МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА
и её применения

LOGIC, METHODOLOGY
AND PHILOSOPHY
OF SCIENCE

Proceedings of the 1960
International Congress

Edited by

ERNEST NAGEL
PATRICK SUPPES
ALFRED TARSKI

Stanford University Press
Stanford, California, 1962

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Сборник статей
под редакцией
Э. НАГЕЛА, П. САППСА
и А. ТАРСКОГО

Перевод с английского

Под редакцией
А. И. Мальцева

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“
Москва 1965

УДК 517.11 + 410 : 51

Предлагаемая читателю книга является сборником, составленным из докладов, представленных выдающимися зарубежными учеными на первом Международном конгрессе по логике, методологии и философии науки, состоявшемся в 1960 г. в Станфорде (США). В сборник включены наиболее интересные доклады по математической логике, теории множеств, теории моделей, теории алгоритмов, основаниям математики и математической лингвистике, не только освещающие последние достижения в данной области науки, но и намечающие задачи и проблематику дальнейших исследований.

Книга представляет интерес для широких кругов математиков, занимающихся основаниями математики и математической логикой, для философов и представителей других наук, интересующихся методологическими проблемами математики, а также для лингвистов, работающих над проблемами кодирования и обработки информации с помощью вычислительных машин. Она доступна также аспирантам и студентам старших курсов соответствующих высших учебных заведений.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Созданная в тридцатых годах нашего века теория алгоритмов и сделанные в это время капитальные открытия в математической логике несомненно явились событиями определяющего значения в истории науки 20-го столетия. В последующие годы эти открытия послужили теоретическим фундаментом для развития техники вычислительных и управляющих машин и вместе с нею открыли пути для дальнейшего проникновения математических методов в биологию, экономику, лингвистику, психологию и другие области науки. Более того, сегодня уже отчетливо видно, что многие вопросы, традиционно считавшиеся чисто философскими, например вопросы о механической (схематической) и творческой деятельности, языке и строении научных теорий, мышлении и сознании, нельзя изучать в отрыве от соответствующих разделов математики. Благодаря этому исследования по основаниям математики и философии математики, еще недавно интересовавшие лишь весьма узкие круги специалистов, ныне приобретают общенаучное значение.

Указанные тенденции в развитии современной науки нашли убедительное отражение в работе Международного конгресса по логике, методологии и философии науки (1960 г.), на котором впервые в полной мере были представлены математическая логика, теория алгоритмов и конечных автоматов, математическая лингвистика, философия и методология математики. В 1962 г. в США вышли в свет труды этого конгресса, содержащие доклады, которые были прочитаны в 11 секциях конгресса. В предлагаемом вниманию читателя томе напечатаны переводы на русский язык лишь тех докладов, которые относятся к математике и лингвистике[1]). Доклады эти прочитаны выдающимися учеными и в большинстве случаев представляют собой обзоры достижений докладчика и других исследователей в соответствующей узкой специальной области. Во многих докладах дается, кроме этого, некоторая систематизация нерешенных проблем и намечается краткая программа дальнейших исследований.

[1]) Доклад Д. Р. Бюхи „О разрешающем методе для ограниченной арифметики второго порядка“ в данное издание не включен, поскольку его перевод уже опубликован (см. „Кибернетический сборник“, вып. 8, изд-во „Мир“, 1964, стр. 78 — 90).

Со времени конгресса прошло пять лет, и ряд вопросов, остававшихся тогда открытыми, теперь уже решен. Тем не менее основные доклады, прочитанные на конгрессе, и до сих пор сохраняют большой интерес. Знакомство с этими докладами вводит читателя в живую атмосферу большой науки и позволяет непосредственно почувствовать напряженность исследовательской мысли и направления основных поисков.

В качестве приложения мы позволили себе включить в сборник перевод статьи известного логика Вана Хао. В этой интересно написанной работе автор излагает много вопросов философии математики, о которых математики часто говорят, но очень редко пишут. Конечно, далеко не все положения этого автора, да и других авторов сборника, приемлемы для читателей. Однако настоящий том рассчитан на квалифицированного советского читателя, и мы не считали нужным сопровождать статьи какими-либо комментариями философского характера.

В ближайшие годы можно ожидать еще большего расширения в нашей стране исследований по математической логике, теории алгоритмов и связанных с ними дисциплинам. Мы надеемся, что настоящий сборник будет полезен для привлечения новых сил в упомянутые важные области математики и философии науки.

А. И. Мальцев

Неразрешимость показательных диофантовых уравнений[1])

Дж. РОБИНСОН

Калифорнийский университет, Беркли, Калифорния, США

Десятая проблема Гильберта ставит вопрос об алгоритме, определяющем, имеет ли произвольное диофантово уравнение решение в целых числах. Соответствующая проблема для показательных диофантовых уравнений (т. е. уравнений, в которых наряду со сложением и умножением допускается возведение в степень) решается теперь отрицательно: *не существует алгоритма для определения, имеет или не имеет произвольное показательное диофантово уравнение решение в положительных целых числах.* Этот результат непосредственно вытекает из следующей теоремы[2]):

Каждое рекурсивно перечислимое множество или отношение является показательно диофантовым.

Это означает, что для каждого рекурсивно перечислимого множества S положительных целых существует такое показательное диофантово уравнение $E(s, u_1, \ldots, u_m)$, что $s \in S$ тогда и только тогда, когда $E(s, u_1, \ldots, u_m)$ разрешимо в целых числах.

Доказательство этого результата конструктивно. Если рекурсивно перечислимое множество S задано в любой из стандартных форм, то может быть построено соответствующее показательное диофантово уравнение $E(s, u_1, \ldots, u_m)$. Следовательно, можно использовать соображения Поста [2] для получения двух следствий:

Существует механическая процедура, которая для произвольной заданной аксиоматизации теории чисел строит конкретное показательное диофантово уравнение, которое не имеет решений, но неразрешимость которого не может быть выведена из данных аксиом.

Существует механическая процедура, которая по любому предложенному алгоритму для испытания показательных

[1]) Robinson J., The undecidability of exponential diophantine equations, стр. 12—13.

[2]) М. Дэвис и X. Патнэм [1] получили эту теорему, используя предположение, что существует произвольно длинная арифметическая прогрессия, содержащая только простые числа. Я [4] усилила и модифицировала их рассуждения, чтобы получить теорему, не используя это предположение. Доказательства результатов этого краткого обзора появятся в совместной работе Дэвиса, Патнэма и моей в *Annals of Mathematics*.

диофантовых уравнений на разрешимость строит конкретное диофантово уравнение, для которого данный алгоритм дает неправильный ответ.

Неизвестно, являются ли показательно-диофантовы множества обязательно диофантовыми. Однако было показано в [3], что каждое показательное диофантово уравнение можно было бы преобразовать механически в эквивалентное обычное диофантово уравнение с большим числом неизвестных, предполагая, что существует диофантово уравнение $D(x, y, u_1, \ldots, u_m)$, такое, что (1) все решения D удовлетворяют условию $y < x^n$ и (2) для каждого n существует некоторое решение с $y > x^n$.

Следовательно, если такое уравнение существует, тогда каждое рекурсивно перечислимое множество было бы диофантовым и десятая проблема Гильберта была бы неразрешима. С другой стороны, если бы конкретное рекурсивно перечислимое множество не было диофантовым, мы получили бы неожиданные ограничения на решения диофантовых уравнений. Действительно, из уточнения вышеприведенного результата следует:

Если существует некоторое рекурсивно перечислимое множество, которое не является диофантовым, тогда каждое диофантово уравнение $F(x, y, u_1, \ldots, u_m)$ или имеет решение с y, большим, чем n-я степень x для каждого n, или имеется такое n, что каждое решение удовлетворяет условию $y < x^n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Davis M., Putnam H., On Hilbert's tenth problem, *Notices of the American Mathematical Society*, **6** (1959), 544.
2. Post E. L., Recursively enumerable sets of positive integers and their decission problems, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **50** (1944), 284—316.
3. Robinson J., Existential definability in arithmetic, *Transactions of the American Mathematical Society*, **72** (1952), 437—449. [Русский перевод: см. сб. *Математика*, 8 : 5 (1964), 3—14.]
4. Robinson J., The undecidability of exponential Diophantine equations, *Notices of the American Mathematical Society*, 7 (1960), 75.

О теореме Кобхама, касающейся неразрешимых теорий [1])

Р. Л. ВООТ

Калифорнийский университет, Беркли, Калифорния, США

1. Введение

Общий метод для установления неразрешимости теорий был развит в [13]. Его основными средствами являются следующие два факта (если не даются определения, терминология везде, как в [13] [2])):

1.1. *Существует конечно аксиоматизируемая и существенно неразрешимая теория Q, которая является фрагментом арифметики натуральных чисел.*

1.2. *Если теория T совместна с конечно аксиоматизируемой и существенно неразрешимой теорией Σ, то T неразрешима.*

В [13] также введен еще более слабый фрагмент теории чисел, а именно теория R. Теория R не является конечно аксиоматизируемой. Однако справедливы следующие предложения.

1.3. *R существенно неразрешима*

и

1.4. *Любой член R имеет конечную модель.*

Простое соображение, которое устанавливает 1.2, зависит от конечной аксиоматизируемости теории Σ. Действительно, было установлено (см. [2], [8]), что 1.2 не всегда верно, если теорию Σ предполагать только аксиоматизируемой (т. е. имеющей рекурсивную систему аксиом).

Важный результат, установленный А. Кобхамом, заключается в том, что, несмотря на это, 1.2 верно для R и в действительности для несколько более слабой теории R_0 (которая будет описана в разд. 3).

1.5. Теорема Кобхама [3]). *Если теория T совместна с R_0, то T неразрешима.*

---

[1]) Vaught R. L., On a theorem of Cobham concerning undecidable theories, стр. 14—25.

[2]) Однако мы будем отождествлять теорию с множеством ее истинных предложений. Более того, теория T_1 будет называться расширением (или совместной с) T_2 только когда T_1 и T_2 имеют одинаковые константы.

[3]) Этот результат, еще не опубликованный, был сообщен устно Кобхамом автору и другим в 1957 г. Полное доказательство и различные следствия были описаны Кобхамом в переписке с А. Тарским и автором в 1958 г.

Кобхам использовал теорему 1.5 при доказательстве того, что теория G конечных групп наследственно неразрешима (и, следовательно, неаксиоматизируема)[1]). Поскольку условия теоремы 1.2, очевидно, ложны для G, этот результат не мог бы быть получен при использовании 1.2. Таким образом, это представляет прекрасную иллюстрацию дополнительной силы 1.5 по сравнению с 1.1 и 1.2.

Мы приведем здесь новое доказательство теоремы Кобхама. В действительности мы покажем методом, который можно было бы назвать экзистенциальной интерпретацией, что теорема Кобхама может быть выведена из теоремы Трахтенброта. Прежде чем изложить последнюю теорему 1.6, приведенную ниже, мы нуждаемся в следующей терминологии:

Пусть L есть множество логически тождественно истинных предложений, а F — множество предложений, выполнимых на конечных моделях. Для произвольного множества K NgK есть множество предложений, отрицания которых принадлежат K. Множество Z называется *отделяющим* множество X от множества Y, если Z включает X и не пересекается с Y. Два множества являются рекурсивно неотделимыми, если они не пересекаются и не существует рекурсивного множества, их отделяющего.

1.6. Теорема Трахтенброта[2]). *L и NgF рекурсивно неотделимы.*

В [18] автор показал, что

1.7. *Если A — аксиоматизируемая теория, отделяющая L от NgF, то A совместна с некоторой конечно аксиоматизируемой и существенно неразрешимой теорией.*

Другими словами, любая аксиоматизируемая теория, неразрешимость которой следует из теоремы Трахтенброта, также удовлетворяет условиям теоремы Тарского 1.2. Мы увидим в 5.3, что аналогичное заключение применяется к аксиоматизируемым теориям, неразрешимость которых следует из теоремы Кобхама.

Мы обсудим также некоторые другие пути, по которым теорема Кобхама может быть усилена или обобщена. В заключительном разделе мы упомянем некоторые близкие проблемы.

---

[1]) Это решение проблемы, поставленной в [13, стр. 85], также еще не опубликованное, было сформулировано и доказано в письме Кобхама к Тарскому в 1958 г. Как заметил Кобхам, для таких применений лучше заменить 1.5 следующим утверждением, легко выводимым из 1.5: *если R_0 относительно слабо интерпретируема в теории T, то T наследственно неразрешима.* (См. обсуждение в [13, стр. 20—30] аналогичной модификации 1.2.)

[2]) См. [15]; 1.6 было усилением более раннего результата Трахтенброта [14] о нерекурсивности множества предложений, истинных на всех конечных моделях.

2. Экзистенциальная интерпретируемость

Мы отклонимся от [13], рассматривая теории, в которых может отсутствовать символ равенства; все понятия и результаты работы [13] переносятся на такие теории очевидным образом. С другой стороны, чтобы избежать рассмотрения утомительных деталей, предположим, что внелогические контакты любой теории являются символами отношений и что число их конечно. (Следовательно, в дальнейших ссылках на теорию R мы будем иметь в виду эквивалентную ей — в смысле нашей статьи — теорию.)

Известно несколько принципов, которые, грубо говоря, имеют такую форму: если теория T_2 может быть „интерпретируема“ в теории T_1 в том или другом смысле, тогда некоторое свойство (например, неразрешимость, рекурсивная неотделимость T_2 и NgT_2 и т. д.) сохраняется при переходе от T_2 к T_1 (см. [13, 4, 12]). В 2.1 ниже мы изложим некоторые принципы такого же типа, касающиеся различных свойств, связанных с теоремой Кобхама, и касающиеся нового понятия, названного экзистенциальной интерпретируемостью. Последнее оказывается полезным не только когда применяется к теориям, но также когда применяется к другим множествам предложений.

Если K — некоторое множество предложений, мы обозначим через ExK множество всех выражений, составленных при помощи пропозициональных связок, кванторов, переменных и только тех символов отношений, которые входят в члены K. Мы обозначим через $L(K)$ или $F(K)$ множество предложений $\sigma \in ExK$, таких, что σ тождественно истинно или соответственно выполнимо на конечной модели. K будет называться псевдотеорией, если K есть непустое множество совместных предложений, множество предикатных символов, входящих в члены K, конечно и каждое предложение $\sigma \in ExK$, логически эквивалентное некоторому члену K, принадлежит K[1]).

Предположим теперь, что K_1 и K_2 — псевдотеории. Ради упрощения обозначений при формулировке следующего определения экзистенциальной интерпретируемости и в доказательстве 2.1 ограничимся случаем, когда в члены K_2 входит единственный предикатный символ P, который является двухместным. (Переход от этого случая к произвольному K_2 будет очевидным.) Предположим, что выбраны натуральные числа p, q, r и формулы $\in(v_0, \ldots, v_{r+p})$ и $\rho(v_0, \ldots, v_{2r+1+q})$, принадлежащие к ExK_1, где формулы имеют в точности указанные свободные переменные. Пусть u_n^m, y_j, z_k $(m, n = 0, 1, \ldots; j < p; k < q)$ — различные переменные. Для

---

[1]) С небольшими изменениями последнее условие можно было бы опустить почти всюду ниже.

каждого предложения $\sigma \in ExK_2$ пусть σ^* получается из σ заменой каждой атомарной формулы $Pv_m v_n$ на

$$\rho\left(u_0^m, \ldots, u_r^m, u_0^n, \ldots, u_r^n, z_0, \ldots, z_{q-1}\right)$$

и затем заменой всех подформул $\bigwedge v_k \gamma$ или $\bigvee v_k \gamma$ на $\bigwedge u_0^k \ldots \bigwedge u_r^k \left[\in\left(u_0^k, \ldots, u_r^k, y_0, \ldots, y_{p-1}\right) \rightarrow \gamma\right]$ или $\bigvee u_0^k \ldots \bigvee u_r^k \left[\in\left(u_0^k, \ldots, u_r^k, y_0, \ldots, y_{p-1}\right) \wedge \gamma\right]$ соответственно (k, m, $n = 0, 1, \ldots$)[1]. Мы говорим, что *экзистенциальная интерпретация* K_2 в K_1 указана, если для каждого σ, принадлежащего K_2, предложение $\bigvee y_0 \ldots \ldots \bigvee y_{p-1} \bigvee z_0 \ldots \bigvee z_{q-1} \sigma^*$ принадлежит K_1[2]).

С этого момента мы будем говорить, что указана (обычная) интерпретация K_2 в K_1, если в вышеприведенном построении $p = q = 0$. Следовало бы отметить, что мы таким образом понимаем „интерпретируемость" несколько шире, чем даже понятие относительной интерпретируемости по [13]. Грубо говоря, последнее расширено допущением для символа равенства интерпретироваться как любой другой символ отношения и допущением для элементов модели K_2 интерпретироваться как совокупность r элементов модели K_1[3]). Это обстоятельство играет важную роль только в 6.4 и 8.3; почти всюду существенно только различие между экзистенциальной и обычной интерпретируемостью.

2.1. *Предположим, что K_1 и K_2 есть псевдотеории и что K_2 экзистенциально интерпретируема в K_1. Тогда*

а) *Если не существует рекурсивной теории, отделяющей $L(K_2)$ от NgK_2, то то же самое истинно для K_1*[4]).

б) *Если $L(K_2)$ и NgK_2 рекурсивно неотделимы, то $L(K_1)$ и NgK_1 тоже рекурсивно неотделимы.*

в) *Если $L(K_2)$ и NgK_2 эффективно рекурсивно неотделимы*[5]), *то $L(K_1)$ и NgK_1 тоже эффективно рекурсивно неотделимы.*

г) *Если каждая аксиоматизируемая теория, отделяющая $L(K_2)$ от NgK_2, совместна с некоторой конечно аксиоматизируемой существенно неразрешимой теорией, то то же самое верно и для K_1.*

---

[1]) Если ψ — формула и $w_0, \ldots, w_{n-1}$ — переменные, то $\psi(w_0, \ldots, w_{n-1})$ есть формула, полученная одновременной подстановкой $w_0, \ldots, w_{n-1}$ вместо свободных вхождений $v_0, \ldots, v_{n-1}$ в ψ, с изменением, если потребуется, связанных переменных (некоторым эффективным фиксированным способом), чтобы избежать коллизии переменных.

[2]) Если символ равенства входит в K_2, его можно интерпретировать так же, как и любой другой символ отношения.

[3]) См. [10] и [13, примечание 17, стр. 22].

[4]) Если K_2 — теория, то предположения из (а), очевидно, эквивалентны утверждению, что любая теория, совместная с K_2, неразрешима.

[5]) Определения этих понятий см. в [12] или [17].

Доказательство. Для каждого предложения $\sigma \in ExK_3$ пусть $f(\sigma)$ есть предложение $\bigwedge y_0 \ldots \bigwedge y_{p-1} \bigwedge z_0 \ldots \bigwedge z_{q-1} \left\{\bigvee u_0^0 \ldots \bigvee u_r^0 \in \in\left(u_0^0, \ldots, u_r^0, y_0, \ldots, y_{p-1}\right) \rightarrow \sigma^*\right\}$. Тогда, очевидно,

$$\begin{cases} \textit{если } \sigma \in L(K_2), \textit{ то } f(\sigma) \in L(K_1); \\ \textit{если } \sigma \in NgK_2, \textit{ то } f(\sigma) \in NgK_1. \end{cases} \tag{1}$$

(Действительно, первое истинно в силу теоремы о подстановке в логике предикатов, второе означает как раз, что обеспечена экзистенциальная интерпретируемость.) Заметим также, что для любых предложений $\sigma_1, \sigma_2 \in ExK_2$ утверждение

$$f(\sigma_1 \rightarrow \sigma_2) \rightarrow [f(\sigma_1) \rightarrow f(\sigma_2)] \tag{2}$$

тождественно истинно.

Поскольку функция f рекурсивна, мы имеем в силу (1), как говорят, свед́ение пары $L(K_2)$, NgK_2 к паре $L(K_1)$, NgK_1. Хорошо известно и легко доказывается, что такое свед́ение позволяет нам получить импликации (б) и (в). Импликация (а) может быть получена сходным образом, если использовать дополнительное условие (2). Чтобы сделать представление об этом более ясным, мы изложим подробно доказательство (г).

Предполагаем, что условия (г) выполнены; пусть A_1 — аксиоматизируемая теория, отделяющая $L(K_1)$ от NgK_1. Пусть $A_2 = \{\sigma / f(\sigma) \in A_1\}$. По (1), A_2 отделяет $L(K_2)$ от NgK_2. По (2) и рекурсивности f, теория A_2, более того, аксиоматизируема. Следовательно, существует предложение δ, совместное с A_2, такое, что $Th(\delta)$[1]) существенно неразрешима. Следовательно, $\sim\delta \notin A_2$, так что $f(\sim\delta) \notin A_1$, и $\sim f(\sim\delta)$ совместна с A_1. $Th(\sim f(\sim\delta))$, очевидно, существенно неразрешима (действительно, это специальный случай (а)[2])).

Отношение экзистенциальной интерпретируемости, как легко видеть, транзитивно.

Можно построить пример, который показывал бы, что существенно неразрешимая теория может быть экзистенциально интерпретируема иногда в непротиворечивой разрешимой теории.

---

[1]) $Th(\delta)$ есть теория, единственная аксиома которой есть δ.

[2]) Именно этот специальный случай (а) изложен в [13, часть 1, теорема 8]. Можно упомянуть, что понятие несущественного расширения [13], очевидно, следующим образом связано с экзистенциальной интерпретируемостью: T_2 слабо экзистенциально интерпретируемо в T_1 тогда и только тогда, когда T_2 слабо интерпретируемо в несущественном расширении T_1.

3. Теория R_0

Предикатные символы R_0 есть Δ_0, Sc, Sm, Pr и $\leqslant$ соответственно 1-, 2-, 3-, 3- и 2-местные. Пусть формулы $\Delta_{n+1}(x)$ определяются индуктивно условием: Δ_{n+1} есть $\bigvee y[\Delta_n(y) \wedge Sc(y, x)]$ [1]. R_0 имеет следующие аксиомы:

(I) (a) $\bigvee x\Delta_m(x)$, (б) $\Delta_m(x) \to \sim \Delta_n(x)$ (для $m \neq n$);

(II) $\Delta_m(x) \wedge \Delta_n(y) \to [S_m(x, y, z) \to \Delta_{m+n}(z)]$;

(III) $\Delta_m(x) \wedge \Delta_n(y) \to [Pr(x, y, z) \to \Delta_{mn}(z)]$;

(IV) $\Delta_n(y) \to [x \leqslant y \leftrightarrow \Delta_0(x) \vee \ldots \vee \Delta_n(x)]$.

В отличие от R_0 R имеет символ равенства и постоянные термы для Δ_n. Более того, R имеет схему аксиом

(V) $(x \leqslant \Delta_n \vee \Delta_n \leqslant x)$,

для которой нет аналогичной схемы в R_0. В действительности схема (V) может быть опущена из R без изменения каких-либо существенных свойств R. R_0 вместе с R обладает свойствами 1.3 и 1.4, а также следующим свойством.

3.1. *Каждая рекурсивная функция или рекурсивное отношение определимы в* R_0.

В 3.1 мы рассматриваем $n+1$-местное числовое отношение W (или функцию f) как *определимое в* R_0, если для некоторой формулы $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ [соответственно $\psi(v_0, \ldots, v_{n+1}]$ с указанными свободными переменными

$\Delta_{k_0}(v_0) \wedge \ldots \wedge \Delta_{k_n}(v_n) \to \varphi$ принадлежит R_0, если $Wk_0 \ldots k_n$,

и

$\Delta_{k_0}(v_0) \wedge \ldots \wedge \Delta_{k_n}(v_n) \to \sim\varphi$ принадлежит R_0, если $\sim Wk_0 \ldots k_n$ (соответственно $\Delta_{k_0}(v_0) \wedge \ldots \wedge \Delta_{k_n}(v_n) \to$

$\to [\psi \leftrightarrow \Delta_{f(k_0, \ldots, k_n)}(v_{n+1})]$ принадлежит R_0).

Очевидно, что 1.4 истинно для R_0. Теорема 3.1 может быть доказана в основном обычным способом (см. [13, часть 2, теорема 6] или [7, § 49 и 59]); однако необходимо средство, заменяющее схему аксиом (V). Грубо говоря, это средство состоит в релятивизации некоторых кванторов при помощи формулы $N(z)$:

$$\bigvee y[\Delta_0(y) \wedge y \leqslant x] \wedge \bigwedge y \bigwedge z[y \leqslant x \wedge Sc(y, z) \to x \leqslant z \vee z \leqslant x].$$

Ограничившись этими указаниями, мы предоставим детали доказательства 3.1 читателю. Наконец, 1.3 для R_0 следует из 3.1 очевидной модификацией известных рассуждений (см. [13, часть 2, теорема 1]).

[1]) Для удобства договоримся на дальнейшее, что x, y, z есть v_0, v_1, v_2 соответственно и что $x, y, z, u, w, x_0, \ldots, x'$ и т. д. — различные переменные.

Возможность модификации R и определения „определимости" на этом пути так, чтобы еще можно было установить 3.1 и вывести из 3.1 затем 1.3, была замечена независимо Кобхамом и позднее автором почти три года тому назад.

Следовало бы упомянуть, что доказательство Кобхама 1.5 использует остроумную идею, намного более глубокую, чем та, которая упоминалась выше, в утверждениях и доказательствах теорем 1 и 6 из [13, часть 2].

4. Теорема Трахтенброта

Множества L и F (и, следовательно, смысл 1.6 и 1.7) не определены до тех пор, пока мы точно не укажем, какие символы отношений входят в предложения из L и F. Трахтенброт [15] показал, что для некоторого конечного списка символов отношений 1.6 истинно; мы будем использовать обозначения L' и F' для этого случая. Обозначения L и F будут использоваться для случая, когда только один бинарный символ отношения P допускается. В [18] было отмечено, что (рассматривая какой-нибудь из известных способов сведе́ния разрешающей процедуры для L' к разрешающей процедуре для L) можно вывести 1.6 для L и F из 1.6 для L' и F', аналогично и для 1.7. В де́йствительности в свете § 2 мы можем сказать, что в [18] по существу было замечено, что

4.1. F' *экзистенциально интерпретируема в* F

плюс еще соответствующие случаи (б) и (г) из 2.1 [1]). (Заметим, что F и F' являются псевдотеориями.)

Доказательство Трахтенброта 1.6 (для L' и F') показало, что на самом деле L' и NgF' эффективно рекурсивно неотделимы. (Это видно, если заметить, что Трахтенброт показал, что существует сведе́ние пары Клини рекурсивно перечислимых рекурсивно неотделимых множеств к паре L', NgF'. Поскольку предшествующие два множества эффективно рекурсивно неотделимы (см., например, [7, § 61]), отсюда следует, что такими же являются L' и NgF'.) Следовательно, по 4.1 и 2.1 (в):

4.2. L *и* NgF *эффективно рекурсивно неотделимы.*

5. Теорема Кобхама

5.1. F *экзистенциально интерпретируема в* R_0.

Доказательство. Хорошо известно, что существует трехместное рекурсивное отношение W, такое, что для любого k и для любого

[1]) См. [18, § 4 и примечания 4 и 20]. (В выделенном курсивом в примечании 20 утверждения σ и $\sigma^\wedge$ нужно поменять местами.)

двуместного отношения Q между элементами $\{0, \ldots, k\}$ существует такое натуральное число j, что для любых m, n $Wmnj$ тогда и только тогда, когда Qmn.

Теперь мы определим $p, q, r, \in$ и ρ так, чтобы получить желаемую экзистенциальную интерпретацию (см. § 2). По 3.1, мы можем выбрать в качестве $\rho(v_0, v_1, v_2)$ такую формулу, что

$$\rho(v_0, v_1, v_2) \text{ определяет } W \text{ в } R_0. \tag{3}$$

Положим $p = q = r = 1$, и пусть $\varepsilon(v_0, v_1)$ есть формула $v_0 \leqslant v_1$.

Предположим, что $\delta \in F$ и что σ^* получается из σ, как описано в § 2. Тогда из (3) и схемы аксиом (IV) легко вывести, что, как требуется, формула

$$\bigvee y_0 \bigvee z_0 \sigma^* \tag{4}$$

истинна в R_0.

Теоремы 2.1 (в), 4.2 и 5.1 дают новое доказательство теоремы Кобхама 1.5 и даже более сильного утверждения:

5.2. *$L(R_0)$ и NgR_0 эффективно рекурсивно неотделимы*[1]).

Аналогично из 2.1 (г), 1.7 и 5.1 одновременно получаем второй результат (из которого также следует 1.5):

5.3. *Если A — некоторая аксиоматизируемая теория, совместная с R_0, то A совместна с некоторой конечно аксиоматизируемой и существенно неразрешимой теорией.*

На практике, очевидно, следует использовать конкретную теорию, такую, как Q, в качестве Σ, когда применяют 1.2. Теоретически 5.3, таким образом, означает только, что 1.5 не дает аксиоматизируемых и неразрешимых теорий, уже не полученных из 1.2. Однако даже теоретически 5.3 не применяется к неаксиоматизируемым теориям, таким, как G.

6. Теории множеств

Можно построить различные теории множеств, теории сочленений и т. п., которые имеют сходство с теориями R и R_0.

Одной из таких теорий является следующая очень слабая теория множеств цермеловского типа Z_0, имеющая символ равенства и символ двуместного отношения ε. Для произвольного множества X пусть $P(X)$ будет множеством подмножеств X; пусть $M = 0 \cup P(0) \cup PP(0) \cup \ldots$. Для $r = \{s_0, \ldots, s_{n-1}\} \in M$ формулу $D_r(x)$ определим по индукции; пусть $D_r(x)$ есть

$$\bigvee y_0 \cdots \bigvee y_{n-1} \Big[\prod_{i<n} \big(D_{s_i}(y_i) \wedge y_i \in x\big) \wedge \bigwedge z \Big(z \in x \to \sum_{i<n} z = y_i\Big)\Big].$$

Аксиомами Z_0 являются все предложения

$$\prod_{i<n} D_{s_i}(x_i) \to \bigvee y \bigwedge z \Big(z \in y \leftrightarrow \sum_{i<n} z = x_i\Big) \qquad (\text{для } s_0, \ldots, s_{n-1} \in M).$$

В качестве $\rho(x', y, z)$ возьмем формулу (упорядоченную по Куратовскому пару):

$$\bigvee w \bigvee w' \bigwedge u \,[(u \in z \leftrightarrow u = w \vee u = w') \wedge (u \in w \leftrightarrow u = x) \wedge$$
$$\wedge (u \in w' \leftrightarrow u = x \vee u = y)].$$

Легко проверить, что (4) принадлежит Z_0, если $\sigma \in F$. Следовательно,

6.1. *F экзистенциально интерпретируема в Z_0.*

Теория Z_{00}, еще более слабая, чем Z_0, могла бы быть определена как имеющая только аксиомы $\bigvee x D_r(x) (r \in M)$. Я был не в состоянии определить, является ли Z_{00} существенно неразрешимой или нет.

Следующей мы рассмотрим теорию второго порядка T_0, описанную в [18] и незначительно отличающуюся от теории, введенной в [15]; она будет обсуждаться в дальнейшем еще в разд. 7. В ней имеются символы отношений I, ε, ρ, соответственно 1-, 2- и 3-местные. (Ix читается: „x есть индивидуум".) Аксиомами ее являются предложения α:

$$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge u\, [x \in u \vee \rho(x, y, u) \vee \rho(y, x, u) \to Ix] \wedge \bigvee u \bigwedge x\, x \notin u \wedge$$
$$\wedge \bigvee u \bigwedge x \bigwedge y \sim \rho(x, y, u) \wedge \bigwedge u \bigwedge y \bigwedge y' \{Iy \wedge Iy' \to$$
$$\to \bigvee u' \bigvee u'' \bigwedge x \bigwedge x' [\,[x \in u' \leftrightarrow x \in u \vee x = y] \wedge [\rho(x, x', u'') \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \rho(x, x', u) \vee (x = y \wedge x' = y')]\,]\}$$

и все предложения $\bigvee x_0 \ldots \bigvee x_{n-1} \Big(\prod_{i<n} Ix_i \wedge \prod_{i<j<n} x_i \neq x_j\Big)$. Снова предложение (4), очевидно, принадлежит T_0, если $\sigma \in F$. Следовательно,

6.2. *F экзистенциально интерпретируема в T_0.*

(T_0 можно ослабить без изменения этого свойства.)

Наконец, мы рассмотрим теорию S, которая тесно связана с псевдотеорией F, не имеет символа равенства и имеет символы отношений ε и ρ. Ее аксиомами являются просто все предложения (4), такие, что $\sigma \in F$. Очевидно, что

---

[1]) Было замечено [6, теорема 2.5Б], что условие 3.1 (для R) влечет утверждение (А): R и NgR рекурсивно неотделимы. В [4] Феферман показал, что (Б): каждое аксиоматизируемое совместное расширение R креативно. Шмульян [12] установил результат, из которого следуют и (А) и (Б), именно (В): R и NgR эффективно рекурсивно неотделимы. Теорема 5.2 в свою очередь влечет и (В) и 1.5. Доказательство Кобхама теоремы 1.5 можно легко модифицировать так, чтобы получить доказательство 5.2, повторяя изменения в доказательстве 1.3, которые потребовались для того, чтобы доказать (А), (Б) и (В).

6.3. *F экзистенциально интерпретируема в S.*

В действительности, как легко показать, S обладает специальным свойством:

6.4. *Для любой псевдотеории K, F экзистенциально интерпретируема в K тогда и только тогда, когда S интерпретируема в K.*

По 6.1, 6.2, 6.3, 2.1, 4.1 и 4.2, мы видим, что 5.2 и 5.3 истинны для любой из теорий Z_0, T_0, S_0, взятой вместо R_0.

Из существенной неразрешимости Z_0 следует, что более сильная теория Z_1, аксиомами которой являются $\bigvee u \bigwedge z\ (z \notin u)$ и $\bigwedge x \bigwedge y \bigvee u \bigwedge z\ (z \in u \leftrightarrow z \in x \vee z = y)$, также существенно неразрешима [1]). Это является ответом на вопрос, поставленный Тарским и Шмелевой, которые установили (см. [13, стр. 34]) существенную неразрешимость теории, имеющей, кроме этих двух, еще аксиому объемности.

Кобхам заметил, что теорема Трахтенброта 1.6 для множеств $L(G)$ и $F(G)$ (или для множеств $L(R_0)$ и $F(R_0)$) есть следствие результатов Кобхама, касающихся G (или R_0), поскольку $G \subseteq F(G)$ ($R_0 \subseteq F(R_0)$, согласно 1.4). Поскольку при доказательстве 4.1 не использовались никакие специфические предположения о том, какие символы отношений входят в члены из F', из 4.1 можно в действительности вывести, что

6.5. *Каждая псевдотеория K, такая, что $K \subseteq F(K)$, экзистенциально интерпретируема в F.*

Теперь очевидно, что $Z_0 \subseteq F(Z_0)$, $T_0 \subseteq F(T_0)$ и $S \subseteq F(S)$. Окончательно из 6.5, 6.1, 6.2, 6.3, 5.1 заключаем, что в некотором смысле все псевдотеории F, Z_0, T_0, S, R_0 и R равномощны. Точнее,

6.6. *Каждая из теорий F, Z_0, T_0, S, R_0 и R экзистенциально интерпретируема в каждой из остальных.*

Относительно теорий S, Z_0, T_0, R_0 и R можно спросить, какие из них интерпретируемы (в обычном смысле) в некоторых из остальных. Легко видеть, что Z_0 интерпретируема в R_0 и что R_0 (и, следовательно, Z_0) интерпретируема в R и в T_0. Это единственные случаи, относящиеся к Z_0, T_0, R_0 и R, когда имеется положительный ответ; хотя мы не имеем доказательства, кажется, что в остальных случаях ответ будет отрицательным. Вообще представляется, что установить неинтерпретируемость весьма затруднительно.

[1]) Тот же самый результат можно получить, интерпретируя теорию T_0 в Z_1. Что касается существенной неразрешимости этой теории, ср. [18, стр. 12, 13], где имеются ссылки на связанные с этим результатом работы [16].

В заключение заметим, что

6.7. *Ни одна из теорий Z_0, T_0, R_0 и R не интерпретируема в S.*

Доказательство (очень утомительное) получается, если использовать результаты из [5], касающиеся элементарной теории модели, которая является кардинальной суммой других моделей (см. [5, теорема 3.2, § 4.7 и теорема 6.1.2]).

7. Усиление 5.3

Дж. К. Шепердсон поставил вопрос, можно ли следующим образом усилить 5.3:

7.1. *Если A — аксиоматизируемая теория, совместная с R, то A совместна с некоторой конечно аксиоматизируемой теорией, являющейся расширением R.*

Я доказал 7.1 и соответствующее утверждение для R_0. Доказательства получаются при помощи небольших изменений в конце кобхамовского доказательства 1.5. Кажется существенным применение в доказательстве 7.1 (для R или R_0) идей, заключенных в доказательстве Кобхама теоремы 1.5. Можно также спросить, истинно ли 7.1 для Z_0, T_0 или S вместо R. Оказывается, что ответ будет утвердительным для Z_0 и T_0, но отрицательным для S. Для большинства рассматриваемых свойств, как было показано, достаточно просто перейти от одной из теорий R_0, Z_0, T_0 или S к остальным. Но в случае 7.1, кажется, требуются самостоятельные рассуждения для каждой рассматриваемой теории.

Мы здесь не будем доказывать 7.1, но установим аналогичный результат для T_0 (который назовем 7.2). В действительности теория T_0 была построена (по существу, Трахтенбротом) именно таким образом для того, чтобы иметь возможность получить короткое доказательство (в [15] и [18]) 1.6 и 1.7. Следовательно, рассуждения для 7.2, которые мало отличаются от этих доказательств, тоже короткие.

Доказательство 7.2. Пусть A — аксиоматизируемая теория, совместная с T_0. Для каждого предложения $\sigma \in ExF$ построим формулу $\sigma^* \in Ex(T_0)$ так, как указано в § 2 (с $p = q = r = 1$). Тогда предложение $\bar{\sigma}$

$$\alpha \wedge \bigvee y_0 \bigvee z_0 [\bigvee w (w \in y_0) \wedge \sigma^*],$$

очевидно, совместно с A, когда $\sigma \in F$ (поскольку тогда $\bar{\sigma} \in T_0$). Теперь если предложение $\bar{\sigma}$ совместно с A, только когда $\sigma \in F$, мы могли бы вывести отсюда, что $\bar{\sigma} \in A$ тогда и только тогда, когда $\sigma \in F$, и, следовательно, что F имеет рекурсивно перечислимое дополнение. Это противоречило бы результату Трахтенброта [14]. Таким образом, A совместна с некоторым таким предложением $\bar{\sigma}$, что σ не имеет конечных моделей. Легко проверяется рассмотрением аксиом T_0, что $Th(\bar{\sigma})$ есть расширение T_0, что завершает доказательство.

Поскольку из 7.2 следует, что предположение (г) из 2.1 выполнено для T_0, получаем (не используя 6.6) доказательство 1.7.

Что касается Z_0, положение здесь напоминает положение для R. Чтобы показать, что 7.1 истинно для Z_0, нужно предварительно установить некоторые специальные свойства Z_0.

Можно показать, что 7.1 ложно для S, т. е. что

7.3. *Существует непротиворечивое конечное расширение S, не совместное ни с каким конечно аксиоматизируемым расширением S.*

Утверждение 7.3 можно установить достаточно просто, опираясь на результат из [5, теорема 6.10—6.7.1], касающийся кардинальных сумм.

Эренфойхт и Феферман [3] показали, что в любой аксиоматизируемой теории, которая является совместным расширением R, каждое рекурсивно перечислимое множество представимо¹).

Шепердсон доказал эту же теорему более непосредственно и затем, используя результаты, содержащиеся в кобхамовском доказательстве 1.5, смог установить более сильную теорему:

7.4. (Шепердсон). *В любой аксиоматизируемой теории A, совместной с R, каждое рекурсивно перечислимое множество представимо.*

Шепердсон тогда мотивировал вопрос 7.1 тем, что, зная 7.1, можно получить 7.4 сразу из теоремы Эренфойхта и Фефермана. (Действительно, пусть A совместна с $Th(\sigma)$, которая является расширением R; пусть $\theta(x)$ представляет множество Y в $Th[A \cup \{\sigma\}]$. Тогда $\sigma \to \theta(x)$ представляет Y в A.)

Патнэм и Шмульян [9] доказали теорему Эренфойхта и Фефермана другим путем, показав, что в каждой аксиоматизируемой теории, которая является совместным расширением R, каждая пара непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств может быть „точно отделена“ (в смысле, описанном в [9]). Используя те же рассуждения Шепердсона, ввиду 7.1 можно снова заменить „совместное расширение“ на „совместное с“.

¹) Определение „представимости“ см. [6]. В обсуждении представимости мы будем лучше рассматривать R, чем R_0, чтобы избежать рассмотрения различных возможностей, которые появляются, когда пытаются определить это понятие для R_0.

8. Некоторые проблемы

8.1. *Существует ли конечно аксиоматизируемая неразрешимая теория, которая не совместна ни с какой конечно аксиоматизируемой существенно неразрешимой теорией*¹)?

Эренфойхт [3] и Патнэм [8] показали, что 8.1 решается положительно, если опустить первое из слов „конечно“. Как заметил Кобхам, если в 8.1 заменить „конечно аксиоматизируемая неразрешимая“ на „аксиоматизируемая наследственно неразрешимая“, то ответ, кажется, останется неизвестным. (Это же верно и для нижеследующих проблем 8.2 и 8.3.) Теорема Кобхама 1.5 могла бы на первый взгляд показаться открывающей возможный метод для нахождения теории, требуемой в 8.1, но 5.3 показывает, что на самом деле это не так.

Вторая проблема была предложена Феферманом [4]:

8.2. *Существует ли теория, которая является конечно аксиоматизируемой и неразрешимой, но не имеет наивысшую степень неразрешимости для рекурсивно перечислимых множеств?*

Феферман [4] получил положительный ответ, опустив „конечно“; Шёнфилд [11] показал, что это останется верным, если дополнительно „неразрешимой“ заменить на „существенно неразрешимой“. Феферман [4] показал, что никакая теория, в которой R интерпретируема или Q слабо интерпретируема, не может служить примером для проблемы 2. Согласно 5.2, это же верно для любой теории, в которой R слабо экзистанциально интерпретируема.

Оказывается, трудность проблем 8.1 и 8.2 связана со следующим неточным вопросом: существует ли способ доказательства неразрешимости конечно аксиоматизируемой теории, отличный от первоначального метода Гёделя и Чёрча? В 8.3 мы пытаемся точно сформулировать этот вопрос.

8.3. *Существует ли теория, которая конечно аксиоматизируема и неразрешима, но в которой S не интерпретируема даже слабо?*

Из 6.4, 6.5, 6.6 видно, что различные возможные варианты проблемы 3 эквивалентны.

Добавление к доказательству. Если ExK_2 содержит знак $=$ (и, скажем, P), тогда первое из утверждений (1) в доказательстве 2.1 может не иметь места. Однако 2.1 остается верным, поскольку рассматриваемое утверждение истинно для *некоторой* экзистенциальной

¹) Эта проблема, кажется, поставленная Тарским, обсуждалась в [1, стр. 393; 18, стр. 13].

интерпретации. Действительно, легко проверить, что нужная экзистенциальная интерпретация получается из произвольной данной экзистенциальной интерпретации, если сделать только следующие изменения: при построении новой σ^* следует дополнительно заменить каждое $x = y$ на старую φ^*, где φ есть формула

$$\bigwedge z\,[(z = x \to z = y) \wedge (x = z \to y = z) \wedge (Pxz \to Pyz) \wedge (Pzx \to Pzy)].$$

(Здесь существенно, что ExK_2 содержит только конечное число различных символов отношений.)

ЛИТЕРАТУРА

1. Cobham A., Effectively decidable theories, Summaries of talks presented at the Summer Institute for Symbolic Logic, Cornell University, 1957, second edition, Institute for Defense Analyses, 1960, 391—395.
2. Ehrenfeucht A., Two Theories with axioms built by means of pleonasms, *J. Symbolic Logic*, **22** (1957), 36—38.
3. Ehrenfeucht A., Feferman S., Representability of recursively enumerable sets in formal theories, *Archiv für Math. Logik u. Grundlagenforschung*.
4. Feferman S., Degrees of unsolvability associated with classes of formalized theories, *J. Symbolic Logic*, **22** (1957), 161—175.
5. Feferman S., Vaught R., The first order properties of products of algebraic systems, *Fundaments Mathematicae*, **47** (1959), 57—103.
6. Grzegorczyk A., Mostowski A., Ryll-Nardzewski C., The classical and the ω-complete arithmetic, *J. Symbolic Logic*, **23** (1958), 188—203.
7. Клини С. К., Введение в метаматематику, М., ИЛ, 1957.
8. Putnam H., Decidability and essential undecidability, *J. Sumbolic Logic*, **22** (1957), 39—49.
9. Putnam H., Smullyan R., Exact separation of recursively enumerable sets within theories, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 547—577. (Abstract presented at this Congress.)
10. Robinson A., Lightstone A. H., Syntactical transforms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **86** (1957), 220—245.
11. Shoenfield J., Degrees of formal systems, *J. Symb. Logic*, **23** (1958), 389—392.
12. Smullyan R. M., Theories with effectively inseparable nuclei, *J. Symbolic Logic*, **23** (1958), 458.
13. Tarski A., Mostowski A., Robinson R. M., Undecidable Theories, Amsterdam, North-Holland, 1953.
14. Трахтенброт Б. А., Невозможность алгоритма для проблемы разрешения на конечных классах, *ДАН СССР*, **70** (1950), 569—572.
15. Трахтенброт Б. А., О рекурсивной отделимости, *ДАН СССР*, **88** (1953), 953—956.
16. Трахтенброт Б. А., Определение конечных множеств и дедуктивная неполнота теории множеств, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **20** (1956), 569—582.
17. Успенский В. А., Теорема Гёделя и теория алгоритмов, *ДАН СССР*, **91** (1953), 737—740.
18. Vaught R., Sentences true all constructive models, *J. Symb. Logic*, **24** (1959), 1—15.

Теория иерархий [1]

Дж. АДДИСОН

Мичиганский университет, Анн Арбор, Мичиган, США
Калифорнийский университет, Беркли, Калифорния, США

Конечно, одной из наиболее печальных сторон таких конгрессов, как этот, является то, что надежда получить удовольствие от докладов в области, не своей собственной, а „соседней“ рушится перед реальной действительностью расширения громадного здания современной математики и логики.

Такое крушение надежд напоминает вопрос Гильберта, поставленный на другом международном конгрессе, проходившем ровно 60 лет назад в том же месяце [15, стр. 478]:

> „...вопрос, стоящий перед нами, заключается в том, осуждена ли математика на гибель подобно другим наукам, разделившимся на отдельные отрасли, представители которых едва понимают друг друга и связь между которыми становится все слабее“.

Ободряюще звучит его собственный ответ на этот вопрос:

> „Я не верю в это и не желаю этого. Математическая наука, в моем понимании, есть неделимое целое, организм, жизненность которого обусловлена связью его частей. Ибо, несмотря на все разнообразие математического знания, нам ясно сходство логических аппаратов, взаимосвязь идей в математике как целом и многочисленные аналогии между ее разными областями. Отметим также, что чем дальше развивается математическая теория, тем более гармонично и однородно развивается ее конструкция и между далекими до того областями науки открываются несомненные связи. Радостно, что с развитием математики ее органический характер не только не теряется, но проявляется еще более ясно“.

Теория иерархий успешно подтверждает предсказание Гильберта, и я рад попытаться предложить вам сегодня некоторые соображения, подтверждающие его убеждение.

1. Теории иерархий

Что такое теория иерархий? Прежде чем дать характеристику этого понятия, опишем вкратце существующие теории иерархий.

[1] Addison J. W., The theory of hierarchies, стр. 26—37.

Мы имеем в виду здесь теории иерархий, возникшие более или менее независимо в трех областях математики и логики, а именно: в анализе, в теории рекурсивных функций и в чистой логике.

Теория иерархий в анализе раньше считалась тождественной с тем, что сейчас называется *дескриптивной* [1]) *теорией множеств*. С началом этой первой „ветвей теории иерархий" мы связываем прежде всего имена Бореля, Бэра, Лебега, Суслина, Лузина, со второй — Клини, Мостовского (и, позднее, Кондо), с третьей — Эрбрана и Тарского с его школой. Во всех трех областях опубликованы результаты более чем ста авторов.

Интересно взаимодействие между математическими и метаматематическими подходами в этих ветвях теории иерархий. В анализе долго преобладал математический подход, и лишь недавно начал развиваться и метаматематический подход. В то же время в теории рекурсивных функций и чистой логике первые подходы были метаматематическими, хотя теперь математическая точка зрения вносит важные вклады в каждую из них, особенно в последнюю. Из основополагающей работы Куратовского и Тарского [18] известно, что выбор точки зрения, по крайней мере в исходной теории, важен только в силу психологических, эвристических причин. И так как развивается теория языков с бесконечно длинными выражениями, кажется ясным, что это утверждение может быть расширено на все аспекты уже развившихся теорий.

Теории, возникающие в анализе и в учении о рекурсивных функциях, уже в значительной степени объединены [1, ч. II; 2; 5]. Мы хотим указать путь их дальнейшего объединения с теорией, возникшей в чистой логике.

2. Теория иерархий

Мы будем вести наше исследование в рамках языка чистой простой теории типов, т. е. чистого исчисления предикатов [2]) порядка ω. Для этого языка мы рассмотрим различные способы задания фиксированных интерпретаций различных классов переменных, или, иными словами, мы рассмотрим языки различных *прикладных* исчислений предикатов порядка ω.

Совершенно не существенно, какую из различных формулировок этих языков выбрать. Для наших целей неважно, будет ли в числе

[1]) См., например, [19] (стр. XIII).

[2]) Под *грамматикой* мы понимаем множество примитивных символов и правил образования без связанной с ним структуры, относящейся к теории моделей или к теории доказательств; под *языком* — грамматику вместе с ее интерпретацией (т. е. со структурой, относящейся к теории моделей); под *исчислением* — грамматику вместе со связанными с ней структурами, относящимися к теории моделей и теории доказательств.

исходных символов равенство и будут ли входить в их число функциональные переменные вместо предикатных переменных или в дополнение к ним. Хотя такие различия ведут к некоторым изменениям в деталях теории, в частности в результатах начального уровня, относящихся к низшему типу, теории по большей части легко переводимы одна в другую. Мы будем обычно считать, что в числе исходных понятий нет равенства и функциональных переменных. С другой стороны, желательно, чтобы допускалось бесконечно много постоянных и, возможно, также бесконечно много переменных, хотя последними мы здесь не будем пользоваться.

Хорошо известно, что для каждой формулы одного из этих языков существует логически эквивалентная формула в предваренной нормальной форме, т. е. такая, в которой все кванторы находятся впереди. Последовательность кванторов в такой формуле называется *префиксом*, остаток формулы — область действия самого правого квантора — называется *матрицей*. Легко показать далее, что каждая формула логически эквивалентна формуле *в полной предваренной нормальной форме*, т. е. в такой предваренной нормальной форме, в которой никакой квантор не имеет правее себя квантор более высокого типа.

Мы можем теперь приблизительно сказать, что теория иерархий имеет дело с определенным классом синтаксических свойств формул в полной предваренной нормальной форме, а именно свойств, относящихся к виду префиксов.

Изучалось много синтаксических свойств — сразу приходят в голову прилагательные „атомарные", „положительные", „хорновские", но, может быть, ни одно из них не играло более важной роли в логике, не изучалось дольше, чем вид префиксов. Уже перед вышеупомянутым докладом Гильберта эта теория обсуждалась в двух далеких друг от друга областях: в работе Пирса о предваренной нормальной форме и в исследовании Бореля о множествах, которые теперь носят его имя.

Каковы синтаксические особенности префиксов, чем они различаются? Существуют четыре главных свойства префикса формулы в полной предваренной нормальной форме:

1) наивысший *тип* переменной в нем;

2) *род* ведущего квантора (самого левого), т. е. является ли он квантором существования или всеобщности;

3) число „блоков" однородных кванторов (т. е. кванторов одного *рода*) наивысшего типа — оно равно единице плюс число *перемен* среди кванторов наивысшего типа;

4) число и ранги кванторов в каждом блоке.

Последнее свойство обычно представляется менее важным, хотя иногда и оно важно (ср. классический пример различия между префиксами $\bigvee a_1 \bigvee a_2 \bigwedge b$ и $\bigvee a_1 \bigvee a_2 \bigvee a_3 \bigwedge b$ в проблеме разрешения для исчисления предикатов первого порядка). Свойства 1 и 3 особенно важны как мера сложности формул и определяемых этими формулами понятий, как часто отмечают университетские преподаватели математики.

Мы будем пользоваться, как выше, строчными римскими буквами для индивидуальных переменных (т. е. переменных типа 0), прописными римскими буквами с индексами t для переменных типа t $(0 < t < \omega)$.

Под моделью формулы относительно данной интерпретации постоянных этой формулы мы понимаем, как обычно, упорядоченную систему $n+1$ $(n \geqslant 0)$ элементов, компоненты которой дают область значений и интерпретации для n свободных переменных формулы, удовлетворяющих формуле при данной интерпретации постоянных.

Мы будем связывать с каждой формулой языка класс всех ее моделей. Если $\mathfrak{P}$ — прикладной предикатный язык порядка ω (включая интерпретацию постоянных и, возможно, область значений), то обозначим через $\bigvee_k^t(\mathfrak{P})$ $\{\bigwedge_k^t(\mathfrak{P})\}$ класс формул из $\mathfrak{P}$ в полной предваренной нормальной форме с ведущим квантором существования (всеобщности) и типа t с k блоками однородных кванторов типа t. Для обозначения соответствующего семейства классов моделей относительно интерпретации постоянных, взятой в $\mathfrak{P}$, будем пользоваться теми же обозначениями [1]).

Иногда желательно подразделить эти классы дальше в соответствии с типами встречающихся свободных переменных. Следуя предложению Туге [24, стр. 99], мы можем пользоваться обозначением $\bigvee_k^{t,t'}(\mathfrak{P})$, $\bigwedge_k^{t,t'}(\mathfrak{P})$, где t' есть наименьшее целое, большее или равное -1, такое, что в формуле нет свободной переменной более высокого типа. В разд. 3—5 этой статьи мы остановимся для простоты на случаях, где $t' = -1$, 0, 1 (хотя некоторые замечания обобщаются на более высокие t'), т. е. здесь мы будем подразумевать, что отсутствие t' означает, что имеется в виду *один из этих случаев*.

Для каждого типа t, типа t' и языка $\mathfrak{P}$ обозначим через $\mathscr{H}(t, t', \mathfrak{P})$ иерархию $\lambda k \langle \bigvee_k^{tt'}(\mathfrak{P}), \bigwedge_k^{tt'}(\mathfrak{P})\rangle$. Эти „$\mathscr{H}$-иерархии" образуют очень общий класс: многие иерархии анализа, теории рекурсивных функций и логики таковы, что их первые ω уровней имеются среди этих иерархий.

Общая теория иерархий ставит целью найти общие принципы, применимые к большим совокупностям этих $\mathscr{H}$-иерархий, и исследует, как меняются свойства этих иерархий, когда меняется t или t' и когда $\mathfrak{P}$ меняется в каждом из нескольких различных направлений.

[1]) Три ограничения на конечность, подразумеваемые в наших определениях: конечность типов, формулы конечной длины, модели конечного множества формул, — могут быть ослаблены, но эти обобщения не совпадают с главным направлением статьи.

Во избежание громоздкости обозначений введем некоторые сокращения и специальные обозначения. Если $\mathfrak{P}$ есть чистый язык, мы будем опускать „$(\mathfrak{P})$". Если $\mathfrak{P}_{\mathscr{C}}$ — язык с постоянными для натуральных чисел и для предикатов в подмножестве $\mathscr{C}$ множества всех предикатов на множестве натуральных чисел, „$\bigvee_k^t(\mathfrak{P}_{\mathscr{C}})$" и „$\bigwedge_k^t(\mathfrak{P}_{\mathscr{C}})$" будут сокращенно записываться соответственно как „$\Sigma_k^t(\mathscr{C})$" и „$\Pi_k^t(\mathscr{C})$"; если $\mathscr{C}$ — класс рекурсивных предикатов, то „$(\mathscr{C})$" может быть опущено. Наше общее обозначение можно, таким образом, истолковать как обобщение, согласующееся с обозначениями в [5] [1]).

Для иллюстрации обозначений и удобства, которое оно дает, приведем список некоторых типичных обозначений каждой из трех ветвей теории иерархии вместе с соответствующими обозначениями только что написанного вида:

1) *анализ*

$F_{\sigma\delta}$	$\Pi_3^{0,1}(2^N)$
аналитическое (множество)	$\Sigma_1^{1,1}(2^N)$
РСА (проекция дополнения к аналитическому множеству)	$\Sigma_2^{1,1}(2^N)$
проективное (множество)	$\bigcup \Pi_k^{1,1}(2^N)$

2) *теория рекурсивных функций*

рекурсивно перечислимое (множество)	$\Sigma_1^{0,0}$
арифметическое (множество)	$\bigcup \Pi_k^0$
аналитическое (множество)	$\bigcup \Pi_k^1$

3) *чистая логика*

UC	$\bigwedge_1^0$
EC (прежнее обозначение AC)	$\bigcup \bigwedge_k^0$
AE	$\bigwedge_2^0$
PC	$\bigvee_1^1$

[1]) „$\Sigma_k^t(\mathscr{C})$", например, легко отличить от „$\Sigma_k^t[\mathscr{C}]$" из [5], так как мы используем круглые скобки вместо квадратных, но Σ_k^t сохраняет то же значение.

3. Аналогии

Покажем на некоторых примерах, что предлагаемое объединение не ограничивается поверхностными определениями, а является более глубоким. Здесь кажется особенно уместным рассмотреть те аналогии, которые привели к этому объединению.

Для этой цели желательно рассмотреть два важных свойства классов множеств: свойство отделимости (впервые сформулированное Лузиным) и свойство сводимости (впервые сформулированное Куратовским). Обозначив эти два свойства соответственно через $\mathrm{Sep}_{\mathrm{I}}$ и Red, как в [5], мы получим, по определению, что для любого класса $\mathscr{L}$ подмножеств множества S

$$\mathrm{Sep}_{\mathrm{I}}(\mathscr{L}) \leftrightarrow \forall X \forall Y [X,\ Y \in \mathscr{L} \& X \cap Y = \\ = \varnothing \to \exists X_1 [X_1 \in \mathscr{L},\ \mathrm{c}\mathscr{L} \& X_1 \supseteq X \& X_1 \cap Y = \varnothing]],$$

$$\mathrm{Red}(\mathscr{L}) \leftrightarrow \forall X \forall Y [X,\ Y \in \mathscr{L} \to \exists X_1 \exists Y_1 [X_1,\ Y_1 \in \mathscr{L} \& X_1 \subseteq \\ \subseteq X \& Y_1 \subseteq Y \& X_1 \cup Y_1 = X \cup Y \& X_1 \cap Y_1 = \varnothing]],$$

где $\mathrm{c}\mathscr{L}$ — класс дополнений (относительно S) множеств из $\mathscr{L}$. Важно напомнить, что $\mathrm{Red}(\mathscr{L}) \to \mathrm{Sep}_{\mathrm{I}}(\mathrm{c}\mathscr{L})$.

Несколько лет назад Р. Бюхи подал мне мысль о том, что сравнительное изучение иерархий теории рекурсивных функций и чистой логики может оказаться плодотворным. Но в то время не было достаточно ясно, обещает ли это большие успехи, и не было видно, каким образом две теории могли бы быть успешно соединены вместе. Положение прояснилось благодаря одному замечанию Крэйга, которое было удачно проанализировано в терминах того, что можно назвать „метааналогией“. Объединение теорий иерархий анализа и учения о рекурсивных функциях началось с замечания Мостовского о том, что аналогия между рекурсивно перечислимыми и аналитическими множествами нарушается в вопросе о $\mathrm{Sep}_{\mathrm{I}}$, которое является свойством для вторых, но не для первых. Это привело к переформулировке аналогии, которая сопоставляет рекурсивно перечислимые множества открытым множествам некоторого пространства, а Σ_1^1-множества — аналитическим множествам. При этом соответствии свойство $\mathrm{Sep}_{\mathrm{I}}$ выполняется. Переформулировка указывает путь объединения двух теорий.

Далее в связи с теорией иерархий в учении о рекурсивных функциях и в чистой логике Крэйг заметил [12, стр. 281], что аналогия между рекурсивно перечислимыми множествами и PC-множествами нарушается в вопросе о $\mathrm{Sep}_{\mathrm{I}}$, которое имеет место для вторых, но не для первых. Это приводит к переформулировке аналогии, сопоставляющей рекурсивно перечислимые множества экзистенциальным классам моделей, а Σ_1^1-множества — PC-классам. Опять при этом объединении $\mathrm{Sep}_{\mathrm{I}}$ выполняется. И снова эта переформулировка указывает путь объединения двух (и, следовательно, всех трех) теорий.

Вопрос о $\mathrm{Sep}_{\mathrm{I}}$ удобно рассматривать как часть некоторого большего комплекса аналогий.

Чистая логика

$$\begin{tikzcd}
 & \text{теорема отделимости Крэйга} \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "2"] & \\
\mathrm{PC} \cap \mathrm{cPC} = \mathrm{EC} \arrow[d, "*4"] & \text{\&} \arrow[u, "3"] & \mathrm{Sep}_{\mathrm{I}}(\mathrm{PC}) \\
\text{теорема Бета} & &
\end{tikzcd}$$

Анализ и теория рекурсивных функций

$$\begin{tikzcd}
 & \text{обобщенная теорема отделимости Лузина} \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "2"] & \\
\text{теорема Суслина — Клини} \arrow[d, "*4"] & \text{\&} \arrow[u, "3"] & \mathrm{Sep}_{\mathrm{I}}(\Sigma_1^1(\mathscr{C})) \\
\text{теорема об арифметических операторах.} & &
\end{tikzcd}$$

Теорема отделимости Крэйга [12, стр. 281] утверждает, что любые два непересекающихся класса из PC могут быть отделены классом из EC. Это непосредственно эквивалентно *интерполяционной теореме Крэйга* [11, теорема 5] — это просто переформулировка последней с заменой некоторых метаматематических понятий на математические и теоретико-множественного понятия интерполяции на понятие отделимости.

Интерполяционная теорема Крэйга в свою очередь почти непосредственно эквивалентна *теореме непротиворечивости Робинсона* [21, 2.9]; последняя следует из первой немедленно, а первая из последней — десятком способов, включая два применения теоремы компактности. Я также понял на этом конгрессе, что интерполяционная теорема Крэйга тесно связана с *теоремой (относительной) интерпретируемости Шпеккера*. Ввиду своей силы, тесной взаимосвязи с другими результатами в логике и многочисленных применений, обобщений и усовершенствований интерполяционная теорема Крэйга кажется центральным и важнейшим результатом в чистой логике после 1936 г.

Теорема Бета утверждает, грубо говоря, что на уровне первого порядка неявная определимость влечет точную определимость или, иначе, что метод Падоа является общим методом доказательства неэлиминируемости. Более точно, она утверждает, что

$$\Delta(\mathrm{F},\ \mathrm{G}) \wedge \Delta(\mathrm{F},\ \mathrm{H}) \Vdash \mathrm{G} = \mathrm{H} \to \exists \Delta' [\Delta(\mathrm{F},\ \mathrm{G}) \Vdash \mathrm{G} = \lambda a \Delta'(\mathrm{F},\ a)],$$

где Δ, Δ' — переменные для формул чистого исчисления предикатов первого порядка с точно отмеченными свободными переменными и где для краткости мы представляем, может быть, несколько свободных переменных как одну и, возможно, несколько G как одно, имеющее ранг $\vdash$.

Теорема Бета [8] является частным случаем следствия из интерполяционной теоремы Крэйга, релятивизированного по 1. Однако, хотя эта теорема была открыта позже интерполяционной теоремы (которая неявно имелась в некоторой более общей форме в диссертации Крэйга [10]), интерполяционная теорема именно ей обязана своим открытием. В самом деле, статья Бета [8] хотя и написана в такой форме, что, по-видимому, лишь немногие прочли ее как следует, тем не менее является определенно одним из наиболее стимулирующих вкладов в логику за последнее десятилетие. Как подтверждение этому можно назвать многих авторов (в том числе, например, Крэйг, Дэньо, Кейслер, Линдон, А. Робинсон, Шпеккер, Свенониус, Воот), которые расширили, усовершенствовали и передоказали результат Бета; некоторые из них докладывают эти результаты на настоящем конгрессе.

Обобщенная теорема отделимости Лузина утверждает, что для широкого класса $\mathscr{C}$ любые два непересекающихся $\Sigma_1^1(\mathscr{C})$-множества могут быть отделены множеством, суперарифметическим [1]) в предикатах $\mathscr{C}$. Это обобщает теорему отделимости Лузина [19, стр. 156] (которая получается как частный случай при $t'=1$ и $\mathscr{C}=2^N$).

Теорема Суслина — Клини утверждает, что широкий класс $\mathscr{C}\Sigma_1^1(\mathscr{C})\cap\Pi_1^1(\mathscr{C})$ есть в точности класс множеств (того же типа), суперарифметический в предикатах $\mathscr{C}$. Это обобщает теорему Суслина, которая получается как частный случай, когда $t'=1$ и $\mathscr{C}=2^N$, и теорему Клини XXI*, XXIV* из [16, стр. 202, 204, 210], которая получается как частный случай при $t'=0$ и когда $\mathscr{C}$ одноэлементно.

Теорема об арифметических операторах утверждает, что для широкого класса $\mathscr{C}$ значения оператора, арифметического в предикатах $\mathscr{C}$, являются, грубо говоря, „равномерно" суперарифметическими в предикатах $\mathscr{C}$ и их соответственных аргументах. Это тесно связано с работой Лузина о неявных определениях [19, ч. 4] и является обобщением замечания, сделанного, в частности,

1) Из нескольких определений суперарифметичности наиболее интуитивное утверждает, грубо говоря, что множество является *суперарифметическим в предикатах* $\mathscr{C}$ тогда и только тогда, когда оно принадлежит наименьшему классу множеств, содержащему $\Sigma_1^0(\mathscr{C})\cap\Pi_1^0(\mathscr{C})$ множества (того же типа) и замкнутому относительно объединений и пересечений $\Sigma_1^0(\mathscr{C})\cap\Pi_1^0(\mathscr{C})$ последовательностей. При $t'=0$ суперарифметичность в предикатах $\mathscr{C}$ равна гиперарифметичности в предикатах $\mathscr{C}$, но при $t'=1$ это не так.

в [4; 13, стр. 199]. Соответствующие стрелки в комплексах аналогий могут быть оправданы непосредственностью и существенной „изоморфностью" доказательств.

Импликация 1 доказывается так: предполагаем, что два непересекающихся множества из PC $\{$в $\Sigma_1^1(\mathscr{C})\}$ взаимно дополнительны, затем, независимо от этого, используем очевидный факт, что $\mathrm{PC}\cap c\mathrm{PC}\supseteq \mathrm{EC}$ $\{\Sigma_1^1(\mathscr{C})\cap\Pi_1^1(\mathscr{C})\supseteq$ класс множеств, суперарифметический в предикатах $\mathscr{C}\}$. Импликация 2 устанавливается с использованием только что упомянутого факта. Импликация 3 усматривается непосредственно. Импликация 4 устанавливается с использованием обычного способа переработки неявных определений в явные. Этот способ дает, между прочим, вместе с двойственным ему, метод Фреге — Дедекинда для преобразования индуктивных определений в явные определения. Звездочки, отмечающие импликацию 4, указывают на то, что, строго говоря, она дает только абсолютные варианты теоремы Бета и теоремы об арифметическом операторе; чтобы получить полные теоремы, нужно использовать указанным способом естественные теоретико-множественные релятивизации теорем отделимости и их следствий, полученных импликацией 1. Эти релятивизированные теоремы отделимости являются непосредственными следствиями самих теорем отделимости.

Но, хотя эти предложения и довольно очевидные импликации находятся в тесной связи между собой, все известные доказательства соответствующих предложений чрезвычайно различны. Например, остается ясной необходимость унифицированного доказательства $\mathrm{Sep}_{\mathrm{I}}(\mathsf{V}_1^{1,1}(\mathfrak{P}))$ для возможно большего набора $\mathfrak{P}$. И для других сопоставляемых пар, даже до унифицированного доказательства принципа, охватывающего оба члена, необходимо дать по возможности более простую формулировку такого принципа.

4. Результаты аналогий

Настоящая формулировка аналогии достаточно хороша, чтобы подсказывать результаты, доказательства и даже давать доказательства. Мы хотим дать здесь некоторые примеры этого рода, но по причине ограниченности места дадим только наброски или намеки доказательств; более полное изложение этих вопросов будет дано в другом месте.

(I) Первое важное замечание состоит в том, что для любого $\mathfrak{P}$

$$\mathrm{Red}(\mathsf{V}_k^t)\to\mathrm{Red}(\mathsf{V}_k^t(\mathfrak{P})),$$

$$\mathrm{Red}(\Lambda_k^t)\to\mathrm{Red}(\Lambda_k^t(\mathfrak{P})).$$

Таким образом, в частности, если принцип сводимости имеет место в чистой логике, то он имеет место и в теории рекурсивных функций.

Мы можем, следовательно, заключить, что принципы сводимости в чистой логике так же трудно доказываются, как и всюду.

(II) Применение контрапозиций импликации 1 и известных результатов теории рекурсивных функций дает сразу

$$\overline{\mathrm{Red}}(\bigwedge_k^1) \quad \text{для} \quad t=0 \quad \text{или} \quad (t=1 \text{ и } k=2),$$
$$\overline{\mathrm{Red}}(\bigvee_1^1),$$

и, допуская аксиому конструктивности, мы можем добавить еще к этому

$$\overline{\mathrm{Red}}(\bigwedge_k^t) \quad \text{для} \quad k \geqslant 2.$$

(III) В отличие от ситуации с принципом сводимости не существует очевидной связи между первыми принципами отделимости чистой логики и теории рекурсивных функций. Но знание того, как свойства отделимости ведут себя в теории рекурсивных функций, может по крайней мере наводить на мысль, как они должны вести себя в чистой логике. Иллюстрацией этого является случай $\mathrm{Sep}_\mathrm{I}(\bigwedge_1^1)$. Поскольку $\mathrm{Sep}_\mathrm{I}(\Pi_1^1)$, как известно, ложно, это наводит на мысль, что $\mathrm{Sep}_\mathrm{I}(\bigwedge_1^1)$ должно быть ложно. Изучение этого вопроса ведет к утверждению двумя различными путями.

(A) Можно сконструировать простой контрпример, а именно можно построить две не совместные между собой $\bigwedge_1^1$-формулы с одной свободной переменной так, что на счетной области первая удовлетворяется в точности конечными множествами, вторая — в точности бесконечными. Простое применение теоремы компактности показывает, что они не могут быть отделены.

(B) Так как конъюнкция аксиом Пеано есть Π_1^1, можно утверждать, что если $\mathrm{Sep}_\mathrm{I}(\bigwedge_1^1)$ истинно, то $\mathrm{Sep}_\mathrm{I}(\Pi_1^1)$ также истинно.

(IV) Результат, приведенный в (III), дает, конечно, другое доказательство того, что $\mathrm{Red}(\bigvee_1^1)$ ложно, так как для любого $\mathscr{L}$ $\mathrm{Red}(\mathscr{L}) \to \mathrm{Sep}_\mathrm{I}(\mathrm{c}\mathscr{L})$.

(V) Одним из наиболее интересных предложений, подсказываемых аналогиями, является $\mathrm{Red}(\bigwedge_1^1)$. Если оно верно, то это будет, по-видимому, весьма общая и очень сильная теорема. Она будет иметь следствием $\mathrm{Sep}_\mathrm{I}(\bigvee_1^1)$, которое в настоящий момент получается только с помощью путей, приводящих к интерпретационной теореме (например, доказательства типа Эрбрана — Генцена или теоретико-модельные доказательства с использованием ультрапроизведений), а также $\mathrm{Red}(\Sigma_1^1(\mathscr{C}))$, которое сейчас может быть получено только с помощью доказательств, существенно использующих нормальную форму Лузина — Серпинского.

Можно установить некоторые специальные случаи $\mathrm{Red}(\bigwedge_1^1)$. Это имеет место, например, если класс $\bigwedge_1^1$ характеризуется формулой $\bigwedge F \bigvee a_{Fa} \bigwedge b_{Fb} \Delta$, где Δ не содержит кванторов и вхождений F.

Могут быть построены различные подобные контрпримеры для $\mathrm{Red}(\bigwedge_1^1)$; некоторые из них не так уж просты. И контрпример к $\mathrm{Red}(\bigwedge_1^{1,-1})$ в простейшем „свободном от параметров“ случае, где модели являются просто областями, был бы контрпримером для принципа сводимости коспектров (т. е. дополнений спектров) и, следовательно, опровергал бы предложение, рассматриваемое Ассером [7, проблема 3, стр. 263] о том, что „спектр равен коспектру“. И это предложение, хотя неправдоподобное, устояло перед попытками опровергнуть его в течение пяти лет.

(VI) Пользуясь опять тем фактом, что конъюнкция аксиом Пеано есть Π_1^1, можно доказать частный случай $\mathrm{Red}(\bigvee_2^1)$ [и, следовательно, также частный случай $\mathrm{Sep}_\mathrm{I}(\bigwedge_2^1)$] для счетных областей. Хотя детали не переносятся, кажется вероятным, что при допущении аксиомы конструктивности это доказательство может быть расширено на области многих других мощностей.

(VII) Все доказательства, упомянутые в (VI), можно распространить на случай $\mathrm{Red}(\bigvee_k^1)$ для $k > 2$ с той разницей, что аксиома конструктивности здесь должна допускаться даже в случае счетной области.

(VIII) Замечание (VII) было бы также применимо к $\mathrm{Red}(\bigvee_k^t)$ для $t > 2$ и всех k, а замечание (II) — к $\overline{\mathrm{Red}}(\bigwedge_k^t)$ для тех же условий, если бы предположения из [3, стр. 362], обсуждавшиеся Аддисоном [6, стр. 352], полностью подтвердились. Они следуют из (C^t) для $t > 1$, что является обобщением (C^1) из [6, стр. 340] с применением доказательства (5.1) из [6]. Во время написания [3] было намечено доказательство (C^t) для $t > 1$, аналогичное доказательству (C^1). Но детали нигде не были подробно изложены. Однако некоторые частные случаи гипотез, достаточных для этого, были изложены в [24, стр. 112].

(IX) Так как $\mathrm{Red}(\Sigma_1^0)$ и $\mathrm{Sep}_\mathrm{I}(\Pi_1^0)$ истинны, хотя $\mathrm{Red}(\Pi_1^0)$ и $\mathrm{Sep}_\mathrm{I}(\Sigma_1^0)$ ложны, можно ожидать, что соответствующие утверждения для $\bigvee_1^0$ и $\bigwedge_1^0$ имеют место. По отношению к $\mathrm{Red}(\bigwedge_1^0)$ это предположение справедливо, и $\mathrm{Red}(\bigwedge_1^0)$ ложна, как отмечено в (II). Но для каждого из остальных трех $\mathrm{Red}(\bigvee_1^0)$, $\mathrm{Sep}_\mathrm{I}(\bigwedge_1^0)$ и $\mathrm{Sep}_\mathrm{I}(\bigvee_1^0)$ имеют место обратные утверждения. И даже этот очень простой случай служит источником интуиции, очень полезной для исследования других уровней.

$\mathrm{Sep}_\mathrm{I}(\bigvee_1^0)$ истинно, и доказательство этого вполне аналогично доказательству $\mathrm{Sep}_\mathrm{I}(\bigvee_1^1)$. Используя, скажем, **320 из [9, стр. 181], а также доказательство, аналогичное доказательству из [11, стр. 268], можно заметить, что два непересекающихся множества $\bigvee_1^0$ отделимы бескванторным классом моделей. Затем, повторяя импликацию 2, мы получаем $\mathrm{Sep}_{\mathrm{I}}(\bigvee_1^0)$. Заметим, что импликация 1 дает здесь, что $\bigvee_1^0 \cap \bigwedge_1^0$ равно множеству бескванторных классов моделей. Пользуясь этим последним результатом, легко видеть, что формулы $\bigwedge a\mathrm{Fa}$ и $\neg \bigvee a\mathrm{Fa}$ дают контрпример для $\mathrm{Sep}_{\mathrm{I}}(\bigwedge_1^0)$.

Отметим, что здесь впервые в естественных обстоятельствах в теории иерархий принцип сводимости ложен, в то время как первый принцип отделимости имеет место. Здесь нет такого количества постоянных, которое было бы достаточным для тонких различий, нужных для сильного принципа сводимости. Это обстоятельство делает сомнительным утверждение, что принцип сводимости будет иметь место где-нибудь в иерархии первого порядка в чистой логике [1]), и даже вызывает некоторые сомнения по поводу $\mathrm{Red}(\bigwedge_1^1)$, но, конечно, более высокий порядок приводит к более мощным уровням и типам, при которых можно получить нужные постоянные, и действительно, для типа 2 и уровня 2, как мы знаем [см. (VI)], принцип сводимости имеет место по крайней мере в одном важном случае.

Отметим также, что переход к $\mathrm{Sep}_{\mathrm{I}}$ в случае уровня 1 и типа 1 отражает больше всего исследовавшийся переход к $\mathrm{Sep}_{\mathrm{I}}$ в случае уровня 1 и типа 2 — переход, который дает возможность вернуться на уровень 2 (этот путь сохраняется для более высоких уровней, если допустить аксиому конструктивности).

(X) Последние замечания пункта (IX) наводят на мысль о том, что, может быть, $\mathrm{Sep}_{\mathrm{I}}(\bigvee_2^0)$ ложно и $\mathrm{Sep}_{\mathrm{I}}(\bigwedge_2^0)$ истинно. Контрпример для $\mathrm{Sep}_{\mathrm{I}}(\bigwedge_1^0)$ мотивируется истинностью $\bigwedge a\mathrm{Fa} \supset \bigvee a\mathrm{Fa}$. На уровне 2 мы имеем истинное утверждение $\bigvee a \bigwedge b\, \mathrm{Fab} \supset \bigwedge b \bigvee a\, \mathrm{Fab}$, которое означает, что формулы $\bigvee a \bigwedge b\, \mathrm{Fab}$ и $\neg \bigwedge b \bigvee a\, \mathrm{Fab}$ могут дать контрпример для $\mathrm{Sep}_{\mathrm{I}}(\bigvee_2^0)$. Что это действительно так, можно проверить элементарным теоретико-модельным рассуждением.

Этот контрпример и вертикальная (т. е. параллельная $\langle t, k\rangle$, а не оси $\mathfrak{P}$) аналогия из (IX) теперь приводят к предположению, что $\overline{\mathrm{Sep}}_{\mathrm{I}}(\bigvee_k^0)$ для $k \geqslant 2$. Они далее наводят на мысль, особенно в свете вертикальной аналогии с теоремой отделимости Крэйга, что для $k \geqslant 2$ всякая пара непересекающихся множеств $\bigwedge_k^0$ может быть

[1]) После настоящего доклада Шёнфилд показал с помощью контрпримера, что $\mathrm{Red}(\bigvee_2^0)$ действительно ложно, и доказал с помощью ультрапроизведений, что для $k \geqslant 2$ утверждение, что всякая пара непересекающихся $\bigwedge_k^0$ множеств может быть отделена множеством в булевой алгебре множеств, порожденной $\bigwedge_{k-1}^0$, действительно истинно.

отделена множеством в булевой алгебре, порожденной $\bigwedge_{k-1}^0$. Импликация 2 тогда влечет $\mathrm{Sep}_{\mathrm{I}}(\bigwedge_k^0)$ для $k \geqslant 2$. А импликация 1 вместе с результатами (IX) влечет, что для всех k ($k \geqslant 1$) $\bigvee_k^0 \cap \bigwedge_k^0$ равно булевой алгебре, порожденной $\bigwedge_{k-1}^0$ (определение $\bigwedge_0^0$ очевидно).

Горизонтальная аналогия с теоремой Поста [17, теорема XI, стр. 293] поразительна. В самом деле, имеет место „уравнение“

$$\frac{\text{Клини}}{\text{Крэйг}} = \frac{\text{Пост}}{x},$$

которое было „решено“ для $k = 2$ на данном конгрессе Роджерсом и Шёнфилдом. „Решением“ является Крейсел [1]).

5. Будущие исследования

Как будут развиваться дальнейшие исследования? Мы хотим сделать четыре замечания на этот счет.

1) Возможные соотношения между первым принципом отделимости в случае высоких типов (кванторов) и основной гипотезой для системы GLC Такеути [23, стр. 39], по-видимому, достойны дальнейших исследований.

2) Быстро развивающаяся логика бесконечно длинных выражений может найти естественное приложение при рассмотрении трансфинитных частей гиперарифметических и суперарифметических иерархий с такой точки зрения, при которой их постепенное затухание по мере отбрасывания констант окажется особенно естественным.

3) Наши доказательства частных случаев $\mathrm{Red}(\bigwedge_1^1)$, так же как и другие исследования, по-видимому, обещают дать обобщение нормальной формы Лузина — Серпинского, охватывающее чистую логику.

4) Аналогия между теоремой полноты Шютте — Генкина — Ори — (Рылль-Нардзевского) (каждая истинная в N формула Π_1^1 доказуема с помощью ω-правила) и теоремой полноты Гёделя (каждая истинная в N формула $\bigwedge_1^1$ доказуема) наводит на способы объединения предложений и доказательств в теории рекурсивных функций и чистой логике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Addison J. W., On Some Points of the theory of Recursive Functions, Doctoral Dissertation, University of Wisconsin, 1954.
2. Addison J. W., Analogies in the Borel, Luzin, and Kleene hierarchies, I and II Abstracts, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **61** (1955), 75, 171—172.

[1]) Со времени этого обсуждения, как было замечено ранее, „решение“ для $k > 2$ было найдено и „равно“ Шёнфилду.

3. Addison J. W., Hierarchies and the axiom of constructibility. Стр. 355—362 in Summaries of Talks Presented at the Summer Institute of Symbolic Logic in 1957 at Cornell University. Second edition, Communications Research Division, Institute for Defense Analyses, 1960.
4. Addison J. W., Review of Isslědovanie častično-rékursivnyh opératorov srédstvami téorii berovskogo prostranstva by A. V. Kuznécov and B. A. Trahténbrot, *J. of Symb. Logic*, **22** (1957), 301—302.
5. Addison J. W., Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory, *Fund. Mathematicae*, **46** (1959), 123—135.
6. Addison J. W., Some consequences of the axiom of constructibility, *Fund. Mathematicae*, **46** (1959), 337—357.
7. Asser G., Das Repräsentantenproblem im Prädikatenkalkül der ersten Stufe mit Identität, *Z. für math. Logik und Grund. Math.*, **1** (1955), 252—263.
8. Beth E. W., On Padoa's method in the theory of definition, *Indagationes Mathematicae*, **15** (1953), 330—339.
9. Чёрч А., Введение в математическую логику, т. I, М., ИЛ, 1960.
10. Craig W., A theorem about First Order Functional Calculus with Identity, and Two Applications. Ph. D. thesis, Harvard University, 1951.
11. Craig W., Linear reasoning, A new form of the Herbrand — Gentzen theorem, *J. Symb. Logic.*, **22** (1957), 250—268.
12. Craig W., Three uses of the Herbrand — Gentzen theorem in relating model theory and proof theory, *J. Symb. Logic*, **22** (1957), 269—285.
13. Grzegorczyk A., Mostowski A., Ryll-Nardzewski C., The classical and the ω-complete arithmetic, *J. Symb. Logic*, **23** (1958), 188—206.
14. Henkin L., A generalization of the concept of ω-completeness, *J. Symb. Logic*, **22** (1957), 1—14.
15. Hilbert D., Mathematical problems. Translated by M. W. Newson, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 8 (1901—1902), 437—479.
16. Kleene S. C., Hierarchies of number-theoretic predicates, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **63** (1955), 193—213.
17. Клини С., Введение в метаматематику, М., ИЛ, 1957.
18. Kuratowski K., Tarski A., Les opérations logiques et les ensembles projectifs, *Fund. Mathematicae*, **17** (1931), 240—272.
19. Лузин Н., Leçons sur les ensembles Analytiques et leurs Applications, Paris, Gauthier-Villars, 1930.
20. Orey S., On ω-consistency and related properties, *J. Symb. Logic*, **21** (1956), 246—252.
21. Robinson A., A result on consistency and its application to the theory of definition, *Indagationes Mathematicae*, **18** (1956), 47—58.
22. Schütte K., Ein System des verknüpfenden Schliessens, *Archiv für mathematischen Logik und Grundlagenforschung*, **2** (1956), 55—67.
23. Takeuti G., On a generalized logic calculus. *Japanese J. Math.*, **23** (1953), 39—96; Errata, *Ibid.*, **24** (1954), 149—156.
24. Tugué T., Predicates recursive in a type-2 object and Kleene hierarchies, *Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli*, **8** (1959), 97—117.

Функционалы конечных типов, вычислимые на машинах Тьюринга [1])

С. КЛИНИ

Висконсинский университет, Мэдисон, Висконсин, США

Натуральные числа 0, 1, 2, ... являются объектом *типа* 0. Объектами типа $j+1$ являются произвольные всюду определенные функции α^{j+1} одного переменного, отображающие объекты β^j типа j в натуральные числа.

В [3] мы обобщили на функции с переменными высших конечных типов понятия общей и частичной рекурсивности, ранее введенные только для функций с переменными типов 0 и 1. При этом мы дали новую формулировку рекурсивности (эквивалентную прежней для типов 0 и 1) вместо того, чтобы непосредственно обобщать первоначальное определение или один из его известных эквивалентов.

Согласно новой формулировке, общерекурсивные (частично рекурсивные) функции суть такие всюду (частично) определенные функции, которые можно задать путем повторного применения девяти схем определения. Среди них содержится шесть схем, которые можно было бы применять и для введения примитивно рекурсивных функций натурального аргумента (только теперь в них допускаются параметры высших типов). Далее имеется схема

S7 $$\varphi(\alpha^1, a, \mathfrak{b}) \simeq \alpha^1(a)$$

для введения функциональной переменной α^1 типа 1, а также две схемы, указанные ниже.

Первая из этих схем такова:

S8 $$\varphi(\alpha^j, \mathfrak{b}) \simeq \alpha^j(\lambda\sigma^{j-2}\chi(\alpha^j, \sigma^{j-2}, \mathfrak{b})),$$

где χ — ранее определенная функция; эта схема позволяет использовать функциональную переменную α^j типа $j \geqslant 2$.

Мы стремимся при расширении понятий общей и частичной рекурсивности сохранить тезис Чёрча (см. [1 и 2; стр. 300 и § 62]) и его известные обобщения [1, стр. 314, 316, 332]. Согласно этому

[1]) Kleene S. C., Turing-machine computable functionals of finite types I, стр. 38—45. Эта работа выполнялась в основном по контракту с Национальным научным фондом в 1955—1958 гг., хотя основное определение было сформулировано еще в 1952 г.

тезису, любая „конструктивная“ или „эффективно вычислимая“ (в интуитивном смысле) функция является рекурсивной и обратно.

Для тех, кто предпочитает не пользоваться тезисом Чёрча, мы хотим сохранить обычные свойства замкнутости, которые как раз и составляют довод в пользу этого тезиса. Для переменных α^j типа $j \geqslant 1$ „вычисление“ должно наряду с эффективными операциями в абсолютном смысле использовать также операцию непосредственного перехода от аргумента β^{j-1} к значению $\alpha^j(\beta^{j-1})$. Тьюринг [10] охарактеризовал эту ситуацию (для $j=1$ и фиксированного α^j) следующим образом. Имеется „оракул“, которому подается β^{j-1} и который в ответ выдает $\alpha^j(\beta^{j-1})$. В S8 β^{j-1} есть $\lambda\sigma^{j-2}\chi(\alpha^j, \sigma^{j-2}, \mathfrak{b})$; значения α^j суть произвольные функционалы типа j.

Если ограничиться функционалами α^j некоторого специального вида, то вместо S8 можно использовать схему, в которой „оракулу“ подается число, связанное с определенным способом переработки β^{j-1} посредством α^j ([3] и [6] разд. 3.1 и примечание 9; [4]). Для различных целей представляют интерес как случай произвольных функциональных переменных, так и только что упомянутый противоположный случай [8]. В этой статье мы ограничимся рассмотрением первого случая.

Еще одна схема

S9 $$\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) \simeq \{\mathfrak{a}\}(\mathfrak{b})$$

использует некоторую нумерацию, детали которой мы здесь повторять не будем [3, п. 3.5—3.8]. Идея заключается в следующем. Каждая схема задает один шаг вычисления функции φ для данного аргумента $\mathfrak{a}$; этот шаг состоит в переходе от выражения $\varphi(\mathfrak{a})$ в левой части схемы к выражению в ее правой части. Но вместо $\varphi(\mathfrak{a})$ можно записать $\{z\}(\mathfrak{a})$, где z — число, называемое номером φ. Этот номер в некотором коде задает рассматриваемую схему, а также схемы, вводящие ранее определенные функции. Другими словами, z определяет некоторую программу, указывающую, какие шаги нужно проделать при преобразовании аргумента $\mathfrak{a}$ в соответствии с данной схемой. Роль S9 состоит в том, что аргумент $\mathfrak{a}$ начинает рассматриваться как программа вычислений, которые нужно выполнить в дальнейшем над аргументом $\mathfrak{b}$. Может случиться, что $\mathfrak{a}$ окажется на месте первого аргумента в левой части S9 в результате предшествующих вычислений. Таким образом, схема S9 позволяет вычислять инструкции некоторой части вычисления в предшествующих частях этого вычисления.

Мы только что показали, что схема S8 применяется в связи с „эффективными“ вычислениями над произвольными функциональными аргументами. Схему S9 мы присоединили к S1—S8, чтобы

получить всевозможные вычислимые функции, т. е. чтобы удовлетворить тезису Чёрча.

В [3] после введения нашей формулировки понятий общей и частичной рекурсивности мы начали рассмотрение их свойств, которое продолжено во второй части [3]. В дальнейшем мы подкрепили тезис Чёрча (для нашего обобщения), заметив, что ни при каком естественном обобщении существующих эквивалентов понятия функции, аргументы которой принадлежат типу 0 и 1, нельзя получить новых эффективно вычислимых функций [3]. Хотя можно рассматривать наш класс функционалов независимо от тезиса Чёрча, однако нам кажется, что его прикладное значение связано с этим тезисом. Наши последние исследования направлены на то, чтобы показать, что данный класс имеет фундаментальное значение независимо от деталей различных формулировок.

Итак, интересно выяснить, какие из возможных обобщений порождают те же функции.

Исчерпывающее обсуждение всех обобщений для всех существующих эквивалентных понятий вычислимости и их вариантов потребовало бы большого труда. (См. [2, стр. 320—321]. Теперь сюда нужно включить и алгоритмы Маркова [6].) Однако такое обсуждение завело бы нас слишком далеко от нашей цели. В предлагаемой статье мы обсудим одно расширение понятия вычислимости с помощью машин Тьюринга [9] и Поста [7].

1. Вычислимость на машине Тьюринга; определение

1.1. Обобщение вычислимости по Тьюрингу — Посту на функции с переменными типа 1 было получено за счет введения относительной вычислимости для одноместных теоретико-числовых функций [10] вместе с требованием равномерности [2]. Три метода использования аргументов типа 1 были даны в [2, стр. 362—363], а четвертый — в [5, стр. 148]. Первый из этих методов допускает простое обобщение. Согласно этому методу, в состоянии q_c, соответствующем переменной α^1 типа 1, выполняется неэлементарный акт, который состоит в непосредственном переходе от аргумента y к значению $\alpha^1(y)$. Для объекта α^j высшего типа ($j>1$) мы хотим, чтобы машина путем неэлементарного акта совершала аналогичный переход к значению $\alpha^j(\beta^{j-1})$ в предположении, что „предыдущие вычисления“ уже „дали“ аргумент β^{j-1}. Этот аргумент нельзя „задать“ непосредственно как y для α^1. Однако он может быть задан посредством указания того, как вычислить (с помощью аргументов типа 1 и более высоких типов) $\beta^{j-1}(\sigma^{j-2})$ для любых σ^{j-2}.

Указать, „как вычислить“ что-либо, — значит задать машину, выполняющую это вычисление, а это можно сделать путем задания таблицы этой машины. Эта таблица является конечным объектом, построенным по определенным правилам; ее можно записать на ленту в некотором заданном коде. Удобно взять для кодирования некоторую систему нумерации, так чтобы таблице машины было сопоставлено число, называемое ее номером.

1.2. Мы будем следовать, за некоторыми исключениями, тем деталям, которые даны в [2, разд. 67]. По-видимому, проще полагать, что пустой набор чисел представляется на ленте посредством единственного знака 0, чем так, как это определяется в [2, стр. 363, замечание 1].

Машина, вычисляющая функцию от числовых переменных и от функциональных переменных $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_{n_1}^1, \ldots, \alpha_1^r, \ldots, \alpha_{n_r}^r$, может иметь наряду с активными конфигурациями $(\mathrm{s}_a, \mathrm{q}_c)$, $c > 0$, в которых выполняются элементарные акты вида $\mathrm{s}_b L \mathrm{q}_d$, $\mathrm{s}_b C \mathrm{q}_d$, $\mathrm{s}_b R \mathrm{q}_d$, еще и такие конфигурации $(\mathrm{s}_1, \mathrm{q}_c)$, $c > 0$, в которых машина должна выполнить неэлементарные акты, представленные в табличной записи в виде $b(j)\,\mathrm{q}_d\,(1 \leqslant j \leqslant r,\ 1 \leqslant b \leqslant n_j)$. (В случае $a \neq 1$, $\mathrm{s}_b L\mathrm{q}_d$, $\mathrm{s}_b C\mathrm{q}_d$, $\mathrm{s}_b R\mathrm{q}_d$, а также для $j = 1$ мы исходим от формы табличной записи, которая дана в [2].) Неэлементарные акты для $j > 1$ будут зависеть от нумерации, которую мы опишем ниже.

Пусть машина имеет символы $\mathrm{s}_1, \ldots, \mathrm{s}_l$ (или „состояния ячеек" $\mathrm{s}_0, \mathrm{s}_1, \ldots, \mathrm{s}_l$, где s_0 — пустой знак) и внутренние состояния $\mathrm{q}_0, \ldots, \mathrm{q}_k\ (l, k > 0)$. Возможные табличные записи имеют четыре вышеуказанных вида, причем $b = 0, \ldots, l$ (для первых трех видов) и $d = 0, \ldots, k$. Эти четыре вида табличных записей будут соответственно представлены числами $\langle b, 0, d\rangle, \langle b, 1, d\rangle, \langle b, 2, d\rangle, \langle b, j+2, d\rangle$ [3, разд. 2.1]. Тогда строка таблицы для данного активного состояния q_c $(c > 0)$ представляется посредством $\langle e_{0c}, \ldots, e_{lc}\rangle$, где e_{ac} — номер записи для конфигурации $(\mathrm{s}_a, \mathrm{q}_c)$. Наконец, таблица в целом представляется *номером* $\langle \langle l, k\rangle, r_1, \ldots, r_k\rangle$, где r_c представляет строку для активного состояния q_c.

Мы определим работу машины (для которой неэлементарные акты являются допустимыми) только для случая, когда она используется в вычислениях с заданными значениями функциональных переменных $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_{n_1}^1, \ldots, \alpha_1^r, \ldots, \alpha_{n_r}^r$.

Предположим, что в данный момент t машина находится в конфигурации $(\mathrm{s}_1, \mathrm{q}_c)$, для которой табличная запись имеет вид $b(j)\,\mathrm{q}_d$. Допустим (I), что для $j = 1$ на ленте представлено в стандартной позиции натуральное число y. Это означает, что записано $y+1$ символов s_1 подряд и прилегающие ячейки справа и слева от этого массива пусты; при этом обозревается крайняя правая ячейка данного массива (в состоянии q_c). Тогда между моментами t и $t+1$ рассматриваемая машина непосредственно правее представления y запишет аналогичный массив длины $\alpha_b^j(y)+1$, а следующую за ним ячейку оставит пустой. При этом машина сдвигает вправо на $\alpha_b^j(y)+2$ ячеек все записи, имеющиеся в момент t правее представления y. В момент $t+1$ машина находится в состоянии q_d, обозревая в стандартной позиции пару y, $\alpha_b^j(y)$.

Для $j > 1$ допустим (II), что на ленте в стандартной позиции находится номер y некоторой машины $\mathfrak{M}_y$, вычисляющей функцию от $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1, \ldots, \alpha_1^r, \ldots, \alpha_{n_r}^r, \sigma^{j-2}$, иначе говоря, $\mathfrak{M}_y$ для каждого σ^{j-2} (при заданных $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_{n_r}^r$) вычисляет значение $\beta^{j-1}(\sigma^{j-2})$. Это значит, что $\mathfrak{M}_y$, обозревая в состоянии q_1 в стандартной позиции σ^{j-2} (для $j=2$) или пустую ленту (для $j > 2$), в конце концов записывает пару $\sigma^{j-2}, \beta^{j-1}(\sigma^{j-2})$ [или $0, \beta^{j-1}(\sigma^{j-2})$] в случае $j > 2$ и останавливается. Тогда к моменту $t+1$ рассматриваемая машина запишет правее y_j представление числа $\alpha_b^j(\beta^{j-1})+1$, сдвинув вправо другие записи, как пояснялось выше. В момент $t+1$ машина снова находится в состоянии q_d [обозревается пара y, $\alpha_b^j(\beta^{j-1})$].

Если предположение (I) не выполняется, то машина осуществляет тождественное отображение; если выполнено (I), но не выполнено (II), то ситуация в момент $t+1$ не определена. (При этом мы не считаем, что машина остановилась; последнее справедливо лишь, когда ситуация определена и пассивна [2, стр. 358].)

1.3. Итак, если аргументы типа $j > 1$ вводятся в вычисление в силу того, что возникли конфигурации $(\mathrm{s}_1, \mathrm{q}_c)$ с номером $b(j)\,\mathrm{q}_d$, причем выполнено условие (I), то поведение данной машины зависит от поведения другой машины $\mathfrak{M}_y$, предназначенной для вычисления функции с добавочным аргументом σ^{j-2}. Описание того, „как данная машина при заданных значениях аргументов, исходя из данной ситуации, вычисляет некоторое значение z", можно рассматривать как трансфинитное индуктивное определение, подобно тому как это было для $\{z\}(\mathfrak{a}) \simeq w$ в [3, п. 3.8].

Мы можем упорядочить ситуации на ленте вместе с таблицами (или номерами) машин и значениями переменных, возникающих в процессе вычисления, в виде *дерева вычисления на машине Тьюринга* (ср. с [3, п. 9.1]). Данная позиция не будет иметь следующей, если q_c есть пассивное состояние $(c = 0)$; она будет иметь единственную следующую позицию, если q_c — активное состояние, за исключением того случая, когда табличная запись имеет вид $b(j)\,\mathrm{q}_d$, $j > 1$, и выполнено предположение (I).

В последнем случае этой позиции соответствует вершина с бесконечно многими последующими ситуациями по одной для каждого σ^{j-2} (ср. с [3, п. 9.8]). Построение поддеревьев, начинающихся в этих новых позициях, должно сопровождаться записью соответствующего значения до того, как будет заполнена следующая позиция. Доказательство теоремы 1 основано на этой идее. Обратная теорема будет фигурировать как теорема 2 во второй части статьи.

2. Рекурсивность вычислимых функций

2.1. Теорема 1. *Каждая вычислимая частичная (полная) функция*

$$\varphi\left(x_1, \ldots, x_{n_0}, \alpha_1^1, \ldots, \alpha_{n_1}^1, \ldots, \alpha_1^r, \ldots, \alpha_{n_r}^r\right)$$

является частично (обще)рекурсивной.

2.2. Пусть $\mathrm{TIx}(i, n) \equiv n > 0 \,\&\, \{i$ есть номер машины Тьюринга $\mathfrak{M}_i$, вычисляющей некоторую функцию от натуральных аргументов, зависящую также не более чем от $n_1, \ldots, n_r$ функциональных аргументов типов $1, \ldots, r$ соответственно, причем $n = \langle n_0, n_1, \ldots \ldots, n_r \rangle \}$. $\mathrm{TIx}(i, n)$ не зависит от n_0, и $\mathrm{TIx}(i, n) \,\&\, m > 0 \to \mathrm{TIx}(i, mn)$. TIx примитивно рекурсивна, так как, полагая $l = (i)_{0,0}$, $k = (i)_{0,1}$, имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{TIx}(i, n) \equiv n > 0 \,\&\, l > 0 \,\&\, k > 0 \,\&\, \mathrm{lh}(i) = \\ = k + 1 \,\&\, \mathrm{lh}((i)_0) = 2 \,\&\, (c)_{0 < c \leqslant k} \left[\mathrm{lh}((i)_c) = l + 1 \,\&\right. \\ \&\, (a)_{a \leqslant l} \Big[(i)_{c,a} = \prod_{u<3} p_u \exp (i)_{c,a,u} \,\&\, (i)_{c,a,2} \leqslant \\ \leqslant k \,\&\, \big\{\{(i)_{c,a,1} \leqslant 2 \,\&\, (i)_{c,a,0} \leqslant l\} \vee \\ \vee \{a = 1 \,\&\, 2 < (i)_{c,a,1} \,\&\, 1 \leqslant (i)_{c,a,0} \leqslant (n)_{(i)_{c,a,1} - 2}\}\big\}\Big] \left.\right].\end{aligned}$$

2.3. Мы предполагаем известным материал, изложенный в [2, стр. 374—376]. Некоторые обозначения мы изменим. Если табличные записи имеют вид $\mathrm{s}_b L \mathrm{q}_d$, $\mathrm{s}_b C \mathrm{q}_d$, $\mathrm{s}_b R \mathrm{q}_d$, то вместо $\rho_{a,c}(u, v)$ будем писать $\rho_0(b, d, u, v)$, $\rho_1(b, d, u, v)$, $\rho_2(b, d, u, v)$ соответственно.

Рассмотрим случай, когда табличная запись есть $b\,(j)\,\mathrm{q}_d$, а гёделевский номер ситуации есть w. Для $j = 1$ предположение (I) выражается через $Q(w)$, как мы теперь называем $Q_c(w)$ [2, стр. 376], $c = (w)_2$. Гёделевский номер непосредственно следующей ситуации есть $\tau_2(Y, \alpha_b^1(Y), d, U, V)$, где Y, U, V — функции от w, определенные в [2, стр. 376]. Для $j > 1$ предположение (I) выражается в виде $Q(w) \,\&\, \mathrm{TIx}(Y, p_{i-2}, n)$ для $n = \langle n_0, \ldots, n_r \rangle$. Если выполнено также предположение (II) при данном β^{j-1}, то гёделевский

номер следующей ситуации есть $\tau_2\left(Y, \alpha_b^j(\beta^{j-1}), d, U, V\right)$. Пусть

$$\begin{aligned}\tau(0, x, c, u, v) &= \tau_1(0, c, u, v), \\ \tau(1, x, c, u, v) &= \tau_1((x)_0 c, u, v), \\ \tau(n+2, x, c, u, v) &= \tau_1((x)_{n+1}, c, (\tau(n+1, p_n x, c, u, v))_0, v).\end{aligned}$$

Тогда τ примитивно рекурсивно (ср. с [2], стр. 271). Для $n > 0$

$$\tau(n, x, c, u, v) = \tau_n((x)_0, \ldots, (x)_{n-1}, c, u, v). \tag{1}$$

2.4. Сейчас мы зададим для каждого r рекурсию (2) так, что вычислимая с ее помощью функция val_r будет иметь следующее свойство. (Здесь мы не беспокоимся о том, чтобы установить вначале рекурсию с функциональной переменной ζ.)

Пусть $\mathrm{TIx}(i, n)$ *истинно,* $n = \langle n_0, \ldots, n_r \rangle$, $n_0 > 0$; w — *гёделевский номер ситуации на ленте машины* $\mathfrak{M}_i$ *с номером* i, $x = \langle x_1, \ldots, x_{n_0} \rangle$ и $\alpha^j = \langle \alpha_1^j, \ldots, \alpha_{n_j}^j \rangle$ $(j = 1, \ldots, r)$. *Тогда* $\mathrm{val}_r(i, n, w, x, \alpha^1, \ldots, \alpha^r)$ *определено тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{M}_i$, *исходя из этой ситуации, при данных значениях аргументов* $x_1, \ldots, x_{n_0}$, $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_{n_1}^1, \ldots, \alpha_1^r, \ldots, \alpha_{n_r}^r$ *вычислит значение* z, *равное* $\mathrm{val}_r(i, n, w, x, \alpha^1, \ldots, \alpha^r)$, т. е. *придет в заключительную ситуацию, обозревая в стандартной позиции набор* $x_1, \ldots, x_{n_0}, z$.

Рекурсия для val_r приводится ниже, где $n = (w)_0$, $a\,(w)_1$, $c = (w)_2$, $v = (w)_3$, $b = (i)_{c,a,0}$, $d = (i)_{c,a,2}$ и Y, U, V определены, как в [2, стр. 376]. Во всех случаях, кроме случая $(r+3)$, val_r применима к гёделевскому номеру непосредственно следующей конфигурации вместо w (если такая ситуация существует):

$$\mathrm{val}_r(i, n, w, x, \alpha^1, \ldots, \alpha^r) \simeq$$

$\simeq \mathrm{val}_r(i, n, \rho_s(b, d, u, v), x, \alpha^1, \ldots, \alpha^r),$

если $c \neq 0 \,\&\, (i)_{c,a,1} = s$ (случай s; $s = 0, 1, 2$),

$\simeq \mathrm{val}_r(i, n, \tau_2(Y, (\alpha^1(Y))_{b-1} d, U, V), x, \alpha^1, \ldots, \alpha^r),$

если $c \neq 0 \,\&\, (i)_{c,a,1} = 3 \,\&\, Q(w)$ (случай 3),

$\simeq \mathrm{val}_r\Big(i, n, \tau_2\Big(Y, \Big(\alpha^2\Big(\lambda\sigma\, \mathrm{val}_r\Big(Y, 2\prod_{s<n}(p_{s+1} \exp (n)_{s+1}),$

$\tau_1(\sigma^0, 1, 1, 1), \langle \sigma^0 \rangle, \alpha^1, \ldots, \alpha^r\Big)\Big)\Big)_{b-1}, d, U, V\Big),$

$x, \alpha^1, \ldots, \alpha^r\Big)$, если $c \neq 0 \,\&\, (i)_{c,a,1} = 4 \,\&\, Q(w) \,\&\, \mathrm{TIx}(Y, 2n)$ (случай 4),

$$\simeq \mathrm{val}_r\Big(i,\ n,\ \tau_2\Big(Y,\ \Big(\alpha^j\Big(\lambda\sigma^{j-2}\,\mathrm{val}_r\Big(Y,\ 2p_{j-2}\prod_{s<n}(p_{s+1}\exp(n)_{s+1}),$$
$$\tau_1(0,\ 1,\ 1,\ 1),\ \langle 0\rangle,\ \alpha^1,\ \ldots,\ \alpha^{j-3},$$
$$\lambda\tau^{j-3}\alpha^{j-2}(\tau^{j-3})\big(p_{(n)_{j-2}}\exp\sigma^{j-2}(\tau^{j-3})\big),$$
$$\alpha^{j-1},\ \ldots,\ \alpha^r\Big)\Big)\Big)_{b-1},\ d,\ U,\ V\Big),\ x,\ \alpha^1,\ \ldots,\ \alpha^r\Big),$$
$$\text{если}\ \ c\neq 0\ \&\ (l)_{c,\,a,\,1}=j+2\ \&\ Q(w)\ \&\ \mathrm{TIx}(Y,\ p_{j-2}n)$$
$$(\text{случай}\ \ j+2,\ j=3,\ \ldots,\ r),$$
$$\simeq\big(\mu t_{t<5^{3w}}[w=\tau_1((t)_0,\ 0,\ (t)_1,\ (t)_2)]\big)_0,\ \ \text{если}$$
$$c=0\ \&\ (Et)_{t<5^{3w}}\big[w=\tau\big((n)_0+1,\ x\big(p_{(n)_0}\exp(t)_0\big),$$
$$0,\ (t)_1,\ (t)_2\big)\big]\ \ (\text{случай}\ \ r+3),$$
$$\simeq \mathrm{val}_r(l,\ x,\ w,\ x,\ \alpha^1,\ \ldots,\ \alpha^r)\ \ \text{во всех остальных случаях}$$
$$(\text{случай}\ \ r+4). \qquad (2)$$

Чтобы установить требуемое свойство val_r, докажем, во-первых, следующее. Пусть машина $\mathfrak{M}_l$ достигает заключительной ситуации, причем для $l,\ n,\ w$ и т. д. выполняется все сказанное выше; тогда значение $\mathrm{val}_r\ (l,\ n,\ w,\ x,\ \alpha^1,\ \ldots,\ \alpha^r)$ определено и равно z.

Доказательство ведется по индукции в соответствии с определением поведения машины. Действительно, если $\mathfrak{M}_l$ уже находится в заключительной ситуации, то применим случай $r+3$ определения val_r и получим $\mathrm{val}_r(l,\ n,\ w,\ x,\ \alpha^1,\ \ldots,\ \alpha^r)=z$. Если же машина еще не достигла заключительной ситуации, но в конце концов попадет в нее, то применяются либо случаи 1, 2, 3, либо один из случаев $4,\ \ldots,\ r+2$, причем выполнено предположение (II). Рассмотрим какой-нибудь из случаев $4,\ \ldots,\ r+2$.

