

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

С. І. Пільтяй

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА ТА ПОШИРЕННЯ РАДІОХВИЛЬ ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 172 «Телекомунікації та радіотехніка»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Рецензент: *Омеляненко М. Ю.*, старший викладач, КПІ ім. Ігоря Сікорського.

За редакцією укладача

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 5 від 14.01.2021 р.)
за поданням Вченої ради Радіотехнічного факультету (протокол № 11/2020 від 30.11.2020 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

Пільтяй Степан Іванович, к.т.н., доцент

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА ТА ПОШИРЕННЯ РАДІОХВИЛЬ ПРАКТИКУМ

Електродинаміка та поширення радіохвиль: Практикум [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / С. І. Пільтяй; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл 1,93 Мбайт). — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. — 54 с.

Посібник містить приклади та розв'язки типових задач із навчальної дисципліни «Електродинаміка та поширення радіохвиль». Метою посібника є ознайомлення студентів із методами розв'язання теоретичних і практичних задач дисципліни. Особливу увагу приділено задачам, які виникають при дослідженні поширення, відбиття та заломлення плоских електромагнітних хвиль, хвиль у хвилеводах і лініях передачі інших видів.

Навчальний посібник буде корисним студентам радіотехнічних, радіофізичних та телекомунікаційних спеціальностей при вивченні методів розв'язання різноманітних задач електродинаміки та поширення радіохвиль.

© С. І. Пільтяй, 2021

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021

ЗМІСТ

Тема 1. Векторний аналіз.....	4
Тема 2. Основні поняття електродинаміки. Рівняння Максвелла	10
Тема 3. Статичні та стаціонарні електромагнітні поля	16
Тема 4. Плоскі електромагнітні хвилі	21
Тема 5. Відбиття і заломлення плоских електромагнітних хвиль.....	29
Тема 6. Хвилеводи	34
Тема 7. Лінії передачі з хвилями типу Т (ТЕМ).....	40
Тема 8. Об'ємні резонатори.....	43
Тема 9. Елементарні випромінювачі	45
Рекомендована література	49

Тема 1. Векторний аналіз

Задача 1.1. Довести тотожність векторного аналізу $\boxed{\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} \equiv 0}$ в ортогональній криволінійній системі координат, де \vec{A} — векторне поле.

Розв'язок

I спосіб

Розпишемо ротор векторного поля \vec{A} в ортогональній криволінійній системі координат (x_1, x_2, x_3) із використанням коефіцієнтів Ламе (h_1, h_2, h_3) :

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_{x_1} & h_2 \vec{e}_{x_2} & h_3 \vec{e}_{x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 A_{x_1} & h_2 A_{x_2} & h_3 A_{x_3} \end{vmatrix}.$$

Розкривши визначник за першим рядком, отримаємо розгорнутий вираз:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{\vec{e}_{x_1}}{h_2 h_3} \cdot \left[\frac{\partial(h_3 A_{x_3})}{\partial x_2} - \frac{\partial(h_2 A_{x_2})}{\partial x_3} \right] + \frac{\vec{e}_{x_2}}{h_1 h_3} \cdot \left[\frac{\partial(h_1 A_{x_1})}{\partial x_3} - \frac{\partial(h_3 A_{x_3})}{\partial x_1} \right] + \frac{\vec{e}_{x_3}}{h_1 h_2} \cdot \left[\frac{\partial(h_2 A_{x_2})}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1 A_{x_1})}{\partial x_2} \right];$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \left[\frac{\partial(h_2 h_3 B_{x_1})}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 B_{x_2})}{\partial x_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 B_{x_3})}{\partial x_3} \right]. \text{ Підставимо складові ротора:}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 (\operatorname{rot} \vec{A})_{x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 (\operatorname{rot} \vec{A})_{x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 (\operatorname{rot} \vec{A})_{x_3}) \right] = \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_3 A_{x_3})}{\partial x_2} - \frac{\partial(h_2 A_{x_2})}{\partial x_3} \right] \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial(h_1 A_{x_1})}{\partial x_3} - \frac{\partial(h_3 A_{x_3})}{\partial x_1} \right] \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 A_{x_2})}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1 A_{x_1})}{\partial x_2} \right] \right) \right] = \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \left[\frac{\partial^2(h_3 A_{x_3})}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2(h_2 A_{x_2})}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2(h_1 A_{x_1})}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2(h_3 A_{x_3})}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2(h_2 A_{x_2})}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2(h_1 A_{x_1})}{\partial x_2 \partial x_3} \right] \equiv 0. \end{aligned}$$

II спосіб

Запишемо диференціальну скалярно-векторну операцію другого порядку $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A}$ за допомогою оператора Гамільтона: $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$. Виконаємо колову перестановку множників у змішаному скалярно-векторному добутку. Його знак при цьому не змінюється: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})$. Оскільки векторний добуток довільного вектора на самого себе дорівнює нулю, то остаточно ми отримуємо: $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \equiv 0$.

Задача 1.2. Довести тотожність векторного аналізу $\boxed{\text{rot grad } U \equiv 0}$ в ортогональній криволінійній системі координат, де U — скалярне поле.

Розв'язок

I спосіб

Розпишемо градієнт скалярного поля U в ортогональній криволінійній системі координат (x_1, x_2, x_3) із використанням коефіцієнтів Ламе (h_1, h_2, h_3) :

$$\boxed{\text{grad } U = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot \vec{e}_{x_1} + \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_2} \cdot \vec{e}_{x_2} + \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_3} \cdot \vec{e}_{x_3}}.$$

Візьмемо ротор від градієнта в ортогональній криволінійній системі координат:

$$\begin{aligned} \text{rot grad } U &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_{x_1} & h_2 \vec{e}_{x_2} & h_3 \vec{e}_{x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 (\text{grad } U)_{x_1} & h_2 (\text{grad } U)_{x_2} & h_3 (\text{grad } U)_{x_3} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\vec{e}_{x_1}}{h_2 h_3} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 (\text{grad } U)_{x_3}) - \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 (\text{grad } U)_{x_2}) \right] + \frac{\vec{e}_{x_2}}{h_1 h_3} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 (\text{grad } U)_{x_1}) - \frac{\partial}{\partial x_1} (h_3 (\text{grad } U)_{x_3}) \right] + \\ &+ \frac{\vec{e}_{x_3}}{h_1 h_2} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 (\text{grad } U)_{x_2}) - \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 (\text{grad } U)_{x_1}) \right] = \frac{\vec{e}_{x_1}}{h_2 h_3} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(h_3 \cdot \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(h_2 \cdot \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) \right] + \\ &+ \frac{\vec{e}_{x_2}}{h_1 h_3} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_3} \left(h_1 \cdot \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(h_3 \cdot \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{\vec{e}_{x_3}}{h_1 h_2} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(h_2 \cdot \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(h_1 \cdot \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) \right] = \\ &= \frac{\vec{e}_{x_1}}{h_2 h_3} \cdot \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_3} \right] + \frac{\vec{e}_{x_2}}{h_1 h_3} \cdot \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_3 \partial x_1} \right] + \frac{\vec{e}_{x_3}}{h_1 h_2} \cdot \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \equiv 0. \end{aligned}$$

II спосіб

Запишемо диференціальну векторну операцію другого порядку $\text{rot grad } U$ за допомогою оператора Гамільтона: $\text{rot grad } U = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$. Із властивості асоціативності скалярного добутку отримуємо: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{A}$. Оскільки векторний добуток довільного вектора на самого себе дорівнює нулю, то остаточно ми отримуємо: $\text{rot grad } U = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} \equiv 0$.

Задача 1.3. Довести тотожність $\boxed{\text{div } (u\vec{A}) = u \text{ div } \vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad } u}$ в ортогональній криволінійній системі координат, де u, \vec{A} — довільні скалярне і векторне поля.

Розв'язок

I спосіб

$$u\vec{A} = uA_{x_1} \vec{e}_{x_1} + uA_{x_2} \vec{e}_{x_2} + uA_{x_3} \vec{e}_{x_3}; \text{div } (u\vec{A}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \left[\frac{\partial (h_2 h_3 u A_{x_1})}{\partial x_1} + \frac{\partial (h_1 h_3 u A_{x_2})}{\partial x_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 u A_{x_3})}{\partial x_3} \right];$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (u\vec{A}) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[u \frac{\partial(h_2 h_3 A_{x_1})}{\partial x_1} + h_2 h_3 A_{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + u \frac{\partial(h_1 h_3 A_{x_2})}{\partial x_2} + h_1 h_3 A_{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} + u \frac{\partial(h_1 h_2 A_{x_3})}{\partial x_3} + h_1 h_2 A_{x_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right] = \\ &= u \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_2 h_3 A_{x_1})}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 A_{x_2})}{\partial x_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 A_{x_3})}{\partial x_3} \right] + \left[A_{x_1} \frac{h_2 h_3}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_{x_2} \frac{h_1 h_3}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial u}{\partial x_2} + A_{x_3} \frac{h_1 h_2}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right] = \\ &= u \operatorname{div} \vec{A} + (A_{x_1} \vec{e}_{x_1} + A_{x_2} \vec{e}_{x_2} + A_{x_3} \vec{e}_{x_3}) \cdot \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \vec{e}_{x_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \vec{e}_{x_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} \vec{e}_{x_3} \right) = u \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \operatorname{grad} u. \end{aligned}$$

II спосіб

Запишемо диференціальну векторну операцію $\operatorname{div} (u\vec{A})$ за допомогою оператора Гамільтона: $\operatorname{div} (u\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (u\vec{A})$. Оскільки оператор Гамільтона є диференціальним, то до отриманого виразу можна застосувати правила диференціювання добутку: $\vec{\nabla} \cdot (u\vec{A}) = (\vec{\nabla} \cdot u) \cdot \vec{A} + u \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$. За визначенням при скалярному множенні оператора Гамільтона на скалярне поле він дає градієнт цього поля: $\vec{\nabla} \cdot u = \operatorname{grad} u$. При скалярному множенні оператора Гамільтона на векторне поле він дає дивергенцію цього поля: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \operatorname{div} \vec{A}$. Використавши ці визначення і властивість комутативності скалярного добутку, ми отримуємо: $(\vec{\nabla} \cdot u) \cdot \vec{A} + u \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \operatorname{grad} u \cdot \vec{A} + u \cdot \operatorname{div} \vec{A} = \vec{A} \cdot \operatorname{grad} u + u \cdot \operatorname{div} \vec{A}$. Таким чином:

$$\operatorname{div} (u\vec{A}) = u \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \operatorname{grad} u.$$

Задача 1.4. Довести теорему Гріна у другій скалярній формі:

$$\boxed{\int_V (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dV = \oint_S (u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u) d\vec{S}}.$$

Розв'язок

Запишемо тотожність векторного аналізу $\operatorname{div} (u\vec{A}) = u \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \operatorname{grad} u$ для векторного поля $\vec{A} = \operatorname{grad} v$: $\operatorname{div} (u \operatorname{grad} v) = u \operatorname{div} \operatorname{grad} v + \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u$;
 $\operatorname{div} (u \operatorname{grad} v) = u \nabla^2 v + \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u$. Поміняємо скалярні поля u і v місцями, тоді:
 $\operatorname{div} (v \operatorname{grad} u) = v \nabla^2 u + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v$. Віднімемо останні дві тотожності:
 $\operatorname{div} (u \operatorname{grad} v) - \operatorname{div} (v \operatorname{grad} u) = u \nabla^2 v + \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u - v \nabla^2 u - \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = u \nabla^2 v - v \nabla^2 u$.

Оскільки $\operatorname{div} (\vec{A} + \vec{B}) = \operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{div} \vec{B}$, то $\operatorname{div} (u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u) = u \nabla^2 v - v \nabla^2 u$.

Проінтегруємо останню тотожність по довільному об'єму V :

$$\int_V \operatorname{div} (u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u) dV = \int_V (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dV.$$

Застосувавши теорему Остроградського-Гаусса, отримуємо теорему Гріна у другій скалярній формі:

$$\boxed{\oint_S (u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u) d\vec{S} = \int_V (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dV}.$$

Задача 1.5. Довести тотожність векторного аналізу $\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}$ в декартовій системі координат, де \vec{A} та \vec{B} — довільні векторні поля.

Розв'язок

І спосіб

Розпишемо векторний добуток $\vec{A} \times \vec{B}$ в декартовій системі координат за допомогою визначника та візьмемо його дивергенцію:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \vec{e}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \vec{e}_z (A_x B_y - A_y B_x);$$

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{\partial(A_y B_z)}{\partial x} - \frac{\partial(A_z B_y)}{\partial x} + \frac{\partial(A_z B_x)}{\partial y} - \frac{\partial(A_x B_z)}{\partial y} + \frac{\partial(A_x B_y)}{\partial z} - \frac{\partial(A_y B_x)}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \cdot \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \cdot \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \cdot \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right);$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \cdot \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \cdot \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \cdot \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right);$$

$$\vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} = B_x \cdot \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + B_y \cdot \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + B_z \cdot \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right);$$

$$\vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} = A_x \cdot \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + A_y \cdot \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + A_z \cdot \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right);$$

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} &= \left(B_x \frac{\partial A_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) - \left(B_x \frac{\partial A_y}{\partial z} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) + \left(B_y \frac{\partial A_x}{\partial z} + A_x \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) - \\ &\quad - \left(B_y \frac{\partial A_z}{\partial x} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) + \left(B_z \frac{\partial A_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) - \left(B_z \frac{\partial A_x}{\partial y} + A_x \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial(A_z B_x)}{\partial y} - \frac{\partial(A_y B_x)}{\partial z} + \frac{\partial(A_x B_y)}{\partial z} - \frac{\partial(A_z B_y)}{\partial x} + \frac{\partial(A_y B_z)}{\partial x} - \frac{\partial(A_x B_z)}{\partial y} = \operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}). \end{aligned}$$

II спосіб

Запишемо диференціальну векторну операцію $\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B})$ за допомогою оператора Гамільтона: $\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$. Оскільки оператор Гамільтона є диференціальним, то до отриманого виразу можна застосувати правила диференціювання добутку: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}_A \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) + \vec{\nabla}_B \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$. Нижні індекси показують на яке поле діє оператор Гамільтона. Поле, на яке не діє оператор, можна винести за похідну. Застосувавши колову перестановку множників (зі збереженням знаку) і перестановку сусідніх множників (зі зміною знаку) в змішаних скалярно-векторних добутках, отримуємо:

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}_A \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) + \vec{\nabla}_B \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla}_A \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla}_B \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}.$$

Задача 1.6. Довести теорему Гріна у другій векторній формі:

$$\int_V (\vec{B} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B}) dV = \oint_S (\vec{A} \times \operatorname{rot} \vec{B} - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{A}) d\vec{S}.$$

Розв'язок

Запишемо тотожність векторного аналізу $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$ для векторних полів $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A}$ та $\vec{G} = \vec{B}$: $\operatorname{div}((\operatorname{rot} \vec{A}) \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} - \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}$. Оскільки векторний добуток антикомутативний, то ми отримуємо рівність: $\operatorname{div}(-\vec{B} \times (\operatorname{rot} \vec{A})) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} - \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}$. Поміняємо векторні поля \vec{A} та \vec{B} місцями: $\operatorname{div}(-\vec{A} \times (\operatorname{rot} \vec{B})) = \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} - \operatorname{rot} \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A}$. Віднімемо останні дві тотожності: $\operatorname{div}(-\vec{B} \times (\operatorname{rot} \vec{A})) + \operatorname{div}(\vec{A} \times (\operatorname{rot} \vec{B})) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} - \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} + \operatorname{rot} \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B}$. Оскільки $\operatorname{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{div} \vec{B}$, то $\operatorname{div}(\vec{A} \times \operatorname{rot} \vec{B} - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{A}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B}$.

Проінтегруємо останню тотожність по довільному об'єму V :

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{A} \times \operatorname{rot} \vec{B} - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{A}) dV = \int_V (\vec{B} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B}) dV.$$

Застосувавши теорему Остроградського-Гаусса, отримуємо теорему Гріна у 2-ій векторній формі:

$$\oint_S (\vec{A} \times \operatorname{rot} \vec{B} - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{A}) d\vec{S} = \int_V (\vec{B} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B}) dV.$$

Задача 1.7. Розв'язати рівняння Лапласа ($\nabla^2 U = 0$) у циліндричній системі координат, якщо скалярне поле U є аксіально-симетричним і не залежить від координати z .

Розв'язок

Оскільки скалярне поле U є аксіально-симетричним і не залежить від координати z , то: $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0$. У циліндричній системі координат:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) = 0; \quad r \frac{\partial U}{\partial r} = C_1; \quad U = \int \frac{C_1}{r} dr =$$

 $= C_1 \ln r + C_2$, де C_1, C_2 — довільні константи. Такий розподіл потенціалу за радіусом має коаксіальна лінія передачі та циліндричний конденсатор.

Задача 1.8. У сферичній системі координат векторне поле \vec{A} має лише радіальну складову $A_r = f(r)$. Якою повинна бути функція $f(r)$, щоб поле \vec{A} було соленоїдним? Чи є це поле потенціальним?

Розв'язок

Оскільки задане векторне поле \vec{A} має лише радіальну складову, то $A_\theta = A_\varphi = 0$. Для соленоїдного поля $\text{div } \vec{A} = 0$. У сферичній системі координат:

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f(r)) = 0;$$

$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 f(r)) = 0; \quad r^2 f(r) = \text{const}; \quad f(r) = \frac{\text{const}}{r^2}$. Це електричне поле статичного

точкового заряду, або зарядженої сфери чи кулі за межами джерел. Визначимо, чи є таке поле потенціальним. Умова потенціальності поля: $\text{rot } \vec{A} = 0$. У сферичній системі координат:

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_r}{r^2 \sin(\theta)} & \frac{\vec{e}_\theta}{r \sin(\theta)} & \frac{\vec{e}_\varphi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin(\theta) A_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_r}{r^2 \sin(\theta)} & \frac{\vec{e}_\theta}{r \sin(\theta)} & \frac{\vec{e}_\varphi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ A_r & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Отже, електричне поле статичного заряду є потенціальним.

Тема 2. Основні поняття електродинаміки. Рівняння Максвелла

Задача 2.1. Використавши перші 2 рівняння Максвелла в диференціальній формі довести теорему Пойнтинга: $\operatorname{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial w}{\partial t} + \sigma E^2 + \vec{j}_{cm}^e \cdot \vec{E} = 0$.

Розв'язок

$$\begin{aligned} \text{За результатом задачі 1.5: } \operatorname{div} \vec{\Pi} &= \operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} = \\ &= \vec{H} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \left(\sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{cm}^e \right) = -\mu_a \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \sigma (\vec{E})^2 - \varepsilon_a \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{j}_{cm}^e \cdot \vec{E} = \\ &= -\left(\frac{\varepsilon_a}{2} \frac{\partial (\vec{E})^2}{\partial t} + \frac{\mu_a}{2} \frac{\partial (\vec{H})^2}{\partial t} \right) - \sigma E^2 - \vec{j}_{cm}^e \cdot \vec{E} = -\frac{1}{2} \frac{\partial (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})}{\partial t} - \sigma E^2 - \vec{j}_{cm}^e \cdot \vec{E} = \\ &= -\frac{\partial w}{\partial t} - \sigma E^2 - \vec{j}_{cm}^e \cdot \vec{E}; \quad \boxed{\operatorname{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial w}{\partial t} + \sigma E^2 + \vec{j}_{cm}^e \cdot \vec{E} = 0}. \end{aligned}$$

Задача 2.2. Використавши перші 2 рівняння Максвелла в комплексній формі, довести лему Лоренца: якщо система сторонніх струмів \vec{j}_{cm1}^e збуджує у просторі електромагнітне поле з напруженостями \vec{E}_1 , \vec{H}_1 , а система сторонніх струмів \vec{j}_{cm2}^e — поля \vec{E}_2 , \vec{H}_2 на одній і тій же частоті ω , то виконується рівність: $\operatorname{div} (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2) - \operatorname{div} (\vec{E}_2 \times \vec{H}_1) = \vec{E}_2 \cdot \vec{j}_{cm1}^e - \vec{E}_1 \cdot \vec{j}_{cm2}^e$.

Розв'язок

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2) &= \vec{H}_2 \cdot \operatorname{rot} \vec{E}_1 - \vec{E}_1 \cdot \operatorname{rot} \vec{H}_2 = \vec{H}_2 \cdot (-i\omega \dot{\mu}_a \vec{H}_1) - \vec{E}_1 \cdot (i\omega \dot{\varepsilon}_a \vec{E}_2 + \dot{\vec{j}}_{cm2}^e); \\ \operatorname{div} (\vec{E}_2 \times \vec{H}_1) &= \vec{H}_1 \cdot \operatorname{rot} \vec{E}_2 - \vec{E}_2 \cdot \operatorname{rot} \vec{H}_1 = \vec{H}_1 \cdot (-i\omega \dot{\mu}_a \vec{H}_2) - \vec{E}_2 \cdot (i\omega \dot{\varepsilon}_a \vec{E}_1 + \dot{\vec{j}}_{cm1}^e); \\ \operatorname{div} (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2) - \operatorname{div} (\vec{E}_2 \times \vec{H}_1) &= -i\omega \dot{\mu}_a \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 - i\omega \dot{\varepsilon}_a \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 - \vec{E}_1 \cdot \dot{\vec{j}}_{cm2}^e + \\ &+ i\omega \dot{\mu}_a \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 + i\omega \dot{\varepsilon}_a \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 + \vec{E}_2 \cdot \dot{\vec{j}}_{cm1}^e = \vec{E}_2 \cdot \dot{\vec{j}}_{cm1}^e - \vec{E}_1 \cdot \dot{\vec{j}}_{cm2}^e. \end{aligned}$$

Задача 2.3. Використавши рівняння Максвелла в диференціальній формі, вивести хвильові рівняння для полів \vec{E} та \vec{H} :

$$\nabla^2 \vec{H} - \sigma \mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot} \vec{j}_{cm}^e; \quad \nabla^2 \vec{E} - \sigma \mu_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_a \frac{\partial \vec{j}_{cm}^e}{\partial t} + \varepsilon_a^{-1} \operatorname{grad} \rho.$$

Розв'язок

Із четвертого рівняння Максвелла і матеріального рівняння для магнітного поля випливає, що: $\operatorname{div} \vec{H} = \mu_a^{-1} \cdot \operatorname{div} \vec{B} = 0$. Застосуємо оператор Лапласа до напруженості магнітного поля: $\nabla^2 \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = -\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{H})$; $\nabla^2 \vec{H} + \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{H}) = 0$. Використаємо перше рівняння Максвелла:

$$\nabla^2 \vec{H} + \operatorname{rot} \left(\sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{cm}^e \right) = 0; \quad \nabla^2 \vec{H} + \sigma \cdot \operatorname{rot} \vec{E} + \varepsilon_a \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{E}) + \operatorname{rot} \vec{j}_{cm}^e = 0.$$

Підставимо вираз для $\text{rot } \vec{E}$ із другого рівняння Максвелла і використаємо матеріальне рівняння для магнітного поля:

$$\nabla^2 \vec{H} + \sigma \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) + \varepsilon_a \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\text{rot } \vec{j}_{cm}^e; \quad \nabla^2 \vec{H} - \sigma \mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\text{rot } \vec{j}_{cm}^e.$$

Із третього рівняння Максвелла і матеріального рівняння для електричного поля випливає, що: $\text{div } \vec{E} = \varepsilon_a^{-1} \cdot \text{div } \vec{D} = \varepsilon_a^{-1} \cdot \rho$. Застосуємо оператор Лапласа до напруженості електричного поля: $\nabla^2 \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \text{rot rot } \vec{E} = \varepsilon_a^{-1} \text{grad } \rho - \text{rot (rot } \vec{E})$; $\nabla^2 \vec{E} + \text{rot (rot } \vec{E}) = \varepsilon_a^{-1} \text{grad } \rho$. Використаємо друге рівняння Максвелла:

$$\nabla^2 \vec{E} + \text{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \varepsilon_a^{-1} \text{grad } \rho; \quad \nabla^2 \vec{E} - \mu_a \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{H}) = \varepsilon_a^{-1} \text{grad } \rho.$$

Підставимо вираз для $\text{rot } \vec{H}$ із першого рівняння Максвелла і використаємо матеріальне рівняння для електричного поля:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_a \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{cm}^e \right) = \varepsilon_a^{-1} \text{grad } \rho; \quad \nabla^2 \vec{E} - \sigma \mu_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_a \frac{\partial \vec{j}_{cm}^e}{\partial t} + \varepsilon_a^{-1} \text{grad } \rho.$$

Задача 2.4. Показати, що рівняння неперервності струму впливає з першого і третього рівнянь Максвелла.

