Розв’язок такої задачі наведено на рис. 8-21 і виконується за схемою D в якій послідовно виконується перетворення виду № 1 за схемою B і отримуємо натуральну величину AB і кут β .

Далі виконується перетворення виду № 2 з розв’язком за схемою B і отримуємо пряму, перетворену в проєктуючу.

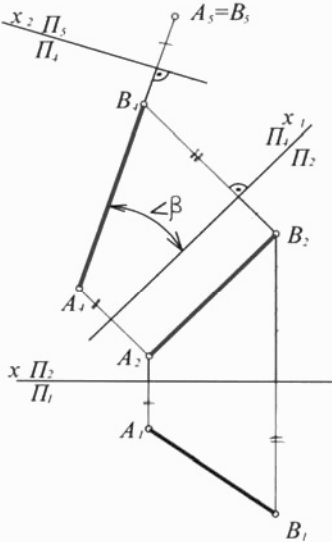


Рис. 8-21

8.3.2. Перетворення площини загального положення в площину рівня (перетворення виду №3 + №4)

На епюрі рис. 8-22 площина Σ загального положення задана трикутником ABC .

Необхідно визначити натуральну величину трикутника ABC і кут α – кут нахилу Σ до Π_1 .

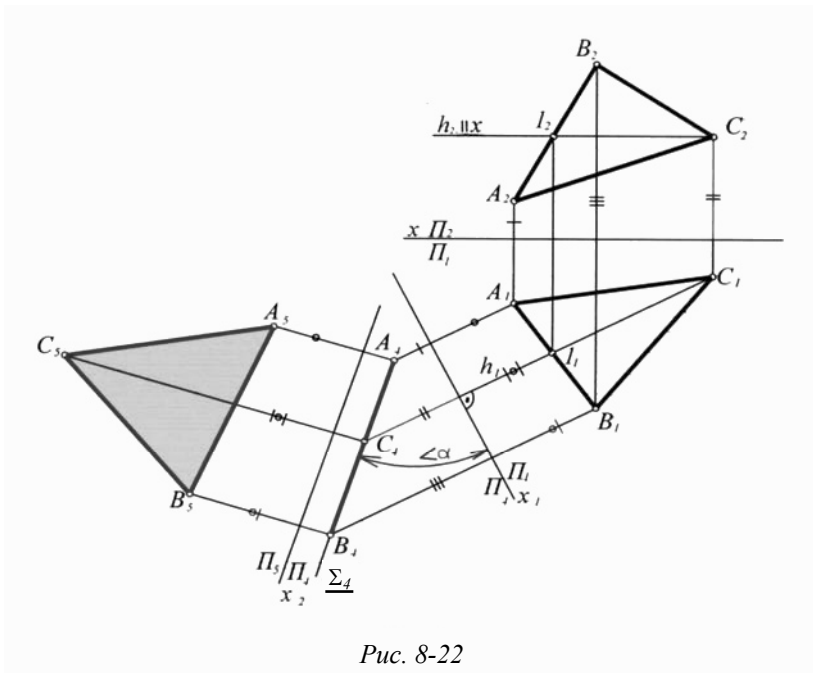


Рис. 8-22

Розв'язок задачі виконується за схемою С, при якому спочатку виконуться заміна виду № 3 за схемою А.

Для цього в $A_2B_2C_2$, наприклад, з C_2 проводимо $h_2 \parallel Ox$, будемо h_1 в $A_1B_1C_1$. Вісь x_1 проводимо перпендикулярно до h_1 . На полі Π_4 отримуємо слід-проєкцію Σ_4 , який з віссю x_1 утворює шуканий кут α . Далі, до наслідка попередньої заміни застосовують перетворення виду № 4, при цьому вісь x_2 проводимо паралельно Σ_4 і на полі Π_5 отримуємо проєкцію $A_5B_5C_5$, яка дорівнює натуральній величині трикутника ABC .

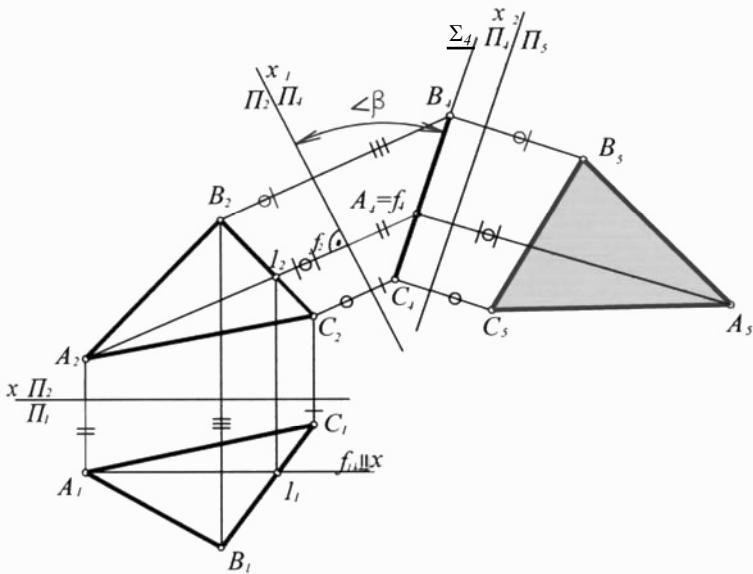


Рис. 8-23

Якщо необхідно визначити натуральну величину трикутника ABC і кут β – кут нахилу Σ до Π_2 , то розв’язок такої задачі наведено на рис. 8-23 і виконується за схемою D , при якій послідовно виконується перетворення виду № 3 за схемою B . Для цього в $A_1B_1C_1$, наприклад, з A_1 проводимо $f_1 \parallel O_x$, будуємо f_2 в $A_2B_2C_2$.

Вісь x_1 проводимо перпендикулярно до f_2 . На полі Π_4 отримуємо слід-проекцію Σ_4 , який з віссю x_1 утворює шуканий кут β .

Далі, до наслідку попередньої заміни виконують перетворення виду № 4, при цьому вісь x_2 проводимо паралельно Σ_4 і на полі Π_5 отримуємо проекцію $A_5B_5C_5$, яка дорівнює шуканій натуральній величині трикутника ABC .

8.4. Приклади розв’язку задач

Приклад 8.2.1

Дано: відрізки CD і AB , які лежать на двох мимобіжних прямих (рис. 8-24).

Необхідно: визначити відстань між CD і AB та кут між ними.

Розв’язок задачі наведено на рис. 8-25.

Натуральна величина відстані між заданими мимобіжними прямими буде спроектована в натуральну величину, коли одна з заданих прямих є проектуючою прямою, а проекція відстані пройде з точки, яка є проекцією проекту-

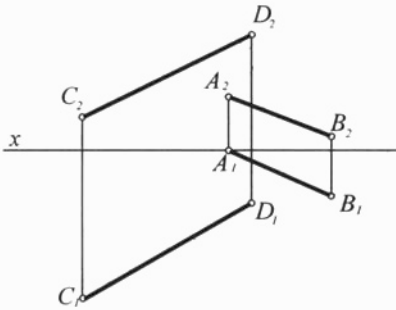


Рис. 8-24

ючої прямої, по перпендикуляру до проєкції іншої прямої (на основі проєкції прямого кута, де відстань як пряма паралельна площині проєкції, а друга пряма перпендикулярна до відстані як прямої).

Для цього виконується перетворення виду № 1+2 для, наприклад, відрізка CD виконується перетворення виду № 1 за схемою A паралельно C_1D_1 – перетворимо на полях $x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}$ пряму CD

в пряму рівня, так проведена перша заміна, далі до прямої рівня застосуємо перетворення виду № 2, перетворивши пряму рівня в пряму проєктуючу, де друга заміна, при якій вісь x_2 пройде перпендикулярно до натуральної величини C_4D_4 , на полях $x_2 \frac{\Pi_4}{\Pi_5}$ пряма CD перетворена в пряму проєктуючу – на Π_5 – CD спроєкується в точку $D_5 \equiv C_5$, – перпендикуляр з якої до A_5B_5 і є натуральною величиною шуканої відстані EF

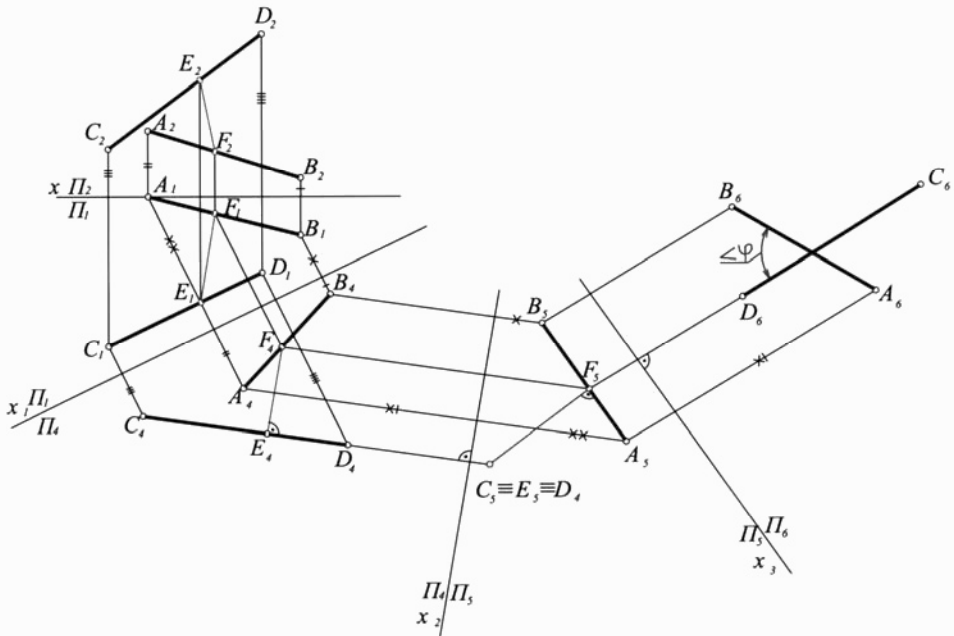


Рис. 8-25

між мимобіжними прямими AB і CD . Кут між мимобіжними прямими буде спроектована в натуральну величину на площину, паралельну цим прямим. Для цього виконуємо третю заміну, при якій площину Π_6 проводимо перпендикулярно до площини Π_5 і паралельно відрізьку AB . На полях $x_3 \frac{\Pi_5}{\Pi_6} : AB$ – пряма рівня, її A_6B_6 – натуральна величина AB , а CD – пряма проєктуюча, її кут між C_6D_6 і A_6B_6 – натуральна величина кута φ – шуканого кута між мимобіжними прямими AB і CD .

Алгоритм рішення:

1. $x \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}; \Pi_4 \parallel CD \rightarrow C_4D_4 = \text{н.в. } CD \{ \text{лінія рівня} \}.$
2. $x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4} \rightarrow x_2 \frac{\Pi_4}{\Pi_5}; \Pi_5 \perp CD \rightarrow C_5 \equiv D_5 \text{ точка } \{ CD - \text{лінія проєктуюча} \}.$
3. $C_5 \equiv D_5 \subset r \perp A_5B_5 \rightarrow E_5F_5 = \text{н.в. відстані}.$
4. $x_2 \frac{\Pi_4}{\Pi_5} \rightarrow x_3 \frac{\Pi_5}{\Pi_6}; \Pi_6 \parallel AB \text{ і } CD; A_6B_6 \wedge C_6D_6 = \varphi = AB \wedge CD.$

Приклад 8.2.2

Дано: площина Σ задана трикутником ABC , і точка D не належна площині Σ (рис. 8-26).

Необхідно: визначити відстань від точки D до площини Σ .

Рішення базується на тому, що коли площина проєктуюча (перпендикулярна до якоїсь площини проєкцій Π), то перпендикуляр проведений з точки D до цієї площини буде розташований паралельно площині проєкцій Π . Проєктується згаданий перпендикуляр на цю площину проєкцій в натуральну величину, тобто на площині проєкцій Π : з проєкції точки D перпендикуляр проведений до перетину з слідом-проєкцією заданої площини є натуральна величина шуканої відстані від точки D до заданої площини.

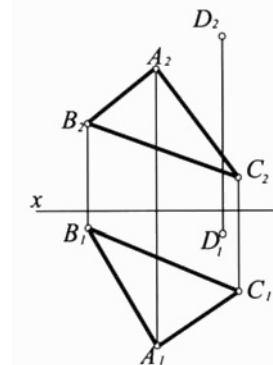


Рис. 8-26

На рис. 8-27 задана площина $\Sigma (\triangle ABC)$ – площина загального положення і перетворюється в площину проєктуючу, що виконується за допомогою перетворення виду № 3 за схемою А, при виконанні якої вісь x_1 перпендикулярна h_1 (коли $h \subset \triangle ABC$).

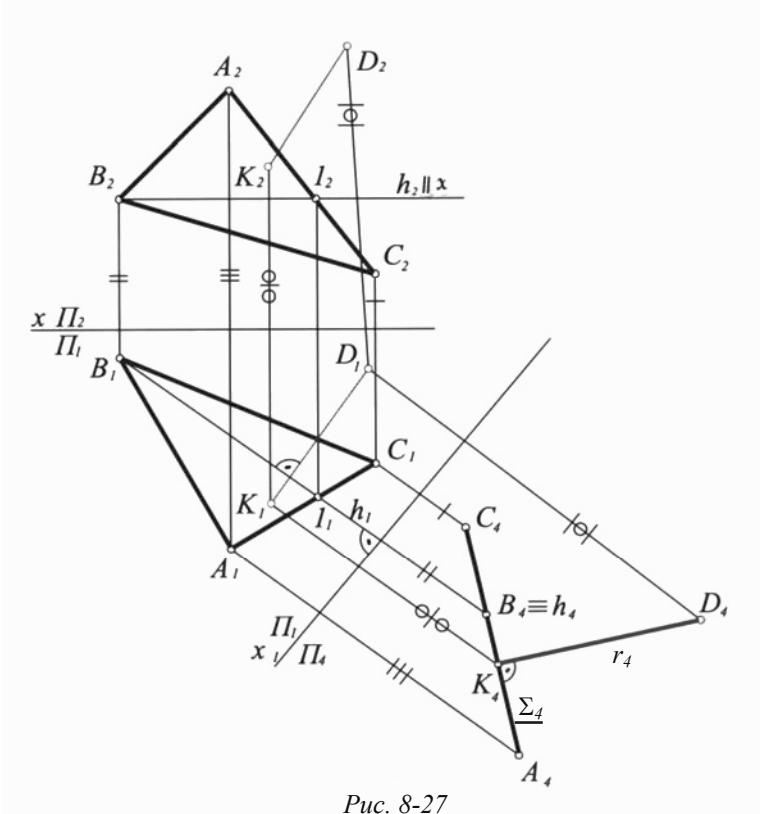


Рис. 8-27

На полі Π_4 проєкція $A_4B_4C_4$ трикутника ABC співпала з слідом-проєкцією Σ_4 .

З проєкції D_4 проводимо перпендикуляр до Σ_4 який перетинається з нею в точці K_4 . D_4K_4 – є натуральна величина відстані від точки D до $\Sigma (\triangle ABC)$.

Алгоритм розв'язку:

$$1. x \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}; \Pi_4 \perp \Sigma \left\{ \bullet B_2 \subset h_2 \parallel Ox \Rightarrow h_1 \subset A_1B_1C_1; \right.$$

$$\left. x_1 \perp h_1 \Rightarrow \Sigma_4 \text{ на } \Pi_4 \right\}.$$

$$2. \bullet D \subset r \perp \Sigma; D_4K_4 = \text{н.в. } DK! \left\{ \bullet D_4 \subset r_4 \perp \Sigma_4 \text{ і } r_4 \cap \Sigma_4 \Rightarrow \bullet K_4 \right\}.$$

Приклад 8.2.3

Дано: площина загального положення Σ задана трикутником ABC (рис. 8-28)

Необхідно: визначити кут α і β нахилу площини Σ до Π_1 і Π_2 , а також центр кола описаного навколо трикутника ABC .

Розв'язок базується на тому, що кут α визначається як кут між слідом-проекцією площини, перпендикулярної до Π_2 і віссю x , а кут β визначається як кут між слідом-проекцією площини, перпендикулярної до Π_1 і віссю x .

Центр кола, описаного навколо трикутника є точка перетину перпендикулярів, проведених через середину сторін натуральної величини трикутника, яку отримуємо як проекцію трикутника, який належить площині рівня, що паралельна площині проєкцій, відносно якої площина трикутника паралельна.

Розв'язок задачі показано на рис. 8-29, який побудовано за допомогою перетворення виду № 3, виконаного за схемою A , при цьому вісь x_3 розташовують перпендикулярно до h_1 горизонталі h , належної трикутнику ABC .

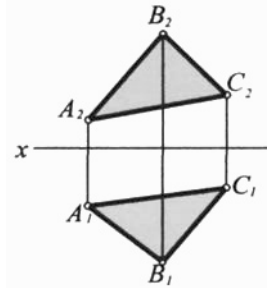


Рис. 8-28

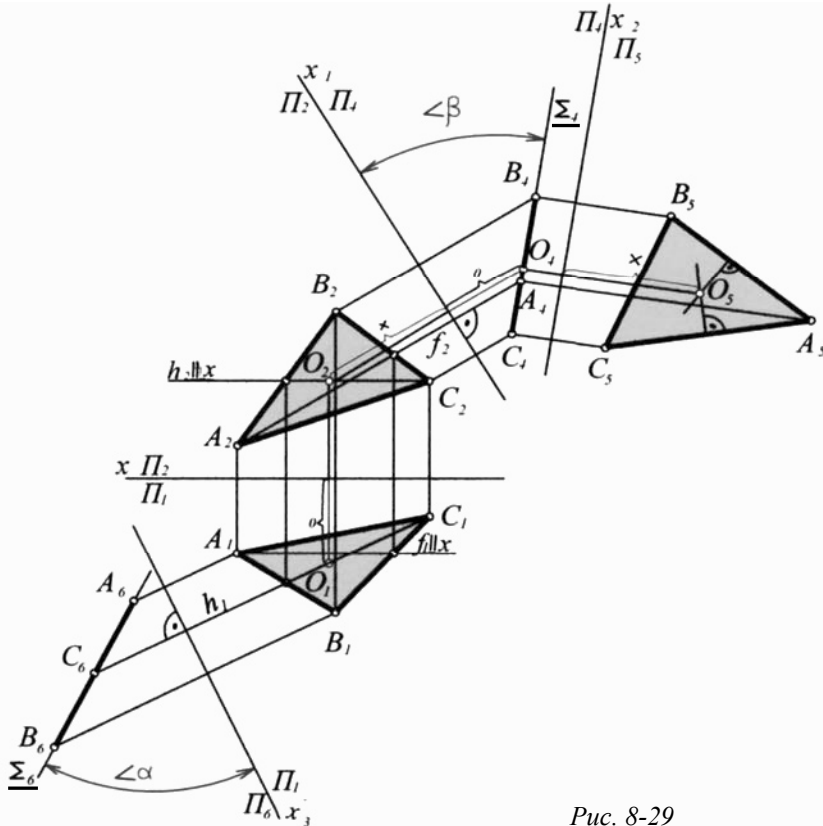


Рис. 8-29

На полі Π_6 отримуємо Σ_6 – слід-проекцію площини Σ , а кут між Σ_6 і віссю x_3 – шуканий кут α . Якщо до умови задачі застосовують перетворення виду № 3 виконаного за схемою B , при цьому вісь x_1 розташовують перпендикулярно до f_2 фронталі f , яка належить трикутнику ABC .

На полі Π_4 отримуємо Σ_4 – слід-проекцію площини Σ , а кут між Σ_4 і віссю x_1 – шуканий кут β .

Для зображення проекції площини Σ на полях $x_2 \frac{\Pi_4}{\Pi_5}$ застосовується пе-

ретворення виду № 4 і площина Σ перетворюється в площину рівня ($\Sigma \parallel \Pi_5$). На полі Π_5 отримана проекція $A_5B_5C_5$, яка є натуральною величиною трикутника ABC . Два перпендикуляри, проведені через середини сторін до A_5C_5 і A_5B_5 , в своєму перетині дають точку O_5 , яка є шуканим центром описаного кола навколо трикутника ABC .

Алгоритм рішення:

1. $x \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \rightarrow x_1 \frac{\Pi_2}{\Pi_4}$; $\Pi_4 \perp \Pi_2$; $\Pi_4 \cap \Pi_2 \Rightarrow x_1 \perp f_2 \Rightarrow \Sigma_4 \wedge x_1 = \angle \beta!$
2. $x_1 \frac{\Pi_2}{\Pi_4} \rightarrow x_2 \frac{\Pi_4}{\Pi_5}$; $\Pi_5 \perp \Pi_4$; $\Pi_5 \cap \Pi_4 \Rightarrow x_2 \parallel \Sigma_4 \Rightarrow A_5B_5C_5 = \text{н.в. } \Delta ABC$.
 $\supset \bullet O$ – центр!
3. $x \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_3 \frac{\Pi_1}{\Pi_6}$; $\Pi_6 \perp \Pi_1$ і $\Pi_6 \cap \Pi_1 \Rightarrow x_3 \perp h_1 \Rightarrow \Sigma_6 \wedge x_3 = \angle \alpha!$

8.5. Задачі для розв'язку

8.5.1. Задачі для позааудиторного розв'язку

Задача 8.2-1. Визначити відстань між паралельними прямими

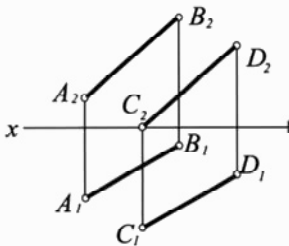


Рис. 8-30

Задача 8.2-2. Визначити лінійний кут двогранного кута з ребром AB

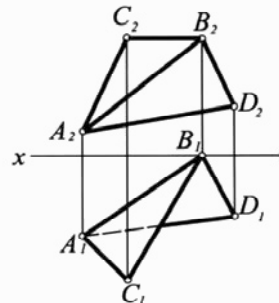


Рис. 8-31

Задача 8.2-3. Визначити відстань між паралельними площинами і кут нахилу їх до площини Π_1

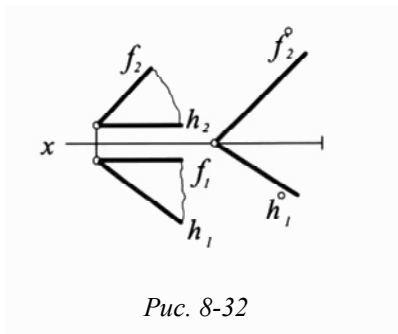


Рис. 8-32

Задача 8.2-4. Визначити відстань від точки A до площини Σ ($BC \parallel ED$)

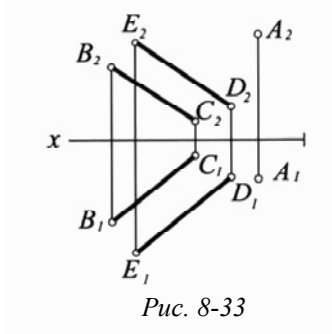


Рис. 8-33

8.5.2. Задачі для аудиторного розв'язку

Задача 8.2-5. Визначити відстань між прямими AB і CD і знайти проєкції найближчих точок

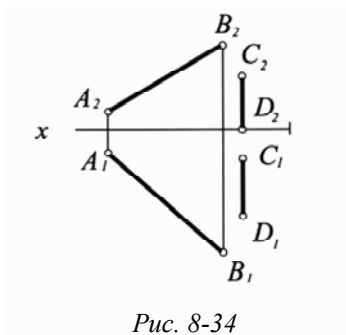


Рис. 8-34

Задача 8.2-6. Визначити проєкцію відрізка AB , паралельного відрізка CD і розміщеного від нього на відстані 15 мм

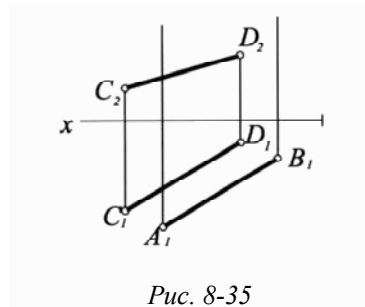


Рис. 8-35

Задача 8.2-7. Побудувати проєкцію D_1 вершини D за умови, що двогранный кут біля ребра AB дорівнює 30° .

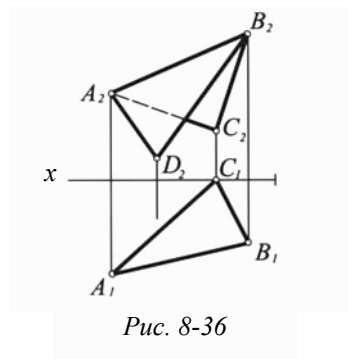


Рис. 8-36

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. В чому полягає спосіб заміни площин проекцій?
2. Яке положення в системі $x \frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ займе площина проекції Π_4 при переході до системи $x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}$?
3. Яке положення в системі $x_2 \frac{\Pi_4}{\Pi_5}$ повинна зайняти площина Π_5 при переході від системи $x \frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ до системи $x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}$ та від цієї системи до системи $x_2 \frac{\Pi_4}{\Pi_5}$?
4. Як перетворити пряму загального положення в пряму рівня шляхом введення нової площини проекцій? Як розташується при цьому площина Π_4 та вісь x_1 в системі $x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}$?
5. Як визначити кут нахилу прямої загального положення до площини проекцій Π_1 або Π_2 ?
6. Як перетворити пряму рівня в пряму проектуючу? Як при цьому необхідно розташувати нову площину проекцій та як пройде нова вісь координат відносно проекцій прямої рівня?
7. Як перетворити пряму загального положення в пряму проектуючу? Скільки заміни площин проекцій необхідно виконати? Як розташуються осі координат відносно проекцій прямої?
8. Як перетворити площину загального положення в площину проектуючу?
9. Як перетворити проектуючу площину в площину рівня?
10. Як перетворити площину загального положення в площину рівня? Скільки заміни площин проекцій необхідно виконати при цьому? Як будуть розташовані нові осі координат відносно проекцій заданої площини?
11. Як визначити відстань від точки простору до площини загального положення?

Графічна робота №1

Виконується після вивчення теми „Метод заміни площин проєкцій”.

Завдання:

- дано: площина загального положення Σ , задана трикутником ABC , координати вершин якого наведеної за варіантами в таблиці № 3;
- необхідно побудувати проєкції кола: описаного навколо трикутника ABC – для парних варіантів, або вписаного в нього – для непарних варіантів, та визначити кути α і β нахилу площини Σ до площин проєкцій P_1 і P_2 .

Таблиця №3

№ варіанта		Координати вершин трикутника								
		X ^A	Y ^A	Z ^A	X ^B	Y ^B	Z ^B	X ^C	Y ^C	Z ^C
1	16	20	15	40	35	50	95	110	45	35
2	17	10	20	30	30	10	65	60	20	5
3	18	25	25	70	45	15	90	110	50	30
4	19	25	35	15	100	90	10	110	20	30
5	20	20	45	20	35	100	55	110	40	50
6	21	15	30	20	35	60	10	65	15	20
7	22	25	65	20	45	90	10	110	30	50
8	23	20	20	30	95	15	90	105	34	20
9	24	115	20	40	100	50	95	25	50	35
10	25	70	25	30	45	10	65	15	20	5
11	26	105	25	65	85	15	90	20	55	30
12	27	100	30	20	25	85	15	5	20	35
13	28	110	35	15	95	90	50	20	30	45
14	29	60	35	25	40	70	15	10	5	20
5	30	100	70	20	80	95	10	15	35	50

На рисунку ГР-2 показано розв'язок поставленої задачі.

Хід розв'язання:

– визначення $\angle\alpha$ і $\angle\beta$ нахилу площини Σ до площин Π_1 та Π_2 :

Для визначення шуканих кутів, згадаємо одну з властивостей проєктуючих площин:

– кут, утворений слідом – проєкцією площини, або її лінією рівня, з віссю координат дорівнює куту нахилу проєктуючої площини до відповідної площини проєкцій (на якій слід заданої площини перпендикулярний до заданої осі).

Таким чином, для визначення шуканих кутів виконаємо перетворення заданої площини Σ (ΔABC) загального положення в площину проєктуючу (виконання такого перетворення наведено в п. 8.2.3).

Визначення $\angle\beta$:

В площині Σ , заданій трикутником ABC , проводимо довільну (наприклад, з точки A) фронталь f і перпендикулярно до цієї фронталі проводимо нову площину Π_4 , яка розташується перпендикулярно до площини Π_2 (так, як $f \parallel \Pi_2$) і при перетині площини Π_4 з Π_2 утворюється вісь x_1 . На нову площину Π_4 фронталь f спроєктується в точку (як проєктуюча f відносно Π_4), а вся площина Σ спроєктується в лінію Σ_4 , яка буде слідом – проєкцією площини Σ . Кут, утворений слідом – проєкцією Σ_4 і віссю x_1 (яка розділяє поля площин Π_2 і Π_4) і буде шуканим $\angle\beta$.

Алгоритм послідовності побудови розв'язку:

= в просторі:

$f \subset \Delta ABC; \Pi_4 \perp f; \Pi_4 \perp \Pi_2; \Pi_4 \cap \Pi_2 \Rightarrow x_1;$

$x \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \rightarrow x_1 \frac{\Pi_2}{\Pi_4} \Rightarrow \Sigma_4 \wedge x_1 = \angle\beta !$

= на епюрі:

– на полі Π_1 : $\cdot A_1 \subset f_1 \parallel x; f_1 \cap B_1 C_1 \Rightarrow \cdot D_1 \Rightarrow D_2 \subset B_2 C_2;$

– на полі Π_2 : $\cdot A_2 \cup \cdot D_2 \Rightarrow f_2; x_1 \perp f_2;$

З точок A_2, B_2, C_2 проводимо лінії зв'язку, перпендикулярні до осі x_1 ;

– на полі Π_4 : на продовженні цих ліній зв'язку від x_1 відкладаємо координати глибин точок A, B і C , взявши їх розмір з поля Π_1 , (при за-

міні площин проєкцій на новому полі відкладаємо координати, взяті з поля через одне), отримуємо $B_4A_4C_4 \equiv \Sigma_4$; $\Sigma_4 \wedge x_1 = \angle\beta$!

Визначення $\angle\alpha$:

В площині Σ проводимо горизонталь h і проводимо нову площину Π_6 перпендикулярну до побудованої горизонталі h . На площину Π_6 , горизонталь h спроектується в точку, а вся площина Σ спроектується в лінію Σ_6 . Кут між слідом – проєкцією Σ_6 і віссю x_3 буде шуканим $\angle\alpha$ нахилу площини Σ до Π_1 .

Алгоритм послідовності побудови розв'язку:

= в просторі:

$h \subset \Delta ABC$; $\Pi_6 \perp h$; $\Pi_6 \perp \Pi_1$; $\Pi_6 \cap \Pi_1 \Rightarrow x_3$;

$$x \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_3 \frac{\Pi_1}{\Pi_6} \Rightarrow \Sigma_6 \wedge x_3 = \angle\alpha!$$

= на епюрі:

– на полі Π_2 : $\cdot A_2 \subset h_2 \parallel x$; $h_2 \cap B_2C_2 \Rightarrow \cdot E_2 \Rightarrow \cdot E_1 \subset B_1C_1$;

– на полі Π_1 : $\cdot A_1 \cup \cdot E_1 \Rightarrow h_1$; $x_3 \perp h_1$;

$x_3 \perp h_1 \Rightarrow B_6A_6C_6 \equiv \Sigma_6 \wedge x_3 = \angle\alpha$!

Визначення центра кола описаного навколо ΔABC :

Центр кола, описаного навколо ΔABC , можливо визначити, маючи натуральну величину трикутника, провівши перпендикуляри через середини його сторін і їх точка взаємного перетину буде центром описаного кола (а якщо маємо натуральну величину трикутника, то центр вписаного в нього кола, буде визначена при перетині бісектрис кутів натуральної величини трикутника).

Для визначення натуральної величини заданого трикутника необхідно перетворити площину трикутника в площину рівня. Маючи перше перетворення площини загального положення Σ в площину проєктууючу, що виконане при визначенні $\angle\beta$. Виконаємо друге перетворення, при якому проєктууюча площина буде перетворена в площину рівня, де й буде отримано натуральну величину трикутника ABC . Хід виконання другого перетворення описано в п. 8.2.4.

Алгоритм розв'язку:

$\Pi_5 \parallel \Sigma; \Pi_5 \perp \Pi_4; \Pi_5 \cap \Pi_4 \Rightarrow x_2 \parallel \Sigma_4;$

$x_1 \frac{\Pi_2}{\Pi_4} \rightarrow x_2 \frac{\Pi_4}{\Pi_5} \Rightarrow A_5 B_5 C_5 = \text{д.в. } \Delta ABC \Rightarrow \text{центр кола } \cdot O_5 \Rightarrow \text{діаметр}$

описаного кола $d^k \Rightarrow O_4 \subset \Sigma_4 \Rightarrow O_2 \Rightarrow O_1 \Rightarrow O_6 \subset \Sigma_6.$

Для побудови фронтальної проєкції кола:

На полі Π_5 у кола $\emptyset = d^k$ виділяємо два спряжених діаметри $1_5 2_5 \parallel x_2$ та $3_5 4_5 \perp x_2$, будуємо проєкції цих діаметрів на полі Π_4 та на полі Π_2 на якому отримано $4_2 3_2$ – велику вісь еліпса, в який проєктується описане коло, напрямком цієї осі проходить через O_2 і розташований паралельно f_2 (одночасно перпендикулярно до x_1) і проєктується в натуральну величину, тобто $3_2 4_2$ – велика вісь дорівнює діаметру описаного кола, $3_2 \dots 4_2 = d^k$. Мала вісь $1_2 2_2$ розташована перпендикулярно до $4_2 3_2$ і розмір малої осі визначається фронтальною проєкцією діаметра $1_5 2_5$. По великій осі $3_2 4_2$, та малій осі $1_2 2_2$ будуємо еліпс, який є фронтальною проєкцією кола, описаного навколо трикутника ABC .

Для побудови горизонтальної проєкції кола:

Визначаємо горизонтальні проєкції великої та малої осі еліпса, якими будуть проєкції другої пари спряжених діаметрів, за які приймаються діаметр $5 \dots 6$ та діаметр $7 \dots 8$. Через точку O_1 пройде горизонтальна проєкція діаметра $5 \dots 6$, яка зливається з напрямком горизонталі площини трикутника, а враховуючи це (h_1 – лінія натуральних величин) через точку O_1 пройде велика вісь еліпса, в який спроектується побудоване коло. Розмір $5_1 6_1$ дорівнює діаметру d^k . Побудувавши горизонтальну проєкцію діаметра $7 \dots 8$ по його проєкції $7_6 \dots 8_6$, яка дорівнює d^k , отримали на полі Π_1 малу вісь еліпса. По великій осі $5_1 6_1$ та малій осі $7_1 8_1$ будуємо еліпс, який є горизонтальною проєкцією кола описаного навколо трикутника ABC .

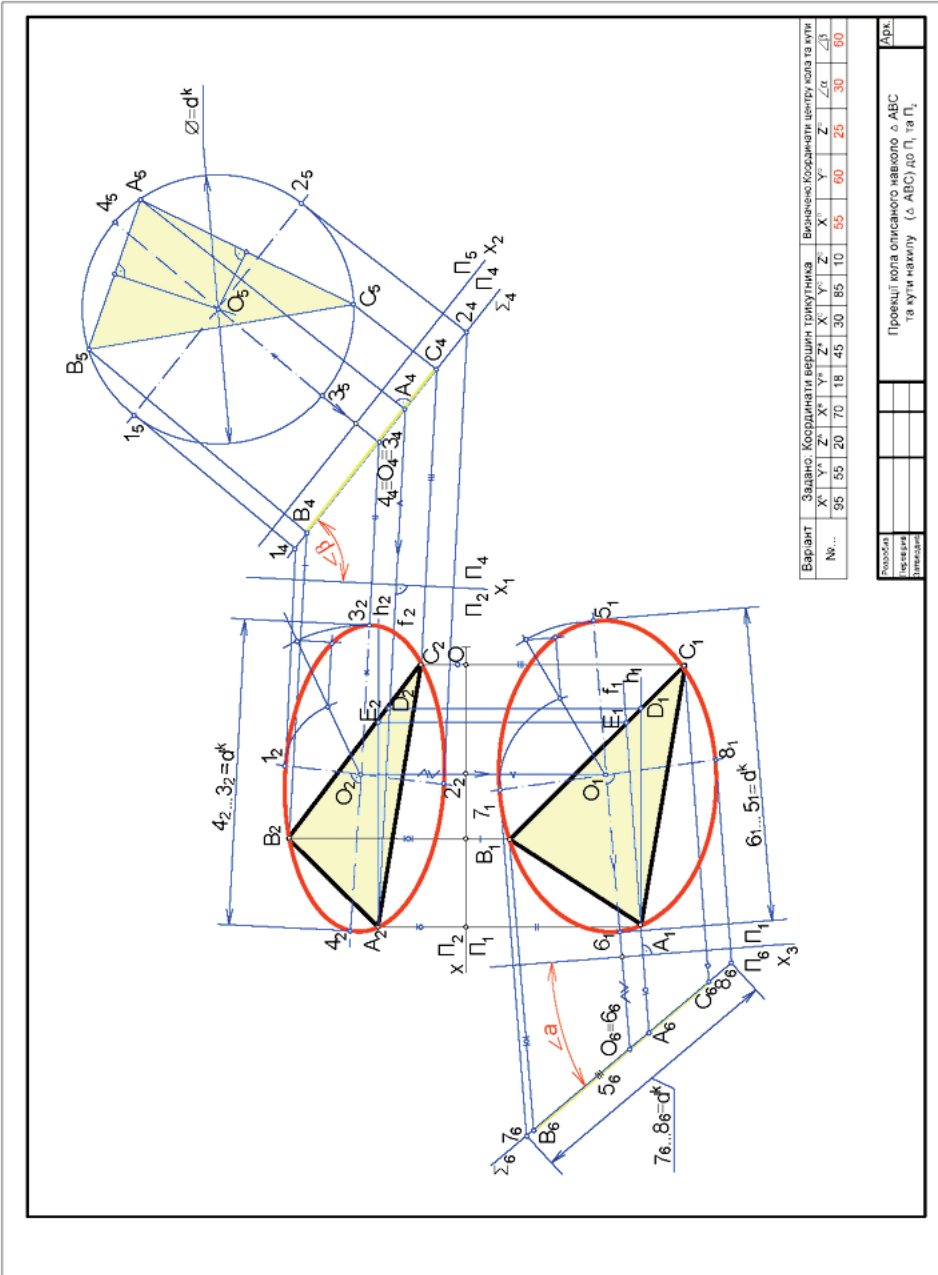


Рис. 1Р – 2

Тема 9

Метод обертання

Метод ґрунтується на нерухомості площин проєкцій, а об'єкт змінює своє розташування відносно площин проєкцій. При цьому об'єкт може змінювати положення до необхідного окремого положення. Така зміна положення об'єкту може бути виконана шляхом обертання об'єкта навколо осі – прямої, прийнятої за вісь обертання. Так пряма прийнята за вісь може бути прямою проєктуючою, прямою рівня, або прямою загального положення.

9.1. Обертання об'єкта навколо проєктуючої прямої

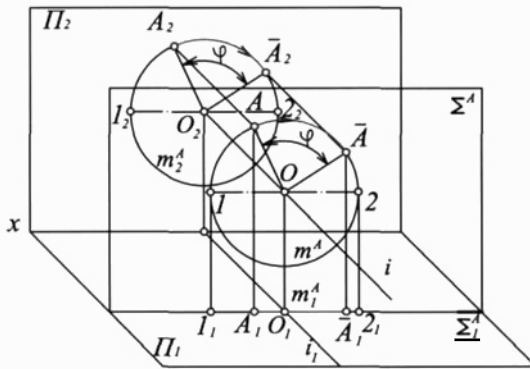


Рис. 9-1

A дорівнює R^A , який є радіусом утвореного кола m^A . Площина Σ^A перпендикулярна до осі та паралельна площині проєкцій Π_2 , тобто площина Σ^A – площина рівня.

Виходячи з властивостей цієї площини Σ^A , на поле Π_2 коло m^A проєктується в натуральну величину, тобто m_2^A , а на поле Π_1 в вигляді відрізка прямої, який дорівнює діаметру отриманого кола, тобто $\varnothing m_1^A = 1_1 \dots 2_1$ і розташований перпендикулярно i_1 і паралельно осі x та зливається з слідом-проєкцією Σ_1^A .

Якщо точку A повернути навкруги осі i на кут α , то радіус R^A повернеться, наприклад в напрямку руху стрілки годинника, з положення OA в положення $O\bar{A}$. На епюрі, рис. 9-2, видно, що фронтальна проєкція переми-

Прийmemo точку A за об'єкт, який будемо обертати навкруги осі i , яка перпендикулярна до площини проєкцій Π_2 .

Прослідкуємо за механізмом обертання точки A на рис. 9-1.

Обертаючись, точка A описує траєкторію у вигляді кола « m^A », яке розташоване в площині Σ^A , точка O – центр кола-траєкторії m^A , утворений при перетині площини Σ з віссю i .

Відстань від точки O до точки

щення точки A з заданого положення A_2 в нове положення \bar{A}_2 переміщається по колу-проекції m_2^A , а горизонтальна проекція з A_1 в \bar{A}_1 переміщається по прямій m_1^A , перпендикулярній i_1 .

Елементи механізму обертання об'єкту навкруги проектуючої прямої:

- 1 – точка A – об'єкт обертання;
- 2 – пряма i – вісь обертання, $i \perp \Pi$;
- 3 – площина Σ^A – площина обертання,
 - $A \in \Sigma^A \perp i$;

4 – коло m^A – коло-траєкторія обертання точки A , • $A \cup i \Rightarrow m^A \subset \Sigma^A$;

5 – точка O – центр кола-траєкторії,

$$\Sigma^A \cap i \Rightarrow O;$$

6 – радіус R^A – радіус обертання,

$$\bullet O \cup \bullet A \Rightarrow R^A.$$

Якщо обертати точку A навкруги осі i перпендикулярній площині проєкцій Π_1 , то горизонтальна проєкція переміщення точки A з заданого положення A_1 в нове положення \bar{A}_1 пройде по колу-проекції m_1^A з центром в точці-проєкції i_1 , а фронтальна проєкція з A_2 в \bar{A}_2 переміщається по m_2^A , перпендикулярній i_2 , рис. 9-3.

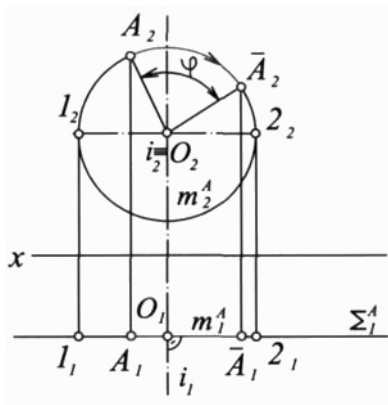


Рис. 9-2

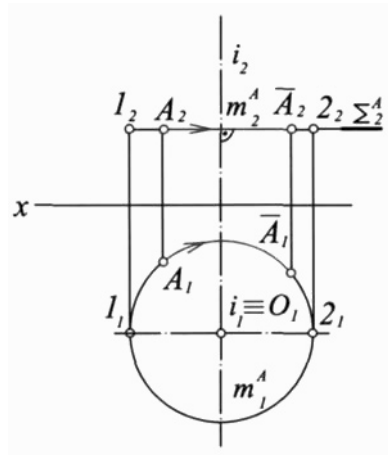


Рис. 9-3

9.2. Виконання перетворень методом обертання навколо проектуючої осі

9.2.1. Перетворення виду № 1

(перетворення прямої загального положення в пряму рівня)

На епюрі, рис. 9-4, показано виконання перетворення відрізка AB прямої загального положення, в положення паралельне Π_2 . Для виконання такого перетворення, через точку B проведемо вісь i перпендикулярно Π_1 і повер-

немо відрізок AB навколо цієї осі до положення, коли AB розташується паралельно Π_2 , при цьому $\overline{B} \equiv B$ і це на полі Π_1 B_1 залишається нерухомою, тобто $\overline{B}_1 \equiv B_1 \equiv i_1$, а A_1 переміщується по колу m_1^A до положення, коли $\overline{B}_1 \overline{A}_1$ розташується паралельно осі x , при цьому на полі Π_2 $B_2 \overline{A}_2$ буде натуральною величиною AB , а кут між $\overline{B}_2 \overline{A}_2$ і віссю x буде кутом α нахилу AB до Π_1 . Таким чином в повернутому положенні AB – пряма рівня ($\overline{AB} \parallel \Pi_2$, $\overline{A}_1 \overline{B}_1 \parallel x$, $\overline{A}_2 \overline{B}_2 = \text{н.в. } AB$).

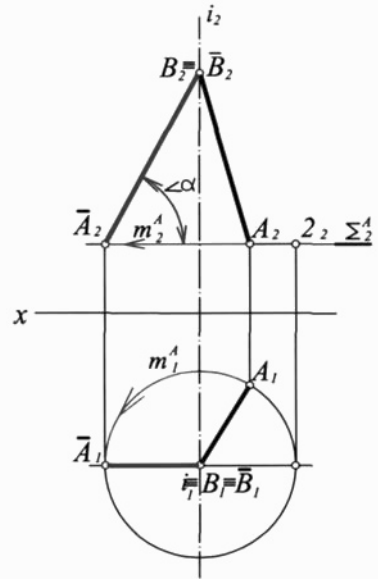


Рис. 9-4

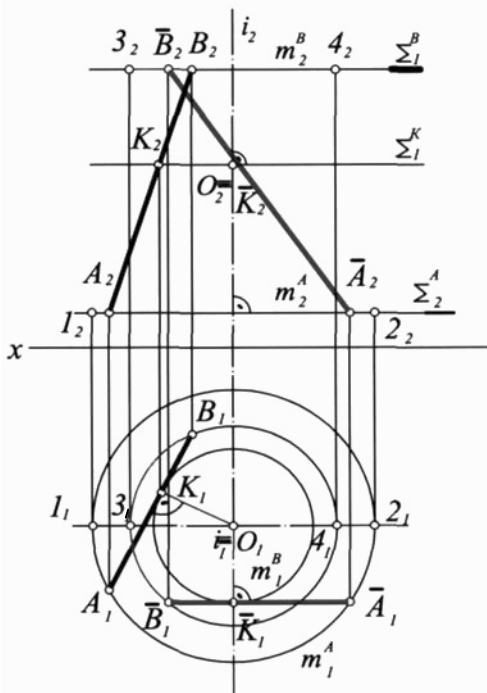


Рис. 9-5

На рис. 9-5 показано механізм обертання відрізка AB навколо осі i , перпендикулярної Π_1 , яка не перетинає AB . На рисунку видно, що точка A обертається по колу m^A , діаметр якого дорівнює 1 ... 2, а точка B обертається по колу m^B , діаметр якого 3 ... 4. OK , ($OK \perp AB$) назвемо – „ведучий радіус” відстань між i та AB . Повернемо AB навколо i до положення, коли AB розташується паралельно Π_2 , при цьому на полі Π_1 $O_1K_1 \perp A_1B_1$, не міняючи своєї величини, займе положення $O_1 \overline{K}_1$, а $\overline{A}_1 \overline{B}_1$ буде паралельний осі x , то на полі Π_2 $\overline{A}_2 \overline{B}_2$ дорівнює натуральній величині AB .

Особливістю обертання об'єкта навкруги осі, перпендикулярної до площини проєкцій: проєкція об'єкта на цю площину проєкцій свого змісту не змінює, а поворот цієї проєкції виконується за допомогою ведучого радіуса, який повертає проєкцію об'єкта до необхідного положення.

9.2.2. Перетворення виду № 2 (перетворення прямої рівня в пряму проєктуючу)

На рис. 9-6 показано виконання перетворення фронтальної прямої заданою відрізком AB , в пряму фронтально проєктуючу. Для цього проведемо вісь I перпендикулярно до Π_2 (для спрощення побудови вісь i провели через продовження прямої, заданою відрізком AB). Повернемо AB навкруги осі i . Обертання відрізка AB , паралельного Π_2 , буде проходити в площині P , паралельній Π_2 . При цьому на полі Π_2 обертання точки A з A_2 пройде по дузі кола n_2^A до положення, коли $\overline{A_2} \overline{B_2}$ (що дорівнює н.в. AB) розташується перпендикулярно осі x . На полі Π_1 A_1 і B_1 переміщуються по прямій $n_1^A \equiv n_1^B \equiv P^{AB} \perp i_1$, а горизонтальна проєкція AB буде у вигляді точки, з якою зливаються $\overline{A_1} \equiv \overline{B_1}$. В повернутому положенні AB – пряма проєктуюча ($\overline{A_2} \overline{B_2} = \text{н.в. } AB, \perp \text{ осі } x$).

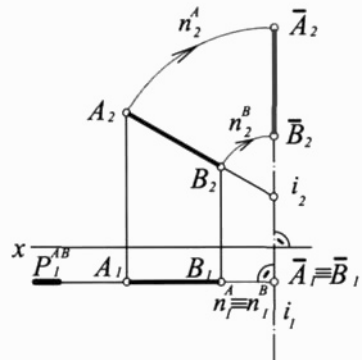


Рис. 9-6

На рис. 9-7 показано послідовність перетворення відрізка AB прямої загального положення в пряму проєктуючу шляхом виконання двох обертань:

– *перше обертання*: перетворення виду № 1, коли пряма AB – загального положення перетворюється в пряму рівня – $\overline{A} \overline{B}$ паралельна Π_1 , для цього через продовження AB проведена вісь $i \perp \Pi_2$ і навкруги осі i (на полі Π_2 навкруги i_2) обертали AB , коли $\overline{A_2} \overline{B_2}$ розташувалось паралельно осі x , при цьому на полі Π_1 отримали $\overline{A_1} \overline{B_1} = \text{н.в. } AB$;

– *друге обертання*: перетворення виду № 2, коли пряма $\overline{A} \overline{B}$ – пряма рівня перетворюється в пряму проєктуючу, для цього через точку на продовженні $\overline{A_1} \overline{B_1}$ провели вісь $i' \perp \Pi_1$ і навколо осі i' (на полі Π_1 навкруги i'_1) обернули AB , до положення, коли $\overline{A_1} \overline{B_1}$ розташується перпендикулярно осі x , при цьому на полі Π_2 отримали $\overline{A_2} \equiv \overline{B_2}$.

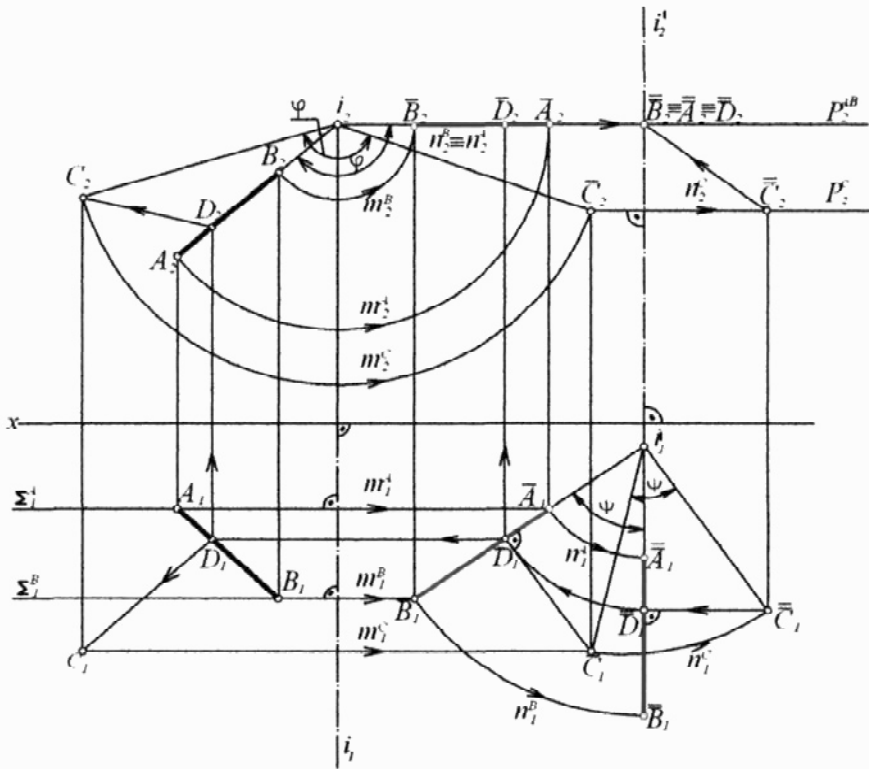


Рис. 9-7

Таким чином: виконавши два обертання (перетворення №1 + 2) прямої загального положення і ця пряма загального положення перетворюється в пряму проектуючу. Для цього проводимо обертання навколо осі, перпендикулярної до однієї площини проєкцій, перетворили пряму загального положення в пряму рівня, а обертання навколо другої осі, перпендикулярній до другої площини проєкцій перетворило пряму рівня в пряму проектуючу.

9.2.3. Перетворення виду № 3 (перетворення площини загального положення в площину проектуючу)

На рис. 9-8 показано механізм обертання трикутника ABC , який належить площині загального положення Δ , навколо осі i , перпендикулярної до Π_1 , до положення, коли Δ стане проектуючою площиною. Для цього в три-

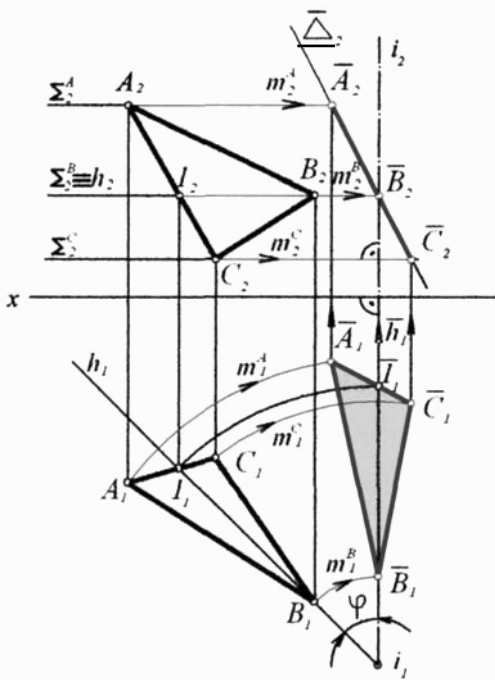


Рис. 9-8

кутнику ABC проведемо з точки B горизонталь h . З B_2 пройде $h_2 \parallel Ox$
 $h_2 \cap A_2C_2 \Rightarrow I_2 \Rightarrow I_1 \subset A_1C_1$.

За ознакою належності h площині ΔABC , h_1 пройде з B_1 через I_1 . Через продовження h проведемо вісь $i \perp P_1$.

ΔABC повернемо навколо i , при цьому його горизонтальну проекцію повернемо (її величина залишиться незмінною) до положення, коли h_1 розташується перпендикулярно до P_2 і на цьому полі спроектується в точку, а трикутник – в лінію $\overline{A_2 B_2 C_2} \equiv \overline{\Delta_2}$. При обертанні трикутника, його вершини переміщувались в горизонтальних площинах Σ , перпендикулярних осі обертання i .

Наприклад, точка A оберталась в площині $\Sigma^A \parallel P_1$ і переміщення точки A на полі P_1 A_1 пройде по дузі кола m_1^A проекції кола-траєкторії m^A до положення $\overline{A_1}$, а на полі P_2 - A_2 по прямій $m_2^A \equiv \Sigma_2^A$, перпендикулярній i_2 , отримуємо $\overline{A_2}$.

Таким чином, виконуючи обертання площини загального положення навколо осі, перпендикулярної одній площині проєкцій, до положення, коли лінія рівня цієї площини розташується перпендикулярно до другої площини проєкцій, площина загального положення буде перетворена в площину проєктуючу.

На рис. 9-9 показано обертання площини $\Sigma (\Sigma_2, \Sigma_1)$ загального положення, яка перетворюється в площину проєктуючу шляхом обертання її навколо осі i , яка зливається з площиною проєкцій P_2 . При цьому, ведучий радіус

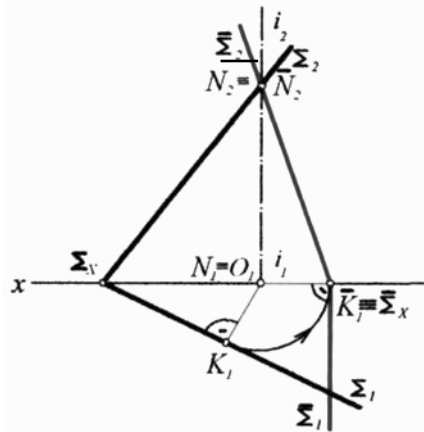


Рис. 9-9

O_1K_1 повороту горизонтального сліду Σ_1 , в повернутому положенні, який повинен злитися з віссю x ($O_1\overline{K_1} \equiv x$), а повернутий горизонтальний слід $\overline{\Sigma_1}$

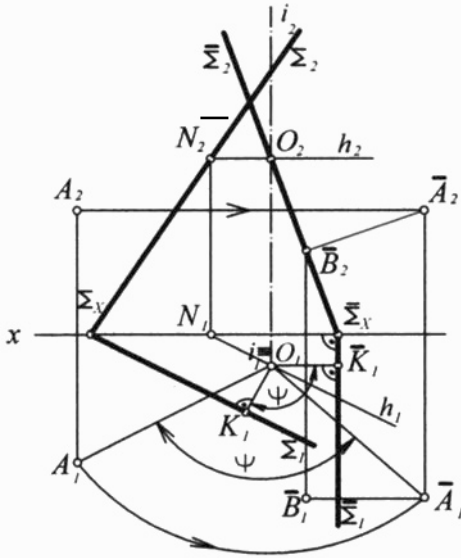


Рис. 9-10

пройде перпендикулярно $O_1\overline{K_1}$ і осі x . Точка збігу слідів на осі x повернутого положення Σ зливається з $\overline{K_1}$ з якої пройде $\overline{\Sigma_2}$ через нерухому точку $\overline{N_2}$, розташовану на осі ($i_2 \supset \bullet N_2 \equiv \overline{N_2}$). Нове положення площини $\overline{\Sigma}(\overline{\Sigma_2}, \overline{\Sigma_1})$ є проєктуюче відносно P_2 .

На рис. 9-10 показано розв'язок задачі по визначенню відстані від точки A до площини загального положення $\Sigma(\Sigma_2, \Sigma_1)$.

Розв'язок виконано шляхом перетворення площини Σ із загального положення в проєктуюче відносно площини проєкцій P_2 . Перетворення виконано обертанням навколо осі $i \perp P_1$, коли i розташована в просторі. При цьому повернутий ведучий радіус O_1K_1 для сліду Σ_1 розташовується паралельно осі x і через $\overline{K_1}$ пройде $\overline{\Sigma_1}$, а слід $\overline{\Sigma_2}$ пройде через точку O_2 , яка належить Σ та осі i . При повороті O_1K_1 до положення $O_1\overline{K_1}$ ведучий радіус O_1K_1 повернуто на кут φ , на такий же кут φ повертається ведучий радіус O_1A_1 точки A_1 до положення $\overline{A_1}$, при цьому A_2 переміщується по прямій, перпендикулярній i_2 , по $\overline{A_1}$, отримуємо $\overline{A_2}$. Відстань від точки A до Σ визначається по перпендикуляру з $\overline{A_2}$ до сліда-проєкції $\overline{\Sigma_2}$ і дорівнює $\overline{A_2}\overline{B_2}$.

9.2.4. Перетворення виду № 4

(перетворення площини проєктуючої в площину рівня)

На рис. 9-11 показано механізм обертання трикутника, який належить до фронтально проєктуючої площини Δ , навколо осі i , перпендикулярної площині проєкцій P_2 . Обертання виконується до положення, коли Δ стане площиною рівня. Для цього вісь $i \perp P_2$ ($i \subset P_1$) проводимо через продовження площини Δ , тобто i_2 належить Δ_2 , а i_1 перпендикулярне осі x .

Повернемо Δ навкруги i до положення, коли на епюрі Δ_2 злілється з віссю x , разом з $\overline{\Delta_2}$ злілється і повернута положення $\overline{A_2 B_2 C_2} \equiv \overline{\Delta_2}$. По новому повернутому положенню $\overline{A_2 B_2 C_2}$ будується $\overline{A_1 B_1 C_1}$, яке дорівнює натуральній величині ΔABC . Обертання вершин трикутника проходило в площинах P , які перпендикулярні осі i і $P \parallel P_2$. Траєкторія n^A переміщення, наприклад, точки A належить P^A і на полі Π_1 A_1 переміщується по n_1^A що зливається з P_1^A і розташовується перпендикулярно i_1 .

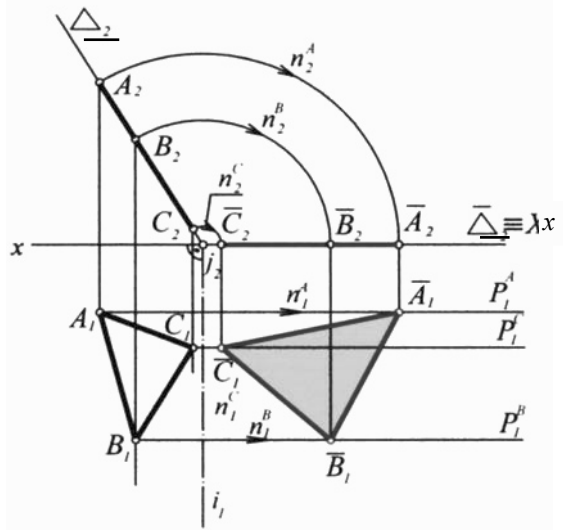


Рис. 9-11

Таким чином, якщо слід-проекцію проєктуючої площини до якоїсь площини проєкцій, повернути навколо осі, перпендикулярної до тієї ж площини проєкцій, то коли цей слід-проекція займе положення, паралельне осі координат (або з нею співпадає), то відносно другої площини проєкцій повернута площина стає площиною рівня.

9.2.5. Перетворення виду № 3 + № 4

(перетворення площини загального положення в площину рівня)

На рис. 9-12 показано послідовність перетворення трикутника ABC площини загального положення Δ , в площину рівня, шляхом виконання двох обертань:

- перше обертання: виконання перетворення виду № 3;
- в площині трикутника ABC побудуємо горизонталь h
 - ($\bullet B_2 \subset h_2 \parallel Ox$; $h_2 \cap A_2C_2 \Rightarrow I_2 \Rightarrow I_1 \subset A_1C_1$; $\bullet B_1 \cup \bullet I_1 \Rightarrow h_1$);
- вісь i проводимо через h і перпендикулярно Π_1 ;
- обертаємо ABC навколо осі i на кут φ так, щоб h стало $\perp \Pi_2$, ($h_1 \cup i_1 \Rightarrow \overline{h_1} \perp x$) і обертаємо точки A, B і D навколо i_1 , як навколо центра, – отримуємо незмінне за змістом зображення горизонтальної проєкції, – $\overline{A_1 B_1 C_1}$ і $\overline{D_1}$, які повернуті на той же кут φ .

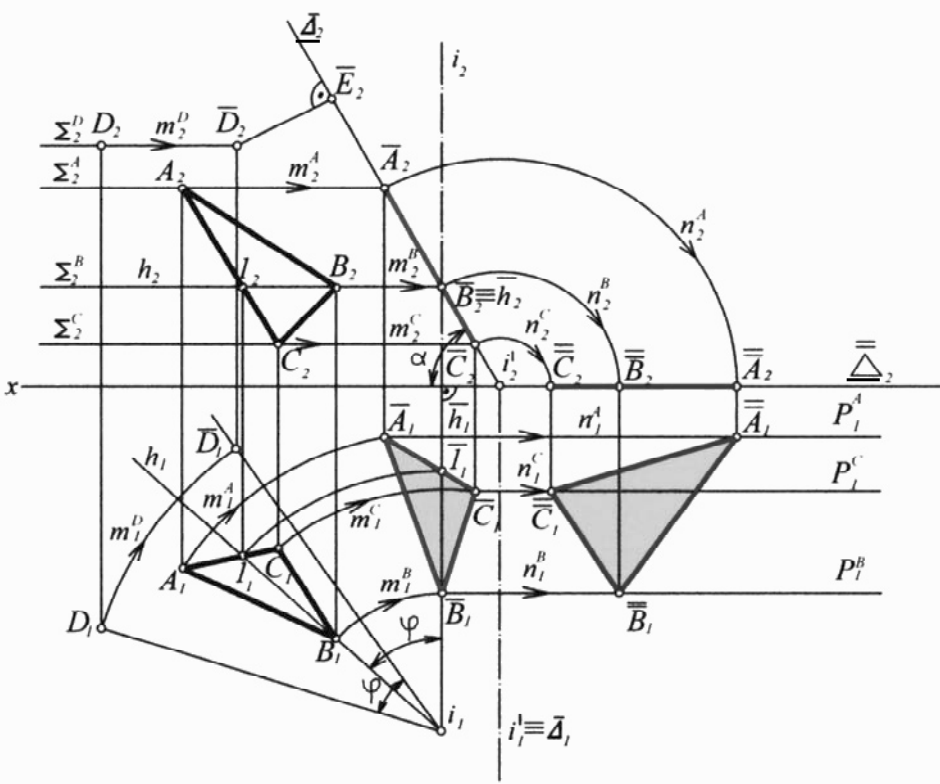


Рис. 9-12

- на полі Π_2 отримуємо точку $\overline{h_2}$, в яку спроекується горизонталь h , а по повернутому положенню $\overline{A_1} \overline{B_1} \overline{C_1}$ і $\overline{D_1}$ будемо їх фронтальну проекцію, які утворюють слід-проекцію $\overline{\Delta_2}$. В цьому випадку відстань від точки D_2 по перпендикуляру до $\overline{\Delta_2}$ - є відстань від точки D до площини Δ ;
- = друге обертання: виконання перетворення виду № 4;
- вісь i' проводимо перпендикулярно Π_2 через продовження площини Δ , так що $i'_2 \subset \Delta_2 \Rightarrow i'_1 \perp x$;
- обертаємо Δ_2 навколо i'_2 до положення, коли Δ_2 стане \parallel (зіллється) осі x ;
- на полі Π_1 - отримуємо горизонтальну проекцію $\overline{A_1} \overline{B_1} \overline{C_1}$, яка дорівнює натуральній величині трикутника ABC .

Таким чином: виконавши два обертання площини загального положення, вона перетворюється в площину рівня, для цього виконуємо перше обертання

ня навколо першої осі, перпендикулярної до однієї площини проєкцій, до тих пір, поки лінія рівня площини загального положення розташується перпендикулярно до протилежної площини проєкцій, то площина загального положення спроектується слідом-проєкцією і перетвориться в проєктуючу площину; друге обертання проводимо навколо осі, яка перпендикулярна до другої площини проєкцій, поки слід-проєкція розташується паралельно осі x , тоді площина проєктуюча відносно першої площини стане площиною рівня.

9.3. Обертання об'єкту навкруги лінії рівня

Приймемо точку A за об'єкт, який будемо обертати навколо h – горизонтальної прямої ($h \parallel \Pi_1, \bullet A \notin h$).

Прослідкуємо за механізмом обертання точки A навколо горизонталі, як проєктується зміна положення точки на рис. 9-13.

Обертаючись, точка A описує траєкторію в вигляді кола « m^A », яке розташоване у площині Σ^A , що перпендикулярна площині проєкцій Π_1 і перпендикулярна h , яка прийнята за вісь обертання. Точка перетину Σ^A з h – точка O – центр кола-траєкторії m^A . Відстань від точки O до точки A дорівнює R^A , який є радіусом утвореного кола m^A . Площина Σ^A перпендикулярна до h і Π_1 , тобто коло m^A проєктується на поле Π_1 , в вигляді прямої, що дорівнює діаметру кола, наприклад діаметру $1 \dots 2$, який паралельний Π_1 і горизонтальна проєкція цього діаметру $1_1 \dots 2_1$ збігається з слідом-проєкцією Σ_1^A . O_1A_1 – горизонтальна проєкція R^A , при обертанні точки A навколо h до положення \bar{A} на горизонтальній проєкції з A_1 переміщується перпендикулярно до h_1 по Σ_1^A до положення \bar{A}_1 , яке збігається з 1_1 , при цьому R^A розташується паралельно Π_1 і його проєкція на Π_1 – $O_1\bar{A}_1$ дорівнює натуральній величині R^A і збігається з Σ_1^A .

Елементи механізму обертання точки A навколо h лінії рівня.

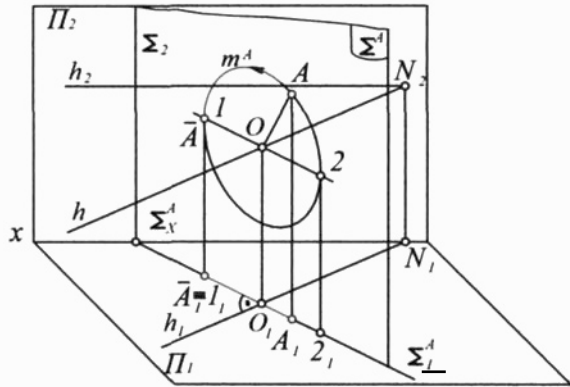


Рис. 9-13

9.3.1. Перетворення виду № 3 + № 4 (перетворення площини загального положення в площину рівня)

Перетворення виду № 3 + № 4 виконане обертянням навколо лінії рівня, дозволяє перетворити плоску фігуру, яка належить площині загального положення за одне обертяння (на відміну від розв'язку п.9.2.5) в площину рівня і визначить натуральну величину цієї плоскої фігури.

Обертаючи площину навколо її горизонталі, переводимо її в горизонтальне положення і горизонтальна проекція плоскої фігури, яка належить до цієї площини, – на Π_1 проектується в натуральну величину, а обертаючи площину навколо її фронталі, переводимо цю площину в фронтальну площину і фронтальна проекція плоскої фігури, яка належить до цієї площини, на Π_2 проектується в натуральну величину, де можна визначить всі метричні характеристики плоскої фігури.

Виконаємо перетворення виду №3 + № 4.

На рис. 9-15 трикутник ABC обертається навколо горизонталі h , (яка належить площині Δ , в якій розташований трикутник ABC) переведена в положення, паралельне площині проєкції Π_1 .

Горизонталь h площини Δ визначається точками A і 1 (що належать площині Δ). Так як точки A і 1 належать горизонталі h , яка прийнята за вісь обертяння, то ці точки A і 1 не змінюють свого положення при обертанні трикутника ABC навколо h .

Для обертяння площини Δ навколо h до горизонтального положення, прослідкуємо за обертянням точки B навколо h до положення, коли її радіус обертяння R^B займе горизонтальне положення і отримаємо \bar{B} . Нове повернуте положення точки \bar{B} з'єднаємо з нерухомими точками A і 1 , розташованими на осі обертяння. При цьому отримаємо площину рівня, яка визначається проєкцією $\bar{A}_1 \bar{B}_1 \bar{1}_1$.

Послідовність розв'язку:

1. в площині Δ проводимо горизонталь h через точку A_1 на епюрі: на полі $\Pi_2 \bullet A_2 \subset h_2 \parallel Ox$; $h_2 \cap B_2C_2 \Rightarrow 1_2 \Rightarrow 1_1 \subset B_1C_1$; $\bullet A_1 \cup \bullet 1_1 \Rightarrow h_1$;
2. через точку B перпендикулярно до h проводимо площину обертяння точки B_1 на епюрі: $\bullet B_1 \subset \Sigma_1^B \perp h_1$;

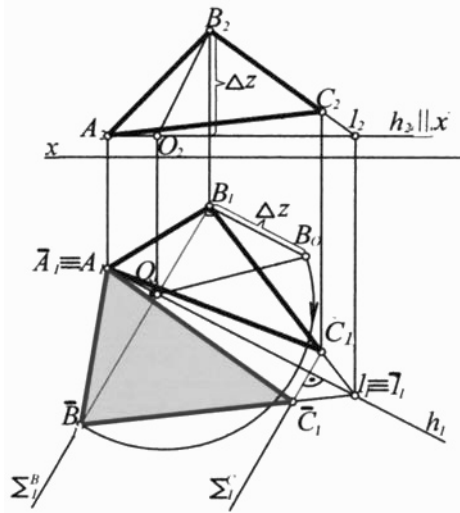


Рис. 9-15

3. будуємо центр обертання точки B_1 на епюрі
 $\Sigma_1^B \cap h_1 \Rightarrow O_1 \Rightarrow O_2 \subset h_2$;
4. визначаємо натуральну величину радіуса обертання R^B , для цього $\bullet O$ з'єднаємо з точкою B_1 на епюрі:
 $\bullet O_2 \cup \bullet B_2 \Rightarrow R_2^B$; $\bullet B_1 \subset r \perp B_1 O_1$; $Z^B - Z^A = \Delta Z$;
 $B_1 \subset \Delta Z \subset r \Rightarrow B_0$, $\bullet B_0 \cup \bullet O_1 \Rightarrow$ н.в. R^B ;
 $\bullet O_1 \subset$ н.в. $R^B \subset \Sigma_1^B \Rightarrow \overline{B_1}$.
5. визначаємо горизонтальну проекцію $\overline{A_1} \overline{B_1} \overline{C_1}$ повернутого три кутника ABC , для цього точку $\overline{B_1}$ з'єднаємо з $\overline{A_1} \equiv A_1$ і з точкою $\overline{I_1} \equiv I_1$, отримуємо натуральну величину трикутника ABI . Розглянувши обертання точки C навколо h , відмічаємо, що площина Σ^C обертання точки C паралельна Σ^B та \perp до h_1 ; Σ_1^C паралельна Σ_1^B . Перетин Σ_1^C з $\overline{B_1} \overline{I_1}$ утворює $\overline{C_1}$. З'єднавши $\overline{C_1}$ з $\overline{A_1}$ – отримуємо $\overline{A_1} \overline{B_1} \overline{C_1}$ – що дорівнює натуральній величині трикутника ABC .

9.4. Обертання об'єкта навкруги прямої загального положення

Механізм обертання точки навколо осі, яка не паралельна і не перпендикулярна жодній площині проекцій, наприклад, обрисів поверхонь обертання чи їх точок, вісь яких – пряма загального положення.

Приймемо точку A за об'єкт обертання, а відрізок CD прямої загального положення за вісь обертання. Якщо необхідно точку A повернути навколо CD на кут φ проти годинникової стрілки, то рішення такої задачі виконується в наступній послідовності:

1. Виконуємо перетворення осі – прямої загального положення CD в проектуючу і в перетвореному положенні CD будуємо задану точку A .
2. Обертаємо точку A навколо проектуючої прямої CD на заданий кут φ .
3. Повернуте положення точки A переносимо на вихідне задане положення відносно прямої CD .

На рис. 9-16 наведено розв'язок цієї задачі на епюрі:

Перетворення осі – прямої загального положення CD в пряму проектуючу виконуємо, наприклад, методом заміни площин проекцій за схемою:

$$x \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \Rightarrow x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4} \Rightarrow x_2 \frac{\Pi_4}{\Pi_5} \Rightarrow D_5 \equiv C_5 \text{ і } A_5.$$

Повертаємо A_5 навколо $D_5 \equiv C_5$ на кут φ , наприклад, проти руху годинникової стрілки і отримуємо \bar{A}_5 – повернуте положення точки A на заданий кут. При цьому, на полі Π_5 проекція A_5 переміщувалась по дузі m_5^A на кут φ і отримано \bar{A}_5 . На полі Π_4 проекція A_4 переміщувалась по прямій m_4^A перпендикулярно осі C_4D_4 до положення \bar{A}_4 , яке отримане при перетині m_4^A з лінією зв'язку, проведеною з \bar{A}_5 . Проекції \bar{A}_5 і \bar{A}_4 є проекціями точки A , повернутої на кут φ навколо CD на полях $x \frac{\Pi_4}{\Pi_5}$.

Надалі переносимо проекції точки A на поля $x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}$ і на поля $x \frac{\Pi_2}{\Pi_1}$, отримуємо \bar{A}_1 і \bar{A}_2 , що і є проекціями точки A , повернутої на кут φ , на полях $x \frac{\Pi_2}{\Pi_1}$.

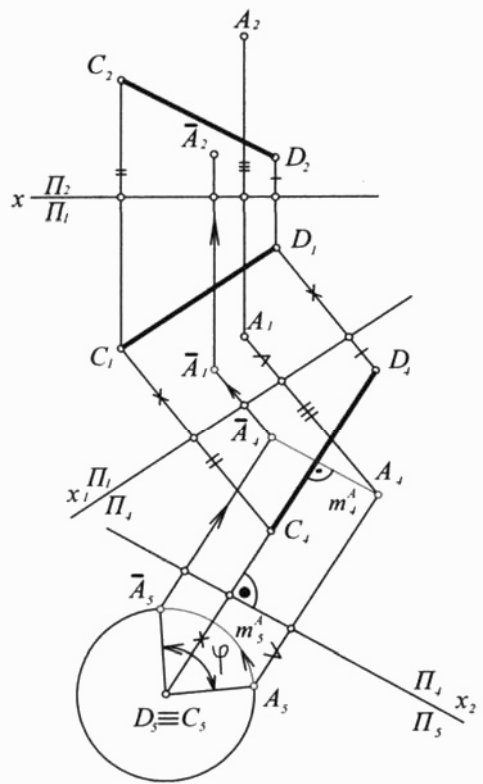


Рис. 9-16

9.5. Обертання о'б'єкта навколо лінії нульового рівня (Метод суміщення)

Метод суміщення є частковим випадком обертання навколо лінії рівня. При цьому за вісь обертання приймається горизонтальний або фронтальний слід площини. Якщо площина обертається навколо h° (горизонталі нульового рівня), то площина суміщується з площиною проекцій Π_1 , а коли площина обертається навколо f° (фронталі нульового рівня), то площина суміщується з площиною проекцій Π_2 . Всі геометричні елементи (точки, прямі, плоскі фігури...) розташовані в площині, яка обертається, обертаються в своїх площинах обертання, перпендикулярних до осі обертання і суміщуються з площиною проекцій, відтворюючи на ній натуральну величину елемента.

Розглянемо механізм суміщення площини на рис. 9-17. Площина загального положення $\Delta(f^\circ \cap h^\circ)$ обертається навколо $h^\circ \equiv h_1^0$ прийнятої за вісь обертання до суміщення площини Δ з площиною проєкцій Π_1 .

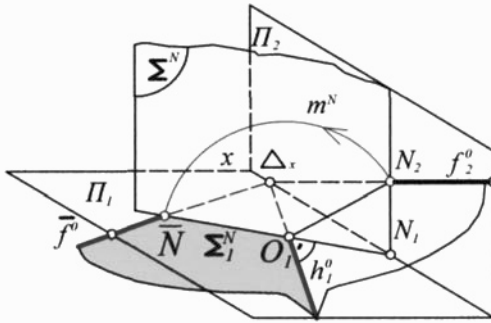


Рис. 9-17

Для визначення \bar{f}° (суміщеної f° з Π_1), прослідкуємо за поворотом точки N , належної \bar{f}° . Точка N обертається в площині Σ^N , горизонтальний слід якої Σ_1^N перпендикулярний до h_1^0 і натуральна величина $R^N = O_1N_2$ є радіусом обертання точки N навколо h_1^0 , і ця натуральна величина R^N розташується від точки O_1 на Σ_1^N , отримується \bar{N} , через

яку з нерухомої точки Δ_x пройде \bar{f}° . Таким чином h_1^0 і \bar{f}° визначають площину Δ , суміщену з Π_1 .

Розглянемо суміщення площини Δ з Π_1 на епюрі. На рис. 9-18 а, наведемо умову задачі, коли площина Δ загального положення задана h° і f° .

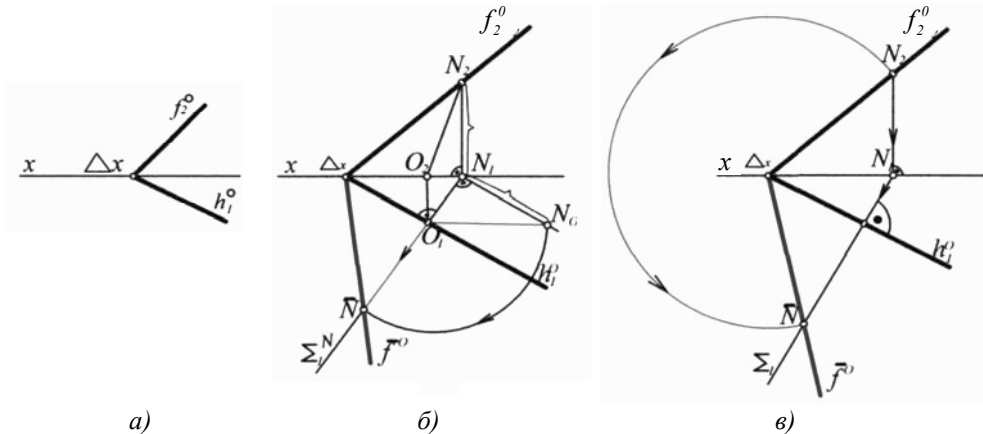


Рис. 9-18

На рис. 9-18 б, показано послідовність суміщення площини Δ з Π_1 . Для цього на фронталі нульового рівня f_2^0 , довільно беремо N_2 , та будуємо N_1 . Обертаємо точку N навколо h° , прийнятої за вісь, при цьому обертання точки N проходить в площині Σ^N , яка перпендикулярна до осі обертання h°

На рис. 9-20 *a* показана площина Δ в суміщеному положенні з Π_1 , а на рис. 9-20 *б* показана послідовність дій по побудові f_2^0 , коли площина Δ повернута (піднята) в положення суміщення f° з Π_2 , отримавши f_2^0 . Така побудова починається з довільного вибору \bar{N} на f° – дія 1 дії 2, 3, 4, 5, 6, до дії 7 – проведення f_2^0 .

Відмічаємо, що дії по “підйому” площини і дії по суміщенню площини однакові, тільки змінюємо їх послідовність, що і видно з порівняння рис. 9-19 і рис. 9-20, або нижченаведених алгоритмів:

**Алгоритм суміщення
площини $\Delta(f^\circ \cap h^\circ)$ з Π_1 :**

1. довільно $\bullet N_2 \subset f_2^0$.
2. $\bullet N_2 \rightarrow N_1 \subset x$.
3. $\bullet N_1 \subset \Sigma_1^N \perp h_1^0$.
4. $\Delta_x N_2 = R$ дуги n .
5. $n \cap \Sigma_1^N \Rightarrow \bullet \bar{N}$.
6. $\bullet \Delta_x \cup \bullet \bar{N} \Rightarrow \bar{f}^\circ!$;

$$\bar{f}^\circ \cap h_1^0 \Rightarrow \Delta \equiv \Pi_1.$$

**Алгоритм “підйому”
площини $\Delta(f^\circ \cap h^\circ) \equiv \Pi_1$ до $x \frac{\Pi_2}{\Pi_1}$:**

1. довільно $\bullet \bar{N} \subset \bar{f}^\circ$.
2. $\bullet \bar{N} \subset \Sigma_1^N \perp h_1^0$.
3. $\Sigma_1^N \cap x \Rightarrow N_1 \subset \text{в.л.з.} \perp x$.
4. $\Delta_x \bar{N} = R$ дуги n .
5. $n \cap \text{в.л.з.} \Rightarrow N_2$.
6. $\bullet \Delta_x \cup \bullet N_2 \Rightarrow f_2^0!$;

$$f_2^0 \cap h_1^0 \Rightarrow \Delta \text{ підняту до } \frac{\Pi_2}{\Pi_1}.$$

Суміщення площини $\Delta(f^\circ \cap h^\circ)$ з площиною проєкцій Π_2 виконується, починаючи з довільного вибору точки N_1 на h_1^0 , і далі по алгоритму аналогічному суміщенню Δ з Π_1 , а якщо задане суміщене положення площини Δ з Π_2 , то “опустити” задану площину до $x \frac{\Pi_2}{\Pi_1}$, необхідно побудову починати з довільного вибору точки \bar{N} на h_1^0 і далі по алгоритму, аналогічному “підйому” до $x \frac{\Pi_2}{\Pi_1}$.

9.5.1. Виконання перетворень методом суміщення

9.5.1.1 Перетворення виду №1

(перетворення прямої загального положення в пряму рівня)

На рис. 9-21 *a* показано перетворення відрізка AB , прямої загального положення в пряму рівня, виконане методом суміщення.

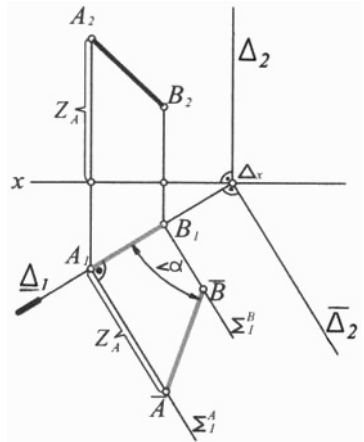
Механізм такого перетворення наступний:

1. – відрізок AB включаємо в горизонтально проектуючу площину $\Delta(\Delta_2, \Delta_1)$, при цьому її горизонтальний слід Δ_1 зливається з A_1B_1 , а фронтальний слід Δ_2 , перпендикулярний в просторі до Δ_1 , пройде з Δ_x і розташується перпендикулярно до осі x ;

2. – горизонтальний слід Δ_1 приймаємо за вісь обертання площини Δ , якій належить відрізок AB ; обертаємо площину Δ до суміщення її з площиною проєкцій Π_1 ;

– суміщене положення площини Δ дає відтворення $\overline{A} \overline{B}$, яке дорівнює натуральній величині AB і кут між $\overline{A} \overline{B}$ та Δ_1 є натуральною величиною кута α – кута нахилу AB до Π_1 .

При виконанні суміщення Δ , її фронтальний слід $\overline{\Delta}_2$, розташований в просторі перпендикулярно до Δ_1 (осі обертання), в суміщеному положенні Δ_2 пройде з Δ_x і розташується перпендикулярно Δ_1 . Точка A буде обертатися навколо Δ_1 в площині Σ^A , перпендикулярній Δ_1 , горизонтальний слід Σ_1^A пройде з A_1 перпендикулярно Δ_1 . Обертання точки A в площині Σ^A буде проходити по дузі кола, радіус якого дорівнює висоті точки A , її Z^A відтворено на полі Π_2 . В суміщеному положенні площини Δ з Π_1 радіус обертання точки A суміститься з Π_1 , своєю натуральною величиною, від A_1 в Σ_1^A і отримується суміщене положення точки A , яким є \overline{A} . Аналогічно виконується суміщення і точки B , яким є \overline{B} .



a)

Рис. 9-21

Алгоритм виконання перетворення виду № 1 :

1. $AB \subset \Delta(\Delta_1 \cap \Delta_2) \perp \Pi_1; \left\{ A_1 B_1 \equiv \Delta_1 \cap Ox \Rightarrow \Delta_x \subset \Delta_2 \perp Ox \right\}$
2. $\Delta \cup \Delta_1 \Rightarrow \overline{\Delta}_2 \equiv \Pi_1 \left\{ \begin{array}{l} \bullet \Delta_x \subset \overline{\Delta}_2 \perp \Delta_1; \bullet A_1 \subset \Sigma_1^A \perp \Delta_1; \bullet A_1 \subset Z^A \equiv \Sigma_1^A \Rightarrow \bullet \overline{A} \\ \bullet B_1 \subset \Sigma_1^B \perp \Delta_1; \bullet B_1 \subset Z^B \equiv \Sigma_1^B \Rightarrow \bullet \overline{B} \end{array} \right\}$
3. $\bullet \overline{A} \cup \bullet \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \overline{B} \neq \text{н.в. } AB; \left\{ \overline{A} \overline{B} \wedge \Delta_1 = \angle \alpha \neq \text{н.в. } \angle \alpha = AB \wedge \Pi_1 \right\}$

На рис. 9-21, б показано визначення натуральної величини AB і кута α при обертанні площини Δ навколо Δ_2 .

Якщо необхідно визначити натуральну величину відрізка AB і кут β – кут нахилу AB до площини проєкцій Π_2 , то відрізок включається в фронтально проєктуючу площину Δ і суміщення Δ виконується обертанням її навколо свого фронтального сліду до суміщення з Π_2 .

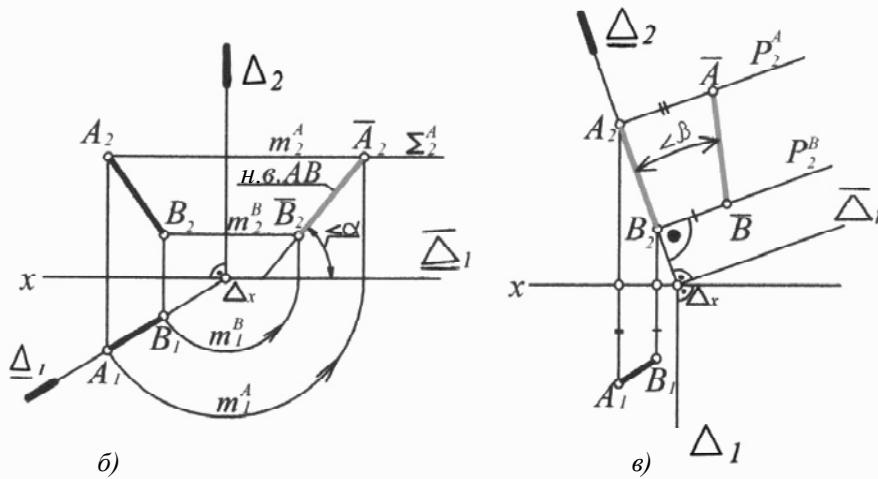


Рис. 9-21

За відповідною аналогією виконання перетворення виду №1, методом суміщення можливо виконати й інші перетворення, одним з таких є перетворення виду №3 + №4.

9.5.1.2 Перетворення виду №3 + №4 (перетворення площини загального положення в площину рівня методом суміщення)

Перетворення виду №3 + №4, виконане методом суміщення, (аналогічне перетворенню наведеного в п. 9.3.1), де обертання плоскої фігури виконано навколо лінії рівня. В цьому пункті розглядається перетворення площини загального положення, заданою слідами, до суміщення з площиною проєкцій, наприклад, з Π_1 , при цьому всі точки, прямі, плоскі фігури, належні до площини, в суміщеному її положенні теж суміщуються з Π_1 , де суміщені прямі, плоскі фігури відтворені в натуральну величину.

На рис. 9-22, а показано площину Δ , задану її f° і h° , а також наведено фронтальну проєкцію $A_2B_2C_2$ трикутника ABC , належного площині Δ .

Необхідно побудувати $A_1B_1C_1$ і натуральну величину трикутника ABC .

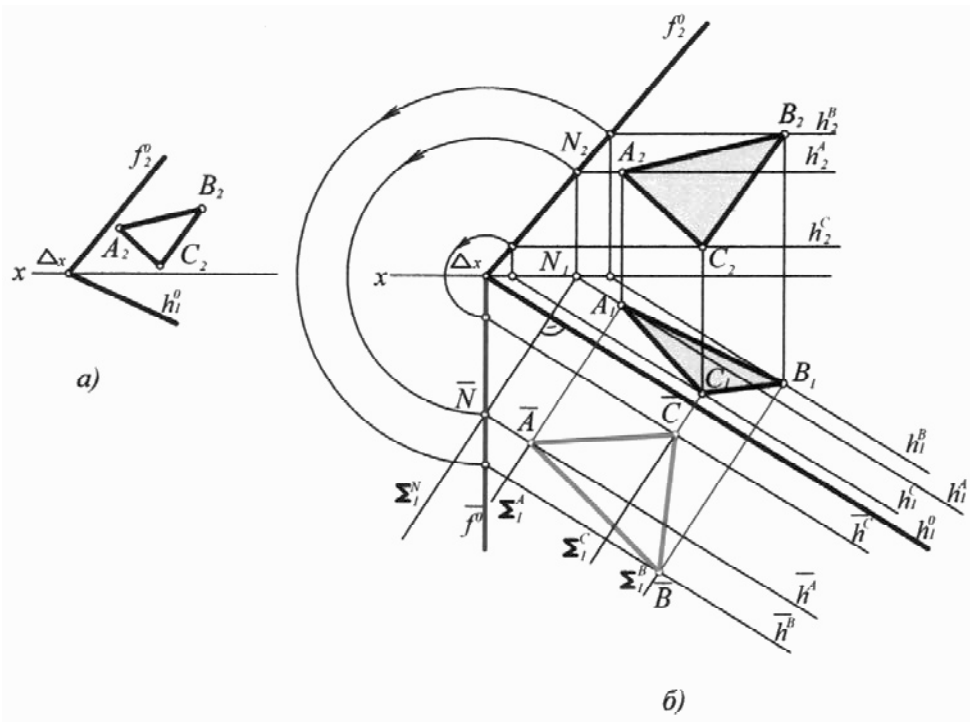


Рис. 9-22

На рис. 9-22 б показано розв'язок поставленої задачі методом суміщення площини Δ з площиною проєкцій Π_1 шляхом обертання навкруги h_1^0 .

За ознакою належності точок A, B, C до площини Δ , будемо $A_1B_1C_1$, коли точки A, B і C належать відповідним горизонталям h^A, h^B, h^C , при цьому A_1 належить h_1^A , B_1 належить h_1^B , C_1 належить h_1^C , що дає побудову $A_1B_1C_1$.

Прослідкуємо за механізмом суміщення площини Δ з Π_1 .

На полі Π_2 побудуємо N_2 – фронтальну проєкцію фронтального сліду горизонталі h^A .

Для цього:

- $A_2 \in h_2^A \parallel Ox$; $h_2^A \cap f_2^0 \Rightarrow N_2 \Rightarrow N_1 \in h_1^A \parallel h_1^0$;
- $N_1 \in \Sigma_1^N \perp h_1^0$; • $N_2 \cup h_1^0 \Rightarrow \bar{N} \in \Sigma_1^N$; • $\Delta_x \cup \bar{N} \Rightarrow \bar{f}^0$ тобто, повернувши точку N до суміщення з Π_1 , побудували суміщене положення пло-

щини $\Delta(\bar{f}^0 \cap h_1^0)$. $\bullet N \subset \bar{h}^A \parallel h_1^0$; $\bullet A \cup h^0 \Rightarrow \Sigma^A \perp h^0$; $\bullet A_1 \subset \Sigma_1^A \perp h_1^0$; $\Sigma_1^A \cap \bar{h}^A \Rightarrow \bar{A}$.

Враховуючи, що площини обертання всіх точок, належних площині Δ , навколо h^0 , паралельні між собою, то: $\Sigma_1^A \parallel \Sigma_1^B \parallel \Sigma_1^C$, які, перетинаючись з суміщеним положенням з відповідними горизонталями в суміщеному положенні, дають суміщене положення точок \bar{C} і \bar{B} . З'єднавши точку \bar{A} з точкою \bar{B} і з точкою \bar{C} , а точку \bar{B} з \bar{C} отримуємо $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, що є натуральною величиною ΔABC , за рахунок перетворення площини загального положення $\Delta(\bar{f}^0 \cap h_1^0)$, яке виконане методом суміщення, тобто обертання навколо h_1^0 до суміщення з Π_1 – площиною нульового горизонтального рівня.