В силу (II) и предположения индукции для каждого σ^{j-2} функция $\lambda\sigma^{j-2}\,\mathrm{val}_r(\ldots)$, входящая в выражение, соответствующее данному случаю, полностью определена и представляет значение β^{j-1} для выполняемого акта (ср. с **1.2**). Поэтому $\tau_2\big(Y,\ \big(\alpha^{j\,(\beta j-1)}\big)_{b\dot-1},\ d,\ U,\ V\big)$ есть гёделевский номер следующей ситуации, так что по индукции выражение в целом в данном случае определено и равно z.

Во-вторых, индукцией по процессу вычисления val_r посредством рекурсии (2) покажем следующее (ср. с [3, п. 10.2]).

Если значение $\mathrm{val}_r(l,\ n,\ w,\ x,\ \alpha^1,\ \ldots,\ \alpha^r)$ определено, причем $l,\ n,\ \ldots$ обладают нужными свойствами, то $\mathfrak{M}_l$ при соответствующих обстоятельствах достигает заключительной ситуации и дает нужное значение z.

Если применяется случай $r+3$, то утверждение очевидно. Возможно, что на данном шаге применяются либо случаи 1, 2, 3, либо один из случаев $4,\ \ldots,\ r+2$, причем функция $\lambda\sigma^{j-2}\,\mathrm{val}_r(\ldots)$ полностью определена. Рассмотрим один из последних случаев. В силу индуктивного предположения, справедливого для любого σ^{j-2}, должно выполняться условие (II). Поэтому, как было только что показано, $\tau_2\big(Y,\ \big(\alpha^j(\beta^{j-1})\big)_{b\dot-1},\ d,\ U,\ V\big)$ при $\beta^{j-1}=\lambda\sigma^{j-2}\,\mathrm{val}_r(\ldots)$ есть гёделевский номер следующей ситуации. Отсюда, по индукции, вытекает требуемое свойство машины $\mathfrak{M}_l$.

2.5. Функция $\lambda\tau^{j-3}$, подставляемая в (2), в случае $(j+2)$, $j=3,\ \ldots,\ r$, имеет вид $\lambda\tau^{j-3}$ для S4′ $(j-2)$, $j-2=1,\ \ldots,\ r-2$ [3, п. 9.8], и подстановки $\lambda\sigma^{j-2}$ в этом случае и $\lambda\sigma^0\ \ldots$ в случае 4 осуществляются непосредственно на место функционального аргумента и поэтому подходят под S8. Другие операции, применяемые для построения выражений для этих случаев после введения функции val_r с помощью $S0'$ (см. [3, п. 10.1]), могут быть получены с использованием только S1 — S7. Определение случая можно осуществить с помощью S5 [3, п. 10.1] и S1 — S6.

Итак, правая часть (2) есть $F(\mathrm{val}_r,\ l,\ n,\ w,\ x,\ \alpha^1,\ \ldots,\ \alpha^r)$, где F — нормальный рекурсивный функционал [3, п. 10.1]. Следовательно, по первой теореме о рекурсии [3, теорема LXIV], val_r является частично рекурсивной функцией.

Предположим, что функция $\varphi\big(x_1,\ \ldots,\ x_{n_0},\ \alpha_1^1,\ \ldots,\ \alpha_{n_0}^1,\ \ldots\ \ldots,\ \alpha_1^r,\ \ldots,\ \alpha_{n_r}^r\big)$, где $n_r>0$, при $r>0$ вычислима. Тогда существует машина $\mathfrak{M}_i$ с номером i, ее вычисляющая. Согласно сказанному в п. **2.4**, имеем

$$\varphi\big(x_1,\ \ldots,\ x_{n_0},\ \alpha_1^1,\ \ldots,\ \alpha_{n_1}^1,\ \ldots,\alpha_1^r,\ \ldots,\ \alpha_{n_r}^r\big)\simeq$$
$$\simeq \mathrm{val}_r\big(i,\ \langle n_0,\ \ldots,\ n_r\rangle,\ \tau_{n_0}\big(x_1,\ \ldots,\ x_{n_0},\ 1,\ 1,\ 1\big),$$
$$\langle x_1,\ \ldots,\ x_{n_0}\rangle,\ \langle\alpha_1^1,\ \ldots,\ \alpha_{n_1}^1\rangle,\ \ldots,\ \langle\alpha_1^r,\ \ldots,\ \alpha_{n_r}^r\rangle\big)\quad (n_0>0)\ \ (3)$$

(если $n_0=0$, то вместо n_0 следует подставить 1, вместо $x_1,\ \ldots,\ x_{n_0}$ подставить 0). Функции $\langle\alpha_1^j,\ \ldots,\ \alpha_{n_j}^j\rangle$ в правой части имеют вид $\lambda\tau^{j-1}$ [3, теорема LXI] при условии, что $n_2,\ \ldots,\ n_{r-1}>0$ и функция val_r частично рекурсивна; следовательно, функция φ частично рекурсивна.

Чтобы охватить случай, когда не все $n_2,\ \ldots,\ n_{r-1}>0$, мы можем поступить, как в доказательстве теоремы LXVIII из [3]. Мы последовательно введем множества функций, подобных val_r, у которых могут отсутствовать $1,\ 2,\ \ldots,\ r-2$ из переменных $\alpha^2,\ \ldots,\ \alpha^{r-1}$. Соответствующие рекурсии подходят под (a^*) из [3, п. 10.4]. Поэтому в силу теоремы LXVIII из [3] эти функции частично рекурсивны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Church A., An unsolvable problem of elementary number theory, *American journal of Mathematics*, 58 (1936), 345—363.
2. Kleene S. C., *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam (North-Holland), Groningen (Noordhoff), New York and Toronto (van Nostrand), 1952. (Русский перевод: Клини С. К., Введение в метаматематику, ИЛ, М., 1957.)
3. Kleene S. C., Recursive functionals and quantifiers of finite types, I, *Transactions of the American Mathematical Society*, **91** (1959), 1—52.
4. Kleene S. C., Countable functionals, Constructivity in Mathematics, Amsterdam (North-Holland), 1959, 81—100.
5. Kleene S. C., Mathematical logic: constructive and non-constructive operations, *Proceedings of the International congress of Mathematicians, Edinburgh;* 14—21 *August,* 1958; Cambridge (Cambridge University Press), 1960, 137—153.
6. Марков А. А., Теория алгорифмов. Труды МИАН, **42** (1954).
7. Post E. L., Finite combinatory process-formulation, I, *J. Symb. Logic,* **1** (1936), 103—105.
8. Tait W. W., Continuity properties of partial recursive functionals of finite type, *International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science Abstracts of contributed Papers, Stanford University, Stanford, Calif., August 24 to September 2* (1960) (мимеографировано). 19—20.
9. Turing A. M., On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem, *Proceedings London Mathematical Society, Ser.* 2, 42 (1936—1937), 230—265; **43** (1937), 544—546.
10. Turing A. M., Systems of logic based on ordinals, *Proceedings London Mathematical Society, Ser.* 2, **45** (1939), 161—228.

Типы рекурсивной эквивалентности и комбинаторные функции [1])

Дж. МАЙХИЛЛ

Стэнфордский университет, Стэнфорд, Калифорния, США

1. Рекурсивный изоморфизм. Рекурсивная эквивалентность

Теория рекурсивных функций возникла как вспомогательный аппарат гильбертовской теории доказательства; однако в течение последнего десятилетия она развилась в независимую ветвь математики без специальных философских установок. Согласно концепции Деккера, Нероде, Роджерса и автора, она является теорией, в которой рассматриваются свойства множеств натуральных чисел, сохраняющиеся при рекурсивных перестановках, т. е. при взаимно однозначных рекурсивных отображениях натурального ряда на себя.

Такое понимание теории рекурсивных функций характерно для большой статьи Поста 1944 г., а также, судя по одному замечанию Медведева, было принято и Колмогоровым, однако никто из этих авторов не развил систематического исследования рекурсивных инвариантов.

Мои сотрудники и я сочли желательным развить квазиалгоритмический или по крайней мере алгебраический подход к типам рекурсивного изоморфизма. Однако этого не удалось достичь непосредственно. Деккер ввел понятие *типа рекурсивной эквивалентности* (ТРЭ), определенное следующим образом.

Два множества α и β (натуральных чисел) называются *рекурсивно эквивалентными* ($\alpha \simeq \beta$), если существует взаимно однозначная частично рекурсивная функция, определенная по крайней мере на α и отображающая его на β. Класс всех множеств, рекурсивно эквивалентных данному множеству α, называется *типом рекурсивной эквивалентности* (ТРЭ) α и обозначается $\mathrm{Req}(\alpha)$. Совокупность всех ТРЭ обозначается Ω.

Связь между рекурсивной эквивалентностью и рекурсивным изоморфизмом выясняется в следующей теореме, доказанной независимо К. Карпом и мною.

Теорема 1 (Карп — Майхилл). *Множество α рекурсивно изоморфно β (т. е. $p(\alpha)=\beta$ для некоторой рекурсивной перестановки p) в том и только том случае, когда* $\alpha \simeq \beta$ и $\alpha' \simeq \beta'$

[1]) Myhill J., Recursive equivalence types and combinatorial functions, стр. 46—55.

(здесь α' обозначает дополнение α относительно множества всех натуральных чисел).

Значение этой теоремы заключается в том, что она полностью сводит изучение типов рекурсивного изоморфизма к изучению типа рекурсивной эквивалентности. Это желательно, поскольку уже начинает существовать высоко развитая алгебраическая теория типов рекурсивной эквивалентности. Данная статья посвящена одной из глав этой теории, а именно *теории комбинаторных функций*.

2. Алгебра ТРЭ

По аналогии с соответствующими определениями для кардинальных чисел мы определяем сумму и произведение для ТРЭ следующим образом:

$$\mathrm{Req}(\alpha) + \mathrm{Req}(\beta) = \mathrm{Req}(\{2n \mid n \in \alpha\} + \{2n+1 \mid n \in \beta\}),$$
$$\mathrm{Req}(\alpha) \cdot \mathrm{Req}(\beta) = \mathrm{Req}\{2^m \cdot 3^n \mid m \in \alpha \,\&\, n \in \beta\}.$$

Однозначность этих операций легко доказывается; следует, однако, заметить, что при этом приходится ограничивать выбор представителей для $\mathrm{Req}(\alpha)$ и $\mathrm{Req}(\beta)$ в определении суммы; именно эти представители должны быть не только непересекающимися, но и *отделимыми* посредством множества четных и множества нечетных чисел соответственно. Легко видеть, что без такого ограничения однозначность нарушается.

С помощью этих определений легко доказывается

Теорема 2 (Деккер).

$$A + B = B + A,$$
$$A + (B + C) = (A + B) + C,$$
$$A + 0 = A,$$
$$A + B = 0 \leftrightarrow A = B = 0,$$
$$AB = BA,$$
$$A(BC) = (AB)C,$$
$$A \cdot 0 = 0 \cdot A \cdot 1 = A,$$
$$AB = 0 \leftrightarrow A = 0 \vee B = 0,$$
$$A(B + C) = AB + AC.$$

Значительно труднее устанавливается аналог теоремы Кантора — Бернштейна:

Теорема 3 (Майхилл). *$A \leqslant B$, $B \leqslant A \to A = B$, где, по определению, $A \leqslant B$, если $(\exists C)(A + C = B)$.*

3. Изоли

Пусть R является ТРЭ натурального ряда чисел. Тогда имеет место

Теорема 4 (Майхилл). *Закон поглощения*: $A + B = A \leftrightarrow A \geqslant RB$.

Отсюда следует, что применительно к ТРЭ часто встречается явление поглощения (аддитивно) меньшего (и даже самопоглощения применительно к ТРЭ вида RA, так называемым идемултиплям).

Поэтому арифметика Ω больше примыкает к арифметике бесконечных кардинальных чисел, чем к арифметике натуральных чисел.

Однако существует такая подсистема системы Ω, которая значительно более родственна натуральным, чем обычным бесконечным кардинальным числам; в нее входят *изоли* (множество всех изолей обозначается Λ), которые могут быть охарактеризованы любым из следующих способов.

(1) Как те ТРЭ X, для которых $X \neq X + 1$.

(2) Как те ТРЭ, которые не $\geqslant R$.

(3) Как ТРЭ тех множеств (так называемых изолированных множеств), которые не содержат бесконечного рекурсивно перечислимого подмножества.

Изоли являются рекурсивным аналогом кардинальных чисел, которые конечны в смысле Дедекинда. Эти последние могут быть охарактеризованы следующими способобами.

(1) Как те кардинальные числа $\mathfrak{m}$, для которых $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m} + 1$.

(2) Как те кардинальные числа, которые не $\geqslant \aleph_0$.

(3) Как те кардинальные числа, которые не содержат счетного подмножества.

Отождествим натуральное число n с ТРЭ для n-элементного множества; тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 5 (Деккер). (a) *Каждое натуральное число является изолем, но существует континуум изолей, не являющихся натуральными числами.*

(b) *Каждый изоль является* ТРЭ, *но существует континуум* ТРЭ, *не являющихся изолями.*

(c) *Для* $X, Y, Z \in \Lambda$ $X + Y = X + Z \to Y = Z$.

(d) *Для* $X, Y, Z \in \Lambda$, $X \neq 0$ $XY = XZ \to Y = Z$.

Правила сокращения (c) и (d) не сохраняют силу, если не ограничиваться рассмотрением Λ; например, $R + 0 = R + 1 = R$, но $0 \neq 1$, и $R \cdot 1 = R \cdot 2 = R$, но $1 \neq 2$. Эти примеры показывают, в каком смысле арифметика Λ ближе, чем арифметика ТРЭ, примыкает к арифметике натуральных чисел.

Ввиду теоремы 2 и теоремы 5(c) изоли можно расширить до кольца Λ^* в точности таким же образом, как натуральные числа расширяются до целых чисел. Свойства этого кольца будут исследованы ниже. Теорема 5 (d) может навести на мысль, что это кольцо, быть может, не имеет делителей нуля; отправляясь от переменных, принимающих значение на Λ, существование делителей нуля в Λ^* означает, что

$$XW+YZ=YW+XZ \rightarrow X=Y \vee Z=W \qquad (*)$$

неверно в Λ. Естественно спросить, почему правила сокращения 5 (c), 5 (d) верны для Λ, в то время как (*) неверно. Теория комбинаторных функций частично и предназначена для ответа на этот вопрос. Еще более важно то, что она доставляет общий метод доказательства теорем о Λ (а при случае и об Ω в общем), которое было бы трудно установить непосредственно.

4. Комбинаторные функции

Здесь, а также в дальнейшем при отсутствии особых оговорок будут рассматриваться изоли, а не произвольные ТРЭ. Будем применять прописные буквы конца алфавита в качестве переменных, пробегающих значения Λ.

Центральная проблема теории комбинаторных функций такова: какие формулы, справедливые для множества натуральных чисел, обобщаются на множество всех изолей? Например, формула

$$x \neq 0, \quad xy=xz \rightarrow y=z$$

верна для натуральных чисел и формула

$$X \neq 0, \quad XY=XZ \rightarrow Y=Z$$

верна для Λ, однако формула

$$xw+yz=yw+xz \rightarrow x=y \vee z=w$$

верна для натуральных чисел, в то время как

$$XW+YZ=YW+XZ \rightarrow X=Y \vee Z=W$$

неверна для Λ.

Первый шаг в теории комбинаторных функций заключается в том, чтобы ассоциировать по возможности с более широким классом теоретико-числовых функций *каноническое расширение* применительно к Λ. Желательно, чтобы каноническим расширением для $+$ и $\cdot$ были $+$ и $\cdot$, определенные на Λ так, как указано выше. Комбинаторные функции были первым классом функций, допускающих такое расширение. Они строятся следующим образом.

Каждая теоретико-числовая функция $f(n)$ может быть записана в форме

$$f(n)=\sum_i c_i \binom{n}{i}$$

для некоторых целых (положительных, отрицательных или нулевых) коэффициентов c_i. Эти c_i называются *коэффициентами Стирлинга* функции $f(n)$. Назовем $f(n)$ комбинаторной функцией, если ее коэффициенты Стирлинга неотрицательны. Аналогичное определение дается для функций от большого числа переменных. Здесь мы используем представление

$$f(n_1, \ldots, n_k)=\sum_{a_1 \ldots a_k}\left[c_{a_1 \ldots a_k} \prod_{i=1}^{k}\binom{n_i}{a_i}\right]$$

и требуем, чтобы все $c_{a_1 \ldots a_k}$ были неотрицательны. Комбинаторные функции образуют весьма широкий класс, в который входят $x+y$, $x \cdot y$, x^{y+1}, $(x|k)$ для каждого k, $x!$, все константы и который замкнут относительно суперпозиции, перестановки, отождествления и фиксации аргументов, а также относительно операторов $\sum$ и $\prod$. В частности, он включает все полиномы с неотрицательными целыми коэффициентами, а также и многие с отрицательными и дробными коэффициентами.

Для каждой такой функции

$$f(n)=\sum_i c_i \binom{n}{i}$$

мы определяем *каноническое расширение* F в Λ (и даже в Ω) так:

$$F(\operatorname{Red} \alpha)=\operatorname{Red} \bigcup_i\left[\binom{\alpha}{i} \times\{0, \ldots, c_i-1\}\right]$$

и аналогично для функций от многих переменных. Здесь через $\binom{\alpha}{i}$ обозначено множество всех номеров i-элементных подмножеств множества α в некоторой канонической рекурсивной нумерации всех конечных множеств, а $\tau_1 \times \tau_2$ является сокращенной записью для

$$\{2^m \cdot 3^n \mid m \in \tau_1 \,\&\, n \in \tau_2\}.$$

Существуют различные приемы, посредством которых некомбинаторные функции (и даже отношения) можно расширить до Λ или до Ω; по-видимому, в тех случаях, когда применимо несколько таких приемов, они эквивалентны. (Здесь мы нуждаемся в метатеореме о единственности теорий расширения, аналогичной классической метатеореме о единственности для теорий гомологий.)

В частности, мы можем (путем отделения положительных и отрицательных коэффициентов) выразить канонически каждую теоретико-числовую функцию как разность двух комбинаторных функций. Пусть, например,

$$f(x)=\sum_i c_i \binom{x}{i},$$

и определим

$$f^+(x) = \sum_{c_i > 0} c_i \binom{x}{i},$$

$$f^-(x) = \sum_{c_i < 0} -c_i \binom{x}{i}.$$

Тогда f^+ и f^- являются комбинаторными функциями, и если F^+ и F^- — их канонические расширения, то можно определить каноническое расширение F для f:

$$F(X) = F^+(X) - F^-(X) \quad (X \in \Lambda).$$

Заметим, что, если $A \in \Omega - \Lambda$, выражение $F^+(A) - F^-(A)$ не имеет определенного смысла. Кроме того, если $X \in \Lambda$, то $F^+(X) - F^-(X)$ может и не принадлежать Λ, а лишь $\Lambda^* - \Lambda$. Однако справедлива следующая теорема:

Теорема 6 (Нероде). *Пусть f — рекурсивная функция, f^+ и f^- — ее положительная и отрицательная части. Пусть далее $F(X) = F^+(X) - F^-(X)$, где F^+ и F^- являются каноническими расширениями f^+ и f^- соответственно. Тогда F отображает Λ в Λ в том и только том случае, когда для некоторого числа k функция $f(x+k)$ является комбинаторной.*

Например, характеристическая функция c_α любого бесконечного множества α не удовлетворяет условию, что для некоторого k функция $c_\alpha(x+k)$ комбинаторна. Следовательно, расширение c_α в Λ отображает некоторые изоли в изольные целые, которые не являются изолями. Однако для рекурсивного α можно доказать, что если C_α является расширением c_α в Λ^*, данным в теореме 6, то имеет место формула $C_\alpha(X) \in \Lambda \rightarrow C_\alpha(X) = 0$ или $C_\alpha(X) = 1$. Поскольку $C_\alpha(X) \in \Lambda$, то $C_\alpha(X)$ является нетривиальным идемпотентом в Λ^*. Это один из возможных способов доказательства того, что Λ^* содержит делители нуля.

Рекурсивная функция f от одного переменного, удовлетворяющая условию, что для некоторого k функция $f(x+k)$ комбинаторна, называется *почти рекурсивно-комбинаторной*. Соответствующее определение для функций многих переменных сложнее, и я сошлюсь на статью Нероде, которая должна выйти в *Annals of Mathematics*. Для того чтобы завершить определение расширения почти рекурсивно-комбинаторной функции, мы потребуем выполнения условия: если f рекурсивна и $f(x+k)$ комбинаторна, то $F(A) = F_0(A)$ для $A \notin \Lambda$, где F_0 — каноническое расширение функции $f(x+k)$.

5. Случай одного квантора. Положительные результаты

Комбинаторные функции возникли при следующих обстоятельствах. Многие правила сокращения в Λ были открыты Деккером; в частности, $XY = XZ \rightarrow Y = Z$ $(X \neq 0)$, $X^Z = Y^Z \rightarrow X = Y$ $(Z \neq 0)$, $X^Y = X^Z \rightarrow Y = Z$ $(X \neq 0,1)$, $X^X = Y^Y \rightarrow X = Y$ $(X, Y \neq 0,1)$, $X! = Y! \rightarrow X = Y$ $(X, Y \neq 0,1)$. В некоторых из этих случаев способы доказательства оказались одинаковыми, и я занялся выяснением того, для какого именно класса функций могут быть доказаны подобные правила сокращения. Нероде и мне удалось установить факт, значительно более общий, чем мы первоначально рассчитывали. Именно, *не только всякое правило сокращения, но и всякая импликация, такая, что антецедент и консеквент являются равенствами между почти рекурсивно-комбинаторными функциями, справедлива в Λ, если она верна для натуральных чисел*; при этом подразумевается, что переменные для натуральных чисел заменены переменными с областью значений Λ и что функциональные символы заменены символами для соответствующих канонических расширений. Дальнейшее обобщение дано в следующей теореме.

Теорема 7 (Майхилл — Нероде). *Пусть $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ — универсальное суждение хорновского вида, построенное из равенств между почти рекурсивно-комбинаторными функциями от $x_1, \ldots, x_n$ и истинное для всех натуральных чисел $x_1, \ldots, x_n$ или же для тех натуральных чисел, которые больше некоторого заданного натурального k. Пусть далее $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ получено из $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ путем замены числовых переменных $x_1, \ldots, x_n$ изольными переменными $X_1, \ldots, X_n$ и путем замены символов для почти рекурсивно-комбинаторных функций символами для соответствующих канонических расширений. Тогда $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ истинно для всех бесконечных изолей $X_1, \ldots, X_n$.*

Здесь под суждением хорновского типа понимается формула логики суждений от равенств, такая, что в ее конъюнктивной нормальной форме каждый конъюнктивный член содержит не более одного дизъюнктивного члена без отрицания. Таким образом, суждения хорновского типа включают:

(I) равенства $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$;

(II) неравенства $f \neq g$;

(III) импликации, антецеденты которых являются равенствами или конъюнкциями равенств и консенвенты которых являются равенствами:

$$f_1 = g_1 \,\&\, \ldots \,\&\, f_k = g_k \rightarrow f^* = g^*;$$

(IV) несовместимости между равенствами: $\sim(f_1=g_1 \& \ldots \& f_k=g_k)$;

(V) конъюнкции, конъюнктивные члены которых имеют один из видов (I) — (IV).

Среди суждений хорновского типа, имеющих вид (III), имеются уже все правила сокращения, ранее отмеченные; однако формула, утверждающая несуществование делителей нуля, не является суждением хорновского типа. С другой стороны, среди суждений хорновского типа, имеющих вид (IV), имеется суждение

$$\sim(X=2Y \& X=2Z+1),$$

которое утверждает, что никакой изоль не может быть одновременно и четным и нечетным. Утверждение, что каждый изоль является либо четным, либо нечетным, можно также выразить при помощи некоторого ухищрения в виде формулы логики суждений от равенств между рекурсивно-комбинаторными функциями. Однако эта формула оказывается дизъюнкцией двух таких равенств и, следовательно, к ней не применима теорема 7. Более того, эта формула на самом деле не верна в Λ.

Таким образом, комбинаторные функции позволяют нам обращаться с суждениями хорновского типа, на которые навешаны кванторы общности. Можно применять также эти функции для обращения с суждениями хорновского типа, на которые навешаны кванторы существования (несмешанные). В качестве образца приведем следующую теорему.

Теорема 8 (Деккер—Майхилл—Нероде). *Пусть* $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ — *конъюнкция равенств между почти рекурсивно-комбинаторными функциями, и пусть* $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ *получается из нее так же, как и в теореме 7. Тогда*:

(а) *Если* $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ *верно лишь для конечного числа систем из* n *элементов* $x_1, \ldots, x_n$, *то оно не верно ни для какой системы* n *бесконечных изолей* $X_1, \ldots, X_n$.

(б) *Если для всякой системы* n *элементов* $x_1^*, \ldots, x_n^*$ *существуют* $x_1 > x_1^*, \ldots, x_n > x_n^*$, *удовлетворяющие* $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, *то существуют бесконечные изоли* $X_1, \ldots, X_n$, *удовлетворяющие* $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$.

6. Случай одного квантора. Отрицательные результаты

Формула (*), выражающая несуществование делителей нуля, не распространяется на изоли и не является хорновской. За исключением тривиальных случаев, которые будут сейчас же разъяснены, никакая нехорновская формула (в частности, никакая дизъюнкция равенств и никакая импликация, антецедент которой является одним равенством и консеквент которой является дизъюнкцией равенств) не переносится на изоли.

Природа тривиальных исключений иллюстрируется формулой

$$xy=0 \to x=0 \lor y=0,$$

которая не является хорновской и тем не менее переносится на Λ. Причина в том, что она эквивалентна формуле

$$(\forall xy \geqslant 1) \quad (xy \neq 0),$$

которая верна в Λ в силу теоремы 9. Точное утверждение теоремы о контрпримерах для нехорновских формул имеет сложный вид; мы ограничимся случаем одной переменной.

Теорема 9 (Майхилл — Нероде). *Пусть* $f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_k$ — *почти рекурсивно-комбинаторные функции, а* $F_1, \ldots, G_k$ — *их канонические расширения* ($k \geqslant 2$). *Предположим, что формула*

$$f_1(x)=g_1(x) \lor \ldots \lor f_k(x)=g_k(x)$$

верна для всех натуральных чисел x. *Тогда*

$$F_1(X)=G_1(X) \lor \ldots \lor F_k(X)=G_k(X)$$

не верно в Λ, *за исключением тривиального случая, когда для некоторого* $i \leqslant k$ *равенство*

$$f_i(x)=g_i(x)$$

верно для всех x *или для всех* x, *кроме, быть может, конечного числа их (и в этом случае в силу теоремы 7* $F_i(X)=G_i(X)$ *верно для всех бесконечных* X).

Аналогичная теорема справедлива для импликаций

$$f_0(x)=g_0(x) \to f_1(x)=g_1(x) \lor \ldots \lor f_k(x)=g_k(x),$$

и это или, вернее, соответствующее перенесение на функции многих переменных доставляет другое доказательство существования делителей нуля в Λ^*.

7. Случай двух кванторов

Не всякая хорновская формула с одним или более чередованием кванторов верна в Λ, коль скоро она верна для целых чисел. Простым примером является

$$x \neq 0 \& xy \leqslant xz \to y \leqslant z,$$

т. е. после приведения к предваренной нормальной форме

$$(\forall xyzw)(\exists u)((x+1)y+w=(x+1)z \to y+u=z),$$

для которой я нашел контрпример в Λ. С другой стороны, если всякая сколемова функция какой-либо арифметической формулы может быть выбрана так, чтобы она оказалась почти рекурсивно-комбинаторной, то, например,

$$(\forall xy)(\exists z)\mathfrak{R}(x, y, z),$$

где хорновская формула $\mathfrak{R}$ может быть записана как

$$\mathfrak{R}(x, y, f(x, y))$$

для некоторой почти рекурсивно-комбинаторной f. Следовательно, в силу теоремы 7 формула $\mathfrak{R}(X, Y, F(X, Y))$, и тем более формула

$$(\forall XY)(\exists Z)\mathfrak{R}(X, Y, Z),$$

верна в Λ.

В действительности, как это показал Нероде, можно свести проблему разрешимости для формул с двумя кванторами к проблеме разрешимости для арифметики натуральных чисел; эта процедура слишком сложна, для того чтобы ее можно было описать здесь. Для трех и более кванторов известны лишь частичные результаты.

8. Кольцо изольных целых

Добавление кванторов во многих случаях не приводит к дальнейшим осложнениям в Λ^* по сравнению с тем, что мы имеем в Λ; это обстоятельство, а также применимость стандартных алгебраических методов (теория колец), показывает, что, по-видимому, наиболее удобно изучать Λ посредством изучения Λ^*. Для формулировки некоторых основных результатов в этой области мы нуждаемся в понятии канонического расширения рекурсивной (но необязательно комбинаторной) функции из ε^* (кольца целых чисел) в Λ^*. Для функций одного аргумента это делается следующим образом. Пусть $f: \varepsilon^* \to \varepsilon^*$ рекурсивна, и пусть $f^*(a, b) = f(a - b)$ для любых двух неотрицательных целых a, b. Функция f^* имеет каноническое разложение $f^+ - f^-$, где f^+ и f^- рекурсивно-комбинаторны. Определим теперь каноническое расширение F функции f на Λ^* так:

$$F(X - Y) = F^+(X, Y) - F^-(X, Y) \quad (X, Y \in \Lambda).$$

(Впрочем, однозначность требует доказательства и вовсе не тривиальна.) Исходя из этого определения, мы имеем следующую теорему, которая значительно сильнее какой бы то ни было соответствующей ей теоремы, известной для Λ:

Теорема 10 (Нероде). a) *Пусть Φ — хорновская формула с произвольными кванторами (в предваренной нормальной форме), в которой переменные принимают значения из ε^* и функциональные символы обозначают рекурсивные (необязательно комбинаторные) функции. Пусть Φ^* получается из Φ путем замены „целых“ переменных „изольно целыми“ переменными и замены символов рекурсивных функций символами их канонических расширений в Λ^*. Тогда если Φ истинно и если сколемовы функции для Φ могут быть взяты рекурсивными, то Φ^* также истинно.*

b) *Пусть $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ — универсальная нехорновская формула, в которой переменные пробегают ε^*, а функциональные символы обозначают рекурсивные функции. Пусть $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ получается из Φ путем замены переменных целых чисел переменными изольными целыми и замены символов рекурсивных функций символами их канонических расширений в Λ^*. Тогда даже при истинной $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ не истинна $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$, если нельзя записывать $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ как конъюнкцию дизъюнкций так, чтобы из каждой дизъюнкции можно было дизъюнктивный член без отрицания удалить таким образом, чтобы результирующее оставалось истинным для целых чисел.*

Имеются соответствующие результаты для неуниверсальных нехорновских формул.

9. ТРЭ, которые не являются изолями

Обратимся теперь к рассмотрению $\Omega - \Lambda$. Комбинаторные функции обнаруживают здесь тенденцию к вырождению за счет повсеместного аддитивного поглощения и преобладания равномерного мультипликативного поглощения. В самом деле, можно было бы показать путем непосредственных вычислений, что каждая рекурсивная комбинаторная функция становится вне Λ либо (a) константой, либо (b) функцией вида $mA^n/n!$ $(m, n \geqslant 1)$, либо (c) функцией 2^A. (Мы применяем здесь и далее начальные буквы алфавита для обозначения произвольных ТРЭ и продолжаем применять конечные буквы алфавита для обозначения изолей. Отношение $A^n/n!$ однозначно определено и всегда существует для $A \notin \Lambda$.)

Всякое *тождество* между почти рекурсивно-комбинаторными функциями переносится с натуральных чисел на Ω. Однако то же самое не имеет места для более сложных формул и в том числе для отрицаний тождеств (см., например, $n \neq n+1$). Имеется, однако, одна важная импликация, которая переносится, а именно:

Теорема 11 (Фридберг). $nA = nB \to A = B$ $(n \neq 0)$.

Это приводит к гипотезам, что $XA = XB \to A = B$ для каждого ненулевого изоля X и что $F(A) = F(B) \to A = B$ для каждой рекурсивно-комбинаторной функции F, не являющейся постоянной. Обе эти гипотезы были опровергнуты моим учеником Э. Эллентуком, который доказал следующую теорему.

Теорема 12 (Эллентук). *Существуют такие различные* $A, B \in \Omega - \Lambda$, *что для каждой нелинейной рекурсивно-комбинаторной функции* F *выполняется равенство* $F(A) = F(B)$.

Таким образом, правдоподобно, что изучение импликаций и более общих предложений хорновского типа в $\Omega - \Lambda$ становится тривиальным, по крайней мере в случае одного аргумента.

Следствием теоремы 11 является то, что *конечные кратные любого* ТРЭ *либо все равны между собой, либо все попарно различны.* Это неверно для конечных степеней. Эллентук нашел такой ТРЭ, для которого

$$A < A^2 = A^3 = A^4 = \ \ldots \ .$$

Вообще либо все степени попарно различны, либо с некоторого места совпадают (в последнем случае они также равны 2^A). Далее, если какая-либо степень A^k является идеммултиплем (т. е. $A^k = 2A^k$), то так же обстоит дело для всех больших степеней. Следовательно, *система комбинаторных функций от одного аргумента полностью определяется двумя числовыми инвариантами* (возможно, $=, \infty$): *числом различных степеней и числом таких степеней, которые являются идеммултиплями.* Таким образом, было бы легко покончить с $\Omega - \Lambda$; на самом деле эта теория может быть разрешимой в некотором подходящем смысле.

10. Конечные кардинальные числа Дедекинда

До недавнего времени считалось вероятным, что имеется точное соответствие между арифметикой изолей и арифметикой дедекиндовых конечных кардинальных чисел без аксиомы выбора. Однако недавно был найден контрпример; формула

$$\forall X \, \exists Y \, (X^2 + X = 2Y)$$

верна в Λ, но неверна в некоторых вариантах модели Френкеля — Мостовского. Теперь кажется более правдоподобным, что арифметика изолей соответствует арифметике дедекиндовых конечных кардинальных чисел, в которой аксиома выбора заменена аксиомой простого упорядочения; в самом деле, все *положительные* результаты о комбинаторных функциях изолей почти наверняка переносятся без изменения на дедекиндовы конечные кардинальные числа с простым упорядочением. Возможно также, что более ограниченный класс функций приводит к теории, применимой к дедекиндовым конечным кардинальным числам без аксиомы выбора или какой-либо ее более слабой замены.

Во всяком случае, я полагаю, что более плодотворное применение методов Деккера, Нероде и моих еще впереди и что они относятся скорее к теории множеств, чем к теории рекурсивных функций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКОЕ ПРИМЕЧАНИЕ

В связи с быстротой, с которой развивалась теория типов рекурсивной эквивалентности, большинство опубликованных результатов существует в виде резюме в «Journal Symbolic Logic», «Bulletin American Mathematical Society» и «Notices American Mathematical Society» начиная с 1955 г. Единственное подробное изложение имеется в монографии «Recursive Equivalence Types» (Dekker, Myhill, University of California Publications in Mathematics, v. 3, № 3, 67—214, 1960). Однако более поздние результаты (после 1956 г.) уже не отражены в этой книге, и многое из рассматриваемого в ней выглядит уже несколько устаревшим. Большая подробная статья Нероде о комбинаторных функциях, содержащая полные доказательства, ряда теорем, сформулированных в настоящей статье без доказательства, помещена в *Ann. Math.* [**73** (1961), 362—403]. Результаты, о которых говорилось в п. 10, были красиво изложены в диссертации Эллентука (Калифорнийский университет).

Некоторые приложения степеней[1])

Дж. ШЁНФИЛД

Дьюкский университет, Дархэм, Сев. Каролина, США

Хотя теория степеней неразрешимости значительно развилась в последние годы, тем не менее ее применения еще достаточно редки. Некоторые приложения можно найти в недавней работе Клини, однако это в основном несущественные приложения, ибо за счет незначительного усложнения текста применение степеней можно было бы заменить гиперарифметической иерархией.

Вместе с тем, как это было подчеркнуто Клини, структура степеней является существенно более тонкой, чем структура гиперарифметической иерархии. Следовательно, „настоящее" применение степеней возможно лишь тогда, когда более тонкая структура действительно необходима. Кажется вероятным, что теория рекурсивных функций достигла теперь уровня, когда уже имеется такая ситуация. Мы обсудим две проблемы, которые используют более тонкую структуру, хотя понятие степени не фигурирует ни в одной из этих проблем. Хотя сами по себе эти проблемы не имеют большого значения, они все же иллюстрируют характер применения степеней, которое можно ожидать в будущем.

Первая проблема подсказана серией теорем Тарского о неразрешимых теориях. Предположим, что доказана неразрешимость какой-либо теории посредством одной из этих теорем; можем ли мы заключить, что она является в некотором смысле эффективно неразрешимой? Для аксиоматизируемых теорий эффективную неразрешимость можно интерпретировать как „креативность" (определение см. в [2]). Более того, все теоремы Тарского зависят от фундаментальной теоремы (принадлежащей, по существу, Чёрчу); если всякая рекурсивная функция определима в непротиворечивой теории T, то T неразрешима. Следовательно, основной вопрос таков: если всякая рекурсивная функция определима в некоторой аксиоматизируемой непротиворечивой теории T, то обязана ли T быть креативной?

Феферман [2] и автор [5] показали, что ответ положителен, если сделать некоторые дополнительные предположения о T. Эренфойхт и Феферман [1] показали, что при этих дополнительных предположениях справедливо и более сильное утверждение, а именно

[1]) Shoenfield J. R., Some applications of degrees, стр. 56—59.

каждое рекурсивно перечислимое множество слабо представимо в T. Тем не менее ответ на основной вопрос отрицателен. Существует аксиоматизируемая непротиворечивая некреативная теория T, в которой всякая рекурсивная функция определима и в которой ни одно нерекурсивное множество не представимо слабо.

Конструкция T дана в [6]; здесь мы просто укажем, как в нее входят степени. Майхилл [3] показал, что каждое креативное множество имеет степень θ' (наивысшую степень рекурсивно перечислимых множеств). Следовательно, для установления некреативности T достаточно показать, что T (множество гёделевых номеров ее теорем) имеет степень меньшую, чем θ'.

Допустим, что имеется частично рекурсивная функция $F(e, n)$, обладающая следующим свойством: для всякой рекурсивной функции $f(n)$ существует число e, такое, что функция $F(e, n)$ определена и равна $f(n)$ для всех n. Тогда можно следующим образом получить аксиоматизируемую теорию T, в которой каждая рекурсивная функция определима. Введем константы 0, 1, 2, ... и одноместные функциональные символы Φ_0, Φ_1, Φ_2, ... и объявим $\Phi_e(n) = m$ аксиомой всякий раз, когда $F(e, n)$ определено и равно m.

Одна из таких функций F может быть получена так: пусть $F(e, n) = m$, если e-я частично рекурсивная функция определена для всех аргументов, не превосходящих n, и равна m для аргумента n. Область определения этой функции F креативна. Однако можно показать, что, опуская подходящим образом для каждого e конечное число пар (e, n), можно превратить эту область в рекурсивно перечислимое множество степени меньших θ'. Новая функция F не обладает свойством, сформулированным выше, „в незначительной мере", однако это свойство может быть легко восстановлено без изменения степени.

Теперь мы имеем множество аксиом степени меньше θ'. Путем введения дальнейшей рекурсивной системы аксиом можно эффективно исключить кванторы. Тогда можно свести проблему разрешимости для теории T к таковой же для области определения F; таким образом, T становится теорией со степенью меньше θ'.

Вторая проблема касается категоричности. Как известно, арифметика Пеано не категорична в мощности $\aleph_0$ (т. е. существуют нестандартные счетные модели).

Предположим, что выбрано множество A, добавим символ „A" этого множества к арифметике Пеано и введем $A(n)$ как аксиому для каждого n в A и $\neg A(n)$ как аксиому для каждого n, не принадлежащего A (между прочим, аксиому индукции следует расширить так, чтобы она захватила новый символ). Если мы сделаем это для одного множества или даже для счетного множества, таких множеств A, доказательство некатегоричности сохранит силу. Однако, если мы сделаем это для всех множеств A, ситуация изменится.

Рабин [4] показал, что полученная так теория категорична в мощности $\aleph_0$. Позднее Скотт и Тенненбаум показали, что это верно даже в том случае, если мы введем лишь новые символы и аксиомы для несчетного множества множеств A.

Возникает теперь вопрос, является ли результат Скотта — Тенненбаума в самом деле сильнее результата Рабина. Априори возможно, что, когда бы мы ни ввели символы и аксиомы для несчетного числа множеств, каждое множество натуральных чисел слабо представимо в получаемой теории. Для того чтобы показать, что это не так, было бы достаточно найти несчетный класс $\mathscr{A}$ множеств натуральных чисел, который арифметически независим, т. е. такой, что ни один элемент $\mathscr{A}$ не является арифметическим относительно остальных элементов. Применяя технику Спектора [7] в теории меры, мы доказываем более сильные результаты.

Теорема. *Не существует несчетного класса $\mathscr{A}$ множеств натуральных чисел, который является гиперарифметически независимым.*

Доказательство. Отождествим множество натуральных чисел с его характеристической функцией. Пространство $\mathscr{C}$ характеристических функций является счетным произведением $\{0, 1\}^\infty$. Если приписать $\{0, 1\}$ меру, в которой каждая точка имеет меру 1/2, то $\mathscr{C}$ будет иметь меру произведения. Следовательно, $\mathscr{C}^2$ имеет меру произведения. Определим функцию F из $\mathscr{C}^2$ в $\mathscr{C}$ следующим образом: $F(\alpha, \beta) = \gamma$, где γ определяется так:

$$\gamma(2n) = \alpha(n),$$
$$\gamma(2n+1) = \beta(n).$$

Если $\mathscr{C}$ рассматривается как пространство произведения, то F является просто перестановкой множителей. Следовательно, F является изоморфизмом пространств с мерой $\mathscr{C}^2$ и $\mathscr{C}$. Пусть $H_n(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n) = 1$, если α гиперарифметична относительно $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Как и в [7], H_n измерима, и поскольку относительно фиксированных $\beta_1, \ldots, \beta_n$ имеется лишь счетное число гиперарифметических α, то

$$\int H_n(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n)\, d\alpha = 0. \tag{1}$$

Лемма. *Если $\mathscr{A}$ конечен и $\mathscr{A} \cup \{\beta\}$ гиперарифметически независим почти для всех β, то $\mathscr{A} \cup \{\beta, \gamma\}$ гиперарифметически независим почти для всех пар* (β, γ).

Доказательство. Пусть $\mathscr{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Если $\mathscr{A} \cup \{\beta, \gamma\}$ не является независимым, то

$$H_{n+1}(\beta, \gamma, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1, \tag{2}$$

или

$$H_{n+1}(\gamma, \beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1, \tag{3}$$

или же некоторая α_i является гиперарифметической относительно остальных α_j, β, γ; в таком случае

$$\mathscr{A} \cup \{F(\beta, \gamma)\} \text{ не является независимым.} \tag{4}$$

Множество пар (β, γ), удовлетворяющих (2), имеет меру 0. Это получается, если интегрировать $H_{n+1}(\beta, \gamma, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ относительно (β, γ), применяя теорему Фубини для преобразования интеграла к виду

$$\int\int H_{n+1}(\beta, \gamma, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, d\beta\, d\gamma$$

и применяя также (1). Аналогично множества пар (β, γ), удовлетворяющих (3), имеют меру 0. В силу гипотезы об $\mathscr{A}$ и того факта, что F является изоморфизмом, множество пар (β, γ), удовлетворяющих (4), имеет меру 0. Отсюда следует, что *лемма* доказана.

Рассмотрим теперь все подклассы $\mathscr{B}$ класса $\mathscr{C}$, удовлетворяющие условию:

(1) Для каждого конечного подмножества $\mathscr{A}$ множества $\mathscr{B}$ $\mathscr{A} \cup \{\beta\}$ является независимым почти для всех β.

Всякое такое $\mathscr{B}$ очевидным образом независимо[1]). В силу леммы Цорна существует максимальный класс $\mathscr{B}$, удовлетворяющий (1); нам остается лишь показать, что такой класс $\mathscr{B}$ не может быть счетным. Предположим, что $\mathscr{B}$ счетен и, следовательно, имеет лишь счетное множество конечных подмножеств. Применяя лемму к этим подмножествам, мы видим, что $\mathscr{B} \cup \{\beta, \gamma\}$ независим почти для всех пар $\{\beta, \gamma\}$. В силу теоремы Фубини следует, что $\mathscr{B} \cup \{\beta\}$ обладает свойством (1) почти для всех β; итак, почти все β принадлежат $\mathscr{B}$. Однако это невозможно, ибо $\mathscr{B}$ счетен и, следовательно, имеет меру нуль.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ehrenfeucht A., Feferman S., Representability of recursively enumerable sets in formal theories, *Archiv für Math, Logik und Grundlagenforschung*, 5 (1959), 37—41.
2. Feferman S., Degrees of unsolvability associated with classes of formalized theories, *J. Symb. Logic*, 22 (1957), 161—175.
3. Myhill J., Creative sets, *Z. Math. Logik und Grundlagen der Math.*, 1 (1955), 97—108.

[1]) Напомним, что некоторая функция гиперарифметична относительно класса $\mathscr{B}$, только если она гиперарифметична относительно конечного подкласса класса $\mathscr{B}$.

4. Rabin M. O., Arithmetical extensions with prescribed cardinality, *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, ser. A, **62** (1959), 439—446.
5. Shoenfield J. R., Degrees of formal systems, *J. Symb. Logic*, **23** (1958), 389—392.
6. Shoenfield J. R., Undecidable and creative theories, *Fund. Math.*, **49** (1961), 711—179.
7. Spector C., Measure-theoretic construction of incomparable hyperdegrees, *J. Symb. Logic*, **23** (1958), 280—288.
8. Tarski A., Mostowski A., Robinson R. M., Undecidable theories, North Holland Publishing Co., 1953.

Последние достижения в теории моделей [1)]

А. РОБИНСОН

Принстонский университет, Принстон, Нью-Джерси, США

1. Введение

Теория моделей рассматривает свойства математических структур или систем математических структур, которые задаются множествами аксиом, формулируемых часто — но не обязательно — в узком исчислении предикатов.

С самого начала она была тесно связана с алгеброй как в силу алгебраического характера ее методов, так и вследствие того, что алгебра является наиболее естественной областью ее применения. Теория множеств в последние годы исследовалась чаще всего с чисто аксиоматической точки зрения, поэтому она также оказалась в сфере действия теории моделей.

В данной лекции я не ставлю себе целью дать исчерпывающее описание предмета. Вместо этого я постараюсь показать, как полученные в ней некоторые первоначальные результаты принимают новый вид в свете последних достижений, и выделить некоторые тенденции и методы, которым, по-видимому, предстоит сыграть важную роль в ближайшем будущем. Будут представлены некоторые новые результаты. Выражаю признательность М. Перлис за полезные замечания по предмету, рассматриваемому в первой части статьи.

Как довольно часто бывает в математике, некоторые основные идеи теории моделей восходят к тому периоду, когда теория моделей как предмет еще только зарождалась. Так, некоторые методы, используемые для доказательства расширенной теоремы полноты узкого исчисления предикатов (у. и. п.) или теоремы компактности для арифметически аксиоматизируемых классов или принципа локализации (с точки зрения их применения все по существу эквивалентные, хотя и сформулированные в рамках разных систем), появляются уже в работе Гёделя о полноте узкого исчисления предикатов, по меньшей мере для частного случая, и даже еще раньше в работе Лёвенгейма. Аналогично понятие о функции выбора, очень полезное в нашем предмете, применялось Сколемом, Гильбертом и Эрбраном уже в двадцатых годах. Наконец, сколемовское построение

[1)] Robinson A., Recent developments in model theory, стр. 60—79.

нестандартной модели для арифметики закономерно предшествует методу ультрапроизведений, который будет рассмотрен ниже.

Как упомянуто выше, алгебра может служить и служила эффективным полем применения теории моделей. Теперь мы знаем, что некоторую часть самой ранней работы в этой области проделал А. И. Мальцев, который в своей основополагающей статье [13] (из-за неудачного места и времени опубликования остававшейся неизвестной для Запада более 12 лет) применил свой *принцип локализации* к целому ряду задач теории групп. Сейчас я кратко опишу метод Мальцева и приведу конкретный пример его применения, после чего дам более глубокий анализ сферы его действия.

2. Метод Мальцева

Рассмотрим элементарную теорию некоммутативных групп. Свойство P групп называется квазиэлементарным (или, по Мальцеву, элементарным), если группа G обладает свойством P тогда и только тогда, когда в G истинны все высказывания некоторого конечного или бесконечного множества K_P высказываний узкого исчисления предикатов. Более того, предполагается, что свойство P сохраняется при переходе к подгруппам. Другими словами, если P удовлетворяется группой G, то оно удовлетворяется и всеми ее подгруппами. Например, свойство группы быть коммутативной квазиэлементарно. Точная формулировка аксиом группы не связана с настоящим определением, но мы здесь условимся, что они формулируются в терминах отношения равенства $E(x, y)$ (читай: x равно y, $x=y$ в обычных обозначениях), функций $g(x, y)$ и $r(x)$ (т. е. xy и x^{-1}) и отдельной константе e, обозначающей нейтральный элемент группы. Через K_0 обозначим множество аксиом, выражающих понятие группы.

Пусть $[P_1, \ldots, P_k]$ — множество квазиэлементарных свойств, $k \geqslant 1$. Тогда мы говорим, что группа G относится к типу $[P_1, \ldots, P_k]$, если существует нормальная цепь

$$G=G_0 \supseteqq G_1 \supseteqq G_2 \supseteqq \ldots \supseteqq G_k=(e),$$

такая, что факторгруппы G_i/G_{i+1}, $i=0, \ldots, k-1$, имеют свойства $P_1, \ldots, P_k$ соответственно. Основной результат Мальцева состоит в том, что если каждая конечно порождаемая подгруппа из G относится к типу $[P_1, \ldots, P_k]$, то G тоже относится к $[P_1, \ldots, P_k]$. Мы получаем простое применение этого результата, если берем в качестве $P_1=P_2= \ldots =P_k$ при фиксированном k свойство коммутативности P. Тогда группа типа $[P_1, \ldots, P_k]$ является разрешимой группой *ранга* k, и результат Мальцева позволяет сделать вывод о том, что если каждая конечно порожденная подгруппа группы G является разрешимой группой ранга k, то и сама G — разрешимая группа ранга k.

Доказательство главной теоремы основано на принципе локализации, согласно которому множество высказываний K узкого исчисления предикатов обладает моделью тогда (и только тогда), когда каждое конечное его подмножество обладает моделью.

В рамках узкого исчисления предикатов нельзя записать, что группа G относится к типу $[P_1, \ldots, P_k]$. Поэтому мы вводим новые одноместные отношения $H_1(x), \ldots, H_k(x)$, которые истинны для x, $x \in G$, тогда и только тогда, когда $x \in G_i$, $i=1, \ldots, k$ соответственно. Пользуясь этими отношениями, теперь нетрудно выразить принадлежность группы G к типу $[P_1, \ldots, P_k]$ конечным или бесконечным множеством высказываний в узком исчислении предикатов. Соответствующее множество этого вида будет обозначено через K^*.

Пусть $\{b_\nu\}$ — множество предметных констант из G. Тогда мы можем в известном смысле описать группу G в узком исчислении предикатов, построив ее диаграмму D; D — множество всех элементарных высказываний $E(b_\mu, b_\nu)$, которые истинны в G, и высказываний $\sim E(b_\mu, b_\nu)$, если $E(b_\mu, b_\nu)$ ложны в G (т. е. если $b_\mu \neq b_\nu$ в G), тогда b_μ и b_ν — произвольные термы, т. е. выражения, полученные неоднократным применением функциональных символов $g(x, y)$ и $r(x)$ к элементам из G. (Стоящие сейчас перед нами цели позволяют нам пренебречь различием между символами 'b', 'g', 'r' и обозначаемыми ими объектами.) Всякая группа является моделью множества D тогда и только тогда, когда она является расширением группы G. Всякая система (или структура) отношений является группой типа $[P_1, \ldots, P_k]$, если она представляет собой модель для $K_0 \cup K^*$.

Рассмотрим теперь множество суждений $J=K_0 \cup K^* \cup D$. По принципу локализации J обладает моделью, если каждое конечное подмножество множества J обладает моделью. Но все конечные подмножества множества D уже реализованы в конечно порожденной подгруппе группы G. Так, если предположение основной теоремы удовлетворено, то у каждого конечного подмножества есть модель. Следовательно, J обладает моделью, скажем моделью G^*.

Группа G^* относится к типу $[P_1, \ldots, P_k]$ и является расширением группы G. Пусть $H_1^*, \ldots, H_k^*$ — подгруппы группы G^*, состоящие из элементов, удовлетворяющих соответственно $H_1(x), \ldots, H_k(x)$, и пусть $G_1, \ldots, G_k$ — соответствующие подгруппы группы G. Положим $H_0^*=G^*$ и $G_0=G$. Тогда $G_i^*=G \cap H_i^*$, $i=0, \ldots, k$.

Факторгруппа H_i^*/H_{i+1}^* обладает свойством P_{i+1} по построению при $i=0, \ldots, k-1$. Факторгруппа $G_i/G_{i+1}=G_i \cap H_{i+1}^*$ изоморфна подгруппе факторгруппы H_i^*/H_{i+1}^* и отсюда, согласно одной из наших посылок относительно P_i, обладает свойством P_{i+1}. Отсюда G также является группой типа $[P_1, \ldots, P_k]$. На этом доказательство теоремы Мальцева завершается.

3. Анализ квазиэлементарных свойств

Со времени опубликования работы Мальцева была проделана значительная работа по изучению связи между теоретико-модельными свойствами высказывания или множества высказываний и его формальными или синтаксическими свойствами. В соответствии с этим установим синтаксический смысл условий, наложенных (см. разд. 2) на квазиэлементарные свойства P. Таким образом мы выясним, при каких условиях свойство P, сформулированное с помощью конечного или бесконечного множества высказываний в узком исчислении предикатов, оказывается таким, что всякий раз, когда P удовлетворяется моделью M множества аксиом K (в упомянутом выше случае — групповых аксиом), оно удовлетворяется и каждой подмоделью модели M, являющейся моделью множества K. Если P конечно, то известно (см. работы [9, 18], которые обобщают итоги [24]), что P можно заменить универсальным высказыванием, т. е. высказыванием, не содержащим квантора существования в предваренной нормальной форме.

Заметим, что это непосредственно не переносится на случай бесконечной системы P. Поэтому рассмотрим теперь этот случай подробнее.

Предварительно введем удобную символику. Принято писать $K \vdash X$, если высказывание X — дедуктивное следствие из K, или (что для узкого исчисления предикатов то же самое) если X истинно для всех моделей K, в которых оно определено. Аналогично пишут $K \vdash K'$, если $K \vdash X$ для всех элементов X множества высказываний K'. Мы будем писать $K \mathrel{\uparrow\!\vdash} X$, если X истинно во всех структурах, в которых оно определено и которые являются *расширениями* моделей K, и $K \mathrel{\downarrow\!\vdash} X$, если X истинно во всех структурах, в которых оно определено и которые включаются в модели K. Как и ранее, мы вводим соответствующие обобщения $K \mathrel{\uparrow\!\vdash} K'$ и $K \mathrel{\downarrow\!\vdash} X'$.

Теорема 3.1. *$K \mathrel{\uparrow\!\vdash} X$ для данных K и X тогда и только тогда, когда существует конечное подмножество K' множества K, такое, что $K' \mathrel{\uparrow\!\vdash} X$.*

Говоря обычным языком, эта теорема выражает свойство локализации отношения $\mathrel{\uparrow\!\vdash}$. Очевидно, что условие достаточно. Чтобы доказать, что оно необходимо, мы релятивизируем множество K с помощью одноместного предиката $R(x)$, который не встречается ни в K, ни в X. Иными словами, каждой формуле W из K поставим

в соответствие формулу $\rho(W)$ следующим образом:

$$\rho(Z) = Z, \quad \text{если } Z \text{ — атомарная формула},$$
$$\rho(\sim Z) = \sim\rho(Z),$$
$$\rho(Z \vee W) = \rho(Z) \vee \rho(W)$$

для всех формул Z и W. Аналогично определим ρ для остальных связок, если они есть. Наконец, положим

$$\rho((\exists x)\,Q(x)) = (\exists x)\,[R(x) \wedge Q(x)]$$

и

$$\rho((x)\,Q(x)) = (x)\,[R(x) \supset Q(x)].$$

Таким образом, если M — структура, которая включает отношение $R(x)$, такое, что $R(a)$ истинно в M по меньшей мере для одного $a \in M$, и если Z — высказывание, определенное в M, но не включающее R, то $\rho(Z)$ истинно в M тогда и только тогда, когда Z истинно в подструктуре M_R структуры M, которая состоит из элементов, удовлетворяющих R.

Теперь определим $\rho(K)$ как множество всех $\rho(Z)$ для $Z \in K$ и высказываний $R(a)$ для всех индивидных констант a, которые встречаются в K. Если же в K индивидных констант не имеется, то мы присоединим к нему высказывание $(\exists x)\,R(x)$. При этом M опять будет моделью $\rho(K)$ тогда и только тогда, когда M_R в том виде, в каком оно определено выше, является моделью K.

Теперь, чтобы доказать, что условие теоремы 3.1 необходимо, отметим, что $K \mathrel{\uparrow\!\vdash} X$ эквивалентно $\rho(K) \vdash X$. Но отсюда следует в силу обычного принципа локализации, что $H \vdash X$ для некоторого конечного подмножества H множества $\rho(K)$. Пусть H' — множество высказываний из K, таких, что $\rho(H') \subset H$. Кроме того, для всякой индивидной константы a, такой, что $R(a)$ принадлежит H, присоединим к H' высказывание из множества K, содержащее a. Обозначим полученное множество через K'. Тогда $\rho(K') \supseteq H$ и, следовательно, $\rho(K') \vdash X$. Из этого следует, что $K' \mathrel{\uparrow\!\vdash} X$, и теорема 3.1 доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 3.2. *Для данных K и X соотношение $K \mathrel{\downarrow\!\vdash} X$ выполняется тогда и только тогда, когда существует конечное подмножество K' множества K, такое, что $K' \mathrel{\downarrow\!\vdash} X$.*

Достаточность очевидна. Положим теперь, что $K \mathrel{\downarrow\!\vdash} X$ и что M — произвольная модель множества K, а M' — произвольная подструктура множества M, такая, что X истинно в M'. Полагая, по определению, что $R(x)$ истинны для всех элементов структуры M' и $\sim R(x)$ — для остальных элементов модели M, мы превращаем M в структуру M_R, такую, что $\rho(X)$ истинно в M_R. Кроме того, высказывания $R(a)$, а также высказывание $(\exists x) R(x)$ истинны в M_R для всех a, содержащихся в X. Пусть K_R — множество таких $R(a)$ вместе с $(\exists x) R(x)$. Очевидно, K_R непусто. Тогда $\rho(X)$ выводимо из $K \cup K_R$ для некоторого конечного подмножества K' множества K. Следовательно, $K' \downarrow\!\!\vdash X$. Теорема доказана.

Если K содержит только одно высказывание Y, то мы пишем $Y \uparrow\!\!\vdash X$, $Y \downarrow\!\!\vdash X$ вместо $\{Y\} \uparrow\!\!\vdash X$, $\{Y\} \downarrow\!\!\vdash X$ соответственно. Таким образом, мы получаем новый вид логической связки.

Предположим, что для двух данных высказываний X и Y существует *универсальное* высказывание Z в пределах словаря высказываний X и Y, т. е. такое высказывание, отношения и индивидные константы которого входят или в X, или в Y: $Y \vdash Z$ и $Z \vdash X$ (т. е. $Y \supset Z$ и $Z \supset X$ — теоремы исчисления предикатов). Пусть M и M' — любые две структуры, такие, что Y и X определяются в M и M' соответственно и M' — подструктура структуры M. Тогда Z истинно в M, поскольку $Y \vdash Z$, и, далее, Z истинно в M', поскольку Z универсально. Отсюда следует, что X истинно в M', $Y \downarrow\!\!\vdash X$. С другой стороны, докажем следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Пусть $Y \downarrow\!\!\vdash X$. Тогда существует универсальное высказывание Z в пределах словаря высказываний Y и X, такое, что $Y \vdash Z$ и $Z \vdash X$.*

Доказательство. Пусть K — множество универсальных высказываний W в пределах словаря высказываний X и Y, таких, что $Y \vdash W$. Тогда K дизъюнктивно и конъюнктивно, т. е. для всяких $W_1, W_2 \in K$ существуют W_3, W_4 в K, такие, что $W_1 \vee W_2 \equiv W_3$ и $W_1 \wedge W_2 \equiv W_4$ — теоремы (исчисления предикатов). Предположим теперь, что ни одно $W \supset X$ не является таким, что $W \vdash X$, т. е. таким что $W \supset X$ — теорема. Тогда нетрудно показать, что $K \cup (\sim X)$ непротиворечиво и, следовательно, обладает моделью M. Высказывание Y не может быть истинным в любом расширении структуры M, поскольку $Y \downarrow\!\!\vdash X$. Тогда метод диаграмм показывает, что для некоторого экзистенциального высказывания V, которое истинно в M и которое находится в пределах словаря высказываний X и Y, $V \vdash \sim Y$. Отсюда, заменяя $\sim V$ эквивалентным универсальным высказыванием V', мы имеем $Y \vdash V'$. Следовательно, V' принадлежит K, а значит, истинно в M. Это противоречит тому, что V истинно в M, и показывает, что $Z \vdash X$ для некоторого $Z \in K$, и, таким образом, теорема доказана.

Нетрудно сформулировать полученные выше результаты для групп, т. е. описать всю ситуацию относительно множества аксиом K_0, заданных заранее, рассматривая только модели множества аксиом K_0 как в формулировке теорем, так и в доказательствах. Например, $Y \downarrow\!\!\vdash X$ относительно K_0 означает, что для всех моделей M и M' — множества аксиом K_0, таких, что M содержит M', и таких, что

X и Y определяются в M и M' соответственно, — Y истинно в M тогда и только тогда, когда X истинно в M'.

Нетрудно также доказать результат, соответствующий теореме 3.3, для отношения $\uparrow\!\!\vdash$. Результат тогда утверждает существование некоторого *экзистенциального* высказывания Z.

Теперь мы можем доказать следующее утверждение.

Теорема 3.4. *Пусть K — множество высказываний, такое, что всякий раз, когда K истинно в модели M данного множества K_0, оно истинно и во всех подструктурах модели M, которые являются моделями множества K_0. Тогда существует множество универсальных высказываний K', такое, что K и K' эквивалентны относительно K, $K_0 \cup K \vdash K'$ и $K_0 \cup K' \vdash K$, а высказывания множества K' находятся в пределах словаря множеств K_0 и K.*

Для доказательства этой теоремы положим, что K' — множество всех универсальных высказываний, выводимых из $K_0 \cup K$, и что $X \in K'$. Тогда нужно показать, что X выводимо из $K' \cup K_0$. Поскольку X находится в K, оно истинно во всех подструктурах моделей множества $K \cup K_0$, которые сами являются моделями множества $K \cup K_0$. Следовательно, согласно соответствующему варианту теоремы 3.2, существуют высказывания $X_1, \ldots, X_l$ в K, такие, что $X_1 \wedge \ldots \wedge X_l \downarrow\!\!\vdash K$ относительно K_0. Отсюда в силу соответствующего варианта теоремы 3.3 существует элемент Z множества K', такой, что $X_1' \wedge \ldots \wedge X_l \supset Z$, и $Z \supset X$ выводимы из K_0. Таким образом, теорема доказана.

Можно получить соответствующий результат, если известно, что K сохраняется при расширениях моделей множества K_0. Множество K' содержит только экзистенциальные высказывания.

4. Синтаксические свойства высказываний и теоретико-множественные свойства их моделей

Итоги предыдущего раздела дают нам ряд типичных результатов из области исследования, которой в последние годы уделялось большое внимание. В настоящем разделе будет рассмотрена взаимосвязь между синтаксическими свойствами высказываний или множествами высказываний, с одной стороны (такими, как свойство быть универсальным высказыванием; см. выше), и теоретико-множественными или алгебраическими свойствами моделей этих предложений — с другой. Хороший обзор этого вопроса сделан Линдоном [11], который также получил один из самых значительных результатов в этой области [12]. Другими исследователями этого вопроса, кроме указанных в предыдущем разделе, были Биркгоф, Бинг, Чжан, Кейслер, Хорн и Воот. В обзоре Линдона можно получить дополнительные сведения. Хотя еще имеются нерешенные проблемы, наше общее представление об этой области сейчас вполне удовлетворительно. Основной результат, полученный Линдоном, состоит в следующем.

Теорема 4.1. *Высказывание узкого исчисления предикатов сохраняется при переходе к гомоморфным отображениям тогда и только тогда, когда оно эквивалентно положительному высказыванию.*

Высказывание положительно, если оно не содержит знака отрицания и составлено из атомарных формул только с помощью конъюнкции, дизъюнкции и квантификации. Наиболее трудным является здесь доказательство необходимости условия. Линдон доказывает также следующий более сильный результат.

Теорема 4.2. *Пусть X и Y — любые высказывания, такие, что Y определяется во всех моделях высказывания X, т. е. Y находится в пределах словаря X. Предположим, что всякий раз, когда X истинно в структуре M, Y истинно во всех гомоморфных отображениях структуры M. Тогда существует положительное высказывание Z в пределах словаря высказывания X, такое, что $X \vdash Z$ и $Z \vdash Y$.*

Обратная теорема очевидна. Сходная теорема, которая доказывается гораздо проще и которая дополняет список теорем в обзоре Линдона, заключается в следующем.

Теорема 4.3. *Пусть X и Y — любые высказывания, такие, что Y находится в пределах словаря высказываний X. Предположим, что всякий раз, когда X истинно в структуре M, Y истинно во всех гомоморфных отображениях расширений M. Тогда существует экзистенциальное и положительное высказывание Z в предваренной нормальной форме, такое, что $X \vdash Z$ и $Z \vdash Y$. Кроме того, Z находится в пределах словаря высказываний X.*

И здесь обратная теорема очевидна. Частный случай $X = Y$ представляет особый интерес.

Для доказательства теоремы 4.3 допустим, что K — множество экзистенциальных и положительных высказываний W в пределах словаря высказываний X, такое, что $W \vdash Y$. Тогда K конъюнктивно и дизъюнктивно. Если теорема 4.3 не верна, то $X \vdash W$ ложно для всякого $W \in K$. Отсюда $\{X\} \cup \{\sim W_v\} = H$ непротиворечиво для всех W_v из множества K. Пусть H истинно на модели M, и пусть D — *положительная* диаграмма модели M, т. е. множество всех атомарных высказываний, которые истинны в M. Тогда Y истинно во всех моделях диаграммы D, а поэтому $X_1 \wedge \ldots \wedge X_l \supset Y$ для некоторых $X_1, \ldots, X_l$ в D. Уничтожая с помощью экзистенциальной квантификации константы в $X_1 \wedge \ldots \wedge X_l$, не содержащиеся в X, мы получаем экзистенциальное V, такое, что $V \vdash Y$. Таким образом, $V \in K$ и одновременно V истинно в M. Это ведет к противоречию; теорема доказана.

Теоремы типа 4.2 и 4.3 Линдон назвал *интерполяционными теоремами*. Другой пример интерполяционной теоремы был приведен в предыдущем разделе (теорема 3.3). Термин *интерполяция* означает введение высказывания Z между X и Y. Более ранний пример такой теоремы был дан Крэйгом [2], который обобщил результаты автора настоящей работы в связи с теоремой Бета [1] об определимости (этого предмета я не буду здесь касаться).

Опять возникает естественный вопрос, можно ли каким-либо образом выразить в рамках узкого исчисления предикатов отношения следствия, имеющие место в условии теоремы 4.2 (когда X истинно в структуре M, Y истинно во всех гомоморфных отображений структуры M). Для того чтобы сделать это, заменим все отношения $R(x_1, \ldots, x_n)$ в Y другими отношениями $R'(x_1, \ldots, x_n)$, которые не содержались ранее в X или Y. Пусть результатом будет Y', и пусть K' — множество высказываний

$$(x_1) \ldots (x_n)[R(x_1, \ldots, x_n) \supset R'(x_1, \ldots, x_n)].$$

Тогда мы утверждаем, что $K' \vdash X \supset Y'$, т. е. Y' выводимо из $\{X\} \cup K'$.

Действительно, пусть $\{X\} \cap K'$ истинно в модели M. Пренебрегая отношениями без штрихов в M, мы получаем структуру M', которая является гомоморфным образом модели M. Поскольку предполагается, что Y истинно во всех гомоморфных образах моделей M, отсюда следует, что Y истинно в M', а Y' истинно в M, и, следовательно, Y' выводимо из $\{X\} \cup K'$. Обратно, если $K' \vdash X \supset Y'$, то всякий раз, когда X истинно в структуре M, Y истинно в каждом гомоморфном образе модели M.

Аналогично мы можем рассмотреть множество высказываний K и одиночное высказывание Y в пределах словаря K, истинное во всех гомоморфных образах моделей множества K. Вводя отношения со штрихами и определяя Y' и K', как и ранее, мы можем затем показать, что это положение правильно описывается выражением $K \cup K' \vdash Y'$. Отсюда следует, что если K бесконечно, то существует конечное подмножество K^* множества K, такое, что $K^* \cup K' \vdash Y'$, т. е. Y истинно во всяком гомоморфном образе любой модели подмножества K^*. Это дает нам возможность распространить результат теоремы 4.1 Линдона на бесконечное множество следующим образом.

Теорема 4.4. *Пусть K — любое множество высказываний, такое, что если M — произвольная модель множества K, то*

К истинно и во всех гомоморфных образах модели М. Тогда существует множество положительных высказываний K', которое эквивалентно K, т. е. $K \vdash K'$ и $K' \vdash K$.

Доказательство. Пусть K' — множество всех положительных высказываний X' в пределах словаря множества K, таких, что $K \vdash X'$. Для доказательства этой теоремы необходимо только показать, что $K' \vdash X$ для любого $X \in K$. Далее, как показано выше, существует конечное подмножество K^* множества K, такое, что X истинно во всех гомоморфных отображениях моделей подмножества K^*. Пусть $K^* = (X_1, \ldots, X_l)$, тогда X истинно во всех гомоморфных отображениях моделей формулы $X_1 \wedge \ldots \wedge X_l$. Отсюда в силу теоремы 4.2 существует положительное высказывание Y в пределах словаря множества K, такое, что $X_1 \wedge \ldots \wedge X_l \vdash Y$ и $Y \vdash X$. Таким образом, Y принадлежит K', а $K'_1 \vdash X$, что и требовалось доказать.

Комбинируя приведенную выше процедуру с рассмотренной ранее операцией соотнесения, мы можем также доказать (ср. с теоремой 4.3) следующее утверждение.

Теорема 4.5. *Если все гомоморфные образы расширений моделей множества K сами также являются моделями множества K, то K эквивалентно множеству высказываний, которые положительны и экзистенциальны.*

5. Анализ метода Мальцева (окончание)

Теорема 3.4 показывает, что квазиэлементарное свойство в смысле результата Мальцева можно всегда выразить с помощью конечного или бесконечного множества универсальных высказываний в пределах словаря, введенного в разд. 2 в связи с понятием группы, т. е. с помощью константы e, функторов $g(x, y)$ и $r(x)$ и отношения $E(x, y)$. Кроме того, сами групповые аксиомы можно сформулировать как универсальные высказывания в пределах этого словаря. Аналогично с помощью универсальных высказываний можно выразить тот факт, что множества элементов группы G, определяемые формулами $H_i(x)$, $H_{i+1}(x)$, дают факторгруппу, обладающую свойством P_{i+1}. Отсюда свойство группы принадлежать к типу $[P_1, \ldots, P_k]$ может быть выражено множеством *универсальных* суждений, сформулированным с помощью $g(x, y)$, $r(x)$, e, $E(x, y)$, $H_1(x), \ldots, H_k(x)$. Например, свойство факторгруппы G_i/G_{i+1} быть коммутативной может быть записано в виде

$$(x)(y)[H_i(x) \wedge H_i(y) \supset H_{i+1}[g(g(g(x, y), r(x)), r(y))]. \qquad (5.1)$$

Предположим теперь, что K истинно в некоторой подгруппе G' группы G. Если мы заменим высказывания множества всеми их конкретными случаями, полученными опусканием универсальных кванторов и замещением переменных всевозможными способами элементами a_ν группы G', то получим множество высказываний K', которые истинны в G'.

Обратно, предположим, что предикаты $H_i(x)$ не определяются в G априорно, но что мы хотим ввести их таким образом, чтобы все высказывания множества K удовлетворялись. Мы также можем взять *все* случаи высказываний множества K, полученные, как и выше, с любым множеством индивидных констант группы G, например

$$[H_i(a) \wedge H_i(b) \supset H_{i+1}(g(g(a, b), r(a)), r(b))], \qquad (5.2)$$

и можем попытаться определить $H_i(x)$ таким образом, чтобы все высказывания, такие, как (5.2), удовлетворялись. Обозначим множество этих высказываний через K^* и заметим, что элементы множества K^* теперь совершенно свободны от кванторов. Точнее, мы должны определить $H_i(x)$, как требуется по условию, зная, что такие определения возможны во всех конечно порожденных подгруппах группы G. Определить здесь $H_i(x)$ значит задать истинные значения атомарным высказыванием $H_i(a)$ для всех $a \in G$ таким образом, чтобы все высказывания множества K^* удовлетворялись. Другими словами, мы решаем проблему определения *таблицы истинности*. При первоначальном методе, который был намечен в разд. 2, эта часть доказательства поглощается применением принципа локализации, который в свою очередь зависит от оценки. В самом деле, истинностные значения составляют один из самых существенных элементов теории моделей, как будет подробно объяснено в следующем разделе. А пока мы сформулируем основную лемму, которая потребуется позже, и применим ее частный случай к рассматриваемой проблеме.

Пусть A — абстрактное множество, которое в представляющих для нас интерес случаях будет реализовано множеством атомарных формул. *Частичной оценкой* множества A называется отображение φ подмножества A' множества A в множество $\{0, 1\}$ (0 — для „истинно" или „выполняется" и 1 — для „ложно" или „не выполняется"). Так, A' — область определения отображения φ, и мы пишем $A' = D\varphi$. Мы говорим, что φ *тотально*, если $D\varphi = A$. Мы пишем $\varphi | B$ для ограничения φ на $B \cap D\varphi$, где B — любое подмножество A.

Непустое множество J непустых подмножеств множества N называется *сеткой* на N, если для любых $J_1 \in J$ и $J_2 \in J$ существует $J_3 \in J$, такое, что $J_1 \cap J_2 \supseteq J_3$. Множество $\{N\}$, состоящее из одного элемента N, является сеткой на N.

Лемма оценки 5.3. *Пусть $N = \{\nu\}$ — индексное множество для множества $\Phi = \{\varphi_\nu\}$ частичных оценок множества A. Пусть*

J — сетка на N, такая, что для каждого конечного подмножества B множества A и для каждого элемента J' множества J существует $\nu \in J'$, для которого $B \subseteq D\varphi_\nu$.

В этом случае существует тотальная оценка ψ множества A, такая, что для каждого конечного подмножества B множества A и для каждого $J' \in J$ существует $\nu \in J'$, такое, что $B \subseteq D\varphi_\nu$ и $\psi | B = \varphi_\nu | B$.

Доказательство леммы 5.3 здесь не приводится (см. [21]). При $J = \{N\}$ мы получим важный частный случай. Тогда лемма может быть сформулирована следующим образом.

Специальная лемма оценки 5.4. *Пусть $\Phi = \{\varphi_\nu\}$ — множество частичных оценок множества A, такое, что для каждого конечного подмножества B множества A существует $\varphi_\nu \in \Phi$, для которого $B \subseteq D\varphi_\nu$. Тогда существует тотальная оценка ψ множества A, такая, что для каждого $B \subseteq A$ существует $\varphi_\nu \in \Phi$, для которого $B \subseteq D\varphi_\nu$ и $\psi | B = \varphi_\nu | B$.*

Как указал Бюхи, лемма 5.4 совпадает с частным случаем результата Радо [16].

Возвращаясь к нашему анализу метода Мальцева, мы определяем A как множество всех атомарных высказываний $H_i(a_\mu)$, $i = 1, \ldots, k$, $a_\mu \in G$. Мы должны задать истинностные значения („содержится", „не содержится" в G) элементам множества A таким образом, чтобы все высказывания множества были истинными. Конечно, истинностные значения высказываний множества K^* зависят также от истинностных значений атомарных высказываний, содержащих отношение равенства E, которое может встречаться в высказывании. Однако последние даются с G.

Теперь пусть $\Gamma = \{G'_\nu\}$ — множество всех конечно порожденных подгрупп группы G. По предположению теоремы Мальцева, H_i может быть определено в любой группе G'_ν таким образом, что высказывания множества K^*, содержащего только элементы группы G'_ν, будут истинными. Это определение H_i является частичной оценкой множества A, которое состоит из элементов $H_i(a_\mu)$ множества A, таких, что $a_\mu \in G_\nu$. Мы выбираем одну такую частичную оценку φ_ν, скажем, для всех $G'_\nu \in \Gamma$. Пусть $\Phi = \{\varphi_\nu\}$; тогда очевидно, что каждое конечное подмножество множества A есть область определения некоторого φ_ν. Таким образом, условия леммы 5.4 выполнены. В соответствии с этим существует тотальная оценка ψ множества A, которая удовлетворяет теореме 5.4. Пусть $X \in K^*$; тогда всем атомарным высказываниям $H_i(a_\mu)$, которые имеют место в X, заданы оценкой ψ те же значения истинности, что и в некоторой G'_ν. Поэтому X будет „истинным" для этого задания, и все суждения множества K^* будут удовлетворены. Так доказывается основная теорема Мальцева. Однако построение оценки ψ показывает, что мы фактически получили несколько более точный результат, который можно выразить следующим образом.

Теорема 5.5. *Если для данного положительного целого числа каждая конечно порожденная подгруппа G' группы G обладает нормальной цепью $G' = G'_0 \supseteq \ldots \supseteq G'_k = (e)$, такой, что факторгруппы G'_i / G'_{i+1} обладают некоторыми заранее заданными квазиэлементарными свойствами P_{i+1}, $i = 0, \ldots, k-1$, то существует нормальная цепь $G = G_0 \supseteq \ldots \supseteq G_k = (e)$, такая, что факторгруппы G_i/G_{i+1} обладают квазиэлементарными свойствами P_{i+1}, $i = 0, \ldots, k-1$, и для каждого конечного подмножества B группы G существует конечно порожденная подгруппа G' группы G, для которой $G'_i \cap B = G_i \cap B$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$.*

Мы можем добавить, что для счетных групп этот вывод может быть получен также рассмотрением известного доказательства расширенной теоремы полноты.

Анализ метода Мальцева показал нам, что всюду, где он применим, нет необходимости вводить квантификацию. Таким образом, наша задача состояла в конечном счете в том, чтобы показать, что мы можем дополнить данную структуру введением добавочных отношений так, что некоторые условия, которые можно выразить в узком исчислении предикатов без кванторов, удовлетворяются в новой структуре. Аналогичные проблемы возникают во многих других случаях, например когда мы хотим показать, что если все конечные подмножества данной группы можно упорядочить (тотально), то можно упорядочить и саму группу. Действительно, общие принципы решения таких задач были рассмотрены также независимо от исчисления предикатов (ср. с [14]). Однако это ни в коей мере не умаляет значения работ Мальцева, которому принадлежит приоритет в этой области.

6. Построение моделей

Обратимся теперь к основной теме из теории моделей — к построению структур (реляционных систем), подчиненных условиям, данным или в виде аксиом (суждений узкого исчисления предикатов), или в связи с другими структурами, введенными ранее.

В самом деле, одно только существование модели для любого непротиворечивого множества аксиом достаточно для получения большого количества интересных результатов, однако более тщательное изучение способа получения таких структур не только интересно само по себе, но может также применяться при решении других проблем. Наиболее известным в этой связи является построение приведенного прямого произведения, или ультрапроизведения.

Первый пример произведения, которое можно было бы назвать приведенным, был дан Сколемом [23] для доказательства существования нестандартных моделей арифметики. Общее определение понятия было дано Лосем в 1954 г. [10]. В самое последнее время наблюдался возросший интерес к этому предмету, начиная с реферата Фрейна, Скотта и Тарского и включая рефераты и статьи Чжана, Кейслера, Кочена и Рабина (например, [7, 8, 15]). Эта теория нашла разнообразное применение. В частности, только что упомянутыми авторами было показано, что многие результаты теории моделей, которые были ранее получены с помощью расширенной теоремы полноты или ее эквивалентов, могут быть доказаны посредством теории приведенных произведений.

Интересно отметить, что в некоторых важных частных случаях построение приведенного произведения совпадает с процедурой, играющей большую роль в теории колец непрерывных функций (см. книгу Гилмана и Джерисона [4] или статью Хэвита [6]). Однако, насколько мне известно, исследователи в соответствующих областях сначала работали независимо друг от друга.

Построение приведенного прямого произведения осуществляется следующим образом. Пусть $N = \{\nu\}$ — непустое множество индексов, и пусть J — ультрафильтр на N (максимальный дуальный идеал в булевой алгебре подмножеств множества N). Иначе говоря, J — непустое множество подмножеств множества N, удовлетворяющее следующим условиям.

6.1. J не содержит пустого множества; пересечение любых двух элементов ультрафильтра J включается в J; для любого подмножества J' множества N в J включается или J', или $N \setminus J'$. Из этих условий следует, что если $J' \subsetneq J'' \subseteq N$ и $J' \in J$, то $J'' \in J$.

Положим теперь, что $\{M_\nu\}$ — множество структур с индексным множеством N, такое, что одни и те же отношения определяются во всех M_ν. Тогда приведенное прямое произведение M множества $\{M_\nu\}$ относительно J определяется следующим образом.

Индивидные элементы множества M являются функциями $f = f(\nu)$, которые определяются на N так, что $f(\nu) \in M_\nu$ для всех $\nu \in N$. С другой стороны, различные индивидные константы c_f, соответствующие различным $f(\nu)$, могут быть взяты в качестве элементов множества M.

Для всякого отношения $R(x_1, \ldots, x_n)$, которое имеет место в M_ν, определяем, что $R(f_1, \ldots, f_n)$ или $R(c_{f_1}, \ldots, c_{f_n})$ истинно в M, если множество $J' = \{\nu \mid R(f_1(\nu), \ldots, f_n(\nu))$ истинно в $M_\nu\}$ [т. е. множество таких ν, что $R(f_1(\nu), \ldots, f_n(\nu))$ истинно в M_ν] является элементом множества J. Если $J' \notin J$, так что $N - J' \in J$, то определяем, что $R(f_1, \ldots, f_n)$ ложно в M. Этим определяется структура M. В частности, если все M_ν совпадают, т. е. $M_\nu = M_0$ для всех ν, то M называется ультрастепенью множества M_0 и обозначается $M = M_0^N/J$.

Пусть a — индивидная константа, которая появляется во всех M_ν; тогда a отождествляется в M с функциональной константой $f(\nu) = a$.

Основное свойство приведенных прямых произведений дается следующей теоремой.

Теорема 6.2. *Пусть X — высказывание, которое определено и истинно во всех M_ν. Тогда X истинно и в M. В частности, если M — ультрастепень множества M_0, то M представляет собой арифметическое (или элементарное) расширение множества M_0.*

Теперь представим теорию приведенных прямых произведений в рамках общей постановки, которая теснее связывает ее с принципами полноты и локализации, рассмотренными в предыдущих разделах. Удобно предположить, что словарь исчисления включает в качестве нелогических констант только отношения произвольного числа мест, а не функторы или индивидные константы (являющиеся функторами нулевого порядка). Одновременно предполагается, что введено отношение равенства $E(x, y)$ с обычными свойствами эквивалентности и заменяемости. Тогда отношения $F(x_1, \ldots, x_n, y)$, в которых y однозначно определяется через $x_1, \ldots, x_n$ (другими словами, эти отношения удовлетворяют условиям

$$(x_1) \ldots (x_n)(\exists y)(z)[F(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge F(x_1, \ldots, x_n, z) \supset E(y, z)]$$

на основании аксиом, сформулированных для этой цели в явной форме), можно рассматривать как заменители функторов. В частности, вместо индивидных констант мы можем ввести одноместные отношения $F(y)$, которые удовлетворяют условию

$$(\exists y)(z)[F(y) \wedge (F(z) \supset E(y, z)].$$

Так, мы видим, что сделанные выше специальные предположения не представляют существенного ограничения нашей теории. Достаточно также рассматривать высказывания только в предваренной нормальной форме. В качестве примера таких высказываний можно взять

$$X = (\exists u)(w)(\exists x)(y)(\exists z)\, Q(u, w, x, y, z), \tag{6.3}$$

где $Q(u, w, x, y, z)$ не содержит кванторов. Пусть M — структура, в которой определяется X, т. е. такая, что отношения, которые имеются в Q, определяются в M. Тогда X истинно в M тогда и только тогда, когда существуют функции χ, $\psi(w)$, $\zeta(w, y)$, которые определяются на всей области индивидов M (χ — функция нулевого числа переменных, т. е. константа), таких, что

$$X' = Q(\chi, w, \psi(w), y, \zeta(w, y)) \qquad (6.4)$$

истинны в M для всех значений переменных w, y в M. Заметим, что X' не является, как таковая, формулой нашего исчисления, не содержащего функторов. В каждом частном случае X' представляет свободную от кванторов формулу, которая, однако, не входит в наше исчисление, хотя мы можем интерпретировать ее и придавать ей истинностные значения обычным способом.

Функторы φ, ψ, ζ — это так называемые функторы Эрбрана и Сколема, принадлежащие высказыванию X, а X' — эрбранова (или сколемова) форма высказывания X. Многое из того, что мы знаем о теории моделей, можно извлечь из анализа свойств функторов Эрбрана и свойств таблиц истинности, которые соответствуют конкретным значениям X' и их атомарным формулам. В данном разделе мы рассмотрим главным образом свойства последних. На основе оценочной леммы 5.3 введем конструкцию, которую можно считать обобщением образования приведенного прямого произведения. (Заметим, что некоторый способ построения не обязательно будет лучше или хуже других, если он более общий. В данном случае сказывается, что построение приведенного прямого произведения и вводимый способ построения оба интересны тем, что позволяют исследовать разные аспекты теории моделей.)

Возвращаясь снова к оценочной лемме 5.3, предположим, что множество J является ультрафильтром в булевой алгебре подмножеств множества N (см. условие 6.1). Пусть ψ — полная оценка множества A, существующая согласно утверждению леммы. Для любого данного элемента $a \in A$ пусть $N_T(a)$ означает множество элементов ν из N, такое, что $a \in D\varphi_\nu$ и $\varphi_\nu(a) = 0$; пусть $N_F(a)$ — множество элементов ν из N, такое, что $a \in D\varphi_\nu$ и $\varphi_\nu(a) = 1$. Пусть $N_0(a)$ — множество ν из N, такое, что $a \notin D\varphi_\nu$. Тогда множества $N_T(a)$, $N_F(a)$ и $N_0(a)$ взаимно не пересекаются, а вместе они исчерпывают N. Отсюда следует, что точно одно из трех множеств принадлежит J. Теперь если $N_T(a) \in J$, то $\psi(a) = \varphi_\nu(a) = 0$ для некоторых $\nu \in N_T(a)$, а, значит, в этом случае $\psi(a)$ приобретает значение 0. Аналогичным образом если $N_F(a) \in J$, то $\psi(a) = 1$. Следовательно, значения оценки ψ однозначно определяются данными J и Φ на множестве элементов $a \in A$ так, что или $N_T(a)$, или $N_F(a)$ находится в J. В частности, если все оценки $\varphi_\nu(a)$ полные, то множество $N_0(a)$ будет пустым для всех a, и поэтому $N_0(a)$ не может принадлежать J, и ψ однозначно определяется множествами J и Φ на целом множестве A. Кроме того, предположим, что N бесконечно и что все $a \in N$ находятся в области определения всех φ_ν, за исключением конечного числа. Предположим, с другой стороны, что J включает множество дополнений конечных подмножеств множества N (*фильтр Фреше*). Тогда $N_0(a) \notin J$ для всех a, и поэтому ψ однозначно определяется множествами J, Φ и в этом случае. Это будет справедливо всякий раз, когда $N_0(a) \notin J$ для всех $a \in A$.

Теперь пусть M — любая структура (система отношений, как и ранее), и пусть K — множество высказываний, которые определены и истинны в M. Пусть X — элемент множества K, например (6.3), и пусть $H(X)$ — множество эрбрановых функторов, связанных с X [например, χ, ψ, ζ для (6.3)]. Поставим в соответствие различным элементам из K различные функторы и обозначим через $H(K)$ множество всех этих функторов. Через $M(D)$ обозначим структуру M, рассматриваемую вместе с частным определением D функций на M, соответствующих функторам множества $H(K)$.

Пусть $\{M_\nu\}$ — непустое множество структур с индексным множеством $N = \{\nu\}$; пусть K^* — множество высказываний, таких, что каждое конечное подмножество K' множества K^* определяется и истинно в некотором M_ν; пусть K_ν — множество всех высказываний множества K^*, которые определены и истинны в M_ν, и пусть R_ν — множество отношений, входящих в M_ν, и $R^* = U_\nu R_\nu$.

Введем множество различных эрбрановых функторов $H(K^*)$ для элементов множества K^* и рассмотрим специальные определения D_ν в M_ν для функций, соответствующих функторам множества $H(K_\nu) \subseteq H(K^*)$. Вполне возможно, что одна и та же структура появляется для различных ν и с различными D_ν.

Теперь пусть C — непустое абстрактное множество произвольной мощности $C = \{a_\mu\}$. Рассмотрим множество C^* всех формальных выражений, которые получаются путем неоднократного применения функторов множества $H(K^*)$ к элементам множества C, например $\psi(a_\mu)$, $\zeta(a_\mu, a_\nu)$, χ, $\zeta(\chi, \psi(a_\mu))$ и т. д. Далее обозначим через M^* структуру, множеством индивидных констант которой является C^*, а множеством отношений является R^*.

Пусть h_ν — отображение множества C в область индивидов структуры M_ν, или, сокращенно, $h_\nu : C \to M_\nu$, и пусть C_ν — множество элементов множества C^*, которые получаются путем приложения к элементам множества C только функторов, принадлежащих высказываниям множества K_ν. Тогда отображение можно естественно расширить до области C_ν. Так, если c_1, $c_2 \in C_\nu$ уже отображены и если функтор $\zeta(w, y)$ соответствует функции ζ' в M_ν, то мы полагаем

$$h_\nu^*(\zeta(c_1, c_2)) = \zeta(h_\nu^*(c_1), h_\nu^*(c_2));$$

этот пример показывает, как следует поступать в общем случае. Расширенное отображение h_ν^* определяется тогда для всех C_ν, $h_\nu^* : C_\nu \to M_\nu$.

Пусть A — множество атомарных высказываний $a = R(c_1, \ldots, c_n)$, где $R \in R^*$ и $c_1, \ldots, c_n \in C^*$. Обозначим через A_ν множество элементов множества A, такое, что $R \in R_\nu$ и $c_1, \ldots, c_n \in C_\nu$. Тогда h^*_ν отображает $c_1, \ldots, c_n$ на элементы $c'_1, \ldots, c'_n$ структуры M_ν. Для любого $a \in A_\nu$ положим $\varphi_\nu(a) = 0$ и $\varphi_\nu(a) = 1$ соответственно тому, истинно или ложно $R(c'_1, \ldots, c'_n)$ в структуре M_ν.

Для любого $X \in K_\nu$ [например, (6.3)] рассмотрим соответствующую эрбранову форму X' [например, (6.4)]. Пусть $K_\nu(C_\nu)$ — множество всех высказываний X', полученных заменой переменных формы X' элементами множества C_ν, и пусть $K_\nu(C^*)$ — множество, полученное аналогичной заменой переменных в X' произвольными элементами множества C^* с $X \in K_\nu$. Положим $K(C^*) = \bigcup_\nu K_\nu(C^*)$.

Для данного ν пусть A'_ν — конечное подмножество множества A_ν. Если пренебречь различием между формулами, эквивалентными в рамках правил исчисления высказываний, то существует только конечное число элементов множества $K(C^*)$, которые строятся целиком посредством атомарных формул из A'_ν. Обозначим множество этих формул через K'_ν. Если для каждого элемента X^* множества K'_ν существует элемент множества $K_\nu(C_\nu)$, который пропозиционально эквивалентен элементу X^*, то мы называем A'_ν *внутренним подмножеством* множества A_ν. Мы не можем исключить возможность существования конечных подмножеств, которые не являются внутренними. Однако если B — любое конечное подмножество множества A, то существует $\nu \in N$, такое, что B — внутреннее подмножество множества A_ν. Действительно, пусть K_0 — подмножество множества $K(C^*)$, элементы которого строятся целиком с помощью атомарных формул, принадлежащих B. Выберем конечное подмножество K'_0 множества K_0, такое, что каждый элемент множества K_0 пропозиционально эквивалентен некоторому элементу подмножества K'_0. Поскольку K'_0 конечно, то существует конечное подмножество K' множества K^*, такое, что все отношения подмножества K'_0 появляются в K', а все функторы подмножества K'_0 принадлежат высказываниям подмножества K' (при этом каждый элемент X_0 из K'_0 является частным случаем элемента из K'). Точнее, если C' — подмножество множества C^*, элементы которого получаются с помощью функторов, принадлежащих K', то существует высказывание $X \in K'$ с формой Эрбрана X', такое, что X_0 получается заменой переменных формы X' элементами подмножества C'; кроме того, по предположению, существует M_ν, такое, что высказывания подмножества K' определены и истинны в M_ν. Тогда $K' \subseteq K_\nu$ в $B \subseteq A_\nu$ и, кроме того, $K'_0 \subseteq K_\nu(C_\nu)$. Отсюда следует, что B — внутреннее подмножество множества A_ν.

Как упоминалось выше, R^* и C^* должны быть множеством отношений и множеством индивидных элементов структуры M^* соответственно. Таким образом, чтобы определить M^*, нам надо только задать истинностные значения атомарным высказываниям, которые являются элементами множества A. Мы считаем, что множество индексов N^* является множеством упорядоченных пар $\{\nu\mu\}$, где $\nu \in N$ и μ, по предположению, перечисляют внутренние подмножества $A_{\nu\mu}$ множества A_ν.

Для любой пары $\nu\mu \in N^*$ мы теперь найдем частичную оценку $\varphi_{\nu\mu}$ множества A с областью определения $A_{\nu\mu}$ равенством $\varphi_{\nu\mu}(a) = \varphi_\nu(a)$ для всех $a \in A_{\nu\mu}$, где φ_ν было ранее определено на A_ν. Поскольку каждое внутреннее конечное подмножество множества A идентично некоторому $A_{\nu\mu}$, то условия леммы 5.4 удовлетворяются. Отсюда заключаем, что существует общая оценка ψ множества A, которая совпадает с некоторым $\varphi_{\nu\mu}$ на любом данном конечном подмножестве множества A. Будем считать, что атомарная формула $a = R(c_1, \ldots, c_n)$ истинна или ложна в M^*, если $\psi(0) = 0$ или $\psi(a) = 1$ соответственно. Этим завершается построение M^*. Оно зависит от $\{M_\nu\}$, $\{D_\nu\}$ и от выбора ψ.

Теперь пусть X — любой элемент множества K^*, X' — его форма Эрбрана, а X_0 — частный случай формы X' (полученный заменой переменных формы X' элементами множества C^*). Если мы покажем, что для X любая полученная так форма X_0 истинна в M, то высказывание X также будет истинным в M^*. Пусть B — множество атомарных формул, имеющих место в X_0.

По построению $\psi|B = \varphi_{\nu\mu}|B$ для некоторых $\nu \in N$, $\nu_\mu \in N^*$, так что $B = A_{\nu\mu} = D_{\varphi\nu\mu}$. Множество $A_{\nu\mu}$ является внутренним относительно A_ν, и поэтому существует высказывание $X_0 \in K_\nu(C_\nu)$, которое пропозиционально эквивалентно X_0 (т. е. эквивалентность которого высказыванию X_0 является тавтологией исчисления высказываний), истинному при оценке $\varphi_{\nu\mu}|B = \varphi_\nu|B$. Отсюда $\psi|B = \varphi_{\nu\mu}|B$ также становятся *истинными* для X_0. Мы заключаем, что высказывание X истинно в M^* и поэтому M^* является моделью множества K^*. *Таким образом, принцип локализации доказан.*

Пусть $A^*_\nu = \bigcup_\nu A_{\nu\mu}$ для всякого $\nu \in N$. Если мы положим $\varphi^*_\nu | A^*_\nu = \varphi_\nu | A^*_\nu$, то получим $\varphi^*_\nu | A_{\nu\mu} = \varphi_{\nu\mu} | A_{\nu\mu}$. Однако оказывается, что мы не можем принять $\{\varphi^*_\nu\}$ в качестве множества частичных оценок при использовании леммы 5.4.

Обобщая вышеуказанное построение, предположим, что нам дано $\{M_\nu\}$ с индексным множеством N и множеством J на N, причем для каждого конечного подмножества K' данного множества высказываний K^* и для каждого $J' \in J$ существует $\nu \in J'$, такое, что все высказывания подмножества K' определены и истинны в M_ν. Определим K_ν, R_ν, R^*, $H(K^*)$, $K_\nu(C^*)$, $K(C^*)$, $H(K_\nu)$, D_ν, C, C^*,

h_ν, $\overset{*}{h}_\nu$, A, A_ν, φ_ν, $K(C_\nu)$ и понятие внутреннего подмножества A_ν так же, как и ранее. Тогда можно показать, что если B — произвольное конечное подмножество множества A и $J' \in J$, то существует $\nu \in J$, таксе, что B является внутренним подмножеством множества A_ν. Определим элементы J'' сетки J^* на N^* с помощью равенства $J'' = \{\nu_\mu \mid \mu \in J'\}$ для всех $J' \in J$. Нетрудно видеть, что J^* действительно является множеством.

Применяя оценочную лемму 5.3 к J^*, мы можем заключить, что существует полная оценка ψ множества A, такая, что для каждого $J'' \in J^*$ и для каждого конечного подмножества B множества A существует оценка $\varphi_{\nu\mu}$ с $\nu\mu \in J''$, такая, что ψ совпадает с $\varphi_{\nu\mu}$ на $B = A_{\nu\mu}$; ψ определяет структуру M^*, как и ранее, и M^* является моделью множества K^*. Ранее рассмотренный случай соответствует $J = \{N\}$, $J^* = \{N^*\}$.

Предположим, в частности, что J — ультрафильтр на N и что высказывания множества K^* определяются и истинны во всех M_ν. Пусть $N_T(a)$ — множество всех $\nu \in N$, такое, что $\varphi_\nu(a) = 0$. Тогда $\psi(a) = 0$ или $\psi(a) = 1$, если $N_T(a)$ принадлежит или не принадлежит множеству J соответственно. В самом деле, $\psi(a) = \varphi_{\nu\mu}(a) = \varphi_\nu(a)$ для некоторых $\nu \in N$, где $\nu \in J'$, причем $J' \in J$ определяется заранее. В частности, если $J' = N_T(a)$ принадлежит J, то мы должны иметь $\psi(a) = \varphi_\nu(a) = 0$, а если $J' = N_F(a) = N - N_T(a)$ принадлежит J, то $\psi(a) = 1$. Таким образом, в рассматриваемом случае построение структуры M^* не требует введения N^* и не влечет за собой произвольного выбора при определении ψ.

Далее предположим, что J — ультрафильтр, но высказывания множества K не обязательно определяются во всех M_ν. Тогда дополним множества $N_T(a)$ и $N_F(a)$ множеством $N_0(a)$, которое включает все $\nu \in N$, таким, что a не принадлежит A_ν, а следовательно, таким, что $\varphi_\nu(a)$ не определяется. Если, далее, $N_0(a) \notin J$ для всех a, то ψ все еще определяется однозначно, как и ранее. Это будет иметь место, например, в том случае, если каждое высказывание множества K определяется и истинно в M_ν для всех, кроме конечного числа ν, а J включает дополнения конечных подмножеств множества N. (Заметим, что в этом случае $\varphi_\nu(a)$ также определяется для всех чисел ν, кроме конечного их числа.)

Напоминаем, что наше исчисление, по предположению, содержит отношение равенства $E(x, y)$ с обычными явно постулированными свойствами. Пусть K_E — множество высказываний, утверждающих что E — отношение эквивалентности, которым можно заменить все отношения, имеющие место в M_ν. Поскольку все эти высказывания можно сформулировать без кванторов существования, мы можем предположить, что K_E сформулировано именно так. Если K^* не включено в K^* с самого начала, то мы можем дополнить им K^* без расширения C^* или R^*. Отсюда следует, что M удовлетворяет высказываниям множества K_E.

Мы формально определим индивидные элементы c структуры M^* итерацией функторов на абстрактном множестве. Однако покажем теперь, что можно заменить эти c функциями $f(x)$, определенными на подмножествах Df множества N, такими, что $f(\nu) \in M_\nu$. Пусть F — множество всех таких функций, $c \in C^*$ и $D(c)$ — множество $\nu \in N$, такое, что $c \in C_\nu$. Множество $D(c)$ непусто, и $\overset{*}{h}_\nu$ определяется для c, если $\nu \in D(c)$. Теперь отобразим c на функцию $f \in F$, областью определения которой является $Df = D(c)$ и значениями которой для $\nu \in Df$ являются $f(\nu) = h^*_\nu(c)$. Таким образом, отображение определено для всех $c \in C^*$. Пусть F^* — образ множества C^*.

Если высказывания множества K определяются во всех M_ν, то $Df = N$ для всех $f \in F^*$. Тогда мы можем удовлетворить равенству $F = F^*$, просто взяв $C = F$ и положив $h_\nu(c) = f(\nu)$ для $c = f(\nu)$ (т. е. h_ν является естественным отображением f в свое значение при ν). Теперь нетрудно убедиться в том, что если J — ультрафильтр, то M^* совпадает с прямым произведением структуры M_ν, приведенной относительно J. Таким образом, теорема 6.2 доказана.

В итоге мы показали, что построение приведенного прямого произведения можно рассматривать как частный случай некоторой процедуры (ее можно было бы назвать предельным построением), который одновременно приводит к доказательству принципа локализации. Наша процедура подчеркивает роль оценок во всех этих построениях.

Мы не будем здесь рассматривать важных результатов Фрейна, Кейслера и Кочена, касающихся связи элементарной эквивалентности с ультрастепенями. Вообще говоря, мы можем сказать, что как в других направлениях математики (например, в теории групп, в нормированных алгебрах) представления очень важны, так и в нашем предмете можно ожидать, что детальное изучение различных построений, ведущих к моделям данного непротиворечивого множества высказываний, будет приобретать все большее значение.

7. Некоторые понятия и результаты метаалгебры

В начале статьи я упомянул о естественной связи, которая существует между теорией моделей и алгеброй. Затем я рассмотрел работу Мальцева, которая зависит от прямого приложения того, что ныне называется теорией моделей, к конкретной алгебраической ситуации. С тех пор сделаны многочисленные приложения этого рода. Однако имеется целый ряд вопросов алгебры, которые по своей природе выходят за пределы классических рамок и должны быть размещены в метатеории. К этому типу принадлежит проблема единого описания различных понятий, ведущих к образованию факторструктур (нормальных подгрупп, идеалов), и этот вопрос можно фактически решить посредством теории моделей [17]. Другая проблема этого типа состоит в том, чтобы дать общее описание понятия алгебраически замкнутых полей и действительно замкнутых полей, которые интуитивно аналогичны. Обратимся к рассмотрению этого вопроса.

Алгебраически замкнутые поля занимают особое положение в теории коммутативных полей. Так, для того чтобы решить алгебраическую задачу, параметры которой принадлежат полю M, нет необходимости выходить за пределы алгебраического замыкания поля M. Аналогично если дано упорядоченное поле M, то, по многим соображениям, нет нужды выходить за рамки действительного замыкания поля. Кроме того, вместо того чтобы рассматривать алгебраическое или действительное замыкание поля M, мы можем с равным успехом рассмотреть любое другое алгебраически (или действительно) замкнутое расширение поля M.

Чтобы дать обоим этим понятиям единое описание, положим, что K — множество аксиом для понятия коммутативного поля со специфической характеристикой (сформулированных с помощью отношений равенства, сложения, умножения и индивидных констант 0 и 1), с одной стороны, или множество аксиом для понятия упорядоченного поля (с включением отношения порядка) — с другой. Пусть K' — множество аксиом для понятия алгебраически замкнутого поля в первом случае или для понятия действительно замкнутого поля, если рассматривается второй случай. Тогда естественно (и не трудно) обеспечить удовлетворение следующих условий.

7.1. Аксиомы множества K находятся в предваренной нормальной форме и принадлежат классу AE (т. е. не содержат кванторов существования, за которыми следовали бы кванторы общности).

7.2. $K' \supseteq K$ и K' не содержит нелогических констант (т. е. отношений или индивидных констант), которые уже не содержатся в K (т. е., если использовать терминологию, введенную в начале этой работы, K' находится *в пределах* словаря множества K); K' *модельно-непротиворечиво* относительно K, т. е. каждая модель множества K может быть вложена в модель множества K'; K' модельно-полно относительно K. Другими словами, если M — модель множества K, а M_1 и M_2 — модели множества K', которые являются расширениями модели M, и X — любое высказывание, определяемое в M, то либо X истинно в M_1 и в M_2, либо $\sim X$ истинно в M_1 и в M_2.

Можно показать (ср. с [19, теорема 2.8]), что если два множества высказываний $K' = K'_1$ и $K' = K'_2$ удовлетворяют условию 7.2. относительно данного K, то они определяют ту же разновидность (тот же арифметический класс) моделей. С другой стороны, известно также, что существуют множества высказываний K, не обладающие расширениями, которые удовлетворяют условию 7.2. Это имеет место, например, в случае, когда K — множество всех высказываний, которые сформулированы (как и ранее, в узком исчислении предикатов) в понятиях качества, сложения и умножения и которые истинны в поле рациональных чисел. В соответствии с этим естественно попытаться найти критерий, при котором данное множество K обладало бы расширением K, удовлетворяющим условию 7.2. Такой критерий действительно возможен [20], если K удовлетворяет условию 7.1. Для его формулировки необходимы два следующих определения.

Примитивным предикатом $Q(z_1, \ldots, z_k)$ называется экзистенциальный предикат (предикат в предваренной нормальной форме без кванторов или только с кванторами существования), матрица которого состоит из конъюнкции атомарных высказываний и (или) отрицаний атомарных высказываний.

Пусть K — множество высказываний, и пусть $Q(z_1, \ldots, z_k)$ — предикат в пределах словаря множества K. Мы говорим, что предикат $Q'(z_1, \ldots, z_k)$ представляет собой *критерий для* Q, если Q — экзистенциальный предикат в пределах множества K, такой, что для каждой модели M множества K и элементов $a_1, \ldots, a_k$ модели M высказывание $Q'(a_1, \ldots, a_k)$ истинно в M тогда и только тогда, когда $Q(a_1, \ldots, a_k)$ истинно в некоторой модели M' множества K, являющейся расширением модели M.

С помощью этих определений формулируется

Теорема 7.3. *Пусть K — непустое и непротиворечивое множество высказываний класса AE. Чтобы существовало расширение K' множества K без дополнительных отношений или индивидных констант, такое, что K' модельно-непротиворечиво и модельно-полно относительно K, необходимо и достаточно, чтобы каждый примитивный предикат $Q(z_1, \ldots, z_k)$ в пределах словаря множества K обладал критерием $Q'(z_1, \ldots, z_k)$.*

Различными методами доказано, что если K — множество аксиом для понятия поля данной характеристики или упорядоченного поля, то теорема 7.3 применима. Тогда K' является именно таким множеством аксиом для понятия алгебраически замкнутого поля данной характеристики или действительно замкнутого поля. В первом случае примитивный предикат утверждает удовлетворимость частной системы уравнений и „неуравнений" (т. е. неравенств в смысле отрицаний уравнений). Такую систему можно легко заменить эквивалентным множеством, включающим только уравнения, и тогда существование критерия следует из существования системы результатов. Однако приводимые до сих пор примеры не являются единственными примерами, которые удовлетворяют предположениям и выводам теоремы. Используя теорию элиминации А. Зейденберга для дифференциальной алгебры [20], можно показать, что если K — множество аксиом для понятия дифференциального поля с характеристикой 0, то оно удовлетворяет условиям теоремы и, следовательно, обладает расширением K', как было показано выше. С другой стороны, по-видимому, невозможно в рамках излагаемых здесь общих результатов задать каждой модели M множества K модель M' множества K', которая является расширением модели M и которая занимает преимущественное положение относительно алгебраического замыкания (или наименьшего действительно замкнутого расширения) в рассмотренных ранее примерах.