Розв'язок

Перше рівняння Максвелла можна представити у такій формі: $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, де \vec{j} — повний електричний струм. За результатом задачі 1.1:

$\text{div rot } \vec{H} = 0$. $\text{div rot } \vec{H} = \text{div } \vec{j} + \text{div } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$. Змінимо порядок диференціювання

за координатами та часом: $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{D} = 0$. Використавши третє рівняння

Максвелла, отримуємо: $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

Задача 2.5. Деякий електромагнітний процес характеризується тим, що всі компоненти полів залежать лише від координати z . Показати, що на основі рівнянь Максвелла при цьому відсутні поздовжні складові E_z і H_z .

Розв'язок: $\vec{E} = \vec{E}(z) = E_x(z) \cdot \vec{e}_x + E_y(z) \cdot \vec{e}_y + E_z(z) \cdot \vec{e}_z$. Відповідно до другого

$$\text{рівняння Максвелла: } \text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x(z) & E_y(z) & E_z(z) \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_y(z)}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \vec{e}_y + 0 \cdot \vec{e}_z =$$

$$= -\mu_a \frac{\partial \vec{H}(z)}{\partial t}; \quad \vec{H}(z) = \frac{1}{\mu_a} \int_0^t \left(\frac{\partial E_y(z)}{\partial z} \vec{e}_x - \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \vec{e}_y \right) dt + 0 \cdot \vec{e}_z; \quad H_z(z) \equiv 0. \text{ Аналогічно } E_z(z) \equiv 0.$$

Задача 2.6. Показати, що електромагнітне поле, яке гармонічно змінюється у часі з частотою ω в області простору, вільній від джерел, задовольняє однорідні рівняння Гельмгольца: $\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + \omega^2 \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a \dot{\vec{E}}_m = 0$; $\nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + \omega^2 \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a \dot{\vec{H}}_m = 0$.

Розв'язок

I спосіб

Із четвертого рівняння Максвелла в комплексній формі і матеріального рівняння для магнітного поля випливає, що: $\text{div } \dot{\vec{H}}_m = \dot{\mu}_a^{-1} \cdot \text{div } \dot{\vec{B}}_m = 0$. Застосуємо оператор Лапласа до комплексної амплітуди напруженості магнітного поля: $\nabla^2 \dot{\vec{H}}_m = \text{grad div } \dot{\vec{H}}_m - \text{rot rot } \dot{\vec{H}}_m = -\text{rot}(\text{rot } \dot{\vec{H}}_m)$; $\nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + \text{rot}(\text{rot } \dot{\vec{H}}_m) = 0$.

Використаємо перше рівняння Максвелла в комплексній формі для області без джерел ($\dot{\vec{j}}_m^{cm.e} = 0$): $\nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + \text{rot}(i\omega \dot{\epsilon}_a \dot{\vec{E}}_m) = 0$; $\nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + i\omega \dot{\epsilon}_a \text{rot } \dot{\vec{E}}_m = 0$.

Підставимо вираз для $\text{rot } \dot{\vec{E}}_m$ із другого рівняння Максвелла в комплексній формі та використаємо матеріальне рівняння для магнітного поля:

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + i\omega \dot{\epsilon}_a (-i\omega \dot{\mu}_a \dot{\vec{H}}_m) = 0; \quad \nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + \omega^2 \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a \dot{\vec{H}}_m = 0. \text{ Аналогічно } \nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + \omega^2 \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a \dot{\vec{E}}_m = 0.$$

II спосіб

Рівняння Гельмгольца можна отримати із хвильових рівнянь, усунувши з них джерела полів ($\dot{\vec{j}}_m^{cm.e} = 0$; $\rho = 0$) і здійснивши заміну $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$:

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}}_m - \sigma \mu_a i\omega \dot{\vec{H}}_m - \epsilon_a \mu_a (i\omega)^2 \dot{\vec{H}}_m = 0; \quad \nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + \omega^2 \epsilon_a \left(1 - \frac{\sigma \mu_a i\omega}{\omega^2 \epsilon_a \mu_a} \right) \mu_a \dot{\vec{H}}_m = 0;$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + \omega^2 \epsilon_a \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \right) \mu_a \dot{\vec{H}}_m = 0; \quad \nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + \omega^2 \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a \dot{\vec{H}}_m = 0. \text{ Аналогічно } \nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + \omega^2 \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a \dot{\vec{E}}_m = 0.$$

Задача 2.7. Довести, що четверте рівняння Максвелла $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ є наслідком

другого рівняння $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ при деякій умові. Яка ця умова?

Розв'язок: Згідно з результатом задачі 1.1: $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = 0$; $\operatorname{div} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$.

Змінимо порядок диференціювання за координатами та часом: $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B} = 0$;

$\operatorname{div} \vec{B} = f(\vec{r}) = 0$, якщо в певний момент часу індукція \vec{B} була соленоїдною.

Задача 2.8. У круглому циліндричному мідному проводі діаметром 2 мм тече постійний струм величиною 6 мА. Визначити дотичну складову електричного поля на поверхні проводу.

Розв'язок: Постійний струм має рівномірний розподіл у поперечному перерізі провідника, тому щільність струму дорівнює: $j = \frac{I}{S_{\perp}} = \frac{4I}{\pi d^2} = 1,9 \frac{\text{мА}}{\text{мм}^2}$.

Відповідно до закону Ома в диференціальній формі: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$; $E = j/\sigma = \frac{1,9 \text{ мА/мм}^2}{5,8 \cdot 10^7 \text{ См/м}} = 33 \frac{\text{мкВ}}{\text{м}}$.

Задача 2.9. Осердя трансформатора масою 1 кг виконано зі сталі з густиною 8 г/см³ і відносною магнітною проникністю $\mu = 200$. Амплітуда магнітної індукції $B_m = 2$ Тл. Знайти максимальне значення енергії, що запасається в осерді, при намагнічуванні його гармонічним струмом.

Розв'язок: Визначимо об'єм осердя трансформатора: $V = m/\rho = 1000/8 \text{ см}^3 = 125 \text{ см}^3$. Оскільки відносна магнітна проникність осердя $\mu \gg 1$, то магнітне поле можна вважати повністю сконцентрованим в осерді й однорідним у ньому.

$$\text{Тоді: } W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H}_m \cdot \vec{B}_m dV = \frac{\vec{H}_m \cdot \vec{B}_m}{2} \int_V dV = \frac{B_m^2 V}{2\mu\mu_0} = \frac{4 \cdot 125 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 200 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} \text{ Дж} = 1 \text{ Дж}.$$

Задача 2.10. У певній точці простору миттєві значення векторів поля $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_1)$; $\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t + \varphi_2)$, де \vec{E}_0 і \vec{H}_0 — постійні вектори. Знайти середнє значення і коливальну складову вектора Пойнтинга.

Розв'язок: $\boxed{\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}} = \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) =$
 $= \frac{1}{2} \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2} \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \cdot \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2).$

$$\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}; \quad \boxed{\vec{\Pi}_{\text{кол}} = \frac{1}{2} \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \cdot \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Задача 2.11. Комплексні амплітуди полів електромагнітної хвилі, яка поширюється вздовж осі z , записуються таким чином:

$$\vec{E}(x, y, z) = [\dot{E}_x(x, y)\vec{e}_x + \dot{E}_y(x, y)\vec{e}_y + \dot{E}_z(x, y)\vec{e}_z] \cdot e^{-i\beta z};$$

$$\vec{H}(x, y, z) = [\dot{H}_x(x, y)\vec{e}_x + \dot{H}_y(x, y)\vec{e}_y + \dot{H}_z(x, y)\vec{e}_z] \cdot e^{-i\beta z}, \text{ де } \beta \text{ — стала поширення.}$$

Використавши рівняння Максвелла в комплексній формі для області без джерел, знайти формули зв'язку поперечних і поздовжніх компонент поля.

Розв'язок: Розпишемо перше та друге рівняння Максвелла в комплексній формі, здійснивши заміну $\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -i\beta$: $\text{rot } \vec{E} = -i\omega\dot{\mu}_a \vec{H}$; $\text{rot } \vec{H} = i\omega\dot{\epsilon}_a \vec{E}$;

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & -i\beta \\ \dot{E}_x & \dot{E}_y & \dot{E}_z \end{vmatrix} = -i\omega\dot{\mu}_a (\dot{H}_x \vec{e}_x + \dot{H}_y \vec{e}_y + \dot{H}_z \vec{e}_z); \quad \begin{cases} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + i\beta \dot{E}_y = -i\omega\dot{\mu}_a \dot{H}_x & (1) \\ -i\beta \dot{E}_x - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -i\omega\dot{\mu}_a \dot{H}_y & (2) \end{cases};$$

$$\text{rot } \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & -i\beta \\ \dot{H}_x & \dot{H}_y & \dot{H}_z \end{vmatrix} = i\omega\dot{\epsilon}_a (\dot{E}_x \vec{e}_x + \dot{E}_y \vec{e}_y + \dot{E}_z \vec{e}_z); \quad \begin{cases} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + i\beta \dot{H}_y = i\omega\dot{\epsilon}_a \dot{E}_x & (3) \\ -i\beta \dot{H}_x - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = i\omega\dot{\epsilon}_a \dot{E}_y & (4) \end{cases}.$$

Рівняння (1)–(4) можна розділити на дві системи: система $\begin{cases} (2) \\ (3) \end{cases}$ відносно

невідомих \dot{E}_x і \dot{H}_y ; система $\begin{cases} (1) \\ (4) \end{cases}$ відносно невідомих \dot{E}_y і \dot{H}_x .

Розв'яжемо систему $\begin{cases} (2) \\ (3) \end{cases}$ за формулами Крамера: $\begin{cases} i\beta \dot{E}_x - i\omega\dot{\mu}_a \dot{H}_y = -\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}; \\ i\omega\dot{\epsilon}_a \dot{E}_x - i\beta \dot{H}_y = \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}; \end{cases}$

$$\dot{E}_x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} & -i\omega\dot{\mu}_a \\ \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} & -i\beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i\beta & -i\omega\dot{\mu}_a \\ i\omega\dot{\epsilon}_a & -i\beta \end{vmatrix}} = \frac{i\beta \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + i\omega\dot{\mu}_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}}{\beta^2 - \omega^2 \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a} = \frac{-i \left(\beta \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + \omega\dot{\mu}_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right)}{\omega^2 \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a - \beta^2};$$

$$\dot{H}_y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} i\beta & -\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} \\ i\omega\dot{\epsilon}_a & \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i\beta & -i\omega\dot{\mu}_a \\ i\omega\dot{\epsilon}_a & -i\beta \end{vmatrix}} = \frac{i\beta \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + i\omega\dot{\epsilon}_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}}{\beta^2 - \omega^2 \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a} = \frac{-i \left(\beta \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + \omega\dot{\epsilon}_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} \right)}{\omega^2 \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a - \beta^2}.$$

Аналогічно із системи $\begin{cases} (1) \\ (4) \end{cases}$ знаходимо \dot{E}_y і \dot{H}_x . Остаточню отримуємо

формули зв'язку поперечних і поздовжніх компонент поля:

$$\dot{E}_x = \frac{-i}{k_{\text{кр}}^2} \left(\beta \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + \omega\dot{\mu}_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right); \quad \dot{E}_y = \frac{-i}{k_{\text{кр}}^2} \left(\beta \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \omega\dot{\mu}_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right);$$

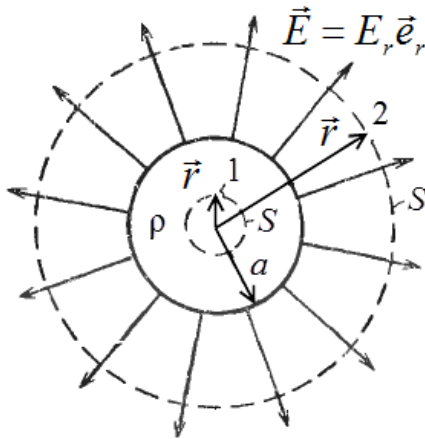
$$\dot{H}_x = \frac{-i}{k_{\text{кр}}^2} \left(\beta \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} - \omega\dot{\epsilon}_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} \right); \quad \dot{H}_y = \frac{-i}{k_{\text{кр}}^2} \left(\beta \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + \omega\dot{\epsilon}_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} \right),$$

де $k_{\text{кр}} = \sqrt{\omega^2 \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a - \beta^2}$ — критичне хвильове число.

Тема 3. Статичні та стаціонарні електромагнітні поля

Задача 3.1. Заряд q рівномірно розподілений всередині кулі радіусом a .

Побудувати залежність модуля напруженості електричного поля $|\vec{E}|$ від координати r . Знайти $\max_{r \in (0; \infty)} |\vec{E}(r)|$.



Розв'язок: Ця задача має центральну симетрію. Тому напруженість електричного поля у сферичній системі координат, початок якої співпадає з центром кулі, залежить лише від координати r і не залежить від кутів θ, φ . Знайдемо об'ємну густину заряду:

$$\rho = \frac{q}{V_{\text{кулі}}} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{3q}{4\pi a^3}.$$

Використаємо теорему Гаусса для двох випадків:

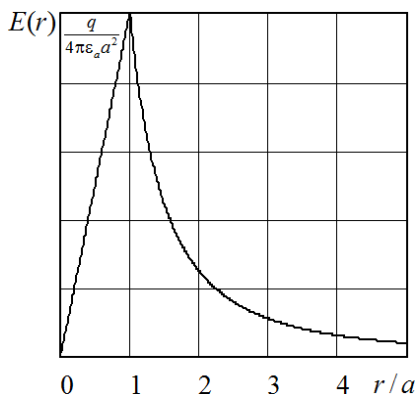
$$1) \quad r \leq a; \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV; \quad \varepsilon_a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E(r) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \frac{3q}{4\pi a^3} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi;$$

$$\varepsilon_a E(r) r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{3q}{4\pi a^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^r r^2 dr; \quad \varepsilon_a E(r) r^2 = \frac{3q}{4\pi a^3} \frac{r^3}{3}; \quad E(r) = \frac{qr}{4\pi \varepsilon_a a^3}.$$

В області 1 електричне поле є зростаючою функцією радіальної координати r .

$$2) \quad r \geq a; \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q; \quad \varepsilon_a E(r) r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = q; \quad \varepsilon_a E(r) 4\pi r^2 = q; \quad E(r) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_a r^2}.$$

В області 2 напруженість електричного поля є спадною функцією координати r .

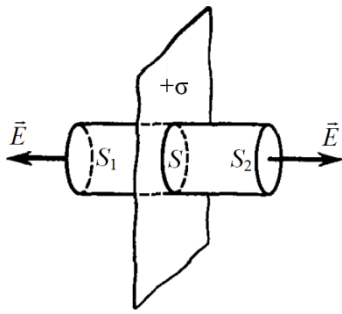


Отже, на границі між областями (при $r = a$) напруженість електричного поля набуває

$$\text{максимального значення: } \max_{r \in (0; \infty)} |\vec{E}(r)| = E(a) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_a a^2}.$$

Цей графік є наближенням розподілу напруженості електричного поля атомного ядра.

Задача 3.2. Дві нескінченні паралельні площини, рівномірно заряджені з поверхневими густинами $+\sigma$ і $-\sigma$, є моделлю плоского конденсатора. Вивести формулу ємності плоского конденсатора.



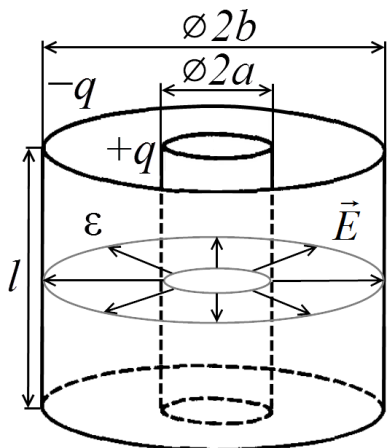
Розв'язок: Запишемо теорему Гаусса для однієї площини з поверхневою густиною заряду $+\sigma$: $\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q = \sigma S$; $\epsilon_a \left(\int_{S_1} \vec{E}d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E}d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{E}d\vec{S} \right) = \sigma S$; $2\epsilon_a ES = \sigma S$; $E_{1nl} = \frac{\sigma}{2\epsilon_a}$.

Поле двох заряджених площин знайдемо за принципом суперпозиції полів кожної площини:

$E_{2nl} = 2 \cdot E_{1nl} = \frac{\sigma}{\epsilon_a}$. Ємність плоского конденсатора: $C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma \cdot S}{\int_L \vec{E}d\vec{l}} = \frac{\sigma S}{Ed} = \frac{\epsilon_a \sigma S}{\sigma d}$; $C = \frac{\epsilon_a S}{d} = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}$, де ϵ — діелектрична

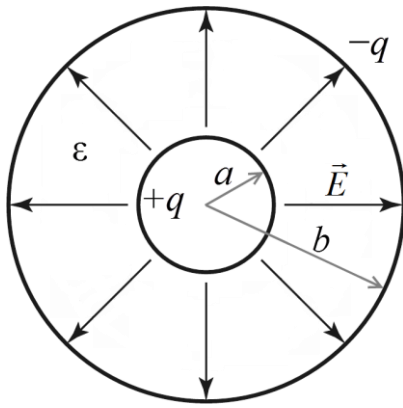
проникність середовища між пластинами, S — їх площа, d — відстань між ними.

Задача 3.3. Циліндричний конденсатор складається з двох металевих кругових циліндрів, осі яких співпадають. Простір між циліндрами заповнений діелектриком із відносною проникністю ϵ . Радіус внутрішнього циліндра дорівнює a , зовнішнього — b . Висота конденсатора становить l . Знайти ємність циліндричного конденсатора.



Розв'язок: Використаємо теорему Гаусса: $\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q$. $\epsilon_a \left(\int_{S_1} \vec{E}d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E}d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{E}d\vec{S} \right) = q$; $\epsilon \epsilon_0 E \cdot 2\pi r l = q$; $E(r) = \frac{q}{2\pi \epsilon \epsilon_0 r l}$.
Різниця потенціалів між обкладками: $U = u_a - u_b = \int_a^b E(r) dr = \frac{q}{2\pi \epsilon \epsilon_0 l} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi \epsilon \epsilon_0 l} \ln \frac{b}{a}$; $C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi \epsilon \epsilon_0 l}{\ln b/a}$.

Задача 3.4. Сферичний конденсатор складається з двох концентричних металевих сфер, простір між якими заповнений діелектриком з відносною проникністю ϵ . Радіус внутрішньої сфери становить a , зовнішньої — b . Визначити ємність сферичного конденсатора.



Розв'язок: За теоремою Гаусса: $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$.

$$\epsilon\epsilon_0 E(r) \cdot 4\pi r^2 = q; \quad E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

Різниця потенціалів між сферами: $U = u_a - u_b = \int_a^b E(r) dr = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} =$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_a^b = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{b-a}{ab}; \quad C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 ab}{b-a}.$$

Задача 3.5. По нескінченному циліндричному провіднику радіусом a тече змінний струм з комплексною амплітудою щільності $\vec{j}_m = J_0$. Знайти магнітне поле всередині та зовні провідника. Яким буде результат при $\vec{j}_m = J_0 r/a$?