9.6. Обертання безосьове (навколо уявної осі). Метод плоско-паралельного переміщення

Особливістю цього методу, як і інших видів обертання, є нерухомість площин проєкцій $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$, а змінює своє положення об'єкт проєктування до отримання, необхідного за інформацією, свого нового зображення.

На рис. 9-23 наведено:

а) – фото людини зверху (її горизонтальну проєкцію);

б) – фото людини спереду (її фронтальна проєкція, відповідна розташуванню людини на горизонтальній проєкції).

Коли необхідно “побачити” профіль людини, то фото а) переміщуємо в нове положення \bar{a} , тоді такому новому її положенню на фото людини зверху буде відповідати фото в) – фото людини спереду в новому положенні (її нова фронтальна проєкція), де ми “бачимо” необхідний профіль людини.

Тобто, якщо на полі Π_1 фото а) переміщуємо, не міняючи його змісту, в положення \bar{a} , то на полі Π_2 фото б) змінюється на фото в) нового необхідного змісту.

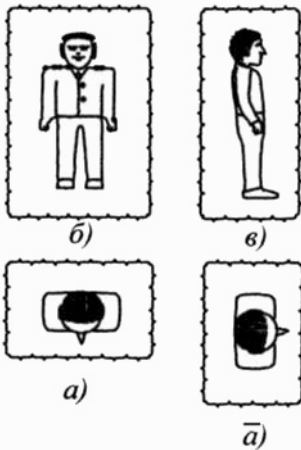


Рис. 9-23

На рис. 9-24 наведено геометричну модель методу.

Відрізок AB прямої загального положення A_1B_1 – горизонтальна проекція, A_2B_2 – фронтальна проекція AB . За розміром A_1B_1 і A_2B_2 менше натуральної величини AB . При поверненні відрізка AB між горизонтальними площинами Σ^A і Σ^B , то точка A буде переміщуватись в площині Σ^A , а точка B в Σ^B . Розмір горизонтальної проекції буде незмінним, буде змінюватись лише його розташування відносно осі x . Якщо відрізок займе положення, при якому $\overline{A_1 B_1}$ розташується паралельно осі x , то заданий

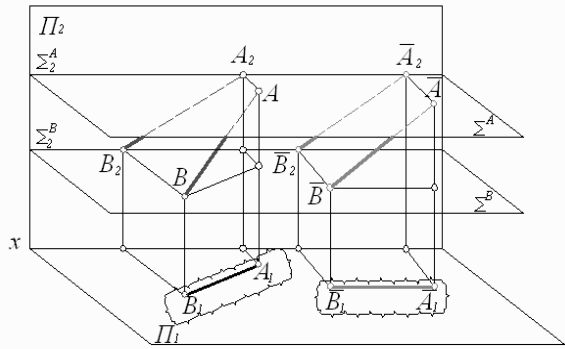


Рис. 9-24

відрізок займе фронтальне положення ($\overline{A_2 B_2} \parallel \Pi_2$) і розмір його фронтальної проекції буде дорівнювати розміру самого відрізка AB , тобто $\overline{A_2 B_2} = AB$.

Через точку A проведемо площину Σ^A , паралельну площині проекцій Π_1 і через точку B проведемо Σ^B , паралельно Π_1 . Відрізок AB будемо переміщувати так, щоб точка A переміщувалась в Σ^A . При переміщенні точок A і B змінюється розташування горизонтальної проекції A_1B_1 до положення, коли $\overline{A_1 B_1}$, розташується паралельно осі x , тобто фото з A_1B_1 не міняючи змісту, змінює своє розташування до положення, коли $A_1B_1 = \overline{A_1 B_1} \parallel Ox$. При такому розташуванні, коли $\overline{A_1 B_1}$ стало паралельно осі x , відрізок AB в просторі паралельний площині Π_2 , то його фронтальна проекція $\overline{A_2 B_2}$ дорівнює натуральній величині відрізка $\overline{A_2 B_2}$. При такому переміщенні точка A переміщувалась в положення \overline{A} , і це переміщення проходить по траєкторії, яка належить площині Σ^A . Фронтальна проекція точки A з A_2 в положення $\overline{A_2}$ переміщується по фронтальному сліду-проекції Σ_2^A , який паралельний осі x . Точка B переміщується з B в \overline{B} в площині Σ^B , а B_2 в положення $\overline{B_2}$ переміщується по Σ_2^B .

Таким чином, “фото” з A_1B_1 переміщується в положення, коли $\overline{A_1 B_1}$ розташувалось паралельно осі x , фронтальна проекція A_2B_2 замінюється на

$\overline{A_2 B_2}$, що дорівнює натуральній величині AB . При цьому AB – прямої загального положення, перетворено в $\overline{A_2 B_2}$ – прямою рівня (паралельну Π_2).

9.6.1. Виконання перетворень методом плоско-паралельного переміщення

9.6.1.1. Перетворення виду №1 (перетворення прямої загального положення в пряму рівня)

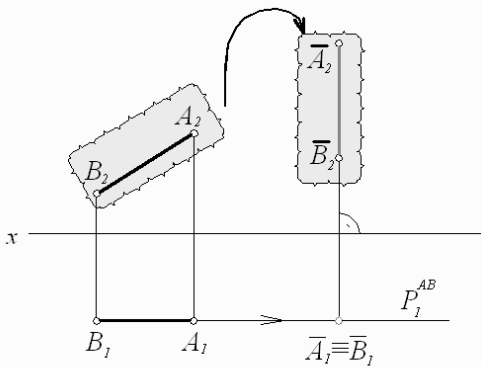


Рис. 9-25

На рис. 9-25 показано виконання перетворення відрізка AB загального положення, в положення, паралельне Π_2 .

Для виконання такого перетворення, через A_2 проведемо слід-проекцію Σ_2^A , паралельно осі x , а через Σ_2^B проведемо B_2 , паралельно осі x . Фото $A_1 B_1$ перемістимо в довільне нове положення, при якому $\overline{A_1 B_1}$ розташується паралельно осі x .

Переміщення точки A відбувається по плоскій лінії, яка належна площині Σ^A , на епюрі ця лінія переміщення точки A на полі Π_2 зливається з слідом-проекцією Σ_2^A , тобто A_2 в нове положення $\overline{A_2}$ переміщення йде по прямій, паралельній осі x .

Переміщення точки B проходить в площині Σ^B , на епюрі B_2 в нове положення $\overline{B_2}$ проходить по Σ_2^B паралельно осі x . При цьому $\overline{A_2}$ визначається за допомогою вертикальної лінії зв'язку (в.л.з.), вибраного положення $\overline{A_1}$, проведеної до перетину з Σ_2^A . $\overline{B_2}$ визначається за допомогою в.л.з., проведеної з $\overline{B_1}$ до перетину з Σ_2^B .

Алгоритм перетворення (коли $AB \subset \text{пр.з.п.} \rightarrow AB \parallel \Pi$):

1. $A_1 B_1 = \overline{A_1 B_1} \parallel x$.
2. $\bullet A_2 \subset \Sigma_2^A \parallel x$;
- $B_2 \subset \Sigma_2^B \parallel x$.

$$3. \bullet \overline{A_1} \subset \text{в.л.з.} \cap \Sigma_2^A \Rightarrow \overline{A_2};$$

$$\bullet \overline{B_1} \subset \text{в.л.з.} \cap \Sigma_2^B \Rightarrow \overline{B_2}.$$

$$4. \bullet \overline{A_2} \cup \bullet \overline{B_2} \Rightarrow \overline{A_2 B_2} = \text{д.в. } AB; \quad AB \subset \text{пр.з.п.} \rightarrow \overline{AB} \parallel \Pi_2.$$

Якщо необхідно перетворити пряму загального положення в пряму горизонтальну, то “фото” фронтальної проекції $A_2 B_2$ переміщується в положення $\overline{A_2} \overline{B_2}$, паралельне осі x і по цій проекції будується $\overline{A_1} \overline{B_1}$.

9.6.1.2. Перетворення виду №2 (перетворення прямої рівня в пряму проєктуючу)

На епюрі рис. 9-26 показано виконання перетворення фронтальної прямої AB в пряму горизонтально-проєктуючу.

Для цього через пряму рівня AB проводимо площину рівня P , яка паралельна Π_2 . “Фото” $A_2 B_2$ переносимо в нове довільне положення, при якому $\overline{A_2} \overline{B_2}$ розташується перпендикулярно до осі x . Площина P паралельна Π_2 , в P виконується переміщення точок A і B . На полі Π_1 слід-проєкція P_1^{AB} паралельній осі x і при перетині вертикальної лінії зв’язку, з $\overline{A_2} \overline{B_2}$ перпендикулярного до осі x , з P_1^{AB} отримуємо горизонтальну проєкцію $\overline{A_1} \equiv \overline{B_1}$ переміщеного положення AB .

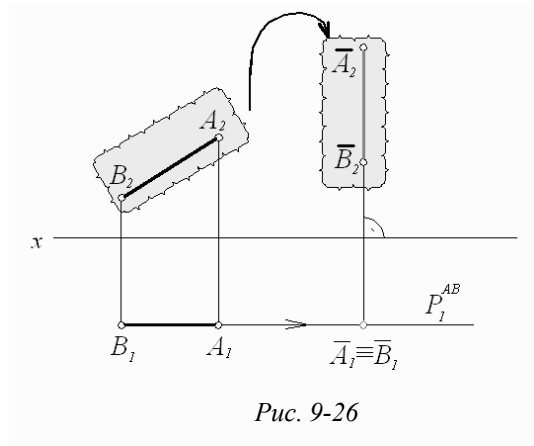


Рис. 9-26

Алгоритм перетворення

$$A_2 B_2 = \overline{A_2} \overline{B_2} \perp x.$$

$$1. A_1 \text{ і } B_1 \subset P_1^{AB} \parallel x;$$

$$2. \bullet \overline{A_2} \text{ і } \bullet \overline{B_2} \subset \text{в.л.з.} \cap P_1^{AB} \Rightarrow \overline{A_1} \equiv \overline{B_1};$$

$$AB \parallel \Pi_2 \rightarrow \overline{A} \overline{B} \perp \Pi_1.$$

**9.6.1.3 Перетворення виду №1 + №2
(перетворення прямої загального положення
в пряму проєктуючу)**

На епюрі рис. 9-27 показано виконання перетворення відрізка AB прямої загального положення в пряму проєктуючу (наприклад, в горизонтально проєктуючу), що виконується послідовним виконанням двох перетворень, виду №1 і виду №2. При цьому, спочатку перетворюється пряма загального положення в пряму рівня і надалі отриману пряму рівня (при виконанні другого перетворення), перетворюємо в пряму проєктуючу.

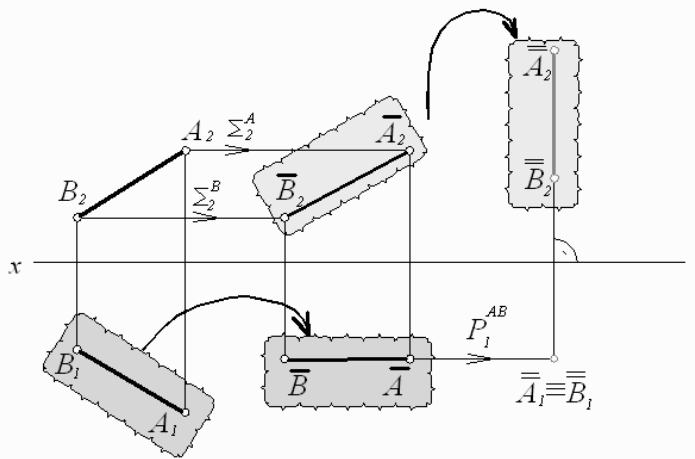


Рис. 9-27

Для цього “фото” A_1B_1 переміщуємо у вільне місце і так розташовуємо, щоб $\overline{A_1 B_1}$, яке дорівнює A_1B_1 , розташувалось паралельно осі x , будуюмо $\overline{A_2 B_2}$ по алгоритму перетворення №1. Друге перетворення виконуємо шляхом переміщення “фото” $\overline{A_2 B_2}$ в нове положення, коли $\overline{\overline{A_2 B_2}}$, яке дорівнює $\overline{A_2 B_2}$, розташується перпендикулярно осі x , будуюмо $\overline{\overline{A_1 B_1}}$ по алгоритму перетворення виду №2.

Алгоритм перетворення виду №1 + №2 (коли $AB \subset \text{пр.з.п.} \Rightarrow \overline{AB} \parallel \Pi$, $\overline{AB} \Rightarrow \overline{\overline{AB}} \perp \Pi$)

1. $A_1B_1 = \overline{A_1 B_1} \perp x$.
2. $\bullet A_2 \subset \Sigma_2^A \parallel x$; $\bullet B_2 \subset \Sigma_2^B \parallel x$.
3. $\bullet \overline{A_1} \subset \text{в.л.з.} \cap \Sigma_2^A \Rightarrow \overline{A_2}$;

- $\overline{B_1} \subset \text{в.л.з.} \cap \Sigma^B_2 \Rightarrow \overline{B_2}$.
- 4. • $\overline{A_2} \cup \bullet B_2 \Rightarrow \overline{A_2 B_2}$;
 $AB \subset \text{пр.з.п.} \rightarrow \overline{AB} \parallel \Pi_2$;
 $\overline{\overline{A_2 B_2}} = \overline{\overline{A_2 B_2}} \perp x$.
- 5. $\overline{A_2 B_2} = \overline{A_2 B_2} \perp x$.
- 6. • $\overline{A_1}$ і $\overline{B_1} \subset P_1^{AB} \parallel x$.
- 7. • $\overline{A_2}$ і $\bullet B_2 \subset \text{в.л.з.} \cap P_1^{AB} \Rightarrow \overline{A_1} \equiv \overline{B_1}$;
 $\overline{AB} \perp \Pi_1$.
 $AB \subset \text{пр.з.п.} \Rightarrow AB \perp \Pi_1$.

9.6.1.4. Перетворення виду №3 (перетворення площини загального положення в площину проектуючу)

На епюрі рис. 9-28 показано виконання перетворення трикутника ABC , який належить площині загального положення Δ , наприклад, у фронтально проектуючу площину методом плоско-паралельного переміщення. Для цього в трикутнику ABC з точки A проведемо горизонталь h , на епюрі з A_2 пройде h_2 , паралельно осі x , $h_2 \cap B_2 C_2 \Rightarrow l_2 \Rightarrow l_1 \subset B_1 C_1$. За ознакою належності h площині трикутника ABC , h_1 пройде з $\bullet A_1$ через $\bullet l_1$.

“Фото” $A_1 B_1 C_1$, не міняючи змісту, міняє своє розташування до положення коли $\overline{h_1}$ буде перпендикулярна осі x . При такому розташуванні h спроектується на поле Π_2 в точку $\overline{h_2}$, з якою збігається $\overline{A_2}$, а вся площина трикутника спроектується в лінію $\overline{B_2 A_2 C_2}$, яка збігається зі слідом-проекцією $\overline{\Delta_2}$. При цьому, для побудови $\overline{B_2 A_2 C_2}$ виконується наступна побудова: через B_2 проводимо слід-проекцію $\Sigma^B_2 \parallel x$ (площина Σ^B , в якій проходить переміщення точки B), відповідно $\bullet A_2 \subset \Sigma^A_2 \parallel x$ і $\bullet C_2 \subset \Sigma^C_2 \parallel x$. З нового положення $\overline{A_1 B_1 C_1}$ проводимо вертикальні лінії зв’язку до перетину з відповідними слідами-проекціями $\Sigma^A_2 \Sigma^B_2 \Sigma^C_2$ і отримуємо $\overline{B_2}$, $\overline{A_2} \equiv \overline{h_2}$ і $\overline{C_2}$, з’єднавши які, отримуємо $\overline{B_2 A_2 C_2}$, яке визначає слід-проекцію $\overline{\Delta_2}$ площини Δ , в якій розташовано трикутник ABC . В перетвореному положенні на полях $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ трикутник ABC належить площині проектуючій, перпендикулярній площині проєкцій Π_2 .

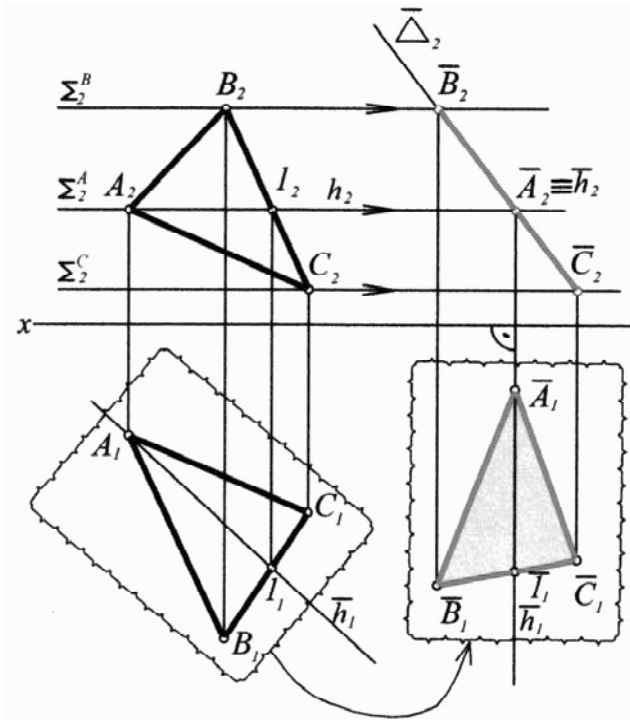


Рис. 9-28

Алгоритм перетворення виду № 3 (коли $\Delta ABC \subset \text{пл.з.п.} \rightarrow \Delta \bar{A} \bar{B} \bar{C} \perp \Pi_2$):

1. $\bullet A \subset h \subset ABC \Rightarrow \bar{h}_1 \subset A_1 B_1 C_1$.
2. $A_1 B_1 C_1 \supset h_1 \rightarrow \bar{A}_1 \bar{B}_1 \bar{C}_1 \supset \bar{h}_1 \perp \Pi_2$.
3. $\bullet A_2 \subset \Sigma_2^A \parallel x$; $\bullet B_2 \subset \Sigma_2^B \parallel x$; $\bullet C_2 \subset \Sigma_2^C \parallel x$.
4. $\bullet \bar{B}_1 \subset \text{в.л.з.} \cap \Sigma_2^B \Rightarrow \bar{B}_2$;
 $\bullet \bar{A}_1 \subset \text{в.л.з.} \cap \Sigma_2^A \Rightarrow \bar{A}_2$;
 $\bullet \bar{C}_1 \subset \text{в.л.з.} \cap \Sigma_2^C \Rightarrow \bar{C}_2$.
5. $\bullet \bar{B}_2 \cup \bullet \bar{A}_2 \cup \bullet \bar{C}_2 \Rightarrow \bar{B}_2 \bar{A}_2 \bar{C}_2 \equiv \bar{\Delta}_2$ – слід-проекція.

Якщо необхідно перетворити трикутник ABC площини загального положення Δ в площину горизонтально-проектуючу, то в трикутнику проводиться фронталь f_1 „фото” фронтальної проекції трикутника переміщується так, щоб \bar{f}_2 розташувалось перпендикулярно до осі x , при цьому фронталь на поле Π_1 спроектується в точку, а весь трикутник спроектується на Π_1 в лінію співпадаючу з слідом-проекцією Δ_1 .

**9.6.1.5. Перетворення виду № 4
(перетворення площини проєктуючої в площину рівня)**

На епюрі рис. 9-29 показано виконання перетворення трикутника ABC , належного фронтально проєктуючій площині, в площину рівня (паралельну горизонтальній площині Π_1). Для цього “фото” $B_2A_2C_2 \equiv \Delta_2$ розташовується паралельно осі x , а на полі Π_1 : через A_1 проводимо слід-проєкцію P_1^A площини P^A яка розташована паралельно Π_2 і проходить через точку A , через точку B_1 проводимо P_1^B , через C_1 проводимо P_1^C паралельно осі x .

Вертикальна лінія зв'язку, проведена з $\overline{B_2}$ до перетину з P_1^B – утворюється $\overline{B_1}$, з $\overline{A_2}$ до перетину з P_1^A – утворюється $\overline{A_1}$, з $\overline{C_2}$ до перетину з P_1^C – утворюється $\overline{C_1}$. З'єднавши отримані точки $\overline{A_1}$, $\overline{B_1}$, $\overline{C_1}$ між собою, отримується $\overline{A_1 B_1 C_1}$, що дорівнює дійсній величині трикутника ABC .

В перетвореному положенні на полях $x \frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ трикутник ABC належить площині Δ -рівня, паралельній площині проєкцій Π_1 .

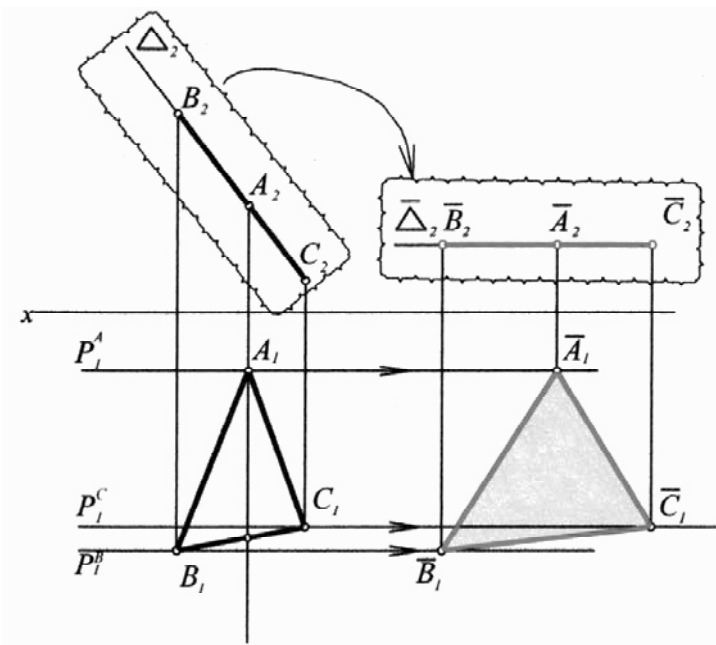


Рис. 9-29

Алгоритм перетворення виду № 4 (коли $\Delta ABC \perp P_2 \Rightarrow \overline{A_1} \overline{B_1} \overline{C_1} \parallel P_1$):

1. $B_2 A_2 C_2 \equiv \Delta_2 \Rightarrow \overline{B_2} \overline{A_2} \overline{C_2} \equiv \overline{\Delta_2} \parallel x$.
2. $\bullet A_1 \subset P_1^A \parallel x$; $\bullet B_1 \subset P_1^B \parallel x$; $\bullet C_1 \subset P_1^C \parallel x$.
3. $\bullet \overline{B_2} \subset \text{в.л.з.} \cap P_1^B \Rightarrow \overline{B_1}$;
 $\bullet \overline{A_2} \subset \text{в.л.з.} \cap P_1^A \Rightarrow \overline{A_1}$;
 $\bullet \overline{C_2} \subset \text{в.л.з.} \cap P_1^C \Rightarrow \overline{C_1}$;
4. $\bullet \overline{B_1} \cup \bullet \overline{A_1} \cup \bullet \overline{C_1} \Rightarrow \overline{A_1} \overline{B_1} \overline{C_1} = \text{н.в.} \Delta ABC$.

Якщо необхідно трикутник ABC горизонтально проєктуючої площини, перетворити в фронтальну площину, то “фото” горизонтального сліду-проєкції переміщується до положення, коли слід-проєкція розташується паралельно осі x , а нова фронтальна проєкція буде натуральною величиною трикутника ABC .

9.6.1.6. Перетворення виду № 3 + № 4

(перетворення площини загального положення в площину рівня методом плоско-паралельного переміщення)

Перетворення виду № 3 + № 4, виконане методом плоско-паралельного переміщення, дає можливість перетворити трикутник ABC , що належить площині загального положення, наприклад, в горизонтальну площину, шляхом послідовного перетворення виду № 3, що дає можливість площину загального положення перетворити, наприклад, в фронтально-проєктуючу площину і далі виконання перетворення виду № 4, що дає можливість площину проєктуючу перетворити в площину рівня (паралельну P_1).

Для цього на рис. 9-30 “фото” $A_1 B_1 C_1$, не міняючи змісту зображення, змінює своє розташування до положення, коли його $\overline{h_1}$ розташується перпендикулярно осі x , на полі P_2 отримуємо пряму $\overline{\Delta_2}$ – слід-проєкцію $\overline{B_2} \overline{A_2} \overline{C_2}$ в яку проєктується трикутник на поле P_2 . Далі виконується друге переміщення, коли “фото” $\overline{B_2} \overline{A_2} \overline{C_2}$, розташовується паралельно осі x , на полі P_1 отримуємо $\overline{A_1} \overline{B_1} \overline{C_1}$, що дорівнює натуральній величині трикутника ABC .

Алгоритм перетворення виду № 3 + № 4

(коли $\Delta ABC \supset \text{пл.з.п.} \rightarrow \overline{A} \overline{B} \overline{C} \perp P_2$; $\overline{A} \overline{B} \overline{C} \rightarrow \overline{\overline{A}} \overline{\overline{B}} \overline{\overline{C}} \parallel P_1$):

1. $\bullet A \subset h \subset ABC \rightarrow \overline{h_1} \subset A_1 B_1 C_1$.
2. $A_1 B_1 C_1 \supset h_1 \rightarrow \overline{A_1} \overline{B_1} \overline{C_1} \supset \overline{h_1} \perp x$.

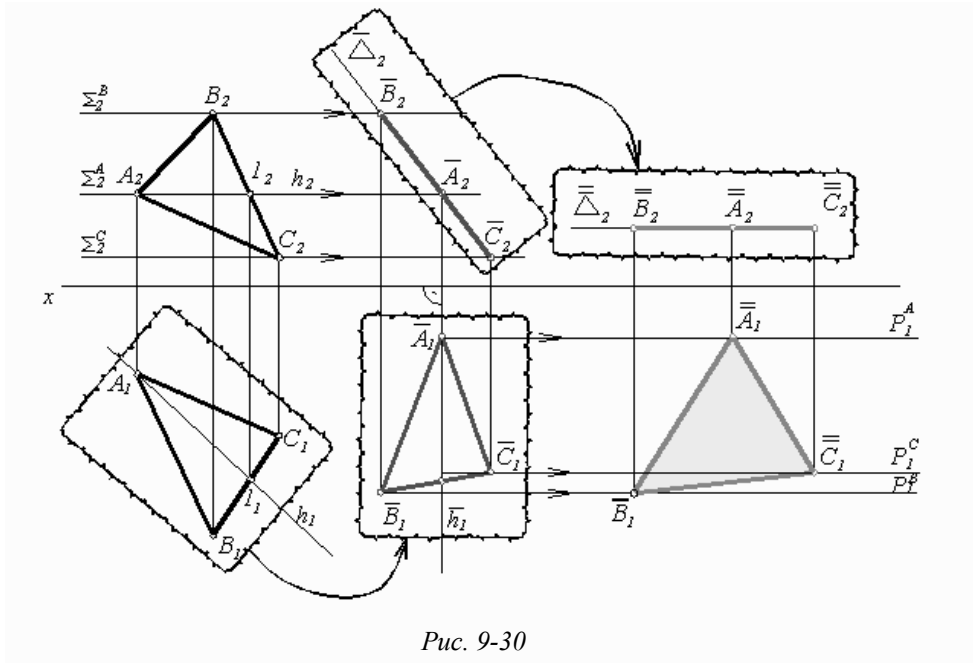


Рис. 9-30

3. $\bullet B_2 \subset \Sigma_2^B \parallel x$; $\bullet A_2 \subset \Sigma_2^A \parallel x$; $\bullet C_2 \subset \Sigma_2^C \parallel x$.
4. $\bullet \overline{B_1} \subset \text{в.л.з.} \cap \Sigma_2^B \Rightarrow \overline{B_2}$;
 $\bullet \overline{A_1} \subset \text{в.л.з.} \cap \Sigma_2^A \Rightarrow \overline{A_2}$;
 $\bullet \overline{C_1} \subset \text{в.л.з.} \cap \Sigma_2^C \Rightarrow \overline{C_2}$.
5. $\bullet \overline{B_2} \cup \bullet \overline{A_2} \cup \bullet \overline{C_2} \rightarrow \overline{B_2} \overline{A_2} \overline{C_2} \equiv \Delta_2$ - сл.пр.
6. $\overline{B_2} \overline{A_2} \overline{C_2} \equiv \Delta_2 \rightarrow \overline{B_2} \overline{A_2} \overline{C_2} \equiv \Delta_2 \parallel x$.
7. $\bullet \overline{A_1} \subset P_1^A \parallel x$; $\bullet \overline{B_1} \subset P_1^B \parallel x$; $\bullet \overline{C_1} \subset P_1^C \parallel x$.
8. $\bullet \overline{B_2} \subset \text{в.л.с.} \cap P_1^B \Rightarrow \bullet \overline{B_1}$;
 $\bullet \overline{A_2} \subset \text{в.л.с.} \cap P_1^A \Rightarrow \bullet \overline{A_1}$;
 $\bullet \overline{C_2} \subset \text{в.л.с.} \cap P_1^C \Rightarrow \bullet \overline{C_1}$.
9. $\bullet \overline{B_1} \cup \bullet \overline{A_1} \cup \bullet \overline{C_1} \cup \overline{B_1} \Rightarrow \overline{A_1} \overline{B_1} \overline{C_1} = \text{д.в.} \Delta ABC$.

Якщо необхідно перетворити трикутник ABC площини загального положення в площину фронтального рівня, то в трикутнику ABC проводиться фронталь f і „фото” фронтальної проекції переміщується так, щоб $\overline{f_2}$ роз-

ташувалась перпендикулярно до осі x , при цьому фронталь на поле Π_1 спроектується в точку, а весь трикутник – в слід-проекцію. Далі виконується друге переміщення, в якому „фото” сліду-проекції, отриманої при розв’язку першого перетворення, переміщується до розташування паралельно осі x , а на полі Π_2 отримується $\underline{\underline{A_2}} \underline{\underline{B_2}} \underline{\underline{C_2}}$, який дорівнює натуральній величині трикутника ABC .

II-2. Приклади розв’язку задач з застосуванням методів перетворення проєкцій

Приклад II-2.1: Дано трикутник ABC , належний площині Δ і точка D , яка не належить площині цього трикутника.

Необхідно визначити:

- кут α – кут нахилу площини Δ трикутника до площини проєкцій Π_1 ;
- кут φ – кут при вершині B трикутника;
- відстань від точки D до площин трикутника.

Розв’язок задачі показано на рис. 9-31, який базується на виконанні перетворення виду № 3, методом заміни площин, площини Δ трикутника ABC , то кут між слідом-проекцією Δ_4 і віссю x_1 дорівнює $\angle \alpha$; відстань від заданої точки D (її проєкції D_4) до Δ_4 дорівнює відстані від точки D до площини Δ ; виконавши перетворення виду № 3 + № 4 методом заміни площин, отримаємо натуральну величину трикутника ABC , де кут при вершині B дорівнює шуканому куту φ .

Алгоритм розв’язок:

$$1. h \subset \Delta ABC \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet A_2 \subset h_2 \parallel Ox; \quad h_2 \cap B_2C_2 \Rightarrow l_2 \Rightarrow l_1 \subset B_1C_1; \\ \bullet A_1 \cup l_1 \Rightarrow h_1 \end{array} \right\}$$

$$2. x \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}; \Pi_4 \perp \Pi_1; \Pi_4 \perp h; \Pi_4 \cap \Pi_1 \Rightarrow x_1 \perp h_1 \rightarrow C_4A_4B_4 \equiv \Delta_4.$$

$$3. \Delta_4 \wedge x_1 = \angle \alpha!$$

$$4. \bullet D_4 \subset r_4 \perp \Delta_4 \rightarrow \bullet K_4; \text{ н.в. } DK = D_4K_4!$$

$$5. x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4} \rightarrow x_2 \frac{\Pi_4}{\Pi_5}; \Pi_5 \parallel \Delta; \Pi_5 \perp \Pi_4; \Pi_5 \cap \Pi_4 \Rightarrow x_2 \parallel \Delta_4 \rightarrow A_5B_5C_5! = \\ = \text{н.в. } \Delta ABC.$$

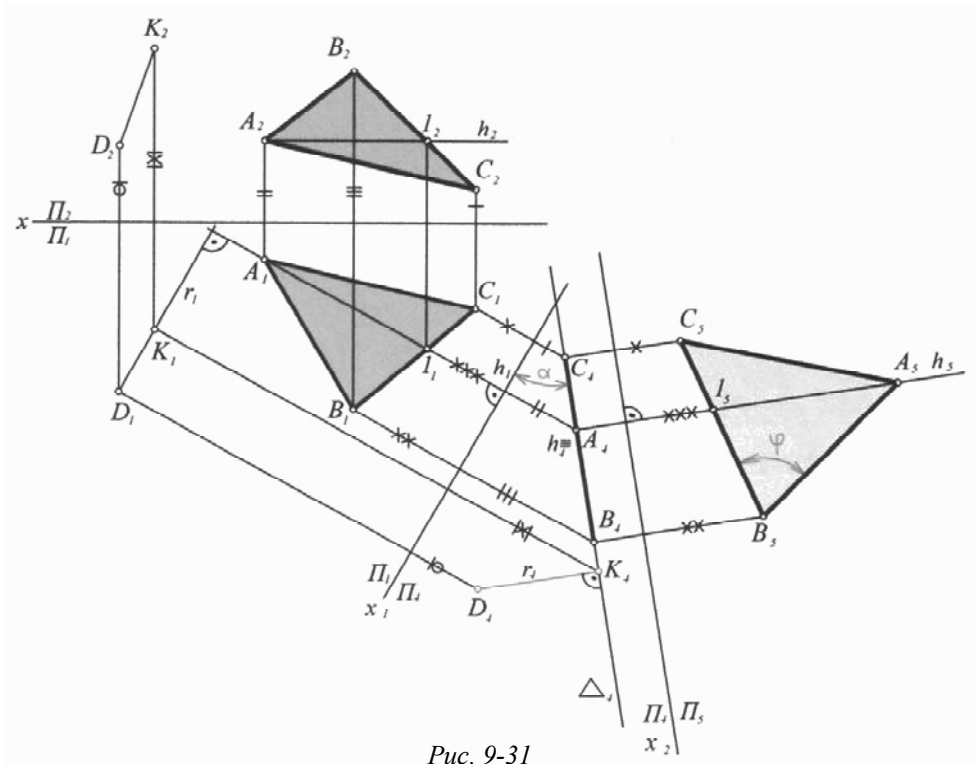


Рис. 9-31

Приклад II-2.2: Дано пряму a , що перетинається з прямою b .

Необхідно визначити натуральну величину кута φ між прямою a і b .

Рішення базується на виконанні перетворення виду № 3 + № 4 методом обертання навколо лінії рівня, коли кут між двома прямими проектується на площину проєкцій в натуральну величину, а це можливо в тому випадку, коли дві перетинаючі прямі розташовані паралельно цій площині проєкцій.

На рис. 9-32 показано розв'язок задачі. Для цього беремо до уваги прямі, що перетинаються a і b утворюють площину загального поло-

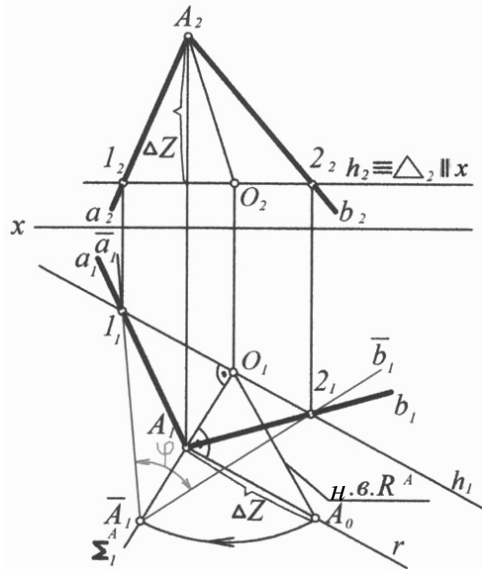


Рис. 9-32

ження, в цій площині проводимо довільну горизонталь h , навколо неї обертаємо a і b до суміщення їх з горизонтальною площиною Δ , проведеною через горизонталь h і виконується це перетворення за алгоритмом:

$$a \cap b \Rightarrow P (a \cap b); a \cap b \Rightarrow \bullet A; h \subset \Delta \parallel \Pi_1; a \cap \Delta \Rightarrow \cdot 1; b \cap \Delta \Rightarrow \cdot 2; \cdot 1 \cup \cdot 2 \Rightarrow h \subset P;$$

$$P \cup h \rightarrow P \equiv \Delta \rightarrow a \wedge b = \angle \varphi.$$

$$\bullet A \cup h \Rightarrow \overline{A}$$

$$1. \bullet A_1 \subset \Sigma_1^A \perp h_1.$$

$$2. \Sigma_1^A \cap h_1 \Rightarrow \bullet O_1 \Rightarrow O_2 \supset h_2.$$

$$3. \bullet O \cup \bullet A \Rightarrow R^A.$$

$$4. \text{н.в. } R^A \left\{ \begin{array}{l} \bullet A_1 \supset r \perp A_1 O_1 \\ \Delta Z = Z^A - Z^B \\ \bullet A_1 \subset \Delta Z \subset r \rightarrow A_o \\ \bullet A_o \cup \bullet O_1 \Rightarrow \text{н.в. } R^A \end{array} \right\}$$

$$5. \bullet O_1 \subset \text{н.в. } R^A \subset \Sigma_1^A \rightarrow \bullet \overline{A}_1 !$$

$$6. \bullet \overline{A}_1 \cup \bullet 1_1 \Rightarrow \overline{a}_1; \bullet \overline{A}_1 \cup \bullet 2_1 \Rightarrow \overline{b}_1;$$

$$\overline{a}_1 \wedge \overline{b}_1 = \angle \varphi = a \wedge b.$$

Приклад II-2.3: Дано площину $\Sigma (a \parallel b)$ і пряму l , яка перетинається з Σ . Необхідно визначити кут φ між прямою l і площиною Σ .

Розв'язок: на наочному зображенні, рис. 9-33, показано площину $\Sigma (a \parallel b)$ з якою перетинається пряма l . На прямій l візьмемо довільну точку A , з якої проведемо перпендикуляр r до площини Σ . Якщо побудувати точку зустрічі l з Σ , отримаємо точку K і якщо побудувати точку зустрічі r з Σ , отримаємо точку L . З'єднавши точки KL A , – отримаємо прямокутний трикутник AKL , в якому кут при вершині L дорівнює 90° , шуканий кут φ – між прямою l та її ортогональною проекцією KL (кут при вершині $K = \angle \varphi$), а кут при вершині A дорівнює куту ψ .

Враховуючи, що сума кутів φ і ψ дорівнює 90° , то для найпростішого розв'язання задачі, визначаємо кут ψ , а $\angle \varphi = 90^\circ - \angle \psi$, (що виконується перетворенням виду № 3 + № 4).

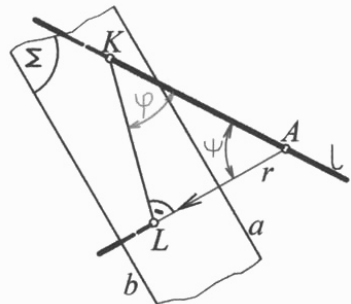


Рис. 9-33

Алгоритм розв'язання:

1. $\bullet A \subset l; \bullet A \subset r \perp \Sigma$.
2. $l \cap r \Rightarrow P; l \cap r \Rightarrow \bullet A$.
3. $\bullet A \cup h \subset \bar{P} \parallel \Pi_1 \Rightarrow \bar{A} \leftarrow \bar{a} \wedge \bar{b} = \angle \psi$
(виконання цього розв'язку наведено в попередній задачі 2).
4. $90^\circ - \angle \psi = \angle \varphi!$

Приклад П-2.4: Дано дві площини, що перетинаються Δ і Σ .

Необхідно визначити лінійний кут двогранного кута між заданими площинами.

Розв'язок: на рис. 9-34 показано схему розв'язку, де площини Δ і Σ , перетинаючись своїми слідами-проекціями, утворюють шуканий кут φ , для його визначення виконуємо наступну побудову: в просторі між площинами Δ і Σ довільно вибираємо точку A , з цієї точки A проводимо перпендикуляр r до площини Σ і перпендикуляр r' до площини Δ .

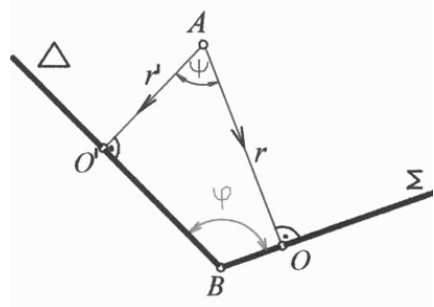


Рис. 9-34

$$(\bullet A \subset r \perp \Sigma; r \cap \Sigma \Rightarrow \bullet O; \bullet A \subset r' \perp \Delta; r' \cap \Delta \Rightarrow \bullet O')$$

Отримано чотирикутник $AOBO'$ – сума кутів якого дорівнює 360° , враховуючи, що кути при вершинах O і O' прямі, то сума кутів шуканого φ при вершині B і допоміжного ψ при вершині A , дорівнює 180° , то для найпростішого розв'язку задачі, визначаємо додатковий кут ψ , виконуючи перетворення виду № 3 + № 4 методом обертання навколо лінії рівня h , а шуканий кут $\varphi = 180^\circ - \angle \psi$.

Алгоритм розв'язання:

1. $\bullet A \subset r \perp \Sigma; \bullet A \subset r' \perp \Delta$.
2. $r \cap r' \Rightarrow P (r \cap r'); h \subset P$.
3. $\bullet A \cup h \Rightarrow \bar{A} \Rightarrow \angle \psi$ (виконання цього розв'язку наведено в попередній задачі 2).
4. $180^\circ - \angle \psi = \angle \varphi!$

Приклад П-2.5: Дано площину загального положення $\Delta (f^\circ \cap h^\circ)$, якій належить п'ятикутник $ABCDE$, отриманий при перерізі прямої правильної

чотиригранної піраміди площиною Δ . Необхідно побудувати натуральну величину п'ятикутника ABCDE.

Розв'язок задачі наведено на рис. 9-35, який базується на виконанні перетворення в площину рівня методом обертання навкруги лінії нульового рівня до суміщення з Π_1 , або методом заміни площин проєкцій.

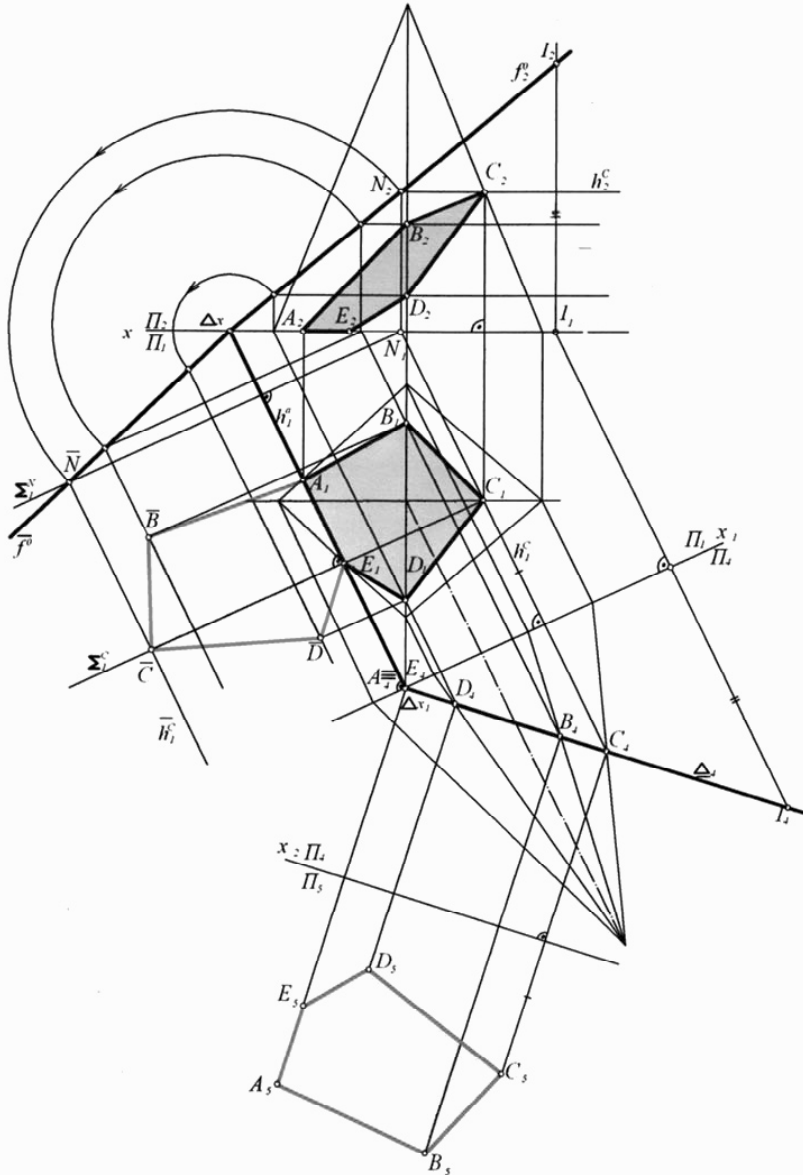


Рис. 9-35

Виконання перетворення методом обертання: h – приймається за вісь обертання.

Для суміщення f з Π_1 повернемо точку N , яка належить f , навколо h і отримаємо \bar{N} , з точки Δ_x через \bar{N} пройде \bar{f}^o (суміщене положення f з Π_1 при повороті навколо h). Прослідкуємо за суміщенням заданого п'ятикутника з Π_1 по суміщенню точки C .

Через точку C проведена h^C , яка, перетинаючись з f , утворює точку N . При цьому на епюрі за алгоритмом:

- $C_2 \subset h_2^C \parallel x; h_2^C \cap f_2^o \Rightarrow N_2 \Rightarrow N_1 \subset h_1^C \parallel h_1^o; C_1 \subset h_1^C;$
- $N \cup h_1^o \Rightarrow \bar{N} \subset \bar{h}^C;$
- $C \cup h_1^o \Rightarrow \bar{C} \subset \bar{h}^C \{C_1 \subset \Sigma_1^C \perp h_1^o; \Sigma_1^C \cap \bar{h}^C \Rightarrow \bar{C}\}$

Аналогічно виконується суміщення точок B і D до \bar{B} і \bar{D} , точки A і E , при суміщенні площини Δ , залишаються нерухомими на h_1^o ($h_1^o \supset \bullet A_1 \equiv \bar{A}; h_1^o \supset \bullet E_1 \equiv \bar{E}$).

З'єднавши $\bullet \bar{A} \cup \bullet \bar{B} \cup \bullet \bar{C} \cup \bullet \bar{D} \cup \bullet \bar{E} \Rightarrow \bar{A} \bar{B} \bar{C} \bar{D} \bar{E}! =$ н.в. $ABCDE$.

Виконання перетворення методом заміни площин:

перетворення виконується шляхом введення площини Π_4 , яка перпендикулярна площині Δ і далі вводиться нова площина Π_5 , яка паралельна площині Δ і на полі Π_5 отримується $A_5B_5C_5D_5E_5$, яка дорівнює дійсній величині п'ятикутника $ABCDE$.

На епюрі рис.9-35 виконано:

1. $x \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x \frac{\Pi_1}{\Pi_4}; \Pi_2 \rightarrow \Pi_4 \perp \Delta; \Pi_4 \perp \Pi_1; \Pi_4 \cap \Pi_1 \Rightarrow x_1 \perp h_1^o \rightarrow \Delta_4 \equiv A_4E_4D_4B_4C_4.$
2. $x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4} \rightarrow x_2 \frac{\Pi_4}{\Pi_5}; \Pi_1 \rightarrow \Pi_5 \parallel \Delta; \Pi_5 \perp \Pi_4; \Pi_5 \cap \Pi_4 \Rightarrow x_2 \parallel \Delta_4 \rightarrow A_5B_5C_5D_5E_5! =$
 $=$ н.в. $ABCDE$.

Приклад П-2.6: Дано площину загального положення $\Delta(f \cap h)$, точку A на горизонталі і точку B на фронталі (рис. 9-36, а).

Необхідно побудувати пряму призму, основа якої – рівнобічний трикутник ABC належний площині $\Delta(f \cap h)$. Висота призми 30 мм.

Розв'язок наведено на рис. 9-36, б, який базується на виконанні перетворення виду № 3 + № 4 методом плоско-паралельного переміщення, при якому площина загального положення перетворюється в площину рівня.

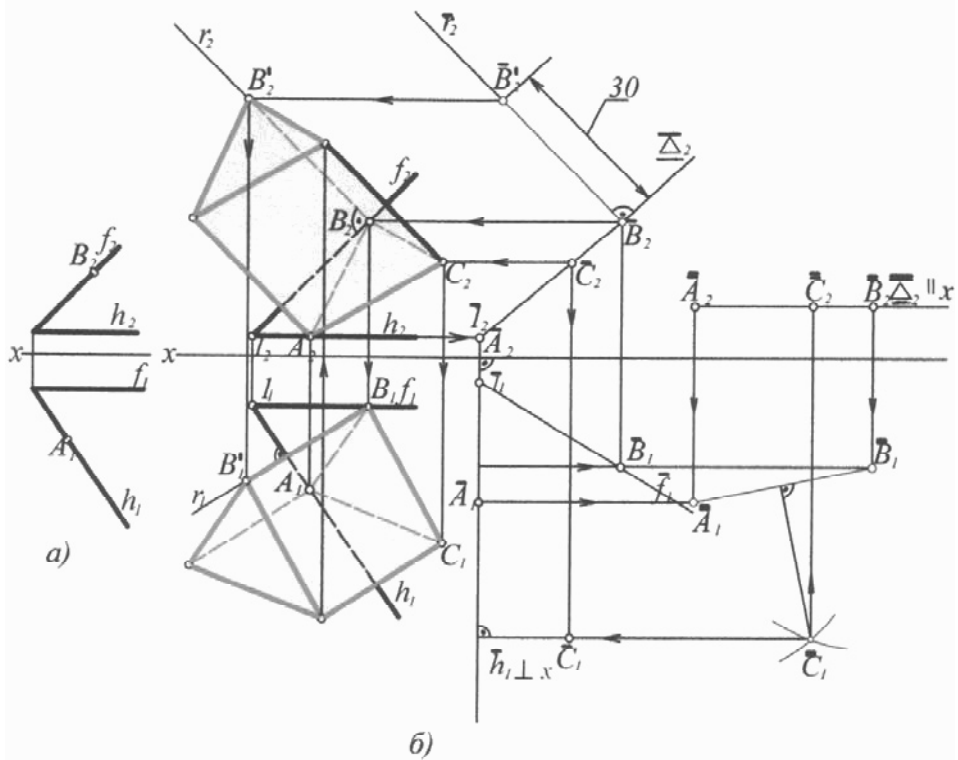


Рис. 9-36

Виконуючи перетворення виду № 3 “фото” горизонтальної проекції, задання змінює своє розташування до положення, коли $\overline{h_1}$ буде перпендикулярно осі x , при такому положенні на Π_1 , на Π_2 площина Δ буде відтворена слідом-проекцією $\overline{\Delta_2}$. Отримавши переміщене положення точки $\overline{B_2}$, з неї проведемо перпендикуляр до $\overline{\Delta_2}$, який буде перпендикуляром до площини Δ , на цьому перпендикулярі відкладається висота призми, яка дорівнює розміру 30 мм., отримаємо $\overline{B_2}$ прийняту за вершину другої основи призми.

Виконуючи перетворення виду № 4, слід-проекцію $\overline{\Delta_2}$ розташовуємо паралельно осі x , отримуємо $\overline{\Delta_2}$, при цьому відносно поля Π_1 площина Δ –

площина рівня і $\overline{\overline{A_1 B_1}}$ сторона рівнобічного трикутника ABC – основи призми. По натуральній величині $\overline{\overline{A_1 B_1}}$ будується один (з двох) варіант розташування вершин $\overline{\overline{C_1}}$ і переносимо її розташування в перше перетворення та на вихідне положення площини Δ . Такою побудовою визначено C_2 і C_1 третьої вершини трикутника ABC основи призми, яка належить площині Δ .

З B_2, A_2 і C_2 на полі Π_2 проєкції бічних ребер розташуються перпендикулярно до f_2 , а на полі Π_1 проєкції бічних ребер розташуються на перпендикулярах до h_1 , проведених з A_1, B_1, C_1 .

З першого перетворення, де визначено $\overline{B_2}$, переносимо $\overline{B_2}$ на вихідне зображення, де B_2' розташується на перпендикулярі до f_2 , проведеному з B_2 . По отриманій проєкції B_2' будемо її горизонтальну проєкцію B_1' яка розташувалась на перпендикулярі до h_1 , проведеного з B_1 .

Побудувавши B_2' і B_1' , з цих проєкцій проводяться проєкції ребер верхньої основи, які пройдуть паралельно відповідним ребрам нижньої основи призми.

Алгоритм розв'язання:

1. $h_1 \cap f_1 \rightarrow \overline{h_1} \perp x \rightarrow \overline{h_1} \cap \overline{f_1} \Rightarrow \overline{\Delta_2} \equiv \overline{A_2 B_2}$; $\overline{A_1} \subset \overline{h_1}$; $\overline{B_1} \subset \overline{f_1}$;
 $\overline{B_2} \subset r \perp \overline{\Delta_2}$; $\overline{B_2 B_2'} \subset r$; $\overline{B_2 B_2'} = 30$ мм.
2. $\overline{\Delta_2} \rightarrow \overline{\Delta_2} \parallel x$; $\overline{A_2 B_2} \subset \overline{\Delta_2} \rightarrow \overline{A_1 B_1} = \text{н.в. } AB. \rightarrow \Delta \parallel \Pi_1$
3. по $\overline{A_1 B_1}$ будується $\overline{C_1} \rightarrow \overline{C_2} \rightarrow \overline{C_1} \rightarrow C_1 \rightarrow C_2$
4. • $B_2 \subset r_2 \perp f_2$; $\overline{B_2'} \rightarrow B_2' \subset r_2 \rightarrow B_1' \subset r_1 \supset B_1$
5. • $B_2' \subset$ верхній основі $\parallel B_2 C_2 A_2$ на полі Π_2 ;
 • $B_1' \subset$ верхній основі $\parallel B_1 C_1 A_1$ на полі Π_1 .

9.7. Задачі для розв'язку

9.7.1. Задачі для позааудиторного розв'язку

Задача 9-1: Визначити натуральну величину:

- відрізка AB прямої загального положення;
- кут нахилу відрізка AB до площини проєкцій Π_1 ;
- відстань від точки C до відрізка AB .

Розв'язок виконати (рис. 9-3-1):

- а) – методом заміни площин проєкцій;
- б) – методом обертання навколо прямої, перпендикулярної до площини проєкцій;
- в) – методом плоско-паралельного переміщення.

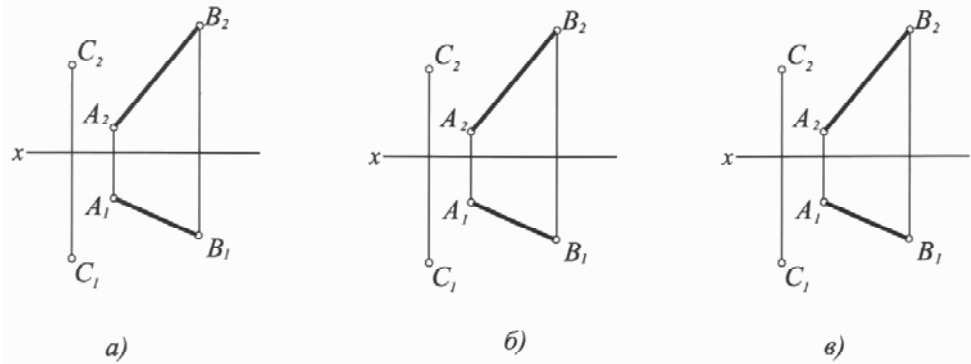


Рис. 9-3-1

Задача 9-2: Визначити натуральну величину:

- трикутника ABC площини загального положення;
- кут нахилу площини трикутника ABC до площини проєкцій Π_1 ;
- відстань від точки D до площини трикутника ABC ;

Розв'язок виконати (рис. 9-3-2):

- а) – методом заміни площин проєкцій;
- б) – методом обертання навколо прямої, перпендикулярної до площини проєкцій;
- в) – методом плоско-паралельного переміщення.

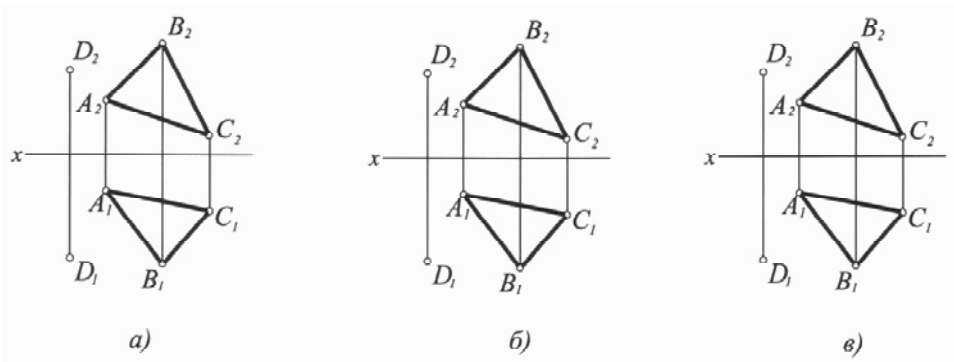


Рис. 9-3-2

9.2. Задачі для аудиторного розв'язку

Задача 9-3: Побудувати горизонтальну проекцію точки K , за заданою фронтальною проекцією K_2 точки K , яка рівновіддалена від граней двогранного кута з ребром AB .

Розв'язок виконати (рис. 9-3-3):

- методом заміни площин проекцій;
- методом обертання;
- методом плоско-паралельного переміщення.

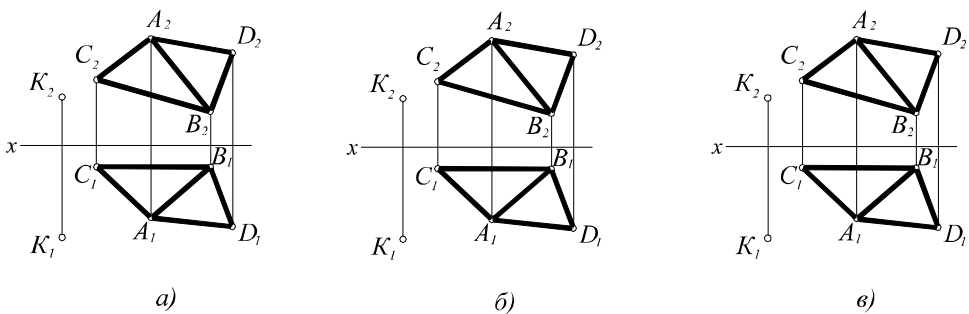


Рис. 9-3-3

Запитання для самоконтролю

- Які методи перетворення проекцій розглянуті в розділі II?
- Які спільні та які відмінні елементи механізмів обертання об'єкта навколо проєктуючої прямої та навколо лінії рівня?
- Що є ознакою досягнення горизонтального положення площини, яка задана горизонталлю і точкою, при обертанні навколо цієї горизонталі і де буде розташована фронтальна проекція точки після повороту?
- Що таке ведучий радіус в механізмі обертання об'єкта навколо осі?
- Як визначається натуральна величина відрізка прямої загального положення методом обертання, які елементи характерні для цього механізму?
- Як визначається відстань від точки простору до площини методом обертання?

7. Як визначити кут нахилу площини до площини проєкції методом обертання?
8. Як визначити натуральну величину трикутника площини загального положення методом обертання?
9. Як повернути об'єкт на заданий кут навколо прямої загального положення?
10. В чому полягає метод суміщення, його алгоритм суміщення та алгоритм „підйому”?
11. В яких площинах переміщуються точки об'єкта що обертаються навколо осі, перпендикулярній до площини, або паралельній площині, або без самої осі тільки її розташуванням?
12. Особливість плоско-паралельного методу переміщення?
13. Якими відомими методами можливо визначити відстань від точки до площини?
14. Як можливо визначити натуральну величину відрізка прямої загального положення?
15. Якими методами можливо визначити натуральну величину трикутника площини загального положення? Що між ними спільне? Чим вони відрізняються?

Епюр № 2

По закінченню вивчення розділу №2 „Методи перетворення ортогональних проєкцій”, виконується епюр №2.

В таблиці №2 додатків наведені завдання на епюр №2, де передбачено в кожному варіанті по три задачі.

Розв’язок задачі епюра №2 виконується із застосуванням методів перетворення, в тому числі: одна задача (переважно перша) розв’язується методом заміни площин проєкції, друга та третя задача розв’язується методом обертання навколо осі, та плоско паралельним переміщенням.

Кожна задача епюра №2 виконується на окремому аркуші формату А4 (297×210), креслярського паперу. Оформлення кожного аркуша, та компоновка розв’язку кожної задачі наведена на рис. Е-1-2, просторове зображення розв’язку задачі виконується по можливості. Епюр виконується кольоровими лініями, та кольоровим виділенням площин, як рекомендовано у вимогах до епюра №1.

Послідовність виконання епюра №2:

- оформити аркуш;
- з’ясувати умову задачі;
- вибрати метод перетворення проєкцій, за допомогою якого буде виконано розв’язок задачі, чітко визначити елементи апарату виконання вибраного методу стосовно умови задачі;
- написати узагальнений алгоритм розв’язку задачі;
- виконати епюр розв’язку задачі, погодивши ескіз розв’язку з викладачем.

Приклад розв’язку задачі №1 епюра №2, виконаного методом заміни площин проєкцій, наведено на рис. Е-2.7. Хід її проміжного розв’язку показано на рис. Е-2.1 ... Е-2.6, на кожному з них показано розв’язок відповідного пункту узагальненого алгоритму розв’язку, та написано докладний алгоритм виконання цього пункту. Розписано розв’язання в загальному вигляді, та послідовність дій цього розв’язання на відповідних полях площин проєкцій. (в алгоритмі застосовані допоміжні позначення, наприклад:

- $1_{л.з.}^{ша}$ – перша лінія зв’язку, $2_{л.з.}^{га}$ – друга лінія зв’язку і т. д.;
- $1_{в.л.з.}^{й}$ – першій вертикальній лінії зв’язку;
- в дужках наведено графічне позначення координати, наприклад:
- ($\$$) – це координата висота точки 2, яка дорівнює 2_{2x} ;

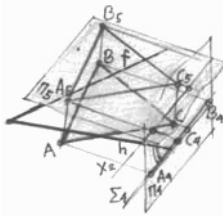
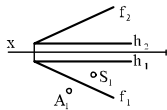
Умова задачі:

Просторовий розв'язок:

Алгоритм розв'язку:

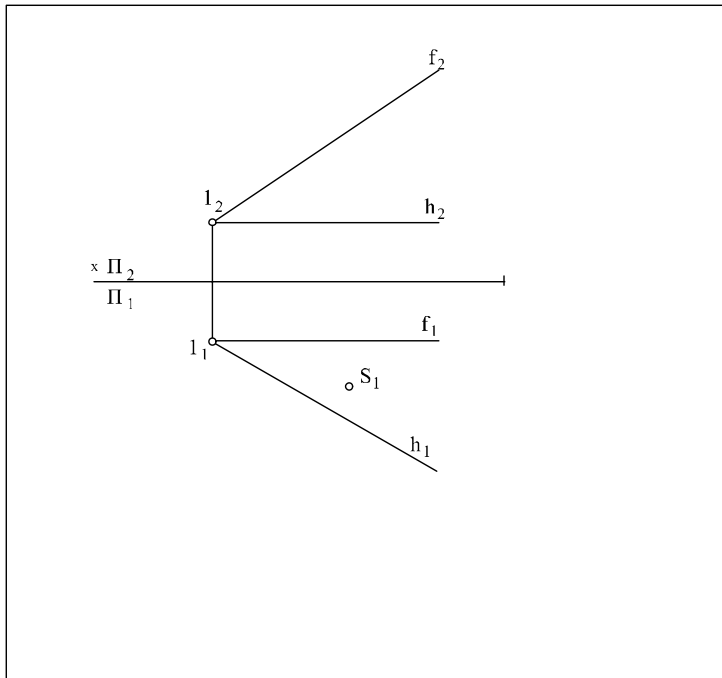
2.....

В площині $\Sigma(h \cap f)$ побудувати рівнобічний $\triangle ABC$ з вершиною A і центром в точці S



1. $\Sigma(h \cap f)_{з.п.} \rightarrow \Sigma(\Sigma_4)_{проект}$
2. $\Sigma(\Sigma_4)_{проект} \rightarrow \Sigma(A_5 B_5 C_5)_{рівня}$
3. $A_5 B_5 C_5 \rightarrow A_4 B_4 C_4 \subset \Sigma_4$
4. $A_4 B_4 C_4 \rightarrow A_1 B_1 C_1$
5. $A_1 B_1 C_1 \rightarrow A_2 B_2 C_2$

Ешор розв'язку



Розробив			
Перевірив			
Затвердив			

Ешор №2 Варіант №... Задача №...
Розділ II: „Метод перетворення проєкцій“.

Арк.

Рис. Е-2.1

1. $\Sigma(h \cap f)_{3.п.} \rightarrow \Sigma(\Sigma_4)$ проект

1.1. $x \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}; \Pi_4 \perp \Sigma \Rightarrow \Sigma(\Sigma_4)$

1.2. $h \subset \Sigma; \Pi_4 \perp \Pi_1; \Pi_4 \perp h; \Pi_4 \cap \Pi_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 \perp h; \Sigma \cap \Pi_4 \Rightarrow \Sigma_4$ (слід-проекція)

$x_1 \perp h_1; x_1 \cap h_1 \Rightarrow \cdot 1_{x_1} \supset 1_{л.з.}^{ua} \perp x_1$

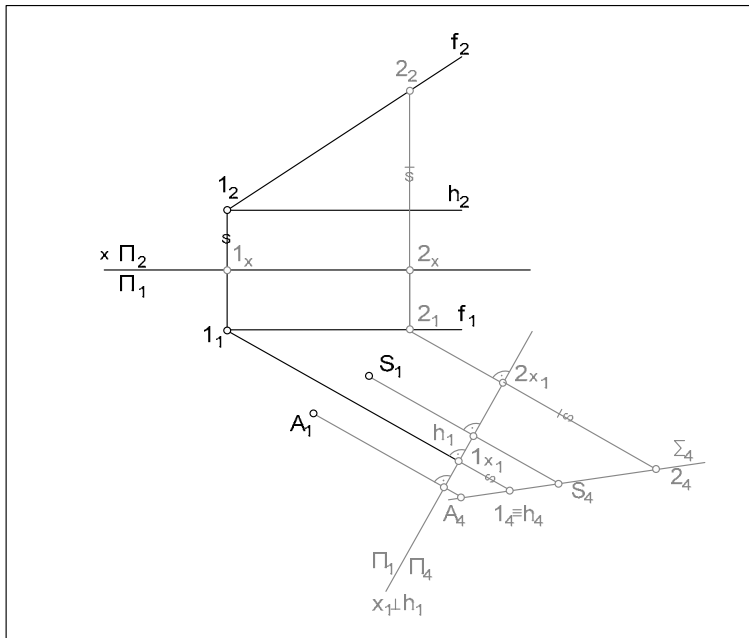
$f_2 \supset \cdot 2_2 \subset \text{в.з.л.} \cap f_1 \Rightarrow \cdot 2_1 \subset 2_{л.з.} \perp x_1; 2_{л.з.}^{za} \cap x_1 \Rightarrow \cdot 2_{x_1}$

$\cdot 2_{x_1} \subset 2_2 2_x (\S) \subset 2_{л.з.} \Rightarrow \cdot 2_4$

$\cdot 1_4 \cup 2_4 \Rightarrow \Sigma_4$

$\cdot A_1 \subset 3_{л.з.}^{ma} \perp x_1; 3_{л.з.} \cap \Sigma_4 \Rightarrow \cdot A_4$

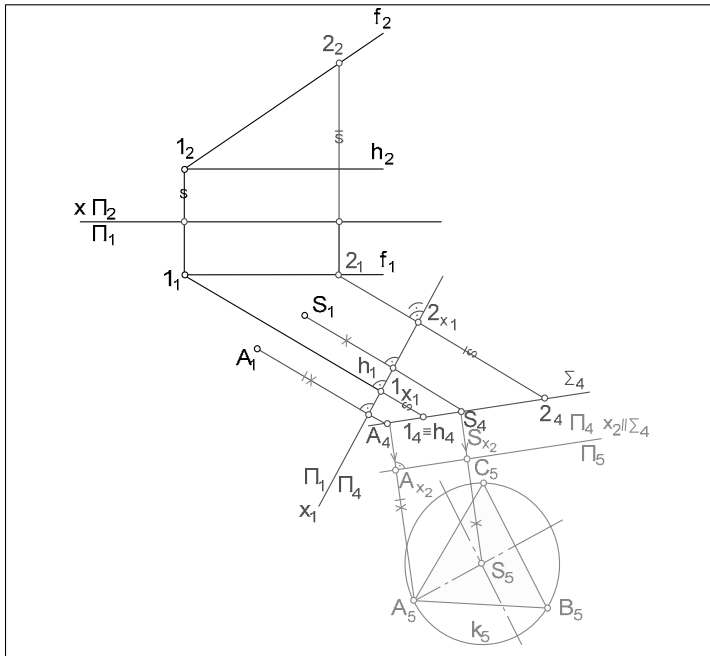
$\cdot S_1 \subset 4_{л.з.}^{ma} \perp x_1; 4_{л.з.} \cap \Sigma_4 \Rightarrow S_4$



				Епюр №2 Варіант №... Задача №...	Арк.
				Розділ II: „Метод перетворення проєкцій”	

Рис. Е-2.2

2. $\Sigma(\Sigma_4)_{\text{проект.}} \rightarrow \Sigma(A_5B_5C_5)_{\text{рівня}}$
 $x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4} \rightarrow x_2 \frac{\Pi_4}{\Pi_5}; \Pi_5 \parallel \Sigma \rightarrow \Sigma_{\text{пл. рівня}}$;
 $\Pi_5 \perp \Pi_4; \Pi_5 \cap \Pi_4 \Rightarrow x_2 \parallel \Sigma_4 \rightarrow \Sigma_{\text{пл. рівня}} \supset$
 $A_5B_5C_5 = \text{н.в.} \Delta ABC$
 $\cdot A_4 \subset 5_{\text{л.з.}}^{\text{ма}} \perp x_2; 5_{\text{л.з.}}^{\text{ма}} \quad x_2 \Rightarrow Ax_2 \supset A_1A_{x_1}(\bar{x}) \Rightarrow A_5$
 $\cdot S_4 \subset 6_{\text{л.з.}}^{\text{ма}} \perp x_2; 6_{\text{л.з.}}^{\text{ма}} \cap x_2 \Rightarrow S_{x_2} \subset S_1S_{x_1}(x) \Rightarrow \cdot S_5$
 $\cdot A_5 \cup \cdot S_5 \Rightarrow A_5B_5 = \text{н.в.} R_{\Delta ABC}^K$;
 $\cdot A_5 \cup S_5 \rightarrow \text{коло } k_5 \supset \Delta A_5B_5C_5 =$
 $\text{н.в. рівнобічно го } \Delta ABC$

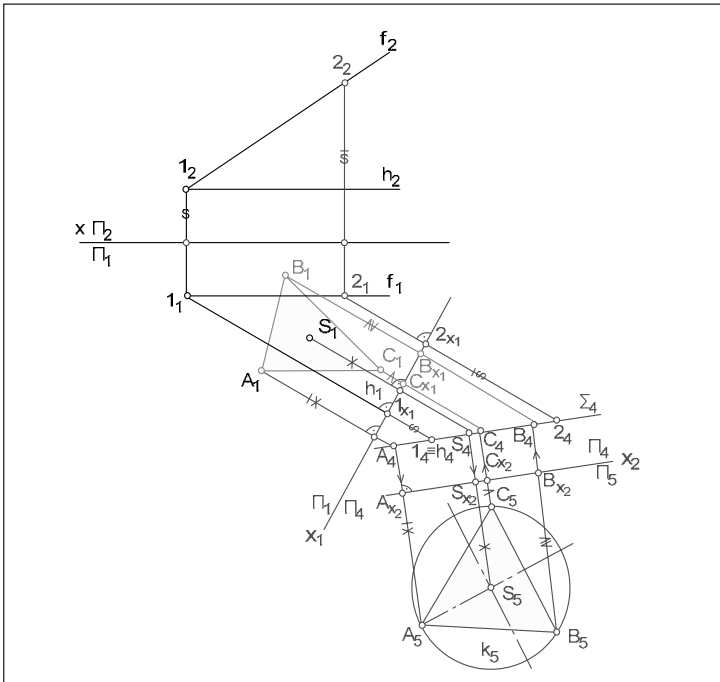


					Елюр №2 Варіант №... Задача №...	Арк.
					Розділ II: „Метод перетворення проєкцій”.	

Рис. Е-2.3

4. $A_4B_4C_4 \rightarrow A_1B_1C_1!$

- $B_4 \in 9_{л.з.} \perp x_1; 9_{л.з.} \cap x_1 \Rightarrow \cdot B_{x_1} \in B_5B_{x_2} (\sphericalangle) \subset 9_{л.з.} \Rightarrow B_1$
- $C_4 \in 10_{л.з.} \perp x_1; 10_{л.з.} \cap x_1 \Rightarrow \cdot C_{x_1} \in C_5C_{x_2} (>) \subset 11_{л.з.} \Rightarrow C_1$
- $A_1 \cup \cdot B_1 \cup \cdot C_1 \Rightarrow A_1B_1C_1!$



				Епюр №2 Варіант №... Задача №... Розділ II: „Метод перетворення проєкцій”.	Арк.
--	--	--	--	---	------

Рис. E-2.5

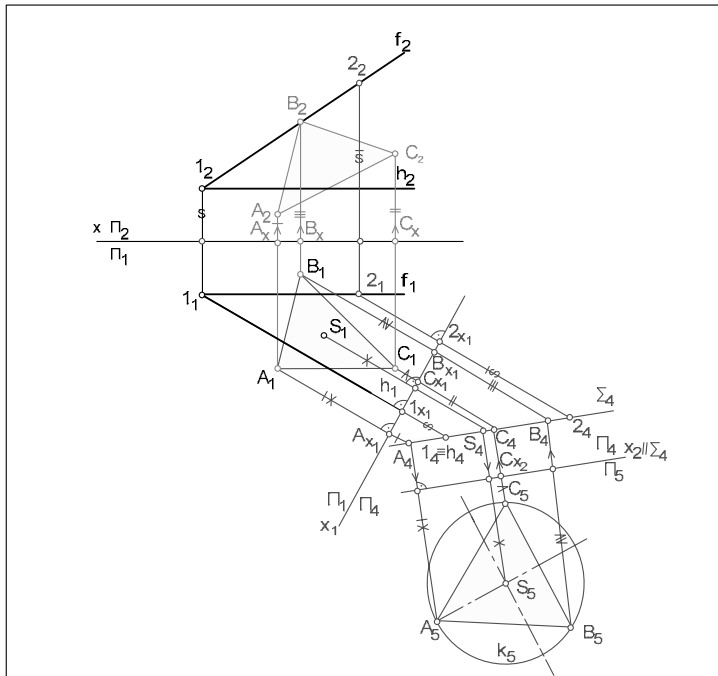
5. $A_1B_1C_1 \rightarrow A_2B_2C_2$

5.1 $\cdot A_1 \subset I_{\text{в.л.з.}}^{\text{ii}} \cap x \Rightarrow \cdot A_x \subset A_4 A_{x_1} (-) \subset I_{\text{в.л.з.}}^{\text{ii}} \Rightarrow \cdot A_2$

5.2 $\cdot B_1 \subset 2_{\text{в.л.з.}}^{\text{ii}} \cap x \Rightarrow \cdot B_x \subset B_4 B_{x_1} (=) \subset 2_{\text{в.л.з.}}^{\text{ii}} \Rightarrow \cdot B_2$

5.3 $\cdot C_1 \subset 3_{\text{в.л.з.}}^{\text{ii}} \cap x \Rightarrow \cdot C_x \subset C_4 C_{x_1} (=) \subset 3_{\text{в.л.з.}}^{\text{ii}} \Rightarrow \cdot C_2$

5.4 $\cdot A_2 \cup \cdot B_2 \cup \cdot C_2 \Rightarrow A_2B_2C_2!$



					Епюр №2 Варіант №... Задача №...	Арк.
					Розділ II: „Метод перетворення проєкцій”.	

Рис. Е-2.6

Розділ III

Поверхні

Тема 10 Криві лінії і поверхні

10.1. Криві лінії

Лінія – безперервна однопараметрична послідовна безліч точок.

$$\bullet A_1 \cup \bullet A_2 \cup \dots \cup A_n \Rightarrow a; A_i = f(R).$$

Всі лінії діляться на плоскі і просторові криві.

10.1.1. Плоскі криві лінії

Всі точки плоскої кривої лінії розташовані в одній площині.

Точки кривої поділяють на звичайні, особливі та характерні, найбільш поширені з яких зображені на рис. 10-1.

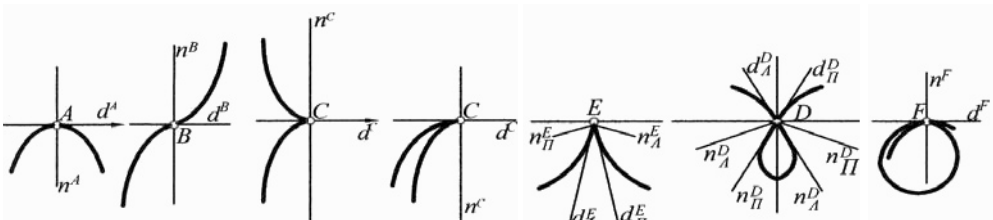


Рис. 10-1

Точка А – звичайна точка, характеризує плавність кривої, дотичні до такої кривої в різних точках не змінюють напрямку свого повороту.

Точка В – точка перегину, в цій точці дотична змінює напрямку свого повороту.

Точка С – точка загострення, або точка повернення першого роду, в такій точці гілки кривої розташовані по різні боки від спільної дотичної d^c , з одного боку від нормалі n^c .

Точка С¹ – точка “клюв”, або точка повернення другого роду, розташована з одного боку від спільної дотичної d^c і з одного боку від спільної нормалі n^c .

Точка D – вузлова точка, в якій крива перетинає сама себе і така точка буває подвійною, потрійною точкою.

Точка E – кутова точка, в цій точці напрямок кривої і дотичної до неї змінюється стрибком і має дві дотичні d_n^e і d_n^e і дві нормалі.

Точка F – точка самодотику.

Серед груп плоских кривих виділено алгебричні та трансцендентні криві:

– *Алгебричні криві лінії* – вони визначаються алгебричними рівняннями, це закономірні лінії, оскільки підлеглі математичному закону.

– *Трансцендентні криві лінії*.

Якщо крива визначена неалгебричним рівнянням, то називається трансцендентною.

Прикладом таких ліній є – циклоїда, спіральні криві, евольвента кола.

10.1.2. Проекції плоских кривих

Найбільш поширеним представником кривих плоских ліній є коло.

Вид проекції кола залежить від того, в якій площині це коло розташоване відносно площин проекцій.

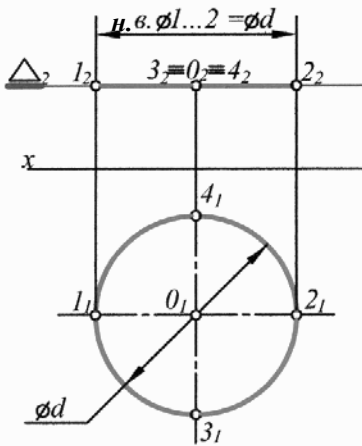


Рис. 10-2

– **Якщо коло розташоване в площині рівня (рис. 10-2)**, то воно проектується згідно з властивостями площини рівня: на ту площину проєкцій, відносно якої площина паралельна – коло проектується в натуральну величину, а на іншу площину проєкцій, відносно якої площина перпендикулярна – коло проектується у вигляді відрізка прямої, який дорівнює діаметру заданого кола.

Покажемо це на прикладі, коли коло, діаметр якого дорівнює d , розташоване в горизонтальній площині Δ . При цьому, розглядаючи два спряжені діаметри $\emptyset 1...2$ і $\emptyset 3...4$, відмітимо, що $\emptyset 3...4$ – є фронтально проєктуюча пряма і на поле $\Pi_2 \emptyset 3...4$ проєктуються в точку, а на поле Π_1 – в натуральну

Побудова еліпса за отриманими його великій осі $3_1 \dots 4_1$ та малій осі $1_1 \dots 2_1$ виконується, як показано на рис. 10.3, б. Точки 3, 4, 1 і 2 є характерними точками еліпса. Проміжна точка еліпса будується за допомогою центральної лінії, проведеної з центра двох концентричних кіл (діаметр великого кола = $3 \dots 4$, а малого = $1 \dots 2$). Довільна центрова лінія перетинається з великим колом в точці B і з точки B проводимо допоміжну пряму b паралельно малій осі $1 \dots 2$. Одночасна центрова лінія перетинається з малим колом в точці A і з точки A проводимо допоміжну пряму a паралельно осі $3 \dots 4$. Точка перетину прямої a ($a \parallel 3 \dots 4$) з прямою b приймається за проміжну точку еліпса (на рис. 10.3, б це точка 5).

Таких центрових ліній проводимо стільки, скільки необхідно мати проміжних точок, від їх кількості залежить точність побудови еліпса. Отримані характерні точки і побудовані проміжні в одній чверті кіл з'єднуємо тонкою плавною лінією “від руки” і наводимо “під лекало”, підбравши його кривизну і надалі наводимо тільки гілки еліпсу під ту ж саму частину лекала.

– **Якщо коло розташоване в площині загального положення (рис. 10-4)**, то коло проектується на всі площини проєкцій у вигляді еліпса. Кожен еліпс будується окремо, так як осі еліпсів на різних площинах проєкцій є проєкції різних діаметрів кола.

Напрямок великої осі еліпса на Π_1 зливається з напрямком h_1 , а на Π_2 – з напрямком f_2 горизонталі h і фронталі f площини кола. Велика вісь еліпса за розміром дорівнює діаметру заданого кола, а розмір малої осі залежить від кута нахилу площини кола до даної площини проєкцій і є взагалі різною для кожної з проєкцій. Розмір малої осі зручно визначити заміною площин проєкцій, перетворюючи площину кола в проєктуючу, застосувавши метод заміни площин проєкцій, двічі – перший раз виконується перетворення площин загального положення по системі $x \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_2 \frac{\Pi_1}{\Pi_5}$, що дасть можливість побудувати проєкцію на полі Π_1 малої осі еліпсу яка дорівнює $7_1 \dots 8_1$ (проєкції діаметру $7 \dots 8$ спряженого з діаметром $5 \dots 6 \equiv h$).

Отримана проєкція на полі Π_1 буде горизонтальною проєкцією кола в системі полів $x \frac{\Pi_2}{\Pi_1}$. Другий раз виконується перетворення заданої площини загального положення в системі $x \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \rightarrow x_1 \frac{\Pi_2}{\Pi_4}$, що дасть можливість побудувати проєкцію на полі Π_2 малої осі еліпсу яка дорівнює $3_2 \dots 4_2$ (проєкції ді-

метру $3...4$ спряженого з діаметром $1...2 \equiv f$. Отримана проекція на полі Π_2 буде фронтальною проекцією кола в системі полів $x \frac{\Pi_2}{\Pi_1}$.

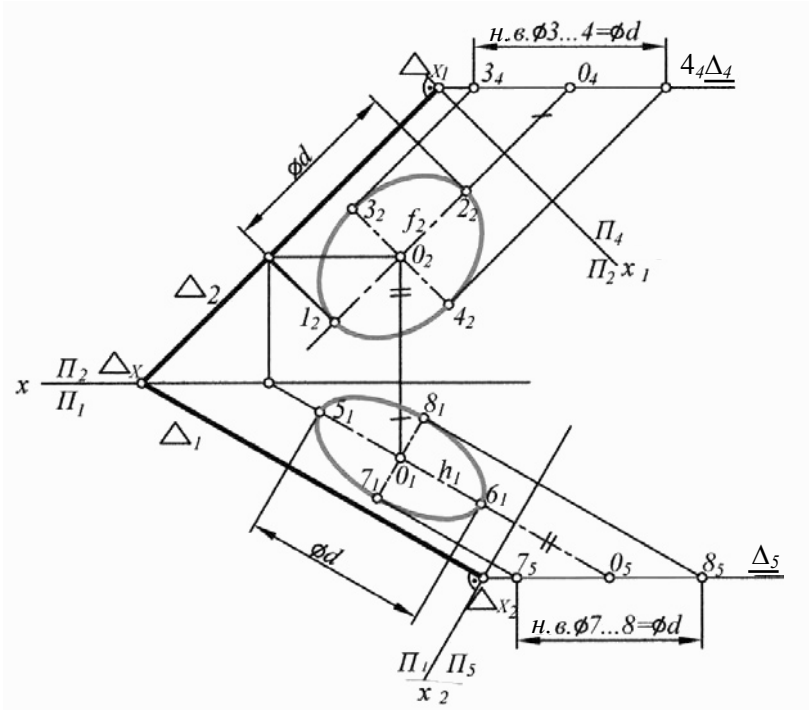


Рис. 10-4

10.1.3. Властивості кривих ліній та їх проєкцій

Якщо крива a має свої проєкції a_1 та a_2 (рис. 10.5), то зберігається зв'язок параметрів кривої a та її проєкцій a_1 і a_2 :

- дотичні до кривої проєктуються в дотичні до її проєкцій;
- кількість вузлових точок кривої дорівнює кількості вузлових точок її проєкцій;
- невласним точкам кривої відповідають невласні точки її проєкцій;
- порядок кривої і порядок її проєкцій однаковий.

На рис. 10.5 точка перетину, в якій дотична d^B є спільною (в своєму продовженні) для базового трикутника A_1B і базового трикутника B_2C в просторі і це ж зберігається на її фронтальній і горизонтальній проєкціях.

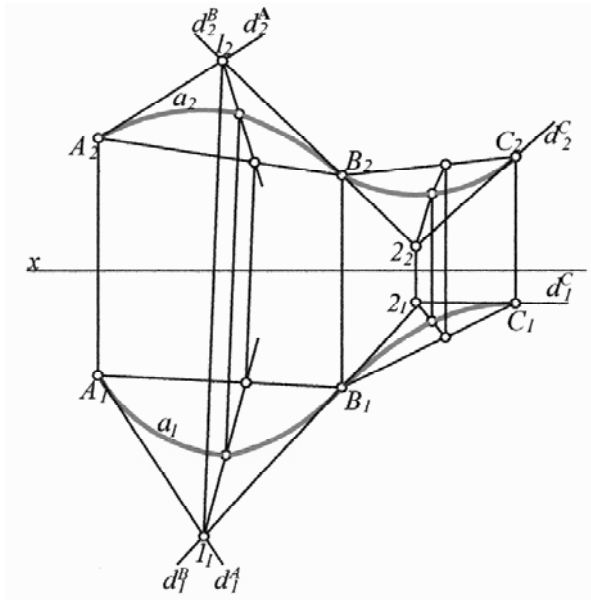


Рис. 10-5

10.2. Поверхні

При утворенні різних форм деталі, формуванні просторових геометричних фігур, – поверхні найважливіші з існуючих геометричних образів. Із всіх існуючих методів отримання поверхонь, нарисна геометрія розглядає графічне утворення поверхні як сукупність всіх послідовних положень лінії, яка переміщується в просторі по визначеному закону.

Поверхня – це безперервне положення заданої лінії, яка переміщується в просторі по визначеному закону, наприклад, ковзаючи по іншій нерухомій лінії, яка визначає закон переміщення. Вигляд утвореної поверхні залежить від вигляду рухомої лінії та закону її переміщення.

10.2.1. Багатогранники

Частина тривимірного простору, обмежену плоскими багатокутниками, називають багатогранником, в якого спільні сторони багатокутників називають ребрами, а точки перетину спільних ребер називають вершинами.

За формою багатокутників, їх взаємного розташування виділяються групи багатогранників, наприклад, багатогранник, усі грані якого (крім однієї) мають спільну вершину, називають пірамідою. За розташуванням бокових ребер, паралельних між собою, виділяється група багатогранників, які називають

призмами, а багатогранник, усі бічні грані якого є трикутники або трапеції, називають призматоїдом. Якщо багатогранники утворені однаковими плоскими багатокутниками, то утворюються опуклі правильні багатогранники (тіла Платона), навколо котрих можна описати сферу.

10.2.2. Криві поверхні та їх визначники

Геометричні образи, які визначають поверхню:

– **твірна** – лінія, яка рухається в просторі;

– **напрямна** – нерухома лінія (лінії) простору по якій ковзає твірна, вона визначає закон руху твірної в просторі;

– **кінематичний закон утворення поверхні** – це інформація, яка визначає поверхню як сукупність всіх положень твірної;

– **визначник поверхні** – це сукупність геометричних образів, яка має можливість реалізувати кінематичний закон утворення поверхні;

– **каркас поверхні** – це упорядочена безліч належних їй точок або ліній (твірних), “обтягуючи” каркас плівкою, отримуємо поверхню визначену каркасом.

Вид поверхні залежить від форми твірної і від закону її переміщення в просторі, який визначається напрямною.

Поверхня вважається заданою, якщо визначена її твірна в будь-якому положенні переміщення. Поверхня вважається заданою на епюрі, коли маємо такі образи, які дозволяють побудувати кожну точку поверхні.

Ознака належності точки до поверхні: *точка належить поверхні, якщо ця точка належить лінії (прямій, дузі кола чи іншій), яка лежить на цій поверхні.*

Для надання наочності зображення поверхні на епюрі, крім визначників поверхні будують ще й границю, яка визначає проєкцію поверхні (обрис поверхні). Із всіх можливих способів утворення поверхонь необхідно застосувати найбільш прості і зручні для відтворення на епюрі.

Поверхня визначається своїм визначником, загальний вид якого:

$$\Phi(\Gamma) [D]$$

де: Φ – поверхня; (Γ) – статика утворення поверхні (її геометричні образи, які утворюють поверхню); $[D]$ – динаміка утворення поверхні (тобто, як образи поверхні утворюють її).

Визначник поверхні включає конкретні дані для Γ і D .

Наприклад, поверхня циліндра обертання може бути утворена:

– обертанням прямої l навколо нерухомої осі i , коли $l \parallel i$:

$$\Phi^u(l \parallel i) [l \cup i]$$

– поступовим переміщенням кола m в напрямку осі i , коли $m \perp i$:

$$\Phi^u(m \perp i) [m \uparrow i].$$

В наступних темах 11, 12, 13 додатково розглядаються інші види поверхонь та їх закони утворення.

Класифікація найбільш відомих поверхонь, існуючих на цей час, наведена на рис. 10.6.

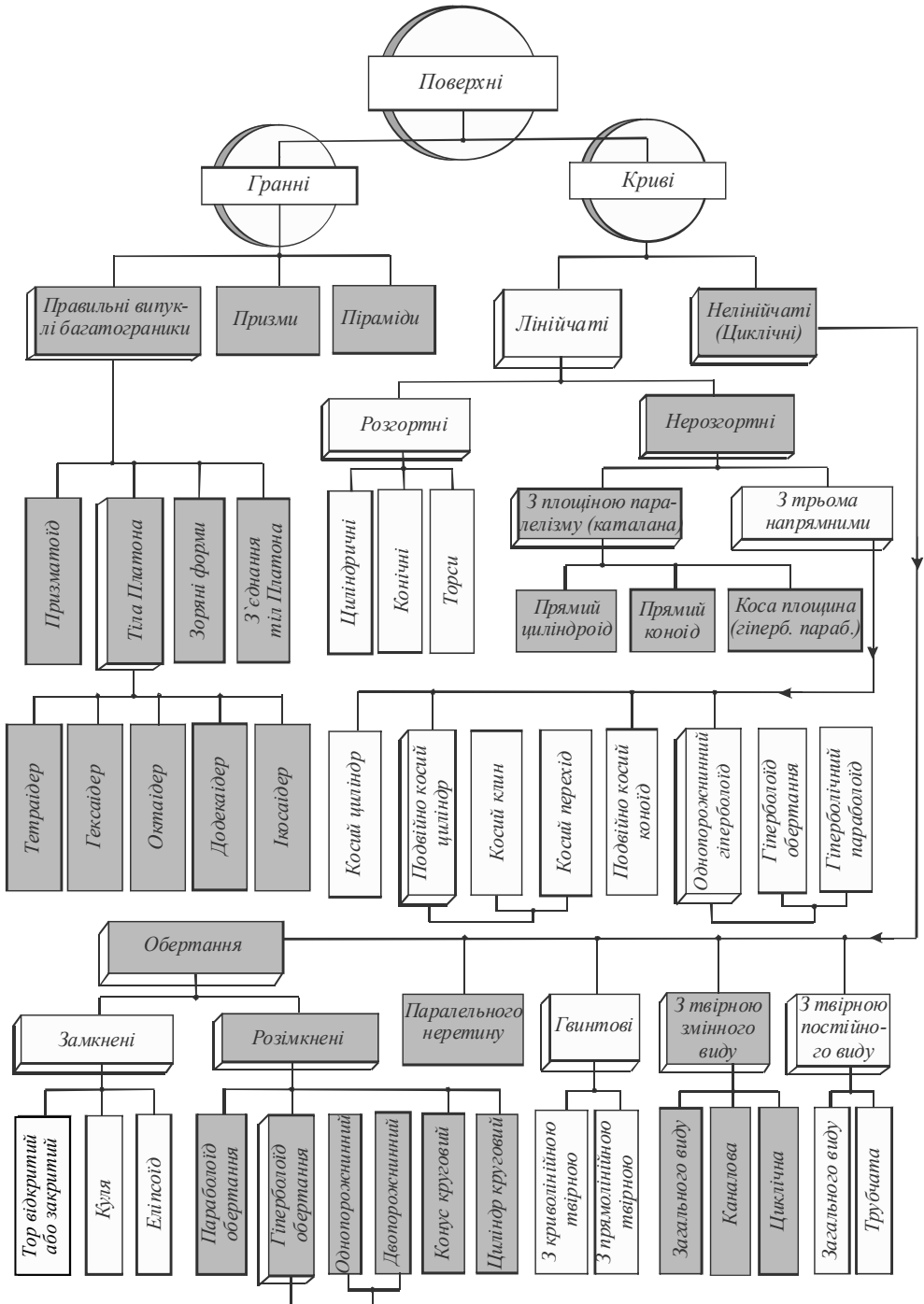


Рис. 10-6

10.2.3. Лінійчаті розгортні поверхні

Розгортні поверхні, – це ті, які можливо сумістити з площиною без розривів і складок.