Я рассмотрел некоторые, но далеко не все важные стороны современной теории моделей. Так, я не затронул здесь темы нестандартных моделей, особенно арифметических. В этой области уже получены некоторые ценные результаты, и нет сомнения, что они получат большое развитие в будущем. Не мог я рассмотреть и вопроса о бесконечных языках. Эта тема в последние годы была развита Тарским и его сотрудниками, и здесь за последнее время были достигнуты огромные успехи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Beth E. W., On Padoa's method in the theory of definition, *Proceedings of the Royal Academy of Science of the Netherlands*, ser. A, **56** (1953), 330—339.
2. Craig W., Three uses of the Herbrand — Gentzen theorem in relating Model theory and Proof theory, *Journal of Symbolic Logic*, **22** (1957), 269—285.
3. Frayne T. E., Scott D. S., Tarsky A., Reduced products, *Notices of the American Mathematical Society*, **5** (1958), 673—674.
4. Gillman L., Jerison M., *Rings of Continuous Functions*, Princeton, Van Nostrand, 1960.
5. Henkin L., Some interconnections between Modern algebra and Mathematical Logic, *Transactions of the American Mathematical Society*, **74** (1953), 410—427.
6. Hewitt E., Rings of real-valued continuous functions, I, *Transactions of the American Mathematical Society*, **64** (1948), 54—99.
7. Keisler H. J., Isomorphism of ultraproducts, *Notices of the American Mathematical Society*, **7** (1960), 70—71.
8. Kochen S. B., Ultraproducts in the theory of models, *Annals of Mathematics*.
9. Łoś J., On the extending of models, I, *Fundamenta Mathematicae*, **42** (1955), 38—54.
10. Łoś J., Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres, *Symposium on the mathematical interpretation of formal systems*, Amsterdam, 1954 (published 1955), 98—113.
11. Lyndon R. C., Properties preserved under algebraic constructions, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **65** (1959), 143—299.
12. Lyndon R. C., Properties preserved under homomorphism, *Pacific Journal of Mathematics*, **9** (1959), 153—154.

13. Мальцев А. И., Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп, Иваново, *Уч. зап. Пед. ин-та*, **1** (1941), 3—9.
14. Neumann B. H., An embedding theorem for algebraic systems, *Proceedings of the London Mathematical Society*, ser. 3, **4** (1954), 138—153.
15. Rabin M. O., Arithmetical extensions with prescribed cardinality, *Proceedings of the Royal Academy of the Netherlands*, ser. A, **62** (1959), 439—446.
16. Rado R., Axiomatic treatement of rank in infinite sets, *Canadian Journal of Mathematics*, **1** (1949), 337—343.
17. Robinson A., Théorie métamathématique des idéaux, Paris, Gauthier Villars, 1955.
18. Robinson A., Note on a problem of Henkin, *Journal of Symbolic Logic*, **21** (1956), 33—35.
19. Robinson A., Some problems of definability in the lower predicate calculus, *Fundamenta Mathematicae*, **44** (1957), 309—329.
20. Robinson A., On the concept of a differentially closed field, *Bulletin of the Research Council of Israel, Section F*, **8** (1959), 113—128.
21. Robinson A., On the construction of models, в сборнике Essays on the foundation of mathematics, dedicated to A. A. Fränkel on his seventieth anniversary, Jerusalem. Magnes Press, 1961, 207—217.
22. Seidenberg A., An elimination theory for differential algebra, *University of California Publication in Mathematics*, new series, **3** (1956), 31—66.
23. Scolem T., Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlischer oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschlisslich Zahlenvariablen, *Fundamenta Mathematicae*, **23** (1943), 150—161.
24. Tarski A., Contribution to the theory of model, I, II, *Proceedings of the Royal Academy of Science of the Netherlands*, ser. A, **57** (1954), 582—588.

Некоторые применения теории моделей к теории множеств[1])

Х. КЕЙСЛЕР

Калифорнийский университет, Калифорния, США

Введение

Тарский [4] изучает некоторые классы кардинальных чисел, такие, как класс *сильно некомпактных кардинальных чисел* и класс *кардинальных* чисел α, обладающих свойством P_0: каждый α-полный примарный идеал в алгебре множества всех подмножеств α является главным идеалом. Класс сильно некомпактных *кардинальных чисел* определен [4] метаматематически с помощью логик L_α, хотя эквивалентное определение в случае α, недостижимого в терминах булевых алгебр, хорошо известно [4, замечания к теореме 4]. Тарский доказывает [4], что класс кардинальных чисел, обладающих свойством P_0, содержит в себе класс сильно некомпактных кардинальных чисел. Давно известно, что кардинальное число ω не обладает свойством P_0, в то время как все достижимые кардинальные числа им обладают. Недавно Ханф [2] доказал (как решение проблемы, поставленной Тарским), что многие недостижимые кардинальные числа являются сильно некомпактными, и Тарский [4], применяя этот метаматематический результат Ханфа, получил некоторые математические следствия о том, что многие недостижимые кардинальные числа обладают свойством P_0.

В первом разделе этой статьи мы изложим относительно простое „элементарное" доказательство того факта, что каждое недостижимое кардинальное число Θ_ξ, $0 < \xi < \Theta_\xi$, обладает свойством P_0 [4]. Оно основано на конструкции ультрастепени, определенной, например, Фрейном, Скоттом и Тарским [1]. Применяя аналогичные рассуждения, можно показать, что многие другие кардинальные числа обладают свойством P_0.

Хотя наше доказательство является формально математическим, мы в разд. 2 заметим, что часто наши рассуждения относительно ультрастепеней мотивируются некоторыми общими метаматематическими аргументами. Они позволяют получить необходимые и достаточные теоретико-модельные условия для того, чтобы кардинальное число α обладало свойством P_0 (теорема 2). Грубо говоря, это условие состоит в существовании модели мощности α, характеризуемой (с точностью до изоморфизма) некоторым множеством аксиом в L_α, и

[1]) K e i s l e r H. J., Some applications of the theory of models to set theory, стр. 80—86.

является очень полезным, так как в некоторых случаях им легко пользоваться, в то время как прямое установление свойства окажется очень трудным. При доказательстве достаточности мы снова применяем ультрастепени, и фактически главным аргументом является обобщение нашего доказательства того, что Θ_ξ обладает свойством P_0 при $0 < \xi < \Theta_\xi$.

Для сравнения мы получаем некоторые сильные условия, необходимые и достаточные для того, чтобы недостижимое α было сильно некомпактным (теорема 3).

Доказательства результатов разд. 2 будут опубликованы позднее.

Мы отсылаем читателя к работе Тарского [4] для ознакомления с понятиями и терминологией.

1. Специальные результаты

Вначале напомним понятие ультрастепени.

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, R\rangle$ — модель, образованная множеством A и бинарным предикатом R над A. Пусть X — произвольное множество. Мы применим обозначение $\mathfrak{S}(X)$ для алгебры множества всех подмножеств X. Пусть P — примарный идеал в $\mathfrak{S}(X)$.

Если f, g — две функции на X в A, т. е. $f, g \in A^X$, мы говорим, что $f \equiv_P g$ тогда и только тогда, когда $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \bar{\in} P$.

Если по аналогии с теорией меры мы полагаем элементы P „малыми" множествами, то $f \equiv_P g$ можно читать как „$f = g$ почти везде". Отношение $\equiv_P$ является отношением эквивалентности в A^X, и классы эквивалентных функций с f обозначаются через $f/P = \{g \in A^X \mid f \equiv_P g\}$. Множество всех эквивалентных классов обозначим через $A^X/P = \{f/P \mid f \in A^X\}$. Наконец, мы определим отношение: R_P истинно над A^X/P, $R_P(f/P, g/P)$ тогда и только тогда, когда $\{x \in X \mid R(f(x), g(x))\} \bar{\in} P$. Мы теперь определим ультрастепень $\mathfrak{A}^X/P$ как модель $\langle A^X/P, R_P\rangle$.

Теорема 1. *Если* $0 < \xi < \Theta_\xi$, *то* Θ_ξ *обладает свойством* P_0.

Полное доказательство этого результата состоит из двух частей; в первой части показывается, что Θ_ξ сильно некомпактен для $0 < \xi < \Theta_\xi$, а во второй, — что сильная некомпактность влечет P_0. Вторая часть найдена Тарским несколько раньше. Первая часть получена Ханфом. Доказательство Ханфа намечено в общих чертах [4]. Как отмечается в [4], другим методом доказательства второй части является рассмотрение ультрапроизведения[1]) множества α различных теоретико-множественных моделей.

[1]) Операция ультрапроизведения [1] определяется аналогично ультрастепени, за исключением того, что она применяется к классу, возможно, различных моделей, перенумерованных элементами множества X.

Мы даем прямое доказательство теоремы 1. Оно не только обходит понятие сильной компактности, но позволяет ввести два упрощения. Во-первых, вместо транзитивных и натуральных моделей теории множеств мы имеем дело с более простыми объектами, а именно с вполне упорядоченными множествами. Во-вторых, вместо образования ультрапроизведения α различных теоретико-множественных моделей мы будем рассматривать лишь ультрастепень одного вполне упорядоченного множества.

Доказательство теоремы 1. Пусть $0 < \xi < \Phi_\xi$, но Φ_ξ не обладает свойством P_0. Тогда существует Θ_ξ — полный неглавный примарный идеал P в $\mathfrak{S}(\Theta_\xi)$. Пусть $\mathfrak{A}$ — модель $\langle\Theta_\xi, <\rangle$, где $<$ есть обычное отношение упорядоченности ординальных чисел, меньших чем Θ_ξ. Образуем ультрастепень

$$\mathfrak{A}^{\Theta_\xi}/P = \langle\Theta_\xi^{\Theta_\xi}/P, <_P\rangle.$$

Мы сначала покажем, что $<_P$ вполне упорядочивает множество $\Theta_\xi^{\Theta_\xi}/P$. Для этого нам достаточно знать, что $0 < \xi$ и, следовательно, $\omega < \Theta_\xi$. Во-первых, $<_P$ — транзитивное отношение, так как если $(f/P) <_P (g/P) <_P (h/P)$, то $\{x \in X \mid f(x) < h(x)\} \bar{\in} P$ и, следовательно, $(f/P) <_P (h/P)$. Во-вторых, $<_P$ есть линейный порядок, так как в точности одно из множеств $\{x \in X \mid f(x) > g(x)\}$, $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$, $\{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$ не входит в примарный идеал P. Наконец, не существует бесконечной сходящейся последовательности вида $\ldots <_P (f_r/P) <_P (f_1/P) <_P (f_0/P)$, так как иначе имело бы место $\{x \in X \mid f_{n+1}(x) < f_n(x)\} \bar{\in} P$ для каждого $n < \omega$, и, поскольку P является Θ_ξ-полным и тем более ω_1-полным, пересечение $\bigcap_{n<\omega} \{x \in X \mid f_{n+1}(x) < f_n(x)\}$ будет не пустым и не будет принадлежать P, что означает, что $\langle\Theta_\xi, <\rangle$ обладает бесконечной сходящейся последовательностью. Этим доказано, что $<_P$ есть отношение полной упорядоченности.

Так как $\mathfrak{A}^{\Theta_\xi}/P$ есть вполне упорядоченное множество, то существует единственное ординальное число μ, такое, что $\mathfrak{A}^{\Theta_\xi}/P$ изоморфно с $\langle\mu, <\rangle$. Пусть φ — единственный изоморфизм между $\mathfrak{A}^{\Theta_\xi}/P$ и $\langle\mu, <\rangle$.

Теперь покажем, что $\Theta_\xi < \mu$. Для любых двух функциональных констант $f, g \in \Theta_\xi^{\Theta_\xi}$, имеем $f/P \neq g/P$, так как $f(x) \neq g(x)$ для всех $x \in X$. С другой стороны, тождественная функция $i \in \Theta_\xi^{\Theta_\xi}$ превосходит любую функциональную константу f, за исключением множества менее чем Θ_ξ элементов из Θ_ξ. Так как P — неглавный и примарный идеал, он содержит все одноэлементные множества и из Θ_ξ-полноты P следует, что каждое множество менее чем с Θ_ξ элементами из Θ_ξ принадлежит P. Далее, $(f/P) <_P (i/P)$ для каждой константы f. Это означает, что ординальное число $\varphi(i/P)$ обладает по крайней мере Θ_ξ различными элементами меньше его самого. Но никакой элемент из Θ_ξ не обладает Θ_ξ элементами меньше его самого, так что $\Theta_\xi < \mu$. Таким образом, $\varphi(t \mid P) = \Theta_\xi$ для некоторого $t \in \Theta_\xi^{\Theta_\xi}$. Закончим доказательство приведением к противоречию. Следующие множества:

$X_0 = \{x \in \Theta_\xi \mid t(x) = 0\}$,
$X_1 = \{x \in \Theta_\xi \mid t(x)$ не является кардинальным числом$\}$,
$X_2 = \{x \in \Theta_\xi \mid t(x)$ является сингулярным кардинальным числом$\}$,
$X_3 = \{x \in \Theta_\xi \mid t(x)$ является регулярным достижимым кардинальным числом$\}$,
$Y_\zeta = \{x \in \Theta_\xi \mid t(x) = \Theta_\zeta\}$ для каждого $\zeta < \xi$

образуют разбиение Θ_ξ на менее чем Θ_ξ классов. Далее, точно один из этих классов не входит в P. Доказательство проведем по отдельным классам. Если $X_0 \bar{\in} P$, то $\varphi(tP)$ является наименьшим ординальным числом, которое дает нам неверное равенство $\Theta_\xi = 0$. Аналогично если $Y_\zeta \in P$ для некоторого $\zeta < \xi$, то существует такое $\Theta_\zeta < \Theta_\xi$, что $\Theta_\zeta = \Theta_\xi$.

Теперь предположим, что $X_1 \cup X_2 \bar{\in} P$. Для каждого ординального числа $\gamma < \Theta_\xi$, который либо не является кардинальным числом, либо является сингулярным кардинальным числом, мы можем выбрать $v_\gamma < \gamma$ и функцию F_γ на v_γ в γ, такую, что для каждого $\alpha < \gamma$ существует $\beta < v_\gamma$ со свойством $\alpha \leqslant F_\gamma(\beta)$. Пусть $v = \varphi(n/P)$, где n — функция, такая, что $n(x) = v_{t(x)}$ для всех $x \in X_1 \cup X_2$; так как $X_1 \cup X_2 \in P$, мы имеем $v < \Theta_\xi$. Пусть F — функция на v в Θ_ξ, такая, что из $\varphi(f/P) < v$ следует $F(\varphi(f/P)) = \varphi(g/P)$, где g — функция, такая, что $g(x) = F_{t(x)}(f(x))$ для каждого $x \in X_1 \cup X_2$, для которого $f(x) < v_{t(x)}$. Если $\alpha < \Theta_\xi$, то существует $\beta < \nu$, такое, что $\alpha \leqslant F(\beta)$; а именно если $\alpha = \varphi(a/P)$, то $\beta = \varphi(b/P)$, где b — функция, такая, что $b(x) < \nu_{t(x)}$ и $a(x) \leqslant F_{t(x)}(b(x))$ при $x \in X_1 \cup X_2$ и $a(x) < t(x)$. Но существование такой функции означает, что либо Θ_ξ не является кардинальным числом, либо Θ_ξ является сингулярным, чего не может быть.

Остается рассмотреть случай $X_3 \bar{\in} P$. Для каждого регулярного достижимого кардинального числа $\gamma < \Theta_\xi$ можно выбрать $\psi_\gamma < \gamma$, такое, что $\gamma \leqslant 2^{\psi_\gamma}$. Поэтому для каждого $\alpha < \gamma$ мы найдем подмножество $G_\gamma(\alpha) \subseteq \psi_\gamma$, такое, что если α, $\beta < \gamma$ и $\alpha \neq \beta$, то $G_\gamma(\alpha) \neq G_\gamma(\beta)$. Пусть $\psi = \varphi(p/P)$, где p — функция, такая, что $p(x) = \psi_{t(x)}$ для всех $x \in X_3$; так как $X_3 \in P$, то $\psi < \Theta_\xi$. Для каждого $\varphi(f/P) < \Theta_\xi$ пусть $G(\varphi(f/P))$ — множество всех $\varphi(g/P) < \mu$, таких, что $g(x) \in G_{t(x)}(f(x))$ при $f(x) < t(x)$ и $x \in X_3$; так как $X_3 \cap \{x \in \Theta_\xi \mid f(x) < t(x)\} \in P$, отсюда следует, что $G(\varphi(f/P)) \subseteq \psi$. Если $\alpha, \beta < \Theta_\xi$ и $\alpha \neq \beta$, то $G(\alpha) \neq G(\beta)$, а именно если $\alpha = \varphi(a/P)$ и $\beta = \varphi(b/P)$, а f — функция, такая, что $f(x)$ лежит в симметрической разности $G_{t(x)}(a(x))$ и $G_{t(x)}(b(x))$ при $x \in X_3$, $a(x) < t(x)$, $b(x) < t(x)$ и $a(x) \neq b(x)$, то $\varphi(f/P)$ лежит в симметрической разности $G(\alpha)$ и $G(\beta)$. Но существование такой функции G показывает, что $\Theta_\xi \leqslant 2^\psi$, а это противоречит недостижимости кардинального числа Θ_ξ.

Мы получили противоречие в каждом случае, чем завершено доказательство теоремы 1.

Рассуждения, подобные тем, которые проведены при доказательстве теоремы 1, можно применять ко многим другим кардинальным числам. Например, для всех кардинальных чисел, для которых в [4] доказано, что они удовлетворяют P_0, это можно доказать и нашим методом.Только иногда надо применять модели с иным отношением, чем специальное отношение порядка.

2. Метаматематические результаты

Теперь будем анализировать приведенное доказательство с некоторой общей точки зрения. Наш метод доказательства того, что α обладает свойством P_0, можно разбить на следующие четыре шага:

1. Предполагаем, что $\mathfrak{S}(\alpha)$ обладает не главным α-полным примарным идеалом P.

2. Показываем, что ультрастепень $\mathfrak{A}^\alpha/P$ некоторой модели $\mathfrak{A}$ не изоморфна с $\mathfrak{A}$.

3. Показываем, что некоторые свойства $\mathfrak{A}$ переносятся на $\mathfrak{A}^\alpha/P$.

4. Показываем, что в противоречие с шагом 2 эти свойства влекут изоморфизм $\mathfrak{A}^\alpha/P$ и $\mathfrak{A}$.

Шаг 1 просто предполагает, что α не обладает свойством P.

Шаг 2 выполняется для любого α при условии, что модель $\mathfrak{A}$ обладает по крайней мере α элементами и что отношения в $\mathfrak{A}$ достаточны для обеспечения того факта, что любой изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}^\alpha/P$ должен отобразить каждый элемент $a \in A$ в класс эквивалентности, содержащий функциональную константу a. Это единственный шаг, который зависит от неглавности идеала P.

В связи с шагом 3 мы хотим иметь критерий для свойства $\mathfrak{A}$ сохраняться при переходе к ультрастепени $\mathfrak{A}^\alpha/P$. Такой критерий лучше всего описать с помощью метаматематических понятий.

Пусть α — фиксированное регулярное кардинальное число. Модель $\mathfrak{A} = \langle A, R_\beta \rangle_{\beta < \beta_0}$ состоит из множества A и последовательности предикатов R_β на A, нумерованных ординальными числами из β_0, местность каждого из которых меньше чем α. Модель $\mathfrak{B} = \langle B, S_\gamma \rangle_{\gamma < \gamma_0}$ называется подобной с $\mathfrak{A}$, если $\beta_0 = \gamma_0$ и для каждого $\beta < \beta_0$, R_β и S_β имеют одно и то же число мест. Под логикой $L_\alpha^{(\mathfrak{A})}$, соответствующей модели $\mathfrak{A}$, понимаем логическую систему L_α [4], которая обладает

нелогическими константами соответственно предикатам модели $\mathfrak{A}$ и числу их мест. Модель $\mathfrak{B}$ называется *L_α-эквивалентной* модели $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{B}$ подобна $\mathfrak{A}$ и каждая аксиома из $L_\alpha^{(\mathfrak{A})}$, которая истинна на $\mathfrak{A}$, истинна также на $\mathfrak{B}$.

Критерий для свойств, сохраняющихся при ультрастепенях, подсказывается следующей теоремой [3]: *если P — примарный идеал в $\mathfrak{S}(\omega)$, то $\mathfrak{A}^\omega/P$ является L_ω-эквивалентной $\mathfrak{A}$.* Эту теорему без труда можно обобщить следующим образом: *если P есть α-полный примарный идеал в $\mathfrak{S}(\alpha)$, то $\mathfrak{A}^\alpha/P$ является L_α-эквивалентной $\mathfrak{A}$.* С другой стороны, любое свойство, выразимое как аксиома в $L_\alpha^{(\mathfrak{A})}$, сохраняется при переходе от $\mathfrak{A}$ к $\mathfrak{A}^\alpha/P$. Это означает, что шаги 3 и 4 можно провести всегда, если мы найдем модель $\mathfrak{A}$, такую, что любая другая модель, L_α-эквивалентная ей, ей изоморфна.

Полезно проследить нашу точку зрения для специального случая $\alpha = \Theta_\xi$ в свете вышеприведенных обсуждений. Покажем, что следующие два свойства сохраняются при переходе к ультрастепени: „$<$ есть отношение вполне упорядоченности“ и „каждый элемент либо есть 0 или Θ_ζ для некоторого $\zeta < \xi$, либо не является кардинальным числом, либо является сингулярным кардинальным числом, либо является недостижимым кардинальным числом“. Свойство вполне упорядоченности легко выразить в L_{Θ_ξ} в терминах отношения $<$. Однако, для того чтобы выразить второе свойство, нам нужны два дополнительных трехместных предиката. Пусть $\varphi(x, y)$ — следующая формула в L_{Θ_ξ}:

$$\forall w \exists z \forall t\, [(F(x, w, t) \leftrightarrow t = z \wedge w < y) \wedge z < x].$$

Таким образом, $\varphi(x, y)$ утверждает, что $F(x)$ есть функция, отображающая y в x. Как отмечено в [4], для каждого $\alpha < \Theta_\xi$ мы можем найти формулу $\varphi_\beta(x)$ в L_{Θ_ξ} в терминах $<$, которая истинна только тогда, когда $x = \beta$. Второе свойство теперь можно выразить в следующем виде: *существуют предикаты F, R такие, что*

$$\begin{gathered}\forall x\, \{\varphi_0(x) \vee \left(\mathbf{V}_{\zeta<\xi}\varphi_{\Theta_\zeta}(x)\right) \vee \exists y\, [y < x \wedge \varphi(x, y)] \wedge \\ \wedge \forall t \exists w, z\, [t < x \to (t < z \vee t = z) \wedge F(x, w, z)]\} \vee \\ \vee \exists y\, \{y < x \wedge \forall z, w \exists u\, [w < z \wedge z < x \to u < y \wedge \\ \wedge \neg (R(x, z, u) \leftrightarrow R(x, w, u))]\}.\end{gathered}$$

Для того чтобы пересказать наше доказательство из разд. 1 в настоящем разделе, мы представим себе, что имеем дело не с моделью $\langle \Theta_\xi, < \rangle$, а с моделью $\mathfrak{A} = \langle \Theta_\xi, <, F, R \rangle$. Предикаты F, R действительно вводятся (не формально) в процессе нашего доказательства и распространяются на ультрастепень естественным образом. При таком выборе $\mathfrak{A}$ указанные два свойства выразимы в $L_{\Theta_\xi}^{(\mathfrak{A})}$. Кроме того, эти две аксиомы вместе с „диаграммами" предикатов F и R достаточно обеспечивают изоморфизм ультрастепени и $\mathfrak{A}$, и этим становится выполнимым шаг 4.

Как подсказывается ходом обсуждений, и в общем случае легко провести шаги 3 и 4, когда $\mathfrak{A}$ имеет большое число предикатов. Мы мотивируем это, рассматривая отдельные модели $\mathfrak{A}_\alpha$, образованные множеством α и *каждым* предикатом над α с менее чем α аргументными местами. Мы можем показать, что достаточным условием того, что α обладает свойством P_0, является импликация: L_α-эквивалентность $\mathfrak{A}_\alpha$ влечет изоморфизм $\mathfrak{A}_\alpha$.

В действительности мы можем утверждать большее. Пусть $\mathfrak{A}'_\alpha$ — модель, образованная множеством α и каждым одноместным предикатом (т. е. подмножеством) над α. Мы имеем следующую теорему:

Теорема 2. *Следующие три условия для регулярных кардинальных чисел α эквивалентны*:

(I) *α обладает свойством P_0*;

(II) *каждая модель, которая L_α-эквивалентна $\mathfrak{A}_\alpha$, должна быть изоморфной ей*;

(III) *каждая модель, которая L_α-эквивалентна $\mathfrak{A}'_\alpha$, должна быть изоморфна $\mathfrak{A}'_\alpha$*.

Мы уже указали доказательство импликации (II) → (I), а импликацию (III) → (II) легко проверить. Доказательство импликации (I) → (III) найдено А. Леви и автором совместно.

Теорема 2 дает нам теоретико-модельную характеристику, которая позволяет проникнуть в природу свойства P_0. Условие сильной некомпактности [4] является достаточным для P_0, что доказывается легкой проверкой специальных случаев. Однако условие (II) теоремы 2 в равной мере позволяет легко проверить наличие свойства и, более того, является необходимым, чем и представляет особый интерес. Эквивалентность (II) ← (III) теоремы 2 представляет собой теоретико-модельный результат, доказанный не прямо, а с помощью свойства P_0. Для специального случая $\alpha = \Theta_\xi$, $0 < \xi < \Theta_\xi$, наши рассуждения показывают, что можно легко получить множество аксиом в $L_\alpha^{(\mathfrak{A}_\alpha)}$, которое характеризует $\mathfrak{A}_\alpha$ с точностью до изоморфизма. По теореме 2 следует, что это же можно выполнить и для $\mathfrak{A}'_\alpha$.

Мы теперь дадим два условия, характеризующих сильную некомпактность недостижимых кардинальных чисел, которые тесно связаны с условиями (II) и (III) теоремы 2: элемент $a \in A$ называем *α-определимым* в модели $\mathfrak{A}$, если существует формула $\varphi(v_0)$ в $L_\alpha^{(\mathfrak{A})}$ с единственной свободной переменной v_0, которая выполнима в $\mathfrak{A}$ элементом $x \in A$ тогда и только тогда, когда $x = a$. Очевидно, что в каждой отдельной модели $\mathfrak{A}_\alpha$ и $\mathfrak{A}'_\alpha$ каждый элемент из α α-определим:

Теорема 3. *Следующие три условия для недостижимого кардинального числа α эквивалентны*:

(I*) *α является сильно некомпактным*;

(II*) *существует модель $\mathfrak{A}$, образованная множеством α и α-членной последовательностью предикатов над α, такая, что каждая модель, L_α-эквивалентная $\mathfrak{A}$, изоморфна $\mathfrak{A}$ и каждый элемент из α α-определим в $\mathfrak{A}$*;

(III*) *существует модель $\mathfrak{A}'$, образованная множеством α и α-членной последовательностью одноместных предикатов над α, такая, что каждая модель, L_α-эквивалентная $\mathfrak{A}'$, изоморфна ей и каждый элемент из α α-определим в $\mathfrak{A}'$*.

Импликации (III*) → (II*) и (II*) → (I*) легко проверить. Доказательство импликации (I*) → (III*) найдено А. Леви и автором совместно.

В случае, когда α является регулярным достижимым кардинальным числом, можно доказать, что (II*) и (III*) всегда выполняются, однако неизвестно, является ли α сильно некомпактным без дополнительных предположений, скажем без предположения обобщенной континуум-гипотезы.

Теоремы 2 и 3 дают тесно связанные теоретико-модельные характеристики свойства P_0 и сильной некомпактности и тем самым помогают нам понимать связь между этими двумя свойствами кардинальных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Frayne T., Scott D., Tarski A., Reduced Products, *Amer. Math. Soc. Notices*, 5 (1958), 673—674.
2. Hanf W. P., Models of languages with infinitely long expressions, *International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, Abstracts of Contributed Papers*, Stanford University, 1960, 24, мимеографировано.
3. Łoś J., Quelques remarques, théorêmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbras. В книге Scolem и др. «Mathematical Interpretations of Formal Systems», 98, Amsterdam, North-Holland, 1955.
4. Тарский А., Некоторые проблемы и результаты, связанные с основаниями теории множеств; настоящий сборник, стр. 152—158.

К принципам отражения в аксиоматической теории множеств [1])

А. ЛЕВИ

Калифорнийский университет, Беркли, Калифорния, США

Цель настоящей статьи обсудить принципы отражения в аксиоматической теории множеств, которые введены в [2] и изучались дальше в [3]. Детально будут обсуждаться только те стороны предмета, которые не упомянуты в [2, 3].

Мы будем иметь дело с теорией множеств, формализованной в исчислении предикатов первого порядка с равенством и с бинарным предикатным символом ε в качестве единственной нелогической константы. Пусть S — теория множеств, содержащая аксиомы объемности (extensionality), пары, объединения, множества-мощности, схемы аксиом выделения и фундирования (foundation). Пусть ZF — теория множеств, полученная из S добавлением аксиомы бесконечности и схемы аксиом подстановки. Все теоремы в этой статье — теоремы в соответствующей аксиоматический теории множеств. Для каждой занумерованной теоремы будет указываться теория, в которой теорема доказана. Если приводится теорема без указания соответствующей теории, то из контекста ясно, что это за теория.

Пусть $L(\alpha)$ — формула, утверждающая, что α — предельное число. Пусть $R(\alpha)$ — терм, определенный рекурсивно: $R(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} P(R(\beta))$, где $P(x)$ означает множество подмножества x [2]). Здесь мы используем схему теорем из S о рекурсивных определениях, которая утверждает, что рекурсией может быть определен такой терм $F(\alpha)$, что $F(\alpha)$ удовлетворяет рекурсивному условию, если α таково, что имеется множество, содержащее все упорядоченные пары $\langle\beta, F(\beta)\rangle$ для $\beta < \alpha$, и $F(\alpha)$ есть 0 в противном случае. Пусть $T(\alpha)$ обозначает, что $R(\alpha) \neq 0$. Пусть $\mathrm{Rel}(x, \varphi)$, где φ — любая формула, обозначает релятивизацию φ относительно переменной или терма x, т. е. формулу, полученную из φ заменой всех кванторов $(\forall y)$ или $(\exists y)$ на $(\forall y)\ (y \in x \to \ldots$ или $(\exists y)\ (y \in x \wedge \ldots$ соответственно после

[1]) Lévy A., On the principles of reflection in axiomatic set theory, стр. 87—93.

[2]) По-видимому, ниже $R(\alpha)$ всюду означает выражение $S(\alpha) = R(\alpha) - \bigcup_{\beta<\alpha} R(\beta)$, т. е. $R(\alpha)$ стоит везде в дальнейшем вместо $S(\alpha)$. — *Прим. ред.*

переименований связанных переменных, для того чтобы избежать коллизий. Будем говорить, что множество x есть ε-модель теории $\mathbf{Q}$, если $\langle x, \varepsilon_x\rangle$ — модель $\mathbf{Q}$, где $\varepsilon_x = \{\langle y, z\rangle \mid y,\ z \in x \wedge y \in z\}$. Будем пользоваться формализованными понятиями выполнения и истинности формул в ε-модели. Будем говорить, что формула φ истинна в x, если φ истинна в $\langle x, \varepsilon_x\rangle$, и т. д.; ε-модель x называют натуральной моделью, если $x = R(\alpha) \neq 0$ для некоторого предельного числа α. Натуральные модели вполне упорядочены по включению, и, следовательно, имеет смысл говорить о „первой натуральной модели теории $\mathbf{Q}$" и т. д. Следующая теорема S используется в этой работе, но не доказана здесь: если $\beta < \delta$ и $x \in R(\beta)$, то x и β удовлетворяют $\mathrm{Rel}(R(\beta), \varphi(x))$ в $R(\delta)$ тогда и только тогда, когда x удовлетворяет $\varphi(x)$ в $R(\beta)$. Доказательство не представит труда, как только будет введено формальное понятие выполнения.

Следующие схемы называются принципами отражения над S:

$$\mathsf{R}_1^{\mathsf{S}}\varphi \to (\exists\alpha)\,(L(\alpha) \wedge T(\alpha) \wedge \mathrm{Rel}\,(R(\alpha), \varphi)),$$

где φ — любое предложение;

$$\mathsf{R}_2^{\mathsf{S}}\varphi \to (\forall\beta)\,(\exists\alpha)\,(\alpha > \beta \wedge L(\alpha) \wedge T(\alpha) \wedge \mathrm{Rel}\,(R(\alpha), \varphi)),$$

где φ — любое предложение;

$$\mathsf{R}_3^{\mathsf{S}}\varphi(x_1, \ldots, x_n) \to (\exists\alpha)\big(L(\alpha) \wedge T(\alpha) \wedge x_1, \ldots, x_n \in R(\alpha) \wedge \mathrm{Rel}\,(R(\alpha), \varphi)\big),$$

где φ — любая формула, не содержащая свободных переменных, кроме $x_1, \ldots, x_n$. Пусть

$$\mathsf{S}^* = \mathsf{S} + \mathsf{R}_1^{\mathsf{S}}; \quad \mathsf{S}^{**} = \mathsf{S} + \mathsf{R}_2^{\mathsf{S}}; \quad \mathsf{S}^{***} = \mathsf{S} + \mathsf{R}_3^{\mathsf{S}}.$$

По аналогии с тем, что было сделано в [2], можно легко показать, что в S^* может быть доказана теорема $T(\omega \cdot n)$ для каждого конечного числа $n \neq 0$, но не может быть доказана теорема $T(\omega^2)$ (если теория S^* непротиворечива) и что S^* непротиворечива тогда и только тогда, когда теория $\mathsf{S} + \{T(\omega \cdot n) \mid n$ — конечное число$\}$ непротиворечива. В S^{**} можно доказать $T(\omega^n)$ для каждого конечного n и нельзя доказать $T(\omega^\omega)$ (если теория S^{**} непротиворечива). Теория S^{**} непротиворечива тогда и только тогда, когда непротиворечива теория $\mathsf{S} + \{T(\omega^n) \mid n$ — конечное число$\}$. Однако $R(\omega^2)$ — не натуральная модель S^* и $R(\omega^\omega)$ — не натуральная модель S^{**}. Мы будем сейчас иметь дело с проблемой отыскания классов β_0 и β_1 в S^* и S^{**} в смысле r_4 Тарского [6] ($\beta_0 = r_4\mathsf{S}^*$, $\beta_1 = r_4\mathsf{S}^{**}$ в обозначениях Тарского), т. е. наименьших ординальных чисел β, таких, что $R(\beta)$ — натуральная модель S^* и S^{**} соответственно. Мы увидим, что $\beta_1 = \beta_0$ и что они счетны, но очень велики.

Лемма 1 (в S). *Если существуют предложение ψ и формулы $Q(x)$ и $P(x, y)$, не содержащие свободных переменных, кроме x, и x, y соответственно, такие, что*

$$S \vdash (\forall\gamma)[L(\gamma) \wedge T(\gamma) \wedge (\exists\xi)(\xi < \gamma \wedge L(\xi) \wedge \mathrm{Rel}(R(\xi), \psi)) \rightarrow \rightarrow (\forall x)(Q(x) \leftrightarrow x \in R(\gamma) \wedge \mathrm{Rel}(R(\gamma), Q(x))) \wedge (\forall\eta)(\forall x)(\eta < \gamma \wedge Q(x) \rightarrow \rightarrow (P(x, \eta) \leftrightarrow \mathrm{Rel}(R(\gamma), P(x, \eta))))], \quad (1)$$

δ — предельное ординальное число такое, что $R(\delta) \neq 0$, и предложение

$$(\exists\xi)(L(\xi) \wedge \mathrm{Rel}(R(\xi), \psi)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow (\exists\gamma) P(x, \gamma)) \wedge (\forall\gamma)(\exists x)(Q(x) \wedge (\forall\sigma)(P(x, \sigma) \rightarrow \sigma = \gamma))$$

истинно в $R(\delta)$, то $R(\delta)$ — не натуральная модель S^*.

Доказательство. Пусть φ — предложение $(\exists\xi)(L(\xi)) \wedge \mathrm{Rel}(R(\xi), \psi) \wedge \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow (\exists\eta) P(x, \eta)))$. По условию леммы, φ истинно в $R(\delta)$. Если $R(\delta)$ — натуральная модель теории S^*, то $\varphi \rightarrow (\exists\beta)(L(\beta) \wedge \wedge T(\beta) \wedge \mathrm{Rel}(R(\beta), \varphi))$ истинно в ней и, следовательно, $(\exists\beta)(L(\beta) \wedge \wedge T(\beta) \wedge \mathrm{Rel}(R(\beta), \varphi))$ истинно в $R(\delta)$. Можно усмотреть из стандартных рассуждений об абсолютности [5] и теоремы, упомянутой ранее относительно того, что β удовлетворяет $\mathrm{Rel}(R(\beta), \varphi)$, существование предельного ординального числа $\beta < \delta$, такого, что φ истинно в $R(\beta)$.

Так как предложение (1) является теоремой в S, оно истинно в $R(\delta)$ [потому что каждый терм $R(\delta)$ с предельным числом δ есть натуральная модель S]. Поэтому, заменяя β на γ в (1) и используя тот факт, что $(\exists\xi)(\mathrm{Rel}(R(\xi), \psi))$ истинно в $R(\beta)$ [так как φ истинно в $R(\beta)$] и, следовательно, β удовлетворяет $(\exists\xi)(\xi < \beta \wedge \mathrm{Rel}(R(\xi), \psi))$ в $R(\delta)$, получим, что формула

$$(\forall x)(Q(x) \leftrightarrow x \in R(\beta) \wedge \mathrm{Rel}(R(\beta), Q(x))) \wedge (\forall\eta)(\forall x)(\eta < \beta \wedge Q(x) \rightarrow \rightarrow (P(x, \eta) \leftrightarrow \mathrm{Rel}(R(\beta), P(x, \eta)))$$

удовлетворяется β в $R(\delta)$, т. е. $(\forall x)(x \in R(\delta) \rightarrow (x$ удовлетворяет $Q(x)$ в $R(\delta) \leftrightarrow x \in R(\beta) \wedge x$ удовлетворяет $Q(x)$ в $R(\beta))) \wedge \wedge (\forall\eta)(\forall x)(x \in R(\beta) \wedge \eta < \beta \wedge x$ удовлетворяет $Q(x)$ в $R(\delta) \rightarrow \rightarrow (x, \eta$ удовлетворяют $P(x, \eta)$ в $R(\delta) \leftrightarrow x, \eta$ удовлетворяют $P(x, \eta)$ в $R(\beta)))$[1]. Так как φ истинно в $R(\beta)$, мы имеем $(\forall x)(x \in R(\beta) \wedge x$ удовлетворяет $Q(x)$ в $R(\beta) \rightarrow (\exists\eta)(\eta < \beta \wedge x, \eta$ удовлетворяют $P(x, \eta)$ в $R(\beta)))$ и, следовательно, $(\forall x)(x \in R(\delta) \wedge x$ удовлетворяет $Q(x)$ в $R(\delta) \rightarrow (\exists\eta)(\eta < \beta \wedge \eta$ удовлетворяет $P(x, \eta)$ в $R(\delta)))$; но это противоречит допущению о том, что $(\forall\gamma)(\exists x)(Q(x) \wedge \wedge (\forall\sigma)(P(x, \sigma) \rightarrow \sigma = \gamma))$ истинно в $R(\delta)$.

[1]) Следует заметить, что это предложение используется, а не упоминается.

Следствие 2 (в S). *Если существует β_0 (т. е. если S^* имеет натуральную модель), то $\beta_0 \geqslant \omega_{(1)}$, где $\omega_{(1)}$ — первое ординальное число, которое неконструктивно по Чёрчу — Клини.*

Доказательство. Пусть β — любое конструктивное по Чёрчу — Клини ординальное число. Возьмем $(\forall v_0)(v_0 = v_0)$ в качестве ψ; любую формулу, утверждающую, что x — натуральное число, в качестве $Q(x)$; формулу, утверждающую, что натуральное число x есть y-й член в фиксированном рекурсивном полном упорядочении натуральных чисел порядкового типа β, в качестве $P(x, y)$; β в качестве δ. Так как рекурсивное полное упорядочение натуральных чисел может быть задано теоретико-числовым предикатом, который, следовательно, абсолютен относительно натуральных моделей, то условия леммы 1 легко проверяются. Следовательно, $R(\beta)$ не является натуральной моделью для S^*.

По существу, тем же способом можно доказать, что β_0 больше, чем все порядковые типы полных упорядочений натуральных чисел, определенных с использованием любого конечного числа кванторов на множествах натуральных чисел или на множествах множеств натуральных чисел (все еще без изменения ψ) и т. д. Таким образом, мы видим, что β_0 действительно очень велико.

Теорема 3 (в $S + (\exists\alpha)$ (α несчетно $\wedge T(\alpha)$)). *β_0 (существует и) счетно и $\beta_1 = \beta_0$.*

Доказательство. Формула $\varphi \rightarrow (\exists\alpha)(L(\alpha) \wedge T(\alpha) \wedge \mathrm{Rel}(R(\alpha), \varphi))$ вида R_1^S, очевидно, истинна в каждой натуральной модели $R(\lambda)$ со счетным λ, за исключением, быть может, одной, которая является наименьшей натуральной моделью для φ. Так как имеется счетное множество формул вида R_1^S, то R_1^S истинно во всех натуральных моделях $R(\lambda)$ со счетным λ, за исключением не более чем счетного множества из них. Но счетных предельных ординальных чисел имеется несчетное множество, а потому найдется по крайней мере одно счетное предельное число β, такое, что $R(\beta)$ — натуральная модель S^*. Наименьшее такое ординальное β обозначим β_0.

Для того чтобы показать, что $R(\beta_0)$ — модель S^{**}, достаточно показать, что для каждого предложения φ, которое истинно в $R(\beta_0)$, и для каждого $\gamma < \beta_0$ существует предельное число δ, $\gamma < \delta < \beta_0$, такое, что φ истинно в $R(\delta)$. Не умаляя общности, можно считать, что γ — предельное число (в противном случае мы заменим его максимальным предельным числом, меньшим γ, или числом ω, если γ

конечно). Прежде всего заметим, что не существует натуральных моделей S^* вида $R(\eta+\omega)$, где $R(\eta)$ — не модель S^*, откуда легко следует, что $\beta_0>\gamma+\omega$, так как $R(\beta_0)$ — наименьшая натуральная модель S^*. Так как $R(\eta)$ — не натуральная модель S^*, найдется предложение ψ, такое, что $R(\eta)$ — наименьшая натуральная модель ψ. Пусть σ — предложение $(\exists\alpha)(L(\alpha)\wedge \mathrm{Rel}(R(\alpha),\psi))$, тогда очевидно, что $R(\eta+\omega)$ — наименьшая натуральная модель σ. Следовательно, $R(\gamma+\omega)$ — не натуральная модель S^*. Поскольку, как мы сейчас установили, $\gamma+\omega<\beta_0$ и $R(\beta_0)$ — наименьшая натуральная модель S^*, то $R(\gamma)$ — не натуральная модель S^* и, следовательно, для некоторого предложения χ $R(\gamma+\omega)$ — наименьшая натуральная модель χ. Пусть τ — предложение $\varphi\wedge(\exists\alpha)(L(\alpha)\wedge\mathrm{Rel}(R(\alpha),\chi))$. Так как τ истинно в $R(\beta_0)$ и $R(\beta_0)$ — натуральная модель S^*, то τ истинно в некоторой натуральной модели $R(\delta)$, $\delta<\beta_0$; $\delta>\gamma+\omega$, так как $(\exists\alpha)(L(\alpha)\wedge\mathrm{Rel}(R(\alpha),\chi))$ истинно в $R(\delta)$. Предложение φ истинно в $R(\delta)$, потому что τ истинно в нем. Таким образом, $R(\beta_0)$ — натуральная модель S^{**}, и в силу очевидного неравенства $\beta_1\geqslant\beta_0$ имеет место равенство $\beta_1=\beta_0$.

Мы имеем „эффективную“ нумерацию β_0, которая получена путем нумерации предельных чисел β_0, задаваемой так:

$$\lambda\to \text{наименьшее } \varphi, \text{ такое, что } R(\lambda) \text{ есть наименьшая натуральная модель } \varphi,$$

где формулы языка отождествляются с натуральными числами в некотором определенном смысле. Таким образом, мы имеем индуцированное полное упорядочение натуральных чисел порядкового типа β_0. Используя лемму 1, можно доказать, что ни для какого ординального числа γ, конструктивного в таком полном упорядочении (исключая само β_0), $R(\gamma)$ не является натуральной моделью S^*. Доказательство подобно доказательству следствия 2, только вместо ψ нужно взять предложение $(\exists\beta)$ (β — натуральная модель S^*), $Q(x)$ остается тем же, $P(x, y)$ имеет тот же вид, что и в следствии 2, однако сейчас мы имеем дело с полными упорядочениями натуральных чисел, рекурсивными в определенном выше полном порядке. Таким образом, второе β, для которого $R(\beta)$ — натуральная модель для S^*, много больше, чем β_0. Таким же образом можно видеть, что третье такое β много больше, чем второе, и т. д. Хотя множество чисел β, таких, что $R(\beta)$ — натуральная модель S^*, очень разрежено в начале второго числового класса, как мы видели, оно не может быть таким всюду в этом классе в силу мощностных соображений, использованных в доказательстве теоремы 3. Если мы допускаем аксиому выбора, то найдется счетное ординальное число μ, такое, что $R(\lambda)$ — натуральная модель S^* для всякого предельного ординального числа λ, $\mu<\lambda<\omega_1$.

Теорема 4 (в $S+(\exists\alpha)$ (α — несчетно $\wedge\, T(\alpha)$)). *Для некоторого счетного предельного ординального β $R(\beta)$ — натуральная модель для S^*, но не для S^{**}.*

Доказательство. Пусть $R(\beta)$ — любая натуральная модель S^*. Из доказательства теоремы 3 вытекает, что если $\beta=\gamma+\omega$ для некоторого предельного числа γ, то $R(\gamma)$ также должно быть натуральной моделью S^*, а так как не существует предельных чисел между γ и β, $R(\beta)$ — не натуральная модель S^{**}. Если β не представимо в виде $\gamma+\omega$, то β — предел предельных чисел. Если β — предел предельных чисел γ, таких, что $R(\gamma)$ — не натуральная модель S^*, то, как в доказательстве теоремы 3, можно показать, что $R(\beta)$ — натуральная модель для S^{**}, следовательно, если $R(\beta)$ не натуральная модель S^{**}, то имеется предельное число $\delta<\beta$, такое, что для каждого предельного числа γ ($\delta<\gamma<\beta$), $R(\gamma)$ — модель S^*. В последнем случае β не может быть наименьшей натуральной моделью для S^*, не являясь натуральной моделью для S^{**}, так как $R(\delta+\omega\cdot 2)$ — натуральная модель S^*, но не S^{**}, и $\delta+\omega\cdot 2<\beta$. Следовательно, наименьшее β, для которого $R(\beta)$ — натуральная модель для S^*, но не для S^{**}, равно $\gamma+\omega$, где γ — наименьшее ординальное число, для которого и $R(\gamma)$ и $R(\gamma+\omega)$ — натуральные модели S^*. Обозначим наименьшее такое β через β'.

Так как все натуральные модели $R(\lambda\cdot\omega^2)$ со счетным λ являются моделями S^*, исключая не более чем счетное множество, и это же верно для всех натуральных моделей $R(\lambda\cdot\omega^2+\omega)$, то существует счетное λ, такое, что $R(\lambda\cdot\omega^2)$ и $R(\lambda\cdot\omega^2+\omega)$ — натуральные модели S^*. Таким образом, β' счетно.

Рассуждая так же, как во второй части теоремы 3 и в замечаниях, предшествующих теореме 4, можно доказать, что $R(\beta')$ из доказательства теоремы 4 больше, чем λ-я натуральная модель S^*, где λ — любое конструктивное по Чёрчу — Клини ординальное число, и т. д.

Поскольку (как показано в [3]) предложение $(\exists\alpha)$ (α несчетно $\wedge\, T(\alpha)$) доказуемо в S^{***}, в силу теоремы 3 в S^{***} можно доказать существование натуральной модели для S^* и S^{**}. Заметим, что существование натуральных моделей S^{***} может быть доказано в ZF [3], но мощность наименьшего β, для которого $R(\beta)$ — натуральная модель S^{***}, очень велика (как может быть легко доказано с помощью [3, § 2]).

Пусть $\mathrm{In}(\alpha)$ — формула, утверждающая, что α сильно недостижимо, где понятие сильной недостижимости то же, что и в [1]. Здесь будет использовано только следующее свойство этого понятия: $\mathrm{ZF}\vdash \mathrm{In}(\alpha)\to R(\alpha)$ есть натуральная модель, $\mathrm{ZF}\wedge\alpha$ — регулярно. Рассмотрим следующие схемы:

$$\mathrm{R}_1^{\mathrm{ZF}}\varphi\to(\exists\alpha)(\mathrm{In}(\alpha)\wedge\mathrm{Rel}(R(\alpha),\varphi)),$$

где φ — любое предложение;

$$\mathsf{R}_2^{\mathsf{ZF}}\varphi \to (\forall\beta)(\exists\alpha)(\alpha > \beta \wedge \mathrm{In}(\alpha) \wedge \mathrm{Rel}(R(\alpha),\ \varphi)),$$

где φ — любое предложение;

$$\mathsf{R}_3^{\mathsf{ZF}}\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_n) \to (\exists\alpha)(\mathrm{In}(\alpha) \wedge x_1,\ \ldots,\ x_n \in R(\alpha) \wedge \mathrm{Rel}(R(\alpha),\ \varphi)),$$

где φ — любая формула, не имеющая свободных переменных, кроме $x_1 \ldots x_n$.

Пусть

$$\mathsf{ZF}^* = \mathsf{ZF} + \mathsf{R}_1^{\mathsf{ZF}};\quad \mathsf{ZF}^{**} = \mathsf{ZF} + \mathsf{R}_2^{\mathsf{ZF}},\quad \mathsf{ZF}^{***} = \mathsf{ZF} + \mathsf{R}_3^{\mathsf{ZF}}.$$

Будем называть натуральную модель $R(\lambda)$ *сильно* натуральной моделью, если λ недостижимо. По теореме 5.3 Монтэгю и Воота [4], можно доказать в ZF, что для каждой натуральной модели $R(\lambda)$ теории $\mathbf{Q}$, которая включает ZF, найдется натуральная модель $R(\sigma)$ для $\mathbf{Q}$, такая что $\sigma \leqslant \lambda$ и σ конфинально ω. Таким образом, для каждой сильно натуральной модели для ZF^* и ZF^{**} найдется меньшая натуральная модель для ZF^* и ZF^{**} соответственно, и наименьшие натуральные модели для ZF^* и ZF^{**} *имеют вид* $R(\tau)$, где τ конфинально ω.

Пусть $(\mu\alpha)\chi(\alpha)$ означает наименьшее α, такое, что $\chi(\alpha)$, если такое α существует, и 0 в противном случае. Пусть $P_\eta(\alpha)$ — функции, определенные следующим образом:

$$P_\eta(0) = (\mu\gamma)(\mathrm{In}(\gamma) \wedge (\forall\eta')(\eta' < \eta \to (\exists\lambda)(L(\lambda) \wedge \gamma = P_{\eta'}(\lambda)))),$$
$$P_\eta(\alpha+1) = (\mu\gamma)(\gamma > P_\eta(\alpha) > 0 \wedge \mathrm{In}(\gamma) \wedge (\forall\eta')(\eta' < \eta \to \to (\exists\lambda)(L(\lambda) \wedge \gamma = P_{\eta'}(\lambda)))),$$

и $P_\eta(\alpha) = \lim\limits_{\beta<\alpha} P_\eta(\beta)$ для предельного числа α. Будем говорить, что $P_\eta(\alpha)$ существует тогда и только тогда, когда $P_\eta(\alpha) \neq 0$.

Как показано в [2], можно доказать в ZF^* существование $P_0(n)$ для каждого конечного числа n, но нельзя доказать в ZF^* существование $P_0(\omega)$ (если теория ZF^* непротиворечива). Теория ZF^* непротиворечива тогда и только тогда, когда $\mathsf{ZF} + \{P_0(n)$ существует $\mid n$ — конечное число$\}$ непротиворечива. Однако можно показать, используя лемму 1 и следствие 2, что наименьшее β, такое, что $R(\beta)$—натуральная модель ZF^* (если такое β существует) больше, чем $P(\beta_0)$ (или даже $P(\beta')$, где β' — то же, что в доказательстве теоремы 4). Сильно натуральная модель для ZF^* имеет вид $R(P_0(\lambda))$ для некоторого λ, такого, что $P_0(\lambda)$ недостижимо. По аналогии с теоремой 3 можно легко доказать, что наименьшее такое λ счетно.

Как показано в [2], можно доказать в ZF^{**}, что $(\forall\alpha)(P_n(\alpha) \neq 0)$ для каждого конечного числа n (но нельзя доказать в ZF^{**} существование $P_\omega(0)$, если теория ZF^{**} непротиворечива). Так как функция $P_\alpha(\beta)$ является абсолютной по отношению к натуральным моделям, то ни для какого $\lambda < P_n(0)$, где n — конечное число, $R(\lambda)$ не является натуральной моделью ZF^{**}. Для каждого счетного τ справедливо соотношение $P_0(\tau) < P_1(0)$ и, следовательно, наименьшая натуральная модель, и наименьшая сильно натуральная модель для ZF^* не является натуральной моделью для ZF^{**}. Далее можно доказать в ZF^{**} существование сильно натуральной модели для ZF^*. Рассматривая теперь натуральную модель $R(\gamma)$ для ZF^{**}, можно доказать по аналогии с теоремой 3 и следствием 5 в [2] и теоремой 1 и следствием 2 в этой статье, что если $R(\gamma)$ — натуральная модель ZF^{**}, то $\gamma > P_\lambda(0)$, где λ — любое конструктивное по Чёрчу — Клини ординальное число или даже наименьшее ординальное β, такое, что $R(P_0(\beta))$ — сильно натуральная модель ZF^*. Кажется естественным предположить, по аналогии с тем, что имелось раньше, что существует ординальное число $\gamma < P_{\omega_1}(0)$, такое, что $R(\gamma)$ — сильно натуральная модель ZF^{**}. Это действительно может быть доказано, если доказать следующее утверждение. Множество всех недостижимых чисел, меньших, чем $P_{\omega_1}(0)$, не представляет собой объединения счетного множества дискретных множеств (в топологии порядка ординальных чисел). Автору неизвестно, верно ли это утверждение [1]). Однако, по теореме 6, наименьшая сильно натуральная модель для ZF^{**} меньше, чем $R(\nu)$, где ν — первое гипернедостижимое число типа 1 [1], так как $R(\nu)$ — натуральная модель теории ZM, которая включает ZF^{***}. Применяя здесь теорему 6, мы используем абсолютность понятия сильно натуральной модели для ZF^{**} относительно натуральных моделей, что легко устанавливается.

Лемма 5 (*в* ZF^{***}) [2]).

$$(\forall y)(\exists\alpha)(\mathrm{In}(\alpha) \wedge y \in R(\alpha) \wedge (\forall x_1,\ \ldots,\ x_n)(x_1,\ \ldots,\ x_n \in y \to \to (\varphi \leftrightarrow \mathrm{Rel}(R(\alpha),\ \varphi)))),$$

где φ — *любая формула, не содержащая свободных переменных, кроме* $x_1,\ \ldots,\ x_n$.

Доказательство. Пусть $z = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid x_1, \ldots, x_n \in y \wedge \varphi\}$. Пусть ψ — формула $(\forall x_1, \ldots, x_n)(x_1, \ldots, x_n \in y \to (\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in z \leftrightarrow \varphi))$. В силу $\mathsf{R}_3^{\mathsf{ZF}}$ имеем

$$\psi \to (\exists\alpha)(\mathrm{In}(\alpha) \wedge y,\ z \in R(\alpha) \wedge \mathrm{Rel}(R(\alpha),\ \psi));$$

---

1) Наименьшее ординальное γ, для которого автору известно, что множество всех недостижимых чисел $< \gamma$ не является объединением счетного множества дискретных множеств, — это наименьшее гипернедостижимое число типа $1\,\nu$ [1]. Легко видеть, что множество всех недостижимых чисел $< \nu$ не является объединением менее чем ν дискретных множеств.

2) Теорема, соответствующая лемме 5, в случае S^{***} первоначально сформулирована без доказательства в [3].

ψ имеет место по определению z. Так как y, $z \in R(\alpha)$ и терм $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ абсолютен, то $\mathrm{Rel}(R(\alpha), \psi)$ эквивалентно

$$(\forall x_1, \ldots, x_n)(x_1, \ldots, x_n \in y \to (\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in z \leftrightarrow \mathrm{Rel}(R(\alpha), \varphi))).$$

Таким образом, имеем

$$(\exists\alpha)(\mathrm{In}(\alpha) \wedge y \in R(\alpha) \wedge (\forall x_1, \ldots, x_n)$$
$$(x_1, \ldots, x_n \in y \to (\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in z \leftrightarrow \mathrm{Rel}(R(\alpha), \varphi)))).$$

Но так как $x_1, \ldots, x_n \in y, \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in z$ можно заменить на φ и тем самым доказать лемму.

Теорема 6 (в ZF***). *Существует ординальное число α, такое, что $R(\alpha)$ — сильно натуральная модель* ZF**.

Доказательство. Для каждого предложения x пусть λ_x — наименьшее ординальное число λ, такое, что для каждого недостижимого $\gamma > \lambda$ предложение x ложно в $R(\gamma)$, если существует такое λ, и $\lambda_x = 0$ в противном случае. Пусть u — множество всех предложений, $\sigma = \sup_{x \in U} \lambda_x$, $y = U \cup \{\sigma\}$ и φ — формула $(\forall\beta)(\exists\gamma)(\gamma > \beta \wedge \mathrm{In}(\gamma) \wedge x$ истинно в $R(\gamma))$. По лемме 5 найдется недостижимое ординальное число α, такое, что для каждого предложения x $(\forall\beta)(\exists\gamma)(\gamma > \beta \wedge \wedge \mathrm{In}(\gamma) \wedge x$ истинно в $R(\gamma)) \leftrightarrow (\forall\beta)(\beta < \alpha \to (\exists\gamma)(\beta < \gamma < \alpha \wedge \mathrm{In}(\gamma) \wedge \wedge x$ истинно в $R(\gamma)))$ (здесь мы используем леммы о релятивизации по отношению к $R(\alpha)$). Так как $\sigma \in y \in R(\alpha)$, мы видим, что для каждого предложения x имеет место соотношение $\lambda_x < \alpha$; далее из „x истинно в $R(\alpha)$“ следует, что $(\forall\beta)(\exists\gamma)(\gamma > \beta \wedge \mathrm{In}(\gamma) \wedge x$ истинно в $R(\gamma))$; из этого вытекает, что $(\forall\beta)(\beta < \alpha \to (\exists\gamma)(\beta < \gamma < \alpha \wedge \mathrm{In}(\gamma) \wedge \wedge x$ истинно в $R(\gamma)))$. Таким образом, $R(\alpha)$ — сильно натуральная модель ZF**.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lévy A., Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory, *Pacific Journal of Mathematics*, **10** (1960), 223—238.
2. Lévy A., Principles of reflection in axiomatic set theory, *Fundamenta Mathematicae*, **49** (1960), 1—10.
3. Lévy A., Vaught R. L., Principles of partial reflection in the set theories of Zermelo and Ackermann, *Pacific Journal of Mathematics*.
4. Montague R., Vaught R. L., Nature models of set theories, *Fundamenta Mathematicae*, **47** (1959), 219—242.
5. Shepherdson J. C., Inner models for set theory, Part I, *Journal of Symbolic Logic*, **16** (1951), 161—190.
6. Tarski A., Notions of proper models for set theories (abstract), *Bulletin of the American Mathematical Society*, **62** (1956), 601.

Две теоремы, относящиеся к основаниям теории множеств[1])

Р. МОНТЭГЮ

Калифорнийский университет, Лос-Анжелос, Калифорния, США

Дана простая формулировка аксиомы, недавно предложенной Леви в качестве дополнения к аксиомам теории множеств Цермело — Френкеля[2]), и доказана следующая теорема, которая усиливает результаты [4]. Если T — теория, полученная из теории множеств Цермело добавлением всех представителей схемы, имеющей место в теории множеств Цермело — Френкеля, имеющих не более, чем данное число, перемен кванторов, то непротиворечивость T доказуема в теории множеств Цермело—Френкеля (в действительности получен результат несколько более сильный). Эти результаты получены с помощью простой леммы.

1. Предварительные определения

Выражения отождествляются с натуральными числами. Более точно, мы различаем бесконечное множество натуральных чисел, которые рассматриваем как *переменные*, и для каждого целого положительного различаем бесконечное множество натуральных чисел, которые рассматриваем как *n-местные предикаты*. Мы рассматриваем также некоторые операции на натуральных числах: *применение* предиката к конечной последовательности чисел (обозначаемой посредством их сочленения[3])) и операции $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\urcorner$, являющиеся соответственно отрицанием, конъюкцией, квантором существования и определенным описанием. Наложены также обычные ограничения рекурсивности и различимости значений.

Квазитерм — это переменная или число вида $\urcorner kn$, где k и n — натуральные числа. Множество *осмысленных выражений* — это минимальное множество K, такое, что 1) все переменные принадлежат K; 2) для любых натуральных чисел π, n, $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$, если π представляет собой $(n+1)$-местный предикат и $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$ — квазитермы из K, то $\pi\zeta_0 \ldots \zeta_n$ принадлежит K; 3) для любой перемен-

[1]) Montague R., Two contributions to the foundations of set theory, стр. 94—110.

[2]) Проблема нахождения простой формулировки рассматриваемого в разд. 2 вида была устно предложена Тарским.

[3]) Сочленением (juxtaposition) выражений здесь называется их последовательное выписывание. — *Прим. ред.*

ной α и любых элементов φ, ψ из K, которые не являются квазитермами, числа $\sim\varphi$, $\varphi\wedge\psi$, $\bigvee\alpha\varphi$, $\urcorner\alpha\varphi$ принадлежат K. *Терм* — осмысленное выражение, являющееся квазитермом, а формула — осмысленное выражение, не являющееся квазитермом.

Мы различаем следующие предикаты: N — одноместный предикат; $=$, $\in$, Sc — различные двуместные предикаты; $+$ и $\cdot$ — различные трехместные предикаты. Будем рассматривать $\zeta=\eta$ и $\zeta\in\eta$ или $(=\zeta\eta,\ \in\zeta\eta)$ как результат применения $=$ и $\in$ соответственно к термам ζ и η. Переменные полностью перенумерованы в последовательность $\langle v_0, \ldots, v_n, \ldots\rangle$ без повторений.

Моделью назовем упорядоченную тройку $\langle A, R, z\rangle$, где A — множество, содержащее z в качестве элемента, R — функция, область определения которой есть множество предикатов, такая, что для всех π и n, если π является n-местным предикатом, то $R(\pi)$ есть множество упорядоченных наборов по n элементов из A и, кроме того, $R(=)$ — тождественное отношение на A. Пусть $M=\langle A, R, z\rangle$, M — модель, и пусть x принадлежит A^{ω} (т. е. множеству функций, отображающих множество натуральных чисел в A). Тогда понятия *выполнения* и *значения* определяются следующей одновременной рекурсией: 1) Значение переменной v_i в M относительно x есть $x(i)$. 2) Пусть φ — формула. Если найдется единственный объект a в A, такой, что для некоторого y из A^{ω} $y(i)=a$, $y(j)=x(j)$ для всех $j\neq i$ и y удовлетворяет φ в M, то значение $\urcorner v_i\varphi$ (в M относительно x) есть a; в противном случае значением $\urcorner v_i\varphi$ является z. 3) Если π представляет собой $(n+1)$-местный предикат и $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$ — термы, то x удовлетворяет $\pi\zeta_0\ldots\zeta_n$ в M тогда и только тогда, когда $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ принадлежит $R(\pi)$, где $a_0, \ldots, a_n$ — соответствующие значения $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$ в M относительно x. 4) Если φ — формула, то x удовлетворяет $\sim\varphi$ в M тогда и только тогда, когда x не удовлетворяет φ в M. Аналогичные определения принимаются для конъюнкции и квантора существования. Формула φ называется истинной в M, если она выполняется в M каждым x из A^{ω}.

Хорошо известные синтаксические понятия (например, „встречается в“, „есть свободная переменная“) будут пониматься в обычном смысле. Если φ — осмысленное выражение и $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ — термы, то $\varphi[\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}]$ есть результат *одновременной подстановки* в φ термов $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ вместо (свободных вхождений) переменных $v_0, \ldots, v_{n-1}$ соответственно (эта конструкция может содержать переименования связанных переменных φ, если любая из них свободна в любом из $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$).

Стандартная формула — это формула, в которой не встречается никаких термов, кроме переменных. *Теоретико-множественная формула* — это формула, в которой нет других предикатов, кроме $=$ и $\in$.

Глубиной стандартной теоретико-множественной формулы назовем, грубо говоря, число, на единицу превышающее число перемен кванторов в формуле. Точное рекурсивное определение имеет следующий вид.

1) Если i, j — натуральные числа, то глубина $v_i=v_j$, а также глубина $v_i\in v_j$ равны нулю.

2) Если φ и ψ — стандартные теоретико-множественные формулы, то глубина $\sim\varphi$ равна глубине φ, а глубина $\varphi\wedge\psi$ равна максимальной из глубин φ и ψ.

3) Если φ — стандартная теоретико-множественная формула с глубиной n и i — натуральное число, то глубина $\bigvee v_i\varphi$ есть n или $n+1$ в соответствии с тем, имеет ли φ вид $\bigvee v_j\psi$ или не имеет.

Пусть A — множество формул. Терм, формула или осмысленное выражение из A есть соответственно терм, формула или осмысленное выражение, не содержащие предикатов помимо тех, которые встречаются в членах A. Формулу φ называют выводимой из A, если φ истинна в каждой модели, в которой истинны все члены A. Формула φ *справедлива* в A (символически $\vdash_A\varphi$), если φ выводима из A и является формулой из A.

Пусть A и B — множества формул. Говорят, что A представляет собой *расширение* B, если каждая формула, справедливая в B, справедлива также и в A.

Множества A и B называются *эквивалентными*, если A — расширение B, а B — расширение A; A и B называют *эквивалентными в множестве* C формул, если $C\cup A$ эквивалентно $C\cup B$.

Если φ, ψ, α — числа, то через $\varphi\vee\psi$, $\varphi\to\psi$, $\bigwedge\alpha\varphi$ обозначаются соответственно числа $\sim((\sim\varphi)\wedge(\sim\psi))$, $\sim(\varphi\wedge\sim\psi)$ и $\sim\bigvee\alpha\sim\varphi$. Если φ — стандартная теоретико-множественная формула и ζ — терм, не содержащий переменных, общих с φ, то $\varphi^{(\zeta)}$, или *релятивизация* φ относительно ζ, определяется рекурсивно следующим образом: $(v_i=v_j)^{\zeta}$ есть $v_i=v_j$, $(v_i\in v_j)^{(\zeta)}$ есть $v_i\in v_j$, $(\sim\varphi)^{(\zeta)}$ есть $\sim\varphi^{(\zeta)}$, $(\varphi\wedge\psi)^{(\zeta)}$ есть $\varphi^{(\zeta)}\wedge\psi^{(\zeta)}$ и $(\bigvee v_i)\varphi^{(\zeta)}$ есть $\bigvee v_i(v_i\in\zeta\wedge\varphi^{(\zeta)})$.

Мы должны распространить на теории, включающие термы вида $\urcorner v_i\varphi$, понятие *относительной интерпретации* [8]. Соответственно пусть A, B — множества формул. Если 1) g — функция, отображающая предикаты, встречающиеся в членах A, в формулы B таким образом, что формула, соответствующая n-местному предикату, никогда не содержит свободных переменных помимо $v_0, \ldots, v_{n-1}$ и (если $=$ встречается в некоторых членах A) $g(=)$ есть $v_0=v_1$; (2) χ — формула из B, имеющая в качестве свободных переменных только v_0 и такая, что $\vdash_B\bigvee v_1\bigwedge v_0\ (\chi\leftrightarrow v_0=v_1)$; (3) ψ — формула из B, имеющая в качестве свободных переменных только v_0, такая, что $\vdash_B\chi\to\psi$, то *относительная интерпретация индуцированная* g, χ, ψ, есть единственная функция I, имеющая областью определения множество осмысленных выражений из A, которая удовлетворяет следующим условиям:

(I) если α — переменная, то $I(\alpha)$ есть α;

(II) если π представляет собой $(n+1)$-местный предикат из области g и $\zeta_0 \ldots \zeta_n$ — термы из A, то $I(\pi\zeta_0 \ldots \zeta_n)$ есть $g(\pi)[\zeta_n \ldots \zeta_0]$;

(III) если φ_1, φ_2 — формулы из A, то $I(\sim\varphi_1)$ есть $\sim I(\varphi_1)$ и $I(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ есть $I(\varphi_1) \wedge I(\varphi_2)$;

(IV) если φ — формула из A и α — переменная, то $I(\bigvee\alpha\varphi)$ есть $\bigvee\alpha(\psi[\alpha] \wedge I(\varphi))$ и $I(\urcorner\alpha\varphi)$ есть

$$\urcorner\beta[\bigwedge\alpha((\psi[\alpha] \wedge I(\varphi)) \leftrightarrow \alpha=\beta) \wedge \\ \wedge \{\sim \bigvee\beta\bigwedge\alpha((\psi[\alpha] \wedge I(\varphi)) \leftrightarrow \alpha=\beta) \wedge \chi[\beta]\}],$$

где β — первая переменная, отличная от α и не встречающаяся в φ. Говорят, что множество A *относительно интерпретируемо* в множестве B, если существуют g, χ, ψ, I, такие, что g, χ, ψ удовлетворяют вышеприведенным условиям 1—3, I — относительная интерпретируемость, индуцированная g, χ, ψ и для всех $\varphi, \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$, если $\varphi \in A$ и $\alpha_0 \ldots \alpha_{n-1}$ — свободные переменные φ, то $\vdash_B I(\bigwedge\alpha_0 \ldots \bigwedge\alpha_{n-1}\varphi)$. Через SF (принцип *образования множеств*) обозначим множество формул $\bigvee\beta\bigwedge\gamma[\gamma\in\beta \leftrightarrow \varphi \wedge \gamma\in\alpha]$, где α, β, γ — различные переменные, φ — стандартная теоретико-множественная формула, в которой β не встречается. (В формулах здесь и дальше будем использовать соглашение Гильберта — Аккермана о скобках при объединении логических операций.) Z (или *теория множеств Цермело*) есть объединение SF и множества, состоящего из формул

$$\bigwedge x(x\in A \leftrightarrow x\in B) \to A=B,$$

$$\bigvee A\bigwedge z(z\in A \leftrightarrow z=x \vee z=y),$$

$$\bigvee B\bigwedge x(x\in B \leftrightarrow \bigvee y[x\in y \wedge y\in A]),$$

$$\bigvee B\bigwedge x(x\in B \leftrightarrow \bigvee y[y\in x \to y\in A]),$$

$$\bigvee x(x\in A) \to \bigvee x(x\in A \wedge \sim\bigwedge y[y\in x \wedge y\in A]),$$

$$\bigvee A\bigvee x[x\in A \wedge \sim \bigvee yy\in x] \wedge \bigwedge x[x\in A \to \bigvee y(y\in A \wedge \\ \wedge \bigwedge z[z\in y \leftrightarrow z\in x \vee z=x])],$$

где A, B, x, y, z — подходящие переменные. (Мы будем часто обозначать переменные прописными и строчными латинскими буквами, пользуясь при этом естественными допущениями, чтобы избежать путаницы в обозначениях.) ZF (или *теория множеств Цермело — Френкеля*) есть объединение Z и множества формул

$$\bigwedge\alpha\bigwedge\beta(\bigwedge\gamma)(\varphi[\alpha,\beta] \wedge \varphi[\alpha,\gamma] \to \beta=\gamma) \to \\ \to \bigvee\gamma\bigwedge\beta[\beta\in\gamma \leftrightarrow \bigvee\alpha(\alpha\in\delta \wedge \varphi[\alpha,\beta])],$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — различные переменные и φ — стандартная теоретико-множественная формула, в которой α, β, γ не встречаются.

Необходимо рассмотреть некоторые специфичные для ZF термы и формулы. Например, 0 обозначает терм $\urcorner v_0 \sim \bigvee v_1 v_1 \in v_0$, и если ζ, η — любые термы ZF, $\zeta \cup \eta$ обозначает терм $\urcorner\alpha(\bigwedge\beta)(\beta\in\alpha \leftrightarrow \beta\in\zeta \vee \vee \beta\in\eta)$, а $\zeta\subseteq\eta$ — формулу $(\bigwedge\alpha)(\alpha\in\zeta \to \alpha\in\eta)$, где α, β — первые две переменные, не встречающиеся ни в ζ, ни в η. В следующей таблице выражения, стоящие в левом столбце, нужно понимать как обозначения термов или формул ZF, выражающих операцию или отношение, указанные справа. (Здесь ζ, η и т. д. могут быть любыми термами из ZF, α — любая переменная.)

$\{\zeta\}$	единичное множество из ζ,
$U[\zeta]$	объединение семейства ζ,
$P[\zeta]$	степень множества (множество всех подмножеств) ζ,
$\zeta(\eta)$	значение функции ζ для аргумента η,
$\mathcal{D}\zeta$	область (множество значений) функции ζ,
ζ^η	множество функций с областью определения η и областью, включенной в ζ,
$\zeta\begin{pmatrix}\eta_0 \ldots \eta_k \\ \theta_0 \ldots \theta_k\end{pmatrix}$	функция ζ', которая совпадает с функцией ζ для всех аргументов, исключая, возможно, $\eta_0, \ldots, \eta_k$, для которых значения ζ' соответственно равны $\theta_0, \ldots, \theta_k$,
$\zeta \approx \eta$	множество ζ, кардинально эквивалентное множеству η,
$\mathrm{Ord}[\zeta]$	ζ — ординальное число (построенное так, что ординальное число отождествляется с множеством меньших ординальных чисел),
$\mathrm{Lim}[\zeta]$	ζ — (не нулевое) предельное ординальное число,
ω	наименьшее предельное ординальное число,
$\zeta+1$	ординальное число, непосредственно следующее за ординальным числом ζ,
$\underset{\alpha}{\mathrm{Min}}\ \varphi$	наименьшее ординальное число α, удовлетворяющее условию φ,
$\rho[\zeta]$	ранг множества ζ (определяется рекурсивно как наименьшее ординальное число, большее, чем ранги всех элементов ζ),
$R[\zeta]$	семейство всех множеств рангов, меньших, чем ординальное число ζ.

Каждое выражение в левом столбце следующей таблицы есть сокращенное обозначение терма или формулы, стоящих в правом столбце:

$\zeta \leqslant \eta$	$\bigvee A(\zeta \approx A \wedge A \subseteq \eta)$,
$\zeta \lessdot \eta$	$\zeta \leqslant \eta \wedge \sim \eta \leqslant \zeta$,
$\zeta \overset{*}{\leqslant} \eta$	$\zeta = 0 \vee \bigvee f(f \in \zeta^{\eta} \wedge \mathcal{C} f = \zeta)$,
$\zeta \overset{*}{\lessdot} \eta$	$\zeta \overset{*}{\leqslant} \eta \wedge \sim \eta \overset{*}{\leqslant} \zeta$,
$\bigcup\limits_{\alpha_0, \ldots, \alpha_k} \{\zeta \mid \varphi\}$	$\urcorner A \bigwedge x(x \in A \leftrightarrow \bigvee \alpha_0 \ldots \bigvee \alpha_k [\varphi \wedge x \in \zeta])$,
$R_\alpha \varphi$	$\urcorner A \bigwedge x(x \in A \leftrightarrow \bigvee \alpha [\rho(\alpha) = \rho(x) \wedge \varphi] \wedge \wedge \bigwedge (\alpha)[\rho[\alpha] \in \rho[x] \rightarrow \sim \varphi])$,
Norm_ζ	$\bigwedge x(\mathrm{Ord}[x] \rightarrow \mathrm{Ord}[\zeta[x]]) \wedge \bigwedge x \bigwedge y(\mathrm{Ord}[x] \wedge \wedge \mathrm{Ord}[y] \wedge x \in y \rightarrow \zeta[x] \in \zeta[y]) \wedge \wedge \bigwedge x\left(\mathrm{Lim}[x] \rightarrow \zeta[x] = \bigcup\limits_{y} \{\zeta[y] \mid y \in x\}\right)$,
$\mathrm{In}[\zeta]$	$\mathrm{Ord}[\zeta] \wedge \omega \in \zeta \wedge \bigwedge X(X \subseteq R[\zeta] \wedge X \overset{*}{\lessdot} \overset{*}{\lessdot} R[\zeta] \rightarrow X \in R[\zeta])$.

Мы рассматриваем $R_\alpha \varphi$ как обозначение множества всех вещей наименьшего ранга, удовлетворяющих φ, Norm_ζ как утверждение о том, что ζ — нормальный терм, и $\mathrm{In}[\zeta]$ как утверждение о том, что ζ — сильно недостижимое ординальное число.

Через P (*арифметика Пеано*) обозначим следующее множество формул:

$$\bigvee y \bigwedge x(Nx \leftrightarrow x = y),$$
$$\bigvee y \bigwedge x(Sc[x, a] \leftrightarrow x = y),$$
$$\bigvee y \bigwedge x(+[x, a, b] \leftrightarrow x = y),$$
$$\bigvee y \bigwedge x(\cdot[x, a, b] \leftrightarrow x = y),$$
$$Sc[x, y] \wedge Sc[x, z] \rightarrow y = z,$$
$$Nx \rightarrow \sim Sc[x, y],$$
$$Ny \rightarrow +[x, x, y],$$
$$Sc[z, y] \wedge +[u, x, y] \wedge +[v, x, z] \rightarrow Sc[v, u],$$
$$Ny \rightarrow \cdot[y, x, y],$$
$$Sc[z, y] \wedge \cdot[u, x, y] \wedge \cdot[v, x, z] \rightarrow +[v, u, x],$$
$$\bigwedge x(Nx \rightarrow \varphi[x]) \wedge \bigwedge x \bigwedge y(\varphi[x] \wedge Sc[y, x] \rightarrow \rightarrow \varphi[y]) \rightarrow \bigwedge x \varphi[x],$$

где φ — любая стандартная формула, не содержащая переменных x и y и не имеющая предикатов помимо $=$, N, Sc, $+$, $\cdot$.

Следует пояснить некоторые специфические термы и формулы P; n-я цифра или $\overset{\circ}{\Delta}_n$ характеризуется рекурсивно следующим образом: $\overset{\circ}{\Delta}_0$ есть $\urcorner xNx$; $\overset{\circ}{\Delta}_{n+1}$ есть $\urcorner xSc[x, \overset{\circ}{\Delta}_n]$. Если ζ — терм P, то $\overset{\circ}{\sim}\zeta$ — также терм P, который естественным образом означает отрицание числа, обозначенного через ζ. Другие термы и формулы P, имеющие в основном синтаксическое значение, даются следующей неформальной таблицей:

$\zeta \overset{\circ}{\wedge} \eta$	конъюнкция ζ и η,
$(\overset{\circ}{\bigvee}_\zeta, \eta)$	квантор существования формулы η относительно ζ-й переменной,
$\overset{\circ}{=}\zeta, \eta$	применение $=$ к ζ-й и η-й переменным,
$\overset{\circ}{\in}_{\zeta, \eta}$	применение $\in$ к ζ-й и η-й переменным,
$\overset{\circ}{Tm}[\zeta, \eta]$	ζ — терм для конечной последовательности натуральных чисел, представленной натуральным числом η,
$\overset{\circ}{SSFm}[\zeta]$	ζ — стандартная теоретико-множественная формула,
$\overset{\circ}{Dp}_n[\zeta]$	ζ — стандартная теоретико-множественная формула глубины самое большее n,
$\overset{\circ}{Gen}[\zeta, \eta]$	ζ — обобщение η (т. е. результат применения квантора общности 0 или более раз к η),
$\overset{\circ}{Conj}[\eta]$	(итерированная) конъюнкция всех членов конечной последовательности, представленной числом η,
$\overset{\circ}{Pr}[\zeta]$	ζ — логически доказуемая стандартная формула.

Наконец, если α — формула P, имеющая в качестве свободной переменной только v_0, то $\overset{\circ}{Con}_\alpha$ есть формула

$$\sim \bigvee f \bigvee b(\bigwedge v_0[\overset{\circ}{Tm}[v_0, f] \rightarrow \alpha] \wedge \overset{\circ}{Gen}[b, \overset{\circ}{Conj}[f]] \wedge \overset{\circ}{Pr}[\overset{\circ}{\sim} b]),$$

которая при условии, что α характеризует множество A стандартных формул, выражает утверждение, что A непротиворечиво.

Множество *примитивно-рекурсивных термов* из P есть минимальное множество K, такое, что 1) все переменные принадлежат K; 2) $\overset{\circ}{\Delta}_0$ принадлежит K; 3) терм $\urcorner\beta Sc[\beta, \alpha]$ для любых различных переменных α и β принадлежит K; 4) для всех ζ, $\eta_0, \ldots, \eta_n$ из K терм $\zeta[\eta_0, \ldots, \eta_n]$ принадлежит K; 5) если η, θ — любые элементы K, имеющие свободные переменные только среди $v_0, \ldots, v_{n-1}$ и $v_0, \ldots, v_{n+1}$ соответственно и ζ — любой терм из P, имеющий свободные переменные только среди $v_0, \ldots, v_n$, такой, что формулы

$$\zeta[v_0, \ldots, v_{n-1}, \mathring{\Delta}_0] = \eta[v_0, \ldots, v_{n-1}],$$

$$\zeta[v_0, \ldots, v_{n-1}, \urcorner v_{n+1} Sc[v_{n+1}, v_n]] =$$
$$= \theta[v_0, \ldots, v_n, \zeta[v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n]]$$

справедливы в P, то ζ принадлежит K. *Примитивно-рекурсивная формула* из P — это формула вида $\zeta = \mathring{\Delta}_0$, где ζ — примитивно-рекурсивный терм из P.

Через I_0 будем обозначать относительную интерпретацию, индуцированную g, χ, ψ, где 1) g есть функция, область определения которой состоит из предикатов $=$, N, Sc, $+$, $\cdot$, такая, что $g(=)$ есть $v_0 = v_1$, $g(N)$ есть $v_0 = 0$, $g(Sc)$ есть $v_0 = v_1 + 1$, $g(+)$ — теоретико-множественная формула со свободными переменными v_0, v_1, v_2, выражающая естественным образом, что v_0 — сумма конечных ординальных чисел v_1 и v_2; $g(\cdot)$ — подобная формула, выражающая утверждение, что v_0 — произведение v_1 и v_2; 2) χ — формула $v_0 = 0$; 3) ψ — формула $v_0 \in \omega$.

Обозначим через $\mathring{\Delta}_n$ терм $I_0(\mathring{\Delta}_n)$ в ZF. Аналогично для каждого из осмысленных выражений $\zeta \mathring{\wedge} \eta, \ldots, \mathring{Pr}[\zeta]$ (т. е. осмысленных выражений из P, которые встречались в последней таблице) мы получим осмысленное выражение $\zeta \dot{\wedge} \eta, \ldots, \dot{Pr}[\zeta]$ из ZF, тождественное с $I_0(\zeta \mathring{\wedge} \eta), \ldots, I_0(\mathring{Pr}[\zeta])$ соответственно.

Сокращенной моделью M назовем упорядоченную пару $\langle A, S\rangle$, где A — непустое множество и S — множество упорядоченных пар элементов из S. Если φ — стандартная теоретико-множественная формула и x принадлежит A^ω, то говорят, что x *удовлетворяет* φ в M, если x удовлетворяет φ в некоторой модели $\langle A, R, z\rangle$, такой, что $R(\in) = S$.

Если ζ, η, θ — термы ZF, то $\mathrm{Sat}[\zeta, \eta, \theta]$ есть формула ZF, выражающая естественным образом, что ζ есть функция, областью определения которой является множество натуральных чисел, η — стандартная теоретико-множественная формула и ζ удовлетворяет η в сокращенной модели $\langle\theta, S\rangle$, где S — отношение принадлежности, ограниченное (множеством) θ.

2. Лемма

Грубо говоря, мы можем рассматривать *пару выполнения* как упорядоченную пару $\langle R, A\rangle$, где R — бинарное отношение (отношение выполнения) между последовательностями типа ω и некоторыми стандартными формулами, A — совокупность стандартных теоретико-множественных формул (тех формул, к которым отношение выполнения применяется должным образом). Мы требуем, чтобы любая подформула формулы из A принадлежала A и чтобы R для формул из A удовлетворяло обычным рекурсивным условиям выполнения (см. Тарский [7]).

Понятие пары выполнения само по себе не будет использоваться в исследовании. Нас будут интересовать теоретико-множественная формула, которая выражает утверждение, что пара есть пара выполнения; здесь отношение R и совокупность A заменяются формулами.

Определение 1. *Если φ — формула, имеющая в качестве свободных только переменные v_0 и v_1, а ψ — формула, имеющая своей свободной переменной только v_0, то $SP_{\varphi,\psi}$ есть формула*

$$\bigwedge a(\psi[a] \to SSF\dot{m}[a]) \wedge$$
$$\wedge \bigwedge a(SSF\dot{m}[a] \wedge \psi[\dot{\sim} a] \to \psi[a]) \wedge$$
$$\wedge \bigwedge a \bigwedge b(SSF\dot{m}[a] \wedge SSF\dot{m}[b] \wedge \psi[a \dot{\wedge} b] \to \psi[a] \wedge \psi[b]) \wedge$$
$$\wedge \bigwedge a \bigwedge i(SSF\dot{m}[a] \wedge i \in \omega \wedge \psi[\bigvee_i a] \to \psi[a]) \wedge$$
$$\wedge \bigwedge i \bigwedge j \bigwedge a \bigwedge b \bigwedge x\{i, j \in \omega \wedge SSF\dot{m}[a] \wedge SSF\dot{m}[b] \wedge x \in \mathcal{a}x^\omega \to$$
$$\to (\psi[\dot{=}_{i,j}] \to [\varphi[x, \dot{=}_{i,j}] \leftrightarrow x(i) = x(j)]) \wedge$$
$$\wedge (\psi[\dot{\in}_{i,j}] \to [\varphi[x, \dot{\in}_{ij}] \leftrightarrow x(i) \in x(j)]) \wedge$$
$$\wedge (\psi[\dot{\sim} a] \to [\varphi[x, \dot{\sim} a] \leftrightarrow \sim \varphi[x, a]]) \wedge$$
$$\wedge (\psi[a \dot{\wedge} b] \to [\varphi[x, a \dot{\wedge} b] \leftrightarrow \varphi[x, a] \wedge \varphi[x, b]) \wedge$$
$$\wedge \left(\psi[\dot{\bigvee}_i a] \to [\varphi[x, \dot{\bigvee}_i a] \leftrightarrow \bigvee u \varphi\left[x\binom{i}{u}, a\right]]\right)\Big\}.$$

Для любой пары выполнения можно найти операцию ζ, такую, что если B — любое замкнутое относительно ζ множество, то „абсолютное“ понятие выполнения, определяемое парой выполнения сводится к отношению выполнения в сокращенной модели, состоящей из множества B и отношения принадлежности, ограниченного этим множеством. Следующая лемма показывает, что это утверждение доказуемо в ZF.

Лемма 1. *Если φ и ψ таковы, как в условии определения 1, то найдется терм ζ, содержащий в качестве свободной переменной только v_0, такой, что*

$$\vdash_{ZF} SP_{\varphi,\psi} \wedge \bigwedge X(X \subseteq B \wedge X^* \prec \omega \to \zeta[X] \subseteq B)$$
$$\wedge x \in B^\omega \wedge \psi[a] \to (\varphi[x, a] \leftrightarrow \mathrm{Sat}[x, a, B]).$$

Доказательство. Пусть $\zeta[X]$ есть терм

$$\bigcup_{a,\, i,\, x}\left\{R_u\varphi\left[x\begin{pmatrix} i \\ u\end{pmatrix},\ a\right]\middle|\ \psi[a]\wedge i\in\omega\wedge x\in X^{\omega}\right\}.$$

Ясно, что существование объединения, обозначаемого $\zeta[X]$, доказуемо в ZF, так как $\vdash_{ZF}\psi[a]\to a\in\omega$. Пусть α — формула

$$SP_{\varphi,\,\psi}\wedge\bigwedge X\,(X\subseteq B\wedge X^{*}<\omega\to\zeta[X]\subseteq B),$$

и пусть $\beta[a]$ — формула

$$\psi[a]\to\bigwedge x\,[x\in B^{\omega}\to(\varphi[x,\ a]\leftrightarrow\mathrm{Sat}[x,\ a,\ B])].$$

В силу первой конъюнкции в $SP_{\varphi,\,\psi}$ для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\vdash_{ZF}\alpha\wedge SSF\dot{m}[a]\to\beta[a]. \qquad (1)$$

Благодаря рекурсивным условиям в формуле $SP_{\varphi,\,\psi}$, легко видеть, что

$$\vdash_{ZF}\alpha\wedge i,\,j\in\omega\to\beta[\dot{=}_{i,\,j}]\wedge\beta[\dot{\in}_{i,\,j}] \qquad (2)$$

и

$$\vdash_{ZF}\alpha\wedge\beta[a]\wedge\beta[b]\to\beta[\dot{\sim}a]\wedge\beta[a\,\dot{\wedge}\,b]. \qquad (3)$$

Теперь в ZF можно обосновать известный принцип индукции для стандартных теоретико-множественных формул; действительно, если χ — любая формула (удовлетворяющая известным ограничениям на переменные), то

$$\begin{gathered}\vdash_{ZF}\bigwedge i\bigwedge j\,(i,\,j\in\omega\to\chi[\dot{=}_{i,\,j}]\wedge\chi[\dot{\in}_{i,\,j}])\wedge\\ \wedge\bigwedge a\bigwedge b\,(\chi[a]\wedge\chi[b]\to\chi[\dot{\sim}a]\wedge\chi[a\,\dot{\wedge}\,b])\wedge\\ \wedge\bigwedge a\bigwedge i\,(\chi[a]\wedge i\in\omega\to\chi[\dot{\bigvee}_i a])\to\\ \to\bigwedge a\,(SSF\dot{m}[a]\to\chi[a]).\end{gathered} \qquad (4)$$

Используя (4) и условия составления $SP_{\varphi,\,\psi}$, можно показать, что

$$\begin{gathered}\vdash_{ZF}SP_{\varphi,\,\psi}\wedge SSF\dot{m}[a]\wedge\psi[a]\to\bigvee X\,[X\subseteq\omega\wedge X\overset{*}{\prec}\omega\wedge\\ \wedge(\bigwedge x\bigwedge y\,[x\in\mathfrak{a}x^{\omega}\wedge y\in\mathfrak{a}y^{\omega}\wedge\bigwedge j\,(j\in X\to x(j)=y(j))\to\\ \to(\varphi[x,\ a]\leftrightarrow\varphi[y,\ a])]),\end{gathered}$$

и, следовательно, что

$$\begin{gathered}\vdash_{ZF}\alpha\wedge\psi[a]\wedge i\in\omega\to\bigvee X\,(X\subseteq\omega\wedge X\overset{*}{\prec}\omega\wedge\bigwedge x\bigwedge y\,[x\in\mathfrak{a}x^{\omega}\wedge\\ \wedge y\in\mathfrak{a}y^{\omega}\wedge\bigwedge j\,(j\in X\to x(j)=y(j))\to\\ \to\bigwedge u\left(\varphi\left[x\begin{pmatrix} i \\ u\end{pmatrix},\ a\right]\leftrightarrow\varphi\left[y\begin{pmatrix} i \\ u\end{pmatrix},\ a\right]\right)\Big]\Big),\end{gathered}$$

и, далее, что

$$\begin{gathered}\vdash_{ZF}\alpha\wedge\psi[a]\wedge i\in\omega\wedge x\in\mathfrak{a}x^{\omega}\to\\ \to\bigvee y\,(y\in\mathfrak{a}y^{\omega}\wedge\mathfrak{a}y\subseteq\mathfrak{a}x\wedge\mathfrak{a}y\overset{*}{\prec}\omega\wedge\\ \wedge R_u\varphi\left[x\begin{pmatrix} i \\ u\end{pmatrix},\ a\right]=R_u\varphi\left[y\begin{pmatrix} i \\ u\end{pmatrix},\ a\right]\Big).\end{gathered} \qquad (5)$$

Теперь ясно, что

$$\vdash_{ZF}\bigvee u\varphi\left[x\begin{pmatrix} i \\ u\end{pmatrix},\ a\right]\to\bigvee u\left(\varphi\left[x\begin{pmatrix} i \\ u\end{pmatrix},\ a\right]\wedge u\in R_u\varphi\left[x\begin{pmatrix} i \\ u\end{pmatrix},\ a\right]\right).$$

Следовательно, в силу (5)

$$\begin{gathered}\vdash_{ZF}\alpha\wedge\psi[a]\wedge i\in\omega\wedge x\in B^{\omega}\wedge\bigvee u\varphi\left[x\begin{pmatrix} i \\ u\end{pmatrix},\ a\right]\to\\ \to\bigvee u\bigvee y\left(\varphi\left[x\begin{pmatrix} i \\ u\end{pmatrix},\ a\right]\wedge u\in R_u\varphi\left[y\begin{pmatrix} i \\ u\end{pmatrix},\ a\right]\wedge\right.\\ \wedge y\in\mathfrak{a}y^{\omega}\wedge\mathfrak{a}y\subseteq B\wedge\mathfrak{a}y\overset{*}{\prec}\omega).\end{gathered}$$

Поэтому

$$\begin{gathered}\vdash_{ZF}\alpha\wedge\psi[a]\wedge i\in\omega\wedge x\in B^{\omega}\wedge\bigvee u\varphi\left[x\begin{pmatrix} i \\ u\end{pmatrix},\ a\right]\to\\ \to\bigvee u\bigvee X\left(\varphi\left[x\begin{pmatrix} i \\ u\end{pmatrix},\ a\right]\wedge u\in\zeta[X]\wedge X\subseteq B\wedge X\overset{*}{\prec}\omega\right)\end{gathered}$$

и, следовательно,

$$\begin{gathered}\vdash_{ZF}\alpha\wedge\psi[a]\wedge i\in\omega\wedge x\in B^{\omega}\wedge\bigvee u\varphi\left[x\begin{pmatrix} i \\ u\end{pmatrix},\ a\right]\to\\ \to\bigvee u\left(u\in B\wedge\varphi\left[x\begin{pmatrix} i \\ u\end{pmatrix},\ a\right]\right).\end{gathered} \qquad (6)$$

Используя (6), легко видеть, что

$$\begin{gathered}\vdash_{ZF}\alpha\wedge\beta[a]\wedge i\in\omega\wedge\psi[\dot{\bigvee}_i a]\wedge x\in B^{\omega}\to\\ \to\left(\varphi[x,\ \dot{\bigvee}_i a]\leftrightarrow\bigvee u\varphi\left[x\begin{pmatrix} i \\ u\end{pmatrix},\ a\right]\right)\wedge\\ \wedge\left(\bigvee u\varphi\left[x\begin{pmatrix} i \\ u\end{pmatrix},\ a\right]\leftrightarrow\bigvee u\left[u\in B\wedge\varphi\left[x\begin{pmatrix} i \\ u\end{pmatrix},\ a\right]\right]\right)\wedge\\ \wedge\left(\bigvee u\left[u\in B\wedge\varphi\left[x\begin{pmatrix} i \\ u\end{pmatrix},\ a\right]\right]\leftrightarrow\bigvee u\left[u\in B\wedge\mathrm{Sat}\left[x\begin{pmatrix} i \\ u\end{pmatrix},\ a,\ B\right]\right]\right)\wedge\\ \wedge\left(\bigvee u\left[u\in B\wedge\mathrm{Sat}\left[x\begin{pmatrix} i \\ u\end{pmatrix},\ a,\ B\right]\right]\leftrightarrow\mathrm{Sat}[x,\ \dot{\bigvee}_i a,\ B]\right)\end{gathered}$$

и, следовательно, что

$$\vdash_{ZF}\alpha\wedge\beta[a]\wedge i\in\omega\to\beta[\dot{\bigvee}_i a]. \qquad (7)$$

Но из (2) и (3), а также (7), следует (1) с помощью еще одного применения принципа индукции (4), и доказательство леммы закончено.

Следствие. *Если* χ — *стандартная теоретико-множественная формула, а* $v_0, \ldots, v_{n-1}$ — *ее свободные переменные, то найдется терм* ζ, *имеющий в качестве свободной переменной только* v_0, *такой, что*

$$\vdash_{ZF} \bigwedge X (X \subseteq B \wedge C \overset{*}{\prec} \omega \rightarrow \zeta[X] \subseteq B) \wedge$$
$$\wedge\, v_0, \ldots, v_{n-1} \in B \rightarrow [\chi \leftrightarrow \chi^{(B)}].$$

Доказательство. Пусть $v_0, \ldots, v_k$ содержат все переменные, встречающиеся в χ (свободные или связанные), и пусть $\chi_0, \ldots, \chi_m$ — все подформулы χ (включая χ). Пусть ψ — формула

$$v_0 = \dot{\Delta}_{\chi_0} \vee \ldots \vee v_0 = \dot{\Delta}_{\chi_m},$$

и пусть φ — формула

$$(v_1 = \dot{\Delta}_{\chi_0} \wedge \chi_0 [v_0(\dot{\Delta}_0), \ldots, v_0(\dot{\Delta}_k)]) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee (v_1 = \dot{\Delta}_{\chi_m} \wedge \chi_m [v_0(\dot{\Delta}_0), \ldots, v_0(\dot{\Delta}_k)]).$$

Тогда $\vdash_{ZF} SP_{\varphi, \psi} \wedge \psi[\dot{\Delta}_\chi]$. По лемме 1 найдется терм η, имеющий в качестве свободных переменных только v_0, такой, что

$$\vdash_{ZF} \bigwedge X (X \subseteq B \wedge X \overset{*}{\prec} \omega \rightarrow \eta[X] \subseteq B) \wedge x \in B^\omega \rightarrow$$
$$\rightarrow (\varphi[x, \dot{\Delta}_\chi] \leftrightarrow \mathrm{Sat}[x, \dot{\Delta}_\chi, B]). \quad (8)$$

Пусть $\zeta[X]$ — терм

$$\eta[X] \cup \{0\}$$

и α — формула

$$\bigwedge X (X \subseteq B \wedge X \overset{*}{\prec} \omega \rightarrow \zeta[X] \subseteq B).$$

Ясно, что

$$\vdash_{ZF} \alpha \rightarrow B \neq 0, \quad (9)$$

и в силу (8)

$$\vdash_{ZF} \alpha \wedge x \in B^\omega \rightarrow (\chi[x(\dot{\Delta}_0), \ldots, x(\dot{\Delta}_{n-1})] \leftrightarrow \mathrm{Sat}[x, \dot{\Delta}_\chi, B]). \quad (10)$$

Легко показать (индукцией по χ), что

$$\vdash_{ZF} x \in B^\omega \rightarrow (\mathrm{Sat}[x, \dot{\Delta}_\chi, B] \leftrightarrow \chi^{(B)}[x(\dot{\Delta}_0), \ldots, x(\dot{\Delta}_{n-1})]) \quad (11)$$

и (индукцией по n) что

$$\vdash_{ZF} B \neq 0 \wedge v_0, \ldots, v_{n-1} \in B \rightarrow \bigvee_x (x \in B^\omega \wedge x(\dot{\Delta}_0) =$$
$$= v_0 \wedge \ldots \wedge x(\dot{\Delta}_{n-1}) = v_{n-1}). \quad (12)$$

С помощью (9)—(12) выводим, что

$$\vdash_{ZF} \alpha \wedge v_0, \ldots, v_{n-1} \in B \rightarrow (\chi[v_0, \ldots, v_{n-1}] \leftrightarrow \chi^{(B)}[v_0, \ldots, v_{n-1}])$$

и

$$\vdash_{ZF} \alpha \wedge v_0, \ldots, v_{n-1} \in B \rightarrow [\chi \leftrightarrow \chi^{(B)}].$$

3. Об аксиоме Леви

Легко доказать в ZF следующий принцип замыкания:

$$\bigvee B [A \subseteq B \wedge \bigwedge x (x \in B \rightarrow \zeta[x] \subseteq B)]. \quad (1)$$

Здесь ζ может быть любым термом, в котором переменная B не является свободной, и может рассматриваться как представляющий операцию, которая связывает с каждым объектом множество объектов. Принцип (1) тогда выражает тот факт, что любое множество может быть расширено до множества B, которое замкнуто относительно ζ, т. е. такого, что если x — любой член B, то все объекты, сопоставленные с x посредством ζ, являются также членами B.

В этой формулировке мы рассматриваем одноместные операции. Для того чтобы выразить замкнутость B относительно многоместных операций, мы можем говорить об операциях, которые применимы к последовательностям элементов B, или, попросту говоря, об операциях на подмножествах B. Самый общий принцип такого рода

$$\bigvee B [A \subseteq B \wedge \bigwedge X (X \subseteq B \rightarrow \zeta[X] \subseteq B)]$$

ведет к противоречию некоторым очевидным образом. Однако более специальные формы, в которых наложены границы на мощности подмножеств B, к которым применяется ζ, могут быть легко обоснованы.

Например, схема

$$\bigvee B [A \subseteq B \wedge \bigwedge X (X \subseteq B \wedge X \overset{*}{\prec} \omega \rightarrow \zeta[X] \subseteq B)] \quad (2)$$

может быть доказана в ZF, и более общая схема

$$\bigvee B [A \subseteq B \wedge \bigwedge X (X \subseteq B \wedge X \overset{*}{\prec} C \rightarrow \zeta[X] \subseteq B)] \quad (3)$$

может быть выведена в ZF из аксиомы выбора.

В (2) и (3) границы мощностей даны заранее, до построения B. Мы далее будем рассматривать принцип, в котором граница описывается с помощью самого B, в частности мы применим операцию ζ ко всем подмножествам B, которые менее многочисленны, чем B:

$$\bigvee B [A \subseteq B \wedge \bigwedge X (X \subseteq B \wedge X \overset{*}{\prec} B \rightarrow \zeta[X] \subseteq B)]. \quad (4)$$

Схема (4) недоказуема в ZF (если теория ZF непротиворечива). Более интересным является тот факт, что (4) оказывается эквивалентной аксиоме, недавно предложенной Леви [2]; родственные аксиомы предложены Мало в [3].

Одной из форм аксиомы Леви является схема

$$\mathrm{Norm}_\zeta \to \bigvee v_0 (\mathrm{In}\,[v_0] \wedge \zeta\,[v_0] = v_0), \tag{5}$$

где ζ — любой терм; другая ее форма — это принцип

$$\bigvee v_n \big[\mathrm{In}\,[v_n] \wedge \bigwedge v_0, \ldots, \bigwedge v_{n-1} (v_0, \ldots, v_{n-1} \in R\,[v_n] \to \\ \to [\varphi \leftrightarrow \varphi^{(R\,[v_n])}]\,)\big], \tag{6}$$

где φ — любая стандартная формула, имеющая всеми своими свободными переменными $v_0, \ldots, v_{n-1}$. Все формулировки Леви содержат сложные понятия из математики или теории ординальных чисел и, таким образом, с аксиоматической точки зрения менее изящны, чем (4).

Теорема 1. *Принципы* (4)—(6) *эквивалентны в* ZF.

Доказательство. Леви показал [2], что (5) и (6) эквивалентны в ZF. (На самом деле формулировки Леви включают в себя понятие недостижимых ординальных чисел, и эквивалентность этого понятия нашему кажется доказуемой лишь при допущении аксиомы выбора. Однако доказательство эквивалентности (5) и (6) остается справедливым при замене его понятия нашим.) Мы покажем, что (4) влечет за собой (6) и из (5) следует (4).

Пусть формула φ определяется так же, как в (6). В силу следствия из леммы 1 найдется терм ζ, такой, что

$$\vdash_{ZF} \bigwedge X\,[X \subseteq B \wedge C \overset{*}{<} \omega \to \\ \to \zeta\,[X] \subseteq B] \wedge v_0, \ldots, v_{n-1} \in B \to [\varphi \leftrightarrow \varphi^{(B)}]. \tag{7}$$

Пусть $\psi\,[B]$ — формула

$$R\,(\omega+1) \subseteq B \wedge \bigwedge X\,[X \subseteq B \wedge X \overset{*}{<} B \to \zeta\,[X] \cup R\,[\rho\,[X]\,] \cup \{X\} \subseteq B].$$

Тогда

$$\vdash_{ZF \cup (4)} \bigvee B \psi\,[B], \tag{8}$$

и легко видеть, что

$$\vdash_{ZF} \psi\,[B] \to \bigvee v_n\,[\mathrm{In}\,[v_n] \wedge B = R\,[v_n]\,], \tag{9}$$

$$\vdash_{ZF} \psi\,[B] \to \bigwedge X\,[X \subseteq B \wedge X \overset{*}{<} \omega \to \zeta\,[X] \subseteq B]. \tag{10}$$

Из (7)—(10) следует, что

$$\vdash_{ZF \cup (4)} \bigvee v_n \big[\mathrm{In}\,[v_n] \wedge \bigwedge v_0 \cdots \bigwedge v_{n-1} (v_0, \ldots, v_{n-1} \in R\,[v_n] \to \\ \to [\varphi \leftrightarrow \varphi^{(R\,[v_n])}]\,)\big],$$

и выводимость (6) из (4) установлена.

Теперь пусть ζ — терм, в котором переменная B не является свободной. По известной теореме о рекурсивных определениях найдется терм η (со свободными переменными v_0 и A), такой, что

$$\perp_{ZF} \eta\,[0] = \rho\,[A], \tag{11}$$

$$\vdash_{ZF} \mathrm{Ord}\,[a] \to \eta\,[a+1] = \\ = \operatorname*{Min}_b \Big[\eta\,[a] \in b \wedge \bigcup_X \{\zeta\,[X] \mid X \in R\,[\eta\,[a]\,]\} \subseteq R\,[b]\Big], \tag{12}$$

$$\vdash_{ZF} \mathrm{Lim}\,[a] \to \eta\,[a] = \bigcup_b \{\eta\,[b] \mid b \in a\}. \tag{13}$$

Ясно, что $\vdash_{ZF} \mathrm{Norm}_\eta$ и, следовательно,

$$\vdash_{ZF \cup (5)} \bigvee_a [\mathrm{In}\,[a] \wedge \eta\,[a] = a]. \tag{14}$$

Ввиду (11)

$$\vdash_{ZF} A \subseteq R\,[\eta\,[0]\,],$$

и поэтому

$$\vdash_{ZF} \mathrm{Ord}\,[a] \wedge \eta\,[a] = a \to A \subseteq R\,[a]. \tag{15}$$

В силу (12)

$$\vdash_{ZF} \mathrm{Ord}\,[a] \wedge b \in a \wedge X \in R\,[\eta\,[b]\,] \to \zeta\,[X] \subseteq R\,[\eta\,[a]\,]. \tag{16}$$

Из (13) (и содержания формулы $\mathrm{In}\,[a]$) ясно, что

$$\vdash_{ZF} \mathrm{In}\,[a] \wedge \eta\,[a] = a \wedge X \subseteq R\,[a] \wedge X \overset{*}{<} R\,[a] \to \\ \to X \in R\Big[\bigcup_b \{\eta\,[b] \mid b \in a\}\Big].$$

Следовательно, из того, что $\vdash_{ZF} \mathrm{Ord}\,[a] \to R\Big[\bigcup_b \{\eta\,[b] \mid b \in a\}\Big] = \bigcup_b \{R\,[\eta\,[b]\,] \mid b \in a\}$, вытекает

$$\vdash_{ZF} \mathrm{In}\,[a] \wedge \eta\,[a] = a \wedge X \subseteq R\,[a] \wedge X \overset{*}{<} R\,[a] \to \\ \to \bigvee b\,(b \in a \wedge X \in R\,[\eta\,[b]\,]).$$

Далее, по (16),

$$\vdash_{ZF} \mathrm{In}\,[a] \wedge \eta\,[a] = a \wedge X \subseteq R\,[a] \wedge X \overset{*}{<} R\,[a] \to \zeta\,[X] \subseteq R\,[a]$$

и, следовательно, из (14) и (15)

$$\vdash_{ZF\,\cup\,(5)} \bigvee a\,[A \subseteq R[a] \wedge \bigwedge X\,(X \subseteq R[a] \wedge X \overset{*}{\prec} R[a] \to \zeta[X] \subseteq R[a])],$$

что заканчивает вывод (4) из (5).

Замечание. Тарский [6] предлагает следующую „аксиому недостижимых множеств":

$$\bigvee B\,[A \in B \wedge \bigwedge X \bigwedge Y\,(X \in B \wedge Y \subseteq X \to Y \in B) \wedge$$
$$\wedge \bigwedge X\,(X \in B \to P[X] \in B) \wedge \bigwedge X\,(X \subseteq B \wedge X \prec B \to X \in B)]. \quad (17)$$

Как показал Тарский, (17) можно рассматривать как частный случай (4), если в (4) $\overset{*}{\prec}$ заменить на $\prec$; нужно только в качестве A взять $\{A,\ 0,\ \{0\}\}$ и вместо $\zeta[X]$ — терм $\{X\} \cup P[U[X]] \cup \{P[U[X]]\}$. (Ввиду [6] аксиома выбора выводима из измененного варианта (4)). Аналогично результат замены $\prec$ на $\overset{*}{\prec}$ в (17) можно рассматривать как частный случай (4).

4. О доказуемой непротиворечивости

Для каждого целого положительного n выберем бесчисленное множество n-местных предикатов (не встречающихся в элементах P или ZF) и назовем их *переменными предикатами*. *Атомарная схема* — это выражение вида $\pi v_0 \ldots v_n$, где n — натуральное число, а π обозначает $(n+1)$-местный переменный предикат [$(v_0, \ldots, v_n)$, как обычно, первые $n+1$ переменные]. *Множество схем* — это наименьшее множество K, такое, что

(1) для всех натуральных чисел i и j формулы $v_i = v_j$ и $v_i \in v_j$ принадлежат K;
(2) все атомарные схемы принадлежат K;
(3) если φ и ψ — члены K, то $\sim\varphi$, $\varphi \wedge \psi$ принадлежат K;
(4) если φ — любой член K и i — любое натуральное число, то $\bigvee v_i\,\varphi$ принадлежит K.