Розв'язок: Використаємо закон повного струму для двох випадків:

$$1) \quad r \leq a; \quad \oint_L \vec{H}_\varphi d\vec{l} = \int_S \vec{j}_m d\vec{S}; \quad \dot{H}_\varphi \oint_L dl = \int_0^{2\pi} \int_0^r j_m r dr d\varphi; \quad \dot{H}_\varphi 2\pi r = J_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r r dr;$$

$$\dot{H}_\varphi 2\pi r = J_0 2\pi \frac{r^2}{2}; \quad \dot{H}_\varphi = \frac{J_0 r}{2}. \text{ Магнітне поле лінійно зростає зі збільшенням } r.$$

$$2) \quad r \geq a; \quad \oint_L \vec{H}_\varphi d\vec{l} = \dot{I}_m; \quad \dot{H}_\varphi \oint_L dl = \int_0^{2\pi} \int_0^a j_m r dr d\varphi; \quad \dot{H}_\varphi 2\pi r = J_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr; \quad \dot{H}_\varphi 2\pi r = J_0 2\pi \frac{a^2}{2};$$

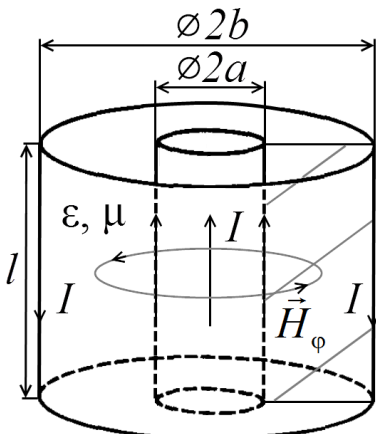
$$\dot{H}_\varphi = \frac{J_0 a^2}{2r}. \text{ Зовні провідника магнітне поле спадає обернено пропорційно } r.$$

Аналогічно при $\vec{j}_m = J_0 r/a$: 1) $r \leq a$; $\dot{H}_\varphi = \frac{J_0 r^2}{3a}$; 2) $r \geq a$; $\dot{H}_\varphi = \frac{J_0 a^2}{3r}$.

Задача 3.6. Радіус внутрішнього провідника коаксіальної лінії передачі дорівнює a , зовнішнього — b . Лінія заповнена матеріалом з відносними проникностями ϵ, μ . Знайти хвильовий опір коаксіальної лінії передачі.

Розв'язок

І спосіб



Із теорії довгих ліній відомо, що хвильовий опір лінії передачі з Т-хвилею можна знайти за формулою:

$$Z_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{L_{\text{пог}}}{C_{\text{пог}}}}, \text{ де } L_{\text{пог}}, C_{\text{пог}} \text{ — погонні індуктивність і}$$

ємність відповідно. Погонна ємність коаксіальної лінії передачі співпадає з погонною ємністю циліндричного

конденсатора: $C_{\text{пог}} = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln b/a}$. Відповідно до закону

повного струму: $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I$; $H_\varphi \cdot 2\pi r = I$; $H_\varphi = \frac{I}{2\pi r}$. Знайдемо магнітний потік через поверхню заштрихованого прямокутника: $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \mu_a \int_0^l \int_a^b H_\varphi dr dz =$

$$= \frac{\mu_a I l}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_a I l}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = LI. \quad L = \frac{\mu\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}; \quad L_{\text{пог}} = \frac{L}{l} = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}; \quad Z_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{L_{\text{пог}}}{C_{\text{пог}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu\mu_0 \ln b/a}{2\pi} \cdot \frac{\ln b/a}{2\pi\epsilon\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{\ln b/a}{2\pi}}; \quad \boxed{Z_{\text{хв}} = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{b}{a} [\text{Ом}]}$$

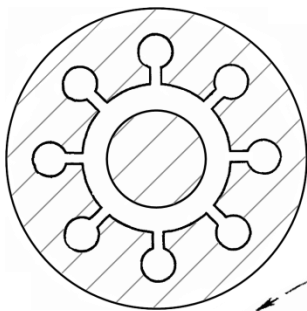
II спосіб

Погонна ємність коаксіальної лінії передачі співпадає з погонною ємністю циліндричного конденсатора: $C_{\text{пог}} = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln b/a}$. Фазова швидкість поперечної електромагнітної хвилі в лінії передачі без втрат $v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{L_{\text{пог}} C_{\text{пог}}}}$. Тоді

$$L_{\text{пог}} = \frac{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}{C_{\text{пог}}}. \text{ Хвильовий опір лінії передачі: } Z_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{L_{\text{пог}}}{C_{\text{пог}}}} = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}{C_{\text{пог}}^2}} = \frac{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}{C_{\text{пог}}};$$

$$Z_{\text{хв}} = \frac{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} \cdot \frac{\ln b/a}{2\pi}; \quad \boxed{Z_{\text{хв}} = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{b}{a} [\text{Ом}]}$$

Задача 3.7. Визначити власну частоту магнетронного резонатора, вважаючи, що його плоска частина є конденсатором, а циліндрична — індуктивністю. Розміри комірки резонатора вказані на рисунку.



Розв'язок: Ємність плоского конденсатора: $C = \frac{\epsilon_0 S_\kappa}{d} = \frac{\epsilon_0 a l}{d}$.

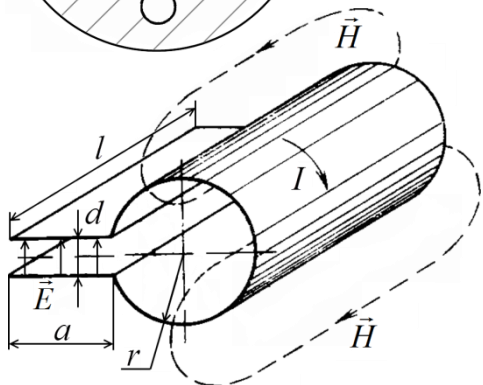
За законом повного струму: $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I$; $H \cdot l = I$; $H = \frac{I}{l}$.

Магнітний потік: $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 H \cdot \pi r^2 = \mu_0 \frac{I}{l} \pi r^2$.

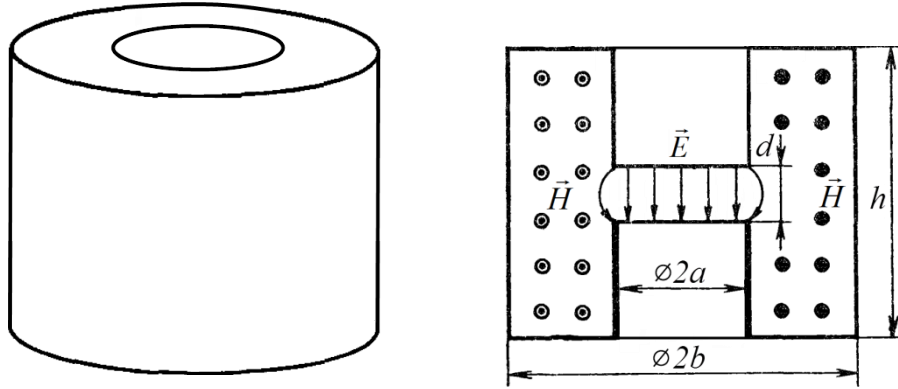
$\Phi = LI$. Індуктивність циліндра: $L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \pi r^2}{l}$.

За формулою Томсона резонансна частота:

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} = \frac{\sqrt{l} \cdot \sqrt{d}}{2\pi\sqrt{\mu_0 \pi r^2 \cdot \epsilon_0 a l}} = \boxed{\frac{\sqrt{d}}{2\pi\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \pi a r^2}}}$$



Задача 3.8. Тороїдний резонатор і його осьовий переріз показані на рисунках. Вважаючи центральну частину резонатора плоским конденсатором, а тороїдну порожнину — індуктивністю, знайти власну частоту резонатора.



Розв'язок

Ємність круглого плоского конденсатора: $C = \frac{\epsilon_0 S_{\kappa}}{d} = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d}$. Індуктивність

тороїдної порожнини співпадає з індуктивністю коаксіальної лінії передачі:

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}. \text{ За формулою Томсона резонансна частота: } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{d}}{2\pi \sqrt{\mu_0 h \ln \frac{b}{a} \cdot \epsilon_0 \pi a^2}} = \frac{\sqrt{2d}}{2\pi \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 h a^2 \ln \frac{b}{a}}}.$$

Тема 4. Плоскі електромагнітні хвилі

Задача 4.1. На скільки мм зменшиться довжина електромагнітної хвилі з частотою $f = 10$ ГГц при переході з вакууму в тефлон ($\epsilon = 2,05$; $\mu = 1$)? Втратами в тефлоні знехтувати. Знайти відносне зменшення у відсотках.

Розв'язок: Довжина хвилі у вакуумі: $\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{300[\text{мм} \cdot \text{ГГц}]}{10 \text{ ГГц}} = 30 \text{ мм}$. У тефлоні:

$$\lambda_{\text{теф}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{30 \text{ мм}}{\sqrt{2,05}} = 20,95 \text{ мм}. \quad \Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda_{\text{теф}} = 9,05 \text{ мм}. \quad \delta\lambda = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cdot 100\% = 30\%.$$

Задача 4.2. Плоска електромагнітна хвиля з довжиною $\lambda = 10$ см, поширюючись у вакуумі, в деякій точці створює струм зміщення з об'ємною густиною $1,5 \text{ А/м}^2$. Якими при цьому мають бути швидкості зміни у часі електричної і магнітної складових цієї хвилі?

Розв'язок:

У вакуумі об'ємна густина струму зміщення дорівнює: $\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Тоді

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{j_{\text{зм}}}{\epsilon_0} = \frac{1,5 \text{ А/м}^2}{8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}} = 1,7 \cdot 10^{11} \frac{\text{В}}{\text{м} \cdot \text{с}}.$$
 Амплітуди магнітного й електричного

полів у вакуумі пов'язані за допомогою характеристичного опору: $H = \frac{E}{Z_0}$.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{Z_0} \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{j_{\text{зм}}}{Z_0 \cdot \epsilon_0} = \frac{j_{\text{зм}} \sqrt{\epsilon_0}}{\sqrt{\mu_0} \cdot \epsilon_0} = \frac{j_{\text{зм}}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \cdot j_{\text{зм}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 1,5 \frac{\text{А}}{\text{м}^2} = 4,5 \cdot 10^8 \frac{\text{А}}{\text{м} \cdot \text{с}}.$$

Задача 4.3. У вакуумі поширюється світловий промінь із частотою, що відповідає середині діапазону видимих оптичних хвиль (0,750...0,375) мкм.

Яку частоту, довжину хвилі та колір матиме цей промінь у середовищі без втрат із параметрами $\mu = 1$, $\epsilon = 2,25$?

Розв'язок:

Крайні частоти діапазону видимої частини оптичних хвиль дорівнюють:

$$f_{\text{н}} = \frac{c}{\lambda_{\text{черв.}}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{0,75 \cdot 10^{-6} \text{ м}} = 400 \text{ ТГц}; \quad f_{\text{в}} = \frac{c}{\lambda_{\text{фіол.}}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{0,375 \cdot 10^{-6} \text{ м}} = 800 \text{ ТГц}.$$

Центральна частота оптичного діапазону $f_0 = \frac{f_n + f_b}{2} = 600$ ТГц. Вона відповідає зеленому кольору і не змінюється при переході променя в будь-яке середовище. Таким чином, у середовищі з параметрами $\mu = 1$, $\varepsilon = 2,25$ промінь має зелений колір і частоту 600 ТГц.

Довжина хвилі в середовищі на центральній частоті оптичного діапазону:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu} \cdot f_0} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{\sqrt{2,25 \cdot 6 \cdot 10^{14}} \text{ Гц}} = 0,333 \text{ мкм.}$$

Задача 4.4. Визначити глибину проникнення електромагнітної хвилі з частотою $f = 1$ ГГц у мідь ($\sigma = 5,8 \cdot 10^7$ См/м). На скільки дБ загасне електромагнітна хвиля при проходженні 1 мм міді?

Розв'язок

Перейдемо від комплексної амплітуди напруженості електричного поля до її залежності у часі: $\dot{E}(z) = \dot{E}_{m\perp} e^{-ikz} = \dot{E}_{m\perp} e^{-i(\beta - i\alpha)z} = \dot{E}_{m\perp} e^{-\alpha z} \cdot e^{-i\beta z} \leftrightarrow E_{m\perp} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_E)$. Глибина проникнення — це відстань, на якій поле (або амплітуда хвилі) спадає в e разів. $e^{-\alpha d} = e^{-1}$; $d = \frac{1}{\alpha}$;

$$\text{tg}\delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\pi f\varepsilon_0} = \frac{5,8 \cdot 10^7}{2\pi \cdot 10^9 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 1,043 \cdot 10^9. \text{ Для провідників } \text{tg}\delta \gg 1. \text{ Тоді}$$

$$\text{коефіцієнт загасання: } \alpha = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{2} \text{tg}\delta} = \sqrt{\frac{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0}{2} \cdot \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}.$$

$$\text{Глибина проникнення: } d = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}} = 2,1 \text{ мкм. Загасання електромагнітної}$$

$$\text{хвилі при проходженні 1 мм міді: } L = |20 \lg e^{-\alpha l}| = \left| 20 \lg e^{-\frac{l}{d}} \right| = 20 \frac{l}{d} \lg e = 4136 \text{ дБ.}$$

Задача 4.5. Плоска електромагнітна хвиля з частотою 10 ГГц поширюється в поліетилені ($\varepsilon = 2,25$; $\text{tg}\delta = 4 \cdot 10^{-4}$; $\mu = 1$). Амплітуда електричного поля на площині $z = 0$ дорівнює 10 В/м. Знайти середню щільність потоку потужності на площині $z = 1$ м.

Розв'язок

Щільність потоку потужності плоскої електромагнітної хвилі дорівнює середньому значенню вектора Пойнтинга: $\langle \Pi(z) \rangle = \frac{|\dot{E}_m(0)|^2}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\dot{Z}_c} \right) e^{-2\alpha z}$. Для

діелектриків $\operatorname{tg} \delta \ll 1$. Тоді коефіцієнт загасання: $\alpha = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon}}{c} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1}{2}} =$

$$= \frac{2\pi f \sqrt{\varepsilon}}{c} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{4}} = \frac{\pi f}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot \operatorname{tg} \delta = 0,063 \text{ м}^{-1}. \quad \dot{Z}_c = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} (1 + \operatorname{tg}^2 \delta)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\delta}{2}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} = 251,3 \text{ Ом}.$$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{\dot{Z}_c} \right) = 0,004 \text{ См}. \quad \langle \Pi(1 \text{ м}) \rangle = \frac{10^2}{2} \cdot 0,004 \cdot e^{-2 \cdot 0,063} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} = 0,176 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} = 176 \frac{\text{мВт}}{\text{м}^2}.$$

Задача 4.6. Плоска електромагнітна хвиля поширюється в середовищі з параметрами: $\varepsilon = 2$, $\mu = 1$, $\sigma = 10^{-5} \text{ См/м}$. Визначити коефіцієнт загасання і амплітуду напруженості електричного поля в точці, віддаленій від початку координат на відстань $r = 1 \text{ км}$. Частота коливань дорівнює $0,5 \text{ МГц}$, амплітуда напруженості магнітного поля на початку координат становить 10 мА/м .

Розв'язок

Знайдемо тангенс кута діелектричних втрат: $\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\pi f \varepsilon \varepsilon_0} = 0,18$.

Коефіцієнт загасання хвилі в середовищі: $\alpha = \frac{2\pi f \sqrt{\varepsilon}}{c} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1}{2}} =$

$$= \frac{2\pi \cdot 0,5 \cdot 10^6 \sqrt{2}}{3 \cdot 10^8} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{1 + (0,18)^2} - 1}{2}} \left[\frac{1}{\text{м}} \right] = 1,33 \cdot 10^{-3} \left[\frac{1}{\text{м}} \right].$$

Характеристичний опір середовища дорівнює: $\dot{Z}_c = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} (1 + \operatorname{tg}^2 \delta)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\delta}{2}} [\text{Ом}]$.

Амплітуда напруженості електричного поля на початку координат:

$$E_0 = H_0 \cdot \dot{Z}_c = H_0 \cdot \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} (1 + \operatorname{tg}^2 \delta)^{\frac{1}{4}} [\text{Ом}] = 10 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{А}}{\text{м}} \right] \cdot 264 [\text{Ом}] = 2,64 \left[\frac{\text{В}}{\text{м}} \right].$$

Амплітуда напруженості електричного поля в точці $r = 1 \text{ км}$:

$$E(r) = E_0 \cdot e^{-\alpha r} = H_0 \cdot e^{-\alpha r} \cdot \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} (1 + \operatorname{tg}^2 \delta)^{\frac{1}{4}} [\text{Ом}] = 2,64 \cdot 0,264 \left[\frac{\text{В}}{\text{м}} \right] = 0,7 \left[\frac{\text{В}}{\text{м}} \right].$$

Задача 4.7. Комплексна амплітуда вектора напруженості електричного поля плоскої хвилі, яка поширюється вздовж осі z , дорівнює $\vec{E} = E_0(\vec{e}_x + e^{i\varphi}\vec{e}_y)$. Знайти вид поляризації хвилі, якщо $\varphi = 60^\circ$.

Розв'язок

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_0(\vec{e}_x + e^{i\varphi}\vec{e}_y) = E_0 e^{i\frac{\varphi}{2}}(e^{-i\frac{\varphi}{2}}\vec{e}_x + e^{i\frac{\varphi}{2}}\vec{e}_y) = E_0 e^{i\frac{\varphi}{2}} \left[\left(\cos\frac{\varphi}{2} - i \sin\frac{\varphi}{2} \right) \vec{e}_x + \left(\cos\frac{\varphi}{2} + i \sin\frac{\varphi}{2} \right) \vec{e}_y \right] = \\ &= E_0 e^{i\frac{\varphi}{2}} \left[\cos\frac{\varphi}{2} \cdot (\vec{e}_x + \vec{e}_y) - i \sin\frac{\varphi}{2} \cdot (\vec{e}_x - \vec{e}_y) \right] = E_0 e^{i\frac{\varphi}{2}} \left[\cos\frac{\varphi}{2} \cdot \vec{e}_1 - i \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \vec{e}_2 \right], \text{ де } \vec{e}_1 = \vec{e}_x + \vec{e}_y;\end{aligned}$$

$\vec{e}_2 = \vec{e}_x - \vec{e}_y$. Знайдемо скалярний добуток векторів \vec{e}_1 та \vec{e}_2 : $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 1 - 1 = 0$;

$\cos(\vec{e}_1; \vec{e}_2) = \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}{|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2|} = 0$. $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$. Ортогональні складові поля плоскої хвилі мають

лінійну поляризацію і зсув за фазою 90° . При $\varphi = 60^\circ$ їх амплітуди дорівнюють

$$a = E_0 |\vec{e}_1| \cos\frac{\varphi}{2} = E_0 \sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} E_0, \quad b = E_0 |\vec{e}_1| \sin\frac{\varphi}{2} = E_0 \sqrt{2} \frac{1}{2} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}.$$

Ця хвиля має ліву

еліптичну поляризацію. Коефіцієнт еліптичності: $r = a/b = \sqrt{3}$. Кут нахилу

поляризаційного еліпса відносно осі x : $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_x = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_x| \cdot \cos\alpha$; $|\vec{e}_x| = 1$;

$$|\vec{e}_1| = \sqrt{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y} = \sqrt{2}; \quad \cos\alpha = \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_x}{|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_x|} = \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ.$$

Задача 4.8. Комплексна амплітуда вектора напруженості електричного поля плоскої хвилі, яка поширюється вздовж осі z , дорівнює $\vec{E} = E_0(\vec{e}_x - 0,5i \cdot \vec{e}_y)$. Знайти вид поляризації хвилі та коефіцієнт еліптичності.

Розв'язок

Складові поля хвилі дорівнюють: $\dot{E}_x = E_0 \vec{e}_x$, $\dot{E}_y = 0,5 E_0 e^{-90^\circ} \vec{e}_y$. Амплітуда складової по осі x удвічі більша, ніж по осі y . Складова по осі y відстає за фазою на 90° , унаслідок чого хвиля має праву еліптичну поляризацію. Велика вісь еліпса співпадає з віссю x . Коефіцієнт еліптичності: $r = a/b = \left| \frac{\dot{E}_x}{\dot{E}_y} \right| = 2$.

Задача 4.9. Дві плоскі електромагнітні хвилі з лівою і правою коловими поляризаціями у площині $z = 0$ мають вектори напруженості електричного поля $\dot{\vec{E}}_л = E_0 e^{i\varphi_л} (\vec{e}_x + i\vec{e}_y)$; $\dot{\vec{E}}_п = E_0 e^{i\varphi_п} (\vec{e}_x - i\vec{e}_y)$. Визначити вид поляризації хвилі, яка є суперпозицією даних хвиль, якщо різниця фаз дорівнює $\Delta\varphi = \varphi_п - \varphi_л = 90^\circ$.

Розв'язок

Нехай $\varphi_0 = \frac{\varphi_л + \varphi_п}{2}$. Тоді $\varphi_л = \varphi_0 - \frac{\Delta\varphi}{2}$; $\varphi_п = \varphi_0 + \frac{\Delta\varphi}{2}$;

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_\Sigma = \dot{\vec{E}}_л + \dot{\vec{E}}_п = E_0 e^{i(\varphi_0 - \frac{\Delta\varphi}{2})} (\vec{e}_x + i\vec{e}_y) + E_0 e^{i(\varphi_0 + \frac{\Delta\varphi}{2})} (\vec{e}_x - i\vec{e}_y) = E_0 e^{i\varphi_0} \left[\vec{e}_x \left(e^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}} + e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} \right) + \right. \\ \left. + i\vec{e}_y \left(e^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}} - e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} \right) \right] = 2E_0 e^{i\varphi_0} \left[\cos \frac{\Delta\varphi}{2} \cdot \vec{e}_x + \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \cdot \vec{e}_y \right]. \end{aligned}$$

Як бачимо, при рівних амплітудах хвиль із ортогональними коловими поляризаціями складові по осях x і y є синфазними або протифазними. Така хвиля має лінійну поляризацію. Кут нахилу α вектора електричного поля відносно осі x дорівнює:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = \arctg\left(\tg \frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \frac{\Delta\varphi}{2}. \quad \text{При } \Delta\varphi = 90^\circ: \quad \alpha = 45^\circ.$$

Задача 4.10. Дві плоскі електромагнітні хвилі з ортогональними коловими поляризаціями мають комплексні амплітуди полів $\dot{\vec{E}}_+ = Ae^{i\varphi_A} (\vec{e}_x + i\vec{e}_y)$; $\dot{\vec{E}}_- = Be^{i\varphi_B} (\vec{e}_x - i\vec{e}_y)$ і поширюються вздовж осі z . Визначити коефіцієнт еліптичності і кут нахилу відносно осі x поляризаційного еліпса електромагнітної хвилі, яка є суперпозицією даних хвиль.