Прикладом розгортних лінійчатих поверхонь є – циліндри, конуси, (їх твірні – паралельні або перетинаючі прями).

10.2.3.1. Циліндрична поверхня

Утворюється прямою лінією l , яка безперервно ковзає (рухається) по кривій напрямній m і паралельно заданому напрямку s .

Визначник циліндричної поверхні: $\Phi^u(l, m, s) [l \parallel s; l \cap m]$

Залежно від виду нормального перерізу (перпендикулярного до твірних), циліндрична поверхня може бути:

- кругова; – еліптична;
- параболічна; – гіперболічна;
- загального виду.

Відкрита чи замкнена поверхня загального виду залежить від напрямної (m -розімкнена чи замкнена крива).

АксонOMETричне зображення циліндричної поверхні загального виду наведено на рис. 10-7. На рис. 10-8 показано епюр циліндричної поверхні, заданої напрямною m і напрямком s .

Якщо задана фронтальна проекція A_2 точки A належної до циліндричної поверхні і необхідно побудувати її горизонтальну проекцію A_1 , то:

Для розв'язання такої задачі через A_2 проводимо фронтальну проекцію твірної l^A .

Тобто: $A_2 \in l_2^A \parallel s_2$;

$l_2^A \cap m_2 \Rightarrow I_2 \Rightarrow I_1 \in m_1$;

$I_1 \in l_1^A \parallel s_1$;

$A_2 \in l_2^A \Rightarrow A_1 \in l_1^A$.

Послідовність побудови A_1 на епюрі показана стрілками.

Циліндрична поверхня може бути задана її слідом на полі Π_1 і напрямком твірної. Крім сліду m поверхні на полі Π_1 задані її

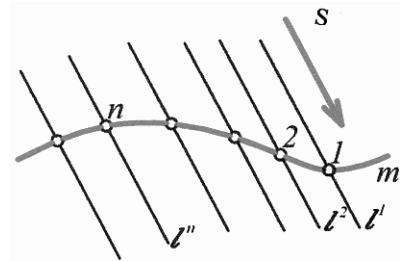


Рис. 10-7

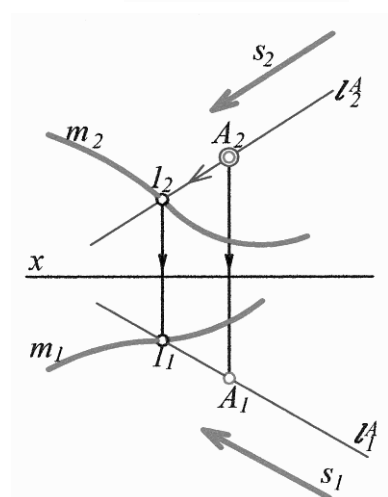


Рис. 10-8

обрис та вісь i (рис. 10-9) (можливе зображення поверхні і без верхньої основи). Таке завдання поверхні дозволяє визначати положення довільної точки, яка належить цій поверхні.

Якщо задано фронтальну проекцію A_2 точки A і необхідно побудувати горизонтальну проекцію A_1 , для цього згідно ознаки належності точки до поверхні, виконується: $\bullet A_2 \subset l_2^A \parallel i_2$;

$l_2^A \cap m_2 \Rightarrow I_2 \Rightarrow I_1 \subset m_1$ (якщо $\bullet A_2$ видима) :

$l_2^A \cap m_2 \Rightarrow I'_2 \Rightarrow I'_1 \subset m_1$ (якщо $\bullet A_2$ невидима): $\bullet I'_1 \subset l'_1 \parallel s_1$;

$\bullet I_1 \subset l_1^{IA} \parallel s_1$

З $\bullet A_2$ проводимо вертикальну лінію зв'язку, яка, перетинаючись з l_1^A , утворює A_1 (коли A_2 видима) і, перетинаючись з l_1^{IA} , утворює A_1^I (коли A_2 невидима) .

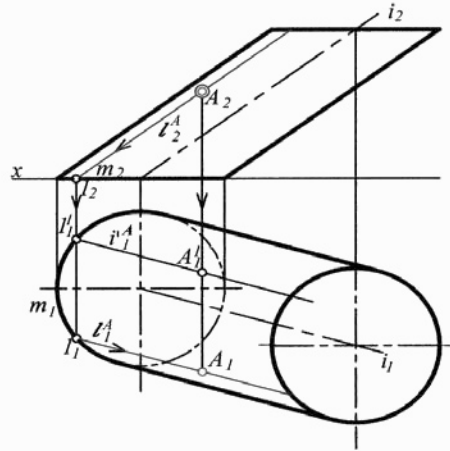


Рис. 10-9

10.2.3.2. Конічна поверхня

Утворюється прямою лінією l , яка безперервно ковзає по кривій напрямній m і проходить весь час через нерухому точку S .

Визначник конічної поверхні

$$\Phi^K(l, m, S)[\bullet S \subset l \cap m]$$

де: S – вершина; m – напрямна крива лінія; l – твірна – пряма лінія.

Аксонетричне зображення конічної поверхні наведено на рис. 10-10. Конічна поверхня задається горизонтальним слідом m_1 (який може бути розглянутий як напрямна) і вершиною S .

Якщо задано фронтальну проекцію A_2 точки A на епюрі (рис. 10-11) і необхідно побудувати горизонтальну проекцію A_1 точки A , яка належить конічній

поверхні, то опираючись на ознаку належності точки до поверхні, побудова проекції точки A виконується за допомогою твірної l^A , яка проходить з точки S через дану точку A , для цього на епюрі виконується:

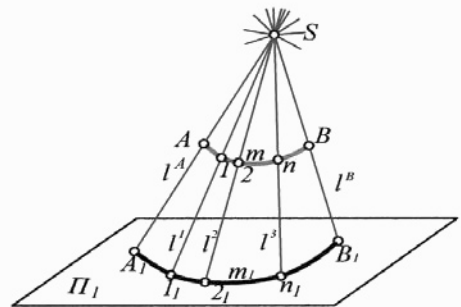


Рис. 10-10

10.12.3.3. Апроксимація кривих поверхонь

Один з варіантів утворення гранних поверхонь розглянемо на прикладах апроксимації розгортних кривих поверхонь вписаними або описаними гранними поверхнями.

Розглянувши утворення циліндричної поверхні, її визначник:

$\Phi^u(l, m, s) [l \parallel s; l \cap m]$, замінимо криву напрямну m на ламану лінію m' (вершини, якої лежать на m), та через кожну вершину ламаної лінії проведемо пряму l , паралельно до заданого напрямку s , – то буде утворено призматичну поверхню, кожна грань якої утворена двома прямими l , які проведені через дві сусідні вершини ламаної m' . Якщо утворено призматичну поверхню (з замкненою m') перерізати двома паралельними площинами, то буде утворено призму, пряму чи похилу, дивлячись як розташовані січні площини відносно бокових ребер l . Така призматична поверхня буде вписаною апроксимуючою відносно циліндричної поверхні (замкненої, якщо її напрямна m – замкнена). Якщо напрямну m замінити ламаною лінією m'' сторонами – відрізки якої дотичні до m , то буде утворена описана апроксимуюча гранна призматична поверхня для заданої циліндричної поверхні.

Розглянувши утворення конічної поверхні та її визначник: $\Phi^K(l, m, S) [S \subset l \cap m]$, замінивши її напрямну m на ламану m' , і точку S з'єднати з вершинами ламаної m' , то буде утворена пірамідальна поверхня, яка апроксимує конічну поверхню з напрямною m .

10.2.4. Лінійчаті нерозгортні поверхні (поверхні з площиною паралелізму)

Поверхні утворюються переміщенням прямої l по двом напрямним m і n , причому пряма l весь час паралельна деякій площині Σ , яка зветься площиною паралелізму.

Напрявні m і n можуть бути кривими, плоскими чи просторовими, або прямими лініями (розташованими в різних площинах).

Прикладом лінійчатих нерозгортних поверхонь є – циліндроїд, коноїд, коса площина (гіперболічний параболоїд).

Загальний визначник лінійчатих нерозгортних поверхонь:

$$\Phi^l(m, n, \Sigma, l) [l \parallel \Sigma; l \cap m \text{ і } n],$$

де: m і n – напрямні криві чи прямі лінії; Σ – площина паралелізму (переважно окремого положення); l – твірна лінія.

– Якщо напрямні m і n – криві лінії, утворюється поверхня – **циліндроїд**;

– якщо одна з напрямних (m чи n) – крива лінія, а інша напрямна – пряма лінія, – утворена поверхня – **коноїд**;

– якщо дві напрямні m і n – мимобіжні прямі лінії, – утворена поверхня – **коса площина**.

На рис. 10-13 наведено аксонометричне зображення механізму утворення поверхні коноїда. Взятиши в просторі одну напрямну m – криву лінію, та другу напрямну n – пряму лінію, ці напрямні m і n перетинаємо площиною Σ , отримуємо точки 1 та 2 відповідно при перетині m та n . З'єднавши точки 1 і 2 між собою, отримуємо твірну l .

Якщо виберемо наступну площину Σ^1 і розташуємо її паралельно площині Σ , то Σ^1 перетинає m і n в точках 3 і 4, з'єднавши ці точки між собою отримуємо наступну твірну l^1 . Повторимо аналогічну побудову за допомогою площини $\Sigma^{II} \parallel \Sigma$ отримуємо наступну твірну. Сукупність отриманих твірних утворюють поверхню коноїда.

Якщо напрямна – пряма перпендикулярна площині паралелізму, то отримуємо прямий коноїд. На рис. 10-14 показано епюр поверхні прямого коноїда, утвореної напрямною m – кривою лінією, напрямною n – прямою лінією, та площиною паралелізму $\Sigma \perp \Pi_1$, і $n \perp \Sigma$.

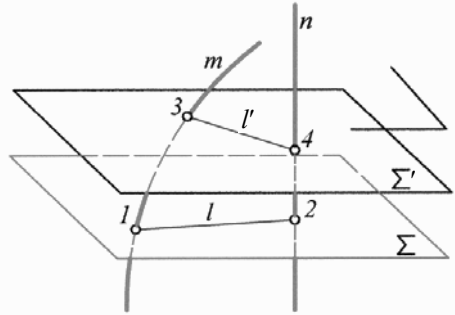


Рис. 10-13

Побудова проєкцій точок, які належать поверхні коноїда показана на епюрі, рис. 10-14.

Враховуючи ознаку належності точки до поверхні, задачу побудови зводимо до побудови проєкцій точки, яка належить лінії (прямій чи кривій), яка розташована на поверхні коноїда, при цьому однойменні проєкції точки належать однойменним проєкціям лінії, які належать однойменним проєкціям поверхні.

Якщо задано горизонтальну проєкцію A_1 точки A (на тому полі, де показано слід-проєкцію заданої площини паралелізму Σ_1).

Алгоритм побудови A_2 :

- через задану точку A проводимо площину $\Sigma^A \parallel \Sigma$ (на полі Π_1 : $A_1 \in \Sigma^A \parallel \Sigma_1$);

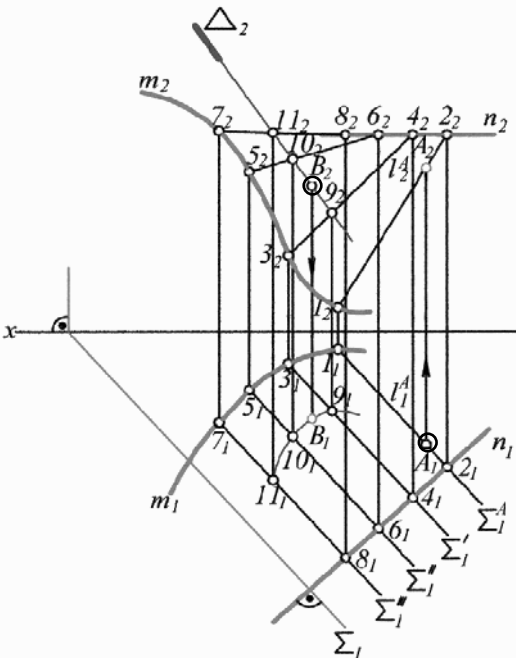


Рис. 10-14

– площина Σ^A перетинає напрямні m і n відповідно в точках 1 та 2 :

на полі Π_1 : $\Sigma^A \cap m_1 \Rightarrow 1_1 \Rightarrow 1_2 \subset m_2$ на Π_2 ;

на Π_1 : $\Sigma^A \cap n_1 \Rightarrow 2_1 \Rightarrow 2_2 \subset n_2$ на Π_2 ;

– отримані точки 1 і 2 з'єднуємо між собою і отримуємо твірну l^A , якій належить точка A , тобто:

на полі Π_1 : $1_1 \cup 2_1 \Rightarrow l_1^A \supset A_1$

на полі Π_2 : $1_2 \cup 2_2 \Rightarrow l_2^A$; $l_1^A \supset A_1 \Rightarrow A_2 \subset l_2^A$ на Π_2 .

Якщо задано фронтальну проекцію B_2 точки B (на протилежному полі, де не показано слід-проекцію заданої площини паралелізму).

Алгоритм побудови B_1 :

– будується каркас поверхні коноїда, для цього проводимо декілька площин, паралельних заданій площині паралелізму Σ (це площини $\Sigma^I, \Sigma^{II}, \Sigma^{III}$, які паралельні Σ) на полі Π_1 епюра: $\Sigma^I \parallel \Sigma_1, \Sigma^{II} \parallel \Sigma_1, \Sigma^{III} \parallel \Sigma_1$; будуємо твірні поверхні коноїда, для цього точки перетину площини Σ^I з напрямними m і n відповідно в точках 3 і 4 , з'єднавши їх, утворюється твірна l^I , для цього на епюрі:

$\Sigma^I \cap m_1 \Rightarrow 3_1 \Rightarrow 3_2 \subset m_2$; $\Sigma^I \cap n_1 \Rightarrow 4_1 \Rightarrow 4_2 \subset n_2$;

$3_1 \cup 4_1 \Rightarrow l_1^I$; $3_2 \cup 4_2 \Rightarrow l_2^I$.

Аналогічно будуються твірні $5...6$, $7...8$ з застосуванням відповідно площин $\Sigma^{II}, \Sigma^{III}$.

Отримані твірні утворюють каркас поверхні коноїда.

– каркас поверхні перерізаємо фронтально проектуючою площиною Δ , яка пройде через задану точку B , каркас поверхні коноїда площина Δ переріже по лінії a , якій і буде належати B . Для цього на епюрі: на полі Π_2 :

$B_2 \subset \Delta_2 \cap 3_2... 4_2 \Rightarrow 9_2 \Rightarrow 9_1 \subset 3_1... 4_1$;

$\Delta_2 \cap 5_2... 6_2 \Rightarrow 10_2 \Rightarrow 10_1 \subset 5_1... 6_1$; $\Delta_2 \cap 7_2... 8_2 \Rightarrow 11_2 \Rightarrow 11_1 \subset 7_1... 8_1$;

$9_1 \cup 10_1 \cup 11_1 \Rightarrow a_1$; $a_2 \supset B_2 \Rightarrow B_1 \subset a_1$ (на полі Π_1).

10.2.5. Поверхні обертання

Утворюється лінією l , яка обертається навколо осі i . Лінія l (пряма, або крива) – твірна поверхні, та вісь i – пряма лінія.

Прикладом поверхонь обертання є: тор (відкритий, закритий), куля, глобoid, еліпсоїд обертання, параболоїд обертання, гіперболоїд обертання, конічна і циліндрична поверхні обертання.

Визначник поверхні обертання:

$$\Phi^{ob}(l; i) [l \cup i],$$

де: l – твірна лінія; i – вісь обертання.

Окремі **види поверхонь обертання** (залежні від твірної l , та її розташування відносно осі обертання i):

- тор: коли твірна l – коло, розташоване в площині, яка проходить через вісь i ;
- тор відкритий – коли вісь i не перетинає коло твірної l ;
- тор закритий – коли вісь i дотична до твірної l (кола), або його перетинає;
- сфера – твірна l – коло, вісь i проходить через центр кола твірної;
- глобоїд – твірна l – дуга кола;
- еліпсоїд обертання (стиснутий, або витягнутий) – твірна l еліпс, а вісь i проходить через малу, або велику вісь еліпса;
- параболоїд обертання;
- гіперболоїд обертання – твірна l відповідно парабола чи гіпербола;
- конічна та циліндрична поверхні обертання – твірна l відповідно перетинає вісь i або паралельна осі.

Властивість поверхні обертання: будь-яка площина, яка перерізає поверхню обертання і розташована перпендикулярно до її осі обертання – дає в перерізі цієї поверхні – коло (належне площині перерізу поверхні).

Кожна точка твірної l , обертаючись навколо осі i , описує коло.

Точка твірної l , яка найближче розташована до осі i – описує коло, яке називається – *горловина поверхні обертання*.

Точка твірної l , яка й надалі розташована від осі i – описує коло, яке називається – *екватор поверхні обертання*.

На рис. 10-15 наведено епюр поверхні обертання, утворена кривою лінією l , яка обертається навколо осі i перпендикулярно розташована до горизонтальної площини проєкцій Π_1 . Твірна l та вісь i розташовані в фронтальній площині Δ (Δ_1).

При обертанні площини Δ навкруги осі i , твірна l описує поверхню обертання Φ^0 . Вид твірної l визначає форму поверхні Φ^0 .

Загальна послідовність побудови проєкцій точки, розташованої на поверхні обертання:

- через задану точку на поверхні перпендикулярно до осі обертання поверхні проводимо посередник-площину P , в перерізі поверхні отримуємо коло на якому розташована задана точка;
- будуємо проєкції кола перерізу;

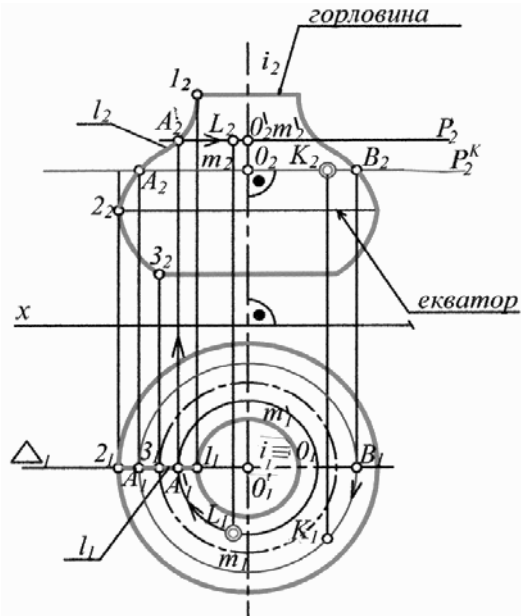


Рис. 10-15

– будуюмо проєкції точки, яка належить до кола-перерізу, враховуючи, що відповідні проєкції точки належать одноіменним проєкціям кола-перерізу.

Отримані проєкції точки є проєкціями точки, яка належить до поверхні обертання, так як проєкції точки належать однойменним проєкціям лінії-кола, яке належить відповідним проєкціям поверхні обертання.

Алгоритм побудови K_1 по заданій K_2 точки K , яка належить поверхні Φ^0 :

1. $\bullet K \subset P^k \perp i$.

для цього на полі Π_2 : $\bullet K_2 \supset P^k_2 \perp i_2$;

2. $P^k \cap \Phi^0 \Rightarrow m^k$ – коло, радіус якого $R^{m^k} = OA$

Для цього: $P^k_2 \cap i_2 \Rightarrow O_2 \rightarrow O_1 \equiv i_1$;

$P^k_2 \cap l_2 \Rightarrow A_2 \subset \text{в.л.з.} \cap l_1 \Rightarrow A_1$;

$R^{m^k}_2 = O_2A_2 \rightarrow m^k_2 = A_2B_2 \equiv P^k_2$;

$\bullet O_1 \cup \bullet A_1 \Rightarrow O_1A_1 = R_1m^k \rightarrow m^k_1 = \text{н.в. } m^k$.

Якщо задано горизонтальну проєкцію L_1 точки L , яка належить поверхні Φ^0 , то для побудови фронтальної проєкції L_2 на епюрі починаємо побудову з того, що на полі Π_1 :

1. $- O'_1 \subset R^{m^l} = O'_1L_1 \Rightarrow m^l_1 \cap l_1 \Rightarrow A'_1 \subset \text{в.л.з.} \cap l_2 \Rightarrow A^l_2 \subset m^l_2$;

2. $m^l_1 \subset L_1 \subset \text{в.л.з.} \cap m^l_2 \Rightarrow L_2!$

10.3. Приклади розв'язку задач

Приклад 10–1: Задана просторова крива лінія a (a_2, a_1).

Необхідно визначити довжину заданої лінії a .

Розв'язок виконується приблизним методом спрямлення, коли криву a розбиваємо на окремі гілки, такі гілки замінюємо хордами, а довжину кожної хорди визначаємо методом прямокутного трикутника, сумістивши ці трикутники по спільній координаті висот точок поділу кривої, визначаємо натуральну величину довжини просторової ламаної лінії.

З'єднавши вершини ламаної лінії, отримуємо зображення заданої просторової кривої лінії a розгорнутої – до суміщення з площиною, де і наводиться довжина заданої лінії a , що показано на рис. 10-16.

Приклад 10–2: Задана сфера своїми проєкціями на полях Π_1, Π_2, Π_3 . На поверхні сфери розташовані точки $A(A_2), B(B_1), C(C_2), D(D_3), E(E_2), F(F_2)$.

Необхідно побудувати A_3, A_1 – точки A, B_2 і B_3 – точки B, C_1 і C_3 – точки C, D_1 і D_2 – точки D, F_1 і F_3 – точки F .

Умовні позначення: \odot – задана проєкція точки ,

\circ – побудована проєкція точки.

Побудову проєкцій точок виконуємо, дотримуючись ознаки належності точки до поверхні, згідно з якою побудова проєкцій точок на поверхні сфери

На епюрі:

$\bullet A_2 \supset \Sigma_2^A \Rightarrow \Sigma_3^A$ (сліди горизонтально розташовані).

Площина Σ перерізає сферу по колу a , радіус якого дорівнює O_1 .

На епюрі: $\Sigma_2^A \cap f_2 \Rightarrow \bullet I_2 \Rightarrow \bullet I_1 \supset$ в.л.з. $\cap f_1 \Rightarrow \bullet I_1 \cup O_1 \Rightarrow O_1 I_1 = R$ кола $a \Rightarrow a_1$;
 $a_2 \supset A_2 \subset$ в.л.з. $\cap a_1 \Rightarrow A_1$!

Для побудови A_3 розглянемо рис. 10-18 та рис. 10-19.

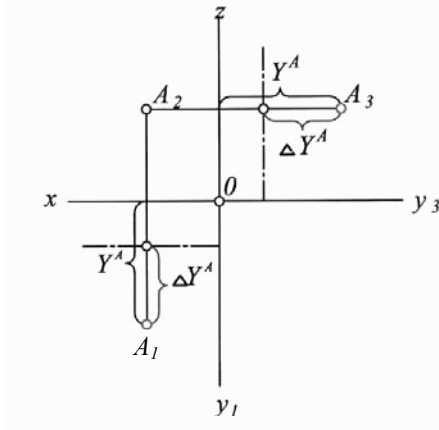


Рис. 10-18

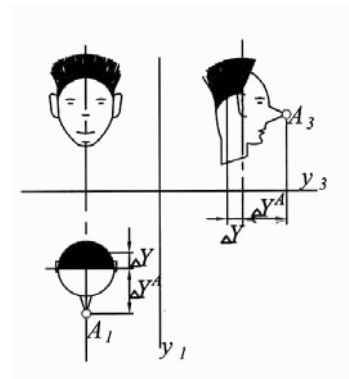


Рис. 10-19

A_1 розташоване на вертикальній лінії зв'язку A_2A_1 і глибина точки A дорівнює Y^A , **координатним методом** будуючи A_3 , з точки A_2 проведена горизонтальна лінія зв'язку (ГЛЗ) і координата Y^A , взята з поля Π_1 і відкладається на ГЛЗ від осі z , і отримуємо A_3 , або за допомогою **відносних координат** (координат – відстаней від відомих визначників розглядаємого об'єкту). Маючи вісь зображення горизонтальної проекції і A_1 , віддалена від цієї осі на ΔY^A , то на полі Π_3 на ГЛЗ від вертикальної осі відклавши ΔY^A , – отримуємо A_3 .

На рис. 10-19 показано, якщо точка A розташована на „кінчику носа”, її A_1 розташована знизу від горизонтальної осі горизонтальної проекції “обличчя”, а на профільній проекції “ніс” разом з A_3 , розташований зліва від вертикальної осі профільної проекції.

На рис. 10-19 та точка, горизонтальна проекція якої над горизонтальною віссю (“в зубі”), то на профільній проекції профільну проекцію точки треба шукати зліва від вертикальної осі (“в зубі” на цій проекції) відповідно на відстані ΔY , взятої з горизонтальної проекції.

Тобто: якщо горизонтальна проекція точки розташована знизу від горизонтальної осі проекції, то її профільна проекція будеться справа від вертикальної осі профільної проекції і навпаки.

Якщо горизонтальна проекція B_1 точки B , яка належить поверхні заданої сфери, то для утворення лінії (кола), яка належить сфері, через точку B проводимо фронтальну площину $\Sigma(\Sigma_1, \Sigma_3)$, в перерізі сфери отримуємо коло, радіус якого O^4 , будуємо фронтальну проекцію цього кола та проекції заданої точки B , одноіменні проекції якої належать одноіменним проекціям кола (радіус якого дорівнює O^4).

Аналогічно будуються відсутні проекції:

- точка C – як точка, яка належить до фронтального обрису f сфери;
- точка D – будується за допомогою фронтальної площини, $\Sigma^D(\Sigma^D_1, \Sigma^D_3)$ (профільний слід Σ^D_3 , проведений вертикально) і проходить через D_3 – в перерізі сфери утворюється коло, (радіус якого O^D_{33}) до проекцій якого належать одноіменні проекції точки D ;
- точки E і F – їх проекції будуються як точки, які належать до горизонтального обрису h сфери

Приклад 10-3: Задана поверхня прямого кругового конуса на полях Π_1, Π_2, Π_3 .

На поверхні конуса розташовані точки $A(A_2), B(B_2), C(C_1), D(D_3), E(E_2)$.

Необхідно побудувати відсутні проекції заданих точок на полях Π_1, Π_2, Π_3 .

Побудова проекцій точок виконується з дотриманням ознаки належності точки до поверхні, якщо ця точка належить до лінії (прямої, дуги кола, лінії, найзручнішої для побудови), яка сама належить до заданої поверхні.

Якщо точка A задана своєю фронтальною проекцією A_2 , то для побудови A_1 та A_3 : з вершини S через точку A проводимо твірну до перетину з основою m конуса в точці 3 . Отримана пряма $S3$ (твірна конуса) несе на собі точку A . Побудувавши проекції твірної $S3$ на одноіменних проекціях якої розташуються проекції точки A .

$$\begin{aligned} \text{На епюрі: } \bullet S_2 \cup A_2 \Rightarrow S_2 A_2 \cap m_2 \Rightarrow \bullet 3_2 \Rightarrow S_2 3_2 \supset \bullet A_2; \\ m_2 \supset \bullet 3_2 \subset \text{в.л.з.} \cap m_1 \Rightarrow \bullet 3_1 \subset m_1; \bullet 3_1 \cup \bullet S_1 \Rightarrow S_1 3_1; \\ S_2 3_2 \supset \bullet A_2 \subset \text{в.л.з.} \cap S_1 3_1 \Rightarrow A_1! \end{aligned}$$

Профільна проекція A_3 будується координатним методом (за допомогою відносних координат), застосовуючи горизонтальну лінію зв'язку, проведenu з A_2 , на якій вправо від осі профільної проекції конуса відкладається ΔY^A , взятої з горизонтальної проекції.

Якщо задано зрізаний конус, коли вершини конуса в межах кресленика немає, то побудову проекцій точки A виконуємо за допомогою не твірної, а за допомогою кола, яке належить до поверхні конуса. Для цього: через точку A проводимо горизонтальну площину P , в перерізі конуса отримали коло m' , радіус якого дорівнює O_1 , на якому розташована точка A .

На епюрі: $\bullet A_2 \subset P_2 \perp i_2 \Rightarrow m'_2; P_2 \cap S_2 \cap S_2 \Rightarrow \bullet l_2 \Rightarrow l_1 \subset S_1 \cap S_1 \Rightarrow m_1 \supset \bullet A_1 !$

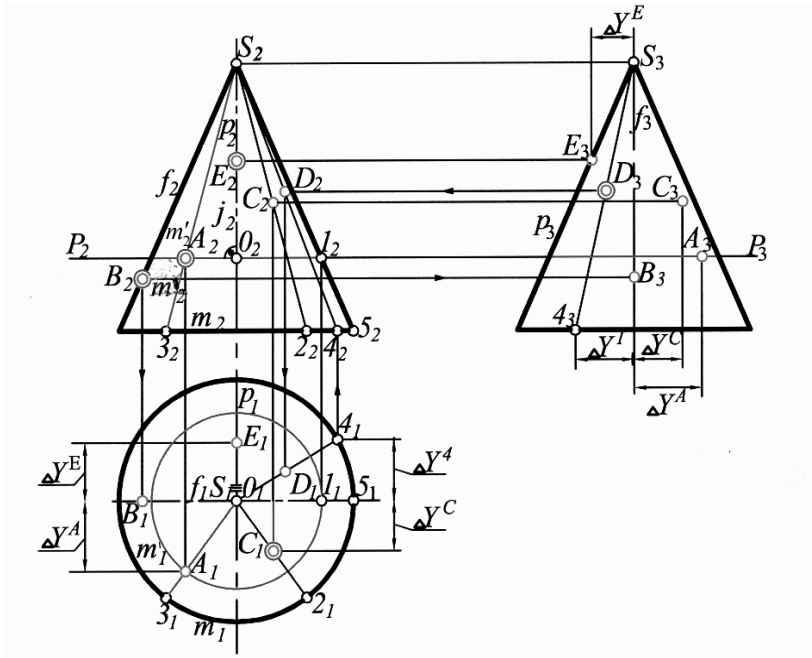


Рис. 10-20

Аналогічно будуються відсутні проекції:

- точка B – як точки, належної до фронтального обрису f конуса;
- точка C – будується на полі Π_2 за допомогою твірної конуса S_2 , а на полі Π_3 – координатним методом з врахуванням ΔY^C ;
- точка D – її проекції будуються за допомогою твірної S_4 , починаючи з побудови S_3A_3 , яка проходить через $\bullet D_3$;
- точка E – її проекції будуються за належністю цієї точки до профільного обрису p .

Приклад 10-4: Задана поверхня призми шестигранної правильної прямої (з горизонтально проектуючою бічною гранню поверхнею).

На поверхні призми розташовані точки $A(A_2)$, $B(B_2)$, $C(C_2)$, $D(D_1)$, $E(E_3)$, $F(F_2)$, $K(K_2)$, $L(L_2)$. Необхідно побудувати відсутні проекції заданих точок на полях Π_1 , Π_2 , Π_3 .

Побудова відсутніх проекцій заданих точок, показана на рис. 10-21, виконана шляхом застосування вертикальних та горизонтальних ліній зв'язку, напрямком проектування цих ліній показано стрілками. Зв'язок горизонтальної

та профільної (та навпаки) проекції точок показано відповідними відносними координатами ΔY , що видно на рис. 10-21.

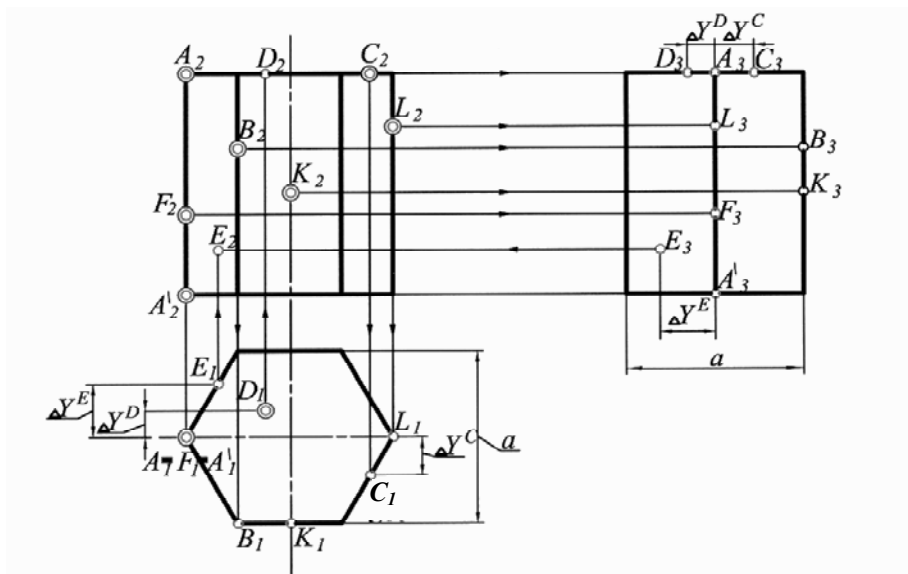


Рис. 10-21

10.4. Задачі для розв'язку

10.4.1. Задачі для позааудиторного розв'язку

Задача 10-1. Побудувати проєкції кола, діаметр якого дорівнює 30 мм з центром в точці O , яке лежить у площині Σ (Σ_2) на рис. 10-22, та у площині Δ ($h^0 \cap f^0$) на рис. 10-23.

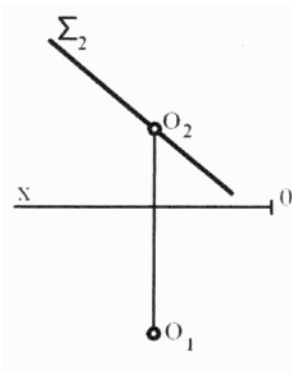


Рис. 10-22

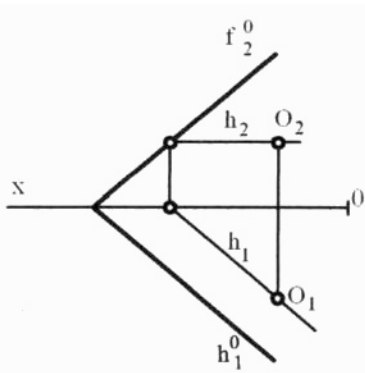


Рис. 10-23

Задача 10-2. Побудувати відсутні проєкції точок, які лежать на поверхні конуса (рис. 10-24), та поверхні сфери (рис. 10-25).

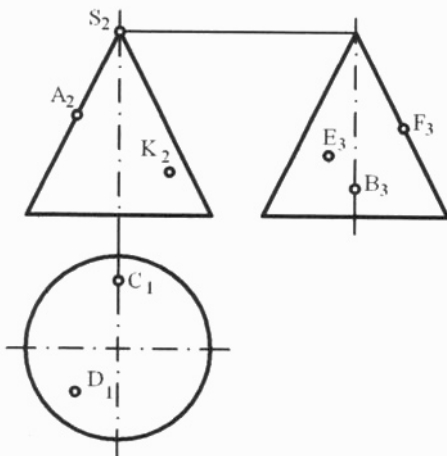


Рис. 10-24

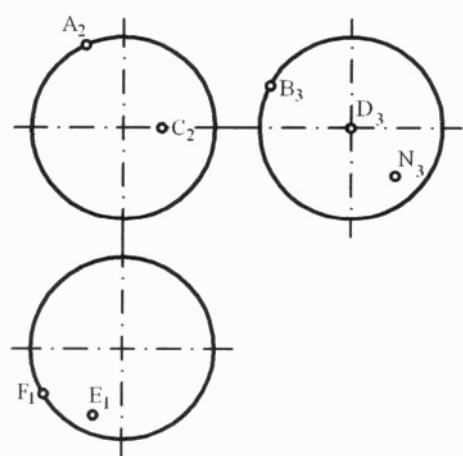


Рис. 10-25

10.4.2. Задачі для аудиторного розв'язку

Задача 10-3. Побудувати проєкції прямого конуса, основа якого (діаметр 30 мм) у заданій площині, а висота його дорівнює 40 мм (рис. 10-26).

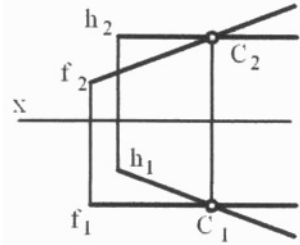


Рис. 10-26

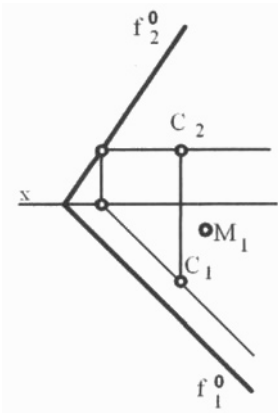


Рис. 10-27

Задача 10-4. Побудувати: у площині $S (h^0 \cap f^0)$ коло із центром у точці O , яке проходить через точку M , (способом суміщення) рис. 10-27.

Задача 10-5. Побудувати відсутні проєкції точок належних поверхні, якщо задано:

- а) тор, в якого:
 - m – твірна, коло;
 - i – вісь обертання.
 (рис. 10-28).

- б) циліндроїд, в якого:
 - m і n – напрямні;
 - Σ – площина паралелізму.
 (рис. 10-29).

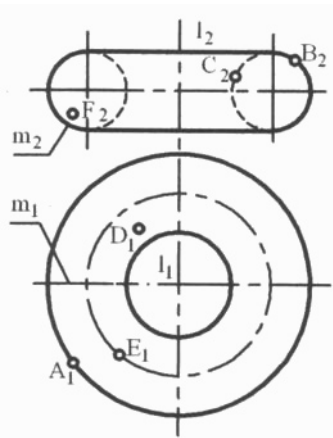


Рис. 10-28

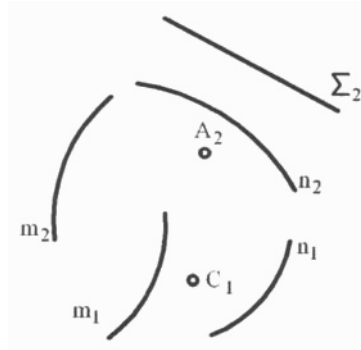


Рис. 10-29

Запитання для самоконтролю

1. Які характерні точки можуть бути на кривій лінії?
2. Які проєкції може мати коло? Що спільного між його проєкціями?
3. За рахунок яких образів визначається вид поверхні?
4. Ознака належності точки до поверхні.
5. Приклади розгорнутих поверхонь та побудова проєкцій точок, які їм належать.
6. В яких поверхнях застосовують площини паралелізму?
7. Визначники поверхонь обертання.
8. Алгоритм побудови проєкцій точок, які належать поверхні обертання.
9. Особливість побудови профільної проєкції точки, яка належить до поверхні, по її заданих фронтальній та горизонтальній проєкціях.

Тема 11

Перерізи та розгортки поверхонь

При перерізі поверхні площиною отримуємо плоску фігуру, яка зветься переріз.

Вид фігури перерізу залежить від поверхні, яка перерізається, та від розташування площини відносно цієї поверхні.

Якщо перерізається гранна поверхня, переріз її має вид ламаної плоскої фігури, замкненої (багатокутник) або розімкненої; кількість вершин цієї ламаної дорівнює кількості ребер гранної поверхні, які перерізаються площиною, або кількість сторін лінії-перерізу дорівнює кількості граней, які перерізає січна площина.

Якщо криволінійна поверхня перерізається площиною, то переріз має вид кривої (замкненої або розімкненої) лінії.

11.1. Загальна методика побудови лінії перерізу (ЛП) поверхні січною площиною

Методика розв'язку задач з побудови лінії перерізу поверхонь така ж, як і методика побудови лінії перетину двох площин (рис. 4-10), різниця лише в кількості посередників та виборі їх положення в просторі (тобто: скільки посередників, та як їх розташувати).

Побудову лінії перерізу поверхні Φ площиною Σ показано на рис. 11-1.

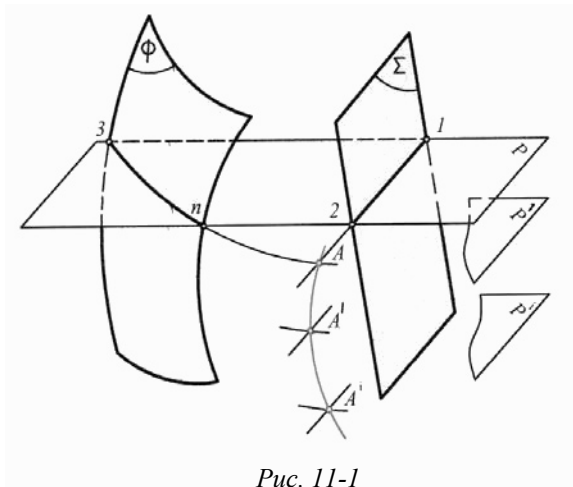


Рис. 11-1

Алгоритм розв'язання:

$\Sigma \cap \Phi \Rightarrow$ Л.П.?

= Вибираємо посередник-площину P:

- $P \cap \Sigma \Rightarrow 1...2$;
- $P \cap \Phi \Rightarrow 3...n$;
- $1...2 \cap 3...n \Rightarrow \bullet A$.

= Вибираємо посередник-площину $P' \parallel P$:

- $P' \cap \Sigma \Rightarrow 1'...2'$;
- $P' \cap \Phi \Rightarrow 3'...n'$;
- $1'...2' \cap 3'...n' \Rightarrow \bullet A'$.

=

= Вибираємо посередник-площину $P^i \parallel P$:

- $P^i \cap \Sigma \Rightarrow 1^i...2^i$;
- $P^i \cap \Phi \Rightarrow 3^i...n^i$;
- $1^i...2^i \cap 3^i...n^i \Rightarrow \bullet A^i$;
- $\bullet A \cup \bullet A' \cup \dots \cup \bullet A^i \Rightarrow AA' \dots A^i$ – ЛП!

11.1.1. Особливості вибору посередників

= Посередники повинні бути розташовані так, щоб вони перерізули поверхню по лінії найпростішого виду (окресленої прямими лініями, або дугами кола).

= Посередники повинні забезпечувати побудову характерних точок лінії перерізу:

– точки на обрисах поверхні – є точками зміни знака видимості лінії перерізу;

– точки на лінії перерізу, які мають найбільшу та найменшу висоту (z_{min} та z_{max});

= Додаткові посередники повинні забезпечити побудову проміжних точок для утворення рівномірної густини точкового каркасу лінії перерізу.

11.1.2. Види задач на побудову лінії перерізу

– *Задачі першого виду*, в яких будь-яка поверхня перерізається площиною окремого положення.

– *Задачі другого виду*, в яких будь-яка поверхня перерізається площиною загального положення.

11.2. Розв'язок задач першого виду (в яких січна площина – площина окремого положення перерізає довільну поверхню)

Такі задачі характеризуються тим, що площина окремого положення має на епюрі свій слід-проекцію, з яким зливається проекція перерізу, яка виділена на сліди-проекції точками перерізу лівої сторони обриса поверхні і проходить до точки перерізу правої сторони обриса поверхні, проекцію якої перерізає слід-проекція площини. На іншій проекції поверхні проекція лінії перерізу будується за належністю точок лінії перерізу до поверхні.

При побудові лінії перерізу, отриманої при перерізі поверхні площиною окремого положення, розглядаються переважно перерізи бічної поверхні геометричних тіл. Для цього у випадках, коли січна площина перерізає частково бічну поверхню тіла і перетинається з основою тіла, то для отримання повного перерізу бічної поверхні тіла, ця поверхня і січна площина продовжуються до взаємного перетину і в такому випадку отримуємо фігуру повного перерізу поверхні. При необхідності розглядати фігуру окремого перерізу бічної поверхні, то повний переріз буде обмеженим прямою лінією (однією чи двома, залежно від кількості перерізанних основ тіла) перетину січної площини з площиною основи.

Розглянемо побудову лінії перерізу найбільш поширених поверхонь площинами рівня або проектуючими.

11.2.1. Переріз поверхонь гранних тіл

Переріз багатогранника площиною завжди буде багатокутник (плоский), а кількість його вершин дорівнює кількості перерізанних ребер багатогранника, або кількість сторін багатогранника – перерізу дорівнює кількості перерізанних граней багатогранника.

Розглянемо поверхню Φ^{np} якою є багатогранник – призма чотиригранна пряма правильна, перерізна площинами окремого положення, наведену на рис. 11-2.

Взагалі, призма як поверхня утворюється прямою l , яка ковзає по багатокутнику m і весь час залишається паралельно вказаному напрямку s та двома січними площинами, в одній з яких лежить багатокутник m . Визначник поверхні призми:

$$\Phi^{np}(l, m, s) [s \parallel l \cap m].$$

Якщо поверхню призми перерізати площиною $\Sigma(\Sigma_1, \Sigma_3)$, паралельною площині P_2 , то фігура перерізу утворюється чотирма відрізками, отриманими при перерізі площин верхньої і нижньої основи призми, та лівої і правої передньої бокової грані призми. Можна розглядати фігуру перерізу – утворену при перерізі двох передніх ребер нижньої основи призми (отримані вершини 1 та 4) та двох передніх ребер верхньої основи (отримані вершини 2 і 3). Тобто, перерізано послідовно чотири ребра в точках 1, 2, 3, 4. Таким чином, в

перерізі призми площиною Σ отримано чотирикутник – прямокутник $\square 1. 2. 3. 4.$

Тобто: $\Sigma \cap \Phi^{np} \Rightarrow \square 1. 2. 3. 4.$

Враховуючи те, що площина $\Sigma \parallel P_2$ є площиною рівня і відтворена на епюрі своїми слідами – проекціями $\Sigma_1 \parallel x$ та $\Sigma_3 \parallel z$, та враховуючи властивості площини Σ , чотирикутник 1. 2. 3. 4 розташований в цій площині, має горизонтальну проекцію $1_1 2_1 3_1 4_1$, яка збіглася з горизонтальним слідом – проекцією Σ_1 , а профільна проекція $1_3 2_3 3_3 4_3$ збіглася з Σ_3 . Фронтальна проекція $1_2 2_2 3_2 4_2$ на P_2 є натуральною величиною прямокутника 1. 2. 3. 4.

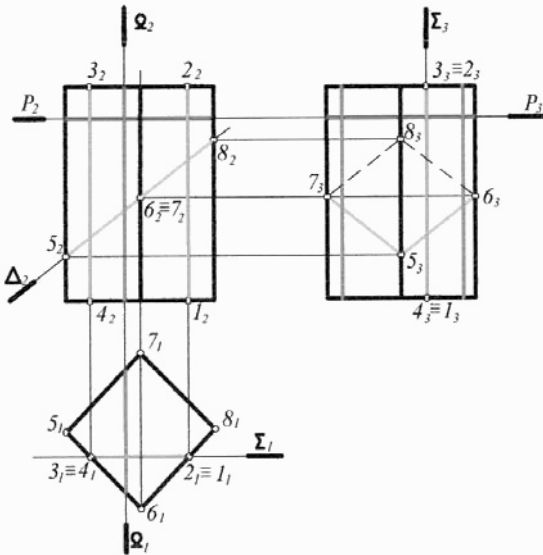


Рис. 11-2

Якщо поверхню призми перерізати площиною $\Delta (\Delta_2)$, яка є фронтально проектуючою, то ця площина перерізає чотири бічних ребра в точках 5. 6. 7. 8., з'єднавши які отримуємо переріз. Перерізом буде чотирикутник, а враховуючи симетричність розташування перерізанних ребер, - в перерізі отримано ромб 5. 6. 7. 8, фронтальна проекція якого $5_2 6_2 7_2 8_2$ збіглася з слідом – проекцією Δ_2 досліджуваної січної площини Δ . Горизонтальна проекція $5_1 6_1 7_1 8_1$ та профільна проекція $5_3 6_3 7_3 8_3$ будуються по належності до відповідних проекцій бічних ребер.

Таким чином, якщо поверхню чотиригранної призми Φ^{np} перерізає фронтально проектуюча площина Δ , то отримано чотирикутник – ромб 5.6. 7. 8. (в розглядаємому прикладі).

Тобто: $\Delta \cap \Phi^{np} \Rightarrow \diamond 5. 6. 7. 8.$

Якщо вибрану поверхню переріжемо профільною площиною Ω (Ω_1, Ω_2), то прямокутник перерізу на поле Π_3 спроекується в натуральну величину і ширина цього прямокутника буде взята з Π_1 , а висота з Π_2 . Горизонтальна та фронтальна проєкції прямокутника перерізу відповідно збіглися з слідом – проєкцією Ω_1 та Ω_2 .

Якщо вибрана поверхня перерізана горизонтальною площиною P (P_2, P_3), то квадрат перерізу має свої проєкції відповідно на Π_2 та Π_3 , які зливаються із слідами – проєкціями P_2 та P_3 , а на Π_1 збігається з горизонтальною проєкцією квадрата основи призми, відносно якої фігура перерізу паралельна тільки розташована нижче у вертикальному проєкційному зв'язку, як фігура, яка належить горизонтально проєкуючій поверхні, якою є бічна поверхня призми, що розглянута.

Розглянемо інший приклад, де поверхню Φ^{ni} , якою є багатогранник – піраміда шестигранна пряма правильна, перерізана площинами окремого положення, цей приклад наведено на рис. 11-3.

Взагалі піраміда як поверхня утворюється точкою S , прийнятою за вершину, та плоскою ламаною лінією m яка приймається за основу піраміди. Вершина S не належить площині ламаної m . Визначник поверхні піраміди має вид:

$$\Phi^{ni}(l, \bullet S, m) [\bullet S \subset l \cap m],$$

де: пряма l проходить з точки S і ковзає по багатокутнику m , – утворюється бічна поверхня піраміди, а її основою є – частина площини, обведена плоскою ламаною лінією m .

Якщо поверхню піраміди перерізати площиною P (P_2, P_3), яка паралельна Π_1 , то в перерізі отримуємо шестикутник (менший ніж шестикутник основи піраміди) з вершиною в точці I , так як площина P перерізає шість бічних ребер.

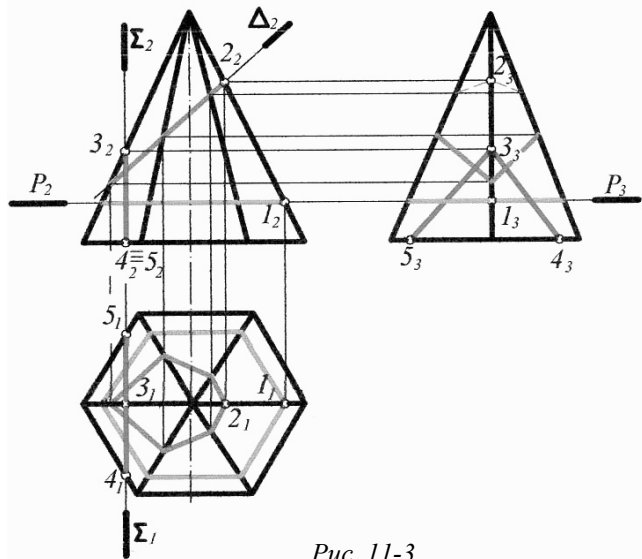


Рис. 11-3

Виходячи з властивостей горизонтальної площини P : фронтальна та профільна проєкції шестикутника – перерізу відповідно зливаються з слідом –

проекцією P_2 та P_3 , а його горизонтальна проекція є натуральною величиною шестикутника – перерізу з вершиною в точці I_1 і є концентричним відносно шестикутника основи.

Якщо поверхню заданої піраміди перерізати площиною Σ (Σ_2, Σ_1), яка паралельна P_3 , то площина перереже одне бічне (ліве обрисове) ребро та два (лівих) ребра основи, таким чином в перерізі буде трикутник 3. 4. 5. Виходячи з властивостей профільної площини Σ , отриманий трикутник перерізу на P_3 спроекується в натуральну величину і буде $3_3 4_3 5_3$, а на P_2 та P_1 відповідно у вигляді відрізка $3_2 4_2 \equiv 5_2$ та $4_1 3_1 5_1$, які зливаються з слідами – проекціями Σ_2 та Σ_1 .

Якщо задану поверхню перерізати фронтально проектуючою площиною Δ (Δ_2), то ця площина перереже шість бічних ребер, тобто в перерізі буде отримано шестикутник, найвища вершина якого в точці 2. Враховуючи те, що площина Δ на полі P_2 має свій слід – проекцію Δ_2 , то фронтальна проекція шестикутника перерізу буде у вигляді відрізка з точкою 2_2 , який зливається з Δ_2 . Горизонтальна та профільна проекції цього перерізу будується по належності вершин перерізу до бічних ребер (відповідних проекцій вершин до одноіменних проекцій бічних ребер).

11.2.2. Перерізи циліндричних поверхонь

В перерізі криволінійної поверхні площиною отримуємо плоску фігуру, окреслену кривою чи ламаною, або їх комбінацією.

Поверхні циліндричні (поверхні другого порядку) утворюються безперервним переміщення прямої l , прийнятої за твірну, яка ковзає по кривій m другого порядку, прийнятої за напрямну, та при цьому твірна у всіх положеннях залишається бути паралельною до вказаного напрямку s .

Визначник циліндричної поверхні має вид:

$$\Phi^u(l, m, s) [l \parallel s, l \cap m].$$

Форма напрямної m визначає вид циліндричної поверхні:

якщо m – коло, циліндрична поверхня Φ^{uo} – обертання, рис. 11-4;

якщо m – еліпс, циліндрична поверхня Φ^{ue} – еліптична, рис. 11-5;

якщо m – парабола, циліндрична поверхня Φ^{un} – параболічна, рис. 11-6;

якщо m – гіпербола, циліндрична поверхня Φ^{ur} – гіперболічна, рис. 11-7.

Всі ці поверхні є прямими, бо утворені за умови, що напрямна s перпендикулярна до площини напрямної m . (Нормальний переріз таких поверхонь є напрямна різновиду циліндричної поверхні).

Розглянемо поверхню циліндричну обертання, рис. 11-4, перерізану площинами окремого положення.

Якщо цю поверхню перерізати площиною $\Sigma(\Sigma_1) \perp P_1$, то переріз поверхні пройде по двох твірних проведених відповідно з точки 1 та точки 2, ці твірні паралельні осі i прямого кругового циліндра.

Якщо розглядається поверхня, перерізна площиною $\Delta(\Delta_1, \Delta_3)$ яка паралельна P_2 , то поверхня буде перерізна по двох твірних проведених відповідно з точкою 3 і точкою 4, ці твірні паралельні осі i . Проекції твірних,

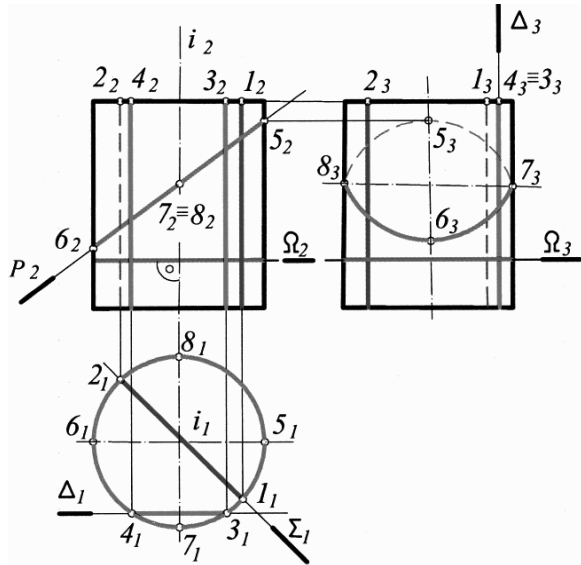


Рис. 11-4

по яких циліндрична поверхня перерізна площиною Δ наведена на рис. 11-4. При розгляді циліндричної поверхні прямого кругового циліндра (в якого два круги лежать в його основі), твірні по яких перерізається бічна поверхня циліндра разом з лініями перетину січної площини з площинами основ – утворюють перерізи – прямокутники.

Якщо циліндрична по-верхня буде перерізна площиною Ω (Ω_2, Ω_3), яка паралельна P_1 і вона одночасно перпендикулярна осі i циліндра. В перерізі (як нормальному перерізі) буде отримано коло, яке на полі P_2 та P_3 має свої проекції у вигляді відрізка, який дорівнює діаметру кола – перерізу і ці відрізки збігаються з відповідними слідами – проекціями Ω_2 та Ω_3 , а горизонтальна проекція перерізу співпадає з горизонтальною проекцією горизонтально проектуючої поверхні циліндра.

Якщо циліндрична поверхня буде перерізна площиною P (P_2) перпендикулярною до P_2 , то в перерізі буде отримано еліпс, велика вісь якого дорівнює відрітку 5.6, а мала вісь дорівнює діаметру циліндра 7.8. Горизонтальна проекція еліпса – перерізу збігається з горизонтальною проекцією всієї горизонтально проектуючої поверхні циліндра. Профільна проекція еліпса – перерізу будується за профільною проекцією великої та малої осі еліпса, та має вигляд еліпса з точками $5_2 7_2 6_2 8_2$.

Розглядаючи циліндричну еліптичну поверхню, рис. 11-5, перерізану площиною Δ (Δ_2, Δ_1), яка паралельна площині P_3 та паралельна осі i (паралельна s напрямку твірних), – в перерізі отримуємо дві твірні 1.4 та 2.3 які разом з

лініями перетину січної площини з площинами основ – утворюють прямокутник $1. 4. 3. 2$. Горизонтальна та фронтальна проекції прямокутника перерізу є відрізки $1_1 \equiv 4_1, 2_1 \equiv 3_1$ та $1_2 \equiv 2_2, 4_2 \equiv 3_2$, які відповідно збігаються з Δ_1 та з Δ_2 , а профільна проекція $1_3 2_3 3_3 4_3$ дорівнює натуральній величині прямокутника – перерізу.

Розглядаючи незамкнені циліндричні гіперболічну та параболічну поверхні, рис. 11-6 та рис. 11-7, видно, що площина $\Delta (\Delta_2) \perp \Pi_2$, в перерізі отримано гіперболу з вершиною в точці A , а площина $\Sigma (\Sigma_2, \Sigma_1) \parallel \Pi_3$ перерізає по двох твірних, які проходять з точок $1. 2$. Площина $\Sigma (\Sigma_2) \perp \Pi_2$ перерізає обидві розімкнені порожнини циліндричної гіперболічної поверхні, які перерізаються по двох гілках гіперболи з вершинами в точках A і B .

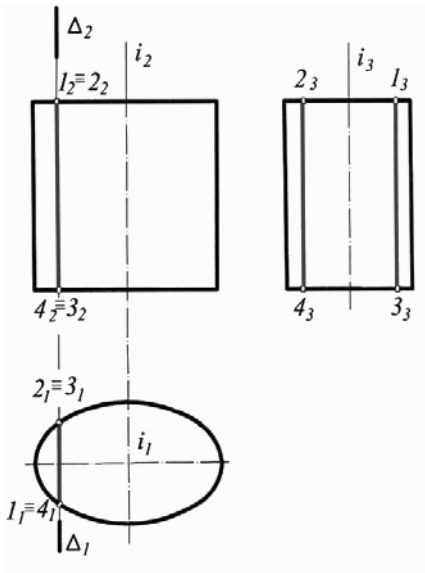


Рис. 11-5

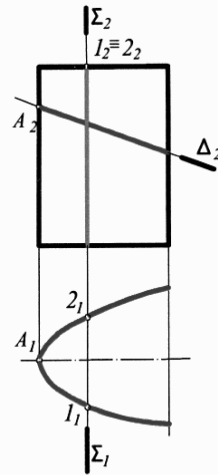


Рис. 11-6

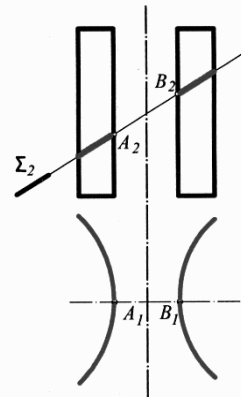


Рис. 11-7

Якщо розглянути (рис. 11-8) циліндричну поверхню, утворену переміщенням твірної по напрямній m – колу і розташовану не перпендикулярно до осі i , то нормальний переріз такої циліндричної поверхні є еліпс, що підкреслює утворення циліндричної – еліптичної поверхні. Переріз такої поверхні площиною $\Delta (\Delta_1)$, яка перпендикулярна до Π_1 , є еліпс, горизонтальна проекція якого зливається з слідом – проекцією Δ_1 , а фронтальна проекція будується за належністю точок еліпса – перерізу до поверхні.

Висновки:

– якщо циліндрична поверхня перерізна площиною, проведеною паралельно осі поверхні, то переріз пройде по двох твірних поверхні;

– якщо циліндрична поверхня має нормальний переріз, то лінія перерізу має вид на прямої поверхні;

– якщо циліндрична поверхня перерізна площиною, проведеною під гострим кутом до осі поверхні, то переріз поверхні має спотворений (розтягнутий) вид на прямої поверхні.

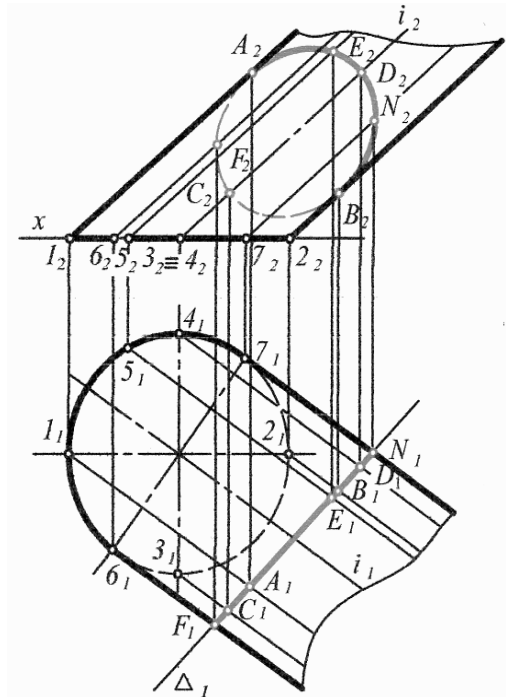


Рис. 11-8

11.2.3. Переріз поверхні прямого кругового конуса площиною окремого положення

Визначник поверхні прямого кругового конуса має вид:

$$\Phi^k(\bullet S, m, l) [\bullet S \subset l \cap m]; \bullet S \subset i \perp \Pi_1; m - \text{коло} \subset \Pi_1,$$

де: $\bullet S$ – вершина; m – напрямна; l – твірна (пряма лінія).

При будь-якому розташуванні січної площини відносно геометричних образів прямого кругового конуса отримуємо один з п'яти “золотих” перерізів, окреслених кривими або прямими лініями.

11.2.3.1. Переріз конуса площиною, паралельною до його основи

Як видно з рис. 11-9, в перерізі конуса отримано коло k , радіус якого дорівнює OA , де точка O – точка перерізу осі i (заданого конуса) площиною Σ , а точка A – точка перерізу SB – правої сторони фронтального обрису конуса.

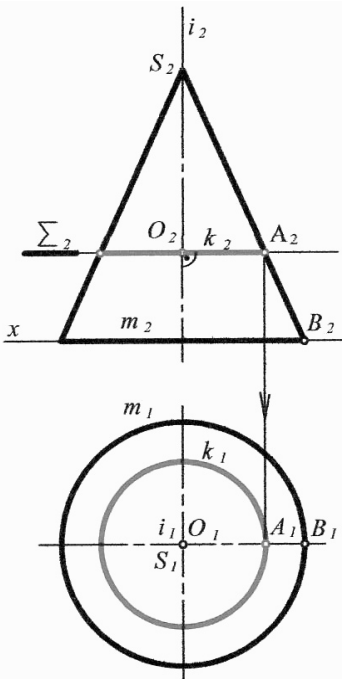


Рис. 11-9

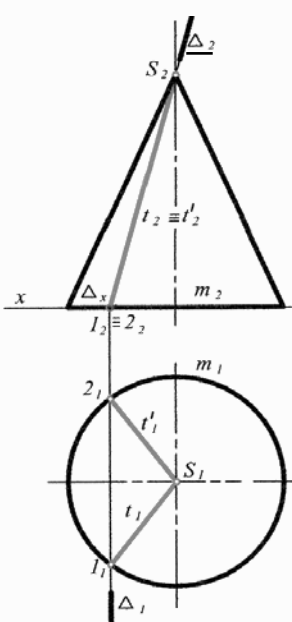


Рис. 11-10

На епюрі:

$$\Sigma(\Sigma_2) \cap \Phi^K \Rightarrow \text{л.п.} - ? \Sigma \parallel m; \Sigma \perp i.$$

$$\Sigma_2 \cap i_2 \Rightarrow O_2 \Rightarrow O_1;$$

$$\Sigma_2 \cap S_2B_2 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_1 \subset S_1B_1;$$

$$\bullet O \cup \bullet A \Rightarrow OA - \text{радіус кола } k;$$

$$k_2 \equiv \Sigma_2; k_1 - \text{натуральна величина кола перерізу.}$$

$$\text{Тобто: } \Phi^K \supset m \parallel \Sigma \cap \Phi^K \Rightarrow \text{л.п.} - \text{коло.}$$

Коли поверхня прямого кругового конуса перерізна площиною, паралельною до його основи (вона одночасно перпендикулярна до осі конуса), то в перерізі отримуємо коло.

Наслідок А: Якщо площина перерізає кінцеву поверхню паралельно її напрямній, то лінія перерізу подібна напрямній заданої кінцевої поверхні.

11.2.3.2. Переріз конуса площиною, яка проходить через його вершину

Як видно з рис. 11-10 в перерізі конуса отримано рівнобічний трикутник $1S2$, бо площина перерізає конус по двом однаковим твірним $S1$ та $S2$, де точки 1 і 2 належать напрямній m – основі і хорда $1...2$ кола основи є основою трикутника $1S2$ отриманого в перерізі.

На епюрі:

$$\Delta(\Delta_2, \Delta_1) \cap \Phi^K \Rightarrow \text{л.п.} - ? \text{коли}$$

$$\bullet S \supset \Delta \perp \Pi_2$$

$$\bullet S_2 \subset \Delta_2 \cap m_2 \Rightarrow \bullet 1_2 \equiv \bullet 2_2 \Rightarrow \bullet 1_1 \text{ і } 2_1 \subset m_1$$

$$1_2S_22_2 \equiv \Delta_2$$

$$\text{Тобто: } \Phi^K \supset \bullet S \subset \Delta \cap \Phi^K \Rightarrow \text{л.п.} - \text{трикутник.}$$

Коли поверхня прямого кругового конуса перерізна площиною, яка проходить через вершину конуса, то в перерізі отримуємо рівнобедрений трикутник, бокові сторони якого твірні конуса.

Наслідок Б: Якщо площина перерізає кінцеву поверхню і проходить через її вершину, то вона розрізається по двох твірних (з'єднавши які хордою, отриманою при перерізі напрямної площиною, – отримується трикутник перерізу).

11.2.3.3. Переріз поверхні конуса площиною, яка паралельна його одній твірній

Як видно з побудови (рис. 11-11), площина Δ паралельна одній твірній l конуса, не перерізає верхню порожнину конуса (на епюрі $\Delta_2 \parallel l_2$).

В перерізі конуса площиною Δ отримано гіперболу p , яка визначається вершиною в точці 3 та найбільшою хордою 1...2. Точки 1, 3 і 2 – характерні точки гіперболи, а її проміжні точки 4, 5, 6 і 7 будуються за загальною методикою (п. 11.1) з використанням допоміжної площини Σ та Σ' , що дає можливість побудувати горизонтальну проекцію p_1 гіперболи p .

На епюрі:

$\Delta(\Delta_2, \Delta_1) \cap \Phi^k \Rightarrow$ л.п. – ?, коли $l \parallel \Delta \cap \Phi^k$; $\Delta \perp P_2$;

$\Delta_2 \cap S_2B_2 \Rightarrow \bullet 3_2 \Rightarrow 3_1 \subset S_1B_1$;

$\Delta_1 \cap m_1 \Rightarrow \bullet 1_1 \dots \bullet 2_1 \Rightarrow 1_2 \equiv 2_2 \subset m_2$;

$\Sigma_2 \cap \Phi_2^k \Rightarrow k_2 \Rightarrow k_1$;

$\Sigma_2 \cap \Delta_2 \Rightarrow \bullet 6_2 \equiv 7_2 \Rightarrow \bullet 6_1 \dots \bullet 7_1 \subset k_1$;

$\Sigma_2 \parallel \Sigma'_2 \cap \Phi_2^k \Rightarrow k'_2 \Rightarrow k'_1 \supset \bullet 4_1 \dots \bullet 5_1$;

$\bullet 1_1 \cup \bullet 4_1 \cup \bullet 6_1 \cup \bullet 3_1 \cup \bullet 7_1 \cup \bullet 5_1 \cup \bullet 2_1 \Rightarrow p_1$;

$\bullet 1_2 \equiv \bullet 2_2 \cup \dots \cup \bullet 3_2 \Rightarrow p_2 \equiv \Delta_2$.

Тобто: $\Phi^k \supset l \parallel \Delta \cap \Phi^k \Rightarrow$ л.п. – гіпербола.

Коли поверхня прямого кругового конуса перерізна площиною, яка паралельна одній твірній конуса, то в перерізі отримуємо – гіперболу.

Наслідок В: Якщо конічну поверхню перерізає площина, яка розташована паралельно одній твірній цієї поверхні, то в перерізі отримуємо – гіперболу.

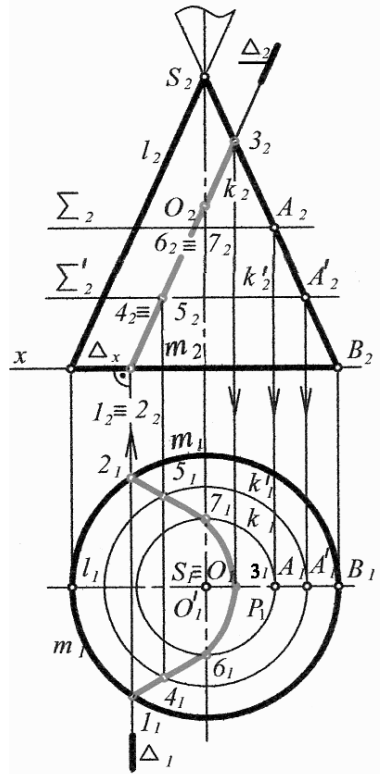


Рис. 11-11

11.2.3.4. Переріз поверхні конуса площиною, яка паралельна його двом твірним

Як видно з рис. 11-12 а, площина Δ розташована паралельно двом твірним SB і SC , перерізає дві порожнини конічної поверхні зі спільною віссю i , отримуємо дві гілки перерізу q та q' – дві гілки гіперболи. Проекції твірних SB і SC на полі P_2 зливаються, і фронтальний слід Δ_2 пройде паралельно $S_2B_2 \equiv S_2C_2$ (площина $\Delta \parallel$ двом твірним), то Δ_2 перетинає правий обрис конуса в точці 3₂ і перетинає продовження правого обрис конуса в точці 3'₂, ці точки 3 і 3' є

вершинами гілок гіперболи перерізу, а найбільша хорда 1...2 будується за допомогою сліду Δ_1 . Проміжні точки гіперболи будуються за допомогою загальної методики (п. 11-1) з застосуванням допоміжних площин Σ і Σ' .

На рис. 11-12 б, площина Δ перерізає поверхню конуса перпендикулярно площині Π_1 і паралельно двом твірним SB і SC . На правій обрисовій твірній конуса розташована точка 6, яка на полі Π_2 міняє знак видимості гілки гіперболи.

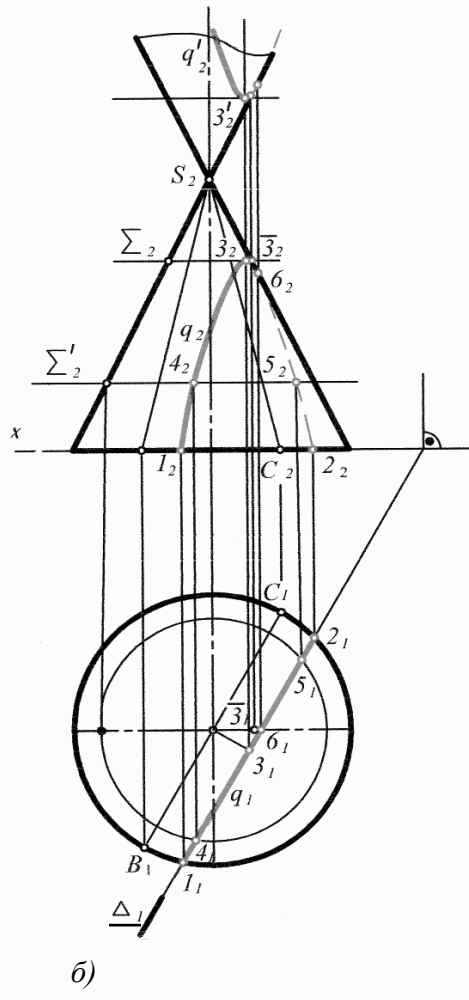
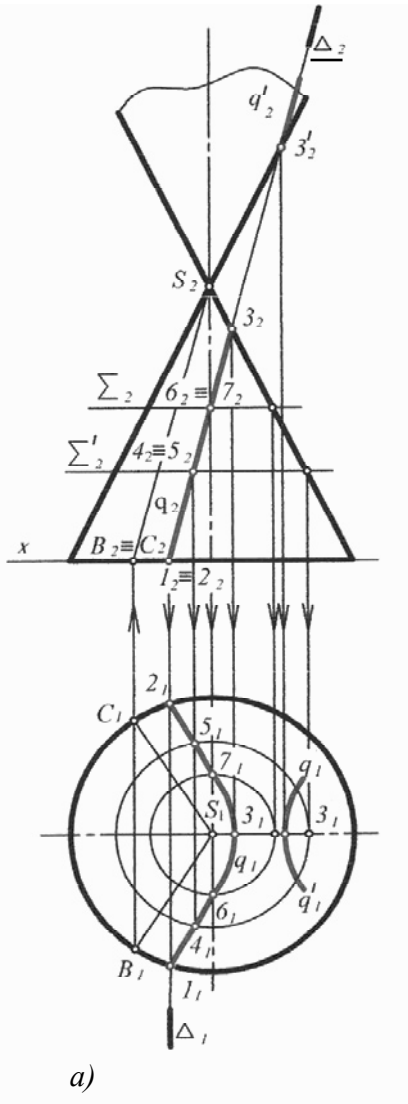


Рис. 11-12

Коли поверхня прямого кругового конуса перерізна площиною, яка паралельна двом твірним конуса, то в перерізі отримуємо – гіперболу.

Наслідок Г: Якщо симетричну частину конічної поверхні перерізає площина, яка розташована паралельно двом твірним цієї поверхні, то в перерізі отримуємо – гіперболу.

11.2.3.5. Переріз поверхні конуса площиною, яка перерізає його всі твірні та розташована під гострим кутом до його осі

При такому розташуванні січної площини в перерізі поверхні конуса отримуємо еліпс, що і видно з побудови наведеної на рис. 11-13.

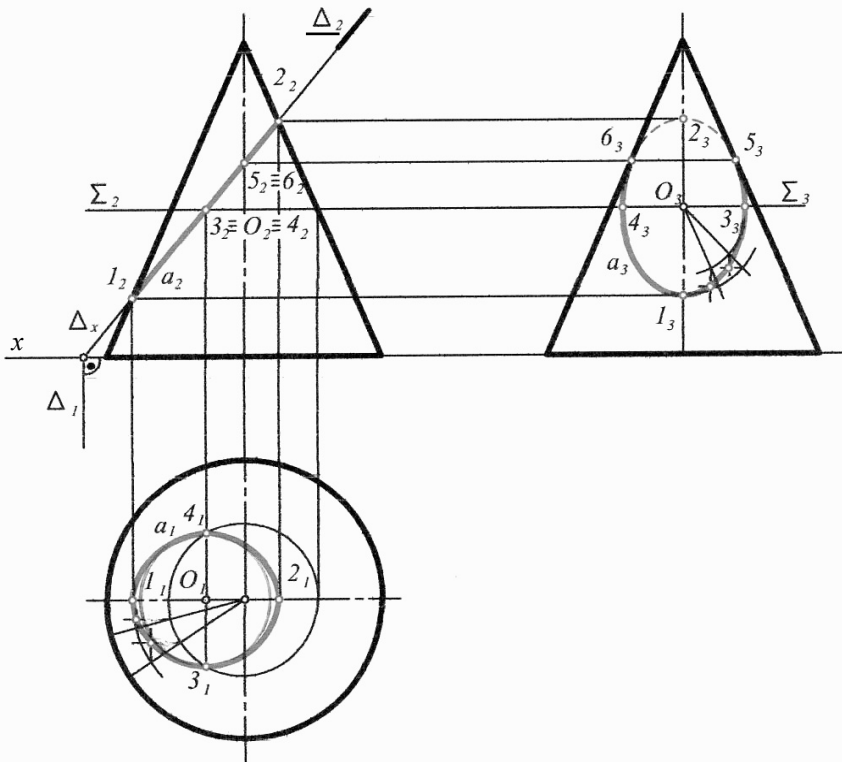


Рис. 11-13

Беремо до уваги, що в даному прикладі площина Δ – фронтально проєктуюча, а Δ_2 – її слід-проєкція, з яким зливається фронтальна проєкція перерізу, який починається з точки 1_2 (точки перетину Δ_2 з лівою стороною фронта-

льного обриса поверхні) і проходить до точки 2_2 (точки перетину Δ_2 з правою стороною фронтального обриса). Звідси, фронтальна проекція a_2 (еліпса a , отриманого в перерізі конуса) визначена відрізком $1_2 \dots 2_2 \equiv \Delta_2$, де $1_2 \dots 2_2$ – фронтальна проекція великої осі еліпса a , а $3_2 \equiv 4_2$ – фронтальна проекція малої осі, яка перпендикулярна Π_2 і розташована на середині $1_2 \dots 2_2$.

Для побудови a_1 – горизонтальної проекції еліпса a , та a_3 – профільної його проекції, за допомогою ліній зв'язку будемо проекції великої осі на (Π_1 – $1_1 \dots 2_1$, та на Π_3 – $1_3 \dots 2_3$). Побудову проекції малої осі $3 \dots 4$ на полі Π_1 виконуємо завдяки допоміжній площині $\Sigma \parallel \Pi_1$, проведені своєю Σ_2 через $3_2 \equiv 4_2$ (середину великої осі 1-2), в перерізі конуса отримано коло, на якому розташовані точки 3 і 4 і далі будуються 3_1 і 4_1 за належністю до отриманого кола, а 3_3 і 4_3 будуються координатним методом. На полі Π_3 будемо 5_3 і 6_3 , точки розташовані на профільних обрисових твірних конуса і вони змінюють знак видимості лінії перерізу. За горизонтальною проекцією $1_1 \dots 2_1$ великої осі та $3_1 \dots 4_1$ – малої осі еліпса a будемо його горизонтальну проекцію, яка відтворюється у вигляді еліпса a_1 . Аналогічно будеться профільна проекція лінії перерізу, яка відтворюється у вигляді еліпса a_3 .

11.2.4. Переріз замкнених поверхонь

11.2.4.1. Перерізи поверхні сфери

Коли поверхня сфери перерізається будь-якою площиною, то в перерізі сфери отримуємо коло. Залежно від того в якій січній площині розташовано це коло, його проекції можуть бути (рис. 11-14, а):

– у вигляді відрізка прямої, розмір якого дорівнює діаметру кола перерізу, коли коло перерізу проектується на площину проекцій, відносно якої площина кола перпендикулярна (на Π_1 та Π_3 коло, яке належить $\Delta \parallel \Pi_2$ та на Π_2 коло, яке належить $\Sigma \perp \Pi_2$);

– у вигляді натуральної величини кола, коли його площина паралельна площині проекцій (на Π_2 коло, яке належить $\Delta \parallel \Pi_2$);

– у вигляді еліпса, коли коло перерізу належить площині, яка розташована під гострим кутом до площини проекцій (на Π_1 та Π_3 коло, належне $\Sigma \perp \Pi_2$; а також на Π_1 та Π_2 коло, яке належить довільній площині загального положення, що показано на рис. Гр.-2).

На прикладі (рис. 11-14 б), поверхня сфери перерізна фронтально проектуючою площиною Δ . В перерізі сфери площиною Δ – отримано коло k , його фронтальна проекція k_2 – відрізок прямої, розмір якого дорівнює діаметру

цього кола, який збігається з фронтальним слідом-проекцією Δ_2 , а його горизонтальна проекція k_1 – еліпс, велика вісь якого дорівнює натуральній величині діаметра кола-перерізу, та мала вісь є проекція спряженого діаметра і розмір малої осі залежить від кута нахилу площини Δ відносно горизонтальної площини проєкцій Π_1 .

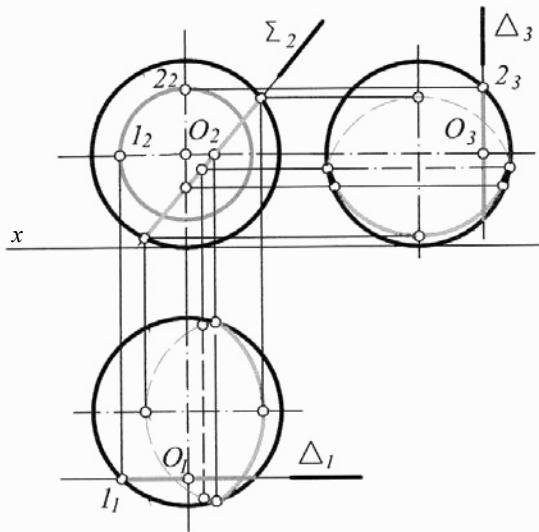


Рис. 11-14, а

При побудові проєкцій кола-перерізу k , в ньому виділяють два спряжених діаметри: один діаметр $1...2$ – паралельний Π_2 , та другий діаметр $3...4$ – фронтально проєктуючий. На поле Π_2 діаметр $1...2$ – проєктується в натуральну величину $1_2...2_2 \equiv \Delta_2$, (як фронтальна проєкція фронталі), а спряжений діаметр $3...4$ – проєктується у вигляді точки (розташованої на середині $1_2...2_2$), як фронтальна проєкція фронтально проєктуючої прямої. На поле Π_1 діаметр $3...4$ проєктується в натуральну величину, як горизонтальна проєкція фронтально проєктуючої прямої і її проєкція $3_1...4_1$ дорівнює натуральній величині діаметра $1...2 = 1_2...2_2 = 3_1...4_1$, а $1_1...2_1$ – горизонтальна проєкція діаметра $1...2$. По $3_1...4_1$ – як великій осі, та $1_1...2_1$ – як малій осі будується еліпс k_1 , який є горизонтальною проєкцією кола-перерізу k .

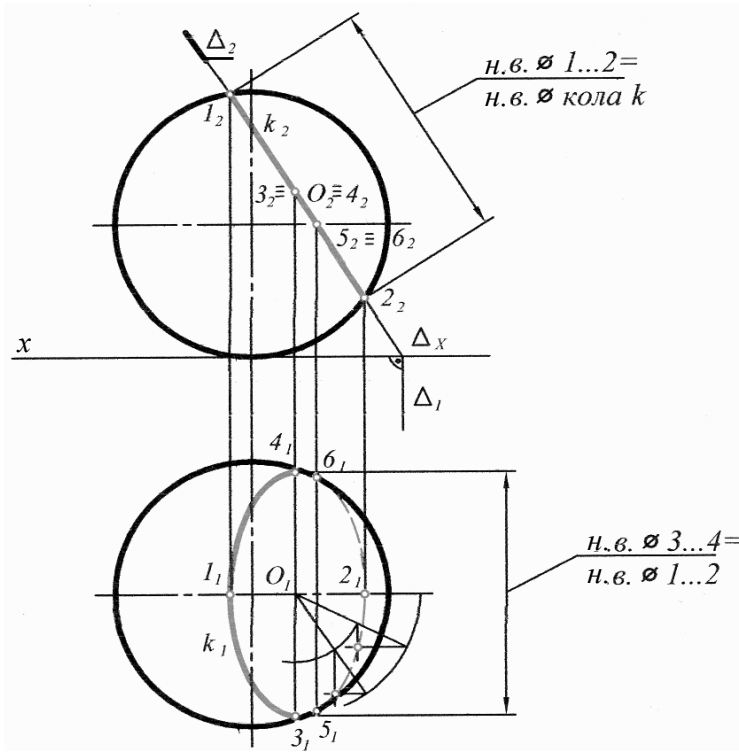


Рис. 11-14, б

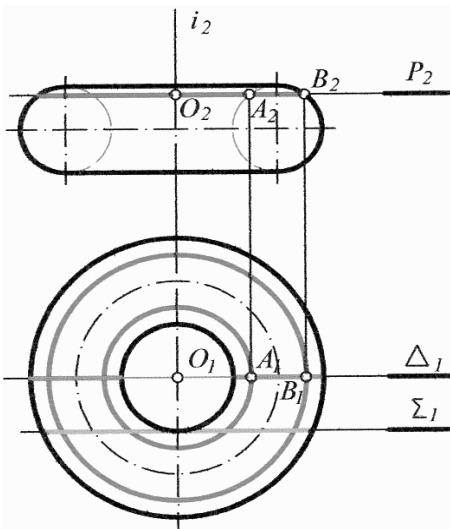


Рис. 11-15

11.2.4.2. Перерізи поверхні тора

Утворення поверхні тора.

Якщо взяти коло m і в площині кола провести вісь i , яка б не перетинала взяте коло та навколо осі i обернути коло m , то це коло, як твірна, утворює в просторі поверхню, що зветься тор відкритий (кільце) (рис. 11-15).

Якщо вісь i' буде перетинатися з колом, то в наслідок обертання кола m навколо осі i' буде утворена поверхня тора – закритого.

Якщо вісь i'' буде проходити через центр кола m , то буде утворена поверхня сфери (яку можна розглядати як різ-

новид поверхні закритого тора).

Визначник поверхні тора має вид:

$$\Phi^m(m, i) [m \cup i],$$

де: m – твірна тора, яка має вигляд кола;

i – вісь обертання твірної, $i \subset \Sigma \supset m$.

При перерізі тора площиною $P(P_2) \parallel P_1$ в перерізі тора (як поверхні обертання) отримуємо два концентричних кола, внутрішнє з яких має радіус, що дорівнює OA , а зовнішнє коло має радіус, який дорівнює OB .

Два кола, радіуси яких OA та OB утворюють кільце, фронтальна проекція якого в вигляді відрізка, що зливається із слідом-проекцією P_2 , а горизонтальна проекція кільця – перерізу є натуральною величиною концентричних кіл радіуса O_1, A_1 , та O_1B_1 .

Якщо перерізати поверхню тора площиною $\Delta (\Delta_1)$, яка проходить через вісь i тора і розташовується паралельно P_2 , то в перерізі отримуємо два кола, які зливаються з фронтальним розташуванням кола – твірної m .

Висновки:

- Коли поверхня тора розрізана площиною, яка перпендикулярна осі тору, то в перерізі отримується кільце, обмежене внутрішнім та зовнішнім колами. Чим ближче січна площина до екватора тора внутрішнє коло кільця – перерізу зменшується, а зовнішнє коло збільшується в пропорційному співвідношенні.

- Коли поверхню тора перерізають площини, розташовані паралельно осі i тора, то утворюється сімейство кривих 4^{20} порядку (лінії Персея).

- Коли поверхня перерізана іншими площинами, в перерізі будуть отримані овали Кассіні (люмініскати Бернуллі, Бута).

11.2.4.3. Перерізи поверхні еліпсоїда обертання

Поверхня еліпсоїда утворюється (подібно як і всі поверхні обертання) за допомогою твірної m , яка має вигляд еліпса, одна з осей якого прийнята за вісь i обертання.

Визначник поверхні еліпсоїда (витягнутого чи сплюснутого)

$$\Phi^e(m, i) [m \cup i],$$

де: m – твірна, яка має вигляд еліпса; i – вісь еліпса.

Якщо поверхню еліпсоїда перерізати площиною $\Sigma (\Sigma_2) \parallel P_1$, яка одночасно перпендикулярна осі i еліпсоїда ($\Sigma_2 \perp i_2$) в перерізі буде отримане коло, так як: будь-яка поверхня обертання перерізана площиною, перпендикулярною до її осі обертання – в перерізі завжди буде коло, радіус якого тим більший, чим ближче буде розташована січна площина до екватора поверхні, утворені кола – перерізи, можна згуртувати в дві родини кіл.

Якщо поверхня еліпсоїда перерізна площиною не перпендикулярною до осі обертання еліпсоїда, завжди переріз має вигляд еліпса, що і видно на рис. 11-16, де площина Δ (Δ_2) та площина P (P_1, P_2) утворюють в перерізі еліпси з різними розмірами їх осей, та різним їх співвідношенням.

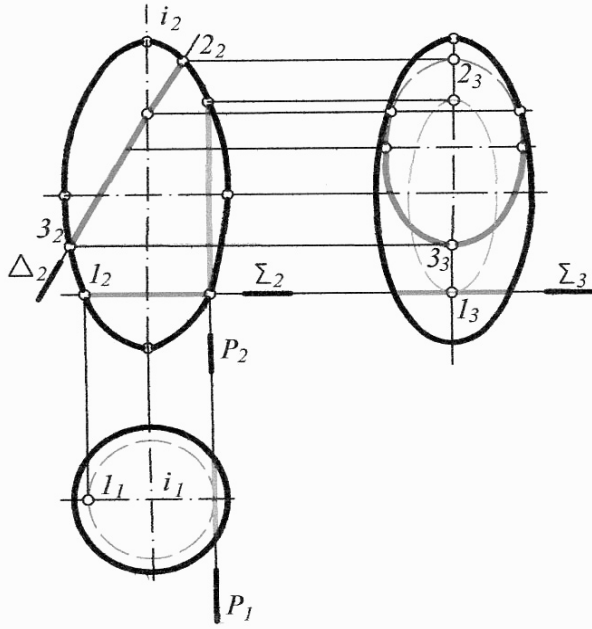


Рис. 11-16

11.2.4.4. Перерізи поверхні триосьового еліпсоїда

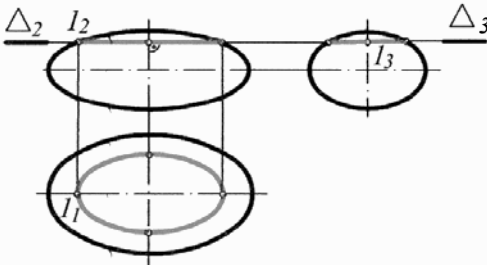


Рис. 11-17

Розглядаючи поверхню триосьового еліпсоїда (рис. 11-17), перерізану площинами, паралельними одній його осі, площинами, паралельними другій осі, або родиною площин, паралельних його третій осі, – в перерізах будуть отримані три відповідних групи подвійних родинних еліпсів.

При відповідному положенні січних площин, паралельних малій осі цього еліпсоїда, можливе отримання двох родин кіл.

11.2.5. Перерізи поверхонь гіперboloїдів

Поверхні гіперboloїда обертання можуть бути утворені наступними геометричними образами та діями з ними:

- Однопорожнинний лінійчатий гіперboloїд може бути утворений за допомогою двох мимобіжних прямих, одна з яких приймається за вісь обертання, а друга пряма обертається навколо осі, за яку прийнята перша пряма.

Відстань між прямою, прийнятою за вісь обертання, (її розташовують переважно вертикально) та прямою, яка утворює поверхню гіперboloїда обертання, – дорівнює радіусу горловини поверхні обертання (найменша паралель поверхні).

- Однопорожнинний гіперboloїд може бути утворений також, коли уявна вісь гіперболи, що утворюється приймається за вісь обертання гілок гіперболи, які обертаються навколо уявної осі.

- Двопорожнинний гіперboloїд обертання може бути утворений коли дійсна вісь гіперболи, приймається за вісь обертання, а дві гілки гіперболи, обертаючись навколо дійсної осі, утворюють дві порожнини, симетрично розташовані відносно уявної осі.

11.2.5.1. Перерізи поверхні однопорожнинного гіперboloїда

Для утворення однопорожнинного лінійчатого гіперboloїда візьмемо дві мимобіжні прямі, одну з яких приймемо за вісь i' і розташуємо її перпендикулярно до Π_i , а другу пряму l будемо обертати навкруги осі i' .

Визначник такої поверхні має вигляд:

$$\Phi^{2o}(l, i') [l \cup i'],$$

де: l та i' – мимобіжні прямі, а пряма i' прийнята за вісь.

Якщо пряму l задати відрізком AB , коли точки A і B розташовані на однаковій відстані від точки C , яка є основою перпендикуляра – відстані між прямими l та i' , то точки A , B і C при обертанні прямої l навколо i' , описують траєкторії – кола відповідно a , b і c , які приймають за три напрямні, по яких ко-взає пряма l поверхні, що утворює однопорожнинний гіперboloїд, визначник якого приймає вид:

$$\Phi^{2o}(a, b, c, l) [l \cap a, b, c],$$

де: a , b , c – напрямні, l – твірна.

Для утворення однопорожнинного гіперboloїда обертання гілки гіперболи будуть обертатись навколо уявної осі гіперболи, то така гіпербола і є твірною гіперboloїда, а уявна вісь гіперболи буде віссю побудованого гіперboloїда. При такому механізмі утворення однопорожнинного гіперboloїда визначник його поверхні має вигляд:

$$\Phi^{2o}(m, i') [m \cup i'],$$

де: m – гіпербола, i' – уявна вісь гіперболи.

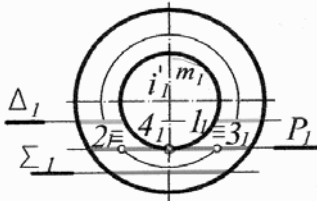
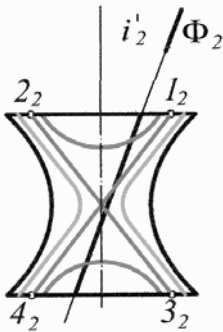


Рис. 11-18

На рис. 11-18 площина $P(P_1) \parallel i'$ дотична до горловини поверхні однопорожнинного гіперboloїда ($P_1 \nabla c_1$), то така площина розтинає гіперboloїд по двом прямим 1.4 і 2.3 що перетинаються між собою в точці дотику площини P до горловини. Ці лінії перерізу поверхні збігаються з фронтальними обрисовими асимптотичного конуса.

$$c \nabla P \cap \Phi^{eo} \Rightarrow 1.4 \cap 2.3$$

Якщо площина $\Sigma(\Sigma_1) \parallel i'$, то вона перерізає поверхню гіперboloїда по двох гілках гіперболи зі спільною дійсною віссю, яка паралельна осі i' .

Якщо площина $\Phi(\Phi_2)$ перерізає поверхню паралельно двом проміжним твірним асимптотичного конуса, тоді в перерізі отримуємо гіперболу.