Пусть χ — схема; F называют *допустимым распределением* для χ, если F — функция, область определения которой содержит все атомарные схемы, встречающиеся в χ, и если φ — любая такая схема, то $F(\varphi)$ представляет собой стандартную теоретико-множественную формулу, и все переменные, общие у χ и $F(\varphi)$, имеются в φ. Если χ — схема и F — допустимое распределение для χ, то подстановка в χ, соответствующая F, или $S_F[\chi]$, определяется рекурсивно следующим образом:

1) если i, j — натуральные числа, то $S_F[v_i = v_j]$ является формулой $v_i = v_j$ и $S_F[v_i \in v_j]$ представляет собой формулу $v_i \in v_j$; 2) если φ — атомарная схема, то $S_F[\varphi]$ есть $F(\varphi)$; 3) если φ, ψ — схемы, то $S_F[\sim\varphi]$ является формулой $\sim S_F[\varphi]$, а $S_F[\varphi \wedge \psi]$ есть формула $S_F[\varphi] \wedge S_F[\psi]$; 4) если φ — схема, а i — натуральное число, то $S_F[\bigvee v_i \varphi]$ есть $\bigvee v_i S_F[\varphi]$. *Представителем* схемы χ называют формулу φ, такую, что для некоторого допустимого распределения F для χ формула φ есть $S_F[\chi]$. [Можно ввести более широкое множество схем, в котором переменные предикаты могут сопровождаться *любой* последовательностью переменных подходящей длины, а не обязательно начальным отрезком последовательности $v_0, \ldots, v_n, \ldots$. Однако легко видеть, что любая схема в этом более широком смысле эквивалентна (в исчислении предикатов с равенством) схеме в более узком смысле, введенной выше. Представитель схемы есть, грубо говоря, теоретико-множественная формула, которая может быть получена из схемы применением правила подстановки вместо переменных предикатов; см. [1].]

Если ζ и η — термы в ZF, то

$$\mathrm{Acc}\,[\zeta,\ \eta]$$

есть формула ZF, утверждающая естественным образом, что ζ — допустимое распределение для схемы η;

$$\dot{S}\,[\zeta,\ \eta]$$

есть терм ZF, обозначающий подстановку, соответствующую распределению, обозначенному ζ, в схему, обозначенную η;

$$\mathrm{Inst}\,[\zeta,\ \eta]$$

есть формула $\bigvee f\,(\mathrm{Acc}\,[f,\ \eta] \wedge \zeta = \dot{S}\,[f,\ \eta])$, которая утверждает, что ζ — представитель η.

Лемма 2. *Пусть φ — формула, имеющая свободной переменной только v_0; ψ — формула, имеющая свободными переменными только v_0 и v_1; χ — схема, имеющая переменные среди $v_0, \ldots, v_k$; G — допустимое распределение для χ, и пусть для каждых β и n если β — атомарная схема из области определения G, имеющая переменные $v_0, \ldots, v_n$, то $G(\beta)$ есть формула $\varphi\left[\chi\begin{pmatrix}\dot{\Delta}_0, \ldots, \dot{\Delta}_n \\ v_0, \ldots, v_n\end{pmatrix},\ f(\dot{\Delta}_\beta)\right]$; тогда*

$$\vdash_{ZF} SP_{\varphi,\psi} \wedge \mathrm{Acc}\,[f,\ \dot{\Delta}_x] \wedge \psi[\dot{S}[f,\ \dot{\Delta}_\chi]] \wedge x \in \mathcal{C}\!\!\!\!\mathcal{I}\, x^\omega \to$$
$$\to \left(\varphi\left[x\begin{pmatrix}\dot{\Delta}_0, \ldots, \dot{\Delta}_k \\ v_0, \ldots, v_k\end{pmatrix},\ \dot{S}\,[f,\ \dot{\Delta}_\chi]\right] \leftrightarrow S_G[\chi]\right),$$

Доказательство. Лемма будет доказана индукцией по схеме χ. Везде в доказательстве α — это формула

$$SP_{\varphi,\psi} \wedge \mathrm{Acc}[f, \dot\Delta_\chi] \wedge \psi[\dot S[f, \dot\Delta_\chi]] \wedge x \in \mathcal{G}x^{\omega}.$$

Допустим сначала, что χ — формула $v_i = v_j$ (для некоторых натуральных чисел i, j) и что условия леммы выполнены. Тогда

$$\vdash_{ZF} \alpha \to \left(\varphi\left[x\binom{\dot\Delta_0, \ldots, \dot\Delta_0}{v_0, \ldots, v_k}, \dot S[f, \dot\Delta_\chi]\right] \leftrightarrow \varphi\left[x\binom{\dot\Delta_0 \ldots \dot\Delta_k}{v_0 \ldots v_k}, \dot{=}\dot\Delta_i, \dot\Delta_j\right]\right) \wedge$$
$$\wedge \left(\varphi\left[x\binom{\dot\Delta_0 \ldots \dot\Delta_k}{v_0 \ldots v_k}, \dot{=}\dot\Delta_i, \dot\Delta_j\right] \leftrightarrow v_i = v_j\right),$$

и, следовательно, так как $S_{\mathcal{G}}[\chi] = \chi$, то

$$\vdash_{ZF} \alpha \to \left(\varphi\left[x\binom{\dot\Delta_0 \ldots \dot\Delta_k}{v_0 \ldots v_k}, \dot S[f, \dot\Delta_\chi]\right] \leftrightarrow S_{\mathcal{G}}[\chi]\right).$$

Аналогичными рассуждениями устанавливается лемма и в том случае когда χ имеют вид $v_i \in v_j$ (для натуральных чисел i и j).

Теперь предположим, что χ есть атомарная схема, имеюща переменные $v_0, \ldots, v_n$, и снова допустим условия леммы. Тогда

$$\vdash_{ZF} \alpha \to \left(\varphi\left[x\binom{\dot\Delta_0 \ldots \dot\Delta_k}{v_0 \ldots v_k}, \dot S[f, \dot\Delta_\chi]\right] \leftrightarrow \varphi\left[x\binom{\dot\Delta_0 \ldots \dot\Delta_k}{v_0 \ldots v_k}, f(\dot\Delta_\chi)\right]\right) \wedge$$
$$\wedge \left(\varphi\left[x\binom{\dot\Delta_0 \ldots \dot\Delta_k}{v_0 \ldots v_k}, f(\dot\Delta_\chi)\right] \leftrightarrow \varphi\left[x\binom{\dot\Delta_0 \ldots \dot\Delta_n}{v_0 \ldots v_n}, f(\dot\Delta_\chi)\right]\right.$$

и, следовательно,

$$\vdash_{ZF} \alpha \to \left(\varphi\left[x\binom{\dot\Delta_0 \ldots \dot\Delta_k}{v_0 \ldots v_k}, \dot S[f, \dot\Delta_\chi]\right] \leftrightarrow S_{\mathcal{G}}[\chi]\right).$$

Легко видеть, что если лемма верна для схем χ_1 и χ_2, то она также верна для $\sim\chi_1$ и $\chi_1 \wedge \chi_2$.

Пусть теперь χ имеет вид $\bigvee v_i \chi_1$, и пусть лемма верна для χ_1 а условия леммы выполняются для χ. Тогда

$$\vdash_{ZF} \alpha \to \left(\varphi\left[x\binom{\dot\Delta_0 \ldots \dot\Delta_k}{v_0 \ldots v_k}, \dot S[f, \dot\Delta_\chi]\right] \leftrightarrow\right.$$
$$\left.\leftrightarrow \varphi\left[x\binom{\dot\Delta_0 \ldots \dot\Delta_k}{v_0 \ldots v_k}, \dot\bigvee \dot\Delta_i \dot S[f, \dot\Delta_{\chi_1}]\right]\right) \wedge$$
$$\wedge \left(\varphi\left[x\binom{\dot\Delta_0 \ldots \dot\Delta_k}{v_0 \ldots v_k}, \dot\bigvee \dot\Delta_i \dot S[f, \dot\Delta_{\chi_1}]\right] \leftrightarrow\right.$$
$$\left.\leftrightarrow \bigvee u\left[x\binom{\dot\Delta_0 \ldots \dot\Delta_k}{v_0 \ldots v_k}\binom{\dot\Delta_i}{u}, \dot S[f, \dot\Delta_{\chi_1}]\right]\right) \wedge$$

$$\wedge \left(\bigvee u\varphi\left[x\binom{\dot\Delta_0 \ldots \dot\Delta_k}{v_0 \ldots v_k}\binom{\dot\Delta_i}{u}, \dot S[f, \dot\Delta_{\chi_1}]\right] \leftrightarrow\right.$$
$$\left.\leftrightarrow \bigvee v_i\varphi\left[x\binom{\dot\Delta_0 \ldots \dot\Delta_k}{v_0 \ldots v_k}, \dot S[f, \dot\Delta_{\chi_1}]\right]\right) \wedge$$
$$\wedge \left(\bigvee v_i\varphi\left[x\binom{\dot\Delta_0 \ldots \dot\Delta_k}{v_0 \ldots v_k}, \dot S[f, \dot\Delta_{\chi_1}]\right] \leftrightarrow \bigvee v_i S_{\mathcal{G}}[\chi_1]\right)$$

и, следовательно,

$$\vdash_{ZF} \alpha \to \left(\varphi\left[x\binom{\dot\Delta_0 \ldots \dot\Delta_k}{v_0 \ldots v_k}, \dot S[f, \dot\Delta_\chi]\right] \leftrightarrow S_{\mathcal{G}}[\chi]\right),$$

что и заканчивает доказательство.

Лемма 3. *Пусть φ, ψ удовлетворяют условиям определения 1. Если T — расширение ZF и χ — схема, все представители которой выводимы из T, то найдется терм ζ, имеющий свободной переменной только v_0, такой, что*

$$\vdash_T SP_{\varphi,\psi} \wedge \bigwedge X(X \subseteq B \wedge X \overset{*}{\prec} \omega \to \zeta[X] \subseteq B) \wedge \psi[a] \wedge$$
$$\wedge \mathrm{Inst}[a, \dot\Delta_\chi] \wedge x \in B^{\omega} \to \mathrm{Sat}[x, a, B].$$

Доказательство. По лемме 2 имеем:

$$\vdash_{ZF} SP_{\varphi,\psi} \wedge \psi[a] \wedge \mathrm{Inst}[a, \dot\Delta_\chi] \wedge x \in \mathcal{G}x^{\omega} \to$$
$$\to \left(\varphi\left[x\binom{\dot\Delta_0 \ldots \dot\Delta_k}{v_0 \ldots v_k}, a\right] \leftrightarrow S_{\mathcal{G}}[\chi]\right),$$

где $v_0, \ldots, v_k$ — переменные χ, и $\mathcal{G}$ то же, что и в условиях леммы 2. Следовательно, так как $\vdash_T S_{\mathcal{G}}[\chi]$, то

$$\vdash_T SP_{\varphi,\psi} \wedge \psi[a] \wedge \mathrm{Inst}[a, \dot\Delta_\chi] \wedge x \in \mathcal{G}x^{\omega} \to$$
$$\to \bigwedge v_0, \ldots, \bigwedge v_k \varphi\left[x\binom{\dot\Delta_0 \ldots \dot\Delta_k}{v_0 \ldots v_k}, a\right].$$

Отсюда

$$\vdash_T SP_{\varphi,\psi} \wedge \psi[a] \wedge \mathrm{Inst}[a, \dot\Delta_\chi] \wedge x \in \mathcal{G}x^{\omega} \to \varphi[x, a].$$

Но в силу леммы 1 найдется терм ζ, имеющий свободной переменной только v_0, такой, что

$$\vdash_{ZF} SP_{\varphi,\psi} \wedge \bigwedge X(X \subseteq B \wedge X \overset{*}{\prec} w \to \zeta[X] \subseteq B) \wedge$$
$$\wedge \psi[a] \wedge x \in B^{\omega} \to (\varphi[x, a] \leftrightarrow \mathrm{Sat}[x, a, B]),$$

и отсюда следует, что ζ удовлетворяет заключению леммы.

Лемма 4. *Если n — натуральное число и ψ — формула $\dot{D}p_n[v_0]$, то существует формула φ с ровно двумя свободными переменными v_0 и v_1, такая, что*

$$\vdash_{ZF} SP_{\varphi,\psi}.$$

Доказательство.' Указание о том, как построить формулу φ, можно получить из построения формулы

$$v_0 \operatorname{Sat}_n v_1$$

в определении 6 из работы [5].

Определение 2. *Говорят, что формула α определяет множество A натуральных чисел (в P), если α содержит в качестве свободной переменной только v_0 и для каждого натурального числа n $\vdash_p \alpha[\mathring{\Delta}_n]$ при $n \in A$ и $\vdash_p \sim\alpha[\mathring{\Delta}_n]$ при $n \notin A$. Если A — множество стандартных формул и B — любое множество формул, то говорят, что непротиворечивость A доказуема в B, если имеется примитивно рекурсивная формула α, такая, что α определяет A в P, и $P \cup \{\mathring{\mathrm{Con}}\,\alpha\}$ относительно интерпретируема в B.*

Теорема 2. *Если T — расширение ZF; χ — схема, все представители которой выводимы из T; n — натуральное число и A — множество представителей χ, глубина которых не превышает n, то непротиворечивость $SF \cup A$ доказуема в T.*

Доказательство. Пусть π — одноместный переменный предикат, χ' — схема

$$\bigvee v_1 \bigwedge v_0 (v_0 \in v_1 \leftrightarrow \pi v_0 \wedge v_0 \in v_2).$$

Пусть ψ — формула $\mathring{D}p_n[v_0]$ и φ — формула (которая существует по лемме 4) со свободными переменными v_0, v_1, такая, что

$$\vdash_{ZF} SP_{\varphi,\psi}.$$

По лемме 3 найдется терм ζ, имеющий свободной переменной только v_0, такой, что

$$\vdash_T \bigwedge X (X \subseteq B \wedge X \overset{*}{\prec} \omega \to \zeta[X] \subseteq B) \wedge \psi[a] \wedge$$
$$\wedge \operatorname{Inst}[a, \dot{\Delta}_\chi] \wedge x \in B^\omega \to \operatorname{Sat}[x, a, B]. \qquad (1)$$

Очевидно, что

$$\vdash_{ZF} \bigwedge X \Big(X \subseteq B \wedge X \overset{*}{\prec} \omega \to \bigcup_v \{P[v] \mid v \in X\} \subseteq B\Big) \wedge$$
$$\wedge \operatorname{Inst}[a, \dot{\Delta}_{\chi'}] \wedge x \in B^\omega \to \operatorname{Sat}[x, a, B], \qquad (2)$$

а также

$$\vdash_{ZF} \bigvee B \Big[B \neq 0 \wedge \bigwedge X \Big(X \subseteq B \wedge X \overset{*}{\prec} \omega \to$$
$$\to \zeta[X] \cup \bigcup_v \{P[v] \mid v \in X\} \subseteq B\Big)\Big]. \qquad (3)$$

Пусть α — формула

$$\operatorname{Inst}[v_0, \dot{\Delta}_{\chi'}] \vee (\psi[v_0] \wedge \operatorname{Inst}[v_0, \dot{\Delta}_\chi]).$$

Тогда в силу (1)—(3)

$$\vdash_T \bigvee B [B \neq 0 \wedge \bigwedge a \bigwedge x (\alpha[a] \wedge x \in B^\omega \to \operatorname{Sat}[x, a, B])]$$

и, следовательно, копируя в T известное метаматематическое рассуждение, мы видим, что

$$\vdash_T \sim \bigvee f \bigvee b [f, b \in \omega \wedge \bigwedge v_0 (v_0 \in \omega \wedge T\dot{m}[v_0, f] \to \alpha) \wedge$$
$$\wedge \dot{\mathrm{Gen}}[b, \dot{\mathrm{Conj}}[f]] \wedge \dot{\mathrm{Pr}}[\dot{\sim} b]]. \qquad (4)$$

Используя известные методы, можно построить примитивно рекурсивную формулу β из P, такую, что

$$\beta \text{ определяет } SF \cup A \quad (\text{в } P) \qquad (5)$$

и

$$\vdash_{ZF} \alpha \leftrightarrow I_0(\beta). \qquad (6)$$

В силу (4) и (6)

$$\vdash_T \sim \bigvee f \bigvee b [f, b \in \omega \wedge \bigwedge v_0 (v_0 \in \omega \wedge T\dot{m}[v_0, f] \to I_0(\beta)) \wedge$$
$$\wedge \dot{\mathrm{Gen}}[b, \dot{\mathrm{Conj}}[f]] \wedge \dot{\mathrm{Pr}}[\dot{\sim} b]], \qquad (7)$$

так что

$$\vdash_T I_0(\mathring{Con}_\beta).$$

Комбинируя это с тем очевидным фактом, что для всех $\gamma, \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ если $\gamma \in P$ и $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ — свободные переменные γ, то

$$\vdash_{ZF} I_0(\bigwedge \alpha_0 \ldots \bigwedge \alpha_{n-1} \gamma),$$

мы получаем, что формула $P \cup \{\mathring{Con}_\beta\}$ относительно интерпретируема в T, и, следовательно, по (5) непротиворечивость $SF \cup A$ доказуема в T.

Следствие. *При условиях теоремы 2 непротиворечивость $Z \cup A$ доказуема в T.*

Доказательство получается из теоремы 2.

Используя последнее следствие и теорему Гёделя — Фефермана, можно немедленно получить следующее обобщение основных результатов работы [4]: если T — непротиворечивое расширение ZF с теми же константами, что в ZF, то не существует схемы χ, все представители которой выводимы из T и такой, что T эквивалентно результату добавления к Z такого множества представителей χ, все элементы которого имеют не более, чем данную глубину. Леви недавно получил более сильный результат, частично используя некоторые методы этой работы: при тех же допущениях не существует множества A формул, все из которых имеют не более чем заданную глубину, и такого, что T эквивалентно $Z \cup A$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гильберт Д., Аккерман В., Основы теоретической логики, ИЛ, М., 1947.
2. Lévy A., Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory, *Pacific Journal of Mathematics*, **10** (1960), 223—238.
3. Mahlo P., Zur Theorie und Anwendung der ρ_0-Zahlen, II, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse*, **65** (1913), 268—282.
4. Montague R., Fraenkel's addition to the axioms of Zermelo, в сборнике Essays on the foundations of mathematics, Jerusalem, 1961, 91—114.
5. Montague R., Semantical closure and non-finite axiomatizability, I. *Infinitistic Methods, Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics*, Warsaw, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1961.
6. Tarski A., Über unerreichbare Kardinalzahlen, *Fundamenta Mathematicae*, **30** (1938), 68—89.
7. Tarski A. Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, *Studia Philosophica*, **1** (1936), 261—405.
8. Tarski A., Mostowski A., Robinson R. M., Undecidable Theories, Amsterdam, North-Holland, 1953.

Индивиды Куайна[1])

Д. СКОТТ

Калифорнийский университет, Беркли, Калифорния, США

Профессор Куайн указал, что по отношению к теориям принадлежности можно допустить существование *неклассов* или *индивидов*, интерпретируя формулу „$x \in y$“ как синонимичную с „$x = y$“ в случае, если y — индивид. Это указание не было реализовано, поскольку, как он подчеркивает в [7], стр. 123, в формальных исследованиях никогда не возникает ситуация, когда известно, что некоторый объект действительно является индивидом в этом смысле. Однако тот факт, что такая ситуация не возникает в конкретных исследованиях, не является убедительным аргументом. Разве не может случиться, что какой-нибудь причудливой цепью выводов окажется возможным доказать, исходя из аксиом Куайна для отношения принадлежности классу, что индивиды действительно существуют? Из замечаний профессора Куайна ясно, что он не считает такой вывод возможным и не думает, что его мог бы считать возможным кто-нибудь, кто знаком с его предложением и уверен в непротиворечивости его аксиом. Ничто не подтверждает убеждения так, как доказательство; и целью этой заметки является доказать, что если аксиомы Куайна непротиворечивы, то они остаются непротиворечивыми как при добавлении предложения

$$„\exists y \forall x\, [x \in y \leftrightarrow x = y]“, \qquad (*)$$

так и при добавлении его отрицания. Сделайте выбор сами.

Для простоты мы будем рассматривать не систему из [7], а систему из [6], обычно называемую *New Foundations* или сокращенно NF. Как показал Ван Хао [8], каждую модель системы NF можно расширить до модели системы из [7] (эту последнюю будем обозначать ML); таким образом, из доказательства непротиворечивости и независимости формулы (*) по отношению к NF легко получается соответствующее доказательство для ML. Разумеется, доказательство Вана Хао не является финитным, поскольку в нем используется семантическое понятие *определимости* в модели. Приводимое здесь доказательство для NF строго финитно, и, без сомнения, сходное доказательство можно провести для ML.

[1]) Scott D., Quine's individuals, стр. 111—115.

Для наших целей удобно считать, что NF сформировано в логике первой ступени с *равенством* и с *оператором дескрипции*. Единственной внелогической константой является бинарный предикатный символ „$\in$". Логические константы задаются следующим списком:

$$\wedge,\ \vee,\ \neg,\ \to,\ \leftrightarrow,\ =,\ \forall,\ \exists,\ \mathbf{T},$$

где последний символ обозначает оператор дескрипции. Переменные задаются списком

$$x,\ y,\ z,\ w,\ x',\ y',\ z',\ w',\ x'',\ \ldots$$

Скобки "[", "]" используются с (бинарными) пропозициональными связками обычным образом, но ни они, ни какие-либо другие дополнительные знаки пунктуации не нужны в таких контекстах, как $\ulcorner\neg\Phi\urcorner$, „$x \in y$", „$x = y$", $\ulcorner\exists x\Phi\urcorner$, $\ulcorner\mathbf{T}x\Phi\urcorner$, где Φ — формула. Мы будем считать ясным, как понимаются утверждения: „Φ есть формула" „φ есть терм", „переменная x свободна в формуле Φ" и т. д. Прописные греческие буквы (кроме „Λ") обозначают формулы, строчные греческие буквы — термы. Если φ — терм и Φ — формула, то $\Phi(\varphi)$ есть результат подстановки φ вместо всех свободных вхождений „x" в Φ', где Φ' есть первый алфавитный вариант Φ (при некотором подходящем упорядочении всех формул), который не содержит связанных переменных, совпадающих с какими-либо свободными переменными из φ. Аналогично для $\varphi(\psi)$. Мы будем писать „$\Phi(y)$" вместо более правильной записи „$\Phi($„y"$)$" для обозначения подстановки конкретных переменных вместо x. Мы будем использовать теорию оператора дескрипции, развитую в [3]. С этой точки зрения терм „$\mathbf{T}xx = x$" означает объект, совпадающий с денотатами всех несобственных дескриптивных фраз. Тот факт, что ни аксиомы логики, ни аксиомы системы NF не описывают более определенно природу этого выделенного объекта, не имеет никакого значения. Однако мы должны исследовать, каким образом понятие *стратифицированной* формулы, определенное в [7] (подстрочное примечание на стр. 157), может быть перенесено в эту расширенную теорию. Прежде всего, чтобы избежать излишних усложнений, мы допустим, что это понятие определено таким образом, что если формула стратифицирована, то стратифицированы и все ее алфавитные варианты. Тогда, чтобы проверить данную формулу на стратифицированность, переименуем все ее связанные переменные так, чтобы никакая буква не встречалась дважды под знаками операторов „$\forall$", „$\exists$", „$\mathbf{T}$". Далее занумеруем термы так, чтобы терм $\ulcorner\mathbf{T}x\Phi\urcorner$ имел тот же номер, что и „x", и проверим, получили ли обе части каждого равенства один и тот же номер. Если нет, то продолжаем процесс в точности так, как описано у Куайна. Например, формула „$x = y \wedge x \in y$" не стратифицирована, в то время как несколько странная формула „$\mathbf{T}xx = x \in \mathbf{T}yy = y$" стратифицирована.

Мы можем взять в качестве аксиом системы NF следующие формулы:

(I) „$\forall x\forall y\,[\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y]$";

(II) $\ulcorner\exists y\forall x\,[x \in y \leftrightarrow \Phi]\urcorner$,

где Φ — стратифицированная формула, в которую переменная y не входит свободно; (I) есть *аксиома объемности*; формулы, встречающиеся в (II) (точнее, их замыкания), суть аксиомы существования класса.

Терм τ мы будем называть *уровневым* (level), если единственная его свободная переменная есть x и если формула $\ulcorner x = \tau(x)\urcorner$ стратифицирована. Если мы на минуту представим себе, что τ определяет „функцию", которая отображает объект x в объект, обозначенный через τ, то условие быть *уровневым* термом означает, что значения функции имеют тот же „уровень" или „тип", что и аргументы. Во всяком случае, что бы мы ни подразумевали, оказывается, что уровневые термы очень полезны для реинтерпретации отношения принадлежности. В частности, пусть Φ^{τ} для каждой формулы Φ означает результат одновременной замены[1] всех частей Φ вида $\ulcorner\varphi \in \psi\urcorner$, где φ, ψ—термы, формулой $\ulcorner\varphi \in \tau(\psi)\urcorner$. Если τ есть уровневый терм и Φ стратифицирована, то очень легко видеть, что Φ^{τ} также стратифицирована. На важность этой процедуры указывает следующий результат.

Метатеорема[2]). *Пусть τ — уровневый терм, для которого в* NF *существует доказательство предложения*

$$\ulcorner\forall y\exists z\forall x\,[y = \tau(x) \leftrightarrow x = z]\urcorner.$$

Тогда если Ψ доказуемо в NF, *то и Ψ^{τ} доказуемо в* NF.

Доказательство. Очевидно, что достаточно проверить случаи, когда Ψ есть аксиома NF. Рассмотрим случай, когда Ψ есть аксиома (I). Предложение, доказуемость которого установлена, есть

$$\ulcorner\forall x\forall y\,[\forall z\,(z \in \tau(x) \leftrightarrow z \in \tau(y)) \to x = y]\urcorner.$$

[1]) Эту замену лучше всего описать как подстановку формулы „$x \in \tau(y)$" вместо атомарной формулы „$x \in y$" в смысле $\check{S}$ — подстановки Чёрча [2].

[2]) Тот факт, что аналогичный результат имеет место для некоторых других теорий принадлежности классу, был замечен автором в связи с работой Ригера [4] и отмечен в реферате [5]. Впоследствии Шпеккер указал, что соответствующая идея содержится в статье Бернайса ([1], см. стр. 83, подстрочное примечание), но там она применяется только к моделям аксиом и не подчеркивается финитный характер метода. Тем не менее автором этой идеи следует считать Бернайса; поэтому замечания в реферате [5] неверны или по крайней мере вводят в заблуждение. Однако приложения этой идеи к NF ранее, по-видимому, не предлагались.

Согласно аксиоме (I), это эквивалентно предложению

$$\ulcorner \forall x \forall y\, [\tau(x) = \tau(y) \to x = y] \urcorner,$$

которое является непосредственным следствием допущений, сделанных относительно τ.

Далее, рассмотрим случай, когда Ψ есть одна из аксиом (II). Здесь формула, доказуемость которой установлена, есть формула (точнее замыкание формулы) вида

$$\ulcorner \exists y \forall x\, [x \in \tau(y) \leftrightarrow \Phi^{\tau}] \urcorner,$$

где y не входит свободно в формулы Φ и Φ^{τ}. Из допущений, сделанных относительно τ, следует, что предложение

$$\ulcorner \forall z \exists y z = \tau(y) \urcorner$$

доказуемо. Следовательно, достаточно проверить, что

$$\ulcorner \exists y \forall x\, [x \in y \leftrightarrow \Phi^{\tau}] \urcorner$$

доказуемо. Но, поскольку Φ^{τ} стратифицирована, эта формула (точнее, ее замыкание) есть аксиома вида (II) и, следовательно, доказуема.

Назовем уровневый терм, удовлетворяющий условию метатеоремы, *перестановкой*. Непосредственным следствием приведенного выше результата является тот факт, что если τ — такая перестановка, что Ψ^{τ} доказуемо в NF, и если NF непротиворечива, то предложение Ψ совместно с аксиомами системы NF. Ясно, что нахождение τ вместе с доказательством Ψ^{τ} дает финитное доказательство совместности Ψ с аксиомами NF. Именно этот метод будет применяться к предложению (*) и к его отрицанию.

На минуту допустим, что Ψ есть формула (*) и что τ — перестановка. Заметим, что доказуема эквивалентность формулы Ψ^{τ} предложению

$$\ulcorner \exists y \tau(y) = \iota(y) \urcorner, \qquad (**)$$

где $\iota(y)$ есть терм, обозначающий единичное множество из y, или, другими словами, ι есть терм „$\mathrm{T}z \forall w\, [w \in z \leftrightarrow w = x]$“. Наш первый вопрос состоит в том, можем ли мы найти перестановку, для которой (**) доказуемо. Ответ положительный. В самом деле, пусть τ есть терм

$$\ulcorner \mathrm{T}z\, [\, [x = \Lambda \wedge z = \iota(\Lambda)] \vee [x = \iota(\Lambda) \wedge z = \Lambda] \vee \\ \vee [\neg x = \Lambda \wedge \neg x = \iota(\Lambda) \wedge z = x]\,] \urcorner,$$

где Λ — терм, обозначающий пустое множество, т. е. терм „$\mathrm{T}z \forall w \neg w \in z$“. В менее формальных терминах τ есть перестановка, которая „переставляет“ множества Λ и $\iota(\Lambda)$ [1]). Очевидно, что τ — уровневый терм, удовлетворяющий всем условиям.

Второй вопрос: существует ли другой терм τ, для которого отрицание предположения (**) доказуемо? Соответствующая конструкция несколько сложнее, так как теперь все время нужно заботиться о том, чтобы получился уровневый терм.

Чтобы облегчить определение нового τ, мы используем два вспомогательных терма ρ и σ. Это будут соответственно следующие термы:

$$\ulcorner \mathrm{T}z\, [\, [x = \Lambda \wedge z = \iota(\Lambda)] \vee [\neg x = \Lambda \wedge \neg \Lambda \in x \wedge z = \Lambda] \vee \\ \vee \Lambda \in x \wedge \neg \iota(\iota(\Lambda)) \in x \wedge z = \iota(\iota(\Lambda))] \vee \\ \vee [\Lambda \in x \wedge \iota(\iota(\Lambda)) \in x \wedge z = \iota(\Lambda)]\,] \urcorner;$$

$$\ulcorner \mathrm{T}z \exists w\, [x = \iota(w) \wedge \forall z'\, [z' \in z \leftrightarrow [z' = w \vee z' = \rho(w)]\,]\,] \urcorner.$$

Заметим прежде всего, что ρ и σ — уровневые термы, но, конечно, ни один из них не является перестановкой. Терм σ будет применяться только к единичным множествам, и то обстоятельство, что дискриптивная фраза иногда является несобственной, не будет влиять на доказательство. Далее требуется доказуемость следующих предложений, содержащих ρ и σ:

(1) $\ulcorner \forall w \neg w = \rho(w) \urcorner$;

(2) $\ulcorner \forall w \forall z'\, [z' \in \sigma(\iota(w)) \leftrightarrow [z' = w \vee z' = \rho(w)] \urcorner$;

(3) $\ulcorner \forall w \forall w' \neg \sigma(\iota(w)) = \iota(w') \urcorner$;

(4) $\ulcorner \forall w \neg \sigma(\iota(w)) = w \urcorner$;

(5) $\ulcorner \forall w \forall w'\, [\sigma(\iota(w)) = \sigma(\iota(w')) \to w = w'] \urcorner$.

Доказательство предложения (1) получается, очевидно, непосредственно из определения ρ. Предложение (2) легко следует из определения σ, если принять во внимание, что ρ — уровневый терм, и применить подходящий частный случай схемы аксиомы (II). Предложение (3) является непосредственным следствием предложений (1) и (2) и характеристического свойства единичных множеств. Чтобы доказать (4), рассуждая неформально, допустим, что $\sigma(\iota(w)) = w$. В силу (2) мы имеем $\forall z'\, [z' \in w \leftrightarrow [z' = w \vee z' = \rho(w)]\,]$; поэтому $\neg w = \Lambda$. Если $\neg \Lambda \in w$, то $\rho(w) = \Lambda$ и, таким образом, $\Lambda \in w$; поэтому $\Lambda \in w$ и $\rho(w) = \Lambda$. С другой стороны, из определения ρ ясно, что $\rho(w) = \Lambda \to \neg \Lambda \in w$. Таким образом, мы получим противоречие. Наконец, чтобы получить (5), допустим, что $\sigma(\iota(w)) = \sigma(\iota(w'))$ и $\neg w = w'$. Из (2) одновременно следует, что

---

[1]) Для случая системы из [1] эта перестановка была введена Бернайсом [1, стр. 83] для аналогичной цели. Ригер также использует эту перестановку в [4].

$w = \rho(w')$ и $w' = \rho(w)$. Из определения ρ видно, что имеются только три возможности для w, а именно Λ, $\iota(\Lambda)$ и $\iota(\iota(\Lambda))$. Соответствующими значениями $\rho(w)$, которое обозначим через w', являются, по определению, $\iota(\Lambda)$, $\iota(\iota(\Lambda))$ и Λ. Ни в одном из этих трех случаев равенство $w = \rho(w')$ не выполняется. Отсюда следует нужное заключение.

Интуитивный смысл предложений (3) и (5) состоит в том, что класс объектов вида $\iota(w)$ и класс объектов вида $\sigma(\iota(w))$ — это два непересекающихся класса, между которыми отображение, определенное термом σ, устанавливает взаимно однозначное соответствие. Всякий раз, когда имеет место такая ситуация, соответствие может быть продолжено до перестановки всех объектов (которое фактически, как мы увидим, является „инволюцией"). Это замечание приводит нас к формальному определению терма τ:

$$\ulcorner \mathsf{T} z\, [\exists w\, [x = \iota(w) \wedge z = \sigma((\iota(w))] \vee \exists w\, [x = \sigma(\iota(w)) \wedge z = \iota(w)] \vee \\ \vee [\neg \exists w\, [x = \iota(w) \vee x = \sigma(\iota(w))] \wedge z = x]] \urcorner.$$

Полезно заметить, что не только τ — уровневый терм, но также и дескриптивная фраза в этом конкретном контексте всегда употребляется собственным образом.

Из вышеприведенных доказуемых предложений относительно σ легко теперь вывести следующие два предложения:

$$\ulcorner \forall x \tau(\tau(x)) = x \urcorner;$$
$$\ulcorner \forall w \tau(\iota(w)) = \sigma(\iota(w)) \urcorner.$$

Из первого следует, что τ — перестановка. В то же время оба вместе показывают, что если $\tau(y) = \iota(y)$, то $\tau(\tau(y)) = y = \tau(\iota(y)) = \sigma(\iota(y))$, что невозможно ни для какого y в силу (IV). Другими словами, отрицание предложения (**) действительно доказуемо для этой перестановки τ. Таким образом, доказательство относительной непротиворечивости и независимости формулы (*) закончено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bernays P., A system of axiomatic set theory, Part VII, *J. Symb. Logic*, **19** (1954), 81—96.
2. Чёрч А., Введение в математическую логику, **1**, М., ИЛ, 1957.
3. Kalish D., Montague R. M., Remarks on descriptions and natural deduction, *Archiv für Mathematishe Logik und Grundlagenforschung*, **3** (1957), 50—73.
4. Rieger L., A contribution to Gödel's axiomatic set theory, *Czechoslovak Mathematical Journal*, **7** (82) (1957), 323—357.
5. Scott D., Review of [4], *J. Symb. Logic*, **23** (1958), 216.
6. Quine W. V., New Foundations for mathematical logic. From a logical point of view, Harvard, 1953, 80—101.
7. Quine W. V., Mathematical Logic (Revised Edition), Harvard, 1952.
8. Wang H., A formal system of Logic, *J. Symb. Logic*, **15** (1950), 25—32.

Типовая неопределенность[1]

Э. ШПЕККЕР

Швейцарский федеральный политехнический институт, Цюрих, Швейцария

Эта статья посвящена простой теории типов и некоторым ее расширениям. Простая теория типов, несомненно, является одной из наиболее естественных систем теории множеств; основанием для этого утверждения является то, что ее определяют скорее через некоторое семейство структур, чем с помощью системы аксиом. Чтобы описать такую структуру, обозначим через T_0 непустое — конечное или бесконечное — множество; элементы из T_0 будут элементами типа 0. T_1 есть множество всех подмножеств T_0; T_2 есть множество всех подмножеств T_1, и вообще T_{n+1} есть множество всех подмножеств T_n (n — натуральное число). Если множество T_0 конечно, мы можем продолжить это построение произвольно далеко; рассмотрим случай, когда T_0 имеет точно один элемент a: T_0 есть (a), T_1 есть $(\Lambda, (a))$ (Λ — пустое множество), T_2 есть $(\Lambda, (\Lambda), ((a)), (\Lambda, (a)))$ и т. д. Если T_0 имеет n_0 элементов, число элементов T_1 есть $n_1 = 2^{n_0}$, и если n_k — число элементов T_k, то $n_{k+1} = 2^{n_k}$. В случае бесконечного T_0 эти отношения остаются истинными, если число n_k элементов множества T_k интерпретируется как мощность множества T_k и если степени числа 2 определяются обычным способом. В бесконечном случае такие определения возможны только на основе теории множеств; поскольку мы не предполагаем эту теорию заранее известной, мы формализуем и аксиоматизируем теорию типов. Что касается формализации, ее можно провести двумя способами. Первая возможность заключается в том, что вводится предикат P_k для каждого типа k: $P_k(a)$ утверждает, что a есть элемент типа k. Вторая возможность (которую мы и выберем) состоит в том, что вводится отдельная последовательность переменных для каждого типа. (Хорошо известно, что эти возможности эквивалентны.) Мы имеем, следовательно, переменные $x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots$ (интерпретируемые как пробегающие элементы типа 0), переменные $x_1^1, x_2^1, \ldots$ (пробегающие элементы типа 1), $x_1^2, x_2^2, \ldots$ (пробегающие элементы типа 2) и т. д. Будем называть элементарными формулы двух сортов: формулы вида $x_2^0 = x_7^0$, $x_4^3 = x_2^3$

[1] Specker E., Typical ambiguity, стр. 116—124.

(верхние индексы у переменных слева и справа от знака = одни и те же; нижние индексы произвольны) и формулы вида $x_3^4 \in x_2^5$, $x_6^1 \in x_6^2$ (верхний индекс переменных слева от $\in$ на единицу меньше, чем верхний индекс переменной справа, нижние индексы произвольны). Из этих элементарных формул остальные формулы образуются с помощью логических связок и кванторов, как это обычно делается в исчислении первого порядка.

Мы могли бы ввести еще ι-термы; однако при этом мы должны иметь в виду, что наша теория является многосортной и что каждый терм имеет, следовательно, свой тип. (Будут например, пустые множества типа 0, 1 и т. д.)

„Идеальная теория типов“ может теперь быть определена как множество предложений (формул без свободных переменных), истинных в каждой структуре $(T_0, T_1, \ldots ; =, \in)$, где T_{k+1} есть множество всех подмножеств множества T_k, а „$=$“, „$\in$“ и переменные интерпретируются очевидным образом. Такое определение опять-таки предполагает теорию множеств заранее известной, и поэтому (а также и по другим причинам) необходимо аксиоматизировать теорию типов, хотя мы наперед знаем, что нет рекурсивной системы аксиом, которая давала бы все теоремы идеальной теории типов (хотя бы в силу теоремы Гёделя о неполноте).

Одну группу аксиом теории типов составляют аксиомы объемности. Имеется одна такая аксиома для каждого типа (кроме типа 0); она утверждает, что два множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов (например, аксиома для типа 1):

$$(x_1^1)(x_2^1)\left[(x_1^0)(x_1^0 \in x_1^1 \leftrightarrow x_1^0 \in x_2^1) \to x_1^1 = x_2^1\right].$$

Вторую группу аксиом образуют аксиомы свертывания (comprehension); они выражают (в исчислении первого порядка) тот факт, что T_{k+1} содержит все подмножества T_k в качестве своих элементов. Аксиомы свертывания лучше ввести с помощью схем аксиом для каждого типа. Так, пусть C есть формула нашего исчисления со свободной переменной x_1^2: $C(x_1^2)$. Тогда имеем

$$(\exists x_1^3)(x_1^2)\left[x_1^2 \in x_1^3 \leftrightarrow C(x_1^2)\right].$$

(Квантор существования по переменной типа 3 должен не входить в C; свободные переменные в C, отличные от x_1^2, могут быть связаны в начале формулы.)

Аксиомы объемности и свертывания являются в некотором смысле одинаковыми для всех типов. Чтобы уточнить это, определим операцию „$+$“, которая формуле F ставит в соответствие формулу F^+: F^+ получается из F увеличением верхних индексов всех переменных на 1. Например, $\left[(x_3^1)(\exists x_1^2)(x_3^1 \in x_1^2)\right]^+$ есть $(x_3^2)(\exists x_1^3)(x_3^2 \in x_1^3)$. (Если F — формула нашего исчисления, то и F^+ будет формулой этого исчисления, и обратно.) Операция „$+$“ ставит в соответствие аксиоме объемности другую аксиому объемности и аксиоме свертывания другую аксиому свертывания. И так как правила (многосортной) логики первого порядка очевидно не разрушаются операцией „$+$“, мы получаем следующий результат.

Если S — теорема теории типов, базирующейся на аксиомах объемности и свертывания, то и S^+ тоже будет теоремой этой теории.

Это первое из возможных значений термина „типовая неопределенность“ (typical ambiguity).

Та же инвариантность теорем относительно операции „$+$“ имеет место для идеальной теории типов. Если $(T_0, T_1, \ldots; =, \in)$ — структура такого типа, какие рассматриваются в определении идеальной теории типов, то $(U_0, U_1, \ldots; =, \in)$, где $U_k = T_{k+1}$ и где отношения определяются, как и раньше, тоже является такой структурой. Предложение S истинно во второй структуре тогда и только тогда, когда S^+ истинно в первой; S истинно в каждой структуре, только если S^+ истинно: *если S — теорема идеальной теории типов, то теоремой является и S^+.*

Обратное утверждение не является истинным ни в идеальной теории типов, ни в теории типов, базирующейся на аксиомах объемности и свертывания. В самом деле, высказывание $(\exists x_1^1)(\exists x_2^1)(x_1^1 \neq x_2^1)$ можно вывести из этих аксиом с помощью следующих двух частных случаев схемы аксиомы свертывания:

$$(\exists x_1^1)(x_1^0)(x_1^0 \in x_1^1 \leftrightarrow x_1^0 = x_1^0), \quad (\exists x_2^1)(x_1^0)(x_1^0 \in x_2^1 \leftrightarrow x_1^0 \neq x_1^0).$$

С другой стороны, предложение $(\exists x_1^0)(\exists x_2^0)(x_1^0 \neq x_2^0)$ не является истинным в идеальной теории типов, так как существует структура $(T_0, \ldots; =, \in)$, у которой T_0 имеет всего один элемент.

Мы можем, однако, присоединить к идеальной теории типов (и тем более к любой более слабой системе) следующее правило. Если S^+ — теорема, то и S — теорема. Так как такое правило применяется в каждом доказательстве только конечное число раз и так как $(S_1 \wedge S_2 \wedge \ldots \wedge S_m)^+$ есть $S_1^+ \wedge S_2^+ \wedge \ldots \wedge S_m^+$, достаточно доказать только следующий частный случай: предложение S совместимо с идеальной теорией типов, если $S^{+\cdots+}$ есть теорема идеальной теории типов ($S^{+\cdots+}$ получается из S увеличением на m индексов, обозначающих тип). Предложение $S^{+\cdots+}$, будучи теоремой, истинно в каждой структуре $(T_0, T_1, \ldots; =,)$, где T_{k+1} — множество всех подмножеств T_k; если $U_k = T_{k+1}$, то S истинно в структуре $(U_0, U_1, \ldots; =, \in)$, которая, разумеется, тоже является моделью идеальной теории типов.

Теория типов с дополнительным правилом *„Если* $\vdash S^+$, *то* $\vdash S$" тесно связана с теорией отрицательных типов Вана Хао [8]. Он рассматривает последовательности переменных $x_1^k, x_2^k, \ldots$ для любых (положительных и отрицательных) целых чисел; аксиомами являются аксиомы объемности и свертывания (к которым, разумеется, могут быть присоединены другие аксиомы). Легко проверить, что теоремы, доказуемые в теории типов, базирующейся на аксиомах объемности и свертывания (и дополнительном правиле „Если $\vdash S^+$, то $\vdash S$"), совпадают с теоремами теории Вана, не содержащими индексов отрицательных типов. Моделью теории Вана служит структура вида $(\ldots, M_{-2}, M_{-1}, M_0, M_1, \ldots; =, \in)$, где M_k — непустые множества при любом целом k, и $\in$ — отношение между элементами множеств M_k и M_{k+1}. Очевидно, что каждая такая модель приводит к модели $(M_0, M_1, \ldots; =, \in)$ теории типов с дополнительным правилом. Обратное, однако, кажется весьма сомнительным. Эту (предполагаемую сейчас открытой) проблему можно также сформулировать следующим образом. Для каждой ли модели $M = (M_0, M_1, \ldots; =, \in)$ теории типов (базирующейся на аксиомах объемности и свертывания) с дополнительным правилом „Если $\vdash S^+$, то $\vdash S$" существует модель $N = (N_0, N_1, \ldots; =, \in)$, такая, что $N_{k+1} = M_k$ и $a \in_M b$ тогда и только тогда, когда $a \in_N b$?

Ввиду непротиворечивости дополнительного правила „Если $\vdash S^+$, то $\vdash S$" возникает вопрос, нельзя ли присоединить к теории типов эквивалентность „$S^+ \leftrightarrow S$" (где S—предложение), сохранив непротиворечивость теории. Рассмотрим модели $T = (T_0, T_1, \ldots; =, \in)$ и $U = (U_0, U_1, \ldots; =, \in)$ теории типов, где $U_k = T_{k+1}$ и $a \in_U b$ тогда и только тогда, когда $a \in_T b$. Тогда S^+ истинно в T в том и только в том случае, когда S истинно в U; следовательно, эквивалентность „$S \leftrightarrow S^+$" истинна в T тогда и только тогда, когда одни и те же предложения истинны в T и U, т. е. если структуры T и U элементарно эквивалентны. Структуры T и U будут, конечно, элементарно эквивалентными, если они изоморфны; изоморфизм T в U это взаимно однозначное отображение, определенное на объединении множеств T_k так, что образом T_k является T_{k+1} и что $f(a) \in f(b)$ тогда и только тогда, когда $a \in b$. В [7] показано, что существование такой модели теории типов (базирующейся на аксиомах объемности и свертывания) эквивалентно непротиворечивости куайновской теории „New Foundations" [3]. Эквивалентность устанавливается с помощью простого теоретико-модельного рассуждения: если теория „New Foundations" непротиворечива, то она имеет модель $(M, =, \in)$; определим модель $(M_0, M_1, \ldots; =, \in')$ теории типов следующим образом: $M_k (k = 0, 1, \ldots)$ есть множество всех упорядоченных пар (a, k), где $a \in M$ и $(a, k) \in' (b, k+1)$, тогда и только тогда, когда $a \in b$ истинно в M. Из аксиом объемности и свертывания в „New Foundations" легко вывести соответствующие аксиомы теории типов; отображение f, определенное условием $f(a, k) = (a, k+1)$, является, очевидно, изоморфизмом. Если, с другой стороны, существует такая модель теории типов $(M_0, M_1, \ldots; =, \in)$, мы получим модель $(M_0, =, \bar{\in})$, определяя $a \bar{\in} b$ как $a \in f(b)$, где f — изоморфное отображение M_k на M_{k+1}. То же соответствие между существованием модели теории типов с „полной типовой неопределенностью" (complete typical ambiguity") и непротиворечивостью „New Foundations" имеет место, если присоединить к обеим теориям дополнительные аксиомы; такими аксиомами, например, являются аксиома бесконечности и аксиома выбора. В [6] аксиома бесконечности доказывается, а в „New Foundations" аксиома выбора опровергается; отсюда следует, что в каждой модели теории типов (базирующейся на аксиомах объемности и свертывания) с полной типовой неопределенностью аксиома бесконечности истинна, в то время как аксиома выбора не верна. [Аксиома выбора используется в [6] в такой форме: каждое непустое множество кардинальных чисел имеет наименьший элемент; эту формулировку можно в свою очередь вывести в NF из большинства других формулировок аксиомы выбора, например из мультипликативной аксиомы (multiplicative axiom) Рассела.] Из доказательств этих теорем видно, что их можно провести в теории типов с дополнительной схемой аксиом „$S \leftrightarrow S^+$"; более подробное рассмотрение показывает, что для доказательства аксиомы бесконечности достаточно одного частного случая этой схемы, в то время как для опровержения аксиомы выбора необходимы, по-видимому, два частных случая.

Вопрос, каждое ли предложение, истинное в теории типов с полной типовой неопределенностью, можно вывести из дополнительной схемы „$S \leftrightarrow S^+$", поставлен в [7], и в подстрочном примечании на него дан утвердительный ответ; NF является, следовательно, непротиворечивой тогда и только тогда, когда простая теория типов (базирующаяся на аксиомах объемности и свертывания) с дополнительной схемой „$S \leftrightarrow S^+$" непротиворечива. Остальную часть этой статьи мы посвятим изучению взаимоотношения между теоретико-модельными аспектами типовой неопределенности и ее аспектами, относящимися к теории доказательств. Мы намерены доказать следующую теорему.

Если теория типов (базирующаяся на аксиомах объемности и свертывания) с дополнительной схемой „$S \leftrightarrow S^{+a}$ непротиворечива, то существует модель $(M_0, M_1, \ldots; =, \in)$, допускающая изоморфное отображение M_k на M_{k+1}.

Чтобы найти простые общие условия, которые дали бы нам сформулированную выше теорему, мы переформализуем простую теорию типов как односортную теорию. Для этого введем предикаты типов T_0, T_1, ...; аксиомы теории будут задаваться следующими схемами: $x_1 = x_2 \to (T_k(x_1) \to T_k(x_2))$, $x_1 \in x_2 \to (T_k(x_1) \leftrightarrow T_{k+1}(x_2))$, $k = 0, 1, \ldots,$ и схемами аксиом объемности и свертывания (проще всего ввести предикаты типов для каждой переменной, однако это не обязательно). Как и в многосортной теории, поставим в соответствие каждой формуле F формулу F^+, определенную следующим образом: F^+ получается из F заменой T_k на T_{k+1}. Изоморфному отображению M_k на M_{k+1} соответствует теперь взаимно однозначное отображение модели M в себя, такое, что $T_k(a)$ тогда и только тогда, когда $T_{k+1}(a^+)$, и $a \in b$ тогда и только тогда, когда $a^+ \in b^+$ (a^+ — образ a при отображении). Непротиворечивость схемы „$S \leftrightarrow S^+$" (что, как было показано, является необходимым условием для существования такой модели), очевидно, эквивалентна существованию полного расширения теории типов, в котором каждое предложение S истинно тогда и только тогда, когда S^+ истинно. (В таком расширении „$S \leftrightarrow S^+$" истинно; если „$S \leftrightarrow S^+$" — непротиворечивая схема, то каждое полное расширение этой теории обладает нужным свойством.)

Существование моделей теории типов, обладающих изоморфизмом, повышающим тип, вытекает поэтому из следующей теоремы.

Если теория типов полна, то теория с эндоморфизмом имеет модель с соответствующим эндоморфизмом.

(Эта теорема, с заменой слова „эндоморфизм" на „автоморфизм", формулируется без доказательства в [7]; приведенные там простые примеры показывают, что условие полноты необходимо.)

В следующем определении понятия эндоморфизма теории мы не стремимся к общности, так как имеется еще более общая теорема, принадлежащая Р. Л. Вооту.

Эндоморфизм теории (первого порядка и односортной) — это отображение множества ее формул в себя, такое, что выполняются следующие условия: 1) образ F^* формулы F имеет те же свободные переменные, что и F; 2) отображение * коммутирует с логическими операциями и с заменой переменных, т. е. $(A \wedge B)^*$ есть $A^* \wedge B^*$ и т. д., $[(\exists x_1) A]^*$ есть $(\exists x_1) A^*$, $\left(A(x_{k_1}, \ldots, x_{k_m})\right)^*$ есть $A^*(x_{k_1}, \ldots, x_{k_m})$ [здесь и дальше $A(c_1, \ldots, c_m)$ получается из A подстановкой термов c_i вместо переменных x_i, $i = 1, 2, \ldots, m$]; 3) образом отношения равенства является отношение равенства, т. е. $(x_1 = x_2)^*$ есть $x_1 = x_2$; 4) образом истинного предложения является истинное предложение (тот факт, что образом предложения будет предложение, следует из условия 1).

Отображение, индуцируемое на формулах теории типов заменой T_k на T_{k+1}, является, очевидно, эндоморфизмом в смысле нашего определения.

Пусть T — теория с эндоморфизмом *; отображение * модели M теории T в себя называется соответствующим эндоморфизмом, если для каждого примитивного предиката R из T высказывание $\tilde{R}^*(e_1^*, \ldots, e_m^*)$ истинно в M тогда и только тогда, когда $\tilde{R}(e_1, \ldots, e_m)$ истинно. (Тильда означает переход от формального предиката к его интерпретации; e^* — образ e при отображении * модели M; если теория T содержит функции, то предикаты вида $f(x_1) = x_2$ рассматриваются как примитивные.)

Мы дадим краткое описание построения модели, допускающей эндоморфизм *; это построение получится (в силу первой леммы) из доказательства полноты, подобного известному доказательству Генкина; редукция, сходная с той, которая содержится в этой лемме, имеется в [1].

Лемма. *Пусть T — полная теория с эндоморфизмом *, A — формула, содержащая только одну свободную переменную x_1, P_i $(i = 1, \ldots, m)$ — формулы, не содержащие свободных переменных, отличных от $x_1, \ldots, x_n$, и, наконец, $1 \leqslant k \leqslant n+1$. Тогда любая модель M теории T содержит элементы $e_1, \ldots, e_{n+1}$, такие, что следующие высказывания истинны в M:* $(\exists x_1)\tilde{A}(x_1) \to \tilde{A}(e_k)$, $\tilde{P}_i(e_1, e_2, \ldots, e_n) \leftrightarrow \tilde{P}_i^*(e_2, e_3, \ldots, e_{n+1})$, $i = 1, \ldots, m$.

Доказательство проводится индукцией по n. При $n = 0$ формулы P_i и P_i^* являются высказываниями и эквивалентности $P_i \leftrightarrow P_i^*$ $(i = 1, \ldots, m)$ истинны по условию 4 и в силу полноты теории T; в M существует элемент e_1, такой, что $(\exists x_1)\tilde{A}(x_1) \to \tilde{A}(e_1)$ истинно в M.

Проведем индуктивный шаг. Пусть P^ε $(\varepsilon = 0,1)$ есть P или $\neg P$ в соответствии с тем, чему равно ε, 0 или 1. Предположим, что $1 \leqslant k \leqslant n$. Рассмотрим $Q_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m}$, определенное как $(\exists x_n) \bigwedge P_i^{\varepsilon_i}$ ($\bigwedge P_i^{\varepsilon_i}$ — конъюнкция членов $P_1^{\varepsilon_1}, \ldots, P_m^{\varepsilon_m}$); по условию 2, $Q^*_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m}$ есть $(\exists x_n) \bigwedge P_i^*$. По предположению индукции, существуют элементы $e_1, \ldots, e_n$ в M, такие, что следующие предложения истинны в M для всех последовательностей $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$:

$$(\exists x_1)\tilde{A}(x_1) \to \tilde{A}(e_k),\quad \tilde{Q}_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m}(e_1, \ldots, e_{n-1}) \leftrightarrow \tilde{Q}^*_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m}(e_2, \ldots, e_n).$$

Выберем η_i $(i = 1, \ldots, m)$ так, чтобы предложение $\tilde{P}_i^{\eta_i}(e_1, \ldots, e_n)$ было истинным в M. Тогда $\tilde{Q}^*_{\eta_1, \ldots, \eta_m}(e_1, \ldots, e_{n-1})$ истинно в M

так же, как и $\widetilde{Q}^{*}_{\eta_1, \ldots, \eta_m}(e_2, \ldots, e_n)$, или, что то же самое, $(\exists x_n) \wedge \wedge \widetilde{P}_i^{*\eta_i}(e_2, \ldots, e_n, x_n)$, т. е. существует элемент e_{n+1}, такой, что $\widetilde{P}_i^{*\eta_i}(e_2, \ldots, e_{n+1})$ истинно $(i = 1, \ldots, m)$, и мы имеем $\widetilde{P}_i(e_1, \ldots, e_n) \longleftrightarrow \widetilde{P}_i^{*}(e_2, \ldots, e_{n+1})$.

Если же $k = n + 1$, рассмотрим формулу $R_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m}$, определенную как $(\exists x_n) \wedge P_{\varepsilon_i}(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})$. По предположению индукции, существуют элементы $e_2, \ldots, e_{n+1}$, такие, что $(\exists x_1) \widetilde{A}(x_1) \rightarrow \widetilde{A}(e_{n+1})$ и $\widetilde{R}_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m}(e_1, \ldots, e_n) \longleftrightarrow \widetilde{R}^{*}_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m}(e_2, \ldots, e_{n+1})$ истинны в M для всех последовательностей $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$. Выберем η_i так, чтобы $\widetilde{P}_i^{*\eta_i}(e_2, \ldots, e_{n+1})$ было истинным в $M (i = 1, \ldots, m)$, и найдем элемент e_1, такой, что $P_i^{\eta_i}(e_1, \ldots, e_n)$ истинно $(i = 1, \ldots, m)$; тогда $\widetilde{P}_i(e_1, \ldots, e_n) \longleftrightarrow \widetilde{P}_i^{*}(e_2, \ldots, e_{n+1})$.

Доказательства следующих двух лемм получаются теперь непосредственно:

1) Пусть T — полная теория, допускающая эндоморфизм $*$, A — формула, содержащая только одну свободную переменную x_1. Тогда T можно расширить до полной теории T', имеющей в дополнение к константам теории T последовательность $a_k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ новых индивидных констант и новую аксиому $(\exists x_1) A(x_1) \rightarrow A(a_0)$, такую, что следующее продолжение эндоморфизма $*$ теории T является эндоморфизмом теории T': $[B(x_1, \ldots, x_j, a_{k_1}, \ldots, a_{k_m})]^{*}$ есть $B^{*}(x_1, \ldots, x_j, a_{k_1+1}, \ldots, a_{k_m+1})$.

2) Пусть T — полная теория, допускающая эндоморфизм $*$. Тогда существует полное расширение T'' теории T с новыми индивидными константами $a_k^i (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; i \in I$, где I произвольно, а в случае счетной теории в качестве I можно взять множество натуральных чисел), такими, что выполняются следующие условия: для каждой формулы A из T'', содержащей свободно только x_1, существует элемент i из I, такой, что $(\exists x_1) A(x_1) \rightarrow A(a_0^i)$; если Q есть формула из T, не имеющая свободных переменных, кроме $x_1, \ldots, x_m$, следующее высказывание истинно в T'':

$$Q\left(a_{k_1}^{i_1}, \ldots, a_{k_m}^{i_m}\right) \longleftrightarrow Q^{*}\left(a_{k_1+1}^{i_1}, \ldots, a_{k_m+1}^{i_m}\right).$$

Модель теории T, имеющую эндоморфизм $*$, можно теперь построить, выбирая в качестве M множество индивидных констант a_k^i, определяя примитивные предикаты так, как они были определены в расширении T'' теории T, и полагая $\left(a_k^i\right)^{*} = a_{k+1}^i$.

Как заметил Скотт [5], существование такой модели можно также вывести непосредственно из теоремы Робинсона [4].

То же самое рассуждение дает даже более сильную теорему Воота (которая, как заметил Воот, в свою очередь влечет упомянутую выше теорему Робинсона). В теореме Воота теория T (относительно) интерпретируется двумя способами в теории T'.

Такая интерпретация дается формулой K из T' (с одной свободной переменной) и формулами F_i из T' для каждого примитивного предиката P_i из T; F_i имеют те же свободные переменные, что и P_i (удобно предполагать, что ни T, ни T' не содержат символов функций). Формула из T переводится в формулу из T' заменой P_i на F_i и ограничением кванторов формулой K; такой перевод является интерпретацией, если $(\exists x_1) K$ истинно в T' (в предположении, что x_1 является свободной переменной формулы K) и если каждая аксиома теории T переводится в доказуемое предложение из T'. (Классическим примером такой интерпретации является интерпретация неевклидовой геометрии в евклидовой геометрии; K истинно для точек внутренней области единичного круга.) Если теория T интерпретируется в теории T', то существует естественное отображение моделей теории T' в модели теории T: область (domain) модели теории T задается элементами, для которых K истинно, а предикаты P_i определяются формулами F_i.

Теорема (Воот). *Если полная теория T интерпретируется двумя способами в теории T', то существует модель теории T', такая, что соответствующие две модели теории T изоморфны.*

Чтобы вывести теорему о существовании моделей с эндоморфизмами из теоремы Воота, мы просто интерпретируем теорию T в терминах самой T следующими двумя способами: K истинно в обеих интерпретациях, а P_i интерпретируется в одном случае как P_i и в другом как P_i^{*}. (Имеется старая неопубликованная теорема Морли, тесно связанная с этой: если $(A; R_0, R_1, \ldots; a_0, a_1, \ldots, a_\xi, \ldots)$ и $(A; R_0, R_1, \ldots; b_0, \ldots, b_\xi, \ldots)$ — элементарно эквивалентные структуры и если f определено на $(a_0, \ldots, a_\xi, \ldots)$ так, что $f(a_\xi) = b_\xi$, то $(A, R_0, R_1, \ldots)$ можно вложить в $(A', R_0', R_1^1, \ldots)$, имеющую автоморфизм, продолжающий f.)

Сведéние (по Скотту) теоремы Воота к теореме Робинсона состоит в следующем. Предполагают, что теория T' тоже полная и что T и T' не имеют общих предикатов и не содержат символов функций, и определяют *дизъюнктное объединение* T^{*} двух таких теорий T_1 и T_2: примитивными предикатами теории T^{*} являются примитивные предикаты теорий T_1 и T_2 и два новых одноместных предиката K_1, K_2. Аксиомами теории T^{*} являются, во-первых, релятивизированные по K_i-элементам аксиомы теории T_i $(i = 1, 2)$; во-вторых, аксиома, утверждающая, что каждый элемент является либо K_1-, либо K_2-элементом, что нет элементов, являющихся и K_1- и K_2-элементами, и что существуют элементы обоих видов; наконец, аксиомы, утверждающие, что примитивный предикат из T_i истинен в T^* только тогда, когда все его аргументы являются K_i-элементами ($i = 1, 2$).

Лемма. *Дизъюнктное объединение двух полных теорий является полной теорией* [1]).

Схема доказательства приводится в конце статьи.

Интерпретация теории T в теории T' индуцирует две интерпретации T в дизъюнктном объединении теорий T и T': одна из них получается, если предикаты из T интерпретировать как те же самые предикаты в T^*; другая получается интерпретацией T в T' и T' в T^*. Существуют модели теории T^*, такие, что эти две интерпретации изоморфны. Чтобы показать это, определим дизъюнктное объединение двух структур (систем отношений) M_1 и M_2 без общих отношений и с непересекающимися основными множествами. Основное множество B^* объединения M^* есть теоретико-множественное объединение множеств B_1 и B_2; отношениями структуры M^* являются отношения из M_1 и M_2, расширенные на B^* следующим образом: если R — отношение из M_i, то $R(a_1, \ldots, a_m)$ истинно тогда и только тогда, когда все a_j являются элементами из B_i и отношение истинно в M_i. Если M_i есть модель теории T_i ($i = 1, 2$), то дизъюнктное объединение M_1 и M_2 (с очевидным определением K_1, K_2) является моделью дизъюнктного объединения теорий T_1 и T_2 и каждая модель объединения T^* имеет такой вид. Пусть задана интерпретация теории T в T'; рассмотрим произвольную модель M' теории T'; тогда интерпретация определяет модель M теории T (которую можно выбрать так, чтобы множество, являющееся ее областью, было дизъюнктным); две интерпретации теории T в дизъюнктном объединении T^* будут, очевидно, индуцировать изоморфные модели теории T в модели M^* теории T^*.

Пусть теперь T_0^* есть следующее расширение дизъюнктного объединения T^* теорий T и T': константами теории T_0^* являются константы из T^* и новый символ одноместной функции f, аксиомами в T_0^* являются аксиомы теории T^* и новая аксиома, утверждающая, что f есть изоморфизм одной интерпретации на другую. Так как существует модель теории T^*, в которой две интерпретации изоморфны, то существует модель теории T_0^*, и эта теория непротиворечива; с другой стороны, каждая модель теории T_0^* определяет модель теории T^*, в которой эти две интерпретации изоморфны.

[1]) Эта лемма является непосредственным следствием более сильной теоремы о дизъюнктных объединениях теорий, опубликованной Феферманом в работе „Some operations on relational systems“, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **61** (1955), 172.

Рассмотрим теперь полную теорию T, интерпретируемую двумя способами в полной теории T'. Расширим дизъюнктное объединение T^* указанным выше образом до двух теорий T_1^* (новый символ функции f_1) и T_2^* (новый символ функции f_2) в соответствии с двумя интерпретациями. Обе эти теории непротиворечивы, и, как следует из теоремы Робинсона [4], их объединение также непротиворечиво (константами этого объединения являются константы теории T^* и f_1, f_2, аксиомами — аксиомы T_1^* и T_2^*; существенно, что общая часть T^* этих двух теорий является полной). Модель этого объединения определяет модель теории T^*, в которой обе интерпретации T в T' изоморфны интерпретации T в T^*; индуцированная модель теории T' является, следовательно, моделью с изоморфными интерпретациями теории T.

В заключение приведем схему доказательства леммы, утверждающей, что дизъюнктное объединение двух полных теорий является полной теорией. Теория полна тогда и только тогда, когда все ее модели элементарно эквивалентны. Каждая модель дизъюнктного объединения двух теорий является дизъюнктным объединением моделей этих теорий.

Достаточно поэтому доказать следующую лемму о дизъюнктных объединениях структур: если M_i и N_i — элементарно эквивалентные структуры ($i = 1, 2$), то таковыми же будут и дизъюнктные объединения M^* (структур M_1 и M_2) и N^* (структур N_1 и N_2). Эта эквивалентность является непосредственным следствием характеристики элементарно эквивалентных структур, данной Фраиссе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ehrenfeucht A., Mostowski A., Models of axiomatic theories admitting automorphisms, *Fund. Math.*, **43** (1956), 50—68.
2. Fraissé R., Application des γ-opérateurs au calcul logique du premier échelon, *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, **2** (1956), 76—92.
3. Quine W. V., New Foundations for Mathematical Logic, *Am. Math. Monthly*, **44** (1937), 70—80.
4. Robinson A., A result on consistency and its application to the theory of definition, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser.* A 59; *Indag. Math.*, **18** (1956), 47—58.
5. Scott D., Review of [7], *Math. Review*, **21** (1960), 1026.
6. Specker E., The axiom of choice in Quine's New Foundations for Mathematical Logic, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **29** (1953), 366—368.
7. Specker E., Dualität, *Dialectica*, **12** (1958), 451—465.
8. Wang Hao, Negative Types, *Mind*, **61** (1952), 366—368.

Некоторые проблемы и результаты, связанные с основаниями теории множеств[1])

А. ТАРСКИЙ

Калифорнийский университет, Беркли, Калифорния, США

Введение

В теории множеств и в связанных с ней областях математики известны многочисленные проблемы, которые могут быть выражены в следующем виде. Каждая из проблем состоит в определении всех (бесконечных) кардинальных чисел, которые обладают данным свойством P. Известно при этом, что наименьшее бесконечное кардинальное число ω не обладает данным свойством. Пусть также все достижимые кардинальные числа, т. е. все кардинальные числа, которые не являются (сильно) недостижимыми, обладают свойством P. Тем не менее до недавнего времени оставалась открытой проблема о том, будут ли какие-либо (или, может быть, все) недостижимые кардинальные числа, большие чем ω, обладать этим свойством. Казалось даже вероятным, что решение ее для недостижимых кардинальных чисел требует введения некоторых новых теоретико-множественных аксиом, которые будут существенно отличаться своим характером не только от обычных аксиом теории множеств, но также от тех гипотез, которые в литературе обычно включают в число аксиом (такие, как обобщенная континуум-гипотеза или различные гипотезы, которые обеспечивают существование недостижимых кардинальных чисел). Значение этих проблем увеличивается благодаря простоте их формулировок и ясности их математического содержания[2]).

Однако против всякого ожидания оказалось, что большинство обсуждаемых проблем может быть решено для большого класса недостижимых кардинальных чисел без помощи каких-либо дополнительных аксиом и что эти кардинальные числа ведут себя подобно всем достижимым кардинальным числам в отличие от наименьшего недостижимого кардинального числа ω.

---

[1]) Tarski A., Some problems and results relevant to the foundations of set theory, стр. 125—135.

Результаты, сообщаемые в этой статье, были получены автором, когда он работал в исследовательской группе по основаниям математики, финансируемой Национальным научным фондом США.

[2]) Некоторые проблемы этого рода обсуждались в [1, стр. 326—329] и частично в [8, разд. 3 и 4]; в обеих статьях есть ссылки на более ранние публикации. Статья, содержащая полное представление результатов, упомянутая в [1, стр. 328, сноска 4], уже вышла из печати.

В данной статье мы хотим коротко сообщить некоторые результаты в этом направлении, оставляя детальное проведение доказательств (а также и полное изложение всех полученных результатов) для дальнейших публикаций. В разд. 1 мы излагаем метаматематический результат, который был недавно получен Ханфом (как решение проблемы, предложенной автором) и который играет существенную роль в дальнейших обсуждениях. В разд. 2 мы займемся некоторыми частично решенными за последнее время чисто математическими проблемами, касающимися недостижимых кардинальных чисел.

В качестве теоретической основы для наших обсуждений мы можем выбрать одну из хорошо известных аксиоматических систем теории множеств, например систему Цермело—Френкеля (с аксиомой регулярности) или систему Бернайса. Мы предполагаем, что ординальное число можно определить таким образом, что всякое ординальное число совпадает с множеством всех меньших ординальных чисел и что отношение порядка $<$ между ординальными числами совпадает с отношением принадлежности $\in$. *Кардинальные числа* отождествляются с теми ординальными α, которые имеют большую мощность, чем все наименьшие ординальные $\xi < \alpha$, таким образом, ординальное число α тогда и только тогда является кардинальным, когда α либо конечно ($\alpha < \omega$), либо имеет вид $\alpha = \omega_\xi$ для некоторого ординального α. Для данного ординального α мы через 2^α обозначим кардинальное число, которое обладает той же мощностью, что и множество всех подмножеств α. Существование кардинального числа 2^α обеспечивается принципом полной упорядочиваемости.

Бесконечное кардинальное число α называется *сингулярным*, если оно конфинально с некоторым меньшим кардинальным числом β, другими словами, если его можно представить как сумму β кардинальных чисел, меньших чем α; в противном случае α называется регулярным. Будем говорить, что α — достижимое кардинальное число, если оно сингулярно, или существует такое ординальное число β, что выполняется $\beta < \alpha \leqslant 2^\beta$; если никакое из этих двух условий не выполняется, то α называется (*сильно*) *недостижимым* [12]. Предполагаем также, что все недостижимые кардинальные числа расположены в трансфинитную возрастающую последовательность $\Theta_0, \Theta_1, \ldots, \Theta_\xi, \ldots$ Таким образом, $\Theta_0 = \omega$ и Θ_ξ есть наименьшее недостижимое кардинальное число большее, чем Θ_ζ для каждого $\zeta < \xi$. Хорошо известно, что существование кардинальных чисел Θ_ξ при $\xi \geqslant 1$ нельзя установить в теории множеств Бернайса или Цермело—Френкеля. Однако проблема существования не входит в цели нашего обсуждения; при доказательстве всех приводимых ниже результатов относительно кардинальных чисел Θ_ξ, $\xi \geqslant 1$, предполагается, что существование кардинальных чисел, о которых пойдет речь, установлено.

С каждым множеством A мы связываем некоторое ординальное число $\rho(A)$, называемое рангом множества A, таким образом, что $\rho(A)$ является наименьшим ординальным числом, большим чем все ординальные числа $\rho(x)$, связанные с элементами x из A. Множество всех множеств, ранги которых меньше, чем ординальное число γ, обозначим через $R(\gamma)$.

Раздел 1

Первый результат, который недавно получен для недостижимых кардинальных чисел, не является теоретико-множественным, а носит метаматематический характер; он касается так называемой проблемы компактности для логики предикатов с бесконечно длинными формулами, которая кратко обсуждалась автором в [10].

Пусть L_ω — обычная логика предикатов (первого порядка). Пусть для любого данного регулярного α L_α есть логическая система, которая отличается от L_ω в следующем: (I) существуют α *различных* предметных переменных в L_α, расположенных в трансфинитную последовательность $v_0, v_1, \ldots, v_\xi, \ldots (\xi < \alpha)$; (II) каждая формула в L_α есть последовательность символов типа $< \alpha$; (III) при построении сложных *формул* из атомарных добавляются некоторые новые операции (дополнительно к имеющимся в L_ω), а именно образование *дизъюнкции и конъюнкции*,

$$\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi \text{ и } \bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi,$$

из любой последовательности формул $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\xi, \ldots$, тип γ которой является произвольным ординальным числом $< \alpha$, а также и навешивание кванторов общности и существования

$$(\forall v_{\gamma_\xi})_{\xi<\gamma}\varphi \text{ и } (\exists v_{\gamma_\xi})_{\zeta<\gamma}\varphi$$

на формулу φ при любой последовательности переменных $v_{\gamma_0}, v_{\gamma_1}, \ldots v_{\gamma_\xi}, \ldots$, тип γ которой является произвольным ординальным числом $< \alpha$. (Можно заметить, что для сингулярных кардинальных чисел α логику L_α с этими свойствами нельзя построить; действительно, как легко заметить, условия (II) и (III) в этом случае несовместимы.)

Нетрудно распространить на логику L_α основные семантические понятия, такие, как понятия *выполнимости* и *модели*. Для целей, обсуждаемых в настоящем разделе, мы можем предполагать, что единственной не логической константой в L_α является бинарный предикат $\in$, и, следовательно, каждая атомарная формула имеет вид

$$v_\xi = v_\zeta \text{ или } v_\xi \in v_\zeta$$

для некоторых $\xi, \zeta < \alpha$. При этом предположении моделями для любого данного множества предложений S (формул без свободных

переменных) в L_α являются структуры вида $\langle A, E\rangle$, где A — непустое множество и E — бинарное отношение между элементами A. Такая структура считается теоретико-множественной моделью, если E совпадает с отношением $\in_A$, т. е. с отношением принадлежности, ограниченным элементами A. Теоретико-множественная модель $\langle A, \in_A\rangle$ называется *транзитивной*, если из условий $x \in A$ и $y \in x$ всегда следует, что $y \in A$; она называется натуральной, если A совпадает с $R(\gamma)$ для некоторого ординального числа γ. Ясно, что всякая натуральная модель является транзитивной.

Проблема компактности для логики L_α — это проблема определения всех кардинальных чисел α, для которых выполняется следующая теорема компактности.

Если S — произвольное множество предложений L_α, каждое подмножество которого мощности $< \alpha$ обладает моделью, то S также обладает моделью.

Из-за отсутствия лучшего термина мы будем называть кардинальные числа α, для которых выполняется теорема компактности, компактными кардинальными числами. Остальные бесконечные кардинальные числа, включая все сингулярные, будем называть некомпактными. В частности, кардинальное число α будем называть *сильно некомпактным*, если либо оно сингулярно, либо существует множество S предложений в логике L_α мощности α, которое не обладает моделью, хотя каждое его подмножество мощности $< \alpha$ обладает моделью.

Хорошо известно, что кардинальное число ω компактно. Известно также, что все достижимые кардинальные числа некомпактны [1]). По предложению автора этой статьи, Ханф изучал проблему компактности для логик L_α с недостижимыми α и установил следующий результат [2].

Теорема 1. *Каждое кардинальное число α вида $\alpha = \Theta_\xi$, $0 < \xi < \alpha$, сильно некомпактно.*

Мы наметим лишь в общих чертах доказательство Ханфа, ограничиваясь для простоты случаем $\alpha = \Theta_1$. Для данного произвольного $\xi < \alpha$ мы легко можем построить формулу φ_ξ в L_α с единственной свободной переменной v_ξ, которая определяется числом ξ в следующем смысле: для данной любой транзитивной теоретико-множественной модели $\langle A, \in_A\rangle$ элемент $x \in A$ удовлетворяет φ_ξ в этой модели

[1]) Известно, что свойство P_0, сформулированное в разд. 2, применимо к каждому достижимому кардинальному числу α; см., например, [8, стр. 257, следствие 3.7]. Поэтому мы заключаем, что в логике L_α (фактически в исчислении высказываний, соответствующем этой логике) существует множество S аксиом, которое не обладает моделью, хотя каждое подмножество S мощности $<\alpha$ обладает моделью. Этот результат (неявно) упоминается в [7, стр. 170].

тогда и только тогда, когда $x = \xi$. Мы можем взять, например, в качестве φ_ξ следующую формулу:

$$(\exists v_\zeta)\,\zeta < \xi \wedge \zeta < \xi + 1\,(\forall v_{\xi+1})(v_{\xi+1} \in v_\zeta \longleftrightarrow \bigvee\nolimits_{\eta<\xi} v_{\xi+1} = v_\eta).$$

Пусть $\bar{\varphi}_\xi$ есть предложение

$$(\exists v_\xi)\,\varphi_\xi.$$

Мы также можем построить формулу ψ_0 с единственной свободной переменной v_0, которая определяет понятие ординального числа (в терминах включения) в том смысле, что ψ_0 удовлетворяется в любой транзитивной модели $\langle A, \in_A\rangle$ теми и только теми элементами $\xi \in A$, которые являются ординальными; такая формула ψ_0 известна в литературе. Далее, мы можем построить формулу ψ_1, снова с единственной свободной переменной v_0, которая обладает следующими свойствами: (I) Θ_1 не удовлетворяет ψ_1 в любой транзитивной модели $\langle A, \in_A\rangle (\Theta_1 \in A)$; (II) каждое ординальное число $\xi < \Theta_1$ удовлетворяет ψ_1 в любой натуральной модели $\langle R(\gamma), \in_{R(\gamma)}\rangle$, где $\gamma > \xi$.

Для построения ψ_1 мы непосредственно выразим тот факт, что элемент ξ, представляемый v_0, является ординальным числом (т. е. выполняет ψ_0) и либо равен нулю, либо равен ω, либо конфинален с некоторым наименьшим ординальным числом ζ, либо, наконец, удовлетворяет условию $\xi \leqslant 2^\zeta$ для некоторого меньшего ζ. Пусть $\bar{\psi}_0$ и $\bar{\psi}_1$ соответственно представляют собой следующие два предложения:

$$(\exists v_0)(\psi_0 \wedge \neg(\exists v_1)(v_0 \in v_1)),$$
$$(\forall v_0)(\psi_0 \rightarrow \psi_1).$$

Наконец, пусть τ_0 — обычная аксиома объемности в теории множеств

$$(\forall v_0)(\forall v_1)[(\forall v_2)(v_2 \in v_0 \longleftrightarrow v_2 \in v_1) \rightarrow v_0 = v_1],$$

и пусть τ_1 — аксиома регулярности в следующей формулировке:

$$(\forall v_\xi)_{\xi<\omega} \neg \bigwedge\nolimits_{\xi<\omega} (v_{\xi+1} \in v_\xi).$$

Рассмотрим множество S, состоящее из всех аксиом $\bar{\varphi}_\xi, \xi < \Theta_1$, и из четырех аксиом $\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1, \tau_0$ и τ_1. Очевидно, что мощность S равна Θ_1. Пусть X — любое подмножество S с мощностью $< \Theta_1$. Тогда существует ординальное число $\gamma < \Theta_1$, такое, что из $\bar{\varphi}_\xi \in X$ следует $\xi < \gamma$ для каждого ξ и, как легко заметить, структура $\langle R(\gamma+1), \in_{R(\gamma+1)}\rangle$ является натуральной моделью множества X. С другой стороны, известно из литературы, что, если все множество S обладает моделью $\langle A, E\rangle$, оно также обладает транзитивной теоретико-множественной моделью $\langle B, \in_B\rangle$, изоморфной с $\langle A, E\rangle$; это следует из того факта, что τ_0 и τ_1 принадлежат S [6, стр. 147, теорема 3]. Так как $\bar{\varphi}_\xi \in S$ для каждого $\xi < \Theta_1$, B содержит в качестве элементов все ординальные числа $< \Theta_1$. В силу $\bar{\psi}_0$, B имеет наибольшее ординальное число, скажем β, такое что $\Theta_1 \leqslant \beta$, т. е. $\Theta_1 \in \beta$ или $\Theta_1 = \beta$. Так как модель $\langle B, \in_B\rangle$ транзитивна, отсюда следует, что $\Theta_1 \in B$. Далее, в силу $\bar{\psi}_1$ Θ_1 удовлетворяет ψ_1, что приводит к противоречию. Таким образом, множество S не обладает моделью, и, следовательно, доказательство теоремы закончено [1]).

Теорема 1, конечно, не является самым сильным из полученных до сих пор результатов по проблеме компактности. Как было указано Ханфом, его конструкция множества S существенно зависит от двух фактов: (I) для каждого регулярного кардинального числа $\alpha > \omega$ мы можем формулировать в L_α аксиому регулярности τ_1; (II) для $\alpha = \Theta_1$ (и, более общее, для $\alpha = \Theta_\xi$, где $\xi < \alpha$) мы можем в некотором смысле описать в L_α свойство быть ординальным числом $< \alpha$. Эти два факта применяются к большим классам кардинальных чисел α, которые не участвуют в теореме I. Во-первых, Ханф доказал, что все кардинальные числа, принадлежащие некоторому множеству выделенных классов достижимых кардинальных чисел, являются не только некомпактными, но также сильно некомпактными. Это имеет место, в частности, для класса всех кардинальных чисел α вида $\alpha = \omega_{\xi+1}$ и $\alpha = 2^\beta$, где ξ — любое ординальное число, β — любое кардинальное число, в предположении справедливости обобщенной континуум-гипотезы $\left(2^{\omega_\xi} = \omega_{\xi+1}\right.$ для каждого ординального числа $\left.\xi\right)$ этот результат показывает, что все достижимые кардинальные числа являются сильно некомпактными. Во-вторых, если трансфинитная последовательность кардинальных чисел $\Theta_0, \Theta_1, \ldots, \Theta_\xi, \ldots$ обладает фиксированной точкой (т. е. существует кардинальное число α, для которого $\Theta_\alpha = \alpha$), то их можно снова расположить в возрастающую трансфинитную последовательность $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_\xi, \ldots$, и Ханф показал, что все кардинальные числа $\alpha = \Gamma_\xi$, $\xi < \alpha$, являются некомпактными. Этот процесс можно продолжать бесконечно, можно получить более сильные результаты, рассматривая некоторые классы довольно больших недостижимых кардинальных чисел, так называемых *гипернедостижимых* кардинальных чисел различных типов, обсуждаемых в (4). Ни одно из кардинальных чисел $\Theta_\xi\,(\xi < \Theta_\xi)$, $\Gamma_\xi\,(\xi < \Gamma_\xi)$ и т. д. не является гипернедостижимым кардинальным числом типа I. Ханф доказал, что вообще всякое недостижимое кардинальное число $\alpha > \omega$, которое не является гипернедостижимым кардинальным числом типа I, является сильно некомпактным и что этот результат распространяется на все недостижимые кардинальные числа $\alpha > \omega$, которые не являются гипернедостижимыми типа α; им также

[1]) Конструкция множества S аналогична известной конструкции множества предложений (в логиках высших степеней), которое не противоречиво но ω-противоречиво [9, стр. 289 и далее].

были получены те же самые выводы для различных трансфинитных последовательностей кардинальных чисел α, которые являются гипернедостижимыми типа α. Вопрос о том, существует ли компактное кардинальное число $\alpha > \omega$, остается открытым; кроме того, мы не знаем ни одного примера кардинального числа $\alpha > \omega$, которое обладает „конструктивной характеристикой“ (в некотором весьма общем и довольно широком смысле этого слова) и для которого мы не можем доказать его некомпактность и сильную некомпактность.

Раздел 2

Мы теперь сформулируем теорему, которая служит как бы переходным мостом от теоремы 1 (и более общих метаматематических результатов, упомянутых в разд. 1) к некоторым чисто математическим следствиям.

Понятия *булевой алгебры*, *идеала*, *главного идеала* и *примарного идеала* в такой алгебре предполагаются известными. Для произвольного кардинального числа α булева алгебра $\mathfrak{A}$ называется α-полной, если для каждого множества X элементов из $\mathfrak{A}$ мощности $< \alpha$ сумма $\sum_{y \in X} y$ существует; алгебра $\mathfrak{A}$ называется *полной*, если она α-полна для каждого кардинального числа α; α-полная булева алгебра $\mathfrak{A}$ называется *α-дистрибутивной*, если

$$\prod_{i \in I} \sum_{j \in J_i} x_{i,j} = \sum_{f \in F} \prod_{i \in I} x_{i, f(i)},$$

где I и все J_i $(i \in I)$ являются некоторыми множествами мощности $< \alpha$, F — декартово произведение всех множеств J_i (т. е. множество всех функций f над I, таких, что $f(i) \in J_i$ для $i \in I$) и $x_{i,j}$ $(i \in I, j \in J_i)$ — любые элементы алгебры. Идеал I в α-полной булевой алгебре $\mathfrak{A}$ называется *α-полным*, если каждая сумма меньше чем α элементов из I сама является элементом из I; он называется *α-насыщенным*, если каждое множество попарно различных элементов $\mathfrak{A}$, которое не принадлежит I, имеет мощность $< \alpha$. Вместо „ω_1-полноты“, „ω_1-дистрибутивности“ часто употребляются термины „счетная полнота“ и „счетная дистрибутивность“. Булева алгебра, в которой все элементы являются множествами и основными операциями являются известные теоретико-множественные операции образования объединения, пересечения и дополнения, называется *алгеброй множеств*; она называется α-полной алгеброй множеств, если она α-полна как булева алгебра и если суммы меньше α элементов всегда совпадают с объединениями этих элементов. (Таким образом, алгебра множеств может быть α-полной как булева алгебра и не быть α-полной алгеброй множеств в широком смысле.)

Теорема 2. *Каждое сильно некомпактное кардинальное число α обладает следующим свойством P_0: в алгебре множеств, образованной всеми подмножествами α (или любым множеством мощности α), каждый α-полный примарный идеал является главным идеалом.*

Для понимания идеи доказательства сначала заметим, что свойство P_0, очевидно, применимо к каждому сингулярному α, так что можно предположить, что α — регулярное кардинальное число. Удобно рассматривать отрицательную форму нашей теоремы: из отрицания P_0 следует, что α не является сильно некомпактным; другими словами, из утверждения о том, что в алгебре множества всех подмножеств α существует α-полный не главный примарный идеал, следует, что теорема компактности для множеств предложений мощности α верна в логике L_α. Эта импликация для $\alpha = \omega$ известна в литературе. Ее наиболее прямое доказательство, использующее понятие ультрапроизведения, коротко намечено в [5]; для этой цели можно использовать также некоторые рассуждения, с помощью которых теорема полноты для обычной логики L_ω выводится из теоремы о примарных идеалах булевой алгебры. Анализируя эти доказательства, мы заметим, что с помощью соответствующих изменений их можно обобщить для получения рассматриваемой импликации для каждого регулярного α.

Непосредственным следствием теорем 1 и 2 является следующий результат.

Теорема 3. *Каждое кардинальное число α вида $\alpha = \Theta_\xi$, где $0 < \xi < \alpha$, обладает свойством P_0 теоремы 2.*

Этот результат в отличие от теорем 1 и 2 носит чисто математический характер, хотя в его доказательстве, в том виде как оно приведено выше, применяются, конечно, метаматематические приемы. Однако в принципе можно перевести это доказательство на математический язык. В самом деле, можно заменить метаматематическое определение сильно некомпактного кардинального числа эквивалентным ему математическим определением и освободиться от метаматематической терминологии в доказательствах теорем 1 и 2. Этого можно достичь, например, применяя метод, развиваемый автором в [11]. Прямое и относительно простое доказательство теоремы 3, которое проведено чисто математически и отличается от приведенного здесь, дано Кейслером [3].

В литературе явно и неявно обсуждаются многочисленные свойства бесконечных кардинальных чисел, тесно связанные с P_0. Некоторые из них носят чисто теоретико-множественный характер, другие формулируются метаматематически, алгебраически, аналитически или топологически. Многие из них, как нетрудно показать, относятся ко всем сильно некомпактным кардинальным числам, подобно P_0. Не стремясь исчерпать всю тематику, в данной статье мы даем некоторые образцы таких свойств в следующей теореме.

Теорема 4. *Каждое сильно некомпактное кардинальное число* α, *и в частности каждое кардинальное число* α *вида* $\alpha = \Theta_\xi$, *где* $0 < \xi < \alpha$, *обладает следующими свойствами.*

P_1. *Всякая функция* F, *определенная на классе* G *всех подмножеств множества* α *со значениями в некотором другом классе множеств и удовлетворяющая формулам*

$$F\Big(\bigcup_{X\in H} X\Big) = \bigcup_{X\in H} F(X) \quad \text{и} \quad F\Big(\bigcap_{X\in H} X\Big) = \bigcap_{X\in H} F(X)$$

для каждого непустого подкласса H *класса* G *мощности* $<\alpha$, *удовлетворяет тем же формулам для каждого непустого подкласса* H *класса* G *независимо от его мощности.*

P_2. *Пусть* G — *произвольный класс множеств, удовлетворяющий условиям*

(I) G *покрывает* α $\Big($т. е. $\alpha \subseteq \bigcup_{X\in G} X\Big)$;

(II) *каждый класс попарно различных подмножеств* α, *который не принадлежит* G, *конечен.*

Тогда существует подкласс H *класса* G *с мощностью* $<\alpha$, *который также покрывает* α.

P_3. *В каждой полной булевой алгебре не более чем с* 2^α *элементами каждый* α-*полный примарный идеал является главным.*

P_4. *Существует* α-*полная и* α-*дистрибутивная булева алгебра, которая не обладает* α-*полным примарным идеалом (и, следовательно, не изоморфна любой* α-*полной алгебре множества*)[1].

Теорема 4 может быть выведена из теорем 1 и 2 (или 2 и 3) с помощью чисто математических рассуждений. Действительно, свойства $P_0 - P_3$ эквивалентны друг другу для каждого бесконечного кардинального числа α; P_4 выводится из P_0, но не известно, имеет ли место обратный вывод.

Естественно возникает вопрос, будет ли каждое из свойств $P_0 - P_4$ представлять собой не только необходимое, но и достаточное условие сильной некомпактности α. Он остается пока открытым. Тем не менее мы можем показать, что из каждого из этих свойств следует некомпактность α, а P_4 эквивалентно ей. Кроме того, если в P_4 после слов „булева алгебра“ мы вставим „с α элементами“, то полученное свойство P_4' окажется эквивалентным сильной некомпактности α в случае недостижимого α. Таким образом, в предположении справедливости обобщенной континуум-гипотезы, для того чтобы бесконечное кардинальное число α было сильно некомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно либо было достижимым, либо обладало свойством P_4'.

[1] Свойства $P_1 - P_4$ обсуждались, например, в [1, стр. 326] и [8, стр. 246] (в частности, см. теорему 3.4, следствие 3.7 и теорему 3.11 последней работы).

Мы теперь рассмотрим свойство кардинальных чисел Q_0, которое сильнее, чем P_0, в том смысле, что оно, очевидно, влечет P_0 для каждого кардинального числа $\alpha > \omega$, хотя следование в обратную сторону сомнительно.

Теорема 5. *Для каждого бесконечного кардинального числа* β *следующие два условия эквивалентны:*

(I) *каждое кардинальное число* α, $\omega_1 \leqslant \alpha \leqslant \beta$, *обладает свойством* P_0 *теоремы* 2;

(II) *кардинальное число* $\alpha = \beta$ *обладает следующим свойством* Q_0: *в алгебре множеств, образованной подмножествами* α, *каждый* ω_1-*полный примарный идеал является главным.*

Эта теорема остается верной, если мы заменим ω_1 произвольным бесконечным кардинальным числом γ. Содержание теоремы 5 можно эквивалентно выразить в следующем виде.

Если каждое бесконечное кардинальное число $>\omega$ *обладает свойством* P_0, *то каждое такое кардинальное число обладает свойством* Q_0; *если, с другой стороны, существуют бесконечные кардинальные числа* $>\omega$, *для которых* P_0 *неверно, и* γ — *наименьшее из них, то* Q_0 *имеет место для тех и только тех бесконечных кардинальных чисел, которые* $<\gamma$.

Сравнивая теорему 5 с теоремами 1 и 2 и с известным результатом о том, что P_0 имеет место для всех достижимых кардинальных чисел, мы получаем следующий результат.

Теорема 6. *Если бесконечное кардинальное число* α *обладает тем свойством, что каждое недостижимое кардинальное число* β, $\omega < \beta \leqslant \alpha$, *является сильно некомпактным (в частности,* $\beta \neq \Theta_\beta$ *для каждого кардинального числа* $\beta \leqslant \alpha$), *то* α *обладает свойством* Q_0.

Свойство Q_0 заслуживает особого интереса ввиду его связи с *проблемой абстрактной меры* [8, разд. 4]. Под *счетной аддитивной мерой в множестве* A мы понимаем функцию m на классе всех подмножеств A со значениями в множестве неотрицательных вещественных чисел, удовлетворяющую следующим условиям:

$m(A) = 1$,

$m(X) = 0$ для каждого одноэлементного подмножества X из A,

$m\Big(\bigcup_{\xi<\omega} X_\xi\Big) = \sum_{\xi<\omega} m(X_\xi)$ для каждой бесконечной последовательности попарно различных подмножеств $X_0, X_1, \ldots, X_\xi, \ldots$ из A.

Как легко заметить, свойство Q_0 эквивалентно следующему.

Q_0'. *Пусть A — любое множество мощности α; в A не существует счетной аддитивной двухзначной меры.*

Рассмотрим еще следующие два свойства бесконечного кардинального числа α.

R_0. *В алгебре множеств, образованной всеми подмножествами α, каждый ω_1-полный и ω_1-насыщенный идеал является главным.*

R_0'. *Пусть A — любое множество мощности α; в A не существует счетной аддитивной меры.*

Ясно, что из R_0 следует R_0', а из R_0' следуют Q_0 и Q_0'. Известно, что в предположении справедливости континуум-гипотезы $2^\omega = \omega_1$ (или слабой гипотезы, по которой каждое кардинальное число β, $\omega < \beta \leqslant 2^\omega$, является либо сингулярным, либо обладает непосредственно предшествующим) все четыре свойства, упомянутые выше, эквивалентны друг другу[1]). Мы можем заменить в теоремах 5 и 6 Q_0 через Q_0', а при условии справедливости континуум-гипотезы также через R_0 или R_0'. С точки зрения этих результатов возможность построения множества A со счетной аддитивной мерой на всех подмножествах A становится сомнительной.

Мы можем легко сформулировать три свойства кардинальных чисел Q_1, Q_2 и Q_3, которые находятся в таких же отношениях к P_1, P_2 и P_3, как Q_0 к P_0. Эти четыре свойства $Q_0 - Q_3$ оказываются эквивалентными, так что теоремы 5 и 6 можно относить к каждому из них.

Свойство Q_0 отличается в некотором отношении от всех свойств, сформулированных в теоремах 2 и 4.

Свойства $P_0 - P_4$ ведут себя согласно описанию, приведенному в начале статьи (т. е. известно, что никакое из них не применимо к кардинальному числу ω, хотя все они применимы к каждому достижимому кардинальному числу); теперь мы сможем показать, что они применимы к обширному классу недостижимых кардинальных чисел. С другой стороны, свойство Q_0 тривиально выполняется для $\alpha = \omega$, и до недавнего времени было известно только то, что оно имеет место для каждого бесконечного кардинального числа $\alpha < \Theta_1$. В теореме 6 этот результат распространен на обширный класс кардинальных чисел, содержащих как достижимые, так и недостижимые кардинальные числа. Проблема о том, будет ли Q_0 иметь место для всех достижимых кардинальных чисел, остается открытой, и, как видно из теоремы 5, она эквивалентна проблеме о том, будет ли Q_0 иметь место для всех бесконечных кардинальных чисел без исключения.

[1]) Для доказательства этого факта достаточно установить, что из Q_0 следует R_0 (при условии справедливости гипотез, упомянутых в тексте). Это можно вывести из результатов работы [8, разд. 3, теоремы 3.1 и 3.8]. Эквивалентность Q_0' и R_0' впервые была установлена в [13, стр. 149].

Мы закончим статью следующими двумя замечаниями.

1) Существуют проблемы, касающиеся бесконечных кардинальных чисел, которые решаются для ω и для достижимых кардинальных чисел по-разному, но остаются открытыми для всех недостижимых кардинальных чисел $> \omega$. Таковы, например, проблема графа и проблема упорядочения, сформулированные в [1, стр. 327]. По-видимому, в недалеком будущем будут получены новые результаты, распространяющие приведенные выше частичные решения и на эти проблемы.

2) Для проблем, обсуждаемых в разд. 2 этой статьи, полученные результаты перемещают нижнюю границу кардинальных чисел, для которых проблема оставалась открытой, от наименьшего недостижимого кардинального числа $> \omega$ до наименьшего недостижимого кардинального числа $> \omega$, не являющегося сильно некомпактным. Это, несомненно, является значительным прогрессом. В действительности вера в существование недостижимых кардинальных чисел $> \omega$ (а также произвольно больших кардинальных чисел этого рода) является естественным следствием интуиции, лежащей в основе „наивной" теории множеств и относящейся к так называемому „канторовому абсолюту". Наоборот, мы не видим теперь убедительных интуитивных рассуждений, которые могли бы заставить нас поверить в существование кардинальных чисел $> \omega$, не являющихся сильно некомпактными, или сделали бы правдоподобной совместимость гипотезы о существовании таких кардинальных чисел с системой аксиом теории множеств. Как указано в конце раздела 1, нам не известны кардинальные числа $> \omega$, имеющие „конструктивную характеристику", для которых нельзя доказать их сильную некомпактность и для которых все обсуждаемые проблемы остаются открытыми. Однако, несмотря на достигнутые успехи, мы не видим серьезных доводов в пользу того, что со временем будут найдены полезные методы для полного решения этих проблем.

Мы сможем разрешить все приведенные проблемы, если включим в число аксиом теории множеств утверждение, устраняющее существование таких „очень больших" кардинальных чисел, т. е. если мы включим предложение, утверждающее, что все кардинальные числа $> \omega$ сильно некомпактны. Такое решение будет противоречить главной цели исследований по основаниям теории множеств, а именно аксиоматизации постоянно возрастающих порций „канторова абсолюта". Те, кто придерживается этих позиций, всегда готовы принять новые „конструктивные принципы", новые аксиомы, обеспечивающие существование новых классов „больших" кардинальных чисел (при условии, что они совместимы со старыми аксиомами), но не согласны допускать никаких аксиом, устраняющих существование таких кардинальных чисел, если они не являются определенной временной мерой, вводимой в целях облегчения изучения некоторых аксиоматических систем теории множеств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Erdös P., Tarski A., On families of mutually exclusive sets, *Annals of Mathematics*, **44** (1943), 315—329.
2. Hanf W. P., Models of lanquages with infinitely long expressions, International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science. Abstracts of Contributed Papers, Stanford University, 1960 (мимеографировано), p. 24.
3. Кейслер X. Некоторые применения теории моделей к теории множеств; настоящий сборник, стр. 90—97.
4. Levy A., Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory, *Pacific Journal of Mathematics*, **10** (1960), 223—238.
5. Morel A. C., Scott D., Tarski A., Reduced products and the compactness theorem, *American Mathematical Society Notices*, **5** (1958), 674—675.
6. Mostowski A., An undecidable arithmetical statement, *Fundamenta Mathematicae*, **36** (1949), 143—164.
7. Scott D., Tarski A., A sentential calculus with infinitely long expresions, *Colloquium Mathematicum*, **6** (1958), 165—170.
8. Smith E. C., Tarski A., Higher degrees of distributivity and completeness in Boolean algebras, *Transactions of the American Math. Society*, **84** (1957), 230—257.
9. Tarski A., Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938, Oxford, Clarendon Press, 1956.
10. Tarski A., Remarks on predicate logic with infinitely long expressions, *Colloquium Math.*, **6** (1958), 171—176.
11. Tarski A., Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, Providence, R. I., American Mathematical Society, 1952, **1**, pp. 705—720.
12. Tarski A., Über unerreichbare Kardinalzahlen, *Fundamenta Mathematicae*, **30** (1938), 68—69.
13. Ulam S., Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre, *Fundamenta Mathematicae*, **16** (1930), 140—150.

Общее расширение в эквациональных классах[1])

Е. ЛОСЬ

Математический институт, Варшава, Польша

Проблема общего расширения для класса алгебр $\mathfrak{A}_0$ состоит в нахождении необходимого и достаточного условий, при которых для любых двух алгебр A и B в $\mathfrak{A}_0$ существует алгебра C, которая также принадлежит $\mathfrak{A}_0$ и содержит подалгебры, изоморфные A и B соответственно.

В случае, когда $\mathfrak{A}_0$ есть элементарный класс (т. е. он определим посредством элементарных аксиом), упомянутая проблема решена в [3]. Необходимое и достаточное условия состоят в следующем.

Для любой открытой дизъюнкции вида

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) \vee \beta(y_1, \ldots, y_n) \tag{1}$$

из ее истинности в каждой алгебре из $\mathfrak{A}_0$ следует истинность либо α, либо β в обеих алгебрах A и B. Очевидно, эти же условия применимы и для эквациональных классов (т. е. классов, определимых с помощью равенств), однако следует ожидать, что в этом случае имеет место более сильная теорема, а именно теорема, ограничивающая действие дизъюнкций вида (1) подклассами класса дизъюнкций. Целью данной статьи является проведение детального решения этой проблемы для эквациональных классов. Сперва мы займемся изучением двух необходимых условий и покажем (с помощью подходящих примеров), что они недостаточны. Потом мы будем обсуждать необходимое и достаточное условия.

1. Обозначения и терминология

Пусть $\mathfrak{A}$ — класс всех алгебр фиксированного типа подобия. Мы будем обозначать алгебру $\langle A, F_1, \ldots, F_n \rangle$ в $\mathfrak{A}$ символом ее множества A. Пусть S, O, E — соответственно, класс всех элементарных аксиом $\mathfrak{A}$, класс всех открытых аксиом $\mathfrak{A}$, множество всех равенств $\mathfrak{A}$. Очевидно, что $E \subset O \subset S$.

Для алгебры A из $\mathfrak{A}$ мы через $S(A)$ обозначим множество всех аксиом из S, истинных на A. Кроме того, мы положим $O(A) = S(A) \cap O$,

[1]) Łoś J., Common extension in equational classes, стр. 136 — 142.

$E(A)=O(A)\cap E$ и для подкласса $\mathfrak{A}_0$ класса $\mathfrak{A}$

$$S(\mathfrak{A}_0)=\bigcap_{A\in\mathfrak{A}_0} S(A),\quad O(\mathfrak{A}_0)=\bigcap_{A\in\mathfrak{A}_0} O(A),\quad E(\mathfrak{A}_0)=\bigcap_{A\in\mathfrak{A}_0} E(A).$$

Для подмножества X множества S через $\mathfrak{A}(X)$ обозначим множество $\{A$ в $\mathfrak{A};\ X\subset S(A)\}$.

Подкласс $\mathfrak{A}_0\subset\mathfrak{A}$ назовем соответственно элементарным, открытым или эквациональным, если $\mathfrak{A}_0=\mathfrak{A}(S(\mathfrak{A}_0))$, $\mathfrak{A}_0=\mathfrak{A}(O(\mathfrak{A}_0))$ или $\mathfrak{A}_0=\mathfrak{A}(E(\mathfrak{A}_0))$.

Конъюнкцию равенств назовем системой равенств и обозначим через $U(x_1,\ldots,x_n)$. Мы предполагаем, что в U не встречаются другие переменные, кроме выписанных в скобках. То же самое предполагаем и относительно $\alpha(x_1,\ldots,x_n)$, $\beta(y_1,\ldots,y_m)$ и т. д.

Если в алгебре A существуют элементы $a_1,\ldots,a_n$, удовлетворяющие $U(x_1,\ldots,x_n)$, то U называется разрешимой в A.

2. Алгебры констант

Пусть $\alpha(x,x_1,\ldots,x_n)$ — аксиома из O. Если $\mathfrak{A}_0$ — эквациональный класс и $\Sigma_x\Sigma_{x_1}\ldots\Sigma_{x_n}\alpha(x,x_1,\ldots,x_n)\in S(\mathfrak{A}_0)$, $\alpha(x,x_1,\ldots,x_n)\wedge\wedge\alpha(y,y_1,\ldots,y_n)\to x=y\in O(\mathfrak{A}_0)$, то α называется O-определением для $\mathfrak{A}_0$. Каждое такое O-определение указывает для каждой алгебры A в $\mathfrak{A}_0$ единственный элемент a_α, который вместе с другими элементами $a_1,\ldots,a_n$ в A выполняет α. Каждый такой элемент назовем O-константой для A. Множество всех O-констант (относительно $\mathfrak{A}_0$) в A обозначим через $C_{\mathfrak{A}_0}(A)$.

Пусть τ — терм с единственным переменным x и равенство $\tau(x)=\tau(y)$ принадлежит $E(\mathfrak{A}_0)$. Тогда τ назовем термом-константой. Легко видеть, что $\tau(x)=x$ является O-определением для $\mathfrak{A}_0$. Каждый элемент, определяемый таким способом, назовем „определенным через терм“. Докажем теперь, что

Каждый элемент в $C_{\mathfrak{A}_0}(A)$ определен через терм.

Предположим, что $a_\alpha\in C_{\mathfrak{A}_0}(A)$, тогда

$\Sigma_x\Sigma_{x_1}\ldots\Sigma_{x_n}\alpha(x,x_1,\ldots,x_n)$ содержится в $S(\mathfrak{A}_0)=S(\mathfrak{A}(E(\mathfrak{A}_0)))$.

Тогда из теоремы Эрбрана следует, что дизъюнкция вида

$$\bigvee_{i=1}^{k}\alpha(\varphi^{(i)}(x),\ \psi_1^{(i)}(x),\ \ldots,\ \psi_n^{(i)}(x)),\tag{2}$$

где $\varphi^{(i)}$, $\psi_j^{(i)}$ — термы, принадлежит $O(\mathfrak{A}_0)$. Подставляя y вместо x, получим

$$\bigvee_{i=1}^{k}\alpha(\varphi^{(i)}(y),\ \psi_1^{(i)}(y),\ \ldots,\ \psi_n^{(i)}(y)).$$

Но α является O-определением, следовательно, $\alpha(x,x_1,\ldots,x_n)\wedge\wedge\alpha(y,y_1,\ldots,y_n)\to x=y$ принадлежит $O(\mathfrak{A}_0)$. Применяя это к обеим дизъюнкциям, получим, что

$$\bigvee_{\substack{i=1\\ j=1}}^{k}\varphi^{(i)}(x)=\varphi^{(j)}(y)\tag{3}$$

принадлежит $O(\mathfrak{A}_0)$. Как известно, если дизъюнкция равенств принадлежит $O(\mathfrak{A}_0)$, где $\mathfrak{A}_0$ — эквациональный класс, то один член дизъюнкции должен принадлежать $E(\mathfrak{A}_0)$. Пусть $\varphi^{(i_0)}(x)=\varphi^{(j_0)}(y)$ принадлежит $E(\mathfrak{A}_0)$, тогда $\varphi^{(i_0)}(x)=\varphi^{(i_0)}(y)$ принадлежит также $E(\mathfrak{A}_0)$, который показывает, что $\varphi^{(i_0)}$ является термом-константой. Теперь мы подставляем в (2) $\varphi^{(i_0)}(x)$ вместо x и получаем

$$\bigvee_{i=1}^{k}\alpha(\varphi^{(i)}(\varphi^{(i_0)}(x)),\ \psi_1^{(i)}(\varphi^{(i_0)}(x)),\ \ldots,\ \psi_n^{(i)}(\varphi^{(i_0)}(x))).\tag{4}$$

Эта дизъюнкция выполняется на каждой алгебре из $\mathfrak{A}_0$ и, следовательно, на A. Тогда по крайней мере один член из (4) выполняется на A. Предположим, что им является

$$\alpha(\varphi^{(j_0)}(\varphi^{(i_0)}(x)),\ \psi_1^{(j_0)}(\varphi^{(i_0)}(x)),\ \ldots,\ \psi_n^{(j_0)}(\varphi^{(i_0)}(x))).$$

Но $\varphi^{(j_0)}(\varphi^{(i_0)}(x))$ есть терм-константа [по определению $\varphi^{(i_0)}(x)$]. Отсюда следует, что a_α определяется через равенство

$$\varphi^{(j_0)}(\varphi^{(i_0)}(x))=x.$$

Эта теорема показывает, что мы можем ограничиваться в дальнейшем элементами, определимыми через терм. Это показывает также, что либо $C_{\mathfrak{A}_0}(A)$ пусто, либо является наименьшей подалгеброй A (т. е. пересечением всех непустых подалгебр A). Легко заметить, что для алгебр A и B из $\mathfrak{A}_0$ существует по крайней мере один гомоморфизм, отображающий $C_{\mathfrak{A}_0}(A)$ в $C_{\mathfrak{A}_0}(B)$.

Отсюда для проблемы общего расширения имеем следующее следствие.

Необходимым условием существования общего расширения двух алгебр A и B в $\mathfrak{A}_0$ является изоморфизм между подалгебрами $C_{\mathfrak{A}_0}(A)$ и $C_{\mathfrak{A}_0}(B)$.