Розв'язок: Нехай $\varphi_0 = \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2}$; $\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A$. Тоді $\varphi_A = \varphi_0 - \frac{\Delta\varphi}{2}$; $\varphi_B = \varphi_0 + \frac{\Delta\varphi}{2}$;

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_\Sigma = \dot{\vec{E}}_+ + \dot{\vec{E}}_- = Ae^{i(\varphi_0 - \frac{\Delta\varphi}{2})} (\vec{e}_x + i\vec{e}_y) + Be^{i(\varphi_0 + \frac{\Delta\varphi}{2})} (\vec{e}_x - i\vec{e}_y) = e^{i\varphi_0} \left[\vec{e}_x \left(Ae^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}} + Be^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} \right) + \right. \\ \left. + i\vec{e}_y \left(Ae^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}} - Be^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} \right) \right] = e^{i\varphi_0} \left[\vec{e}_x \left(A \cos \frac{\Delta\varphi}{2} - iA \sin \frac{\Delta\varphi}{2} + B \cos \frac{\Delta\varphi}{2} + iB \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right) + \right. \\ \left. + i\vec{e}_y \left(A \cos \frac{\Delta\varphi}{2} - iA \sin \frac{\Delta\varphi}{2} - B \cos \frac{\Delta\varphi}{2} - iB \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{i\varphi_0} \left[\vec{e}_x \left((A+B) \cos \frac{\Delta\varphi}{2} - i(A-B) \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right) + i\vec{e}_y \left((A-B) \cos \frac{\Delta\varphi}{2} - i(A+B) \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right) \right] = \\
&= e^{i\varphi_0} \left[(A+B) \left(\vec{e}_x \cos \frac{\Delta\varphi}{2} + \vec{e}_y \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right) - i(A-B) \left(\vec{e}_x \sin \frac{\Delta\varphi}{2} - \vec{e}_y \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \right) \right] = \\
&= e^{i\varphi_0} [(A+B)\vec{e}_1 - i(A-B)\vec{e}_2], \text{ де } \vec{e}_1 = \vec{e}_x \cos \frac{\Delta\varphi}{2} + \vec{e}_y \sin \frac{\Delta\varphi}{2}; \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_x \sin \frac{\Delta\varphi}{2} - \vec{e}_y \cos \frac{\Delta\varphi}{2}.
\end{aligned}$$

Знайдемо скалярний добуток векторів \vec{e}_1 та \vec{e}_2 :

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} - \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2} = 0; \quad \cos(\vec{e}_1; \vec{e}_2) = \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}{|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2|} = 0. \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2.$$

Ортогональні складові результуючої електромагнітної хвилі мають лінійну поляризацію і зсув за фазою 90° . У загальному випадку їх амплітуди не рівні. Результуюча електромагнітна хвиля має еліптичну поляризацію.

Коефіцієнт еліптичності: $r = \frac{a}{b} = \left| \frac{A+B}{A-B} \right|$. Кут нахилу поляризаційного

еліпса відносно осі x : $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_x = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_x| \cdot \cos \alpha$; $|\vec{e}_x| = 1$; $|\vec{e}_1| = \sqrt{\cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}} = 1$;

$$\cos \alpha = \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_x}{|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_x|} = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_x = \cos \frac{\Delta\varphi}{2}; \quad \alpha = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{2}.$$

Задача 4.11. Коефіцієнт еліптичності поляризаційного еліпса електромагнітної хвилі $r = 3$ дБ. Визначити кросполяризаційну розв'язку між електромагнітними хвилями з ортогональними коловими поляризаціями, які формують цю хвилю. Якою буде кросполяризаційна розв'язка при $r = 1$ дБ.

Розв'язок: r (у разях) $= 10^{\frac{3}{20}} = 1,413$. За результатом задачі 4.10: $r = \left| \frac{A+B}{A-B} \right|$.

Нехай $A \geq B$, тоді: $rA - rB = A + B$; $(r-1)A = (r+1)B$; $A = \frac{r+1}{r-1} \cdot B$.

Кросполяризаційна розв'язка: $\text{XPI} = 20 \lg \frac{A}{B} = 20 \lg \frac{r+1}{r-1} = 20 \lg \frac{1,413+1}{1,413-1} = 15,3$ дБ.

При $r = 1$ дБ: r (у разях) $= 10^{\frac{1}{20}} = 1,122$; $\text{XPI} = 20 \lg \frac{r+1}{r-1} = 20 \lg \frac{1,122+1}{1,122-1} = 24,8$ дБ.

Задача 4.12. Дві плоскі електромагнітні хвилі з ортогональними лінійними поляризаціями поширюються вздовж осі z . Комплексні амплітуди їх електричних полів $\vec{E}_1 = A e^{i\varphi_A} \vec{e}_x$; $\vec{E}_2 = B e^{i\varphi_B} \vec{e}_y$. Визначити коефіцієнт еліптичності поляризаційного еліпса суперпозиції даних хвиль.

Розв'язок: Нехай $\varphi_0 = \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2}$; $\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A$. Тоді $\varphi_A = \varphi_0 - \frac{\Delta\varphi}{2}$; $\varphi_B = \varphi_0 + \frac{\Delta\varphi}{2}$;
 $\dot{\vec{E}}_{\Sigma} = \dot{\vec{E}}_1 + \dot{\vec{E}}_2 = Ae^{i(\varphi_0 - \frac{\Delta\varphi}{2})} \vec{e}_x + Be^{i(\varphi_0 + \frac{\Delta\varphi}{2})} \vec{e}_y = e^{i\varphi_0} \left(Ae^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}} \vec{e}_x + Be^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} \vec{e}_y \right)$.

Знайдемо проєкції комплексної амплітуди результуючої хвилі у коловому поляризаційному базисі: $Ae^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}} \vec{e}_x + Be^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} \vec{e}_y = \dot{C}(\vec{e}_x + i \cdot \vec{e}_y) + \dot{D}(\vec{e}_x - i \cdot \vec{e}_y)$.

$$\begin{cases} \dot{C} + \dot{D} = Ae^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}} \\ \dot{C} - \dot{D} = -iBe^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} \end{cases}; \quad \begin{aligned} \dot{C} &= \frac{A \cos \frac{\Delta\varphi}{2} - iA \sin \frac{\Delta\varphi}{2} - iB \cos \frac{\Delta\varphi}{2} + B \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{2} \\ \dot{D} &= \frac{A \cos \frac{\Delta\varphi}{2} - iA \sin \frac{\Delta\varphi}{2} + iB \cos \frac{\Delta\varphi}{2} - B \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{2} \end{aligned}$$

$$|\dot{C}| = \frac{\sqrt{\left(A \cos \frac{\Delta\varphi}{2} + B \sin \frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2 + \left(A \sin \frac{\Delta\varphi}{2} + B \cos \frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2}}{2}; \quad |\dot{C}| = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \sin \Delta\varphi}}{2}$$

$$|\dot{D}| = \frac{\sqrt{\left(A \cos \frac{\Delta\varphi}{2} - B \sin \frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2 + \left(A \sin \frac{\Delta\varphi}{2} - B \cos \frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2}}{2}; \quad |\dot{D}| = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \sin \Delta\varphi}}{2}$$

Використаємо результат задачі 4.10: $r = \frac{|\dot{C}| + |\dot{D}|}{|\dot{C}| - |\dot{D}|}$. $r^2 = \frac{|\dot{C}|^2 + |\dot{D}|^2 + 2|\dot{C}||\dot{D}|}{|\dot{C}|^2 + |\dot{D}|^2 - 2|\dot{C}||\dot{D}|} =$

$$= \frac{2A^2 + 2B^2 + 2\sqrt{(A^2 + B^2)^2 - (2AB \sin \Delta\varphi)^2}}{2A^2 + 2B^2 - 2\sqrt{(A^2 + B^2)^2 - (2AB \sin \Delta\varphi)^2}} =$$

$$= \frac{A^2 + B^2 + \sqrt{A^4 + B^4 + 2A^2B^2(1 - 2\sin^2 \Delta\varphi)}}{A^2 + B^2 - \sqrt{A^4 + B^4 + 2A^2B^2(1 - 2\sin^2 \Delta\varphi)}} = \frac{A^2 + B^2 + \sqrt{A^4 + B^4 + 2A^2B^2 \cos(2\Delta\varphi)}}{A^2 + B^2 - \sqrt{A^4 + B^4 + 2A^2B^2 \cos(2\Delta\varphi)}}.$$

$$r(\text{дБ}) = 20 \lg r = 10 \lg r^2; \quad r(\text{дБ}) = 10 \lg \frac{A^2 + B^2 + \sqrt{A^4 + B^4 + 2A^2B^2 \cos(2\Delta\varphi)}}{A^2 + B^2 - \sqrt{A^4 + B^4 + 2A^2B^2 \cos(2\Delta\varphi)}}.$$

Задача 4.13. Ефект Фарадея полягає в повороті площини поляризації електромагнітної хвилі при поширенні в намагніченому фериті вздовж зовнішнього магнітного поля. Лінійно поляризовану електромагнітну хвилю можна представити сумою двох хвиль з ортогональними коловими поляризаціями. Намагнічений ферит має різні магнітні проникності для електромагнітних хвиль лівої і правої колових поляризацій. Визначити кут повороту площини поляризації електромагнітної хвилі з частотою 5 ГГц при проходженні 10 см фериту, для якого $\mu_+ = 1,9$; $\mu_- = 1,7$; $\varepsilon = 16$; $\text{tg } \delta = 0,003$.

Розв'язок

Для феритів $\text{tg}\delta \ll 1$. Тоді для хвиль ортогональних колових поляризацій:

$$\beta_{\pm} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu_{\pm}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \text{tg}^2\delta + 1}{2}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu_{\pm}}. \text{ Використаємо результат задачі 4.10:}$$

$$\alpha = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{2} = \frac{\beta_+ l - \beta_- l}{2} = \frac{\beta_+ - \beta_-}{2} l = \frac{\pi f l \sqrt{\epsilon}}{c} \cdot (\sqrt{\mu_+} - \sqrt{\mu_-}) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ.$$

Задача 4.14. Дві плоскі однорідні електромагнітні хвилі з лінійною поляризацією поширюються у вакуумі таким чином, що вектор Пойнтинга кожної з них лежить у площині xOz і утворює з віссю z кути φ і $180^\circ - \varphi$. Визначити закон зміни вектора сумарного електричного поля, якщо в точці початку координат комплексні амплітуди $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = 1 \cdot \vec{e}_y$ В/м. Визначити відстань між вузлами електричного поля вздовж осі z , якщо частота хвиль дорівнює 100 МГц, а кут $\varphi = 60^\circ$.

Розв'язок

Зміна фаз хвиль у площині xOz : $\vec{\beta}_1 \cdot \vec{r} = \vec{\beta}_1 \cdot (x\vec{e}_x + z\vec{e}_z) = \beta x \sin\varphi + \beta z \cos\varphi$;

$\vec{\beta}_2 \cdot \vec{r} = \vec{\beta}_2 \cdot (x\vec{e}_x + z\vec{e}_z) = \beta x \sin(180^\circ - \varphi) + \beta z \cos(180^\circ - \varphi) = \beta x \sin\varphi - \beta z \cos\varphi$.

Запишемо комплексні амплітуди електричних полів у всьому просторі:

$$\vec{E}_1(x, z) = e^{-i\vec{\beta}_1 \cdot \vec{r}} \cdot \vec{e}_y = e^{-i(\beta x \sin\varphi + \beta z \cos\varphi)} \cdot \vec{e}_y; \vec{E}_2(x, z) = e^{-i\vec{\beta}_2 \cdot \vec{r}} \cdot \vec{e}_y = e^{-i(\beta x \sin\varphi - \beta z \cos\varphi)} \cdot \vec{e}_y$$

Комплексна амплітуда сумарного поля: $\vec{E}_z(x, z) = \vec{E}_1(x, z) + \vec{E}_2(x, z) =$

$$= e^{-i\beta x \sin\varphi} (e^{-i\beta z \cos\varphi} + e^{i\beta z \cos\varphi}) \vec{e}_y = 2e^{-i\beta x \sin\varphi} \frac{e^{i\beta z \cos\varphi} + e^{-i\beta z \cos\varphi}}{2} \vec{e}_y = 2e^{-i\beta x \sin\varphi} \cos(\beta z \cos\varphi) \vec{e}_y \text{ В/м.}$$

Між вузлами електричного поля вздовж осі z фаза змінюється на π радіанів:

$$\beta \Delta z \cos\varphi = \pi; \quad \frac{2\pi f}{c} \Delta z \cos\varphi = \pi; \quad \Delta z = \frac{c}{2f \cos\varphi} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^8 \cdot \cos 60^\circ} \text{ м} = 3 \text{ м.}$$

Задача 4.15. Потужність лазера в імпульсному режимі дорівнює 1 МВт. При якому діаметрі променя виникає пробій повітря імпульсом лазера?

Розв'язок

Пробій повітря виникає при амплітуді електричного поля $E_{\text{пр}} = 30$ кВ/см. Характеристичний опір повітря дорівнює $Z_0 = 120\pi$ Ом = 377 Ом. Знайдемо щільність потоку потужності електромагнітного поля при пробії повітря:

$$\langle \Pi_{\text{пр}} \rangle = \frac{E_{\text{пр}}^2}{2Z_0} = \frac{(30 \cdot 10^5)^2 \text{ Вг}}{240\pi \text{ м}^2} = 12 \frac{\text{ГВт}}{\text{м}^2}. \text{ Потужність випроміненого імпульсу:}$$

$$P = \langle \Pi_{\text{пр}} \rangle \cdot S = \frac{E_{\text{пр}}^2}{2Z_0} \cdot \frac{\pi d^2}{4}. \text{ Тоді діаметр променя: } d = \sqrt{\frac{8PZ_0}{\pi \cdot E_{\text{пр}}^2}} = 2 \sqrt{\frac{P}{\pi \cdot \langle \Pi_{\text{пр}} \rangle}} = 1 \text{ см.}$$

Тема 5. Відбиття і заломлення плоских електромагнітних хвиль

Задача 5.1. Плоска електромагнітна хвиля зі щільністю потоку потужності $100 \frac{\text{мВт}}{\text{м}^2}$ падає нормально відносно межі поділу із повітря ($\epsilon = 1; \mu = 1$) у воду ($\epsilon = 81; \mu = 1$). Знайти, яка потужність передається поверхні води площею поперечного перерізу 1 м^2 .

Розв'язок

$$Z_1 = 120\pi \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} [\text{Ом}] = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_1}} [\text{Ом}]; \quad Z_2 = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_2}} [\text{Ом}]; \quad \Pi_{\text{п}} = \frac{E_{\text{мп}}^2}{2Z_1}; \quad E_{\text{мп}} = \sqrt{2Z_1 \Pi_{\text{п}}};$$

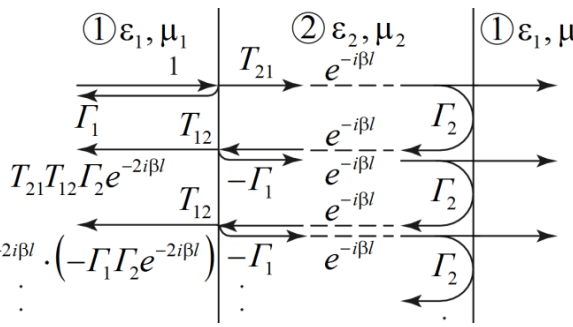
$$T = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{2 \cdot 120\pi / \sqrt{\epsilon_2}}{120\pi / \sqrt{\epsilon_2} + 120\pi / \sqrt{\epsilon_1}} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}}; \quad E_{\text{мз}} = T \cdot E_{\text{мп}} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \cdot \sqrt{2Z_1 \Pi_{\text{п}}};$$

$$\Pi_3 = \frac{E_{\text{мз}}^2}{2Z_2} = \frac{4\epsilon_1}{(\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2})^2} \cdot \frac{2Z_1}{2Z_2} \cdot \Pi_{\text{п}} = \frac{4\epsilon_1}{(\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2})^2} \cdot \frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}} \cdot \Pi_{\text{п}} = \frac{4\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}}{(\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2})^2} \cdot \Pi_{\text{п}};$$

$$\boxed{P_3 = \int_S \vec{\Pi}_3 \cdot d\vec{S}} = \Pi_3 \cdot S = \frac{4\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}}{(\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2})^2} \cdot \Pi_{\text{п}} \cdot S = 36 \text{ мВт}.$$

Задача 5.2. Плоска електромагнітна хвиля із частотою $f_0 = 10 \text{ ГГц}$ падає по нормалі із повітря ($\epsilon = 1; \mu = 1$) на пластину із полістиролу ($\epsilon = 2,55; \mu = 1$) товщиною l . Визначити, при яких l пластина є прозорою для електромагнітної хвилі цієї частоти. Знайти коефіцієнт відбиття найтоншої з цих пластин для електромагнітної хвилі з частотою 5 ГГц .

Розв'язок



$$\Gamma_1 = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{120\pi / \sqrt{\epsilon_2} - 120\pi / \sqrt{\epsilon_1}}{120\pi / \sqrt{\epsilon_2} + 120\pi / \sqrt{\epsilon_1}} = -\frac{\sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}}; \quad \Gamma_2 = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = -\Gamma_1;$$

$$T_{21} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = 1 + \Gamma_1; \quad T_{12} = \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1} = 1 - \Gamma_1;$$

$$\Gamma_{\Sigma} = \Gamma_1 + T_{21} T_{12} \Gamma_2 e^{-2i\beta l} (1 + (-\Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2i\beta l})) + (-\Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2i\beta l});$$

$$= \frac{\Gamma_1 + \Gamma_1^2 \Gamma_2 e^{-2i\beta l} + (1 + \Gamma_1)(1 - \Gamma_1) \Gamma_2 e^{-2i\beta l}}{1 + \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2i\beta l}} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_1^2 \Gamma_2 e^{-2i\beta l} + (1 - \Gamma_1^2) \Gamma_2 e^{-2i\beta l}}{1 + \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2i\beta l}};$$

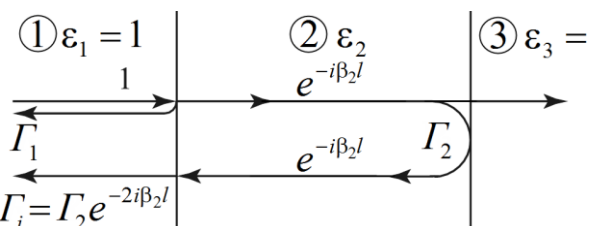
$$\boxed{\Gamma_{\Sigma} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 e^{-2i\beta l}}{1 + \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2i\beta l}}}. \quad \Gamma_1 \Gamma_2 = -0,05. \quad \text{При } |\Gamma_1 \Gamma_2| \ll 1: \quad \boxed{\Gamma_{\Sigma} = \Gamma_1 + \Gamma_2 e^{-2i\beta l}}. \quad \text{Для } \Gamma_2 = -\Gamma_1:$$

$$\Gamma_{\Sigma} = \Gamma_1 (1 - e^{-2i\beta l}) = \Gamma_1 e^{-i\beta l} (e^{i\beta l} - e^{-i\beta l}) = 2i \Gamma_1 e^{-i\beta l} \frac{e^{i\beta l} - e^{-i\beta l}}{2i} = 2\Gamma_1 e^{i(\frac{\pi}{2} - \beta l)} \sin \beta l.$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\Sigma} = 0 \text{ при } \sin \beta l = 0; \beta l = n\pi, \text{ де } n \text{ — ціле. } \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{\lambda_0} l = n\pi; \boxed{l = \frac{n\lambda_0}{2\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}} = \frac{nc}{2f_0\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}} = \\
 = \frac{n \cdot 300 [\text{мм} \cdot \text{ГГц}]}{2 \cdot 10 \text{ ГГц} \cdot \sqrt{2,55}} = 9,4 \text{ мм} \cdot n; l_0 = 9,4 \text{ мм}. \beta(f)l_0 = \frac{2\pi f \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{c} \cdot \frac{c}{2f_0\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}} = \pi \frac{f}{f_0}; \\
 \Gamma_{\Sigma}(f) = 2\Gamma_1 e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \pi \frac{f}{f_0}\right)} \sin\left(\pi \frac{f}{f_0}\right) = -2 \frac{\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \pi \frac{f}{f_0}\right)} \sin\left(\pi \frac{f}{f_0}\right) = -0,46.
 \end{aligned}$$

Задача 5.3. Визначити відносну діелектричну проникність і товщину покриття на поверхні тefлону ($\varepsilon = 2,05$), яке забезпечує відсутність відбиття електромагнітної хвилі з частотою $f = 10$ ГГц при нормальному падінні.

Розв'язок



Коефіцієнт відбиття від двох неоднорідностей: $\Gamma_{\Sigma} = \Gamma_1 + \Gamma_2 e^{-2i\beta_2 l}$.

$\Gamma_{\Sigma} = 0$, якщо $\begin{cases} \Gamma_1 = \Gamma_2 \\ e^{-2i\beta_2 l} = -1 \end{cases} \cdot \Gamma_1 = \Gamma_2$;

$$\begin{aligned}
 \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2}; (Z_2 - Z_1)(Z_3 + Z_2) = (Z_3 - Z_2)(Z_2 + Z_1); Z_2 Z_3 - Z_1 Z_3 + Z_2^2 - Z_1 Z_2 = \\
 = Z_3 Z_2 - Z_2^2 + Z_3 Z_1 - Z_2 Z_1; 2Z_2^2 = 2Z_1 Z_3; \boxed{Z_2 = \sqrt{Z_1 \cdot Z_3}}; \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_1}} \cdot \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_3}}};
 \end{aligned}$$

$\boxed{\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3}} = \sqrt{1 \cdot 2,05} = 1,43$. Це відносна проникність спіненого поліетилену або пінополістиролу. $e^{-2i\beta_2 l} = -1$; $e^{-2i\beta_2 l} = e^{-i(2n+1)\pi}$; $2\beta_2 l = (2n+1)\pi$, де n — ціле.

$$2 \cdot \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon_2}}{\lambda_0} \cdot l = (2n+1)\pi; \boxed{l = \frac{(2n+1)\lambda_0}{4\sqrt{\varepsilon_2}}}; \boxed{l_0 = \frac{\lambda_0}{4\sqrt{\varepsilon_2}}} = \frac{c}{4f_0\sqrt{\varepsilon_2}} = \frac{300 [\text{мм} \cdot \text{ГГц}]}{4 \cdot 10 \text{ ГГц} \cdot \sqrt{1,43}} = 6,3 \text{ мм}.$$

Задача 5.4. При нормальному падінні плоскої електромагнітної хвилі з вакууму на межу поділу середовищ коефіцієнт відбиття на частоті $f = 1$ ГГц дорівнює $\dot{\Gamma} = 0,8354 \cdot e^{i176,06^\circ}$. Визначте параметри середовища: відносну діелектричну проникність ε , питому провідність σ , тангенс кута діелектричних втрат $\text{tg } \delta$. Відомо, що відносна магнітна проникність середовища $\mu = 1$.