На рис. 11-19 площина $\Gamma(\Gamma_2)$, що проходить через центр поверхні та збігається з однією твірною асимптотичного конуса, то поверхня гіперboloїда перерізається по двох паралельних твірних 1.2 та 3.4.

Площина $T(T_2) \parallel \Gamma(\Gamma_2)$ перерізає поверхню по параболі.

На рис. 11-20 площина $X(X_2) \wedge i' < 90^\circ$ ($X \wedge i' > l \wedge i'$) (де l – твірна асимптотичного конуса), перерізає гіперboloїд по еліпсу, а площина $\psi(\psi_2) \perp i''$ перерізає гіперboloїд по колу.

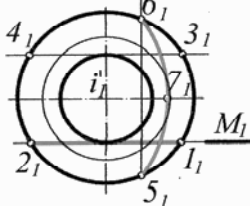
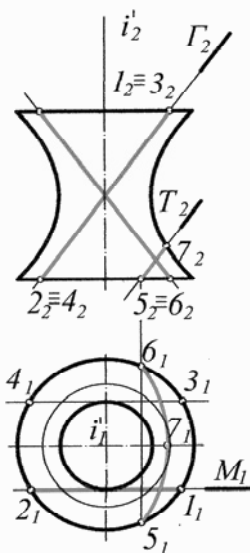


Рис. 11-19

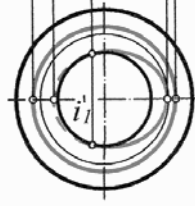
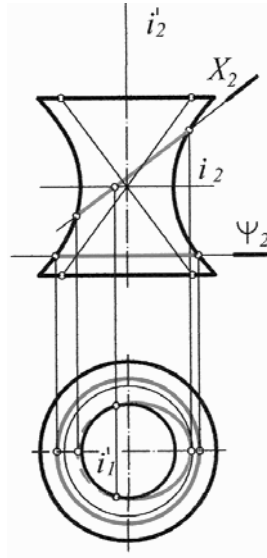


Рис. 11-20

11.2.5.2. Перерізи поверхні двопорожнинного гіперboloїда

Для утворення двопорожнинного гіперboloїда обертання візьмемо гіперболу m і повернемо її навколо її дійсної осі i . Отримана поверхня має визначник такого вигляду:

$$\Phi^{20}(m, i)[m \cup i],$$

де: m – гіпербола, i – дійсна вісь гіперболи.

На рис. 11-21 показано поверхню двопорожнинного гіперboloїда, перерізаного площинами:

- Площини $\Delta(\Delta_2)$ та Δ' (Δ'_1) паралельні осі i , в перерізі поверхні утворюють гіперболу, дійсна вісь якої паралельна осі i .
- Площина T (T_2) $\perp i$ в перерізі поверхні утворює коло, сімейство площин, паралельних площині T утворюють два сімейства кіл.

Двопорожнинний еліптичний гіперboloїд (згального вигляду) наведено на рис. 11-22.

В перерізі поверхні Φ^{200} площиною $P(P_2)$, яка паралельна одній фронтальній твірній асимптотичного конуса, утворюється парабола.

Площина Σ (Σ_2) $\perp i \Rightarrow$ еліпс, а площини, паралельні площині Σ , утворюють дві сім'ї еліпсів.

Площина $A(A_1) \parallel i$ в перерізі поверхні утворює гіперболу з дійсною віссю, яка паралельна осі i гіперboloїда.

Площина $\Delta(\Delta_2) \wedge i < l \wedge i$, паралельна двом твірним асимптотичного конуса, в перерізі гіперboloїда утворює гіперболу.

11.2.6. Перерізи поверхні параболоїда

Можливий розгляд трьох видів поверхонь параболоїдів:

Перший вид – поверхня параболоїда обертання, яка утворюється за допомогою параболи m з її віссю i . Обертання параболи навколо своєї осі утворює поверхню параболоїда обертання (рис. 11 – 23).

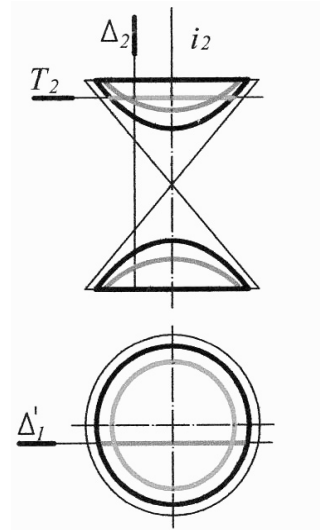


Рис. 11-21

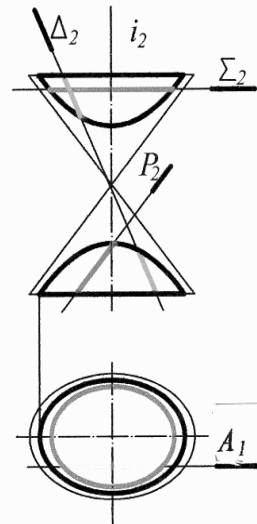


Рис. 11-22

Визначник такої поверхні має вигляд:

$$\Phi^{no}(m, i) [m \cup i].$$

Якщо вісь i параболі перпендикулярна Π_1 , то площина Σ (Σ_2) $\perp i \Rightarrow \Rightarrow$ коло, яким утворений параболоїд „опирається” на Π_1 .

Площина Δ (Δ_2) перерізає параболоїд по еліпсу, горизонтальна проекція якого (згідно з властивістю параболоїда)- коло.

Площина P (P_1) перерізає поверхню по параболі, як видно на рис. 11-24 площини, паралельні осі i , утворюють сімейство парабол m, \dots, m_i .

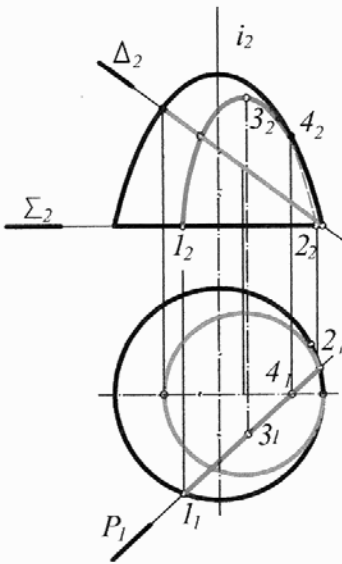


Рис. 11-23

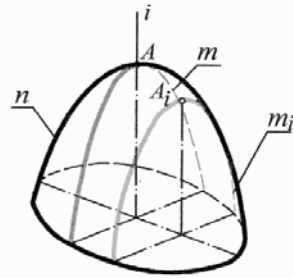


Рис. 11-24

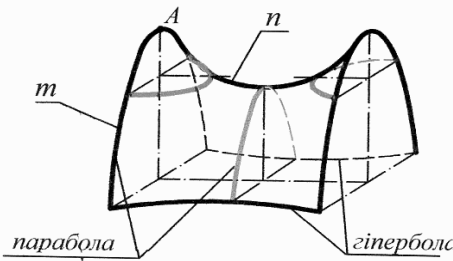


Рис. 11-25

Другий вид – поверхня еліптичного параболоїда, який утворюється переміщенням незмінної параболі m , вершина A якої ковзає по нерухомій параболі n (рис. 11-25). Площина твірної параболі n перпендикулярна до площини твірної параболі m , а вісь має такий самий напрямок.

Вид визначника:

$$\Phi^{ne}(m, n)[m \not\sim n \Rightarrow \bullet A; \Sigma(m_i) \parallel \Sigma(m)],$$

де: m та n – параболі; $\bullet A$ – вершина параболі m , точка дотику m до n , $\Sigma(m) \perp \theta(n)$.

Перерізи гіперболічного параболоїда, як видно на рис. 11-26, наступні:

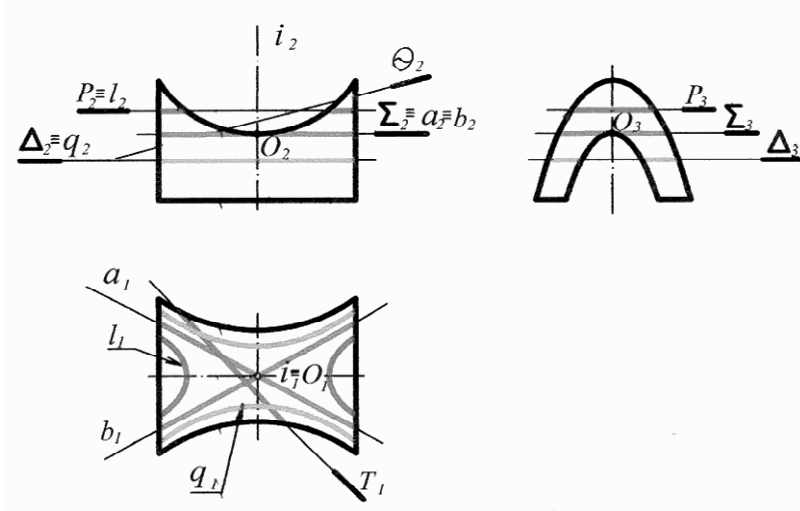


Рис. 11.26

Площина $\Sigma(\Sigma_2)$, яка проходить через вершину O і розташована перпендикулярно до осі i , перерізає поверхню по двох прямих, що перетинаються між собою, це прямі a і b .

Площина $P(P_2)$ розміщена вище від вершини O , перетинає параболоїд по гіперболі з горизонтально розташованою дійсною віссю.

Площина $\Delta(\Delta_2) \perp i$ та розміщена нижче від вершини O , перетинає поверхню по гіперболі з горизонтально розташованою уявною віссю. Асимптоти горизонтальних проєкцій всіх гіпербол – проєкції a_1 та b_1 прямих a та b .

Площина $T(T_1) \parallel i$ перерізає параболоїд по параболі. В окремих випадках, якщо площина T паралельна прямій a або прямій b , – парабола вироджується в пряму.

Площина $\theta(\theta_2) \parallel i$ перетинає параболоїд по гіперболі.

Третій вид – поверхня гіперболічного параболоїда (коса площина), утворюється переміщенням прямолінійної твірної, яка перетинає дві мимобіжні напрямні прями і у всіх своїх положеннях паралельна заданій площині (площині паралелізму). Вигляд визначника такої поверхні:

$$\Phi^{kn}(l, a, b, \Sigma) [l \cap a; l \cap b; l \parallel \Sigma],$$

де: l – твірна-пряма лінія; a та b – напрямні мимобіжні прями; Σ – площина паралелізу. Перерізи Φ^{kn} – прями лінії та параболі.

11.3. Розв'язок задач другого виду (в яких січна площина – площина загального положення перерізає довільну поверхню)

Серед задач другого виду виділяються:

— **перший підвид** задач, в яких площина загального положення перерізає проєктуючи поверхню, — рішення таких задач виконується за ознакою належності точок, перетину проєктуючих ліній (твірних, ребер...) поверхні, яка перерізається, до січної площини;

— **другий підвид** задач, в яких площина загального положення перерізає будь-яку поверхню складну для побудови в перетвореному виді, — рішення таких задач виконується за загальною методикою (п. 11.1) з урахуванням належності лінії перерізу до поверхні;

— **третій підвид** задач, в яких площина загального положення перерізає будь-яку поверхню просту для побудови в перетвореному виді, — загальна методика розв'язання таких задач:

а) умова задачі другого виду перетворюється в умову задачі першого виду, для цього вид умови задачі на полях $\frac{P_2}{P_1}$ перетворюється в такий вид, в

якому задана січна площина загального положення буде перетворена в площину проєктуючу. Для цього може бути застосовано довільний метод перетворення проєкцій. Найбільш ефективним є метод заміни площин проєкцій. При його застосуванні поле P_2 змінюється на поле P_4 , яке розташовується перпендикулярно до заданої січної площини Σ , тобто:

$$x \frac{P_2}{P_1} \rightarrow x_1 \frac{P_1}{P_4}; P_4 \perp \Sigma(\Sigma_2, \Sigma_1); P_4 \perp P_1;$$

$$P_4 \cap P_1 \Rightarrow x_1 \perp \Sigma_1 \Rightarrow \Sigma_4 (\text{слід-проєкція}) \cap \Phi_4 \Rightarrow \text{л.п на } P_4.$$

б) Розв'язується задача на перетвореному виді (задача першого виду) де отримано проєкцію перерізу, яка зливається з слідом-проєкцією Σ_4 січної площини.

в) Переноситься розв'язок задачі з перетвореного виду на поля вихідної умови задачі.

Якщо в рішенні пункту а) застосовано метод заміни площин, то розв'язана задача першого виду на полях $\frac{P_1}{P_4}$ і її розв'язок переноситься на поля $\frac{P_2}{P_1}$,

(при цьому, точки перерізу поверхні площиною, як точки належні поверхні, переносяться з P_4 на P_1 і далі з P_1 на P_2) (рис. 11-27).

11.3.1. Переріз поверхні похилого конуса

На рис. 11-27 наведено конус еліптичний похилий, поверхня якого перерізна площиною $\Delta(\Delta_1, \Delta_2)$ – загального положення. Необхідно побудувати проєкції лінії перерізу на полях Π_1 та Π_2 .

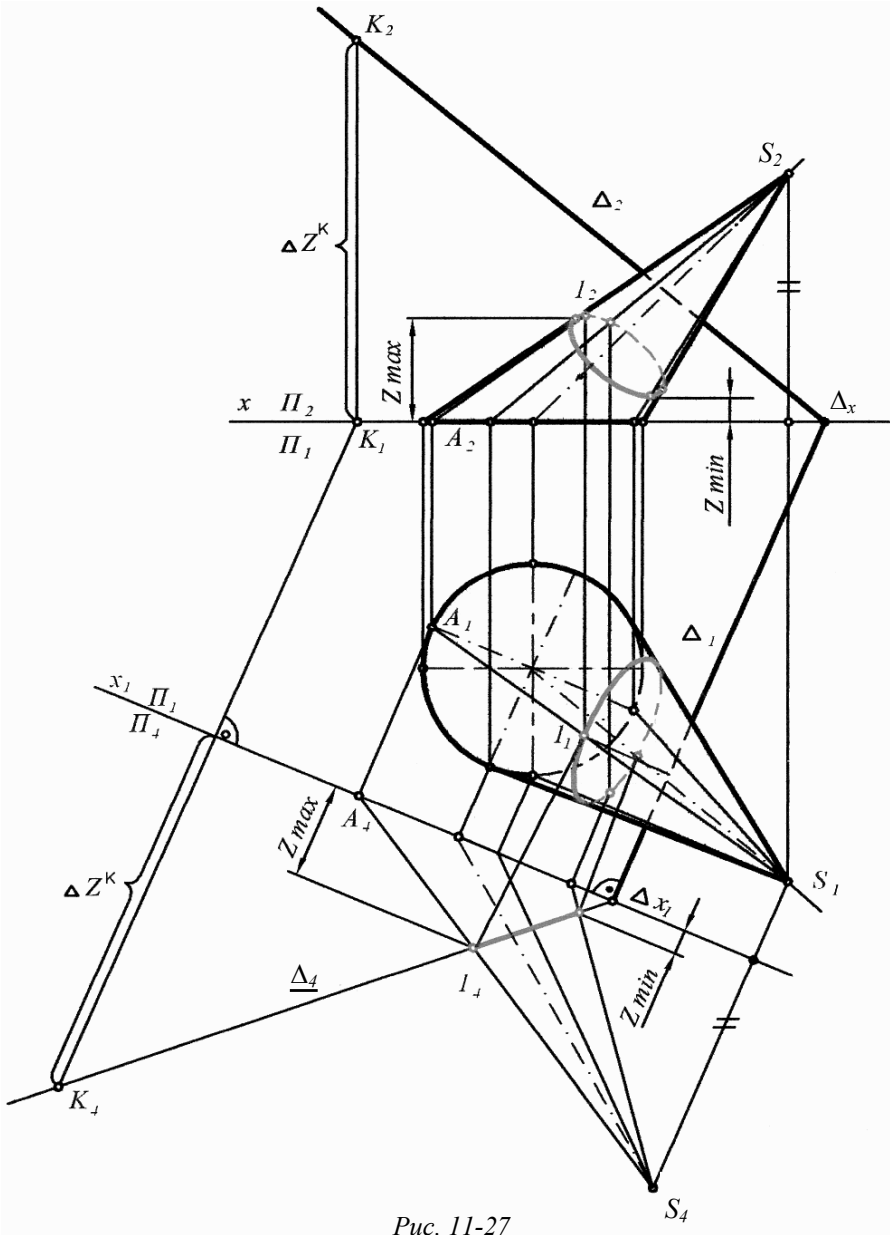


Рис. 11-27

Така задача, в якій заданий конус – довільна поверхня, а січна площина Δ – загального положення, відноситься до задач другого виду, розв’язання якої виконується за наступною методикою:

1. Виконується перетворення умови задачі другого виду в перший вид, в якому задана поверхня буде перерізна проектуючою площиною.
2. Виконується розв’язок задачі в перетвореному виді.
3. Переноситься розв’язок задачі з перетвореного виду на поля вихідної умови задачі.

Для перетворення умови задачі застосовується один з методів перетворення проєкцій, наприклад, застосуємо метод заміни площин проєкцій. Перетворення січної площини Δ загального положення в проєктує положення виконується перетворенням:

$$\begin{aligned}
 x \frac{P_2}{P_1} &\rightarrow x_1 \frac{P_1}{P_4}, \text{ в якому: } P_4 \perp \Delta; P_4 \perp P_1; \\
 P_4 \cap P_1 &\Rightarrow x_1 \perp \Delta_1; x_1 \cap \Delta_1 \Rightarrow \Delta x_1; \\
 \Delta \supset \bullet K &\equiv K_2 \subset \Delta_2 \Rightarrow K_1 \subset x; \\
 K_1 \supset \text{л.з. } \perp x_1; &\Delta Z^K \subset \text{л.з. (з } P_2 \text{ на } P_4) \Rightarrow K_4 \\
 \Delta x_1 \cup K_4 &\Rightarrow \Delta_4 \text{ слід-проєкція!} \\
 \Delta_1 \text{ та } \Delta_4 &\Rightarrow \Delta \text{ на полях } \frac{P_1}{P_4}.
 \end{aligned}$$

Так виконано перетворення січної площини Δ (загального положення на полях $\frac{P_2}{P_1}$) в проєктує на полях $\frac{P_1}{P_4}$.

Побудова проєкції поверхні конуса на полі P_4 виконується шляхом побудови вершини S_4 проєкції основи конуса та відтворення обрисових поверхні.

Отримано на полях $\frac{P_1}{P_4}$ задачу першого виду (поверхня конуса перерізна проектуючою площиною).

Розв’язок задачі в перетвореному виді (на полях $\frac{P_1}{P_4}$) виконується з ура-

хуванням того, що на полі P_4 слід-проєкція Δ_4 , перерізаючи поверхню конуса, утворює проєкцію фігури перерізу (розташовану на Δ_4 між обрисовими твірними поверхні конуса). Для фігури перерізу визначаються висоти Z_{max} та Z_{min} , відповідно найвищої та найнижчої точки перерізу. По проєкції лінії перерізу на полі P_4 за ознакою належності точок лінії перерізу до поверхні конуса,

будується проекція точок лінії перерізу на полі Π_1 , з'єднавши які, отримуємо горизонтальну проекцію лінії перерізу (яка має вигляд еліпса).

Перенесення розв'язку задачі (побудова лінії перерізу) з системи полів $x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}$ на поля вихідної системи $x \frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ виконується за ознакою належності точок лінії перерізу до поверхні конуса (по належності точок перерізу до твірних конуса), або координатним способом, при виконанні якого застосовуються координати висот точок перерізу, відомі на полі Π_4 , переносяться на поле Π_2 , що можливо прослідкувати за побудовою точки 1 належній твірній SA .

11.4. Розгортки поверхонь

Розгортки поверхонь необхідно виконувати в тому випадку, коли робоча поверхня виготовляється з листового матеріалу (наприклад, при виготовленні котельно-зварювальним способом таких виробів, як трубопроводи круглих або прямокутних вентиляційних трубопроводів, водовідвідних труб, при виготовленні резервуарів і т.д.) з подальшим згинанням листа заготовки для отримання заданої поверхні. Для отримання такого листа-заготовки виконують комплексний кресленик поверхні необхідного виробу, по цьому кресленку виконують розгортку поверхні, вид якої переносять на більш жорсткий листовий матеріал і з нього роблять викрійку з нанесенням ліній згинання, далі викрійку накладають на лист, з якого буде виготовлено майбутній виріб (з нанесенням ліній згинання, якщо вони є) і форма викрійки переноситься на лист. Далі залежно від вибраної технології виготовлення (гнуття, штампування чи інша) з листа-заготовки отримують виріб.

Розгортка поверхні це частина площини, обмежена замкненою фігурою, яка утворена, наприклад, при суміщенні поверхні з площиною.

Всі поверхні поділяють на:

- Розгортні, це такі поверхні, що суміщуються з площиною без розривів та складок. При суміщенні без ковзання поверхні по площині, а суміщення виконувалось по прямій, дотичній до площини (або поверхні до площини).
- Нерозгортні, це такі поверхні, для суміщення яких з площиною необхідно їх розтягувати або стискати, що призведе до розривів або складок поверхні.

До розгортних поверхонь відносять тільки лінійчаті поверхні (в яких суміжні твірні — прямі паралельної або перетинаючі лінії).

Особливості зв'язку розгортної поверхні та її розгортки:

- Кожній точці (фігурі) на поверхні відповідає точка (фігура) на розгортці.

- Довжина лінії на розгортці поверхні дорівнює довжині відповідної лінії на поверхні.
- Кути між лініями на розгортці дорівнюють відповідним кутам між лініями на поверхні.
- Кожній прямій на поверхні відповідає пряма на розгортці.
- Паралельні прямі на поверхні відповідають паралельним прямим на розгортці.
- Лінії на поверхні, яка з'єднає дві її точки по найкоротшому шляху, відповідає пряма на розгортці і така лінія зветься геодезичною.

Найбільш розповсюджені методи побудови розгорток:

- метод суміщення;
- метод трикутників;
- метод розкочування;
- метод триангуляції;
- метод побудови умовних (наближених) розгорток.

11.4.1. Побудова розгортки методом суміщення

Цей метод застосовується при побудові розгорток лінійчатих поверхонь (багатогранників або окремих кривих поверхонь).

Техніка виконання суміщення — перекочування, для цього поверхня, що розгортається, своєю характерною лінією (ребром багатогранника, або твірною криволінійної поверхні) суміщується з площиною (отримали відбиток лінії на площині), “перекочуємо” поверхню від суміщеної лінії по площині без ковзання з зображенням всіх характерних ліній поверхні (якими можуть бути ребра, наприклад, піраміди чи призми, або характерні твірні конуса чи циліндра). Таке перекочування поверхні продовжується до повторного злиття з площиною першої характерної лінії, з якої починалося суміщення. Отримується розгортка бічної поверхні геометричного тіла, а для отримання його повної розгортки, необхідно розгортку його бічної поверхні доповнити зображенням основи (основ), що можна буде отримати перекочуванням тіла до суміщення основи з площиною, в спільній точці з розгорткою бічної поверхні.

11.4.1.1. Розгортка поверхні прямої шестигранної піраміди, зрізаної проектуючою площиною

На рис. 11-28 наведено пряму правильну шестигранну піраміду, перерізану фронтально проектуючою площиною $\Delta(\Delta_1, \Delta_2)$. Необхідно побудувати натуральну величину фігури перерізу і повну розгортку зрізаної піраміди.

Враховуючи те, що дана задача відноситься до задач першого виду, відмічаємо, що фігура перерізу на полі Π_2 збігається з Δ_2 — слідом проекцією, а

горизонтальна проекція фігури перерізу будується за належністю вершин шестикутника перерізу до бічних ребер піраміди.

Натуральну величину фігури перерізу будуємо методом суміщення січної площини $\Delta \perp l_2$ шляхом її обертання навколо горизонтального сліду $\Delta_1 (\Delta_1 \perp x)$. При обертанні площини з фігурою перерізу, отримуємо траєкторії – дуги кіл (які описують вершини), розташовані в своїх відповідних фронтальних площинах, по їх фронтальних та горизонтальних проекціях будуємо суміщене положення перерізу з площиною l_1 , отримуємо $\bar{1}_1 \bar{2}_1 \bar{3}_1 \bar{4}_1 \bar{5}_1 \bar{6}_1$, що є натуральною величиною фігури перерізу поверхні піраміди.

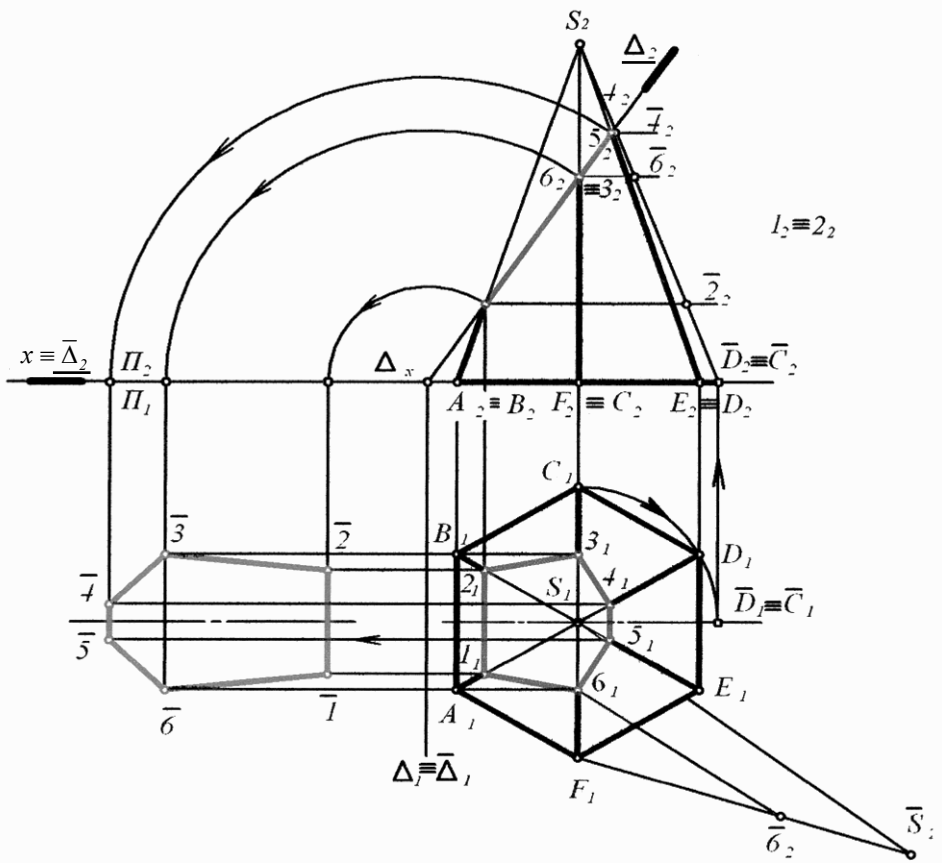


Рис. 11-28

Розгортку поверхні зрізаної піраміди будуємо методом суміщення поверхні з площиною кресленника при її послідовному перекичуванні. Для цього

поверхню суміщуємо ребром 1.A (рис. 11-29) з площиною кресленика і перекочуємо піраміду (обертаючи її навколо суміщеного ребра) до злиття грані 1AB2.1 з площиною.

Отримано відбиток першої грані, де положення піраміди приймається за вихідне. Обертаючи піраміду навколо ребра AB до злиття з площиною, отримуємо відбиток основи ABCDEFA піраміди.

Повернувши піраміду у вихідне положення, обертаємо її навколо ребра 1,2 до злиття з площиною, отримуємо відбиток 1.2.3.4.5.6.1 фігури перерізу.

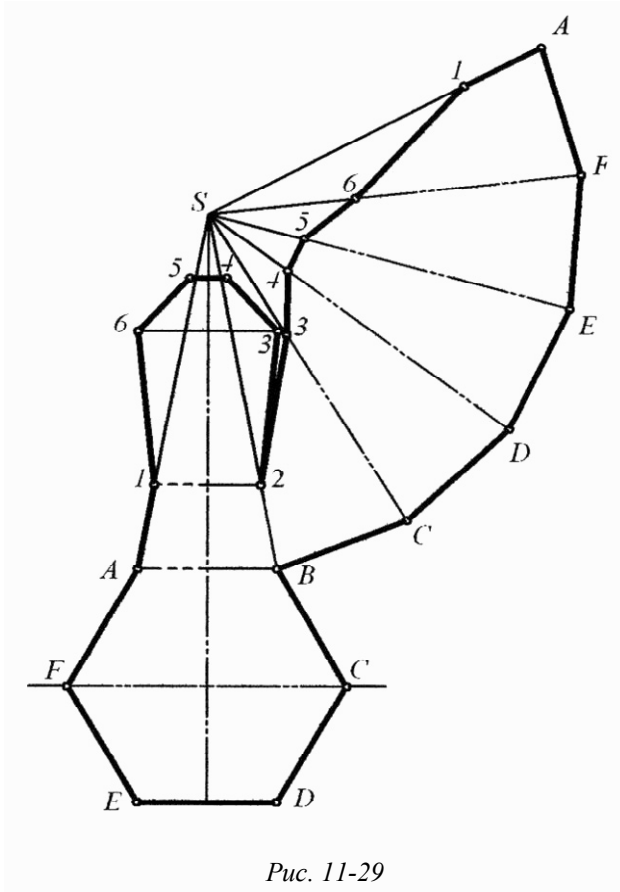


Рис. 11-29

Повертаємо піраміду у вихідне положення. Обертаємо далі піраміду навколо ребра 2B до співпадання з площиною, отримуємо відбиток грані 2BC3.2, подальшим перекочуванням піраміди навколо ребра 3C, отримуємо відбиток грані 3CD4.3 та так надалі отримуємо відбитки грані 4DE5.4, 5EF6.5, 6FA1.6. Отримавши повторний відбиток ребра 1A, отримали повний

відбиток – розгортку поверхні всієї зрізаної піраміди. Обрис розгортки відтворюємо суцільною товстою лінією, а проміжні характерні лінії – ребра 1,2, АВ, 2В, 3С, 4D, 5Е, 6F, які є лініями згину на розгортці, відтворюються штрих-пунктирною лінією з двома точками.

Застосований метод суміщення – перекочування є найбільш простим і дає змогу отримати викрійку поверхні без проміжної побудови кресленика розгортки.

Такий метод дає змогу отримати викрійку поверхні, отриманої навпаки, легкогнучким аркушем (паперу) обгортаємо поверхню, яку ускладнено перекочувати по аркушу, але потрібно слідкувати за повним приляганням аркуша до поверхні без розривів та складок, з наступним вирівнюванням аркуша, що дає викрійку поверхні, тобто форму заготовки окреслюємо по її викрійці, не виконуючи кресленика розгортки.

11.4.2. Побудова розгортки методом трикутників

Даний метод застосовується переважно при побудові розгортки поверхонь багатогранників. Їх розгортки являють плоску фігуру, складену з граней багатогранника, спряжених між собою по спільних ребрах і суміщених з площиною. Для побудови кожної грані багатогранника її розбивають на трикутники, а для побудови кожного утвореного трикутника визначається натуральна величина кожної сторони трикутника, та за ними будуються трикутники, стиковані по спільних сторонах – утворюється грань, стикована з іншою гранню по спільному ребру, – утворюючи розгортку.

11.4.2.1. Розгортка поверхні похилої тригранної піраміди, перерізаної площиною загального положення

На рис. 11-30 наведено похилу тригранну піраміду, перерізану площиною $\Delta(\Delta_1, \Delta_2)$ – загального положення. Необхідно побудувати повну розгортку піраміди та нанести на ній лінію зрізу поверхні площиною та фігуру зрізу.

Розв'язання задачі виконується в такій послідовності:

1. Побудова лінії зрізу поверхні площиною.

Розглядаючи умову задачі, відмічаємо, що задача в якій довільна поверхня перерізна площиною загального положення, відноситься до задач другого виду і розв'язання її повинно бути виконано в такій послідовності:

- Виконується перетворення умови задачі другого виду в перший вид;
- Розв'язок задачі в перетвореному виді;
- Переноситься розв'язок задачі з перетвореного виду на поля вихідної умови задачі.

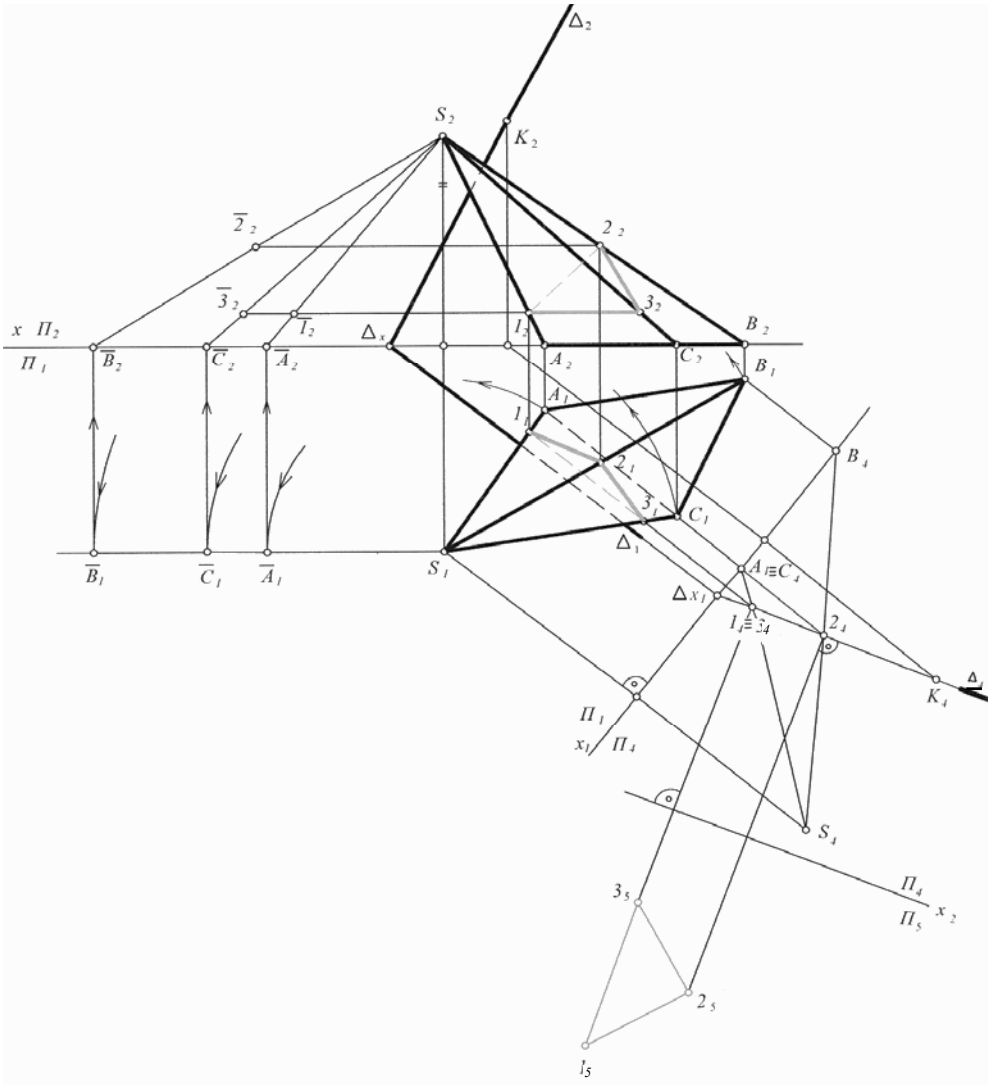


Рис. 11-30

Перетворення виконується, так як показано на рис. 11-31, для цього виконуємо заміну:

$$x \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}, \text{ так, щоб } \Pi_4 \text{ була перпендикулярна до заданої площини } \Delta$$

загального положення і до площини Π_1 , при цьому:

$\Pi_4 \cap \Pi_1 \Rightarrow x_1 \perp \Delta_1; x_1 \cap \Delta_1 \Rightarrow \Delta x_1$; вибираємо довільну точку K розташовану в площині Δ і належну сліду Δ_2 :

- (• $K \subset \Delta$ і • $K \subset \Pi_2 \Rightarrow K_2 \subset \Delta_2 \Rightarrow K_1 \subset x$; $K_1 \subset \text{л.з} \perp x_1$; л.з. $\cap x_1 \Rightarrow Kx_1$;
 $\Delta Z^K \subset \text{л.з.} \Rightarrow K_4$;
- $\Delta x_1 \cup K_4 \Rightarrow \Delta_4$ слід-проекція. Отримуємо площину $\Delta(\Delta_1, \Delta_4) \perp \Pi_4$.

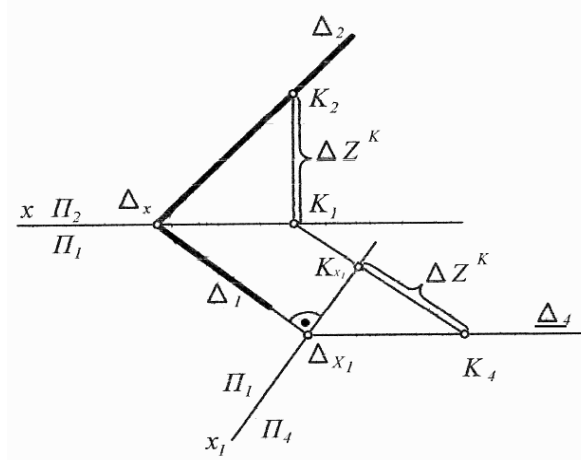


Рис. 11-31

Виконавши вищенаведене перетворення площини, виконуємо побудову проекції поверхні на Π_4 (побудувавши вершину S_4 та вершини основ піраміди і з'єднавши їх з вершиною S_4 , – отримуємо на полях $x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}$, перетворену умову задачі, в умову задачі першого виду.)

Розв'язок задачі в перетвореному виді починаємо з визначення лінії перерізу поверхні на Π_4 , якою буде відрізок $1_4.3_4 \equiv 2_4$, який збігся з Δ_4 . Горизонтальна проекція лінії перерізу будується по її проекції на Π_4 та належністю вершин 1, 2, 3, до відповідних бокових ребер SA , SB , та SC . Отримана проекція ліній перерізу $1_1 2_1 3_1$, разом з проекцією $1_4.3_4 \equiv 2_4$. на полі Π_4 , визначають проекцію лінії перерізу в перетвореному виді на полях $x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}$.

Перенесення розв'язку задачі з перетвореного виду на поля вихідної умови задачі зводиться до побудови лінії перерізу на полі Π_2 , що виконується по горизонтальній проекції перерізу та належністю фронтальних проекцій його вершин до фронтальних проекцій відповідних ребер піраміди. Отримана проекція $1_2 2_2 3_2$, разом з побудованою, при виконанні попередньої дії, проекцією $1_1 2_1 3_1$ відтворюють проекції лінії перерізу вихідної задачі другого виду.

Визначення натуральної величини перерізу $1.2.3_1$ відбувається виконанням другого перетворення $x_1 \frac{P_1}{P_4} \rightarrow x_2 \frac{P_4}{P_5}$, коли площина P_5 розташується паралельно площині Δ . На рис. 11-30 проводимо $x_2 \parallel \Delta_4$ і з $1_4, 2_4, 3_4$, проводимо лінії зв'язку перпендикулярно до осі x_2 на їх продовженні відкладаємо координати цих точок, взявши їх з поля через одне відносно P_5 , на якій отримано $1_5, 2_5, 3_5$, що і є натуральною величиною лінії фігури перерізу піраміди.

2. Побудова повної розгортки піраміди $SABC$.

Розгортка поверхні піраміди є плоска фігура, складена з трьох трикутників – бічних граней піраміди та четвертого трикутника – основи тригранної піраміди.

Для побудови повної розгортки піраміди застосовуємо метод трикутників. Для побудови спряжених по спільних ребрах – сторонам чотирьох трикутників, визначаємо натуральні величини сторін всіх трикутників. Трикутник основи піраміди належить площині P_1 і на горизонтальній проекції сторони трикутника основи відтворені в натуральну величину. Бічні ребра піраміди є сторонами трикутників бокових граней піраміди.

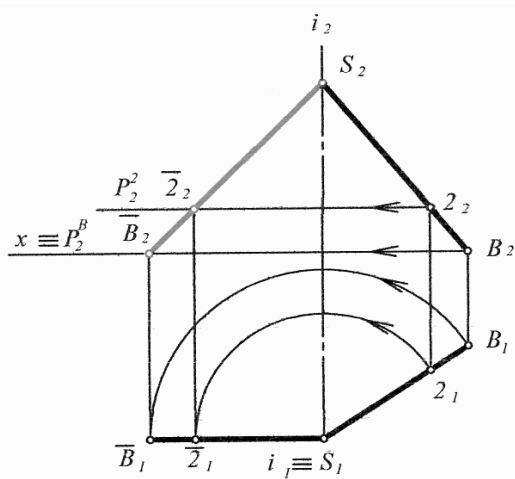


Рис. 11-32

Натуральну величину бокових ребер SA, SB і SC визначаємо (на рис. 11-30). Методом обертання, методику визначення натуральної величини ребра SB показана на рис. 11-32. Ребро SB відрізок прямої загального положення, обертається навколо осі $i \perp P_1$ до фронтального положення, при цьому $S_1\bar{B}_1$ розташується паралельно осі x , а фронтальна проекція $S_2\bar{B}_2$ – є натуральною величиною ребра SB . Одночасно зображена побудова фактичного розташування точки 2 на ребрі SB , отриманої при перерізі

ребра січною площиною. Таким чином на рис. 11-30 отримані натуральні величини $AS = \bar{A}_2S_2$, ребра $SB = S_2\bar{B}_2$, ребра $SC = S_2\bar{C}_2$.

Застосовуючи метод трикутників, побудуємо стиковані між собою по спільним сторонам, ребрах, трикутники, утворюючи повну розгортку поверхні. Для цього на рис. 11-33 показано, для прикладу побудову трикутника грані SCB .

Побудову розпочнемо з довільно взятої точки S на полі кресленика, з неї, як із центра, проводимо радіусом $R = S_2\bar{B}_2$ дугу і на ній вибираємо точку B , яку з'єднуємо з точкою S , отримано першу сторону SB трикутника SCB , на якій відкладаємо радіусом $R = S_2\bar{2}_2$ з точки S , як із центра, – отримуємо точку 2 на ребрі SB . З точки S радіусом $R = S_2\bar{C}_2$ проводимо дугу, а з точки B радіусом $R = B_1C_1$ проводимо дугу кола і в перетині її з попередньою дугою отримаємо вершину C , яку з'єднуємо з точками S і B – отримаємо натуральну величину трикутника SBC . На стороні SC радіусом $R = S_2\bar{3}_2$ будемо точку 3 – перетин ребра SC з площиною Δ .

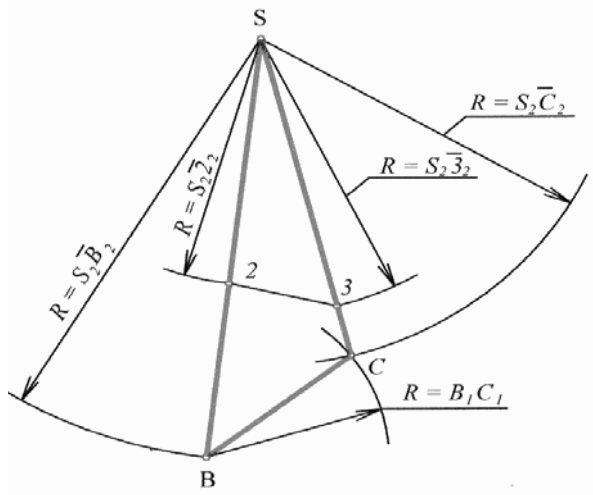


Рис. 11-33

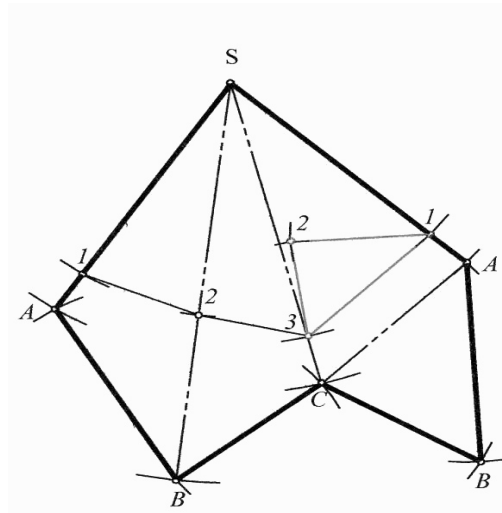


Рис. 11-34

По аналогії до побудови трикутника SBC будуються трикутники SBA та SCA на рис. 11-34 з нанесенням точок $1, 2, і 3$, з'єднавши які, отримуємо лінію $1-2-3$ перерізу поверхні $SABC$ площиною Δ . Добудувавши трикутники перерізу $1, 2, 3$, сумістивши його спільною стороною з лінією 1.3 перерізу та добудувавши трикутник ABC (основу піраміди), сумістивши його спільною стороною AC з трикутником грані SAC , – отримаємо зображену на рис. 11-34 повну розгортку піраміди $SABC$ з нанесенням лінії $1.2.3.1$ перерізу піраміди площиною Δ .

11.4.3. Побудова розгортки методом триангуляції

Метод триангуляції – виконання триангуляційного перетворення (побудова з максимальним наближенням).

Цей метод пропонується для побудови розгорток кривих розгортних та нерозгортних поверхонь.

Метод полягає в тому, що на заданій поверхні будується триангуляційна сітка (виконується триангуляція по дугах чи прямих поверхні), яка розбиває всю поверхню на відсіки-порції, кожен з яких апроксимується більш простим, для побудови розгортки, відсіком (поверхні чи площини).

Побудова розгортки розгортної кривої поверхні зводиться до того, що крива поверхня апроксимується з необхідною точністю гранною поверхнею. Будується розгортка апроксимуючого багатогранника (вписаного чи описаного), що можливо виконати, наприклад, методом трикутників. В подальшому отриманні точки на розгортці, що були вершинами ламаної лінії, яка заміняла криву лінію триангуляційної сітки, з'єднуємо кривою лінією.

Побудова розгортки нерозгортної кривої поверхні зводиться до того, що триангульована поверхня підлягає подвійній апроксимації. Перша апроксимація зводиться до заміни відсіків нерозгортної поверхні на відсіки найпростіших розгортних поверхонь (краще конічних, чи циліндричних). Друга апроксимація зводиться до заміни відсіків апроксимуючих поверхонь площинами трикутників.

Такий метод забезпечує наближену побудову розгортки кривої поверхні, а ступінь точності побудови кривої поверхні методом триангуляції визначається апроксимаційним коефіцієнтом K_a :

$$K_a = \frac{L_a}{L_x},$$

де: L_a – довжина дуги триангуляційної сітки; L_x – довжина хорди, якою апроксимується дуга, довжиною L_a .

Чим менший K_a , тим точніша розгортка поверхні.

11.4.3.1. Розгортка поверхні прямого коноїда

На рис. 11-35 наведено епюрне зображення поверхні прямого коноїда, у якого одна напрямна AB – півкола, яке належить фронтальній площині, а друга напрямна CD – пряма лінія, а площина P_3 , – є площиною паралелізму. Необхідно побудувати розгортку поверхні заданого коноїда.

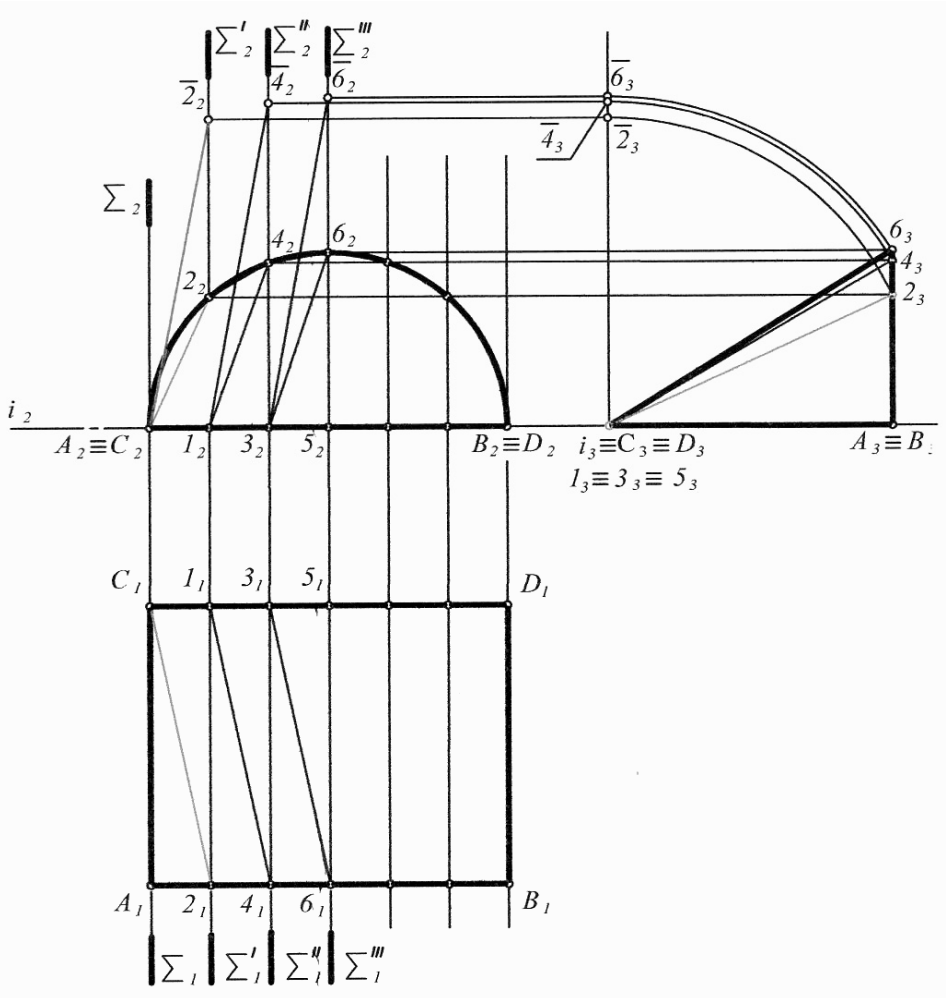


Рис. 11-35

Поверхня коноїда відноситься до нерозгортних поверхонь і розгортку заданої поверхні пропонується виконувати методом триангуляції, для цього:

1. Будеться триангуляційна сітка шляхом проведення триангуляції по дузі AB (точками $A, 2, 4, 6$ та їм симетричних), та по прямій CD (точками $C, 1, 3, 5$ та їм симетричних) виконану площинами паралелізму $\Sigma \parallel P_3$ ($\Sigma', \Sigma'', \Sigma''' \parallel P_3$). Утворено триангуляційну сітку, яка складається з криволінійних нерозгортних поверхонь відсіків $1CA2.1, 3.1.2.4.3, 5.3.4.6.5$, та їм симетричних.

2. Виконується апроксимація утворених відсіків, враховуючи те, що кожен відсік має по чотири вершини і обведений чотирма лініями. Так у відсіку

1CA2.1 сторони 1C – пряма лінія; A2 – крива лінія; AC та 1.2 прямі твірні поверхні. З'єднавши вершину C з вершиною 2, отримуємо два конуси криволінійної поверхні. Частина A2C заміняємо конічною поверхнею з вершиною в точці C та дугою A2 в основі, криву C2 заміняємо прямою C2, яка приймається за одну твірну конічної поверхні, а твірна AC заданого коноїда приймається за другу твірну апроксимуючої конічної поверхні. Друга частина 1C2 розглядаємого відсіка, має нерозгортну криволінійну поверхню, а при попередній заміні кривої C2 на пряму C2, поверхня 1C2 заміняється трикутником 1C2.

Надалі виконується друга апроксимація, при якій конічна поверхня A2C, апроксимується площиною трикутника A2C, при якій дуга A2 замінена хордою A2. Таким чином, відсік 1.CA2.1 нерозгортної поверхні замінено парою трикутників A2C та 1C2.

Аналогічно виконується подвійна апроксимація інших відсіків криволінійної нерозгортної поверхні, парами трикутників.

Виконання розгортки відсіків поверхні виконується методом трикутників. Для цього виконується визначення дійсних величин сторін апроксимуючих трикутників.

Сторони C1, 1.3, 3.5 відтворені в натуральну величину своїми горизонтальними та фронтальними проекціями. Сторони AC, 2.1, 4.3, 6.5 відтворені в натуральну величину своїми профільними проекціями (які належать профільним площинам Σ). Натуральні величини сторін C2, 1.4, 3.6 – визначені методом обертання навколо CD, прийнятої за вісь обертання і натуральними величинами є $A_2\bar{2}_2$, $1_2\bar{4}_2$, та $3_2\bar{6}_2$.

Методом трикутників будуюмо (рис. 11-36) розгортку кожного відсіку, які спряжені між собою їх спільними твірними 1.2, 3.4, 5.6, та її симетрично розташовану праву частину.

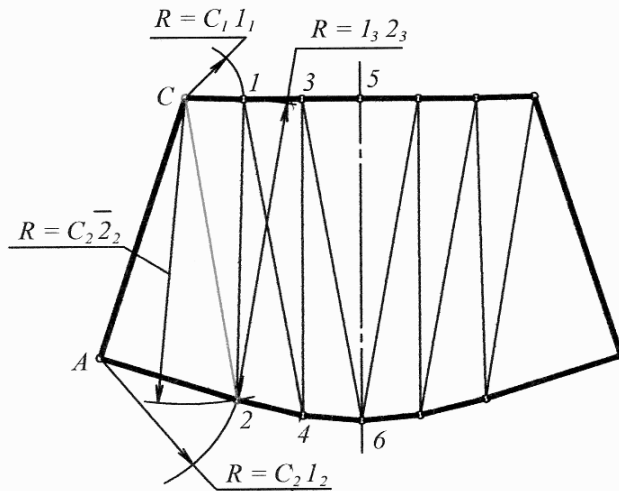


Рис. 11-36

Отримана розгортка є наближеною (умовною) розгорткою поверхні заданого коноїда, для підвищення точності побудови його розгортки кількість площин Σ збільшується.

Для виготовлення нерозгортної поверхні по її розгортці з листового матеріалу, лист-заготовку вигинають, в окремих місцях розтягують або стискають з подальшим зачищенням місць деформації.

11.4.4. Побудова розгортки методом розкочування

Цей метод пропонується для побудови розгортних поверхонь, переважно при побудові розгортки поверхонь з характерними належними поверхні лініями, паралельними між собою (переважно поверхонь призматичної або циліндричної форми).

Метод полягає в тому, що поверхня перерізається площиною перпендикулярно до паралельних між собою ліній поверхні. В перерізі отримується нормальний переріз у вигляді замкненої (або розімкненої) лінії. Далі на довільній лінії відкладаємо вирівняну розкочену лінію нормального перерізу з нанесенням точок перетину всіх паралельних ліній поверхні з січною площиною. Через точки перетину, нанесені на вирівняній лінії перерізу, проводять допоміжні прямі, перпендикулярно розташовані до розкоченої лінії перерізу. На допоміжних прямих відкладають натуральні величини паралельних ліній поверхні (ребра чи твірні), кінці яких з'єднуємо між собою відповідним чином (ламаню, або кривою). Добудувавши основи розгортуючої поверхні дотично до отриманої розгортки її бічної поверхні, – отримуємо повну розгортку геометричного тіла.

Особливість побудови розгортки бічної поверхні геометричного тіла в тому, що на комплексному кресленні тіло бажано розташувати так, щоб його паралельні лінії (бічні ребра призми, або твірні циліндра) були лініями окремого положення. Це забезпечує отримання натуральних величин цих ліній без додаткових перетворень.

11.4.4.1. Розгортка поверхні похилого кругового циліндра

На рис. 11-37 наведено зображення похилого кругового циліндра, розгортку якого необхідно будувати.

Побудову розгортки поверхні виконаємо методом розкочування.

Переріжмо поверхню циліндра площиною $P(P_2)$, яка перпендикулярна до твірних поверхні. В перерізі отримаємо нормальний переріз – коло з точками перетину з дванадцятьма рівномірно розташованими твірними поверхні.

Поверхню циліндра розріжемо по твірній АВ. Коло-переріз розкочуємо на продовженні сліду-проекції P_2 і отримаємо розкатку 1-2 ... -1 кола. Через точки 1, 2... розкочування проведемо допоміжні прямі перпендикулярно до лінії-розкочування і на них відкладемо натуральні величини твірних (від точок перерізу вгору і вниз), взявши їх з фронтальної проекції поверхні, т. я. відносно P_2 твірні паралельні, де твірні відтворені в натуральну величину. З'єднавши краї твірних плавними кривими, отримаємо розгортку бічної поверхні циліндра, а доповнивши її еліпсами основ поверхні, – отримуємо розгортку повної поверхні циліндра.

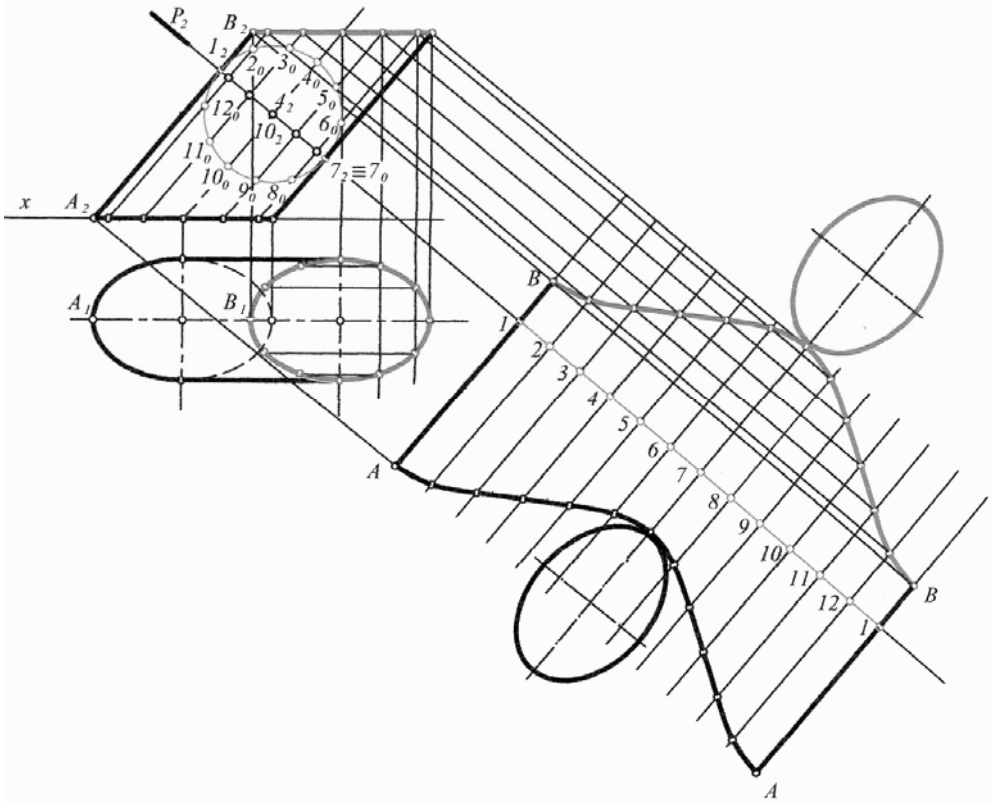


Рис. 11-37

11.4.5. Побудова наближених (умовних) розгорток

При виконанні розгорток поверхонь обертання, крім розгорток прямого конуса та циліндра, виконуються їх умовні розгортки.

Для побудови розгорток поверхонь обертання задана поверхня триангулюється паралелями, отриманими при перерізі поверхні допоміжними січними площинами, перпендикулярними до осі поверхні обертання. Утворено дискретний каркас поверхні. Кожні дві сусідні паралелі – перерізи виділяють пояси поверхні обертання. Утворені пояси поверхні обертання апроксимуються родинними кінчними зрізаними поверхнями (а екваторіальний пояс, якщо утворений, – циліндричною). Сукупність розгорток апроксимуючих зрізаних конусів являють умовну розгортку поверхні обертання.

11.4.5.1. Розгортка поверхні сфери

На рис. 11-38, наведено зображення сфери, розгортку якої необхідно побудувати.

Відомо, що поверхня сфери відноситься до поверхонь обертання, тому її розгортка буде умовною, утвореною розгортками апроксимуючих конусів.

1. Тріангуляція поверхні сфери виконується її паралелями, що утворюються при перерізі сфери січними площинами $\Delta(\Delta_2)$, $\Delta'(\Delta'_2)$ та $\Delta''(\Delta''_2)$, розташованими перпендикулярно до вертикальної осі сфери. Утворена паралель-екватор з точкою 1 та паралель з точкою 1' утворюють перший пояс поверхні сфери. Поверхня цього пояса апроксимується родинною (по двох спільних перерізах – паралелям) поверхнею зрізаного конуса, з вершиною в точці S_2 , отриманої при перетині продовження обрисової твірної l_2 1' з вертикальною віссю сфери.

Утворена паралель з точкою 1' та паралель з точкою 1'' утворюють другий пояс поверхні сфери, який апроксимуємо поверхнею другого зрізаного конуса з вершиною S'_2 .

Утворена паралель з точкою 1'' виділяє верхній кульовидний сегмент сфери, який апроксимується поверхнею третього цілого конуса з вершиною S''_2 .

Будуються розгортки трьох апроксимуючих конусів, застосовувавши для побудови розгорток один із методів, наприклад, аналітичний, чи будь-який графічний метод. Розгортки трьох конусів наведені на рис. 11-39, утворюють умовну розгортку верхньої половини заданої сфери. Для відтворення розгортки нижньої півсфери застосовуємо такі ж самі методи, як і для розгортки верхньої півсфери. Розташувавши (для компактності) розгортки всіх конусів апроксимації на одній спільній вертикальній осі, – отримуємо умовну розгортку всієї заданої сфери.

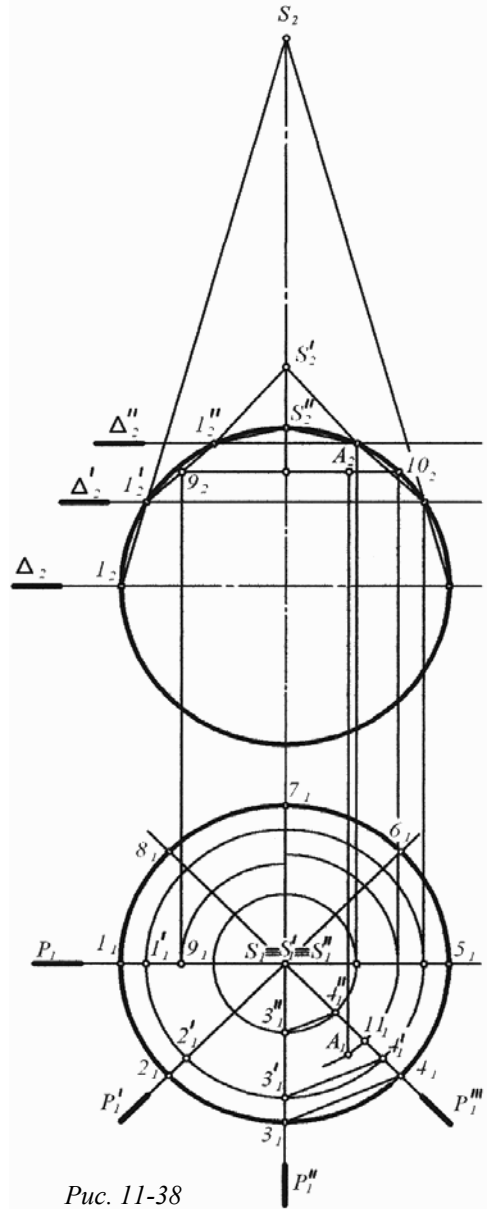


Рис. 11-38

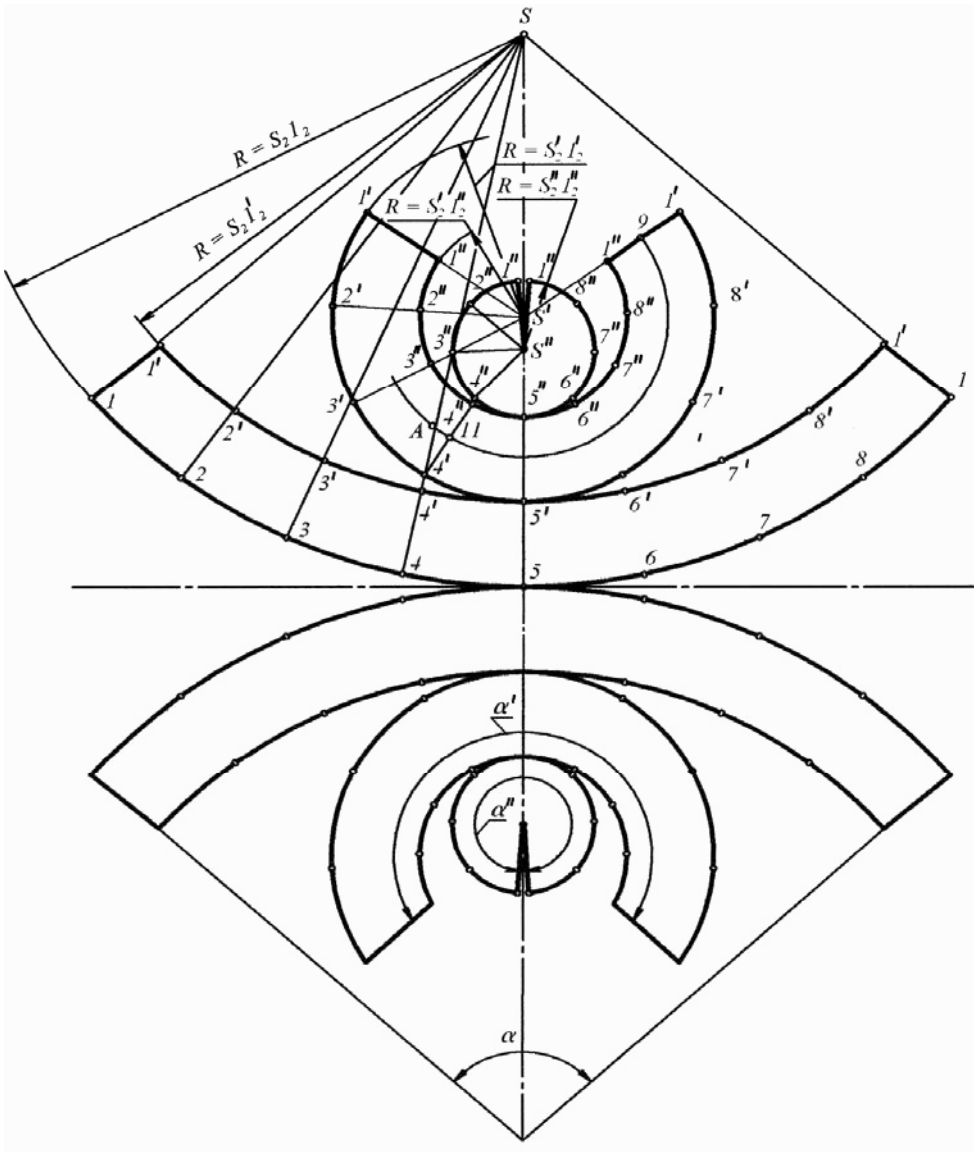


Рис. 11.39

На горизонтальній проекції сфери (рис. 11-38) показані січні площини P , які проходять через вертикальну вісь сфери. Перерізна поверхня сфери площинами P , – розділена на рівні відсіки (на рис. 11-38 поверхня сфери розрізна на вісім однакових відсіків). Умовна розгортка поверхні, розділеної на відсіки-скибки, наведена в темі № 14.

11.5. Задачі для розв'язку

11.5.1 Задачі для поза аудиторного розв'язку

Задача 11-1. Побудувати проєкції лінії перерізу поверхонь, проєктуючими площинами, наведеними на рис. 11-40 (а, б, в, г):

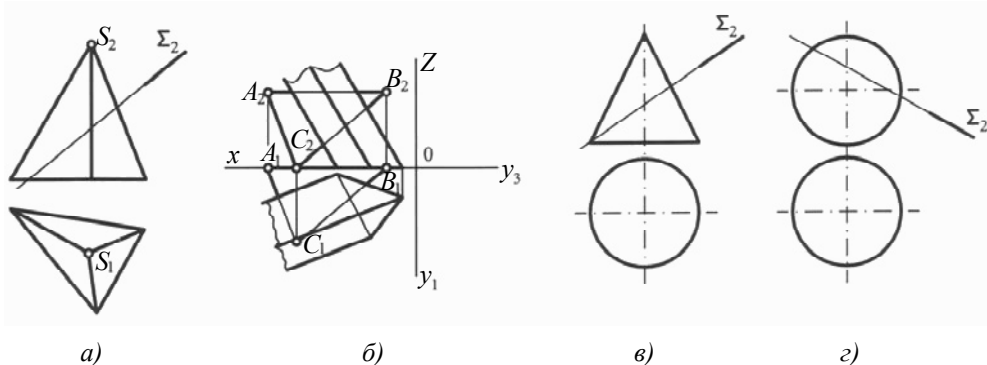


Рис. 11-40

Задача 11-2. Побудувати слід-проєкцію площини, яка перетинає задану поверхню по фігурі назва якої написана над її зображенням, а також побудувати проєкції фігури перерізу з урахуванням видимості (рис. 11-41 (а, б, в)):

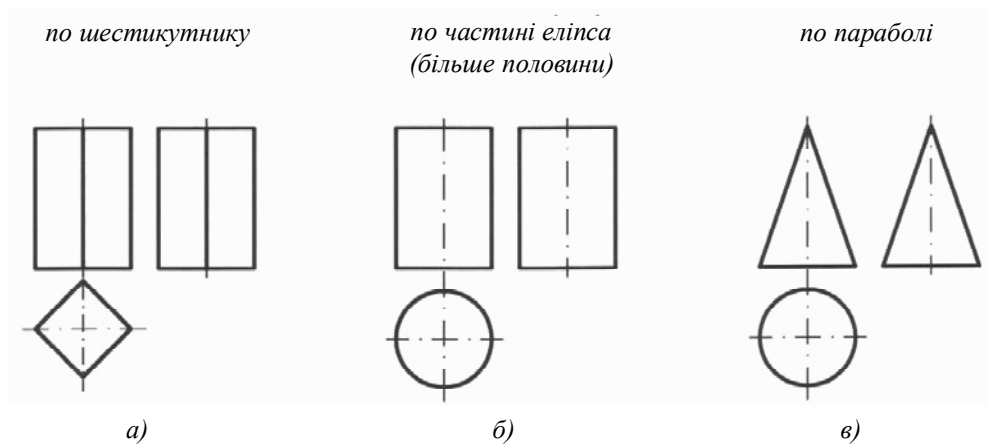


Рис. 11-41

11.5.2 Задачі для аудиторного розв'язку

Задача 11-3. Визначити і записати площину, яка перерізає поверхню показану на рис. 11-42 (а, б, в, г, д) по фігурі наведеній в таблиці.

	Назва фігури перерізу	позн площ
1	Трикутник рівнобедрений	Z, P
2	Два трикутника	
3	Квадрат	
4	Прямокутник	
5	Паралелограм	
6	Чотирикутник неправильний	
7	П'ятикутник неправильний	
8	Шестикутник неправильний	
9	Семикутник	
10	Восьмикутник	
11	Коло	
12	Еліпс	
13	Частина еліпса (менше половини)	
14	Частина еліпса (більше половини)	
15	Парабола	
16	Гіпербола	

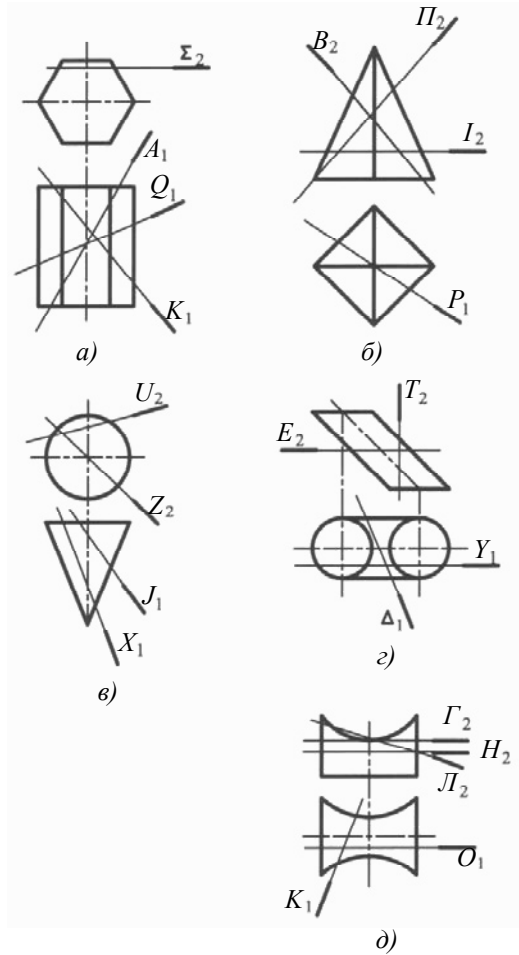


Рис. 11-42

Задача 11-4. Визначити поверхні, які можна утворити з фігур-розгорток, наведених на рис. 11-43 (а, б, в, г, д, е) і їх записати у таблицю.

	Назва поверхні
а)	
б)	
в)	
г)	
д)	
е)	

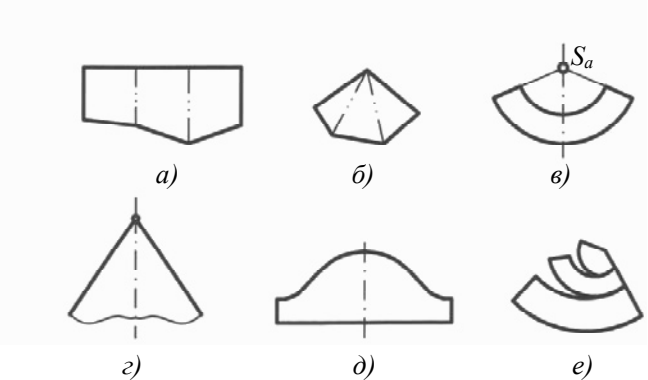


Рис. 11-43

Задача 11-5. Побудувати проєкції лінії перерізу поверхні наведеної на рис. 11-44, рис. 11-45 заданою площиною і визначити натуральну величину фігури перерізу.

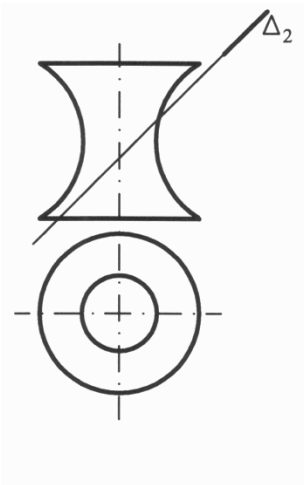


Рис. 11-44

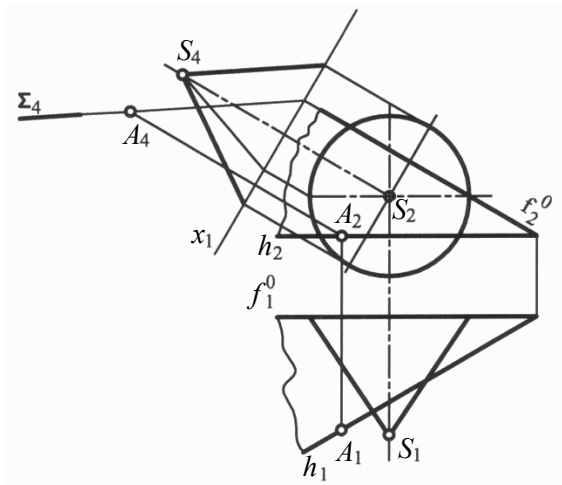


Рис. 11-45

Задача 11-6. Побудувати:

- лінії перерізу поверхні піраміди площиною $\Sigma (h^0 \cap f^0)$;
- визначити відстань між точками A і B по поверхні піраміди, рис. 11-46.

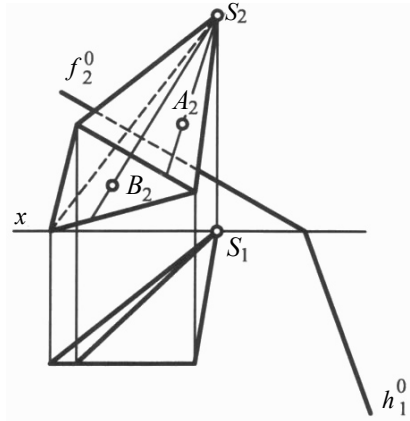


Рис. 11-46

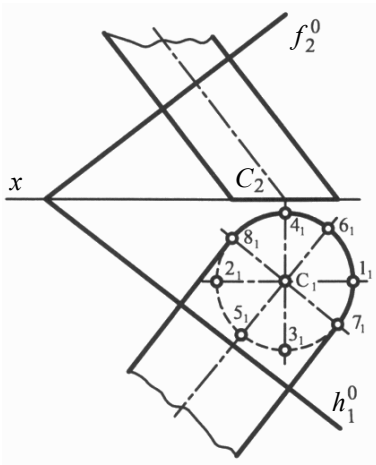


Рис. 11-47

Задача 11-7. Побудувати:

- проєкції перерізу поверхні площиною $\Sigma (h^0 \cap f^0)$;
- розгортку поверхні з нанесенням лінії перерізу поверхні, рис. 11-47.

Задача 11-8. Побудувати:

- умовну розгортку коноїда, в якого a і k напрямні, Σ – площина паралелізму, рис. 11-48.

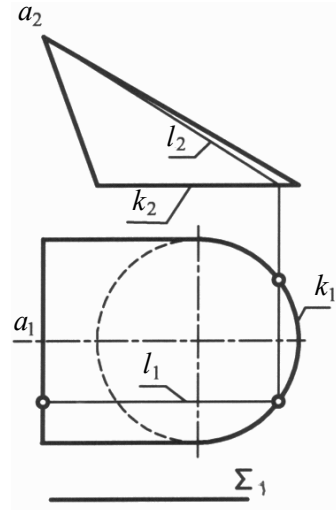


Рис. 11-48

Запитання для самоконтролю

1. В чому полягає загальна методика побудови лінії перерізу поверхні площиною?
2. Як розташовані січні площини, що в перерізі конуса утворюють трикутник, гіперболу або параболу?
3. Який вигляд має переріз багатогранника площиною? Від чого залежить форма перерізу?
4. В чому полягає методика розв'язку задач першого виду?
5. В чому полягає методика розв'язку задач другого виду?
6. Як визначити найнижчу та найвищу точку лінії перерізу?
7. В чому полягає зв'язок поверхні та її розгортки?
8. Які відомі методи побудови розгортки поверхонь?
9. Недоліки та переваги методів суміщення та трикутників, застосованих при виконанні розгортки поверхонь?
10. Особливості побудови розгортки поверхонь методом триангуляції.
11. Що таке апроксимаційний коефіцієнт?
12. В чому полягає побудова розгортки методом розкочування?
13. Для яких поверхонь виконують умовні розгортки? В чому полягають етапи побудови таких розгортки?

Тема 12

Перетин прямої з поверхнею

Розв'язок задач по визначенню спільних точок прямої і поверхні (побудова точок перетину прямої з поверхнею) можливе аналітичним методом, або графічним методом який і буде розглядатися в цій темі нарисної геометрії.

Розв'язок таких задач необхідний при виконанні побудови лінії перетину поверхонь (їх характерних ліній), що забезпечить точність побудови всієї лінії, чи її характерних або проміжних точок.

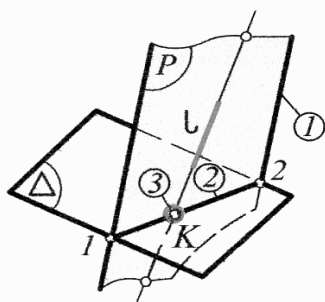


Рис. 12-1

Для розгляду послідовності побудови точок перетину прямої з поверхнею (рис. 12-1), нагадаємо алгоритм послідовності розв'язку задач по визначенню точки перетину прямої l з площиною Δ (розглянутої в темі №5 рис. 5-2).

$$l \cap \Delta \Rightarrow \bullet K?$$

1. $l \subset P \perp \Pi$.
2. $P \cap \Delta \Rightarrow 1...2$.
3. $1...2 \cap l \Rightarrow \bullet K$.

12.1. Загальна методика визначення взаємного положення прямої і поверхні

Послідовність розв'язку задач по побудові точок перетину прямої l з поверхнею Φ , аналогічна вищезгаданій, тобто (рис. 12-2):

$$l \cap \Phi \Rightarrow \bullet K?$$

1. $l \subset P$.
2. $P \cap \Phi \Rightarrow 1...n$.
3. $1...n \cap l \Rightarrow \bullet K$.

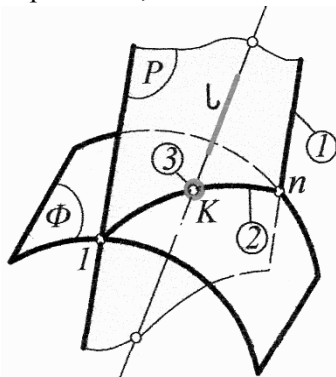


Рис. 12-2

Як видно, побудова перетину прямої l з поверхнею Φ , розв'язується таким же алгоритмом, який складається з трьох основних пунктів:

1. Через пряму l проводимо допоміжний посредник – площину P , тобто: $l \subset P$.

2. Будується лінія $1...n$, по якій площина P перерізає поверхню Φ , тобто:

$$P \cap \Phi \Rightarrow 1...n.$$

3. Будується точка K , в якій перетинається задана пряма l з побудованою лінією $1\dots n$, тобто: $l \cap 1\dots n \Rightarrow \cdot K!$ – отримана точка K і є шуканою точкою перетину прямої l з поверхнею Φ .

Якщо пряма не перетинається з лінією перерізу, це значить що пряма не перетинається з заданою поверхнею.

12.1.1. Рекомендації по виконанню загальної методики визначення взаємного положення прямої і поверхні

При виконанні розв'язання ряду задач по загальному алгоритму, який складається з трьох пунктів, складним є вірний вибір площини – посередника P , яку проводимо через задану пряму l , а також побудова лінії $1\dots n$, по якій допоміжний посередник P перерізає поверхню Φ . Скорочення побудови та забезпечення точності побудови досягається дотриманням наступних рекомендацій:

= При виконанні першого пункту алгоритму, в якому через задану пряму l проводимо площину $P(l \subset P)$, віддається перевага посереднику – площині P окремого положення, або такому її положенню, щоб в перерізі поверхні Φ площиною – посередником P була отримана лінія перерізу, яку можливо не складно і точно побудувати. В задачах, де пряма l перетинається з поверхнею прямого або похилого конуса, чи похилого циліндра – допоміжний посередник – площина загального положення і в перерізі відповідно отримуємо трикутник, або паралелограм.

= При виконанні другого пункту алгоритму:

– в якому посередник – площина P (яку проведено через пряму l) є площина окремого положення, яка перерізає задану поверхню Φ і при цьому отримуємо лінію перерізу $1\dots n$ ($P \cap \Phi \Rightarrow 1\dots n$), то для побудови цієї лінії перерізу:

а) застосовують один з методів перетворення ортогональних проєкцій, за допомогою якого будується натуральна величина лінії перерізу(наприклад, застосовують метод заміни площин проєкцій);

б) виконують перетворення допоміжного перерізу в обрисову криву поверхні застосуванням:

– методу обертання;

– способу родинності, з його напрямком та віссю родинності.

в) застосовують спосіб косокутного проектування для перетворення складного перерізу в більш просте його родинне зображення(наприклад, більш складний для побудови еліпс перерізу перетворюється в родинне коло, просте для побудови).

Коли будується точка(точки) перетину прямої з поверхнею конуса (прямого чи похилого) або з поверхнею похилого циліндра, то через задану пряму

поводимо площину загального положення, яка перерізає задану поверхню по найпростішій для побудови фігури перерізу: конус – по трикутнику, а циліндр по паралелограму.

При складностях побудови натуральної величини лінії перерізу, або її зручного для побудови родинного зображення, – виконують перехід від заданої поверхні до іншої поверхні (більш простої) зі спільними, двома лініями для цих двох поверхонь, лініями перерізу. Для виконання такого переходу:

а) застосовують спосіб центрального проектування, яке відтворюється в переході заданої поверхні другого порядку до поверхні конуса, що можливо при наявності в них двох спільних перерізів поверхонь другого порядку (наприклад, перехід від поверхні еліпсоїда до поверхні конуса, з двома спільними перерізами належних цим двом поверхням);

б) застосування способу паралельного прямокутного проектування, яке відтворюється в переході заданої поверхні другого порядку до поверхні прямого кругового циліндра, наприклад, перехід від поверхні параболоїда до поверхні прямого кругового циліндра з однією спільною лінією перерізу).

= При виконанні третього пункту:

а) якщо для виконання другого пункту алгоритму застосовано один з методів перетворення проєкцій, то одночасно з побудовою перерізу в перетвореному положенні будується і пряма, там де побудовано проєкцію лінії перерізу поверхні і побудована відповідна проєкція прямої – будується точка (або дві точки) перетину заданої прямої з лінією перерізу поверхні. Отримані точки перетину в перетвореному положенні переносять на задане положення прямої, побудовані таким чином точки і є проєкціями шуканої точки перетину прямої з поверхнею;

б) якщо при виконанні другого пункту алгоритму виконано перехід від заданої поверхні до поверхні конуса чи поверхні циліндра, то будується точка (точки) перетину вихідного положення заданої прямої з поверхнею конуса чи циліндра за прийнятою методикою. Визначається видимість прямої відносно поверхні на проєкціях.

Коли пряма не перетинається з лінією перерізу заданої поверхні допоміжною площиною, то пряма не перетинається з поверхнею.

12.2. Групи задач на побудову точок зустрічі прямої з поверхнею

Розглядаючи умови задач, які стосуються теми №12, та враховуючи рекомендації по виконанню загальної методики їх розв'язання по визначенню взаємного положення прямої і поверхні, основну частину всіх задач можна розділити на окремі чотири групи.

- Група №1: група задач, в розв'язку яких застосовують посередники – площини окремого положення та виконання перетворення проєкцій перерізу.
- Група №2: група задач, в розв'язку яких застосовуються посередники – площини загального положення.
- Група №3: група задач, в розв'язку яких застосовується перетворення методом родинності поверхонь.
- Група №4: група задач, в розв'язку яких визначається відстань від точки до поверхні.

12.3. Деякі властивості поверхонь другого порядку

- Якщо параболоїд обертання, вісь якого перпендикулярна до площини проєкції, перерізати площиною, перпендикулярною до його осі, то отримана лінія перерізу на цю площину проєкцій спроектується у вигляді кола.
- Якщо через вісь поверхні провести пучок площин, то буде отримано сімейство кривих другого порядку, родинних між собою.
- Якщо поверхня гіперболоїда перерізана площиною, то отримана лінія перерізу буде того ж типу, що і лінія перерізу асимптотичних конусів цієї поверхні тією ж площиною.
- Якщо площина перерізає поверхню по еліпсу, то площини, паралельні їй в перерізі поверхні, утворюють сімейство подібних еліпсів подібно розташованих між собою.
- Якщо в перерізі поверхні отримано два перерізи другого порядку, то вони завжди перспективні. Крім деяких пар перерізів однопорожнинного гіперболоїда і гіперболічного параболоїда.
- Якщо довільний переріз поверхні і коло мають спільну хорду, то їх можна привести у перспективну відповідність.
- Якщо паралельно осі еліптичного і гіперболічного параболоїдів провести паралельні між собою площини, то в загальному випадку буде отримано в перерізі родини парабол.

12.4. Окремі випадки розв'язку задач

Згадаємо, що при розгляді задач на побудову точки перетину прямої з площиною, зустрічались такі задачі, в яких застосування загального алгоритму виявлялось непотрібним, так як шукана точка перетину явно виявлена на кресленнику умови задачі. Такі задачі об'єднуються в наступні групи:

– Група задач, в яких пряма загального положення перетинається з проєктуючою площиною. Наприклад, на рис. 12-3. Там, де слід – проєкція Δ_1 перетинається з l_1 , – отримали K_1 , одну з проєкцій (горизонтальну) шуканої точки, а іншу проєкцію будували за належністю точки до прямої.

Аналогічно виділяється група задач, в яких будується точка перетину прямої загального положення з проєктуючою поверхнею (циліндрична, призматична поверхня). Наприклад, на рис. 12-4. Тут теж розв’язок починається з визначення, де l_1 перетинається з Φ_1 – отримуємо горизонтальні проєкції K_1 та K'_1 , точок входу і виходу прямої l відносно поверхні Φ . Відсутні проєкції K_2 та K'_2 визначаємо за належністю точок K і K' до прямої l .

– Група задач, в яких пряма проєктуюча перетинається з довільною площиною. Наприклад, на рис. 12-5. Там, де пряма спроектується у виді точки, в цьому прикладі l_1 , з нею зливається і однойменна проєкція шуканої точки ($l_1 \equiv K_1$). Інша проєкція шуканої точки будується за належністю її до площини, в прикладі, що розглядається, шукана точка належить до горизонталі h^k .

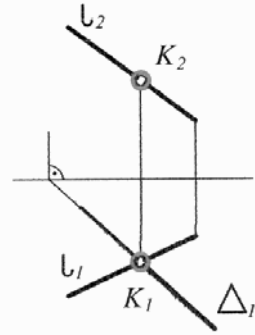


Рис. 12-3

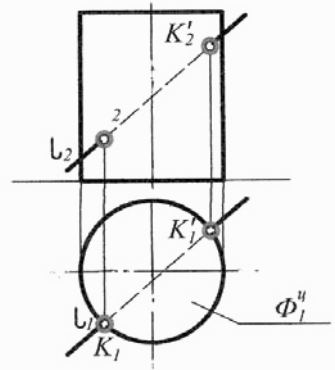


Рис. 12-4

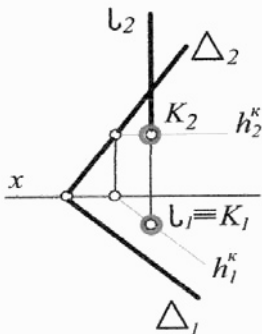


Рис. 12-5

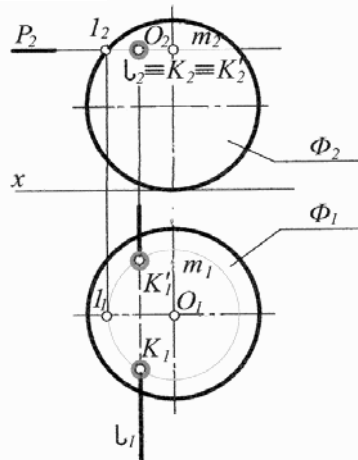


Рис. 12-6

Аналогічно і в задачах на побудову точки перетину проектуючої прямої з довільною поверхнею. Наприклад, на рис. 12-6. Тут з l_2 (проекція прямої l у вигляді точки l_2) зливаються всі точки, належні прямій l , в тому числі і одиниці проекції точки K – входу і точки K' – виходу прямої, тобто $l_2 \equiv K_2 \equiv K'_2$. Відсутні проекції K_1 і K'_1 шуканих точок будують за ознакою належності цих точок до поверхні Φ . В цьому прикладі точки K і K' належать колу m , отриманому в перерізі сфери Φ площиною P , яка проведена через пряму l .

12.5. Розв'язок задач Групи №1 в яких застосовують посередники – площини окремого положення з наступним перетворенням перерізу

До цієї групи відносять такі задачі, які розв'язують за загальною методикою, при виконанні якої застосовують площини окремого положення та наступним виконанням перетворення проекції перерізу. Для виконання перетворення проекції перерізу застосовують різні, зручні для розв'язку, методи.

Метод А: перетворення посередника – проектуючої площини в площину рівня застосуванням одного з методів перетворення ортогональних проекцій.

Цей метод рекомендується переважно для розв'язку задач, в яких лінія перерізу заданої поверхні посередником – площиною, має форму, окреслену прямими або дугами кола.

Метод В: перетворення лінії перерізу в обрисову криву поверхні застосуванням:

– методу обертання, що рекомендується для розв'язку задач, в яких задана пряма перетинається з поверхнею обертання і перетинається з її віссю обертання;

– способу родинної відповідності, що рекомендується для розв'язку задач в яких задана пряма перетинається з поверхнею другого порядку і перетинається з її віссю.

Метод С: перетворення складної лінії перерізу в більш просте його родинне зображення застосуванням способу косокутного проектування.

Цей метод рекомендується, наприклад, для розв'язку задач, в яких лінія перерізу має форму еліпса, який при застосуванні косокутного проектування спроекується в коло.

12.5.1. Приклад розв'язання задач з застосуванням методу *A* (перетворення проєкцій)

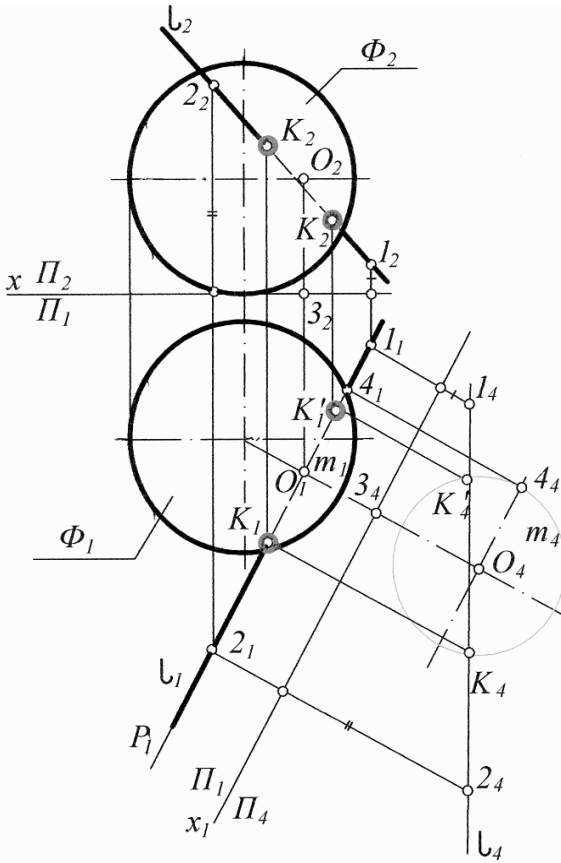


Рис. 12-7, а

Розглядаємо задачу, в якій задано пряму l – загального положення, що перетинається з поверхнею сфери Φ (рис. 12-7^а). Необхідно побудувати точки перетину прямої l з поверхнею Φ .