В статье [2] я предполагал, что это условие является и достаточным для существования общего расширения в эквациональных классах. Следующий пример, принадлежащий А. Бялыницкому-Бируле, показывает, что это неверно.

Пусть $\mathfrak{A}_0$ — класс всех коммутативных колец с единицей. Пусть R_1 и R_2 — два расширения кольца целых чисел $\mathcal{J}$, такие, что в R_1 существует обратный элемент для 2, а в R_2 число 2 является делителем нуля, очевидно, $C_{\mathfrak{A}_0}(R_1) = C_{\mathfrak{A}_0}(R_2) = \mathcal{J}$. С другой стороны, не существует общего расширения для R_1 и R_2 в $\mathfrak{A}_0$, так как в кольце не существует элемента, обладающего обратным элементом и являющегося делителем нуля.

3. Алгебры псевдоконстант

Пусть $\mathfrak{A}_0$ — эквациональный класс, $\alpha(z, x_1, \ldots, x_n)$ — аксиома в O.

Если импликация

$$\alpha(z_1, x_1, \ldots, x_n) \wedge \alpha(z_2, y_1, \ldots, y_n) \to z_1 = z_2$$

принадлежит классу $O(\mathfrak{A}_0)$, то α называется O-псевдоопределением. Пусть $PD(\mathfrak{A}_0)$ — множество всех O-псевдоопределений, и пусть A — алгебра в $\mathfrak{A}_0$. Если $\Sigma_z \Sigma_{x_1} \ldots \Sigma_{x_n} \alpha$ принадлежит $S(A)$, то существует элемент $\varphi_A(\alpha)$ в A, который вместе с другими элементами в A удовлетворяет α. Тогда φ_A отображает часть множества $PD(\mathfrak{A}_0)$ в A. Множество образов φ_A обозначим через $P_{\mathfrak{A}_0}(A)$. Элементы этого множества назовем псевдоконстантами в A.

Если A и B — две алгебры в $\mathfrak{A}_0$, то мы обозначим множество $\varphi_A\left[\varphi_A^{-1}(P_{\mathfrak{A}_0}(A)) \cap \varphi_B^{-1}(P_{\mathfrak{A}_0}(B))\right]$ через $P_{\mathfrak{A}_0}(A/B)$.

$P_{\mathfrak{A}_0}(A/B)$ является множеством таких псевдоконстант A, для которых существуют в B те же псевдоконстанты.

Легко заметить, что $P_{\mathfrak{A}_0}(A)$ и $P_{\mathfrak{A}_0}(A/B)$ — либо подалгебры в A, либо пустые множества (пустые множества двух алгебр следует рассматривать как изоморфные подалгебры).

Предположим теперь, что A и B — подалгебры алгебры C в $\mathfrak{A}_0$. Ясно, что это влечет равенство $P_{\mathfrak{A}_0}(A/B) = P_{\mathfrak{A}_0}(B/A)$. Следовательно, имеет место следующее утверждение.

Необходимым условием существования общего расширения двух алгебр A и B в эквациональном классе является изоморфизм подалгебр $P_{\mathfrak{A}_0}(A/B)$ и $P_{\mathfrak{A}_0}(B/A)$.

Чтобы показать недостаточность этого условия, мы построим эквациональный класс $\mathfrak{A}_0$, такой, что $P_{\mathfrak{A}_0}(A)$ пусто для каждого A в $\mathfrak{A}_0$, и покажем, что две алгебры в $\mathfrak{A}_0$ не обладают общим расширением.

Докажем следующую лемму:

Если в эквациональном классе $\mathfrak{A}_0$ существует алгебра B с двумя различными одноэлементными подалгебрами, то $P_{\mathfrak{A}_0}(A)$ пусто для каждого A в $\mathfrak{A}_0$.

Для доказательства нам будут нужны некоторые утверждения относительно свободных произведений [4].

Под свободным произведением двух алгебр A и B в $\mathfrak{A}_0$ мы будем понимать алгебру C в $\mathfrak{A}_0$, содержащую изоморфные образы A' и B' для A и B и удовлетворяющую следующему условию.

Если D — алгебра в $\mathfrak{A}_0$, то для каждой пары гомоморфизмов h и g, которые отображают соответственно A' и B' в D, существует гомоморфизм $f: C$ в D, который совпадает с h и g на A' и B' (f является общим расширением h и g).

Свободное произведение двух алгебр в $\mathfrak{A}_0$ не всегда существует, так как оно является общим расширением. Однако если в эквациональном классе существует общее расширение двух алгебр, то существует и их свободное произведение. Отсюда следует, что в любом эквациональном классе $\mathfrak{A}_0$ свободное произведение двух изоморфных алгебр всегда существует.

Теперь докажем нашу лемму. Пусть D принадлежит $\mathfrak{A}_0$ и имеет две различные одноэлементные подалгебры (α_1) и (α_2), и пусть A — алгебра в $\mathfrak{A}_0$ с $P_{\mathfrak{A}_0}(A) \neq 0$. Пусть B изоморфна A, и пусть C — их свободное произведение. Можно даже предположить, что A и B есть просто подалгебры алгебры C. Очевидно, что

$$O \neq P_{\mathfrak{A}_0}(A) = P_{\mathfrak{A}_0}(B) = P_{\mathfrak{A}_0}(A/B) = P_{\mathfrak{A}_0}(B/A) \subset A \cap B,$$

откуда следует, что A и B имеют непустое пересечение. Рассмотрим гомоморфизмы h и g, отображающие A и B на (α_1) и (α_2). Они не имеют общего расширения, так как их значения на пересечении $A \cap B$, которое не пусто, различны. Это показывает, что предположение $P_{\mathfrak{A}_0}(A) \neq 0$ приводит к противоречию.

Пусть $\mathfrak{A}$ — класс алгебр с одной бинарной операцией „умножения“ и четырьмя унарными операциями $1(\cdot)$, $L(\cdot)$, $K_1(\cdot)$, $K_2(\cdot)$. $\mathfrak{A}_0$ означает класс тех алгебр в $\mathfrak{A}$, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

$$\begin{cases} x \cdot 1(y) = x; \\ K_1(x) \cdot L(y) = K_2(x) \cdot L(y). \end{cases} \qquad (*)$$

Каждая алгебра, в которой выполняются равенства $x \cdot y = 1(x) = L(x) = K_1(x) = K_2(x) = x$, как нетрудно увидеть, принадлежит $\mathfrak{A}_0$. В каждой алгебре такого рода каждый элемент представляет одноэлементную подалгебру; из нашей леммы следует, что $P_{\mathfrak{A}_0}(A)$ для каждого A в $\mathfrak{A}_0$. С другой стороны, легко заметить, что в алгебре A равенство $L(y) = 1(y)$ имеет решение, и если в алгебре B справедливо неравенство $K_1(x) \neq K_2(x)$ для некоторого x, то A и B не имеют общего расширения. Это очевидно, так как из $(*)$ и из $L(y) = 1(y)$ для некоторого y следует, что $K_1(x) = K_2(x)$ для каждого x.

Теперь легко построить подходящий пример. Пусть $A = B$ — множество рациональных чисел с обычным умножением. Положим в A

$$1(x) = 1, \quad L(y) = 0, \quad K_1(x) = 1 - K_2(x)$$

и в B

$$1(x)=L(y)=1, \qquad K_1(x)=K_2(x).$$

Согласно рассуждениям, приведенным выше, A и B не имеют общего расширения в $\mathfrak{A}_0$.

4. Необходимое и достаточное условие для существования общего расширения

Пусть $\mathfrak{A}_0$ — эквациональный класс и $U(\mathfrak{x})$, $U_2(z_1, z_2, \mathfrak{y})$ — две системы равенств (где $\mathfrak{x}$ означает некоторое x_i, а $\mathfrak{y}$ — некоторое y_i).

Предположим, что

$$U_1(\mathfrak{x}) \vee U_2(z_1, z_2, \mathfrak{y}) \to z_1 = z_2 \tag{5}$$

принадлежит $O(\mathfrak{A}_0)$.

Если существуют в $\mathfrak{A}_0$ две алгебры A и B, такие, что в A разрешима система U_1, а в B — система U_2 при $z_1 \neq z_2$, то A и B не имеют общего расширения в $\mathfrak{A}_0$.

Теперь покажем, что если A и B, принадлежащие эквациональному классу $\mathfrak{A}_0$, не имеют общего расширения в этом классе, тогда для каждой открытой аксиомы вида (5), которая принадлежит $O(\mathfrak{A}_0)$, U_1 разрешима либо в A, либо в B, а U_2 — в другой алгебре при $z_1 \neq z_2$.

Нам будет нужна следующая лемма:

Если дизъюнкция вида

$$\delta_1 \vee \delta_2 \vee \ldots \vee \delta_k$$

принадлежит $O(\mathfrak{A}_0)$, где $\mathfrak{A}_0$ — эквациональный класс, δ_i — равенства или неравенства, тогда если эта дизъюнкция является минимальной (т. е. $\delta_1 \vee \ldots \vee \delta_{i-1} \vee \delta_{i+1} \vee \ldots \vee \delta_k$ не принадлежит $O(\mathfrak{A}_0)$ для $i=1, 2, \ldots, k$), то существует одно равенство среди δ_i.

Эта лемма хорошо известна. Доказательство ее можно найти в [1].

Пусть A и B — две алгебры в $\mathfrak{A}_0$ без общего расширения. Тогда из теоремы в [3] следует, что существует аксиома

$$\alpha(\mathfrak{x}) \vee \beta(\mathfrak{y}),$$

принадлежащая $O(\mathfrak{A}_0)$, причем $\alpha(\mathfrak{x})$ не принадлежит $O(A)$, а $\beta(\mathfrak{y})$ не принадлежит $O(B)$.

Сначала мы покажем, что (1) можно предположить как дизъюнкцию равенств и неравенств. Для доказательства формулы α и β

представим как конъюнктивно-дизъюнктивную форму. Тогда (1) примет вид

$$\bigwedge_{i=1}^{k} \bigvee_{j=1}^{n_i} \delta^{(1)}_{i,j}(\mathfrak{x}) \vee \bigwedge_{r=1}^{l} \bigvee_{s=1}^{m_2} \delta^{(2)}_{r,s}(\mathfrak{y}),$$

где $\delta^{(1)}_{i,j}$ и $\delta^{(2)}_{r,s}$ — равенства или неравенства. Согласно закону дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции, мы получим

$$\bigwedge_{i=1}^{k} \bigwedge_{r=1}^{l} \left(\bigvee_{j=1}^{n_i} \delta^{(1)}_{i,j}(\mathfrak{x}) \vee \bigvee_{s=1}^{m_r} \delta^{(2)}_{r,s}(\mathfrak{y}) \right). \tag{6}$$

Каждый член конъюнкции (6) принадлежит $O(\mathfrak{A}_0)$, и легко заметить, что для некоторых i_0, r_0 дизъюнкция

$$\bigvee_{j=1}^{n_{i_0}} \delta^{(1)}_{i_0,j}(\mathfrak{x})$$

не принадлежит $O(A)$ и

$$\bigvee_{j=1}^{m_{r_0}} \delta^{(2)}_{r_0,s}(\mathfrak{y})$$

не принадлежит $O(B)$. Следовательно, можно предположить, что (1) есть дизъюнкция равенств и неравенств, и тогда из леммы следует, что она содержит только одно равенство. Предположим, что равенство, содержащее $\mathfrak{y}$, в (1) имеет вид

$$\varepsilon'_1(\mathfrak{x}) \vee \ldots \vee \varepsilon'_k(\mathfrak{x}) \vee \varepsilon'_{k+1}(\mathfrak{y}) \vee \ldots \vee \varepsilon'_{k+l}(\mathfrak{y}) \vee \varepsilon'_{k+l+1}(\mathfrak{y}), \tag{7}$$

где ε'_j — равенства.

Очевидно, что формула (7) эквивалентна

$$\bigwedge_{i=1}^{k} \varepsilon_i(\mathfrak{x}) \vee \bigwedge_{j=1}^{l} \varepsilon_{k+j}(\mathfrak{y}) \to \varepsilon_{k+l+1}(\mathfrak{y}). \tag{8}$$

Пусть теперь $\varepsilon_{k+l+1}(\mathfrak{y})$ имеет вид $\tau(\mathfrak{y}) = \vartheta(\mathfrak{y})$, где τ и ϑ — термы; тогда положим, что $\bigwedge_{i=1}^{k} \varepsilon_i(\mathfrak{x})$ есть $U_1(\mathfrak{x})$, а $\bigwedge_{j=1}^{l} \varepsilon_{k+j}(\mathfrak{y}) \vee \tau(\mathfrak{y}) = {}$ $= z_1 \vee \vartheta(\mathfrak{y}) = z_2$ есть $U_2(z_1, z_2, \mathfrak{y})$. Можно заметить, что из (8) следует, что

$$U_1(\mathfrak{x}) \vee U_2(z_1, z_2, \mathfrak{y}) \to z_1 = z_2 \tag{9}$$

всегда принадлежит $O(\mathfrak{A}_0)$. С другой стороны, мы заметим, что $U_1(\mathfrak{x})$ разрешима в A, а U_2 — в B при $z_1 \neq z_2$.

Вышеприведенные результаты можно суммировать в виде следующей теоремы.

Для существования общего расширения для двух алгебр A и B в эквациональном классе $\mathfrak{A}_0$ необходимо и достаточно выполнение условия:

Для каждой импликации вида (5), *которая принадлежит $O(\mathfrak{A}_0)$, если U_1 разрешима либо в A, либо в B, то U_2 разрешима в другой алгебре при $z_1 = z_2$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. McKinsey J. C. C., The decision problem for some classes of sentences without quantifiers, *J. Symb. Logic*, 8 (1943), 61—76.
2. Łoś J., Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissable d'algèbres, Mathematical Interpretation of Formal Systems, Amsterdam, 1955, pp. 97—113.
3. Łoś J., Suszko R., On the extending of models (II), Common extensions, *Fund. Math.*, 42 (1955), 343—347.
4. Sikorski R., Products of abstract algebras, *Fund. Math.*, 39 (1952), 211—233.

Метаматематика и алгебра: пример[1)]

Р. ЛИНДОН

Мичиганский университет, Анн Арбор, Мичиган, США

Хорошо известно, что применения алгебры к логике и логики к алгебре взаимно обогащают эти две области. Верно также и то, что, помимо всякого взаимодействия, эти два предмета имеют много общего. Я хочу проиллюстрировать это положение сравнением некоторых идей, заимствованных из алгебры и логики. Идеи из алгебры группируются вокруг „теоремы о свободе" — теоремы теории групп, установленной и доказанной Магнусом, который приложил ее к лекциям Дена по топологии. Идеи из логики характеризуются „интерполяционной теоремой", или „теоремой об отделимости" Крэйга, и аналогичными метаматематическими результатами Бета в теории определения. Я думаю, совершенно ясно, что оба круга идей возникли независимо. Но я попытаюсь показать, что в этих идеях проявляется сходство, которое кажется более чем аналогией и наводит поэтому на мысль о существовании глубокой теории, охватывающей их.

Теорема о свободе проще всего формулируется как теорема о свободных группах. Мы напомним, что группа F называется свободной на множестве образующих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, если каждое отображение X в группу G может быть единственным образом продолжено до гомоморфизма F в G. Другими словами, образующие x_i свободны в том смысле, что они удовлетворяют только таким соотношениям (в форме уравнений), которые имеют место для любого набора элементов g_i любой группы G, т. е. только таким соотношениям $w(x_1, \ldots, x_n) = 1$, для которых $\forall x_1 \ldots \forall x_n$ $w(x_1, \ldots, x_n)$ есть следствие групповых аксиом. Существование свободных групп и даже свободных алгебр любого класса, определенных универсальными тождествами, легко доказывается в теории моделей. Но для теории групп часто предпочтительно иметь явную конструкцию, которая не апеллирует к метаматематическим идеям. В самом деле, свободные алгебры часто используются в чисто алгебраических исследованиях вместо метаматематических рассуждений; так, в теории групп свободная алгебра выполняет роль „исчисления"

[1)] Lyndon R., Metamathematics and algebra: an example, стр. 143—150.

для некоторой части теории первого порядка во многом аналогично тому, как булевы алгебры служат для исчисления высказываний.

Элементы свободной группы F могут быть представлены „словами“ (или „термами“), т. е. некоторыми выражениями, построенными из (символов для) образующих x_i с помощью (символов для) групповых операций: умножения, взятия обратного элемента, взятия нейтрального элемента. Элементы F могут быть затем отождествлены с классами эквивалентных слов или с некоторыми словами в канонической форме; у нас не будет в дальнейшем необходимости различать слово и представляемый им элемент группы.

Из свойства, используемого для характеризации свободных групп, вытекает важное следствие, что каждая группа G есть гомоморфный образ свободной группы F. Слова F могут служить, таким образом, и в качестве имен для элементов из G, хотя в G, как правило, выполняются соотношения $w(x_1, \ldots, x_n) = 1$, которые не имеют места в F. Группа G может быть описана указанием множества таких „определяющих соотношений“, из которых следуют все другие; и на практике, особенно в топологии, часто случается, что группа только так нам и задается. Первый вопрос, который возникает при этом, состоит в распознавании, когда два слова представляют один и тот же элемент G или, что эквивалентно, когда одно соотношение есть следствие других. Хорошо известный факт, что этот вопрос вообще не разрешим, не делает метатеорию такого отношения следствия сколько-нибудь менее интересной.

Рассматриваемый вопрос легко формулируется в чисто логических терминах: когда формула $w(x_1, \ldots, x_n) = 1$ является логическим следствием формул $w_i = 1$ вместе с аксиомами теории групп? Равным образом он может быть сформулирован в рамках теории свободных групп: когда w содержится в нормальном делителе, „определенном“ w_i, т. е. в наименьшем нормальном делителе, содержащем все w_i? Более подробно — когда w может быть выражено в виде произведения элементов $uw_i^{\pm 1}u^{-1}$, сопряженных с w_i, и их обратных? В этом случае w обычно называют „следствием“ w_i и пишут $w_1 w_2 \ldots \to w$.

Из дальнейшего будет ясно, что это отношение следствия в свободных группах будет наследовать некоторые свойства отношения логического следствия. Оно может рассматриваться также как некоммутативный аналог хорошо знакомого отношения линейной зависимости для векторных пространств или модулей (хотя здесь распознавать равенство несравненно проще, но тем не менее интересно и важно), т. е. такой зависимости, при которой w принадлежит к (обычной) подгруппе F, порожденной элементами w_i. Все эти теории зависимости могут быть объединены при изучении „алгебр замыканий“, снабженных для рассматриваемых целей некоторыми дополнительными операциями.

Магнус основывает свое доказательство теоремы о свободе на большом числе лемм, основное содержание которых может быть сформулировано следующим образом.

(1) *Пусть W — множество слов, содержащих в своей записи только образующие из множества A, U — множество слов, содержащих в своей записи только образующие из множества B, и предположим, что каждое следствие W или U, которое содержит в своей записи только образующие из множества $A \cap B$, является в действительности следствием и W и U. Тогда каждое следствие $W \cup U$, которое содержит в своей записи только образующие множества A, есть на самом деле следствие одного W.*

Без большого труда получают следствие

(2) *Если $\{w_i\} \to v$, то $\{w_i\} \to \{w'_h\}$ и $\{w'_h\} \to v$ для некоторого набора слов $\{w'_h\}$, содержащих в своей записи только образующие, которые появляются в некоторых w_i и в v.*

Ясна аналогия между (2) и следующей теоремой Крэйга:

(3) *Если W и V — формулы первого порядка и $W \vdash V$, то $W \vdash W'$ и $W' \vdash V$ для некоторой формулы W', содержащей только те (нелогические) константы, которые встречаются и в W и в V.*

Очевидный аналог (4) утверждения (1) прямо следует из (3). В самом деле, W, $U \vdash V$ влечет $W \vdash U \supset V$, следовательно, (3) дает $W \vdash W'$ и $W' \vdash U \supset V$, где W' как следствие W, содержащее только константы из множества $A \cap B$, есть также следствие U, а это значит, что $U \vdash V$. Это же соображение позволяет установить для высказываний аналог даже более сильного утверждения.

(1') *Пусть $W \cup U \to v$. Тогда существует W', такое, что $W \to W'$, $W' \cup U \to v$, и слова из W' содержат только те образующие, которые встречаются в некотором w из W, а также либо в v, либо в некотором u из U.*

Однако пример $x^{-1}yxz$, $y^2 \to z^2$ показывает, что само утверждение (1') для групп не выполняется.

Несмотря на сходство их содержания, (1) и даже (2), по-видимому, не могут быть получены непосредственно из (3). Было бы естественно попытаться применить теорему (3) к языку, в котором x_i выступают как индивидные константы. Если этот язык допускает кванторы по индивидным переменным, то теореме (3) удовлетворяет формула W', полученная из $w_1 = 1 \;\&\; \ldots \;\&\; w_m = 1$ заменой всех x_i, которые не встречаются в некоторых u_i или в v, на переменные, связанные квантором существования, а такая формула W' не дает нам желательных w'_h. Если, с другой стороны, мы ограничим наш язык, исключив из него кванторы, то мы должны принять в качестве гипотез частные случаи групповых аксиом, таких, как

$(x_i x_j) x_k = x_i (x_j x_k)$, которые могут содержать комбинации констант, что мешает нам включать их без вреда в w_i или в u_i.

В действительности, как указывает Магнус в одном замечании, (1) вряд ли дает больше, чем основная теорема Шрейера о свободных произведениях. Группа G называется свободным произведением своих подгрупп G_1 и G_2, если она порождается G_1 и G_2 и каждая пара гомоморфизмов из G_1 и G_2 в группу H, согласованных на $G_1 \cap G_2$, имеет общее расширение до гомоморфизма G в H. Теорема Шрейера устанавливает существование свободного произведения двух произвольных групп с заданным отождествлением изоморфных подгрупп.

(5) *Пусть даны изоморфизмы $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ группы K в группы G_1 и G_2. Тогда существуют изоморфные отображения γ_1 и γ_2 групп G_1 и G_2 в группу H, такие, что H является свободным произведением образов H_1 и H_2, а $\gamma_1\varkappa_1$ и $\gamma_2\varkappa_2$ определяют одно и то же отображение K на пересечение $H_1 \cap H_2$.*

Доказательство (5) легко сводится к следующему случаю: $G_1 = F_1/R_1$, $G_2 = F_2/R_2$, $K = F_0/R_0$, где группа F_1 свободна на множестве образующих X_1, F_2 — на X_2, F_0 — на $X_1 \cap X_2$; $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — естественные изоморфизмы, и, следовательно, $R_1 \cap F_2 = R_0 = R_2 \cap F_1$. Тогда если группа H с требуемыми свойствами вообще существует, то мы можем принять, что $H = F/R$, где группа F свободна на $X_1 \cup X_2$ и R — нормальный делитель, порожденный совокупностью R_1, R_2. Действительно, все утверждения теоремы немедленно выполняются, кроме, быть может, того, что естественные отображения G_1 и G_2 в H являются изоморфизмами. Мы должны показать, что, в принятых обозначениях

(6) *из $R_1 \cap F_2 = R_2 \cap F_1$ следует $R \cap F_1 = R_1$ (и аналогично $R \cap F_2 = R_2$).*

Но это всего лишь переформулировка теоремы (1).

Вышесказанное наводит на мысль, что (1) не следует из (2) так же легко, как (4) следует из (3); это ясно из следующего. Как правило, из $wu \to v$ можно вывести, что $w \to u_0^{-1}v$ для некоторого следствия $u \to u_0$, — это аналог $W \vdash U \supset V$. Но в то время как $U \supset V$ содержит только константы, встречающиеся в U или в V, мы не можем прямо заключить, что u_0, а поэтому и $u_0^{-1}v$ содержат только образующие, входящие в u или в v.

По-видимому, некоторые конструкции, такие, как конструкция Шрейера или более синтаксическое рассуждение Магнуса, нужны по существу для доказательства утверждений о существовании, которые содержатся в (1) или (5). Таково же положение в теореме Крэйга (3), которая использует либо существенно конструктивное содержание теоремы Гёделя о полноте, либо довольно прямой анализ в духе теории доказательств. Все же разумно было бы попытаться найти единую конструкцию или по крайней мере общую теорему, которая содержала бы в себе оба результата. Задача предположительно состоит в расширении теоремы Крэйга на класс теорий с не логическими аксиомами, в которых формулы имеют некоторую ограниченную форму, такую, например, как уравнения. Это связано и с вопросом о расширении теоремы Шрейера; то, что она не справедлива для всех классов, задаваемых уравнениями, показывает следующий простой пример и замечание Хиггинса. В теории полугрупп с нулем, удовлетворяющих дополнительной аксиоме $xyz = 0$, импликация $xx = y \to yz = 0$ нарушает (3); и вообще (3) и (5) нарушаются, если имеет место тождество $w(u, v) = w'(u, v)$, где u и v не имеют общих переменных, но не выполняется тождество $w(x, y) = w'(x, y)$ для переменных x, y.

Вопрос о свободных произведениях, расширениях и объединениях моделей, конечно, изучался. Если в качестве констант в теореме Крэйга взять не элементы, а предикаты или отношения, что более обычно, то возникают аналогичные вопросы на более высоком уровне.

Применение (1) к доказательству теоремы о свободе основывается на следующем следствии:

(7) *Предположим, что w, $u_1, \ldots, u_m \to v$ и что w не имеет следствий, отличных от 1 и содержащих только образующие, которые встречаются в $u_1, \ldots, u_m$, v. Тогда*

$$u_1, \ldots, u_m \to v.$$

То, что эти предположения о w могут осуществляться, видно из самой теоремы о свободе.

(8) *Пусть w — циклически приведенное слово, т. е. произведение образующих и их обратных, которое не содержит последовательных множителей, обратных друг другу, и последний множитель не является обратным к первому. Тогда каждое следствие из w, отличное от 1, содержит в своей записи каждую образующую, которая встречается в w.*

Это тривиально в случае, когда w состоит самое большее из одного множителя, а в общем случае Магнус использует утверждение (7) и проводит индукцию по числу множителей. Аналогично доказывается следующее утверждение:

(9) *Два слова эквивалентны ($w \to v$ и $v \to w$) тогда и только тогда, когда одно из них сопряжено к другому или к его обратному.*

Ясно, что каждое слово w эквивалентно циклически приведенному слову w_1 и что каждое слово, эквивалентное w, должно содержать множество $|w|$ всех образующих, которые встречаются в w_1. Таким образом, теорема о свободе говорит, что если образующая встречается в каждом слове, эквивалентном w, то она встречается также в каждом нетривиальном следствии из w.

Из теоремы Крэйга легко следует, что две эквивалентные формулы всегда эквивалентны некоторой третьей (формуле), которая содержит только те константы, которые входят и в первую и во вторую формулы. Следовательно, для каждой формулы W имеется единственное минимальное множество $|W|$ констант, общих для всех формул, эквивалентных W, и существует формула W', эквивалентная W, которая содержит только эти константы. Но аналогия с теоремой о свободе не выполняется для произвольных формул; например, предложение W: $k_1 = k_2 \& k_3 = k_4$ теории тождеств, очевидно, не эквивалентно никакому предложению, не содержащему всех четырех констант, но имеет нетривиальное следствие $k_1 = k_2$, в котором k_3 и k_4 не участвуют.

Тем не менее вопрос о том, какие высказывания содержат все (или некоторые) свои константы существенно в смысле теоремы о свободе, представляет естественный интерес. Название „теорема о свободе“ происходит из следующей формулировки этой теоремы:

(10) *В группе с образующими $x_1, \ldots, x_n$, определенной единственным соотношением $w = 1$, где w — циклически приведенное слово, содержащее образующую x_1, подгруппа, порожденная элементами $x_2, \ldots, x_n$, свободна на этих образующих.*

Аналогично если высказывание $W(k)$ существенно содержит константу k и T есть теория, полученная из теории $T(k)$ выбрасыванием константы k, то, по определению, $W(k)$ не имеет следствий в теории T, не являющихся теоремами. Наоборот, каждая модель для T может быть так расширена, что будет содержать „решение“ высказывания $\exists y \cdot W(y)$; едва ли нужно здесь отмечать, что основной интерес принадлежит случаю, когда k не входит в область применения кванторов, так как иначе высказывание $\exists y \cdot W(y)$ из T должно было бы быть теоремой. Представляли бы интерес соответствующие теории, в которых формулы содержат все свои константы (по крайней мере из заданного множества) существенно, и до какой степени общая формула может быть разложена на такие компоненты.

То, что трудность, проиллюстрированная высказыванием W: $k_1 = k_2 \& k_3 = k_4$, не является непреодолимым препятствием к применению теоремы о свободе, очевидно уже из рассмотрения групп, определенных двумя соотношениями: $w_1 = 1$ и $w_2 = 1$. Мы можем выводить некоторые следствия из того, что даже в случае, когда нет ни одного образующего, общего для всех нетривиальных следствий v из множества слов $w_1, \ldots, w_m$, дело может обстоять все же таким образом, что множество образующих, встречающихся в циклически приведенном следствии v, не вполне произвольно. Так, любое

следствие W выше, которое не содержит в своей записи k_1, не может содержать k_2, кроме как тривиально. Такой результат заключен в главной форме теоремы о свободе, которую мы даем только в простом случае.

(11) *Пусть w_1 и w_2 циклически приведены, x_1 встречается в w_1, но не встречается в w_2 и x_2 встречается в w_2, но не встречается в w_1. Если $w_1 w_2 \to v$ и v не содержит в своей записи x_1, то $w_2 \to v$.*

Аналог для логических формул ясен.

Наша настоящая перепроверка теоремы о свободе возникла из попытки распространить главную форму этой теоремы и связанные с ней результаты, упомянутые выше, на более общие ситуации, подсказанные проблемами, с которыми столкнулся Папакирьякопулос в своем исследовании о гипотезе Пуанкаре. Мы достигли успеха в этом расширении; при этом обнаружилось, как мало в нашем рассуждении участвует специфика теории групп; это привлекло наше внимание к аналогии с метаматематическими вопросами. Мы приведем здесь метаматематический аналог одного из типичных расширений главной формы.

(12) *Пусть K — множество констант k_p, снабженных индексами из множества P, где P — точечная решетка в евклидовом пространстве размерности $n \geqslant 1$. Если W — любая формула, то через P_W обозначим пересечение P с выпуклым замыканием множества тех $p \in P$, для которых k_p встречается в W. Пусть Ω — множество формул со следующими свойствами.*

(I) *Если p — граничная точка P_W, $W \in \Omega$, то k_p встречается в каждом следствии из W, не являющемся теоремой.*

(II) *Не существует таких $W_1, W_2 \in \Omega$, $W_1 \neq W_2$, что $P_{W_1} \subseteq P_{W_2}$.*

(III) *Никакая граничная точка $P_{W_1} \cup P_{W_2}$ не принадлежит $P_{W_1} \cap P_{W_2}$, если $W_1, W_2 \in \Omega$, $W_1 \neq W_2$. Тогда если V — любая формула, являющаяся следствием всех W из Ω, то она является следствием только тех W, которые содержат в своей записи константы k_p для p из P_V.*

Мы закончим замечаниями о двух типах результатов, тесно связанных с теоремой о свободе и ее расширениями. Во-первых, Магнус получил, пользуясь такими же методами, как при доказательстве теоремы о свободе, положительное решение проблемы тождества слов в группах с одним определяющим соотношением, т. е. он показал, что отношение $w \to v$ разрешимо. Это наводит на мысль, хотя я и не пытался проверить это, что в условиях (12) множество (нормальный делитель) всех v, таких, что $\Omega \to v$, должно быть рекурсивно сводимо к множеству таких v, что $W \to v$ для каждого W из Ω.

К этому близок вопрос, можно ли слово v получить в качестве следствия слов $w_1, \ldots, w_m$ несколькими существенно различными способами. Мне удалось расширить на условия (12) более раннюю „теорему о тождестве“, которая утверждает (отвлекаясь от технических тонкостей), что если v выражается в виде произведения элементов $uw_i^{\pm 1}u^{-1}$, сопряженных с w_i и их обратных, то это представление единственно с точностью до порядка множителей и до замены элементов u на элементы u', эквивалентные им по модулю w_i, т. е. $u^{-1}u'$ должно быть следствием w_i. Аналогичный метаматематический контекст о „перестановках“ доказательств достаточно хорошо известен в общих терминах, но я не знаю никакого определения „существенной эквивалентности“ доказательств, которое обеспечило бы интересную формулировку для вопроса, аналогичного теореме о тождестве: когда все доказательства с данной посылкой и с данным заключением существенно эквивалентны? Далее, нормальные делители R_1 и R_2 независимы в обычном смысле, если их пересечение ничего не содержит, кроме априори необходимого взаимного коммутанта (R_1, R_2); встает вопрос: когда два высказывания W_1 и W_2 независимы в том смысле, что они не имеют общих следствий (кроме некоторого множества, которое еще подлежит определению, очевидных общих следствий, таких, как $W_1 \vee W_2$)? Хотя это вопросы смутные и нерешенные, нетрудно почувствовать, что имеется некоторый смысл в идее о двух посылках, взятых, скажем, из совершенно не связанных между собой дисциплин, независимых в своих следствиях.

Упомянем, наконец, противоположную ситуацию, когда известные метаматематические результаты подсказывают естественные и интересные, но нерешенные проблемы в теории групп. Теорема Крэйга (3) эффективна: если дано доказательство $W \vdash V$, то его рассуждение дает конструкцию для требуемого W' и для доказательств, что $W \vdash W'$ и $W' \vdash V$. Подобно этому, в ситуации, аналогичной (7), мы можем, исходя из доказательства, что $W, U_1, \ldots, U_n \vdash V$, построить доказательство того, что $U_1, \ldots, U_n \vdash V$. Хотя аналогичное „исключение посылок“ могло бы играть важную роль в некоторых специальных рассуждениях в теории групп, мы все еще не имеем ни доказательства, ни опровержения параллельного теоретико-группового предположения. Вот простейшая форма этого вопроса: если даны $w_1(x_1)$, $w_2(x_2)$ и $v(x_2)$, как в (11), и выражение v в виде произведения элементов, сопряженных с $w_1^{\pm 1}$, $w_2^{\pm 1}$, то имеется ли естественный способ (в том смысле, что его можно точно описать) для преобразования этого выражения в выражение для v в виде произведения элементов, сопряженных только с $w_2^{\pm 1}$?

Примечание к библиографии. Обсуждение теоремы Крэйга и другие метаматематические ссылки можно найти в [6]; остальные статьи, перечисленные ниже, содержат упоминавшиеся нами результаты из теории групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dehn M., Über unendliche diskontinuerliche Gruppen, *Math. Ann.*, **71** (1911), 116.
2. Schreier O., Die Untergruppen der freien Gruppen, *Abh. Seminar Hamburgischen Univ.*, **5** (1927), 161.
3. Magnus W., Über diskontinuerliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz), *J. reine und angew. Math.*, **63** (1930), 141.
4. Magnus W., Das Identitätsproblem für Gruppen mit einer definierenden Relation, *Math. Ann.*, **106** (1932), 295.
5. Lyndon R. C., Cohomology theory of groups with a single defining relation, *Ann. Math.*, **52** (1950), 650.
6. Lyndon R. C., Properties preserved under algebraic construction, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **65** (1959), 287.
7. Lyndon R. C., Dependence and Independence in free groups, *J. reine u. angew. Math.*

Диофантовы уравнения и нестандартные модели арифметики[1])

М. РАБИН

Еврейский университет, Иерусалим, Израиль

В настоящей статье мы применяем методы общей теории моделей с целью получить некоторую информацию о нестандартных моделях арифметики. Хотя нестандартные модели обладают, по определению, всеми свойствами системы целых чисел, внешне они ведут себя совершенно различно. Так, мы доказываем, что для каждой нестандартной модели арифметики существует диофантово уравнение с коэффициентами в модели, которое неразрешимо в этой модели, но разрешимо в подходящем расширении модели (см. теорему 5, доказывающую на самом деле более сильный результат). Это, конечно, не может происходить с диофантовыми уравнениями над стандартной моделью.

Дополнительным стимулом к изучению нестандартных моделей является возможность получения, кроме информации об их структуре, некоторых следствий для теории чисел и самой аксиоматики арифметики. Например, цитированный выше результат имеет применение к аксиоматике. Во второй части работы мы устанавливаем тесную связь между некоторыми вопросами, касающимися моделей и их расширений, и вопросом, является ли каждый рекурсивно перечислимый предикат диофантовым.

Наиболее поразительной чертой нестандартных моделей арифметики является наличие в них элементов, которые можно рассматривать в некотором смысле как бесконечные числа. При изучении нестандартных моделей они могут служить представителями бесконечных (упорядоченных) наборов чисел или множеств чисел и т. д. Так, мы используем здесь бесконечное число для доказательства того, что объединение некоторой бесконечной последовательности множеств элементов модели всегда является собственным подмножеством некоторого множества, причем это является основным шагом в доказательстве теоремы 5. Дальнейшее применение этого аппарата должно, по-видимому, привести к интересным результатам.

Предварительные определения

Пусть I — множество неотрицательных чисел, $\mathfrak{Z} = \langle I, +, \cdot \rangle$ — реляционная система (relational system), где „$+$“ и „$\cdot$“ — обычные операции сложения и умножения целых чисел. Пусть L — язык первого порядка, имеющий две функциональные константы $+$ и $\cdot$, отношение $=$, бесконечный список индивидных переменных **u**, **v**, **w**, **x**, **y**, **z**, $\mathbf{u}_1$, ... и бесконечный список индивидных констант **0**, **1**, **2**, ... (называемых номерами). Через **T** обозначим множество всех высказываний в L, истинных в $\mathfrak{Z}$ при интерпретации функций констант $+$ и $\cdot$ как сложения и умножения соответственно, интерпретации $=$ как равенства и интерпретации каждого номера **n** как соответствующего целого числа n. **T** будет называться множеством *истинных высказываний арифметики*.

Любая система $\mathfrak{Z}' = \langle I', +, \cdot \rangle$, где „$+$“ и „$\cdot$“ — бинарные функции на I', которая является моделью **T** (при обычной интерпретации), будет называться *сильной моделью арифметики* или *сильной моделью* (для краткости). Каждая сильная модель $\mathfrak{Z}'$ содержит единственную подмодель, изоморфную $\mathfrak{Z}$. С помощью подходящего отождествления каждую модель можно, таким образом, рассматривать как расширение $\mathfrak{Z}$. Если расширение *собственное*, т. е. $I' - I \neq \varnothing$, мы будем называть $\mathfrak{Z}'$ *нестандартной* (сильной) моделью. Модель $\mathfrak{Z}$ и любая модель, изоморфная ей, будут называться *стандартными* моделями.

Если $\mathfrak{Z}'$ — нестандартная модель, то элементы $\pi \in I' - I$ будут называться *бесконечными числами*. С помощью обычных определений введем отношение $<$. Тогда бесконечные числа на $\mathfrak{Z}'$ могут быть охарактеризованы как элементы $\pi \in I'$, удовлетворяющие отношению $i < \pi$ для каждого актуального числа $i \in I \subsetneq I'$.

Замечания: Метаматематические переменные a, b, i, j, k, m, n, p, q пробегают все целые числа, т. е. элементы из I; соответствующие полужирные буквы обозначают номера. Переменные u, v, w, x, y, z будут использоваться метаматематически для обозначения неизвестных в записи многочленов, пробегающих некоторое данное множество, и т. д. Фиксированные элементы модели будут обозначаться греческими буквами. Полиномиальные уравнения записываются для краткости в форме $P(x) = 0$, если даже в системе и нет вычитания. Это допустимо, потому что для каждого полиномиального уравнения $P(x) = 0$ с положительными и отрицательными коэффициентами можно найти уравнение $P_1(x) = P_2(x)$ с теми же неизвестными, с положительными коэффициентами и с теми же решениями.

1. Диофантовы уравнения в нестандартных моделях

1.1. Теоретико-числовые теоремы. Выберем определенную гёделевскую нумерацию всех многочленов $P(y_1, y_2, \ldots, y_n; x_1, \ldots, x_m)$, где m фиксировано, а n пробегает все целые положительные числа; коэффициенты многочленов — положительные и отрицательные числа. Многочлен, имеющий гёделевский номер i, будет обозначаться P_i; мы

[1]) R a b i n M., Diophantine equations and non-standard models, стр. 151—158.

предполагаем, что каждое целое число есть гёделевский номер некоторого многочлена.

Лемма 1. *Теоретико-числовое отношение* $E(i, b, a_1, \ldots, a_m)$, *имеющее место тогда и только тогда, когда* i — *гёделевский номер многочлена* P_i *от* $n+m$ *переменных*, $b=2^{b_1} \ldots p_{n-1}^{b_n}$ — *гёделевский номер последовательности* $(b_1, \ldots, b_n)$ *и* $P_i(b_1, \ldots, b_n, a_1, \ldots, a_m)=0$, *примитивно рекурсивно.*

Доказательство очевидно.

Через $E(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ будем обозначать формулу из L, которая представляет номерами примитивно рекурсивный предикат E.

Замечание. Для бесконечного числа η предикат $(Ey)E(\eta, y, \vec{x})$ не имеет прямого значения. Однако если $i \in I$, то $(Ey)E(i, y, \vec{x})$ имеет определенное значение, в том смысле что

$$(\vec{\mathbf{x}})[(E\mathbf{y})E(\mathbf{i}, \mathbf{y}, \vec{\mathbf{x}}) \equiv (E\vec{\mathbf{y}})P_i(\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}})=\mathbf{0}] \in \mathbf{T},$$

и $(E\mathbf{y})E(\mathbf{i}, \mathbf{y}, \vec{\mathbf{x}})$ представляет, таким образом, отношение $(E\vec{y})P_i(\vec{y}, \vec{x})=0$ в каждой модели.

Лемма 2. *Пусть* $C(\mathbf{x})$ — *любая формула из* L. *Тогда высказывание*

$$(\mathbf{u})(E\mathbf{v})(\vec{\mathbf{x}})\{(E\mathbf{y})E(\mathbf{v}, \mathbf{y}, \vec{\mathbf{x}}) \equiv$$
$$\equiv (E\mathbf{w})[\mathbf{w} < \mathbf{u} \wedge C(\mathbf{w}) \wedge (E\mathbf{y})E(\mathbf{w}, \mathbf{y}, \vec{\mathbf{x}})]\}, \qquad (1)$$

где $\vec{\mathbf{x}}$ — *сокращение для* $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$, *является истинным высказыванием арифметики.*

Доказательство. Пусть i — любое число. Множество чисел j, удовлетворяющих отношению $j < i \wedge C(j)$ конечно и состоит, скажем, из $j_1, \ldots, j_n$. Объединение конечных чисел из (расширительно) диофантовых отношений $(Eb)E(j_k, b, a_1, \ldots, a_m)$, $1 \leqslant k \leqslant n$ снова, как легко видеть, является диофантовым отношением. Пусть q — гёделевский номер многочлена $P_q(y_1, \ldots, y_p; x_1, \ldots, x_m)$, для которого

$$(\vec{a})[(E\vec{c})P_q(\vec{c}, a_1, \ldots, a_m)=0 \equiv (Eb)E(j_1, b, \vec{a}) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee (Eb)E(j_n, b, \vec{a})].$$

Число q удовлетворяет

$$(\vec{a})\{(Eb)E(q, b, \vec{a}) \equiv (Ej)[j < i \wedge C(j) \wedge (Eb)E(j, b, \vec{a})]\}$$

в модели $\mathfrak{Z}$. Таким образом, высказывание (1) истинно в стандартной модели $\mathfrak{Z}$ и, следовательно, принадлежит $\mathbf{T}$.

Из результата М. Дэвиса [1, стр. 113] о том, что отрицание диофантова отношения необязательно является диофантовым отношением, сразу следует существование таких чисел k и n, что теоретико-числовой предикат

$$\sim (Eb_1, \ldots, b_n)\Big[\sum_{0 \leqslant i_j \leqslant k} a_{i_1 \ldots i_n} b_1^{i_1} \ldots b_n^{i_n}=0\Big], \qquad (2)$$

устанавливающий неразрешимость диофантова уравнения

$$\sum a_{i_1 \ldots i_n} t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n}=0, \qquad 0 \leqslant i_j \leqslant k, \qquad (3)$$

не диофантов.

Припишем каждому из $(k+1)^n$ наборов n чисел номер $i = \nu(i_1, \ldots, i_n)$ так, чтобы i пробегало номера, не превышающие $(k+1)^n$.

Переводя (2) в L, мы получаем формулу $\sim D(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$:

$$\sim D(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) = \sim (E\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n)\Big[\sum_i \mathbf{x}_{\nu(i_1, \ldots, i_n)} \mathbf{z}_1^{i_1} \ldots \mathbf{z}_n^{i_n}=\mathbf{0}\Big],$$

где $m=(k+1)^n$ и суммирование включает все различные одночлены $\mathbf{z}_1^{i_1} \ldots \mathbf{z}_n^{i_n}$.

Ясно, что мы имеем следующую лемму.

Лемма 3. *Высказывание*

$$(\mathbf{v})(E\vec{\mathbf{x}})[\sim D(\vec{\mathbf{x}}) \not\equiv (E\mathbf{y})E(\mathbf{v}, \mathbf{y}, \vec{\mathbf{x}})] \qquad (4)$$

является истинным высказыванием арифметики.

Следствие. *Высказывание*

$$(\mathbf{v})\{(\vec{\mathbf{x}})[(E\mathbf{y})E(\mathbf{v}, \mathbf{y}, \vec{\mathbf{x}}) \supset \sim D(\vec{\mathbf{x}})] \supset$$
$$\supset (E\vec{\mathbf{x}})[\sim (E\mathbf{y})E(\mathbf{v}, \mathbf{y}, \vec{\mathbf{x}}) \wedge \sim D(\vec{\mathbf{x}})]\} \qquad (5)$$

содержится в $\mathbf{T}$.

1.2. Теоретико-модельный результат. Наша цель состоит в нахождении таких элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ нестандартной модели $\mathfrak{Z}'$, что при подстановке $\alpha_{\nu(i_1, \ldots, i_n)}$ вместо $a_{i_1, \ldots, i_n}$ уравнение (3) неразрешимо в $\mathfrak{Z}'$, но разрешимо в некотором расширении $\mathfrak{Z}''$ модели $\mathfrak{Z}'$. Другими словами, $\sim D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ должно выполняться в $\mathfrak{Z}'$ и не выполняться в некотором расширении. В каком случае оказывается невозможным изменить элементарное свойство данных элементов модели путем перехода к расширению модели? Ответ достигается в следующей теореме, которая содержится также в [2, § 3.2]; за доказательством читатель может обратиться к [2].

Теорема 4. *Пусть реляционная система* $\mathcal{M} = \langle S, R_1, R_2, \ldots \rangle$ *является моделью для множества* $\mathbf{T}$ *высказываний в языке* *первого порядка L, и пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in S$. Пусть $\sim D(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ — формула L без свободных переменных, отличных от $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$, и предположим, что $\sim D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ выполняется в $\mathcal{M}$. Тогда для того чтобы формула $\sim D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ выполнялась в любом расширении $\mathcal{M}'$ модели $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} < \mathcal{M}'$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая формула $E(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ в предваренной форме, что*

(I) $E(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ — *экзистенциальная формула*,
(II) $E(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ *выполняется в* $\mathcal{M}$,
(III) $\vdash_{\mathrm{T}} (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)[E(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) \supset \sim D(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)]$.

1.3. Основная теорема.

Теорема 5. *Для каждой нестандартной модели $\mathfrak{Z}' = \langle I', +, \cdot \rangle$ арифметики существуют элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in I'$ и расширение $\mathfrak{Z}''$ модели $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{Z}' < \mathfrak{Z}''$, такие, что при подстановке $\alpha_{\nu(i_1, \ldots, i_n)}$ вместо $a_{i_1, \ldots, i_n}$ в диофантово уравнение* (3) *это уравнение неразрешимо в $\mathfrak{Z}'$, но разрешимо в сильной модели $\mathfrak{Z}''$.*

Доказательство. Мы должны найти такие элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in I'$, что $\sim D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ выполняется в $\mathfrak{Z}'$, но не выполняется в некотором расширении модели $\mathfrak{Z}'$. Ввиду теоремы 4 мы должны найти такие элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in I'$, что для каждой экзистенциальной формулы $E(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$, удовлетворяющей (III), $\sim E(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ выполняется в $\mathfrak{Z}'$. Множество

$$S_E = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_m \text{ удовлетворяют } E(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) \text{ в } \mathfrak{Z}'\},$$

где E удовлетворяет (I) и (III), всегда является, по лемме 3, собственным подмножеством множества $S_{\sim D}$ всех $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, удовлетворяющих $\sim D(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ в $\mathfrak{Z}'$. Но это не устраняет априори возможности, что объединение множеств S_E равно $S_{\sim D}$. Доказательство достигается использованием бесконечного числа следующим образом.

Пусть $\pi \in I'$ — бесконечное число. Обозначим через $C(\mathbf{u})$ формулу

$$C(\mathbf{u}) = (\vec{\mathbf{x}})[(E\mathbf{y})E(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \vec{\mathbf{x}}) \supset \sim D(\vec{\mathbf{x}})].$$

Неформальное значение $C(u)$ заключается в том, что u есть гёделевский номер многочлена, дающего диофантов предикат (из $\mathfrak{Z}'$), который является подмножеством $S_{\sim D}$. По лемме 2, существует такое $\eta \in I'$, что

$$(\vec{x})\{(Ey)E(\eta, y, \vec{x}) \equiv (Ew)[w < \pi \wedge C(w) \wedge (Ey)E(w, y, \vec{x})]\}$$

выполняется в $\mathfrak{Z}'$. Множество наборов m чисел $(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \vec{\beta}$, удовлетворяющих $(Ey)E(\eta, y, \vec{\beta})$ в $\mathfrak{Z}'$, является объединением множеств таких $\vec{\beta}$, которые удовлетворяют $(Ey)E(\sigma, y, \vec{\beta})$, когда σ пробегает все элементы $\sigma < \pi$, удовлетворяющие $C(\sigma)$. Множество $\vec{\beta}$, удовлетворяющих $(Ey)E(\eta, y, \vec{\beta})$ в $\mathfrak{Z}'$, является поэтому подмножеством множества $S_{\sim D}$. По следствию из леммы 3, это есть *собственное* подмножество множества $S_{\sim D}$. Поэтому существуют элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in I'$, для которых

$$\sim (Ey)E(\eta, y, \vec{\alpha}) \wedge \sim D(\vec{\alpha}) \tag{6}$$

выполняется в $\mathfrak{Z}'$.

Пусть $P_i(y_1, \ldots, y_n; x_1, \ldots, x_m)$ — такой многочлен с гёделевским номером i, что формула

$$E(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) = (E\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)[P_i(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n; \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) = \mathbf{0}]$$

удовлетворяет условию (III) теоремы 4. Для номера i мы имеем, по замечанию, следующему за леммой 1,

$$(\vec{\mathbf{x}})[(E\mathbf{y})E(\mathbf{i}, \mathbf{y}, \vec{\mathbf{x}}) \equiv E(\vec{\mathbf{x}})] \in \mathbf{T}, \tag{7}$$

так что это высказывание, конечно, выполняется в $\mathfrak{Z}'$. Так как $E(\vec{\mathbf{x}})$ удовлетворяет (III), то отсюда следует, что $C(\mathbf{i}) \in \mathbf{T}$. Теперь число $i \in I \subseteq I'$ удовлетворяет отношению $i < \pi$ и $C(i)$ в $\mathfrak{Z}'$, а следовательно, множество наборов из m чисел, удовлетворяющих $(Ey)E(i, y, \vec{x})$ в $\mathfrak{Z}'$, совпадает с множеством таких наборов, удовлетворяющих $(Ey)E(\eta, y, \vec{x})$. Из уравнений (6) и (7) следует, что $\sim E(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ выполняется в $\mathfrak{Z}'$. Доказательство завершается теперь ссылкой на теорему 4.

1.4. Применение к аксиоматике. Применяя теорему 5, мы докажем один результат, касающийся аксиоматики арифметики. Этот результат не является новым и может быть доказан другими методами, например с помощью теоремы Тарского о том, что множество **T** не является арифметическим. Доказательство, которое здесь дается, интересно тем, что оно является чисто теоретико-модельным и не использует арифметизацию синтаксиса.

Говорят, что высказывание B имеет форму AE, если оно задано в предваренной форме и все его кванторы общности предшествуют всем кванторам существования. Совершенно очевидно, что если **S** — (непротиворечивое) множество высказываний в форме AE, то объединение возрастающей цепи моделей для **S** снова является моделью для **S**.

Теорема 6. *Не существует такого множества $\mathbf{S} \subset \mathbf{T}$ истинных высказываний арифметики в форме AE, что все высказывания из **T** являются логическими следствиями высказываний из **S**.*

По предыдущему замечанию, теорема 6 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 7. *Существует возрастающая цепь $\mathfrak{Z}_1 < \mathfrak{Z}_2 < \dots$ сильных моделей арифметики, таких, что объединение $\mathfrak{Z}' = \bigcup_i \mathfrak{Z}_i$ не является сильной моделью арифметики.*

Доказательство. Напомним, что $D(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ есть формула, устанавливающая, что диофантово уравнение (3) с коэффициентами $\alpha_{i_1, \dots, i_n} = x_{\nu(i_1, \dots, i_n)}$ разрешимо. Заметим, что если $D(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ выполняется в модели $\mathfrak{Z}_1$, она выполняется также в любом расширении $\mathfrak{Z}_2$ модели $\mathfrak{Z}_1$.

Пусть $\mathfrak{Z}_1 = \langle I_1 +, \cdot \rangle$ — нестандартная модель. Пусть $\mathbf{Z}_1$ — диаграмма модели $\mathfrak{Z}_1$ (о понятии *диаграммы* см. [3, стр. 74]). Из леммы Цорна вытекает существование множества $J_1 \subseteq I_1^m$ наборов из m чисел, максимальное по отношению к свойству, что множество высказываний (в подходящем расширении языка L)

$$\mathbf{M}_1 = \{D(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in J_1\}$$

совместимо с $\mathbf{Z}_1 \cup \mathbf{T}$. Непротиворечивое множество $\mathbf{Z}_1 \cup \mathbf{T} \cup \mathbf{M}_1$ имеет модель $\mathfrak{Z}_2$. Ясно, что $\mathfrak{Z}_2$ будет сильной моделью арифметики и, будучи моделью для $\mathbf{Z}_1$, может рассматриваться как расширение модели $\mathfrak{Z}_1$. Заметим, что $D(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ для $\vec{\alpha} \in I_1^m$ выполняется в $\mathfrak{Z}_2$ тогда и только тогда, когда $\vec{\alpha} \in J_1$.

Повторяя эту конструкцию, мы получим возрастающую цепь моделей

$$\mathfrak{Z}_1 < \mathfrak{Z}_2 < \dots, \quad \mathfrak{Z}_i = \langle I_i, +, \cdot \rangle.$$

Рассмотрим объединение $\mathfrak{Z}' = \bigcup_i \mathfrak{Z}_i$. Допустим, что $\mathfrak{Z}' = \langle I', +, \cdot \rangle$ есть модель для $\mathbf{T}$. Тогда, будучи расширением модели $\mathfrak{Z}_1$, она должна быть нестандартной моделью. Согласно теореме 5, существуют такие $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in I'$, что $\sim D(\vec{\alpha})$ выполняется в $\mathfrak{Z}'$, но $D(\vec{\alpha})$ совместимо с $\mathbf{T}$ и с диаграммой $\mathbf{Z}'$ модели $\mathfrak{Z}'$.

Существует модель $\mathfrak{Z}_i$, для которой $\vec{\alpha} \in I_i^m$. Кроме того, $\sim D(\vec{\alpha})$ выполняется в $\mathfrak{Z}'$, а поэтому и в $\mathfrak{Z}_{i+1}$. Отсюда следует, что $\vec{\alpha} \notin J_i$; значит, множество

$$\mathbf{T} \cup \mathbf{Z}_i \cup \mathbf{M}_i \cup \{D(\vec{\alpha})\}$$

противоречиво. Но диаграмма $\mathbf{Z}'$ содержит $\mathfrak{Z}_i$, и все высказывания из $\mathbf{M}_i$ выполняются в $\mathfrak{Z}'$, так что множество $\mathbf{T} \cup \mathbf{Z}' \cup \mathbf{M}_i \cup \{D(\vec{\alpha})\}$ непротиворечиво, что приводит наше рассуждение к противоречию.

Теорема Робинсона [3, стр. 117] утверждает, что если множество $\mathbf{A}$ аксиом таково, что пересечение любых двух подмоделей модели для $\mathbf{A}$ не пусто и является моделью для $\mathbf{A}$, то объединение любой возрастающей последовательности моделей для $\mathbf{A}$ есть модель для $\mathbf{A}$. Комбинируя этот результат с теоремой 7, немедленно получаем следующую теорему.

Теорема 8. *Существует сильная модель $\mathfrak{Z}'$ и две подмодели $\mathfrak{Z}_1 < \mathfrak{Z}'$ и $\mathfrak{Z}_2 < \mathfrak{Z}'$, такие, что $\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{Z}_2$ не является сильной моделью арифметики.*

2. Конфинальные расширения

Мы хотим обсудить сейчас кратко, без доказательств, соотношения между некоторыми проблемами, касающимися сильных моделей, и проблемами теории чисел, в частности вопрос, будет ли каждый рекурсивно перечислимый предикат диофантовым, что тесно связано с десятой проблемой Гильберта.

2.1. Виды расширений. Рассмотрим системы $\mathfrak{Z}_f = \langle I, +, \cdot, f_1, \dots \rangle$, которые получаются из $\mathfrak{Z}$ присоединением некоторых фиксированных арифметических функций $f_1, \dots$. Пусть L_f получается из L присоединением функциональных констант $\mathbf{f}_1, \dots$, и пусть $\mathbf{T}_f$ — множество высказываний из L_f, истинных в $\mathfrak{Z}_f$. Модель для $\mathbf{T}_f$ будет называться *сильной моделью пополненной арифметики*. Множество $\{f_1, \dots\}$ присоединяемых функций в дальнейшем будет фиксированным (быть может, пустым) множеством.

Определение. *Пусть $\mathfrak{Z}_1 = \langle I_1, +, \cdot, f_1, \dots \rangle$ и $\mathfrak{Z}_2 = \langle I_2, +, \cdot, f_1, \dots \rangle$ — две сильные модели пополненной арифметики, $\mathfrak{Z}_1 < \mathfrak{Z}_2$. Если для каждого $\beta \in I_2$ существует такое $\alpha \in I_1$, что $\beta < \alpha \in I_1$, то $\mathfrak{Z}_2$ назовем конфинальным расширением $\mathfrak{Z}_1$.*

Для конфинальных расширений справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *Любая сильная нестандартная модель $\mathfrak{Z}_1$ пополненной арифметики обладает конфинальным расширением.*

2.2. Модели и рекурсивные предикаты. Мы хотим изучить поведение рекурсивных предикатов при расширении моделей. В качестве первого шага мы получим информацию о формулах с ограниченными кванторами.

Лемма 10. *Пусть $B(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}})$, где $\vec{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, $\vec{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$ и $\vec{\mathbf{z}} = (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m)$, есть формула из L_f, и пусть $\tilde{\mathfrak{Z}}_1 = \langle I_1, +, \cdot, f_1, \dots \rangle$*

— сильная модель. Определим отношение $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}; \vec{\gamma})$ *из* I_1 *посредством*

$$A = (x_1)_{x_1 < \alpha_1} (Ey_1)_{y_1 < \beta_1} \ldots (x_n)_{x_n < \alpha_n} (Ey_n)\, B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{\gamma}),$$

где $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$. *Обозначим приставку с ограниченными кванторами через* Σ. *Для каждых* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ *и* $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ *существует такое* $\beta_n \in I_1$, *что*

$$A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \vec{\gamma}) \equiv \Sigma (Ey_n)_{y_n < \beta_n} B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{\gamma})$$

справедливо в $\mathfrak{Z}_1$.

Верна также теорема, двойственная этой.

Теорема 11. *Пусть множество* $S = \{+, \cdot, f_1, \ldots\}$ *функций из* $\mathfrak{Z}_f$ *(стандартная модель) таково, что все присоединенные функции* $f_1, \ldots$ *рекурсивны и каждый рекурсивный предикат (на* I*) экзистенциально определим через функции из* S. *Если* $\mathfrak{Z}_1$ *и* $\mathfrak{Z}_2$ *— любые сильные модели (пополненной) арифметики и* $\mathfrak{Z}_2$ *— конфинальное расширение* $\mathfrak{Z}_1$, *то* $\mathfrak{Z}_2$ *есть элементарное расширение (в смысле Тарского — Воота* [5]*) модели* $\mathfrak{Z}_1$.

Теорема доказывается получением из формулы $F(\mathbf{x})$ и из элемента $\gamma \in I_1$, такого, что $F(\gamma)$ выполняется в $\mathfrak{Z}_1$ и $\sim F(\gamma)$ выполняется в $\mathfrak{Z}_2$, такой формулы $F'(\vec{\mathbf{x}})$ с ограниченными кванторами и константами $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in I_1$, что $F'(\vec{\gamma})$ выполняется в $\mathfrak{Z}_1$, но $\sim F'(\vec{\gamma})$ выполняется в $\mathfrak{Z}_2$.

Используя хорошо известный результат Дж. Робинсон [4], получаем как следствие, что *для арифметики с возведением в степень любое конфинальное расширение сильной модели есть элементарное расширение.*

Если бы мы смогли построить пару сильных моделей обычной арифметики, таких, чтобы одна из них была неэлементарным конфинальным расширением другой, то из этого следовало бы, что не всякий рекурсивный предикат является диофантовым.

Нам хотелось бы закончить постановкой вопроса, будет ли справедлива теорема, обратная теореме 11.

ЛИТЕРАТУРА

1. Davis M., Computability and Unsolvability, New York, McGraw-Hill, 1951.
2. Rabin M. O., Non-standard models and independence of the induction axiom, Essays on the Foundations of Mathematics (Fraenkel's Festschrift), Jerusalem, Magnes Press, 1961, 287—299.
3. Robinson A., On the Metamathematics of Algebra, Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1951.
4. Robinson J. B., The undecidability of exponential diophantine equations, *American Mathematical Society Notices*, 7 (1960), 75.
5. Tarski A., Vaught R. L., Arithmetical extensions of relational systems, *Compositio Mathematica*, **13** (1957), 82—101.

О полноте и разрешимости некоторых неопределимых понятий элементарной гиперболической геометрии[1]

В. ШВАБХОЙЗЕР

Университет им. Гумбольдта, Берлин

В § 1 своей статьи я хотел бы изложить доказательство полноты элементарной гиперболической геометрии и существования метода разрешения для этой теории, использующее аналогичные результаты Тарского для элементарной алгебры[2]. В § 2 рассматривается следствие, касающееся неопределимости некоторых понятий в элементарной гиперболической геометрии[3].

§ 1

Под *элементарной гиперболической геометрией* (ЭГГ) понимается теория, формализованная в исчислении предикатов первого порядка с тремя типами переменных, представляющих точки, прямые и плоскости трехмерного гиперболического пространства. Основными понятиями этой теории являются инцидентность, порядок и конгруэнтность в смысле Гильберта [3]. Поскольку, однако, у нас нет символов для отрезков и углов, мы будем пользоваться отношением четвертого порядка между точками для выражения конгруэнтности отрезков и отношением шестого порядка между точками для выражения конгруэнтности углов.

Теория построена на аксиомах, по существу совпадающих с гильбертовыми, с той лишь разницей, что в качестве аксиомы непрерывности мы избрали схему, аналогичную примененной Тарским [8], а в качестве аксиомы параллельных — отрицание соответствующей аксиомы евклидовой геометрии.

Произвольную формулу Φ мы называем (геометрически) *доказуемой* (и записываем это в виде $\vdash_g \Phi$) в том и только том случае, когда она может быть получена из этих аксиом и из логических аксиом посредством обычных операций вывода.

---

[1]) Schwabhäuser W., On completeness and decidability of some non-definable notions of elementary hyperbolic geometry, стр. 159—167.

[2]) Подробное изложение на немецком языке см. в [7].

[3]) Будет опубликовано в «Zeitschrift für math. Logik und Grundlagen der Math.»

Мы называем формулу Φ *геометрически истинной* (записывается: agg Φ), если она истинна [1]) в модели ЭГГ Клейна, точками которой являются внутренние точки эллипсоида; в качестве эллипсоида мы берем сферу аналитической геометрии $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ над полем R действительных чисел, где x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты.

Тогда теорема о семантической полноте может быть сформулирована следующим образом:

Если agg Φ, *то* $\vdash_g \Phi$.

В доказательстве мы можем ограничиться специальным классом формул, построенных с помощью логических операций из формул вида $A=B$ (равенство точек) и $AB \operatorname{agl} CD$ (отношение равенства расстояний для точек, означающее, что расстояние от A до B равно расстоянию от C до D); такие формулы содержат лишь переменные для точек (обозначаемые прописными латинскими буквами). Поэтому формулы указанного класса мы называем формулами *точечной геометрии*.

Как известно, достаточно установить нашу теорему полноты лишь для предложений или даже лишь для предложений точечной геометрии, поскольку при развитии евклидовой или гиперболической геометрии можно использовать в качестве единственных основных понятий равенство точек и отношение равенства расстояний; таким образом, для каждого предложения ЭГГ можно найти эквивалентное предложение точечной геометрии [2].

Мы применим теперь теорему полноты для арифметики действительных чисел (АДЧ), доказанную Тарским [8].

Для каждой формулы Ψ *системы* АДЧ *справедливо следующее утверждение.*

Если Ψ *арифметически истинна* (aga Ψ) (*т. е. истинна в упорядоченном поле действительных чисел*), *то* Ψ *арифметически доказуема* ($\vdash_a \Psi$) (*т. е. может быть получена из аксиом* АДЧ *с помощью правил вывода*).

Чтобы свести нашу теорему полноты к теореме Тарского, мы сопоставим каждой формуле Φ точечной геометрии формулу Rda (Φ) системы АДЧ, называемую арифметическим *сведéнием* Φ, таким образом, что для каждого предложения Φ точечной геометрии справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *Если* agg Φ, *то* aga Rda (Φ).

Теорема 2. *Если* $\vdash_a$ Rda (Φ), *то* $\vdash_g \Phi$.

---

[1]) „Allgemeingültig“, т. е. удовлетворяемой любым геометрическим наложением по отношению к этой модели.

Арифметические сведéния строятся таким образом, что теорема 1 может быть доказана без труда. Более того, мы получаем несколько более сильную теорему:

Теорема 1′. *Для каждого предложения* Φ *точечной геометрии* agg Φ *справедливо тогда и только тогда, когда* aga Rda (Φ).

Однако попытка доказать теорему 2 прямо, например с помощью индукции, соответствующей определению арифметической доказуемости, не удается, поскольку в формальном доказательстве арифметического сведéния Rda (Φ) могут встретиться формулы АДЧ, не являющиеся арифметическими сведéниями формул точечной геометрии.

Тем не менее мы можем применить такую индукцию для доказательства теоремы, в которой предполагается доказуемость произвольной формулы Ψ системы АДЧ. Поэтому мы сопоставим каждой формуле Ψ системы АДЧ формулу Rdg (Ψ) системы ЭГГ, которую мы назовем геометрическим сведéнием Ψ, так, что по индукции указанным выше способом можно будет доказать следующую теорему:

Теорема 2′. *Для каждой формулы* Ψ *системы* АДЧ *из* $\vdash_a \Psi$ *следует* $\vdash_g$ Rdg (Ψ).

Применяя эту теорему к арифметически доказуемой формуле вида Rda (Φ), мы находим, что формула Rdg (Rda (Φ)) (не тождественная с Φ) геометрически доказуема. Чтобы завершить доказательство теоремы 2 (и вместе с тем теоремы полноты для ЭГГ), мы докажем следующую теорему:

Теорема 3′. *Для каждого предложения* Φ *точечной геометрии* Φ *эквивалентно* Rdg (Rda (Φ)), *т. е.* $\vdash_g \Phi \longleftrightarrow$ (Rdg (Rda (Φ))).

Ранее автор [6] доказал теорему полноты для элементарной евклидовой геометрии тем же способом, т. е. с помощью построения надлежащих сведéний, для которых справедливы теоремы 1′, 2′ и 3′. Но конструкция самих сведéний, разумеется, существенно зависит от характера рассматриваемых здесь формализованных теорий, именно ЭГГ и АДЧ.

Смысл конструкции арифметических сведéний и доказательства теоремы 1′ состоит в описании геометрических фактов средствами арифметики. Для этого в клейновой модели используются действительные координаты такого рода, что отношение равенства расстояний для точек может быть выражено с помощью этих координат рациональными операциями, которые определимы в АДЧ. В качестве таких координат мы используем упомянутые выше декартовы координаты x_1, x_2, x_3. Если мы свяжем с этими координатами вектор $\mathfrak{x}$ и обозначим также через $\mathfrak{x}$ соответствующую точку модели Клейна ($\mathfrak{x}\mathfrak{y}$) будет означать скалярное произведение $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$, а $\mathfrak{x}^2$ — скалярное произведение $\mathfrak{x}\mathfrak{x}$), а затем определим обычным образом[1]) гиперболическое расстояние $\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}$ между точками $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$, то найдем

$$\operatorname{ch} \overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} = \frac{1 - \mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\sqrt{(1-\mathfrak{x}^2)(1-\mathfrak{y}^2)}},$$

что и приводит к требуемому критерию равенства расстояний. Аналогично в формальной системе АДЧ мы будем обозначать прямыми скобками тройки $\mathfrak{x} = [x', x'', x''']$ переменных x', x'', x''' (или любых термов) для действительных чисел, для $\mathfrak{x} = [x', x'', x''']$ и $\mathfrak{y} = [y', y'', y''']$ обозначим через $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ терм $x'y' + x''y'' + x'''y'''$, через $\mathfrak{x}^2$ терм $\mathfrak{x}\mathfrak{x}$, через $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ формулу $x' = y' \wedge x'' = y'' \wedge x''' = y'''$.

Теперь сопоставим каждой переменной A_i для точек тройку $\mathfrak{x}_i = [x_i', x_i'', x_i''']$ числовых переменных и определим арифметическое сведе́ние по индукции следующими условиями:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \operatorname{Rda}(A_i = A_j) = \mathfrak{x}_i = \mathfrak{x}_j,\\
&\operatorname{Rda}(A_iA_j \operatorname{agl} A_kA_l) = (1 - \mathfrak{x}_i\mathfrak{x}_j)^2(1-\mathfrak{x}_k^2)(1-\mathfrak{x}_l^2) =\\
&\qquad = (1 - \mathfrak{x}_k\mathfrak{x}_l)^2(1-\mathfrak{x}_i^2)(1-\mathfrak{x}_j^2);\\
&(2) \quad \operatorname{Rda}(\sim\Phi) = \sim \operatorname{Rda}(\Phi),\\
&\operatorname{Rda}(\Phi_1 \wedge \Phi_2) = \operatorname{Rda}(\Phi_1) \wedge \operatorname{Rda}(\Phi_2),\\
&\operatorname{Rda}(\exists A_i \Phi) = \exists x_i' \exists x_i'' \exists x_i''' (\mathfrak{x}^2 < 1 \wedge \operatorname{Rda}(\Phi)).
\end{aligned}
$$

Из (2) можно получить дальнейшие условия для обычных логических связок, которые выражаются через $\sim$, $\wedge$, $\exists$.

Затем может быть доказана теорема 1′.

Построение геометрических сведе́ний и доказательство теоремы 2′ имеют целью нахождение некоторого суррогата арифметики внутри системы ЭГГ. Это уже было сделано Гильбертом [4] в его исчислении концов. Поскольку понятие конца не выразимо в терминах элементарной геометрии, мы заменяем каждый встречающийся в этой теории конец прямой линией, соединяющей этот конец с введенным Гильбертом фиксированным концом ∞. Тогда прямые, представляющие числа, образуют пучок параллельных линий, в котором определены сумма, произведение и порядок прямых и который определяется заданием его нуля o и единицы e. Чтобы две прямые определяли арифметический пучок, необходимо и достаточно, чтобы они были параллельны и различны. Перенося результаты Гильберта на арифметические пучки, мы можем показать с помощью аксиом ЭГГ, что если прямые o и e определяют *арифметический пучок*, то в этом пучке выполнены аксиомы АДЧ.

---

1) См., например, Бальдус и Лебелль [1, стр. 81].

Выделим теперь две переменные для прямых o и e и поставим в соответствие каждой числовой переменной x_i переменную для прямой b_i (отличную от o и e).

Сначала определим терм сведе́ния $\operatorname{Rdt}(T)$ для произвольных термов[1]) T системы АДЧ с помощью следующей индукции:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \operatorname{Rdt}(0) = o, \ \operatorname{Rdt}(1) = e, \ \operatorname{Rdt}(x_i) = b_i;\\
&(2) \quad \operatorname{Rdt}(T_1 + T_2) = \operatorname{Rdt}(T_1) \underset{o,\,e}{+} \operatorname{Rdt}(T_2),\\
&\operatorname{Rdt}(-T) = \underset{o,\,e}{-} \operatorname{Rdt}(T),\\
&\operatorname{Rdt}(T_1 \cdot T_2) = \operatorname{Rdt}(T_1) \underset{o,\,e}{\cdot} \operatorname{Rdt}(T_2).
\end{aligned}
$$

Здесь символы $\underset{o,\,e}{+}$, $\underset{o,\,e}{-}$, $\underset{o,\,e}{\cdot}$ обозначают сложение, образование противоположного элемента и умножение прямых линий в арифметическом пучке, определенном o и e. Таким образом, термы в правых частях равенств (2) содержат также o и e в качестве свободных переменных.

Далее, мы определим предварительное геометрическое сведе́ние $\operatorname{Rdgp}(\Psi)$ для произвольных формул Ψ системы АДЧ с помощью следующей индукции[2]):

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \operatorname{Rdgp}(T_1 = T_2) = \operatorname{Rdt}(T_1 = \operatorname{Rdt}(T_2)).\\
&\operatorname{Rdgp}(\operatorname{pos} T) = \operatorname{pos}_{oe} \operatorname{Rdt}(T).\\
&(2) \quad \operatorname{Rdgp}(\sim \Psi) = \sim \operatorname{Rdgp}(\Psi).\\
&\operatorname{Rdgp}(\Psi_1 \wedge \Psi_2) = \operatorname{Rdgp}(\Psi_1) \wedge \operatorname{Rdgp}(\Psi_2).\\
&\operatorname{Rdgp}(\exists x_i \Psi) = \exists b_i (Ar_{oe} b_i \wedge \operatorname{Rdgp}(\Psi)).
\end{aligned}
$$

Здесь $\operatorname{pos}_{oe} a$ означает, что a есть положительная прямая в арифметическом пучке, определенном o и e; $\operatorname{Ar}_{oe} c_1 \ldots c_n$ означает, что o и e определяют арифметический пучок и (если $n > 0$) $c_1, \ldots, c_n$ суть прямые этого пучка ($n \geqslant 0$).

Наконец, определим геометрическое сведе́ние следующим образом:

$$\operatorname{Rdg}(\Psi) = \forall o \forall e \left(\operatorname{Ar}_{oe} a_{i_1} \ldots a_{i_n} \rightarrow \operatorname{Rdgp}(\Psi)\right),$$

где $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ суть все переменные, входящие свободно в $\operatorname{Rdgp}(\Psi)$, за исключением o и e. Грубо говоря, $\operatorname{Rdg}(\Psi)$ есть формула ЭГГ, означающая, что в каждом арифметическом пучке справедливо утверждение, соответствующее Ψ.

---

1) В качестве термов АДЧ употребляются выражения, построенные из числовых переменных и констант 0 и 1 с помощью знаков операций $+$ (сложение), $-$ (образование противоположного) и $\cdot$ (умножение).

2) Роль атомарных формул играют равенства $T_1 = T_2$ и выражения вида $\operatorname{pos} T$ (означающие, что T положительно).

После этого теорема 2′ может быть доказана по индукции, согласно определению арифметической доказуемости.

Чтобы доказать теорему 3′, т. е. эквивалентность произвольного предложения Φ и его двукратного сведе́ния Rdg (Rda (Φ)), мы должны описать ЭГГ с помощью арифметического пучка аналогично тому, как мы описали модель Клейна с помощью поля действительных чисел. С этой целью мы можем развить, как это было уже сделано в модели Клейна, часть гиперболической тригонометрии и поставить в соответствие каждой точке три прямые арифметического пучка в качестве ее координат, так что равенство расстояний между точками выражается соотношением между координатами. Это, как мне кажется, главное звено в доказательстве теоремы полноты.

Сначала докажем следующую теорему:

Теорема 3″. *Для каждой формулы* Φ *точечной геометрии справедливо*

$$\vdash_g \Pi_\Phi \to (\Phi \leftrightarrow \mathrm{Rdgp}\,(\mathrm{Rda}\,(\Phi))),$$

где Π_Φ — посылка, означающая, что свободные переменные для прямых, входящие в Rdgp (Rda (Φ)) и отличные от o и e, суть координаты по отношению к некоторой системе координат и некоторому арифметическому пучку соответствующих свободных переменных для точек, входящих в Φ.

Эта теорема может быть доказана по индукции, согласно определению понятия формулы Φ в точечной геометрии.

Теорема 3′, относящаяся только к предложениям, не может быть прямо доказана при помощи индукции этого рода, но сразу же вытекает из теоремы 3″.

Таким образом, (семантическая) полнота ЭГГ доказана.

Отсюда, как известно, получаются и другие виды полноты, в частности классическая полнота ЭГГ.

Для каждого предложения ЭГГ *либо* $\vdash_g \Phi$, *либо* $\vdash_g \sim\Phi$.

Теперь нетрудно перенести также на ЭГГ метод разрешения, развитый Тарским для АДЧ. Для этой цели мы можем снова ограничиться предложениями точечной геометрии.

Согласно теореме 1′, такое предложение геометрически истинно тогда и только тогда, когда его арифметическое сведе́ние арифметически истинно, что может быть разрешено по методу Тарского. Таким образом, мы получаем метод разрешения для истинности и тем самым также для доказуемости, как это видно из теоремы полноты. Более того, если предложение оказывается доказуемым, то можно механически построить формализованное доказательство этого предложения, применив метод разрешения Тарского и приемы, заключенные в доказательстве теорем 2′ и 3′.

Что касается моделей ЭГГ, то из теоремы Лёвенгейма — Сколема (см., например, Шрётер [5, стр. 60 и далее]) следует, что ЭГГ, формализованная в исчислении предикатов первого порядка, не является категоричной, т. е. допускает не изоморфные друг другу модели. Формулы ЭГГ, которые были доказаны в ходе доказательства теоремы полноты, позволяют получить из аналогичного результата Тарского для АДЧ следующую теорему.

Геометрическая структура [1]) *является моделью* ЭГГ *тогда и только тогда, когда она изоморфна модели, построенной так же, как модель Клейна, с помощью элементов произвольного действительно замкнутого поля вместо поля действительных чисел.*

Из классической полноты получается семантическая полнота ЭГГ по отношению к любой модели ЭГГ.

Если формула Φ *истинна в некоторой модели* ЭГГ, *то она геометрически доказуема.*

В этом случае она истинна также в любой модели, так что модели ЭГГ геометрически неразличимы.

§ 2

Развивая, как указано выше, часть гиперболической тригонометрии, я пользовался отношением, выражающим то свойство, что в арифметическом пучке, определенном o и e, прямая a представляет гиперболический тангенс расстояния между A и B; это отношение определимо в модели Клейна или в любой изоморфной модели. В таких моделях имеется однозначно определенный изоморфизм между произвольным арифметическим пучком и упорядоченным полем действительных чисел, так что прямые можно считать представляющими соответствующие им в силу этого изоморфизма числа. Теперь мне хотелось бы отметить тот факт, что само по себе расстояние между точками, рассматриваемое в том же смысле, как элемент арифметического пучка, не определимо в ЭГГ [2]).

Чтобы вывести это из результатов Тарского об определимых отношениях для действительных чисел, мы докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть S — произвольное n-арное отношение между действительными числами, и пусть R есть $(n+2)$-арное отношение между прямыми модели Клейна (или любой изоморфной модели)* ЭГГ, *которое выполняется для прямых o, e, a_1, ..., a_n в том и только том случае, когда, во-первых, o и e опреде-*

[1]) Возможная реализация ЭГГ в смысле Тарского [10, стр. 8].
[2]) Это формулировалось без доказательства в [7].

ляют арифметический пучок, содержащий прямые $a_1, \ldots, a_n$, и, во-вторых, отношение S выполняется для действительных чисел, представляемых прямыми $a_1, \ldots, a_n$ в этом пучке. Если R определимо (в ЭГГ), *то S определимо (в* АДЧ).

Предположим, что расстояние определимо. Тогда мы можем определить отношение, выражающее то свойство, что в арифметическом пучке, заданном некоторыми прямыми o и e, одна прямая представляет гиперболический тангенс другой (точнее, числа, представляемого этой прямой). Из теоремы 4 следует тогда, что бинарное отношение между действительными числами, справедливое для чисел x, y в том и только том случае, когда y есть гиперболический тангенс x, является арифметически определимым. Тем самым мы имели бы трансцендентную функцию, определимую в АДЧ, но это противоречит следующей теореме, которую можно получить из результатов Тарского.

Теорема 5. *Если функция f определима в* АДЧ, *то f есть алгебраическая функция.*

Итак, расстояние между точками не является определимым в ЭГГ.

Те же соображения применимы к расстоянию по отношению к произвольной (не обычной абсолютной) единице длины, а также к мере углов (по отношению к произвольной единице), поскольку синус и косинус углов определимы в ЭГГ.

Для доказательства теоремы 4 мы снова используем арифметические свéдения, определенные для формул точечной геометрии в доказательстве теоремы полноты для ЭГГ. Но теперь, поскольку для представления определимого отношения могут быть использованы любые формулы, мы должны распространить определение $\mathrm{Rda}(\Phi)$ на любые формулы Φ исчисления ЭГГ. Это можно сделать, заметив, каким образом в аналитической геометрии с помощью систем действительных чисел описываются не только точки, но также прямые и плоскости, именно для прямых можно воспользоваться параметрическим представлением $\mathfrak{x} = \mathfrak{r} + t\mathfrak{p}$, а для плоскостей — уравнением $\mathfrak{u}\mathfrak{x} + u = 0$ ($\mathfrak{p}, \mathfrak{u} \neq \mathfrak{o}$, где $\mathfrak{o}$ обозначает нулевой вектор $[0, 0, 0]$). Прямая или плоскость принадлежит модели Клейна тогда и только тогда, когда она содержит по крайней мере одну точку модели, т. е. точку $\mathfrak{x}$, для которой $\mathfrak{x}^2 < 1$.

Таким образом, мы снова сопоставляем каждой точечной переменной A_i тройку $\mathfrak{x}_i = [x_i', x_i'', x_i''']$ числовых переменных, каждой переменной для прямых a_i две тройки $\mathfrak{r}_i = [r_i', r_i'', r_i''']$ и $\mathfrak{p}_i = [p_i', p_i'', p_i''']$ и каждой переменной для плоскостей тройку $\mathfrak{u} = [u_i', u_i'', u_i''']$ и одну числовую переменную u_i. Далее мы определяем арифметическое свéдение по индукции следующим образом:

(1)
$$\begin{aligned}
&\mathrm{Rda}(A_i = A_j) = \mathfrak{x}_i = \mathfrak{x}_j,\\
&\mathrm{Rda}(a_i = a_j) = \exists s(\mathfrak{r}_j - \mathfrak{r}_i = s\mathfrak{p}_i) \wedge \exists t(\mathfrak{p}_j = t\mathfrak{p}_i)\text{ [1]},\\
&\mathrm{Rda}(\alpha_i = \alpha_j) = \exists t(\mathfrak{u}_j = t\mathfrak{u}_i \wedge u_j = t\,u_i),\\
&\mathrm{Rda}(\mathrm{Inz}\, A_i a_j) = \exists t(\mathfrak{x}_i = \mathfrak{r}_j + t\mathfrak{p}_j)\text{ [2]},\\
&\mathrm{Rda}(\mathrm{Inz}\, A_i \alpha_j) = \mathfrak{u}_j\mathfrak{x}_i + u_j = 0.
\end{aligned}$$

Надо также использовать дальнейшие условия, задающие арифметические свéдения других атомарных формул по образцу соотношений, выражающих соответствующие основные понятия для точек (порядок и конгруэнтность для отрезков и углов) с помощью координат этих точек.

(2) Условия (2) стр. 188 и, кроме того,

$$\mathrm{Rda}(\exists a_i \Phi) = \exists r_i' \exists r_i'' \exists r_i''' \exists p_i' \exists p_i'' \exists p_i''' \bigl(L(\mathfrak{r}_i, \mathfrak{p}_i) \wedge \mathrm{Rda}(\Phi)\bigr),$$
$$\mathrm{Rda}(\exists \alpha_i \Phi) = \exists u_i' \exists u_i'' \exists u_i''' \exists u_i \bigl(P(\mathfrak{i}_i, u_i) \wedge \mathrm{Rda}(\Phi)\bigr).$$

Здесь применены сокращенные обозначения

$$L(\mathfrak{r}_i, \mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_i \neq 0 \wedge \exists t(\mathfrak{r}_i + t\mathfrak{p}_i)^2 < 1$$

(„$\mathfrak{r}_i$, $\mathfrak{p}_i$ описывают прямую линию в модели Клейна“),

$$P(\mathfrak{i}_i, u_i) = \mathfrak{i}_i \neq 0 \wedge \exists x' \exists x'' \exists x''' (\mathfrak{x}^2 < 1 \wedge \mathfrak{i}_i\mathfrak{x} + u_i = 0)$$

(„$\mathfrak{i}_i$, u_i описывают плоскость в модели Клейна“), где $\mathfrak{x} = [x', x'', x''']$, $\mathfrak{o} = [0, 0, 0]$.

Мы назовем геометрическое наложение (Belegung) φ по отношению к модели Клейна [3] и арифметическое наложение φ по отношению к полю действительных чисел [4] арифметически связанными в том и только том случае, когда для каждой переменной v [5] системы ЭГГ значения ψ для соответствующих числовых переменных суть числа, описывающие геометрический объект, являющийся

[1]) Если $\mathfrak{x} = [x', x'', x''']$ и $\mathfrak{y} = [y', y'', y''']$, то, конечно, $\mathfrak{x} \pm \mathfrak{y}$ обозначает тройку $[x' \pm y', x'' \pm y'', x''' \pm y''']$, а $t\mathfrak{x}$ — тройку $[tx', tx'', tx''']$.

[2]) $\mathrm{Inz}\, Aa$ и $\mathrm{Inz}\, A\alpha$ означают, что точка A лежит соответственно на прямой a и в плоскости α.

[3]) То есть функция, определенная для всех переменных ЭГГ, значениями которой для точечных переменных, переменных для прямых и для плоскостей являются соответственно точки, прямые и плоскости модели Клейна.

[4]) То есть функция, определенная для всех числовых переменных, значениями которой являются действительные числа. Легко понять, что означает утверждение, что формула Φ системы ЭГГ или формула Ψ системы АДЧ удовлетворяется соответственно таким геометрическим или арифметическим наложением. (Это понятие может быть определено по индукции, согласно определению формул; см. [9].)

[5]) Символ v может означать переменную для точек, прямых или плоскостей.

13 Зак. 1047

значением $\varphi(v)$ функции φ для переменной v. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4'. *Пусть* Φ *есть формула системы* ЭГГ. *Тогда, какова бы ни была пара арифметически связанных наложений* φ, ψ, *наложение* φ *удовлетворяет* Φ *в том и только том случае, когда* ψ *удовлетворяет* $\mathfrak{R}\mathrm{da}(\Phi)$.

Теорема может быть доказана по индукции, согласно определению формул [1]).

Пусть теперь выполнены предположения теоремы 4, и пусть $(n+2)$-арное отношение R определимо; пусть R представляется, например, формулой Φ, содержащей свободные переменные o, e, $a_1, \ldots, a_n$.

Рассмотрим в модели Клейна специальный арифметический пучок, состоящий из прямых $\mathfrak{x}=\mathfrak{r}+t\mathfrak{p}_x$, где $\mathfrak{r}=[0,\ 1,\ 0]$, $\mathfrak{p}_x=[x,\ -1,\ 0]$. Тогда x есть действительное число, соответствующее прямой $\mathfrak{x}=\mathfrak{r}+t\mathfrak{p}_x$ при изоморфизме между этим пучком и полем действительных чисел (ср. [7, стр. 167 и далее]). Пусть переменным для прямых o, e сопоставлены тройки $\mathfrak{r}_o=[r'_o,\ r''_o,\ r'''_o]$, $\mathfrak{p}_o=[p'_o,\ p''_o,\ p'''_o]$ и $\mathfrak{r}_e=[r'_e,\ r''_e,\ r'''_e]$, $\mathfrak{p}_e=[p'_e,\ p''_e,\ p'''_e]$ соответственно.

Пусть формула Ψ получается из $\mathfrak{R}\mathrm{da}(\Phi)$, если заменить свободные числовые переменные

а) r'_i, r'''_i, p'''_i константой 0, r''_i константой 1, p''_i константой -1 $(i=o,\ e,\ 1,\ \ldots,\ n)$;

б) p'_o константой 0, p'_e константой 1;

в) p'_i переменной x_i $(i=1,\ \ldots,\ n)$.

Тогда Ψ содержит в качестве свободных переменных только $x_1, \ldots, x_n$. Более того, Ψ представляет отношение S, так что S определимо.

В самом деле, пусть ψ — произвольное арифметическое наложение, пусть ψ' — арифметическое наложение, для которого справедливы следующие утверждения:

а) $\psi'(r'_i)=\psi'(r'''_i)=\psi'(p'''_i)=0,\quad \psi'(r''_i)=1,\quad \psi'(p''_i)=-1$ $(i=o,\ e,\ 1,\ \ldots,\ n)$;

б) $\psi'(p'_o)=0$, $\psi'(p'_e)=1$;

в) $\psi'(p'_i)=\psi(x_i)\quad (i=1,\ \ldots,\ n)$;

г) для некоторого геометрического наложения φ наложения ψ и ψ' арифметически связаны.

[1]) Эта же теорема нам нужна и при доказательстве теоремы 1, правда, только для формул точечной геометрии.

Тогда следующие условия эквивалентны:

1. ψ удовлетворяет Ψ.
2. ψ' удовлетворяет $\mathfrak{R}\mathrm{da}(\Phi)$.
3. φ удовлетворяет Φ (по теореме 4').
4. R выполняется для прямых $\varphi(o)$, $\varphi(e)$, $\varphi(a_1)$, $\ldots$, $\varphi(a_n)$ (по построению Φ).
5. S выполняется для чисел, соответствующих прямым $\varphi(a_1)$, $\ldots$, $\varphi(a_n)$ при указанном выше изоморфизме, т. е. S выполняется для чисел $\psi(x_1)$, $\ldots$, $\psi(x_n)$ (по предположению теоремы 4).

Таким образом, для произвольного арифметического наложения ψ мы доказали, что ψ удовлетворяет Ψ в том и только том случае, когда $S\psi(x_1)\ldots\psi(x_n)$; этим установлено, что S представляется формулой Ψ. Тем самым теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Baldus R., Löbell F., Nichteuklidische Geometrie, 3 Aufl., Berlin, 1953.
2. Beth E. W., Tarski A., Equilaterality as the only primitive notion of Euclidean geometry, *Indag. Math*, **18** (1956), 462—467.
3. Hilbert D., Grundlagen der Geometrie, 8 Aufl., Stuttgart, 1956.
4. Hilbert D., Neue Begründung der Bolyai — Lobatschefskyschen Geometrie, *Math. Ann.*, **57** (1903), 137—150 (см. также приложение III в [3]).
5. Schröter K. Theorie des logischen Schliessens, II, *Z. math. Logik u. Grundl. d. Math.*, **4** (1958), 10—65.
6. Schwabhäuser W., Über die Vollständigkeit der elementaren euklidischen Geometrie, *Z. math. Logik u. Grundl. Math.*, **2** (1956), 137—165.
7. Schwabhäuser W., Entscheidbarkeit und Vollständigkeit der elementaren hyperbolischen Geometrie, *Z. math. Logik u. Grundl. d. Math.*, **5** (1959), 132—205.
8. Tarski A., A decision method for elementary algebra and Geometry, 2nd ed., Berkeley and Los Angeles, 1951.
9. Tarski A., Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, *Studia philosophica*, **1** (1936), 251—405.
10. Tarski A., Mostowski A., Robinson R. M., Undecidable Theories, Amsterdam, 1953.

Новые основания абсолютной геометрии [1])

В. ШМЕЛЕВА

Варшавский университет, Варшава, Польша

В 1899 г. (см. [1]) Гильберт построил коммутативное упорядоченное поле $\overline{\mathfrak{S}} = \langle \mathbf{S}, +, \cdot, < \rangle$ в формализованной системе $\mathcal{E}_0$ плоской евклидовой геометрии без аксиомы непрерывности. Для наших целей удобнее рассматривать поле $\overline{\mathfrak{S}}$ в некоторой теории $\mathcal{E}$, являющейся расширением $\mathcal{E}_0$. Эта теория получается добавлением к системе аксиом $\mathcal{E}_0$ еще одной аксиомы, утверждающей, что прямая, проходящая через внутреннюю точку окружности, пересекает эту окружность. В $\mathcal{E}$ упорядоченное поле $\overline{\mathfrak{S}}$, как можно показать, является *евклидовым*; это значит, что каждый положительный элемент $\overline{\mathbf{S}}$ является квадратом. Поле $\overline{\mathfrak{S}}$ порождается исчислением (*свободных*) *отрезков*. Гильберт вводит прямоугольную систему координат над $\overline{\mathfrak{S}}$; две координаты точки p имеют вид $\pm X_1$, $\pm X_2$, где X_1 и X_2 — два отрезка. Из этой конструкции Гильберт получает линейное уравнение прямой.

В 1903 г. (см. [3]) Гильберт построил коммутативное евклидово поле $\overline{\mathfrak{E}} = \langle \overline{\mathbf{E}}, +, \cdot, < \rangle$ в формализованной системе $\mathcal{H}$ плоской *гиперболической геометрии* (*Бойяи — Лобачевского*) без аксиомы непрерывности. Класс $\overline{\mathbf{E}}$ состоит из пучков параллельных полупрямых, которые Гильберт называет *концами*. На этот раз аналитическая геометрия основывается на системе координат для прямых, причем прямой сопоставляются два конца. Из этой конструкции Гильберт получает линейное уравнение точки.

Из этого краткого описания ясно, что геометрические концепции полей $\overline{\mathfrak{S}}$ и $\overline{\mathfrak{E}}$ совершенно различны; две аналитические геометрии (над $\overline{\mathfrak{S}}$ и над $\overline{\mathfrak{E}}$) также построены на совершенно различных основаниях. В этой работе мы построим евклидово коммутативное поле $\overline{\mathfrak{S}}' = \langle \overline{\mathbf{S}}, +', \cdot', < \rangle$ в общей части $\mathcal{A}$ теории $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$, т. е. в системе *абсолютной геометрии* без аксиомы непрерывности. В результате мы получим однотипный метод введения координат над одним и тем же полем $\overline{\mathfrak{S}}'$ для обеих геометрий $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$. Мы начнем с краткого описания поля $\overline{\mathfrak{S}}$, затем мы покажем, как надо видоиз-

[1]) Szmielew W., New foundations of absolute geometry, стр. 168—175

менить $\overline{\mathfrak{S}}$, чтобы получить $\overline{\mathfrak{S}}'$. В действительности оба поля $\overline{\mathfrak{S}}$ и $\overline{\mathfrak{S}}'$, как мы увидим, зависят от отрезка U, играющего роль параметра, и потому в дальнейшем обозначаются соответственно через $\overline{\mathfrak{S}}_U$ и $\overline{\mathfrak{S}}'_U$.

Отрезком мы называем произвольную неупорядоченную пару pq различных точек p и q. Обозначим через $[pq]$ класс эквивалентности по отношению к геометрической конгруэнтности, содержащий pq, или, проще, множество всех отрезков, конгруэнтных pq. Также классы эквивалентности мы будем называть свободными отрезками и будем обозначать их буквами X, Y, Z. $\mathbf{S}$ будет обозначать класс всех свободных отрезков. Очевидно,

$$\mathbf{S} \neq 0. \tag{1.1}$$

Отношение $<$ совпадает с обычным отношением „*меньше чем*“ для свободных отрезков. Пусть $\mathbf{B}$ есть отношение „*между*“ для трех точек прямой. *$X < Y$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{B}(pqr)$, $X = [pq]$ и $Y = [pr]$ для некоторых различных точек p, q, r.*

Как известно, можно доказать в $\mathcal{E}$ (и даже в $\mathcal{A}$) утверждения

$$X \text{ не } < X \tag{2.1}$$

и

$$X = Y, \quad \textit{или} \quad X < Y, \quad \textit{или} \quad Y < X. \tag{2.2}$$

Операция $+$ совпадает с обычным сложением свободных отрезков: *$X + Y = Z$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{B}(pqr)$, $X = [pq]$, $Y = [qr]$ и $Z = [pr]$ для некоторых различных точек p, q, r.* Таким образом, $+$ всегда выполнима, что записывается в виде

$$\textit{Если } X, Y \in \mathbf{S}, \textit{ то } X + Y \in \mathbf{S}. \tag{3.1}$$

Как известно, можно доказать в $\mathcal{E}$ (и даже в $\mathcal{A}$) утверждения

$$X + Y = Y + X, \tag{3.2}$$

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z) \tag{3.3}$$

и

$$X < Y \textit{ тогда и только тогда, когда } X + Y = Z \textit{ для некоторого } Y \textit{ в } \mathbf{S}. \tag{3.4}$$

Чтобы определить $\cdot$, удобно начать с кватернарного отношения *пропорции* $\mathbf{P}$. Фиксируем угол AB с вершиной p (рис. 1).

Угол AB понимается здесь как неупорядоченная пара полупрямых A и B, которые предполагаются неколлинеарными и имеющими общее начало p. Для четырех свободных отрезков X, Y, X_1, Y_1 мы возьмем точки x, x_1 на A и y, y_1 на B таким образом, чтобы было

$$X = [px], \quad Y = [py], \quad X_1 = [px_1] \text{ и } Y_1 = [py_1],$$

и положим

$\mathbf{P}(XYX_1Y_1)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{L}(xy) \| \mathbf{L}(x_1y_1)$,

где $\mathbf{L}(pq)$ означает прямую, проходящую через произвольные различные точки p и q. Можно доказать в $\mathfrak{E}$, что отношение $\mathbf{P}$ не

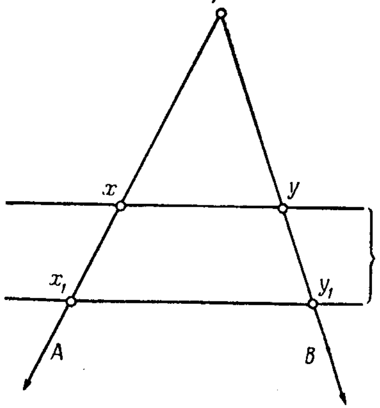

Рис. 1.

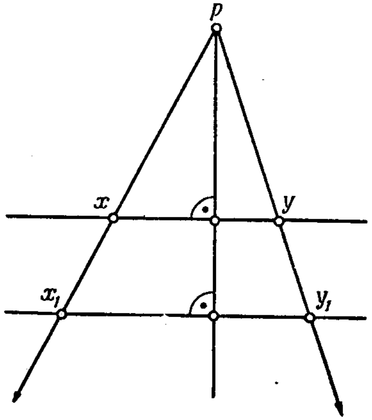

Рис. 2.

зависит от выбора угла AB. В частности, можно взять в качестве AB прямой угол. В $\mathfrak{E}$ можно доказать следующие свойства $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}(XYXY); \tag{4.1}$$

$$\textit{если } \mathbf{P}(XYX_1Y_1) \textit{ и } P(XYX_2Y_2), \textit{ то } \mathbf{P}(X_1Y_1X_2Y_2); \tag{4.2}$$

$$\textit{если } \mathbf{P}(XYX_1Y_1), \textit{ то } P(XX_1YY_1); \tag{4.3}$$

$$\textit{если } \mathbf{P}(XYX_1Y_1) \textit{ и } X < Y, \textit{ то } X_1 < Y_1; \tag{4.4}$$

$$\textit{если } \mathbf{P}(XYX_1Y_1), \textit{ то } \mathbf{P}(XY(X+X_1)(Y+Y_1)); \tag{4.5}$$

$$\bigwedge_{X,Y,X_1} \bigvee_{Y_1} \mathbf{P}(XYX_1Y_1)\ ^{1)}; \tag{4.6}$$

$$\bigwedge_{X,Z} \bigvee_{Y} \mathbf{P}(XYYZ). \tag{4.7}$$

Более того, из (4.1) — (4.4) в силу (2.2) следует, что свободный отрезок в (4.6) Y_1 (*четвертый пропорциональный* к X, Y, X_1) однозначно определен свободными отрезками X, Y, X_1. Фиксируем

[1]) Для краткости мы записываем утверждения (4.6) и (4.7) с помощью квантора общности $\bigwedge$ („для каждого") и квантора существования $\bigvee$ („существует").

теперь в $\mathbf{S}$ произвольный элемент U и положим

$$X \cdot_U Y = Z \textit{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{P}(UXYZ). \tag{4.8}$$

Таким образом, операция $\cdot_U$ релятивизирована по отношению к U.

Рассмотрим теперь алгебраическую систему $\mathfrak{S}_U = \langle \mathbf{S}, +, \cdot_U, < \rangle$.

Из теорем (1.1), (2.1), (2.2) (3.1) — (3.4), (4.1) — (4.7) и определения (4.8) можно чисто алгебраическим путем вывести теорему вложения для $\mathfrak{S}_U$.

Теорема 1. *Система* $\mathfrak{S}_U = \langle \mathbf{S}, +, \cdot_U, < \rangle$ *может быть вложена в коммутативное евклидово поле* $\overline{\mathfrak{S}}_U = \langle \overline{\mathbf{S}}, +, \cdot_U, < \rangle$ *таким образом, что* $\mathbf{S}$ *совпадает с множеством всех положительных элементов* $\overline{\mathfrak{S}}_U$. *Более того,* $\overline{\mathfrak{S}}_U$ *с точностью до изоморфизма однозначно определяется* $\mathfrak{S}_U$, *и* U *является единичным элементом поля* $\overline{\mathfrak{S}}_U$.

Перейдем к абсолютной геометрии $\mathcal{A}$. Мы хотим построить в $\mathcal{A}$ коммутативное евклидово поле. Поставим прежде всего вопрос, можно ли построить алгебраическую систему $\mathfrak{S}_U$ и, следовательно, поле $\overline{\mathfrak{S}}_U$ в $\mathcal{A}$, т. е. без использования аксиомы Евклида. Ответ отрицателен. Можно доказать в $\mathcal{A}$ все свойства операций $<$ и $+$, но не все свойства $\mathbf{P}$. Например, утверждение (4.5), из которого вытекает закон дистрибутивности для $\cdot_U$ по отношению к $+$, не выполняется в $\mathcal{A}$. Итак, надо изменить определения операций $+$ и $\cdot_U$; конечно, было бы желательно изменить их как можно меньше.

Начнем с отношения пропорции. Пользуясь той же конструкцией, что и раньше, с произвольно выбранным углом AB, мы положим теперь $\mathbf{P}'(XYX_1Y_1)$ в том и только в том случае, если проходящая через p прямая, перпендикулярная к прямой xy, совпадает с прямой, проходящей через p и перпендикулярной к x_1y_1 (рис. 2); короче, мы выражаем эту ситуацию записью

$$\mathbf{P}'(XYX_1Y_1) \textit{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{O}(p\mathbf{L}(xy)\mathbf{L}(x_1y_1)).$$

Можно доказать в $\mathcal{A}$, что отношение $\mathbf{P}'$ не зависит от выбора угла AB. Очевидно, в $\mathfrak{E}$ мы имеем $\mathbf{P}' = \mathbf{P}$. Это неверно в $\mathcal{A}$. Тем не менее в $\mathcal{A}$ можно доказать, что $\mathbf{P}'$ удовлетворяет всем постулатам (4.1) — (4.7), за исключением (4.5) и (4.6). Таким образом,

$$\mathbf{P}'(XYXY); \tag{4.1'}$$

$$\textit{если } \mathbf{P}'(XYX_1Y_1) \textit{ и } \mathbf{P}'(XYX_2Y_2), \textit{ то } \mathbf{P}'(X_1Y_1X_2Y_2); \tag{4.2'}$$

$$\textit{если } \mathbf{P}'(XYX_1Y_1), \textit{ то } \mathbf{P}'(XX_1YY_1); \tag{4.3'}$$

$$\textit{если } \mathbf{P}'(XYX_1Y_1) \textit{ и } X < Y, \textit{ то } X_1 < Y_1, \tag{4.4'}$$

$$\bigwedge_{X,Y} \bigvee_{Z} \mathbf{P}'(XYYZ). \tag{4.7'}$$

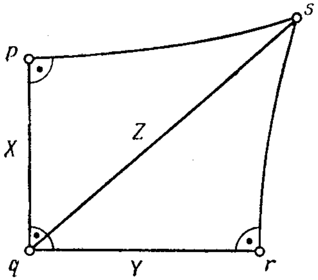

Рис. 3.

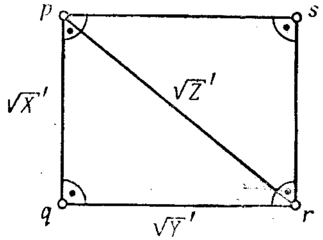

Рис. 4.

Мы заменим (4.6) более слабым утверждением

$$\text{если } \mathbf{P}'(XYX_1Y_1) \text{ и } X_2 < X_1, \text{ то } \bigvee_{Y_2} \mathbf{P}'(XYX_2Y_2), \tag{4.6$'$}$$

которое может быть доказано в $\mathcal{A}$. В результате этого операция $\underset{U}{\cdot}'$, определенная условием

$$X \underset{U}{\cdot}' Y = Z \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{P}'(UXYZ), \tag{4.8$'$}$$

не всегда выполнима. С другой стороны, из (4.1)$'$—(4.4)$'$ и (4.6)$'$—(4.8)$'$ следует, что для данной X из $\mathbf{S}$ существует единственная Y из $\mathbf{S}$, такая, что $Y \underset{U}{\cdot}' Y = X$. Положим $Y = \sqrt[U]{X}'$. Очевидно, в $\mathcal{E}$ операция $\underset{U}{\cdot}'$ совпадает с $\underset{U}{\cdot}$.

В постулате (4.5) участвует операция $+$. Изменим эту операцию. Начнем с некоторой вспомогательной операции $\oplus$. Если X, Y, Z — заданные свободные отрезки, положим $X \oplus Y = Z$ в том и только в том случае, если существует четырехугольник Ламберта $pqrs$ с прямыми углами при вершинах p, q, r (рис. 3), у которого $X = [qp]$, $Y [qr]$, $Z = [qs]$. Конечно, эта операция не всегда выполнима. Положим теперь

$$X +' Y = Z \text{ тогда и только тогда, когда } \sqrt[U]{X}' \oplus \sqrt[U]{Y}' = \sqrt[U]{Z}'.$$

Операция $+'$, как легко показать, не зависит от отрезка U, хотя U и входит в ее определение. Заметим, что в $\mathcal{E}$ операция $+'$ совпадает с операцией $+$. В самом деле, по определению, $X +' Y = Z$ тогда и только тогда, когда существует такой четырехугольник Ламберта $pqrs$ с прямыми углами при вершинах p, q, r (рис. 4), что

$$\sqrt[U]{X}' = [qp], \quad \sqrt[U]{Y}' = [qr], \quad \sqrt[U]{Z}' = [qs].$$

В $\mathcal{E}$ четырехугольник $pqrs$ есть прямоугольник, и поэтому

$$[pr] = \sqrt[U]{Z}';$$

более того, операция $\underset{U}{\cdot}'$ совпадает с операцией $\underset{U}{\cdot}$. Отсюда, применяя теорему Пифагора, находим $X \oplus Y = Z$. В $\mathcal{A}$ операция $+'$ отлична от $+$. В частности, поскольку $+$ не всегда выполнима, $+'$ также не всегда выполнима. Поэтому постулаты (3.1)—(3.3) должны быть теперь заменены более слабыми утверждениями:

$$\text{если } X +' Y \in \mathbf{S} \text{ и } Z < Y, \text{ то } X +' Z \in \mathbf{S}; \tag{3.1$'$}$$

$$\text{если } X +' Y \in \mathbf{S}, \text{ то } X +' Y = Y +' X; \tag{3.2$'$}$$

$$\text{если } X +' Y,\ (X +' Y) +' Z,\ Y +' Z \in \mathbf{S}, \text{ то } (X +' Y) +' Z = X +' (Y +' Z). \tag{3.3$'$}$$

Эти утверждения верны в $\mathcal{A}$; таким образом,

$$X < Z \text{ тогда и только тогда, когда } X +' Y \text{ для некоторого } Y \text{ из } \mathbf{S}. \tag{3.4$'$}$$

Нам надо изменить также постулат (4.5), вместо которого берется теперь

$$\text{если } \mathbf{P}'(XYX_1Y_1) \text{ и } X +' X_1,\ Y +' Y_1 \in \mathbf{S}, \text{ то } \mathbf{P}'(XY(X +' X_1)(Y +' Y_1)). \tag{4.5$'$}$$

Доказывается, что утверждение (4.5)$'$ справедливо в $\mathcal{A}$.