Розв'язок

При нормальному падінні $\dot{\Gamma} = \frac{\dot{Z}_2 - Z_1}{\dot{Z}_2 + Z_1} = \frac{120\pi/\sqrt{\dot{\varepsilon}} - 120\pi}{120\pi/\sqrt{\dot{\varepsilon}} + 120\pi} = \frac{1 - \sqrt{\dot{\varepsilon}}}{1 + \sqrt{\dot{\varepsilon}}}$. Тоді:

$$\dot{\Gamma} + \dot{\Gamma} \sqrt{\dot{\varepsilon}} = 1 - \sqrt{\dot{\varepsilon}}; \sqrt{\dot{\varepsilon}} = \frac{1 - \dot{\Gamma}}{1 + \dot{\Gamma}}; \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{1 - i \cdot \text{tg } \delta} = \frac{1 - |\dot{\Gamma}| \cos \varphi_{\dot{\Gamma}} - i |\dot{\Gamma}| \sin \varphi_{\dot{\Gamma}}}{1 + |\dot{\Gamma}| \cos \varphi_{\dot{\Gamma}} + i |\dot{\Gamma}| \sin \varphi_{\dot{\Gamma}}};$$

$$\sqrt{\varepsilon} \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \delta)^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-i\frac{\delta}{2}} = \frac{\sqrt{(1 - |\dot{\Gamma}| \cos \varphi_r)^2 + (|\dot{\Gamma}| \sin \varphi_r)^2}}{\sqrt{(1 + |\dot{\Gamma}| \cos \varphi_r)^2 + (|\dot{\Gamma}| \sin \varphi_r)^2}} e^{-i \left(\operatorname{arctg} \frac{|\dot{\Gamma}| \sin \varphi_r}{1 - |\dot{\Gamma}| \cos \varphi_r} + \operatorname{arctg} \frac{|\dot{\Gamma}| \sin \varphi_r}{1 + |\dot{\Gamma}| \cos \varphi_r} \right)}$$

Прирівнявши аргументи і модулі в останньому виразі, отримуємо:

$$\delta = 2 \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{|\dot{\Gamma}| \sin \varphi_r}{1 - |\dot{\Gamma}| \cos \varphi_r} + \operatorname{arctg} \frac{|\dot{\Gamma}| \sin \varphi_r}{1 + |\dot{\Gamma}| \cos \varphi_r} \right) = 41^\circ 37' \cdot \operatorname{tg} \delta = 0,89.$$

$$\varepsilon = \frac{1 + |\dot{\Gamma}|^2 - 2|\dot{\Gamma}| \cos \varphi_r}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} \cdot (1 + |\dot{\Gamma}|^2 + 2|\dot{\Gamma}| \cos \varphi_r)} = 81.$$

Знайдемо питому провідність середовища: $\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}$;

$$\sigma = 2\pi f \varepsilon_0 \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \delta = 2\pi \cdot 1 \cdot 10^9 \text{ Гц} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}} \cdot 81 \cdot 0,89 = 4 \frac{\text{См}}{\text{м}}.$$

Задача 5.5. Кут падіння плоскої електромагнітної хвилі, при якому відсутня відбита хвиля певної поляризації, називають кутом Брюстера. Для немагнітних середовищ кут Брюстера існує лише для \parallel поляризації. Знайти кут Брюстера для електромагнітної хвилі, яка падає зі скла ($\varepsilon = 4,8$) у тефлон ($\varepsilon = 2,05$).

Розв'язок

$\Gamma_{\parallel} = -\frac{\operatorname{tg}(\varphi_B - \theta_B)}{\operatorname{tg}(\varphi_B + \theta_B)} = 0$. За другим законом Снелла: $\frac{\sin \varphi_B}{\sin \theta_B} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \neq 1$; $\varphi_B \neq \theta_B$. Тоді

$\Gamma_{\parallel} = 0$, якщо $\operatorname{tg}(\varphi_B + \theta_B) \rightarrow \infty$; $\boxed{\varphi_B + \theta_B = \frac{\pi}{2}}$; $\theta_B = \frac{\pi}{2} - \varphi_B$; $\frac{\sin \varphi_B}{\sin \theta_B} = \frac{\sin \varphi_B}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_B\right)} =$

$$= \frac{\sin \varphi_B}{\cos \varphi_B} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}; \quad \boxed{\operatorname{tg} \varphi_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}; \quad \boxed{\varphi_B = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}} = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2,05}{4,8}} = 33^\circ.$$

Задача 5.6. Нормально поляризована хвиля з амплітудою напруженості електричного поля $E_1 = 25 \text{ В/м}$ падає на плоску межу поділу повітря-діелектрик під кутом $\varphi = 30^\circ$. Визначити амплітуду поля заломленої хвилі, якщо параметри діелектрика $\varepsilon_2 = 81$, $\mu_2 = 1$.

Розв'язок

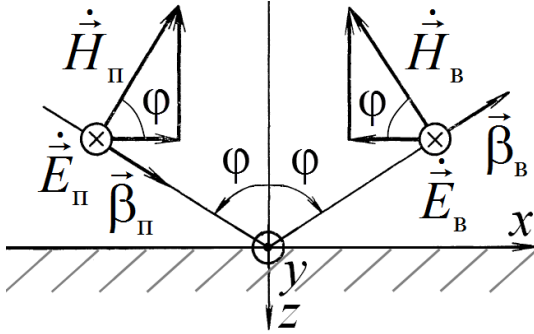
За другим законом Снелла: $\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$; $\theta = \arcsin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} \sin \varphi}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right) = 3^\circ 11'$;

Знайдемо коефіцієнт проходження заломленої хвилі за формулою для немагнітних діелектриків без втрат: $T_{\perp} = \frac{2 \sin \theta \cos \varphi}{\sin(\varphi + \theta)} = \frac{2 \sin 3^\circ 11' \cos 30^\circ}{\sin(33^\circ 11')} = 0,176$.

Амплітуда електричного поля заломленої хвилі: $E_2 = T_{\perp} \cdot E_1 = 4,4 \text{ В/м}$.

Задача 5.7. Плоска електромагнітна хвиля, що поширюється у вакуумі, падає на нескінченну площину ідеального провідника під кутом φ . Визначити розподіл сумарного електричного і магнітного полів у вакуумі, якщо вектор \vec{E} падаючої хвилі перпендикулярний площині падіння.

Розв'язок



$$\vec{\beta}_\pi \cdot \vec{r} = \vec{\beta}_\pi \cdot (x\vec{e}_x + z\vec{e}_z) = \beta x \sin \varphi + \beta z \cos \varphi$$

$$\vec{\beta}_B \cdot \vec{r} = \vec{\beta}_B \cdot (x\vec{e}_x + z\vec{e}_z) = \beta x \sin \varphi - \beta z \cos \varphi$$

$$\vec{E}_\pi(x, z) = -E_\pi e^{-i\vec{\beta}_\pi \cdot \vec{r}} \cdot \vec{e}_y = -E_\pi e^{-i\beta x \sin \varphi} \cdot e^{-i\beta z \cos \varphi} \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_B(x, z) = -E_B e^{-i\vec{\beta}_B \cdot \vec{r}} \cdot \vec{e}_y = -E_B e^{-i\beta x \sin \varphi} \cdot e^{i\beta z \cos \varphi} \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{E}(x, z) = \vec{E}_\pi(x, z) + \vec{E}_B(x, z) = (-E_\pi e^{-i\beta z \cos \varphi} - E_B e^{i\beta z \cos \varphi}) e^{-i\beta x \sin \varphi} \cdot \vec{e}_y. \text{ Гранична умова на}$$

$$\text{поверхні ідеального провідника: } \boxed{\vec{E}_\tau = 0}. \vec{E}(x, 0) = 0; (-E_\pi - E_B) e^{-i\beta x \sin \varphi} = 0; E_B = -E_\pi.$$

$$\vec{E}(x, z) = (-E_\pi e^{-i\beta z \cos \varphi} + E_\pi e^{i\beta z \cos \varphi}) \cdot e^{-i\beta x \sin \varphi} \cdot \vec{e}_y = 2i \cdot E_\pi \frac{e^{i\beta z \cos \varphi} - e^{-i\beta z \cos \varphi}}{2i} \cdot e^{-i\beta x \sin \varphi} \cdot \vec{e}_y.$$

$$\boxed{\vec{E}(x, z) = 2i \cdot E_\pi \sin(\beta z \cos \varphi) \cdot e^{-i\beta x \sin \varphi} \cdot \vec{e}_y}. \vec{H}_x(x, z) = \vec{H}_{\pi x}(x, z) + \vec{H}_{Bx}(x, z) =$$

$$= (H_\pi \cos \varphi e^{-i\beta z \cos \varphi} - H_B \cos \varphi e^{i\beta z \cos \varphi}) e^{-i\beta x \sin \varphi} \cdot \vec{e}_x. \text{ Гранична умова на поверхні}$$

$$\text{ідеального провідника: } \boxed{\frac{\partial \vec{H}_\tau}{\partial n} = 0}. \frac{\partial H_x(x, 0)}{\partial z} = 0; (-i\beta H_\pi \cos^2 \varphi - i\beta H_B \cos^2 \varphi) e^{-i\beta x \sin \varphi} = 0;$$

$$H_B = -H_\pi; \vec{H}_x(x, z) = (H_\pi \cos \varphi e^{-i\beta z \cos \varphi} + H_\pi \cos \varphi e^{i\beta z \cos \varphi}) \cdot e^{-i\beta x \sin \varphi} \cdot \vec{e}_x =$$

$$= 2H_\pi \cos \varphi \cdot \frac{e^{i\beta z \cos \varphi} + e^{-i\beta z \cos \varphi}}{2} \cdot e^{-i\beta x \sin \varphi} \cdot \vec{e}_x = 2H_\pi \cos \varphi \cdot \cos(\beta z \cos \varphi) \cdot e^{-i\beta x \sin \varphi} \cdot \vec{e}_x.$$

$$\vec{H}_z(x, z) = \vec{H}_{\pi z}(x, z) + \vec{H}_{Bz}(x, z) = (-H_\pi \sin \varphi e^{-i\beta z \cos \varphi} - H_B \sin \varphi e^{i\beta z \cos \varphi}) e^{-i\beta x \sin \varphi} \cdot \vec{e}_z.$$

$$\text{Гранична умова на поверхні ідеального провідника: } \boxed{\vec{H}_n = 0}. H_z(x, 0) = 0;$$

$$(-H_\pi \sin \varphi - H_B \sin \varphi) e^{-i\beta x \sin \varphi} = 0; H_B = -H_\pi;$$

$$\vec{H}_z(x, z) = (-H_\pi \sin \varphi e^{-i\beta z \cos \varphi} + H_\pi \sin \varphi e^{i\beta z \cos \varphi}) e^{-i\beta x \sin \varphi} \cdot \vec{e}_z =$$

$$= 2iH_\pi \sin \varphi \cdot \frac{e^{i\beta z \cos \varphi} - e^{-i\beta z \cos \varphi}}{2i} \cdot e^{-i\beta x \sin \varphi} \cdot \vec{e}_z = 2iH_\pi \sin \varphi \cdot \sin(\beta z \cos \varphi) e^{-i\beta x \sin \varphi} \cdot \vec{e}_z.$$

$$\boxed{\vec{H}(x, z) = 2H_\pi (\cos \varphi \cdot \cos(\beta z \cos \varphi) \cdot \vec{e}_x + i \sin \varphi \cdot \sin(\beta z \cos \varphi) \cdot \vec{e}_z) \cdot e^{-i\beta x \sin \varphi}},$$

$$\text{де } H_\pi = \frac{E_\pi}{Z_0} = \frac{E_\pi}{120\pi \text{ Ом}}.$$

Задача 5.8. Плоска електромагнітна хвиля з коловою поляризацією падає із повітря ($\epsilon = 1$) в полістирол ($\epsilon = 2,56$). Знайти поляризацію відбитої хвилі для кутів падіння $0^\circ, 35^\circ, 58^\circ$.

Розв'язок

За другим законом Снелла: $\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$; $\sin \theta = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \varphi$; $\theta = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \varphi\right)$.

1) При нормальному падінні $\Gamma_{\perp} = \Gamma_{\parallel} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{120\pi/\sqrt{\epsilon_2} - 120\pi/\sqrt{\epsilon_1}}{120\pi/\sqrt{\epsilon_2} + 120\pi/\sqrt{\epsilon_1}} =$
 $= -\frac{\sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}} = -\frac{\sqrt{2,56} - \sqrt{1}}{\sqrt{2,56} + \sqrt{1}} = -0,231$. Комплексна амплітуда падаючої хвилі з

коловою поляризацією $\dot{\vec{E}}_{\text{н}} = \dot{\vec{E}}_{\text{н}\perp} + i\dot{\vec{E}}_{\text{н}\parallel}$; $|\dot{\vec{E}}_{\text{н}\perp}| = |\dot{\vec{E}}_{\text{н}\parallel}| = \dot{E}$. Комплексна амплітуда відбитої хвилі $\dot{\vec{E}}_{\text{в}} = \Gamma_{\perp} \cdot \dot{\vec{E}}_{\text{н}\perp} + i\Gamma_{\parallel} \cdot \dot{\vec{E}}_{\text{н}\parallel}$. $\dot{\vec{E}}_{\text{в}} = \Gamma \cdot (\dot{\vec{E}}_{\text{н}\perp} + i\dot{\vec{E}}_{\text{н}\parallel}) = \Gamma \cdot \dot{\vec{E}}_{\text{н}}$. Відбита хвиля має колову поляризацію, ортогональну до поляризації падаючої хвилі.

2) $\varphi = 35^\circ$; $\theta = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2,56}} \sin 35^\circ\right) = 21^\circ$. $\Gamma_{\perp} = -\frac{\sin(\varphi - \theta)}{\sin(\varphi + \theta)} = -\frac{\sin(14^\circ)}{\sin(56^\circ)} = -0,292$;

$\Gamma_{\parallel} = -\frac{\text{tg}(\varphi - \theta)}{\text{tg}(\varphi + \theta)} = -\frac{\text{tg}(14^\circ)}{\text{tg}(56^\circ)} = -0,168$. Комплексна амплітуда відбитої хвилі

$\dot{\vec{E}}_{\text{в}} = \Gamma_{\perp} \cdot \dot{\vec{E}}_{\text{н}\perp} + i\Gamma_{\parallel} \cdot \dot{\vec{E}}_{\text{н}\parallel} = -0,292 \cdot \dot{E} \cdot \vec{e}_{\perp} - i \cdot 0,168 \cdot \dot{E} \cdot \vec{e}_{\parallel}$. Відбита хвиля має

еліптичну поляризацію з коефіцієнтом еліптичності $r = \frac{|\dot{\vec{E}}_{\text{в}\parallel}|}{|\dot{\vec{E}}_{\text{в}\perp}|} = \frac{|\Gamma_{\parallel}|}{|\Gamma_{\perp}|} = 0,58$.

3) $\varphi = 58^\circ$; $\theta = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2,56}} \sin 58^\circ\right) = 32^\circ$; $\Gamma_{\perp} = -\frac{\sin(\varphi - \theta)}{\sin(\varphi + \theta)} = -\frac{\sin(26^\circ)}{\sin(90^\circ)} = -0,438$;

$\Gamma_{\parallel} = -\frac{\text{tg}(\varphi - \theta)}{\text{tg}(\varphi + \theta)} = -\frac{\text{tg}(26^\circ)}{\text{tg}(90^\circ)} = 0$. Отже, електромагнітна хвиля падає під кутом

Брюстера. Комплексна амплітуда відбитої хвилі $\dot{\vec{E}}_{\text{в}} = \Gamma_{\perp} \cdot \dot{\vec{E}}_{\text{н}\perp} + i\Gamma_{\parallel} \cdot \dot{\vec{E}}_{\text{н}\parallel} =$
 $= \Gamma_{\perp} \cdot \dot{\vec{E}}_{\text{н}\perp} = -0,438 \cdot \dot{E} \cdot \vec{e}_{\perp}$. Відбита хвиля має лінійну поляризацію. Вектор електричного поля відбитої хвилі перпендикулярний площині падіння.

Тема 6. Хвилеводи

Задача 6.1. Визначити, які типи хвиль можуть поширюватись у заповненому повітрям прямокутному хвилеводі перерізом 23 мм × 10 мм на частоті 14 ГГц.

Розв'язок: $f_{\text{кр}} = \frac{300 [\text{мм} \cdot \text{ГГц}]}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{23 \text{ мм}}\right)^2 + \left(\frac{n}{10 \text{ мм}}\right)^2} = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{23}\right)^2 + \left(\frac{n}{10}\right)^2} \text{ ГГц}.$

Умова поширення хвилі у хвилеводі: $f_{\text{кр}} < f$.

$$f_{\text{кр}}^{\text{H}_{10}} = 150 \cdot \frac{1}{23} \text{ ГГц} = 6,52 \text{ ГГц} < 14 \text{ ГГц}. \text{ Хвиля } \boxed{\text{H}_{10}} \text{ може поширюватись.}$$

$$f_{\text{кр}}^{\text{H}_{20}} = 150 \cdot \frac{2}{23} \text{ ГГц} = 13,04 \text{ ГГц} < 14 \text{ ГГц}. \text{ Хвиля } \boxed{\text{H}_{20}} \text{ може поширюватись.}$$

$$f_{\text{кр}}^{\text{H}_{30}} = 150 \cdot \frac{3}{23} \text{ ГГц} = 19,57 \text{ ГГц} > 14 \text{ ГГц}. \text{ Хвиля } \text{H}_{30} \text{ не може поширюватись.}$$

$$f_{\text{кр}}^{\text{H}_{01}} = 150 \cdot \frac{1}{10} \text{ ГГц} = 15 \text{ ГГц} > 14 \text{ ГГц}. \text{ Хвиля } \text{H}_{01} \text{ не може поширюватись.}$$

$$f_{\text{кр}}^{\text{H}_{11}, \text{E}_{11}} = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{23}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2} \text{ ГГц} = 16,36 \text{ ГГц} > 14 \text{ ГГц}. \text{ Хвилі } \text{H}_{11}, \text{E}_{11} \text{ і вищі загасають.}$$

Відповідь: $\text{H}_{10}, \text{H}_{20}$.

Задача 6.2. Відомо, що для хвилі основного типу в прямокутному хвилеводі критична довжина хвилі $\lambda_{\text{кр}} = 14,4$ см, а для хвилі типу H_{21} вона дорівнює $\lambda_{\text{кр}} = 4,95$ см. Визначити розміри поперечного перерізу такого хвилеводу.

Розв'язок:

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}. \text{ Основним типом хвилі прямокутного хвилеводу є } \text{H}_{10}.$$

$$\lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{10}} = 2a. \text{ Тоді } a = \frac{\lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{10}}}{2} = 7,2 \text{ см}. \lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{21}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}}; \sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} = \frac{2}{\lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{21}}};$$

$$\left(\frac{2}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 = \left(\frac{2}{\lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{21}}}\right)^2; \frac{1}{b^2} = \frac{4}{(\lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{21}})^2} - \frac{4}{a^2} = \frac{4(a^2 - (\lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{21}})^2)}{(a \cdot \lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{21}})^2}; b = \frac{a \cdot \lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{21}}}{2\sqrt{a^2 - (\lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{21}})^2}};$$

$$b = \frac{\lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{10}} \cdot \lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{21}}}{4\sqrt{\frac{(\lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{10}})^2}{4} - (\lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{21}})^2}} = \frac{\lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{10}} \cdot \lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{21}}}{2\sqrt{(\lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{10}})^2 - 4 \cdot (\lambda_{\text{кр}}^{\text{H}_{21}})^2}} = \frac{14,4 \cdot 4,95 \text{ см}}{2\sqrt{(14,4)^2 - 4 \cdot (4,95)^2}} = 3,4 \text{ см}.$$

Відповідь: $a \times b = 7,2 \times 3,4 \text{ см}^2$.

Задача 6.3. Знайти, які типи хвиль можуть поширюватись у заповненому повітрям круглому хвилеводі діаметром 2 см на частоті 12 ГГц.

Розв'язок: Умова поширення хвилі у хвилеводі: $f_{\text{кр}} < f$. $f_{\text{кр}}^{\text{H}_{11}} = \frac{\mu_{11}c}{2\pi a\sqrt{\epsilon\mu}} =$
 $= \frac{\mu_{11}c}{\pi D} = \frac{1,841 \cdot 30 [\text{см} \cdot \text{ГГц}]}{\pi \cdot 2 \text{ см}} = 8,790 \text{ ГГц} < 12 \text{ ГГц}$. Хвиля $\boxed{\text{H}_{11}}$ може поширюватись.
 $f_{\text{кр}}^{\text{E}_{01}} = \frac{v_{01}c}{\pi D} = \frac{2,405 \cdot 30}{\pi \cdot 2} \text{ ГГц} = 11,483 \text{ ГГц} < 12 \text{ ГГц}$. Хвиля $\boxed{\text{E}_{01}}$ може поширюватись.
 $f_{\text{кр}}^{\text{H}_{21}} = \frac{\mu_{21}c}{\pi D} = \frac{3,054 \cdot 30}{\pi \cdot 2} \text{ ГГц} = 14,582 \text{ ГГц} > 12 \text{ ГГц}$. Хвиля H_{21} і вищі загасають.

Відповідь: H_{11} , E_{01} .

Задача 6.4. Визначити смугу частот однохвильового режиму роботи прямокутного хвилеводу перерізом 35 мм × 15 мм у ГГц і %.

Розв'язок: Два перші типи хвиль прямокутного хвилеводу — H_{10} , H_{20} .
 $f_{\text{кр}}^{\text{H}_{10}} = \frac{c}{2a} = \frac{300 [\text{мм} \cdot \text{ГГц}]}{2 \cdot 35 \text{ мм}} = 4,286 \text{ ГГц}$. $f_{\text{кр}}^{\text{H}_{20}} = \frac{c}{a} = \frac{300 [\text{мм} \cdot \text{ГГц}]}{35 \text{ мм}} = 8,571 \text{ ГГц}$.
 $\Delta f = f_{\text{кр}}^{\text{H}_{20}} - f_{\text{кр}}^{\text{H}_{10}} = \frac{c}{a} - \frac{c}{2a} = \frac{c}{2a}$. $f_0 = \frac{f_{\text{кр}}^{\text{H}_{10}} + f_{\text{кр}}^{\text{H}_{20}}}{2} = \frac{\frac{c}{2a} + \frac{c}{a}}{2} = \frac{3c}{4a}$. $\delta f = \frac{\Delta f}{f_0} \cdot 100\% =$
 $= \frac{c}{2a} \cdot \frac{4a}{3c} \cdot 100\% = 67\%$. **Відповідь:** 4,286–8,571 ГГц, 67%.