Розв'язок задачі виконується за загальною методикою, наведеною в п.12.1. Для її виконання:

1. Через пряму l проводимо допоміжний посередник – площину P перпендикулярну, наприклад, Π_1 , тобто:

$$l \subset P \perp \Pi_1$$

на полі Π_1 епоуру:

$$l_1 \equiv P_1.$$

2. Будується лінія m , по якій площина P перерізає поверхню Φ , тобто:

$$P \cap \Phi \Rightarrow m \text{ (коло)}.$$

Розв'язуючи другий пункт, в якому площина P перерізає поверхню сфери Φ і в перерізі отримуємо коло m , радіус яко-

го дорівнює O_1K_4 . Горизонтальна проєкція m_1 збіглася з слідом – проєкцією P_1 , а фронтальна проєкція кола m , яка була б у вигляді еліпса, – складна для побудови. Але можна побудувати натуральну величину кола m , застосувавши метод *A*, виконавши перетворення горизонтально проєктуючої площини $P(P_1)$ в площину рівня, виконавши методом заміни площин перетворення

$$x \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}; \Pi_4 \parallel P, \text{ – отримуємо на полі } \Pi_4 \text{ (відносно якої площина } P \text{ стала паралельною), натуральну величину перерізу – кола } m \text{ і прямої } l. \text{ Побу-}$$

дова центра O' на полях $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ показана на рис.12-7^б, та O'_4 m_4 і l_4 показано на рис.12-7^а, тобто виконано:

$$P \cap \Phi \Rightarrow m; R^m = 0_14_1; x \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow \frac{\Pi_1}{\Pi_4} \Rightarrow m_4 \text{ і } l_4,$$

3. Будуються точки K і K' в яких задана пряма l перетинається з лінією перерізу m , тобто виконуємо: $l \cap m \Rightarrow K \text{ і } K'$.

Розв'язок третього пункту алгоритму методика розв'язання виконується на полі Π_4 :

$$l_4 \cap m_4 \Rightarrow K_4 \text{ і } K'_4,$$

по належності точок K і K' до прямої l будуються K_1 і K'_1 , які належать l_1 , а також будуються K_2 і K'_2 , які належать l_2 , тобто на епюрі виконується:

$$l \cap m \Rightarrow K \text{ і } K'!$$

Для цього на полі Π_4 - Π_1 - Π_2 :

$$l_4 \cap m_4 \Rightarrow K_4 \text{ і } K'_4 \Rightarrow K_1 \text{ і } K'_1 \subset l_1 \Rightarrow K_2 \text{ і } K'_2 \subset l_2.$$

Розв'язання задачі доповнюється визначенням видимості прямої l відносно поверхні на проекціях поля Π_1 і Π_2 . Для цього на рис. 12-7^б і рис. 12-7^г показано видимість точок, належних видимій півсфери(з боку напрямку погляду). З цих міркувань на рис. 12-7^а, на полі Π_4 точка K_4 належить видимій частині відносно поля Π_1 , то точка K_1 видима і до видимої точки приходить видима частина l_1 , та навпаки, для точки K'_4 .

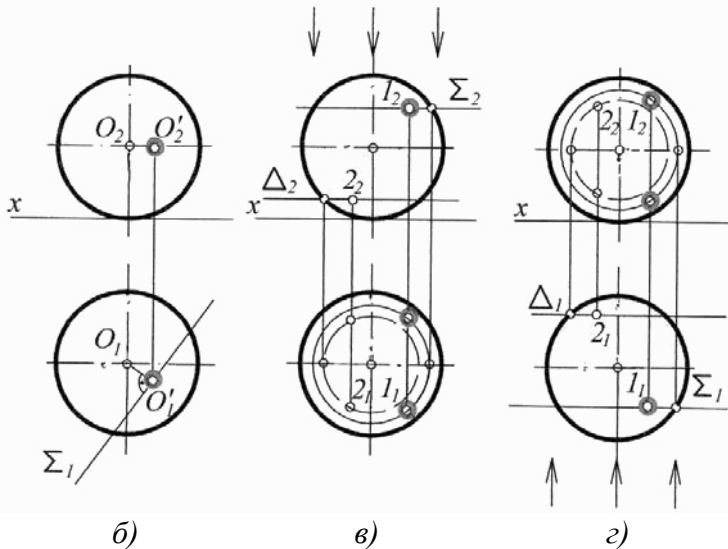


Рис. 12-7

12.5.2. Приклад розв'язку задачі з застосуванням методу В. (перетворення перерізу в обрисову методом обертання)

Розглянемо задачу, в якій задано пряму l – загального положення, що перетинається з поверхнею обертання Φ – еліпсоїда, та перетинає його вісь.

Розв'язок задачі виконується за загальною методикою, наведеною в п.12.1. Для її виконання, на рис. 12-8 виконано:

1. Через пряму l проводимо допоміжний посередник – площину P , перпендикулярну площині проєкцій Π_1 , яка проходить через вісь $i \perp \Pi_1$

$$l \subset P \perp \Pi_1, \text{ це на полі } \Pi_1: l_1 \equiv P_1.$$

2. Будується лінія a , по якій площина P перерізає поверхню Φ , тобто: $P \cap \Phi \Rightarrow a$ (еліпс).

Розв'язуючи другий пункт алгоритму, в якому площина P перерізає поверхню обертання Φ (еліпсоїда) через його вісь i яка перпендикулярна горизонтальній площині проєкцій Π_1 , в перерізі отримуємо еліпс a . Візьмемо до уваги, що при виконанні віял осьових перерізів еліпсоїда отримуємо однакові перерізи – еліпси, кожен з яких дорівнює еліпсу фронтального обрисову еліпсоїда.

Горизонтальна проєкція a_1 злилася з слідом – проєкцією P_1 , а фронтальна проєкція еліпса a , яка буде у вигляді еліпса, – складна для побудови. Це спростується застосуванням методу В – перетворенням лінії перерізу – еліпса a , в обрисову криву поверхні. Виконання такого перетворення можна виконати методом обертання. Для його проведення вісь $i \perp \Pi_1$ приймається за вісь обертання площини $P(P_1)$ і останню повертаємо до фронтального положення разом з еліпсом a і прямою l , які розташовані в площині P . Отримано на полі Π_1 : $\bar{P}_1 \equiv \bar{l}_1 \equiv \bar{a}_1 \parallel x$; на полі Π_2 : \bar{l}_2 та \bar{a}_2 – яке збіглося з фронтальним обрисом еліпсоїда.

Розв'язок третього пункту алгоритму методикою виконується на полі Π_2 в повернутому положенні \bar{l}_2 та \bar{a}_2 , розташованих в повернутому положенні площини, коли $\bar{P}_1 \parallel \Pi_2$, визначаються шукані

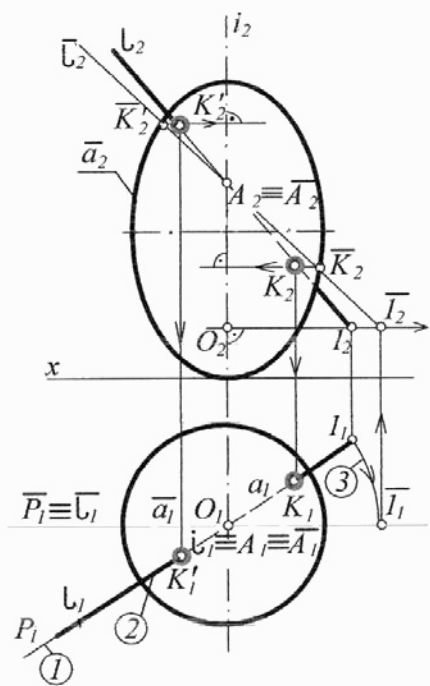


Рис. 12-8

точки \bar{K}_2 і \bar{K}'_2 в повернутому положенні ($\bar{l}_2 \cap \bar{a}_2 \Rightarrow \bar{K}_2$ і \bar{K}'_2) далі визначаються фронтальні та горизонтальні проекції шуканих точок по відповідній належності їх до вихідного задання прямої l . Така побудова з врахуванням видимості прямої l відносно поверхні Φ показана на рис. 12-8.

12.5.3. Родинність геометричних образів

Головні закономірності і властивості геометричного проектування образів залежать від виду проектування, взаємного розташування площин проекцій та напрямку проектуючих променів.

Уявимо, що точки однієї площини Π -поля оригіналу, проектуються на поле Π' -поле проекцій, то між проекціями цих полів установлюється точкова відповідність. Кожній точці A на полі Π відповідає точка A' на полі Π' і навпаки. Таку відповідність називають афінною, або родинною (лат. *affinitas* – родство).

Властивості проектування:

- Відповідність взаємно однозначна;
- Прямим лініям відповідають прямі;
- Якщо точка належить прямій, то проекція точки належить її однойменній проекції;
- Лінія перетину площин проекції для родинної відповідності є віссю родинності;
- Паралельним прямим одного поля відповідають паралельні прямі другого поля;
- Просте відношення трьох точок одного поля дорівнює простому відношенню трьох відповідних точок другого поля;
- Відношення двох фігур на площині Π дорівнює відношенню двох фігур на площині Π' .

Елементи апарату проектування:

- Об'єкт проектування;
- Площини проекцій;
- Проектуючі промені.

Необхідні проекції образу можна отримати:

- Змінюючи напрямок проектування, відносно незмінного положення площин проекцій;
- Змінюючи розташування площин проекцій відносно незмінного напрямку проектуючих променів.

Види родинності: паралельна та центральна.

Види спорідненості:

- Спорідненість плоских фігур (розташованих в одній площині та в пучку площин);
- Спорідненість поверхонь.

12.5.3.1. Родинність в паралельному проектуванні (паралельна родинність)

Уявимо відрізок AB (рис. 12-9^A), який спроектовано на площину паралельним проектуванням (Π -прямокутне, та K -косокутне).

Розглядаючи отримані проєкції $A'B'$ та $A''B''$ відзначасмо, що вони різні за розміром та мають різне взаємне розташування. Таким чином, змінюючи напрямок проектування можна отримати бажану проєкцію геометричного образу.

Розглянемо приклад перетворення еліпса, наприклад, (застосовуючи косокутне проектування) в більш просту родинну лінію – коло. На рис. 12-9^B показано проєкції еліпса, який належить площині $\Sigma(\Sigma_2) \perp P_2$. Так як і для кола, еліпс має ті ж властивості – діаметри-осі діляться навпіл. Вісь AB ділить всі хорди (рис. 12-9^B) паралельні його спряженому осі-діаметру. Тому два діаметри, кожен з яких ділить навпіл хорди, паралельні другому діаметру, називають спряженими.

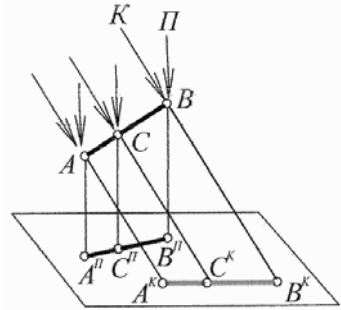


Рис. 12-9, а

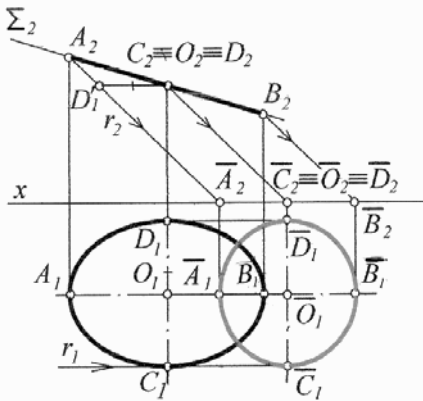


Рис. 12-9, б

Таким чином властивістю спряжених діаметрів, є їх родинність і у випадку їх неперпендикулярності, як лінії, що афінно-родинні колу. Кожні два спряжених взаємо-перпендикулярних діаметри-осі A_1B_1 і C_1D_1 еліпса можуть перейти в спряжені діаметри $\bar{A}_1\bar{B}_1$ і $\bar{C}_1\bar{D}_1$ родинного кола, що досягається зміною кута нахилу головного проектування r , при якому вісь A_1B_1 змінюється до значення, коли $A_1B_1 \Rightarrow \bar{A}_1\bar{B}_1$.

На рис. 12-10 показано модель отримання паралельних проєкцій, родинних плоскій кривій ACB належній полю – оригіналу Σ .

Уявимо, що точки площини Σ проектуються паралельно на поля-проєкції площин Σ' та Σ'' – пучок площин, маючих спільну i -вісь родинності, напрямком проектування позначено PK (паралельне косокутне).

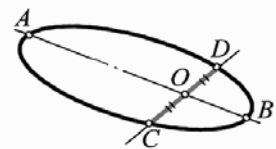


Рис. 12-9, в

Між полями Σ і полями Σ' та Σ'' встановлена точкова відповідність, за допомогою якої виконані проєкції $A'C'B'$ та $A''C''B''$, родинні відносно заданої дуги ACB зі спільною для них хордою AB , яка зливається з віссю i та спряженими діаметрами – осями OC , OC' та OC'' .

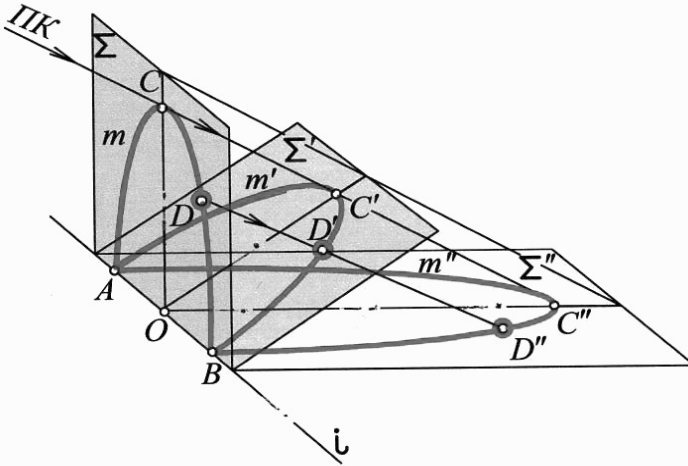


Рис. 12-10

12.5.3.2. Застосування паралельної родинності в розв'язках задач

Вище, в пункті 12.3, наведені деякі властивості поверхонь другого порядку. Покажемо методику застосування паралельної родинності у втіленні окремих геометричних властивостей поверхонь при розв'язку задач.

На рис. 12-11 наведено зображення поверхні тривісного еліпсоїда та горизонтальна проєкція A_1 точки A , яка належить цій поверхні. Для побудови фронтальної проєкції A_2 точки A , застосуємо ознаку належності точки до поверхні, згідно з якою через точку A проведемо зручну для побудови лінію на заданій поверхні, побудуємо проєкції цієї лінії та побудуємо проєкції точки A , які будуть належать одноіменним проєкціям лінії, що проведена через точку A .

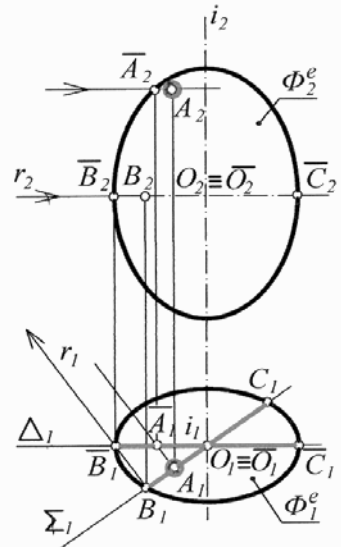


Рис. 12-11

Беручи до уваги властивість, якщо через вісь поверхні провести пучок площин, то буде отримано сімейство кривих другого порядку, родинних між собою, то за необхідну зручну лінію приймемо лінію-еліпс перерізу еліпсоїда осевого площиною $\Sigma (A, i) \perp P_1$. Горизонтальна проекція еліпса з точкою A_1 на ньому та малою віссю B_1C_1 злилася з слідом-проекцією Σ_1 . Побудова фронтальної проекції еліпса-перерізу відносно складна робота, тому застосовується родинне перетворення еліпса-перерізу в еліпс з малою віссю $\overline{B_1C_1}$ фронтального обрису еліпсоїда. Таке перетворення-побудова родинних плоских фігур, для яких спільною хордою є вертикальною вісь, що злилася з віссю i , яка приймається за вісь спорідненості, OB та \overline{OB} – спряжені діаметри спільної хорди, площини Σ та Δ – площини родинних зображень, по цих параметрах визначається напрямок r родинності (для цього прикладу $r \equiv \overline{BB}$), розташований паралельно площині P_1 . Паралельним проектуванням еліпс з віссю BC перетворюється в обрисовий еліпс (з віссю \overline{BC}) разом з точкою $A (A_1 \rightarrow \overline{A_1})$, визначається $\overline{A_2}$ на фронтальному обрисі і по фронтальній проекції напрямку родинності, визначається A_2 .

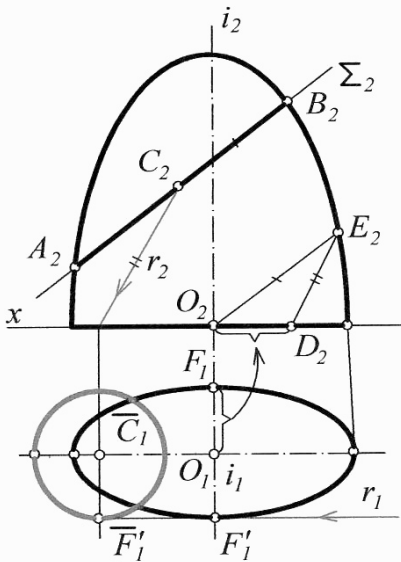


Рис. 12-12

На рис. 12-12 наведено застосування паралельного косокутного проектування для родинного перетворення еліпса перерізу поверхні еліпсоїда площиною $\Sigma(\Sigma_2)$ в коло. Виконано перетворення з дотриманням властивості поверхні: паралельні перерізи поверхні другого порядку подібні і подібно розташовані. Визначення напрямку r родинності визначено: $O_2E_2 \parallel C_2B_2$ з O_2 , по горизонту відкладено O_2D_2 , яке дорівнює O_1F_1 ; E_2D_2 – напрямку спорідненості. Розглядаючи побудову горизонтальної проекції еліпса з великою віссю A_2B_2 та точкою C_2 , в якій перетинаються його осі у визначеному напрямку r проектування, отримуємо коло, в яке перетворено горизонтальну проекцію еліпса перерізу площиною Σ .

В розв'язку задачі рис. 12-11 застосовано методіку родинного перетворення перерізу, а в розв'язку задачі, наведеної в п.12.5.5, показано застосування родинного перетворення еліпса в коло при побудові точок перетину прямої з поверхнею.

12.5.3.3. Родинність в центральному проектуванні (центральна родинність)

На рис. 12-13^А показано центральну родинність плоскої спорідненості прямих.

З центра S проектується відрізок AB та відрізок CD та EF , прямих зв'язаних між собою спільною точкою P -спорідненості. Кожній точці відрізка AB буде відповідати точка-проекція відрізка CD та EF , тобто між точками цих відрізків є взаємно однозначна відповідність. Підкреслено, що відрізки, AB , CD , EF належать зв'язці прямих площини, а точка P – центр зв'язки.

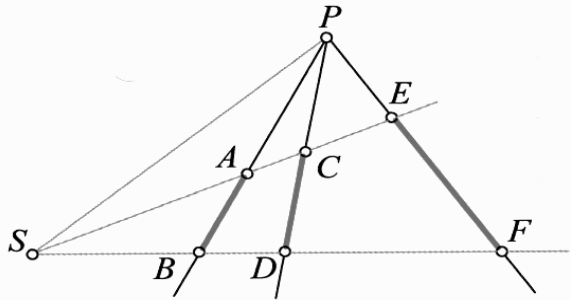


Рис. 12-13, а

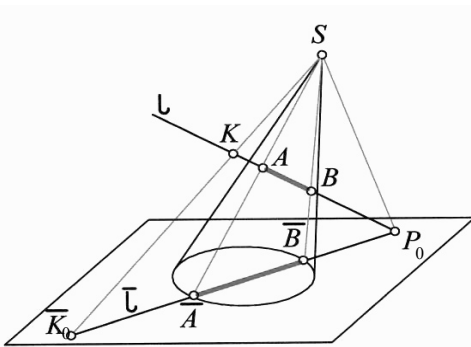


Рис. 12-13, б

Застосування наведеної спорідненості показано на прикладі побудови точок перетину прямої l з поверхнею конуса (рис. 12-13^б). При розв'язуванні цієї задачі застосовується центральне проектування. За центр проектування приймається вершина S конуса, а кожна твірна конуса стає проектуючим променем, проекція бічної поверхні зливається з основою конуса. Допоміжна площина P , проведена через S та задану пряму l своїм слідом $\overline{K_0P_0}$ на площині основи конуса виділяє на основі конуса відрізок \overline{AB} .

Точкам \overline{A} і \overline{B} відповідають точки AB на прямій l , між цими точками є взаємно-однозначна відповідність, так як пряма l та пряма \overline{l} , яка співпадає з слідом \overline{KP} , утворюють зв'язку прямих з центром зв'язки в точці P .

На рис. 12-14 показано модель отримання центральних проєкцій, родинних плоскій кривій ACB , яка належить полю оригіналу Σ . Уявимо, що зображення площини Σ проектується з центра проектування S на пучок площини Σ' та Σ'' з спільною віссю i -віссю спорідненості.

Як і в паралельних родинних проекціях, центральні родинні проекції відповідають властивостям проектування, що і видно на рис. 12-14 (перпендикулярність спряжених хорд, співвідношення однойменних площин зображень та інші).

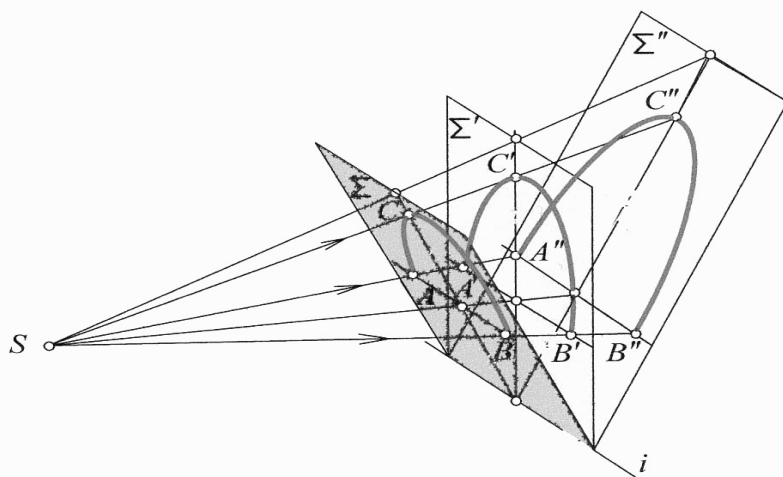


Рис. 12-14

Моделі отримання родинних проекцій підкреслюють те, що родинні поля мають паралельно-перспективне розташування.

Обертання площин навколо їх осі спорідненості не порушувало паралельно-перспективного розташування родинних зображень з їх простим співвідношенням трьох точок.

12.5.4. Приклади розв'язку задач з застосуванням методу *B* (перетворення перерізу в обрисову поверхні способом родинної відповідності)

Спосіб родинної відповідності застосовується переважно в тих випадках, коли задана пряма перетинає вісь поверхні другого порядку.

Розв'язок такої задачі виконується за загальною методикою, коли через задану пряму загального положення (яка перетинає вісь поверхні) проводять допоміжну площину, що пройде одночасно і через вісь поверхні. Отриману криву перерізу поверхні площиною перетворюють в обрисову криву разом з заданою прямою, для цього устанолюється між ними родинна відповідність, в якій вісь родинності є вісю самої поверхні. В перетвореному положенні визначаються шукані точки в родинному перетвореному виді і згідно з визначеним напрямком родинності повертаємо побудовані проекції точок на вихідне положення заданої прямої.

Розглянемо задачу, в якій задана пряма l – загального положення перетинається з поверхнею Φ однопорожнинного гіперboloїда, яка перетинає його вісь (рис. 12-15).

Розв'язання задачі по визначенню точок перетину прямої з заданою поверхнею виконується за загальною методикою, наведеною в п.12.1. Для її виконання :

1. Через пряму l проводимо допоміжний посередник – площину Σ перпендикулярну Π_1 .

$$l \subset \Sigma \perp \Pi_1, \text{ це на полі } \Pi_1: l_1 \equiv \Sigma_1.$$

2. Установлюється родинна відповідність γ між проміжною гіперболою, отриманою в перерізі поверхні площиною Σ , та обрисовою гіперболою (розташованою в площині $\Delta(\Delta_1)$), з віссю родинності i та напрямком родинності r , паралельним CC' , де C' – точка найбільшого розхилу обрисової гіперболи, відповідна точці C проміжної гіперболи.

Будуємо відрізок AB заданої прямої l в родинній відповідності, – отримуємо \bar{B}_1B_1 (точка A розташована на прямій l в точці перетину осі i).

3. Визначаємо точки перетину K і K' перетвореної прямої l з обрисовою гіперболою, це на полі Π_2 : $\bar{l}_2 \cap$ обрисову $\Rightarrow \bar{K}_2$ і \bar{K}'_2 .

Зворотнім перетворенням в напрямку r визначаємо натуральне положення шуканих точок K і K' на прямій l у вихідному положенні, а на проєкціях визначається видимість шуканих точок K і K' та відповідно прямої l відносно поверхні Φ однопорожнинного гіперboloїда.

Розглядаючи іншу задачу (рис. 12-16) в якій пряма l – загального положення перетинається з поверхнею тривісного еліпсоїда, підкреслюємо аналогічність розв'язку

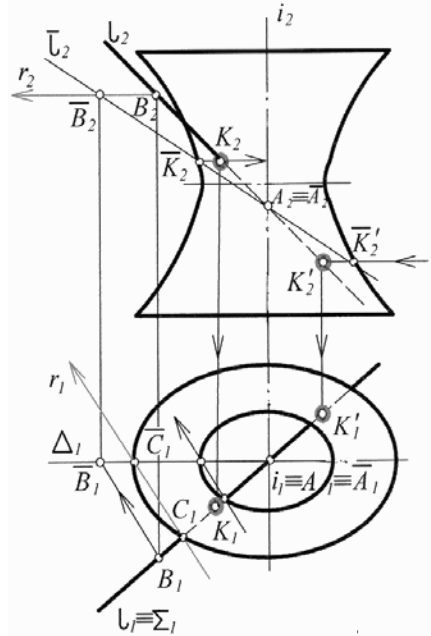


Рис. 12-15

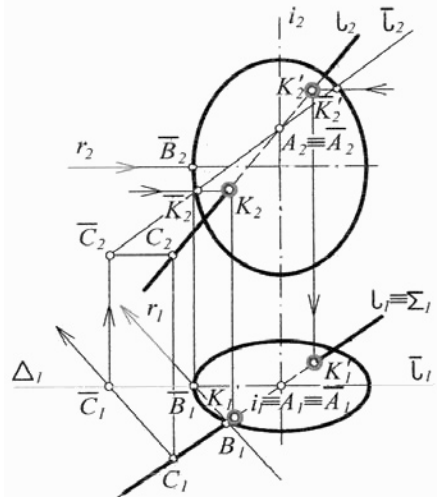


Рис. 12-16

з попередньою задачею. Основою розв'язку є загальна методика з застосуванням властивості поверхні тривісного еліпсоїда, – осеві перерізи поверхні другого порядку(еліпси) мають родинну відповідність.

Сам розв'язок задачі показаний на рис. 12-16.

12.5.5. Приклад рішення задачі з застосуванням методу С (перетворення складної лінії перерізу в просте його родинне зображення)

Розв'язок задач такого типу виконується перетворенням лінії перерізу – еліпса в коло за допомогою косокутного проектування, виконаного на рис. 12-9^Б.

Розглянемо задачу, в якій пряма l – загального положення перетинається з поверхнею Φ – еліптичного гіперboloїда (рис. 12-17).

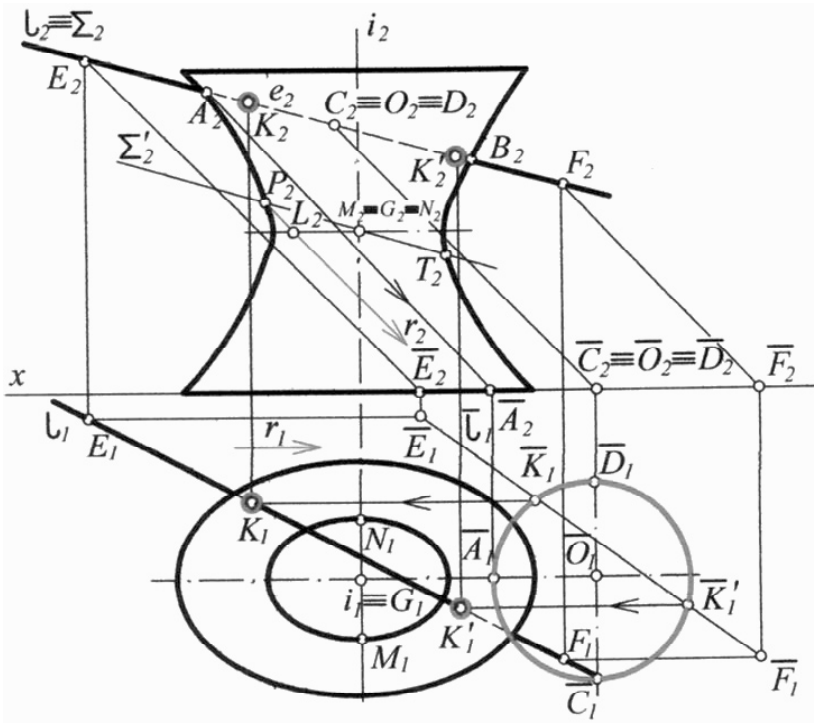


Рис. 12-17

Розв'язок задачі виконується за загальною методикою:

1. Через пряму l проводимо допоміжну площину $\Sigma \perp \Pi_2$. Площина Σ в перерізі поверхні гіперboloїда утворює еліпс e з осями AB та CD і центром в точці O (на полі Π_2 : A_2B_2 та C_2D_2 і центр $O_2 \equiv C_2 \equiv D_2$).

2. Другий пункт розв'язання виконується побудова еліпса – перерізу та перетворення його в коло з одночасним перетворенням заданої прямої; визначивши напрямок проектування r , при якому еліпс e спроектується на площину Π_1 у вигляді кола. Для цього проводимо через центр G гіперboloїда площину $\Sigma' \parallel \Sigma$. Площина Σ' перетинає гіперboloїд по еліпсу e' з осями PT і MN , вісь MN зливається з малою віссю еліпса горловини. Еліпс e' подібний еліпсу e і йому подібно розташований.

Враховуючи вищевикладене, визначаємо напрямок r , при якому еліпс e' , належній площині Σ' , спроектується на площину Π_1 у вигляді кола, побудова виконується як на рис. 12-9^b при якій на рис. 12-17 $G_1N_1 = L_2G_2$. Далі проектуємо еліпс e з осями AB і CD на площину Π_1 за напрямком r та отримуємо коло з центром в \bar{O} і радіусом, що дорівнює $\bar{O}_1\bar{A}_1$. Застосовуючи косокутне проектування, на Π_1 будемо і пряму l , задавши її відрізком EF , – отримуємо його косокутну проекцію $\bar{E}_1\bar{F}_1$.

3. Визначаємо шукані точки \bar{K}_1 і \bar{K}'_1 перетину відрізка $\bar{E}_1\bar{F}_1$ з колом, зворотнім проектуванням визначаємо проекції шуканих точок на вихідних проекціях заданої прямої l , та визначаємо на проекціях поля Π_1 та Π_2 видимість прямої l відносно поверхні гіперboloїда.

12.6. Розв'язок задач Групи №2, в яких застосовуються посередники – площини загального положення

До цієї групи відносять такі задачі, які розв'язують за загальною методикою, при виконанні якої застосовують посередники площини загального положення.

Це переважно задачі, в яких довільна пряма перетинається з пірамідою (прямою, або похилою), конусом (прямим, або похилим), або призмою (похилою) чи циліндром (похилим).

Особливість розв'язку таких задач полягає в тому, що задана пряма включиться в додаткову площину, яка перерізає задану поверхню по лінії перерізу, що має найпростішу форму для побудови. У випадках, коли задано поверхню піраміди чи конуса, – допоміжну площину проводять через задану пряму і вершину поверхні, тоді в перерізі отримуємо трикутник. У випадку, коли задано поверхню призми чи циліндра, – допоміжну площину проводять через задану пряму і пряму проведену через точку на заданій прямій і паралельну бічному ребру призми, або паралельну твірній циліндра, – тоді в перерізі отримуємо

паралелограм. Далі будуються точки перетину заданої прямої з побудованим перерізом поверхні допоміжною площиною. Отримані точки – шукані точки перетину прямої з заданою поверхнею.

12.6.1. Загальний алгоритм побудови точок перетину прямої з поверхнею піраміди або конуса

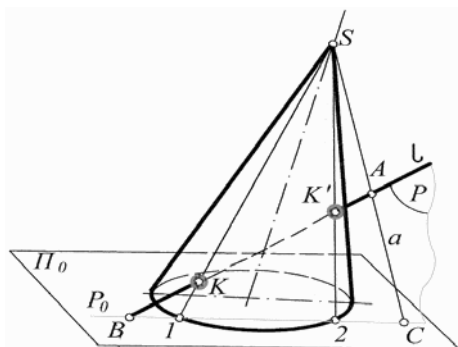


Рис. 12-18

Алгоритм перетину довільної прямої з поверхнею піраміди чи конуса (прямого чи похилого) покажемо на наступному прикладі (рис. 12-18):

Побудувати точки K і K' перетину прямої l загального положення з поверхнею Φ похилого конуса.

1. Через задану пряму l проводимо допоміжну площину P – загального положення. Ця площина повинна бути так розташована, щоб в перерізі поверхні конуса була отримана найпростіша для

побудови фігура, окреслена прямими лініями, або дугами кола. Такою фігурою є трикутник, отриманий при перерізі конуса площиною, яка проходить через його вершину S . Таким чином, допоміжна площина задана прямою l і точкою S , тобто:

$$l \subset P(\cdot S, l) !;$$

2. Побудова фігури перерізу поверхні Φ площиною P , для цього:

= визначаємо слід P_0 площини P на площині Π_0 площини основи конуса, тобто: $P \cap \Pi_0 \Rightarrow P_0$;

– будуємо точку перетину прямої l з Π_0 і отримуємо точку B , тобто

$$l \cap \Pi_0 \Rightarrow \bullet B;$$

– довільно вибираємо точку A на прямій l ; $\bullet A \subset l$;

– з вершини S через точку A проводимо допоміжну пряму a , тобто:

$$\bullet S \cup \bullet A \Rightarrow a;$$

– будуємо точку перетину прямої a з Π_0 і отримуємо точку C , тобто:

$$a \cap \Pi_0 \Rightarrow \bullet C;$$

– з'єднавши точку B з точкою C , отримуємо P_0 слід площини P на площині Π_0 основи конуса Φ : $\bullet B \cup \bullet C \Rightarrow BC \subset P_0$;

= визначаємо точки перетину сліду P_0 з основою конуса, отримуємо точки 1 і 2, які є основою твірних, по яких площина P перереже поверхню Φ ;
 = будуємо фігуру перерізу поверхні Φ площиною P , для цього: точку 1 з'єднуємо з точкою S , отримуємо твірну $1S$; точку 2 з'єднуємо з точкою S , отримуємо твірну $2S$; відрізок 12 та твірні $1S$ та $2S$ утворюють трикутник $1S2$, який є фігурою перерізу поверхні Φ площиною P , тобто:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet 1 \cup \bullet S \Rightarrow 1S \\ \bullet 2 \cup \bullet S \Rightarrow 2S \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta 1S2$$

3. Будуються точки перетину прямої l з побудованою фігурою $\Delta 1S2$, отримані точки K і K' є шукані точки перетину прямої l з поверхнею Φ , тобто:

$$l \cap \Delta 1S2 \Rightarrow \bullet K \text{ і } K'$$

Епюрний розв'язок цієї задачі наведений на рис.12-19.

Алгоритм:

1. $l \subset P (\bullet S, l)$;
2. $P \cap \Phi \Rightarrow \Phi.P$. – фігура перерізу?
 - $\bullet A \subset l; \bullet S \cup \bullet A \Rightarrow a \cap \Pi_1 \Rightarrow \bullet C$;
 - $l \cap \Pi_1 \Rightarrow \bullet B \cup \bullet C \Rightarrow BC \subset P_1$;
 - $P_1 \cap \text{коло осн.} \Rightarrow \bullet 1 \text{ і } \bullet 2$;
 - $\bullet 1 \cup \bullet S \Rightarrow 1S$
 - $\bullet 2 \cup \bullet S \Rightarrow 2S$
3. $l \cap \Delta 1S2 \Rightarrow \bullet K \text{ і } K'$!

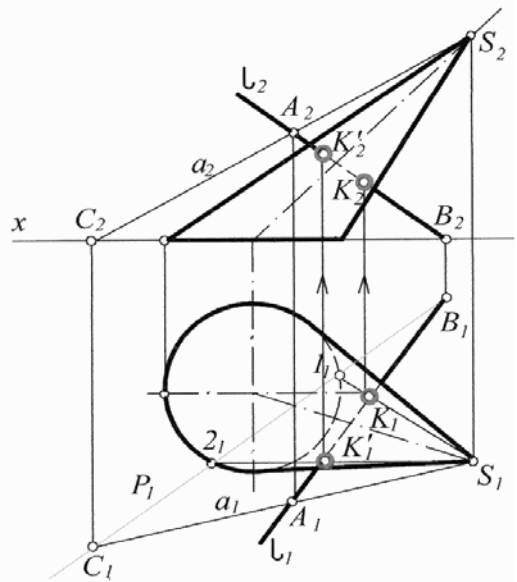


Рис. 12-19

12.6.2. Загальний алгоритм побудови точок перетину прямої з поверхнею похилої призми або циліндра

Алгоритм перетину довільної прямої з поверхнею похилої призми чи циліндра покажемо на наступному прикладі (рис. 12-20).

Побудувати точки K і K' перетину прямої l загального положення з поверхнею Φ похилого циліндра.

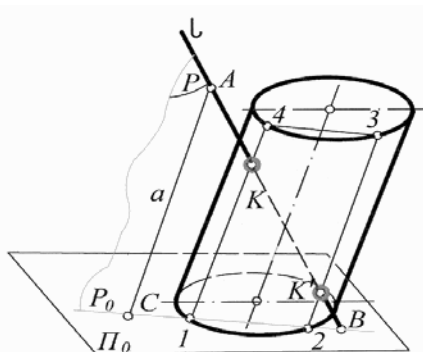


Рис. 12-20

1. Через пряму l проводимо допоміжну площину P – загального положення.

Ця площина повинна бути так розташована, щоб в перерізі поверхні циліндра була отримана найпростіша для побудови фігура, окреслена прямими лініями.

Такою є фігура, утворена двома твірними. Це паралелограм, який утворено при перерізі циліндра площиною, яка пройде через пряму, паралельну осі циліндра. Таким чином, допоміжна площина задана прямою l та прямою a , що перетинається з нею, і розташована паралельно осі i , тобто:

$$l \subset P(l \cap a) \text{ при } a \parallel i.$$

2. Побудова фігури перерізу поверхні Φ площиною P , для цього:

= визначаємо слід P_0 площини P на площині Π_0 – площині основи циліндра, тобто: $P \cap \Pi_0 \Rightarrow \bullet P_0$;

– будуємо точку перетину прямої l з Π_0 і отримуємо точку B , тобто:

$$l \cap \Pi_0 \Rightarrow \bullet B;$$

– довільно вибираємо точку A на прямій l , тобто: $\bullet A \subset l$;

– з точки A проводимо пряму a паралельну осі i , тобто: $\bullet A \subset a \parallel i$;

– будуємо точку перетину прямої a з Π_0 і отримуємо точку C , тобто: $a \cap \Pi_0 \Rightarrow \bullet C$;

– з'єднавши точку B з точкою C , отримуємо відрізок BC , який належить сліду P_0 , тобто: $\bullet B \cup \bullet C \Rightarrow BC \subset P_0$;

= визначасмо точки перетину сліду P_0 з основою циліндра, отримуємо точки 1 і 2, які є основою твірних, по яких площина P перерізає поверхню Φ , тобто:

$$P_0 \cap \text{коло осн.} \Rightarrow \bullet 1 \text{ і } \bullet 2;$$

= будуємо фігуру перерізу поверхні Φ площиною P , для цього: з точки 1 проводимо твірну циліндра до перетину з його верхньою основою, отримуємо в перетині точку 4 і відповідно твірну 1.4; з точки 2 проводимо твірну циліндра до перетину з його верхньою основою, отримуємо в перетині точку 3 і відповідно твірну 2.3; відрізок 1.2, твірна 2.3, відрізок 2.3 (паралельний відріzkу 1.2) та твірна 1.4 (паралельна твірній 2.3) – утворюють паралелограм $\square 1.2.3.4$, який є фігурою перерізу поверхні Φ площиною P , тобто:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet 1 \subset 1.4 \parallel i; \quad \bullet 4 \cup \bullet 3 \Rightarrow 3.4 \\ \bullet 2 \subset 2.3 \parallel i; \quad \bullet 1 \cup \bullet 2 \Rightarrow 1.2 \end{array} \right\} \Rightarrow \square 1.2.3.4;$$

3. Будуються точки перетину прямої l з побудованою фігурою $\square 1.2.3.4$, отримані точки K і K' є шуканими точками перетину прямої l з поверхнею Φ , тобто:

$$l \cap \square 1.2.3.4 \Rightarrow \bullet K \text{ і } \bullet K'$$

Епюрний розв'язок цієї задачі наведений на рис. 12-21.

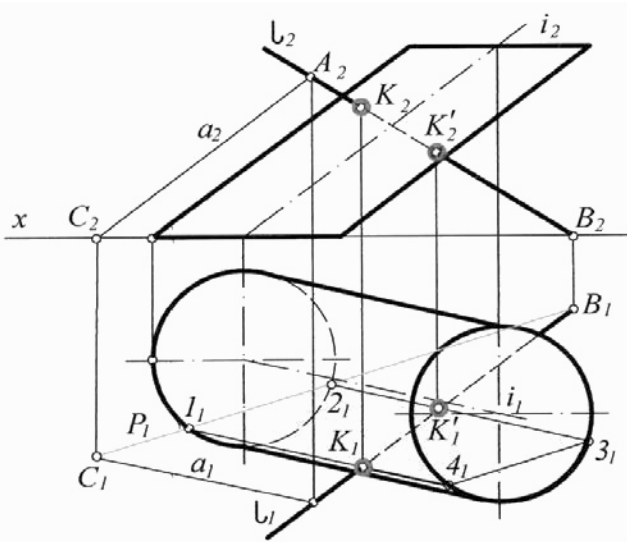


Рис. 12-21

Алгоритм:

1. $l \subset P(l \cap a)$ коли $a \parallel i$;
 2. $P \cap \Phi \Rightarrow \Phi.П.-?$
 - $\bullet A \subset l; \bullet A \subset a \parallel i$;
 - $P \cap \Pi_1 \Rightarrow P_1-? l \cap \Pi_1 \Rightarrow \bullet B; a \cap \Pi_1 \Rightarrow \bullet C$;
 - $\bullet B \cup \bullet C \Rightarrow BC \subset P_1$;
 - $P_1 \cap \text{коло осн.} \Rightarrow \bullet 1 \text{ і } \bullet 2$;
 - $\bullet 1 \subset 1.4 \parallel i$
 - $\bullet 2 \subset 2.3 \parallel i$
 - $\bullet 4 \cup \bullet 3 \Rightarrow 3.4$
 - $\bullet 1 \cup \bullet 2 \Rightarrow 1.2 \parallel 3.4$
- } $\Rightarrow \square 1.2.3.4!$
3. $l \cap \square 1.2.3.4 \Rightarrow \bullet K \text{ і } \bullet K'$!

12.7. Розв'язок задач Групи №3

До цієї групи відносять задачі, в яких довільна пряма перетинається з поверхнею другого порядку загального вигляду, їх розв'язують за загальною методикою та при виконанні другого пункту останньої зустрічаються складності в побудову перерізу поверхні допоміжною площиною. В такому випадку виконують перехід від заданої поверхні до іншої спорідненої поверхні з спільною лінією перерізу, застосовуючи перетворення, виконане методом родинності поверхонь, що було вперше рекомендовано проф. Сухіни І.О.

Таке перетворення можна виконати:

– способом центрального проектування, яке відтворюється в переході від заданої поверхні другого порядку до поверхні конуса, що можливо при наявності в них двох спільних перерізів поверхонь другого порядку. Такий перехід виконується, коли наявні складності побудови натуральної величини лінії перерізу, або її зручного для побудови спорідненого зображення.

– способом паралельного прямокутного проектування, яке відтворюється в переході заданої поверхні другого порядку до прямої циліндричної поверхні. Такий перехід виконується, наприклад, від поверхні параболоїда до поверхні прямого кругового циліндра з однією спільною лінією перерізу.

12.7.1. Виконання переходу від заданої поверхні до родинної

Цей перехід може бути застосований для розв'язання усіх можливих задач на побудову точок перетину прямої з поверхнею другого порядку загального виду. Перехід ґрунтується на відомому положенні про те, що через два перерізи поверхні другого порядку можливо провести конус другого порядку, тобто два перерізи поверхні другого порядку перспективні між собою. Користуючись наведеним положенням, задачі розв'язують за допомогою центрального проектування допоміжної кривої в одну з обрисових кривих або в коло, інцидентну площині рівня: маючи з кривою спільну хорду – шукані точки перетину визначають спочатку в перетвореному положенні, а тоді зворотнім перетворенням визначають їх дійсне положення.

Спосіб центрального проектування застосовують для заміни заданої поверхні конічною поверхнею другого порядку, яка визначається допоміжною кривою і однією з обрисових кривих поверхні, або допоміжною кривою і колом, яке має з кривою спільну хорду. При такому викладенні визначення точок перетину прямої з заданою поверхнею можливо замінити визначення точок перетину прямої з побудованим конусом. Вершина цього конуса отримується на перетині прямих, які проходять через дві пари відповідних точок

кривих, належних спряженим діаметрам зі спільною хордою. Перетин отриманих прямих визначають вершину родинного конуса.

На моделі (рис. 12-22) показана побудова вершини S родинного конуса за допоміжним еліпсом e в площині Σ і обрисовим еліпсом m в площині Δ . В кожному еліпсі (e і m) проводимо хорди, паралельні лінії AB , по якій перетинаються площини Δ і Σ , а також будуюмо відносно хорд спряжені діаметри EF (в еліпсі e), та DM (в еліпсі m). З'єднавши точки D і E та з протилежних боків діаметрів, – точки F і M , побудовані прямі DE і FM в своєму продовженні утворюють шукану точку S , яка приймається за вершину родинного конуса відносно заданої поверхні Φ тривісного еліпсоїда, а прямі DE і FM є обрисовими твірними побудованого конуса з вершиною S . Епюрне зображення побудови родинного конуса з вершиною S наведено на рис. 12-23, де показана фронтальна проекція моделі.

Родинність поверхні другого порядку (параболіда) з конічною поверхнею по двох спільних перерізах показана на рис. 12-24. Базовий горизонтальний переріз – коло зі спряженими діаметрами AB і CD , та проміжний переріз – еліпс (утворений в площині Σ) з осями MN та EF належать поверхні параболоїда (рис. 12-24^б) так і належать поверхні конуса (рис. 12-24^в), вершину якого побудовано за вищеописаною методикою. Надалі можливі виконання побудови точок перетину заданої прямої на рис. 12-25^а. Вона умовно не показана вже з побудованою поверхнею конуса, що розглянуто на рис. 12-18 та рис. 12-19, та наслідки розв'язку по побудові шуканих точок відносно конуса – є шуканими точками перетину заданої прямої з заданою поверхнею параболоїда.

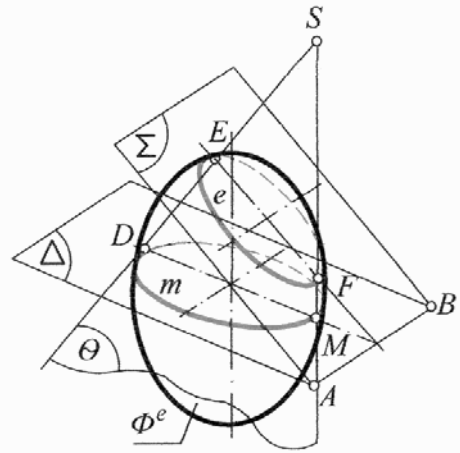


Рис. 12-22

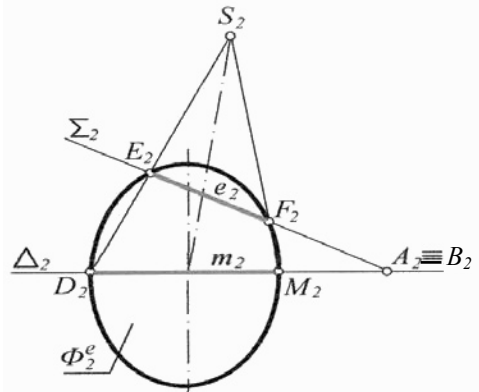


Рис. 12-23

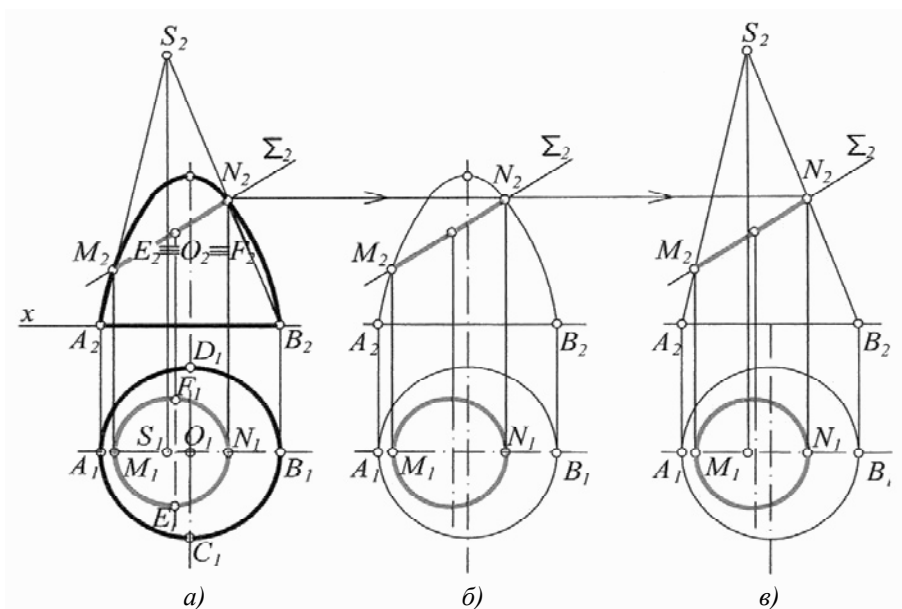


Рис. 12-24

Розглядаючи попередньо отримані конус з перерізом – еліпсом в площині Σ , велика вісь якого дорівнює MN , на рис. 12-25^а бачимо родинність поверхні конуса з поверхнею прямого циліндра («вершина» якого явна: розташована в безмежності). Переріз з віссю MN належить і конусу (рис. 12-25^б), а також поверхні циліндра (рис. 12-25^в). Можливе припущення родинності конуса і циліндра по спільному перерізу. Надалі можливі виконання побудови точок перетину заданої (на рис. не показаної) прямої вже з побудованою циліндричною поверхнею, а це вирішується як задача часткового випадку з проєктуючою поверхнею, а наслідок більш простого розв'язку ніж з конусом (рис. 12-25^в), є розв'язок вихідної умови задачі.

Таким чином, можливе припущення родинності поверхні другого порядку – параболоїда з поверхнею конічною, а конічної з циліндричною, тобто поверхня параболоїда родинна з циліндричною поверхнею (рис. 12-26).

Розглянемо приклади розв'язків задач на побудову точок перетину прямої з поверхнею другого порядку загального виду із застосуванням переходу від заданої поверхні до іншої родинної поверхні із спільною лінією перерізу.

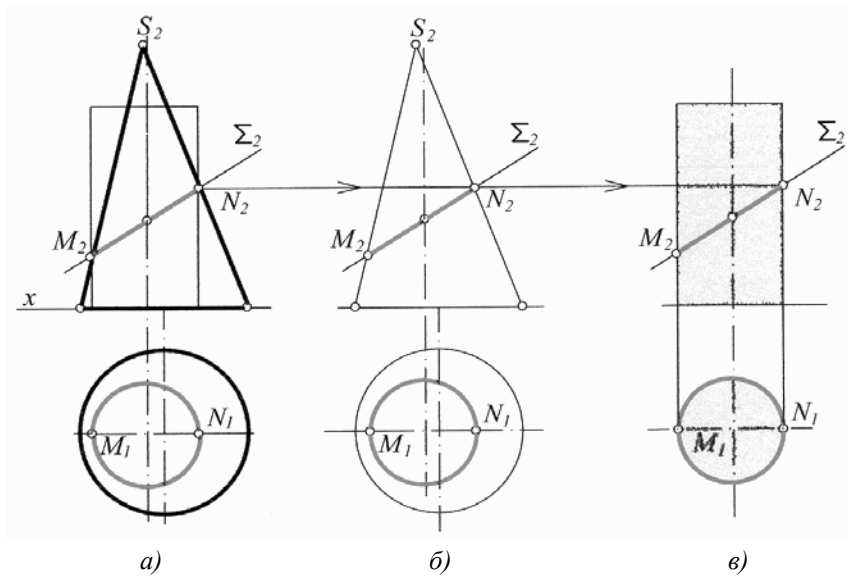


Рис. 12-25

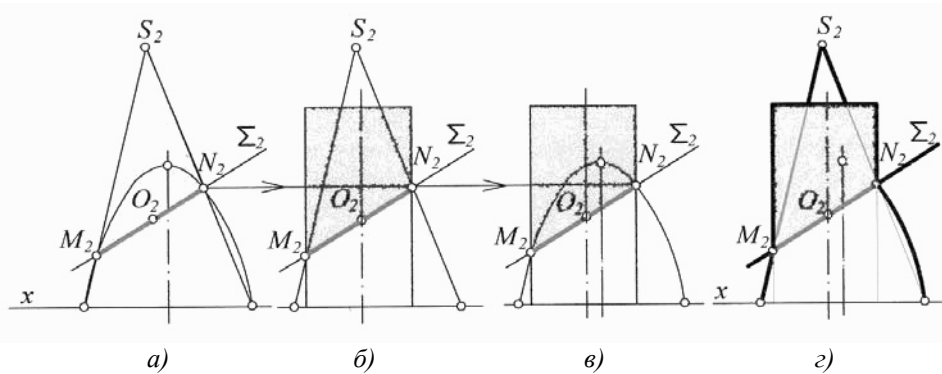


Рис. 12-26

12.7.2. Алгоритм розв'язку задач Групи №3 способом центрального проектування

Розв'язок задач розпочинається з аналізу умови задач. Визначити, які два перерізи заданої поверхні будуть застосовані для побудови конуса другого порядку (наприклад, переріз допоміжний та переріз обрисовий – базовий), який доцільно вважати центральною проекцією допоміжного перерізу.

Алгоритм:

1. Через дану пряму проводимо допоміжну проєктуючу площину.
 2. Будуємо зручне зображення перерізу поверхні допоміжною площиною, для цього:
 - а) знаходимо вершину конуса (центрального проєктування), яка визначається допоміжною та обрисово-базовою кривими;
 - б) будуємо центральну проєкцію заданої прямої на площину обрисової кривої (приймавши вершину конуса за центр проєктування).
 3. Будуємо точки перетину прямої з перерізом поверхні на зручній проєкції, для цього:
 - а) визначаємо шукані точки перетину на центральній проєкції прямої і поверхні;
 - б) визначаємо проєкції шуканих точок на вихідному (ортогональному) положенні прямої, застосувавши зворотне (обернене) проєктування;
 - в) встановлюємо видимість прямої відносно заданої поверхні.
- Якщо центр проєктування – неможлива для побудови точка, або якщо не можна провести конічну поверхню через допоміжний переріз і обрисову (базову) криву, що спостерігається для однопорожнинного гіперболоїда і гіперболічного параболоїда, допоміжну криву доцільно спроєкувати в коло, яке не належить поверхні, це коло має з допоміжною кривою спільну хорду, яка лежить у площині рівня. В такому випадку родинна конічна поверхня визначається допоміжною кривою перерізу і колом, в яке спроєкована допоміжна крива.

Вирішимо декілька задач Групи №3.

12.7.3. Приклади розв'язку задач Групи №3

Задача 12.3-1, в якій пряма l – загального положення перетинається з поверхнею тривісного еліпсоїда (рис. 12-27).

Для побудови точок перетину прямої з поверхнею застосовується загальна методика розв'язку таких задач.

1. Через пряму l проводимо допоміжну площину $P \perp P_2$.
2. Площина P в перерізі поверхні еліпсоїда утворює допоміжний переріз $e(e_2)$ з великою віссю $EF = E_2F_2$. Горизонтальний обрис поверхні – еліпс m (базовий переріз) з великою віссю DM , належний площині Δ .

$P \cap \Delta \Rightarrow$ лінія перетину площин – вісь родинності.

Точки D і M , E і F – спряжені точки. Площина $\theta (DE \cap FM)$ – спряжена площина. $DE \cap FM \Rightarrow$ точка S – вершина родинного конуса, фронтальні обрисові твірні якого DE та FM .

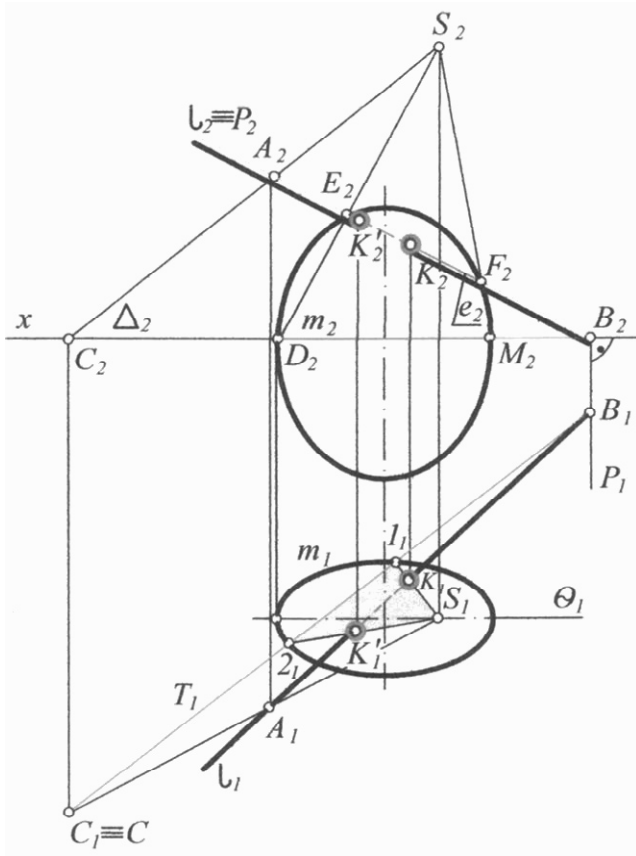


Рис. 12-27

Далі виконується розв'язок задачі по побудові точок перетину заданої прямої l з поверхнею побудованого конуса, в основі якого лежить обрисовий еліпс m . Для розв'язку отриманої зведеної задачі через вершину S та пряму l проводимо допоміжну площину T – загального положення. Будуємо горизонтальний слід T_1 допоміжної площини, та: $T_1 \cap m_1 \Rightarrow \bullet 1_1$ і $\bullet 2_1$ – які є основою твірних, по яких площина T перетинає конічну поверхню (рис. 12-13^b), модель центрального проектування шуканих точок на основу конуса.

3. Отримані точки 1_1 і 2_1 з'єднані з вершиною S (її S_1), перетинаючись з заданою прямою, – дають в перетині шукані точки K і K' , тобто:

$$\bullet 1_1 \cup S_1 \Rightarrow 1_1 S_1 \cap l_1 \Rightarrow \bullet K'_1! \Rightarrow \bullet K'_2 \subset l_2;$$

$$\bullet 2_1 \cup S_1 \Rightarrow 2_1 S_1 \cap l_1 \Rightarrow \bullet K''_1! \Rightarrow \bullet K''_2 \subset l_2.$$

Отримані $\bullet K'_1$, $\bullet K_2$, $\bullet K''_1$, $\bullet K''_2$ – є відповідними проєкціями шуканих точок K і K' в яких пряма l перетинається з заданою поверхнею тривісного еліпсоїда.

Задача 12.3-2, в якій задана фронтально проєктуюча пряма l , що перетинається з поверхнею еліптичного параболоїда (рис. 12-28).

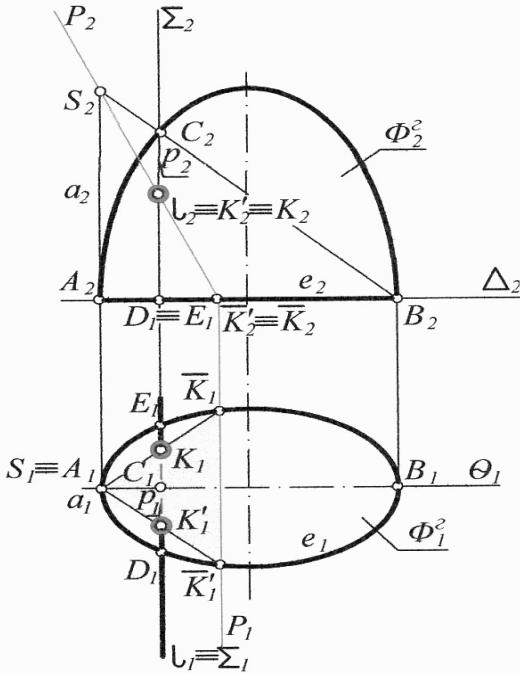


Рис. 12-28

Поверхня параболоїда замінюється родинним конусом, основа якого e та парабол p – два родинних перерізи зі спільною хордою DE . BC – одна фронтальна обрисова твірна, з точки A , а друга фронтальна обрисова твірна a паралельна площині Σ і перпендикулярна Π_1 .

Перетин твірних: $BC \cap a \Rightarrow \bullet S$ – вершина родинного конуса.

Для розв'язку зведеної задачі, виконуємо побудову посередника – площини $P \perp \Pi_2$, яка проходить через задану пряму l і вершину S . Перетин P_1 з e_1 – дає центральні проєкції \bar{K}_1 і \bar{K}'_1 , які є центральними проєкціями шуканих точок K і K' , в яких задана пряма l перетинається з поверхнею еліптичного параболоїда, побудова проєкції шуканих точок з урахуванням їх видимості показана на рис. 12-28.

Задача 12.3-3, в якій з поверхнею еліптичного параболоїда перетинається відрізок AB профільної прямої (рис. 12-29).

Розв'язання:

1. Через задану пряму l проводимо допоміжну площину Σ паралельну Π_3 .

$$l \subset \Sigma \parallel \Pi_3; l_1 \equiv \Sigma_1 \perp Ox \Rightarrow \Rightarrow \Sigma_2 \supset l_2.$$

2. Площина Σ в перерізі поверхні параболоїда ($\Sigma \parallel$ осі поверхні) утворює параболу p , яка приймається за допоміжний переріз, а еліпс e , горизонтального обрисув поверхні, – є обрисовим перерізом, який належить площині Δ .

– $\Sigma \cap \Delta \Rightarrow DE$ – вісь спорідненості.

– Точки A і B , та точка C – спряжені точки, двох родинних перерізів з спільною хордою DE .

– Площина $\Theta(\bullet A, BC)$ – спряжена площина.

- В розв'язанні виконуються основні три дії загальної методики. Для цього:
1. Відрізок AB включаємо в профільну площину $\Sigma(\Sigma_2, \Sigma_1)$.
 2. Площина Σ перерізає параболоїд по параболі p , вершина якої в точці C .

Встановлюємо перспективну (центральну) відповідність між параболою p і основою параболоїда-еліпса e , який належить площині Δ .

Спільною хордою для параболи p і еліпса e є відрізок DE , а спряженою площиною – площина Θ .

Будуємо для кожної кривої (p і e) точки, належні спряженому зі спільною хордою діаметру. Такими точками для параболи p будуть вершина C і не власна точка M^∞ , а для еліпса e – точки L і F .

Вершина S родинного конуса буде отримана на перетині прямих LC і FM^∞ , які отримали з'єднанням відповідних точок кривих.

3. Визначаємо точки перетину відрізка AB з побудованим родинним конусом, вершина якого точка S і основа – еліпс e . Просторовий розв'язок цієї задачі наведений на рис. 12-30^A, для цього:

– Через відрізок AB та вершину S проводимо посередник – площину P .

– Будується горизонтальний слід P_1 , для цього: з точки A через вершину S проводимо допоміжну пряму AS та будуємо її горизонтальний слід \bar{A} .

Горизонтальний слід AB – є точка \bar{B} , так як точка B за умовою належить площині Π_1 . З'єднавши точку \bar{A} з точкою \bar{B} , – отримуємо горизонтальний слід P_1 площини – посередника P .

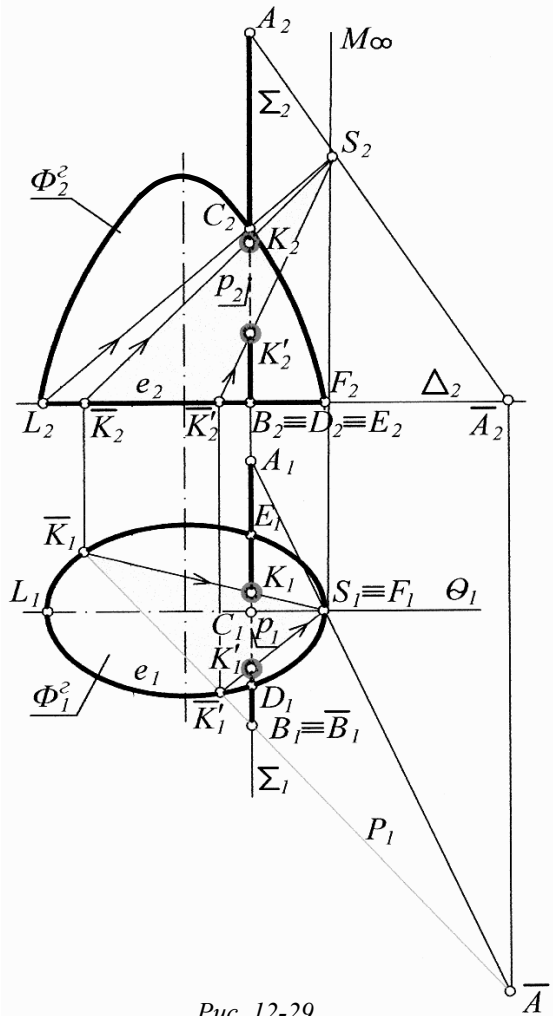


Рис. 12-29

– Побудувавши перетин P_1 з основою e конуса, отримуємо \bar{K} і \bar{K}' , які одержані центральним проектуванням з полюса S шуканих точок K і K' в яких задана пряма l перетинається з родинним конусом.

Епюрний розв'язок по визначенню проєкцій шуканих точок K і K' показано на рис. 12-30⁶.

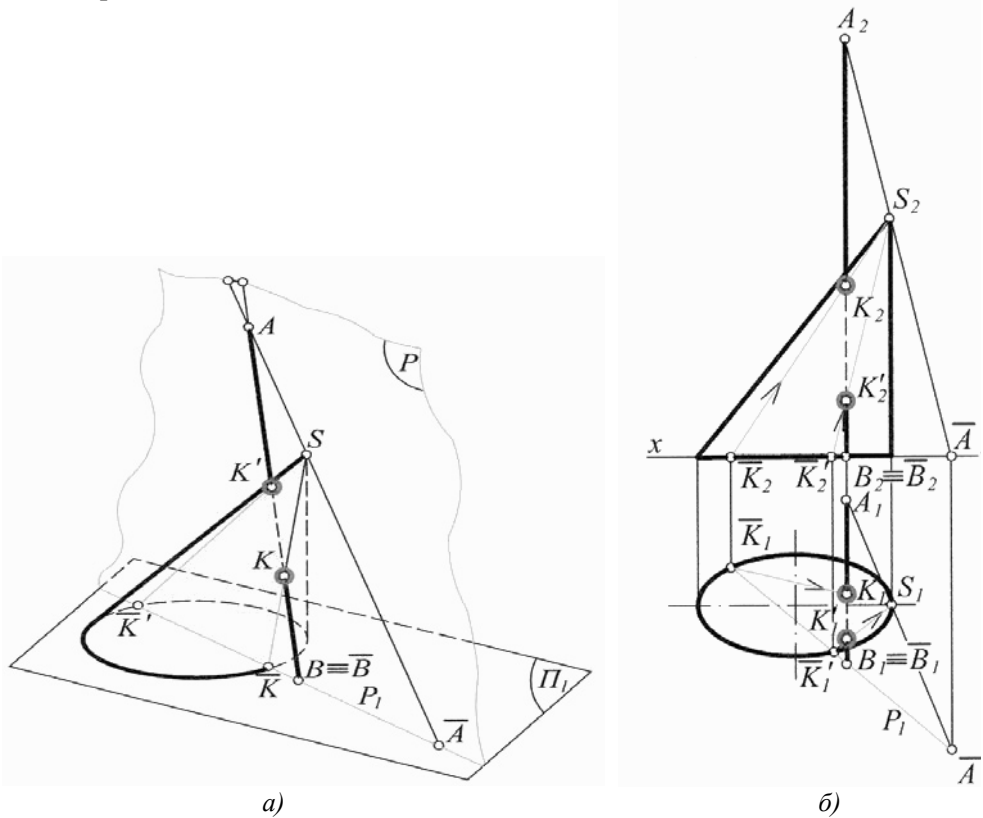


Рис. 12-30

Зворотнім перетворенням визначаємо на вихідному положенні прямої АВ шуканих точок K і K' , проєкції яких з урахуванням їх видимості, показано на рис. 12-29.

Задача 12.3-4: Визначити точку перетину прямої l з еліпсоїдом обертання Φ (рис. 12-31).

Алгоритм спрощеного розв'язку:

1. Через задану пряму l проведемо допоміжну площину $\Sigma \perp \Pi_2$.
2. Виконуємо заміну поверхні еліпсоїда на родинну конічну поверхню.

$\Phi \rightarrow \Phi^k$; по двох спільних перерізах, за які приймаємо допоміжний переріз поверхні Φ площиною Σ – перший переріз; та провівши дотичну до Φ горизонтальну площину $\Delta(\Delta_2)$, – отримуємо точку S , в яку "виродився" крайній переріз поверхні Φ , – і його приймаємо за другий переріз поверхні Φ .

По двох перерізах будуємо родинний конус, у якого точка S – вершина конуса, а фронтальні обрисові SM і SN .

Будуємо точки перетину прямої l з поверхнею конуса, для цього (рис. 12-32):

– будуємо центральну проєкцію прямої l на площину основи на Π_1 , яка зіллється з горизонтальним слідом P_1 площини $P(\bullet S, l)$;

– будуємо переріз $\overline{K'SK}$ конуса площиною P ;

– будуємо точки перетину прямої l з $\overline{K'SK}$, – отримані точки K' та K , – шукані точки перетину.

Переносимо розв'язок з рис. 12-32 на рис. 12-31, врахувавши видимість проєкцій точок K' та K , – отримуємо розв'язок задачі на рис. 12-31.

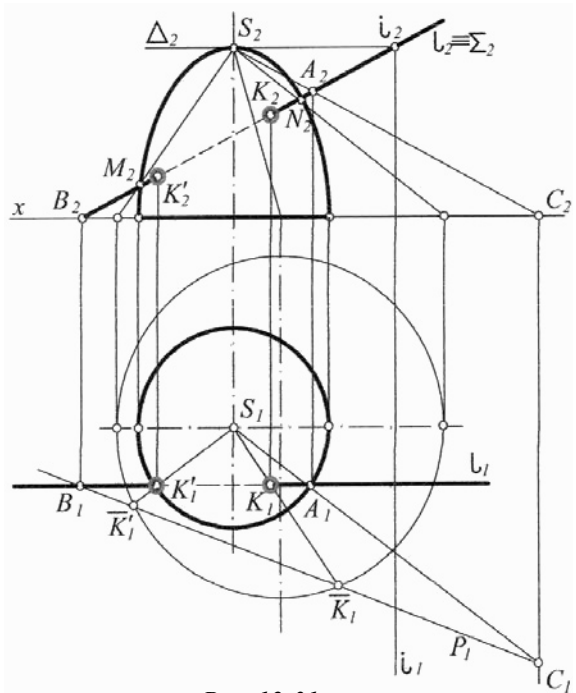


Рис. 12-31

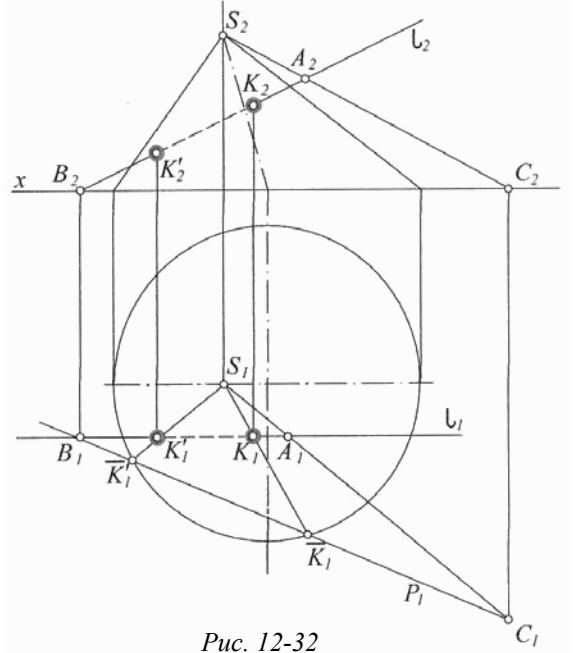


Рис. 12-32

12.8. Розв'язок задач групи 4, в яких визначається відстань від точки до поверхні

У всіх задачах групи 4, відстань від точки A простору до поверхні визначається по прямій, перпендикулярній до поверхні. Така пряма повинна бути перпендикулярною до найближчої твірної (прямої чи кривої лінії) цієї поверхні. Необхідна найближча пряма буде належати площині, яка проходить через задану точку простору і відповідний визначник поверхні та перереже поверхню. В перерізі поверхні буде отримано переріз-лінію найближчу до точки. З заданої точки проводимо перпендикуляр до лінії перерізу і будується точка перетину перпендикуляра з перерізом, отримана точка та задана точка визначають шукану відстань на перпендикулярі.

12.8.1. Приклади розв'язку задач групи 4

Задача 12.4-1.

Визначити відстань від точки A простору до поверхні похилого еліптичного циліндра.

Просторове зображення розв'язку задачі показано на рис. 12-33.

Алгоритм розв'язку:

1. $\bullet A \in P(a \parallel i); P \cap \Pi_0 \Rightarrow P_0$;
 $P_0 \cap m_0 \Rightarrow 1 \subset l(1.2)$.

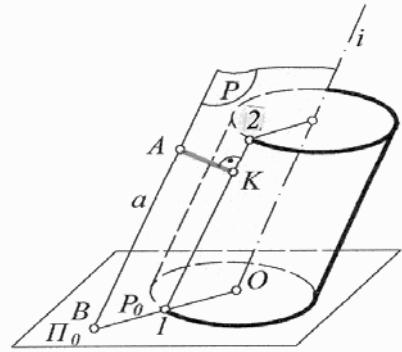


Рис. 12-33

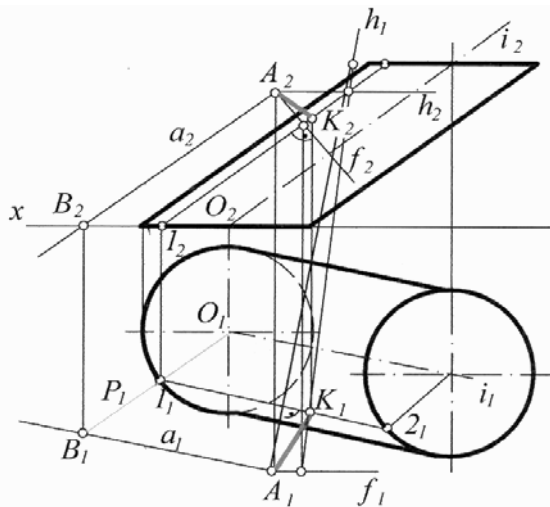


Рис. 12-34

2. $\bullet A \in r \perp 1.2; r \cap 1.2 \Rightarrow \bullet K$.
3. н. в. $AK!$

Епюрний розв'язок наведено на рис. 12-34.

Послідовність розв'язку:

- з точки A проводиться перпендикуляр r до поверхні;
- будемо точку K перетину r з поверхнею;
- відстань AK – є шуканою.

Виконання цих дій, показано на епюрі (рис. 12-34).

Через точку A та вісь i поверхні проводиться площина $P(a \parallel i)$ для задання якої з точки A паралельно осі i проводиться

пряма a та будується її горизонтальний слід в точці B . Горизонтальний слід осі i розташований в точці O . З'єднавши горизонтальний слід B і O – отримуємо горизонтальний слід P_1 площини P . Слід P_1 перетинається на Π_1 з нижньою основою циліндра, отримана точка визначає твірну 1.2, по якій площина P перерізає поверхню циліндра і ця твірна найближча до заданої точки A .

Для проведення з точки A перпендикуляра до твірної 1.2 (згідно з ознакою перпендикулярності двох прямих), з точки A проводимо площину Σ ($f \cap h$) яка перпендикулярна до 1.2, будується точка K перетину прямої 1.2 з площиною Σ . З'єднавши точку A з точкою K , – отримуємо перпендикуляр AK , який є шуканою відстанню.

Задача 12.4-2

Визначити відстань від точки A простору до поверхні прямого кругового конуса.

Просторове зображення розв'язку задачі наведено на рис. 12-35, а епюрний розв'язок наведено на рис. 12-36.

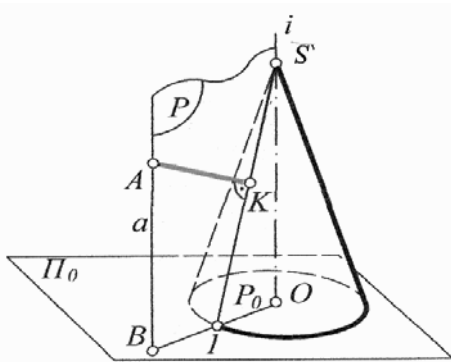


Рис. 12-35

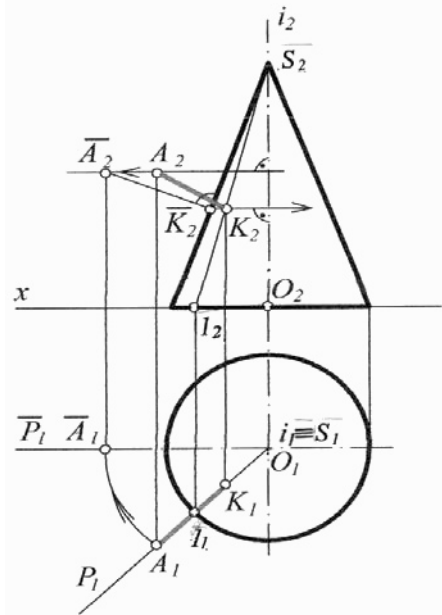


Рис. 12-36

Через точку A та вісь i проведемо площину $P(\bullet A, i)$, враховуючи те, що вісь $i \perp \Pi_1$, то площина P , проведена через пряму i буде перпендикулярною до Π_1 та її горизонтальний слід P_1 пройде через i_1 та A_1 , отриманий слід P_1 – слід-проекція i з ним зливається горизонтальна проекція твірної $1S$, по якій

площина P перерізає поверхню конуса. Твірна $1S$ – найближча твірна конуса до точки A . Проведення з точки A перпендикуляра до твірної $1S$ виконано з застосуванням методу обертання, що забезпечує проведення $\overline{A_2K_2} \perp \overline{1_2S_2}$.

Перенісши точку \overline{K} на вихідне положення задачі, отримуємо проєкції перпендикуляра AK , який є шуканою відстанню.

Задача 12.4-3

Визначити відстань від точки A простору до поверхні сфери.

На рис. 12-37 показано спрощений епюрний розв’язок задачі.

Враховуємо те, що найближча точка поверхні сфери до точки A розташована на центровій лінії OA .

Площина $P \perp \Pi_1$ (вона не показана на епюрі), яка проходить через точку A та центр сфери, перерізає сферу по колу, розташованому в січній площині, в якій розташована і центрова лінія OA .

Побудова точки K перетину центрової лінії з колом-перерізом виконана за рахунок перетворення $x \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}$, та на полі Π_4 будується точка K , – яка з точкою A визначає AK – шукану відстань.

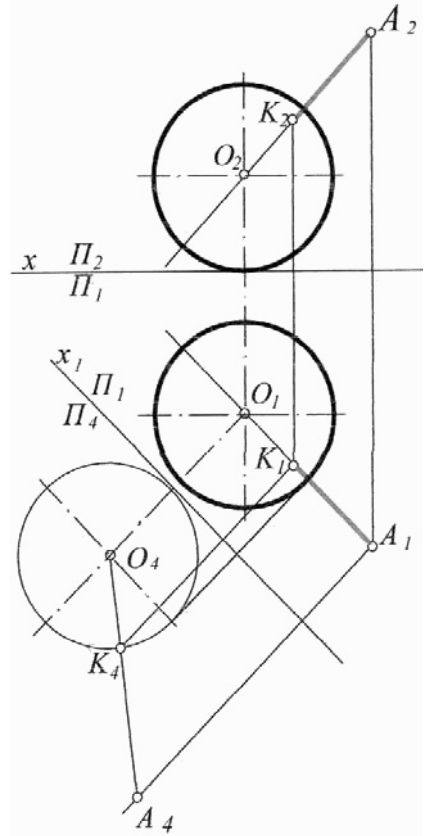


Рис. 12-37

12.9. Задачі для розв'язку

12.9.1. Задачі для позааудиторного розв'язку

Задача 12-1. Побудувати проекції точок перетину прямої l з заданими гранними поверхнями, та визначити видимість прямої на рис. 12-38, рис. 12-39.

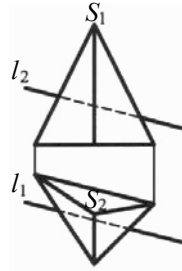


Рис. 12-38

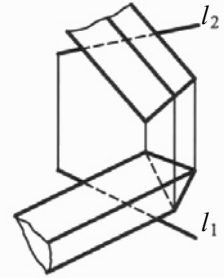


Рис. 12-39

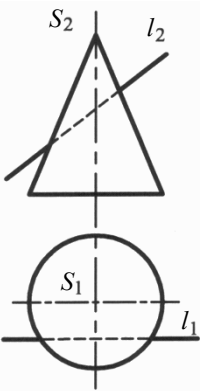


Рис. 12-40

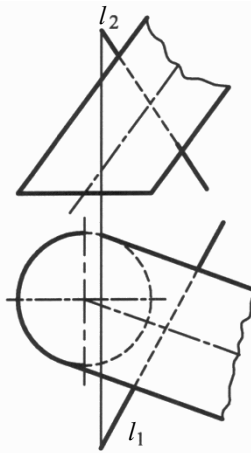


Рис. 12-41

Задача 12-2. Побудувати проекції точок перетину прямої l з заданими криволінійними поверхнями, та визначити видимість прямої на рис. 12-40, рис. 12-41.

Задача 12-3. Визначити точки перетину прямої a з поверхнею еліптичного параболоїда, та визначити видимість прямої на рис. 12-42.

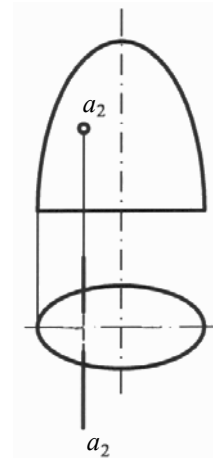


Рис. 12-42

12.9.2. Задачі для аудиторного розв'язку

Задача 12-4. Побудувати проєкції точок перетину відрізка AB з поверхнею еліптичного циліндра, та визначити видимість відрізка на рис. 12-43.

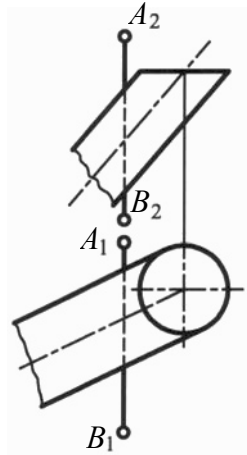


Рис. 12-43

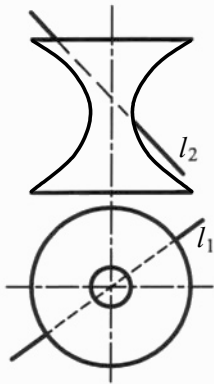


Рис. 12-44

Задача 12-5. Побудувати проєкції точок перетину прямої l з поверхнею однопорожнинного гіперболоїда, та визначити видимість прямої на рис. 12-44.

Задача 12-6. Побудувати прямокутний трикутник ABC за його гіпотенузою AC і вершиною B , яка належить прямій l на рис. 12-45.

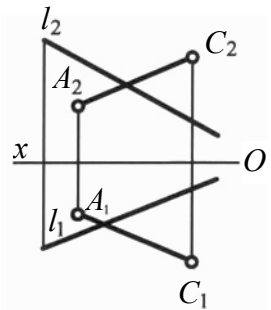


Рис. 12-45

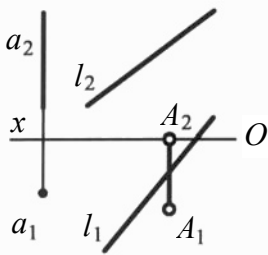


Рис. 12-46

Задача 12-7. Через точку A провести пряму, яка перетинала б пряму l і була рівнонахилена до прямої a та до площини проєкції Π_1 на рис. 12-46.

Запитання для самоконтролю

1. В чому полягає методика визначення взаємного розташування прямої і поверхні?
2. Які відомі групи задач на побудову точок перетину прямої з поверхнею?
3. Які відомі методи перетворення, що застосовують при визначенні точок перетину прямої з поверхнею?
4. Види родинності та спорідненості зображень.
5. Етапи алгоритму побудови точок перетину прямої з поверхнею конуса чи піраміди.
6. Які етапи алгоритму побудови точок перетину прямої з поверхнею похилої призми або циліндра?
7. В чому полягає родинність поверхонь?
8. Чим визначається спорідненості поверхонь?
9. В чому полягає методика визначення відстані від точки простору до поверхні?

Тема 13

Перетин поверхонь

Форма деталі утворюється переважно декількома поверхнями, в місцях спряження цих поверхонь утворюється лінія перетину поверхонь, яка є лінією контуру та на кресленнику відтворюється суцільною товстою лінією. Поверхні литих або штампованих деталей спряжені між собою плавно (наприклад, по ливарному радіусу), така лінія зветься лінією переходу і на кресленнику деталі відтворюється суцільною тонкою лінією, недоведеною до лінії контуру деталі на радіус плавності переходу.

На кресленнику деталі, лінія перетину її поверхонь або лінія їх переходу, в багатьох випадках відтворюється у вигляді складної лекальної кривої лінії, побудову якої виконують за багатьма характерними та проміжними точками.

Але допускається спрощене зображення лінії перетину поверхонь, якщо непотрібно їх точна побудова. Наприклад, замість лекальних кривих проводять дуги кола чи прямі лінії (п.6 ГОСТ2.305-68). В багатьох випадках виготовлення окремих елементів деталей виробу, спряжених між собою по лінії перетину, виконується по кресленниках на яких лінія перетину будується найбільш точно, це стосується виготовлення вентиляційних трубопроводів, вододієвих газодієвих трубопроводів, кожухів, резервуарів та іншого обладнання.

Від точності побудови лінії перетину поверхонь на кресленнику залежить точність виготовлення складових конструкцій (таких, як викрій, розгортки, коліна трубопроводів, їх вставки та інше).

13.1. Загальна методика побудови лінії перетину поверхонь (ЛППо)

Лінія перетину поверхонь – це геометричне місце точок, які одночасно належать двом поверхням, що перетинаються.

Методика побудови точки, спільної двом поверхням, що перетинаються. Нехай задані дві поверхні: Φ^I – ліва поверхня і Φ^{II} – права поверхня, які перетинаються між собою.

Для побудови спільної точки для цих поверхонь застосовується "метод посередників". Таким посередником може бути площина P , яка перерізає задані поверхні Φ^I і Φ^{II} (рис. 13-1). Площина P перерізає поверхню Φ^I і в перерізі утворюється лінія m . Одночасно площина P перерізає поверхню Φ^{II} , в перерізі утворюється лінія n . Лінії m і n належать одній площині P і, перетинаючись між собою, утворюють точку A (рис. 13-2), (можлива і ще друга точка). Вра-

ховуючи те, що точка A належить лінії m , яка належить поверхні Φ^I , то точка A належить поверхні Φ^I , одночасно точка A належить лінії n , яка належить поверхні Φ^{II} , то точка A належить поверхні Φ^{II} , – звідси: точка A , одночасно належна поверхні Φ^I і поверхні Φ^{II} , належить лінії перетину двох заданих поверхонь Φ^I і Φ^{II} .

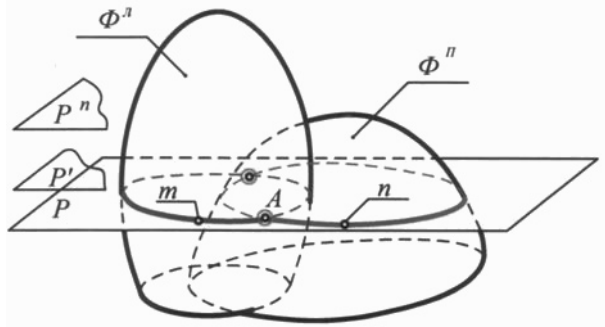


Рис. 13-1

Для побудови наступної спільної точки, вибирається друга площина посередник P' , яка для зручності побудови розташовується паралельно до посередника – площини P (тобто: $P' \parallel P$).

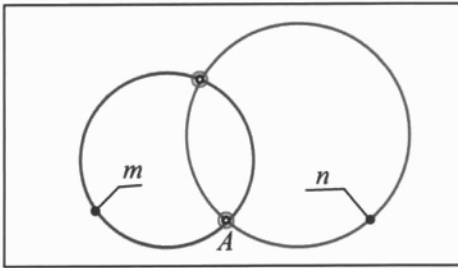


Рис. 13-2

Площина посередник P' перерізає поверхню Φ^I і в перерізі утворюється лінія m' . Одночасно площина P' перерізає поверхню Φ^{II} і в перерізі утворюється лінія n' . Лінії m' і n' належать одній площині P' і, перетинаючись між собою, утворюють точку B . Точка B – друга точка лінії перетину поверхонь.

Вибравши посередник $P^n \parallel P$, розглянувши переріз поверхні Φ^I і Φ^{II} посередником P^n та взаємний перетин перерізів, – отримуємо точку K , належну лінії перетину поверхонь.

З'єднавши отримані спільні точки A, B, \dots, K , отримуємо лінію $AB \dots K$, яка і є шуканою лінією перетину поверхонь.

Алгоритм побудови лінії перетину поверхонь:

1. Вибираємо посередник, – наприклад, площину P :

- $P \cap \Phi^I \Rightarrow m$;
- $P \cap \Phi^{II} \Rightarrow n$;
- $m \cap n \Rightarrow \bullet A$.

2. Вибираємо посередник $P' \parallel P$:

- $P' \cap \Phi^I \Rightarrow m'$;
- $P' \cap \Phi^{II} \Rightarrow n'$;

$$- m' \cap n' \Rightarrow \cdot B.$$

3.

4. Вибираємо $P^n \parallel P$:

$$- P^n \cap \Phi^1 \Rightarrow m^n;$$

$$- P^n \cap \Phi^n \Rightarrow n^n;$$

$$- m^n \cap n^n \Rightarrow \bullet K.$$

5. $\bullet A \cup \bullet B \cup \dots \cup K \Rightarrow AB\dots K$ – ЛППо!

Сутність методу побудови лінії перетину поверхонь полягає в побудові спільних точок для поверхонь які перетинаються, що виконується за допомогою посередників, якими частіше всього можуть бути площини (окремого положення, або загального положення) чи поверхні сфери.

Вибір посередника – площини повинен бути таким, щоб в перерізі поверхонь, що перетинаються були отримані прості для побудови лінії – окреслені прямими, або дугами кіл.

13.1.1. Особливості побудови лінії перетину поверхонь

Застосовуючи загальну методику побудови точок ЛППо, розв'язок задач виконується переважно в такій послідовності:

– Проводиться аналіз умови задачі.

– Визначають найбільш характерні точки лінії перетину поверхонь, для цього допоміжні посередники – площини слід провести через обрисові кожної поверхні, крім того, слід провести площини – посередники так, щоб їх сліди були дотичні до основи поверхні.

– Визначають проміжні точки лінії перетину поверхонь. Для цього посередники, проводять між тими посередниками, за допомогою яких визначались характерні точки.

Посередники повинні забезпечити рівномірність щільності точкового каркасу лінії перетину поверхонь.

– З'єднують поступово характерні і проміжні точки, з'єднувати можна тільки точки, які лежать на сусідніх твірних.

– Точки розділу видимої гілки і невидимої її частини лінії перетину поверхонь лежать на обрисових твірних (на обрисах тієї чи іншої поверхні).

– Видима ділянка лінії перетину поверхонь переходить у видиму ділянку обрисову поверхні.

– Видимість точок лінії перетину поверхонь визначають з урахуванням того, що:

– коли перетинаються видимі проекції двох твірних, одна з яких належить одній поверхні, а друга твірна належить другій поверхні, – отримується видима точка лінії перетину поверхонь;

- коли перетинаються невидимі проекції двох твірних, – отримується невидима точка лінії перетину поверхонь;
- коли перетинаються видима проекція однієї твірної з невидимою проекцією другої твірної, – отримується невидима точка лінії перетину поверхонь.
- Порядок лінії перетину поверхонь дорівнює добутку порядків поверхонь, які перетинаються.

13.1.2. Типи задач, в залежності від виду посередника

Тип А – задачі, в розв'язках яких застосовуються площини окремого положення (проектуюча або рівня). До них відносяться задачі, в яких: перетинаються гранні чи криволінійні проектуючі поверхні з криволінійними (перерізи яких окреслені прямими та дугами кіл) або перетинаються криволінійні поверхні, які в перерізі посередником – площиною рівня перетинають по простих для побудови фігурах.

Тип В – задачі, в розв'язках яких застосовують посередники – поверхні сфери. До них відносяться задачі, в яких перетинаються поверхні обертання, осі яких прямі окремого положення.