Наконец, поскольку обе операции $+'$ и $\underset{U}{\cdot}'$ не всегда выполнимы, мы должны добавить еще один постулат:

$$\bigwedge_X \bigvee_Y X < Y. \tag{2.3$'$}$$

Рассмотрим алгебраическую систему $\mathfrak{S}'_U = \langle \mathbf{S} +', \underset{U}{\cdot}', < \rangle$. Из теорем (1.1), (2.1), (2.2), (2.3)$'$, (3.1)$'$—(3.4)$'$, (4.1)$'$—(4.7)$'$ и определения (4.8)$'$ можно чисто алгебраическим путем вывести теорему вложения для $\mathbf{S}'_U$.

Теорема 1$'$. *Система* $\mathfrak{S}'_U = \langle \mathbf{S}, +', \underset{U}{\cdot}', < \rangle$ *может быть вложена в коммутативное евклидово поле* $\overline{\mathfrak{S}}'_U = \langle \overline{\mathbf{S}}, +', \underset{U}{\cdot}', < \rangle$ *таким образом, что* $\mathbf{S}$ *совпадет с открытым интервалом* $I \subseteq \overline{\mathbf{S}}$ *(конечным или бесконечным), содержащим* U *и имеющим одним из своих концов нулевой элемент поля* $\overline{\mathfrak{S}}'_U$. *Поле* $\overline{\mathfrak{S}}'_U$ *однозначно определяется с точностью до изоморфизма системой* $\mathfrak{S}'_U$, *и* U *является единичным элементом этого поля.*

Таким образом, в $\mathscr{A}$ построено коммутативное евклидово поле. Мы можем теперь задать перпендикулярную координатную систему; две координаты точки p имеют вид $\pm X_1$, $\pm X_2$ (рис. 5), где $X_1, X_2 \in \mathbf{S}$. В $\mathscr{A}$, как и в $\mathfrak{E}$, из этой конструкции можно вывести линейное уравнение прямой.

Таким способом можно получить в абсолютной геометрии $\mathscr{A}$ и тем самым одновременно в $\mathfrak{E}$ и $\mathscr{H}$ результаты, полученные Гильбертом для евклидовой геометрии $\mathfrak{E}$ и гиперболической геометрии $\mathscr{H}$

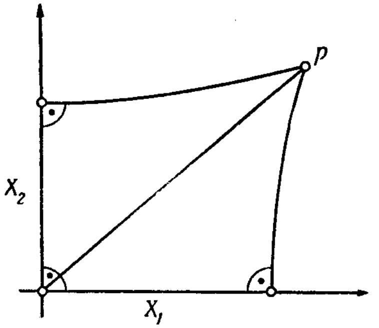

Рис. 5.

отдельно и с помощью различных геометрических идей. В действительности мы так изменили определения операций в алгебраической системе $\mathfrak{S}_U$, построенной Гильбертом для $\mathfrak{E}$, что в $\mathfrak{E}$ система $\mathfrak{S}'_U$ совпадает с $\mathfrak{S}_U$. В $\mathscr{H}$ поле $\overline{\mathfrak{S}}'_U$ изоморфно полю $\overline{\mathfrak{E}}$, построенному Гильбертом для $\mathscr{H}$, и кажется весьма естественным для гиперболического случая. Вследствие недостатка места мы не можем разъяснить здесь подробнее эту точку зрения. По поводу дальнейших деталей см. [5], где в $\mathscr{H}$ строится ***гиперболическое исчисление отрезков*** $\mathfrak{S}'$ [1]), очень тесно связанное с $\mathfrak{S}_U$, но не зависящее от какого-либо параметра U, и [4], где полностью изучены отношения между $\mathfrak{S}'_U$ и $\mathfrak{S}'$. (Ср. также [6].)

Все наши построения носят на первый взгляд чисто геометрический характер. Однако в действительности они лишь по форме являются геометрическими, по существу же они метагеометрические. Построение в геометрии какой-либо алгебраической структуры, например упорядоченного поля, — задача геометрическая. Но мы построили в абсолютной геометрии $\mathscr{A}$ поле $\overline{\mathfrak{S}}'_U$ в терминах, через которые можно выразить все основные понятия $\mathscr{A}$ (некоторые из них, а именно метрические, выражаются различными способами в евклидовом и гиперболическом случаях); в частности, линейное уравнение прямой очевидным образом приводит к аналитической интерпретации отношения ***инцидентности***. На метагеометрическом языке это означает, что мы получили теорему представления для абсолютной геометрии $\mathscr{A}$, иными словами, однотипное (поскольку оно основано на одном и том же поле $\overline{\mathfrak{S}}'_U$) описание всех моделей как для евклидовой геометрии $\mathfrak{E}$, так и для гиперболической геометрии $\mathscr{H}$. Мы не в состоянии сформулировать явно эту теорему представления опять-таки в силу недостатка места. Дальнейшие детали см. в [4], где, однако, поле $\overline{\mathfrak{S}}'_U$ строится не в $\mathscr{A}$, а в полной ***элементарной абсолютной геометрии*** $\overline{\mathscr{A}}$ [1]), так что наша теорема представления применима также к $\overline{\mathscr{A}}$.

[1]) В [5] оно обозначено через $\mathfrak{S}$.

В нашем изложении абсолютная геометрия рассматривалась как общая часть евклидовой, т. е. ***параболической***, и ***гиперболической*** геометрий. Абсолютную геометрию можно также рассматривать как общую часть трех геометрий: параболической, гиперболической и эллиптической.

Задача однотипного описания всех моделей этих трех теорий пока остается открытой. Мы надеемся, что она может быть решена видоизменением нашей конструкции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hilbert D., Grundlagen der Geometrie, 1 Aufl., Leipzig, 1899.
2. Hilbert D., Grundlagen der Geometrie, 2 Aufl., Leipzig, 1903.
3. Hilbert D., Neue Begründung der Bolyai — Lobatschefskyschen Geometrie, *Mathematische Annalen*, **57** (1903), 137—150. Напечатано в [2] в виде приложения.
4. Szmielew W., Absolute calculus of segments and its metamathematical implications, *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences*, Série des sci. math., astr. et phys., **7** (1959), 213—220.
5. Szmielew W., Some metamathematical problems concerning elementary hyperbolic geometry. The Axiomatic Method, Proceedings of an International Symposium, University of California, Berkeley, 1957, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1959, pp. 30—52.
6. Szmielew W., A new analytic approach to hyperbolic geometry, *Fundamenta Mathematicae*, **50** (1961), 129—58.

[1]) В [4] она обозначена через $\mathscr{A}_2$.

Замечания о формализации и моделях [1]

П. БЕРНАЙС

Федеральный политехнический институт, Цюрих, Швейцария

1

Формализация математических доказательств вызвала к жизни различные формальные системы, в которых известные способы вывода естественным образом разграничиваются. Внутри некоторых из этих систем можно формализовать все доказательства классической арифметики, анализа и теории множеств. Можно даже обойтись для этой цели стандартной формализацией, в которой средствами вывода являются исчисление предикатов с равенством и рекурсивное множество аксиом, заданное конечным числом формул и (возможно) конечным числом схем формул, содержащих, кроме логических символов (и переменных), другие примитивные символы (предметные (индивидные) символы, предикаторы, функторы).

Сказанное, однако, не означает, что мы можем полностью включить каждую область классической математики в формальную систему. Это не так даже для теории чисел, поскольку в силу одной из теорем Гёделя о неполноте не существует непротиворечивой формальной системы, позволяющей вывести каждую истинную арифметическую формулу (т. е. каждую замкнутую формулу, образованную из символов 0, 1, $+$, $\cdot$, $=$ с помощью пропозициональных связок и кванторов, которая истинна при обычной интерпретации символов). Это может быть выражено также следующим образом: множество гёделевских номеров истинных арифметических формул (для любой эффективной гёделевской нумерации) не является рекурсивно перечислимым; или в менее специальной формулировке: понятие истинности в теории чисел не может быть определено оперативно, иначе говоря, истинные арифметические предложения не могут быть охарактеризованы как предложения, получаемые из некоторых явно указанных предложений и схем предложений по некоторым заранее заданным правилам.

Очевидно, именно осознание этого обстоятельства побудило Лоренцена, Шютте, Аккермана и Стениуса расширить понятие формального вывода, допустив бесконечную индукцию.

[1] Bernays P., Remarks about formalization and models, стр. 176—180.

2

Как хорошо известно, полная система (т. е. система, которая не может быть расширена без противоречия путем добавления аксиомы, выразимой в виде формулы этой системы) может допускать различные неизоморфные модели. Простой пример — система аксиом плотно упорядоченного множества без первого и последнего элементов. Эти аксиомы могут быть сформулированы следующим образом:

$$(x) \neg (x < x),$$
$$(x)(y)(z)(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z),$$
$$(x)(y)(z)(\neg (x < y) \wedge \neg (y < z) \rightarrow \neg (x < z)),$$
$$(x)(y)(x = y \leftrightarrow \neg (x < y) \wedge \neg (y < x)),$$
$$(x)(y)(x < y \rightarrow (Ez)(x < z \wedge z < y)),$$
$$(x)(Ey)(Ez)(y < x \wedge x < z).$$

Общая схема для равенства может быть опущена.

Обозначим эту систему через „$\{<, d\}$“. Мы имеем для нее, очевидно, две модели: (1) естественный порядок для рациональных чисел; (2) то же для действительных чисел. Эти модели различаются уже по мощности, но их можно отличить друг от друга также по наличию в упорядочении рациональных чисел щелей (gaps) (как их назвал Дедекинд), которых нет в упорядочении вещественных чисел.

Теперь относительно только что рассмотренной системы $\{<, d\}$ можно было бы рассуждать, усилив формалистическую точку зрения, следующим образом: пусть S — формальная система в стандартной форме, достаточная для формализации анализа и для формального установления существования двух вышеупомянутых моделей системы $\{<, d\}$. По теореме Лёвенгейма, S имеет счетную модель, существование которой опять-таки может быть установлено в некоторой метатеории M. С помощью этой модели мы получим взаимно однозначное соответствие в M между представителями рациональных чисел и представителями действительных чисел в S; по хорошо известной теореме теории множеств, мы получим даже изоморфизм относительно порядка. Таким образом, различие между двумя моделями для $\{<, d\}$, которое может быть формально установлено в системе S, исчезает при переходе к метатеории M.

На это рассуждение можно возразить, что получаемое в M изоморфное соответствие между двумя моделями системы $\{<, d\}$ в S возникает только благодаря ограниченному характеру каждой формальной системы анализа S, делающему возможными нестандартные модели, удовлетворяющие условию непрерывности Дедекинда не полностью, а только по отношению к тем дедекиндовым сечениям, которые могут быть выражены в S. Короче, счетная нестандартная модель континуума в M, формализованного с помощью S, не представляет континуум для M; как раз по этой причине такая модель и называется нестандартной. Вообще, возможные модели некоторой формальной системы континуума относятся именно к данной системе, но теорема о несчетности континуума имеет место в каждой формализующей системе инвариантно. В этом нет ничего удивительного, так как несчетность континуума более или менее непосредственно следует из его характеристических топологических свойств. В самом деле, в доказательстве Кантора (которое, кажется, почти забыто в новейшей литературе по основаниям математики) из пересчета континуума мы получаем некоторую последовательность элементов $p_1, p_2, \ldots$, такую, что $p_{2n-1} < p_{2n+1} < p_{2n+2} < p_{2n}$ для $n = 1, 2, \ldots$. Отсюда получается последовательность замкнутых интервалов $i_1, i_2, \ldots$, где i_{n+1} лежит внутри i_n и не существует общего элемента (точки), лежащего во всех интервалах (p_1 — первый элемент пересчета; p_2 — первая точка справа от p_1; p_3 — первая точка между p_1 и p_2 и т. д.).

3

Было бы ошибкой предположить, что рассуждение, которое мы применили к системе $\{<, d\}$, может быть применено соответствующим образом к каждой полной формальной системе в стандартной форме. Ярким противоречащим примером является изучавшаяся главным образом Тарским система (в стандартной форме) алгебры действительных чисел — обозначим ее через T — с примитивными предикаторами $=$, $<$, функторами $+$, $\cdot$ и предметными символами 0, 1; аксиомами этой системы являются аксиомы упорядоченного поля с добавлением схемы отсутствия щелей (по Дедекинду)

$$(x)(y)(A(x) \wedge \neg A(y) \to x < y) \wedge (Ex)\, A(x) \wedge (Ex) \neg A(x) \to$$
$$\to (Ez)(x)((A(x) \to (x < z \vee x = z)) \wedge (\neg A(x) \to (z < x \vee z = x))),$$

которая, конечно, применима здесь лишь ограниченно.

Для этой системы существует минимальная модель, состоящая только из таких действительных алгебраических чисел, которые являются определимыми (nameable) в T, в то время как в моделях системы $\{<, d\}$ никакой элемент не определим в этой системе. Из этого свойства минимальной модели T вытекает, что взаимно однозначное соответствие между этой моделью и произвольной более богатой моделью не может быть изоморфизмом независимо от вопроса о мощности. Вообще любые два различных поля, состоящих из действительных чисел и действительно замкнутых, являются неизоморфными моделями. Это обусловлено тем обстоятельством, что каждое действительное число однозначно определяется его отношениями порядка с рациональными числами, а эти последние определимы в T; следовательно, для каждых двух различных вещественных чисел a, b имеется в T элементарный предикат, верный для a, но не для b, а именно тот, который дается в теории пропорций Евдокса. Следовательно, мы имеем, в частности, много неизоформных *счетных* моделей T. Эта сильная некатегоричность ни в коей мере не является недостатком системы T, поскольку данная формальная система предназначена для характеризации не одной структуры, а семейства структур.

Можно заметить, что, добавив к системе T предикат $\mathrm{Int}(c)$ („c есть целое число") и аксиомы

$$\mathrm{Int}(0),$$
$$\mathrm{Int}(a) \to \mathrm{Int}(a+1),$$
$$\mathrm{Int}(a) \wedge \mathrm{Int}(b) \wedge a < b \to a + 1 < b \vee a + 1 = b,$$

а затем определив предикат $Nm(c)$ („c есть натуральное число") с помощью формулы

$$Nm(a) \leftrightarrow \mathrm{Int}(a) \wedge (0 = a \vee 0 < a),$$

мы получим систему, из которой выводима формула

$$0 < a \wedge a < b \to (Ex)(Nm(x) \wedge b < a \cdot x),$$

выражающая аксиому Архимеда, а также схема полной индукции:

$$A(0) \wedge (x)(A(x) \wedge Nm(x) \to A(x+1)) \to (Nm(a) \to A(a)).$$

(При выводе используются следующие вспомогательные формулы:

$$\neg Nm(a) \to (Ex)(0 < x\, (y)(Nm(y) \to y + x < a \vee a + x < y)),$$
$$(x)(x + 1 > 0 \to (Ey)(Nm(y) \wedge (x < y \vee x = y) \wedge y < x + 1)).)$$

В этом расширении T, которое мы обозначим T_1, имеются все средства обычной формальной системы арифметики в стандартной форме (обозначаемой в „Неразрешимых теориях" через P)[1]). Предикат „r есть k-й десятичный знак бесконечного десятичного разложения положительного вещественного числа a" также может быть выражен формулой

$$0 < a \wedge Nm(k) \wedge 0 < k \wedge Nm(r) \wedge r < 10 \wedge (Ex)\, Nm(x) \wedge$$
$$\wedge x < a \cdot 10^k \wedge (a \cdot 10^k < x + 1 \vee a \cdot 10^k = x + 1) \wedge (Ey)(Nm(y) \wedge$$
$$\wedge\, x = y \cdot 10 + r)).$$

Мы можем, таким образом, развить в T_1 теорию действительных чисел, хотя для теории функций эта система, конечно, недостаточна. Разумеется, T_1 неполна.

[1]) Имеется в виду книга: Tarski A., Mostowski A., Robinson R. M., Undecidable Theories, Amsterdam, 1953. — *Прим. перев.*

4

Можно было бы отстаивать мнение, что любое представление континуума, в котором определим каждый элемент, является нестандартным. Это мнение, конечно, не противоречит тому факту, что каждое действительное число единственным образом определяется множеством меньших его рациональных чисел (или, иными словами, его отношениями порядка с рациональными числами); ведь множество рациональных чисел, меньших, чем действительное число c, определяется, вообще говоря, *со ссылкой на* c, и только в специальных случаях его можно определить независимо, как в случае $\sqrt{2}$ или π. С этой точкой зрения согласуется брауэровская теория континуума, в которой вводится понятие последовательности выборов (choice sequence).

В классическом неформализованном анализе соответствующая свобода достигается, и даже в большей степени, благодаря неограниченному понятию множества натуральных чисел (или последовательности рациональных чисел).

Еще одно дополнительное замечание. В теории действительных чисел, как упоминалось выше, любые два элемента различимы с помощью свойства, которое может быть выражено (во всякой системе, достаточно много формализующей) предикатом, истинным для первого элемента, но не для второго (хотя эти элементы не определимы в формальной системе). Соответствующий факт, по-видимому, не имеет места для теории второго числового класса, так же как и для теории класса множеств действительных чисел.

Математика и логика [1])

А. ЧЁРЧ

Принстонский университет, Принстон, Нью-Джерси, США

Настоящая статья посвящена, как показывает ее название, не какому-либо современному направлению, т. е. чему-то разрабатываемому в настоящее время, а старому вопросу, изучение которого пришло уже к завершению или по крайней мере приостановилось. Неверно, что мнения по этому вопросу сейчас совпадают. Однако прекращение активных исследований означает, что можно подвести итоги и даже предпринять попытку вынести решение.

Утверждению, что логика имеет приоритет перед математикой, придавались два различных смысла. Один из них, который я назову сильным смыслом, представляет собой доктрину, получившую известность как логицизм. Другой, слабый смысл состоит в том, что стандартная постулативная или аксиоматическая точка зрения на природу математики требует приоритета логики как средства, с помощью которого определяются следствия индивидуальной системы математических постулатов.

Рассмотрим сначала сильный смысл. Тезис логицизма состоит в том, что логика и математика соотносятся между собой не как два различных предмета, а как более ранняя и более поздняя части одного и того же предмета, а именно таким образом, что математика может быть полностью получена из чистой логики без введения дополнительных основных понятий или дополнительных допущений.

Чтобы уточнить это, нужно сначала дать некоторый ответ на вопрос: что понимается под логикой? Конечно, имеется в виду не просто традиционная логика, т. е. логика Аристотеля плюс дальнейшие непосредственно связанные с ней исследования, иначе тезис логицизма будет, очевидно, ложным. Если мы принимаем логицистов всерьез, мы должны разрешить им использовать термин „логика“ в более широком смысле.

Допуская, что понятие дедуктивного рассуждения уже известно нам из опыта, относящегося к его частным случаям, мы можем сказать — скорее в качестве описания, чем определения, — что логика есть теория дедуктивного рассуждения плюс все, что потребуется в языке-объекте или метаязыке для адекватности, общности и простоты теории.

[1]) Churh A., Mathematics and logic, стр. 181—186.

Поэтому логика не является просто метатеорией некоторого языка-объекта; это видно из следующего. Установлено, что обычные теории (и, может быть, все удовлетворительные теории) дедуктивного рассуждения, имеющие форму метатеории, приводят к аналитическим предложениям в языке-объекте, т. е. к предложениям, которые в рассматриваемой теории являются следствиями произвольного множества гипотез или, возможно, произвольного непустого множества гипотез [1]). Эти аналитические предложения приводят в свою очередь к некоторым обобщениям; например, бесконечное множество аналитических предложений $A \vee \sim A$, где A пробегает все предложения языка-объекта, приводит к обобщению $p \vee \sim p$ или в более явном виде $(p) \cdot p \vee \sim p$; подобным же образом $(F)(y) \cdot (x) F(x) \supset F(y)$ может возникнуть путем обобщения из бесконечного множества аналитических предложений подходящего вида. Эти обобщения являются общими для многих языков-объектов; отсюда видно, что в некотором смысле имеется одна и та же теория дедуктивного рассуждения для различных языков. Поэтому такие обобщения рассматриваются как принадлежащие логике, что не только естественно, но давно уже является стандартной терминологией.

Против делаемого иногда с номиналистических позиций предложения обойти или опустить эти обобщения следует возразить, что такое положение, когда имеются, например, все частные случаи $A \vee \sim A$ и все же не допускается общий закон $(p) \cdot p \vee \sim p$, по-видимому, противоречит духу общности в математике, который я склонен распространить на логику как наиболее фундаментальную часть математики. Действительно, аналогичная ситуация могла бы иметь место в арифметике: известны равенства $2+3=3+2$, $4+5=5+4$ и все остальные частные случаи коммутативного закона для сложения, но не признается и не формулируется общий закон $(x)(y) \cdot x+y= =y+x$.

Для наших целей удобно считать язык заданным, если есть множество основных символов и правила построения, а также — в некотором смысле, который здесь нет необходимости уточнять, — значения для выражений (правильно построенных формул) языка. Таким образом, я буду говорить о правилах вывода не как о составной части языка, а скорее как о чем-то принадлежащем теории дедуктивного рассуждения для языка. При этом возможны различные множества правил вывода для одного и того же языка [2]).

[1]) Мы можем понимать следствие либо в смысле выводимости, либо в любом другом, менее эффективном смысле, который может быть обеспечен индивидуальной метатеорией; различия для нашей ближайшей цели несущественны.

[2]) Термин «язык», разумеется, часто используется логиками в таком смысле, когда индивидуальный язык не определен, если правила вывода (или преобразования) не определены (в дополнение к тому, что сказано о языке выше). Фактически необходимы два термина,

Далее, имеется и другое соображение, которое побуждает нас рассматривать обобщения аналитических предложений как принадлежащие логике. Оно возникает из идеи о том, что логику нельзя считать исчерпанной тем, что относится специально к индивидуальным языкам [1]).

В абстрактном смысле законы логики не зависят, например, от того, используется ли C или $[\supset]$ в качестве знака импликации или пишут ли $P(x)$ или xP (предикат впереди или сзади объекта). Таким образом, метатеоретический принцип, состоящий в том, что из $[B \supset C]$ и $[A \supset B]$ может быть выведено $[A \supset C]$, должен рассматриваться как относящийся к индивидуальному языку; соответствующий общий принцип логики представляет собой скорее что-нибудь вроде $(p)(q)(r) \cdot q \supset r \cdot p \supset q \cdot p \supset r$. В этой связи предложение Фреге различать два типа значения — смысл и денотат — обладает тем преимуществом, что абстрактные общие законы логики могут быть удовлетворительно формализованы как экстенсиональные законы, так как интенсиональный аспект значения присутствует еще в смысле. Но с точки зрения расселовской теории значения, отрицающей смысл в пользу денотата, переменные p, q и т. д. должны рассматриваться как интенсиональные переменные, имеющие предложения, свойства и т. д. в качестве значений. С этой точки зрения, если кто-нибудь склонен минимизировать область, допустимую для логики, то он может даже занять крайнюю позицию, по которой такие утверждения, как $(p) \cdot p \vee \sim p$ и $(F)(y) \cdot (x) F(x) \supset F(y)$, где p и F — экстенсиональные переменные, имеющие в качестве значений соответственно значения истинности и классы, не принадлежат логике, хотя они и являются аналитическими [2]).

С точки зрения такого понимания логики попытку логицизма свести математику к логике можно видеть в наиболее благоприятном свете. Ибо можно было бы сказать, что логика является во всяком случае необходимой предпосылкой для математики, поскольку дедуктивное рассуждение играет в математике такую важную роль. Это — слабый смысл приоритета логики, о котором говорилось выше. И если мы примем его, то сможем с достаточным основанием сказать, что математика была бы основана на минимальном базисе, если бы не могла быть сведена ни к чему, кроме чистой логики.

[1]) Действительно, в противном случае, поскольку греческий и латинский языки различны, нельзя было бы сказать, что логика Аристотеля и логика Боэция имеют, хотя бы отчасти, одно и то же содержание или рассматривают один и тот же предмет.

[2]) Я не защищаю эту крайнюю точку зрения, и Рассел тоже этого не делает. Но стоит заметить, что она дает весьма удовлетворительную мотивировку причин, по которым Рассел избегает понятия экстенсиональности, вводя контекстуальное определение абстракций классов (class abstracts), упоминаемое ниже.

Исторически логицисты не высказывались так определенно, но, по-видимому, допускали, что законы логики имеют столь окончательный и фундаментальный характер, что сведѐние к логике, очевидно, желательно, если оно возможно, и что такое сведѐние обнаружило бы истинную природу математики.

Теперь, имея перед собой доводы в пользу логицистического тезиса, перейдем к возражениям. Следует привести три важных возражения и, возможно, еще четвертое.

Первое возражение состоит просто в том, что попытка свести математику к логике удалась не более чем наполовину. История хорошо известна. Фреге, который выдвигал логицистический тезис только для арифметики в противоположность геометрии, действительно сформулировал арифметику чисто логически. Логика Фреге включает экстенсионал, так же как и интенсионал. На мой взгляд, эта черта не является сама по себе недостатком. Но именно экстенсиональная часть логики Фреге, несмотря на непосредственную привлекательность ее принципов как интуитивно правильных, ведет к ее противоречивости. И то, что Фреге, встретившись с парадоксом Рассела, признал попытку безнадежной, является историческим фактом.

Чтобы избежать парадоксов, Рассел, а позднее Уайтхед и Рассел в „*Principia Mathematica*" ввели теорию типов, а это в свою очередь заставило их использовать аксиому бесконечности. Термин „аксиома бесконечности" принадлежит не Расселу, а Кейзеру (C. J. Keyser). В одной ранней статье Рассел, полемизируя с Кейзером, доказывает, что аксиома бесконечности не является специальным допущением, которого требует математика сверх законов логики, поскольку эта аксиома (или мнимая аксиома) может быть доказана исключительно на логической основе. Итак, когда впоследствии Рассел изменил позицию и принял аксиому бесконечности (так что она является теперь почти его собственным допущением), можно было бы сказать, что он тем самым вышел за пределы чистой логики. Действительно, аксиому бесконечности можно считать полулогической по своему характеру, поскольку она, хотя и может быть сформулирована в том словаре, который используется при формулировке законов чистой логики, но не является аналитической в соответствии с какой-либо известной теорией дедуктивного рассуждения, которая, по моему мнению, может адекватно и естественно представлять существующую стандартную практику математического рассуждения. И хотя известно, что элементарная арифметика может быть получена без аксиомы бесконечности, если строить ее не на базе теории типов, а на базе теории множеств, но, по-видимому, математика в целом не может обойтись без такой аксиомы, если будет основываться только на некоторой стандартной и естественно приемлемой формулировке чистой логики.

То, что Рассел доказал выводимость математики из интенсиональной логики плюс аксиома бесконечности, является несущественным обстоятельством[1]). Точнее, логика Рассела нейтральна и не является ни экстенсиональной, ни интенсиональной. Он не допускает никакого принципа экстенсиональности для пропозициональных и функциональных переменных. Точно так же он не допускает никакого строгого принципа индивидуализации, который требовал бы наличия интенсиональной области для каких-либо из этих переменных. По его словам, он просто не нуждается в такой гипотезе. Кроме того, роль расселовской элиминации классов с помощью аппарата контекстуального определения понимается, быть может, не так широко, как следовало бы. И хотя могут быть возражения против этого, на которых я бы настаивал в другом контексте, они относятся к таким вещам, как адекватность для логики непрямого рассуждения (the logic of indirect discourse) и, конечно, не к адекватности для математики.

Вернемся, однако, к возражениям против логицистического тезиса. Второе возражение относится к вопросу об обосновании отдельных ветвей математики с помощью минимального базиса. Если мы хотим обосновать математику в целом (лучше сказать „всю математику, имеющуюся в настоящий момент") или обойти трудности, связанные с теоремой Гёделя о неполноте и родственными вопросами, то действительно оказывается, что чистая логика в подходящей формулировке[2]) плюс аксиома бесконечности дают по крайней мере приближение к минимальному базису. Но для отдельных ветвей математики, и в частности для элементарной арифметики, это не имеет места. Действительно, метод Фреге—Рассела требует предикатных переменных высших порядков для получения даже элементарной арифметики. Такие переменные высших порядков могут с достаточным основанием рассматриваться как принадлежащие словарю чистой логики, так как они естественно возникают даже из языка первого порядка, если мы сначала обобщаем аналитические предложения описанным выше способом, затем расширяем язык, добавив обозначения, необходимые для этих обобщений, затем формулируем расширенную теорию дедуктивного рассуждения, приложимую к расширенному языку, затем снова обобщаем аналитические предложения и т. д. Однако предикатные (или функциональные) переменные высших порядков вместе с необходимым для них принципом объемности означают при наличии аксиомы бесконечности, что допускается даже несчетно бесконечное. Более удовлетворительный (экономный) базис для элементарной арифметики дается либо одной из стандартных формулировок арифметики пер-

[1]) Для большей исторической точности должна быть добавлена аксиома сводимости. Но в настоящее время ее обычно избегают путем введения простой теории типов, и поэтому ею для нашей цели можно пренебречь.

[2]) Это будет неверно, если включить в логику допущения, которые требуют интенсиональных значений для пропозициональных и функциональных переменных. Однако, как уже было замечено, Рассел, а также Уайтхед и Рассел этого не делают, рассматривая допущения интенсиональности и экстенсиональности как одинаково излишние.

вого порядка, пользующихся специфическими для арифметики основными обозначениями и специфическими арифметическими постулатами, либо слабой теорией множеств, которая адекватна для рассмотрения конечных множеств, но опускает все стандартные теоретико-множественные аксиомы, не нужные для этой цели (включая аксиому бесконечности).

Согласно третьему возражению, для математики нужна не логика в смысле теории дедуктивного рассуждения, а только различные конкретные случаи дедуктивного рассуждения. Это третье возражение, так же как и второе, можно считать направленным скорее против желательности вывода математики из чисто логических основных понятий, чем против успехов логистики в осуществлении этого. Однако представители интуиционизма настаивали на этом возражении даже в более сильной форме, утверждая, что математика имеет приоритет перед логикой в том смысле, что вывод математики из логики некорректен ввиду наличия в нем порочного круга. В действительности интуиционисты идут значительно дальше, отрицая, что требуемая Фреге и Расселом сильная логика является допустимым основанием для математики, и возражая против слабого смысла приоритета логики в такой же степени, как и против сильного смысла.

Любое обоснование математики или логики действительно в какой-то степени содержит круг, так как в нем всегда имеются не обосновываемые предпосылки, которые должны быть приняты на веру или интуитивно. Мы можем пытаться уменьшить число этих предпосылок, но не можем их уничтожить. Как назвать минимум предпосылок, оставшихся после такого сокращения, математикой, или логикой, или тем и другим, или ни тем, ни другим, — это вопрос терминологии. Но я бы сказал — в качестве критического замечания в адрес интуиционистов, — что это во всяком случае много меньше, чем все содержание одной математической библиотеки или даже нескольких хороших математических книг.

Мне не ясно, в какой степени интуиционистское отрицание приоритета логики является аргументом против использования логистического метода[1]) в отдельных теориях, ибо интуиционисты, в частности Гейтинг, пользуются этим методом и, я думаю, не оспаривают его значения. В действительности именно благодаря логистическому методу те, кто не разделяет интуиционистскую интуицию, могут тем не менее видеть, по крайней мере в случае отдельных математических и логических теорий, к чему ведет интуиционистская интуиция.

Решающий момент в вопросе об использовании логистического метода интуиционистами состоит не в том, применяют ли они интуицию непосредственно, прежде чем получить логистическую формулировку

---

[1]) То есть метода метатеоретического установления правил построения и преобразования для языка.

теории, а в том, считают ли они, уже получив логистическую формулировку, что она определяет теорию в том смысле, что какое-либо ее изменение должно рассматриваться как переход к другой теории. Поскольку они, по-видимому, не считают, что логистическая формулировка так характеризует теорию или хотя бы адекватно представляет ее, мы, таким образом, получаем ситуацию, в которой вообще никакая теория не является полностью интерсубъективно определенной. Если понимать интуиционистов таким образом, то мне кажется, что это наиболее слабое место их доктрины, которое ни в коей мере не существенно для остальной ее части. Я полагаю, что можно сказать много больше в пользу их возражений против отдельных классических теорий и против конвенционалистских и „формалистических“ аспектов аксиоматического метода в его классическом понимании.

С точки зрения интуиционистского отказа от некоторых частей логики классической математики можно добавить четвертое возражение против программы логицизма, состоящее в том, что она просто оказывается невозможной. По-видимому, это в действительности так, даже если допускается аксиома бесконечности. В противовес утверждению логицизма о том, что логика в широком смысле является естественным расширением и существенным дополнением даже наиболее рудиментарной теории дедуктивного рассуждения, имеется интуиционистское утверждение, которое заключается в том, что расширение идет слишком далеко и при попытке добиться общности выходит за пределы логичности (tenability). Это возражение убедительно только для интуиционистов. Но оно согласуется со вторым возражением в отношении подчеркивания силы логики, требуемой логицизмом.

С классической точки зрения, если даже мы примем одно или более из первых трех возражений и будем считать их неоспоримыми, из этого не будет следовать, что логицизм бесплоден. В связи с последним утверждением укажем здесь два следующих момента: один из них — сведѐние математического словаря к неожиданно краткому перечню основных понятий, которые принадлежат словарю чистой логики; второй — обоснование всей существующей математики с помощью сравнительно простой унифицированной системы аксиом и правил вывода. Такое сокращение основного базиса математики можно в действительности произвести различными способами, если не связывать себя исключительно доктриной логицизма, но тем не менее это было в первую очередь достижением логистики.

Номиналистический анализ математического языка [1])

Л. ГЕНКИН

Калифорнийский университет, Беркли, Калифорния, США
Дартмутский колледж, Ганновер, Нью-Гэмпшир, США

На конгрессе, где логика и методология играют столь важную роль, разрешается, может быть, предпослать докладу краткий мета-доклад и даже позволить себе небольшое удовольствие поговорить о себе.

Начну с признания того, что, хотя с самого начала моих занятий логикой я интересуюсь философскими вопросами, относящимися к основаниям математики, и часто та или иная индивидуальная точка зрения в большей или меньшей степени привлекает или отталкивает меня, я никогда не чувствовал настоятельной необходимости решить, является некоторая данная теория «правильной» или «ошибочной». Напротив, я все больше и больше убеждаюсь в том, что в центре внимания должна быть математика как таковая — «работающая математика»; что же касается различных подходов к ее обоснованию, то они обычно представляют собой одинаково возможные способы рассматривать эту увлекательную творческую деятельность, приводя ее в связь с более широкими областями знания.

Мой интерес к теориям, связанным с основаниями, направлен прежде всего на анализ того, в какой степени они сами поддаются математической формулировке, и на решение технических проблем, возникающих из такого анализа. В частности, этим характеризуется мой подход к современным попыткам получить номиналистическую интерпретацию математического языка.

В то время как номиналистическая традиция в философии является, разумеется, очень старой, концентрация интереса на этой точке зрения в применении специально к анализу *математического* языка может быть впервые ясно замечена в работах польской школы логиков начала нынешнего столетия. С этой деятельностью связаны имена Лесневского, Т. Котарбинского, Хвистека и его ученика Хептера и Тарского. Среди наиболее известных работ этого круга — теория

[1]) Henkin L., Nominalistic analysis of mathematical language, стр. 187—193. Доклад был подготовлен автором при финансовой поддержке по контракту Национального научного фонда с Калифорнийским университетом (№ G-14006). Рукопись была написана позднее, когда автор был экстраординарным профессором Дартмутского колледжа.

реизма Котарбинского (все, что есть, есть лицо или объект), его же попытки определить все категории в терминах одной низшей категории и попытки Хвистека установить непротиворечивость математики путем введения интерпретации, в которой, как можно было бы показать, все ее утверждения являлись бы истинами, относящимися к физическим объектам.

Если не считать нескольких статей Рассела, эти интересы польских логиков, кажется, не находили отклика за пределами их собственной страны. Но с переездом Тарского в 1938 г. в Соединенные Штаты, там, а впоследствии и в странах Западной Европы стал проявляться интерес к номинализму. С 1940 г. продолжается непрерывный ряд публикаций в этой области, включающий работы Куайна, Гудмэна, Мартина, Вуджера, Чёрча, Вана, Хао, Г. Бергмана, Леевского, Шеффлера и даже мои. Номиналистические рассмотрения близки по духу как некоторым из тех, кто придерживается конструктивистской точки зрения на основания математики, так и тем, кто стоит на формалистической позиции.

В настоящей статье я рассмотрю две довольно специальные части анализа, данного Куайном и Гудмэном в их ранней совместной работе [2]. В основе этого анализа лежат цели, которые авторы ставят перед номиналистической реинтерпретацией математического языка:

а) дать описание условий, при которых математические предложения могут в собственном смысле утверждаться без обращения к абстрактным сущностям какого бы то ни было рода;

б) избежать любых допущений, таких, как конечность или бесконечность (физических) предметов, поскольку это не является (и, вероятно, не может быть) точно известным и поэтому не должно образовывать основу смысла в языке.

Первая из рассмотренных Куайном и Гудмэном задач — это задача придать номиналистически допустимый смысл предложениям вида *А есть предок В*. Предлагаемое авторами решение представляет собой изменение теоретико-множественной формулировки этого понятия (идея которой восходит к Фреге) путем замены отношения элемента и множества отношением части и целого (между физическими объектами). Результат — истолкование предложения вида *А есть предок В* как означающего, что *А и В — лица, и каждый объект, который содержит А как часть и такой, что все дети каждого лица, являющегося его частью, также являются его частями, имеет В своей частью*. Обоснованность этого анализа зависит, конечно, от представления, что физические объекты могут быть разделены в пространстве-времени так, что, например, можно говорить об объекте, который является суммой (в смысле теории части и целого) некоторого человека и его праправнука.

Как указывают Куайн и Гудмэн, эта форма анализа недостаточна для объяснения связи между произвольным бинарным отношением, имеющим место между физическими объектами, и его наследственным отношением (которое является другим отношением того же типа). Его эффективность в данном частном случае зависит от того, что никакой предок некоторого лица не может иметь общей части с этим лицом. Куайн и Гудмэн указывают, что они не видят, как решить более общую задачу.

Мы предложим другую интерпретацию для предложений вида *А есть предок В*, которая дает метод толкования наследственных отношений для многих отношений, не поддающихся толкованию методом Куайна — Гудмэна. И действительно, интерпретация, которую я выдвигаю, значительно более *естественна*, чем интерпретация Куайна — Гудмэна, ибо она состоит в описании метода, которым на самом деле доказывается истинность многих предложений указанного вида.

Я предлагаю интерпретировать предложение *А есть предок В* как предложение, означающее, что *имеется перечень записей, одна из которых есть имя А и одна из следующих — имя В, такой, что если х и у — непосредственно следующие друг за другом записи перечня, то х означает имя некоторого лица и у — имя одного из его детей.*

Сразу же приходит в голову следующее возражение против этого предложения: без сомнения имеются пары людей, о которых мы обычно говорим, что один из них есть предок другого, но такие, что никому не удастся когда-либо составить список, включающий их имена и имена их промежуточных родственников в порядке рождения. Таким образом, может показаться, что предлагаемая интерпретация должна быть несколько ослаблена так, чтобы вместо установления существования настоящего пространственно-временного перечня требовать только существования „возможного“ или „потенциального“ перечня.

Понятие „возможного существования“, похожее на это, действительно появлялось в работах Хвистека. Однако кажется нежелательным, чтобы такой „возможный перечень“ квалифицировался как физический объект, допущенный в область сущностей, о которых Куайн и Гудмэн позволяют себе говорить (хотя они тщательно избегают дачи специфического критерия для их отличения). С другой стороны, эти авторы истолковывают записи (и поэтому, видимо, истолковывали бы перечни записей) как куски вещества, имеющие некоторые формы, даже если это вещество никаким образом не отличается от окружающего „фонового“ вещества. Согласно этому построению, некоторые экземпляры каждой работы, написанной когда-либо на каком-либо естественном языке, существуют как части любой чистой страницы (которая не слишком мала). Довольно ясно, что, согласно этому построению, каждый объект, который стоит назвать «возможным» перечнем, будет в действительности квалифицирован как настоящий перечень. Поэтому мы можем допустить наше первоначальное предложение в неизменном виде.

Второе возражение, которое приходит в голову, состоит в том, что предложенная интерпретация включает обращение к семантическому понятию денотата; хорошо известно, что использование этого понятия может привести к парадоксу. Однако проще, по-видимому, ограничить типы имен, которые могут появляться в наших списках, и, следовательно, в действительности иметь дело только с ограниченной порцией отношения денотата; а таким путем, как хорошо известно, можно избежать любого из существующих выводов парадокса [1]).

Минутное раздумье показывает, что предложенная нами интерпретация в терминах перечней может быть повторена *дословно* для объяснения любого отношения, для которого можно составить перечень имен, простирающийся от любого индивидуума, находящегося в данном отношении к чему-нибудь, до любого из его предков. Требование, чтобы никакой индивидуум не имел общей части ни с каким предком, ограничивающее применение интерпретации Куайна — Гудмэна, здесь не выдвигается.

Второе, что я хочу рассмотреть, — это анализ, который дают Куайн и Гудмэн для предложения — *имеется больше собак, чем кошек*. Они определяют сначала *частицу*: частица есть все, что является размером самой маленькой среди всех кошек и собак; а затем говорят о *частице объекта х* (где x может быть чем угодно) в смысле: часть x, являющаяся частицей. Предложенная ими интерпретация для предложения *имеется больше собак, чем кошек*, читается следующим образом: *каждый объект, содержащий частицу любой собаки в качестве своей части, больше, чем некоторый объект, имеющий частицу любой кошки своей частью.*

Если отвлечься от неоднозначности, присущей таким понятиям, как *больше* и *размер* (она легко может быть разрешена, и притом несколькими способами), эта интерпретация кажется уязвимой для возражения, состоящего в том, что она нарушает запрещение давать

---

1) Заметим в этой связи, что сам Куайн обнаруживает желание одобрить употребление семантических понятий при придании смысла математическим предложениям, в которые семантические термины не вторгаются открыто, хотя в этом желании он явно не признается. Именно, если G — предикатная переменная, Куайн рассматривает следующую интерпретацию предложений второй ступени вида *для всех G имеет место A*, где A — запись, из которой можно образовывать предложения путем замены G любой записью предиката: *для каждого предиката P результат замены G на P в A является истинным* [3]. Куайн, правда, упоминает о нескольких возражениях против этой интерпретации и в конце концов их отвергает, но он не критикует предложенную интерпретацию за использование в ней семантического понятия истинности. Заметьте, что эту интерпретацию нельзя выразить в форме: *для всех G* имеет место A тогда и только тогда, когда — — —, где пробел заполняется без использования семантических терминов.

значения, основанные на допущении конечности или бесконечности объектов. Ибо если бы оказалось, что кошки никогда не вымрут, и если бы этот биологический вид стал развиваться таким образом, что кошки все время уменьшались бы в размерах, то понятие частицы не имело бы реализации!

Даже если мы при анализе предложений вида *имеется больше A-объектов, чем B-объектов*, ограничимся случаем, когда число объектов обоих типов заведомо конечно, все-таки истолкование Куайна и Гудмэна (как они сами указывают) будет, вообще говоря, некорректным, например, тогда, когда некоторые A-объекты являются частями других.

В качестве другого истолкования, не зависящего ни от предположения о конечности, ни от предположения об отсутствии пересечений, мы предлагаем следующее: *не существует перечня записей, который содержит точно по одному имени каждого A и каждого B и в котором за каждым именем некоторого A следует имя некоторого B*. Как и в нашем предыдущем анализе, единственным ограничением применимости этого истолкования является то, что в некоторых случаях мы можем говорить о предметах, для которых нельзя получить полного списка имен.

Рассмотрим это ограничение подробнее.

Куайн и Гудмэн указывают, что и в мире, содержащем конечное число предметов, неизбежно должно быть много предметов, не имеющих имен (поскольку многие предметы мира используются как символы, не являющиеся именами, и многие различные предметы часто служат именами одного и того же предмета). Если же понимать перечни записей и сами записи как материальные предметы, имеющие определенные формы, то, очевидно, из-за недостатка материала мы не будем в состоянии составлять или находить некоторые перечни, содержание которых мы можем себе представить, даже если все объекты, которые нужно перечислить, имеют имена.

Обычно, думая о перечне, мы представляем его себе как нечто состоящее из вещества, находящегося в некоторой плоской области в течение какого-то отрезка времени. Однако те огромные перечни, которые понадобились бы для истолкования предложений вроде *имеется больше собак, чем кошек*, нам пришлось бы, очевидно, обертывать вокруг Земли или выносить в космическое пространство! Более того, чтобы получить даже перечни приемлемых размеров, мы должны были бы каким-то образом обеспечить возможность многократного появления предметов в одном месте в различные моменты для именования различных перечисляемых вещей.

Конечно, использование предметов, имеющих определенные формы, для записи может рассматриваться отчасти как исторически возникшее случайное обстоятельство (это станет очевидным, если вспомнить о народах, не имеющих письменности) и отчасти как вопрос удобства

коммуникации. Однако, если записи используются не для коммуникации, а для придания смысла некоторому виду предложений способом, рассмотренным выше, естественно поискать другие объекты, которые могут быть лучше приспособлены к этой функции. Итак, имея для различных коммуникативных целей устные и письменные записи, мы можем искать третий тип записи (может быть, совсем не подходящий для коммуникации), который можно использовать для целей номиналистического семантического анализа.

Для простоты предположим, что наши записи должны быть словами в двухбуквенном алфавите; известно, что такой словарь достаточен для выражения предложений, сформулированных в более сложных символизмах. В числе формальных требований к такой системе имеются следующие.

I. Должен быть указан предикат, истинный для тех и только тех предметов, которые могут служить записями.

II. Среди этих записей должны быть выделены некоторые, называемые „простыми записями типа A“, и другие, называемые „простыми записями типа B“; остальные называются „составными“. Желательно иметь „большой“ запас (быть может, ограниченный из-за возможной конечности всех предметов) записей каждого вида.

III. Для каждой составной записи z должны быть единственным образом определены запись x и простая запись y (типа A или типа B), такие, что z можно понимать как запись, состоящую из x и „следующего“ за ним y.

IV. Должна быть определена эквиформность (или, проще, подобие) двух записей, причем любые две записи типа A должны быть подобны, как и любые две записи типа B; две составные части z_1 и z_2 должны быть подобны тогда и только тогда, когда x_1 и x_2 подобны и y_1 и y_2 подобны, где x_j и y_j определены для z_j $(j = 1, 2)$ в соответствии с п. III.

V. Желательно (в той мере, в какой это допускают ограничения, обусловленные возможной конечностью всех вещей), чтобы для каждой записи x можно было найти запись x_A, состоящую из x (или записи, эквиформной x) и „следующей“ за ним записи типа A, и запись x_B, состоящую из x (или эквиформной записи) и „следующей“ за ним записи типа B.

В качестве примера такой системы (которая довольно далека от традиционной системы кусков вещества, имеющих определенные формы и расположенных приблизительно в линейном порядке) можно рассмотреть сумму людей, т. е. предмет x, такой, что каждый предмет y, содержащий как часть всякого человека, являющегося частью x, содержит и сам x как часть. Назовем *p-записью* всякую такую сумму людей, которая не содержит в качестве частей двух людей одного возраста (скажем, родившихся в один и тот же день) и которая содержит в качестве части человека, более молодого, чем всякий другой человек, являющийся ее частью. (Конечно, последнее условие излишне, если мы уверены в конечности человеческого рода.)

Простыми p-записями *типа A* мы будем считать всех людей мужского пола; *простыми* p-записями *типа B* — всех остальных людей, *составными* p-записями будут все те, которые являются суммами двух или более людей.

Для всякой составной p-записи z мы можем получить однозначное разложение (вида, описанного выше в п. III), взяв в качестве y самого молодого человека, являющегося частью z, и в качестве x остаток z (т. е. часть z, не имеющую общих частей с y и такую, что z есть сумма y и этой части). Тогда мы можем рассматривать z как p-запись, состоящую из p-записи x и „следующей" за ней простой p-записи y.

Чтобы определить удовлетворяющее нашим условиям понятие эквиформных записей, мы можем поступить аналогично тому, как делают Куайн и Гудмэн, определяя сходные формулы. Прежде всего нам понадобится понятие *начального сегмента* данной записи z; его можно определить как такую запись y, являющуюся частью z, что каждый человек, являющийся частью y, старше каждого человека, являющегося частью z, но не являющегося частью y. Далее мы можем назвать две записи y_1 и y_2 *одинаково длинными*, если нечто, имеющее с каждым человеком, являющимся частью y_1, точно одну общую унцию вещества, весит столько же, сколько нечто, имеющее точно одну общую унцию вещества с каждым человеком, являющимся частью y_2. Наконец, мы скажем, что y_1 и y_2 эквиформны, если они имеют одинаковую длину и если для любых x_1 и x_2, имеющих одинаковую длину и являющихся начальными сегментами соответственно для y_1 и для y_2, самый молодой человек из x_1 и самый молодой человек из x_2 имеют один и тот же пол[1]).

Разумеется, на вопрос об адекватности предложенной нами системы *p-записей* нельзя дать четкого ответа ввиду присущей ей неопределенности, выраженной в п. II и V.

[1]) Здесь рассуждение Куайна — Гудмэна достигает цели, но оно, по-видимому, не подходит настолько же для тех целей, которые ставятся в их работе. Ведь определение 10 из [2] не выражает подразумеваемого авторами смысла „одна запись длиннее другой", поскольку две части записи являются знаками, т. е. имеют определенные формы, даже если одна из них является частью другой. Этой трудности, вероятно, можно избежать, если исправить 10 таким образом, чтобы говорить о знаке, являющемся *сегментом* записи (в то время как Куайн и Гудмэн говорят о знаке, являющемся *частью* записи). Конечно, против предлагаемого Куайном и Гудмэном подхода к синтаксису можно возражать по той причине, что их основной предикат сочленения C (т. е. операции образования из слов X и Y слова XY. — *Прим. перев.*), в терминах которого определен *сегмент*, в действительности предполагает наличие понятия *записи*, так что никакого номиналистического анализа этого понятия не дается.

Адекватность системы *была бы* ясной, если бы мы знали, что человеческий род никогда не вымрет. Не зная этого, мы можем все же допустить наше предложение как рабочую гипотезу, поскольку если произойдут события, которые докажут ее ошибочность, то они, безусловно, заставят нас утратить интерес к дальнейшему использованию записей!

Интересно отметить, что как при использовании истолкования предложений вида *имеется больше собак, чем кошек*, данного Куайном и Гудмэном, так и при описанном выше истолковании в терминах перечней мы не можем удостовериться в ложности такого предложения, как *имеется больше предметов, отличных от Земли, чем имеется всего предметов*.

Несмотря на очевидную трудность номиналистического истолкования предложений специального вида, которые мы рассматривали, желательно исследовать, какими возможностями располагает номиналист, чтобы дать систематическое истолкование всех предложений некоторого хорошо определенного математического языка способом, адекватным для большей части математических рассуждений.

Если имеется система, состоящая из бесконечного числа записей, то это в самом деле возможно; если же записей лишь конечное число, такой возможности наверняка нет, как я указывал в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Henkin L., Some notes on nominalism, *Journal of Symbolic Logic*, 18 (1953), 19—29.
2. Goodman N., Quine W. V., Steps toward a constructive nominalism, *Journal of Symbolic Logic*, 12 (1947), 105—122.
3. Quine W. V., On universals, *Journal of Symbolic Logic*, 12 (1947), 74—84.

Тридцать лет спустя [1])

А. ГЕЙТИНГ

Амстердамский университет, Амстердам, Нидерланды

В сентябре 1930 г. редакция журнала „Erkenntnis" организовала в Кенигсберге симпозиум, на котором впервые встретились представители логицизма, формализма и интуиционизма. Доклады об этих трех направлениях сделали соответственно Карнап, Нейман и я [1]. Участники симпозиума серьезно пытались понять друг друга, но каждый был убежден, что именно его точка зрения единственно правильная, что никакая другая не имеет права называться математикой и что его точка зрения обязательно победит в недалеком будущем.

Точки зрения были ясными и четкими. Карнап формулировал основные положения логицизма следующим образом: математические понятия можно свести к логическим понятиям с помощью явных определений; математические теоремы могут быть получены из логических аксиом с помощью чисто логических выводов. По поводу основ логики он ссылался на Рассела и Уайтхеда. В дискуссии к этому вопросу вернулся Ган; по его мнению, теоремы логики являются тавтологиями; члены логического тождества выражают один и тот же факт разными способами. Нейман защищал более радикальную формалистическую точку зрения, чем точка зрения Гильберта; он назвал математику комбинаторной игрой в символы. Я же выразил убеждение, что математическая интуиция не оставляет нерешенной ни одной из основных проблем современной математики.

Проблемы, которые еще предстояло решить, были скорее практического, чем принципиального характера. В наименьшей степени это относилось к логицизму, где Карнап подчеркивал трудность исключения аксиомы сводимости без обращения к рамсеевскому платонизму. В формалистической математике основной проблемой оставались доказательства непротиворечивости, в интуиционистской математике — дальнейшее развитие той части математики, которая в данный момент выходит на первый план. Каждый из выступавших хотел построить конструктивную математику. Для Карнапа конструктивность состояла в явном определении математических понятий на базе основных понятий логики в противоположность введению математических понятий посредством аксиом.

[1]) Heiting A., After thirty years, стр. 194—197.

Сравним теперь ситуацию 1930 г. с нынешней. Дух мирного сотрудничества одержал победу над духом непримиримой борьбы. Ни одно из направлений теперь не претендует на право предоставлять единственно верную математику. Философское значение исследований по основаниям математики состоит, по крайней мере частично, в разделении формальных, интуитивистских, логических и платонистских элементов в структуре классической математики и в точном определении областей действия и ограничений этих элементов.

Появилась новая форма математики, в которой мы в каждый момент знаем, работаем ли мы на интуиционистской основе или нет, какая часть работы является чисто формалистической и какие платонистские допущения мы делаем. В этой связи я напомню замечание, сделанное в ходе дискуссии Ганом, а именно, что он считает интуиционизм и формализм важными областями исследования внутри математики, а не по основаниям математики. Крейсел в работе 1953 г. [2] делает сходное замечание: „Некоторые математики отдают предпочтение определенным методам своей науки и не любят других". По-видимому, и Ган и Крейсел считают математику чем-то заранее данным, а исследования по основаниям — особой дисциплиной внутри математики. По моему мнению, это означает переворачивать вопрос с ног на голову.

Ни одна из точек зрения математики не очерчена сейчас так ясно, как это было в 1930 г. О формализме и логицизме я скажу кратко. Формализм наименее уязвим, но для решения математических проблем он нуждается в какой-то форме интуитивистской математики. Что касается логицизма, то в нем имеется много конкурирующих между собой аксиоматических систем логики и теории множеств.

Понятие интуитивной ясности в математике само не является интуитивно ясным. Можно даже построить нисходящую шкалу степеней очевидности. Высшую степень имеют такие утверждения, как $2+2=4$. Однако $1002+2=1004$ имеет более низкую степень; мы доказываем это утверждение не фактическим подсчетом, а с помощью рассуждения, показывающего, что вообще $(n+2)+2=n+4$. Такие общие утверждения о натуральных числах принадлежат к следующей степени очевидности. Они уже имеют характер импликации: „Если построено натуральное число n, то можно осуществить конструкцию, выражаемую равенством $(n+2)+2=n+4$". Эта степень может быть формализована в исчислении со свободными переменными. Я не буду пытаться перечислить по порядку другие степени; достаточно упомянуть некоторые понятия, введение которых понижает степень очевидности.

1) Понятие типа ω или следования по порядку в форме, в которой оно входит в определение конструируемых порядковых чисел.

2) Понятие отрицания, по которому задаются гипотетические конструкции, которые потом оказываются невозможными.

3) Теория квантификации. Интерпретация самих кванторов не является проблемой, но проблемой является использование выражений с кванторами в логических формулах.

4) Введение бесконечно продолжающихся последовательностей (последовательности выбора, произвольные функции).

5) Понятие вида (species); недостатки этого понятия обусловлены неопределенностью понятия свойства. Натуральные числа образуют вид; все виды не образуют вида. Не ясно, образуют ли вид все виды натуральных чисел; поэтому я предпочитаю не пользоваться этим понятием.

Нельзя отрицать, что конструктивность сейчас ценится значительно ниже, чем в 1930 г. С другой стороны, благодаря созданию теории рекурсивных функций понятие конструктивности стало более точным. Одна из трудностей, с которыми столкнулся Брауэр при попытке построить конструктивную теорию континуума, состояла в том, что понятие последовательности натуральных чисел, определенной некоторым законом, совершенно не поддавалось обработке. Если бы рекурсивные функции были известны раньше, он, возможно, не ввел бы понятия последовательности выбора, а это, по-моему, было бы печально.

Понятие рекурсивной функции, введенное для уточнения понятия вычислимой функции, многими математиками понимается так, что оно теряет всякую связь с вычислимостью, поскольку встречающийся в определении рекурсивной функции квантор существования эти математики понимают неконструктивно.

Разумеется, каждое конечное множество примитивно-рекурсивно. Но является ли рекурсивным каждое подмножество конечного множества? Кто может вычислить гёделевский номер характеристической функции множества показателей, не удовлетворяющих теореме Ферма и меньших чем 10^{10}, или множества

$$P_n = \{x \mid x < n \& (Ey) T_1, (x, x, y)\},$$

где n — заданное натуральное число? Ответ зависит от того, какая принята логика. Если понимать рекурсивность неконструктивно, то P_n будет противоречащим примером для тезиса, обратного тезису Чёрча. Авторы многих последних статей и книг (см., например, [3]) отказались от хорошего обычая проводить различие между теми результатами теории рекурсивных функций, которые получены с помощью интуиционистской логики, и теми, для доказательства которых необходима классическая логика. Я сожалею об этом, поскольку это затемняет связь данной теории с понятием эффектной вычислимости.

Теория рекурсивных функций сделала более точным понятие вычислимой функции, но не понятие вычислимого числа. Утверждается, однако, что P_n рекурсивно для любого n. Очевидно, гёделевский номер P_n есть функция от n, скажем $\varphi(n)$; естественно спросить, рекурсивна ли эта функция. С конструктивной точки зрения функция вполне определена только тогда, когда она вычислима. Аналогично в теории рекурсивных функций естественно считать, что функция вполне определена только тогда, когда она рекурсивна. Тогда утверждение, что $P_n(x)$ рекурсивно для каждого n, означает, что $\varphi(n)$ рекурсивно.

Аналогичная трудность возникает по отношению к определению рекурсивного вещественного числа. Имеется несколько определений, и многими доказана их эквивалентность, хотя Брауэр [4] с конструктивной точки зрения доказал в 1920 г., что они не эквивалентны.

Рассмотрим два из этих определений.

1. Вещественное число a последовательно-рекурсивно (п-рекурсивно), если оно является пределом рекурсивной рекурсивно сходящейся последовательности рациональных чисел; точнее, если оно задано последовательностью $\{a_n\}$, где $a_n = f(n)/2n$ и $(\forall p)(|a_{m+p} - a_m| < 2^{-n})$ при $m = g(n)$, f и g рекурсивны.

2. Вещественное число a десятично-рекурсивно (д-рекурсивно), если оно задано десятичным разложением, в котором n-й десятичный знак есть рекурсивная функция $h(n)$ от n.

Мостовский [5] доказал, что соответствующие определения для рекурсивных последовательностей вещественных чисел не эквивалентны. Аналогами для определений 1 и 2 являются:

1а. Последовательность вещественных чисел $\{a_k\}$ п-рекурсивна, если имеются рекурсивные функции $f(k, n)$, $g(k, n)$, такие, что a_k задано последовательностью $\{f(k, n) 2^{-n}\}$, а $(\forall p)(|a_{k, m+p} - a_{km}| < 2^{-n})$ при $m = g(k, n)$. (Определение Мостовского отлично от этого, но рассуждение применимо и к его определению.)

2а. Последовательность вещественных чисел $\{a_k\}$ д-рекурсивна, если n-й десятичный знак десятичного разложения a_k задан рекурсивной функцией $h(n, k)$.

Я возражаю против утверждения, что определения 1а и 2а — не аналоги для определений 1 и 2. Из условия, что функция $h(n, k)$ рекурсивна по обеим переменным, следует, что ее гёделевский номер как функция от n есть рекурсивная функция от k. Это — условие вычислимости, не постулировавшееся в определении 2. Итак, определение 2а является аналогом для определения 2 только в случае, если последнее понимается конструктивно; но тогда определение 2 не эквивалентно определению 1.

Выразим то же самое иначе. Эквивалентность определений 1 и 2 означает, в частности, что по данным f и g можно найти h. Естественное понимание этого утверждения состоит в том, что h рекурсивна относительно f и g; противоречащий пример Мостовского показывает, что это не так.

Марков [6] занимает промежуточную позицию. Он отвергает платонистские допущения, но считает, что алгоритм π применим к слову P, если невозможно, чтобы процесс применения π к P был бесконечен. Это приводит к дополнению интуиционистской логики правилом

$$(\forall x)(A \vee \neg A) \,\&\, \neg (\forall x) \neg A \rightarrow (\exists x) A.$$

Интересно было бы знать, какие из результатов его школы не зависят от этого допущения.

Как я уже говорил, конструктивность сейчас котируется ниже, чем 30 лет назад. Но эффективность является первоначальным понятием, так как доказательство только тогда есть доказательство, когда оно эффективно.

Сказанное мной здесь является, кроме всего прочего, моим ответом на тезис Чёрча. Если определить понятие вычислимой функции через рекурсивную функцию, то для понимания определения последнего понятия потребуется понятие вычислимости.

Поэтому определение рекурсивности через вычислимость содержит порочный круг.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carnap R., Die logizistische Grundlegung der Mathematik, *Erkenntis*, **2** (1931), 91—105; Heyting A., Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik. *Ibid.*, 106—115; von Neumann J., Die Formalistische Grundlegung der Mathematik, *Ibid.*, 116—121.
2. Kreisel G., A variant to Hilbert's theory of the foundations of arithmetic, *British J. Phil. of Science*, **4** (1953), 107—129.
3. Devis M., Computability and Unsolvability, New York — Toronto — London, 1958.
4. Brouwer L. E. J., Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam*, **23** (1920), 955—965.
5. Mostowski A., On computable sequences, *Fundamenta Math.*, **44** (1956), 37—51.
6. Марков А. А., О непрерывности конструктивных функций. *Успехи матем. наук*, IX, **3** (61) (1954), 226—230.

Основания интуиционистской логики[1])

Г. КРЕЙСЕЛ

Парижский университет, Париж, Франция

1. Введение

Интуиционистская математика, развитая Брауэром и Гейтингом, имеет два аспекта. Ее *негативный* аспект, как хорошо известно, состоит в отрицании основных понятий теоретико-множественной (или классической) математики. *Позитивный* аспект состоит в следующем: понятия „конструкция (конструктивная функция)“ и „конструктивное доказательство (равенства двух конструкций)“ считаются, по крайней мере для части математики, достаточно ясными, чтобы их можно было систематически построить, исходя из некоторых очевидных утверждений относительно этих понятий. Этот аспект обычно игнорируется, вероятно, по той причине, что преимущественное внимание уделяется сейчас формальным — и притом формализуемым в рамках исчисления предикатов первого порядка — аспектам математики. В частности, если игнорировать вопросы интерпретации, то гейтинговские системы исчисления предикатов первого порядка можно излагать как подсистемы соответствующих классических систем; так что формальный вывод в одной из первых систем является также и формальным выводом в последней. Таким образом, хотя по замыслу Гейтинга истинность его формальных правил должна была устанавливаться в терминах интуиционистской интерпретации, она может устанавливаться также и на основе классических интерпретаций. Меньше внимания уделяется обычно гейтинговским системам высших порядков [6] или, например, построенному Клини фрагменту интуиционистского анализа [11], хотя только здесь специфически интуиционистские понятия начинают давать должный эффект, например непротиворечивость этих систем высших порядков очевидным образом вытекает из их интуиционистски понимаемого смысла, в то время как для классического доказательства их формальной непротиворечивости необходимы довольно сложные реинтерпретации, такие, как интерпретация Гёделя [5] или рекурсивная реализуемость [11]. (Поскольку непротиворечивость выразима арифметически, это дает арифметическое утверждение, которое короче доказывается с помощью основных интуиционистских понятий, чем с помощью классических.)

Нашей основной целью будет расширение запаса формальных правил доказательства, которые непосредственно следуют из смысла

[1]) Kreisel G., Foundations of intuitionistic logic, стр. 198—210.

основных интуиционистских понятий, но не из принципов классической математики, до сих пор сформулированных[1]).

Для подхода к этим правилам мы рассмотрим частную проблему, имеющую и самостоятельный интерес: *построить для упомянутых выше основных понятий формальную систему — „абстрактную теорию конструкций“, в терминах которой можно было бы интерпретировать формальные правила исчисления предикатов Гейтинга.*

Иными словами, мы дадим формальное семантическое обоснование интуиционистских формальных систем в терминах абстрактной теории конструкций. Это аналогично семантическому обоснованию классических систем [18] в терминах абстрактной теории множеств[2]). Следует заметить, что в обоих случаях *формальный* характер семантического обоснования имеет в основном техническое значение. По моему мнению, неформальные указания Гейтинга [7, стр. 98] вполне достаточны для выражения смысла интуиционистских логических констант, кроме, может быть, кванторов по ips[3]), рассмотренных в разд. 8.

Но с технической стороны семантические обоснования (I) полезны для доказательств независимости, так как в них излагаются минимальные свойства понятий, необходимые для интерпретации; и (II) естественным образом „выводят за пределы“ рассматриваемых формальных систем, благодаря чему они, по-видимому, подходят для нашей основной цели.

Для математика наиболее полезным их приложением является, возможно, следующее. Заданной формальной системе, например, в обозначениях логики предикатов классическая интерпретация сопоставляет множество D_0 значений переменных и подмножества D_i множеств $D_0^{n_i}$, соответствующие n_i-местным предикатным символам, встречающимся в аксиомах данной системы. Тогда в „нестандартной“ модели используются множества D, отличные от множества D^* подразумевавшейся в начале интерпретации; например, в арифметике (или в фрагменте арифметики) используется множество D_0 „неархимедовских“ чисел вместо множества натуральных чисел, хотя к настоящему времени действительно пригодные к употреблению примеры таких D_0 не известны. В интуиционистском случае мы имеем

[1]) В частности, непротиворечивость новых формальных правил нельзя легко доказать — и, может быть, вообще нельзя доказать — в какой-либо обычной классической системе.

[2]) Семантическое обоснование формальной системы состоит в проверке истинности формальных теорем в подразумеваемой интерпретации символизма; *формальное* семантическое обоснование выявляет, кроме того, какие именно свойства понятий, используемые при интерпретации, необходимы для этой проверки.

[3]) ips — сокращение для „infinitely proceeding sequence“ — „бесконечно продолжающаяся последовательность“. — *Прим. перев.*

виды (species)[1]) $\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{D}_i$, соответствующие множествам D_0, D_i; но, кроме того, мы имеем еще класс доказательств $\mathfrak{P}$ в качестве, грубо говоря, дополнительного параметра. В подразумеваемой интерпретации $\mathfrak{P}^*$ состоит из *всех* конструктивных доказательств, в то время как „нестандартная“ интерпретация $\mathfrak{P}$ может быть подклассом $\mathfrak{P}^*$, который удовлетворяет аксиомам, сформулированным в формальной семантике. Так получаются нестандартные модели (с просто описываемыми $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}^*$), в которых $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^*$. Другое приложение относится к *обобщенным индуктивным определениям* (ср., например, [17]). В интерпретации этих определений, данной Дедекиндом и Фреге (как наименьшего класса, удовлетворяющего определяющим условиям), они в высшей степени импредикативны, поскольку в них неявно входит квантификация по всем подклассам класса рассматриваемых объектов. В интуиционистской интерпретации они значительно менее импредикативны и, более того, много „меньших“ видов может удовлетворять данному индуктивному определению, поскольку теперь объект α считается принадлежащим к определяемому виду только тогда, когда *ограниченными средствами класса $\mathfrak{P}$ можно доказать*, что α удовлетворяет посылке рассматриваемого индуктивного определения.

С более логической точки зрения абстрактная теория конструкций дает систематические обозначения для различных результатов относительно полноты интуиционистской логики (ср. конец разд. 6). Конечно, как указано в [13], эти результаты вполне понятны, если исходить из очевидных свойств доказательства и построения, и сама по себе возможность найти какие-то систематические обозначения не вызовет сомнений ни у кого, кто как следует прочтет неформальное изложение Гейтинга. Но настоящего детального изложения ранее не было. Другое интересное для логики приложение излагаемой ниже работы состоит в том, что она позволяет существенно упростить положения работы [16].

Следует заметить, что все эти приложения, если говорить научно, не зависят от негативного аспекта интуиционистской математики. Психологически, конечно, вполне может быть, что для многих людей интуиционистская математика становится более интересной, если они считают другие направления порочными.

2. Сравнение с теоретико-множественным обоснованием (классических систем)

Между обоснованием, базирующимся на теоретико-множественных понятиях, и интуиционистским обоснованием наблюдается поразительный параллелизм. Имеется *негативная* позиция логиков, признающих

[1]) Термин объясняется в разд 4.

теорию множеств и считающих интуиционистские понятия ясными лишь тогда, когда они формулируются в некоторой формальной системе[1]). Далее Гёделем доказано (опять-таки, конечно, без принятия в расчет интуиционистской интерпретации), что классические системы первого порядка могут быть сформулированы как подсистемы соответствующих интуиционистских систем[2]).

Между прочим, этот параллелизм имеет и неприятную сторону, так как первоначальная принадлежащая Фреге формулировка абстрактной теории множеств — она соответствует излагаемой ниже абстрактной теории конструкции — была противоречивой. Поэтому ниже я буду иногда формулировать ослабленные варианты „естественных" аксиом таким образом, чтобы можно было дать комбинаторное доказательство непротиворечивости слабых аксиом с помощью иерархий формальных систем.

8. Сравнение с финитистским обоснованием

Семантическое обоснование не может, конечно, максимизировать очевидность (или минимизировать предпосылки) заданных формальных манипуляций. Тот факт, что для формального семантического обоснования данной системы F нужны только *некоторые* свойства основных семантических понятий, показывает, что их *полное* содержание не является необходимым для проверки справедливости формальных правил F (хотя оно, вообще говоря, необходимо для более очевидной проверки справедливости F и для мотивированного использования F). Далее, очевидность F не возрастает благодаря явной формулировке ограниченных вариантов[3]) семантических понятий, удовлетворяющих абстрактной теории, если настаивать на формулировке этих ограничений в терминах основных семантических понятий. Таким образом, если стремиться к очевидности, то нужно формулировать проблему обоснования в терминах, вводимых независимо от основных семантических понятий и (если возможно) более элементарным способом.

Такой ход мыслей ведет, очевидно, к *программе Гильберта*.

[1]) Которую они реинтерпретируют классически, лишая тем самым основные интуиционистские понятия всякой математической плодотворности (если отвлечься, конечно, от результатов, связанных с самой реинтерпретацией).

[2]) Это относится к системам (первого порядка), в которых при подразумеваемой интерпретации области изменения переменных являются объектами первого порядка (например, арифметики), и не относится, конечно, к абстрактной теории множеств.

[3]) То есть ограниченных понятий конструкции и конструктивного доказательства — в интуиционистском случае и ограниченного понятия множества (как подкласса совокупности всех множеств) — в классическом случае.

В принципе это вовсе не противоречит семантическому обоснованию, поскольку, грубо говоря, программа Гильберта начинается там, где отказывается служить семантическое обоснование. На деле, однако, значительные успехи в осуществлении программы Гильберта (в применении к арифметике первого порядка) подорвали интерес к интуиционизму и тем более к его семантическому обоснованию. В самом деле, если мы займемся гейтинговскими системами первого порядка, то окажется, что: (I) с точки зрения элегантности доказательства классические правила на самом деле лучше; (II) если говорить об очевидности, то при финитистском обосновании делаются значительно более слабые допущения, так как используются лишь конструкции, применяемые к пространственным объектам, в то время как интуиционистские конструкции применяются к абстрактным понятиям; на это различие впервые указал Гёдель [5]; (III) если говорить об анализе доказательств, имеющем значение для математики [12], то теорема Эрбрана и ее финитистские интерпретации, вообще говоря, более информативны, чем ее переводы на язык интуиционистских систем[1]).

Ситуация изменится, если попытаться дать конструктивный анализ системы второго порядка. Даже если конечная цель состоит в избежании проблематики (в высшей степени абстрактной) общих понятий конструкции и доказательства, все равно эти понятия нужны для систематического подхода. Если можно так выразиться, интуиционизм может дать общую теорию конструктивности, которая должна сделать возможным рациональный подход к специальным проблемам конструктивности, так же как в общей теории уравнений выделяются важные свойства уравнений, которые помогают также в частных случаях. Весьма обнадеживающим примером такого приложения является работа Гёделя [5], в которой проблема непротиворечивости классической арифметики с помощью интуиционистских рассмотрений расчленена на несколько частей (ср. [15, § 12]) и тем самым сделана значительно более прозрачной, чем, например, в работе [2].

[1]) Строго говоря, имеются исключения. Пусть $\mathfrak{A}$ — формула в предваренной нормальной форме (например, арифметическая)

$$(x_1)(Ey_1)\ldots(x_n)(Ey_n)\,A(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n);$$

$\mathfrak{A}^-$ — ее отрицательный вариант, в котором исключены $\vee$ и (E); $\mathfrak{A}^*$ — предваренная (обычная) форма для $\neg\mathfrak{A}$, а именно $(Ex_1)(y_1)\ldots(Ex_n)(y_n)\neg A(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$; $\mathfrak{A}^{**}$ — предваренная форма (второго порядка) для $\neg\mathfrak{A}^*$. Тогда интуиционистски $\mathfrak{A} \to \neg\neg\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^- \to \neg\neg\mathfrak{A}^{**} \to \neg\mathfrak{A}^*$; обратное, вообще говоря, не имеет места. Для классически доказуемого $\mathfrak{A}$ так называемая интерпретация без противоречащих примеров дает $\mathfrak{A}^{**}$ (с явным выписыванием встречающихся здесь функционалов), в то время как арифметика Гейтинга дает $\mathfrak{A}^-$. Но значение этого улучшения не очень понятно; оно, безусловно, не имеет значения, если не вводить интуиционистские понятия из других соображений.

4. Интуиционистская позиция (общее изложение)

Смысл математического утверждения, обозначаемого лингвистическим объектом A, является интуиционистски определенным (или понимаемым), если мы установили, какие конструкции образуют *доказательства* A, т. е. если мы имеем конструкцию r_A, такую, что для всякой конструкции c $r_A(c)=0$, если c есть доказательство A, и $r_A(c)=1$, если c не есть доказательство A; логические частицы в этом пояснении интерпретируются как функции истинности, так как мы допускаем основную интуиционистскую идеализацию: мы можем узнать доказательство, когда видим его, так что r_A разрешимо. (Заметьте, что это относится к *доказательству*, но не к *доказуемости*.)

Вид упорядоченных наборов из n конструкций $a_1, \ldots, a_n$ определен конструкцией s, где $s(c, a_1, \ldots, a_n)=0$, если c есть доказательство того, что $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ принадлежит к виду и $s(c, a_1, \ldots, a_n)=1$ в противном случае. Конструкция c мыслится как построенный объект, если c имеет первый порядок (0-местная функция), и как метод построения, если c имеет высший порядок. Мы, однако, не проводим явного различения типов, следуя, например, способу введения логических констант у Гейтинга [7]. Рассмотрим, далее, формулу A исчисления предикатов, в которую входят символы отношений $R_i(x_1, \ldots, x_{n_i})$, $1\leqslant i\leqslant k$; мы используем переменные x в формальной системе Гейтинга и $a, b, c, \ldots$ в абстрактной теории конструкций. Предположим, что нам даны „интерпретации" для R_i, а именно виды наборов из n конструкций, определенные с помощью s_i. Как указал Гейтинг, в этом случае получаются условия доказательства для A в терминах s_i. В частности, если A есть $B\circ C$, где $\circ$ означает логическую связку, и r_B, r_C определяют смысл B и C, то мы получаем r_A из r_B и r_C. Для случая кванторов ясно, что идея *бесконечной* области должна рассматриваться как façon de parler (относительно условий доказательства), так как интуиционистская математика не признает бесконечных протяженностей. Вообще следует проявлять осторожность и не переносить слишком механически синтаксические правила образования из классических исчислений, поскольку синтаксические правила мотивируются рассмотрениями, относящимися к *смыслу*, который приписывается лингвистическому объекту, а смыслы в классическом и интуиционистском понимании различны.

В то время как понятие „доказательство формулы A" определяется, понятие „c есть доказательство экстенсионального равенства между конструкциями a и b" в приводимой ниже формулировке берется в качестве исходного, и все утверждения сводятся к этой специальной форме (по поводу мотивировки ср. замечание на стр. 239). В формальной системе $a=b$ интерпретируется как существенно интенсиональное[1]) равенство между a и b; $\pi(c, a, b)=0$ как „конструкция c есть доказательство равенства конструкций a и b", где переменные a, b, c могут принимать в качестве значений произвольные конструкции[2]).

5. Абстрактная теория конструкций

Мы будем одновременно описывать ***термы, формулы, аксиомы*** и ***правила вывода***. Мы будем указывать подразумеваемое значение термов и представлять читателю проверку справедливости аксиом для этого значения.

Если сравнить нашу систему, например, с абстрактной теорией множеств, можно заметить, что у нас больше постоянных термов, так как у нас нет кванторов. Заметьте, что для правил, отмеченных звездочкой, возникает вопрос о непротиворечивости.

Термы. 0, 1 (*два различных объекта первого порядка*); $f, g, h, \ldots$ (*различные переменные для конструкций*): *Если* $a, b, c, \ldots$ — *термы, то и* $*a(b, c, \ldots)$ *есть терм* ($a(b, c, \ldots)$ *означает результат применения конструкции, представленной как* a, *к* $b, c, \ldots$, *если это имеет смысл, т. е. если число и типы аргументов подходят друг к другу, в противном случае* $a(b, c, \ldots)$ *есть* a).

Соответствующее правило без звездочки позволяет образовывать такое выражение с переменной a только в контексте $\pi[c, a(b, c, \ldots), a_1(b_1, c_1, \ldots)]$.

$*\lambda_f a$, *где* f — *переменная, не связанная в* a.

В соответствующем правиле без звездочки требуется, чтобы a действительно содержало f, и добавляются дополнительные константы $0^1, 0^2, 0^3, \ldots$, где $0^1(a)=0$, $0^2(a, b)=0$, $0^3(a, b, c)=0, \ldots$. Далее допускаются только *двузначные* a, определенные ниже.

$d(a, b)$ (пара конструкций и a и b).

---

[1]) Точное значение этого выясняется в приводимых ниже аксиомах; например, если два определения переводимы (convertible) друг в друга рассмотренным ниже весьма элементарным способом, то конструкции, определенные таким образом, считаются равными, например образование пары и обратные конструкции.

[2]) Это соответствует „смешению" математики и метаматематики, подчеркиваемому в неформальных работах интуиционистов. Его следует отличать от взаимодействия протологических и формальных правил в оперативной логике, так как в противоположность последней мы рассматриваем доказательства как конструкции над конструкциями, а не просто над символическими выражениями. Разумеется, за исключением очень элементарных контекстов первого порядка, интуиционистское и оперативное понятия конструкции обладают разными свойствами.

$d_1(a)$ (первый элемент a, если a — пара; в противном случае, например, a).

$d_2(a)$ (второй элемент a).

$n(a)$ (обобщение отрицания как функции истинности, т. е. конструкция над a, которая, если ее применять к $a=0$ и к $a=1$, имеет значение $1-a$).

$k(a, b)$ (обобщение конъюнкции как функции истинности).

Сокращение $i(a, b)$ означает $n\{k[a, n(b)]\}$ (обобщение импликации как функции истинности).

$\pi(a, b, c)$ ($=0$: a есть доказательство того, что b и c экстенсионально равны).

$r_i(c)$, $s_i(c, a_1, \ldots, a_n)$ (конструкции, определяющие конкретные утверждения и конкретные виды).

Следующие термы не нужны для введения логических констант; они требуются только для доказательства того, что эти константы удовлетворяют формальным правилам Гейтинга.

$a * b$ (сочленение)[1].

$a \circ b$ (партикуляризация: если $\pi\left[a, \lambda_f c_1(f), \lambda_f c_2(f)\right]=0$, то $\pi[a \circ b, c_1(b), c_2(b)]=0$).

$\pi_0(a, b)$ („установимость" π: если a доказывает, что $b=0$, то $\pi_0(a, b)$ доказывает, что $\pi(a, b, 0)=0$).

$\pi_1(a, b)$ („сократимость" π: если a доказывает, что $\pi(b, c, 0)=0$, то $\pi_1(a, b)$ доказывает, что $c=0$).

$r^i(a)$ („установимость" r_i: если $r_i(a)=0$, то $[r^i(a), r_i(a), 0]=0$).

$r^{(i)}(a, b)$ („сократимость" r_i: если a доказывает, что $r_i(b)=0$, то $r^{(i)}[r^{(i)}(a, b)]=0$).

Для любой последовательности $\mathfrak{p}$ равенств между термами $\pi_{\mathfrak{p}}$ есть терм (если $\mathfrak{p}$ есть формальный вывод равенства $a(f_1, \ldots, f_k)$ в нашей системе, то $\pi_{\mathfrak{p}}$ представляет интуитивное доказательство равенства выражений $\lambda_{f_1, \ldots, f_k} a(f_1, \ldots, f_k)$ и $\lambda_{f_1, \ldots, f_k} 0$).

Двузначные термы. 0,1: *для любых* $a, b, c, r_i(a), s_i(c, a_1, \ldots, a_{n_i})$, $0^1(a)$, $0^2(a, b), \ldots, \pi(a, b, c)$; *для двузначных* a, b, $n(a)$, $k(a, b)$ (*двузначность означает разрешимость*).

Обозначение: Если a и b двузначны, пишем $\sim a$ вместо $n(a)$, $a \& b$ вместо $k(a, b)$, $a \supset b$ вместо $i(a, b)$ и $a \cup b$ вместо $n\{k[n(a), n(b)]\}$.

Формулы. *Если* a *и* b — *термы, то* $a=b$ *есть формула.*

($=$ означает интенсиональное равенство для высших типов и экстенсиональное равенство для низшего типа.)

[1]) То есть операция образования из слов X и Y слова XY. — *Прим. перев.*

Аксиомы. $[\lambda_f a(f)](b)=a(b)$,

$$n(0)=1,\ n(1)=0,\ n[n(a)]=a,$$
$$k(0, a)=a,\ k(1, a)=1,\ k(a, b)=k(b, a),$$
$$k(\lambda_f a, \lambda_f b)=\lambda_f k(a, b),\ n(\lambda_f a)=\lambda_f n(a),$$
$$d_1[d(a, b)]=a,\ d_2[d(a, b)]=b,\ d_1(\lambda_f a)=\lambda_f d_1(a),\ d_2(\lambda_f a)=\lambda_f d_2(a),$$
$$d(\lambda_f a, \lambda_f b)=\lambda_f d(a, b).$$

Если $I(A_1, \ldots, A_k)$ *есть тождество классического исчисления высказываний* (*с обозначениями* $\sim$ *и* &), $a_1, \ldots, a_k$ *суть двузначные термы, то* $I(a_1, \ldots, a_k)=0$ *есть аксиома,*

$$\{\pi(a, b, 0) \supset \pi[\pi_0(a, b), \pi(a, b, 0), 0]\}=0,$$
$$\{\pi[a, \pi(b, c, 0), 0] \supset \pi[\pi_1(a, b), c, 0)]\}=0.$$

(Соответствующее правило со звездочкой есть * $i[\pi(a, b, 0), b]=0$; оно очевидно в подразумеваемой интерпретации, но доказательство его непротиворечивости представляет трудность. Для обоснования логики предикатов Гейтинга достаточно правила без звездочки.)

$$\{r_i(a) \supset \pi[r^i(a), \ r_i(a), 0]\}=0,$$
$$\{\pi[a, r_i(b), 0] \supset r_i[r^{(i)}(a, b)]\}=0,$$
$$[\{\pi(a, b, 0) \& \pi[a_1, i(b, c), d]\} \supset \pi(a * a_1, c, d)]=0,$$
$$\{\pi[a, \lambda_f c(f), d] \supset \pi[a \circ b, c(b), d(b)]\}=0.$$

Правила вывода $a=a$.

$$\frac{a=b}{b=a}, \quad \frac{a=b,\ b=c}{a=c}, \quad \frac{a=b}{a(c)=b(c)}, \quad \frac{a=b}{c(a)=c(b)}.$$

(Вариант этого правила без звездочки применим, если c есть π-терм, только к $\pi(a, a_1, b_1)$, но не к $\pi(a_1, a, b_1)$ и не к $\pi(a_1, b_1, a)$. Заметьте, что правило со звездочкой является сильным; например, в применении к $\pi(a_1, a, b_1)$ оно означает, что даже если две конструкции a и b только переводимы друг в друга, одна и та же конструкция a_1 доказывает равенство a и b_1 и b и b_1. Это, конечно, не было бы верно, если бы *доказательство* понималось в синтаксическом смысле.)

Наконец, если a не содержит f и если $\mathfrak{p}$ — формальный вывод равенства $[a \supset b(f_1, \ldots, f_k)]=0$, то

$$\pi\{\pi_{\mathfrak{p}}, i[a, \lambda_{f_1, \ldots, f_k} b(f_1, \ldots, f_k)], \lambda_{f_1, \ldots, f_k} 0\}=0$$

есть аксиома.

Замечание. Изложенные правила следует сравнить с аксиомами и правилами Гёделя [3]. Однако, как было замечено уже в работе [16], вряд ли имеет смысл применять пропозициональные связки, понимаемые как функции истинности, к утверждениям о доказуемости. В самом деле, если допустить $BA \to A$ и другие свойства неформальной доказуемости, то даже непротиворечивость классических правил будет неочевидной, поскольку: (I) классически не ясно, имеет ли понятие доказуемости хорошо определенный объем; (II) интуиционистски не ясно, является ли оно разрешимым.

6. Введение логических констант

Каждой формуле $A(x_1, \ldots, x_k)$ логики предикатов, содержащей свободные переменные $x_1, \ldots, x_k$ и символы отношений R_i, мы сопоставим терм $r_A(c, a_1, \ldots, a_k)$ (см. выше, разд. 5) со следующим подразумеваемым значением: c доказывает, что $a_1, \ldots, a_k$ удовлетворяют $A(x_1, \ldots, x_k)$ тогда и только тогда, когда $r_A(c, a_1, \ldots, a_k) = 0$. Чтобы избежать введения излишних индексов, мы будем писать вместо r_A

$$\Pi(c, a_1, \ldots, a_k; \ulcorner A(x_1, \ldots, x_k)\urcorner).$$

Кроме того, мы обычно будем опускать свободные переменные.

Чтобы отличать (формальные) объекты исчисления предикатов от объектов построенной выше системы, мы будем для связок, не являющихся функциями истинности, пользоваться обозначениями $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$.

$$\Pi(c; a_1, \ldots, a_{n_i}; \ulcorner R_i(x_1, \ldots, x_{n_i})\urcorner) \quad \text{есть} \quad s_i(c; a_1, \ldots, a_{n_i}).$$

Мы будем далее писать c_1 вместо $d_1(c)$ и c_2 вместо $d_2(c)$;

$$\Pi(c; \ulcorner A \wedge B\urcorner) \quad \text{есть} \quad \Pi(c_1; \ulcorner A\urcorner) \& \Pi(c_2; \ulcorner B\urcorner).$$

Здесь и ниже использование связок — функций истинности допустимо, поскольку Π есть двузначный терм (по индукции):

$$\Pi(c; \ulcorner A \vee B\urcorner) \quad \text{есть} \quad \Pi(c; \ulcorner A\urcorner) \cup \Pi(c; \ulcorner B\urcorner),$$
$$\Pi(c; \ulcorner A \rightarrow B\urcorner) \quad \text{есть} \quad \pi\{c_1, \lambda_f \Pi(f; \ulcorner A\urcorner) \supset \Pi[c_2(f); \ulcorner B\urcorner], \lambda_f 0\},$$
$$\Pi(c; \ulcorner \neg A\urcorner) \quad \text{есть} \quad \pi\{c_1, \lambda_f \Pi(f; \ulcorner A\urcorner) \supset \pi[c_2(f), 1, 0], \lambda_f 0\},$$
$$\Pi(c; \ulcorner (\mathrm{E}x) A(x)\urcorner) \quad \text{есть} \quad \Pi(c_1, c_2; \ulcorner A(x)\urcorner),$$
$$\Pi(c; \ulcorner (x) A(x)\urcorner) \quad \text{есть} \quad \pi\{c_1, \lambda_f \Pi[c_2(f), f; \ulcorner A(x)\urcorner], \lambda_f 0\}.$$

Теорема. *Для каждой формально выводимой формулы A исчисления предикатов Гейтинга* (HPC) *найдется терм p_A, такой, что равенство $\Pi(p_A, \ulcorner A\urcorner) = 0$ формально доказуемо в построенной выше абстрактной теории конструкций.*

Следствие. Теорема имеет место также и в том случае, когда кванторы в A релятивизированы, т. е. распространяются лишь на некоторые данные виды конструкций (так измененную формулу обозначим A_R), так как если $\vdash_{\mathrm{HPC}} A$, но также и $\vdash_{\mathrm{HPC}} A_R$.

Для доказательства лучше всего использовать систему Клини G3 (а не, например, аксиоматизацию Гейтинга [7]). Пусть $\vdash$ означает „доказуемо в абстрактной теории конструкций". Индукцией по длине вывода в G3 доказывается, что если $\vdash_{G3} \Gamma \rightarrow A$ и Γ состоит из $C_1, C_2, \ldots, C_r$, а $x_1, \ldots, x_k$ есть полный список свободных переменных, входящих в Γ и в A, то существует терм $p(g; f_1, \ldots, f_k)$, такой, что

$$\{\Pi(g, f_1, \ldots, f_k; \ulcorner C_1 \wedge \ldots \wedge C_r\urcorner) \supset \Pi[p(g; f_1, \ldots, f_k), f_1, \ldots, f_k; \ulcorner A\urcorner]\} = 0$$

со свободными переменными $g, f_1, \ldots, f_k$.

Используются следующие факты, относящиеся к описанной выше системе:

Лемма 1. *Для каждой формулы A (исчисления предикатов) существует такой терм $\chi_A(c)$, что*

$$\{\Pi(c; \ulcorner A\urcorner) \supset \pi[\chi_A(c), \Pi(c; \ulcorner A\urcorner), 0]\} = 0$$

(установимость отношения Π).

Лемма 2. *Для каждой формулы A существует такой терм* $\psi_A(c, d)$, что

$$\{\pi[c, \Pi(d; \ulcorner A\urcorner), 0] \supset \Pi[\psi_A(c, d); \ulcorner A\urcorner]\} = 0$$

(сократимость отношения Π).

Лемма 3. *Для каждой формулы A существует такой терм* $\tau_A(c)$, что

$$\{\pi(c, 1, 0) \supset \Pi[\tau_A(c); \ulcorner A\urcorner]\} = 0.$$

Используются следующие производные правила абстрактной теории конструкций:

$$\frac{n(a) = 0}{a = 1}, \quad \frac{n(a) = 1}{a = 0}, \quad i(1, a) = 0, \quad \frac{a = 0, \ i(a, b) = 0}{b = 0}.$$

Замечание. Теперь ясно, что основным является отношение $\pi(c, a, b) = 0$, а не, например, $\Pi(c, \ulcorner A\urcorner) = 0$. Действительно, если отправляться от последнего отношения для неанализируемых формул A_i, то $\Pi(c, \ulcorner A\urcorner)$ для сложной A определяется через $\Pi(c, \ulcorner A_i\urcorner)$ с помощью $\pi(c, a, b)$, но не наоборот.

Связь с неформальными интуиционистскими рассмотрениями

(I) При нашей интерпретации связки $\rightarrow$ $c_2(f)$ всюду определено. В противоположность этому Гейтинг [8, стр. 334] настаивает на необходимости частично определенных функций. Эта необходимость может быть значительно ослаблена при явном использовании параметров, пробегающих доказательства; это можно проиллюстрировать примером из теории рекурсивно перечислимых множеств. Пусть

$$S = \{n: (\exists x) A(n, x)\}, \quad T = \{n; (\exists x) B(n, x)\},$$

где A и B — примитивно рекурсивны. Для некоторых S и T имеются лишь частично, но не потенциально рекурсивные p, такие, что $n \in S \rightarrow p(n) \in T$; это показывает „необходимость“ частичных функций. Но если рассматривать число m, для которого выполняется $A(n, m)$, как „доказательство“ того, что $n \in S$, то эта необходимость отбрасывается в следующем смысле: существуют рекурсивные (и чисто примитивно рекурсивные) $p_1(n, m)$, $p_2(n, m)$, такие, что $A(n, m) \rightarrow \rightarrow p_1(n, m) \in T$, и, далее, $A(n, m) \rightarrow B[p_1(n, m), p_2(n, m)]$. По-видимому, частичные функции были бы необходимы, если бы $\pi(c, a, b)$ предполагалось не разрешимым, а только „установимым“, когда оно имеет место. В этом случае значение $\rightarrow$ не могло бы быть объяснено в терминах π и наших обобщений функций истинности; для такого объяснения пришлось бы иметь в общей теории конструкций (положительную) логику („непредикативность импликации“).

(II) Сформулированной выше теореме можно дать другую формулировку, в которой более прямо будет выражено, что A истинно, т. е. что для всех видов R_i имеется „доказательство“ A_R (распространение на все виды R_0 как предметной области [13] будет вытекать тогда из следствия теоремы).

Нам нужно найти терм $\chi(c; s_1, \ldots, s_k)$ со следующим свойством: если c доказывает, что s_i *определяет вид*, то $\Pi(\chi(c), \ulcorner A \urcorner)$, где s_i теперь рассматриваются как произвольные конструкции. Условие „определять вид“, т. е. быть двузначными, не принимается в качестве аксиомы для s_i, а формулируется в посылке: c_1 доказывает равенство $\lambda_{g, f_1, \ldots, f_{n_i}} 0$ и $\lambda_{g, f_1, \ldots, f_{n_i}} \{\pi[c_2(g, f_1, \ldots, f_{n_i}), s_i(g, f_1, \ldots, f_{n_i}), 0] \cup \pi[c_2(g, f_1, \ldots, f_{n_i}), s_i(g, f_1, \ldots, f_{n_i}), 1]\}$. Таким образом, мы имеем здесь (ограниченную) возможность квантификации по всем видам.

7. Непротиворечивость

Финитистские доказательства непротиворечивости для аксиом и правил нашей теории конструкций, *не помеченных звездочками*, получаются с помощью интерпретации в бескванторной формальной системе. Основным необходимым для этого фактором является следующая лемма.

Лемма. *Пусть F — формальная система, которая включает примитивно рекурсивную арифметику и имеет примитивно рекурсивный предикат доказательства (представимый в F формулой) $P(a, b)$ (для которой определяющие равенства могут быть формально доказаны в F). Пусть $\ulcorner A(0^{(n)}) \urcorner$ означает терм $t(n)$ системы F, который является каноническим представлением в F гёделевского номера формулы, полученной заменой x в $A(x)$ n-м по порядку натуральным числом. Тогда существует примитивно рекурсивная функция $p_1(a, b)$, такая, что*

$$\vdash_F P[a, \ulcorner P(0^{(b)}, 0^{(c)} \urcorner] \supset P[p_1(a, b), c].$$

Заметим прежде всего, что аналогично работе [9, стр. 312—324] существует функция $q_1(b, c)$, такая, что

$$\vdash_F \sim P(b, c) \supset P[q_1(b, c), \ulcorner \sim P(0^{(b)}, 0^{(c)}) \urcorner]. \quad (1)$$

Таким образом, если $\sim P(b, c)$, то доказательства в F с номерами a и $q_1(b, c)$ в совокупности дают противоречие, и поэтому существует $q_2(a, b, c)$, являющаяся доказательством в F формулы с номером c. *Положим, по определению*, $p_1(a, b) = b$, если $P(b, c)$, и $p_1(a, b) = q_2(a, b, c)$, если $\sim P(b, c)$ и $P[a, \ulcorner P(0^{(b)}, 0^{(c)}) \urcorner]$, где c определяется заданием a. Отсюда следует лемма.

Функция p_1 в (1) позволяет установить справедливость аксиомы

$$\{\pi[a, \pi(b, c, 0)] \supset \pi[\pi_1(a, b), c, 0]\} = 0$$

в приводимой ниже интерпретации. Поскольку (1) формально доказуемо в F, выходить за пределы F не нужно[1]). Интерпретация „теории без звездочек“ аналогична намеченной в работе [16]. Основное различие относится к равенствам $\pi(a, b, 0) = 0$, где b имеет вид $\lambda_f b_1(f)$ или $f(b_1)$. Пусть a', $b_1'(f)$, b_1' — интерпретации для a, $b_1(f)$, b_1. Заменим *свободные* переменные g в b_1' (но не в a') на $0^{(g)}$, если b есть $\lambda_f b_1(f)$, заменим $\pi(a, b, 0) = 0$ на $P[a, \ulcorner b_1(f, 0)(g) = 0 \urcorner]$; если b есть $f(b_1)$ — на $P\{a', s[\ulcorner b_1'(0^{(g)}) \urcorner, f]\}$, где $s(m, n)$ означает гёделевский номер терма, полученного заменой свободной переменной в n-м терме на терм с гёделевским номером m. Коротко говоря, хотя абстрактная теория не делает различия между объектами и их именами, в интерпретации такое различие снова вводится; правила со звездочками исключаются как раз для того, чтобы сделать это возможным.

---

[1]) В частности, не нужны *иерархии* систем [16]. В противоположность этому более сильная аксиома $(\pi[a, \pi(b, c, 0), 0] \supset \pi(b, c, 0)) = 0$ требовала бы $P[a, \ulcorner P(0^{(b)}, 0^{(c)}) \urcorner] > P(b, c)$, что недоказуемо в (непротиворечивой) системе F. Если найдутся числа b_0 и c_0, для которых $\sim P(b_0, c_0)$, то мы должны будем иметь $\sim P[a, \ulcorner P(0^{(b_0)}, 0^{(c_0)}) \urcorner]$, т. е. $\mathrm{Con}\, F$. Аналогично, как указал Гёдель в [3], для его интерпретации доказуемости нужно

$$(Ey)\, P[y, \ulcorner (Ez)\, P(z, 0^{(c)}) \urcorner] \supset (Ex)\, P(x, c).$$

Если взять $c = \ulcorner 0 = 1 \urcorner$, то будет $(Ey)\, P(y, \ulcorner \neg \mathrm{Con}\, F \urcorner) \supset \neg \mathrm{Con}\, F$, т. е. $\mathrm{Con}\, F \supset \mathrm{Con}(F \cup \{\mathrm{Con}\, F\})$, что противоречит второй теореме о неполноте. Заметим, однако, что иерархии систем необходимы, если имеется индукция.

16 Зак. 1047

Доказательства независимости. Намеченная выше интерпретация является примером „нестандартной" модели типа, упоминавшегося во введении, поскольку мы установили, что конструкции и доказательства, ***представимые*** в формальной системе F, удовлетворяют (помеченной звездочками части) абстрактной теории. Заметим, что для ***финитистских*** доказательств непротиворечивости и независимости необходимо делать перевод на синтаксический язык, в то время как с интуиционистской точки зрения более естественно рассуждать в терминах неформальных доказательств, представимых формальными выводами в F.

8. Расширения

Без сомнения, важнейшая из открытых проблем состоит в том, чтобы дать ***обоснование введения видов с помощью*** (обобщенных) ***индуктивных определений, для которых могут быть выведены соответствующие принципы доказательства по индукции.***

Можно заметить, что анализ, сделанный Брауэром [1], позволяет свести введение лингвистических выражений, содержащих переменные, пробегающие ips, к использованию обобщенных индуктивных определений[1]).

В самом деле, согласно Брауэру [1], выражение $A(\alpha)$ вполне определено для $A(\alpha)$ тогда и только тогда, когда соответствующая разрешающая функция r_n принадлежит к виду C конструкций, вводимых следующим индуктивным определением:

Каковы бы ни были числовая константа c и переменная f, пробегающая конструкции из N^N и такая, что $\lambda_f c \in C$, если $r_n \in C$ для каждого n, то $\lambda_f r_{f(0)}\, [\lambda_{nf}(n+1)]$ также принадлежит C[2]).

Допустив это, легко видеть, что комбинации таких $A(\alpha)$, полученных средствами логики предикатов первого порядка, являются разрешающими функциями, которые определимы индуктивно таким же образом, как в C (конечно, с существенным использованием π-функции). Но вопрос об общей квантификации по ips еще не ясен.

---

[1]) Отказ от допущения ips ввиду их „неполноты" при нашем подходе не оправдан, поскольку смысл утверждения, содержащего любые переменные — все равно, являются они ips или нет, — определяется условиями доказательства, а не ссылкой на „полный объем". Заметим, между прочим, что для так называемых абсолютно свободных последовательностей выбора теорема 4 из [14, стр. 377] дает в явном виде такие условия для (α) $A(\alpha)$, если $A(\alpha)$ первой ступени.

[2]) Гёдель заметил, что при *классической* интерпретации этих двух условий C состоит из *всех* таких отображений N^N в N, которые непрерывны, если N^N имеет топологию произведения. Именно этим фактом подсказана интерпретация из работы [1], принятая в тексте.

Замечание. Даже случай полной индукции по натуральным числам требует дальнейшего исследования по меньшей мере в двух направлениях.

Во-первых, по аналогии с методами Фреге — Дедекинда можно определить *вид* натуральных чисел [$Z(c, n)$: c есть доказательство того, что n — натуральное число]. Это можно сделать одним из следующих способов: (I) c_1 доказывает, что если a_1 доказывает $b(0)=0$ и a_2 доказывает $\lambda_f i\,[b(d),\ b(f*1)] \equiv \lambda_f 0$ (где $\equiv$ означает экстенсиональное равенство), то $c_2(a, b)$ доказывает $b(n)=0$; (II) c_1 доказывает (для любых конструкций a, b, a', b'), что если a_1' доказывает, что b есть вид, a_1 доказывает $b\left(a_2', 0\right)=0$, a_2 доказывает $\lambda_{f,g} i\,[b(g, f),\ b\{b'(g, f),\ f*1\}] \equiv \lambda_{f,g} 0$, то $c_{21}(a, b, a', b')$ доказывает $b[c_{22}(a, b, a', b'), n]=0$. Здесь (I) соответствует трактовке натуральных чисел как пересечения всех разрешимых индуктивных множеств, (II) — *всех* индуктивных множеств. Эти определения могут быть непосредственно включены в настоящую теорию. Проверка *правила* индукции зависит тогда от *определения по индукции*

$$\rho(0)=a, \quad \rho(n*1)=b[n,\ \rho(n)]$$

для натуральных чисел n; но существование такой конструкции ρ правдоподобно только в случае, если вид натуральных чисел разрешим (или является множеством, по терминологии Брауэра).

Второй подход требовал бы изменения обозначений в разд. 5; нужно было бы выразить ту идею, что натуральное число получается повторным применением (итерацией) операции $*1$, начиная с 0, и что эта последовательность операций может быть осуществлена шаг за шагом так, что получается доказательство для $A(n)$, т. е. такое p_n, что $\Pi(p_n, n; \ulcorner A(x) \urcorner)=0$, если $\Pi(p, 0; \ulcorner A(x) \urcorner)=0$ и

$$\pi\left\{p_1',\ \lambda_{gf}\, \Pi(g, f; \ulcorner A(x) \urcorner) \supset \Pi\left[p_2'(g, f), f*1; \ulcorner A(x) \urcorner\right],\ \lambda_{gf} 0\right\}=0.$$

Более изолированная, но интересная открытая проблема — поставить на основе настоящей работы вопрос: являются ли $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ единственными интуиционистскими пропозициональными связками? Более общо, ***что такое интуиционистская пропозициональная связка?*** Как хорошо известно, в классическом случае соответствующий вопрос удовлетворительно решается отождествлением пропозициональных связок с функциями истинности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brouwer L. E. J., Über Definitionsbereiche der Funktionen, *Mathematische Annalen*, **97** (1927), 60—75.
2. Gentzen G., Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, *Mathematische Annalen*, **112** (1936), 493—565.

3. Gödel K., Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, **4** (1932), 39—40.
4. Gödel K., Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, **4** (1932), 34—38.
5. Gödel K., Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes, *Dialectica*, **12** (1958), 280—287.
6. Heyting A., Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-Mathematische Klasse* (1930), 158—169.
7. Гейтинг А., Интуиционизм, изд-во «Мир», М., 1965.
8. Heyting A., Blick von der intuitionistischen Warte, *Dialectica*, **12** (1958), 332—345.
9. Hilbert D., Bernays P., Grundlagen der Mathematik, vol. 2, Berlin, Springer, 1939.
10. Клини С. К., Введение в метаматематику, ИЛ, М., 1957.
11. Kleene S. C., Realizability, в сборнике *Constructivity in mathematics*, A. Heyting, ed., Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 1959.
12. Kreisel G., Mathematical significance of consistency proofs, *J. Symb. Logic*, **23** (1958), 26—50.
13. Kreisel G., Elementary completeness properties of intuitionistic logic with a note on negations of prenax formulae, *J. Symb. Logic*, **23** (1958), 317—330.
14. Kreisel G., A remark on free choice sequences and the topological completeness proofs, *J. Symb. Logic*, **23** (1958), 369—388.
15. Kreisel G., Hilbert's programme, *Dialectica*, **12** (1958), 346—372.
16. Kreisel G., Ordinal logics and the characterization of informal concepts of proofs, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, August 14—21, 1958, J. A. Todd, ed., Cambridge, University Press, 1960, pp. 289—299.
17. Lorenzen P., Logical reflection and formalism, *J. Symb. Logic*, **23** (1958), 241—249.
18. Tarski A., Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, *Studia philosophica*, **1** (1936), 261—405.

Объяснительные модели в лингвистике[1])

Н. ХОМСКИЙ

Массачусетский технологический институт, Кэмбридж, Массачусетс, США

Задача традиционной описательной грамматики состоит в том, чтобы дать читателю возможность понимать и свободно строить произвольные предложения рассматриваемого языка, другими словами, дать ему возможность устанавливать соответствие между мышлением носителя языка и его речью. Хорошая традиционная грамматика, если ею пользуется разумный и сообразительный читатель, часто обеспечивает вполне удовлетворительное решение этой задачи. Но мне думается, что мы имеем очень слабое представление о том, как именно решается эта задача в действительности. По-видимому, если мы хотим проникнуть в сущность данного вопроса, потребуется резко изменить направление лингвистических исследований.

С точки зрения лингвистической теории традиционная грамматика имеет ряд серьезных недостатков. Ее главный просчет состоит в следующем: она существенным образом основывается на том, что мы можем назвать „языковой интуицией" разумного читателя. Необходимо помнить, что основной недостаток таксономической грамматики традиционного типа заключается не просто в ее неполноте, т. е. не в том, что в ней опущены некоторые факты языка. Сообразительный читатель привносит не новые факты, а только метод организации и упорядочения уже имеющихся в грамматике фактов. То, что он делает при этом, вполне может рассматриваться как отнюдь не тривиальное теоретическое построение. Навыки, имеющиеся в его распоряжении, образуют имплицитную теорию языка, которым он владеет; эта теория позволяет поставить в соответствие каждой единице из бесконечного множества потенциальных языковых единиц ее грамматическую структуру и задает условия правильного использования каждой из этих единиц. Разумеется, читатель не сознает, что именно он делает или как именно он это делает. Для тех, кто изучает человеческую психологию, этот факт еще раз свидетельствует о значении и важности процесса овладения языком.

В традиционной грамматике настолько принято неявно апеллировать к интуиции читателя, что на это часто не обращают внимания[2]).

---

[1]) Chomsky N., Explanatory models in linguistics, стр. 528—550.

[2]) Помимо того, существует тенденция считать само собой разумеющимися успехи обучающегося языку и обращать внимание только на его ошибки (которые поэтому гораздо более заметны), так что получается совершенно ложная картина процесса усвоения языка.

Лучшие грамматики содержат полные перечни исключений, но для правильных конструкций приводят только примеры. Это всегда присуще грамматикам, рассчитанным на разумного читателя; ведь предполагается, что такой читатель использует свое интуитивное понимание основных особенностей языка для построения его точной теории на основе предложенных грамматикой фрагментов. Однако так как сама грамматика не выражает в явной форме главных закономерностей языка, она дает не только очень неполную, но и ложную картину рассматриваемого языка, приписывая ему слишком большую нерегулярность и произвол.

Проявив известное усердие, вдумчивый читатель может использовать традиционную, грамматику, чтобы в той или иной степени овладеть новым языком. Ребенок же способен добиться совершенного владения языком гораздо легче, и притом без специального преподавателя. По-видимому, нормальному ребенку достаточно находиться в той или иной языковой среде очень короткое время, чтобы стать полноценным носителем языка. Действительно, точка зрения, что продуманное обучение и руководство или тщательный подбор „подкрепляющих случайностей“ (в любом из разумных значений этого термина) необходимы для развития языковых навыков ребенка, мало обоснована; изучение поведения низших организмов также не дает доводов, которые по аналогии служили бы подкреплением этой точки зрения[1]). Очевидно, что задача объяснить, как ребенок, которого никто не учит, может достичь полного овладения языком, — сложнее и важнее, чем задача объяснить способность нормального взрослого человека выучить второй язык с помощью хорошо построенной грамматики[1]).