Задача 6.5. Знайти смугу частот одномодового режиму роботи заповненого повітрям круглого хвилеводу діаметром 5 см у ГГц і %.

Розв'язок: Два перші типи хвиль круглого хвилеводу — H_{11} , E_{01} . $f_{\text{кр}}^{\text{H}_{11}} = \frac{\mu_{11}c}{\pi D} =$
 $= \frac{1,841 \cdot 30 [\text{см} \cdot \text{ГГц}]}{\pi \cdot 5 \text{ см}} = 3,516 \text{ ГГц}$. $f_{\text{кр}}^{\text{E}_{01}} = \frac{v_{01}c}{\pi D} = \frac{2,405 \cdot 30 [\text{см} \cdot \text{ГГц}]}{\pi \cdot 5 \text{ см}} = 4,593 \text{ ГГц}$.
 $\Delta f = f_{\text{кр}}^{\text{E}_{01}} - f_{\text{кр}}^{\text{H}_{11}} = \frac{(v_{01} - \mu_{11})c}{\pi D} = \frac{0,564 \cdot c}{\pi D}$. $f_0 = \frac{f_{\text{кр}}^{\text{H}_{11}} + f_{\text{кр}}^{\text{E}_{01}}}{2} = \frac{(v_{01} + \mu_{11})c}{2\pi D} = \frac{2,123 \cdot c}{\pi D}$.
 $\delta f = \frac{\Delta f}{f_0} \cdot 100\% = \frac{0,564}{2,123} \cdot 100\% = 27\%$. **Відповідь:** 3,516–4,593 ГГц, 27%.

Задача 6.6. Групова швидкість хвилі типу H_{10} у прямокутному хвилеводі перерізом $a \times b$ на частоті 10 ГГц дорівнює $0,8 \cdot c$, де c — швидкість світла. Визначити довжину хвилі у хвилеводі $\lambda_{\text{хв}}$, розмір широкої стінки a , характеристичний опір.

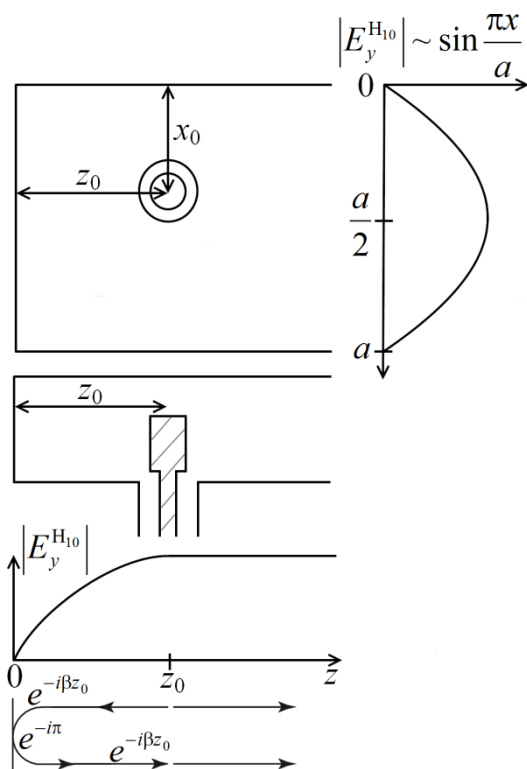
Розв'язок

$$v_{\text{гр}}^{\text{H}_{10}} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}; \quad \lambda_{\text{хв}}^{\text{H}_{10}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}} = \frac{\lambda_0 c}{c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}} = \frac{c^2}{v_{\text{гр}}^{\text{H}_{10}} \cdot f} = \frac{c}{0,8 \cdot f} = 37,5 \text{ мм}$$

$$a = \frac{c}{2f \sqrt{1 - \left(\frac{v_{\text{гр}}^{\text{H}_{10}}}{c}\right)^2}} = 25 \text{ мм}; \quad Z_{\text{H}_{10}} = \frac{120\pi [\text{Ом}]}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}} = \frac{Z_0 c}{v_{\text{гр}}^{\text{H}_{10}}} = \frac{120\pi [\text{Ом}]}{0,8} = 471 \text{ Ом}.$$

Відповідь: $\lambda_{\text{хв}} = 37,5 \text{ мм}; a = 25 \text{ мм}; Z_{\text{H}_{10}} = 471 \text{ Ом}.$

Задача 6.7. Хвиля H_{10} прямокутного хвилеводу перерізом $23 \text{ мм} \times 10 \text{ мм}$ збуджується штирем, розміщеним на відстані z_0 від закороченого кінця хвилеводу та x_0 від бокової стінки. Знайти вказані координати при збудженні максимального поля хвилі на середній частоті однохвильового режиму роботи.

Розв'язок

Для збудження максимального поля хвилі H_{10} штир повинен розміщуватись паралельно електричному полю (вздовж осі y) в координатах максимуму електричного поля хвилі H_{10} , тому $x_0 = \frac{a}{2} = 11,5 \text{ мм}.$

Повздовжня координата z_0 визначається з умови синфазності хвилі, яка поширюється вздовж осі z , і хвилі, відбитої від закороченого кінця хвилеводу: $\Delta\varphi = 2\pi; \quad \beta z_0 + \pi + \beta z_0 = 2\pi;$

$$\beta z_0 = \frac{\pi}{2}; \quad z_0 = \frac{\pi}{2\beta} = \frac{\pi \cdot \lambda_{\text{хв}}}{2 \cdot 2\pi} = \frac{\lambda_{\text{хв}}}{4}.$$

Середня частота однохвильового режиму

роботи хвилеводу: $f_0 = \frac{f_{\text{кр}}^{\text{H}_{10}} + f_{\text{кр}}^{\text{H}_{20}}}{2} = \frac{3c}{4a}.$

Довжина хвилі: $\lambda_{\text{хв}}^{\text{H}_{10}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}} = \frac{c/f_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{2af_0}\right)^2}} = \frac{4a}{\sqrt{5}}. \quad z_0 = \frac{\lambda_{\text{хв}}}{4} = \frac{a}{\sqrt{5}} = 10,3 \text{ мм}.$

Відповідь: $x_0 = \frac{a}{2} = 11,5 \text{ мм}; \quad z_0 = \frac{\lambda_{\text{хв}}}{4} = \frac{a}{\sqrt{5}} = 10,3 \text{ мм}.$

Задача 6.8. У прямокутному хвилеводі із внутрішніми розмірами поперечного перерізу $23 \times 10 \text{ мм}^2$ значення амплітуди напруженості електричного поля хвилі основного типу 4 кВ/см. Розрахувати амплітудне значення напруженості магнітного поля та перенесену потужність, якщо довжина хвилі генератора дорівнює 3,2 см.

Розв'язок:

Основним типом хвилі у прямокутному хвилеводі є H_{10} . Характеристичний опір прямокутного хвилеводу для хвилі H_{10} дорівнює: $Z_{H_{10}} = \frac{E_{ym}}{H_{xm}} =$
 $= \frac{120\pi \text{ Ом}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} = \frac{120\pi \text{ Ом}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} = \frac{120\pi \text{ Ом}}{\sqrt{1 - \left(\frac{32}{46}\right)^2}} = 525 \text{ Ом}$. Тоді амплітуда напруженості

поперечної складової магнітного поля $H_{xm} = \frac{E_{ym}}{Z_{H_{10}}} = \frac{4000 \text{ В/см}}{525 \text{ Ом}} = 7,6 \text{ А/см}$.

Хвильовий опір за потужністю і напругою еквівалентної довгої лінії для хвилі H_{10} прямокутного хвилеводу: $Z_{P, U_{свн}}^{H_{10}} = 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot Z_{H_{10}} = 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{120\pi \text{ Ом}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}$.

Потужність, яка переноситься хвилею H_{10} , дорівнює: $P = \frac{U_{свн}^2}{2 \cdot Z_{P, U_{свн}}^{H_{10}}} =$

$$= \frac{\left(\int_0^b E_{ym} dy\right)^2}{2 \cdot Z_{P, U_{свн}}^{H_{10}}} = \frac{E_{ym}^2 \cdot b^2}{2 \cdot Z_{P, U_{свн}}^{H_{10}}} = \frac{E_{ym}^2 \cdot a \cdot b}{4 \cdot Z_{H_{10}}} = \frac{(4 \text{ кВ/см})^2 \cdot 2,3 \text{ см} \cdot 1 \text{ см}}{4 \cdot 525 \text{ Ом}} = 17,5 \text{ кВт}.$$

Відповідь: $H_{xm} = 7,6 \text{ А/см}$; $P = 17,5 \text{ кВт}$.

Задача 6.9. Хвиля H_{10} поширюється у прямокутному хвилеводі з поперечними розмірами $a = 7,2 \text{ см}$; $b = 3,4 \text{ см}$. Визначити поперечні координати поздовжніх площин, у яких вектор напруженості магнітного поля має колову поляризацію на частоті 2,95 ГГц.

Розв'язок

Комплексні амплітуди компонент напруженості магнітного поля хвилі H_{10} :

$$\dot{H}_x^{H_{10}} = \frac{i\beta a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z}; \quad \dot{H}_z^{H_{10}} = H_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z}. \quad \text{Три умови, необхідні для утворення}$$

хвилі колової поляризації:

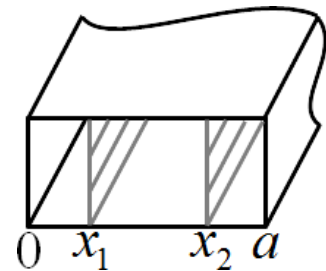
$$1) \vec{H}_x \perp \vec{H}_z \text{ — виконується;}$$

$$2) \varphi_{H_x} - \varphi_{H_z} = \pm 90^\circ \text{ — виконується;}$$

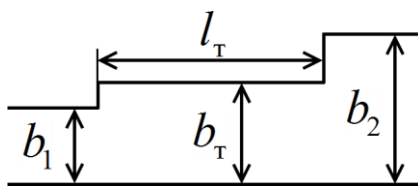
$$3) |\dot{H}_x| = |\dot{H}_z|; \quad \frac{\beta a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} = \cos \frac{\pi x}{a}; \quad \operatorname{tg} \frac{\pi x}{a} = \frac{\pi}{\beta a} = \frac{\pi}{a} \cdot \frac{\lambda_{\text{ХВ}}}{2\pi} = \frac{\lambda_{\text{ХВ}}}{2a};$$

$$x_1 = \frac{a}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\lambda_{\text{ХВ}}}{2a} = \frac{a}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{c/2af_0}{\sqrt{1-(c/2af_0)^2}} = \frac{a}{4} = 1,8 \text{ см.}$$

$$x_2 = a - x_1 = \frac{a}{\pi} \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{\lambda_{\text{ХВ}}}{2a} \right) = \frac{3a}{4} = 5,4 \text{ см.}$$



Задача 6.10. Чвертьхвильовий трансформатор використовується для узгодження на частоті 38 ГГц двох прямокутних хвилеводів із розмірами поперечних перерізів 4,78 мм × 2,39 мм і 4,78 мм × 1,21 мм. Ширина трансформатора становить 4,78 мм. Знайти висоту і довжину трансформатора.



Розв'язок: За результатом задачі 5.3 хвильовий опір чвертьхвильового трансформатора $Z_T = \sqrt{Z_1 \cdot Z_2}$.

Оскільки $a_1 = a_2 = a_T$, то $Z_{H_{10}1} = Z_{H_{10}2} = Z_{H_{10}T}$. Тоді

хвильовий опір хвилеводів і трансформатора визначаються за формулою

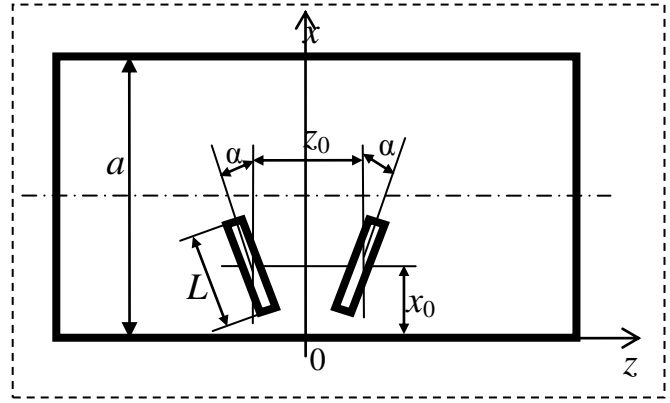
$$Z_{\text{ХВ}i} = \operatorname{const} \cdot \frac{b_i}{a} \cdot Z_{H_{10}}; \quad \operatorname{const} \cdot \frac{b_T}{a} \cdot Z_{H_{10}} = \sqrt{\operatorname{const} \cdot \frac{b_1}{a} \cdot Z_{H_{10}} \cdot \operatorname{const} \cdot \frac{b_2}{a} \cdot Z_{H_{10}}}$$

$$b_T = \sqrt{b_1 \cdot b_2} = 1,70 \text{ мм. Довжина чвертьхвильового трансформатора } l_T = \frac{\lambda_{\text{ХВ}T}}{4} =$$

$$= \frac{c/f}{4\sqrt{1-(c/2af)^2}} = 3,50 \text{ мм.}$$

Відповідь: $b_T = 1,70 \text{ мм}; \quad l_T = 3,50 \text{ мм.}$

Задача 6.11. На широкій стінці прямокутного хвилеводу прорізано дві дзеркально-розташовані відносно осі x ідентичні нахилені щілини. Відстань між центрами щілин уздовж осі хвилеводу z_0 ; поперечна координата центрів щілин x_0 ; кут нахилу щілин відносно поперечної площини α ; довжина щілин L . Визначити фазовий зсув між хвилями, що відгалужуються щілинами із хвилеводу, по якому поширюється хвиля типу H_{10} .



Знайти фазовий зсув, якщо: $x_0 = a/4$; $\alpha = 22,5^\circ$; $z_0 = \lambda_{\text{хв}}/8$, де $\lambda_{\text{хв}} = 2a$; $\lambda_{\text{хв}}$ — довжина хвилі у хвилеводі; a — розмір широкої стінки хвилеводу. Довжина щілини $L < a/4$. При розрахунку фазового зсуву довжину і ширину щілин не враховувати.

Розв'язок

Комплексні амплітуди компонент магнітного поля хвилі H_{10} є такими:

$\dot{H}_x^{H_{10}} = \frac{i\beta a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z}$; $\dot{H}_z^{H_{10}} = H_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z}$. Комплексна амплітуда паралельного першій (лівій на рисунку) щілині магнітного поля, що відгалужується нею:

$$\begin{aligned} \dot{H}_{\parallel 1} &= \dot{H}_x \cos \alpha - \dot{H}_z \sin \alpha = H_0 e^{-i\beta z_1} \left(\frac{i\beta a}{\pi} \sin \frac{\pi x_0}{a} \cos \alpha - \cos \frac{\pi x_0}{a} \sin \alpha \right) = \\ &= H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \alpha \cdot e^{-i\beta z_1} \left(-1 + \frac{i\beta a}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi x_0}{a} \operatorname{ctg} \alpha \right) = \\ &= H_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\beta a}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi x_0}{a} \operatorname{ctg} \alpha \right)^2} \cos \frac{\pi x_0}{a} \sin \alpha \cdot e^{-i\beta z_1} e^{i \left(\pi - \arctg \left(\frac{\beta a}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi x_0}{a} \operatorname{ctg} \alpha \right) \right)}. \end{aligned}$$

Аналогічно комплексна амплітуда паралельного другій (правій на рисунку) щілині магнітного поля, що відгалужується нею:

$$\begin{aligned} \dot{H}_{\parallel 2} &= \dot{H}_x \cos \alpha + \dot{H}_z \sin \alpha = H_0 e^{-i\beta z_2} \left(\frac{i\beta a}{\pi} \sin \frac{\pi x_0}{a} \cos \alpha + \cos \frac{\pi x_0}{a} \sin \alpha \right) = \\ &= H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \alpha \cdot e^{-i\beta z_2} \left(1 + \frac{i\beta a}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi x_0}{a} \operatorname{ctg} \alpha \right) = \\ &= H_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\beta a}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi x_0}{a} \operatorname{ctg} \alpha \right)^2} \cos \frac{\pi x_0}{a} \sin \alpha \cdot e^{-i\beta z_2} e^{i \arctg \left(\frac{\beta a}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi x_0}{a} \operatorname{ctg} \alpha \right)}. \end{aligned}$$

Як бачимо, щілини відгалужують хвилі з однаковими амплітудами і різницею фаз:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_1 - \varphi_2 = -\beta z_1 + \pi - \arctg \left(\frac{\beta a}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi x_0}{a} \operatorname{ctg} \alpha \right) - \left(-\beta z_2 + \arctg \left(\frac{\beta a}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi x_0}{a} \operatorname{ctg} \alpha \right) \right) = \\ &= \beta(z_2 - z_1) + \pi - 2\arctg \left(\frac{\beta a}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi x_0}{a} \operatorname{ctg} \alpha \right) = \beta z_0 + 2 \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \left(\frac{\beta a}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi x_0}{a} \operatorname{ctg} \alpha \right) \right). \end{aligned}$$

$$\Delta\varphi = \beta z_0 + 2\arctg \left(\frac{\pi}{\beta a} \operatorname{ctg} \frac{\pi x_0}{a} \operatorname{tg} \alpha \right). \quad \Delta\varphi = \frac{360^\circ}{\lambda_{\text{хв}}} \cdot \frac{\lambda_{\text{хв}}}{8} + 2\arctg(\operatorname{tg} 22,5^\circ) = 90^\circ.$$

Відповідь: $\Delta\varphi = 90^\circ$.

Тема 7. Лінії передачі з хвилями типу Т (ТЕМ)

Задача 7.1. Двопровідна лінія передачі розташована в повітрі. Діаметр її провідників $d = 1$ см, хвильовий опір $Z_{\text{XB}} = 275$ Ом. Знайти відстань D між осями провідників лінії.

Розв'язок: $120 \ln \left(\frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \right) = Z_{\text{XB}}; e^{\frac{Z_{\text{XB}}}{120}} = \frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}; e^{\frac{Z_{\text{XB}}}{120}} - \frac{D}{d} = \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1};$

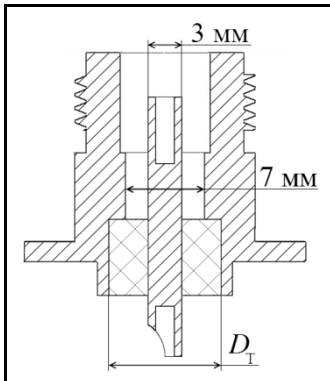
$$\left(e^{\frac{Z_{\text{XB}}}{120}} - \frac{D}{d} \right)^2 = \left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1; e^{\frac{Z_{\text{XB}}}{60}} - 2 \cdot e^{\frac{Z_{\text{XB}}}{120}} \cdot \frac{D}{d} + \left(\frac{D}{d}\right)^2 = \left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1; 2 \cdot e^{\frac{Z_{\text{XB}}}{120}} \cdot \frac{D}{d} = e^{\frac{Z_{\text{XB}}}{60}} + 1;$$

$$\frac{D}{d} = \frac{e^{\frac{Z_{\text{XB}}}{60}} + 1}{2 \cdot e^{\frac{Z_{\text{XB}}}{120}}} = \frac{1}{2} e^{\frac{2Z_{\text{XB}} - Z_{\text{XB}}}{120}} + \frac{1}{2} e^{\frac{-Z_{\text{XB}}}{120}} = \frac{e^{\frac{Z_{\text{XB}}}{120}} + e^{\frac{-Z_{\text{XB}}}{120}}}{2} = \text{ch} \left(\frac{Z_{\text{XB}}}{120} \right); \boxed{Z_{\text{XB}} = 120 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \text{arch} \left(\frac{D}{d} \right) [\text{Ом}]}$$

$$D = d \cdot \text{ch} \left(\frac{Z_{\text{XB}}}{120} \right) = 5 \text{ см.}$$

Задача 7.2. N-роз'єм містить заповнену повітрям коаксіальну лінію з діаметром провідників $d = 3$ мм, $D = 7$ мм і тефлонову коаксіальну шайбу ($\epsilon = 2,05$) із діаметром отвору $d_{\text{T}} = 3$ мм. При якому діаметрі шайби D_{T} вона є узгодженою з коаксіальною лінією?

Розв'язок



$$Z_{\text{XB}}^{\text{II}} = 60 \ln \left(\frac{D}{d} \right) \text{ Ом} = 50,8 \text{ Ом}; Z_{\text{XB}}^{\text{II}} = Z_{\text{XB}}^{\text{I}} = \frac{60}{\sqrt{\epsilon}} \ln \left(\frac{D_{\text{T}}}{d} \right) \text{ Ом};$$

$$\ln \left(\frac{D_{\text{T}}}{d} \right) = \frac{Z_{\text{XB}} \sqrt{\epsilon}}{60 \text{ Ом}}; \frac{D_{\text{T}}}{d} = e^{\frac{Z_{\text{XB}} \sqrt{\epsilon}}{60 \text{ Ом}}}; D_{\text{T}} = d \cdot \exp \left(\frac{Z_{\text{XB}} \sqrt{\epsilon}}{60 \text{ Ом}} \right) = 10 \text{ мм.}$$

Задача 7.3. Діелектриком коаксіального кабелю РК 75-13-11 є поліетилен ($\epsilon = 2,25$). Знайти смугу частот однохвильового режиму роботи кабелю при поширенні Т-хвилі.

Розв'язок

$$Z_{\text{XB}} = 75 \text{ Ом}; D = 13 \text{ мм}; Z_{\text{XB}} = \frac{60}{\sqrt{\epsilon}} \ln \left(\frac{D}{d} \right) \text{ Ом}; \frac{D}{d} = e^{\frac{Z_{\text{XB}} \sqrt{\epsilon}}{60 \text{ Ом}}}; d = D \cdot e^{\frac{-Z_{\text{XB}} \sqrt{\epsilon}}{60 \text{ Ом}}} = 2 \text{ мм};$$

$$f_{\text{кр}}^{\text{T}} = 0; f_{\text{кр}}^{\text{H}_{11}} = \frac{2 \cdot c}{\sqrt{\epsilon \mu} \cdot \pi \cdot (d + D)} = \frac{2 \cdot 300 [\text{мм} \cdot \text{ГГц}]}{\sqrt{2,25} \cdot \pi \cdot (2 + 13) [\text{мм}]} = 8,49 \text{ ГГц.}$$

Відповідь: 0–8,49 ГГц.