Тип С – задачі в розв'язках яких застосовують посередники – площини загального положення. До них відносяться задачі, в яких перетинаються похилі поверхні, такі як: призма з призмою, призма з пірамідою, піраміда з пірамідою, циліндр з циліндром, циліндр з конусом, конус з конусом та інші пари похилих поверхонь.

13.2. Задачі типу А – в розв'язках яких застосовуються посередники – площини окремого положення

Розглядаються задачі, в яких одна з поверхонь, що перетинається є проектуючою гранню або циліндричною, а друга поверхня довільна (гранна або криволінійна), в перерізі якої можуть бути отримані фігури, окреслені прямими лініями або дугами кіл. Згідно з властивостями проектуючих поверхонь, одна проекція лінії перетину поверхонь зливається з проекцією проектуючої поверхні на тій площині проекцій, відносно якої проектуюча поверхня перпендикулярна, тоді задача зводиться до побудови інших проекцій лінії перетину поверхонь, що виконується застосуванням загальної методики та, враховуючи принцип належності точок лінії перетину поверхонь до проектуючої поверхні.

До цього типу А відносяться і задачі на побудову лінії перетину довільних поверхонь, в перерізі яких площинами окремого положення можна отримати прості для побудови фігури, окреслені дугами кіл або прямими лініями. Такими поверхнями, які перетинаються, можуть бути поверхні кулі, окремі конічні чи циліндричні поверхні та інші поверхні, які відповідають рекомендаціям стосовно отриманню фігур перерізів.

Застосування посередників – площин окремого положення (переважно площин рівня), дає більш просту побудову фігур перерізів поверхонь на тій площині проєкції, відносно якої посередник – площина паралельна (на основі властивості площин – рівня).

13.2.1. Перетин гранних поверхонь

Послідовність побудови лінії перетину двох гранних поверхонь.

- Проводиться аналіз умови завдання.
- Будуються точки перетину ребер першого багатогранника з гранями (або ребрами) другого багатогранника.
- Будуються точки перетину ребер другого багатогранника з гранями (або ребрами) першого багатогранника.
- Побудовані точки перетину послідовно з'єднати між собою з урахуванням видимості. Або лінія перетину може бути побудована послідовним з'єднанням визначених відрізків прямих, по яких грані одного багатокутника перетинаються з гранями другого багатокутника.

Розглянемо приклад побудови лінії перетину поверхонь двох гранних поверхонь, наведених на рис. 13-3^а.

- Аналіз умови завдання.

В прикладі, запропонованому на рис. 13-3^а, перетинаються поверхні двох поверхонь багатогранників, одна з яких – поверхня тригранної піраміди $SABC$, основа її ABC є площина фронтально проєктуюча; друга – поверхня тригранної прямої призми, грані бічної поверхні якої горизонтально – проєктуючі площини.

Будуємо точки перетину ребер піраміди з гранями призми, застосовуючи методику побудови точки перетину прямої з проєктуючою площиною (рис. 13-3^б).

Ребро SC перетинається з горизонтально проєктуючими лівою та правою гранями призми відповідно в точках $1'$ та 1_1 , що на полі Π_1 відтворено проєкціями точок $1'_1$ та 1_1 , провівши з них вертикальні лінії зв'язку до перетину з S_2C_2 – отримуємо проєкції цих точок на полі Π_2 відповідно $1'_2$ та 1_2 .

Ребро SA перетинається з лівою та з правою горизонтально проєктуючими гранями призми в точках $2'$ та 2 на полі Π_1 , відтворених проєкціями $2'_1$ та

2_1 , провівши з них вертикальні лінії зв'язку до перетину з S_2A_2 – отримуємо проєкції $2'_2$ та 2_2 .

Ребро SB перетинається з лівою та правою гранями призми в точках $3'$ та 3 , на полі Π_1 відповідними проєкціями $3'_1$ та 3_1 , а на полі Π_2 проєкціями $3'_2$ та 3_2 .

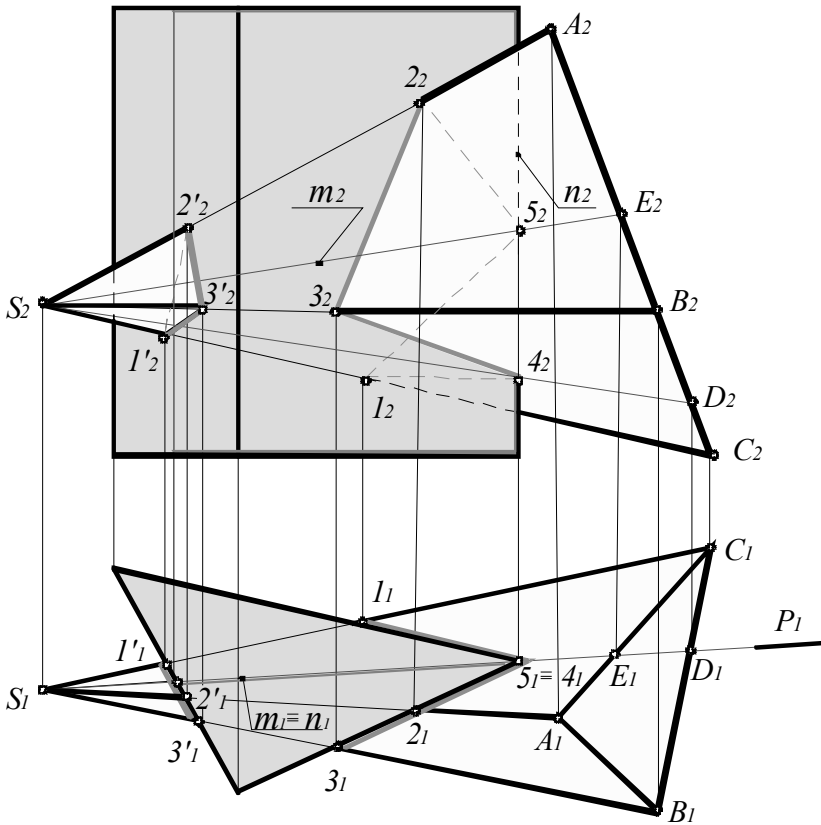


Рис. 13-3, а

Будуємо точки перетину ребер призми з гранями піраміди, в прикладі тільки одне праве бокове ребро призми перетинається з гранями піраміди SAC і SCB . Для побудови точок перетину правого ребра призми із згаданими гранями піраміди застосовується загальна методика побудови точок лінії перетину поверхонь. Для цього з вершини S через праве ребро призми проводимо посередник – горизонтально проєктуючу площину $P(P_1)$, в перерізі піраміди отримуємо трикутник SDE , а в перерізі призми отримано прямокутник (права сторона якого є праве ребро призми). В перетині отриманих фігур (трикутника і прямокутника) отримуємо точки 4 і 5, які є точками перетину

правого бокового ребра призми з гранями піраміди, що й видно з побудови: на полі Π_1 ($S_1 D_1 E_1 \equiv P_1$), та на полі Π_2 , де $\Delta S_2 D_2 E_2$ перетинається з правим ребром призми, – отримуємо фронтальні проекції 5_2 та 4_2 , а на полі Π_1 $5_1 \equiv 4_1$, як точки, які належать горизонтально проектуючому ребру призми.

Побудовані точки перетину з'єднуємо з урахуванням їх видимості, для цього беремо до уваги, що: точки $1', 2'$ та $3'$ належать лівій грані призми, на полі Π_1 $1'2'13'1'$ – злилося із слідом проекцією площини лівої грані. З урахуванням того, що ребро SB має найбільшу глибину точок, то точка $3'_2$ на полі Π_2 видима точка, а до видимої точки приходять видимі лінії, а лінія $1'_2 2'_2$ – не видима (закрита гранями піраміди з спільним ребром SB). Фронтальні проекції точок $1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2$ з'єднуються між собою з урахуванням видимості конкуруючих точок, так точка 1 , яка належить ребру SC , а глибина його точок найменша порівняно з точками ребер SB та SA , то точка 1 належна ребру SC на полі Π_2 не видима, так проекції точок 4 і 5 на Π_2 невидимі, бо ці точки мають глибину, меншу ніж глибина точок ребер SA і SB (це добре видно на полі Π_1). Точка 3_2 видима, бо її глибина найбільша з глибин інших точок лінії перетину поверхонь (ребро SB найближче до взірця). З'єднавши на полі Π_2 фронтальні проекції точок $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 1_2$ отримуємо проекцію другої частини лінії перетину поверхонь (перша частина-лінія $1'_2 2'_2 3'_2 1'_2$).

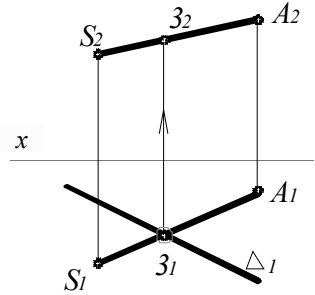


Рис. 13-3, б

Горизонтальні проекції лінії перетину поверхонь – гілка $1_1 2_1 3_1 1_1$, та гілка $1_4 1_3 1_2 1_5 1_1$, злилися із горизонтальними проекціями горизонтально проектуючих бічних граней призми.

З рис.13-3^а видно, що лінія перетину поверхонь, в даному прикладі, складається з двох частин: одна частина лінії перетину поверхонь – плоска ламана лінія $1'. 2'. 3'. 1'$, а друга частина лінії перетину поверхонь – просторова ламана лінія $1. 4. 3. 2. 5. 1$.

В інших варіантах лінія перетину поверхонь гранних поверхонь може бути у вигляді однієї частини чи розпадається на дві частини:

– якщо лінія перетину поверхонь у вигляді однієї частини, то така лінія перетину поверхонь – просторова або плоска ламана лінія;

– якщо лінія перетину поверхонь складається з двох частин, то одна частина може бути плоскою ламаною, а друга частина теж плоскою ламаною, або перша і друга частини можуть бути просторовими ламаними лініями.

13.2.2. Перетин гранної проектуючої поверхні з довільною кривою поверхнею

Розв'язок задач на побудову лінії перетину таких поверхонь пропонується виконувати **методом повних перерізів**, в якому застосовують допоміжні посередники – площини окремого положення.

Етапи виконання методу повних перерізів:

1. **Утворення площини повного перерізу.** Для цього виділяється одна бокова грань заданої призми. На тому полі площини проєкцій відносно якої грань перпендикулярна і зображена у вигляді відрізка, то продовження її зображення утворює слід-проєкцію площини – площини повного перерізу яка приймається за площину-посередник, що застосовується для побудови лінії перетину заданих поверхонь.

2. **Уявлення виду фігури повного перерізу,** утворену при перерізі кривої поверхні площиною посередником, – отримана перша фігура перерізу (для побудови якої, при необхідності, площина посередник та обрис кривої поверхні продовжуються до взаємного перетину). З'ясовується, який вид має фігура повного перерізу. Одночасно площина – посередник перерізає поверхню призми по прямокутнику, який є другою фігурою перерізу, та дорівнює грані дотику площини до призми.

3. **Побудова проєкцій фігури повного перерізу.** Для цього на полях площин проєкцій будуються проєкції характерних та проміжних точок фігури повного перерізу які відповідно з'єднуються між собою. Одночасно, будуються проєкції і другої фігури перерізу (прямокутника) сторони якого збігаються з відповідними лініями зв'язку.

4. **Виділяється натуральна частина фігури повного перерізу** на її проєкціях, яка одночасно належить першій та другій фігурі перерізу і обмежена точками їх взаємного перетину.

Послідовно включаючи кожен грань в допоміжну площину так, щоб її слід-проєкція була продовженням відрізка прямої, в який спроектовано грань призми (це на тій площині проєкцій, до якої грань, що розглядаємо, перпендикулярна), застосувавши метод повних перерізів – отримуємо одну гілку лінії перетину поверхонь (можливо це гілка кривої другого порядку чи пряма). При включенні наступної грані призми в іншу допоміжну площину і застосувавши метод повних перерізів, – отримуємо другу гілку лінії перетину поверхонь.

Перша гілка і друга між собою спряжені спільною точкою, яка є точкою перетину ребра призми з кривою поверхнею, яке розділяє першу і другу розглянуті грані. Послідовно розглядаючи побудову гілок ліній перетину поверхонь, утворених третьою, наступною і останньою гранню призматичної поверхні, яка перетинається з криволінійною поверхнею, підкреслюємо те, що остання побудована гілка лінії перетину поверхні може стикуватись з почат-

ком її першої гілки (це у випадку, коли всі грані перетинаються з криволінійною поверхнею, варіант проникнення поверхонь), або остання гілка не останньої грані з'єднується з початком її першої гілки (це у випадку, коли не всі грані перетинаються з криволінійною поверхнею, варіант врубки поверхонь одна в іншу).

Застосування методу повних перерізів дає змогу розуміти геометрію виду побудованої лінії перетину поверхонь.

Не виключається можливість застосування в якості посеередників-площин рівня, які забезпечують побудову точкового каркасу лінії перетину поверхонь (побудова «по точках»). Така методика дає розуміння механізму побудови лінії перетину поверхонь, але не дає уявлення геометрії її виду та не забезпечує точність її побудови.

Розглянемо приклад, в якому виконується побудова лінії перетину поверхні, утвореної при «вході» прямої тригранної призми в поверхню півсфери з їх основами, які належать площині проєкцій Π_1 (рис. 13-4^а).

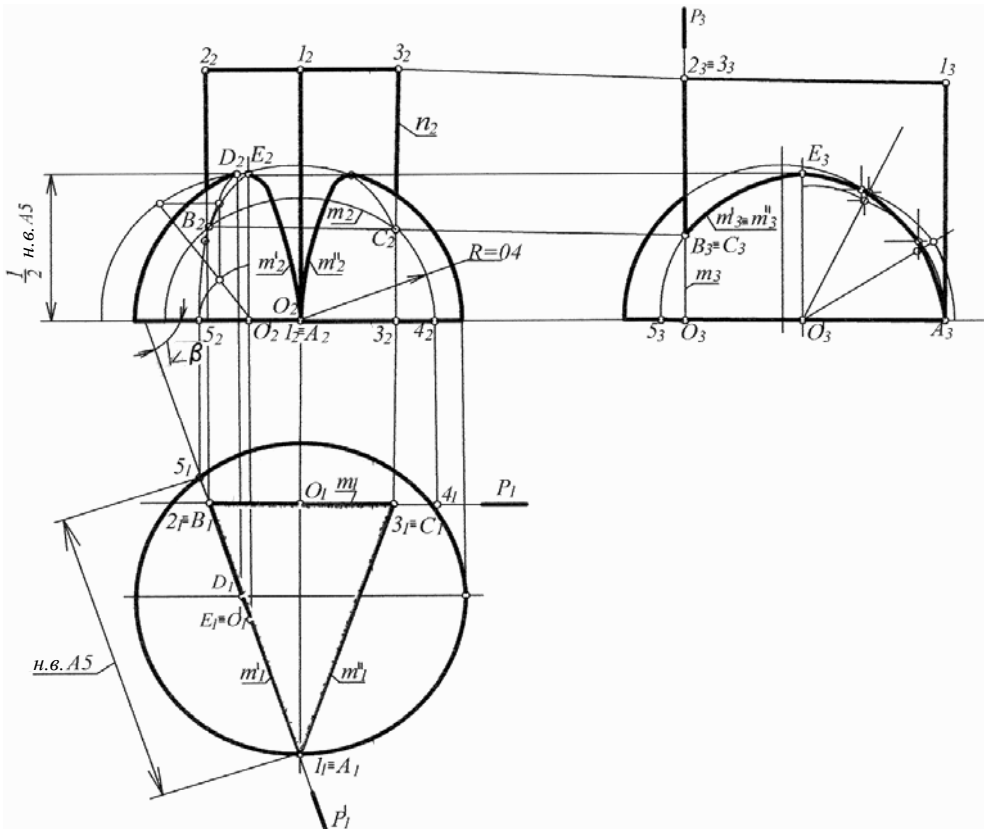


Рис. 13-4, а

Підкреслюємо те, що кожна бічна грань призми перерізає поверхню півсфери і в перерізі кожною гранню отримується дуга кола. Таким чином, лінія перетину поверхонь складається з трьох дуг кіл, з'єднаних між собою характерними точками, якими є точки перетину бічних ребер призми з поверхнею півсфери.

Розв'язок задачі:

Перша грань призми, яка проходить через вершини 2 і 3 паралельна площині проєкцій Π_2 . Застосовуємо метод повних перерізів для цього:

– включасмо першу грань в посередник – фронтальну площину $P(P_1, P_3)$, шляхом продовження 2_13_1 ;

– в перерізі поверхні півсфери першою гранню призми отримуємо півкола m , радіус якого R дорівнює O_14_1 ;

– фронтальна проєкція m_2 є натуральною величиною перерізу m (так як $m \subset P \parallel \Pi_2$), горизонтальна проєкція m_1 та профільна проєкція m_3 зливаються відповідно з слідами-проєкціями P_1 та P_3 ;

– бічні ребра призми, які проведені з вершин 2 і 3, перетинаються з повним перерізом m , виділяють натуральну частину першої гілки лінії перетину поверхні, яка проходить від точки B (де перетинається ребро з точкою 2 з дугою m) по дузі m до точки C (де перетинається ребро з точкою 3 з дугою m) рис. 13-4, б.

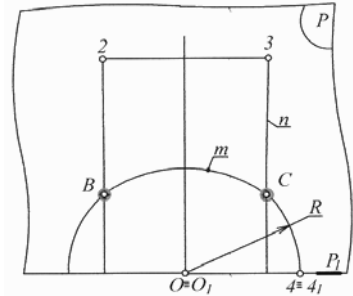


Рис. 13-4, б

Друга грань, яка проходить через вершини 1 і 2 розташована під гострим кутом β до площини Π_2 .

Згідно з методом повних перерізів:

– включасмо другу грань в посередник – горизонтально проєктуючу площину P' (P'_1), для отримання P'_1 – продовжили 2_11_1 до перетину з горизонтальним обрисом півсфери;

– в перерізі півсфери площиною P' отримано півкола m' , в якого горизонтальний діаметр $A5$, а вертикальний радіус (половина діаметра) $O'E$;

– фронтальна проєкція m'_2 , яка є проєкцією півкола що проєктується у вигляді півеліпса, в якого мала вісь A_25_2 є проєкцією діаметру $A5$, а велика полувісь O_2E_2 є проєкцією спряженого половини діаметра $O'E$, який перпендикулярний до Π_1 за віссю A_25_2 та піввіссю O'_2E_2 будується m'_2 ;

– профільна проєкція m'_3 будується за профільною проєкціями A_35_3 та O_3E_3 , – отримуємо m'_3 половину еліпса, в який спроектувалося півкола m' ;

– бокові ребра призми, які проведені з вершин 1 і 2, перетинаючись з повним перерізом m' , виділяють натуральну частину другої гілки лінії перетину поверхонь, яка проходить від точки A (де перетинається ребро з точкою 1 з дугою m') по дузі m' до точки B (де перетинається ребро з точкою 2 з дугою m' , яка зливається з точкою перетину цього ребра і з дугою m).

Третя грань, яка проходить через вершини 1 і 3, розташована віддзеркально другій грані відносно вертикальній осі, то і третя гілка m'' лінії перетину поверхонь буде мати віддзеркалене зображення гілки m' . Профільна проекція m'' зливається з $m'3$, а фронтальна проекція $m''2$ пройде від $\bullet A_2$ до $\bullet C_2$.

– фронтальний обрис півсфери несе точки на полі Π_2 , які змінюють знак видимості лінії перетину поверхонь.

На полі Π_1 горизонтальний діаметр зображення півкулі розділяє півкулю на видиму її частину на полі Π_2 (це та, яка розташована нижче горизонтального діаметру півсфери) і невидиму. Характерні точки лінії перетину поверхні на фронтальному обрисі визначаються на полі Π_1 – де горизонтальна проекція фронтального обриса (горизонтальний діаметр) перетинається з слідом P'_1 – отримуємо D_1 , а її фронтальна проекція D_2 , з її симетричною на $m''2$. Від точки A_2 (найближчої від взірця, видимої) до точки D_2 дуга еліпса $m'2$ – видима, а також її симетрична частина дуги $m''2$ теж видима частина лінії перетину поверхні.

Вся інша частина ЛППо на полі Π_2 від точки D_2 по $m'2$ до точки B_2 і далі, по m_2 до точки C_2 і від неї по $m''2$ до точки на фронтальному обрисі, – невидима, що й показано на рис. 13-4, а.

В цьому прикладі розглянуто перетин поверхні призми і півсфери. При їх зовнішньому взаємному розташуванні простір можливо розділити на зовнішній – за поверхнями, та внутрішній – всередині поверхонь. Це має місце при побудові, наприклад, вентиляційних витяжних магістралей та інше.

А ось коли розглядається будова деталі, – її зовнішня форма та внутрішня, утворена поверхнями з взаємно-внутрішнім розташуванням – якщо простір між цими поверхнями „заповнити” матеріалом, то будуть утворені стінки деталі, то такі поверхні мають „внутрішнє” взаємне розташування та визначать товщину стінок деталі.

Розглянемо модель, яка утворена півкулею з тригранним наскрізним отвором (рис. 13-5). Тобто, в цьому прикладі розглянемо півкулю (зовнішня форма якої утворена поверхнею півсфери „з'єднаною” знизу з кругом), в якому вирізано наскрізний отвір призматичною поверхнею (внутрішня форма утворена поверхнею призми тригранної прямої). Поверхні півсфери та призми мають „внутрішнє” взаємне розташування, але їх лінія перетину будуватиметься так же як і в попередньому прикладі (в якому півсфера та призма мають „зовнішнє” розташування).

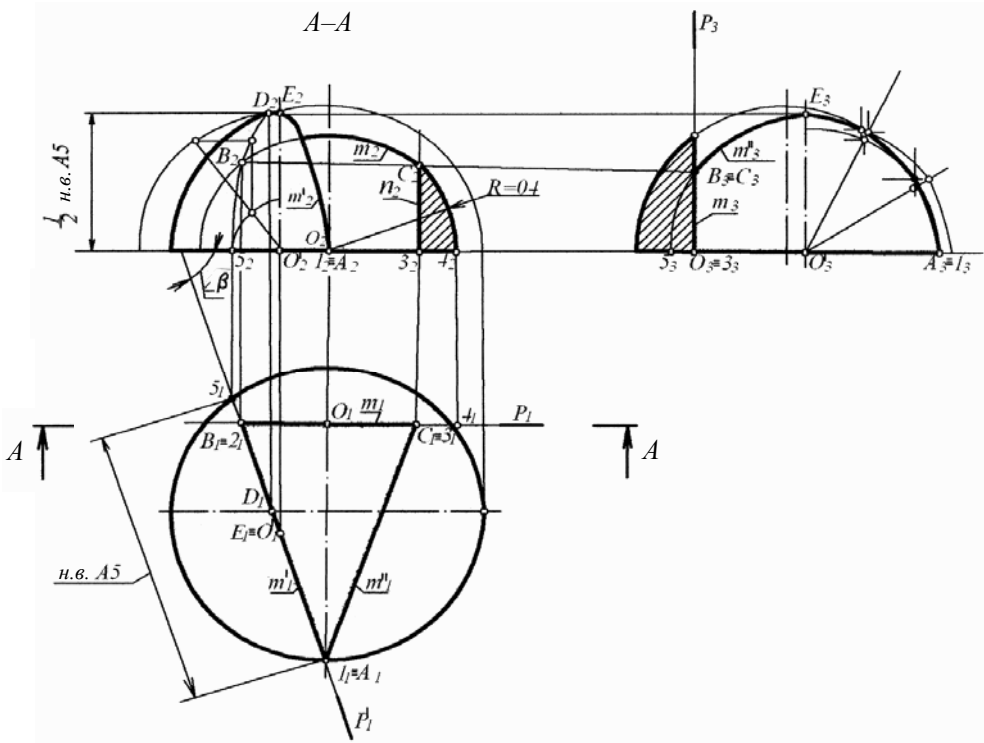


Рис. 13-5

В цьому прикладі необхідно побудувати лінію перетину поверхонь, утворену при "виході" прямої тригранної призми з півкулі. Послідовність розв'язку та зміст побудови лінії перетину поверхні аналогічна розглянутій методиці в попередньому прикладі, але враховуючи те, що в цьому прикладі маємо модель наближену до будови деталі, тому внутрішню форму її покажемо на відповідних розрізах, в тому числі: на половині простого вертикального фронтального розрізу (виконаного площиною $A-A$, проведеною по найширшій частині призматичного вертикального отвору моделі), сполученого з половиною виду спереду; та на простому вертикальному профільному розрізі, що й показано на рис. 13-5. Виконання застосованих зображень моделі наведені в темі 14.

13.2.3. Перетин довільних кривих поверхонь, одна з яких проектує

Розглядається приклад, в якому виконується побудова лінії перетину поверхонь, одна з яких пряма кола цилиндрична, а друга криволінійна довільна поверхня (рис. 13-6).

Аналіз умови прикладу та вибір ходу його розв'язання.

Згідно з властивостями проектуючої циліндричної поверхні яка перпендикулярна до площини проєкцій Π_1 , горизонтальна проєкція лінії перетину поверхонь зливається із проєкцією циліндра на Π_1 і задача по побудові фронтальної проєкції лінії перетину поверхні буде виконана із застосуванням загальної методики, та враховуючи принцип належності точок лінії перетину поверхонь до циліндричної поверхні. Друга поверхня, половина сфери, в її перерізі можуть бути отримані фігури, окреслені дугами кіл та прямими лініями. Це дає можливість застосування посередників – площин окремого положення, циліндр і половина сфери своїми основами співпадають з Π_1 , рішення прикладу найпростіше при застосуванні посередників – фронтальних площин рівня (паралельних Π_2).

Застосувавши посередники – фронтальні площини, отримуємо в перерізі циліндра – прямокутники, а в перерізі половина сфери – половини кіл.

Розв'язок задачі:

Побудова характерних точок лінії перетину поверхонь

Посередники – площини P фронтальні, застосовуються для побудови характерних точок.

Площина P , проведена через фронтальні обрисів циліндра і в перерізі отримуємо прямокутник (фронтальний обрис циліндра), одночасно площина P в перерізі половини сфери утворює півкола радіуса $R\rho^1$. Отримані при взаємному перетині прямокутника і півкола, точки B і B' – характерні точки лінії перетину поверхонь, які при побудові проєкції лінії перетину поверхонь на полі Π_2 , – змінюють її видимість.

Площина P' дає можливість побудувати характерні точки E і E' , які належать фронтальному обрисов півсфери.

Площина P'' і P''' , дотичні до основи циліндра, дають можливість побудувати точки A і C , які належать профільному обрисов циліндра.

Побудова проміжних точок лінії перетину поверхонь

Для побудови проміжних точок застосовуються посередники – площини T , паралельні між собою і паралельні Π_2 , відносно розташування яких забезпечує рівномірність щільності точкового каркасу лінії перетину поверхонь.

При побудові проміжних точок, посередники – площини T і T' проводимо між характерними точками C і $E(E')$, чим забезпечується щільність гілки ECE' . Для побудови проміжних точок між характерними BAB' , застосовуються площини T'' і T''' , горизонтальні сліди T'' і T''' , проведені паралельно осі x і розташовані між B_1A_1 та B_1' .

Наприклад, площина T'' в перерізі циліндра утворює прямокутник (1.2.4.3.1) $n \subset T''$ (рис.13-7), а в перерізі півсфери – утворюється півкола m''' , радіус якого $R_k = 0,5$. При взаємному перетині прямокутника n''' і півкола m''' , отримуємо проміжні точки D і D' . Аналогічно визначаються проміжні точки лінії перетину поверхонь за допомогою площин T, T' і T''' , побудова яких наведена на рис. 13-6.

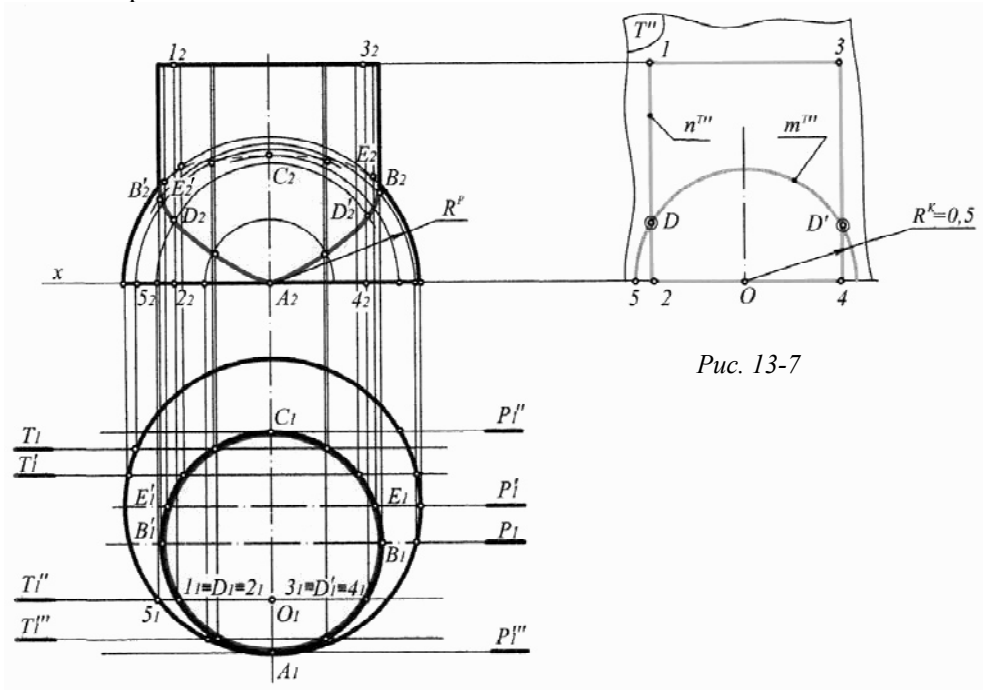


Рис. 13-7

Рис. 13-6

– Характерні та проміжні точки лінії перетину поверхонь поступово з'єднуємо між собою по належності їх до сусідніх твірних. Видимість лінії перетину поверхонь на полі Π_2 визначається з урахуванням того, що на полі Π_1 площина P своїм слідом P_1 розділила циліндричну поверхню на видиму на полі Π_2 (ця половина на полі Π_1 – розташована нижче P_1 і точки її половини мають більші координати глибини відносно розташованих зверху P_1). Звідси: частина лінії перетину поверхні від точки B_2 до D_2' , до A_2 і далі до D_2 і до B_2' – видима частина фронтальної проекції лінії перетину поверхонь, а її частина $B_2'E_2'C_2E_2B_2$ – невидима, яка утворена проекціями точок, розташованих на невидимій стороні циліндра.

– На полі Π_2 до точок B_2' і B_2 проходять видимі частини фронтальних обрисових твірних циліндра.

13.2.4. Перетин кривих поверхонь

Переважають розглядаються такі задачі, в яких площина окремого положення в перерізі двох кривих поверхонь утворює фігури, окреслені дугами кіл або прямими лініями.

Розглянемо приклад побудови лінії перетину двох поверхонь, одна з яких поверхня прямого кругового конуса, а друга поверхня – поверхня півсфери. Основи цих поверхонь розташовано на площині проєкцій Π_1 (рис. 13-8).

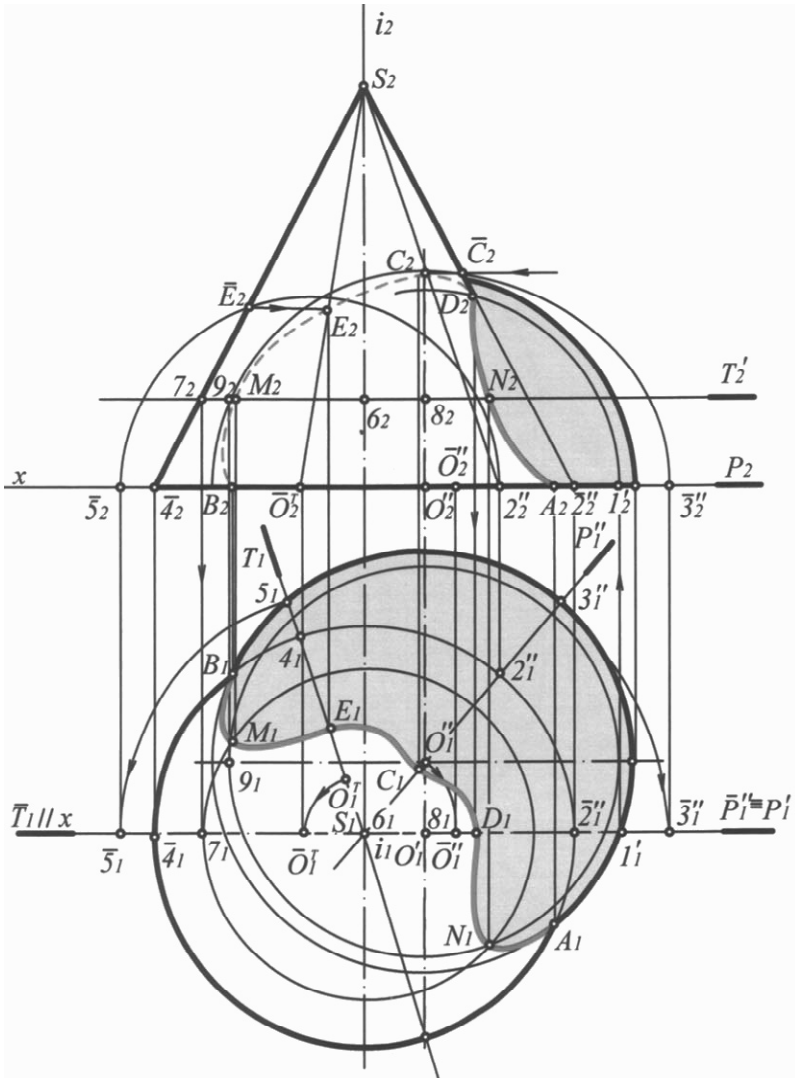


Рис. 13-8

Аналіз умови прикладу та вибір ходу його розв'язання.

В перерізі площиною, проведеною через вершину прямого кругового конуса, отримується фігура (трикутник), окреслена прямими лініями (дві з яких – твірні). В перерізі півсфери будь-якою площиною отримується дуга кола (ціле коло, або дуга кола, замкнута своєю найбільшою хордою). Розв'язок прикладу можливий із застосуванням посередників – площин окремого положення (це площина рівня, або площина проектуюча). Коли площина проектуюча проведена через вершину конуса – отримаємо трикутник n , а в перерізі півсфери отримуємо дугу кола m , при перетині n і m – отримуємо спільні точки, які належать лінії перетину поверхонь конуса і півсфери. Проміжні точки лінії перетину поверхонь можна отримати при застосуванні посередника – площини рівня, паралельні площині Π_1 . Така горизонтальна площина в перерізі поверхні прямого кругового конуса утворює коло n' , а в перерізі півсфери – отримаємо коло m' , – при перетині n' і m' – отримаємо спільні точки – належні лінії перетину поверхонь.

Розв'язок задачі:

Побудова характерних точок лінії перетину поверхонь

Побудова найнижчих точок лінії перетину поверхонь – посередником – площиною – площина $P(P_2)$, "перетинаючи" поверхню конуса по його основі, – в перерізі – коло основи конуса, P – "перетинаючи" півсферу по її основі в перерізі – коло основи півсфери. При перетині горизонтальних проекцій кола основи конуса і кола основи півсфери, – отримуємо горизонтальні проекції A_1 і B_1 характерних точок лінії перетину поверхонь.

Визначення найвищої характерної точки лінії перетину поверхні, належної твірній конуса найближчої до найвищої точки півсфери. Ця найвища точка лінії перетину поверхні розташована в горизонтально проектуючій площині P'' , яка проведена через лінію вершин поверхонь. Площина P'' перерізає поверхню конуса по трикутнику зі стороною S_2'' , а також P'' перерізає півсферу по півколу, радіус якого дорівнює $O''3''$. Трикутник і півкола належні площині P'' , їх горизонтальна проекція зливається з слідом – проекцією P_1'' . Через вершину S конуса проведемо вісь i , перпендикулярну площині Π_1 . Площину P'' , разом з отриманими перерізами поверхонь (трикутником і півколом) повертаємо навколо осі i до фронтального положення ($\bar{P}_1'' \equiv P_1'' \parallel x$), при цьому, фронтальна проекція трикутника перерізу зливається з трикутником – фронтальною проекцією конуса, а фронтальна проекція півкола – перерізу в поверненому положенні, перетинаючись з $S_2 \bar{2}''$, утворює точку \bar{C}_2 , з якої горизонтальним перенесенням отримуємо C_2 – фронтальну проекцію найвищої точки лінії перетину поверхонь. Горизонтальна проекція C_1 отримується за допомогою вертикальної лінії зв'язку, проведеної з C_2 до перетину з $S_1 2_1''$.

Побудова проміжних точок лінії перетину поверхонь

Через вершину конуса S (через вісь j) проведемо довільну горизонтально проектуючу площину T ($S_1 \subset T_1$), яка перерізає одночасно конус і отримуємо в перерізі трикутник n^1 з боковою стороною S_4 , а також площина T одночасно перерізає півсферу та в перерізі її отримується півколо m^1 , радіус якого $R = 0{,}5$ та найбільшою їх хордою 5.6 (рис. 13-9). Отримані трикутник перерізу і півколо перерізу належать площині – посереднику T , горизонтальні проекції трикутника $n^1_1(4_1S_17_1)$ та півкола $m^1_1(5_1O_16_1)$ зливаються з слідом – проекцією T_1 .

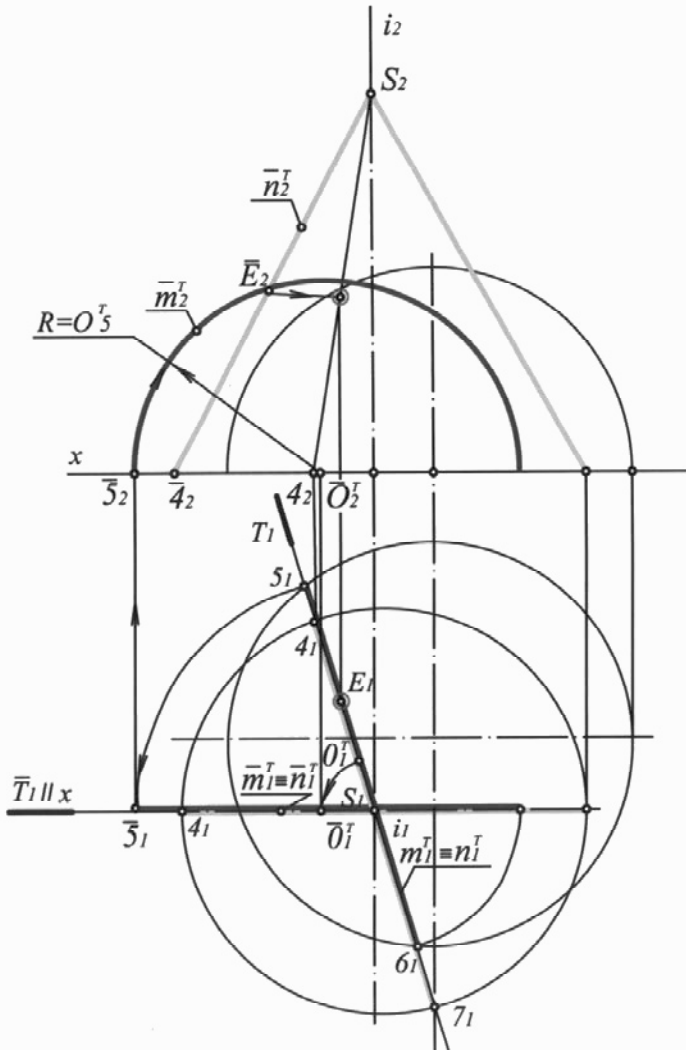


Рис. 13-9

Для отримання натуральної величини кресленника фігур перерізу заданих поверхонь, отриманих в площині T , застосовують метод обертання.

Для цього навколо осі i обертаємо площину T до її фронтального положення (на полі Π_1 , \bar{T}_1 розташується паралельно осі x). Повернуте положення $\bar{T}_1 \parallel x$ містить $n^1 \equiv m^1$, що злилися. Фронтальна проекція n^1_2 і m^1_2 – є дійсним креслеником фігур перерізу заданих поверхонь, так як площина T в повернутому положенні \bar{T} – є площиною рівня, паралельна площині Π_2 . На фронтальній проекції n^1_2 перетинаючись з m^1_2 , отримуємо точку \bar{E}_2 і горизонтальним перенесенням цю точку переносимо на S_4 і отримуємо точку E_2 , яка є фронтальною проекцією проміжної точки E , а її E_1 буде на T_1 .

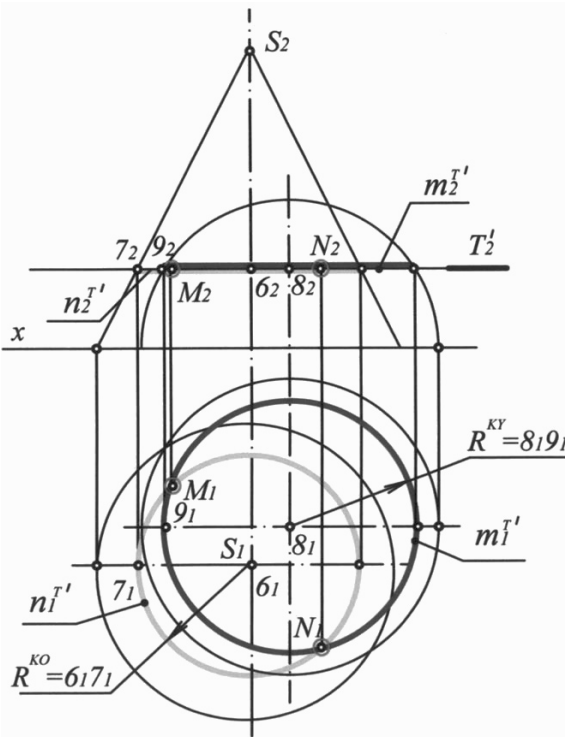


Рис. 13-10

Проміжні точки лінії перетину поверхонь можна отримати із застосуванням посередників – площин рівня. На рис. 13-10 показано, як за допомогою горизонтальної площини T'' (плоскості T'') перерізає конус по колу n'' і сферу по колу m'' . На полі $\Pi_2 : m''_2 \equiv n''_2 \equiv T''_2$, а на полі $\Pi_1 m''_1$ і n''_1 зображені в натуральну величину (які належать площині рівня $T \parallel \Pi_1$). Перетин m''_1 і n''_1 утворює M_1 і N_1 – горизонтальні проекції проміжних точок M і N . Фронтальні проекції M_2 і N_2 знаходяться за допомогою вертикальних ліній зв'язку, проведених з M_1 і N_1 до перетину з слідом – проекцією T_2' .

З'єднавши побудовані горизонтальні проекції характерних і проміжних точок лінії перетину поверхонь, – отримуємо $A_1N_1D_1C_1E_1M_1V_1$ горизонтальну проекцію лінії перетину поверхонь. З'єднавши фронтальні проекції характерних (починаючи з A_2) точок з проміжною N_2 і далі з характерною точкою D_2 (розташовану на фронтальному обрисі конуса, яка змінить

видимість лінію перетину поверхонь) і далі від D_2 до характерної точки B_2 – отримуємо $A_2N_2D_2C_2E_2M_2B_2$ фронтальну проекцію лінії перетину поверхонь, що і видно на рис. 13-8.

13.3. Задачі типу В, в розв'язку яких застосовуються посередники – поверхні сфери

До задач типу B належать задачі на побудову лінії перетину поверхонь обертання, осі яких є прямі окремого положення.

Методика розв'язку задач, в яких осі поверхонь обертання є прямі загального положення, зводиться до того, що умова задачі перетворюється (наприклад, застосуванням методу заміни площин проекції) до положення, коли осі заданих поверхонь займають окреме положення, будуються в новому положенні об'єкта задачі характерні і проміжні точки лінії перетину поверхонь і проекції отриманих точок переносимо на поля вихідного положення заданих поверхонь і з урахуванням їх видимості, – з'єднуємо точки лінії перетину поверхонь, отримуємо розв'язок задачі.

3.3.1. Побудова лінії перетину співвісних поверхонь обертання

3.3.1.1. Утворення співвісних поверхонь обертання та їх лінії перетину

В площині Δ візьмемо пряму лінію i та дві довільні лінії a і b (рис. 13-11). Приймаємо пряму i за вісь обертання площини Δ , разом з a і b почнемо обертати навколо осі i . При цьому, лінії a і b , при їх обертанні, утворюють поверхні обертання відповідно Φ^a та Φ^b з спільною віссю i . Лінії a і b , в цьому прикладі, будують твірними цих поверхонь.

Якщо твірні a і b перетинаються між собою, утворюється в перетині точка K . Беручи до уваги те, що довільна точка, обертаючись навколо осі, – описує траєкторію у вигляді кола, розташованого в пло-

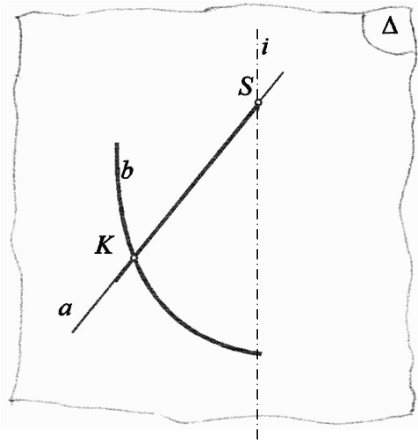
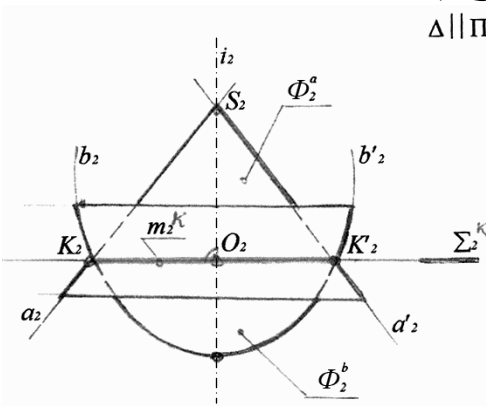


Рис. 13-11

щині, перпендикулярній до осі обертання, то в даному прикладі (рис. 13-12), там де a перетинається з b , – утворюється точка K , яка при обертанні навколо осі i описує траєкторію у вигляді кола m^k , радіус якого дорівнює OK – відстані від точки K до осі i . Коло m^k належить площині Σ^k , розташованій перпендикулярно до осі обертання i . Враховуючи



$\Delta \parallel \Pi_2$ } те, що точка K спільна для a і b , то при їх обертанні, – отримане коло m^k , діаметр якого KK' , – спільне для поверхонь Φ^a і Φ^b , отже m^k – є лінія перетину поверхонь Φ^a і Φ^b .

У випадку, коли площина Δ (рис. 13-11, та рис. 13-12) зливається, або паралельна площині проєкцій Π_2 , то вісь i на цю площину проєкції проєктується в натуральну величину i_2 , площина Σ^k проєктується своїм слідом – проєкцією Σ_2^k , а от лінія перетину поверхонь – коло m^k проєктується у вигляді відрізка $K_2K'_2$, в який проєктується коло m^k на площину проєкції Π_2 .

Рис. 13-12

Проекція a_2 і b_2 твірних на проєкціях Φ_2^a і Φ_2^b поверхонь, а також отримані проєкції a'_2 і b'_2 утворених твірних, – є двома парами обрисових проєкцій Φ_2^a і Φ_2^b отриманих поверхонь.

Якщо твірні a і b між собою не перетинаються, то утворені поверхні Φ^a і Φ^b – не перетинаються між собою, в такому випадку маємо приклад внутрішнього розташування однієї поверхні в середині іншої поверхні.

Алгоритм побудови лінії перетину поверхонь:

якщо: i, a і $b \subset \Delta$.

$$\Delta \cup i \Rightarrow \Phi^a \text{ і } \Phi^b;$$

$$\Phi^a \cap \Phi^b \Rightarrow m - \text{ЛППо.}$$

для побудови ЛППо:

$$a_2 \cap b_2 \Rightarrow \bullet K_2;$$

$$a'_2 \cap b'_2 \Rightarrow \bullet K'_2;$$

$$\bullet K_2 \cup \bullet K'_2 \Rightarrow K_2K'_2 - m_2 \subset \Sigma_2^k \perp i_2;$$

$$K_2K'_2 \cap i_2 \Rightarrow O_2.$$

Висновки:

– лінія перетину співвісних поверхонь обертання – коло, або декілька кіл, кількість яких дорівнює кількості точок перетину обрисових цих поверхонь;

- а якщо обрисові поверхонь не перетинаються між собою, то такі дві поверхні не мають лінії взаємного перетину;
- радіус кола лінії перетину поверхонь дорівнює відстані від точки перетину обрисових поверхонь, що перетинаються, до їх спільної осі обертання;
- коли спільна вісь обертання паралельна якійсь площині проєкцій, то отримані кола лінії перетину поверхонь, проєктуються на цю площину проєкцій у вигляді відрізка прямої, розташованої перпендикулярно до проєкції спільної осі, а розмір цього відрізка визначається відстанню між точками перетину проєкцій двох пар обрисових поверхонь на площині проєкцій, яка розглядається.

Нижче розглянемо окремі випадки побудови лінії перетину поверхонь, які застосовуються при розв'язку задач типу *B*.

13.3.1.2. Утворення та побудова лінії перетину співвісних поверхонь циліндра і сфери

Розглядаємо моделі утворення лінії перетину поверхні прямого кругового циліндра і сфери в наступних прикладах.

Візьмемо частину циліндричної труби з теоретично тонкою стінкою, яка по краях зрізана площиною, перпендикулярною до осі обертання кругового циліндра – труби, і поставимо її на горизонтальну площину. Візьмемо сферу, діаметр якої дорівнює діаметру циліндра і цю сферу зануримо всередину циліндра (рис. 13-13^a). Сфера під дією умовної сили ваги опуститься до дотику з горизонтальною площиною. При цьому сфера буде доторкатись до циліндричної поверхні по колу m діаметр якого дорівнює відрізку $A_2A'_1$, точки A і A' розташовані на обрисових твірних циліндра. Фронтальна проєкція утвореної моделі наведена на рис. 13-13^a. В моделі поверхня циліндра утворена прямою a (паралельною осі i), а поверхня сфери утворена лінією b , яка має форму півкола, найбільша хорда якого збіглася з віссю i . Тобто маємо дві співвісні поверхні обертання, одна пара обрисових цих поверхонь в своєму перетині (дотику) утворює точку A , яка, обертаючись навколо осі i , утворює коло m , розташоване в площині $\Sigma \perp i$. Тобто, якщо: прями i та a і півкола $b \subset \Delta$; $a \parallel i \equiv \emptyset b$, то:

$$a \cup i \Rightarrow a' \Rightarrow \Phi^u; b \cup i \Rightarrow \Phi^k; \Phi^u \cap \Phi^k \Rightarrow \text{коло } m \subset \Sigma \perp i \parallel P_2$$

$$\text{на } P_2: a_2 \cap b_2 \Rightarrow \cdot A_2; a'_2 \cap b'_2 \Rightarrow \cdot A'_2; \cdot A_2 \cup \cdot A'_2 \Rightarrow A_2A'_2 \equiv m_2 \perp i_2.$$

Якщо візьмемо ту ж саму циліндричну поверхню і другу сферу, діаметр якої більше за діаметр циліндра. Поставимо сферу на верхній зріз циліндричної поверхні. В утвореній моделі сфера займе положення, в якому центр сфери збігається з спільною віссю i (стійке положення сфери), а сама сфера займе

дотичне положення до циліндра по колу m верхнього зрізу циліндричної поверхні (рис. 13-13^б) і $m_2 = A_2A'_2 \perp i_2$.

Якщо на сферу "легенько натиснути" в вертикальному напрямку, то тоненька стінка циліндра розріже поверхню сфери по колу m (по якому сфера спиралась на циліндр) і далі поверхня циліндра "ввійде" в середину сфери (при цьому центр C сфери переміщується по осі циліндра) та досягне положення, коли зріз циліндра доторкнеться до поверхні сфери з середини по колу m' розташованому в площині Σ' яка паралельна площині Σ і перпендикулярна осі i (рис. 13-13^в). Отримана модель, на якій поверхня прямого кругового циліндра перетинається з поверхнею сфери, осі обертання цих поверхонь збіглися між собою. На цій моделі видно, що лінія перетину цих поверхонь розпалась на дві частини, кожна з яких є коло m та коло m' , однакові між собою.

Прослідкуємо за побудовою кожної частини лінії перетину поверхні. Фронтальна проекція (рис. 13-13^б) твірної a_2 циліндра перетинається двічі з фронтальною проекцією твірної b_2 , при цьому утворились дві точки A_2 та B_2 перетину твірних a_2 і b_2 . Враховуючи те, що точки A_2 і B_2 на однаковій відстані від спільної осі i_2 , то кола m і m' утворені при обертанні точок A_2 і B_2 навколо осі i_2 . Кола m і m' розташовані відповідно в площині Σ та Σ' , які перпендикулярні осі i_2 .

Фронтальна проекція кола m – відрізок прямої, який починається з точки A_2 , розташовується перпендикулярно спільній осі i_2 і закінчується в точці перетину протилежної пари обрисових поверхонь. Аналогічна побудова проекції кола m' . Що відтворено на рис. 13-13^г.

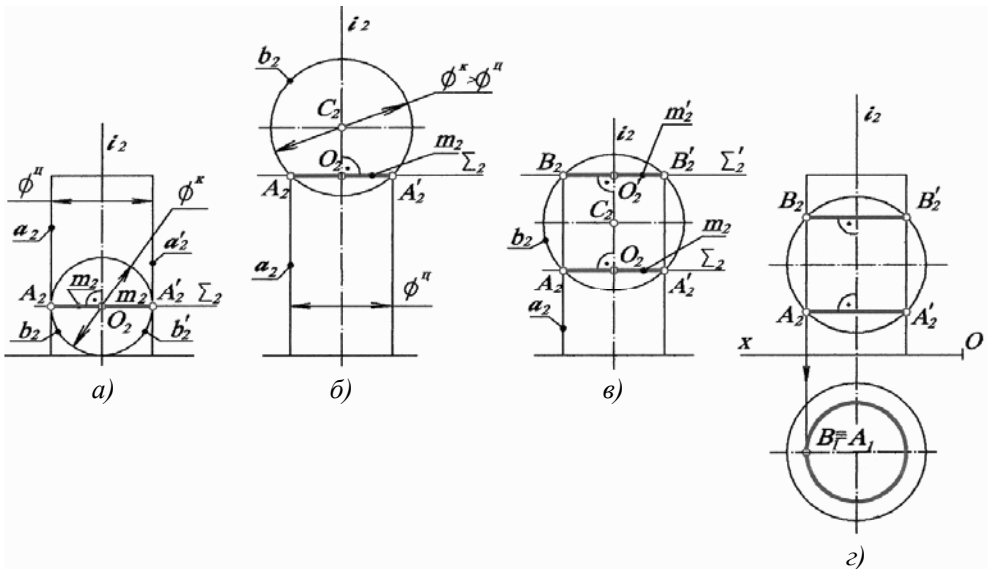


Рис. 13-13

13.3.1.3. Утворення та побудова лінії перетину співвісних поверхонь конуса і сфери

Розглянемо моделі утворення лінії перетину поверхні прямого кругового конуса з поверхнею сфери.

Взявши бічну поверхню прямого кругового конуса (без основи), розташуємо вниз вершиною і в середину її (як в паперовий кульок) вкинемо сферу. Утворена модель показана на рис. 13-14^а, на якій видно, що поверхня сфери стикається з поверхнею конуса по колу, а центр сфери розташується на осі конуса як рівновіддалена точка сфери. В даному випадку обрисова a перетинається з обрисовою b , в перетині отримується точка A , яка, обертаючись навколо осі i , утворює коло m дотику поверхні сфери до поверхні конуса. Коло m розташоване в площині Σ^A , яка перпендикулярна до осі i , а точка перетину площини Σ^A з віссю i є центром O кола m . Враховуючи те, що на рис. 13-14^а вісь i паралельна площині проєкції Π_2 , то проєкція кола m на Π_2 зображена у вигляді відрізка прямої, який зливається із слідом – проєкцією $\Sigma'_2 \perp i_2$ і цей відрізок проходить від точки A_2 (в якій перетинаються пара обрисових $a_2 \cap b_2 \Rightarrow \bullet A_2$) до точки A'_2 (в якій перетинається протилежна пара обрисових $a'_2 \cap b'_2 \Rightarrow \bullet A'_2$).

На рис. 13-14^б наведена модель, де пряма a перетинається з прямою i , а лінія b – півкола своєю найбільшою хордою зливається з прямою i , яка приймається за вісь обертання. Пряма a перетинається з лінією – півколом b в одній точці A .

При обертанні a і b навколо осі i , отримуємо:

$$a \cap i; a \cup i \Rightarrow \Phi^{\text{конус}}; b \supset EF \subset i; b \cup i \Rightarrow \Phi^{\text{куля}};$$

$$\Phi^{\text{конус}} \cap \Phi^{\text{куля}} \Rightarrow m - \text{ЛППо.}$$

на Π_2 :

$$i \parallel \Pi_2; a_2 \cap b_2 \Rightarrow \bullet A_2; a'_2 \cap b'_2 \Rightarrow \bullet A'_2;$$

$$\bullet A_2 \cup \bullet A'_2 \Rightarrow A_2 A'_2 = m_2! m_2 \perp i_2.$$

Отримана лінія перетину поверхонь, – коло m на полі Π_2 має свою проєкцію у вигляді відрізка $A_2 A'_2 \perp i_2$, де A_2 і A'_2 – точки перетину обрисів.

На рис. 13-14^б наведена модель, яка відрізняється від попередньої тим, що пряма перетинається з лінією – півколом b в двох точках A і B , то на полі Π_2 отримуємо:

$$a_2 \cap b_2 \Rightarrow \bullet A_2 i \bullet B_2; a'_2 \cap b'_2 \Rightarrow \bullet A'_2 i \bullet B'_2; \bullet A_2 \cup \bullet A'_2 \Rightarrow m_2; \bullet B_2 \cup \bullet B'_2 \Rightarrow m'_2;$$

$$m_2 \parallel m'_2 \perp i_2.$$

Отримана лінія перетину двох співвісних поверхонь конуса і сфери розпалась на дві лінії перетину поверхонь – одна частина – коло m , та друга частина – коло m' , які між собою паралельні і перпендикулярні спільній осі i .

Кількість частин лінії перетину поверхонь дорівнює кількості точок перетину обрисових співвісних поверхонь обертання.

На рис. 13-14^г показано проекції співвісних поверхонь обертання конуса прямого кругового і сфери. На тій площині проекцій, відносно якої спільна вісь i паралельна, – лінія перетину поверхонь має своє зображення у вигляді відрізків прямих і проходить від A_2 та B_2 точок перетину однієї пари обрисових поверхонь, які розглядаємо до точок A'_2 і B'_2 – точок перетину протилежної пари обрисових. На площині проекцій, відносно якої спільна вісь i перпендикулярна, – проекція лінії перетину поверхонь будується по її належності до однієї з поверхонь (у вигляді кола, чи двох кіл).

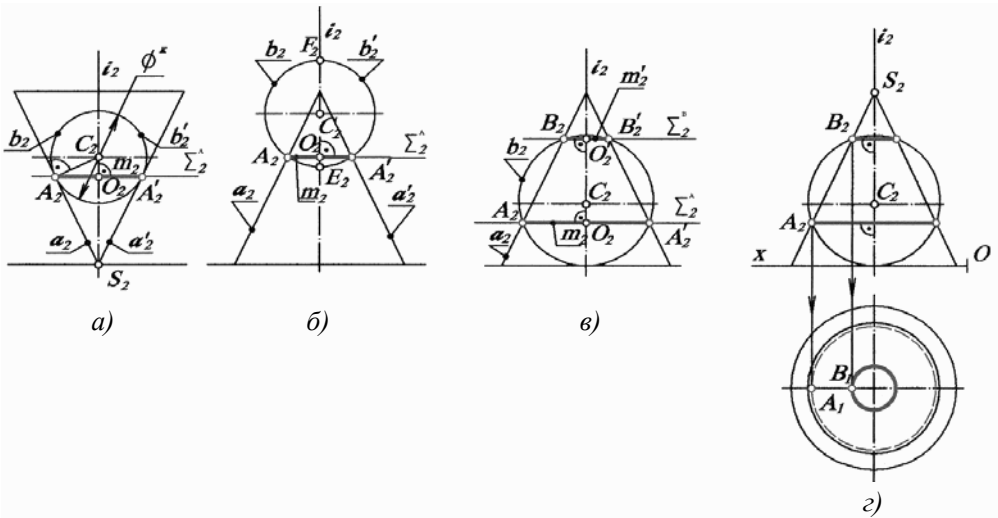


Рис. 13-14

13.3.2. Побудова лінії перетину поверхонь обертання, осі яких – прямі окремого положення

Такі задачі діляться на дві групи:

– *перша група*: перетинаються поверхні обертання, осі яких – перетинаються між собою.

– *друга група*: перетинаються поверхні обертання, осі яких – мимобіжні прямі.

Розв'язок всіх задач рекомендується виконувати переважно за допомогою посередників – сфер, комбінуючих в окремих випадках з посередниками – площинами окремого положення.

Для розв'язку задач першої групи застосовуються посередники – концентричні сфери, за центр яких приймається точка, в якій перетинаються осі поверхонь.

Для розв'язку задач другої групи застосовуються допоміжні осьові площини, та посередники – з блимаючим центром (із змінним його положенням).

При застосуванні сфери – посередника виконується побудова лінії перетину співвісних поверхонь однієї пари, яка утворена сферою і першою з заданих поверхонь, а потім виконується побудова лінії перетину другої пари співвісних поверхонь, яка утворена сферою і другою заданою поверхнею. Надалі, будуються точки перетину побудованих ліній перетину поверхонь першої і другої пар співвісних поверхонь. Отримані точки належать лінії перетину заданих двох поверхонь.

Побудова характерних точок може бути виконана: за допомогою посередника – площини окремого положення, яка в перерізі поверхонь утворить обриси поверхонь, які перетинаються; або за допомогою посередника – сфери вписаної в одну з заданих поверхонь так, щоб в загальному випадку вписана сфера мала дотик до поверхні (по одному колу), а з другою поверхнею сфера – посередник мала лінію перетину поверхонь складену з одного або двох кіл.

Побудова проміжних точок виконується за допомогою посередників сфер. Радіус концентричних сфер вибирають в межах більше відстані від центра сфери до найближчої характерної точки лінії перетину поверхонь, але менше відстані від центра сфери до найдалшої характерної точки. Радіус сфер з блимаючим центром дорівнює відстані від побудованого центра до точки перетину сфери з обрисом поверхні (п.13,.3.2.3).

13.3.2.1. Приклад розв'язку задачі першої групи, в якій перетинаються поверхні обертання з осями, які перетинаються

Розглянемо побудову лінії перетину поверхні прямого кругового циліндра (рис. 13-15) з поверхнею прямого кругового конуса.

Аналіз умови задачі та вибір її розв'язку.

Поверхні, які перетинаються, розташовані в просторі так, що їх осі обертання перетинаються між собою (під прямим кутом), вісь i конуса перпендикулярна до площини проєкцій Π_1 , а вісь i' циліндра перпендикулярна до Π_3 . Площина симетрії, моделі, що розглядається, утворена осями $i \cap i'$ – осьова площина, паралельна площині проєкцій Π_2 . Даний приклад відноситься до задач першої групи. Розв'язок прикладу необхідно виконувати з застосуванням посередників – концентричних сфер, центром яких буде точка O , в якій перетинаються осі i та i' , та з застосуванням посередника – площини $\Sigma(i \cap i') \parallel \Pi_2$.

Рішення задачі

Побудова характерних точок лінії перетину поверхонь

Площина Σ перерізає конус і циліндр відповідно по трикутнику і прямокутнику фронтальних обрисів заданих поверхонь. Перетин між собою отриманих трикутника і прямокутника на полі Π_2 , – утворює фронтальні проєкції, характерних точок, A_2 і A_2' , B_2 і B_2' належних фронтальній проєкції шуканої лінії перетину поверхонь.

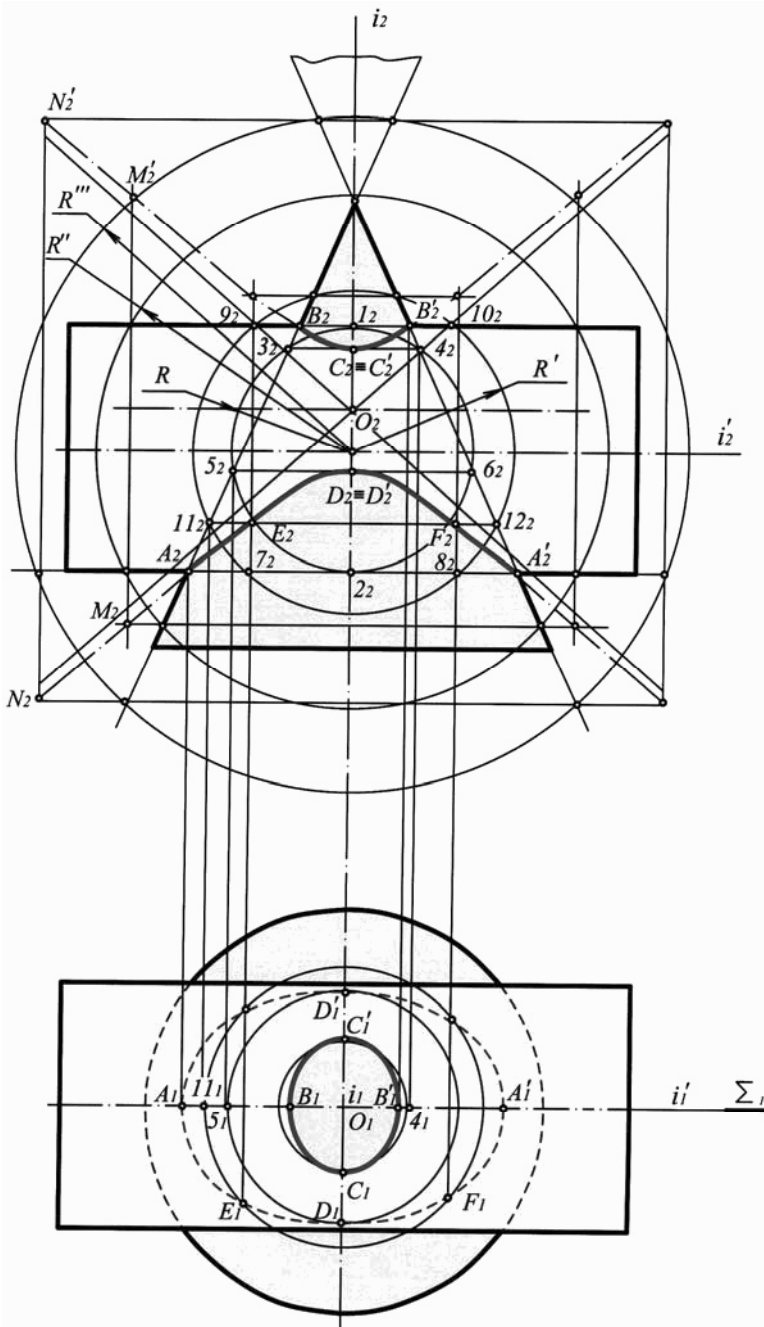


Рис. 13-15

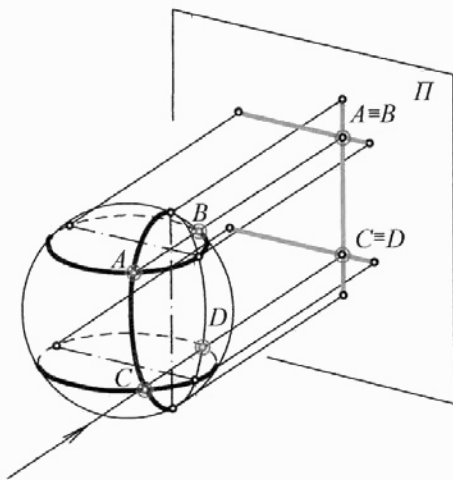


Рис. 13-16

Застосувавши посередник поверхню сфери з центром в точці O радіусом R , який дорівнює радіусу кола основи циліндра, – отримали модель, яка складається з трьох поверхонь. Утвореної з двох пар співвісних поверхонь, які перетинаються з спільною сферою. Перша пара, яка складається з співвісних поверхонь сфери і циліндра (як на рис. 13-13^a), ці дві поверхні перетинаються по колу, яке на Π_2 відтворено його проекцією $1_2 2_2$). Друга пара, яка складається з співвісних поверхонь тієї ж сфери і конуса (як на рис. 13-14^l), які перетинаються по колу $5_2 6_2$, то колу $3_2 4_2$ (їх проекції на Π_2). Перетин на полі Π_2 – $1_2 2_2$ (лінія перетину поверхонь

першої пари) з $3_2 4_2$ та $5_2 6_2$ (лінія перетину поверхонь другої пари), – отримуємо відповідно фронтальні проекції спільних точок C_2 і C'_2 , та D_2 та D'_2 , які належать фронтальній проекції шуканої лінії перетину поверхонь, як показано на рис. 13-16.

Побудова проміжних точок лінії перетину поверхонь

Побудову виконуємо за допомогою посередника – сфери радіуса R' (він більше OB і менше OA). Ця сфера перетинається з поверхнею циліндра по ЛПП_0^u і на $\Pi_2 - 7_2 9_2$ та $8_2 10_2$, а з поверхнею конуса по ЛПП_0^k ; і на $\Pi_2 - 11_2 12_2$ (методика побудови на рис.13-16). Для побудови фронтальних проекцій проміжних точок лінії перетину поверхонь.

$$\text{ЛПП}_0^u \cap \text{ЛПП}_0^k \Rightarrow \bullet E_2; \bullet E'_2; \bullet F_2; \bullet F'_2 - ?$$

Вирішується ця побудова на полі Π_2 :

$$11_2 12_2 \cap 7_2 9_2 \Rightarrow \bullet E_2 i \bullet E'_2!$$

$$11_2 12_2 \cap 8_2 10_2 \Rightarrow \bullet F_2 i \bullet F'_2!$$

Горизонтальні проекції характерних і проміжних точок будуються по належності їх до поверхні конуса.

З'єднавши фронтальні проекції побудованих характерних і проміжних точок, – отримаємо фронтальну проекцію двох гілок, на які розпалась лінія перетину поверхонь, ці проекції гілок мають вигляд гіперболи. Для вираз-

ності форми гілок гіперболи на полі Π_2 показано побудову їх уявних точок M (зони реально заданих поверхонь) та N (зони їх продовження). Побудова точок M_2 і N_2 виконана з застосуванням посередників – концентричних сфер, радіус яких відповідно R'' та R''' , що і виконано на полі Π_2 рис. 13-15.

Симетричність моделі задачі на фронтальній і горизонтальній проекції забезпечує симетричність проекцій лінії перетину поверхонь, на полі Π_2 – симетричність відносно вертикальної осі, а на полі Π_1 – симетричність горизонтальної проекції лінії перетину поверхонь відносно горизонтальної осі проекції моделі, тому горизонтальна проекція лінії перетину поверхонь має симетричний вигляд – у вигляді двох замкнених просторових кривих по формі близьких до еліпсів (вігнутих по циліндричній поверхні).

Лінія "входу" і "виходу" конуса в циліндр має вигляд двох симетричних замкнених кривих, форма яких залежить від співвідношення геометричних розмірів заданих конуса і циліндра, та їх взаємного розташування. Знаючи вигляд проекції лінії перетину поверхонь, спрощується її побудова.

Висновок: Якщо перетинаються дві поверхні другого порядку і їх осі обертання розташовані в одній площині їх симетрії, – паралельній площині проекції, то отримана біквдратна лінія перетину заданих поверхонь проектується на цю площину проекції у вигляді кривої другого порядку.

13.3.2.2. Вигляд лінії перетину поверхонь, в задачах першої групи та її проекції

Розглянемо приклади побудови лінії перетину поверхонь, наприклад, прямих кругових циліндрів (рис. 13-17) з їх осями, які перетинаються та паралельними площині проекції Π_2 .

Лінії перетину поверхонь будуємо за її характерними точками. Точки перетину фронтальних обрисів циліндрів, які перетинаються (рис. 13-17^a) A_2, B_2, C_2, D_2 – є проекціями характерних точок лінії перетину поверхонь. Для побудови проекцій інших характерних точок, які належать другим парам обрисових твірних застосовується посередник – сфера, діаметр якої дорівнює діаметру більшого циліндра.

Допоміжна сфера стикається з більшим циліндром по колу, проекція якої $1_2 2_2$, а з меншим циліндром перетинається по двох колах з їх проекціями – відрізками $3_2 4_2$ і $5_2 6_2$. Отримані точки E_2 , належить $3_2 4_2$ і F_2 , яка належить $5_2 6_2$, в яких перетинаються проекції побудованих кіл стикування та перетину, є характерними точками лінії перетину поверхонь і з ними збігаються вершини гілок гіперболи шуканої лінії перетину поверхонь.

Якщо розглядаються два циліндри з однаковими діаметрами (рис. 13-17^b), то допоміжна сфера буде дотикатися до поверхні одного і другого циліндра по колах однакового діаметра, проекціями яких є відрізки $1_2 2_2$ та $3_2 \equiv 6_2$ $4_2 \equiv 5_2$

(при переході від моделі рис. 13-17^а до моделі рис. 13-17^б відрізок 3_24_2 зливається з відрізком 6_25_2 , то і точка E_2 злилася з точкою F_2). При цьому гілки гіперболи на проекції злились з її асимптотами.

А ось при переході від моделі рис. 13-17^б до моделі рис. 13-17^в збільшується діаметр горизонтального циліндра, при цьому вершини E_2 і F_2 знову розходяться, тільки вже в вертикальному напрямку (рис. 13-17^в).

Лінія перетину поверхонь, які розглядаються, в просторі має форму двох просторових замкнених кривих ліній у вигляді еліпсів, зігнутих вздовж однієї його осі по поверхні циліндра.

При взаємному наближенні розмірів діаметрів двох циліндрів (рис. 13-18), вершини гілок гіперболи взаємно зближуються, а самі гілки наближаються до їх асимптот і коли діаметри обох циліндрів зрівнюються між собою, вершини гілок зливаються між собою, а проекції самих гілок гіперболи співпадають з їх асимптотами. При цьому, в просторі просторові еліпси лінії перетину поверхонь, випрямляючись, досягають плоского вигляду (складених з половинок протилежних гілок) еліпсів, розташованих в площинах перпендикулярних до осьової площини поверхонь обертання, що перетинаються.

Висновки:

– Якщо перетинаються поверхні другого порядку і їх осі паралельні одній площині проекції та перетинаються між собою, то лінія перетину цих поверхонь на таку площину проекції

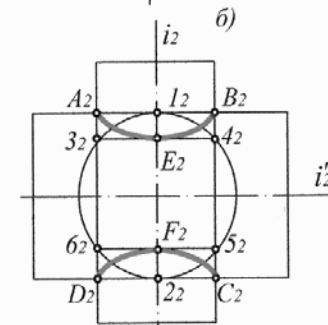
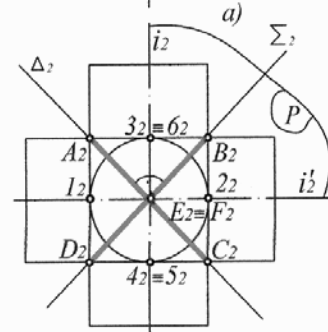
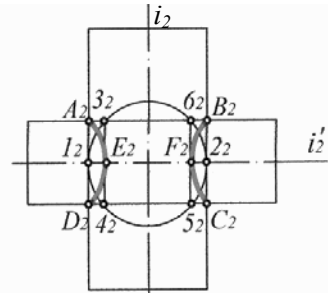


Рис. 13-17 в)

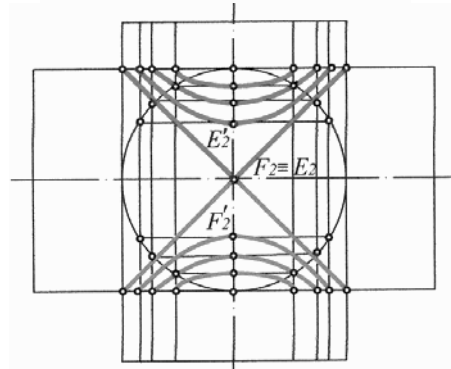


Рис. 13-18

цій проектується у вигляді двох гілок гіперболи з вершинами цих гілок розташованими на дійсній осі гіперболи, яка співпадає з віссю обертання поверхні меншого діаметра.

– Якщо дві поверхні обертання описані (чи вписані) навколо третьої поверхні другого порядку (сфери), то такі дві поверхні перетинаються по двом плоским кривим другого порядку (по двох еліпсах) розташованих в двох площинах, перпендикулярних до третьої площини, утвореної осями поверхонь обертання, що перетинаються, – цей висновок відомий як **теорема Монжа** з доповненням автора.

13.3.2.3. Приклад розв'язку задачі другої групи, в якій перетинаються поверхні обертання, осі яких – мимобіжні прямі

Розглянемо побудову лінії перетину поверхні зрізаного прямого кругового конуса з поверхнею відкритого тору (рис. 13-19).

Аналіз умови задачі та вибір її розв'язку.

Перетинаючі поверхні розташовані в просторі так, що їх осі обертання розташовані між собою як мимобіжні перпендикулярні прямі, вісь i зв'язаного конуса перпендикулярна до площини проєкцій Π_1 , а вісь i' поверхні чверті тору перпендикулярна до Π_2 . Даний приклад відноситься до задачі другої групи.

Розв'язок прикладу рекомендується виконувати з застосуванням посередників – площин окремого положення в поєднанні з посередниками – поверхнями сфер з блимаючими центрами.

Розв'язок задачі

Побудова характерних точок лінії перетину поверхонь

Площина Σ перерізає конус і чверть тора по відповідно рівнобічній трапеції та чверті кільця. Враховуючи те, що площина Σ , яка злилася з площиною симетрії поверхні конуса і чверть тора, розташована паралельно площині проєкцій Π_2 , то на Π_2 трапеція і чверть кільця проєктуються в натуральну величину, а їх перетин (перетин фронтальних обрисів поверхонь, що перетинаються) в точках A_2 і B_2 , які є фронтальними проєкціями характерних точок A і B лінії перетину поверхонь.

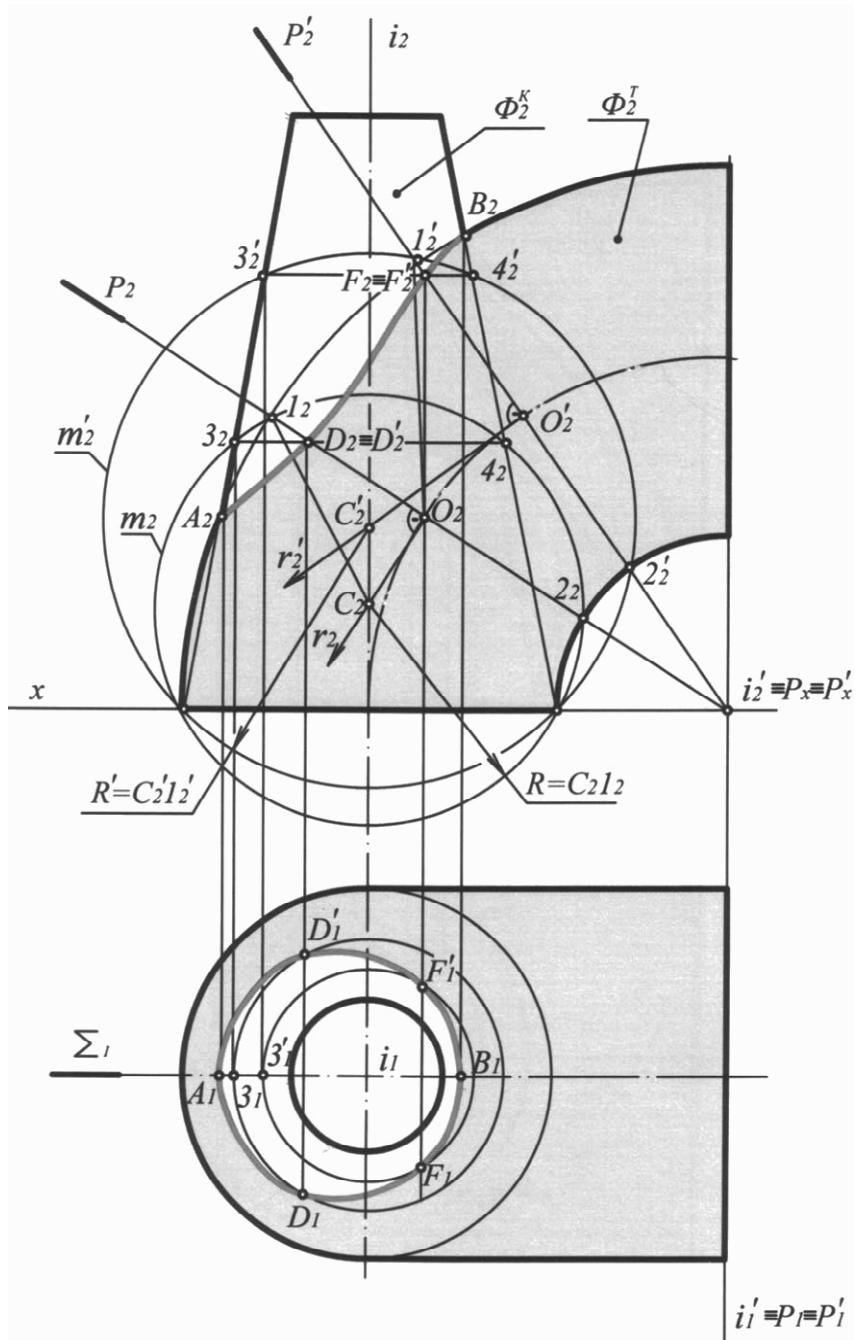


Рис. 13-19

Побудова проміжних точок лінії перетину поверхонь

Побудова виконується з допомогою посередників – сфер з блимаючим центром. Визначення центра сфери – посередника: через вісь i' тора, яка перпендикулярна до Π_2 , проводимо довільний посередник – площину $P(P_1)$, розташовану перпендикулярно до Π_2 . Площина P своїм фронтальним слідом – проекцією P_2 перерізає поверхню тора по колу (проміжній твірній тору) з діаметром, що дорівнює відрізку 1_22_2 , який є фронтальною проекцією кола – перерізу. З O_2 – фронтальні проекції центру кола – перерізу проводимо перпендикуляр r_2 перпендикулярно до P_2 . Там, де r_2 перетинається з віссю i_2 , отримуємо C_2 – центр сфери – посередника. Отримана модель, утворена трьома поверхнями, – поверхня сфери є спільною для першої пари співвісних поверхонь (сфера і конус) і для другої пари поверхонь (сфера і тор). Лінія перетину поверхонь першої пари поверхонь – коло з діаметром 3_24_2 (це його фронтальна проекція). Лінія перетину поверхонь другої пари поверхонь – коло (раніше отримане) з діаметром 1_22_2 (це його фронтальна проекція). Там, де перетинається лінія перетину поверхонь першої пари з лінією перетину поверхонь другої пари поверхонь – отримуємо спільні точки $D_2 \equiv D_2'$, які є проміжними точками шуканої лінії перетину поверхонь.

Алгоритм побудови проміжних точок ЛППо:

$$\cdot i'_2 \subset P_2 \cap \Phi^{um} \Rightarrow 1_22_2; \cdot O_2 \subset 1_22_2; O_21_2 = 2_2O_2; \cdot O_2 \subset r_2 \perp P_2; r_2 \cap i_2 \Rightarrow C_2;$$

$$R = C_21_2; \cdot 1_2 \cup C_2 \Rightarrow \text{обрис } m_2 \text{ сфери посередника};$$

$$m_2 \cap \Phi_2^k \Rightarrow \text{коло, } \emptyset 3_24_2 - \text{ЛППо першої пари};$$

$$m_2 \cap \Phi^{nt} \Rightarrow \text{коло, } \emptyset 1_22_2 - \text{ЛППо другої пари};$$

$$3_24_2 \cap 1_22_2 \Rightarrow \cdot D_2 \equiv \cdot D_2'!$$

Аналогічно за допомогою посередника – площини $P'(P'_2)$, будуюмо фронтальну проекцію наступної пари проміжних точок $F_2 \equiv F_2'$.

Горизонтальні проекції характерних і проміжних точок лінії перетину поверхонь будуються за ознакою належності цих точок до поверхні конуса, застосовуючи допоміжні кола – паралелі цієї поверхні.

Побудова фронтальної проекції лінії перетину поверхонь виконується шляхом з'єднання фронтальних проекцій характерних і проміжних точок і відповідно (аналогічно) виконується побудова горизонтальної проекції лінії перетину поверхонь, що й показано на рис. 13-19.

Особливість вибору сфери – посередника:

Коли перетинаються поверхня тора (кільця) з поверхнею сфери, то їх лінія перетину – коло, належне осьовій площині тора в тому випадку, якщо центр сфери розташований на прямій, перпендикулярній до кола в осьовій площині і проведеної з центра цього кола.

13.4. Задачі типу С, в рішенні яких застосовують посередники – площини загального положення

В задачах типу С необхідно побудувати лінію перетину двох поверхонь: двох циліндрів або двох призм, двох конусів або двох пірамід, циліндра з пірамідою або призмою, конуса з пірамідою або з призмою. Переважно в цих задачах задані похилі поверхні, осі яких довільно розташовані відносно площин проєкцій, то одна з осей (або напрямок) була б прямою загального положення, а основи цих поверхонь розташовані в одній з площин проєкцій або в одній іншій площині.

Розв'язок таких задач виконується з дотриманням рекомендацій, викладених в п.13.1.1., при їх виконанні застосовують посередники – площини загального положення, розташування яких повинно забезпечити отримання форми перерізу поверхонь посередником, окресленого прямими лініями (що найпростіше для побудови точок лінії перетину заданих поверхонь).

13.4.1. Спільні точки лінії перетину поверхонь та вибір посередників-площин для їх побудови

13.4.1.1. Перетин поверхонь двох похилих конусів, двох пірамід, або конуса і піраміди

Найпростішою для побудови лінією перерізу поверхні конуса (піраміди), яка окреслена прямими, є переріз поверхні площиною, що проходить через її вершину. В такому випадку, в перерізі поверхні конуса (піраміди) отримується трикутник.

Якщо розглядаються перетинаючі поверхні двох конусів, пірамід, чи конус і піраміда, – то площина, проведена через лінію вершин конусів (пірамід, чи конуса і піраміди) в напрямку поверхонь, одночасно утворить два трикутники.

Методику визначення посередника-площини загального положення та побудови точок лінії перетину поверхонь, покажемо на моделі, де перетинаються два похилі конуси, $\Phi^{лк}$ – лівий конус та $\Phi^{рк}$ – правий конус, осі яких i та i' – прямі загального положення, а їх основи m і m' розташовані в одній горизонтальній площині, площині основ, – $По$ (рис. 13-20).

Будуємо посередник-площину загального положення P , для цього:

– з'єднуємо вершину S поверхні $\Phi^{лк}$ з вершиною S' поверхні $\Phi^{рк}$ правого конуса,

$$S \cup S' = SS';$$

– будуємо точку M – слід перетину лінії вершин SS' з площиною основ конусів,

$$SS' \cap \Pi_0 \Rightarrow M;$$

– з точки M проводимо горизонтальний слід P_0 , який перетинає основи m і m' конусів. Лінія вершин і вибраний слід P_0 утворять посередник-площину P загального положення,

$$M \subset P_0 \text{ та } S \Rightarrow \text{пл. } P (SM \cap P_0)!$$

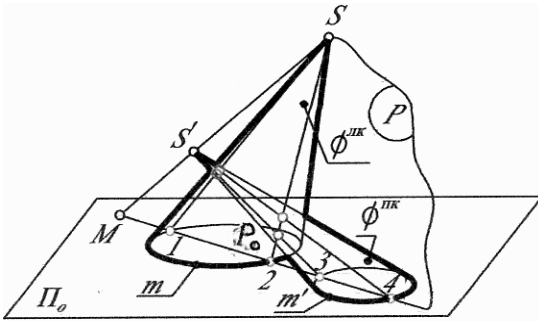


Рис. 13-20

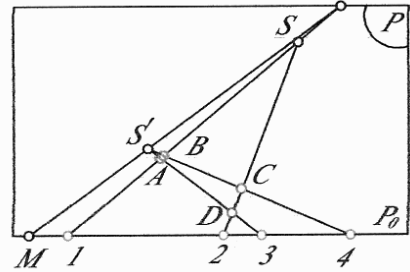


Рис. 13-21

Будуємо фігури перерізу поверхні $\Phi^{лк}$ та $\Phi^{нк}$ площиною P , для цього:

– визначаємо точки перетину сліду P_0 з основами m і m' конусів,

$$P_0 \cap m \Rightarrow \cdot 1; \cdot 2; P_0 \cap m' \Rightarrow \cdot 3; \cdot 4;$$

– з'єднуємо отримані точки $\cdot 1, \cdot 2$ з вершиною S , отримуємо трикутник $1S2$,

– перерізу поверхні $\Phi^{лк}$, а з'єднавши точки 3 і 4 з вершиною S' , отримуємо трикутник $3S'4$ – перерізу поверхні $\Phi^{нк}$ площиною P ;

$$\cdot 1 \cup \cdot S \cup \cdot 2 \Rightarrow \Delta 1S2 \Leftarrow P \cap \Phi^{лк}.$$

$$\cdot 3 \cup \cdot S' \cup \cdot 4 \Rightarrow \Delta 3S'4 \Leftarrow P \cap \Phi^{нк}.$$

– будуємо твірні сторони трикутників, по яких площина P перетинає кожен з конусів, для цього:

$$\left. \begin{array}{l} \cdot 1 \cup \cdot S \\ \cdot 2 \cup \cdot S \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta 1S2 \Leftarrow P \cap \Phi^{лк};$$

$$\left. \begin{array}{l} \cdot 3 \cup \cdot S' \\ \cdot 4 \cup \cdot S' \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta 3S'4 \Leftarrow P \cap \Phi^{nk}.$$

= Будують спільні точки для поверхонь Φ^{nk} та Φ^{nk} , для цього:

– перетин трикутників $1S2$ та $3S'4$, які належать відповідно поверхням Φ^{nk} та Φ^{nk} , визначає точки A, B, C, D , які належать лінії перетину поверхонь (рис. 13-21), тобто $\Delta 1S2 \cap 3S'4 \Rightarrow A; B; C; D$ які належать лінії перетину поверхонь!

Провівши пучок (віяло) площин через лінію вершин SS' та своїм горизонтальним слідом, проведеним з точки M – побудуємо необхідні точки лінії перетину поверхонь, відповідно з'єднавши які, отримаємо шукану лінію перетину поверхонь двох конусів.

13.4.1.2. Перетин поверхонь двох похилих циліндрів, призм, або циліндра і призми

Найпростішою для побудови лінією перерізу поверхні похилого циліндра (призми), яка окреслена прямими, є переріз поверхні площиною, що проходить паралельно осі циліндра. В такому випадку в перерізі поверхні циліндра (призми) буде отримано паралелограм.

Якщо розглядаються поєднання поверхонь (які перетинаються), двох циліндрів, призм, чи циліндра і призми – то площина, проведена паралельно осі одного циліндра (бічному ребру однієї призми) і паралельно осі другого циліндра (бічному ребру другої призми) в зоні моделі, то одночасно буде утворено два паралелограми відповідно в перерізі однієї і другої поверхні. Перетин отриманих паралелограмів утворить спільні точки для однієї і другої поверхні і ці точки належать шуканій лінії перетину поверхонь.

Методику визначення посередника – площини загального положення та побудови точок ЛППо, покажемо на моделі, де перетинаються два похилих циліндри Φ^{ni} – поверхня лівого циліндра, та Φ^{ni} – поверхня правого циліндра, осі яких відповідно i та i' – прямі загального положення, а їх основи розташовані в одній горизонтальній площині, площині основ циліндрів, – $По$ (рис. 13-22).

= Будують посередник – площину загального положення P , для цього:

– Будується площина паралелізму Δ , яка буде одночасно паралельна осі одного циліндра і осі другого циліндра. Для цього в довільному місці простору вибираємо точку K , з якої проводимо пряму a паралельно осі i , та пряму b паралельно осі i' , тобто: $\cdot K \subset \text{простору}; \cdot K \subset a \parallel i; \cdot K \subset b \parallel i'; a \cap b \Rightarrow \Delta(a \cap b)$!

– Вибираємо допоміжну січну площину P , проведenu паралельно площині паралелізму Δ , на площині основ слід P_0 (в зоні основ поверхонь), який пройде паралельно Δ_0 , площина P буде задана її слідом P_0 та перетинаючому з ним в довільній точці прямою a' паралельною, наприклад, осі i (яка перетинається з P_0 в довільній точці $L \subset P_0$), утвориться площина $P(P_0 \cap a')$!

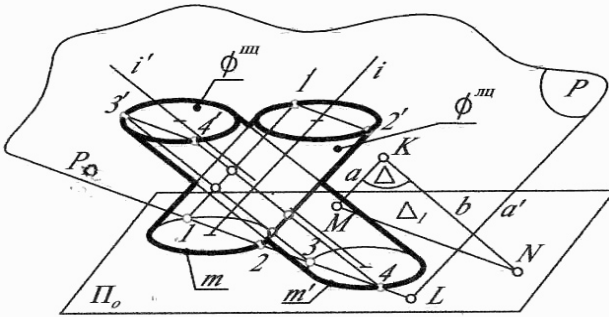


Рис. 13-22

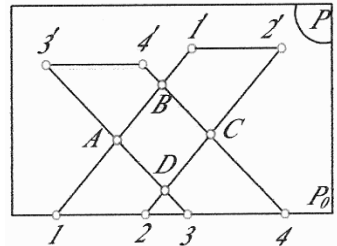


Рис. 13-23

= Будемо фігури перерізу поверхні Φ^{III} та Φ^{III} площиною P , для цього:

– Визначаємо точки перетину сліду P_0 з основами m і m' циліндрів,

$$P_0 \cap m \Rightarrow \cdot 1_i \cdot 2; P_0 \cap m' \Rightarrow \cdot 3_i \cdot 4.$$

– Будемо твірні, по яких площина P перерізає кожен циліндр, та фігури їх перерізу, для цього:

$$\left. \begin{array}{l} \cdot 1 \subset 1.1' \parallel i \\ \cdot 2 \subset 2.2' \parallel i \end{array} \right\} \Rightarrow 1.1'2'2! - \text{переріз } \Phi^{III};$$

$$\left. \begin{array}{l} \cdot 3 \subset 3.3' \parallel i' \\ \cdot 4 \subset 4.4' \parallel i' \end{array} \right\} \Rightarrow 3.3'4'4! - \text{переріз } \Phi^{III};$$

= Будують спільні точки для поверхонь Φ^{III} та Φ^{III} , для цього:

– перетин паралелограмів $1.1'2'2$ та $3.3'4'4$, які належать відповідно Φ^{III} та Φ^{III} , визначає точки $\cdot A$; $\cdot B$; $\cdot C$; $\cdot D$, які належать лінії перетину поверхонь (рис. 13-23), тобто:

$$\square 1.1'2'2 \cap 3.3'4'4 \Rightarrow \cdot A; \cdot B; \cdot C; \cdot D! \subset \text{ЛППо.}$$

Провівши необхідну кількість площин, паралельних площині паралелізму Δ_0 , горизонтальні сліди яких паралельні горизонтальному сліду Δ_0 , – побудуємо необхідні точки лінії перетину поверхонь, відповідно з'єднавши які, отримаємо шукану лінію перетину поверхонь двох циліндрів.