[1]) Одна из двух основных современных психологических школ, изучающих поведение, занимается таким поведением (прохождение лабиринта, способы склевывания пищи, преодоление преград), которое может быть приобретено и сохранено только при наличии тщательно спланированных и непрерывных подкреплений. Вторая (сравнительная этология) обращает основное внимание на приобретение и функционирование сложных моделей поведения (таких, как забота о детенышах, ориентация на местности, спаривание и т. д.), которые формируются сами под воздействием соответствующих стимулов. (Мы можем, конечно, назвать их „подкреплениями“, однако это сделает теорию подкреплений тривиальной, поскольку ее основные понятия станут слишком широкими.) Вероятно, можно утверждать, что овладение языком так же естественно для человека, как естественно для птиц овладение определенными типами поведения в брачный период (и для того и для другого явно необходимо, чтобы в достаточно раннем возрасте особь подвергалась воздействию соответствующих стимулов, которые частично определяют характер поведения в зрелом возрасте); следовательно, изучение так называемого „инстинктивного поведения“, по-видимому, даст более полезную информацию для исследования процесса овладения языком, чем открытия сторонников теории подкреплений. Эти открытия часто „экстраполируются“ на сложное поведение, причем крайне неудачное употребление термина „экстраполировать“ подкрепляется смутными и ошибочными аналогиями с физикой.

Об умозрительных попытках применить теорию подкреплений к изучению процесса овладения языком см. Chomsky, „Review of Skinner, Verbal behavior“, *Language*, 35 (1959). В этой связи см. также Lenneberg, „Language, evolution and purposive behavior“ (в печати); „Review of Penfield and Robert, Speech and brain mechanisms“, *Language*, 36 (1960), где высказаны весьма интересные соображения.

Ребенок, еще не научившийся языку, — это физическая система с пока не известными характеристиками. Ясно, что он не приспособлен для изучения какого-то одного конкретного языка. Помещенный в английскую языковую среду он научится английскому языку; в китайской языковой среде он с такой же легкостью научится говорить и понимать по-китайски. Разумная, хотя до сих пор далекая цель для лингвистов и психологов — создать устройство, способное моделировать эту деятельность или хотя бы ее некоторые аспекты. Языковые способности взрослого человека могут быть частью охарактеризованы тем, что мы можем назвать „формализованной грамматикой“ его языка[2]). В дальнейшем я буду рассматривать только эти аспекты изучения языка. Принимая данное ограничение, мы можем попытаться сконструировать устройство вида:

$$\text{(высказывания на языке L)} \rightarrow \square \rightarrow \rightarrow \text{(формализованная грамматика языка L).} \qquad (1)$$

Оно представляет собой функцию, которая отображает множество наблюдаемых высказываний в формализованную грамматику языка, выборкой из которого они являются. Имея на входе достаточно большое и представительное множество высказываний какого-либо языка (английского, китайского или любого другого), устройство (1) дает на выходе формализованную грамматику этого языка. Описание этого устройства представляет собой гипотезу относительно врожденных мыслительных способностей, которыми пользуется ребенок в процессе овладения языком.

Можно, впрочем, усомниться в возможности создать устройство с такими характеристиками. Ведь существенную роль для ребенка в процессе овладения языком могут играть и другие факторы. Так, в распоряжении ребенка может быть множество непредложений (мы имеем в виду его ошибки, которые исправляются взрослыми). Ему может понадобиться информация относительно повторяемости конкретных высказываний. Вероятно, не лишен некоторого значения

[1]) Здесь также случайные ошибки ребенка так заметны, а его правильные обобщения так „естественны“ (с точки зрения того, кто знает язык), что легко недооценить всю важность осуществляемого ребенком процесса.

[2]) Я не знаю, каковы границы изучения грамматики, но попытаюсь ниже указать кое-что принадлежащее, по моему мнению, к ее сфере. Я отнюдь не утверждаю, будто серьезный лингвист должен заниматься только этим, хотя мне и кажется, что в этой области систематическое исследование будет богато вознаграждено.

и порядок, в котором ему преподносятся различные элементы языка. Принимая во внимание все это, мы можем попытаться сконструировать такое устройство, как

$$\left.\begin{array}{l} A \rightarrow \\ B \rightarrow \\ C \rightarrow \end{array}\right. \boxed{} \rightarrow \text{(формализованная грамматика языка L)}, \qquad (2)$$

где A — последовательность конкретных высказываний языка L, B — последовательность (возможно, пересекающаяся с A) непредложений, а C — множество подобных пар единиц из A и B, т. е. конкретных единиц, которые в известном смысле являются повторениями друг друга. Имеются и другие заслуживающие рассмотрения возможности задания входов этого гипотетического устройства, моделирующего процесс овладения языком (МОЯ — модель овладения языком)[1]. Это очень важный вопрос, который необходимо подвергнуть экспериментальному исследованию.

Каковы бы ни были результаты такого исследования, проблема построения универсального устройства, моделирующего процесс овладения языком, не может быть ясно сформулирована, пока мы не определим свойств формализованной грамматики, которую оно должно выдавать на выходе. Прежде всего ясно, что формализованная грамматика, рассматриваемая как предсказывающая теория, есть идеализация по меньшей мере в двух отношениях; во-первых, в том, что она рассматривает формальные структуры независимо от их использования, и, во-вторых, в том, что единицы, порождаемые ею, являются не высказываниями, из которых строится реальная речь, а скорее тем, что не имеющий специальной подготовки носитель языка признает правильно построенными предложениями. В реальной речи на каждом шагу встречаются обрывки фраз, обмолвки и недомолвки; человек начинает говорить не то, что он хотел сказать, „проглатывает“ слова или звуки и т. д. Однако все эти явления можно понять лишь как искажения лежащих в их основе идеальных моделей. Было бы абсурдом пытаться ввести эти явления прямо в формализованную грамматику. Ясно, что реальная речь есть сложный процесс; в нем

[1]) Например, можно с известным основанием утверждать, что существенна семантическая информация некоторого рода, даже если формализованная грамматика, которая получается в результате работы устройства, не содержит утверждений чисто семантической природы. Здесь необходима осторожность. Возможно, что если ребенку сообщать только бессмысленные последовательности единиц, он не усвоил бы принципов образования предложений. Это замечание, однако, даже если оно верно, не относится прямо к делу. Оно лишь означает, что осмысленность и семантическая функция могут оказывать стимулирующее воздействие на процесс овладения языком, не играя необходимой роли в устройстве, которое как раз интересует нас здесь.

играют роль многие взаимодействующие факторы, не все из которых попадают в сферу грамматического исследования.

Формализованная грамматика должна отражать некоторые способности взрослого носителя языка. Прежде всего она будет иметь дело с его способностью определить, что такое правильно построенное предложение[1]). Пусть, например, даны предложения

(a) the dog looks terrifying	„собака выглядит устрашающе“,	(3)
(b) the dog looks barking	„собака выглядит лающей“,	
(c) the dog looks lamb	„собака выглядит овцой“.	

Каждый говорящий на английском языке знает, что (a) — правильно построенное предложение и что (b) и (c) формально неправильны (хотя, если бы они были предложениями, их значение было бы ясно и совершенно недвусмысленно). Он знает также, что (b) каким-то образом ближе к правильно построенному предложению, чем (c). В этом и многочисленных других совершенно ясных случаях мы будем требовать, чтобы формализованная грамматика делала то же самое различение, сопоставляя каждой последовательности слов или морфем некую характеристику, которую мы будем называть „степенью грамматической правильности“. Для удобства изложения я упрощу здесь это требование, настаивая только на том, чтобы грамматика давала множество грамматически совершенно правильных предложений, т. е. содержала рекурсивное определение „грамматически правильного предложения“ [2]).

Имеется и другая информация о предложениях, которая, очевидно, относится к области грамматики, в частности информация относительно единиц, из которых строятся предложения, относительно группировки и упорядочения этих единиц, относительно формальных отношений между предложениями и их элементами и т. д. Некоторую совокупность сведений такого рода я буду называть *структурной характеристикой* предложения. Формализованная грамматика должна обеспечивать точное перечисление грамматически правильных предло-

[1]) Я не утверждаю, будто говорящие всегда могут принять верное и однозначное решение относительно правильности построения последовательности слов или морфем. Мы хотим, чтобы формализованная грамматика соответствовала суждениям говорящих приближенно, хотя бы в самых ясных случаях, как, например, в (3).

[2]) О том, как грамматика, порождающая правильно построенные предложения, может автоматически приписывать каждой последовательности степень грамматической правильности, см. главу „Грамматическая правильность“ (в некоторых вариантах — гл. 4, в других — гл. 5) моей работы „Logical structure of linguistic theory“, 1955 (отпечатано на машинке; микрофильм высылается справочным отделом библиотеки MIT). См. также по этому вопросу P. Ziff, „On understanding „understanding““ (1959 г., неопубликовано), где содержится ряд интересных замечаний.

жений, каждого с его структурной характеристикой. Мы хотели бы, чтобы структурная характеристика давала базу для объяснения большей части того, что говорящий знает о речевых событиях, помимо степени их правильности. Так, каждый говорящий по-английски знает, что предложения

(a) I dislike visiting relatives	„я не люблю посещать родственников“ или „я не люблю посещающих меня родственников“,	(4)
(b) I do not approve of John's driving	„я не одобряю того, что Джон водит автомобиль“ или „я не одобряю того, как Джон водит автомобиль“,	

структурно неоднозначны, а (3 a) или

The dog is barking	„собака лает“	(5)

однозначны. Он знает, что

(a) John is easy to please	„Джону легко доставить удовольствие“,	(6)
(b) John is eager to please	„Джон жаждет доставить удовольствие“	

есть предложения различных типов, в то время как

(a) who(m) did you see?	„кого мы видели?“	(7)
(b) who saw John?	„кто видел Джона?“	

несмотря на разницу в порядке слов, — предложения одного и того же типа. Структурная характеристика должна быть достаточно богатой, чтобы дать базу для объяснения таких фактов (а их можно собрать в неограниченном числе).

Хорошая формализованная грамматика — это грамматика, которая сопоставляет соответствующую структурную характеристику каждому элементу бесконечного класса предложений и которая делает это совершенно формально. Последнее требование, конечно, существенно. Набор правил ad hoc может обеспечить перечисление большой массы фактов, не позволяя понять формальные свойства, которые отличают правильное множество структурных характеристик от других множеств, которые могли бы быть заданы совершенно иными грамматиками; одним словом, такой набор правил не содействует серьезному изучению общих особенностей языка или изучению природы универсального устройства, которое моделирует умственные способности ребенка в процессе овладения языком. Так, например, на основе категориальных теорий, таких, как теория непосредственных составляющих,

можно было бы предсказать тройную неоднозначность в (5), так как barking выступает и в качестве прилагательного (barking dogs never bite — „лающие собаки никогда не кусают“), и в качестве именной группы (barking is annoying — „лай раздражает“), и в качестве компоненты сложной глагольной формы, причем все три эти конструкции встречаются в контексте the dog is (*dangerous* — „опасный“, *a danger* — „опасность“).

В этом случае правильная структурная характеристика может быть обеспечена в рамках теории непосредственных составляющих, но только исключительно правилами, вводимыми ad hoc и не основанными на общем принципе. Здесь в этой теории нет основания для выбора грамматики, которая обеспечивает правильную структурную характеристику, вместо грамматики, которая ложно предсказывает тройную неоднозначность. Ведь эта последняя фактически была бы проще.

Итак, мы стремимся построить формализованную грамматику, которая задает правильные структурные характеристики, основываясь на немногочисленных общих принципах построения предложений, и которая согласуется с общей теорией языка, позволяющей предпочесть эту грамматику всем другим. Такую грамматику можно назвать объяснительной моделью, или теорией языковой интуиции говорящих.

Когда мы рассматриваем формализованную грамматику как теорию языковой интуиции говорящих, остается одна неясность, которую не удается устранить полностью. Иногда утверждают, что операционные определения степени грамматической правильности и т. п. могут гарантировать и объективность и точность теории грамматик, но это недоразумение. Если бы была придумана операционная мера для грамматической правильности, то мы должны были бы проверять ее, устанавливая, насколько хорошо она согласуется с языковой интуицией говорящих.

Точно таким же путем мы решаем вопрос об адекватности предложенной теории структуры английского языка (грамматики английского языка). И там и здесь одно и то же. Операционный критерий ни в каком смысле не является первичным по отношению к теории; обратное также не верно. Лучше всего иметь и то и другое, и желательно, чтобы то и другое совпадали; однако чтобы теория и операционные критерии удовлетворяли нас полностью, они должны совпадать с языковой интуицией говорящих. Нет ничего проще, чем построить определение „грамматической правильности“ и операционный критерий, который будет задавать то же самое множество явлений, что и это определение [1]).

---

[1]) Вот, например, одно из бесчисленных, одинаково абсурдных предложений: можно обучить испытуемых распознавать некую произвольно выбранную модель изменения интонации и определить „предложение“ как любую последовательность морфем, имеющую именно такую интонационную модель.

Ясно, однако, что такой критерий лишен какого бы то ни было интереса, если выделяемые им явления не будут в достаточной степени близки к тому, что говорящие признают правильно построенными предложениями. Что касается параллельной разработки грамматических теорий и операционных критериев, то ясно, что первое гораздо важнее, так как теория позволяет нам глубже проникнуть в суть явлений и строить гипотезы относительно способа организации и структуры, лежащей в основе множества предложений, которое она определяет, в то время как операционный критерий только задает это множество.

Фактически у нас нет удовлетворительной формализованной грамматики ни для одного языка. Как упоминалось выше, традиционная грамматика ближе к тому, что подается на вход устройства МОЯ, такого, как (2), чем к формализованной грамматике, которую должно выдавать это устройство. Современная структурная лингвистика имеет дело почти исключительно с перечнем элементов, из которых строятся высказывания, и реже с методами классификации таких элементов. Она не привела к созданию грамматик, которые превзошли бы традиционные или хотя бы приблизились к ним в отношении явного описания множества грамматически правильных предложений. Недавнее оживление интереса к дескриптивному синтаксису позволило впервые создать грамматические описания, рекурсивные и четко сформулированные, но не было создано ни одного, которое было бы способно точно задать множество грамматически правильных предложений с соответствующими им структурными характеристиками. Кроме того, многие из этих работ лежат вне темы данного изложения (хотя в других отношениях они, может быть, достаточно интересны), потому что они не содержат и не предлагают никакой основы для выбора правил, с помощью которых определяются структурные характеристики. Как упоминалось выше, в рамках настоящей работы простой охват массы фактов сам по себе не представляет особого интереса.

Короче, я полагаю, что развитие теории грамматик и интенсивное приложение этой теории обязательно должны предшествовать любому серьезному изучению проблемы овладения языком и многих других проблем, непосредственно связанных с психологией. Во-первых, эта теория должна содержать точное определение класса формализованных грамматик[1]), т. е. схему и систему обозначений для грамматик, и давать условия, которым определенное в этих терминах множество правил должно удовлетворять, чтобы иметь право считаться грамматикой некоторого естественного языка. Во-вторых, она должна показывать, как удовлетворяющая этим условиям грамматика обеспечивает явное перечисление предложений с их структурными характеристиками, где каждое предложение дается в фиксированной универсальной системе фонетической транскрипции. При этом не допускается апелляция к сообразительности или языковой интуиции читателя, так как именно это мы и стремимся охарактеризовать. Поэтому теория грамматик должна точно задавать следующее:

[1]) Я буду впредь опускать слово „формализованная".

$$\left.\begin{array}{l}\text{(a) класс } G_1, G_2, \ldots \text{ возможных грамматик,}\\ \text{(b) класс } s_1, s_2, \ldots \text{ возможных предложений (в фонетической транскрипции),}\\ \text{(c) понятие „структурная характеристика" и функцию } f, \text{ которая сопоставляет единице } s_i \text{ из (b) структурную}\\ \text{характеристику } f(i, j) \text{ в соответствии с грамматикой } G_j \text{ из (a).}\end{array}\right\} \quad (8)$$

Кроме того, предположим, что упорядочение грамматик в (8a) существенно и указывает на их возрастающую сложность. Иначе мы принимаем, что общая теория языковой структуры дает нам метод оценки, который позволяет выбрать одну грамматику из нескольких имеющихся[1]).

Теперь мы можем рассматривать конкретную грамматику G_i из (8a) как теорию языка, который она задает посредством функции f из (8c), т. е. как теорию, которая объясняет некоторые аспекты языковой интуиции говорящих.

Имея общую теорию типа (8), мы можем возвратиться к задаче создания устройства МОЯ в предположении, что это устройство существенным образом включает в себя теорию языковой структуры. Иначе, в соответствии с (8) для устройства (2) считаются заданными:

a) форма грамматик и метод их оценки,

b) фонетический алфавит,

c) метод для определения структурной характеристики произвольного предложения, если задана одна из допустимых грамматик.

Эта информация является частью внутренней структуры устройства (2). Предположим, что этому устройству даются примеры предложений и непредложений, распределенных по классам подобия (классам повторений[2])).

[1]) Заметим, что многие из грамматик в (8a) могут задавать один и тот же язык [т. е. одно и то же бесконечное подмножество из (8b)] и даже одно и то же множество структуральных характеристик.

[2]) Иначе говоря, мы предполагаем, что конкретные высказывания [единицы из (8b)] разбиты на классы эквивалентности по отношению „подобия", которое (в узких пределах) специфично для каждого языка. Можно утверждать, что „подобие" в желаемом смысле может быть определено как простое нетранзитивное отношение соответствия. Некоторые соображения по этому поводу см. в моей рецензии на работу Хоккетта «Manual of Phonology», *International Journal of American Linguistics*, 23 (1957).

Задача рассматриваемого устройства — выбрать наиболее высоко оцененную грамматику, которая согласуется с этими данными в том смысле, что перечисляются все предложения и непредложения и всем разным единицам приписываются структурные характеристики, различающиеся в соответствующем месте. Выбрав эту грамматику, устройство МОЯ способно в принципе приписать структурную характеристику каждому предложению благодаря наличию в нем функции f из (8c). Общелингвистическая теория изложенного выше типа объясняла бы, таким образом, структуру этого гипотетического устройства и могла бы рассматриваться как теоретическая модель умственных способностей, которые позволяют ребенку овладеть языком.

Мы можем оценить эту общую теорию, определяя, насколько хорошо структурные характеристики, приписываемые предложениям грамматикой наиболее высокого типа, действительно соответствуют языковой интуиции носителей языка и обеспечивают базу для объяснения этой теории. Как было указано выше, имеется множество совершенно ясных случаев, которые дают полную возможность чисто эмпирически, хотя и косвенным путем, проверять адекватность этой общей теории. Если теория не выдерживает эмпирической проверки, то это означает, что она нуждается в пересмотре или что нам не удалось найти грамматику наиболее высокого типа.

Чтобы наша модель была реально осуществимой (т. е. для практической реализации устройства МОЯ), мы должны снабдить ее некоторыми эвристическими или индуктивными элементами, которые дают возможность при наличии входных данных произвести быстрый отбор нескольких возможных грамматик, чтобы затем оценить их с точки зрения определенных критериев [1]). Описание таких эвристических элементов можно либо включить в (8), либо же утверждать, что они не имеют прямого отношения к лингвистической теории. В любом случае мне кажется, что значение и эффективность эвристических и индуктивных приемов сильно преувеличены. Чтобы выбрать рекурсивную формализованную грамматику при наличии фрагментарных данных, обучающееся устройство должно, очевидно, содержать в себе как часть своей внутренней структуры эвристический элемент и описание формы грамматик. Но задача, остающаяся на долю эвристического элемента, явно облегчается по мере того, как форма грамматик определяется все более полно и точно. Относительная спонтанность, единообразие и универсальность овладения языком, крайняя сложность формирующихся при этом навыков и исключительная точность, достигаемая при их использовании, — все это наводит на мысль, что овладение языком возможно лишь благодаря исключительно тонкой и сложной внутренней организации человеческого организма.

[1]) Аналогично, хотя заданная в явном виде функция f из (8c) и позволяла бы увидеть, как в принципе человек, овладевший грамматикой G_i, понимает предложение s_j (т. е. находит его структурную характеристику), осуществимая познающая модель должна включать определенные эвристические элементы, чтобы обеспечивать быстрый выбор структурных характеристик. Ниже мы вернемся к этому вопросу.

Мы рассмотрели некоторые аспекты общей лингвистической теории с точки зрения того, что она может дать для понимания умственных способностей человека. Когда мы переходим к конкретным задачам, стоящим перед дескриптивной лингвистикой, мы приходим в точности к тем же самым выводам. Лингвист пытается найти грамматическую структуру некоторого языка, для чего он вводит систему понятий, которые дают (хотя и в неявной форме) картину естественного языка, каким его представляет себе данный исследователь. Он создает, другими словами, более или менее разработанную общую теорию языка, которая должна иметь характерные черты устройства, описанного выше. Лингвист накапливает сведения о том, какие единицы являются правильно построенными (в фонетической транскрипции) и какие пары — подобными (повторениями); он пытается найти оптимальную грамматику, соответствующую этим данным. Таким образом, он совершает открытие. Несомненно, что эвристический (индуктивный) элемент может помочь в процессе открытия. Однако он имеет лишь весьма косвенное отношение к лингвистической теории. Основное для лингвиста — это точно задать а) форму грамматик (с мерой их оценки и системой фонетической транскрипции), б) понятие „структурная характеристика“ и в) способ определения структурной характеристики для произвольного предложения, если дана конкретная грамматика. Другими словами, его целью должно быть построение теории языка, имеющей основные черты, обрисованные в (8).

Таким образом, строящаяся теория есть теория языковых универсалий. Определив форму грамматики, мы исключаем из рассмотрения в качестве возможных естественных языков некоторые бесконечные множества предложений. Система фонетической транскрипции ограничивает возможные физические реализации предложений языка. Методы оценки грамматик и определения структурных характеристик налагают строгие ограничения на типы единиц, которые могут считаться относящимися к естественному языку, и на способы их упорядочения и связывания. Эта общая теория может поэтому рассматриваться как определение понятия „естественный язык“ (в той степени, в которой мы интересуемся его формальными свойствами). Ее целью является описание в явном виде врожденных способностей ребенка определенным образом обрабатывать и упорядочивать доступные ему сведения — способностей, которые позволяют ему полностью овладеть языком. В этом смысле она должна формулировать как раз то, что „существенно“ для естественного языка.

Общая теория языка в идеальном случае[1]) имеет форму системы определений, в которой такие понятия, как „грамматика“, „фонема“ и т. д., определяются в терминах некоторых первичных понятий. Продолжая рассматривать отношение между лингвистической теорией и универсальным устройством МОЯ, мы можем принять в качестве первичных предикаты „наблюдаемое предложение“, „наблюдаемое непредложение“ и „являться подобным“, т. е. то, что подается на вход устройства (2). Кроме того, первичная база может включать некоторые физические признаки, которые образуют систему фонетической транскрипции, а также понятия, которые мы можем рассматривать как чисто математические, относящиеся к абстрактной теории представления и порождения бесконечных множеств цепочек[2]). Основные понятия, подлежащие определению, — это „грамматика“ и „структурная характеристика“ и отношение между ними (т. е. функция f из (8c)). Мы можем затем определить „фонему языка L“, „морфему языка L“ и т. д. как элементы, которые появляются в определенных местах структурных характеристик, порождаемых грамматикой наиболее высокого типа L.

Таким образом, общесистемные соображения сложности системы играют важную роль при выборе элементов на каждом уровне.

---

[1]) Разумеется, в настоящее время лингвистика далека от осуществления такой заманчивой цели, как вышеуказанная, и может только приближаться к ней в различных аспектах общей теории.

[2]) Возможно, что в качестве первичных следует взять другие понятия. Так, убеждение, что лингвистический анализ должен „основываться на смысле“, можно интерпретировать следующим образом: такие понятия, как „синонимия“ и „значение“, можно (или даже нужно) добавить к исходному логическому базису грамматической теории. К сожалению, несмотря на почти всеобщее признание этого взгляда, его никто не пытался сформулировать так, чтобы преодолеть наиболее очевидные трудности. Поэтому вряд ли целесообразно рассматривать его здесь. В этой связи см. мои работы „Semantic considerations in grammar“, Monograph № 8 of the Institute of Languages and Linguistics, Georgetown University, 1955; „Syntactic Structures“. The Hague, 1957, стр. 95—105; рецензию на работу Гринберга, „Essays in linguistics“, *Word*, **15** (1959); см. также L e e s, „Review of Syntactic Structures“, *Language*, **33** (1957).

Данный вопрос был во многом запутан непониманием того, что утверждение, будто лингвистический анализ может (или должен) основываться на значении, требует доказательств того же рода (именно тщательного определения основных понятий в этих терминах), что и утверждение, будто он может основываться на каких-либо других частных понятиях. Фактически данный вопрос предрешается уже тем, что лингвисты положительно оценивают свою деятельность или критикуют деятельность других за попытку „обойтись без значения“, хотя в действительности еще не доказано, что имеется какое-либо основание обходиться без него. Аналогично имеются многочисленные статьи и заметки, претендующие на то, будто в них доказано, что использование значения все-таки существенно, так как тот или иной явно сформулированный подход оказывается неудачным; однако ясно, что отсюда отнюдь не следует будто в данном случае имеются основанные на значении удачные подходы.

Однако в последние годы господствовал взгляд, что лингвистическая теория должна представлять собой множество аналитических методов обнаружения таких языковых элементов, как фонемы и морфемы; эти методы (приемы) следует применять в определенном порядке (или от звука к предложению, как это делает большинство американских лингвистов, или от предложения к звуку, как предлагают представители глоссематики[1]), или же циклично, как это предусматривают теории Хэрриса и Пайка). Тогда грамматика — это перечень указанных элементов. Упомянутые приемы включают последовательную сегментацию и классификацию; вопрос о выборе элементов на высших уровнях анализа или сознательно исключается из рассмотрения на низших уровнях, или же — при циклическом подходе — играет второстепенную роль. Хотя почти все лингвисты признают фундаментальную роль аналитических приемов в лингвистической теории, единодушие является мнимым: слово „прием“ понимается во многих различных смыслах. Так, для Хэрриса приемы — это точно определенные методы обработки и упорядочения данных, имеющие целью дать „компактное взаимно однозначное представление набора высказываний в целом“[2]) и в явном виде описать, как лингвист упорядочивает эти данные. В такой интерпретации приемы не приводят к порождающим грамматикам описанного выше типа[3]), и пока лингвист явно формулирует свой выбор, не так уж важно, какими приемами он пользуется. С другой стороны, у Фриза и Пайка термин

---

[1]) Именно „нашей единственно возможной методикой, если мы хотим построить систему для процесса, представленного этим текстом [т. е. для того чтобы построить грамматику для данного корпуса“(Н. Х.)], будет анализ, при котором текст рассматривается как класс, разделенный на сегменты. Затем эти сегменты в качестве классов в свою очередь делятся на сегменты и т. д. до тех пор, пока анализ не будет закончен“(H j e l m s l e v, Prolegomena to a theory of language, Baltimore, 1953, p. 7. (Русский перевод в сб. „Новое в лингвистике“, вып. 1, М., 1960, стр. 273.)

[2]) H a r r i s, Methods in structural linguistics, Chicago, 1951, p. 366.

[3]) Однако некоторые из приемов Хэрриса, например из гл. 16 цит. раб., приводят к утверждениям рекурсивного характера и, таким образом, не дают взаимно однозначного представления в целом. Здесь встает очень серьезный вопрос. Приемы, которые ведут просто к взаимно однозначному представлению в целом, не опираются на эмпирические данные, их экспериментально нельзя ни опровергнуть, ни подтвердить. Они представляют собой просто условность, принятую ради удобства исследователя, и он свободно может выбирать любые из них. Однако приемы, содержащие „индукционный шаг“, как приемы перехода от морфемы к высказыванию в гл. 16 „Методов“, заключают в себе важное эмпирическое утверждение (а именно будто такие-то единицы, отсутствующие в данном множестве, являются грамматически правильными предложениями и, более того, предложениями определенного структурного типа); поэтому их можно оценивать с точки зрения их истинности. Это различие отчетливо не проводится в процедурной лингвистике, и поэтому почти невозможно определить, что действительно является ее целью, а что — подтверждением целесообразности методов.

17 Зак. 1047

„прием“ интерпретируется так свободно, что они допускают в качестве возможного приема, вполне объективного, хотя в конечном счете неадекватного, тщательное „изучение данных и построение простейшего описания, включающего все факты“ [1]). Исходя из того что сделано за последнюю четверть века, я не вижу оснований полагать, будто мы вообще близки к отысканию строгих приемов, приводящих механически к созданию таких грамматических описаний, которые подготовленный лингвист (не склонный к чисто методологическому образу мыслей) сочтет важными и нужными, хотя было сделано много такого, что лингвисты находят полезным в своей исследовательской работе. Как упоминалось выше, я не вижу способа усовершенствовать приемы анализа, прежде чем нам удастся точно определить цель, к которой они должны привести, т. е. прежде чем мы будем иметь ясную концепцию формы грамматик и природы структурных характеристик. Эта проблема — центральная проблема лингвистической теории, однако в процедурной лингвистике она фактически и не была поставлена.

Перейдем к этому центральному вопросу.

Что можно в настоящее время сказать о форме грамматик, природе структурных характеристик и об отношении между ними? Ясно, что грамматика должна включать две основные части: „синтаксическую часть“, которая порождает бесконечное множество цепочек, представляющих грамматически правильные предложения, и „морфонологическую часть“, которая придает физическую форму каждому из этих предложений. Это классическая модель грамматики. Цепочку символов, порождаемых синтаксической частью, я буду называть *терминальной цепочкой*, а символы, встречающиеся в терминальных цепочках, — *терминальными символами*.

Мне кажется, что к настоящему моменту имеется весьма большое количество эмпирических фактов, подкрепляющих тот взгляд, что каждая из этих частей состоит из двух принципиально различных разделов — из множества так называемых „правил подстановки“ и множества „трансформационных правил“.

Правило подстановки есть частный случай продукции Поста; это правило вида $ZXW \to ZYW$, где Z или W (или оба) могут быть пусты. На синтаксическую часть мы должны наложить некоторые другие ограничения, в частности потребовать, чтобы в правиле $ZXW \to ZYW$ X было одним-единственным символом. Фактически синтаксическое правило этого рода означает, что словосочетание типа X может быть в контексте Z — W разложено в последовательность словосочетаний, имеющую тип Y. Трактуя морфемы как минимальные словосочетания, мы можем включить в правила подстановки и словарь, вводя лексические морфемы с помощью таких правил,

[1]) Coexistent phonemic systems, *Language*, 25 (1949), p. 32.

как $N \to$ boy и т. д., где каждая лексическая морфема рассматривается как простой терминальный символ.

Мы предполагаем, что среди символов, используемых в синтаксической части, имеется отмеченный нетерминальный символ S (означающий „предложение“, по-английски *sentence*) и граничный символ $\#$. Мы определим *вывод* как последовательность цепочек $X_1, \ldots, X_n$, где X_1 есть $\# S \#$ и каждая цепочка получается из предшествующей применением одного из правил подстановки, т. е. если $ZXW \to ZYW$ есть правило и $X_i = \ldots ZXW \ldots$, то X_{i+1} может быть $\ldots ZYW \ldots$. Вывод *заканчивается*, если его последняя цепочка не содержит вхождений левых членов ни одного из правил подстановки. Последняя строчка законченного вывода есть терминальная цепочка.

В последней строчке каждого вывода должны быть расставлены помеченные скобки. Формальное представление расстановки этих скобок является частью структурной характеристики порождаемого предложения и определяется функцией F из (8 c).

Правила подстановки упорядочены и применяются последовательно для порождения конечного множества терминальных цепочек; в каждой цепочке расставлены скобки в качестве ее структурной характеристики. Что же касается рекурсивности синтаксической части, то она обеспечивается трансформационными правилами. Каждое из них применяется к терминальной цепочке с помеченными скобками, удовлетворяющей некоторому фиксированному условию, и выполняет некую формальную операцию над этими терминальными цепочками, сопоставляя получившейся терминальной цепочке новую расстановку помеченных скобок. Таким образом, каждая грамматическая трансформация есть отображение одних цепочек с помеченными скобками в другие цепочки с помеченными скобками. Далее, трансформационное правило может применяться к двум или более терминальным цепочкам заданной структуры для образования новой, более сложной цепочки с помеченными скобками, причем расстановка скобок определяется расстановкой скобок в исходных цепочках и характером формальной операции. Так, например, терминальная цепочка, представляющая предложение I was annoyed by his refusal to participate — „я был рассержен его отказом принять участие“, может быть образована трансформацией номинализации, применяемой к цепочкам, которые представляют предложения I was annoyed by it — „я был рассержен этим“ и He refuses to participate — „он отказывается принять участие“, каждая из которых в свою очередь есть результат других трансформаций. Действительно, для каждой из четырех основных синтаксических категорий (а именно существительного, глагола, прилагательного и наречия) имеется, по крайней мере в английском языке, множество трансформаций, которые делают объем этой категории бесконечным благодаря тому, что в эту категорию могут включаться трансформации предложений любой сложности. Таким образом, несколько трансформационных правил, каждое из которых само по себе является очень простым, при многократном повторении могут привести к созданию предложения большой сложности.

Правила синтаксической части грамматики действуют следующим образом: построй множество законченных выводов при помощи правил подстановки; примени к ним достаточное число трансформаций, включая, в частности, все обязательные трансформации и соблюдая указанный порядок, так что результатом является одна-единственная терминальная цепочка с помеченными скобками, которые являются частью ее структурной характеристики. Терминальные цепочки, порождаемые таким образом, и выдаются на выходе синтаксической части грамматики. Эти цепочки представляют грамматически правильные предложения.

Если форма синтаксической части грамматики точно установлена, возможно предпринять некоторые интересные исследования совершенно абстрактной природы. В частности, мы можем изучать виды языков и системы структурных характеристик, которые в принципе могут быть порождены; относительное богатство и бедность различных концепций формы грамматик; разного рода проблемы разрешимости; точный смысл, в котором грамматики являются более мощными, чем конечные автоматы в строгом значении этого термина (данное исследование имеет прямые эмпирические следствия, потому что оно ведет к гипотезам относительно понимания и построения предложений говорящими, память которых ограничена), и т. д. В каждой из указанных областей были выполнены работы предварительного характера; этих работ, по-видимому, достаточно, чтобы показать всю важность подобных исследований. Если когда-нибудь разовьется подлинно математическая теория языка, вопросы этого рода будут, конечно, в ней центральными[1]).

Морфонологическая часть грамматики также состоит из трансформационных правил и правил подстановки. Роль их — сопоставлять каждой терминальной цепочке, порождаемой синтаксическими правилами[2]), фонетическое представление. Фонетическое представление высказывания лучше всего рассматривать как матрицу, в которой

---

[1]) Более точная характеристика систем такого рода и библиографические ссылки на описательные и формальные исследования, связанные с такими системами, даны в моей работе „On the notion „rule of grammar", Proceedings of the Symposia in Applied Mathematics, Volume XII, American Mathematical Society (1961). Дополнительные материалы и ссылки содержатся в докладе Бар-Хиллела в настоящем томе; см. стр. 273—280.

[2]) Более точно, каждой цепочке с помеченными скобками, порождаемой синтаксическими правилами. Фонетическое представление однозначно (с точностью до свободного варьирования) определяется структурной характеристикой, но необязательно самой терминальной цепочкой, т. е. НС-структура терминальной цепочки может частично определять фонетическое представление, выдаваемое трансформационными правилами описанного ниже типа.

строки представляют физические свойства, взятые за первичные в рассматриваемой лингвистической теории, а столбцы — последовательные сегменты высказывания. Вхождение (i, j) указывает, обладает ли j-й сегмент i-м свойством (или в какой степени он обладает этим свойством в случае таких свойств, как ударение, придыхательность и т. д.). Символы фонетического алфавита являются просто сокращениями для множеств свойств, т. е. для столбцов таких матриц; никакого самостоятельного значения они не имеют. Матрицы такого рода получаются в результате применения правил морфонологической части грамматики.

Рассмотрим теперь, что именно подается на вход правил морфонологической части грамматики. Каждая лексическая морфема будет представляться цепочкой символов, называемых „морфонемами"[1]). Следовательно, терминальная цепочка состоит из морфонем, специальных символов для некоторых „грамматических морфем" и некоторых символов — „показателей стыка" („junctural" symbols), вводимых синтаксическими правилами[2]) для указания позиций, где морфонологическая и синтаксическая структуры сказываются на фонетическом представлении[3]).

---

[1]) Хотя мне кажется, что термин „фонема" был бы более предпочтительным и исторически более оправданным для этих единиц (если мы рассматриваем современную фонологию от ее истоков до середины тридцатых годов), я пользуюсь термином „морфонема", чтобы избежать смешения терминов и бесплодных терминологических споров.

[2]) Включая, в частности, лексические правила.

[3]) В современной процедурной лингвистике известны попытки определить стыки (junctures) в чисто фонетических терминах, т. е. рассматривая признаки, встречающиеся внутри высказывания, и сравнивая их с признаками, встречающимися на границе высказывания. Однако маловероятно, что эти попытки окажутся удачными. Рассмотрим, например, обычный для американского варианта английского языка контраст adept [ɨdept] — „опытный", attend [ɨtend] — „посещать", at Ed's [ɨDedz] — „у Эда" (причем [D] обозначает одноударный альвеолярный). Контекст, определяющий появление [D] в качестве варианта |t| в таких диалектах, есть |V̆ — BV́| (где B — граница слова). Но вариант фонемы |t|, предшествующий этой границе слова, никогда не встречается в конечном положении. Таким образом, вопрос о позиции стыка нельзя решать, исходя из чисто фонетических соображений (с точки зрения грамматики как целого — грамматики, которая описывает как синтаксическую, так и фонетическую структуру). Фонолог, который по тем или иным причинам отказывается использовать информацию синтаксического характера, формулируя законы распределения аллофон, вынужден помещать стык перед ударным слогом, так что получается |ɨ + dept|, |ɨ + tend|, |ɨtedz| (т. е. стык помещается как раз там, где это не желательно, а не там, где это желательно; подобным образом |pɨ + teytow| potato — „картофель", |fɨ + naen͡sɨl| financial — „финансовый" и т. д., именно так поступает Хилл в своей книге „Introduction to linguistic structures", New York, 1958). В противном случае фонолог вынужден принять фонемный контраст |t| — |d| — |D|. По-моему, возникающая альтернатива ясно пока-

Каждая морфонема принадлежит к нескольким пересекающимся категориям, в терминах которых формулируются морфонологические правила. Таким образом, мы пытаемся найти правила, которые применяются к широким классам элементов, таких, как „согласные“, „взрывные“, „звонкие“ и т. д., а не просто к отдельным элементам. Действительно, мы можем представить каждую морфонему множеством категорий, к которым она принадлежит, или, другими словами, мы можем представить каждую лексическую единицу матрицей[1]), в которой столбцы символизируют морфонемы, а строки — категории, и во вхождении (i, j) указывается, принадлежит ли j-я морфонема к i-й категории. Морфонемы — это сокращения для множества категорий, которые мы можем назвать „различительными признаками“; подобно фонетическим символам, морфонемы не имеют самостоятельного статуса. Чрезвычайно важно и отнюдь не очевидно то, что различительные признаки классификационной (морфонологической) матрицы определяют категории, которые близко соответствуют категориям, определяемым строками фонетических матриц[2]).

зывает, что понятия, на которых она основывается, выбраны неудачно. Другие возражения по поводу несинтаксического подхода к проблеме стыка приведены в работе Chomsky, Halle, Lukoff „On accent and juncture in English“, For Roman Jakobson (The Hague, 1956), особенно стр. 68—69.

При обсуждении этих вопросов, по-видимому, иногда используется неявное допущение, будто любой набор приемов или понятий вполне приемлем и не хуже всякого другого, если только они применяются совершенно последовательно. Ясно, что если достаточно четко сформулировать этот взгляд, то его непригодность становится очевидной.

[1]) Которая с точки зрения синтаксической части грамматики рассматривается как простой символ. Таким образом, классификационные матрицы — это обозначения, выбранные для облегчения формулировки морфонологических правил.

[2]) Эта точка зрения, которая высказывалась еще со времен Панини, разрабатывалась в последние годы Якобсоном и Халле, которые подчеркивали ее особое значение. Якобсон, однако, настаивает на виртуальной тождественности фонетической и классификационной матриц. Другими словами, он требует, чтобы для каждой фонемы существовало множество фонетических свойств, которые однозначно задают все ее варианты. Подобное требование выдвинуто и Блоком. Это требование опирается, возможно, на определенную теорию восприятия, которая утверждает, что объект отождествляется набором различительных физических свойств, которые отличают его от других объектов в любом окружении. Так, распознавание звуков речи может осуществляться следующим образом: сначала высказывание разбивается на последовательные сегменты, каждый из которых обладает множеством свойств; затем каждый сегмент отождествляется с X, если он и только он обладает свойствами, которые однозначно характеризуют X. Я не вижу основания принять этот взгляд; с лингвистической точки зрения требование, чтобы все варианты сегмента X обладали множеством признаков, отличных от тех, которыми обладают все другие сегменты, как мне кажется, приводит к весьма нежелательным последствиям. По этому вопросу см. находящееся в печати Halle, Chomsky, „Sound pattern of English“. В этой книге очень подробно обсуждается вопрос о намеченной здесь форме морфонологической части

Таким образом, на вход морфонологических правил подается цепочка классификационных матриц, а также символов морфем и стыков, снабженная показателем НС-структуры. В качестве выхода они дают фонетическую матрицу. Очевидно, мы хотим, чтобы правил в морфонологической части грамматики было как можно меньше, а сами они были бы как можно более общими. В частности, мы предпочитаем правила, которые применяются к широким классам элементов и для которых условия применимости могут быть заданы с помощью простой и короткой формулировки; мы предпочитаем также набор правил, в которых одни и те же классы элементов фигурируют много раз. Эти и другие условия удовлетворяются, если мы измеряем сложность морфонологической части грамматики числом признаков, упоминаемых в правилах, где форма правил задана таким образом, чтобы обеспечивать разумные, а не фиктивные обобщения. Затем мы выбираем более простые (т. е. более общие) грамматики, а не более сложные с бо́льшим числом используемых признаков (т. е. с бо́льшим числом частных случаев)[1]).

Это достаточно четко изложенное соображение предусматривает один из аспектов общей методики оценки грамматик, которая необходима для общей лингвистической теории [см. выше (8)[2])].

Морфонологическая часть грамматики включает в себя набор правил подстановки, называемых „правилами морфологической структуры“ (МС-правилами), набор трансформационных правил и набор правил подстановки, которые мы можем назвать „фонетическими правилами“ (Ф-правилами); все они применяются к терминальным цепочкам в указанном порядке. МС-правила дают нам возможность упростить матрицы, которые идентифицируют индивидуальные лексические морфемы, используя общие свойства всего множества матриц. Так,

---

грамматики как в общем виде, так и на материале английского языка, а также дается сравнение этого подхода с другими концепциями. Содержание этой книги в свою очередь существенно опирается на две важные работы Халле: Sound Pattern of Russian (The Hague, 1960), Questions of linguistics, *Nuovo Cimento*, **13** (1959).

[1]) Подробности о понятии „сложности“ и рассмотрение следствий, к которым оно ведет, см. у Halle, On the role of simplicity in linguistic descriptions, Proceedings of the Symposia in Applied Mathematics, XII (1961), а также Halle, Chomsky, цит. раб. Заметим следующее: для того чтобы задать единственную морфонему, мы должны перечислить все ее признаки, а для того чтобы задать такой неестественный класс, как, например, состоящий только из |a|, |b|, |c|, |d|, мы должны были бы перечислить почти все признаки каждого элемента. С другой стороны, чтобы задать класс, который любой лингвист признал бы естественным, такой, например, как звонкие согласные, мы должны указать только признаки, общие для всех элементов этого класса.

[2]) Каким образом указанная мера простоты может быть применена ко всей грамматике в целом, см. в гл. „Symplicity and the form of grammars“ в „The logical structure of linguistic theory.“

в английском языке если три начальных сегмента лексической единицы не являются гласными, то первый из них — это обязательно [s], второй — обязательно „взрывной“, а третий — либо „плавный“, либо „глайд“. Поэтому соответствующую информацию не нужно задавать в матрицах, представляющих такие морфемы, как string — „цепочка“, square — „квадрат“ и т. д.

Аналогично глайд, находящийся в конце начальной группы, не нуждается в дальнейшей идентификации, так как он полностью определяется последующим гласным; такой глайд — всегда [y] перед [u], а перед всеми другими гласными — [w]. Так, мы имеем cure — „лечить“ и queer — „странный“, но не [kwūr] или [kyīr]. Имеется много других правил этого рода. Они позволяют нам уменьшить число признаков, используемых в грамматике, так как МС-правило может применяться сразу ко многим матрицам; таким образом, подобные правила делают нашу грамматику более простой (в определенном выше смысле). Столбцы классификационной матрицы являются, вообще говоря, „архифонемами“, в терминологии ранних работ Пражского кружка [1]).

Включение МС-правил в грамматику позволяет преодолеть тот недостаток в рассматриваемой теории формы грамматик, который был отмечен Лизом [2]) и который состоит в том, что она не обес-

---

[1]) МС-правила имеют не меньше исключений, чем морфологические, синтаксические или фонетические правила. Там, где имеются случайные исключения (например, svelte [svelt] — „стройный“ и т. д.), гораздо проще (с точки зрения уменьшения числа признаков) указать их индивидуально и сохранить общее правило. Этот подход, общепринятый в морфологии (где вряд ли разумно требовать, чтобы из грамматики были исключены, например, правила образования правильного множественного числа только из-за того, что есть формы children — „дети“ и sheep — „овцы“), в фонологии неизвестно почему считается ересью; там считается, что случайные исключения полностью разрушают систему. Таким образом, имея единственное исключение today — „сегодня“ ([tɨ Dey], с одноударным альвеолярным), во многих американских диалектах (где в других позициях имеем фонетически [d] или [t], если только за ними не следует граница слова, ср. сноску 3 на стр. 261), согласно общепринятым фонологическим теориям приходится рассматривать [D] как новую фонему и транскрибировать ее как таковую всякий раз, даже если ее появление предсказывается. Вот еще один пример. В русском языке имеется единственная морфема с интервокальным [γ] — {boγ}; авторы таких теорий настаивают на том, чтобы различие [γ] — [x] указывалось повсюду, даже если оно предсказывается общими фонетическими правилами (ср., например, Ferguson, „The emphatic l in Arabic“, *Language*, 32 (1956)). Если из принятия процедурного подхода действительно следуют такие выводы, то это еще один лишний довод против данного подхода.

[2]) Цит. раб., стр. 403. Данный вопрос был снова поднят Хаусхолдером [Householder, „On linguistic primes“, *Word*, 15 (1959)], а также Контрерасом и Сапортой [Contreras, Saporta, „The validation of a phonological grammar“, *Lingua*, 9 (1960)], которые утверждают, что независимую порождающую грамматику нужно строить так, чтобы обеспечить различение „грамматически правильной“ и „грамматически неправильной“ последователь-

печивает различения допустимых и недопустимых бессмысленных слогов. В словаре перечислены, разумеется, только те морфемы, которые в действительности принадлежат языку. Применяемые к терминальным цепочкам морфонологические правила грамматики будут производить поэтому только предложения с действительно существующими морфемами. Однако морфонологическая часть грамматики точно задает множество „допустимых“ бессмысленных слогов, как раз тех, которые выдаются на выходе морфонологических правил, когда на вход им подается произвольная матрица (не обязательно записанная в словаре) [1]). Важно понимать, что этот недостаток устраняется не изменением общей точки зрения, а более последовательным проведением ее.

Трансформационные правила морфонологической части грамматики определяют, как именно НС-структура влияет на фонетическое представление. В английском языке, например, имеется сложная система правил постановки ударения и редукции гласных, которые приводят к фонетическому представлению со многими ступенями ударения и запутанным распределением редуцированных и нередуцированных гласных. Эти правила существенным образом связаны с НС-структурой как на морфологическом, так и на синтаксическом уровнях. Следовательно, они должны быть трансформационными правилами, а не правилами подстановки. Они упорядочены и применяются циклично: сначала к минимальным составляющим (т. е. лексическим морфемам), потом к более крупным и т. д. до тех пор, пока мы не дойдем до самых крупных единиц, в рамках которых еще действуют фонетические процессы [2]).

Поразительно, что, по крайней мере в английском языке, по существу те же самые правила применяются как внутри, так и вне слова. Таким образом, мы имеем только один цикл трансформационных правил, которые путем многократного применения определяют фонетическую форму и отдельных слов и сложных словосочетаний. В самом деле, эти правила, циклически упорядоченные, определяют фонетическую структуру сложной формы, безразлично морфологической или синтаксической, в терминах фонетической структуры элементов, из которых она состоит.

ностей фонем. Мы видим, однако, что это различение обеспечивается непосредственно самой грамматикой, порождающей предложения. Роль МС-правил была подчеркнута Халле (Halle, „Sound Pattern of Russian“ and „Questions of Linguistics“).

[1]) Истинность этого утверждения может показаться не очевидной. Это зависит в действительности от более точного определения способа применения правил к матрицам. Изложение этого вопроса дано в работе Халле (цит. раб.) и Халле и Хомского (цит. раб.).

[2]) Трейгер и Смит назвали эти единицы „фонемным предложением“ (phonemic clause).

Правила постановки ударения и редукции гласных являются основными компонентами трансформационного цикла. Постановка главного ударения определяется типом составляющих и конечным аффиксом. Когда главное ударение падает на тот или иной слог, все другие ударения в конструкции автоматически ослабляются. Следовательно, повторное применение этого правила ко все более крупным составляющим цепочки, где вначале место ударения не было указано, приводит к записи с несколькими уровнями ударения. Гласные редуцируются до [ɨ] в определенных морфонологических позициях, если они вовсе не несли главного ударения на ранних этапах вывода или если последующие циклы ослабили их начальное главное ударение до третьестепенного (или в некоторых позициях до второстепенного). Правило редукции гласных применяется в трансформационном цикле только один раз, именно когда мы достигаем уровня слова.

Подробное обсуждение этих правил невозможно в рамках данной статьи, но мы вкратце укажем, как именно они действуют. Рассмотрим, в частности, следующие четыре правила:

a) *субстантивное правило* (a substantive rule), которое приписывает начальное ударение существительным (а также прилагательным) при отсутствии каких-либо специальных условий;

b) *правило ядерного ударения* (a nuclear stress rule)[1], которое делает второе из двух главных ударений преобладающим, ослабляя таким образом все другие ударения в конструкции;

c) *правило редукции гласных* (the vowel reduction rule), описанное выше;

d) *правило регулирования ударений* (a rule of stress adjustment), которое ослабляет все неглавные ударения в слове на одну ступень.

Правила применяются в указанном порядке.

В ходе работы трансформационного цикла из глаголов permit — „позволять", tormént — „мучить" и т. д. мы образуем существительные pérmit — „разрешение", tórment — „му́ка" и т. д. посредством субстантивного правила, причем ударение на втором слоге автоматически ослабляется до второстепенного. Правило регулирования ударений порождает в этих случаях следующую последовательность ударений: первостепенное — третьестепенное. Гласный второго слога не редуцируется до [ɨ], потому что он как бы защищен второстепенным ударением, которое он еще нес на том этапе, где применялось правило редукции гласных.

В слове tórrent — „поток", с другой стороны, морфонемное [e] (ср. torrential — „проливной") редуцируется, так как в противоположность форме tórment оно не получило главного ударения в раннем цикле, оно не произведено от глагола torrént. Таким образом, в tórment — tormént мы имеем противопоставление редуцированной и нередуцированной гласных. То же самое правило, которое производит tórment из tormént, изменяет второстепенное ударение конечного слога глагола advocate в третьестепенное[1], так что конечный гласный редуцируется до [ɨ] правилом редукции гласных. Таким образом, в существительном advocate и глаголе advocate и вообще в суффиксе -ate противопоставляются редуцированный и нередуцированный гласные. Эти же самые правила дают противопоставление между редуцированным и нередуцированным гласными в существительном compliment ([... mɨnt]) — „комплимент" и глаголе compliment ([... mént]) — „приветствовать" и в аналогичных формах.

[1] См. N e w m a n, On the stress system of English, *Word*, 2 (1946).

Теперь рассмотрим слово condensation — „конденсация". На первом цикле мы приписываем главное ударение второму слогу глагола condense[2]) и первому слогу суффикса -ation[3]). На следующем цикле правила применяются к форме condensation как к целому; эта форма является очередной более крупной составляющей. Правило ядерного ударения ослабляет ударение на слоге -dens- до второстепенного. Правило редукции гласных не применяется к этому гласному, потому что он защищен второстепенным ударением, а правило регулирования ударений ослабляет его до третьестепенного. Конечное правило, обладающее известной степенью общности[4]), заменяет начальную последовательность ударений 43 на 34, так что получающаяся форма имеет нередуцированный гласный во втором слоге с ударением 4. Рассмотрим теперь слово compensation — „компенсация". Второй гласный этого слова морфонологически [e] (ср. compensatory — „компенсаторный") также не получил ударения ни на каком цикле, используемом до достижения уровня слова, когда и применяется правило редукции гласных (т. е. оно не производится из compense, как condensation производится из condense). Поэтому он редуцируется до [ɨ]. Итак, противопоставление редуцированного и нередуцированного гласных

[1]) То есть это правило приписывает главное ударение начальному слогу в субстантивизированных формах torment, advocate. Первостепенное ударение на -ment вследствие этого ослабляется до второстепенного; второстепенное ударение на -ate соответственно ослабляется до третьестепенного, так что конечный гласный редуцируется до [ɨ]. Подробное обсуждение всего упомянутого здесь см. у Халле и Хомского (цит. раб.).

Заметим, что правило регулирования ударений ослабило бы ударение на -ate в глаголе advocate до третьестепенного, если бы это слово не было субстантивизировано, но только *после* применения правила редукции гласных, так что конечный гласный остается в глаголе нередуцированным, давая противопоставление [ǽdvɨkēt] — „защищать" и [ǽdvɨkɨt] — „адвокат".

[2]) Это общее правило для глаголов с конечным удвоенным согласным или напряженным гласным.

[3]) Так как суффикс -ion предполагает наличие главного ударения на непосредственно предшествующем гласном.

[4]) Оно применяется и в таких словах, как árchipélago, vìrtuóso и т. д. Возможно также правило, превращающее fifteen mén в fìfteèn mén и т. д.; детали его, однако, еще не разработаны.

со слабым ударением в compensation — condensation — это автоматически, хотя и косвенно, проявляющееся следствие НС-структур.

Этот же самый цикл трансформационных правил дает такие противопоставленные формы, как [téligræ̆f] — [tilegrif] — [tèligræ̆f] в telegraph — „телеграф“, telegraphy — „телеграфия“, telegraphic — „телеграфный“, входящие к одному и тому же представлению | tele + græf |, и аналогично обрабатывает много других весьма сложных случаев. Те же самые правила успешно применяются и за пределами слова. Так, правило ядерного ударения дает последовательность ударений второстепенное — первостепенное в конструкциях прилагательное — существительное и глагол — дополнение (например, ôld mán — „старый человек“, reâd the létter — „читать письмо“ и т. д.) и во многих других; субстантивное правило дает последовательность ударений первостепенное — второстепенное в таких сложных существительных, как élevator ôperator — „машинист подъемника“, bridge constrûction — „строительство моста“ и т. д. Те же самые правила порождают правильные последовательности ударений в более сложных конструкциях, которые были использованы для доказательства свойства ударений иметь несколько уровней[1]), например lîght hóusekeèper — „легкая домашняя хозяйка“, light hóusekeèper — „тот, кто выполняет легкую домашнюю работу“, líghthoûse keêper — „сторож маяка“, smâll bóys schòol — „маленькая школа для мальчиков“, smàll bóys schòol — „школа для маленьких мальчиков“, John's blackboard eraser — „тряпка для вытирания доски Джона“ или „тряпка Джона для вытирания доски“ (это предложение имеет последовательность ударений 213545) и др.[2]) Эти формы получаются применением одних и тех же правил в различном порядке, причем порядок определяется НС-структурой и общим законом, по которому трансформационный цикл последовательно применяется ко все более крупным составляющим.

Короче говоря, фонетическое представление, которое кажется весьма сложным и беспорядочным, может быть порождено очень небольшим числом простых трансформационных правил, применяемыхциклично, где порядок их применения определяется тем, что является (как мы знаем, исходя из независимых соображений) синтаксической структурой высказывания. Поэтому кажется разумным допустить, что правила этого рода лежат в основе действительного порождения и восприятия речи человеком. При этом допущении мы имеем правдоподобное объяснение для того факта, что носители языка одинаковым образом производят и понимают новые предложения, имеющие эти

[1]) Хомский, Халле, Луков (цит. раб). Правила, данные здесь, могут быть в действительности упрощены и обобщены. См. Халле и Хомский (цит. раб.).

[2]) Это характерные примеры из числа тех, что анализируются в моей работе „Transformational basis of syntax“, University of Texas Symposium on Syntax, 1959 (Proceedings,), где представлен ранний вариант этих морфонологических правил.

сложные физические характеристики (конечно, вовсе не сознавая лежащих в их основе процессов или их фонетических эффектов). Это наводит на мысль, что отождествление наблюдаемого физического явления[1]) с той или иной конкретной фонетической последовательностью есть частично вопрос определения его синтаксической структуры (т. е. в известной степени вопрос понимания его). Более общепринятый взгляд[2]) таков: мы определяем фонемный состав высказывания, наблюдая в звуковой волне последовательность физических свойств, каждое из которых является определяющим свойством некоторой конкретной фонемы. Мы же придерживаемся иного взгляда — можно пытаться построить устройство, распознающее предложения (т. е. модель восприятия), которое включает в себя как порождающие правила грамматики, так и „эвристический“ элемент, который анализирует текст, поданный на вход устройства, чтобы извлечь из него ответ на вопрос, какие правила были использованы для порождения этого текста, при этом выбор одной из нескольких возможностей осуществляется процессом последовательных приближений[3]).

При этом подходе, который, я думаю, имеет определенные достоинства[4]), нет оснований предполагать, что каждый сегмент обладает особым определяющим свойством или что морфонологические сегменты вообще встречаются в речевой цепи.

Такой подход к изучению процессов восприятия предлагался и раньше[5]). Очевидно, что для развития этого подхода необходимо

[1]) То есть реального высказывания. — *Прим. перев.*

[2]) Ср. сноску на стр. 262.

[3]) Хотя задача построения модели восприятия речи совершенно не зависит от задачи построения модели овладения языком, между изложенной здесь точкой зрения на восприятие и описанным выше подходом к процессу овладения языком имеется очевидное сходство. Аналогично традиционный взгляд, будто лингвистический анализ есть по существу последовательное применение приемов сегментации и классификации, идет обычно рука об руку с такой теорией познания, которая рассматривает опознавание структуры высказывания как процесс сегментации и классификации по определяющим свойствам, хотя в принципе они независимы.

[4]) Например, он естественным образом объясняет тот факт, что распознавание речи относительно мало затрагивается довольно большим искажением физического сигнала на входе распознающего устройства; этот факт трудно объяснить, если мы не допустим, что при нормальном распознавании речи центральную роль играют порождающие правила. Эта точка зрения имеет также то преимущество, что позволяет единообразно подходить к распознаванию так называемых „сегментных элементов“ (например, фонем), ударения и интонации, а также синтаксических структур. При этом удается отказаться и от совершенно неправдоподобного допущения, будто имеется „грамматика слушающего“, полностью отличная от „грамматики говорящего“. Порождающая грамматика рассматривается теперь как основной компонент системы и производящей, и распознающей речь.

[5]) Например, MacKay, Mind-like behavior in artefacts, *British Journal of Philosophy of Science*, 2 (1951); Bruner, Neural mechanisms in perception, The Brain and Human Behavior, Solomon, Cobb and Penfield, Edi-

заниматься вопросами распознавания и понимания. Это чрезвычайно сложный, но вместе с тем „естественный“ для нормальных людей процесс, и именно для этого процесса имеются, по крайней мере, зачатки правдоподобной и точной теории порождения, которая дает картину принципов, лежащих в основе организации входных стимулов.

Морфонологические процессы только что описанного типа не легко укладываются в рамки чисто таксономических грамматик. Вряд ли также можно надеяться обнаружить их путем применения приемов сегментации и классификации. Однако в современной классификационной лингвистике известно мало попыток формулировать правила, которые определяли бы фонетическое представление высказываний. Основное внимание было сосредоточено на разработке систем обозначений для транскрибирования любых возможных высказываний. Так, хотя основным занятием американских лингвистов было изучение фонологии английского языка, в ходе этой напряженной и плодотворной работы не было попыток изучить отношения между НС-структурой и фонетической формой высказываний, как в случае единиц типа condensation — compensation, tórment — tórrent, small boys school и т. д., или объяснить, почему такая лексическая единица, как telegraph, имеет именно такие алломорфы, как [télɨgræf], [tilégrɨf], [tèlɨgræf], а не три совершенно различные алломорфы или одну и ту же форму во всех контекстах. Теория порождения, содержащая циклические трансформационные правила, может предложить объяснение для таких фактов; именно эти алломорфы получаются в результате действия правил, которые необходимы также и во многих других случаях. Классификационная грамматика, которая не идет дальше установления алломорф, нисколько не усложнилась бы, если какие-нибудь реальные алломорфы были бы заменены произвольными единицами. Более того, она стала бы фактически проще, если во всех контекстах выступала бы одна и та же алломорфа. Таким образом, классификационная грамматика вообще не дает объяснения фактам, довольствуясь простым перечислением их [1].

Такие примеры, как обсуждавшиеся выше, могут привлекаться в качестве решающего эксперимента при выборе той или иной формы грамматик из нескольких возможных. Ясно, что грамматика, которая задает фонетическое представление для широкого класса случаев с помощью общих правил, предпочтительнее, чем грамматика, содер-

---

tors, p. 122 и далее; Halle, Stevens, Analysis by synthesis, Proceedings of the Seminar on Speech Compression and Production, AFCRC — TR—59—198 (September 1959).

[1]) Это сужение интересов современной лингвистики не осталось незамеченным; некоторые даже считают его важным достижением (и определяющей особенностью) современной лингвистики. См. вводные замечания Джооса (Joos) к сборнику „Readings in Linguistics“, Washington, 1957.

жащая только списки вариантов с указанием их распределения [1]). Способность грамматики обеспечивать простую и единообразную трактовку таких случаев убедительно свидетельствует о правильности общей теории языка, лежащей в основе этой трактовки.

Аналогичным образом в результате любого серьезного исследования синтаксиса сразу же выясняются такие особенности распределения, которые, очевидно, потребуют много частных изолированных правил. Простым примером этого являются так называемые „неправильные глаголы“ английского языка. НС-грамматика, содержащая только правила подстановки, может охватить все такие факты лишь с помощью набора частных правил. Однако можно показать, что вся область их применения — множество фактов, которые внешне представляются совершенно единичными и нерегулярными, — есть результат систематического функционирования нескольких простых трансформационных правил, которые к тому же требуются и для „регулярных“ конструкций [2]).

В качестве второго примера рассмотрим поведение таких слов, как eager — „сильно желающий“ и easy — „легкий“; оба могут выступать в контексте he is — to please [ср. (6) и выше]. Мы имеем такие высказывания, как his eagerness to please — „его желание доставить удовольствие“, he is eager to please us — „он желает доставить нам удовольствие“, for us to please him is easy — „для нас доставить ему удовольствие легко“, it is easy for us to please him — „нам легко доставить ему удовольствие“, he is an easy fellow to please — „он человек, которому легко доставить удовольствие“ и т. д., но не имеем соответствующих высказываний his easiness to please, he is easy to please us, for us to please him is eager, it is eager for us

---

[1]) Хотя в принципе возможно, чтобы морфонологическая часть грамматики ограничивалась перечислением и классификацией алломорф и аллофон с указанием их распределения вследствие того, что длина фонемного предложения (т. е. сфера действия морфонологических процессов) ограничена.

[2]) Более подробно этот пример и другие аналогичные примеры, показывающие эффективность трансформационных правил, см. в моих работах „Logical structure of linguistic theory“, гл. 9 — для одних вариантов, гл. 10 — для других; „Syntactic Structures“, гл. 7; „A transformational approach to syntax“, Proc. of the Third University of Texas Conference on Problems in the Analysis of English (May 1958). Многие аспекты синтаксиса английского языка с точки зрения порождающей грамматики, использующей трансформации, обсуждаются в книге Lees R., Grammar of English Nominalizations, Supplement to International Journal of American Linguistics, July 1960; см. также статьи Лиза, Лиза и Клима и Клима, находящиеся в печати, и неопубликованную диссертацию Л. Глейтман (L. Gleitman, Master's Thesis, University of Pennsylvania, 1960). Все эти работы восходят к ранним исследованиям Хэрриса, изложенным вкратце в „Discourse analysis“ и “Discourse analysis: a sample text“, *Language*, 28 (1952), и разработанным в его работе „Coocurrence and transformations in linguistic analysis“, *Language*, 33 (1957) (русский перевод см. в сб. „Новое в лингвистике“, вып. II, ИЛ, М., 1962).

to please him, he is an eager fellow to please и т. д.[1]). Грамматика, которая состоит только из правил подстановки, могла бы описать все эти случаи лишь как совершенно различные и несвязанные факты. В трансформационной грамматике нетрудно показать глубокую связь между ними.

Именно для таких случаев и необходимо научиться оценивать различные теории языка, с тем чтобы уметь выбрать лучшую. Точное определение формы грамматик не имело бы особого смысла, если бы это требование заставляло нас формулировать совершенно разрозненные правила ad hoc для целого ряда операций: для выбора алломорф; для установления сложных моделей распределения; для предсказания структурной неоднозначности в таких случаях, как the dog is barking „собака лает“ или „собака есть лай“ или I don't approve of his drinking „я не одобряю того факта, что он пьет“ или „я не одобряю того, как он пьет“; для предсказания тождества и различия типов предложений и т. п., т. е. для большого числа разнообразных примеров. Широкий охват множества языковых фактов, без сомнения, можно получить многими различными путями. Мы хотим, чтобы грамматика не просто охватывала все факты, но и объясняла их сущность, что гораздо труднее определить и чего гораздо труднее достичь. И мы требуем, чтобы лингвистическая теория давала общее описание формальных особенностей грамматик, в достаточной степени соответствующих языковой интуиции носителя языка и приводящих к обобщениям, которые любой опытный лингвист признает разумными и полезными. Другими словами, мы требуем, чтобы общая теория языка позволяла выбирать истинные и вскрывающие сущность явлений грамматические описания. Как я подчеркивал выше, центральная проблема в построении такой теории — это точно задать форму грамматик, т. е. схему для грамматического описания, которая фактически является теорией языковых универсалий и гипотезой относительно специфики врожденных мыслительных способностей ребенка.

---

[1]) Заметим, что едва ли можно серьезно утверждать, будто эти формы просто исключаются как бессмысленные, т. е. из чисто семантических соображений. Так, высказывания he is an eager fellow to please, his easiness (difficulty) to please us, несомненно, понимаются однозначно, тем не менее с формальной точки зрения они не являются правильно построенными.

Некоторые новые результаты в теоретической лингвистике[1])

И. БАР-ХИЛЛЕЛ

Еврейский университет, Иерусалим, Израиль

Лингвистика, как и любая другая эмпирическая наука, является сложным сочетанием теории и опыта. Точное соотношение этих двух частей еще не достаточно изучено, и с этой точки зрения различие между лингвистикой и, скажем, физикой в основном количественное. Отсутствие методологического подхода к анализу природы такого сочетания приводило к бесплодным спорам между лингвистами и другими учеными, имеющими дело с языком, например психологами, логиками, специалистами в области теории связи, как, впрочем, и между самими лингвистами.

Однако в последнее время достигнут значительный прогресс в понимании значения теории для лингвистики, в результате чего *теоретическая лингвистика* получила полное право на существование. Очень интересно, что наиболее употребительное сейчас название этой новой области науки о языке — *математическая лингвистика*. Этот термин несколько неудачен. Хотя прилагательное „математическая“ вполне подходит, если „математику“ понимать в смысле „теории формальных систем“ (что вполне законно), оно может ввести в заблуждение, поскольку ассоциируется также (по крайней мере в сознании неспециалистов, включая основную массу лингвистов) с числами и количественным подходом к явлениям. Однако ту область лингвистики, которая имеет дело с числами и статистикой, лучше было бы называть *статистической лингвистикой* и строго отграничивать от математической, или теоретической, лингвистики. Если рассматривать „математическую лингвистику“ как родовое понятие, одним из видов которого является статистическая лингвистика, то другой вид можно было бы назвать *комбинаторной лингвистикой*.

После этого терминологического отступления, которое, я думаю, не было излишним, позвольте кратко остановиться на происхождении и развитии комбинаторной лингвистики. В работах таких авторов, как Хэррис [1] и Хоккетт [2] в США, Ельмслев [3] и Улдал [4] в Европе, в структуральной лингвистике все более стала ощущаться

---

[1]) Bar-Hillel I., Some recent results in theoretical linguistics, стр. 551—557. Эта работа финансировалась отделом по информационным вычислительным машинам научно-исследовательского управления ВМФ США по контракту № 62558—2214.

пропасть между теорией и опытом, и лингвистическая теория сознательно получила *алгебраическое* направление. В то же время Карнап [5] и польские логики, особенно Айдукевич [6], разработали логический синтаксис языка, в котором, однако, слишком много внимания уделялось правилам вывода и слишком мало — правилам образования, чтобы эти теории имели большое влияние на лингвистику. Наконец, Пост [7] сумел построить правила образования по образцу правил вывода и тем самым проложил путь для применения ко всем обычным языкам, рассматриваемым как комбинаторные системы [8], новой мощной ветви математической логики — теории рекурсивных функций. В то же время Кэрри [9] выяснял связи между комбинаторной логикой и теоретической лингвистикой. Однако, видимо, нет ничего удивительного в том, что идеи Поста и Кэрри профессиональным лингвистам были известны не лучше, чем работы Карнапа и Айдукевича.

Наибольшие изменения в мирном, но не взаимовдохновляющем сосуществовании представителей структурной лингвистики и логиков произошли тогда, когда идея *механизации процесса нахождения синтаксической структуры* завладела воображением различных авторов. Хотя эта идея первоначально была естественным результатом профессиональных занятий горстки лингвистов и логиков, она почти произвела сенсацию в начале 50-х годов, когда получила связь с машинным переводом с одних естественных языков на другие и стала его краеугольным камнем.

И в один миг *структурная лингвистика стала полезной.* Так же, как и математическая логика, годами считавшаяся наиболее абстрактной и непонятной научной дисциплиной, вдруг стала существенным орудием конструкторов и программистов электронных цифровых вычислительных машин, так и структурная лингвистика, годами считавшаяся наиболее абстрактной и умозрительной ветвью лингвистики, сейчас многими рассматривается как необходимое средство для разработки алгоритмов автоматического перевода.

Так же как в математической логике есть особая область, занимающаяся цифровыми вычислительными машинами, т. е. *теория автоматов*, в структурной лингвистике есть своя специальная область, занимающаяся автоматическим нахождением структуры, а именно *комбинаторная лингвистика.* Последняя неожиданность: недавно оказалось, что эти две дисциплины — теория автоматов и комбинаторная лингвистика — тесно связаны между собой и в некоторых частях практически совпадают.

Завершим исторический очерк. Приблизительно в 1954 г. Хомский, находясь под влиянием Хэрриса и постоянно обмениваясь с ним идеями, начал свои исследования по новой типологии языковых структур. В серии публикаций (наиболее известная из них и в то же время наименее формальная — брошюра „Синтаксические структуры“ [10]) он установил, а затем усовершенствовал сложную иерархию таких структур. В дальнейшем предполагается знакомство читателя с этой книгой. Поскольку в этом сборнике имеется статья самого Хомского [11], мы сейчас можем перейти к изложению некоторых результатов по комбинаторной лингвистике, недавно полученных моей группой в Иерусалиме.

В 1938 г., работая над своей магистерской диссертацией о логических парадоксах, я натолкнулся на труд Айдукевича [6]. Тринадцать лет спустя, познакомившись тем временем со структуральной лингвистикой, а особенно с работой Хэрриса [1], я под влиянием проводимой мной работы по машинному переводу понял важность подхода Айдукевича к автоматизации нахождения синтаксической структуры и опубликовал свою обработку идеи Айдукевича [12].

Основная идея того типа грамматики, который был предложен в этой статье и впоследствии развит Ламбеком [13, 14], мной самим [15] и другими, состоит в следующем: под грамматикой понимается *распознающая* (*отождествляющая* или *операционная*) *грамматика*, т. е. устройство, с помощью которого может быть найдена синтаксическая структура данной цепочки элементов данного языка. Это нахождение должно быть формальным, т. е. зависеть исключительно от формы и порядка элементов, и по возможности эффективным, т. е. приводящим после конечного числа шагов к решению относительно структуры или структур данной цепочки, в некотором подходящем смысле этого слова. С этой целью было сделано допущение, что каждый из конечного множества элементов данного естественного языка имеет конечное число синтаксических функций, затем были введены соответствующие обозначения для этих функций (или категорий, как мы начали их называть вслед за Аристотелем, Гуссерлем и Лесневским) и наконец был разработан алгоритм обработки этих обозначений.

Конкретнее, было исследовано предположение, что у естественных языков имеется то, что лингвисты называют *структурой* (*смежных*) *непосредственных составляющих*, т. е. что каждое предложение можно разложить в соответствии с некоторым конечным множеством правил на две (или более) непосредственных составляющих, каждая из которых либо представляет собой уже законченную часть, либо сама разложима на две (или более) непосредственных составляющих и т. д. Такое разложение не обязательно должно быть единственным. Синтаксически неоднозначные предложения допускают два или более различных разложения. Пример приводить нет необходимости.

Существенное изменение, внесенное Айдукевичем в эту трактовку функции языка, которая в упрощенной форме известна уже школьникам, заключалось в том, что он предложил рассматривать комбинацию составных частей *в целое* не как равноправное соединение, а скорее как результат действия одной из этих частей на другие. Результатом такого подхода было сопоставление каждому слову (или другому подходящему элементу) данного естественного языка конечного множества *основных* и (или) *операторных категорий* и использование соответствующих правил „сокращения".

Сейчас для иллюстрации я приведу *определение двусторонней категориальной грамматики* (bidirectional categorial grammar) с небольшим видоизменением по сравнению с определением, приведенным в одной из последних публикаций нашей группы [16].

Мы определяем двустороннюю категориальную грамматику как упорядоченную пятерку $\langle V, C, \Sigma, R, \mathfrak{A}\rangle$, где V — конечное множество элементов (*словарь*); C — замыкание конечного множества *фундаментальных категорий*, которые мы обозначим, например, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ относительно операций правой и левой диагонализации, т. е. всякий раз, когда α и β — категории, $[\alpha/\beta]$ и $[\alpha\backslash\beta]$ — тоже категории; Σ — выделенная категория из C (категория *предложений*); R — множество, состоящее из двух *правил сокращения* $[\Phi_i/\Phi_j]$, $\Phi_j \to \Phi_i$ и Φ_i, $[\Phi_i\backslash\Phi_j] \to \Phi_j$, и $\mathfrak{A}$ — функция с областью определения V, принимающая в качестве значений конечные подмножества множества C (функция *приписывания* категорий).

Мы говорим, что последовательность категорий α *непосредственно сокращается* до β, если β получается из α применением одного из правил сокращения один раз, и что α *сокращается* до β, если β получается из α применением правил сокращения конечное число раз (точнее, если существует последовательность категорий $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, такая, что $\alpha = \gamma_1$, $\beta = \gamma_n$ и γ_i непосредственно сокращается до γ_{i+1}, где $i = 1, \ldots, n-1$).

Цепочка $x = A_1 \ldots A_k$ над V, по определению, является „*предложением*" тогда и только тогда, когда хотя бы одна из последовательностей категорий, приписанных цепочке x с помощью функций $\mathfrak{A}$, сокращается до Σ. Множество всех предложений — это *язык, определяемый* (или *представляемый*) *данной категориальной грамматикой*. Язык, представленный такой грамматикой, есть *категориальный язык* (categorial language).

Кроме двусторонних категориальных грамматик, мы рассматривали также *односторонние категориальные грамматики* (unidirectional categorial grammars), использующие для образования только левую диагонализацию, и еще более частный класс грамматик, которые мы называем *ограниченными категориальными грамматиками* (restricted categorial grammars). В этих грамматиках множество категорий состоит только из (конечного числа) фундаментальных категорий Γ_i и операторных категорий $[\Gamma_i\backslash\Gamma_j]$ и $[\Gamma_i\backslash[\Gamma_j\backslash\Gamma_k]]$ или соответственно $[\Gamma_i/\Gamma_j]$ и $[\Gamma_i/[\Gamma_j/\Gamma_k]]$.

Одним из результатов, полученных Гайфманом в 1959 г., было утверждение, что *каждый язык, определимый двусторонней категориальной грамматикой, может быть также определен односторонней категориальной грамматикой и даже ограниченной категориальной грамматикой.* Ниже я еще вернусь к этому результату. Но прежде чем сделать это и прежде чем погружаться в другие математические подробности, следует кое-что сказать об адекватности категориальных грамматик при описании естественных языков. И в самом деле, как это постоянно подчеркивает Хомский, имеются две проблемы: *адекватность в принципе* (adequacy-in-principle) и *адекватность на практике* (adequacy-in-practice). В то время как для логика, вероятно, наиболее интересной будет первая проблема, для лингвиста более интересна вторая. Ситуация даже сложнее, чем это может показаться на первый взгляд. Адекватность в принципе не только *не достаточна* для адекватности на практике, но даже *не всегда необходима*. Она недостаточна потому, что число шагов, необходимое для того, чтобы распознать в соответствии с данной категориальной грамматикой, являются ли данные цепочки предложениями, а также для распознавания других свойств цепочек и связей в них, может быть очень большим, даже если будет конечным. Настолько большим, что их обработка окажется не под силу даже самой мощной электронной вычислительной машине. Адекватность на практике лучше рассматривать в рамках определенной степени точности, и поэтому возможно, что какой-нибудь язык, который, очевидно, не может быть описан никакой категориальной грамматикой *полностью*, может быть описан некоторой категориальной грамматикой с точностью, достаточной для многих практических целей.

Ясно, что более высокая степень теоретической адекватности может быть, как правило, получена только путем увеличения числа категорий, приписываемых словам. Однако тот же самый прием обычно уменьшает практичность грамматики. Еще не ясно, может ли быть получен приемлемый компромисс.

Другой подход к формализации грамматик непосредственных составляющих был дан Хомским в рамках его общей типологии. Он рассматривает грамматику как устройство или систему правил для *порождения* (или рекурсивного перечисления) класса всех предложений. В частности, *простая грамматика фазовых структур*, которую Хомский [17] называет „*грамматикой типа* 2" или *контекстно свободной* (*бесконтекстной*) грамматикой, может быть определена (привожу опять-таки несколько видоизмененное первоначальное определение Хомского) как упорядоченная четверка $\langle V, T, S, P\rangle$, где V — (полный) *словарь*; T (*терминальный* словарь) — подмножество V; S (*начальный* символ) — выделенный элемент из $V - T$ (*вспомогательного* словаря) и P — конечное множество *правил подстановки* вида $X \to x$, где $X = V - T$, а x — цепочка над V.

Мы говорим, что цепочка x *непосредственно порождает* y, если y получается из x применением одного из правил подстановки один раз, и что x *порождает* y, если y получается из x конечным числом применения этих правил (точнее, если существует последовательность цепочек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, такая, что $x = z_1$, $y = z_n$, и z_i непосредственно порождает z_{i+1}, где $i = 1, \ldots, n-1$).

Цепочка над T, по определению, является *предложением*, если она порождена символом S. Множество всех предложений есть *язык, определяемый* (или представляемый) *некоторой простой грамматикой непосредственных составляющих* (НС-грамматикой). Язык, представимый такой грамматикой, есть *простой* НС-язык.

Мое предположение, что классы простых языков непосредственных составляющих и двусторонних категориальных языков совпадают, другими словами, что для каждого простого языка непосредственных составляющих существует эквивалентный двусторонний категориальный язык и обратно, было доказано Гайфманом в 1959 г. [16] с помощью метода, слишком сложного, чтобы описывать его здесь. Он доказал фактически несколько больше, а именно то, что та же эквивалентность имеет место также при замене двустороннего категориального языка односторонним категориальным языком или ограниченным категориальным языком, и тем самым получил в качестве следствия вышеупомянутый результат об эквивалентности всех перечисленных грамматик. Эквивалентные представления во всех случаях могут быть эффективно получены из первоначальных представлений.

Этому доказательству эквивалентности предшествовало другое, а именно доказательство того, что понятие *грамматики с конечным числом состояний*, занимающее последнее место в иерархии порождающих грамматик Хомского, эквивалентно понятию *конечного автомата*, рассматривавшемуся, например, Рабином и Скоттом [18]; понятие конечного автомата может рассматриваться как еще один вид распознающей грамматики... Само доказательство было довольно прямым и почти тривиальным; оно опирается главным образом на эквивалентность детерминированных и недетерминированных конечных автоматов, доказанную Рабином и Скоттом. Из-за недостатка времени я не буду останавливаться на этой части нашей работы, тем более что она была описана достаточно подробно в статье [19].

Хомский показал, что языки с конечным числом состояний образуют собственный подкласс класса простых языков непосредственно составляющих. Недавно мы доказали [20], что проблема, представим ли простой язык непосредственных составляющих грамматикой с конечным числом состояний, имеет большую лингвистическую важность и рекурсивно неразрешима. Примененный при этом метод — сведение к проблеме соответствий Поста.

Из других недавно полученных результатов я отмечу только следующий: в то время как класс языков с конечным числом состояний является ввиду эквивалентности грамматик с конечным числом состояний и конечных автоматов и в силу известных результатов Клини [21] и других авторов замкнутым относительно булевых и ряда других операций, *классс простых языков непосредственных составляющих над словарем, состоящим по меньшей мере из двух символов, не замкнут относительно пересечения и взятия дополнения*, хотя и замкнут относительно ряда других операций. *Объединение двух простых языков непосредственных составляющих является также простым языком непосредственных составляющих*, и грамматика для объединения может быть эффективно построена по грамматикам данных языков. *Пересечение простого языка непосредственных составляющих и языка с конечным числом состояний есть простой язык непосредственных составляющих.*

Неразрешимы такие проблемы, как проблема эквивалентности двух простых грамматик непосредственных составляющих, проблема включения языка, представленного грамматикой непосредственных составляющих, в другой такой же язык, проблема пустоты пересечения таких языков и т. д. В этой связи было установлено наличие интересных взаимоотношений между *простыми грамматиками непосредственных составляющих и двуленточными конечными автоматами*, определенными и рассмотренными Рабином и Скоттон; для этих автоматов проблема пустоты пересечения множеств допустимых слов также неразрешима.

Для теоретических целей, таких, как лучшее понимание процессов порождения высказываний говорящим и понимание их слушающим, так же, как и для практических целей, таких, как машинный перевод и другие виды машинной обработки языковых данных, представляет очень большой интерес следующая проблема: в какой степени простые языки непосредственных составляющих и языки еще более сложной структуры могут быть аппроксимированы с помощью грамматик с конечным числом состояний. Люди, несомненно, ограничены в некотором важном смысле, и хорошо известно, что мы сталкиваемся с трудностями в понимании структуры некоторых цепочек, порожденных устройствами, сходными с грамматиками непосредственных составляющих; это очень хорошо известно всякому, изучавшему, например, исчисление предикатов. Что здесь действительно необходимо, так это мера сложности порожденных предложений. Некоторые полезные результаты в этом направлении получены Хомским, Ингве и другими, но могло и должно было быть сделано гораздо больше, и моя группа уже начала исследования, направленные к этой цели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Harris Z. S., Methods in structural linguistics, Chicago, University of Chicago Press, 1951.
2. Hockett C. F., Two models of grammatical description, *Word*, **10** (1954), 210—231 (reprinted as ch. 39 in *Readings in Linguistics*. *M*. Loos. ed., Washington, D. C., American Council of Learned Societies, 1957).

3. Hjelmslev L., Prolegomena to a theory of language (tr. by F. J. Whitfield), Baltimore, Waverly Press, 1953.
4. Uldall H., Outline of glossematics, Copenhagen, Nordisk Sprog-op Kulturforlag, 1957.
5. Carnap R., The logical syntax of language, New York, Harcourt, Brace, 1937.
6. Ajdukiewicz K., Die syntaktische Konnexität, *Studia Philosophica*, **1** (1935), 1—27.
7. Post E. L., Formal reductions of the general decision problem, *Amer. J. Math.*, **65** (1943), 197—215.
8. Davis M., Computability and unsolvability, New York, McGraw-Hill, 1958.
9. Curry H. B., Fays R., Combinatory logic, Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1958.
10. Chomsky N., Syntactic Structures, Gravenhage, Mouton & Co., 1957.
11. Хомский Н., Объяснительные модели в лингвистике, настоящий сборник, стр. 245—272.
12. Bar-Hillel Y., A quasi-arithmetical notation for syntactic description, *Language*, **29** (1953), 47—58.
13. Lambek J., The mathematics of sentence structure, *Amer. Math. Monthly*, **65** (1958), 154—170.
14. Lambek J., Contributions to a mathematical analysis of the English verb-phrase, *J. Canadian Linguistic Association*, *5* (1959), 83—89.
15. Bar-Hillel Y., The present status of automatic translation of languages, Appendix II, in Advances in Computers, I, F. L. Alt, ed., New—York, Academic Press, 1960.
16. Bar-Hillel Y., Gaifman C., Shamir E., On categorial and phrase-structure grammars, *Bull. Research Council of Israel*, *97* (1960), 1—16.
17. Хомский Н., О некоторых формальных свойствах грамматик, Кибернетический сборник, вып. 5, ИЛ, М., 1962, 279—312.
18. Рабин М. О., Скотт Д., Конечные автоматы и задачи их разрешения, Кибернетический сборник, вып. 4, ИЛ, М., 58—91.
19. Bar-Hillel Y., Shamir E., Finite-state languages: Formal representations and adequacy problems, *Bulletin of the Research Council of Israel*, **8F** (1960), 155—166.
20. Bar-Hillel Y., Perles M., Shamir E., On formal properties of simple phrase-structure langiages, Applied Logic Branch Technical Report № 4 (prepared for the Office of Naval Research, Information Systems Branch), Jerusalem, Israel, Hebrew University, July, 1960.
21. Клини С. К., Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах, сб. «Автоматы», ИЛ, М., 1956, 15—67.
22. Chomsky N., On the notion rule of grammar, *Proceedings of the Symposium on the Structure of Language and Its Mathematical Aspects* (American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1960), 1961, 6—24.
23. Yngve V. H., A model and a hypothesis for language structure, *Proc. Amer. Philos. Soc.*, **104** (1960).

Модели в лингвистике и модели вообще

ЧЖАО ЮАНЬ-ЖЕНЬ [1])

Калифорнийский университет, Беркли, Калифорния, США

Термин „модель" — относительно новый термин в лингвистике, но тем, что вполне естественно считать моделями, пользуются издавна, с самого возникновения науки о языке. Как и в случае многих других научных понятий, прогресс состоит не столько в добавлении новых понятий и терминов, сколько в уточнении тех, которые до тех пор были расплывчаты и нечетки. Примеры этого рода легко приходят на память: сила, момент, работа, энергия, или, ближе к нашей области, фона, аллофона, фонема и морфонема, или морфа, алломорфа, морфема и слово.

Применение термина „модель" в лингвистике повторяет в основном его употребление в математике. Согласно выступлениям профессоров В. Ф. Ленцена и Генри Хижа в дискуссии на конгрессе по логике, методологии и философии науки 1960 г., первыми употребившими модели (по крайней мере, как соответствующее понятие, если и не сам термин) были Эудженио Бельтрами и Феликс Клейн в связи с неевклидовыми геометриями семидесятых годов XIX века, затем — Фреге и Рассел в математической логике. Геометрия — евклидова или неевклидова — это множество неинтерпретированных символов. Но множество правил поведения того, что Эйнштейн назвал „практически жесткими телами", образует модель евклидовой геометрии.

Действительно, одно из важных применений моделей в математике состоит в доказательстве внутренней непротиворечивости теории путем нахождения для нее интерпретации в виде фактически существующей модели, поскольку то, что существует, не может быть внутренне противоречивым. В этом отношении, как отмечает Хиж, употребление моделей в математике, по-видимому, почти полностью противоположно применению их в общественных науках, в частности в лингвистике (если считать ее общественной наукой). В математике модель более конкретна, чем то, что моделируется, в то время как в общественных науках модель более абстрактна.

Несмотря на то что лингвисты сознательно заимствовали понятие модель из математики, на них не могло не оказать влияния употреб-

[1]) Chao Yuen Ren, Models in linguistics and models in general, стр. 558 — 566.

ление этого термина в других науках и даже в повседневной жизни, к чему я вернусь ниже. В повседневном употреблении „модель“ — это нечто похожее на ту вещь, которой она должна соответствовать, но не совсем тождественное ей. Глиняная модель человеческого тела или даже конкретного человека — во многих отношениях имитация реального тела. Но модель безжизненна, и в ней нет внутренних органов человеческого тела. Так, иногда мы любуемся статуей, потому что она похожа на живое тело, но говорим, что она только похожа на живое, но не живая. Рассматривая модель, мы можем получить информацию о моделируемой вещи или определенное впечатление от нее так, как будто мы имели дело с самим оригиналом (и притом часто мы получаем от модели сведения о вещи таким образом, каким невозможно получить их от самой вещи).

В повседневной жизни обычно ограничиваются моделями в форме трехмерных пространственных тел; при этом некоторые добавочные свойства (например, в заводных игрушках-моделях) иногда рассматривают, иногда нет. Двумерные схемы обычно не называют моделями. Аранжировку симфонии для рояля также обычно не называют моделью симфонии, так как она не является трехмерным телом даже в напечатанной форме; не называют моделью симфонии, исполненной или только сочиненной, но еще не исполненной, и ее партитуру.

Другой смысл повседневного употребления слова „модель“ — это образец, которому в большей или меньшей степени соответствуют реально существующие вещи. Так, глиняная фигура — это модель человеческого тела в первом смысле, но человеческое тело — это модель во втором смысле, т. е. образец, который берется для воспроизведения или от которого художник берет одни черты, отбрасывая другие. Иногда говорят об образцовом [1]) супруге или об образцовом [1]) генерал-майоре. Здесь слово „образец“ (model), т. е. „модель“, понимается в смысле совокупности идеальных черт и свойств, которым более или менее соответствуют реальные вещи, а не в упомянутом выше смысле (как нечто приближенно отображающее какую-то конкретную вещь и лишь частично объясняющее некоторые ее свойства).

Не напоминает ли все это одну из классических проблем — проблему „вещи и идеи“? Вещи — это несовершенные образцы чистых идей; идеи — частичные абстракции реальных вещей. Первое является в определенном смысле моделью второго, а второе совсем в другом смысле — моделью первого. Какое из двух пониманий слова „модель“ ближе к тому виду моделей, с которыми имеют дело лингвисты? Как мы увидим при обзоре моделей, употребляемых в лингвистике, это иногда одно, иногда другое, а иногда нечто промежуточное.

---

[1]) Здесь в английском тексте непереводимая игра слов: model husband — „образцовый супруг“, буквально „супруг-модель“; model major-general — „образцовый генерал-майор“, буквально „генерал-майор-модель“. — *Прим. перев.*

Насколько мне известно, самое первое упоминание о моделях в лингвистике принадлежит Хэррису. Сравнивая методологию Стэнли Ньюмена и Сэпира, Хэррис пишет: „Каждый исследователь использует любую модель и навыки мышления, представляющиеся ему наиболее естественными“ [6а, стр. 205]. Это было в 1944 г. Затем в 1951 г. Хэррис характеризует некоторый вид моделей, говоря, что Сэпир „тоже употребляет модель *„сущность как результат процесса“* в рамках дескриптивной лингвистики, как таковой“ [6б, стр. 289—290]. Он сопоставляет сэпирову модель, основанную на идее процесса преобразований (process model), с моделью, основанной на идее упорядочения „готовых“ элементов [6б, стр. 292].

Подробно и в явной форме о моделях в лингвистике говорит Хоккетт в своей работе [7] 1954 г.; машинописные экземпляры этой статьи появились приблизительно в 1950 г. Хоккетт указывает, что он заимствовал идею моделей у математиков. Как теперь хорошо известно, две модели Хоккетта — это модель „элемент-процесс“, сокращенно IP-модель, и „элемент-упорядочение“, или IA-модель. Сущностью IA-модели является рассмотрение языка как совокупности абсолютно неизменных элементов, определенным образом упорядоченных. Эта модель в последнее время приобрела популярность благодаря ее очевидной простоте, в то время как идея процесса преобразований (особенно если процесс должным образом не определен) вызывает, по-видимому, антропоморфические, или даже метафизические ассоциации. Однако Хоккетт показывает на конкретных примерах первичность некоторых элементов по отношению к другим, например иерархические структуры в синтаксисе (группировка по непосредственным составляющим или НС, как в словосочетании old men and woman, что значит „старики и женщина“ или „старики и старуха“) и выбор структуры для различного рода омофоничных последовательностей элементов (как в китайском ch'ao^3 fan^4 „жарить рис“ или „жареный рис“). Отсюда следует, что многое в языках может быть описано в терминах процесса лучше, чем в терминах упорядочения. Кроме IP- и IA-моделей, Хоккетт упоминает, не обсуждая ее в деталях, модель типа „слово и парадигма“, которая гораздо старше и представляется более почтенной, чем IP- и IA-модели, и, естественно, более полезной для флективных языков, которые преимущественно изучались индоевропейским языкознанием.

Рассматривая модель как методологическое понятие, Хоккетт говорит: „Под моделью грамматического описания понимается такая система зафиксированных правил, в рамках которой исследователь изучает грамматику того или другого языка и формулирует результаты своих исследований. В некотором смысле имеется столько моделей, сколько различных описаний. Но в другом, и более важном смысле, большинство грамматических описаний, по-видимому, группируется вокруг сравнительно небольшого числа различных моделей, и именно такие „прототипные“ системы правил мы и рассматриваем здесь“ [7, стр. 210].

Вскоре после опубликования статьи „Две модели“ [7] Хоккетта в 1956 г. появилась работа „Три модели описания языка“ Ноама Хомского [3]. Поскольку профессор Хомский делает на этом конгрессе доклад „Объяснительные модели в лингвистике“, я только вкратце напомню о его трех моделях.

1) Грамматика с конечным числом состояний, или пословная модель, не позволяющая строить такие предложения, как colorless green ideas sleep furiously — „бесцветные зеленые идеи яростно спят“, которые, очевидно, грамматически правильны.

2) Грамматика непосредственных составляющих, основанная на анализе по непосредственным составляющим, который учитывает такие случаи синтаксической омонимии, как they are (flying planes) — „это — летящие самолеты“ и they (are flying) planes — „они управляют самолетами“, но оставляют нерешенными другие проблемы анализа, такие, как анализ предложения the shooting of the hunters — „охотники стреляют“ или „в охотников стреляют“. Это заставляет нас перейти к следующему типу моделей — трансформационной грамматике.

3) Трансформационная грамматика, сводящая грамматически правильные высказывания к относительно малому, может быть, даже конечному числу ядерных предложений. Так, the growling of lions — „рычание львов“ сводится к ядерному предложению lions growl — „львы рычат“, в то время как raising of flowers — „выращивание цветов“ сводится к предложению they raise flowers — „они выращивают цветы“.

Значение трансформационной модели заключается не только в том, что она является мощным орудием анализа, но и в том, что она выступает как объяснительная теория грамматики.

Работы Морриса Халле и К. Н. Стивенса относятся главным образом не к грамматике. В их статье „Анализ через синтез“ [5] и в статье Стивенса „К вопросу о модели распознавания речи“ рассматриваются физические сигналы, и, таким образом, эти статьи относятся скорее к фонологическому, чем к морфологическому или синтаксическому уровням языка. В этих статьях, особенно во второй из них, термин „модель“ используется для обозначения: а) набора правил, хранящихся в определенном месте в той или иной физической форме; б) аналога голосового тракта; в) взятого целиком устройства для анализа и синтеза речи.

В статье Э. Г. Эттингера „Лингвистика и математика“ [10] весьма подробно рассматривается понятие модели. Эттингер говорит: „Когда математика используется для исследования явлений природы, а не является самоцелью, то она выступает в качестве *модели*. Основная идея состоит в том, чтобы дать „изображение“, „абстрактное представление“, но хорошая модель может играть более активную роль“.

Затем он упоминает в качестве примера употребление модели дома, сделанной архитектором и представляющей некоторые, хотя и не все свойства этого дома. Он ссылается на употребление Э. В. Кондоном и Ципфом хорошо известного уравнения $f = c/r$ (где f есть логарифм частоты появления того или иного события, а r — его ранг по частоте) как модели распределения языковых единиц в текстах большого объема. Модели иногда только описывают, как та, которая дана в виде представленной здесь эмпирической формулы, но гораздо полезнее, если они могут объяснить. В связи с этим Эттингер ссылается на работу В. Белевича „Langage des machines et langage humain“ [1] и Б. Мандельбройта, который формализовал принцип наименьшего усилия Ципфа и вывел формулу, представляющую собой нечто большее, чем простое эмпирическое описание.

В. Ингве в своей статье „Модель и гипотеза структуры языка“ [14] не дает явного определения модели, но близко подходит к этому, когда заявляет: „Модель состоит из грамматики и механизма. Грамматика содержит правила конкретного порождаемого языка. Что же касается механизма, то он носит чрезвычайно общий характер и будет применим к грамматике любого языка“ [14, стр. 3].

Из пяти докладов, сделанных в 1958 г. на симпозиуме по операционным моделям в синхронической лингвистике, опубликованных в 1959 г. в журнале „Anthropological Linguistics“, vol. 1, № 1, три посвящены непосредственно моделям, а именно: доклады Ч. Ф. Вегелина [13], З. С. Хэрриса [6b] и Дж. Б. Кэрролла [2]. Поскольку здесь я не имею возможности последовательно проследить развитие понятия модели в этих докладах, я включу соответствующие толкования в список синонимов и несинонимов слова „модель“ в конце данной работы.

Так как на этом конгрессе есть и другие симпозиумы, а также читаются лекции о моделях в разных науках, наверно интересно обменяться мнениями по поводу употребления понятия „модель“ в различных областях знания. Те, кто был на симпозиуме по моделям в эмпирических науках, помнят, что профессор Р. Брэйсуэйт охарактеризовал модель как формализованную или полуформализованную теорию. Но модель гораздо скромнее теории и только с большой натяжкой может быть названа теорией. Поэтому Брэйсуэйт рассматривает модель как своеобразную „теориюшку“ или „теоριечку“. Он проанализировал и отверг точку зрения, будто тщательно разработанную дедуктивную теорию нельзя правильно понять без создания для нее модели. Модели считаются также полезными для получения прогнозов, которые без них были бы невозможны. Брэйсуэйт указал, что в этом аспекте модель может быть психологически очень полезна, стимулируя мысль исследователя, но не больше; или, употребляя выражение Х. Патнэма, модель используется как „опора для мышления“. С этой точки зрения я мог бы снова сослаться на Эттингера, который пишет: „Тот факт, что замена конкретных объектов схемами и замена операций над этими объектами соответствующими операциями над соответствующими схемами может привести к полезным результатам, вполне оправдывает применение моделей. К сожалению, этот факт необходимо устанавливать заново, по крайней мере частично, всякий раз, когда новая модель применяется к новой ситуации“ [10, стр. 181].

Затем на этом же симпозиуме профессор Саппс в своем докладе „Модели информации“ говорит: „Модель теории можно рассматривать как возможную реализацию, в которой удовлетворяются все истинные положения теории, а возможную реализацию теории — как некоторое образование с определенной теоретико-множественной структурой. Например, мы можем охарактеризовать возможную реализацию математической теории групп как упорядоченную пару, в которой первый член есть непустое множество, а второй — бинарная операция над этим множеством. Возможная реализация теории групп есть модель теории, если аксиомы теории удовлетворяют реализации“. Это, как мы видим, модель в обычном математическом смысле, где модель — нечто более конкретное, чем то, моделью чего она является.

В заключение я хотел бы упомянуть еще два толкования понятия термина „модель“. Одно из них — это его употребление профессором С. П. Дилиберто в его недавней лекции в Космическом клубе Калифорнийского университета под названием „Размышления по поводу движения“ („Notions about Motions“). В этой лекции Дилиберто предложил различать три случая.

1. Во-первых, имеется система конкретных объектов, например Солнце, Луна и планеты. 2. Затем, имеется модель, которая представляет собой абстракцию, например модели Птолемея, Коперника, Ньютона, Эйнштейна и любые другие (хотя все это обычно называют „системами“). Именно в таком смысле Р. О. Капп употребляет этот термин, когда он говорит: „Я мысленно строил космологическую модель, которая неявным образом вытекает из принципа минимума допущений, и затем сравнивал эту модель с действительностью. Иногда казалось, что между полученной моделью и действительностью имело место противоречие, но дальнейшее исследование всегда устраняло его“ [8, стр. 15]. 3. Наконец, в схеме Дилиберто есть представление с помощью слов, диаграмм или физических объектов — я чуть было не сказал „вещественных моделей“, но, чтобы избежать путаницы, я буду говорить „физические объекты“. Именно в смысле 2 и 3 Гордон Паск употребляет понятие „модель“, когда он говорит — в связи с самоорганизующимися системами — о физической модели, структура которой может иметь посторонние свойства, не существенные для модели, в отличие от абстрактной модели — набора ограничений, определяющих область, в которой

потоки энергии (или денежных знаков) могут послужить причиной совершенствования самоорганизующейся системы [11, стр. 156].

Я хочу упомянуть еще об одном употреблении слова „модель“ — применительно к программному управлению производственными процессами. Чтобы создать телевизор модели 1961 г. или автомобиль модели 1962 г., нужна, конечно, сложная система точных указаний. По мере того как производство автоматизируется и схемы производимых деталей записываются на перфолентах или магнитных лентах, программы производственных процессов становятся все более похожими на модели различных теорий, как по структуре, так и по физическому строению. Говоря об общих моделях, Х. Р. Карп [9] отметил, что здесь особенно важно следующее: значение моделей в промышленности уже выходит за пределы чисто технологических вопросов, и модели начинают использоваться для управления работой предприятия в целом, а также для исполнения административных функций.

Суммируя употребления термина „модель“ лингвистами и нелингвистами, мы получаем следующий список синонимов, или характеристик „модели“, и несинонимов, или понятий, противопоставленных модели. Мы видим здесь, что слова, синонимичные с одним и тем же словом, не всегда синонимичны между собой, и что иногда одно и то же слово не синонимично даже самому себе (например, п. 27 и 105).

Итак, какова моя точка зрения на модели вообще и модели в лингвистике? Моя задача состоит в том, чтобы познакомить читателя с предметом и существующими в нем мнениями, а не в том, чтобы создать свою собственную теорию моделей. Однако я хотел бы предложить маленькую-маленькую теорию, или модель, моделей.

В моей модели моделей есть вещи и модели вещей. Последние являются тоже вещами, но употребляются особым образом. Модель М и вещь Т соотносятся друг с другом с разными степенями соответствия, т. е. модель М может быть моделью вещи Т в различных степенях от нуля до единицы. Если мы возьмем два любых предмета, скажем королей и капусту, и будем считать кочан капусты моделью короля, то весьма маловероятно найти здесь в большом количестве нечто такое, что было бы истинно как для одного, так и для другого, хотя обычно это „нечто“ и не равно нулю, например они являются или могут являться живой материей и т. д. Но, безусловно, кочан капусты в весьма малой степени является моделью короля. Другая крайность — это тривиальный случай, когда вещь является моделью самой себя (тогда степень соответствия равна единице), или когда модель М есть Т, так что все верное для одного верно и для другого. Под вещью я понимаю нечто ограниченное как во времени, так и в других измерениях; таким образом, если ребенок станет отцом определенного человека, то этот человек тем не менее может

Таблица 1

Синонимы и характеристики «модели»

		Автор	Номер в списке лит.	Страницы
1. Система отсчета	A frame of reference	Хоккетт	7	210
2. Исходные системы отсчета	Archetypical frames of reference	Хоккетт	7	210
3. Описание	A description	Хоккетт	7	210
4. Способ обращения с языком	A way of handling language	Хоккетт	7	229
5. Концепция языковой структуры (позволяющая построить грамматику, которая порождает все предложения английского языка и только их)	A conception of linguistic structure (to provide a grammar that generates all and only the sentences of English)	Хомский	3	113
6. Грамматика	A grammar	Хомский	3	120, 123
7. Теория	A theory	Хомский	3	120, 123
8. Объективный план (или модель)	An impersonal plan (or model)	Вегелин	13	10
9. Standpunkt (переведено из Клейншмидта как «модель»)	A Standpunkt (transl. from Kleinschmidt as «model»)	Вегелин	13	12
10. (Модель или) стиль	(Model or) style	Вегелин	13	9
11. Аналог (или модель)	Analog (or model)	Стивенс	12	52
12. Предложенный метод исследования (скорее, чем № 102, см.)	A proposed method of research (rather that № 102, q. v.)	Стивенс	12	54
13. Уменьшенное изображение вещи (цитата из словаря Вебстера)	(Quoting Webster) a miniature representation of a thing	Эттингер	10	180
14. Представление (но см. 109)	A representation (but cf. 109.)	Эттингер	10	180
15. Абстракция (см. 27)	An abstraction (cf. 27).	Эттингер	10	180
16. Грамматика и механизм	A grammar and a mechanism	Ингве	14	
17. (Четыре) программы для различных аспектов поведения	(Four) programs for separate aspects of behavior	Кэролл	2	39, 40
18. Теоретический каркас, в рамках которого описывается язык	A framework in respect to which language is described	Хэррис	6.3	27
19. Картина того, как действует языковая система	A picture of how the linguistic system works	Хэррис	6.3	27
20. Конкретный стиль грамматики	A particular style of grammar	Хэррис	6.3	27
21. Конкретная неинтерпретированная или частично интерпретированная система символов, из которой получается:	A particular uninterpreted or partially interpreted system of marks, which becomes:	Хэррис	6.3	27
22. Теория структуры чего-либо (если интерпретировать эту систему)	A theory of the structure of something (when interpreted)	Хэррис	6.3	27
23. Формализованная или полуформализованная теория	A formalized or semi-formalized theory	Брэйсуэйт	0	
24. Теорийка	Theoruncula, theorita	Брэйсуэйт	0	
25. Опора для мышления	A psychological crutch	Патнэм	0	
26. Возможная реализация (теории), которой удовлетворяют все истинные предложения теории	A possible realization (of a theory) in which all valid sentences of the theory are satisfied	Саппс	0	
27. Абстрактное представление системы (но см. 105)	An abstraction of a system (but cf. 105)	Дилиберто	4	
28. Абстракция, абстрактное представление	An abstraction	Капп	8.15	
29. Набор ограничений	A set of constraints	Паск	11	156
30. (Общая модель — это) формулировка стратегии, принятой данной компанией в целях повышения ее прибылей	(The corporate model will be) a formulation of the company's strategy in optimizing its profit.	Карп	9	136

Таблица 2

Несинонимы модели

		Автор	Номер в списках	Страницы
101. Теоретический каркас для представления (несколько таких каркасов можно свести к двум или большему числу моделей)	Framework of representation (half a dozen of which can be reduced to two or more models)	Вегелин	13	15, 20, 23
102. Схема полной машины	A design for a complete machine	Стивенс	12	54
103. Языковая система (моделью которой и является «модель»)	The language system (of which the model is a model)	Хэррис	6.3	27
104. Структура, поскольку несколько явно различных структур могут иметь одну и ту же модель и наоборот	A structure, since several apparently different structures may have the same model and vice versa	Хэррис	5	27
105. Абстрактная система, поскольку одна и та же абстрактная система может иметь описания разных стилей (разные модели)	An abstract system, since the same abstract system can have different styles of description (models)	Хэррис	5	27
106. Конкретная система	Concrete system	Эттингер	10	181
107. Действительность	Reality	Эттингер	10	182
108. Система, или множество физических объектов	A system, or the set of physical objects	Дилиберто	4	
109. Представление, или физическая реализация модели (в виде символов и пр. но см. 14)	A representation, or physical realization of the model (in the form of symbols etc., but cf. 14)	Дилиберто	4	

рассматриваться как модель данного ребенка, и наоборот, в нетривиальном смысле. Множество генов, вероятно, имеет очень высокую степень соответствия с организмом, развитием которого оно управляет.

Следующий шаг состоит в том, чтобы обобщить понятие вещи таким образом, чтобы оно, помимо соотнесенной с определенным временем чувственной информации, охватывало физические факты, материальные объекты, произвольные классы вещей с тем, чтобы моя вещь могла пониматься как *любая вещь*. При таком подходе модели могут быть конкретными или абстрактными в различных степенях и различных смыслах. В лингвистике в отличие от филологии мы имеем дело не с конкретными высказываниями, встречающимися в речи (устной или письменной) в определенные исторические моменты, а главным образом с типами таких высказываний. Следовательно, уже то, с чего надо начать, достаточно абстрактно. В любом разделе лингвистики модели обладают по меньшей мере этой степенью абстрактности.

Однако, если даны две сущности, как можно узнать, которая из них вещь, а которая — модель? Ответ должен быть основан на прагматических соображениях. Вообще говоря, то, с чем более удобно работать, т. е. то, что легче увидеть, услышать, запомнить, записать, обработать, передать, наследовать, с чем легче экспериментировать и пр., есть модель, а то, относительно чего мы надеемся получить соответствующую информацию, работая (в широком смысле) с моделью, есть вещь. Здесь, как предупреждали авторы, цитированные выше, следует всегда различать релевантные и нерелевантные свойства модели и вещи.

Мы можем также рассматривать другое определение отношения „быть моделью", когда это отношение определяется не так, как выше, в терминах изоморфизма, а как возрастающая функция, для которой аргументами являются различные величины, характеризующие удобство, эффективность, полезность и пр. Тогда мы можем сказать, какая из двух вещей есть вещь, а какая — ее модель, рассматривая значение этой функции, которое для M по отношению к T, всегда положительно, а для T по отношению к M всегда отрицательно (причем значение этой функции для модели T должно, вероятно, равняться нулю). Преимущество такого определения состоит в том, что оно позволяет отличать „модель" от „аналога", поскольку отношение „быть моделью" нерефлексивно, а отношение „быть аналогом" рефлексивно. Или, наконец, мы можем соединить меру изоморфизма и меру эффективности и т. д. в некоторую функцию, определенную таким образом, что она будет приписывать определенные значения отношению „быть моделью" наиболее удобным и полезным способом.