Задача 7.4. Коаксіальний кабель із хвильовим опором 50 Ом має внутрішній діаметр металевої оболонки $D = 9$ мм. Визначити діаметр внутрішнього провідника та частотні границі однохвильового режиму роботи кабелю, якщо він заповнений діелектриком із відносною проникністю $\varepsilon = 2,0$.

Розв'язок

Хвильовий опір коаксіального кабелю дорівнює: $Z_{\text{XB}} = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln\left(\frac{D}{d}\right)$ [Ом].

Для заповненого діелектриком кабелю отримаємо: $Z_{\text{XB}} = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon}} \ln\left(\frac{D}{d}\right)$ [Ом]. Тоді

$\frac{Z_{\text{XB}} \sqrt{\varepsilon}}{60 \text{ Ом}} = \ln\left(\frac{D}{d}\right)$; $d = D \cdot e^{-\frac{Z_{\text{XB}} \sqrt{\varepsilon}}{60 \text{ Ом}}} = 2,77$ мм. Частотні границі однохвильового

режиму роботи: $f_{\text{кр}}^{\text{T}} = 0$; $f_{\text{кр}}^{\text{H}_{11}} = \frac{2 \cdot c}{\sqrt{\varepsilon \mu} \cdot \pi \cdot (d + D)} = \frac{2 \cdot 300 \text{ [мм} \cdot \text{ГГц]}}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot (2,77 + 9) \text{ [мм]}} = 11,5$ ГГц.

Відповідь: $d = 2,77$ мм; 0–11,5 ГГц.

Задача 7.5. Визначити хвильовий опір коаксіальної лінії передачі, при якому по ній передається максимальна потужність. Чому він дорівнює для лінії, заповненої поліетиленом ($\varepsilon = 2,25$), і для лінії, заповненої повітрям ($\varepsilon = 1$)?

Розв'язок

Максимальна потужність, що передається по коаксіальній лінії, визначається допустимою напруженістю електричного поля, при якій виникає пробій діелектрика: $E_{\text{max}} = \max_{r \in (a; b)} (E_m / r) = E_m / a$. Тоді $E_m = E_{\text{max}} \cdot a$. Середня

потужність $\langle P \rangle = \int_{S_{\perp}} \langle \vec{\Pi} \rangle d\vec{S} = \frac{1}{2} \int_{S_{\perp}} \text{Re}(\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*) d\vec{S} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi b} \int_a^b \frac{E_m^2}{Z_c r^2} e^{-2\alpha z} r dr d\varphi = \frac{\pi E_{\text{max}}^2 e^{-2\alpha z}}{Z_c} a^2 \ln \frac{b}{a}$.

$\frac{\partial \langle P \rangle}{\partial a} = 0$; $2a \ln \frac{b}{a} + a^2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(-\frac{b}{a^2}\right) = 0$; $\ln \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$. Хвильовий опір $Z_{\text{XB}}^{P_{\text{max}}} = 30 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ [Ом].

Для коаксіальної лінії, діелектриком якої є поліетилен: $Z_{\text{XB}}^{P_{\text{max}}} = 20$ [Ом].

Для коаксіальної лінії, заповненої повітрям: $Z_{\text{XB}}^{P_{\text{max}}} = 30$ [Ом].

Задача 7.6. Коефіцієнт загасання коаксіальної лінії передачі визначається за формулою $\alpha = \frac{r_s(1/a + 1/b)}{2Z_c \ln(b/a)}$, де r_s — поверхневий опір провідників. Знайти хвильовий опір, при якому загасання є мінімальним. Чому він дорівнює для лінії, заповненої поліетиленом ($\varepsilon = 2,25$), і для лінії, заповненої повітрям ($\varepsilon = 1$)?

Розв'язок

$$\alpha = \frac{r_s(1+b/a)}{2Z_c b \ln(b/a)} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial a} = 0; \quad \frac{-\frac{b}{a^2} \cdot \ln \frac{b}{a} - \left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{a}{b} \cdot \left(-\frac{b}{a^2}\right)}{\ln^2(b/a)} = 0; \quad 1 + \frac{b}{a} \cdot \left(1 - \ln \frac{b}{a}\right) = 0;$$

$$\frac{b}{a} = 3,59. \quad \ln \frac{b}{a} = 1,278. \quad \text{Хвильовий опір} \quad \boxed{Z_{\text{XB}}^{\alpha_{\min}} = 77 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} [\text{Ом}]}$$

Для коаксіальної лінії, діелектриком якої є поліетилен: $Z_{\text{XB}}^{\alpha_{\min}} = 51 [\text{Ом}]$.

Для коаксіальної лінії, заповненої повітрям: $Z_{\text{XB}}^{\alpha_{\min}} = 77 [\text{Ом}]$.

Задача 7.7. Визначити хвильовий опір симетричної смужкової лінії, заповненої тefлоном ($\varepsilon = 2,05$), при $w/d = 0,35$. При якому відношенні w/d хвильовий опір дорівнює 50 Ом?

Розв'язок

$$Z_{\text{XB}} = \frac{30\pi/\sqrt{\varepsilon}}{0,441 + w/d} \text{ Ом} = \frac{30\pi/\sqrt{2,05}}{0,441 + 0,35} \text{ Ом} = 83,2 \text{ Ом}.$$

Функція $Z_{\text{XB}}(w/d)$ є спадною, тому для отримання $Z_{\text{XB}} = 50 \text{ Ом} < 83,2 \text{ Ом}$ відношення $w/d > 0,35$. Отже, Z_{XB} розраховується за першою формулою:

$$Z_{\text{XB}} = \frac{30\pi/\sqrt{\varepsilon}}{0,441 + w/d} \text{ Ом}; \quad 0,441 \cdot Z_{\text{XB}} + Z_{\text{XB}} \frac{w}{d} = \frac{30\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ Ом}; \quad Z_{\text{XB}} \frac{w}{d} = \frac{30\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ Ом} - 0,441 \cdot Z_{\text{XB}};$$

$$\frac{w}{d} = \frac{30\pi \text{ Ом}}{\sqrt{\varepsilon} \cdot Z_{\text{XB}}} - 0,441 = \frac{30\pi \text{ Ом}}{\sqrt{2,05} \cdot 50 \text{ Ом}} - 0,441 = 0,876.$$

Задача 7.8. Знайти хвильовий опір мікросмужкової лінії передачі на кремнієвій підкладці ($\varepsilon = 11,8$), якщо $d = 1 \text{ мм}$, $w = 0,8 \text{ мм}$.

Розв'язок

$$\varepsilon_{\text{еф}} = \frac{\varepsilon + 1}{2} + \frac{\varepsilon - 1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 12 \cdot d/w}} = \frac{12,8}{2} + \frac{10,8}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 12 \cdot 1,25}} = 7,75;$$

$$w/d = 0,8 < 1; \quad Z_{\text{XB}} = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_{\text{еф}}}} \ln \left(\frac{8d}{w} + \frac{w}{4d} \right) = \frac{60}{\sqrt{7,75}} \ln \left(\frac{8}{0,8} + \frac{0,8}{4} \right) = 50 \text{ Ом}.$$

Тема 8. Об'ємні резонатори

Задача 8.1. Зовнішній діаметр D коаксіального резонатора із міді ($\sigma = 5,8 \cdot 10^7$ См/м) становить 10 см. Резонатор заповнений повітрям. При яких висоті та внутрішньому радіусі власна добротність для коливання T_1 є максимальною? Чому вона дорівнює? Чи є коливання T_1 основним при оптимальних розмірах? Визначити резонансну частоту коливання T_1 і хвильовий опір коаксіальної лінії, що формує оптимізований резонатор.

Розв'язок

$$Q_0^{T_1} = \frac{2}{d} \cdot \frac{abl \cdot \ln(b/a)}{4abl \ln(b/a) + l(a+b)} = 2\sqrt{\pi f_p \mu_0 \sigma} \cdot \frac{l}{4 + l \cdot h(a,b)} = \frac{15,5\pi\sqrt{\sigma \cdot \text{Ом}}}{4/\sqrt{l} + \sqrt{l} \cdot h(a,b)}, \text{ де}$$

$h(a,b) = \frac{1/a + 1/b}{\ln(b/a)}$. Власна добротність є максимальною при мінімумі знаменника

її виразу. Згідно з нерівністю Коші: $\frac{4}{\sqrt{l}} + \sqrt{l} \cdot h(a,b) \geq 2\sqrt{\frac{4}{\sqrt{l}} \cdot \sqrt{l} \cdot h(a,b)} = 4\sqrt{h(a,b)}$.

Сума доданків є мінімальною при їх рівності: $\frac{4}{\sqrt{l_{\text{opt}}}} = \sqrt{l_{\text{opt}}} \cdot h_{\text{opt}} \cdot l_{\text{opt}} = \frac{4}{h_{\text{opt}}}$.

$l_{\text{opt}} = \frac{4 \ln(b/a_{\text{opt}})}{1/a_{\text{opt}} + 1/b}$. Мінімум суми дорівнює $4\sqrt{h_{\text{opt}}}$ і він досягається при мінімумі

виразу $h(a,b)$. $\frac{\partial h(a,b)}{\partial a} = 0$; $-\frac{1}{a^2} \cdot \ln \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \cdot \left(-\frac{b}{a^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 0$; $1 + \frac{b}{a} \cdot \left(1 - \ln \frac{b}{a}\right) = 0$.

$$\left(\frac{b}{a_{\text{opt}}}\right) = 3,59. \quad \ln\left(\frac{b}{a_{\text{opt}}}\right) = 1,278.$$

Хвильовий опір коаксіальної лінії, що формує оптимізований резонатор

$Z_{\text{ХВ}}^{\text{opt}} = 77 [\text{Ом}]$. Він дорівнює хвильовому опорі, при якому загасання в заповненій повітрям коаксіальній лінії передачі є мінімальним. $b = \frac{D}{2} = 5$ см.

$$a_{\text{opt}} = \frac{b}{3,59} = \frac{D}{7,18} = 1,4 \text{ см.} \quad h_{\text{opt}} = \frac{1/a_{\text{opt}} + 1/b}{\ln(b/a_{\text{opt}})} = \frac{7,18}{D}. \quad l_{\text{opt}} = \frac{4}{h_{\text{opt}}} = 0,557 \cdot D = 5,6 \text{ см.}$$

$l_{\text{opt}} = 0,557 \cdot D > 0,361 \cdot D = b - a_{\text{opt}}$, тому при оптимальних розмірах коливання T_1 є основним.

$$f_p^{T_1} = \frac{c}{2l_{\text{opt}}} = \frac{0,9 \cdot c}{D} = \frac{0,9 \cdot 30 [\text{см} \cdot \text{ГГц}]}{10 \text{ см}} = 2,7 \text{ ГГц.}$$

$$\max Q_0^{T_1} = \frac{15,5\pi\sqrt{\sigma \cdot \text{Ом}}}{4\sqrt{h_{\text{opt}}}} = 4,54\sqrt{D \cdot \sigma \cdot \text{Ом}} = 10934.$$

Задача 8.2. Розрахувати добротність та ККД прямокутного об'ємного резонатора, заповненого сухим атмосферним повітрям, з енергією електромагнітного поля $W_{\text{рез}} = 10^{-7}$ Дж, коливанням типу H_{102} , геометричними розмірами $a = 25$ мм, $b = 10$ мм, $l = 40$ мм і потужністю втрат $P_{\text{втр}} = 100$ мВт.

Розв'язок:

Знайдемо резонансну частоту коливання H_{102} : $f_p^{H_{102}} = \frac{c}{2\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{4}{l^2}} = 9,6$ ГГц.

За визначенням власна добротність: $Q_0 = 2\pi \frac{W_{\text{рез}}}{W_{\text{втр}}} = 2\pi \frac{W_{\text{рез}}}{P_{\text{втр}} \cdot T} = 2\pi f_p \frac{W_{\text{рез}}}{P_{\text{втр}}}$
 $= 2\pi \cdot 9,6 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-7}}{100 \cdot 10^{-3}} = 60319$. ККД резонатора — це відношення енергії, яка

запасється в резонаторі, до повної енергії електромагнітного поля в резонаторі:

$$\eta = \frac{W_{\text{зап}}}{W_{\text{зап}} + W_{\text{втр}}} = \frac{2\pi W_{\text{зап}} / W_{\text{втр}}}{2\pi W_{\text{зап}} / W_{\text{втр}} + 2\pi} = \frac{Q_0}{Q_0 + 2\pi} = \frac{1}{1 + 2\pi / Q_0} = 0,9999 = 99,99\%.$$

Відповідь: $Q_0 = 60319$; $\eta = 99,99\%$.

Задача 8.3. Знайти добротність порожнистого прямокутного резонатора з розмірами $a = 200$ мм; $b = 90$ мм; $l = 290$ мм для коливання основного типу. Металом стінок є залізо ($\sigma = 1 \cdot 10^7$ См/м).

Розв'язок

Оскільки $b < a < l$, то основним є коливання H_{101} . $f_p^{H_{101}} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{l^2}} = 911,1$ МГц.

$$d = \frac{1}{\sqrt{\pi f_p \mu_0 \sigma}} = 5,3 \text{ мкм.} \quad Q_0^{H_{101}} = \frac{1}{d} \cdot \frac{abl(a^2 + l^2)}{al(a^2 + l^2) + 2b(a^3 + l^3)} = 9430.$$

Задача 8.4. Визначити смугу пропускання за рівнем -3 дБ для порожнистого циліндричного резонатора радіусом 100 мм і висотою 200 мм для коливання основного типу. Металом стінок є залізо ($\sigma = 1 \cdot 10^7$ См/м).

Розв'язок

Оскільки $l = 200$ мм $<$ 203 мм $= 2,03a$, то основним є коливання E_{010} .

$$f_p^{E_{010}} = \frac{2,405 \cdot c}{2\pi \cdot a} = \frac{2,405 \cdot 300 [\text{мм} \cdot \text{ГГц}]}{2\pi \cdot 100 \text{ мм}} = 1148,3 \text{ МГц.} \quad d = \frac{1}{\sqrt{\pi f_p \mu_0 \sigma}} = 4,7 \text{ мкм.}$$

$$Q_0^{E_{010}} = \frac{1}{d} \cdot \frac{al}{a+l} = 14194. \quad \Delta f_{-3\text{дБ}} = \frac{f_p^{E_{010}}}{Q_0^{E_{010}}} = \frac{1148,3 \text{ МГц}}{14194} = 80,9 \text{ кГц.}$$

Тема 9. Елементарні випромінювачі

Задача 9.1. Визначте амплітудні значення напруженостей електричного та магнітного полів, а також середнє значення вектора Пойнтинга на відстані r від ізотропного джерела випромінювання потужністю P .

Розв'язок

Ізотропне джерело випромінює з однаковою інтенсивністю за всіма напрямками. Тому значення полів і вектора Пойнтинга у сферичній системі координат залежать лише від відстані r і не залежать від кутів θ, φ . Тоді:

$$P = \oint_{S_{\perp}} \langle \vec{\Pi}(r) \rangle d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \langle \Pi(r) \rangle r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \langle \Pi(r) \rangle 4\pi r^2. \quad \langle \Pi(r) \rangle = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

$$\text{З іншого боку: } \langle \Pi(r) \rangle = \frac{1}{2} |\operatorname{Re}(\dot{\vec{E}}(r) \times \dot{\vec{H}}^*(r))| = \frac{E_m^2(r)}{2 \cdot Z_c} = \frac{H_m^2(r) \cdot Z_c}{2}.$$

Тоді амплітудні значення напруженостей полів дорівнюють:

$$E_m(r) = \sqrt{2 \cdot Z_c \cdot \langle \Pi(r) \rangle} = \sqrt{240\pi \text{ Ом} \cdot \frac{P}{4\pi r^2}} = \frac{\sqrt{P \cdot 60 \text{ Ом}}}{r};$$

$$H_m(r) = \frac{E_m(r)}{Z_c} = \frac{\sqrt{P \cdot 60 \text{ Ом}}}{r \cdot 120\pi \text{ Ом}} = \frac{1}{\pi r} \sqrt{\frac{P}{240 \text{ Ом}}}.$$

Відповідь: $E_m(r) = \frac{\sqrt{P \cdot 60 \text{ Ом}}}{r}; H_m(r) = \frac{1}{\pi r} \sqrt{\frac{P}{240 \text{ Ом}}}; \langle \Pi(r) \rangle = \frac{P}{4\pi r^2}.$

Задача 9.2. Амплітудна діаграма спрямованості — це залежність амплітуди напруженості електричного поля антени в зоні випромінювання від кутових координат θ, φ на сфері постійного радіуса. Діаграму спрямованості антени нормують відносно її максимального значення.

Знайти ширину головного пелюстка діаграм спрямованості елементарних випромінювачів у Е- та Н-площинах за рівнем -3дБ і -10дБ .

Розв'язок

Діаграма спрямованості елемента Гюйгенса: $F_{E,H}(\theta) = \frac{1 + \cos\theta}{2}$. Діаграми

спрямованості всіх інших елементарних випромінювачів: $F_E(\theta) = |\sin\theta|; F_H(\varphi) = 1$.

Якщо спрямувати вісь сферичної системи координат уздовж напрямку максимального випромінювання, то: $F_E(\theta) = |\cos\theta|$.

Оскільки в Н-площині $F_H(\varphi)$ — це коло, то: $2\varphi_{-3\text{дБ}} = 2\varphi_{-10\text{дБ}} = 360^\circ$.

У Е-площині: $20\lg F_E(\theta_{-3\text{дБ}}) = 20\lg \cos\theta_{-3\text{дБ}} = -3\text{дБ}$; $\theta_{-3\text{дБ}} = \arccos 10^{-\frac{3}{20}} = 45^\circ$;

$2\theta_{-3\text{дБ}} = 90^\circ$; $\theta_{-10\text{дБ}} = \arccos 10^{-\frac{10}{20}} = 71^\circ 34'$; $2\theta_{-10\text{дБ}} \approx 143^\circ$.

Для елемента Гюйгенса в Е- та Н-площинах: $20\lg F_{E,H}(\theta_{-3\text{дБ}}) = 20\lg \frac{1 + \cos\theta_{-3\text{дБ}}}{2} = -3\text{дБ}$; $\cos\theta_{-3\text{дБ}}^{E,H} = 2 \cdot 10^{-\frac{3}{20}} - 1$; $\theta_{-3\text{дБ}}^{E,H} = \arccos(2 \cdot 10^{-\frac{3}{20}} - 1) = 65^\circ 25'$;

$2\theta_{-3\text{дБ}}^{E,H} \approx 131^\circ$; $\theta_{-10\text{дБ}}^{E,H} = \arccos(2 \cdot 10^{-\frac{10}{20}} - 1) = 111^\circ 34'$; $2\theta_{-10\text{дБ}}^{E,H} \approx 223^\circ$.

Відповідь: для елемента Гюйгенса: $2\theta_{-3\text{дБ}}^E = 2\theta_{-3\text{дБ}}^H \approx 131^\circ$; $2\theta_{-10\text{дБ}}^E = 2\theta_{-10\text{дБ}}^H \approx 223^\circ$;

для інших елементарних випромінювачів: $2\theta_{-3\text{дБ}} = 90^\circ$; $2\varphi_{-3\text{дБ}} = 360^\circ$;

$2\theta_{-10\text{дБ}} \approx 143^\circ$; $2\varphi_{-10\text{дБ}} = 360^\circ$.

Задача 9.3. Коефіцієнт спрямованої дії — це параметр антени, який показує, у скільки разів необхідно збільшити потужність випромінювання при заміні даної антени на еталонну, щоб отримати ту ж напруженість поля в точці прийому. Найчастіше як еталонну антену використовують фіктивний абсолютно не спрямований (ізотропний) випромінювач. У напрямку максимального

випромінювання:

$$D_0 = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi F^2(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi}$$

Визначити коефіцієнт спрямованої дії для елементарних випромінювачів.

Розв'язок

Діаграма спрямованості елемента Гюйгенса: $F(\theta, \varphi) = \frac{1 + \cos\theta}{2}$.

$$D_0 = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos\theta}{2}\right)^2 \sin\theta d\theta d\varphi} = \frac{4\pi}{2\pi \int_0^\pi \cos^4 \frac{\theta}{2} \cdot 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta} = \frac{-1}{2 \int_1^0 \cos^5 \frac{\theta}{2} d\left(\cos \frac{\theta}{2}\right)} = 3.$$

Діаграма спрямованості інших елементарних випромінювачів: $F(\theta, \varphi) = \sin \theta$.

$$D_0 = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta} = \frac{2}{\int_0^\pi \left(\frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta \right) d\theta} = 1,5.$$

Відповідь: для елемента Гюйгенса $D_0 = 3$; для інших елементарних випромінювачів $D_0 = 1,5$.

Задача 9.4. Опір випромінювання — це опір, потужність втрат якого дорівнює потужності випромінювання антени. Вивести формули для опору випромінювання диполя Герца, елементарного рамкового випромінювача, елементарного щілинного випромінювача, розміщених у повітрі.

Розв'язок

Поля диполя Герца в дальній зоні: $\dot{H}_\varphi = \frac{iI \sin \theta}{2r\lambda} e^{-i\omega \frac{r}{c}}$; $\dot{E}_r \ll \dot{E}_\theta$; $\dot{E}_\theta = \frac{iI \sin \theta}{2r\lambda} Z e^{-i\omega \frac{r}{c}}$.