13.4.1.3. Перетин поверхонь похилих конуса, або піраміди з циліндром, чи з призмою

Найпростішою фігурою перерізу конуса (піраміди) – трикутник, а циліндра (призми) – паралелограм (чотирикутник).

Якщо побудуємо посередник – площину загального положення P , яка в перерізі поверхні конуса (піраміди) дає трикутник, та одночасно в перерізі циліндра (піраміди) дає паралелограм, та побудуємо точки взаємного перетину фігур перерізу, то отримані точки і будуть точки лінії перетину поверхонь.

Методику визначення посередника – площини загального положення та побудови точок лінії перетину поверхонь покажемо на моделі, де перетинаються поверхні Φ^k і Φ^u – поверхні похилених конуса і циліндра, осі яких i та i' – мимобіжні прямі загального положення, а їх основи m і m' розташовані в площині Π_0 (рис. 13-24).

З вершини S конуса проводимо пряму a паралельну осі i циліндра і визначаємо на площині основ слід M прямої a : $\cdot S \subset a \parallel i$; $a \cap \Pi_0 \Rightarrow M$.

= Будуємо посередник – площину загального положення P , для цього:

З точки M проводимо горизонтальний слід P_0 , який перетинає основи m і m' поверхонь на площині основ, слід P_0 і пряма a утворюють посередник – площину $P(P_0 \cap a)$: $\cdot S \subset a \parallel i$; $a \cap \Pi_0 \Rightarrow M \subset P_0$; $a \cap P_0 \Rightarrow P!$

= Будуємо фігури перерізу поверхні Φ^k і Φ^u площиною P , для цього:

Визначаємо точки перетину сліду P_0 з основами m і m' відповідно циліндра та конуса:

$$P_0 \cap m \Rightarrow \cdot 1, 2; P_0 \cap m' \Rightarrow \cdot 3, 4.$$

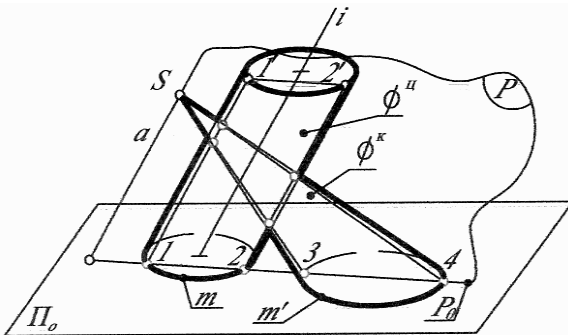


Рис. 13-24

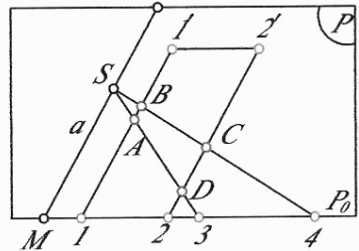


Рис. 13-25

З'єднуємо отримані точки 3 і 4 з вершиною S , – отримуємо трикутник $3S4!$ перерізу поверхні Φ^k , а побудувавши твірні з точок 1 і 2 паралельно осі i ,

по яких площина P перерізає циліндр і отримуємо паралелограм $1.1'2'2!$ перерізу поверхні Φ^u тобто:

$$\begin{aligned} P_0 \cap m &\Rightarrow \cdot 1 \cdot 2; P_0 \cap m' \Rightarrow \cdot 3 \cdot 4. \\ \cdot 3 \cup \cdot S \cup \cdot 4 &\Rightarrow \Delta 3S4! - \text{переріз } \Phi^k; \\ \cdot 1 \subset 2.2' \parallel i \\ \cdot 2 \subset 2.2' \parallel i \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \cdot 1 \subset 2.2' \parallel i \\ \cdot 2 \subset 2.2' \parallel i \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \square 1.1'2'2!$$

= Будують спільні точки для поверхонь Φ^u та Φ^k , для цього (на рис. 13-25):

– визначаються точки перетину $\Delta 3S4$ і $\square 1.1'2'2$, отримуємо точки A, B, C, D , які належать лінії перетину поверхонь Φ^u і Φ^k , тобто:

$$\Delta 3S4 \cap \square 1.1'2'2 \Rightarrow A, B, C, D! \subset \text{ЛППо.}$$

Провівши пучок площин через пряму a , яка проведена з вершини конуса і розташована паралельно осі i циліндра, — побудуємо необхідні точки лінії перетину поверхонь, відповідно з'єднавши які, отримуємо шукану лінію перетину поверхонь циліндра і конуса.

13.4.2. Рекомендації по утворенню та розташуванню посередників – площин

При розв'язку задач типу C , для побудови точок лінії перетину поверхонь використовують посередники – площини загального положення. Використовуючи такий посередник, головне щоб він був так розташований, щоб перерізи поверхонь посередником – площиною, були найпростішої форми, зручної для побудови.

При перетині двох поверхонь: двох конусів, двох пірамід, конуса і піраміди, – побудова точок їх лінії перетину поверхонь будується із застосуванням посередників – віяла площин, проведених через лінію вершин поверхонь, які перетинаються. Такі площини в перерізі поверхонь утворюють трикутники.

При перетині поверхонь: двох циліндрів, двох призм, призми з циліндром, – побудова їх лінії перетину поверхонь будується з застосуванням посередників – площин паралельно до площини паралелізму, яка утворена двома прямими, які перетинаються одна з яких паралельна осі одного з циліндра (або бічному ребру призми), а друга пряма паралельна осі другого циліндра (або бічному ребру другої призми). Такі площини в перерізі поверхонь утворюють паралелограми.

При перетині поверхонь: конуса або піраміди з циліндром або призмою, застосовують посередники – пучок площин, які проходять через пряму, проведenu з вершини конуса (піраміди) і розташовану паралельно осі циліндра

(боковому ребру призми). Такі площини в перерізі поверхонь утворюють пари: трикутник – паралелограм.

Всі точки лінії перетину поверхонь ділять на характерні і проміжні.

Характерними точками на криволінійних поверхнях є такі, що належать обрисовим твірним фронтальних та горизонтальних проекцій поверхонь. Такі точки будують за допомогою площин, які проходять через обрисові твірні, зони перетину горизонтальної та фронтальної проекції поверхонь (відповідні сліди цих площин пройдуть через сліди обрисових, які розглядаються). До характерних точок відносять точки на крайніх обрисових поверхонь, такі точки будують за допомогою граничних посередників – площин, проведених з двох сторін проекції поверхні, сліди цих двох площин дотичні до основ поверхонь.

Характерні точки лінії перетину поверхонь багатогранних поверхонь визначають за допомогою „гранних” площин (які співпадають з гранями) та площин які проходять через ребра багатогранників, розташованих в зоні перетину поверхонь.

Характерні точки лінії перетину поверхонь багатогранної поверхні з криволінійною визначають за допомогою гранних площин та площин, які проходять через ребра багатогранників та через обрисові криволінійної поверхні, розташованих у зоні перетину.

Проміжні точки лінії перетину поверхонь будують за допомогою площин, розташованих між граничними площинами, забезпечуючи рівномірність точкового каркасу лінії перетину поверхонь.

13.4.3. Визначення виду лінії перетину поверхонь

Вид лінії перетину поверхонь визначають за допомогою посередників – площин граничних, які дотичні до однієї з поверхонь, а другу перетинають. Граничні площини займають крайні положення серед використаних посередників площин, а між ними розташовують інші допоміжні площини (рис. 13-26).

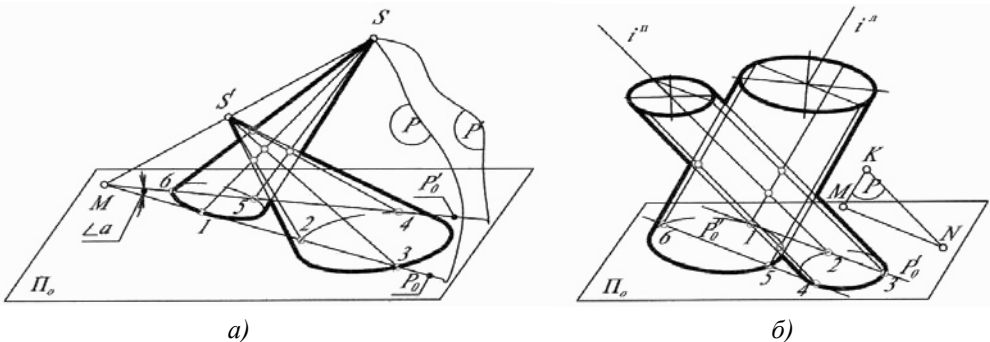


Рис. 13-26

Граничні площини дозволяють визначити частини поверхонь, які не беруть участі в перетині. Сліди граничних площин виділяють на основах перетинаючих поверхонь зони неперетину, які на епюрі доцільно виділяти (штриховкою, кольором). Сектор з кутом α , утворений граничними слідами виділяє основи твірних, які відповідно, перетинаючись, утворюють точки, які належать лінії перетину поверхонь.

По положенню та числу зон неперетину визначають вигляд лінії перетину поверхонь.

Розглянемо випадки можливих положень слідів граничних площин відносно основ, які перетинають поверхню, та розташування утворених зон неперетину поверхонь.

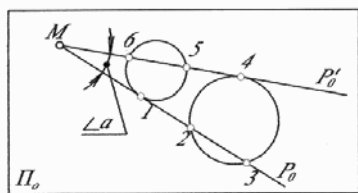
Випадок 1. Зони, в яких поверхні неперетинаються розташовані на основах різних тіл (рис. 13-27).

В цьому випадку дві поверхні не повністю беруть участь в утворенні ЛППо.

В цьому випадку дві поверхні не повністю беруть участь, одна поверхня частково врізається в іншу поверхню.

Такий випадок перетину поверхонь зветься – "врубка".

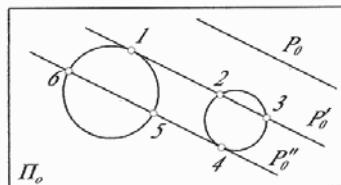
При взаємному перетині двох криволінійних поверхонь, – лінія їх перетину одна замкнена просторова крива четвертого порядку (рис. 13-27^б).



a)



б)



в)

Рис. 13-27

При взаємному перетині двох гранних поверхонь, – лінія їх перетину є одна замкнена просторова ламана лінія.

При перетині гранної поверхні з криволінійною, – лінія їх перетину буде мати вигляд просторової замкненої лінії, складеної з дуг кривих другого порядку.

Випадок 2. Зони неперетину розташовані на основі одного тіла (рис. 13-28^а).

В цьому випадку одна поверхня пронизує другу поверхню. Маємо "вхід" однієї поверхні в другу поверхню та її "вихід".

Такий випадок перетину поверхонь зветься – "проникнення".

При перетині двох криволінійних поверхонь, – лінія їх перетину є просторова крива четвертого порядку, яка розпалась на дві просторові замкнені лінії, які умовно називають "лінією виходу" та "лінією входу" (рис. 13-28^б).

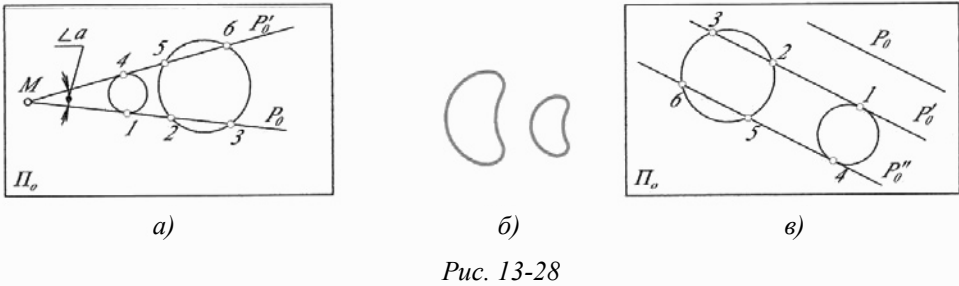


Рис. 13-28

Випадок 3. Зони неперетину відсутні.

Сліди кожної граничної площини дотичні до основ обох поверхонь (рис. 13-29^а).

В цьому випадку лінія перетину крива четвертого порядку розпадається на дві плоскі криві другого порядку з двома спільними точками (рис. 13-29^б).

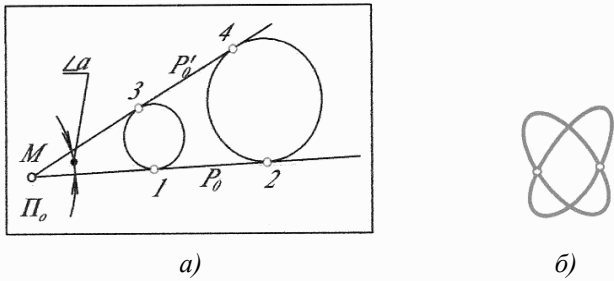


Рис. 13-29

У випадку, коли слід граничної площини дотичний до обох основ поверхонь, то їх лінія перетину вироджується в одну точку їх взаємного дотику. В інших випадках, – поверхні не перетинаються.

13.4.4. Приклад розв'язку задачі типу С

Застосування рекомендованої методики побудови лінії перетину поверхонь покажемо на прикладі, в якому поверхня похилого еліптичного конуса з віссю i , перетинається з поверхнею похилого еліптичного циліндра з віссю i' (рис. 13-30).

Послідовність розв'язання:

– Вибір посередника.

Враховуючи те, що осі заданих поверхонь є мимобіжними прямими загального походження, то посередником буде площина (площини) загального положення, яка б перерізала поверхні по найпростіших для побудови фігур. Такими фігурами є трикутник в перерізі конуса та паралелограм в перерізі

циліндра. Ці перерізи площиною P можливо отримати, якщо віяло площин – посередників буде проведено через пряму α , яка проведена з вершини S конуса і буде розташована паралельно i' – осі циліндра.

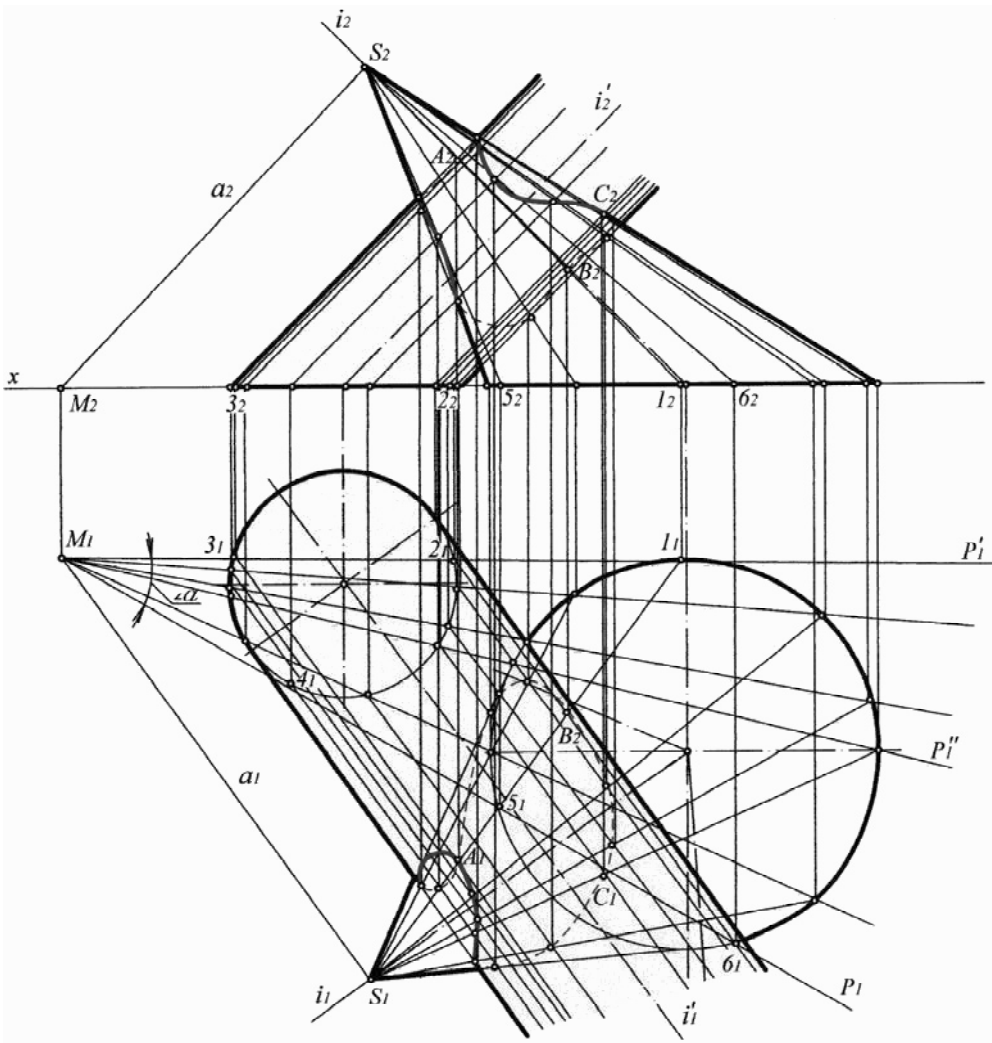


Рис. 13-30

– Визначення вигляду лінії перетину поверхонь: для цього через пряму α проведемо дві площини P та P' дотичні до поверхонь, на епюрі сліди цих площин на Π_1 (площині основ поверхонь) пройдуть через точку M , в якій перетинається допоміжна пряма α з Π_1 . З M_1 дотично до основи конуса пройде

слід P'_1 , а з цієї ж M_I дотично до основи циліндра пройде слід P_1 . Між площинами P і P' розташовані частини поверхонь конуса і циліндра, які беруть участь у взаємному перетині та утворюють „врубку”, як вигляд перетину поверхонь, так як зони неперетину поверхонь розташовані на основах різних тіл. Кут α визначає сектор, в якому розташовується горизонтальні сліди площин посередників.

– Побудова характерних точок лінії перетину поверхонь:

Побудова виконується за допомогою тих же площин P та P' . Так площина P' дотична до поверхні конуса по твірній $1S$, проведеній на Π_1 з точки, в якій P'_1 дотична до основи конуса, а ця ж площина P' перерізає циліндричну поверхню по двох твірних, проведених з точки 3 та 2, в яких P'_1 перетинає основу циліндра. Перетин $1S$ з твірними, проведеними з точок 3 та 2, паралельних осі i визначає характерні точки A і B (на Π_1 : 1_1S_1 перетинається з горизонтальними проєкціями твірних, проведених з 3_1 та 2_1) визначають горизонтальні проєкції A_1 та B_1 , фронтальні проєкції яких визначаються за належністю до твірної $1S$.

Аналогічно будувється друга пара характерних точок, які будують за допомогою площини P .

– Побудова проміжних точок лінії перетину поверхонь:

Побудова виконується за допомогою площин-посередників розташованих в секторі двогранного кута, утвореного площинами P і P_1 . За допомогою проміжних площин сектора, наприклад, площина P'' , за загальною методикою, будувється проміжна точка C та ще одна (не визначена).

– Побудова лінії перетину поверхонь (її проєкцій):

На горизонтальній та фронтальній проєкції поверхонь з'єднуємо однойменні проєкції характерних та проміжних побудованих точок лінії перетину поверхонь та визначається з урахуванням того, що:

Видимі точки знаходяться тільки в перетині видимих твірних. Якщо хоча б одна з перетинаючих твірних невидима, то і точка перетину твірних невидима.

Послідовно з'єднують точки тільки ті, що лежать на сусідніх твірних, які брали участь в побудові. Рекомендується розглядати послідовність з'єднання проєкцій точок способом одночасного „обходу” визначених твірних по проєкціях основ конуса та циліндра, для зручності застосовувати однакові „цифрові позначення”. Враховувати те, що точки на видимих обрисах поверхонь змінюють знак видимості лінії перетину поверхонь. Видимість самих обрисових може бути визначена з врахуванням „конкуруючих” точок на обрисових, враховуючи, що до видимих точок приходять видимі гілки відповідних проєкцій ліній перетину поверхонь.

При цьому: точки на обох основах поверхонь належні сліду однієї допоміжної площини, позначають однаковими цифрами і такою ж цифрою позначають точку перетину твірних поверхонь, проведених з точок основ, які мають однакові позначення.

13.5. Задачі для розв'язку

13.5.1. Задачі для позааудиторного розв'язку

Задача 13-1. Визначити в яких прикладах (рис. 13-31 та рис. 13-32) поверхні тіл, перетинаючись, утворюють „врубку”, а в яких – „проникнення”.

Виділити штриховою (кольором) на основах тіл зони перетину.

Побудувати точки ліній перетину.

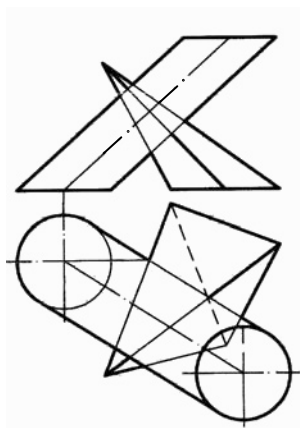


Рис. 13-31

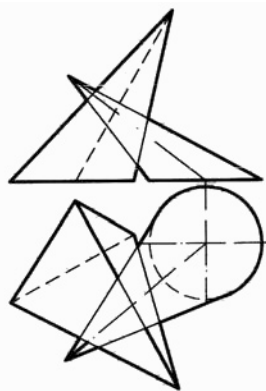


Рис. 13-32

Задача 13-2. Визначити, яку кількість вершин має лінія перетину поверхонь двох багатогранників (рис. 13-33).

Задача 13-3. Побудувати проєкції лінії перетину поверхонь, які утворили геометричні моделі на рис. 13-34 та на рис. 13-35.

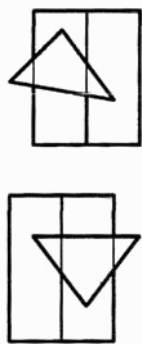


Рис. 13-33

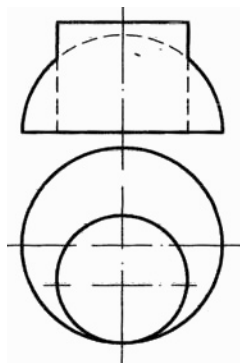


Рис. 13-34

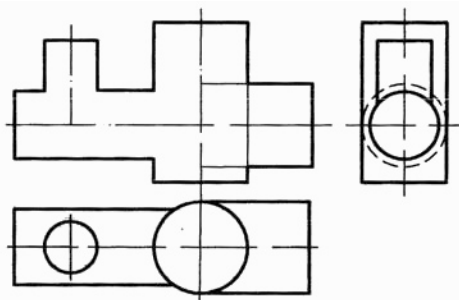


Рис. 13-35

Задача 13-4. Побудувати проєкції лінії перетину поверхонь двох тіл, зображених на рис. 13-36 та на рис. 13-37.

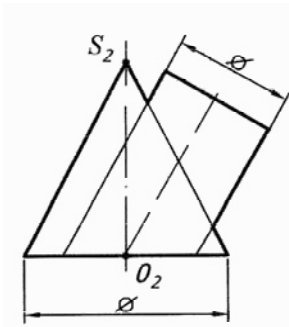


Рис. 13-36

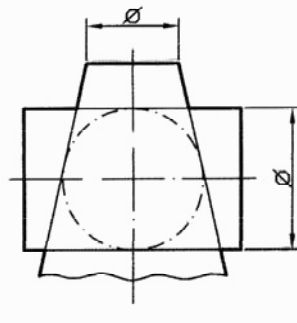


Рис. 13-37

13.5.2 Задачі для аудиторного розв'язку

Задача 13-5. Побудувати проєкції лінії перетину поверхонь двох геометричних тіл, наведених на рис. 13-38 та рис. 13-39.

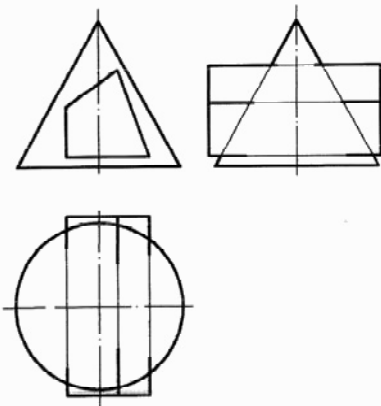


Рис. 13-38

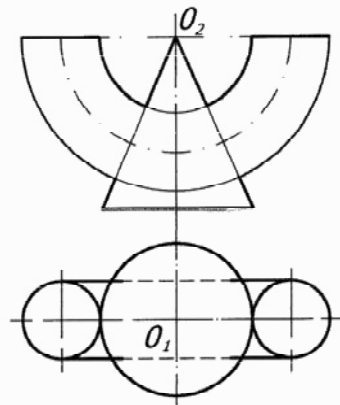


Рис. 13-39

Запитання для самоконтролю

1. В чому полягає загальна методика побудови лінії взаємного перетину поверхонь?
2. Типи задач на побудову лінії перетину поверхонь?
3. В чому полягає розв'язок задач типу А?
4. Який вигляд має лінія перетину гранних поверхонь?
Послідовність побудови їх лінії перетину поверхонь.
5. Який вигляд має лінія перетину гранної поверхні з криволінійною?
Послідовність побудови їх лінії перетину поверхонь.
6. ЛППо криволінійних поверхонь.
7. В розв'язку яких задач застосовуються посередники – сфери?
8. Який вигляд має лінія перетину співвісних поверхонь?
9. В чому полягає теорема Монжа?
10. Коли лінія перетину двох поверхонь другого порядку розпадається на дві плоскі криві?
11. Як визначити вид лінії перетину поверхонь?
12. При побудові лінії перетину яких поверхонь застосовують посередник – площину загального положення?

Тема 14

Зображення на кресленику моделі

Надається скорочена інформація про зображення, рекомендована ДСТУ ISO 128 2005 (ГОСТом 2.305 – 68), яка необхідна для забезпечення застосування теоретичних знань нарисної геометрії при практичному виконанні машинобудівних креслеників предмета.

Для відтворення форми – будови предмета (деталі, вибору та інше) застосовують різні за змістом зображення, такі як:

- *види;*
- *розрізи;*
- *перерізи.*

Зображення будуються методом прямокутного паралельного проектування на основні площини проекції, за які приймаються грані куба, або на зручні додаткові площини.

14.1. Види

Види призначені для відтворення зовнішньої форми предмета, звернутої до взірця.

Застосовують наступні види:

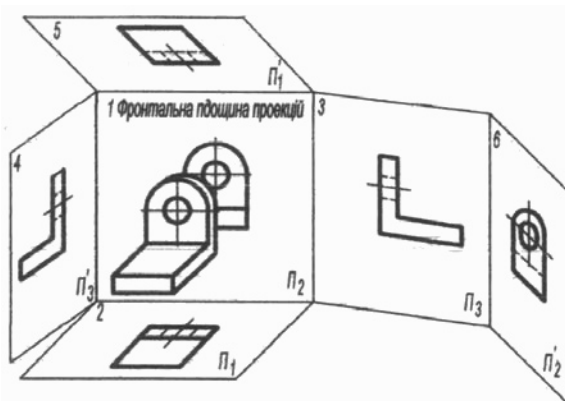


Рис. 14-1^а

– *основні види*, яких може бути шість (рис. 14-1^а):

1 – вид спереду, він головний, отриманий проектуванням предмета на фронтальну площину проекції і суміщений з площиною кресленика. За змістом цей вид повинен бути найбільш інформативний про зовнішню форму предмета;

- 2 – вид зверху;
- 3 – вид зліва;
- 4 – вид справа;

- 5 – вид знизу;
- 6 – вид ззаду;
- **додаткові види;**
- **місцеві види.**

Місця взаємного розташування основних видів відносно головного виду показано на рис. 14-1^б.

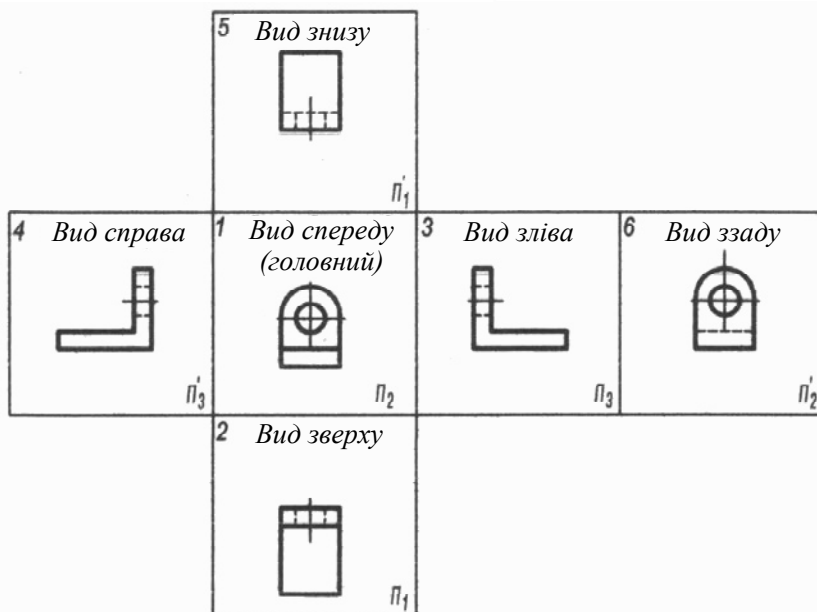


Рис. 14-1^б

Вид зверху та вид знизу відносно головного виду розташовують на спільних вертикальних лініях зв'язку, а види справа, спереду, зліва та ззаду – розташовують на спільних уявлених горизонтальних лініях зв'язку, тобто в проєкційному зв'язку між собою.

При такому взаємному розташуванні основних видів ніякі написи над їх зображеннями не виконуються, а коли той чи інший вид зміщується в інше місце поля кресленика, це супроводжується вказівкою напрямку проєктування стрілкою та буквенним його позначенням переважно біля головного виду, а над самим зображенням, отриманим у вказаному напрямку проєктування, пишуть зверху буквенне позначення цього напрямку виду.

При виконанні додаткового виду, для його отримання застосовують додаткову площину проєкцій, розташовану паралельно тій частині поверхні предмета, яка не паралельна жодній грані куба, прийнятій за основні площини проєкцій.

14.2. Розрізи

Розрізи призначені для відтворення внутрішньої форми предмета, умовно перерізаного площиною (чи площинами). На розрізі показують те, що отримане в січній площині і те, що видно за нею. При цьому частина предмета розташована між взірцем і січною площиною, – умовно прибирається, а проектується залишена частина предмета і зображення буде утворене тим, що лежить у січній площині (заштриховане залежно від матеріалу предмета) і тим, що розташоване і видно за нею.

Розрізи поділяють в залежності від положення січної площини відносно горизонтальної площини проєкції на:

- *горизонтальні* (рис. 14-2^{а,б});
- *вертикальні – фронтальні* (рис. 14-3^{а,б}) або *профільні*;
- *похилі*;
- *місцеві*.

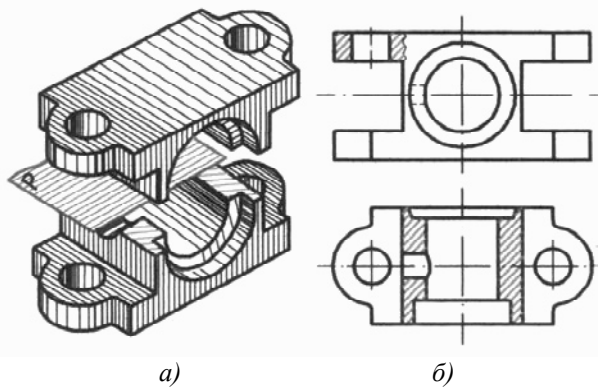


Рис. 14-2

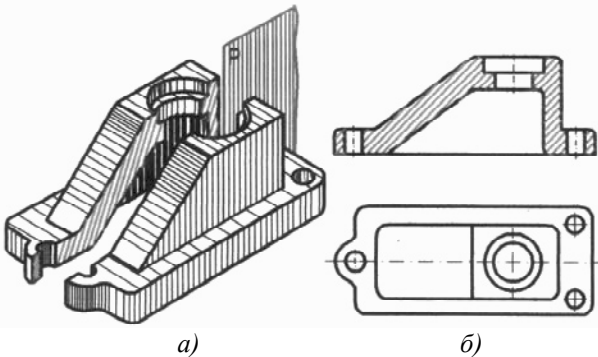


Рис. 14-3

Залежно від кількості ділянок січної площини, розрізи поділяють на:
 – **прості** – виконані за допомогою однієї ділянки січної площини;
 – **складні** – виконані за допомогою декількох ділянок січної площини
 і поділяють на **східчасті** та **ламани**.

14.2.1 Особливості виконання розрізів

Якщо січна площина збігається з площиною симетрії деталі, то розташування допоміжної січної площини не вказують (це у випадку, коли та частина деталі, яку умовно прибирають, симетрична тій частині, яку проектують рис. 14-4), а у всіх інших випадках вказують розташування січної площини шляхом відтворення її сліду – проекції за допомогою знака утвореного штрихами розімкненої лінії з стрілками, які вказують напрямок проектування та буквеного позначення цієї площини (рис. 14-5^а), а над зображенням отриманого розрізу пишуть напис, складений з прийнятого позначення площини (рис. 14-5^б).

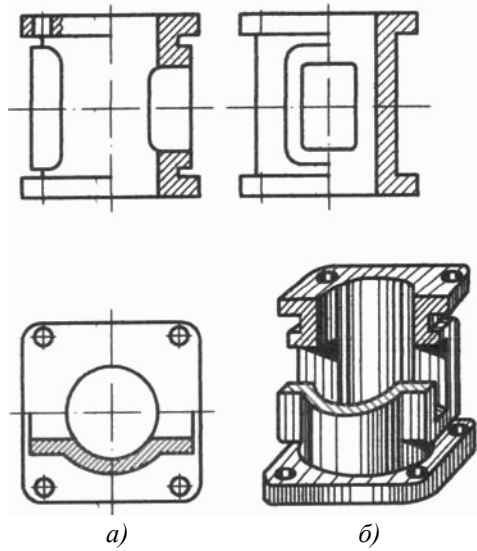


Рис. 14-4

Якщо зміст розрізу симетричний відносно його осі симетрії, то рекомендовано виконувати половину розрізу, сумістивши його з відповідною половиною виду, розташувавши половину розрізу справа від осі симетрії (або знизу від неї), а зліва розташовується половина відповідного виду розділених між собою штрих-пунктирною лінією осі симетрії.

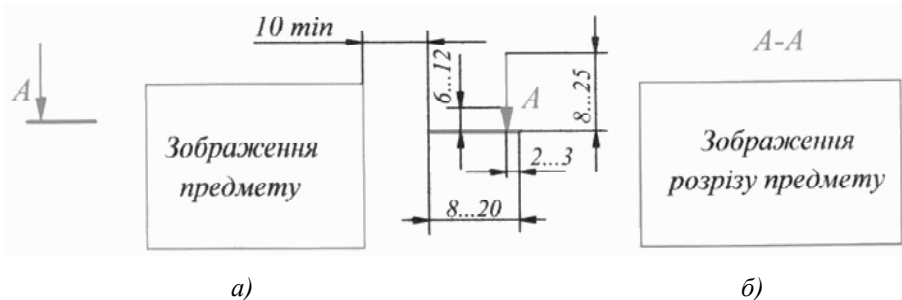


Рис. 14-5

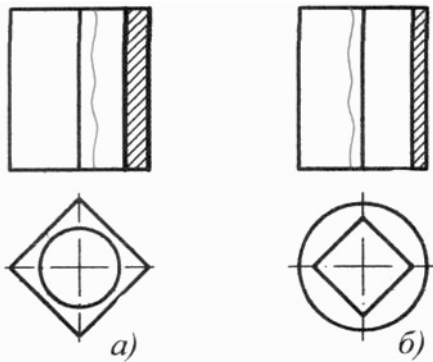


Рис. 14-6

Якщо з віссю симетрії збігається лінія контуру на виді, то відтворюється більша частина виду (достатня для зображення цієї лінії контуру), з'єднана з меншою частиною відповідного розрізу і ці частини зображень розділяють суцільною тонкою хвилястою лінією (рис. 14-6^а), а якщо з віссю симетрії збігається лінія контуру на розрізі, то відтворюють більшу частину розрізу, з'єднану з меншою частиною виду і ці частини розділяються суцільною тонкою хвилястою лінією (рис. 14-6^б).

14.3. Зображення креслеників моделей з одним горизонтальним отвором (одинарне проникнення)

Геометрична модель розглядається, як умовна деталь спрощеної форми. Відтворення форми моделі наближає до виконання зображень форми деталей, яка утворена, переважно поверхнями простих геометричних тіл. Головною дією в побудові зображень деталі є відтворення спряження формують поверхонь, яке виконується по їх лініях перетину. Враховуючи те, що будова деталей утворюється її стінками з робочими та неробочими поверхнями. Самі стінки утворюються зовнішньою та внутрішньою поверхнями деталі, простір між якими „заповнений” матеріалом, з якого виготовлена деталь. Таким чином, необхідно будувати лінії переходу (перетину) між поверхнею зовнішньої форми та поверхнею внутрішньої форми, яка розташована всередині поверхні зовнішньої форми. Якщо внутрішня форма утворена двома поверхнями чи трьома, то будується лінія переходу між поверхнями, які утворюють внутрішню форму, такі поверхні мають взаємне зовнішнє розташування.

В нижченаведених прикладах розглядається побудова зображень найпростіших моделей, формоутворення яких виконано різними (найбільш простими) зовнішніми поверхнями та однаковою поверхнею внутрішньої форми, якою є тригранна пряма призма з її бічними ребрами фронтально-проектуючого напрямку.

Форма моделей висвітлюється на трьох зображеннях, для виконання яких будуються проекції (горизонтальна та фронтальна, для більш повного висвітлення форми моделі в подальшому і профільну) обрисів поверхонь зов-

нішньої та внутрішньої поверхонь. Будується лінія „виходу” („входу”) внутрішньої (призматичної) поверхні відносно зовнішньої поверхні (будується лінія перетину двох поверхонь з внутрішнім розташуванням однієї відносно другої). Виконуються необхідні розрізи моделі, які сполучаються з відповідними видами.

Розгортка поверхні зовнішньої форми виконується одним із існуючих методів, а показ вирізу, утвореного лінією перетину поверхонь, будується за координатними розмірами його характерних точок.

14.3.1. Модель призматична

На рис. 14-7 наведено модель, зовнішня форма якої утворена чотиригранною прямою призмою з горизонтально-проектуючою бічною поверхнею (вертикальна призма), а внутрішня форма утворена бічною фронтально-проектуючою поверхнею тригранної призми (горизонтальна призма).

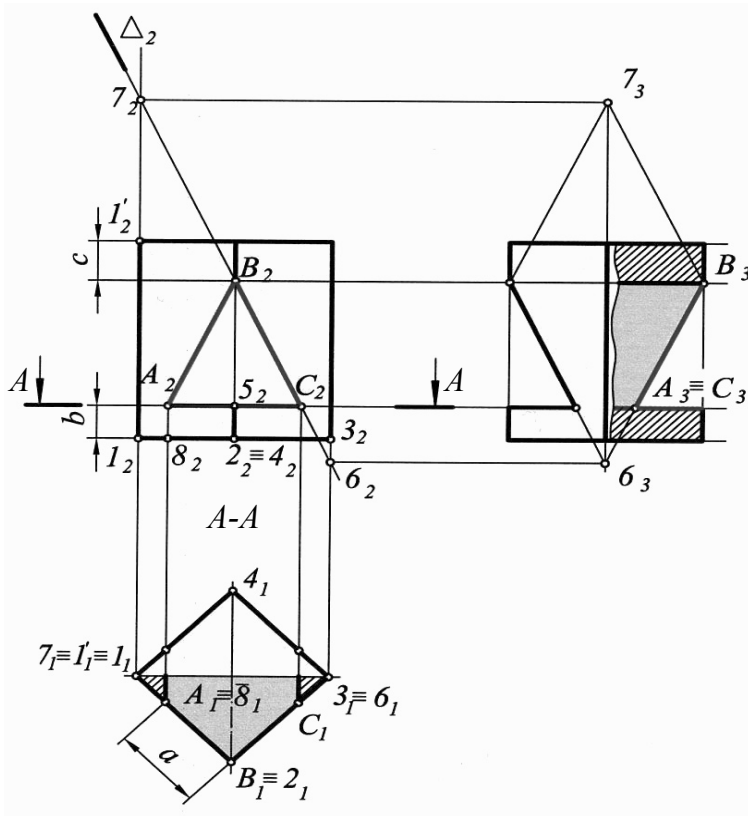


Рис. 14-7

Висвітлення форми заданої моделі виконується розв'язанням етапів:

1. Побудова зображень (видів) обрисів формоутворюючих поверхонь, що виконуються з застосуванням відповідних ліній зв'язку.

2. Виконання зовнішньої задачі, зв'язаної з побудовою лінії перетину вертикальної та горизонтальної поверхонь. Побудова виконується за допомогою методу повних перерізів із застосуванням допоміжних січних площин-посередників.

Для грані BC , застосовуючи метод повних перерізів отримаємо:

– $\Delta (\Delta_2)$ – площина повного перерізу;

– форма отриманого повного перерізу вертикальної призми – чотирикутник $6B7B'6$;

– профільна проекція повного перерізу – $6_3B_37_3B'_36_3$, а горизонтальна проекція – $6_1B_17_1B'_16_1$ (яка зливається з горизонтальною проекцією бічної проєктуєючої поверхні);

– натуральна частина повного перерізу розташована між точками B і C (профільна проекція якої B_3C_3 та горизонтальна B_1C_1 , та їх симетричні частини між точками B' і C').

Для грані AB натуральна частина перерізу симетрична натуральній частині грані BC .

Для грані AC натуральна частина $A5C$ та їй симетрична частина $A'5'C'$.

В сукупності натуральних частин всіх „входів” та „виходів” трьох граней горизонтальної призми отримується лінія перетину поверхонь, яка має вид просторової ламаної лінії і складається з двох замкнутих ламаних – $BC5AB$ та $B'C'5'A'B'$.

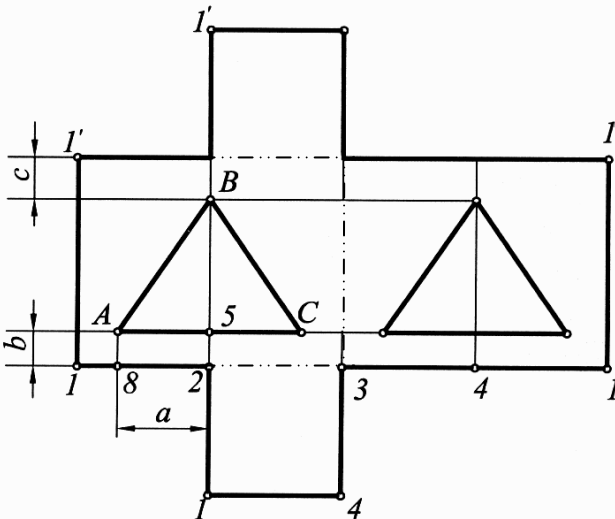


Рис. 14-8

3. Для висвітлення внутрішньої форми моделі виконуємо половину горизонтального розрізу площиною A , сполученого з половиною виду зверху, а також виконується половина простого вертикального профільного розрізу, сполученого з половиною виду зліва.

На рис. 14-8 показана розгортка поверхні зовнішньої форми (розгортка вертикальної призми) з нанесенням лінії „виходу” та „входу” поверхні горизон-

тального отвору. Побудова розгортки виконана методом суміщення, а нанесення лінії перетину поверхонь виконано за допомогою координатних розмірів „ a ” і „ b ” для побудови точки A та симетричної їй точки C і точки 5 , а також розміру „ c ” для побудови точки B .

Для більш виразного висвітлення зовнішньої та внутрішньої форми їх поверхні показано різнокольоровими.

14.3.2. Модель пірамідальна

На рис. 14-9 наведено модель, зовнішня форма, якої утворена чотиригранною зрізаною пірамідою, а внутрішня форма утворена бічною фронтально-проектуючою поверхнею тригранної призми.

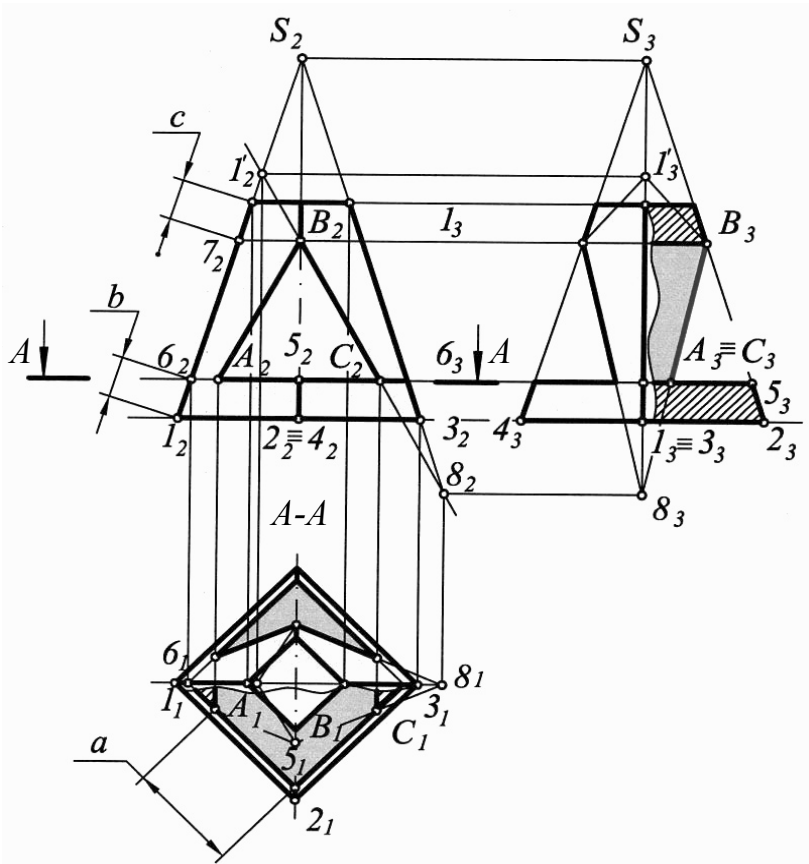


Рис. 14-9

Висвітлення форми заданої моделі виконується розв'язанням етапів:

1. Добудова зображень (видів) обрисів поверхонь, які утворили модель.
2. Розв'язок зовнішньої задачі, – побудова лінії перетину поверхонь методом повних перерізів, застосовуючи який:

Для грані BC , отримаємо:

- $\Delta (\Delta_2)$ – площина повного перерізу;
- повний переріз – чотирикутник $1'B8B'1'$;
- проекції перерізу – на Π_3 – $1'_3B_38_3B'_31'_3$, та на Π_1 – $1'_1B_18_1B'_11'_1$;
- натуральна частина повного перерізу, яка стосується грані BC – від точки B до точки C (лінія BC), та з протилежного боку від точки B' до точки C' (лінія $B'C'$).

Для грані AB , – натуральна частина перерізу симетрична натуральній частині грані BC .

Для грані AC , – натуральна частина $A5C$ та їй симетрична частина $A'5'C'$.

Сукупність натуральних частин всіх трьох граней призми (їх „вхід” та „вихід”, відносно поверхні піраміди) отримаємо лінію перетину поверхонь моделі, яка має вид ламаної лінії і вона складається з двох замкнених ламаних $BC5AB$ та $B'C'5'A'B'$.

3. Відтворення внутрішньої та зовнішньої форми моделі, висвітлюється видом спереду, половиною горизонтального розрізу, виконаного площиною A , сполученим з половиною виду зверху, та половиною профільного розрізу, сполученого з половиною виду зліва. Виразність відтворення поверхонь на

зображеннях показана їх різнокольоровістю.

На рис. 14-10 наведена розгортка поверхні зовнішньої форми та нанесено лінію перетину поверхонь піраміди та призми. Побудова розгортки виконана методом трикутників, а нанесення лінії перетину поверхонь виконано за розмірами „ a ” та „ b ” для точки A та їй симетричної точки C , A також за розміром „ c ” побудована точка B , та їм симетрично розташованих точок.

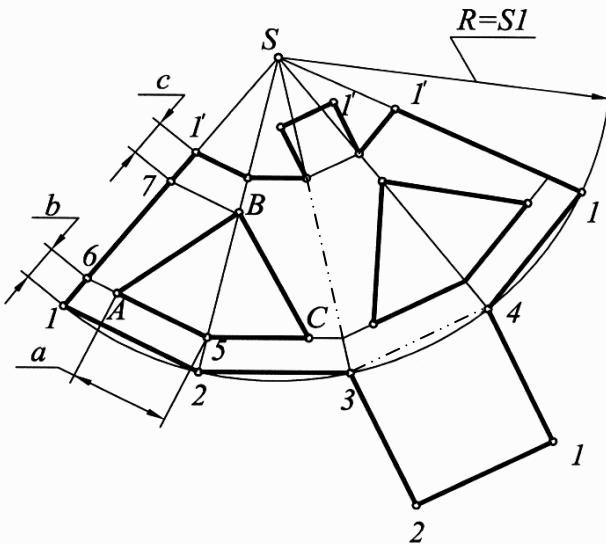


Рис. 14-10

Етапи розв'язку побудови лінії перетину поверхонь та висвітлення форми моделі виконуються аналогічно розв'язку при розгляді моделі конічної, а розгортка, наведена на рис. 14-12, виконана методом розкочування.

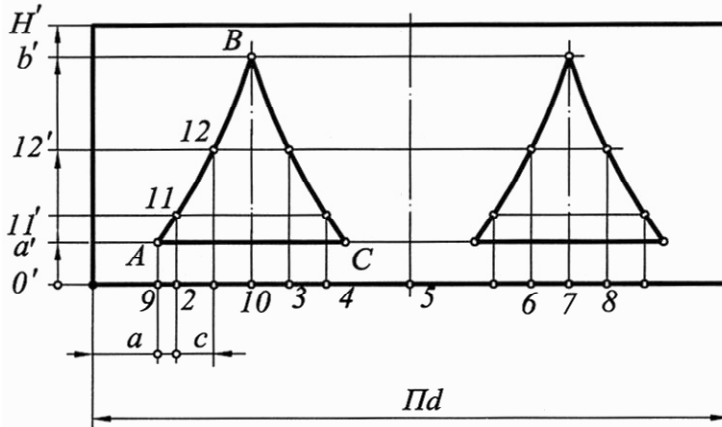


Рис. 14-12

14.3.4. Модель конічна

На рис. 14-13 наведено модель, зовнішня форма якої утворена поверхнею прямого кругового зрізаного конуса, а внутрішня форма утворена фронтально-проектуючою бічною поверхнею тригранної призми.

Висвітлення форми заданої моделі виконується розв'язком етапів:

1. Добудова видів-обрисів поверхонь, які утворили модель.

2. Розв'язок зовнішньої задачі, – побудова лінії перетину поверхонь методом повних перерізів, застосовуючи який:

Для грані BC , отримуємо:

– $\Sigma (\Sigma_2)$ – площина повного перерізу;

– повний переріз – еліпс „ e'' ”;

– проекції повного перерізу – на $\Pi_3 - e_3$, та на $\Pi_1 - e_1$;

– натуральна частина повного перерізу, яка стосується грані BC , – розташована від точки B до точки C (частина еліпса \widehat{BC}), та з протилежного боку від точки B' до точки C' (дуга еліпса $\widehat{B'C'}$).

Для грані AB , (яка симетрична грані BC), – натуральна частина є дуга AB , (розташована від точки A до точки B по дузі еліпса) – та їй симетрична частина $A'B'$.

– для грані AC – натуральна частина – дуга $A5C$, кола – перерізу площиною A , від точки A до C , та їй симетрична частина $A'5'C'$.

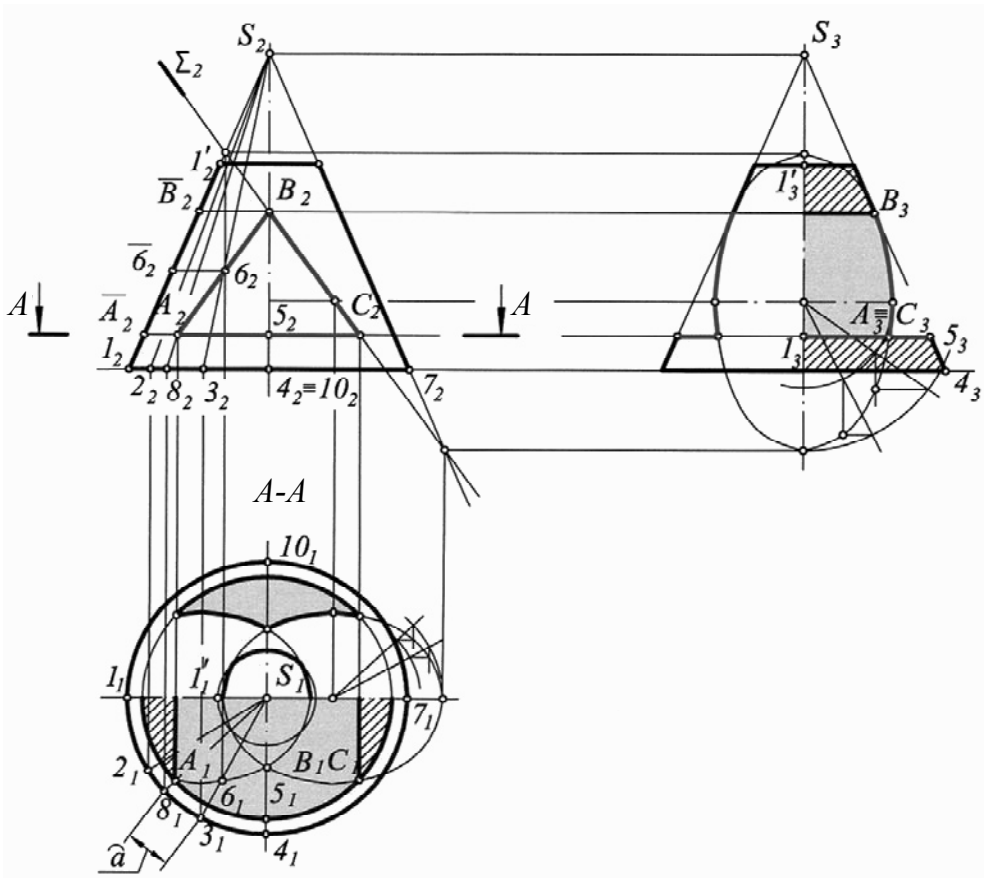


Рис. 14-13

Сукупність натуральних частин „входу” та „виходу” всіх трьох граней призми відносно поверхні конуса утворює лінію перетину поверхонь моделі, та має вид лінії, складеної з дуг кривих другого порядку, з'єднаних між собою в спільних точках, та являє собою лінію, складену з двох частин, однієї $BC5AB$ та другої $B'C'S'A'B'$.

3. Відтворення внутрішньої та зовнішньої форми моделі висвітлюється видом спереду, половинного горизонтального розрізу виконаного площиною A , сполученого з половиною виду зверху та половиною профільного вертикального розрізу, сполученого з половиною виду зліва. Виразність зображення поверхонь моделі відтворюється їх різнокольоровістю.

На рис. 11-14 наведена розгортка поверхні зовнішньої форми, утвореною поверхнею прямого кругового зрізаного конуса.

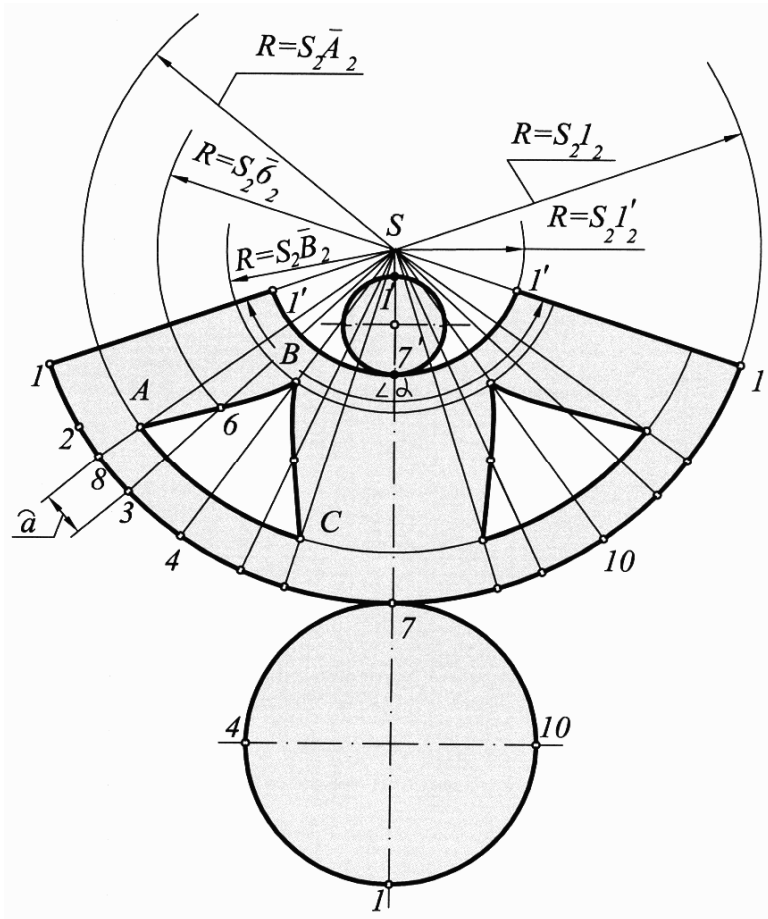


Рис. 14-14

Розгортка складена з розгортки бічної поверхні зрізаного конуса, яка виконана з застосуванням аналітичного розрахунку кута α сектора, центрові сторони якого дорівнюють натуральній величині твірної конуса, та кругів його основ. Лінія перетину поверхонь на розгортці побудована з використанням розмірів $R = S_2 \bar{A}_2$, $R = S_2 \bar{B}_2$, $R = S_2 I'_2$, натуральна величина яких визначена на виді спереду, та використанням розміру „а” і точок поділу дуги основи конуса.

14.3.5. Модель кульовидна

На рис. 14-15 наведена модель, зовнішня форма якої утворена поверхнею сфери, а внутрішня форма утворена фронтально – проектуючою бічною поверхнею тригранної призми.

Етапи розв'язку:

1. Побудова зображень (видів) обрисів формоутворюючих поверхонь на Π_2 та Π_1 .

2. Виконання розв'язку зовнішньої задачі з побудови лінії перетину поверхонь сфери та призми виконується методом повних перерізів з застосуванням допоміжних січних площин – посередників.

Для грані BC :

– $T(T_2)$ – площина повного перерізу;

– форма отриманого повного перерізу поверхні сфери – коло, розташоване в фронтально – проектуючій площині T ;

– горизонтальна проекція кола – перерізу – еліпс осі якого є проекції двох спряжених діаметрів (один з яких $\Pi \Pi_2$, а другий $\perp \Pi_2$);

– натуральна частина повного перерізу, розташована між точками B і C по дузі кола – перерізу (горизонтальна проекція дуги BC – дуга B_1C_1 еліпса-проекції кола-перерізу), та з протилежного боку від точки B' до точки C' (дуга еліпса $B'_1C'_1$).

Для грані AB , – натуральна частина розташована між точками A і B по дузі кола, симетричного перерізу BC в площині T , горизонтальна проекція дуги \widehat{AB} – дуга \widehat{AB} симетрична дузі \widehat{BC} .

Для грані AC дійсна частина – дуга \widehat{AC} кола – перерізу сфери площиною K , та їй симетрична частина \widehat{AC} .

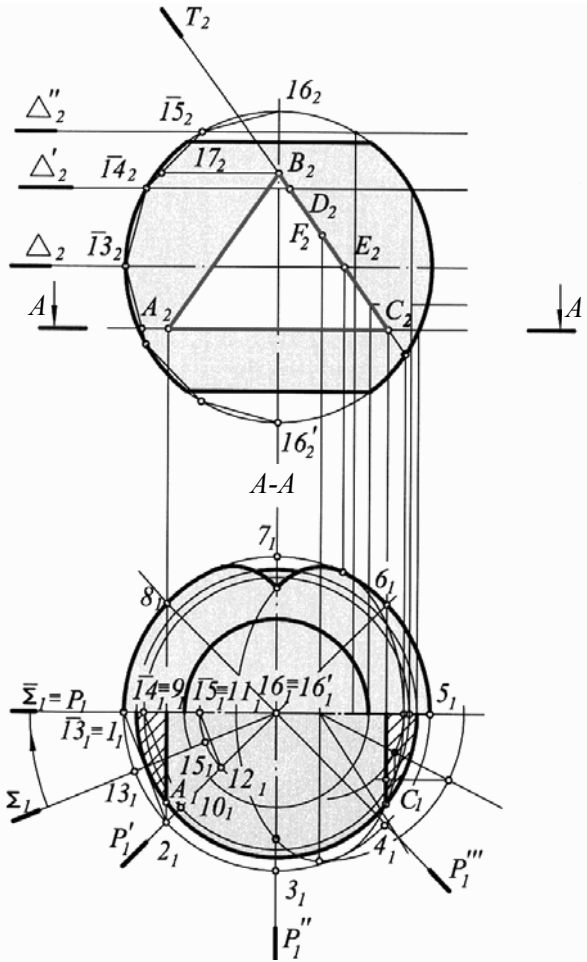


Рис. 14-15

Сукупність натуральних частин „входу” та „виходу” всіх трьох граней призми відносно поверхні сфери, утворює лінію перетину поверхонь моделі, яка має вид лінії, складеної з трьох дуг кривих другого порядку, з'єднаних між собою в спільних точках, виявляючи лінію, складену з двох частин – однієї $BCAB$ та другої $B'C'A'B'$ (з протилежного боку).

3. Відтворення зовнішньої та внутрішньої форми моделі висвітлюється на виді спереду, та половиною виду зверху, сполученого з половиною горизонтального розрізу, виконаного площиною A . Виразність зображення поверхонь моделі підкреслюється їх різнокольоровістю.

На рис. 14-16 наведено розгортку поверхні сфери, яка утворює зовнішню форму моделі. Виконання розгортки полягає в тому, що поверхня перерізається площинами, що проходять через вертикальну вісь сфери і вся поверхня розділяється на долі – порції, кожна з яких розташована між суміжними меридіальними перерізами. Чим більше дольок-порцій, – тим більша точність наближення умовної розгортки до дійсної. На цьому прикладі застосовано чотири горизонтально-проектуючих площини, які проведені через горизонтально-проектуючу вісь сфери і вся її поверхня розбита на вісім однакових дольок, кожна з яких апроксимується вписаною (або описаною) циліндричною прямою круговою поверхнею. Надалі будеться розгортка кожного апроксимуючого циліндра, наприклад, методом суміщення, з'єднавши плавними кривими краї твірних розгорток – отримуємо розгортки кожної дольки поверхні. Отримані розгортки восьми однакових дольок утворюють умовну розгортку поверхні сфери.

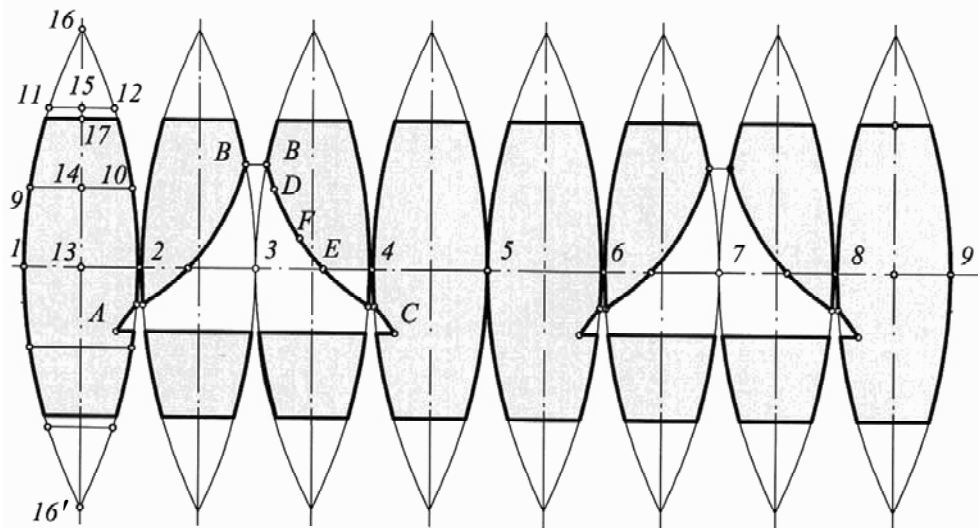


Рис. 14-16

Епюр №3

14.4. Зображення креслеників моделі з двома (горизонтальним та вертикальним) отворами, – подвійне проникнення

Вивчення цього питання пропонується шляхом виконання окремої епюрної роботи №3.

Виконуючи цей епюр, показуємо як нарисна геометрія забезпечує основу побудови кресленика деталі, що дає можливість вести технічне спілкування між фахівцями.

Для забезпечення виконання епюру необхідно чітко знати і вміти:

- як виконуються проекції поверхонь найпростіших геометричних тіл і проекцій точок належних цим поверхням;
- в'являти форму (вид) фігур перерізу поверхонь найпростіших геометричних тіл, та вміти будувати проекції цих фігур перерізу;
- знати загальну методику побудови лінії перетину поверхонь;
- знати за допомогою яких зображень висвітлюється форма деталі і як вони виконуються.

Завдання: В таблиці №4 (наведена в додатку) запропоновані завдання на епюр №3. В кожному варіанті задана модель, форма якої утворена трьома поверхнями, дві з яких гранні, а одна криволінійна.

Зовнішня форма моделі може бути утворена гранною поверхнею (це правильна пряма призма, чи зрізана піраміда), або кривою поверхнею (це прямий круговий циліндр, чи зрізаний конус або зрізана куля).

Внутрішню форму моделі утворює вертикальний та горизонтальний отвори:

- вертикальний отвір має форму, утворену поверхнею кругового конуса чи циліндра, або поверхню правильної прямої призми чи зрізаної піраміди;
- горизонтальний отвір має форму, утворену поверхнею прямої призми, бічна поверхня якої є проектуюча відносно фронтальної площини проекцій (її бічні грані перпендикулярні до площини Π_2);

В завданні наведено:

- фронтальну проекцію моделі, на якій зображені проекції трьох поверхонь, що утворили модель;
- горизонтальну проекцію двох поверхонь, одна з яких утворила зовнішню форму, а друга – вертикальний отвір.

В рішенні завдання необхідно побудувати кресленик заданої моделі з висвітленням її зовнішньої та внутрішньої форми, та відтворити побудову ліній взаємного перетину – формоутворюючих поверхонь, для цього:

– побудувати профільну проекцію моделі з відтворенням проекції трьох поверхонь, які утворили форму моделі і побудувати лінії взаємного перетину цих поверхонь;

– добудувати горизонтальну проекцію моделі, де необхідно показати проекцію гранної поверхні, що утворила горизонтальний отвір і побудувати лінії перетину цієї поверхні з поверхнею зовнішньої форми, та з поверхнею вертикального отвору.

Рекомендації по виконанню епюра №3:

Формат: А3 (297×420), папір-ватман (креслярський папір), розташування формату – більшою стороною горизонтально, оформляють формат рамкою і головним написом по формі 1 (185×55) та інформаційну таблицю по формі, наведеній на рис. 14-17.

З лівого боку формату побудувати в проекційному зв'язку фронтальну та горизонтальну проекції моделі, які наведені в завданні Вашого варіанта. Величину зображення проекцій будувати так, щоб два найбільших розміри їх були 100 мм., та 80 мм., а інші розміри взяти шляхом пропорційного збільшення зображення моделі в завданні.

З правого боку формату в проекціювальному зв'язку відносно фронтальної проекції, буде побудовано профільну проекцію заданої моделі.

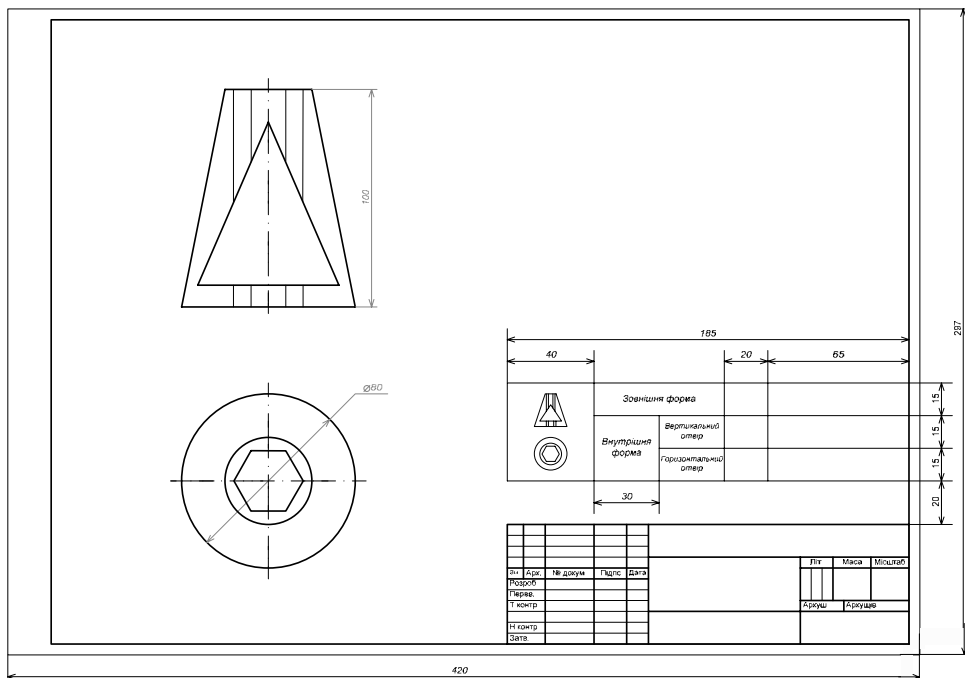


Рис. 14-17

2. Побудова проєкцій обрисів трьох поверхонь (будується профільна проєкція та добудовується горизонтальна проєкція обрисів трьох поверхонь, які утворили модель, рис. 14-19).

При цьому:

- на профільній проєкції будується:
 - проєкція обрису поверхні, яка утворила зовнішню форму;
 - проєкції обрисів поверхонь, які утворили внутрішню форму і в тому числі:
 - поверхню, яка утворила вертикальний отвір;
 - поверхню, яка утворила горизонтальний отвір;
 - на горизонтальній проєкції будується проєкція обрису поверхні, яка утворила горизонтальний отвір.

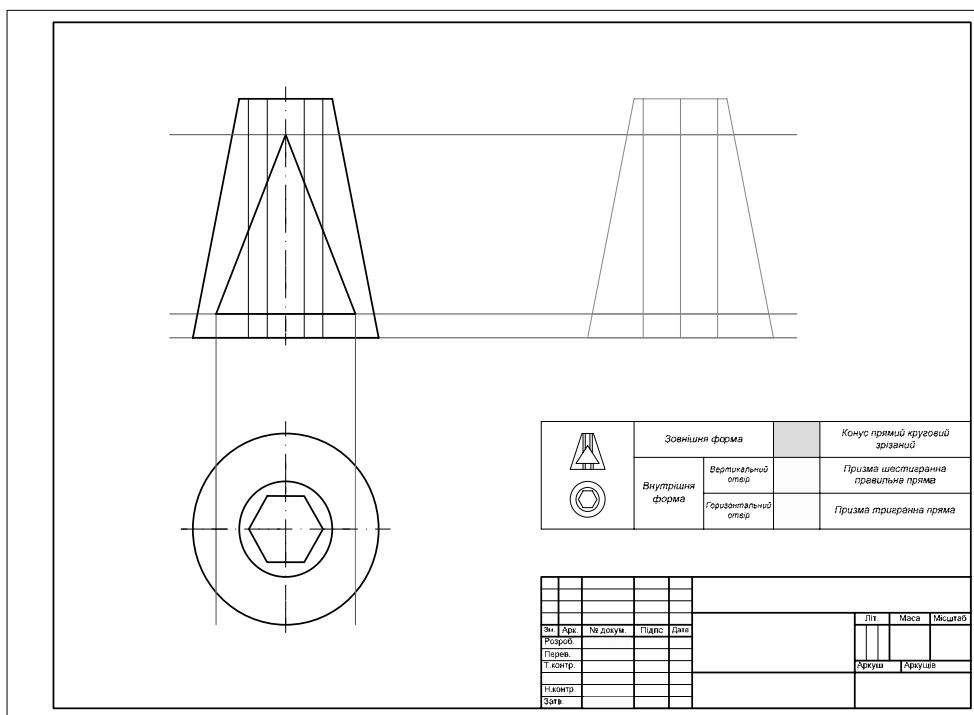


Рис. 14-19

3. Розв'язок зовнішньої задачі, в якій будується лінія перетину (виходу) призматичної поверхні горизонтального отвору з поверхнею яка утворила зовнішню форму моделі (розглядається випадок в якому перетинаються дві поверхні одна з яких розташована в середині другої).

Виконання розв'язку розпочинається з виділення однієї бокової грані призми горизонтального отвору (з її зображення на полі P_2).

Розв'язок виконується "методом повних перерізів поверхонь", в якому застосовують допоміжні січні площини часткового положення відповідно рекомендаціям пункту 13.1 та пункту 13.2.2 наступним чином:

а) *утворення площини повного перерізу*, рис. 14-20, виконується на фронтальній проекції моделі, шляхом продовження виділеної бокової грані призми горизонтального отвору. Враховуючи те, що всі бічні грані горизонтального отвору, за умовою, перпендикулярні до поля P_2 , то при подовженні фронтальної проекції виділеної грані, – отримується слід-проекція допоміжної фронтально – проектуючої площини повного перерізу;

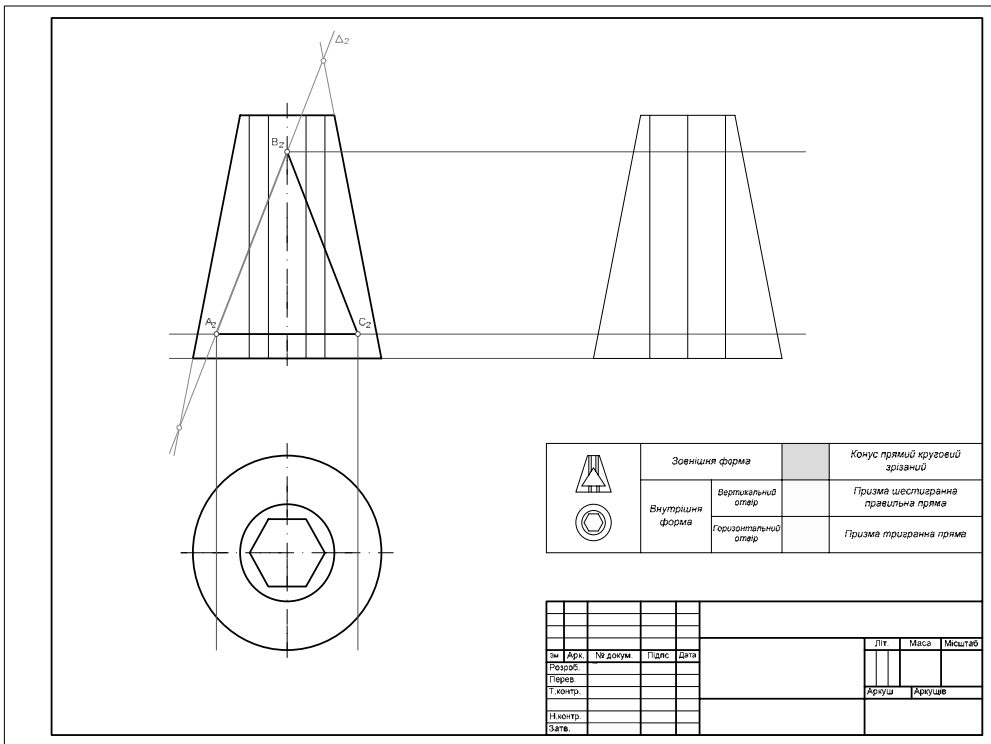


Рис. 14-20

б) *уявлення виду фігур повного перерізу*, рис. 12-21, утворених в перерізі допоміжною площиною повного перерізу поверхні, яка утворила зовнішню форму моделі та призматичної поверхні, яка утворила форму горизонтального отвору, при цьому враховується, що:

– перша фігура – фігура повного перерізу поверхні зовнішньої форми, яка на полі Π_2 розташована від точки перерізу її лівої лінії обрису до точки перерізу її правої лінії обрису (якщо площина повного перерізу не повністю перерізає бічну поверхню, то площина і обрис бічної поверхні продовжуються до взаємного перетину);

– друга фігура – фігура повного перерізу поверхні горизонтального отвору (ця фігура є крайнім перерізом, співпадаючим з виділеною гранню призматичної поверхні горизонтального отвору і окреслена з двох протилежних сторін двома паралельними між собою боковими ребрами цієї призми, які є відрізками фронтально-проектуючих прямих, а з інших двох протилежних сторін ця друга фігура окреслена лініями перетину розглядаємої грані з поверхнею зовнішньої форми, які необхідно будувати;

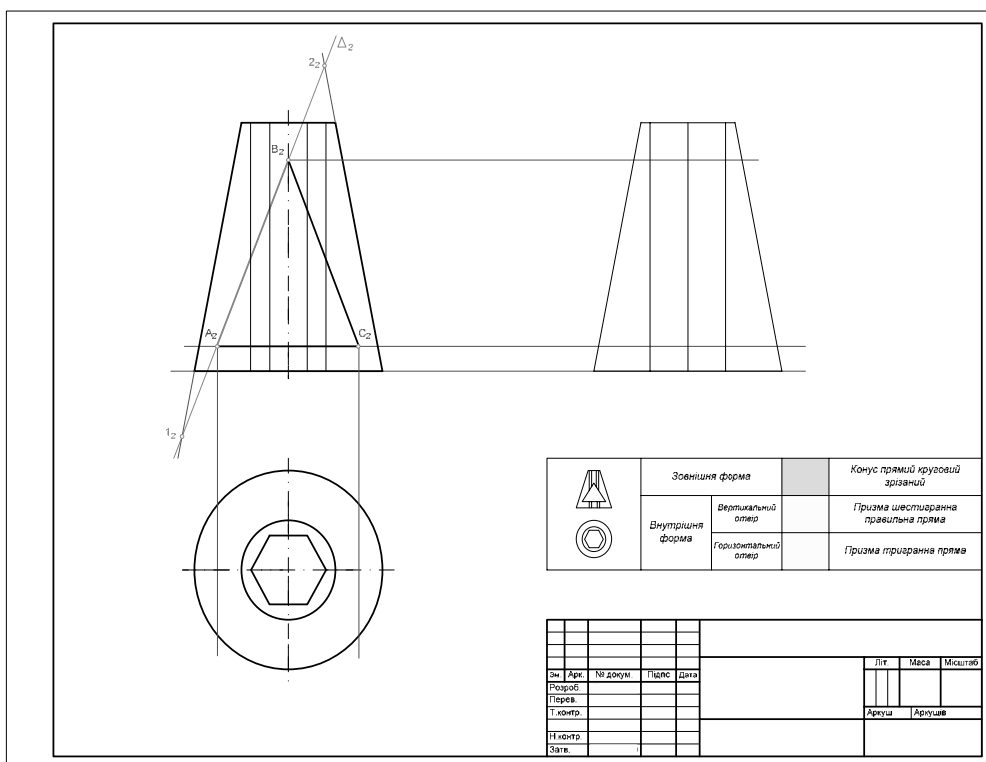


Рис. 14-21

в) побудова проєкцій двох фігур повного перерізу поверхонь (рис. 14-22) враховуючи, що:

– проєкція першої фігури на полі Π_2 зображена у виді відрізка лінії, співпавшої з слідом-проєкцією допоміжної площини, а на полях Π_1 і Π_3 проє-

кції першої фігури будуються за характерними і проміжними точками, з'єднаних між собою кривою лінією – у випадку коли зовнішня форма утворена криволінійною поверхнею, або з'єднаних між собою ламаною лінією – у випадку, коли зовнішня форма утворена гранню поверхнею, а кількість вершин отриманої ламаної лінії дорівнює кількості ребер гранної поверхні, перерізаних площиною повного перерізу (при цьому враховується, що проекція фігури повного перерізу проектуючої поверхні на ту площину проекцій відносно якої поверхня проектуюча, — співпадає з проекцією самої поверхні);

– проекція другої фігури на полі Π_2 зображена у виді відрізка лінії, яка співпадає з слідом-проекцією допоміжної площини. Проекція цієї фігури на полі Π_1 відтворюється половою, утвореною вертикальними лініями зв'язку з якими співпадають горизонтальні проекції бокових ребер, які визначають виділену грань призми призматичного горизонтального отвору, а проекція цієї фігури на полі Π_3 відтворюється половою, утвореною горизонтальними лініями зв'язку з якими співпадають профільні проекції згаданих бокових ребер.

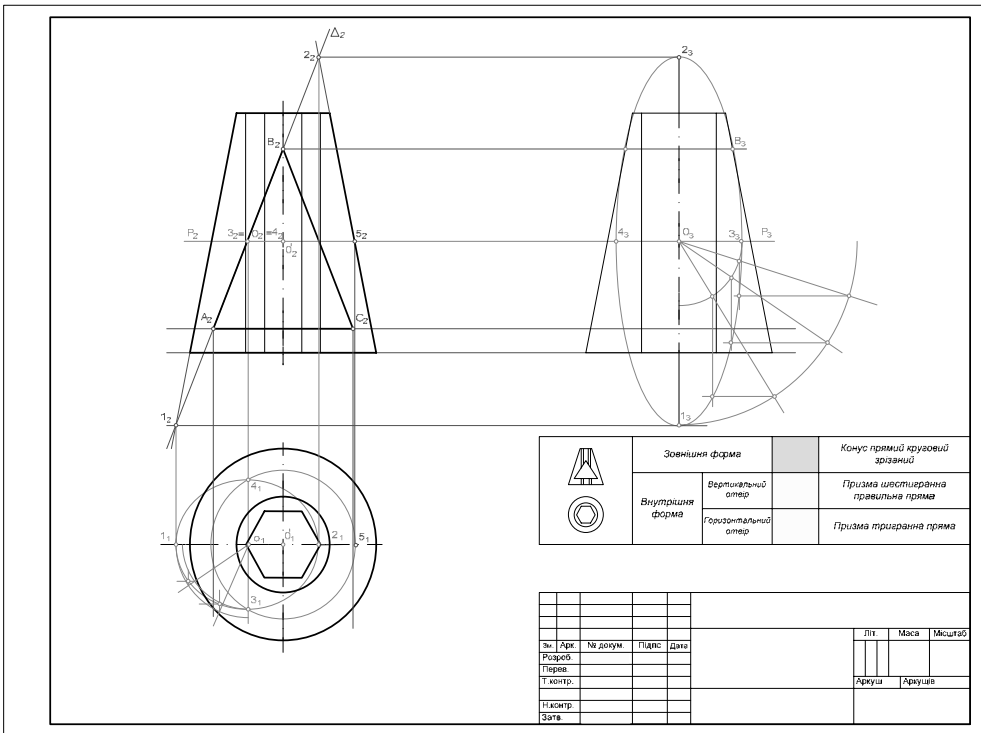


Рис. 14-22

г) виділення дійсної частини однойменних проєкцій повних перерізів (рис. 14-23), при цьому:

– на полі Π_2 – проєкція натуральної частини повних перерізів співпала з слідом-проєкцією допоміжної площини повного перерізу і відтворена проєкцією вибраної грані горизонтального призматичного отвору;

– на полі Π_1 і Π_3 – проєкція натуральної частини визначається взаємним перетином однойменних проєкцій першої та другої фігури повних перерізів поверхонь, перетин яких розглядається.

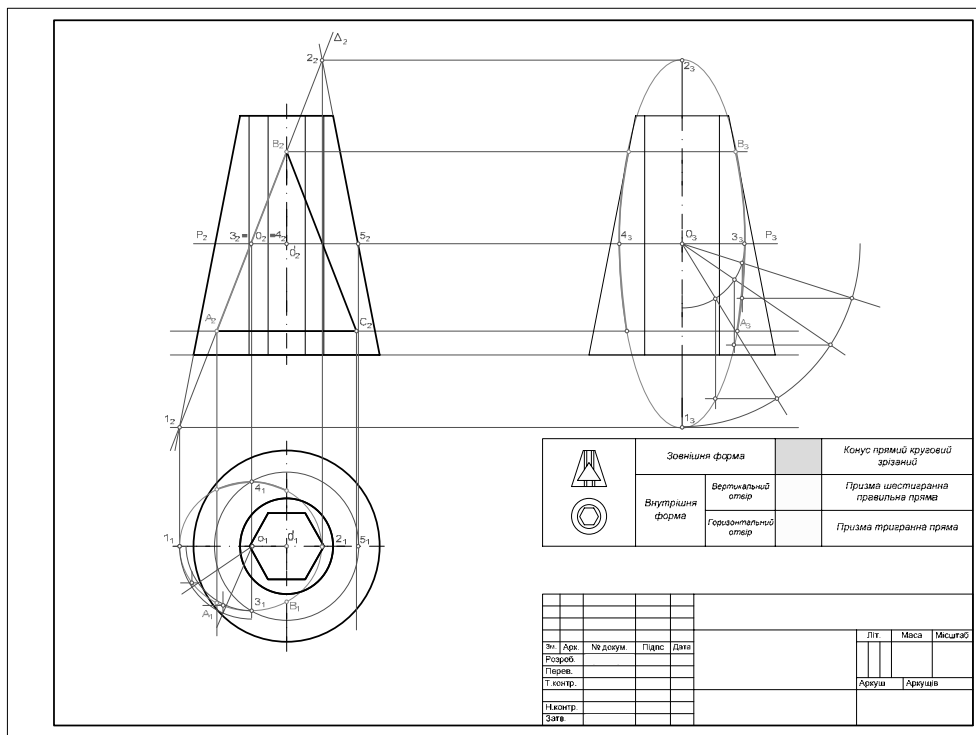


Рис. 14-23

Методом повних перерізів поверхонь послідовно застосовується до кожної грані призми горизонтального отвору (включаючи грані симетрично розташованих відносно виділених граней до яких застосовувався метод повних перерізів), а натуральна частина такої грані симетрична натуральній частині побудованій для симетричної грані).

Сукупність натуральних частин повних перерізів належних всім послідовно виділеним граням призми горизонтального отвору утворюють лінії перетину зовнішньої задачі (рис. 14-24).

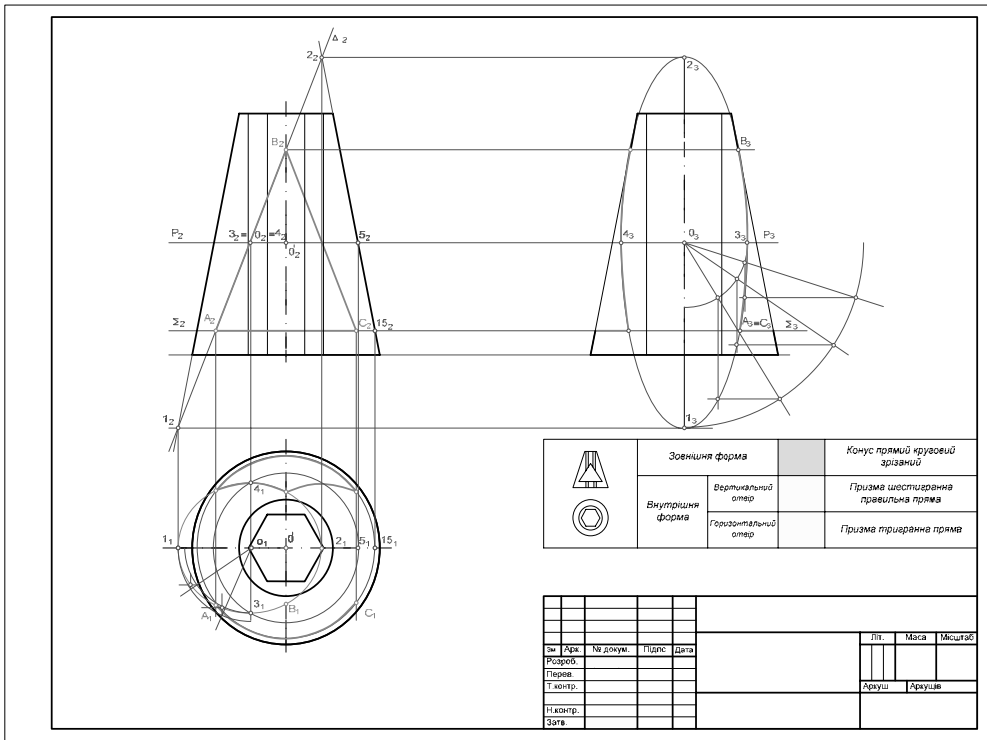


Рис. 14-24

4. Розв'язання внутрішньої задачі, в якій будується лінія перетину (переходу) поверхні горизонтального отвору моделі з поверхнею, яка утворює вертикальний отвір моделі, рис. 14-25 (розглядається випадок в якому дві поверхні перетинаються між собою і мають зовнішнє взаємне розташування).

Побудова виконується методом повних перерізів аналогічно виконанню розв'язку, наведеного в попередньому пункті 3.

5. Виконуються необхідні розрізи та види моделі, рис. 14-26, при цьому:

На полі $П_2$ виконується половина головного виду сполученого з половиною простого вертикального фронтального розрізу моделі.

На полі $П_3$ виконується половина виду зліва, сполученого з половиною простого вертикального профільного розрізу моделі.

На полі $П_1$ виконується половина виду зверху, сполученого з половиною простого горизонтального розрізу моделі, виконаного площиною A , проведеною по найширшій частині горизонтального призматичного отвору.

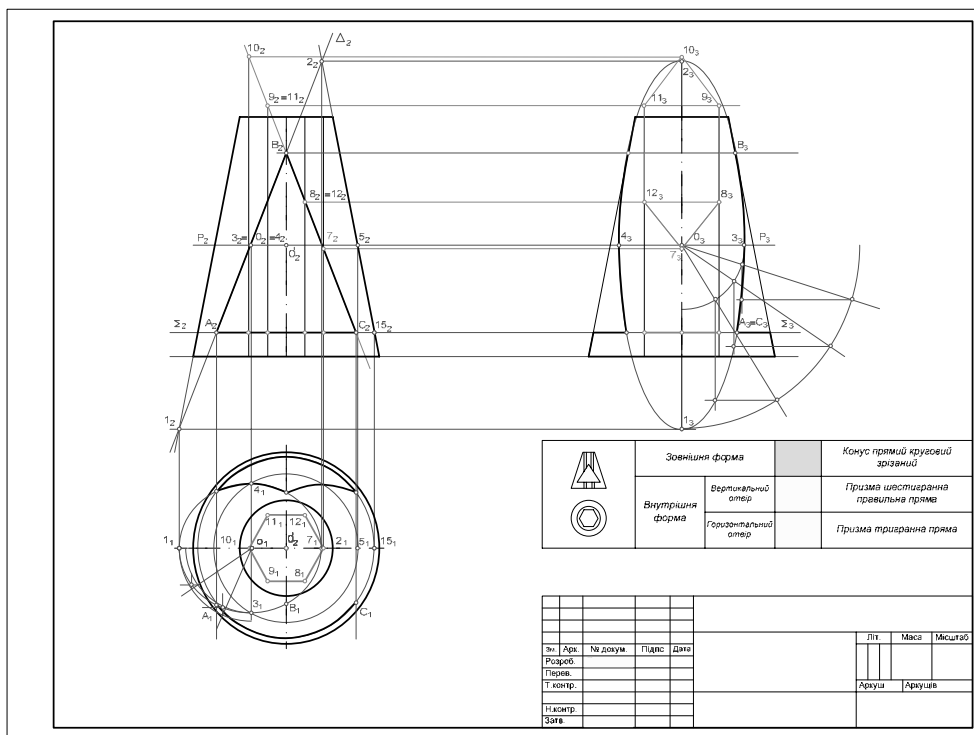


Рис. 14-25

При зображенні половини виду на якому лінія видимого контуру моделі зливається з віссю – наводиться більша частина виду сполучена з меншою частиною відповідного розрізу і розділені ці частини зображено хвилястою лінією, а при зображенні половини розрізу на якому лінія видимого контуру моделі зливається з віссю – наводиться більша частина відповідного розрізу, сполученого з меншою частиною виду, того ж дотримуються і на полі P_2 .

6. Окреслення зображення моделі, простановка її розмірів, та кольорове відтіннення проєкцій трьох поверхонь, які утворюють модель, для цього рекомендовано:

- чорними лініями виконати – зображення моделі (її види та розрізи), постановка розмірів, рамка формату, головний напис, довідкова таблиця, та заповнення головного напису і довідкової таблиці;
- блідо-рожевим кольором зафарбувати проєкції поверхні, яка утворила зовнішню форму;

- *жовтим* кольором зафарбовуються проєкції поверхні, яка утворила вертикальний отвір;
- *світло-зеленим* зафарбувати проєкції поверхні, яка утворила горизонтальний отвір;
- *синього кольору виконати* – всі лінії побудови розв’язку та позначення проєкцій, їх характерних точок і площин.