Предлагая эту миниатюрную теорию моделей, я отнюдь не претендую на что-то значительное. Но это, вероятно, поможет в разрешении явного парадокса — модель иногда более конкретна, а иногда более абстрактна, чем вещь. Кроме того, хотя здесь еще очень много неясного, я полагаю, что сказанное выше поможет правильно понять, что такое модель. Я надеюсь, что эти далеко не окончательные идеи будут служить стимулом для дальнейшей дискуссии как среди „моделистов“, так и среди „антимоделистов“. Что касается „антимоделистов“, то пусть они знают, что я был бы одинаково счастлив, как употребляя модели в лингвистике, так и обходясь без них. Для тех, кто участвует в таком конгрессе, как конгресс по логике, методологии и философии науки, все это, конечно, повторение прописных истин. Ясно, что нет термина абсолютно необходимого, и, используя подходящую модель, всякий термин можно определить так, что он станет ненужным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Belevitch V., Langage des machines et Langage Humain, Office de Publicité, Bruxelles, 1956.
2. Carroll J. B., An operational model for language behavior, *Anthropological Linguistics*, 1 (1959), № 1, 37—54.
3. Хомский Н., Три модели описания языка, Кибернетический сборник, вып. 2, ИЛ, М., 1961, 237—266.
4. Diliberto S. P., Notions About Motions, A lecture given at the Kosmos Club, University of California, June 6, 1960.
5. Halle M., Stevens K. N., Analysis by synthesis, Proceedings of the Seminar of Speech Transmission and Processing, Dec., 1959, AFCRC-JR 59—198, Vol. II, Paper D-7.

6.1. Harris Z. S., Yokuts Structure and Newman's Grammar, *Internat. J. Amer. Linguistics*, 10 (1944), 196—211.

6.2. Harris Z. S., Review of Selected Writings of Edward Sapir in Language, Culture, and Personality, ed. by D. G. Mandelbaum, *Language*, 27 (1951), 288—333.

6.3. Harris Z. S., The transformational model of language structure, *Anthropological Linguistics*, 1 (1959), № 1, 27—29.

7. Hockett C. F., Two models of grammatical description, *Word*, 10 (1954), № 2—3, 210—234.
8. Kapp R. O., Towards a Unified Cosmology, New York, 1960, pp. 303.
9. Karp H. R., Using corporate models for business control, *Control Engineering* (September, 1960), pp. 135—137.
10. Oettinger A. G., Linguistics and Mathematics, Studies Presented to Joshua Whatmough on His Sixtieth Birthday 1957, pp. 179—186.
11. Pask G., Artificial organisms, General Systems Yearbook of the Society for General Systems Research, iv, 1959, pp. 154—170.
12. Stevens K. N., Toward a model for speech recognition, *J. Acoustic Soc. Amer.*, 32 (1960), № 1, 47—55.
13. Voegelin C. F., Model-directed structuralization, *Anthropoligical Linguistics*, 1 (1959), No. 1, 9—25.
14. Yngve V. H., A model and an hypothesis for language structure, *Proceed. Amer. Philos. Soc.*, 104 (1960), No. 5.
15. Zipf G. K., Human Behavior and the Principle of Least Effort, Cambridge, Mass., Addison—Wesley, 1949.

Списки в грамматике [1])

Ф. ХАУСХОЛДЕР

Индианский университет, Блумингтон, Индиана, США

Часто случается, особенно в настоящее время, что самые нейтральные научные термины приобретают ту или иную эмоциональную окраску. Так, для многих лингвистов слово „список“ приобрело определенно отрицательный оттенок. Вот, например, цитата из недавней статьи Джона Лотца: „Мы вынуждены прибегнуть к списку морфем“ [2].

Контекст, в котором употреблена цитата, значения не имеет; я хочу лишь показать, что для Лотца списки — это нечто такое, к чему лингвисты „вынуждены прибегнуть“, т. е. это — недоделанная, небрежно выполненная работа, нечто плохое, неэкономичное, чего следует всячески избегать. Возможно, что в рамках работы Лотца такое отношение к спискам является вполне оправданным и разумным.

Однако к списку „прибегают“ в большинстве лингвистических сочинений послеблумфилдского периода. Элементы класса выписываются полностью (в виде перечня), если только они обладают хотя бы одним общим свойством, обычно отрицательным и притом таким, которым неразумно пренебрегать, рассматривая этот класс. Для случая, когда они обладают двумя или большим числом общих свойств, принято делать то, что традиционно называется „давать определение“ классу. Если читателю нужно установить принадлежность того или иного элемента к определенному классу, то ему предоставляется сделать это самому — в предположении, что ему интересно и у него есть средства для этого. В действительности же он, конечно, редко располагает такими средствами: в одних случаях ему дается то, что можно назвать „корпусом“ (т. е. большой выборкой, содержащей высказывания на данном языке), а в других — некий гипотетический словарь, построенный в соответствии с некоторым планом, который обычно точно не определяется.

Таким образом, интересно проследить способы использования списков того или иного вида в грамматиках трех разных направлений.

Этот интерес объясняется тем, что списки играют очень большую и важную роль в одном из трех недавно обсуждавшихся типов грам-

[1]) Householder F. W., Lists in grammars, стр. 567—576.

матик, известных под названием „порождающие“. Наличие списков в порождающих грамматиках — это один из факторов, вызывающих резкие возражения со стороны лингвистов, знакомых только с другими видами грамматик.

Порождающая грамматика некоторого языка — это последовательность инструкций, называемых правилами подстановки (rewriting rules). Правила подстановки имеют обычно следующую форму: „заменить X на YZ“ (обозначаются „$X \rightarrow YZ$“) — и таковы, что если они выполняются все по порядку, то последняя подстановка породит грамматически правильное предложение данного языка, снабженное информацией о его структуре и выводе („структурной характеристикой“). В идеальной полной грамматике этого вида могут быть выведены все грамматически правильные предложения данного языка и только они. Хотя уже составлено много грамматик, описывающих отдельные фрагменты различных языков (частичные, или ограниченные, „грамматики“), я знаю очень немного таких, которые претендуют на исчерпывающую полноту. (Одна из них — это порождающая грамматика языка илокано, составленная моим бывшим студентом Эрнесто Константино.) Однако общие особенности таких грамматик ясны. И одна из этих особенностей состоит в наличии многих правил вида $X \rightarrow X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$, называемых списками. Более того, все единицы языка, которые не порождаются тем или иным правилом, должны появиться в некотором другом списке. Короче говоря, весь полный словарь языка как бы рассеян по грамматике. Можно, конечно, снабдить все члены каждого списка различительными пометками и, объединив все эти списки, получить своеобразный словарь, который может быть помещен, скажем, в конце грамматики.

Я позволю себе еще раз как можно более отчетливо повторить, что не имеет смысла спрашивать, почему эти списки нельзя заменить определениями. Приведу пример. Каждый лингвист, работающий дескриптивными методами, исходит из списка („инвентаря“) фонем; он может разбить этот список на отдельные списки „гласных“, „взрывных“, „губных“, „фрикативных“ и т. д. Разве кто-нибудь потребует, чтобы он заменил их определениями? Разве мы обязаны вместо того, чтобы сказать, что язык X имеет гласные фонемы /a/, /i/, /u/ с такими-то аллофонами в таких-то позициях, говорить просто, что он имеет гласные, определяемые как „слоговые вокоиды“ или нечто аналогичное? Ясно, что подобное требование неразумно, потому что действительный „инвентарь“ фонем попросту нельзя определить. Даже приняв обычный анализ по различительным признакам, мы не сможем „определить“ инвентарь фонем: мы могли бы составить набор правил „порождающих“ его, но тогда нам пришлось бы *составить список* различительных признаков. Причина этого, по-видимому, состоит в том, что фонемы являются исходными элементами, точное число и характер которых произвольны и непредсказуемы. Но это же верно

(причем в гораздо большей степени) относительно набора морфем, или лексем, или идиом, или каких-либо других единиц, которые будут выбраны в качестве исходных элементов грамматики, порождающей правильное предложение. Например, разве можно дать определение английским мужским именам, принятым в Соединенных Штатах? Можно точно указать, какое из них встречается чаще, какое реже (именно это и делают правила „порождающей“ грамматики), но это не отвечает на наш вопрос, какие конкретные единицы могут быть вставлены в наши правила на место мужского имени собственного. Ясно, что никакое лингвистическое определение не может быть ответом на подобный вопрос. Этого недоразумения могло бы и не возникнуть, если бы вопрос был правильно поставлен и правильно понят. Если, отвечая на вопрос: „Что именно можно поставить на место 2 в правиле 7?“, сказать: „Нечто такое, что соответствует месту 3 в правиле 49,“ а затем на вопрос: „Что же можно поставить на место 3 в правиле 49?“ ответить: „Нечто стоящее на месте 2 в правиле 7“, то мы имеем явный случай тавтологии, притом бесполезной тавтологии. Единственным нетавтологическим ответом является только список, заданный в явной форме или каким-либо косвенным способом (например, ссылками на словарь, который представляет собой просто совокупность всех списков грамматики, объединенных таким образом, что доступ к ним затруднен). Если считать, что дать определение — это значит ответить на вопрос: „Откуда мы знаем, к какому списку или спискам принадлежит данная единица словаря?“, то ответ на него таков: „Мы узнаем это, подставив ее во все те формулы, где встречаются различные символы классов слов, с помощью которых и порождены эти списки“. Но этот прием сам по себе не является частью порождающей грамматики. Я не принадлежу к тем лингвистам (если таковые вообще существуют), которые утверждают, что эта проверка подстановкой входит составной частью в процессе обнаружения грамматик и что этот процесс не приводит к желаемым результатам и имеет к лингвистике лишь косвенное отношение. Разумеется, она важна для лингвистики, но только не является составной частью порождающей грамматики; упомяните ее в списке, в приложении или в предисловии, если угодно, и я соглашусь, что она может представлять интерес и иметь определенное значение.

В некоторых случаях на требование дать определение можно ответить другим, нелингвистическим способом. В приведенном выше примере, где речь шла о рассмотрении мужских имен, можно было бы дать следующее указание: возьмите все свидетельства о рождении, выданные в Соединенных Штатах младенцам мужского пола, загляните в нужную графу и выпишите то, что там стоит. Такие социологические приемы подойдут для многих списков, хотя иногда они могут показаться слишком „семантическими“. В самом деле они являются скорее методами обнаружения, а не определениями и могут быть использованы или оказаться удобными только для нескольких специальных списков такого типа. Другими представителями приемов этого вида являются, например, приемы установления названий цветов спектра, названий городов, названий материалов и т. п., но не приемы определения принадлежности к таким классам, как предлоги, выделительные частицы, абстрактные существительные, глаголы движения и т. п.

Что же касается двух других типов грамматик, о которых я говорил выше, то в течение некоторого времени я изучал по одному более или менее типичному представителю каждого из этих типов. Моей задачей было: а) предложить некоторое полезное общее описание целей и устройства этих грамматик и б) определить, в частности, каким образом в этих грамматиках используются списки или формулировки, вполне похожие на списки. Выбранные мной образцы грамматик — это „Грамматика латинского языка" Джорджа М. Лейна, впервые опубликованная в 1898 г. (более старый традиционный тип), и „Структурная грамматика албанского языка" Леонарда Ньюмарка, которая была представлена в качестве докторской диссертации в 1956 г. и опубликована в 1957 г. научно-исследовательским центром антропологии, фольклора и лингвистики Индианского университета (более современный тип). Боюсь, что вторая из них не совсем типична, потому что Ньюмарк был отчасти под моим влиянием; например на стр. 123 он пишет: „Желательно, чтобы данная грамматика позволяла порождать все допустимые высказывания данного языка и *только* их". Однако это не столь большое отклонение от среднего типа, и грамматика Ньюмарка может служить образцом класса частичных грамматик и структурных очерков, которые были созданы американскими лингвистами за последние 20 лет.

Если мы внимательно рассмотрим обе названные грамматики с тем, чтобы выяснить, каковы те цели, для которых они, по мнению их авторов, предназначались, мы получим вполне ясное представление об этом в случае грамматики Лейна и несколько менее ясное — в случае грамматики Ньюмарка.

Многочисленные намеки на всем протяжении книги Лейна ясно показывают, что его основная цель состоит в том, чтобы те, кто пользуются его грамматикой, смогли переводить с латинского языка на английский *и* с английского на латинский. Это похоже на „Transfer Grammar" Хэрриса или более современные работы по сопоставительной грамматике, за исключением того, что Лейн редко дает явное описание английской конструкции, предполагая, что его читатели в достаточной степени владеют английским языком. Что же касается построения латинских предложений, эта цель несколько шире, чем цель, которая, по моему мнению, стоит перед простыми порождающими грамматиками. *Они* дают гарантию того, что всякое грамматически правильное предложение *в конце концов* будет порождено, но определение того, *какое* именно предложение порождается при каждом данном применении грамматики, оставляют по большей части на волю случая; однако в грамматике типа лейновской предполагается, что читатель имеет ясное представление о том, *какое именно* предложение он хочет сказать по-английски, и ему предлагается инструкция порождения эквивалентных латинских предложений. Или, наоборот, предполагается, что читатель имеет перед собой латинские предложения, и ему дается способ перейти к соответствующим английским предложениям. Это, конечно, будет влиять на форму списков; в „обычной" порождающей грамматике все члены данного списка равны и не нужно никакого специального способа выбора между ними, что же касается грамматик типа грамматики Лейна, то если бы здесь употреблялись списки, они были бы двуязычными, чтобы обеспечивать выбор английского или латинского эквивалента для заданных единиц латинского и английского языков.

Гораздо менее важную роль в грамматике Лейна играют две другие цели (которые в других грамматиках XIX века часто занимали непропорционально большое место).

1) Сообщить ряд интересных фактов, относящихся к истории латинского языка; во многих случаях упоминание таких фактов в грамматике Лейна можно объяснить предположением, что читатель может пожелать ознакомиться с образцами архаической латыни.

2) Описать некоторые подробности структуры латинского языка, которые не нужны для цели перевода и понимания. Такой случай имеет место, например, в § 52 (который, впрочем, мог быть написан Гансом Эртелем, а не самим Лейном): „Соседство полугласных U и I с соответствующими гласными U и I избегалось в классическую эпоху". Самое большее, что можно сказать по этому поводу, — это то, что сведения о распределении тех или иных элементов могут в некоторых случаях помочь читателю обнаружить опечатки в тексте.

Не предлагается никакой систематизации сведений, которая позволяла бы порождать все грамматически правильные последовательности фонем (букв), и только их, и тем самым задавать ограничения на расширение списков в последующих частях грамматики.

Определить назначение грамматики Ньюмарка и других, подобных ей, значительно труднее. Процитированное мною замечание Ньюмарка о порождении всех допустимых высказываний языка, и только их, выступает в контексте, из которого следует, что он считает свою грамматику первым шагом к такой цели (его грамматика ограничивается тем, что он называет „конструкциями" в противоположность „комбинациям" и „аддитивным элементам"). Кроме того, Ньюмарк говорит об этой „грамматике и соответствующем словаре, которые должны использоваться вместе", подразумевая тем самым сознательное обращение к нужным спискам приблизительно таким же образом, как я упоминал раньше. Но в основных частях этой грамматики и повсюду в большинстве других американских грамматик того же типа и того же времени большее внимание уделяется несколько иным целям.

1) Классифицировать языковые факты, содержащиеся в некотором конечном корпусе, используя как можно больше „интересных“ и „полезных“ способов. Сюда относятся, по крайней мере, некоторые единицы, которые могут быть полезными для читателя албанских текстов, чтобы добиться более ясного понимания и, следовательно, лучшего перевода. В грамматике Ньюмарка (что также объясняется отчасти моим влиянием и влиянием Г. Вельтена) используется схематическое представление (в духе пражской школы) семантических оппозиций, имеющих место в системах склонения и спряжения, хотя подобные „вольности“ не встречаются в других американских работах этого периода.

2) Уточнить „определения“ грамматических терминов и категорий. Ньюмарк пишет [3, стр. 8], что в его работе „делается попытка показать, как некоторые традиционные грамматические категории, которые так часто понимаются в менталистском духе и определяются чисто субъективно, могут рассматриваться достаточно строгим образом, и тем самым занять свое законное место в описании албанского языка“. То, что предшествует, — это разновидность операционного определения категорий, которые Ньюмарк называет „именительный падеж“ (nominative), „маргинальный падеж“ (marginal), и „винительный падеж“ (accusative); в совокупности — „падеж“.

Здесь целесообразно, быть может, сделать небольшое отступление и рассмотреть вопрос о формальных классах — морфологических и синтаксических. По-видимому, многие лингвисты полагают, что наиболее важные и полезные грамматические утверждения, которые они могут делать, суть не что иное, как определение нескольких крупных формальных классов. Такой взгляд унаследован прямо по традиции от Дионисия Фракийского и грамматики XIX века, где издавна пользовались понятием „частей речи“. В настоящее время американские лингвисты пытаются разработать эту же теорию более научными методами; при этом зачастую молчаливо подразумевается, что старые определения были исключительно „семантическими“ и потому непригодными. (Это, между прочим, не всегда правильно: древние грамматики предложили определения „имени“, подразделяя его на имя существительное и имя прилагательное, и глагола; эти определения были в основном морфологическими и довольно похожими на современные определения.) Так, мы часто можем встретить следующее утверждение: «Совокупность корневых „морфем“ („слов“, „лексем“, „основ“) языка можно разбить на три класса: существительное, определяемое наличием таких-то и таких-то свойств, глагол, определенный аналогичным образом, и частицы.

Сюда можно добавить особые „объединяющие“ классы, например класс существительное — глагол, обладающий определенными свойствами как того, так и другого исходных классов. Иногда пытаются построить синтаксис, основываясь на этих нескольких простых классах, но дальше попыток не идут. Да это и невозможно сделать: в любом естественном языке количество списков, необходимых для достаточно полного синтаксиса, не может быть меньше 50 и в действительности может превосходить 200.

Что же касается объединяющихся классов, то они представляют собой всего лишь удобное средство, позволяющее избежать повторения того же частичного списка в пределах двух или более полных списков. Для этого имеется очень простое основание: существует много различных грамматических окружений, и если одно и то же множество единиц встречается в двух различных окружениях, то это обычно объясняется либо чистой случайностью, либо существованием трансформационного отношения. Весьма часто единицы, выступающие в различных окружениях, исключают друг друга в одном и том же окружении; обычно это бывают единицы, принадлежащие к разным так называемым главным формальным классам. Но нередко имеет место частичное пересечение этих классов.

Кроме того, многие элементы выступают в окружениях, где они являются единственно возможными и не могут быть заменены ничем другим, или они являются членами очень маленьких классов. В таких случаях бессмысленно говорить, что они являются (или не являются) элементами некоторого крупного класса.

Грамматика должна их явно перечислить.

3) Еще одна цель, не упомянутая Ньюмарком, но часто встречающаяся в других работах того же направления, состоит в том, чтобы содействовать типологической классификации языков, а именно дать такое таксономическое описание языка, которое позволит легко сравнить его со всеми другими языками мира и выяснить их сходство и различие.

В течение последних 20—30 лет американские лингвисты (за некоторым исключением) потратили много времени на критику грамматик XIX века, таких, как грамматика Лейна. Они критиковали эти грамматики главным образом за нечеткость и субъективность определений, а также за то, что в них не описываются методы, посредством которых получены используемые классы и правила. Критики этих грамматик не заметили, что в действительности эти классы и правила часто были выбраны очень удачно и что неточные определения зачастую оказывались излишним украшением, поскольку все классы заданы полным перечислением.

Затем, когда несколько лет назад появилась работа Хомского „Синтаксические структуры“ и некоторые ученые стали работать над порождающими грамматиками, вышеупомянутые лингвисты отнеслись к этому весьма отрицательно.

Особенно раздражают их, как мне кажется, три следующие вещи.

1. Поскольку они долгое время гордились точными методами обнаружения грамматической структуры языка на основе данного корпуса (имеются в виду такие методы, как анализ по непосредственным составляющим, коммутация или подстановка в диагностический контекст, которые они рассматривают как действительно великое достижение современной лингвистики), то их крайне раздражает тот факт, что эти вопросы полностью игнорируются в современных грамматиках и что их методы отвергаются с презрительным, как им кажется, ярлыком „процедуры обнаружения". Они говорят: „Вы задаете класс N; откуда вы его взяли? Когда вы встречаетесь с новой единицей, как вы узнаете, принадлежит она этому классу или нет?" Если же вы отвечаете: „Мы пытаемся добавить новую единицу к расширению N и смотрим, будут ли все порожденные в результате этого расширения предложения грамматически правильными", они отметают это как увертку.

Если вы говорите: „Прекрасно! Я добавлю к моей грамматике приложение, в котором будут описаны некоторые из моих предварительных попыток определить класс N", они жалуются, что вы нарушаете естественный порядок вещей, что эти определения должны быть основной частью вашей грамматики и что им не место в сносках или приложениях. В действительности, конечно, любой диагностический контекст, который можно использовать как определение такого типа, включается в грамматику в качестве правила. Единственно возможным „определением", которое не включается в грамматику подобным образом, было бы несинтаксическое определение; если в языке X все основы переходных глаголов содержат, например, передние гласные и никакие другие морфы не содержат их, то переходному глаголу может быть дано такое определение, которое будет отличаться от любого правила грамматики. Но это все еще не заменит список: список — это *единственный* способ узнать, какие элементы этой формы действительно используются в данном языке. Вы можете придумать несколько сотен морф, содержащих передние гласные, и убедиться в конце концов, что лишь три-четыре из них действительно являются основами переходных глаголов языка X.

Более естественная ситуация, как в латинском языке, где морфологический класс (например, класс склоняемых слов) почти совпадает с синтаксическим (например, все существительные могут управляться предлогами), тоже ничего не меняет, поскольку оба эти условия должны быть правилами грамматики. Конечно, такие совпадения увеличивают полезность класса, но это и все.

2. Поскольку они рассматривают грамматику как классификационную науку, в которой существует принятый условный порядок

(сначала фонология, затем морфология, затем — для тех, кто верит, что таковой существует, а многие не верят, — синтаксис), и в каждой части которой разумно только условное упорядочение по темам, они смотрят на порождающую грамматику с ее правилами как на нечто странное и предназначенное сугубо для машины. Их раздражает то, что эта грамматика является синтетической, тогда как, по их мнению, ей следовало бы быть аналитической, и обычно они не могут понять, зачем она нужна. Насколько я понимаю, в такой ситуации спорить бесполезно. Когда ссылаешься на тот очевидный факт, что *только* для подобной грамматики можно проверить точность и полноту, то обычно в ответ слышишь, например, реплики, вроде следующей: „Ну, хорошо, на практике ожидать от грамматики полноты безнадежно, тогда важно классифицировать как можно больше фактов и переходить к следующему языку".

3. Имеются еще и другие особенности порождающих грамматик, которые заставляют традиционалистов буквально корчиться в судорогах и вызывают их презрительную брань, но я взялся рассмотреть здесь только одно, а именно наличие правил, которые в идеале дают полный список всех идиом или элементов данного класса. О том, почему это их так расстраивает, я уже говорил в первом пункте; в грамматиках, привычных для них, любой список элементов есть признание неудачи, отчаянная уловка, к которой прибегают лишь в случае крайней необходимости. И они нередко допускают самые странные уловки, дабы избежать употребления списков.

Прежде всего давайте рассмотрим пример типичного списка порождающей грамматики: $V_{T_e} \to$ see — „видеть", surprise — „застигать", find — „находить", catch — „хватать", hear — „слышать" ... Разумеется, этот список не является законченным (на это указывает многоточие), но есть возможность сделать его полным для идиолекта любого говорящего в данный момент времени. Этот список представляет класс глаголов, встречающихся в таких конструкциях, как I saw John stealing an apple (дословно — „я видел Джона ворующим яблоко"). Было бы можно (хотя и неэкономично) собрать все списки вместе в один большой словарь, используя для каждого из них условную метку; в таком случае наш словарь включал бы, скажем, некоторое количество слов с начальным W, а именно: Wsee, Wsurprise, Wfind, Wcatch, Whear и т. д., мы имели бы следующее правило: подставить вместо V_{T_e} любую единицу с начальным W. Но и тогда словарь все еще будет оставаться неотъемлемой частью грамматики, и грамматика должна включать правило вычеркивания начальных W. Действительно, во многих словарях используются такие показатели, хотя и неудачным образом — обычно эпизодически и непоследовательно, поэтому очень трудно, если вообще возможно, извлечь полный список из словаря.

Колоссальный объем этой работы — существенный недостаток данного метода: может оказаться необходимым просмотреть 45 000 словарных статей, чтобы найти 4 нужные единицы.

Введение показателя класса — начальной буквы, в соответствии с которой упорядочиваются элементы по алфавиту, как и предлагалось для see, surprise, find и т. д., — будет ускорять поиск, но такое упорядочивание будет неудобно для большинства остальных целей, в которых используется словарь.

Теперь давайте сделаем то, что я обещал в начале: просмотрим вкратце различные напоминающие списки отрывки в грамматиках Лейна и Ньюмарка.

Сходство между ними поразительно. Наиболее частое явление в обеих — группа иллюстрирующих примеров, которые должны представлять собой небольшую выборку из большой (или, может быть, бесконечной) совокупности.

Лейн [1, § 191]. „Глаголы на ēre и те глаголы на — āre и īre, в которых ā или ī используются только в системе презенса, обычно имеют параллельные существительные, образующиеся прямо от корня: doc-tor („учитель"), doc-umentum („урок"), doc-ilis („покорный") (doc-, docēre); sec-tor („резчик") (sec-, secāre); domitor („укротитель"), dom-inus („господин"), dom-itus („укрощенный") (dom-domāre); sarc-ina („ноша") (sarc-, sarcīre)". Все эти примеры взяты из раздела „словообразование", где ни одна грамматика не претендует на исчерпывающую полноту.

Данная информация, даже если ее дополнить необходимым списком, недостаточна для успешного порождения других производных существительных; не поможет и добавление словарной информации, подразумеваемой в словах „глаголы на -ēre", и информации из параграфов, связанных с данным перекрестными ссылками. Такие ссылки, однако, достаточны для того, чтобы породить список корней, из которых могут быть образованы *некоторые* такие существительные.

Лейн [1, § 1062]. „Глагол согласуется с подлежащим в числе и лице, так, например, praedia mea tū possidēs, ego aliēnā misericordiā vīvō, R. A. 145, „ты, господин, владеешь моим имуществом, я живу милостыню других людей"; Rhodanus fluit 1, 6, 2, „Рона течет"; nōs, nōs, dīcō apertē, cōnsulēs, dēsums, C. 1, 3, „это мы, да, мы, консулы, говорю я открыто, не выполняем свой долг"; vōs vōbīs cōnsulite 7, 50, 4, „вы, сами следите за собой"; diffugēre nivēs, H. 4, 7, 1, „снег рассеялся и исчез".

Приведенные здесь примеры составляют частное определение термина „согласуется с", употребленного в вышеуказанном правиле.

Лейн [1, § 1220]. „Имеется много таких форм дательного падежа; это главным образом абстрактные существительные, имеющие только единственное число, из которых наиболее распространенными являются: cūrae, ūsuī, praesidiō, cordī, odiō, auxiliō, impedīmentō, salūtī, voluptātī. Прилагательные magnus, maior, maximus, или tantus и quantus иногда согласуются с ними, а дательный падеж frūgi иногда допускает форму bonae".

При такой формулировке требовалось бы дать либо полный список, либо правило порождения, но Лейн, занятый другими делами, не сделал этого.

Лейн [1, § 1851]. „Quod „что, потому что" употребляется для обозначения причины с глаголами, „обозначающими эмоции."... Такими глаголами являются gaudeō, laetor, mīror, doleō, maereō, angor, indignor, suscēnseō, īrascor и т. д."

Здесь предполагается, что сочетание неполного списка с описательной характеристикой глаголов, „обозначающих эмоции", дает читателю возможность пополнить список при помощи словаря. Такие „семантические" определения распространены в синтаксических разделах большинства грамматик XIX века. Однако современного традиционалиста вряд ли устроила бы замена списка see, surprise, find, catch, hear и т. д. определением этих глаголов „обозначающих наблюдение и обнаружение". Но у нас нет другого выбора — либо список, либо подобное определение.

Заметим, что в двух из приведенных выше случаев (как и во многих других, сходных с ними) неявно предполагается обращение к словарю. Это, как мы заметили, равноценно полному списку, если слова в словаре снабжены соответствующими пометами, что не всегда имеет место. В других случаях неявное использование списка более очевидно, как, например, правило [1, § 451] „Основы на *-o-* с именительным падежом на *-r*, склоняются следующим образом" представляет собой совершенно точную инструкцию, позволяющую составить на основе словаря список всех существительных, оканчивающихся в именительном падеже на *-(e)r*, родительный падеж которых (приводимый во всех обычных словарях) оканчивается на *-rī*. Лейн не составляет такого списка, потому что конкретное существительное может быть выбрано из других соображений, и только если это существительное удовлетворяет указаниям, правило Лейна может быть применено. Порождающая грамматика делала бы в этом случае почти то же самое, что и грамматика Лейна.

Подобные примеры часто встречаются и у Ньюмарка, который в ряде случаев явно ссылается на словарь, например [3, стр. 39]: „Распределение их по классам Nu, Nna, Na и mN, fN или pN должно быть указано в словаре основ".

Один важный класс полных списков состоит из тех, которые действительно являются определениями, например Лейн [1, § 419]: „у существительных имеется пять падежей: именительный, родительный, дательный, винительный и творительный“. Это составляет определение слова „падеж“.

У Ньюмарка имеется почти идентичное определение [3, стр. 4]: „Наконец, предшествующее утверждение может быть приведено к более общей форме, если мы будем употреблять единственный термин, скажем «падеж», для обозначения любой из следующих категорий: именительный, маргинальный, или винительный“. Списки такого типа (всегда относительно короткие) часто встречаются в обеих грамматиках.

Однако полными являются, вообще говоря, только другие списки такого вида:

Лейн [1, § 1379]. „Творительный инструментальный употребляется с пятью относительными глаголами fruor, fungor, potior, ūtor, vēscor, со сложными глаголами, куда вышеперечисленные входят в качестве основной части, а также с выражениями ūsus est и opus est“.

Ньюмарк [3, стр. 69]. „Указательные элементы (*Qd*) все состоят из двух частей. Морфема k(ë)- „близко“ или a- „далеко или неспециализировано“ сопровождается особым множеством пометок категорий склонения: -'у (после k-) ~ 'i (свободно после a) „мужской род, единственное число, именительный падеж „-j'o женский род, именительный падеж, единственное число“ -t'ë ~ -t (свободно, когда отсутствует фразовое ударение)“; „единственное число, винительный падеж“ -t'ij ~ -t'ijt (необязательно, когда указательному элементу предшествует предлог) мужской род, единственное число, немаргинальный падеж -t'o“ женский род, множественное число, маргинальный падеж“ -t'yre ~ tyreve (в свободном чередовании) „множественное число, маргинальный падеж“ классы, которые должны быть заданы списком.

И аналогично у Лейна [1, § 993]. „Следующие глаголы на -are имеют перфектную основу на -u (§ 874), и перфектное причастие, когда употребляется на -tus: crepō, cubō, domō, ēnecō, fricō, micō, plicō, secō, sonō, tonō, vetō“. (Это — часть полного списка исключений к ранее приведенному правилу о перфектных основах и о перфектных причастиях глаголов на -āre.)

Ньюмарк [3, стр. 50] ll-i ~ -и (после /k/, /g/, /h/ и после гласных, исключения: после морфем bab'a отец, jaj'a „дядя: брат отца“ и vëLa „брат“) „мужской невыявленный“.

Кроме того, как у Лейна, так и у Ньюмарка имеются типичные действительно полные списки — это короткие списки специфичных и нерегулярных единиц. Таким образом, все классы, которые, по предположению, являются замкнутыми (например, личные местоимения, короткие предлоги, артикли, подчинительные союзы и т. д.), как правило, задаются списком, и только такие списки признаются, согласно традиционной точке зрения, полноправными частями грамматики; относительно всех больших, по-видимому, открытых классов предполагается, что их можно „определить“ каким-то образом или извлечь из словаря.

Подведем итоги. Грамматики XIX века, например, такие, как грамматика Лейна, используют два способа, чтобы избежать списков:

1) обращение к обычному словарю для морфологических классов, который доступен любому читателю;

2) применение неполных списков в сочетании с „семантическими“ определениями для синтаксических классов, кроме тех случаев, когда синтаксический класс совпадает с морфологическим, но тогда мы опять обращаемся к словарю. Современные грамматики XX века, подобные грамматике Ньюмарка, пользуются первым способом, но в такой его форме, которая фактически вводит читателя в заблуждение: читатель отсылается к несуществующему словарю, где словам должны быть сопоставлены показатели их классов; что же касается второго способа, то он избегается одним из двух приемов: либо а) рассмотрение синтаксиса откладывается на неопределенный срок, и таким образом решается эта проблема, либо б) используется одно правило как определение для данного класса, который встречается в одном или нескольких других правилах.

От такого подхода приходится отказываться, как только лингвисты начинают создавать исчерпывающе полные грамматики. Теперь должно быть очевидно, что существуют только два возможных метода: либо 1) все классы должны быть заданы списком в соответствующем месте грамматики, либо 2) параллельно с грамматикой должен составляться словарь и каждая единица его должна быть снабжена показателем того класса, к которому она принадлежит. Второй способ, конечно, может стать громоздким (или же неудобным по другим причинам), так как многие морфы могут принадлежать 20 или более различным синтаксическим классам. Однако он все же возможен, и составителям словаря можно рекомендовать строить полную синтаксическую грамматику языка в качестве необходимой предварительной работы для создания словаря. Такие показатели классов обеспечивают удобство обращения к соответствующим правилам грамматики, позволяя при этом избежать необходимости повторения подробной синтаксической информации в 50 различных статьях словаря.

Хотя такой параллельный грамматике словарь как совокупность списков, в которых содержатся слова, входящие в одинаковые классы, может быть громоздким с точки зрения грамматики, параллельная грамматика или грамматический очерк как описание поведения всех классов, содержащихся в словаре слов, может оказаться не только полезным для словаря, но и крайне необходимым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lane G. M. A., Latin Crammar, New York, American Book Company, 1903.
2. Lotz J., The Imperative in Hungarian, 83—92 in *American Studies in Uralic Linguistics,* I of the Uralc and Altaic Series. Thomas A. Sebeok et al., (Eds.), Bloomington, Ind., Indiana University Publications, 1960.
3. Newmark L., Structural Grammar of Albanian, *International J. Amer. Linguistics, Part* II, 23 (1957), № 4, 1—130.

Критерии для модели языка[1])

Ф. УИТФИЛД

Калифорнийский университет, Беркли, Калифорния, США

Не победа *науки* отличает наш девятнадцатый век, а победа научных *методов* над наукой.

„Воля к власти"

Парадоксальное заявление Ницше, которое уместно вспомнить на этом конгрессе, хорошо иллюстрируется победой особой методологии, являющейся самой характерной особенностью лингвистической науки девятнадцатого века. Как наиболее ясно указывал Мейе, в самом основании великолепного здания лингвистики XIX века лежит признание принципиальной произвольности связи между двумя сторонами языкового знака — содержанием и выражением: „Средства выражения связаны с понятиями только *фактически*, а не от *природы* или по *необходимости*, поэтому ничто не может воссоздать их, если они не даны... Из этого следует, что два языка, представляющие в своих грамматических формах, синтаксисе и лексике целый ряд определенных соответствий, являются в действительности одним языком..." [5, стр. 15].

Теперь, когда структура языкового знака вызывает так много споров, не следует забывать об основе величайших достижений лингвистики. Однако совершенно другой вопрос — сделали ли представители сравнительного языкознания все выводы из этой основной особенности языкового знака или приемлемы ли сейчас те выводы, которые были ими сделаны. Даже в последнем предложении приведенной выше цитаты из Мейе сквозит тень опасного упрощенчества. Для иллюстрации он обращается к итальянскому, французскому, испанскому и латинскому языкам, которые, разумеется, не являются „в действительности одним языком". Или, точнее говоря, если наши методы дают для них одинаковые модели, то мы жертвуем обширными областями применения этих методов. Встает вопрос: оправдана ли такая жертва?

Г. Аренс в своей исторической антологии по лингвистике схематически изобразил прогресс лингвистики девятнадцатого века рядом псевдоравенств: лингвистика = историческая лингвистика = историческая индо-европейская лингвистика = (мы можем добавить, развивая его идею) историческая фонология и морфология индо-европейских

[1]) Whitfield F. J., Criteria for a model of language, стр. 577—583.

языков, имеющая дело почти исключительно с субстанцией выражения, т. е. с фонетическим аспектом [1, стр. 338].

Таким образом, мы видим здесь последовательное сужение сферы лингвистических интересов, постепенный отход в сторону от центральной проблемы языкового знака. Можно дать целый ряд убедительных доказательств того, что это привело к обеднению лингвистики как в ее внутреннем содержании, так и в ее связи с другими естественными и гуманитарными науками. По мере того как универсальные теории В. Гумбольдта быстро теряли свое влияние, начала развиваться, говоря словами одного из участников этого конгресса Л. Ельмслева, сравнительная грамматика, характерной чертой которой является то, что она не грамматика [3, стр. 59]. Если все внимание сосредоточивается на каком-то одном типе языков и, в частности, на некоторых специфических особенностях плана выражения в пределах выбранного типа, то это ведет к опасному раздроблению науки, имеющему далеко идущие последствия. Так, например, малоплодотворный отрыв морфологии от синтаксиса отражает относительную автономию „слова" в греческом и латинском языках. Сосредоточив свое внимание на плане выражения в языковом знаке, лингвисты пренебрегают теми языковыми элементами, которые наиболее характерны для человеческого общения, и тем самым расширяют пропасть между лингвистикой и гуманитарными науками. Наконец, концентрация внимания на *субстанции* плана выражения ведет к тому, что язык начинает превращаться в простой набор актов речи, взятых только в их физическом аспекте и подлежащих непосредственному и как можно более экономному описанию безотносительно к их содержанию.

Если мы в состоянии более явно увидеть сегодня такое обеднение лингвистики и сужение ее целей, то из этого никоим образом не следует, что нам удалось устранить причины всего этого. Глубоко укоренившиеся особенности традиционной лингвистики не только продолжают существовать, но и укрепляются, как, например, концентрация внимания на субстанции выражения (и, более того, только на одной из возможных субстанций плана выражения) в языке. Между тем проблемы, не поддающиеся решению при принятии предположений этой лингвистики, откладываются в долгий ящик или сразу же изгоняются из сферы лингвистики на „ничейную землю", где они изучаются без использования какой-либо строгой теории. Я не имею в виду такие явно сложные проблемы, которые неизменно упоминаются, когда рассматриваются наиболее широкие возможные применения лингвистики, например вопросы поэтики и литературной стилистики, художественного перевода или любых других столь же сложных проблем, которые *не* связаны с эстетической функцией языка. Для лингвистики оказывается полезным тот факт, что все большее внимание направляется на такие пути исследования, несмотря на то что лингвистика в ее современном состоянии вряд ли достаточно подготовлена для решения этих вопросов. Можно надеяться по крайней мере, что эти отдаленные перспективы помогут выявить дальнейшие пути исследования, которые узко понятая лингвистика не могла бы разрешить. Но меня интересуют более прозаические проблемы, где, по-видимому, вполне целесообразно подумать о различных приложениях лингвистики, понимая ее более или менее широко и обращаясь в большей или меньшей степени к помощи других дисциплин. Несколько примеров, которые следуют ниже, были взяты не потому, что они представляют собой нечто новое, а скорее, наоборот, потому, что они представляют вопросы, постоянно повторяющиеся в рассуждениях о языке и, следовательно, вполне могущие быть важными для лингвиста, когда он проверяет адекватность своих теоретических построений и их соответствие фактам.

Даже в весьма подробных обзорах по истории лингвистики обычно не упоминается лингвистический трактат одного из величайших поэтов мира. Его, по-видимому, обходили молчанием даже его современники. Однако один из принципиальных вопросов, к которому Данте обращается в „De vulgari Eloquentia", — возможные связи между литературным языком и его диалектами — едва ли получил удовлетворительное решение за шесть с половиной столетий, прошедших с тех пор. Неспособность лингвистики рассмотреть эту проблему в традиционных рамках была вскрыта на убедительных примерах в дискуссии, посвященной происхождению современного польского литературного языка. Эта дискуссия, продолжающаяся уже полстолетия, в последние несколько лет привела к коренному изменению взглядов некоторых ее участников на основные лингвистические понятия [2]. И все же тому, кто рассматривает возникновение и стандартизацию всех языков современной Европы, ясно видно, как велико основное значение поставленного вопроса и насколько богаты данные, которыми мы располагаем. Значение этого вопроса для лингвистики в отличие, например, от социологии или истории было убедительно доказано, если это вообще нуждается в доказательстве, в ряде работ польских исследователей, и особенно в изящной интересной монографии З. Клеменсевича о диалектах современного польского языка [2, стр. 178—241], которая возникла на основе этих работ и рассматривает их на фоне общелингвистической теории. Специфически лингвистическая проблема, имеющаяся здесь в виду, — возможность появления одной и той же модели во множестве местных и социальных, устных и письменных вариантов языка, — как выяснилось, требует для своего рассмотрения точного и универсально применимого различия формы и содержания в языке, которое не проводится в традиционной лингвистике. Другое соссюровское различие — между планом содержания и планом выражения — получает полное применение, когда наблюдается развитие литературного языка под сильным воздействием другого языка, например развитие современных европейских языков под воздействием латинского или развитие русского под влиянием французского, как недавно было показано Вл. Набоковым в его работе [6] о переводах произведений Пушкина.

Более экзотический пример проблемы по существу того же типа был приведен недавно П. Гарвином в его работе по созданию литературного понапейского языка (остров Вознесения). Здесь, как и во многих других случаях, проблема письменности привела к серьезным трудностям. Возвращаясь снова к примеру с литературным польским языком, где потребовался тщательнейший анализ большого числа письменных текстов, следует заметить, что исследователи, начавшие с того, что казалось им простыми, доступными и вполне практическими целями, пришли к теориям, имеющим глубокое лингвистическое значение. В частности, опыт подтверждает подозрение, что лингвистическая теория будет недостаточной для многих наших целей, если в ней допускается предположение, что фонетическая субстанция является единственной „реальной“ субстанцией выражения языка и что все другие „кандидаты“ в субстанции должны в некотором смысле происходить из нее и зависеть от нее.

Эта точка зрения, которая, по-видимому, преобладает среди лингвистов и которая все еще имеет горячих защитников, приводит к далеко идущим последствиям, когда она положена в основание лингвистической теории и тем самым воздействует на форму модели языка. Эта точка зрения является традиционной.

Как известно, Аристотель отождествлял отношение содержания к выражению в речи с отношением последнего к выражению в письме, и его „De Interpretatione“ является классической работой, излагающей эту точку зрения. Поскольку цели сравнительной индо-европеистики были ограничены, то мнение Аристотеля сыграло положительную роль в устранении не относящихся к делу вопросов из научных исследований, которые по своей природе должны быть сосредоточены на фонетическом выражении. Эпоха романтизма, в которую развивалась сравнительная лингвистика, без сомнения, также оказала на нее свое влияние. Но, бесспорно, для лингвистики важно было иметь прочную основу в единственной всеобщей и, очевидно, непосредственно данной материальной действительности, что постоянно подкрепляется по мере того, как делаются новые попытки установить универсальные лингвистические категории на основе физической науки.

Я отнюдь не собираюсь выступать против этой древней традиции, несмотря на то что она, как я указывал, ведет, по-видимому, к серьезным трудностям. Я склонен полагать, что отдавать особое предпочтение фонетической субстанции языка есть в лучшем случае излишняя аксиома лингвистики и что, если мы включаем это в число наших допущений, мы подвергаемся серьезному риску перерезать важные пути исследования. Поэтому модель лингвистики, которая допускает возможность существования более одной языковой субстанции (в данном случае субстанции выражения), имеет огромное преимущество: оно состоит в том, что мы не предрешаем вопрос, который можем позволить себе оставить открытым. Такое допущение предполагает заранее известным различие между формой и содержанием в языке и помогает нам провести естественные и универсальные границы между ними, т. е. выделить те отношения, которые приняты в теории как составные части чисто формальных определений. При таком подходе остается возможность, что две обычные субстанции выражения — звуковая и графическая — могут в отдельных случаях оказаться изоморфными. Этот подход также допускает возможность, что они могут и не оказаться изоморфными и что более чем одна *форма* выражения может быть в семантической связи с единственным содержанием. Как указал Л. Ельмслев, такая точка зрения соответствует интуитивному отождествлению, скажем, письменного и устного английского языка, где единство может быть сохранено в содержании, хотя традиционная письменная форма — это не просто однозначное отображение звуковой формы в графической субстанции.

История отдельных языков всегда будет важным делом гуманитарных наук, которые должны изучать языковые документы способов общения людей и должны поэтому владеть как филологическими средствами для понимания текстов, так и критериями для интересных сравнений и оценки средств выражения, имевшихся в разные времена, т. е. того круга возможностей, в рамках которого появлялись данные тексты. Если это покажется банальным, достаточно вспомнить о связи — или, точнее, об отсутствии ее — между лингвистической и литературоведческой частями общепринятых учебных программ в наших университетах. Там, где историческая лингвистика, продолжая основную традицию прошлого века, сведена к обзору фактов, относящихся к генетическим связям между языками, ситуация вполне ясна. Преимущественно иллюстративный и фактографический характер таких исследований достаточен, чтобы устранить всякую связь с остальной частью программы. Поколения студентов, специализирующихся в английской филологии, с трудом одолевают обязательный курс готского языка до тех пор, пока тот или иной милосердный деканат не отменяет этот курс, часто успокаивая свою совесть тем, что заменяют отмененный курс экзаменом по чтению и толкованию латинских текстов. Тот факт, что изучение языка как орудия общения заменило собой то, что было, без сомнения, первоначально задумано как имманентное изучение языка, обычно ускользает из внимания и еще раз подчеркивает пропасть между лингвистикой и литературоведением.

Структурная лингвистика — особенно в последние годы — развивалась в гораздо более благоприятной атмосфере, особенно в области исторических гуманитарных исследований. Стало яснее, что термины „синхронный“ и „описательный“ — совсем не то же самое, что „статический“, и что воображаемую пропасть между дескриптивной и исторической лингвистикой можно успешно заполнить во имя обогащения каждой из них. Исходя из такой точки зрения, изменение внутри отдельного состояния языка — *état de langue* — может быть адекватно распознано, и историческая лингвистика становится чем-то вполне отличным от сравнения по существу не связанных систем, носящих иллюстративный характер. При таком подходе определенное место отводится для явлений схождения языков и тех других негенетических связей между языками, с которыми старый сравнительный подход и узко понятый дескриптивизм были бессильны справиться. Открыты новые перспективы для действительно объяснительной исторической и сравнительной лингвистики, которая может установить связь между наблюдаемыми явлениями и общей схемой возможностей и тем самым усилить возможности предсказания в языке.

В связи с этим возникает следующее необходимое требование к лингвистической модели: она должна быть в достаточной степени расчленена, чтобы обнаруживать всегда имеющиеся и поэтому сравнимые стороны языка. В действительности эти различные стороны созданы до известной степени нашим методом исследования („On dirait que c'est le point de vue qui crée l'objet“, — говорит Соссюр), но методом, не зависящим от случайных произвольных отношений, обнаруживаемых в каком-либо языке или типе языков. Благодаря огромной объяснительной силе такой модели становится возможным отличать изменения формальной структуры от изменений субстанции содержания и приступить к разработке разумной истории языковых изменений на основе взаимодействия как тех, так и других. Работа Куриловича [4] по германскому передвижению согласных дает особенно интересный пример плодотворности такого подхода; она по-новому освещает классическую проблему сравнительной лингвистики в ее излюбленной сфере — в сфере субстанции выражения. Но в обеих сторонах языкового знака — как в содержании, так и в выражении — различие между формальной, системной структурой и множеством употреблений, в которых эта структура проявляется, оказывается весьма полезным при объяснении консервативных и динамических элементов языка и описании их взаимодействия.

Таким образом построенная история языка — особенно это относится к его смысловой стороне — имеет блестящие перспективы занять существенное место в глазах представителей гуманитарных наук, если ее положения будут положены на более глубоко научную основу.

Я коснулся здесь некоторых вопросов адекватности лингвистической теории, проверяя ее с помощью некоторых примеров возможных применений лингвистики. Я полагал, что вполне разумно смотреть на лингвистику как на науку, предназначенную для решения или по крайней мере для внесения основного вклада в решение проблем, которых я коснулся выше, а именно проблем, продолжающих иметь важное значение для гуманитарных наук.

Надеюсь, я ясно изложил свою точку зрения, что разделение лингвистики и гуманитарных наук (хотя этот вопрос и имеет все возрастающую важность как для лингвистов, так и для нелингвистов) никоим образом не является результатом развития современных направлений в лингвистике. В своих предыдущих замечаниях я попытался показать, что это в большей степени относится к определенной ограниченности методологии, которая преобладала в лингвистике в последнее столетие. Известно, что современная лингвистика ищет пути возвращения своей утраченной почвы, расширяя свои основные понятия. Изучение языка в более широком аспекте, чем одно лишь его материальное выражение, а также изучение материального выражения не только в генетическом аспекте — все это привело к возобновлению связи лингвистики с другими отраслями гуманитарных наук[1]). Этот возобновившийся контакт, о котором я говорил, заставил лингвистов обратить внимание на те аспекты языкового знака, которыми они долго пренебрегали; а это оказало благотворное влияние на их собственные исследования.

Эта точка зрения, я надеюсь, получила некоторую иллюстрацию в приведенных выше примерах. На каждом из этих примеров мы воочию убеждаемся в разнообразии и единстве языковых фактов; в разнообразии употреблений как в пространстве, так и во времени в противоположность единственной объединяющей модели; в разнообразии субстанций в языковом выражении в противоположность единству определенных как совершенно различные формы и в разнообразии форм выражения в одном содержании (примеры этому могут быть найдены не только в различных письменных и разговорных формах отдельных языков, но также в различных языках — членах одной группы языков). В своем анализе этих примеров я многим обязан соссюровским положениям о различии выражения и содержания, языковой формы и языковой субстанции и развитию, которое получили эти различия в глоссематической теории. Однако я не собираюсь защищать некоторую особую лингвистическую теорию, но хочу убедить читателя в том, что в любой адекватной теории должно найтись место для типов взаимодействия сторон языка, о которых я говорил.

[1]) Здесь нам полезно вспомнить одного из величайших лингвистов — Фердинанда де Соссюра, который сказал, что лингвистика слишком важна, чтобы ее можно было предоставить одним лишь лингвистам. Процитирую слова Соссюра: „Еще более очевидна важность лингвистики для общей культуры. Недопустимо, чтобы ее изучение оставалось делом нескольких специалистов“ [7].

Рассматривая „модель“ в очень простом смысле схематической связи, предназначенной для того, чтобы установить простые важные структурные отношения внутри изучаемого объекта, я прихожу к заключению, что адекватная модель языка должна прежде всего отражать взаимодействие между разнообразием и единством и что это отображение должно быть универсально применимым — только таким образом можно получить рациональную основу для сравнения языков и тем самым раскрыть природу того разнообразия внутри единства, которым и является человеческий язык.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arens H., Sprachwissenschaft, Orbis Academicus 1/6, München, 1955.
2. Budzyk K., ed., Pochodzenie polskiego jezyka literackiego, Studia staropolskie III, Wrocław, 1956.
3. Hjelmslev L., La catégorie des cas, I, *Acta Jutlandica, Aavsskvift for Aarhus Universitet*, 7 (1935).
4. Kuryłowicz J., Le sens des mutations consonantiques, *Lingua, 1*, 77—85.
5. Meillet A., Introduction à l'étude des langues indo-européennes, Paris, 1937.
6. Nabokov V., The servile path, On translation, R. A. Brower, ed., Cambridge, Massachusetts, 1959, 97—100.
7. де Соссюр Ф., Курс общей лингвистики, Соцэкгиз, М., 1933.

Процесс и существование в математике[1]

ВАН ХАО

Оксфордский университет, Оксфорд, США

1. При изучении элементарной геометрии нам приходится доказывать, что углы при основании равнобедренного треугольника равны. Набрасывая схематический чертеж треугольника, мы некоторое время изучаем его. Нам приходит удачная мысль — провести дополнительно одну новую линию от вершины треугольника к его основанию. Теперь мы уже в состоянии заметить на чертеже ряд зависимостей и с их помощью доказать требуемое равенство углов. То же мы можем сделать и иначе, установив возможность такого перемещения треугольника в пространстве, при котором вершины его основания меняются местами.

В арифметике мы встречаемся с задачей — найти сумму первых 10 000 целых положительных чисел. И здесь нам удается напасть на следующую схему расстановки данных чисел:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & \ldots\ 5000 \\ 10\,000 & 9999 & \ldots\ 5001 \end{array}$$

Мы замечаем, что каждый из столбцов имеет сумму, равную 10 001.

Когда инженер или физик обращается за помощью к математику, то математик обычно приводит поставленную задачу к более общей форме, отбрасывая те ее частные особенности, которые он сочтет не существенными для данного случая. Такая переформулировка задачи может оказаться сложным делом и потребовать участия и математика и практика, специалиста в данной области, иногда представленных в одном лице. Новая задача является более абстрактной и сохраняет лишь основные контуры первоначальной. Зато она более прозрачна, особенно для хорошо тренированного ума, который часто может — с помощью различных ухищрений — указать метод решения этой задачи или с использованием обычных известных средств, или путем разработки новых разделов математики. Применение некоторого метода в частном случае может быть очень шаблонным и

[1] Hao Wang, Process and existence in mathematics, Essays on the foundations of mathematics, dedicated to A. A. Fränkel on his seventieth anniversary, edited by I. Bar-Hillel, Jerusalem, Magnes Press, 1961, стр. 328—351.

потому утомительным. Тогда для получения решения приходится иногда прибегать к помощи вычислительной машины.

2. В каждой из указанных ситуаций используются схематические представления (чертежи, графики, таблицы таких элементов, как числа, переменные, условные обозначения, логические и математические константы) и мысленные эксперименты. При изучении задачи нам более важны схемы или чертежи, чем картины или портреты, потому что мы не рассматриваем всех ее сторон, ее деталей и частностей, но предпочтительно интересуемся ее контурами и строением, „формальными данными“ о ней, образцами и шаблонами, которые она нам открывает. Эти схемы и чертежи помогают нашему воображению в процессе рассуждения и, как таковые, существенны в математике. Однако это не означает ни того, что мы всегда обязаны обращаться к чертежам на бумаге или доске, а также и ни того, что математика является манипуляцией символами. Математическую деятельность отличает не физическое производство чертежей, а возможность использования их в помощь нашим мысленным экспериментам, когда мы ищем те или иные нужные нам связи.

Сознание активно участвует в наблюдении, как, например, строй чисел распадается на подходящие пары, чтобы породить новое единообразие. Таким образом, это „наблюдение“ позволяет нам воспринять с одного взгляда 5000 пар чисел, которые имеют одну и ту же сумму 10 001. В этом отношении точки (в таблице чисел) также не являются „просто сокращениями“, ибо они или какие-то подобные им символы необходимы, чтобы одним мысленным актом схватить весь строй чисел. Они воплощают тот формальный факт, что мы видим 5000 пар, как единую вереницу с определенным началом, с определенным концом и определенным способом продолжения. При нахождении этого способа продолжения мы, вероятно, должны проделать следующую умственную работу: произвести ряд попыток в поисках наводящих соображений, отправляясь от суммирования небольшого количества чисел. Но само это вычисление не является экспериментом, ибо все становится определенным, как только найден путь, ведущий к цели.

3. В доказательстве того, что для всякого простого p существует большее простое число, несомненно, решающим является построение функции $p!+1$. Здесь, пожалуй, нельзя сказать, что мы получили эту функцию актом „наблюдения“. Вообще типы применяемых конструкций оказываются весьма разнообразными и разнородными.

В поисках решения наша деятельность направлена к определенной цели. Легко прийти к вопросу о том, каким образом мысленные эксперименты связаны между собой. Формальная проблема о методах нахождения решений („как решить ее“) не является проблемой философии математики, хотя имеет педагогический интерес и является

центральной в вопросах моделирования математической деятельности. Характер умозаключений и обязательность логических законов, связанных с умозаключениями, — вот в действительности дело философов. Мы же фактически принимаем вывод как последовательность символов, полученных применением некоторого определенного правила, например modus ponens. Здесь мы легко можем попасть на скользкую почву условной истины, синтетической и априорной. Но, как принято считать, подоплека этого перехода относится к области социологии.

4. Для изучения процесса сочинения музыки является важным то обстоятельство, что Бетховен продолжал сочинять хорошую музыку и после того, как стал глухим. Подобно этому, слепые математики представляют собой явление, которое должно пролить некоторый свет на характер математической деятельности. Поразительно, что большинство из нас находит очень трудным, если не невозможным, делом — перемножить в уме три семизначных числа. Прежде всего нелегко удержать в памяти саму задачу без помощи карандаша и бумаги. Если ребенок попросит своего слепого отца помочь ему решить эту задачу, то отец, вероятно, будет просить ребенка служить ему карандашом и бумагой, чтобы записать вопрос и промежуточные результаты. Если же в такой помощи отказано заранее, то слепой математик, желающий производить сложные числовые выкладки, должен был бы так натренировать себя, чтобы быть вычисляющим феноменом.

Несомненно, важной особенностью операций с числами является то, что для сложных расчетов необходимы карандаш и бумага. Также большинство из нас не заучивает наизусть большого числа телефонных номеров, но мы вспоминаем или даже знаем различные способы восстановления их в памяти. Мы учим таблицу умножения не от 1 до 100, а лишь от 1 до 9 или от 1 до 12. Касаясь более высокой сферы математической деятельности, можно отметить, что большинство из того, чем владеет математик, пришло к нему не через преднамеренные усилия выучивать многое наизусть. Внутренние логические связи увеличивают объем и продолжительность запоминаемых событий и улучшают качество запоминания. Определенные события удерживаются в голове одновременно и позволяют последовательно развертывать их в большое число других событий и понятий. Именно этой развертывающей мощью ума вместе со структурно организованной памятью и определяется способность к мысленному эксперименту и способность творить математику. Когда говорят, что математика является сферой деятельности чистого интеллекта, то нельзя отрицать, что ее неотъемлемой частью являются чувственные восприятия и память. Однако ни превосходное зрение и ни хорошая память не будут отличительными чертами лучших математических способностей.

5. К решению некоторых задач нас побуждает практическая деятельность, к решению других — аналогия с существующими задачами. Но не вся математическая деятельность состоит из решения задач. Эстетические потребности и желания систематизировать и упорядочить наши знания ведут также к развитию и усовершенствованию математических теорий. Именно к числу таких результатов относится редукция, или сведе́ние математики к логике.

И именно на этом пути приходят к библиотекарскому определению чистой математики как класса всех условных предложений, в которых все константы являются логическими.

„Все A суть B, все B суть C, поэтому все A суть C“ есть схема, и традиционная логика есть разновидность математики, так же как „крестики и нулики“ есть разновидность игры, для которой нужна доска. Можно понять, что, будучи весьма неразвитой и слабой, традиционная логика едва ли заслуживает прекрасного имени математики. Однако неразрывная связь с математической логикой, повидимому, все же придает ей некоторую окраску.

Традиционная логика больше мешает, чем помогает нашему рассуждению, которое вполне удовлетворительно обеспечивается нашими естественными способностями. Это видно из того факта, что чем больше чисто рациональной является деятельность, тем менее эта логика нужна. Математика меньше всего нуждается в традиционной логике, тогда как предвыборная деятельность кандидатов, судя по трудам Сусанны Стеббинг, нуждается в ней более всего.

Математическая логика в значительной степени страдала тем же родом недуга. (Может быть, некоторые работы по современной топологии являются исключением, которое содержат больше определений, чем доказательств.) Логика главным образом интересовалась разложением доказательства на возможно большее число различных шагов и не интересовалась, подобно математике, поиском эффективных методов рассуждения, которые позволяли бы одним махом получать ряд далеко идущих следствий или разгадывать весьма сложные и запутанные положения. Когда, например, элементарный раздел логики получает практические применения в производстве вычислительных машин, то это происходит, так сказать, случайно и против ее собственной воли. Здесь она оставляет в стороне все свои цели и задачи и выступает просто как один из разделов математики, получающий новое применение.

6. Расчленение доказательства на большое число малых шагов желательно постольку, поскольку в общем множество всевозможных малых шагов менее сложно, чем множество малого числа больших шагов. Это представляется очевидным, так как объединение всех малых шагов, которые составляют один большой шаг, проще, чем большой шаг, который содержит эти простые шаги (возможно, с повторениями) и специальную информацию об их следовании.

К тому же, вообще говоря, некоторые малые шаги встречаются в ряде различных больших шагов. Однако нет столь же очевидной причины, почему такое упрощение было бы желательным для математической деятельности. На самом деле, так как мы чувствуем себя как дома при работе с большими шагами, мы склоняемся к мысли, что увеличение числа пунктов в каждом доказательстве, т. е. расчленение доказательства, замедлило бы нашу работу и затруднило понимание доказательств.

7. Немногие математики дали себе труд изучить теорию кванторов, и никто из остальных до сих пор не пострадал от своего невежества в этой области. И нечего восторгаться тем, что когда логик переформулировал и разложил доказательство, то даже машина может проверить его правильность. Никто, в том числе и сам логик, не проверяет сложных математических доказательств таким образом, и пока машины не использовались для проверки доказательств.

Двадцать лет назад, наверное, казалось, что если человек нашел такой путь проверки доказательств медленным и ненадежным, то и машины не сделали бы его ни более быстрым, ни более точным. Появление больших вычислительных машин и высокие темпы их совершенствования как в отношении быстродействия, так и надежности — одно из самых неожиданных явлений в истории, последствия которого сейчас даже трудно предсказать.

Однако именно в этой связи имеется возможность того, что будет, наконец, найдено главное приложение логики, основанное на ее существе, а не случайных моментах — обращаться с доказательствами так же эффективно, как с вычислениями. Например, некоторая предварительная работа уже позволила доказать на обычной универсальной машине все теоремы кванторной логики с равенством из „Principia Mathematica“ (9 глав) менее чем за 9 минут.

8. Применение логико-математического анализа доказательства к проекту механизации математики зависит от смысла сводимости математики к логике. Совершенно прозаический, но все же основной смысл такой сводимости состоит в следующем: всякое доказательство могло бы быть формализовано в логике как чисто логическое доказательство некоторого условного предложения, говорящего о том, что некая теорема является следствием из соответствующих аксиом. Такое сведение не представляется удивительным, так как здесь не заявляется претензий на то, чтобы доказывать в логике также и аксиомы и нет необходимости расширять сферу логики и включать в нее такие посторонние для нее понятия, как множества или классы.

Грамматика мало помогает изучению родного языка или развитию литературного стиля. Мы не беспокоимся о теории звуковых волн, когда учимся говорить. Фонетика имеет большее отношение к делу, хотя немногие могут позволить себе роскошь брать уроки ее у профессора Хиггинса. Если бы математическая логика была бы немного менее чистой, возможно, она могла бы помочь математику в овладении некоторыми чуждыми для него разделами математики. Однако в настоящее время математическая логика находится в безликой и отчужденной форме, и потому изучение ее не является необходимым и, вероятно, не ускорит процесса овладения другими разделами математики.

С другой стороны, если машина должна творить и развивать математику, то нужно, чтобы методы логики были явно в нее введены. Это создаст определенные побудительные мотивы для совершения машиной более детальной формальной работы при исследовании алгоритмических проблем, а также различных методов доказательства, применяемых в логике.

9. Более того, на передний план выдвигаются исследования о практической осуществимости тех или иных методов доказательства или рассуждения. Это предъявляет дополнительные требования к математической аргументации метода, которая должна быть ясной, обозримой и поддающейся пониманию. Указанные два аспекта проблемы эффективности не являются тождественными. Например, мало эффективный метод доказательства в общем легче описать; для такого метода легче понять аргументы, доказывающие его правильность. С другой стороны, соединяясь, эти два аспекта объясняют и в значительной мере направляют нашу математическую деятельность. Чтобы подчеркнуть требования практической осуществимости метода и ясности его аргументации, можно было бы создать новый термин „праксимизм“, характеризующий эти требования.

Если машина выдает доказательство гипотезы Ферма в один миллион строк, то у нас еще остается в некоторой степени более легкая задача сделать это доказательство понятным. Это была бы такая ситуация, в которой мы могли бы сказать — в некотором определенном смысле, — что доказательство существует, но пока его никто не понял. Несомненно, некоторые предпочтут сказать, что доказательство еще не существует, так же как они сказали бы, что машина не может вычислять, не может доказывать, потому что должно было бы существовать заключительное состояние, которое освещало бы весь процесс в целом, и только человек может установить это состояние, так как он способен понять весь этот процесс, представляющий данное доказательство или вычисление.

Если машины могут ставить интересные математические проблемы, то наше главное дело — перейти к машинным методам и их представлениям в автоматических языках. И мы не ожидаем получить программу с 10^6 строками команд. По мере продвижения вперед мы синтезируем и сокращаем, чтобы вместить в машину — ограниченный конечный автомат — все больший и больший объем информации. С развитием формальных методов замена частных принципов общими позволит более экономично хранить информацию.

Проект механизированной математики привлекает наше внимание и в другом направлении, а именно со стороны проблемы формализации методов отыскания доказательств. Здесь мы встречаемся с другой, в значительной степени заброшенной областью, которая поддается трактовке методами математической логики. Такие проблемы лежат на другом уровне, чем изучение психологии математического открытия. Мы, возможно, в состоянии моделировать те внешние условия и фон, при которых изумительно работало подсознание Пуанкаре. Однако, по-видимому, нелепо предполагать, что мы в состоянии одарить машину подсознанием, сравнимым с подсознанием Пуанкаре.

10. Наиболее сенсационный тезис о сведéнии математики к логике состоит в том, что в логике можно найти определения всех математических понятий, так что математические теоремы можно переделать не в условные предложения, а просто в теоремы логики. Это только правдоподобно, когда „логика“ понимается весьма широко и включает в себя как часть теорию множеств. Термин „теория множеств“ менее известен, чем „логика“, однако в то же время он является более определенным. Так как теория множеств сама есть ветвь математики, то вопрос состоит в том, как все ветви математики свести к одной частной. В этом смысле вопрос первоначально касается только самой математики и является ее внутренним домашним делом. Интерес философов возник как результат той исторической случайности, что Фреге и Рассел, правильно или неправильно, связали некоторые области математики с философией. Важно и то, что по крайней мере один из них оказался таким хорошим пропагандистом. Тем не менее с устойчивостью этого интереса следует, конечно, считаться, хотя и сожалея о бедности философии. В конце концов, если даже теория множеств и является только ветвью математики, утверждение, что все другие ветви сводимы к ней, делает ее прямым делом философов.

11. Положение с теорией чисел наиболее интересно. Если мы рассматриваем только числовые формулы, содержащие сложение и умножение, то в логике, по-видимому, можно найти теоремы, довольно естественно соответствующие этим формулам. С другой стороны, если нас также интересуют общие законы арифметики, то указанное сведéние возможно только тогда, когда мы возьмем теорию множеств, а не логику.

Представляется загадочным, что Кант считал предложение „$7+5=12$“ синтетическим и априорным, а Фреге нашел нужным отказаться от этого при своем сведéнии арифметики к логике. Один из путей сделать обе эти точки зрения правдоподобными заключается в следующем. Чтобы равенство было аналитическим, обе части равенства должны иметь не только тот же самый *денотат*, но и тот же самый смысл. Само собой напрашивается сказать, что „$7+5$“ и

„12“ имеют различный смысл, хотя один и тот же *денотат*. Отсюда наше равенство является синтетическим и априорным; необходимость этого заключения здесь не подвергается сомнению. Но имеется естественный путь сведéния выражения „$7+5=12$“ к некоторой теореме логики. Допустим, что мы используем сокращения:

$$(E!_1x)Dx \quad \text{вместо} \quad (Ex)(y)(Dx \,\&\, (Dy \supset y=x))$$

$$(E!_2x)Dx \quad \text{вместо} \quad (Ex_1)(Ex_2)(y)(x_1 \neq x_2 \,\&\, Dx_1 \,\&\, Dx_2 \,\& \\ \&\, (Dy \supset y=x_1 \vee y=x_2)),$$

. . . .

Тогда соответствующей теоремой логики будет

$$(*) \quad (E!_7x)Gx \,\&\, (E!_5x)Hx \,\&\, (u) \neg (Gu \,\&\, Hu) \supset (E!_{12}x)(Gx \vee Hx).$$

Так как естественно рассматривать все теоремы логики, т. е. кванторной теории с равенством, как аналитические предложения, то Фреге, по-видимому, показал, что „$7+5=12$“ аналитично.

12. В этом толковании имеется ряд трудностей. Отрицание предложения, подобного (*), не дает нам того, что нужно, когда мы хотим доказать, например, что „$7+6 \neq 12$“. Затруднение возникает потому, что буквы G и H выступают как свободные переменные, а, значит, при построении отрицания мы должны навесить на них кванторы. Конечно, мы не хотим сказать, что „$7+5=12$“ является аналитическим, а „$7+6 \neq 12$“ — синтетическим и априорным. Более того, нет пути, чтобы обойти необходимость тех или иных предположений о существовании объектов. Если в рассматриваемой области окажется недостаточно элементов, то антецедент предложения (*) будет всегда ложным, и мы можем изменить консеквент и доказать, например, что $12=13$. Мы опять столкнулись со сведéнием арифметики к теории множеств. У нас есть очевидный выбор: или говорить, что арифметика оказывается аналитической (Фреге), или говорить, что логика оказывается синтетической (Рассел в некоторый период).

Хотя числа 5, 7, 12 встречаются в выражении (*) как индексы, порочного круга в этом сведéнии нет, так как мы можем расширить выражение (*) и избежать использования их за счет введения достаточного числа различных переменных. Весьма разительной чертой этого сведéния является то, что короткие предложения переходят в длинные. Вследствие этого строить и развивать арифметику в таких обозначениях было бы очень громоздким делом. Довольно скоро мы вынуждены были бы вводить сокращения. Строго говоря, это будет несущественным усложнением по той простой причине, что сведéние не предполагает введения новых способов вычисления, а только дает, между прочим, неформальные результаты вычислений, что могла бы сделать также и арифметика со сложной символикой. Это

зависит от того, как мы сводим арифметику к логике и что может делать арифметика в обычных обозначениях.

Более существенной трудностью этого сведéния является то, что его сопровождает все возрастающее усложнение связей между понятиями. Если мы попытаемся дать доказательство предложения (*) в расширенной форме, то нам придется подсчитывать переменные и в дополнение к операциям логики проходить точно такие же шаги, какие мы делаем в элементарных вычислениях. Мы в состоянии установить, что предложение (*) есть теорема логики только потому, что мы в состоянии установить, что соответствующее арифметическое предложение верно, но не наоборот. „Пришивая оборочки“ к арифметическому доказательству предложения „$7+5=12$“, мы получаем доказательство предложения (*) в логике. „Определение крещения в церкви частного типа не является больше определением крещения“.

13. Представим себе, что даны некоторая частная формальная система теории множеств, частная формальная система арифметики и фиксированное множество связывающих определений. Тогда в обозначениях теории множеств найдется теорема, которая посредством связывающих определений будет соответствовать арифметическому выражению „$1000+2000=3000$“. Эта формула, возможно, будет страшно длинной. Означает ли она то же самое, что и первоначальная формула арифметики? Не исключено, что человек, не знакомый с указанными определениями, встретившись с длинной формулой, придет в замешательство и не увидит какой-либо ясной связи между двумя этими формулами. Он может быть достаточно хорошо знаком с теорией множеств, чтобы понять длинную формулу и все-таки не распознать ее связи с короткой. Или же если он знает связывающие определения и стоит перед задачей упростить длинную формулу в соответствии с ними, то имеется немалый шанс, что он совершит ошибки и придет к неверному результату. Мы можем прийти к мысли, что указанные соображения являются посторонними, когда речь идет о смысле формулы. Но если человек не видит эквивалентности этих двух формул и после многих часов тяжелой работы, можем ли мы все еще говорить, что обе эти формулы означают для него одно и то же? Это — искусственная постановка вопроса, потому что никто не собирается выписывать длинную формулу или работать с ней, чтобы производить арифметические вычисления. У нас есть краткий довод, показывающий, что должна быть такая формула, и это почти исчерпывает смысл того гипотетического утверждения, что мы могли бы работать прямо с ней. Когда такая формула потребуется где-либо в математике, то мы естественно вернемся к тем наилучшим средствам, которые имеются в нашем распоряжении, чтобы ее найти. Если вначале мы имели бы только длинные формулы, мы не могли бы фактически производить много вычислений, пока не напали бы на какой-то систематический способ преобразования их в короткие.

Мы можем потратить много часов на разбор длинного формального доказательства. Но как только мы поймем его, мы не поставим каждую строку доказательства на свое прежнее место. Мы выработаем некоторую легко запоминаемую структуру, которая может включать известные теоремы, леммы, подслучаи, а также фиксировать, что определенные цепочки шагов имеют определенное хорошо известное строение. В то же время мы не должны держать в голове все подробности этой структуры. Доказательство может быть с милю длиной, однако мы можем ставить указатели при движении вперед и не заботиться о частях, которые изменяются, когда мы не смотрим на них. Как только мы убеждаемся, что некоторые части дают нам подтеорему, охватывающую все, что могут привнести эти части для доказательства заключительного результата, мы должны удержать в голове эту подтеорему.

14. Связывающие определения разбивают все теоремы теории множеств на два класса: теоремы, соответствующие теоремам арифметики, и теоремы, не являющиеся таковыми. Теоремы обоих классов, надо думать, имеются в системе всегда. Связывающие определения не изменяют их смысла, а просто дают способ выделения теорем первого класса. Большинство из нас видели картины, которые кажутся хаотичными при первом взгляде. И только пристальное рассмотрение позволяло на такой картине обнаружить, например, человеческое лицо. Различные впечатления, которые мы получаем от картины, не воздействуют на нее как на физический объект. Но все же картина означает разные вещи до того, как мы раскрыли в ней лицо, и после этого. Имеется сходное положение, когда связывающие определения позволяют нам распознавать определенные формулы теории множеств как замаскированные арифметические формулы. Если есть опасение, что мы забудем в следующий момент, как мы обнаружили на картине лицо, то мы можем как напоминание провести на ней линию красным карандашом. В результате всякий сможет увидеть лицо, хотя все конфигурации на картине останутся теми же самыми. Есть ли существенное различие в том, что подчеркивание сделано красным карандашом или нашим мысленным взором?

Изменяет ли доказательство смысл ранее недоказанного предложения? Изменяет ли новое доказательство математической теоремы ее смысл? Будем мыслить предложение как станцию в формальной системе. Кругом — страна, и мы не знаем, имеется ли какая-либо дорога, ведущая к станции. Вот мы находим одну дорогу, затем — другую. Но страна остается той же самой и станция — тоже. Под предложением мы оба понимаем теорему: существует бесконечно много простых чисел. Но вы знаете доказательство, а я — нет. Имеет ли это предложение для нас обоих один и тот же смысл? Пока неизвестно, существует ли бесконечно много пар простых n и $n+2$ (пар близнецов). Изменит ли доказательство смысл этого предложения? Доказательство откроет новые связи и напомнит ряд старых, известных связей и фактов, которые позволят каждому члену математического коллектива признать доказываемое предложение верным. Влияет ли возрастание знания на смысл предложения или отношение между знанием и смыслом только внешнее, напоминающее отношение между весом слона и нашим знанием этого веса?

Слон существует независимо от нашего знания, но в каком смысле доказательство существует независимо от всего знания? Если доказательство однажды найдено, то оно может быть соответствующим образом записано и поставлено на определенное место в учебниках или книгах. Но где оно оставалось прежде? Больше того, чтобы несколько страниц напечатанных знаков были названы доказательством, необходимо благоприятное стечение многих социологических обстоятельств, которые и делают его доказательством. Например, эти обстоятельства достаточны, чтобы вызвать у нескольких людей последовательные мыслительные процессы, выражающиеся, наконец, в признании, что заключительное предложение этих нескольких страниц должно быть верным. Мы неохотно отрицаем, что всякое возможное доказательство в формальной системе существует даже раньше, чем мы его открыли и усвоили с помощью построения умственного или при помощи красного карандаша. При подходящих объемах и времени работы машина может в конце концов выудить и это доказательство. В этом смысле неусвоенное доказательство существовало всегда, хотя усвоенное доказательство должно быть еще найдено. Однако является ли неусвоенное доказательство вообще доказательством? Если мы скажем, что оно является доказательством потому, что хотя оно и не усвоено, но может быть усвоено, то мы придем к вопросу, как отличать доказательства, усвоенные на самом деле, от доказательств, которые могут быть усвоены в принципе. Даже если объявится чудо и мы найдем способ увидеть географические контуры Венеры или найдем доказательство теоремы Ферма, откуда мы знаем, что нам всегда будет удаваться сделать неусвоенное „доказательство" понятным? По-видимому, похоже на догму утверждение о том, что всякое неусвоенное доказательство будет в конечном счете усвоено. Если же мы не хотим утверждать так много, то трудно придать — без порочного круга — какой-либо смысл термину „усвояемый", в соответствии с которым всякое неусвоенное доказательство является усвояемым.

15. Я думаю, что умею умножать. Однако нетрудно найти сложные задачи, которые я не смогу решить за 2 часа, например, 78 раз умножить 78 на 78. С некоторым усилием можно также найти вычислительные задачи, которые я не смогу решить, во всяком случае с помощью обычных средств, в течение месяца или даже всей моей жизни. В каком смысле я знаю, как складывать и умножать? Не только в том, что я умею обращаться с небольшими числами, ибо я чувствую, что с большими числами я также могу работать. Или, может быть, если я проживу достаточно долго, сохраняя себя, скажем, подобно выдающемуся атлету, я буду в состоянии завершить даже очень сложные арифметические вычисления. Но тогда, определенно, я не смогу выполнить их с помощью обычных средств, ибо может не хватить мела или не слишком длинными окажутся доски.

Эти соображения можно воспринять как крайне несущественные. Когда я говорю, что могу производить сложение и умножение, я не имею в виду предотвратить такую возможность, что практические трудности могут помешать мне выполнить некоторые сложные вычисления. Я чувствую, что могу сделать их, так сказать, в принципе. Вообще мы не ожидаем встретить искусственно сложные вычисления. Если бы было так, что никто не интересовался бы умножением менее чем 300 чисел, каждое из которых имеет не менее 10 цифр, то можно было бы сказать, что никто не умеет умножать, пока ему не помогает машина.

Слова „можно“, „разрешимо“ и т. д. означают различные явления в чистой математике и прикладной математике, в текущей математической работе и дискуссиях математических логиков. Находится человек, который говорит, что дальнейшее разложение числа π является обогащением математики и что проблема меняет свое положение в математике, если становится разрешимой. Так как теоретически разрешима проблема о том, какой десятичный знак стоит на миллионном месте в разложении числа π, то этот человек, повидимому, будет неправ, если скажет, что основания для решения этой проблемы еще должны быть найдены. Это только тогда так, когда мы понимаем разрешимость в смысле логиков. С точки зрения прикладных математиков проблема еще не решена, когда считается, что еще не нужны общие остроумные соображения для получения требуемого знака и для доказательства — к удовлетворению математиков, — что найденный знак действительно искомый. И представляется крайне догматическим категоричное утверждение о том, что такие соображения будут обязательно найдены. Верно, что финитисты и интуиционисты не беспокоятся о таких вопросах, потому что они теряют весь интерес, как только проблема оказывается разрешимой теоретически. Однако это не означает того, что мы не можем интересоваться практической реализуемостью как понятием, достойным философских рассмотрений.

Всегда возникает путаница, когда два человека выбирают два различных смысла и каждый из них отказывается признать, что существует также и другой смысл. Возможно, феноменологист является одним из тех, кто допускает оба смысла и различает их один от другого. Во всяком случае, пока мы не унифицировали их, кажется удобным использовать оба смысла.

16. Существует глубокая пропасть между тем, что можно сделать в принципе, и тем, что можно сделать на практике. Нужно расширять границы практических возможностей; вот в чем важность арабских (позиционных) обозначений, логарифмических таблиц, вычислительных машин. Имеет ли все это лишь практическое значение или представляет и теоретический интерес? Не следует ли говорить, что в таких фундаментальных усовершенствованиях „технологии“ математики теоретическое и практическое значения сливаются вместе?

Не всегда легко провести грань между теоретическим и практическим. Числа вида $2^{2^n}+1$ называются числами Ферма, так как Ферма предположил, что все такие числа простые. Со времени Ферма было доказано, что для $n=5, 6, 7, 8$ эти числа являются составными. Доказательство в каждом случае представляло нетривиальный фрагмент математики, хотя при достаточном терпении ответ мог бы быть получен с помощью обычных вычислений. Можно сказать, что эти доказательства снабжают нас новыми средствами для решения задач, которые можно было бы решить обычными методами вычислений. Введение новых средств в математике важно, и именно определения служат введению новых средств. Поэтому было бы заблуждением говорить об этих определениях как о „простых сокращениях“. Допустим, что найдено доказательство некоторой теоремы теории чисел и оказалось возможным перевести это доказательство в элементарную символику теории множеств путем исключения определенных теоретико-числовых терминов. Тогда можно утверждать, что это переведенное доказательство не смог бы найти даже тот, кто работает исключительно в этой символике; он не смог бы правильно понять это доказательство, хотя и был бы знаком с определениями исключенных терминов. Если дана одна теория множеств, но связывающие определения с арифметикой еще отсутствуют, то мы все же не имели бы арифметики в полной мере, потому что мы фактически не умели бы строить арифметических доказательств и не могли бы производить арифметических вычислений в теории множеств. Если даны и теория множеств и связывающие определения, то мы продолжаем развивать арифметику, как прежде, однако с сознанием того, что имеется смысл, в котором наши доказательства и вычисления могли бы быть истолкованы в теории множеств. Но построение арифметики все еще отличается от построения теории множеств. Мы не меняем нашего способа построения арифметики. Это и есть тот смысл, в котором арифметика не сводится к теории множеств и на самом деле не сводима.

Сводим ли мы математику к абстрактной теории множеств, или мы получаем теорию множеств из математики, вводя массу новых слов? В анализе мы замечаем, что определенные числа, такие, как π и e, имеют особое значение. В один прекрасный день мы приходим к изучению теории вещественных чисел. Так как мы хотим, чтобы теория была общей, а изложение — достаточно гладким, мы постулируем и выделяем как особые элементы много вещественных чисел. Когда мы узнаем, что вещественные числа, натуральные числа и многие другие объекты можно трактовать как множества, то это побуждает нас заняться общей теорией множеств. Чтобы сделать и это изложение по возможности гладким, мы опять постулируем и выделяем много множеств. „Если столы, стулья, буфеты и т. д. обернуть достаточным количеством бумаги, то в конце концов они определенно примут форму шара". В этом процессе мы упускаем из виду различия между интересными и неинтересными множествами, полезными и бесполезными вещественными числами. Чтобы открыть эти различия снова, мы должны освободиться от всей обертки. Могли бы ли мы описать этот обратный процесс как сведе́ние (например, „Госпожа Е. находится на диете") абстрактной теории множеств к математике?

Если мы мыслим о натуральных числах в терминах истинных высказываний, то теория множеств также сводима к арифметике, по крайней мере в том смысле, что если дана некоторая непротиворечивая формальная система для теории множеств, то можно найти такой перевод, при котором все теоремы системы обращаются в истинные арифметические высказывания. То же самое верно и для любой другой ветви математики ввиду возможности арифметического представления формальных систем. Следовательно, мы можем сказать, что вся математика сводима к арифметике. Это верно в смысле совершенно отличном от того, который известен как арифметизация анализа. Арифметизация логики включает в себя изменение объекта исследования, а именно переход от рассуждений о классах, множествах и т. д. к рассуждениям о том, как мы рассуждаем.

17. Когда мы спрашиваем, что такое число, что такое число один, то мы, по-видимому, хотим ответа на вопрос, а чем же на самом деле являются числа. Если числа ни субъективны, ни вне нас в пространстве, то чем же они могли бы быть? И тогда нам доставляет удовольствие ответ, что числа в действительности являются определенными классами. Мы получаем облегчение, имея таким образом разоблаченные числа. Но что дает это разоблачение? Определение числа по Фреге, кажется, довольно тесно примыкает к нашему интуитивному представлению о числе, так что хочется принять его в качестве правильного анализа этого понятия. Но что дальше?

По-видимому, существует вера в то, что сведе́ние математики к теории множеств переложит математику на базис, заслуживающий большего доверия. Иначе парадоксы не побудили бы Фреге сказать, что основания арифметики колеблются. Как мы теперь знаем, это было неоправданно. Мы понимаем арифметику лучше, чем теорию множеств, чему свидетельством — наличие крайне содержательных доказательств непротиворечивости арифметики. Основания арифметики заслуживают большего доверия, чем основания теории множеств.

Очень большой интерес имело бы скорее обоснование теории множеств на арифметике или на расширении арифметики до системы бесконечных ординальных чисел.

Существуют различные способы определения числа в терминах классов. Каждое из них исходит из неопределенного понятия числа и ведет к понятию числа, и они оказываются эквивалентными, но не в силу взаимных связей между различными определениями, а через каналы, связывающие их с чистым понятием числа. Может быть, это указывает на определенный приоритет чисел перед соответствующими классами?

Другое преимущество отождествления чисел с соответствующими классами, так сказать, обусловливается или „рекомендуется тем обстоятельством, что это отождествление не оставляет сомнения касательно теорем существования". „Постулирование" того, что предел заполняет щель любого дедекиндова сечения, имеет такие же преимущества, как преимущества „воровства перед честным тяжелым трудом", когда задачей этого честного труда является отождествление предела с множеством дробей левого класса сечения. В некотором смысле верно, что эта последняя задача „не требует новых предположений, но позволяет нам действовать дедуктивно, исходя из первоначального аппарата логики". Однако это только потому так, что в первоначальном аппарате логики мы уже сделали предположения подобного рода. Если существование постулированного предела подвергается сомнению, то и существование соответствующего класса равным образом вызывает подозрения. Нет причин предполагать, что числа испаряются или исчезают, а классы подобны скалам.

Говорят, что сведе́ние к теории множеств дает „точную формулировку того, что философы понимают в утверждении об априорности математики". Это высказывание не будет ни содержательным, ни верным.

„Говоря об арифметике (алгебре, анализе) как части логики, я хочу сказать, что считаю понятие числа полностью не зависимым от понятия пространства и времени, что я рассматриваю его как прямое следствие из законов мышления" (Дедекинд). Однако кажется ясным, что вместо разрешения трудностей, возникающих в вопросах обоснования отдельных частей математики, сведе́ние к теории множеств просто перемешивает в беспорядке все эти трудности и добавляет ряд новых.

Говорят, что аксиомы арифметики допускают различные интерпретации, в то время как сведе́ние к теории множеств исключает такую неопределенность. Верно, что понятие множества входит в аксиому индукции, а нужная нам интерпретация понятия множества гарантирует нужную интерпретацию аксиом арифметики. Но арифметике нужны только индуктивные множества, которые являются лишь частным типом множества. Более того, мы не спутали бы возможность некорректных интерпретаций с невозможностью корректных интерпретаций. Могут быть оба случая: и корректная интерпретация аксиом арифметики и некорректная интерпретация аксиом теории множеств. Сверх того интерпретация аксиом теории множеств включает в себя большие методологические трудности.

18. Конечно, нельзя отрицать, что определение Фреге имеет большие достоинства с точки зрения приложений. Но приложения понятия числа к эмпирическому материалу не образуют ни части логики, ни части теории множеств или арифметики. Можно говорить о приложениях, когда мы выполняем умножение в соответствии с правилами вычислений или ведем формальное доказательство, соблюдая правила логики. Если же мы рассматриваем предложение „Париж имеет четыре миллиона жителей“ или „два кролика плюс два кролика суть четыре кролика“, то имеется известное сомнение в том, что эти предложения являются выражением числа „4 миллиона“ и математического утверждения „$2+2=4$“.

Такие выражения не могут появиться ни в арифметике, ни в теории множеств по той простой причине, что такие слова как „Париж“, „кролики“, „жители“ не встречаются в словаре указанных теорий; теоретико-множественное определение понятия числа не приносит здесь помощи. Если полагают, что эти определения позволяют применять числа в рамках некоторого широкого языка, то неясно, почему этого нельзя делать без указанных определений. Допустим, что мы должны вывести предложение „ей присущи две добродетели“ из предложения „ее единственными добродетелями являются ум и красота“. По-видимому, думают, что это следствие можно получить, только используя определение числа 2 по Фреге, ибо иначе нельзя показать, что класс ее добродетелей имеет число 2. Однако мы определенно можем сделать этот вывод, не обращаясь к определению Фреге, если нам разрешат пользоваться всем богатым многообразием обычных рассуждений.

Во всяком случае, почему такие применения должны рассматриваться как собственное дело теории множеств или арифметики? Математика и ее приложения суть два предмета, которые удобно изучать отдельно. Если есть желание иметь общий язык, который включал бы математику и другие предметы, то связь между числами можно также хорошо обеспечить с помощью аксиом, которые утверждают, например, что класс содержит $n+1$ элемент тогда и только тогда, когда он получается присоединением нового элемента к классу, содержащему n элементов. Другими словами, если мы имеем дело со случаем, когда числа не были определены, то мы можем при желании добавить ряд аксиом, чтобы суметь проделать работу по определениям Фреге. Результаты будут теми же самыми, лишь кроме того, что математика и ее приложения будут разделены более естественной границей.

19. Знаменательно, что антиномия Рассела — Цермело привела Фреге к сомнению в том, что арифметике вообще может быть дано надежное обоснование. На самом деле противоречия никоим образом не делают необходимым изменения определений числа в терминах множеств. Они только влияют на проекты формализации общей теории множеств. Поэтому мы сталкиваемся с задачей построения непротиворечивой и адекватной формальной системы для теории классов. Сначала мы были поражены тем фактом, что натуральные числа, вещественные числа и многие другие объекты — все можно получить из множеств. Затем мы нашли, что противоречия также можно получить из множеств. Теперь мы должны построить исчисление, которое включало бы в себя настолько много различных событий, насколько это возможно, но не включало бы противоречий.

Если мы не связаны рамками какой-либо системы, то почему мы не можем трактовать доказательство противоречия лишь как другой кусочек математики, который мог быть признан интересным или неинтересным более или менее таким же образом, как и другие математические доказательства? Верно, что заключение, являющееся противоречием, не может быть таким же важным, как обычная теорема. Доказательство устанавливает и то и другое более или менее обычным путем: или показывается „ненадежность нашей основной логической интуиции“, или вскрывается некоторая путаница со стороны предлагающего доказательство. Деля обе части правильного равенства $3\times 0=2\times 0$ или $3(2-2)=2(2-2)$ на 0, мы легко получим противоречие $3=2$. Такое открытие не взволнует нас, так как мы хорошо знаем, что ограничение $c\neq 0$ существенно в выводе $a=b$ из $ac=bc$. Почему мы не можем также легко отбросить противоречия в теории множеств? Первая напрашивающаяся причина состоит в том, что у нас нет сравнительно простого и естественного ограничения, которое хорошо бы работало во всех случаях. Как иногда говорят, это указывает на более важное обстоятельство, а именно на то, что наше понятие класса не является достаточно ясным.

20. Формальные системы должны приспосабливаться к фактически существующим доказательствам в живой и развивающейся математике, но не наоборот. Если формальная система, адекватная математическому анализу, дает противоречие, то мы скажем, что больше не доверяем этой формальной системе. Как это будет влиять на многие математические результаты анализа, накопленные в нем за столетия? Трудно делать заключения на основе таких неопределенных гипотез. Однако мы можем припомнить, что практически ни одна из важных математических теорем и ни одно из важных математических доказательств не были удалены из анализа вследствие противоречий теории множеств, которые, по мнению ряда лиц, дискредитировали фундаментальные методы аргументации в теории множеств.

Подчеркивание стойкой приверженности к правилам, которые мы используем в математических рассуждениях, породило острое различие между путаницей и противоречием. Истолкование бесконечно малой величины то как нуля, то как положительной величины в одном и том же доказательстве является примером путаницы и непоследовательного рассуждения, но еще не является примером противоречия. Критика доказательств, использующих бесконечно малые, является двусмысленной и неопределенной и не такой, из которой следует противоречие.

Почему всех беспокоят противоречия? Представим себе математика, который доставляет нам радость открытием ряда новых теорем. Этот математик печатает книгу. Его соперник изучает доказательства и приходит к нему с вызовом: „Используя ваши методы доказательства, я могу получить даже противоречие!“ Мог бы этот математик тогда ответить: «Очень хорошо, как приятно, что мои методы имеют интересные приложения, о которых я не подозревал! Позвольте мне добавить другую главу, под названием „Дальнейшие приложения вышеуказанных методов“»? Известно, что хорошей рекомендацией метода является круг тех интересных теорем, которые можно доказать с помощью этого метода. Хотя противоречия часто интересны, однако никто, пока его целью не является эксперимент с противоречиями, не рекомендовал метода на том основании, что он достаточно силен, чтобы давать противоречия. Обычная реакция на появление противоречия состоит в анализе всех шагов, приводящих к нему. Затем некоторые из этих шагов объявляются недопустимыми. И как отзвук противоречия появляется отрицание всех доказательств, содержащих подобные шаги. В этом смысле противоречия являются заразными. Доказательства, которые иначе рассматривались бы как здоровые, подвергаются строгой изоляции ввиду их контакта с противоречиями.

21. Стало обычаем использовать формальные системы как средство для отделения желаемых аргументов от нежелаемых. Формальные системы строятся по такому руководящему принципу: когда обнаруживается, что какой-либо аргумент ложен, то все аргументы подобного рода должны быть исключены. Это создает впечатление меньшего произвола в нашем отказе от определенных аргументов, ибо мы отказываемся не только от одного частного аргумента, но и от всех аргументов его рода. Если дан какой-либо аргумент, то существует, однако, неизбежный элемент произвола во всякой попытке определить род, к которому он принадлежит. На самом деле имеется так много различных способов, с помощью которых мы можем определить искомую категорию данного аргумента! Мы даже не должны использовать формальные системы для этой специальной цели.

Предположим, что дано семейство теорем и формальная система, в которой для этих теорем могут быть проведены доказательства. Допустим, что в этой формальной системе обнаружено противоречие. Тем самым эта система дискредитирована. Что теперь будет с теми теоремами, которые были первоначально открыты вне связи с этой формальной системой? Верно, что теперь существует общий метод доказательства этих теорем в данной формальной системе, так как имеется общепринятый принцип, что противоречие влечет что угодно. Все же в системе мы можем отличать доказательства, проходящие через противоречие, от доказательств, не проходящих через противоречие. Всякое предложение системы имеет доказательство первого рода, но не всякое предложение имеет хотя бы одно доказательство второго рода.

Будет ли противоречивость формальной системы разрушать ценность тех доказательств, которые не проходят через противоречие? Конечно, первый вопрос, который здесь встает, состоит в том, с какой точки зрения мы оценивали доказательства. Интересовались ли мы первоначально доказательствами ввиду их красоты или верности заключений, которые они устанавливают, или их полезностью? Доказательства в противоречивой системе или системе, относительно которой неизвестно, противоречива она или нет, часто могут иметь эвристическую ценность; например, существуют теоремы теории чисел, которые сначала были доказаны методами анализа и лишь позже получили более элементарные доказательства.

22. Известно, что мы можем получить дифференциальное и интегральное исчисления в некоторой формальной системе, относительно которой мы не знаем, будет ли она непротиворечивой. Предположим, что эта система оказалась противоречивой. Следовательно, мы можем вывести в ней все разновидности ложных и абсурдных предложений, некоторые из которых касаются дифференциального и интегрального исчислений.

Так как эти исчисления можно применить к построению мостов, то мы сможем доказать, что колонна диаметром в один метр будет вполне достаточна при постройке моста, хотя фактически будет нужна колонна диаметром в два с половиной метра. Отсюда мы можем согласиться с тем, что мосты будут разрушаться вследствие противоречивости той частной формальной системы, в которой мы развиваем исчисления.

На самом деле такие вещи не происходят. Прежде всего тот, кто создает и развивает аксиоматические основания исчислений, обычно не то же самое лицо, которое применяет эти исчисления при строительстве мостов. Конечно, не исключено, что случайно один и тот же человек будет приглашен или нанят для участия в обоих видах работы. Но даже и в этом случае он не будет возвращаться к своей излюбленной теории множеств, чтобы производить нужные вычисления. Более того, если он попытается оправдать эти вычисления после того, как они сделаны, выписывая в явном виде аксиомы и теоремы теории множеств, то он еще не преодолеет опасности получить неверный результат, потому что он не использует весь аппарат, который доступен в системе, а делает лишь такие ходы, которые могли бы быть оправданы в непротиворечивых системах.

Не обязательно формализовать математику и доказывать непротиворечивость формальных систем, если рассматриваемой проблемой является вопрос о том, будут или не будут вдруг разрушаться мосты. Когда речь идет о строительстве мостов, может встать много более актуальных проблем.

23. Что касается современного состояния математики, то рассуждения о противоречивости систем являются довольно бесплодными. Ни одна из формальных систем, широко используемых сегодня, не находится под очень серьезным подозрением оказаться противоречивой. Важность теоретико-множественных противоречий иногда сильно преувеличена. Когда были открыты неевклидовы геометрии и обнаружено их расхождение с нашей интуицией, то естественно было искать доказательства их непротиворечивости с помощью моделей. И тогда оставался один шаг до вопроса, а на каком основании покоится сама модель? Когда Кронекер думал о классическом анализе, как об игре со словами, опять было естественно, что он поднял вопрос о том, была ли эта игра противоречивой. Однако более современные поиски доказательств непротиворечивости мотивируются различно и имеют более серьезные цели, чем избежание противоречий. Они служат лучшему уяснению понятий и методов.

„Суеверен страх и благоговеен трепет математиков перед лицом противоречия“. Но Фреге был логиком, а Кантор — математиком. Кантор ничуть не заботился о противоречиях. Действительно, он сказал: „То, что получил Бурали-Форти, сущая чепуха. Если вы вернетесь к его статьям в *Circolo Matematico*, вы заметите, что он собственно даже не уразумел понятия вполне упорядоченного множества“. По общему признанию, хорошо известное канторовское определение понятия „множества“ является трудным. Однако нельзя отрицать, что благодаря наличию в нем „генетического“ элемента это определение исключает известные способы получения противоречий.

24. Попытка объяснить математическое существование через непротиворечивость представляется уклончивым и обходным маневром: так как мы не можем дать подходящей положительной характеристики всех математических объектов, будем говорить, что в математике все то реально, т. е. существует, что не является невозможным. С одной стороны, конструктивность, по-видимому, упускает ряд нужных математических объектов и ставит перед нами задачу объяснить существование конструкции. С другой стороны, мир идей — мир Платона — в отличие от мира материальных вещей в пространстве и времени, образующих основу физики, кажется, очень немногое может объяснить в математике.

Классическое определение квантора существования через квантор общности несет на себе печать отождествления существования с непротиворечивостью, в то время как опыт с физическим миром подсказывает нам, что, хотя фактическое не является невозможным, возможное не всегда существует. Тогда как в физике имеется естественное различие между явлениями и законами, по-видимому, всю математику наполняют законы и конструкции. Радикальный феноменолизм бесполезен и тщетен, когда дело касается оснований эмпирических знаний. Но даже и здесь неохотно сохраняются основные различия в тех сомнительных сущностях, которые называются чувственными восприятиями. Однако математическими объектами являются связи, отношения и структуры.

25. Не исключено, что в процессе развития математики у некоторых людей будут все более усиливаться тенденции рассматривать математику как науку о естественной истории чисел и классов. Как философская позиция такая точка зрения слишком быстро ведет к мистицизму и делает почти невозможной отчетливую философию математики, а если и возможной, то разве лишь как вид метафизической поэзии.

Если, например, числа трактуются как собственные имена, то тогда нет оснований спрашивать, существуют ли целые положительные числа, так как иначе числа не были бы собственными именами. Вопрос о существовании должен быть направлен в сторону выполнимости некоторого свойства, отношения, условия, теории, а именно имеется ли какой-либо объект или система объектов с подходящей структурой, удовлетворяющих некоторому данному условию. Неевклидовы пространства существуют, так как аксиомы неевклидовых геометрий имеют модели в евклидовом пространстве. Комплексные числа существуют, так как их аксиомы могут быть реализованы на парах вещественных чисел. Каждое отдельное комплексное число, например i, имеет производное существование как составляющий элемент всей структуры комплексных чисел, удовлетворяющий определенным отношениям к другим комплексным числам.

Хорошо известно, что такие модельные построения, вообще говоря, в конце концов приводят к целым положительным числам и континууму. Имеется во всяком случае некоторый вид порочного круга в объяснении существования непротиворечивостью, а непротиворечивости выполнимостью. Мы вынуждены начинать с каких-то основных объектов, и встает вопрос, в каком же смысле они существуют.

Кажется разумным предположить, что если теория непротиворечива, то она должна иметь некоторую интерпретацию. Может оказаться очень трудным построить модель. Однако как может теория быть непротиворечивой и все же не выполняться ни на какой модели? Важнейшая теорема логики дает точный ответ для теорий, представляемых как формальные системы в рамках логики, т. е. теории кванторов: всякая такая теория, если она непротиворечива, имеет относительно простую модель в теории целых чисел, простую в том смысле, что при ее построении будут достаточны даже предикаты низшего уровня в арифметической иерархии.

26. Отсюда легко понять, что основной вопрос — это смысл, в котором понимается существование целых положительных чисел. Более точно, нас интересует существование структуры или отношения, которые удовлетворяли бы аксиомам арифметики; индивидуальные целые положительные числа обладали бы производным существованием в такой структуре.

С первого взгляда кажется, что формальные доказательства непротиворечивости аксиом арифметики обеспечивают (модифицированное) финитистское решение этого вопроса и что перевод в интуиционистскую систему арифметики дает интуиционистское решение вопроса. Если бы это было действительно так, мы могли бы сосредоточить свое внимание на том, что Гильберт называет комбинаторной сердцевиной математического мышления или что Брауэр называет базисной интуицией „два в одном“. Существует, однако, ряд трудностей, сопровождающих неполноту аксиом арифметики.

Арифметические переводы теорем в обычные системы множеств часто больше не являются теоремами обычных систем арифметики. Отсюда как результат доказательство непротиворечивости аксиом арифметики не решает вопроса о непротиворечивости классического анализа или теории множеств. Даже в доказательстве непротиворечивости арифметики появляется неопределенность в понятии финитистского доказательства.

Более того, имеется некоторый выбор между аксиоматическими системами арифметики не только в том простом смысле, что известны различные эквивалентные формулировки, скажем, евклидовой геометрии, но и в том более глубоком смысле, что кажется вполне оправданным присоединить трансфинитную индукцию до первого эпсилон-числа к обычным системам арифметических аксиом или их расширениям. Это указывает на то, что имеется кое-что абсолютное в понятии числа, и мы только постепенно приближаемся к нему посредством наших мысленных экспериментов или по крайней мере мы не имеем полного контроля над своими мысленными конструкциями, которые, однажды появившись, имеют тенденцию жить собственной жизнью.

Существование непротиворечивых систем, которые не имеют стандартных моделей (например, являющихся ω-противоречивыми), указывает на определенное расхождение между существованием и непротиворечивостью с некоторой другой стороны. Обычные аксиомы требуют, чтобы существовали определенные множества или числа, но ничего не говорят о том, что подлежит исключению. Ввиду этого

мы можем, не нарушая аксиом, присоединить к натуральным числам ненатуральные и, больше того, расширить аксиоматику, добавляя без противоречия новые аксиомы, требующие как раз существования этих ненатуральных чисел. Не без основания можно согласиться с тем, что хотя эти ненатуральные числа и требуются аксиомами непротиворечивой системы, они не будут существовать. Такая точка зрения опять расстраивает планы безоговорочного отождествления непротиворечивости с существованием.

27. Имеется соблазн разделаться с задачами обоснования, используя неконструктивное правило индукции (ω-правило) и аналогичные семантические понятия для описания всех истинных предложений в арифметике, классическом анализе и теории множеств. Конечно, на этом пути ненатуральные числа, например, исключаются основным принципом. Однако здесь тогда остается немного для объяснения, ибо то, что должно объясняться, считается просто доказанным. В связи с этим более приемлем другой путь, а именно перенос методов конечного по аналогии на бесконечное. Мы не можем совершить бесконечного числа шагов в вычислении или использовать бесконечно много посылок в доказательстве, пока не научимся строить на содержательной основе конечные схемы, охватывающие бесконечно много шагов или посылок. И математическая индукция и трансфинитная индукция являются принципами, посредством которых мы совершаем умозаключения лишь после того, как с помощью мысленных экспериментов найдем две подходящие посылки, которые охватывают бесконечно много нужных нам посылок. Чрезвычайно важной целью математической деятельности является открытие методов, с помощью которых бесконечное может изучаться конечным интеллектом. Постулирование бесконечного интеллекта несет в себе мало положительного содержания, кроме, может быть, того, что оно делает ненужной всякую математическую деятельность.

Вероятно, кажется загадочным, что, например, аксиомы Пеано, в частности одна из возможных формулировок с конечным числом аксиом, содержат в себе так много неожиданного. Конечно, существенным обстоятельством является возможность повторных применений тех же самых старых правил много-много раз в неограниченном числе комбинаций. Этим объясняется также и то, почему доказательство непротиворечивости такой системы не является легким делом.

Что касается природы континуума, то здесь имеется ряд методологических трудностей, но уже другого порядка, чем в случае натуральных чисел. В обычных формальных системах для классического анализа широко распространено использование импредикативных определений. Одно указание на различный характер трудностей дает следующий факт: ни одно сравнительно содержательное доказательство непротиворечивости не является приемлемым для любой формальной системы классического анализа, которая была бы такой же естественной, как обычная система арифметики.

Надо прямо сказать, что на основе наших современных знаний мы с полной уверенностью можем находить доказательства непротиворечивости только для предикативных систем.

28. В проблематике, касающейся континуума, было предложено несколько разных направлений.

Во-первых, представляется желательным развить дальше и изучить более формально теорию Брауэра, изложенную также в работах Вейля, но различая при этом эффективные и свободно выбираемые секвенции.

Другое направление связано с ограничением множеств, в частности множеств положительных целых чисел, до некоторой менее неконструктивной совокупности, обладающей хорошими свойствами замыкания, например, гиперарифметическая теория множеств или некоторая подлежащая еще определению область предикативной теории множеств.

Третье направление состоит в том, чтобы для оправдания импредикативных формулировок анализа использовать то, что Бернайс называет квазикомбинаторным принципом. Это зависит от естественного, но не проверяемого обобщения ситуации с конечными множествами на бесконечные множества. Любое множество целых положительных чисел или содержит 1, или нет; или содержит 2, или нет и т. д. Отсюда должно быть $2^{\aleph_0}$ возможных множеств, которые включают все числовые множества, определимые в любой теории множеств. В то время как это поставляет нам пример непополнимой модели для континуума, все же это не дает доказательства непротиворечивости в теоретико-доказательном смысле. Наиболее важной проблемой, касающейся континуума, представляется вопрос о формальном доказательстве непротиворечивости какой-либо известной формальной системы, адекватной импредикативному описанию классического анализа.

Для этой цели, так же как для доказательства непротиворечивости предикативных систем, центральным вопросом является вопрос об упорядочиваниях целых положительных чисел с помощью наших мысленных актов, а именно надо научиться строить вполне упорядоченные последовательности целых положительных чисел, удовлетворяющие специальным требованиям, а также научиться узнавать, что эти упорядочения действительно представляют собой вполне упорядочения. На этом пути оправдывается применение принципа трансфинитной индукции к таким упорядочениям. Такие вполне упорядочения являются твердым орешком в теории математических структур. По-видимому, пока математические мысли выражаются в языке и символах, не будет непреодолимой причины, чтобы выходить за пределы второго числового класса.

29. Существуют и другие точки зрения, которые иногда кажутся слишком односторонними, когда речь идет об основаниях математики. Алгебраисты имеют расположение к абстрактной точке зрения и обычно говорят, что сущность всей математики отражает теория групп. Однако, так как группы могут быть столь многих различных типов и так как понятие группы допускает много различных обобщений, ведущих к другим математическим структурам, то сама теория групп не воссоздает правильной картины основных понятий и методов математики.

Иногда думают, что математику можно обосновать на базе физических явлений. Когда имеются в наличии физические явления, то можно мыслить о множествах явлений, множествах множеств их и т. д. Если вообще не признавать идеальных конструкций, то не будет пустых множеств, а единичное множество будет тождественно с его единственным элементом. Более того, не будет множеств, а будут только суммы, такие, как, например,

$$\{x, \{y, \{x, y\}\}\}, \quad \{x, \{x, y\}\}, \quad \{y, \{x, y\}\},$$

представляющие то же самое, что и $\{x, y\}$. Во всяком случае, пока мы не предположим, что существует бесконечно много физических явлений, или пока не допустим бесконечных повторений процесса образования новых множеств, мы не придем к целым положительным числам. Такой подход оперирует с бесконечностью только как с мыслью, пришедшей в голову слишком поздно. Поэтому физические явления не подходят для изучения и обоснования математики, сущностью которой является бесконечность. Сверх того, трудно придать смысл предположению, что существует бесконечно много физических явлений.

СОДЕРЖАНИЕ