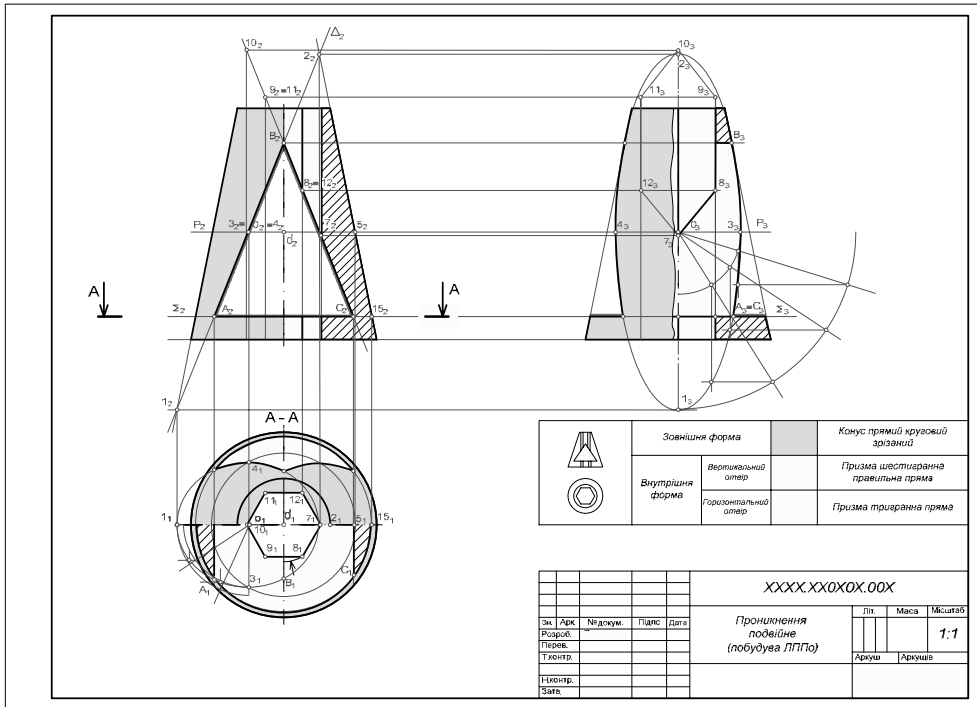


Рис. 14-26

Приклад виконання розв’язку та оформлення еюра №3 – Проникнення подвійне (побудова лінії перетину поверхонь), наведено на рис. 14-27.

14.5. Задачі для розв'язку

14.5.1. Задачі для позааудиторного розв'язку

Задача 14-1. Дано: вид спереду та недобудований вид зверху моделей різних геометричних тіл з горизонтальним призматичним наскрізним отвором (рис.14- 28^{а, б, в, г, д}).

Необхідно для кожної моделі:

- добудувати вид зверху та побудувати вид зліва;
- виконати половину горизонтального та половину профільного розрізу, сполучивши їх з відповідними половинами видів.

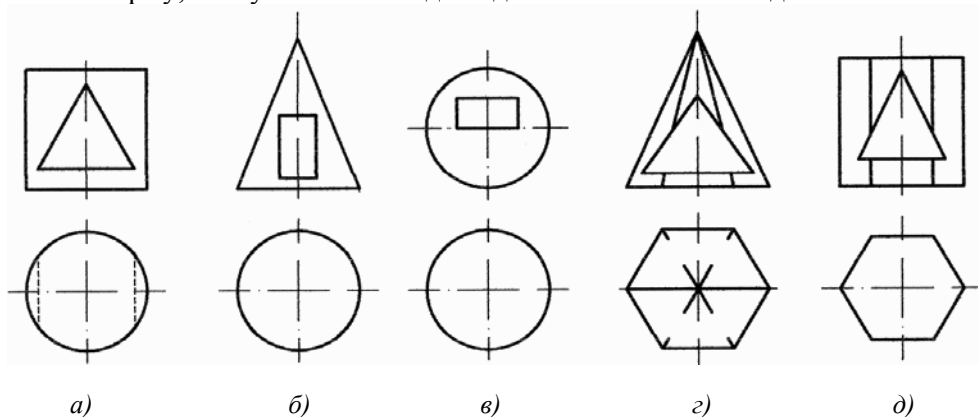


Рис. 14-28

14.5.2. Задачі для аудиторного розв'язку

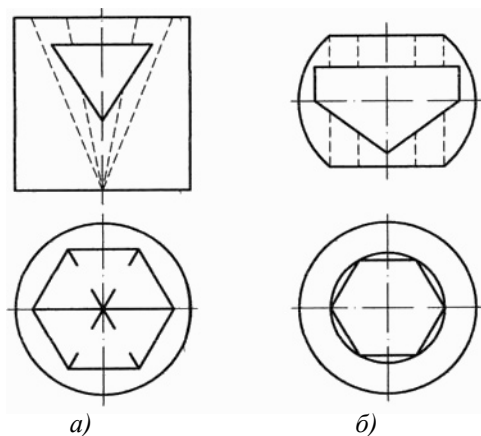


Рис. 14-29

Задача 14-2. Дано: вид спереду та недобудований вид зверху моделей геометричних тіл, в яких є горизонтальний та вертикальний наскрізні отвори (рис. 14-29^{а, б}).

Необхідно для кожної моделі:

- добудувати вид зверху та побудувати вид зліва;
- виконати половини горизонтального, фронтального та профільного розрізів, сполучивши їх з відповідними половинами видів.

Запитання для самоконтролю

1. Які зображення використовують на кресленнях деталі? В чому полягає їх призначення?
2. Які існують види, їх призначення та розташування?
3. Яке призначення розрізів та перерізів, їх види та різниця між ними?
4. Особливості виконання розрізів.
5. Яким методом будують лінію переходу поверхні зовнішньої форми з поверхнею внутрішньої форми?
6. Алгоритм розв'язку одинарного проникнення.
7. Алгоритм розв'язку подвійного проникнення.

Тема 15 Аксонометричні проєкції

Аксонометрична проєкція призначена для наочного зображення виробу (деталі, або інше) з відтворенням його зовнішньої та внутрішньої форми.

Для побудови аксонометрії, наприклад, деталі, необхідно провести особисті координатні осі x , y , z деталі, направлення яких зливається з напрямком трьох взаємо перпендикулярних вимірів деталі (довжини, товщини, висоти). Проведені осі переважно поєднуються з осями симетрії деталі (якщо вони є, або паралельно проводяться до сторін геометричної будови деталі).

Надалі вибираємо:

- P – аксонометрична площина;
- s – напрямок паралельного проєктування.

Деталь розташовують між взірцем та аксонометричною площиною. Паралельним методом проєктування у вибраному напрямку s виконується проєктування деталі на аксонометричну площину P , на якій і отримуємо аксонометричну проєкцію деталі.

Вид зображення деталі на аксонометричній проєкції залежить від розташування координатних осей деталі та напрямку проєктування відносно аксонометричної площини.

15.1. Основні визначники аксонометричної проєкції

Розглянемо побудову аксонометричної проєкції виробу на прикладі. Враховуючи те, що, наприклад, деталь утворена сукупністю точок, то розглянемо в просторі прямокутних координат точку A , яка, припустимо, визначається однаковими координатами a по трьох осях. Величину a , яку називають натуральний масштаб, відкладемо по трьох аксонометричних осях від початку координат. Відносно особистих координатних осей x , y , z виберемо довільно розташовану площину P та напрямок s паралельного проєктування. В утвореній моделі (рис. 15-1) осі координат x , y , z та точку A з її координатами $a_x = a_y = a_z = a$ проєктуємо на площину.

Аксонометрична площина P , перетинаючи координатні площини, утворює трикутник $x y z$, що називається трикутником слідів (на рис. 15-1 Δ , x , y , z не показаний). За допомогою трикутника слідів легко визначити кути між аксонометричними осями.

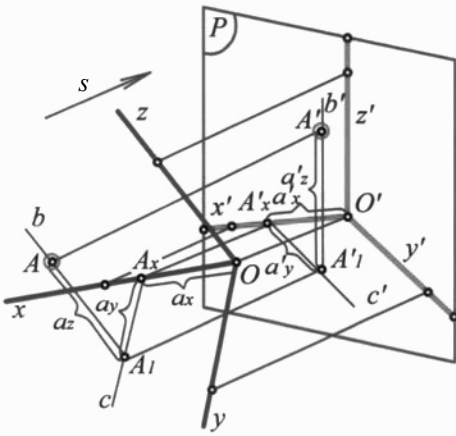


Рис. 15-1

Отримані проекції позначимо:
 – x', y', z' , – аксинометричні осі;
 – a'_x, a'_y, a'_z – аксинометричний масштаб;

$$\frac{a'_x}{a} = x, \frac{a'_y}{a} = y, \frac{a'_z}{a} = z \text{ – коефіцієнти}$$

спотворення по аксинометричним осям.

Звідси теорема аксинометрії: „Три відрізка прямих довільної довжини, розташованих в одній площині і виходячих з однієї точки під довільними кутами один до одного, є паралельна проекція трьох однакових відрізків, відкладених на прямокутних координатних осях від їх початку” (теорема німецького вченого Карла Польке), а рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ – основна формула аксинометрії.

Наочне зображення деталі за змістом її аксинометрії залежить від напрямку проектування та розташування її координатних осей відносно аксинометричної площини.

15.2. Види, осі та показники спотворення аксинометричних проекцій

На практиці ГОСТ 2.317-69 рекомендує застосовувати види аксинометричних проекцій, які наведені нижче в структурній схемі (рис. 15-2).

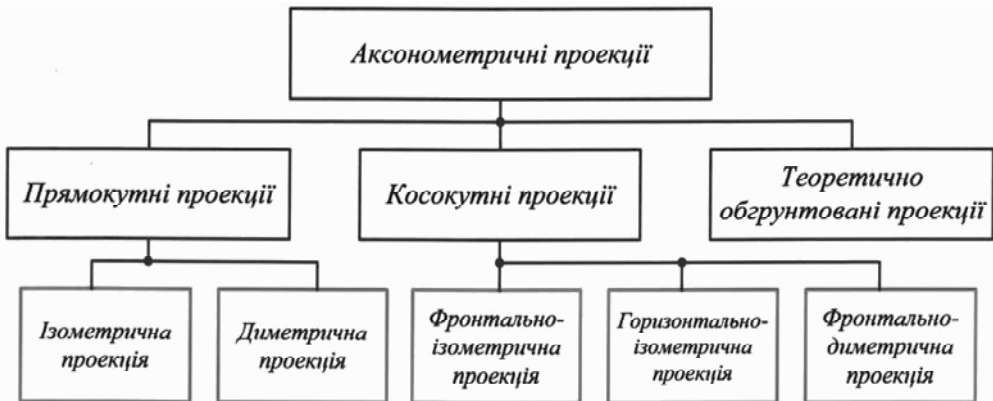


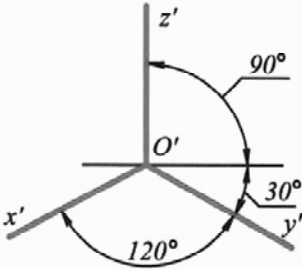
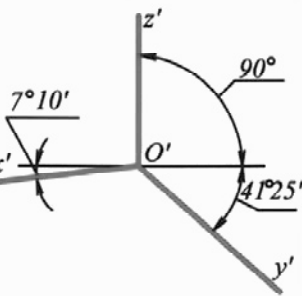
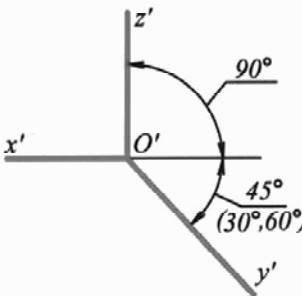
Рис. 15-2

В цих випадках аксонометричних проєкцій застосовані лише деякі комбінації їх визначників.

Залежно від співвідношення показників спотворення по аксонометричним осям, всі аксонометрії поділяють на три групи :

- *ізометричні* – показники по всіх осях однакові;
- *диметричні* – показники по двох осях однакові;
- *триметричні* – показники по трьох осях різні.

Положення осей поширених видів аксонометричних проєкцій наведені в таблиці з рис. 15-3, 15-4, 15-5.

<i>ізометрична проєкція</i>	<i>диметрична проєкція</i>	<i>фронтально-ізометрична проєкція</i>
 <p style="text-align: center;">Рис. 15-3</p>	 <p style="text-align: center;">Рис. 15-4</p>	 <p style="text-align: center;">Рис. 15-5</p>

В прямокутній ізометричній та диметричній проєкціях (рис. 15-3, рис. 15-4) аксонометрична площина перетинає всі три осі координат, а в косокутній фронтально-ізометричній проєкції – паралельна координатній площині $x'O'z'$.

В прямокутній ізометрії коефіцієнти спотворення по всіх осях x' , y' , z' – однакові, так як координатні осі розташовані до аксонометричної площини під однаковими кутами, то з основної формули аксонометрії отримаємо, що ізометричний масштаб по аксонометричних осях x' , y' та z' – однаковий і дорівнює 0,82 дійсного.

В прямокутній диметрії $x' = z' \neq y'$ (вибираємо приблизно $x' = z' = 2y'$) при цьому, диметричний масштаб по осях x' і $z' = 0,94$, а по осі $y' = 0,47$ натурального розміру.

В фронтально-ізометричній проєкції дозволяється застосовувати проєкції з кутом нахилу осі y' під кутом 30° або 60° . Фронтально-ізометричну проєкцію виконують без спотворення по осях x' , y' , z' (їх коефіцієнт дорівнює одиниці).

Але, беручи до уваги те, що аксонометричні проєкції призначені для наочного зображення виробу, то з метою спрощення процесу побудови аксонометрії в прямокутній ізометрії умовно приймаємо коефіцієнти спотворення по

всіх осях замість 0,82 приймаємо одиницю. В такому випадку ізометричне зображення вибору отримаємо збільшеним в $1/0,82 = 1,22$ рази порівняно з його натуральною величиною.

Диметричну проекцію, як правило, виконують без спотворення по осях x' , y' , та з коефіцієнтом спотворення 0,5 по осі y' .

15.3. Аксонометрія точки

Аксонометрія точки виконується за її трьома координатами, які визначаємо на епюрі точки (рис. 15-6). Будуємо осі координат заданої аксонометричної

проекції (для наочного порівняння зображення будемо осі ізометрії, диметрії та фронтальної ізометрії рис. 15-7, рис. 15-8, рис. 15-9). Координату широти точки A , яка дорівнює x^A , відкладаємо її на осі x від початку координат, отримуємо точку A'_x (на всіх рисунках). З точки A'_x проводимо допоміжну пряму a паралельно осі y і від точки A'_x відкладаємо координату глибини точки A , яка дорівнює y^A на ізометрії та фронтальній ізометрії, а на диметрії відкладаємо $0,5 \cdot y^A$ (враховуючи те, що коефіцієнт спотворення по осі $y = 0,5$) і отримуємо точку A'_1 (горизонтальну проекцію точки A). З отриманої точки A'_1 проводимо допоміжну пряму b паралельно осі z і на ній від A'_1 відкладаємо координату висоти точки, яка дорівнює z^A . Отримана точка A' і є аксонометричним зображенням заданої точки A на її епюрі.

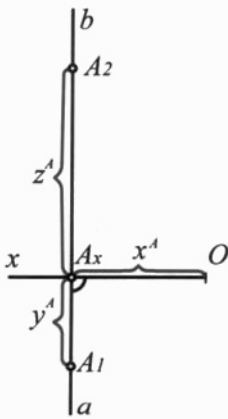


Рис. 15-6

ізометрія	диметрія	фронтальна ізометрія
<p style="text-align: center;">Рис. 15-7</p>	<p style="text-align: center;">Рис. 15-8</p>	<p style="text-align: center;">Рис. 15-9</p>

15.4. Аксонометрія багатокутника

Аксонометрична проєкція плоскої чи просторової фігури будується за координатами її вершин, або характерних точок її криволінійного обрису.

Побудуємо для прикладу аксонометричні проєкції моделі, складеної з плоских багатокутників, зображених на комплексному кресленнику рис. 15-10, та наочно порівняємо їх аксонометричні зображення.

Будуємо аксонометричні осі (рис. 15-11, рис. 15-12, рис. 15-13). Взевши з епіюру моделі координати x заданих вершин, відкладаємо їх від точки O на осі x' , з отриманих точок проводимо допоміжні прямі a, a', a'' паралельно осі y' і на них відкладаємо координати y у заданих вершин, враховуючи те, що в диметрії координата y зменшується на половину. Так отримані точки $A', B', C', D' \equiv E_1, F_1, D' \equiv M_1$. З точок E_1, F_1, M_1 проводимо допоміжні прямі b, b', b'' паралельно осі z' і на них відкладаємо координати z точок E, F, M (взявши з епіюру), отримуємо аксонометричні проєкції точок E', F', M' . З'єднавши точки $A' \cdot B' \cdot C' \cdot D' \rightarrow \rightarrow A'B'C'D'!$; з'єднавши $C' \cdot E' \cdot F' \cdot M' \cdot D' \rightarrow \rightarrow CE'F'MD'!$ Отримано аксонометрії двох плоских багатокутників $ABCD$ і $CEFMD$ зі спільною стороною CD і відповідно розташованих в площині Π_1 та паралельній площині Π_2 .

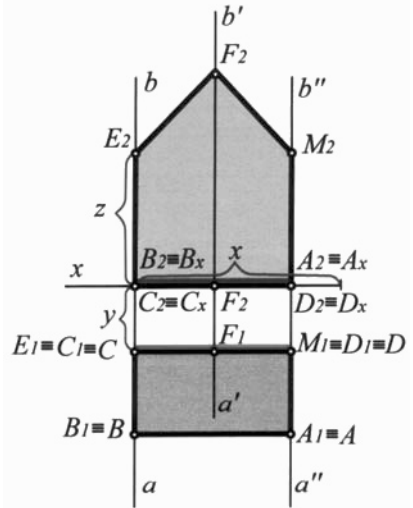


Рис. 15-10

ізометрія	диметрія	фронтальна ізометрія
<p data-bbox="226 1518 341 1547">Рис. 15-11</p>	<p data-bbox="555 1518 670 1547">Рис. 15-12</p>	<p data-bbox="876 1518 992 1547">Рис. 15-13</p>

15.5. Аксонометричні проєкції кола

Розглянемо модель, утворену поверхнею куба, розташованого своїми бічними ребрами паралельно аксонометричним осям, його бічні грані паралельні трьом аксонометричним граням. В три грані квадрати вписані кола, надалі розглянемо проєкції цих кіл на аксонометричну площину. Грані куба відносно аксонометричної площини (крім фронтально-ізометричної проєкції) є площинами загального положення, а коло грані в такому випадку на аксонометричну площину проєктується у виді еліпса, але з метою спрощення побудови аксонометрії проєкція-еліпс замінюється овалом, якою є замкнена симетрична крива, утворена спряженням між собою двох пар дуг кіл попарно однакового радіуса. Розглянемо побудову овалів-проєкцій кола, розташованого в різних площинах на ізометричній, диметричній та фронтально-ізометричній проєкції.

15.5.1. Ізометрія кола

Враховуючи те, що аксонометричні проєкції довільної фігури будуються переважно по її комплексному кресленнику, то і для побудови ізометрії кола вихідним є його комплексний кресленник, наприклад, коло розташоване в горизонтальній площині (рис. 15-14).

На горизонтальній проєкції заданого кола, діаметр, якого дорівнює d , проведено два спряжені діаметри, які в перетині з колом утворюють точки P_1 і L_1 , з'єднавши які отримуємо хорду P_1L_1 .

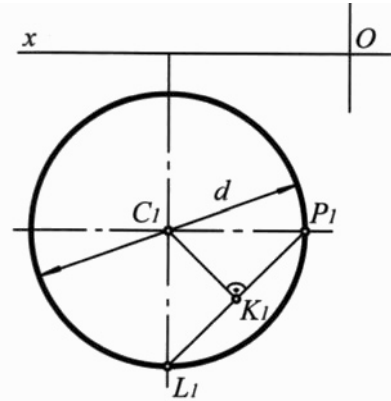


Рис. 15-14

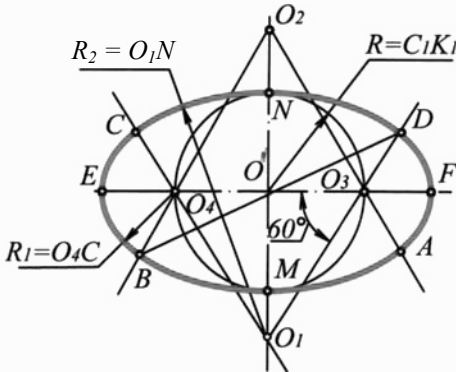


Рис. 15-15

З центра C_1 проведемо перпендикуляр до $P_1 L_1$ і отримаємо вихідний радіус $R = C_1 K_1$ для побудови ізометрії кола. З точки O' (рис. 15-15), в якій перетинаються ізометричні осі, радіусом $R = C_1 K_1$ будується коло. Через точку O' проводять вертикальну і горизонтальну допоміжні лінії. В перетині горизонтальної лінії з побудованим колом, отримаємо точки O_3 і O_4 . З точки O_3 під кутом

60° до горизонтальної лінії проводимо допоміжну пряму і продовжуємо її до перетину з вертикальною лінією в точці O_1 . Точку O_1 з'єднуємо з точкою O_4 , радіусом $R_2 = O_1N$, проводимо дугу до перетину з продовженням відрізків O_1O_3 та O_1O_4 , отримані точки D і C є точками спряження. Від O' вгору відкладаємо відрізок $O'O_1$ і отримуємо точку O_2 , яку з'єднуємо з точками O_3 і O_4 . З точки O_2 , як із центра, проводимо дугу, радіус якої $R_2 = O_1N = O_2M$, до перетину з продовженням O_2O_3 та O_2O_4 в перетині з якими отримуємо точки A і B , які є точками спряження. З точки O_4 , як із центра, проводимо дугу, радіус якої $R_1 = O_4C$, від точки C до B і ця дуга спрягає попередні дві дуги радіуса R_2 .

З точки O_3 проводимо дугу, радіус якої $R_1 = O_4C = O_3A$, і отримуємо спряження попередніх дуг в точках A і D четвертою дугою. Отримане зображення утворене протилежно розташованими двома парами однакових дуг, – овал. Особливість такого зображення полягає в тому, що відрізок BD зливається з ізометричною віссю x і дорівнює α , а відрізок $AC = \alpha$ та зливається з віссю y . Мала вісь (MB) овала $MN = 0,71d$, а велика вісь (BB) $EF = 1,22d$, та розташована завжди перпендикулярно малій осі ($BB \perp MB$). Побудований овал є спрощеним зображенням проекції кола в ізометричній проекції без спотворення розмірів по осях x', y', z' .

Відтворення кола, розташованого в координатній площині $x'o'z', z'o'y'$ або $x'o'y'$ показано на рис. 15-16, де наведено куб, грані якого суміщені з координатними площинами, та в квадрати граней вписані кола, відтворення яких у виді еліпсів-овалів. При цьому, якщо коло розташоване в паралельній площині до $x'o'y'$ – то велика вісь EF овала завжди розташована горизонтально, а мала вісь MN – вертикально. Якщо коло розташоване в площині, паралельній площині $z'o'y'$ – то велика вісь овала розташована перпендикулярно осі x' , а мала $\parallel x'$, якщо коло в площині, паралельній площині $x'o'z'$ – то велика вісь \perp осі y' , а мала вісь овала $\parallel y'$. Між собою великі осі еліпсів – овалів розташовані під кутом 60° .

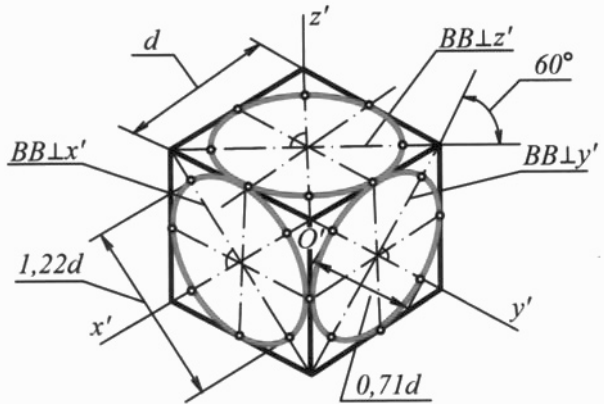


Рис. 15-16

15.5.2. Диметрія кола

Для побудови диметричної проекції кола, розташованого в площині, паралельній площині $z'o'y'$, побудова овала – диметрії кола наведена на 412

рис. 15-17. Будуються аксонометричні осі і з точкою O' , в якій перетинаються осі, суміщають центр заданого кола, діаметр якого дорівнює d . Вісь x' перетинає задане коло в точках A і B , які приймаються за точки спряження. Через точку O' проводять вертикальний та горизонтальний діаметри заданого кола. З точки P відкладається розмір $R = \frac{d}{2}$

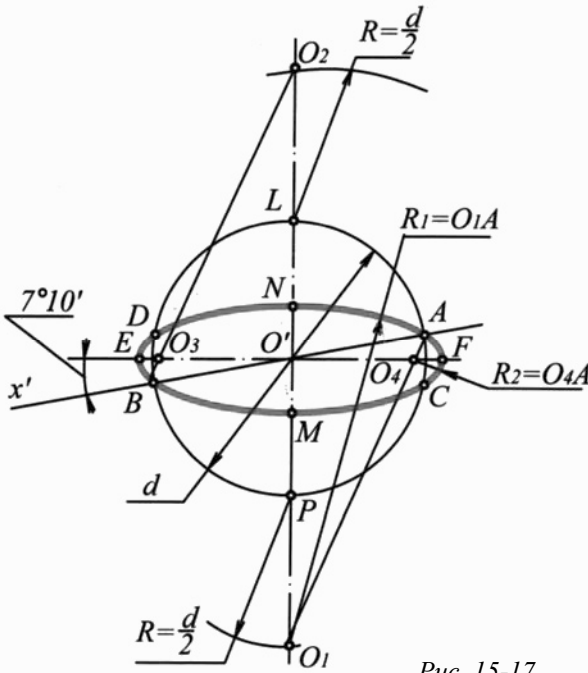


Рис. 15-17

вниз на продовжені вертикального діаметра, – отримана точка O_1 . Розмір $O'O_1$ відкладається вгору від точки O' , – отримується точка O_2 . З'єднавши побудовані точки O_1 та A , отримаємо відрізок O_1A , перетин якого з горизонтальним діаметром дає точку O_4 , а аналогічно відрізок O_2B в перетині з горизонтальним діаметром утворює точку O_3 .

З точки O_1 , як із центра, радіусом $R_1 = O_1A$ проводиться дуга від точки A до D , а з O_2 тим же радіусом $R_1 = O_1A = O_2B$ проводять другу дугу. З точки O_4 радіусом $R_2 = O_4A$ проводимо дугу від точки A до C , яка спрягає дві попередні дуги. З точки O_3 радіусом $R_2 = O_4A = O_3B$ проводимо дугу від точки B до D і ця дуга спрягає дві перші дуги з протилежного боку. Отримана побудова двох симетрично розташованих дуг, спряжених двома іншими симетричними дугами, – утворюють овал, який приймається за спрощене зображення диметрії заданого кола. При цьому розмір $AB = d$, а EF – велика вісь овала і $EF = 1,06d$, MN – мала вісь овала, яка завжди перпендикулярна великій осі, та за розміром $MN = 0,35d$.

Якщо задане коло розташоване в площині, паралельній координатній площині $x'o'z'$ (рис. 15-18), то через його центр проводять осі x' (під кутом до горизонталі, що дорівнює $7^\circ 10'$) та вісь y' (під кутом до тієї ж горизонталі, який дорівнює $41^\circ 25'$). З центра O' проводимо задане коло, діаметр якого d . Вісь x' , перетинаючись з заданим колом, утворює точки A і B , з яких проводимо допоміжні горизонтальні лінії, a і a' , а вони при перетині з віссю y' утворюють точки O_1 і O_2 . При перетині відрізка CO_2 з прямою a утворюється точка O_3 , а при пе-

ретині O_1D з a' точка O_4 . З точки O_2 , як із центра радіусом $R_1 = O_2B$, проводимо першу дугу від точки B до C . З O_1 радіусом $R_1 = O_2B = O_1A$ проводимо дугу від точки A до D . З точки O_3 радіусом $R_2 = O_3C$ проводимо дугу від точки C до A , яка спрягає дві попередні дуги BC та AD . З точки O_4 радіусом $R_2 = O_3C = O_4D$ проводимо спрягаючу дугу, яка спрягає дві перші дуги BC та AD . Побудований овал приймається за спрощене близьке зображення еліпса в який проектується задане коло. EF – велика вісь овала розташована перпендикулярно до осі y' і $EF = 1,06d$, а MN – мала вісь, паралельна осі y' і $MN = 0,95d$.

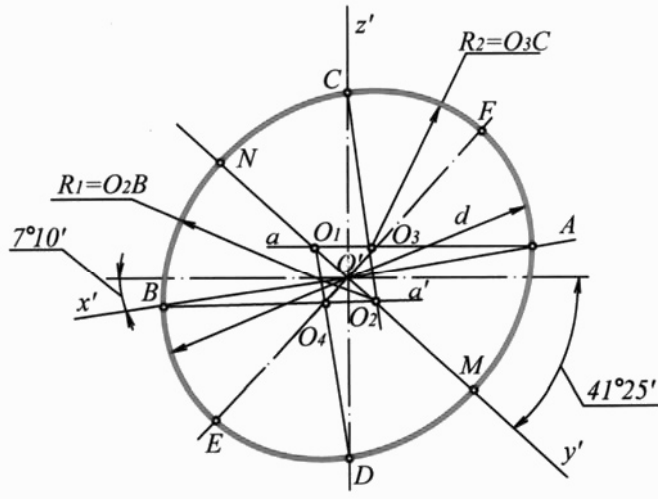


Рис. 15-18

Якщо задане коло розташоване в площині, паралельній площині $z'o'y'$, то овал, прийнятий за проекцію заданого кола, аналогічний овалу в горизонтальній площині, тільки його мала вісь MN паралельна осі x' , а велика EF їй перпендикулярна.

На рис. 15-19 наведе спрощене зображення диметричних проєкцій кіл, розташованих на трьох гранях куба. Велика вісь кожного овала перпендикулярна відповідній аксонометричній осі, а мала – їй паралельна, що й показано на цьому рисунку.

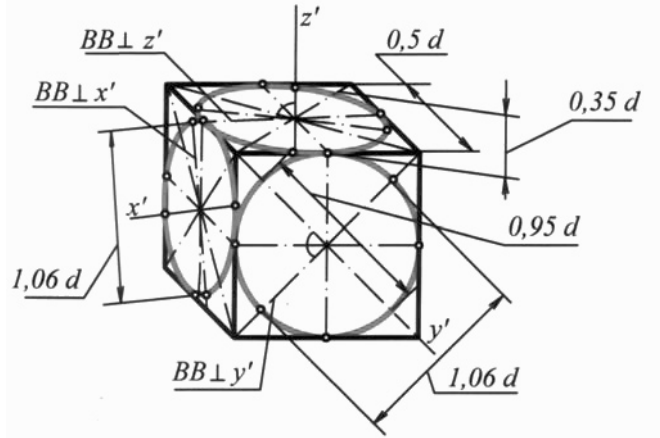


Рис. 15-19

15.5.3. Фронтальна ізометрія кола

Фронтальну ізометричну проекцію виконують без спотворення по осях x' , y' та z' .

Якщо коло належить площині, паралельній фронтальній площині проєкцій, то воно проєктується на аксонетричну площину $x'o'z'$ у виді кола, яке дорівнює заданому.

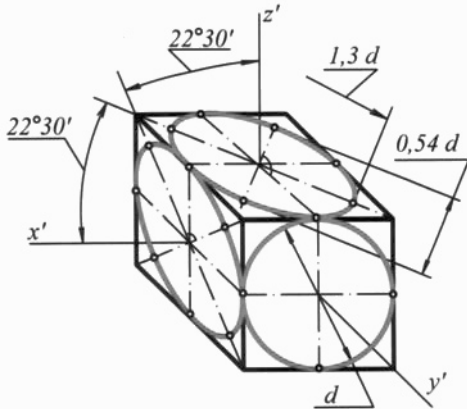


Рис. 15-20

Якщо коло належить площинам, паралельним горизонтальній та профільній площинам проєкцій, то воно на аксонетричну площину $x'o'y'$ та $z'o'y'$ проєктується у виді еліпсу – овалу велика вісь якого дорівнює $1,3d$, а мала вісь дорівнює $0,54d$ заданого кола. Кут нахилу великої осі горизонтального овалу відносно осі x' та великої осі профільного овалу відносно осі z' дорівнює $22^\circ30'$, а малі їх осі перпендикулярні великим осям, що й показано на рис. 15-20.

15.6. Штриховка в розрізах, умовності та нанесення розмірів на аксонетричних проєкціях

Для відтворення внутрішньої форми деталі в аксонетрії виконують розрізи переважно площинами, які паралельні площинам проєкцій (двом чи більше), які утворюють вирізи в деталях, умовно прибираючи вирізані частини, „відкривається” внутрішня форма деталі. Січні площини, якими виконують вирізи, утворюють перерізи деталі, які заштриховують. Лінії штриховки є лініями, що з'єднують кінці відрізків одиниць виміру, відкладених по аксонетричних осях з врахуванням їх показника спотворення. На рис. 15-21 показано розташування ліній, штриховки якими заштриховують перерізи у відповідних площинах проєкцій.

Розрізи на аксонетричних проєкціях можна побудувати двома способами:

– 1^й спосіб: Спочатку будують аксонетричну проєкцію всієї деталі з повним відтворенням всіх її формуютьвірчих поверхонь (начебто деталь прозора), а потім виконують розріз і „прибирають” частину зображення деталі, яка розташована між взірцем та січними площинами (рис. 15-22).

– 2^й спосіб: По заданому комплексному кресленню деталі спочатку будують аксонетричні проєкції фігур перерізів, а потім добудовують частину зображення деталі, яка розташована за січними площинами (рис. 15-23).

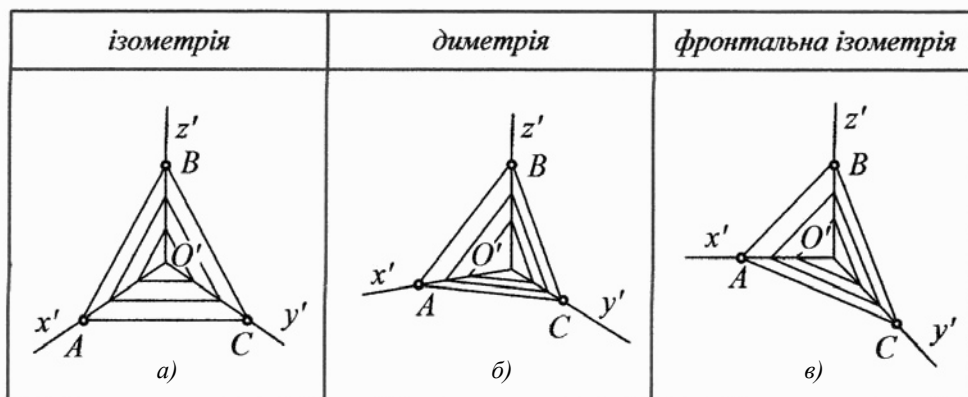


Рис. 15-21

В аксонометричних проекціях спиці маховиків, ребра жорсткості деталей, осі, вали, тонкі стінки, які знаходяться в січній площині, як впоперек, так і вздовж – штрихують.

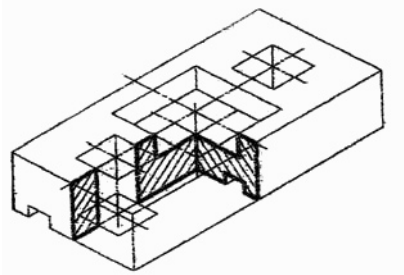


Рис. 15-22

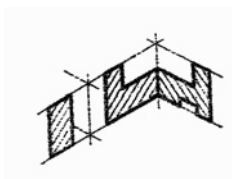


Рис. 15-23

При нанесенні розмірів на аксонометричних проекціях, виносні лінії проводять паралельно аксонометричним осям, а розмірні лінії – паралельні відрізку, розмір якого проставляють.

При виконанні в аксонометричних проекціях зубчастих коліс, рейок, черв'яків та інше, (допускається показувати) умовно згідно з ГОСТ 2.402-88, а різьбу показують умовно згідно з ГОСТ 2.311-88 повністю, або частково.

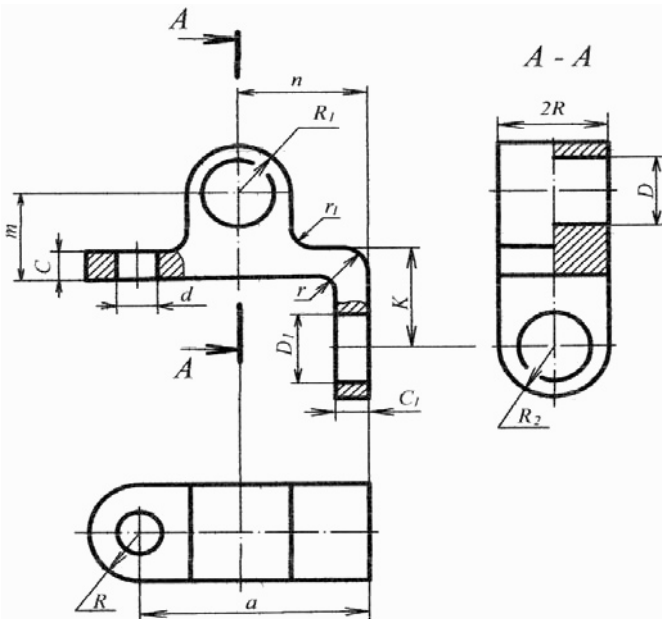
15.7. Послідовність виконання аксонометричної проекції деталі (моделі)

Побудова аксонометричної проекції деталі (моделі) виконується переважно по її комплексному кресленнику (ескізу чи робочому кресленнику). По зображеннях деталі з'ясовуються її вся форма, визначається, якими поверхнями

утворені її основні та другорядні форми. Вибирається вид аксинометричної проєкції, на якій більш наочно буде висвітлена форма деталі найпростішою побудовою. Якщо деталь має симетричну форму, наприклад, деталь точена, то зображення деталі розташовується так, щоб її вісь збігалася з аксинометричною віссю, а якщо деталь має площину симетрії, то деталь на зображенні розташовується так, щоб вона своєю площиною симетрії збігалася з однією з площин аксинометрії, якщо деталь має дві площини симетрії, то зображення деталі будується так, що її площини симетрії збігаються з площинами аксинометрії або їм паралельно. При побудові аксинометрії з різними коефіцієнтами спотворення по осях, деталь необхідно розташовувати так, щоб її довга сторона не була паралельна осі u (з найбільшим спотворенням), щоб запобігти сильного спотворення її форми. Якщо форма деталі висвітлена характерною її площиною, то ця площина розташовується в координатній аксинометричній площині або їй паралельно.

По осях вибраної аксинометричної проєкції тонкими лініями будуються поверхні, які утворюють основні форми деталі та другорядні. Для їх побудови відтворюють аксинометричне зображення визначників кожної поверхні та їх обрисів.

15.7.1. Ізометрія деталі



Розглянемо приклад виконання ізометричної проєкції кронштейна.

Вивчаючи зображення (рис. 15-24) комплексного креслика кронштейна, відзначимо, що основна його форма нижньої частини утворена двома призмами: горизонтальною та вертикальною, перпендикулярними між собою, з циліндричними отворами в кожній, а форма верхньої частини утворена призмою, яка лежить на горизонтальній призмі, з полови-

ною циліндра зверху неї, та циліндром наскрізного отвору.

Другорядні форми мають циліндричні поверхні, які сполучають призми основної форми, та закруглюючі її призми нижньої частини.

Умовно сумістивши грані деталі з координатними площинами ізометрії, спочатку виконується побудова нижньої частини деталі (рис. 15-25^а). До нижньої частини добудовується верхня частина. Спряження сторін прямого кута виконують побудовою ізометричних проєкцій дуг кіл радіусів r у виді частин овалів. Центри овалів всіх отворів визначаються по розмірам-координатах наведених на комплексному кресленні деталі. На отриманому зображенні видимі контури деталей наводяться товстими лініями (рис. 15-25^б). В навчальних цілях повна побудова всіх поверхонь, виконана тонкими лініями, може бути залишена, або всі лінії побудови, крім осьових та центрових ліній отворів прибираються, а видиме зображення деталі вкривається штриховкою (рис. 15-25^в).

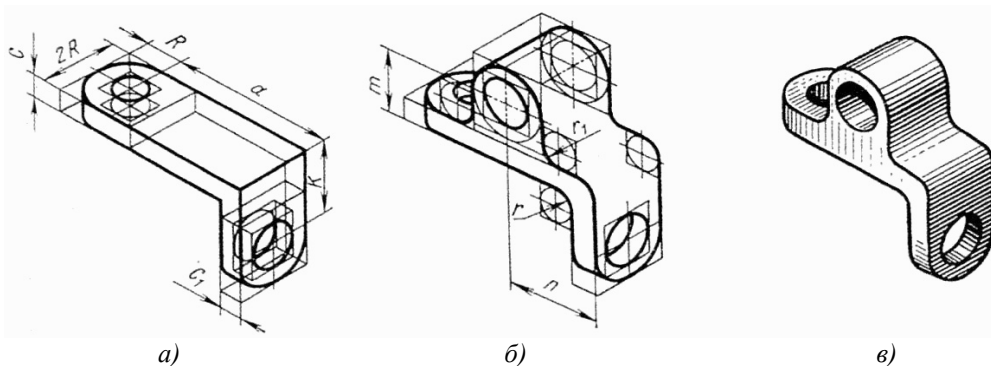


Рис. 15-25

Якщо форма деталі має неповне коло, то для її зображення креслять (тонкою лінією) повний овал, а тоді обводять контурною лінією необхідну частину овалу.

Якщо деталь має порожнину, то її аксонометрію виконують з розрізами – вирізами які утворюються січними площинами, які переважно зливаються з координатними площинами (або їм паралельними).

Частина деталі виділена січними площинами і розташована перед взірцем, – прибирається, при цьому „відкривається” внутрішня форма деталі: видимі перерізи, утворені при виконанні вирізу в деталі, заштриховують, як показано на рис. 15-21, 22, 23.

Для більшої наочності деталі, її аксонометричне зображення покривається штриховкою або штрифировкою, за допомогою якої висвітлюються тіньові, напів-тіньові та більш освітлені частини поверхні деталі. Штриховка – це підкреслення форми деталі лініями, паралельними до лінії контура її форм, більш освітлені частини покривають тонкими лініями штриховки, більш рідкими між собою, а тіньові

ві частини покривають більш товстими лініями взаємно густіше розташованими. Шрафіровка – це підкреслення форми деталі лініями, взаємно паралельними та перпендикулярними до лінії контуру. Приймається, що деталь освітлена променями, які йдуть зверху, вниз, зліва або справа.

15.7.2. Прямокутна та фронтальна диметрія деталей

На рис. 15-26 наведена прямокутна диметрична проекція стояка, та показана послідовність виконання такого зображення.

Так як і при виконанні ізометрії, форму деталі умовно розділяють на основні і другорядні елементи та з'ясовують, якими поверхнями вони утворені.

В даному прикладі основні форми утворені призмами – паралелепіпедами різної висоти. Ці паралелепіпеди будують відкладаючи довжини їх ребер паралельно диметричним осям. А розташування центрів отворів деталі будують координатним методом та будують овали (рис. 15-26^а).

Внутрішню форму деталі висвітлюємо вирізом передньої частини деталі двома вертикальними аксонетричними площинами. На утвореному вирізі видно, що отвори з вертикальними осями – циліндричні наскрізні. Прибравши лінії побудови та навівши видимі контури деталі, виконують штрихову фігур перерізів, утворених при виконанні вирізу передньої правої частини деталі (рис. 15-26^б), для наочності зображення доповнюється виконанням штриховки або шрафіровки поверхонь (рис. 15-26^в), на якому наведено прямокутну диметрію деталі.

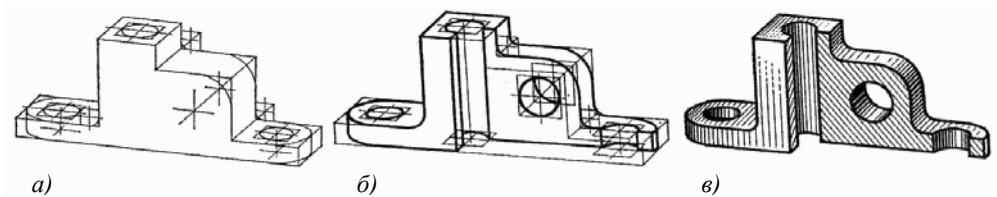


Рис. 15-26

Послідовність побудови фронтальної диметричної проекції деталі (кутника прямого) наведено на рис. 14-27.

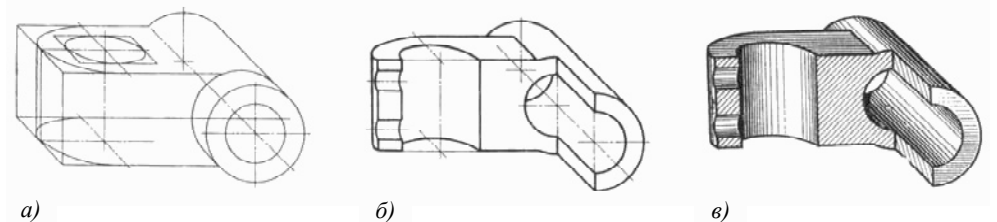


Рис. 15-27

При розташуванні кутника коли основа циліндричної частини його паралельна площині $x'o'z'$, – кола кільця основи на цій площині зображені в натуральну величину, а призматична частина хвостовика направлена вздовж осі x' . А основа циліндричного отвору хвостовика відтворюється у виді овалу, велика вісь якого з аксонометричною віссю x' складає кут, що дорівнює $7^{\circ}14'$.

15.8. Задачі для розв'язку

15.8.1. Задачі для позааудиторного розв'язку

Задача 15-1. По аксонометричному зображенню моделі (рис. 15-28) побудувати необхідні зображення з відтворенням її зовнішньої та внутрішньої форми.

Задача 15-2. По зображенню деталі (рис. 15-29) побудувати її аксонометричне зображення.

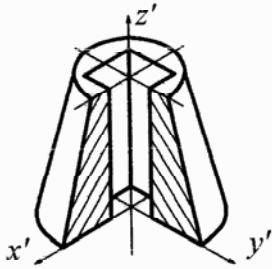


Рис. 15-28

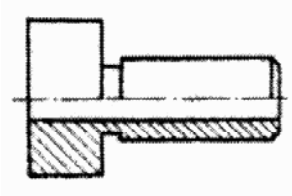


Рис. 15-29

15.8.2. Задачі для аудиторного розв'язку

Задача 15-3. По зображенням деталі (рис. 15-30) побудувати її аксонометричне зображення.

Задача 15-4. По аксонометричному зображенню деталі (рис. 15-31) побудувати необхідні зображення з відтворенням її зовнішньої та внутрішньої форми, проставити розміри деталі (коефіцієнти спотворення на аксонометрії – приведені).

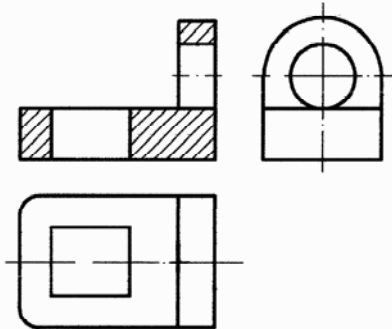


Рис. 15-30

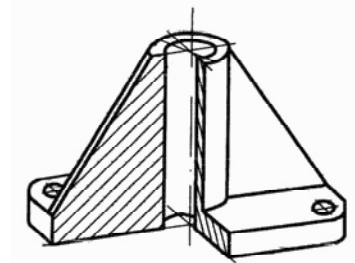


Рис. 15-31

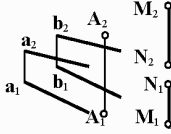
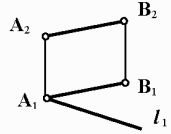
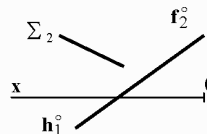
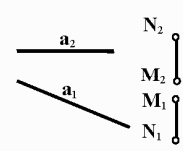
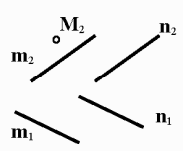
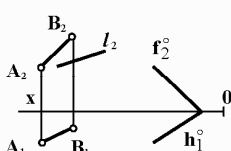
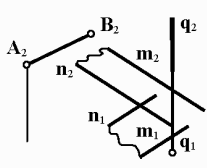
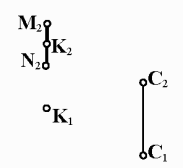
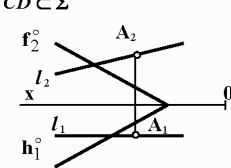
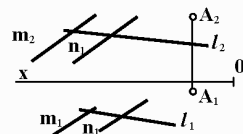
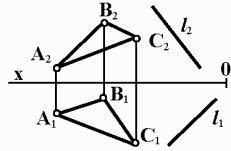
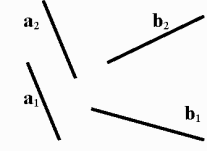
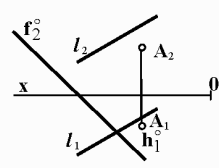
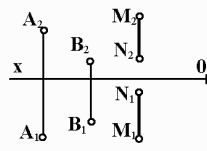
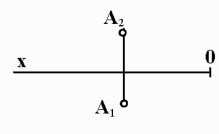
Запитання для самоконтролю

1. В чому полягає призначення аксонометричних проєкцій, їх утворення та види?
2. Які найбільш поширенні аксонометричні проєкції, їх осі координат та коефіцієнти спотворення?
3. Як виконується аксонометричне зображення точки простору та багатокутника?
4. Як будується ізометрична проєкція кола?
5. В чому полягає побудова проєкції кола в діаметрії?
6. Як виконуються розрізи – вирізи на аксонометричних проєкціях деталі (моделі)?
7. Особливості виконання аксонометричних проєкцій деталей.

ДОДАТКИ:

- Завдання на епюр №1 – Таблиця №1
- Завдання на епюр №2 – Таблиця №2
- Завдання на епюр №3 – Таблиця №3
- Шрифти креслярські

Таблиця №1

<p>1.01.1 Через точку A провести пряму, паралельну пл. $\Sigma (a \parallel b)$, що перетинає пряму MN</p> 	<p>1.01.2 Побудувати квадрат $ABCD$ за його стороною AB і напрямком l_1 горизонтальної проєкції сторони AD</p> 	<p>1.01.3 Побудувати проєкції сфери $\varnothing 40$ мм, дотичної до трьох заданих площин: $\Sigma (\Sigma \perp \theta, \theta(h^\circ \cap f^\circ))$ і P_1</p> 
<p>1.02.1 Провести пряму, що перетинає задані a і MN, нахилена до P_1 і P_2 під кутом $\alpha = \beta = 40^\circ$</p> 	<p>1.02.2 Побудувати проєкції сфери радіуса 20 мм, дотичної до пл. $\Sigma (m \parallel n)$ у точці M</p> 	<p>1.02.3 Побудувати прямокутник $ABCD$ з діагоналлю $AC \parallel \Sigma (\theta^\circ \cap f^\circ)$, що належить прямій l (l_2)</p> 
<p>1.03.1 Побудувати ΔABC, площина якого паралельна пл. $\Sigma (m \parallel n)$, а вершина $C \subset q$</p> 	<p>1.03.2 Знайти M_1N_1 прямої MN, дотичної в точці K до сфери з центром в точці C</p> 	<p>1.03.3 Побудувати ромб $ABCD$, площина якого перпендикулярна $\Sigma (\theta^\circ \cap f^\circ)$, $AD \subset l$, а $CD \subset \Sigma$</p> 
<p>1.04.1 Побудувати рівнобедрений ΔABC, у якого вершина B належить одночасно прямій l і пл. $\Sigma (m \parallel n)$, $BC \perp l$ і $AB = BC$</p> 	<p>1.04.2 Побудувати сфери з радіусом 20 мм і центром на прямій l, дотичну до пл. $\Sigma(ABC)$</p> 	<p>1.04.3 Побудувати проєкції і знайти н.в. відстані між прямими a і b</p> 
<p>1.05.1 Побудувати рівнобедрений ΔABC, у якого $AC \parallel \Sigma (\theta^\circ \cap f^\circ)$; $BC \perp l$; $BC = AC$</p> 	<p>1.05.2 Побудувати сферу з центром на прямій MN так, щоб точка A і B належала його поверхні</p> 	<p>1.05.3 Через точку A провести площину, нахилена під кутом 50° до площини проєкції P_1 і P_2</p> 

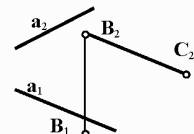
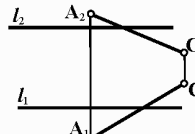
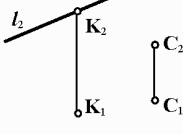
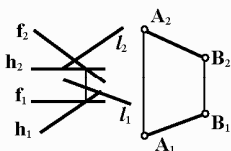
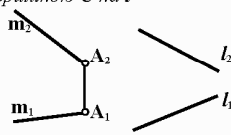
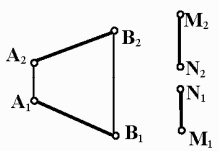
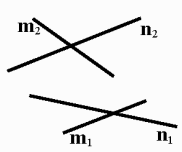
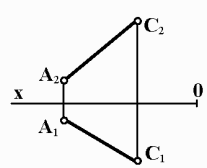
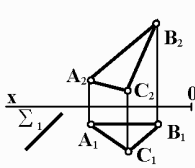
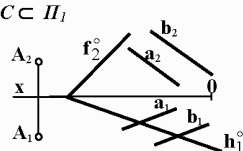
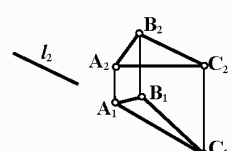
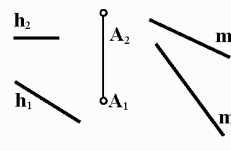
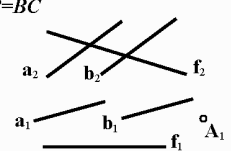
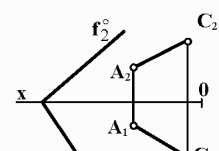
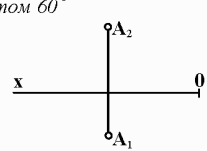
Продовження таблиці №1

<p>1.06.1 Побудувати ромб $ABCD$, у якого $AB \subset f$, $B \in \Pi_1$ і AD паралельна площинам $\Sigma (h^\circ \cap f^\circ)$ і $\Theta (h^{\circ 1} \cap f^{\circ 1})$</p>	<p>1.06.2 В пл. $\Sigma (h^\circ \cap f^\circ)$ побудувати рівнобедрений $\triangle ABC$ з вершиною $C \in f^\circ$ і основою AB</p>	<p>1.06.3 Побудувати сферу, дотичну до прямих l і h в точках A і B</p>
<p>1.07.1 Провести пл. Θ, паралельну пл. $\Sigma (h^\circ \cap f^\circ)$ так, щоб відрізок прямої l між Θ і Σ дорівнював 20мм</p>	<p>1.07.2 Побудувати прямокутник $ABCD$ з вершиною A в пл. $\Sigma (m \parallel n)$, у якого $AB=30$ мм і $AB \perp \Sigma$ а вершина $C \in l$</p>	<p>1.07.3 В пл. $\Sigma (m \parallel n)$ побудувати г.м.т., рівновіддалених від заданих точок M і N</p>
<p>1.08.1 Через точку M провести пряму, паралельну пл. $\Sigma (ABC)$ і рівнонахилена до Π_1 та Π_2</p>	<p>1.08.2 Побудувати прямокутник $ABCD$ з вершиною C на прямій l</p>	<p>1.08.3 Побудувати рівнобедрений $\triangle ABC$ з основою AB, площина якого $\perp \Sigma$, а вершина $C \in \Sigma$</p>
<p>1.09.1 Через точку A провести пряму, паралельну пл. $\Sigma (h \cap f)$ і нахилена до Π_1 під кутом $\alpha = 30^\circ$</p>	<p>1.09.2 В пл. $\Sigma (h^\circ \cap f^\circ)$ провести пряму, що перетинає l під прямим кутом</p>	<p>1.09.3 Побудувати сферу з центром на прямій MN, дотичну до прямої l в точці A</p>
<p>1.10.1 Через точку K провести площину, паралельну лінії перетину пл. $\Sigma (ABC)$ і $\Theta (m \parallel n)$ рівнонахилена до Π_1 і Π_2</p>	<p>1.10.2 Побудувати рівнобедрений прямокутний $\triangle ABC$, у якого катет $AB \subset l$, а катет $BC \in \Sigma (h^\circ \cap f^\circ)$</p>	<p>1.10.3 Знайти l_2 прямої l, точки якої рівновіддалені від сторін a і MN лінійного кута</p>

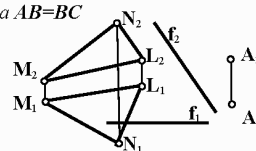
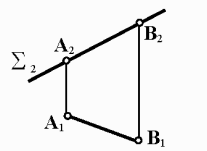
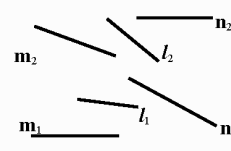
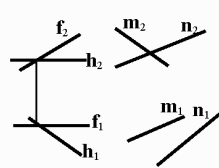
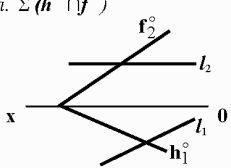
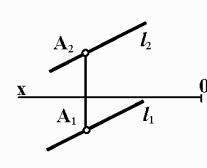
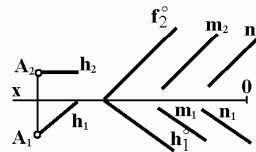
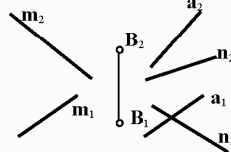
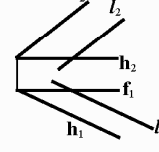
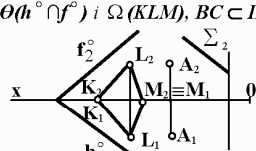
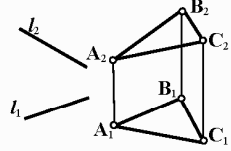
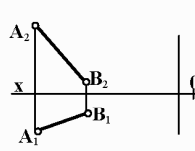
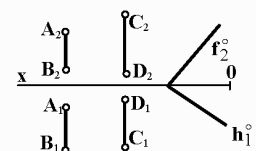
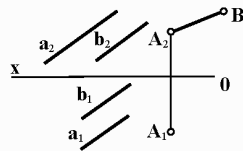
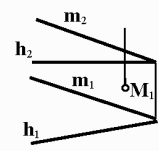
Продовження таблиці №1

<p>1.11.1 Через точку K в пл. $\Sigma(h^\circ \cap f^\circ)$ провести пряму, паралельну пл. $\Theta(f^\circ \cap l)$</p>	<p>1.11.2 Побудувати сферу $R20$ мм із центром в точці A, дотичну до пл. $\Sigma(m \cap n)$</p>	<p>1.11.3 Через точку M провести пряму, перпендикулярну до заданих прямих a і b</p>
<p>1.12.1 Через точку K провести пряму, що перетинає задані прямі l і MN</p>	<p>1.12.2 Знайти в пл. $\Sigma(CDE)$ таку точку, щоб сума відстаней її від заданих точок A і B була мінімальною</p>	<p>1.12.3 Побудувати квадрат $ABCD$ зі стороною BC, що паралельна пл. $\Sigma(MNL)$</p>
<p>1.13.1 Побудувати ромб $ABCD$, вершина B якого розташована одночасно на осі z і в пл. $\Sigma(KLM)$, а сторона AD на прямій l</p>	<p>1.13.2 Побудувати сферу $R20$ мм, дотичну до пл. $\Sigma(A, l)$ з центром на прямій MN</p>	<p>1.13.3 На прямій l знайти точку K, рівновіддалену від сторін b і h лінійного кута</p>
<p>1.14.1 Проєсти пряму, рівнонахилена до Π_1, Π_2 і Π_3, що перетинає задані прямі a і b</p>	<p>1.14.2 Побудувати сферу, дотичну до пл. $\Sigma(h \cap f)$ і до пл. $\Theta(h^\circ \cap f^\circ)$ в точці A</p>	<p>1.14.3 Побудувати ΔABC, площина якого $\perp \Sigma(m \cap n)$, $AB \parallel \Sigma$, а $C \in \Sigma$</p>
<p>1.15.1 Побудувати ΔABC, у якого $BC \subset a \parallel \Sigma$, $\Sigma(f \parallel f^\circ)$, $BC=AB$</p>	<p>1.15.2 Побудувати сферу, дотичну до пл. $\Sigma(h^\circ \cap f^\circ)$ в точці M так, щоб точка A належала його поверхні</p>	<p>1.15.3 Через точку P провести пряму, що перетинає пряму l і перпендикулярну m</p>

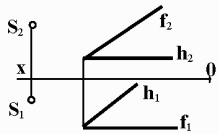
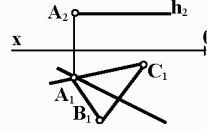
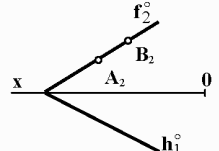
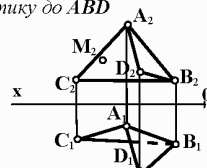
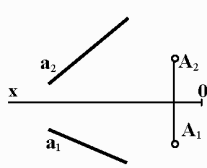
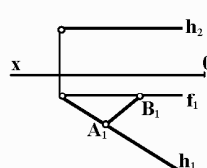
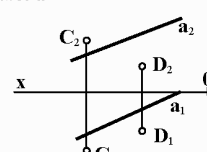
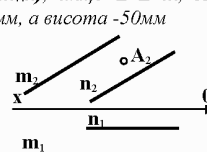
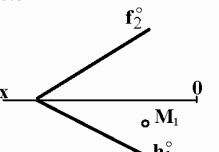
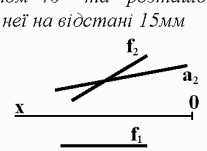
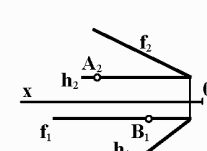
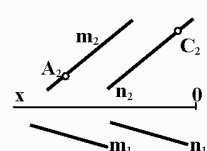
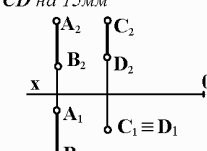
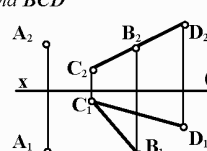
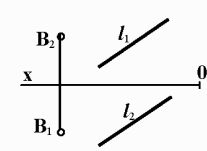
Продовження таблиці №1

<p>1.16.1 Побудувати ромб $ABCD$ в пл. $\Sigma(a, B)$, якщо $AB \parallel a$</p> 	<p>1.16.2 Побудувати ромб $ABCD$ за діагоналлю AC, у якого вершина B лежить на прямій l</p> 	<p>1.16.3 Побудувати l_1 прямої l, дотичної в m, K до сфери з центром в t, C</p> 
<p>1.17.1 Побудувати паралелограм $ABCD$, сторона AD якого паралельна пл. $\Sigma(h \cap f)$, а вершина $D \subset l$</p> 	<p>1.17.2 Побудувати прямокутний рівнобедрений ΔABC з прямим кутом при вершині A_1 стороною AB на прямій m і вершиною C на l</p> 	<p>1.17.3 Побудувати сферу з центром на прямій MN, дотичну до AB в точці K, якщо $AK/KB=5/2$</p> 
<p>1.18.1 Провести пряму, паралельну Π_2, яка перетинала б прямі m і n, і була нахилена до Π_1 під кутом 30°</p> 	<p>1.18.2 Побудувати ромб $ABCD$ з вершиною B на осі Oy</p> 	<p>1.18.3 Побудувати сферу $\Phi 30$мм, дотичну до трьох заданих площин $\Sigma(\Sigma_1)$, $\Theta(ABC)$ і Π_2</p> 
<p>1.19.1 Побудувати ΔABC, у якого сторона AB паралельна $\Theta(h^\circ \cap f^\circ)$ і $\Sigma(a \parallel b)$, AC рівнонахилена до Π_1, Π_2 і Π_3, $BC \subset \Pi_1$</p> 	<p>1.19.2 Побудувати l_1 прямої l, віддаленої від пл. $\Sigma(ABC)$ на 20мм</p> 	<p>1.19.3 Побудувати ромб $ABCD$ зі стороною $AB \perp m$ і стороною $BC \subset h$</p> 
<p>1.20.1 Побудувати рівнобедрений ΔABC, у якого сторона $AB \subset \Sigma(a \parallel b)$, $BC \subset f$ і $AB=BC$</p> 	<p>1.20.2 Побудувати ромб $ABCD$ з діагоналлю $BD=40$мм, якщо $BD \parallel \Sigma(h^\circ \cap f^\circ)$</p> 	<p>1.20.3 Через точку A провести площину, нахилена до Π_1 під кутом 40° і до Π_2 під кутом 60°</p> 

Закінчення таблиці №1

<p>1.21.1 Побудувати рівнобедрений ΔABC, у якого вершина B одночасно належить прямій f і пл. Σ (MNL), $BC \subset f$, а $AB=BC$</p> 	<p>1.21.2 Побудувати в пл. Σ (Σ_2) квадрат $ABCD$ за стороною AB</p> 	<p>1.21.3 Побудувати пряму, що перетинає прямі m і n, і перпендикулярну до l</p> 
<p>1.22.1 Провести пряму, паралельну пл. Σ ($h \cap f$) і перетинаючу прямі m і n</p> 	<p>1.22.2 Побудувати квадрат $ABCD$ з діагоналлю $BD=40$мм на прямій l і діагоналлю AC в пл. Σ ($h \cap f$)</p> 	<p>1.22.3 Побудувати сферу з центром на осі Ox і дотичну до l в точці A</p> 
<p>1.23.1 Побудувати ромб $ABCD$, у якого $AB \subset h$, $B \subset \Pi_2$ і AD паралельна площинам Σ ($h \cap f$) і Θ ($m \cap n$)</p> 	<p>1.23.2 Побудувати рівнобедрений прямокутний ΔABC, у якого катет $AB \perp$ прямим m і n, а вершина $C \subset a$</p> 	<p>1.23.3 Побудувати ортогональну проекцію l на пл. Σ ($h \cap f$)</p> 
<p>1.24.1 Побудувати ΔABC, у якого сторона $AB \parallel \Sigma$ (Σ_2) і віддалена від осі Oz на 20мм, сторона AC паралельна Θ ($h \cap f$) і Ω (KLM), $BC \subset \Pi_2$</p> 	<p>1.24.2 Побудувати сферу $\varnothing 40$ мм з центром на прямій l і дотичну до Σ (ABC)</p> 	<p>1.24.3 Побудувати прямокутник $ABCD$, у якого вершина C рівновіддалена від Π_1, Π_2 і Π_3</p> 
<p>1.25.1 Провести пряму, що перетинає AB і CD і паралельна площині Σ ($h \cap f$)</p> 	<p>1.25.2 Побудувати прямокутник $ABCD$, площина якого $\perp \Sigma$ ($a \parallel b$), $CD \subset \Sigma$</p> 	<p>1.25.3 Знайти M_2 точки M, рівновіддаленої від сторін l і h лінійного кута</p> 

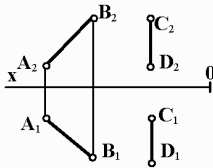
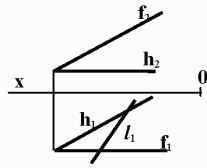
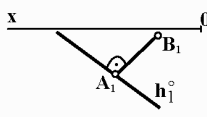
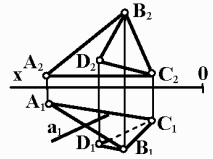
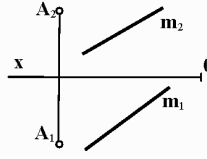
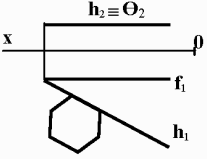
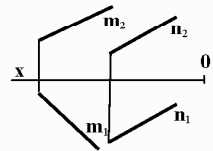
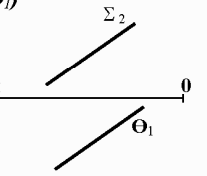
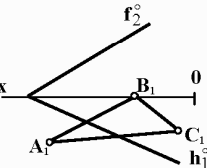
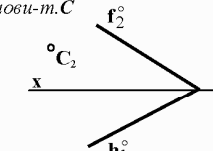
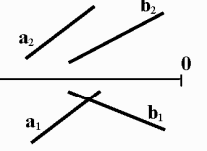
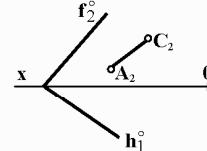
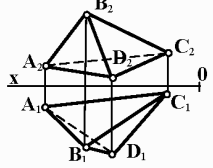
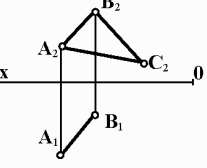
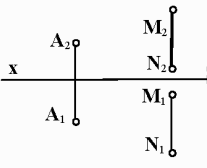
Таблиця №2

<p>2.01.1 Побудувати прямий круговий конус з основою 40мм в пл. $\Sigma (h \cap f)$ і вершиною у т. S</p> 	<p>2.01.2 Побудувати $A_2B_2C_2$ пл. $\Sigma (ABC)$, якщо кут нахилу пл. Σ до пл. Π_2 дорівнює 55°</p> 	<p>2.01.3 Побудувати правильний шестикутник $ABCDEF$, що належить пл. $\Sigma (h^\circ \cap f^\circ)$</p> 
<p>2.02.1 Побудувати сферу, дотичну до граней ABC і ABD, якщо т. M є точкою дотику до ABD</p> 	<p>2.02.2 Побудувати куб з гранню $ABCD$ в пл. $\Sigma (a, A)$ і стороною BC на прямій a</p> 	<p>2.02.3 Побудувати рівнобічний $\Delta ABC \subset \Sigma (h \cap f)$ зі стороною $AB=40$мм</p> 
<p>2.03.1 Побудувати пряму b, паралельну прямій a і рівновіддалену від т. C, т. D і прямої a</p> 	<p>2.03.2 Побудувати правильну тригранну піраміду $SABC$ з основою ABC в пл. $\Sigma (m \cap n)$, якщо $B \subset m$, $AB = 40$мм, а висота - 50мм</p> 	<p>2.03.3 Побудувати проєкції кола, яке проходить через т. M пл. $\Sigma (h^\circ \cap f^\circ)$ і дотичне до її слілів</p> 
<p>2.04.1 Побудувати горизонтальну проєкцію прямої a, яка мимобіжна з прямою f під кутом 40° та розташовану від неї на відстані 15мм</p> 	<p>2.04.2 Побудувати правильний тетраєдр $ABCD$ з гранню ABC в пл. $\Sigma (h \cap f)$</p> 	<p>2.04.3 В пл. $\Sigma (m \cap n)$ побудувати квадрат $ABCD$ з діагоналлю AC</p> 
<p>2.05.1 Провести пряму, паралельну прямим AB і CD, і віддалену від AB на 20мм, а від CD на 15мм</p> 	<p>2.05.2 Побудувати г.м.т., віддалених від т. A на 25мм і рівновіддалених від сторін кута BCD</p> 	<p>2.05.3 Побудувати квадрат $ABCD$ за напрямком діагоналі l і вершини B</p> 

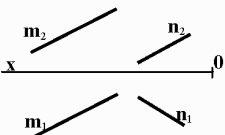
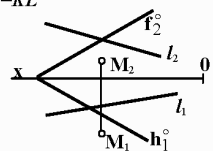
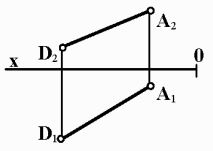
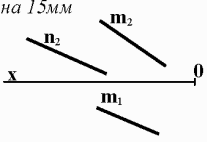
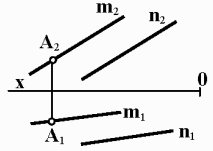
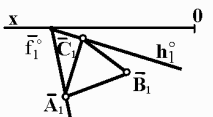
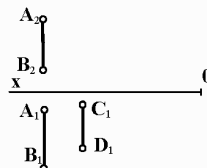
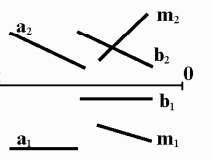
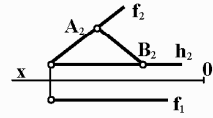
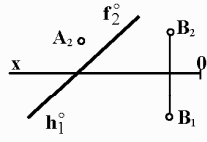
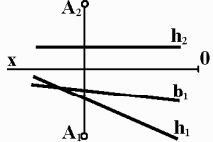
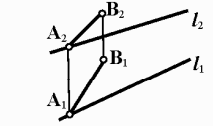
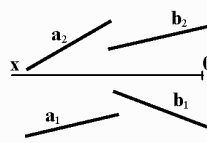
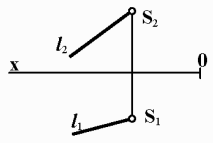
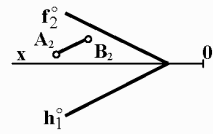
Продовження таблиці №2

<p>2.06.1 Побудувати квадрат $ABCD$ з стороною 40мм, у якого сторона $AB \subset m$, а вершина $C \in n$</p>	<p>2.06.2 На осі x знайти точку, рівновіддалену від сторін кута ABC</p>	<p>2.06.3 Визначити величину кута між площинами $\Sigma(m n)$ і $\Theta(ABC)$</p>
<p>2.07.1 Знайти M_1 точки M, рівновіддаленої від $\Sigma(h' \cap f')$ і $\Omega(h'' \cap f'')$</p>	<p>2.07.2 Побудувати горизонтальну проекцію сфери, дотичної до пл. $\Sigma(LMN)$</p>	<p>2.07.3 Вписати коло $R25$ в кут між пр. f і h</p>
<p>2.08.1 Побудувати проекції сфери, дотичної до пл. $\Sigma(h \cap f)$ в т. A, з точкою B на його поверхні</p>	<p>2.08.2 Побудувати a_2 прямої a, паралельної прямій b, що відстоїть від b на 25мм</p>	<p>2.08.3 В площині чотирикутника $ABCD$ знайти точку, рівновіддалену від AB, AD, CD</p>
<p>2.09.1 Побудувати в пл. $\Sigma(a b)$ квадрат $ABCD$, якщо $AB=30\text{мм}$ і $B \subset b$</p>	<p>2.09.2 Визначити A_1, якщо відстань від т. A до прямої l дорівнює 30мм</p>	<p>2.09.3 Побудувати рівнобедренний ΔMNE за його висотою EA, яка є лінією найбільшого нахилу пл. $\Sigma(MNE)$ до Π_2 й кутом $\varphi=40^\circ$ при вершині E</p>
<p>2.10.1 Побудувати прямий циліндр з висотою 40мм і колом основи, описаним навколо ΔABC</p>	<p>2.10.2 Побудувати ромб $ABCD$ з кутом при вершині $B=40^\circ$ за напрямком діагоналі l і вершині A</p>	<p>2.10.3 В пл. $\Sigma(h \cap f)$ побудувати квадрат $ABCD$ за його діагоналлю AC</p>

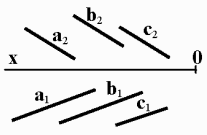
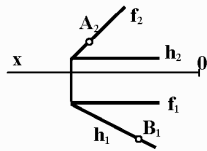
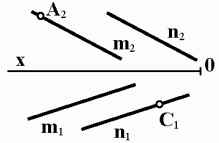
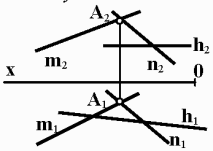
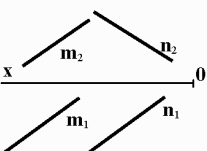
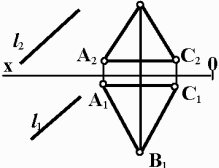
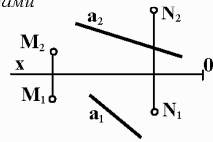
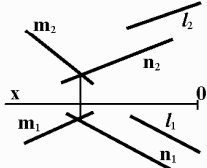
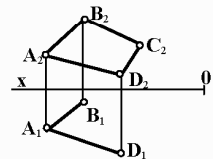
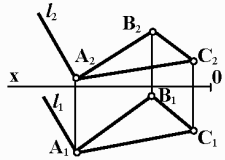
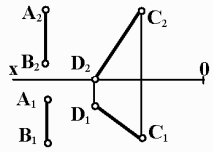
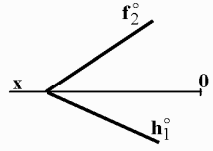
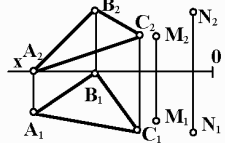
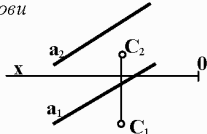
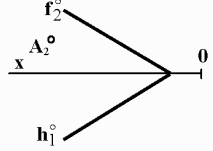
Продовження таблиці №2

<p>2.11.1 Побудувати сферу найменшого діаметру, дотичну до прямих AB і CD</p> 	<p>2.11.2 Через пряму $l \subset \Sigma (h \cap f)$ провести пл. Θ під кутом 40° до Σ</p> 	<p>2.11.3 В пл. $\Sigma (h^\circ \cap AB)$ побудувати коло $R = 20\text{мм}$ за горизонтальною проекцією Π діаметра AB</p> 
<p>2.12.1 Знайти a_2 прямої a, точки якої рівновіддалені від площин $\Sigma(ABC)$ і $\Theta(BCD)$</p> 	<p>2.12.2 Побудувати г.м.т., що проходять через т.А під кутом 40° до прямої m</p> 	<p>2.12.3 Побудувати проекції шестикутника, вписаного між h і f пл. Σ, за його суміщеним положенням з пл. $\Theta(\Theta_2)$</p> 
<p>2.13.1 Провести площину (слідами), що паралельна прямим m і n, і відстоїть від прямої p на 20мм</p> 	<p>2.13.2 Побудувати г.м.т. віддалених від площин $\Sigma(\Sigma_2)$ і $\Theta(\Theta_1)$</p> 	<p>2.13.3 Побудувати центр кола, що описане навколо $\Delta ABC \subset \Sigma (h^\circ \cap f^\circ)$</p> 
<p>2.14.1 Побудувати прямий круговий конус з основою $O50$ в пл. $\Sigma (h^\circ \cap f^\circ)$, у якого висота 60мм, а центр основи-т.С</p> 	<p>2.14.2 Перетнути прямі a і b перпендикулярною до них прямою m</p> 	<p>2.14.3 В пл. $\Sigma (h^\circ \cap f^\circ)$ побудувати прямокутний ΔABC з прямим кутом при вершині B та кутом BCA, що дорівнює 50°</p> 
<p>2.15.1 Побудувати сферу, на поверхні якої лежали б всі вершини піраміди $ABCD$</p> 	<p>2.15.2 Побудувати $A_1B_1C_1$, якщо $\Sigma(ABC)$ нахилена до Π_1 під кутом 60°</p> 	<p>2.15.3 Через т.А провести пряму, що перетинає MN під кутом 40°</p> 

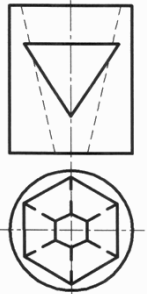
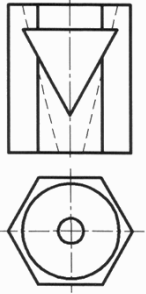
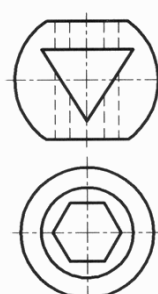
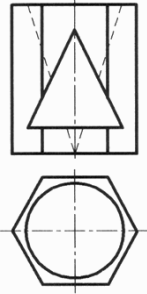
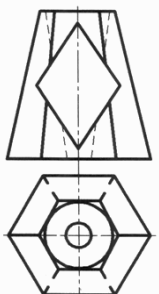
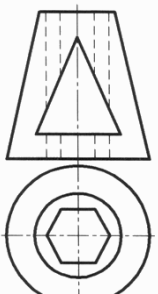
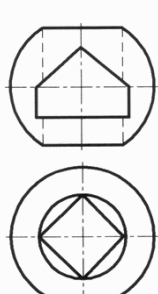
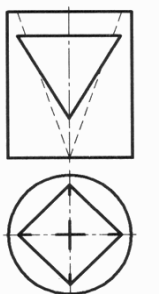
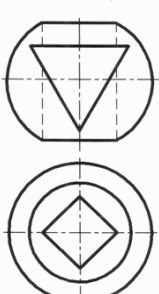
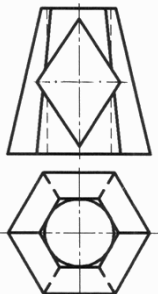
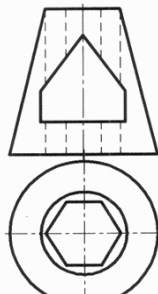
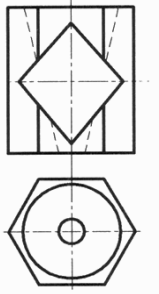
Продовження таблиці №2

<p>2.16.1 Побудувати сферу мінімального радіуса, дотичну до прямих m і n</p> 	<p>2.16.2 Через т.М провести пряму, що перетинає $\Sigma (h^\circ \cap f^\circ)$ і l відповідно у точках K і L, так, щоб $MK=KL$</p> 	<p>2.16.3 Побудувати рівнобічний ΔABC за його висотою AD, яка є лінією найбільшої нахилу пл. $\Sigma (ABC)$ до P_1</p> 
<p>2.17.1 Побудувати горизонтальну проекцію прямої n, що мимобіжна з прямою m під прямим кутом і відстоїть від неї на 15мм</p> 	<p>2.17.2 Побудувати куб з гранню $ABCD$ в пл. $\Sigma (m \parallel n)$ і сторонами AB і CD відповідно на m і n</p> 	<p>2.17.3 Побудувати проекції ΔABC, що належить пл. $\Sigma (h^\circ \cap f^\circ)$, за його суміщеним положенням</p> 
<p>2.18.1 Побудувати C_2D_2, якщо відомо, що $CD \parallel AB$, а відстань між прямими дорівнює 20мм</p> 	<p>2.18.2 За падаючим променем m побудувати віддзеркалений промінь від пл. $\Sigma (a \parallel b)$</p> 	<p>2.18.3 Побудувати квадрат $ABCD$ в пл. $\Sigma (h \cap f)$ зі стороною 40мм</p> 
<p>2.19.1 Побудувати проекції сфери, дотичної до пл. $\Sigma (h^\circ \cap f^\circ)$ в т.А з т.В на її поверхні</p> 	<p>2.19.2 Побудувати b_2, якщо відомо, що пл. $\Sigma (h \cap f)$ віддалена від т.А на 20мм</p> 	<p>2.19.3 Побудувати прямокутник $ABCD$ за напрямком діагоналі l та стороною AB</p> 
<p>2.20.1 Побудувати квадрат $ABCD$ зі стороною, що дорівнює відстані між a і b, у якого $AB \subset a$ і $CD \subset b$</p> 	<p>2.20.2 Побудувати прямий конус з вершиною S та віссю l. Висота конуса 50мм, а діаметр основи 40мм</p> 	<p>2.20.3 В пл. $\Sigma (h^\circ \cap f^\circ)$ побудувати прямокутник $ABCD$ з вершиною C на h°</p> 

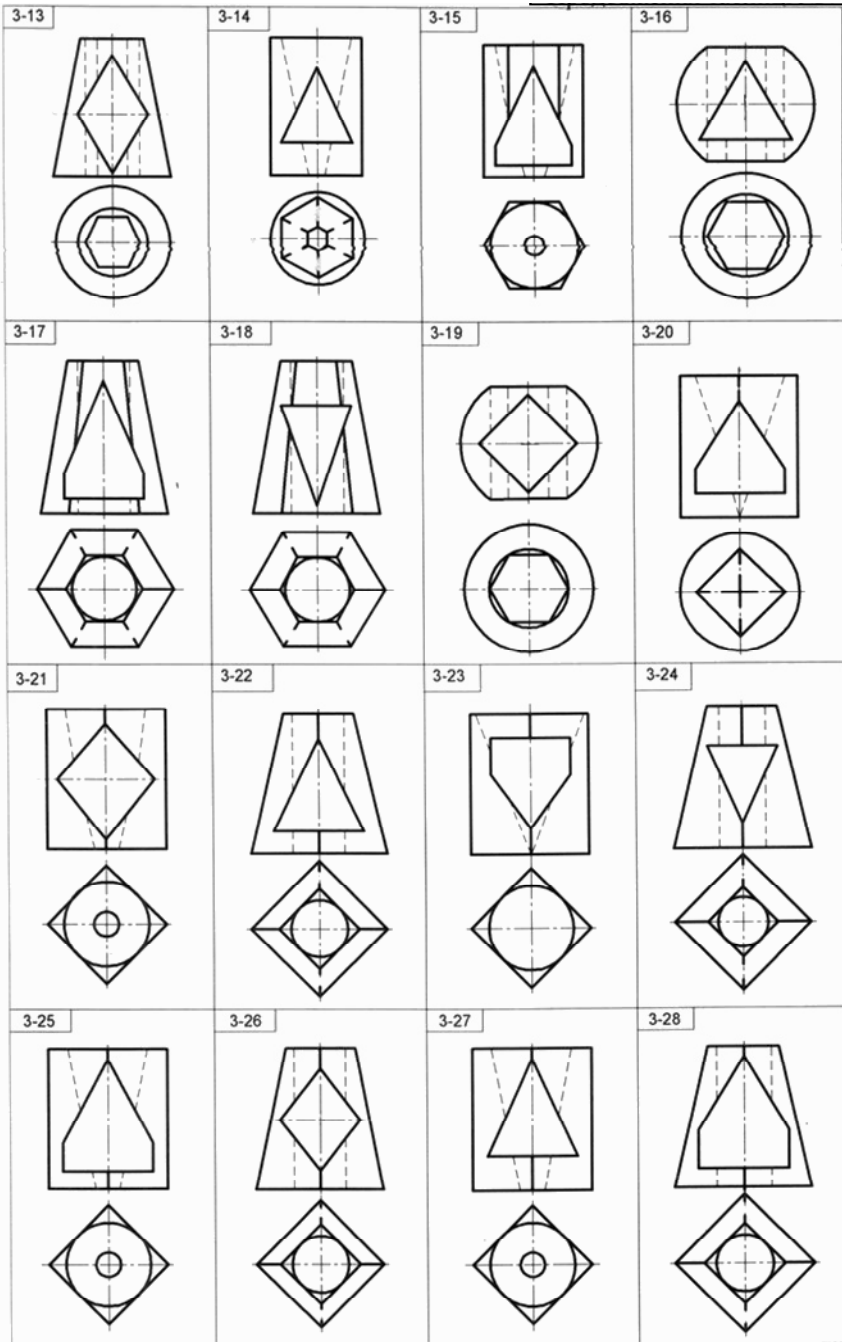
Закінчення таблиці №2

<p>2.21.1 Знайти точку $K \in \Pi$, рівновіддалену від заданих прямих a, b і c</p> 	<p>2.21.2 Побудувати правильну тригранну піраміду з висотою 55мм і основою ABC в пл. Σ ($h \cap f$)</p> 	<p>2.21.3 В пл. Σ ($m \parallel n$) за діагоналлю AC побудувати ромб $ABCD$ зі сторонами на прямих m і n</p> 
<p>2.22.1 Побудувати ромб $ABCD$, у якого сторона $BC \subset h$, а вершина B рівновіддалена від сторін m і n плоского кута</p> 	<p>2.22.2 На прямій m знайти точку, віддалену від прямої n на 30мм</p> 	<p>2.22.3 Визначити величину кута між прямою l і пл. Σ (ABC)</p> 
<p>2.23.1 Через точки M і N провести дві прями, що перетинають пряму a в одній і тій же точці під однаковими кутами</p> 	<p>2.23.2 Побудувати сферу $\varnothing 40$мм, дотичну до трьох площин Σ ($m \cap n$), Θ ($n \parallel l$) і Π_2</p> 	<p>2.23.3 В площині чотирикутника $ABCD$ знайти точку, рівновіддалену від AB, AD і DC</p> 
<p>2.24.1 Визначити кут між прямою l і пл. Σ (ABC)</p> 	<p>2.24.2 Побудувати сферу найменшого діаметр, дотичну до прямих AB і CD</p> 	<p>2.24.3 Вписати коло $R=25$ мм у кут між слідами f° і h° пл. Σ</p> 
<p>2.25.1 В пл. Σ (ABC) знайти точки, віддалені від заданих M і N відповідно на 20 і 15мм</p> 	<p>2.25.2 Побудувати прямий круговий циліндр з висотою 50мм і основою $R20$мм в пл. Σ (a, C), де m - C - центр кола основи</p> 	<p>2.25.3 Побудувати правильний ΔABC, вписаний в коло, дотичне до слівів пл. Σ ($h^\circ \cap f^\circ$)</p> 

В кожному варіанті задана модель, форма якої утворена трьома поверхнями, одна з яких утворює зовнішню форму моделі, друга поверхня – утворює вертикальний отвір моделі, а третя поверхня (призматична пряма) – утворює горизонтальний отвір. По заданому вигляду спереду, та вигляду зверху моделі, необхідно показати форму моделі застосувавши вигляди і розрізи, та побудувати лінії перетину поверхонь, утворивших форму моделі.

<p>3-01</p> 	<p>3-02</p> 	<p>3-03</p> 	<p>3-04</p> 
<p>3-05</p> 	<p>3-06</p> 	<p>3-07</p> 	<p>3-08</p> 
<p>3-09</p> 	<p>3-10</p> 	<p>3-11</p> 	<p>3-12</p> 

Закінчення таблиці №3



Шрифти креслярські

(основний шрифт з нахилом)

1. Український алфавіт

1.1. Прописні літери

А Б В Г Д Е Є Ж З И І І І К Л М Н

О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ю Я

1.2. Рядкові літери

а б в г д е є ж з и і і і к л м н

о п р с т у ф х ц ч ш щ ю я ь

2. Латинський алфавіт

2.1. Прописні літери

A B C D E F G H I J K L M N

O P Q R S T U V W X Y Z

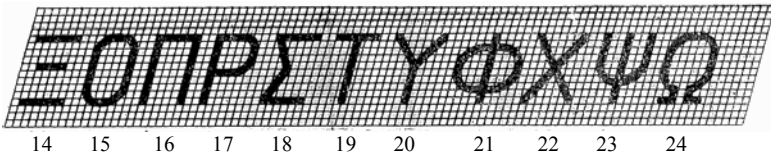
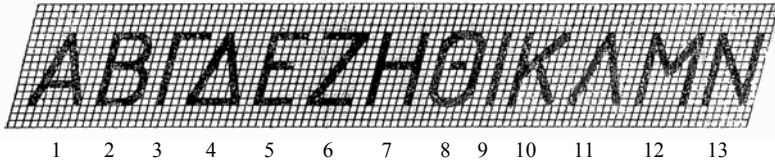
2.2. Рядкові літери

a b c d e f g h i j k l m n o p

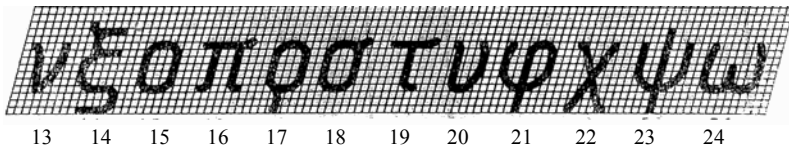
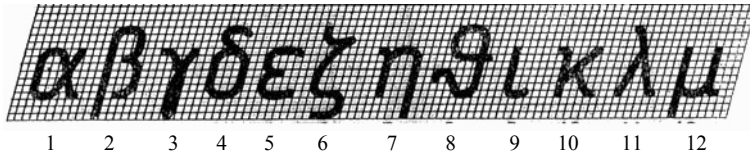
q r s t u v w x y z

3. Грецький алфавіт

3.1. Прописні літери



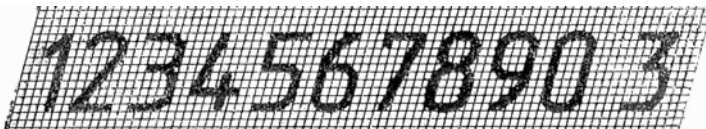
3.2. Рядкові літери



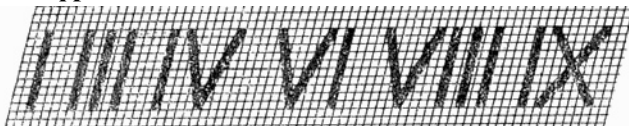
3.3. Найменування літер грецького алфавіту

1 – альфа	7 – ета	13 – ню	19 – тау
2 – бета	8 – тета	14 – ксі	20 – іпсілон
3 – гамма	9 – йота	15 – омікрон	21 – фі
4 – дельта	10 – каппа	16 – пі	22 – хі
5 – епсілон	11 – ламбда	17 – ро	23 – пси
6 – дзета	12 – мю	18 – сігма	24 – омега

4. Арабські цифри



5. Римські цифри



Список використаної літератури

1. Бубенников А. В. Начертательная геометрия. – М.: Высш. шк., 1985.
2. Боголюбов С. К., Воинов А. В. Курс технического черчения. – М.: Машиностроение, 1973.
3. Гордон В. О., Сименцов-Огиевский М. А. Курс начертательной геометрии. – М.: Наука, 1988.
4. Государственный стандарт Союза ССР 2. 317-69 Общие правила выполнения чертежей. – М.: Издательство стандартов, 1984.
5. Гумен Н. С., Петина Л. В. Методические указания по решению задач повышенной сложности по начертательной геометрии. – Киев: КПИ, 1985.
6. Иванов Г. С. Начертательная геометрия. – М.: Машиностроение, 1995.
7. Короев Ю. И. Начертательная геометрия. – М.: Высш. шк., 1981.
8. Крот А. М., Петина Л. В., Гумен Н. С. Учебные задания по начертательной геометрии. – Киев: КПИ, 1991.
9. Михайленко В. Е., Євстіфєєв М. Ф., Ковальов С. М., Кащенко О. В. Нарисна геометрія. – Київ: Вища школа, 2004.
10. Петина Л. В., Сарнацька К. В. Методичні вказівки і завдання з курсу “Нарисна геометрія” для слухачів ФПК. – К.: КПІ, 1995.
11. Сухина И. А. Начертательная геометрия. – Краснодар: КПИ, 1973.
12. Фролов С. А. Начертательная геометрия. – М.: Машиностроение, 1983.
13. Чалий О. Т. Начертальна геометрія. – Київ: Технічна література УРСР, 1953.

Навчальне видання

Олексій Степанович Хмеленко

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

Підручник

Редактор *Василенко Людмила Геннадіївна*
Коректор *Наследова Тетяна Анатоліївна*
Комп'ютерна верстка *Василенко Людмила Геннадіївна*
Дизайн обкладинки *Сидоренко Марія Олексіївна,*
Куташенко Валерій Сергійович

Підписано до друку 10. 06.2008.

Формат 70 x 100 1/16. Папір офсетний.

Друк офсетний. Гарнітура Times New Roman.

Умовн. друк. аркушів – 35,92. Обл.-вид. аркушів — 35,27.

Наклад 1000 примір.

Замовлення № _____

Видавництво «Кондор»
Свідоцтво ДК №157 від 17.12.2002 р.
03067, м. Київ, вул.Гарматна, 29/31,
тел./факс (044) 408-76-17, 408-76-25