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{iI \sin \theta}{2r\lambda} Z e^{-i\omega \frac{r}{c}} \cdot \frac{-iI \sin \theta}{2r\lambda} e^{i\omega \frac{r}{c}} \cdot (\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\varphi) \right] = \frac{|I|^2 Z I^2 \sin^2 \theta}{8r^2 \lambda^2} \vec{e}_r.$$

Потужність випромінювання: $P_\Sigma = \int_{S_\perp} \langle \vec{\Pi} \rangle d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{|I|^2 Z I^2 \sin^2 \theta}{8r^2 \lambda^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi =$

$$= \frac{|I|^2 Z I^2}{8\lambda^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{|I|^2 Z I^2}{8\lambda^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{|I|^2}{2} \cdot \left[80\pi^2 \cdot \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \text{ Ом} \right] = \frac{|I|^2}{2} \cdot R_\Sigma.$$

Для диполя Герца $R_\Sigma = 80\pi^2 \cdot \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \text{ Ом}.$

Поля елементарного рамкового випромінювача в дальній зоні:

$$\dot{E}_\varphi = -\frac{\pi \dot{I}_e S \sin \theta}{r\lambda^2} Z e^{-i\omega \frac{r}{c}}; \quad \dot{H}_r \ll \dot{H}_\theta; \quad \dot{H}_\theta = \frac{\pi \dot{I}_e S \sin \theta}{r\lambda^2} e^{-i\omega \frac{r}{c}}.$$

Середнє значення вектора Пойнтинга: $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*) = \frac{\pi^2 |\dot{I}_e|^2 Z S^2 \sin^2 \theta}{2r^2 \lambda^4} \vec{e}_r.$

$$\begin{aligned} \text{Потужність випромінювання: } P_{\Sigma} &= \int_{S_{\perp}} \langle \vec{\Pi} \rangle d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi^2 |\dot{I}_e|^2 Z S^2 \sin^2 \theta}{2r^2 \lambda^4} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \frac{\pi^2 |\dot{I}_e|^2 Z S^2}{2\lambda^4} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{|\dot{I}_e|^2}{2} \cdot \left(320\pi^4 \cdot \frac{S^2}{\lambda^4} \text{ Ом} \right) = \frac{|\dot{I}_e|^2}{2} \cdot R_{\Sigma}. \end{aligned}$$

Для елементарного рамкового випромінювача $R_{\Sigma} = 320\pi^4 \cdot \frac{S^2}{\lambda^4} \text{ Ом}$.

Поля елементарного щілинного випромінювача в дальній зоні:

$$\dot{E}_{\varphi} = -\frac{i\dot{U}_{\text{щ}} l \sin \theta}{r\lambda} e^{-i\omega \frac{r}{c}}; \quad \dot{H}_r \ll \dot{H}_{\theta}; \quad \dot{H}_{\theta} = \frac{i\dot{U}_{\text{щ}} l \sin \theta}{Zr\lambda} e^{-i\omega \frac{r}{c}}.$$

$$\text{Середнє значення вектора Пойнтинга: } \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\dot{E} \times \dot{H}^*) = \frac{|\dot{U}_{\text{щ}}|^2 l^2 \sin^2 \theta}{2Zr^2 \lambda^2} \vec{e}_r.$$

$$\begin{aligned} \text{Потужність випромінювання: } P_{\Sigma} &= \int_{S_{\perp}} \langle \vec{\Pi} \rangle d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\dot{U}_{\text{щ}}|^2 l^2 \sin^2 \theta}{2Zr^2 \lambda^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \frac{|\dot{U}_{\text{щ}}|^2 l^2}{2Z\lambda^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{|\dot{U}_{\text{щ}}|^2}{2} \cdot \left(\frac{l^2}{45\lambda^2} \text{ См} \right) = \frac{|\dot{U}_{\text{щ}}|^2}{2} \cdot \frac{1}{R_{\Sigma}}. \end{aligned}$$

Для елементарного щілинного випромінювача $R_{\Sigma} = 45 \cdot \left(\frac{\lambda}{l} \right)^2 \text{ Ом}$.

Відповідь: для диполя Герца $R_{\Sigma} = 80\pi^2 \cdot \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \text{ Ом}$;

для елементарного рамкового випромінювача $R_{\Sigma} = 320\pi^4 \cdot \frac{S^2}{\lambda^4} \text{ Ом}$;

для елементарного щілинного випромінювача $R_{\Sigma} = 45 \cdot \left(\frac{\lambda}{l} \right)^2 \text{ Ом}$.

Рекомендована література

1. Фальковский О. И. Техническая электродинамика: Учебник. 2-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2009. — 432 с.
2. Григорьев А. Д. Электродинамика и техника СВЧ: Учеб. для вузов по спец. «Электронные приборы и устройства». — М.: Высшая школа, 1990.— 335 с.
3. Пименов Ю. В., Вольман В. И., Муравцов А. Д. Техническая электродинамика / под ред. Ю. В. Пименова: Учеб. пособие для вузов. — М.: Радио и связь, 2000. — 536 с.
4. Баскаков С. И. Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. пособие для вузов по спец. «Радиотехника». — М.: Высшая школа, 1992. — 416 с.
5. Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. пособие для вузов. — 3-е изд. перераб. и доп. — М.: Наука, 1989. — 544 с.
6. Петров Б. М. Электродинамика и распространение радиоволн: Учебник для вузов. — 2-е изд. испр. — М.: Горячая линия–Телеком, 2007. — 558 с.
7. Сборник задач по курсу «Электродинамика и распространение радиоволн». Учеб. пособие / Баскаков С. И. Карташов В. Г., Лобов Г. Д. и др.; под ред. С. И. Баскакова. — М.: Высш. Школа, 1981. — 208 с.
8. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике. — М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. — 640 с.
9. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Електродинаміка та поширення радіохвиль». Укл. В. С. Вунтесмері, О. М. Купрій, А. Ф. Левіна. Видання 2-ге, виправлене та доповнене. — Київ, 2011. — 68 с.
10. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2010. — 608 с.
11. Прикладна електродинаміка інформаційних систем / А. С. Андрущак, З. Ю. Готра, О. С. Кушнір. — Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2012. — 304 с.
12. Електродинаміка та поширення радіохвиль. Ч. 1. Основи теорії електромагнітного поля: Підручник для студентів ВНЗ / За заг. ред. В. М. Шокало та В. І. Правди. — Харків: ХНУРЕ; Колегіум, 2009. — 286 с.
13. Електродинаміка та поширення радіохвиль. Ч. 2. Випромінювання та поширення електромагнітних хвиль: Підручник для студентів ВНЗ / За заг. ред. В. М. Шокало та В. І. Правди. — Харків: ХНУРЕ; Колегіум, 2010. — 435 с.
14. Электродинамика и распространение радиоволн / А. А. Кураев, Т. Л. Попкова, А. К. Сеницын. — Мн.: Бестпринт, 2004. — 357 с.
15. Электродинамика и распространение радиоволн. Учебное пособие / Под ред. В. А. Неганова и С. Б. Раевского. Изд. 3-е, доп. — М.: Радиотехника, 2007. — 744 с.
16. Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В. Электромагнитные поля и волны. Издание 2-е, перераб. и доп. — М.: Советское радио, 1971. — 664 с.
17. Захарія Й. А. Методи прикладної електродинаміки. — Львів: «Бескид Біт», 2003. — 352 с.
18. Дубровка Ф. Ф., Пільтяй С. І. Аналіз власних хвиль секторних коаксіальних ребристих хвилеводів методом узгодження полів часткових областей. Частина 1. Теорія // Вісник НТУУ «КПІ», Серія — Радиотехніка. Радіоапаратобудування. — 2013. — Вип. 54. — с. 13–23. DOI: 10.20535/RADAP.2013.54.13-23.
19. Дубровка Ф. Ф., Пільтяй С. І. Решение краевой задачи электродинамики для секторных коаксиальных ребристых волноводов методом интегрального уравнения // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. — 2012. — Вып. 55, № 5. — с. 3–16. DOI: 10.20535/S0021347012050019.

20. Дубровка Ф. Ф., Пільтяй С. И. Собственные волны секторных коаксиальных ребристых волноводов // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. — 2012. — Вып. 55, № 6. — с. 3–14. DOI: 10.20535/S0021347012060015.
21. Дубровка Ф. Ф., Пільтяй С. И. Собственные волны коаксиальных четырехреберных волноводов. Теория // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника.— 2014. — Вып. 57, № 1. — с. 3–30. DOI: 10.20535/S0021347014010014.
22. Дубровка Ф. Ф., Пільтяй С. И. Собственные волны коаксиальных четырехреберных волноводов. Численные результаты // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника.— 2014. — Вып. 57, № 2.— с. 3–19. DOI: 10.20535/S0021347014020010.
23. Дубровка Ф. Ф., Пільтяй С. И., Дубровка Р. Р., и др. Оптимальные конструкции волноводно-пластинчатых поляризаторов для различных относительных рабочих полос частот // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. — 2020. — Вып. 63, № 1. — с. 21–32. DOI: 10.20535/S0021347020010021.
24. Найденко В. И., Пільтяй С. И. Эволюция видеоимпульсов, излученных диполем Герца, при распространении в вакууме // Вестник НТУУ “КПИ”. Серия — Радиотехника. Радиоаппаратостр. — 2008. — Вып. 36. — С. 53–59. DOI: 10.20535/RADAP.2008.36.53-59.
25. Пільтяй С. И. Излучение открытого конца тонко-стенного круглого волновода на основной и кроссполяризации // Вестник НТУУ “КПИ”. Серия — Радиотехника. Радиоаппаратостр. — 2009. — Вып. 39. — С. 70–76. DOI: 10.20535/RADAP.2009.39.70-76.
26. Пільтяй С. И. Коаксиальный ортомодовый преобразователь для расширенного S-диапазона // Вестник НТУУ “КПИ”. Серия – Радиотехника. Радиоаппаратостр. — 2014. — Вып. 58. — С. 27–34. DOI: 10.20535/RADAP.2014.58.27-34.
27. Dubrovka F. F., Piltyay S. I. Eigenmodes analysis of sectoral coaxial ridged waveguides by transverse field-matching technique. Part 1. Theory // Visnyk NTUU KPI, Seria — Radiotekh. Radioaparatabuduv. — 2013. — Vol. 54. — P. 13–23. DOI: 10.20535/RADAP.2013.54.13-23.
28. Dubrovka F. F., Piltyay S. I. Eigenmodes analysis of sectoral coaxial ridged waveguides by transverse field-matching technique. Part 2. Results // Visnyk NTUU KPI, Seria — Radiotekh. Radioaparatabuduv. — 2013. — Vol. 55. — P. 13–23. DOI: 10.20535/RADAP.2013.55.13-23.
29. Dubrovka F. F., Piltyay S. I., Dubrovka R. R., Lytvyn M. M., Lytvyn S. M. Optimum septum polarizer design for various fractional bandwidths // Radioelectronics and Communications Systems. — 2020. — Vol. 63, № 1. — P. 15–23. DOI: 10.3103/S0735272720010021.
30. Dubrovka F. F., Piltyay S. I. Eigenmodes of coaxial quad-ridged waveguides. Theory // Radioelectronics and Communications Systems. — 2014. — Vol. 57, № 1. — P. 1–30. DOI: 10.3103/S0735272714010014.
31. Dubrovka F.F., Piltyay S.I. Eigenmodes of coaxial quad-ridged waveguides. Numerical results // Radioelectronics and Communications Systems. — 2014. — Vol. 57, № 2. — P. 59–69. DOI: 10.3103/S0735272714020010.
32. Dubrovka F. F., Piltyay S. I. Novel high performance coherent dual-wideband orthomode transducer for coaxial horn feeds // XI International Conference on Antenna Theory and Techniques, Kyiv, Ukraine, May 2017, pp. 277–280. DOI: 10.1109/ICATT.2017.7972642.
33. Piltyay S. Numerically effective basis functions in integral equation technique for sectoral coaxial ridged waveguides // Proceedings of 14-th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET 2012), Kyiv, Ukraine, August 2012, pp. 492–495. DOI: 10.1109/MMET.2012.6331195.
34. Dubrovka F., Piltyay S., Sushko O., Dubrovka R., Lytvyn M., Lytvyn S. Compact X-band stepped-thickness septum polarizer // IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW), Kharkiv, Ukraine, September 2020, pp. 135–138. DOI: 10.1109/UkrMW49653.2020.9252583.

35. Piltyay S. I., Bulashenko A. V., Demchenko I. V. Waveguide iris polarizers for Ku-band satellite antenna feeds // *Journal of Nano- and Electronic Physics*. — 2020. — Vol. 12, № 5. — P. 05024-1–05024-5. DOI: 10.21272/jnep.12(5).05024.
36. Piltyay S. I. Enhanced C-band coaxial orthomode transducer // *Visnyk NTUU KPI, Seriiia — Radiotekh. Radioaparotobud.* – 2014.– № 58. – P. 27–34. DOI: 10.20535/RADAP.2014.58.27-34.
37. Dubrovka F. F., Piltyay S. I. A novel wideband coaxial polarizer // *Proceedings of the 9-th International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT 2013)*, Odesa, Ukraine, September 2013, pp. 473–474. DOI: 10.1109/ICATT.2013.6650816.
38. Piltyay S., Bulashenko A., Demchenko I. Compact polarizers for satellite information systems // *IEEE International Conference on Problems of Infocommunications. Science and Technology (PIC S&T 2020)*, Kharkiv, Ukraine, October 2020, pp. 350–355.
39. Bulashenko A., Piltyay S., Demchenko I. Analytical technique for iris polarizers development // *IEEE International Conference on Problems of Infocommunications. Science and Technology (PIC S&T 2020)*, Kharkiv, Ukraine, October 2020, pp. 464–469.
40. Dubrovka F., Martunyuk S., Dubrovka R., Lytvyn M., Lytvyn S., Ovsianyk Yu., Piltyay S., Sushko O., Zakharchenko O. Circularly polarised X-band H11- and H21-modes antenna feed for monopulse autotracking ground station // *IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW)*, Kharkiv, Ukraine, September 2020, pp. 196–202. DOI: 10.1109/UkrMW49653.2020.9252600.
41. Naydenko V., Piltyay S. Evolution of radiopulses radiated by Hertz’s dipole in vacuum // *12-th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (ММЕТ 2008)*, Odesa, Ukraine, July 2008, pp. 294–297. DOI: 10.1109/ММЕТ.2008.4580972.
42. Найденко В. І., Пільтяй С. І. Еволюція відеоімпульсів, випромінених диполем Герца, при поширенні у вакуумі // *Вісник НТУУ “КПІ”. Серія – Радіотехніка. Радіоапаратобудання.* – 2008. — Вип. 36. — С. 53–59. DOI: 10.20535/RADAP.2008.36.53-59.
43. Piltyay S.I., Sushko O.Yu., Bulashenko A.V., Demchenko I.V. Compact Ku-band iris polarizers for satellite telecommunication systems // *Telecommunications and Radio Engineering.* — 2020. — Vol. 79, № 19. — P. 1673–1690. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v79.i19.10.
44. Piltyay S. I. Wideband antiphase power combiner/divider // *9-th Young Scientist Conference “Modern Issues in Radio Engineering and Telecommunications”*, Sevastopol, Ukraine, 2013, pp. 220. Режим доступу: <http://rt-sevastopol.ru/files/conference/2013/materials/220.pdf>.
45. Dubrovka F., Piltyay S. Prediction of eigenmodes cutoff frequencies of sectoral coaxial ridged waveguides // *XI International Conference on Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science*, Lviv – Slavske, Ukraine, February 2012, pp. 191. Режим доступу: <http://ena.lp.edu.ua/bitstream/ntb/14306/1/124.pdf>.
46. Piltyay S.I., Bulashenko A.V., Demchenko I.V. Analytical synthesis of waveguide iris polarizers // *Telecommunications and Radio Engineering.* — 2020. — Vol. 79, № 18. — P. 1579–1597. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v79.i18.10.
47. Dubrovka F. F., Piltyay S. I. Boundary problem solution for eigenmodes in coaxial quad-ridged waveguides // *Information and Telecommunication Sciences.*– 2014.– Vol. 5, № 1. – P. 48–61. DOI: 10.20535/2411-2976.12014.48-61.
48. Найденко В. І., Пільтяй С. І. Еволюція радіоімпульсів, випромінених диполем Герца, при поширенні у вакуумі // *Наукові вісті НТУУ “КПІ”.* — 2009. — № 1. — с. 13–19. Режим доступу: <https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/35816/1/2009-1-2.pdf>.
49. Piltyay S. I. High performance extended C-band 3.4–4.8 GHz dual circular polarization feed system // *XI International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT 2017)*, Kyiv, Ukraine, May 2017, pp. 284–287. DOI: 10.1109/ICATT.2017.7972644.

50. Dubrovka F. F., Piltyay S. I. A high performance ultrawideband orthomode transducer and a dual-polarized quad-ridged horn antenna based on it // VIII International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT 2011), Kyiv, Ukraine, September 2011, pp. 176–178. DOI: 10.1109/ICATT.2011.6170737.
51. Dubrovka F. F., Piltyay S. I. Eigenmodes of sectoral coaxial ridged waveguides // Radioelectronics and Communications Systems. — 2012. — Vol. 55, № 6. — P. 239–247. DOI: 10.3103/S0735272712060015.
52. Dubrovka F. F., Piltyay S. I. Electrodynamics boundary problem solution for sectoral coaxial ridged waveguides by integral equation technique // Radioelectronics and Communications Systems. — 2012. — Vol. 55, № 5. — P. 191–203. DOI: 10.3103/S0735272712050019.
53. Bulashenko A. V., Piltyay S. I. Equivalent microwave circuit technique for waveguide iris polarizers development // Visnyk NTUU KPI, Seriya — Radiotekhnika, Radioaparaturbuduv. — 2020. — Vol. 83. — P. 17–28. DOI: 10.20535/RADAP.2020.83.17-28.
54. Piltyay S., Bulashenko A., Kushnir H., Bulashenko O. Information resources economy in satellite systems based on new microwave polarizers with tunable posts // Path of Science. — 2020. — Vol. 6, № 11. — P. 5001–5010. DOI: 10.22178/pos.55-1.
55. Bulashenko A. V., Piltyay S. I., Demchenko I. V. Wave matrix technique for waveguide iris polarizers simulation. Theory // Journal of Nano- and Electronic Physics. — 2020. — Vol. 12, № 6. — P. 06026-1–06026-5. DOI: DOI: 10.21272/jnep.12(6).06026.
56. Sushko O., Piltyay S., Dubrovka F. Symmetrically fed 1–10 GHz log-periodic dipole antenna array feed for reflector antennas // IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW), Kharkiv, Ukraine, September 2020, pp. 222–225. DOI: 10.1109/UkrMW49653.2020.9252778.
57. Bulashenko A. V., Piltyay S. I., Demchenko I. V. Wave matrix technique for waveguide iris polarizers simulation. Numerical results // Journal of Nano- and Electronic Physics. — 2020. — Vol. 13, № 1. — P. 01025-1–01025-5. DOI: DOI: 10.21272/jnep.13(1).01025.
58. Булашенко А. В., Пільтяй С. І., Кушнір Г. С., Булашенко О. В., Компактний хвилевідний поляризатор із трьома протифазними штирями // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2020. — № 5. — с. 97–104. DOI: 10.31649/1997-9266-2020-152-5-97-104.
59. Булашенко А. В., Пільтяй С. І., Демченко І. В., Оптимізація поляризатора на основі квадратного хвилеводу з діафрагмами // Наукоємні технології. — 2020. — Вип. 47, № 3. — с. 287–297. DOI: 10.18372/2310-5461.47.14878.
60. Булашенко А. В., Пільтяй С. І., Калініченко Є. І., Булашенко О. В., Регульований поляризатор на основі квадратного хвилеводу із діафрагмами та штирями // Технічна інженерія. — 2020. — Вип. 86, № 2. — с. 108–116. DOI: 10.26642/ten-2020-2(86)-108-116.
61. Пільтяй С. І. Випромінювання відкритого кінця тонкостінного круглого хвилеводу на основній та крос-поляризації // Вісник НТУУ “КПІ”. Серія — Радіотехніка. Радіоапаратобудув. — 2009. — Вип. 39. — С. 70–76. DOI: 10.20535/RADAP.2009.39.70-76.
62. Пільтяй С. І., Биковський О. В. Поляризатори на основі квадратних хвилеводів із діафрагмами // Матеріали III Всеукраїнської науково-технічної конференції «Радіоелектроніка в XXI столітті», Київ, Україна, 2020, с. 5–6. Режим доступу: <https://rtf.kpi.ua/wp-content/uploads/2020/05/III-ВНТК-Радіоелектроніка-у-XXI-столітті.pdf>.
63. Пільтяй С. І. Параметри чистоти колової поляризації // Міжнародна науково-технічна конференція «Радіотехнічні поля, сигнали, апарати та системи», Київ, Україна, 2019, с. 132–136. Доступ: http://conf.rtf.kpi.ua/attachments/article/1110/RTPSAS_2019_s4_t10.pdf.
64. Пільтяй С. І., Адаменко Є. О. Поляризатор із поздовжньою перегородкою // Матеріали II Всеукраїнської науково-технічної конференції студентів та аспірантів «Радіоелектроніка в XXI столітті», Київ, Україна, 2019, с. 7–8. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/33770/1/RTF_2019_7-8.pdf.

65. Пільтяй С. І., Булашенко А. В. Оптична антена V-подібної форми // Матеріали V Всеукраїнської науково-методичної конференції «Освіта, наука та виробництво: розвиток та перспективи», Суми, Україна, 23 квітня 2020, с. 88–89. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/37960/1/Osvita_nauka_2020_1_88_89.pdf.
66. Мосьондз І. О., Пільтяй С. І. Хвилевідний ортомодовий перетворювач // Матеріали V Всеукраїнської науково-методичної конференції «Освіта, наука та виробництво: розвиток та перспективи», Суми, Україна, 23 квітня 2020, с. 90–91. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/34879/3/Osvita_nauka_2020_1_90_91.pdf.
67. Dubrovka F. F., Piltyay S. I. Accuracy estimation of cross polar radiation prediction of open-ended thin-wall circular waveguide by approximate methods // 7-th Int. Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT 2009), Lviv, Ukraine, 2009, pp. 82–86. Access: <http://ena.lp.edu.ua/xmlui/bitstream/handle/ntb/4321/16.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.
68. Piltyay S. I. Eigenmodes analysis of sectoral coaxial ridged waveguides by transverse field-matching technique. Part 2. Numerical results // Visn. NTUU KPI, Ser. Radiotekh. radioaparaturbuduv. — 2013. — № 55. — P. 13–23. DOI: 10.20535/RADAP.2013.55.13-23.
69. Piltyay S. Enhanced C-band antiphase power combiner/divider // The 2-nd International Conference “Radioengineering fields, signals, equipment and systems”, Kyiv, Ukraine, 2013, pp. 105–106. Access: http://conf.rtf.kpi.ua/attachments/article/205/RTPSAS_2013_s4_p105.pdf.
70. Naidenko V. I., Piltyay S. I. Radiopulses evolution radiated by Hertz's dipole propagating in vacuum // Visnyk NTUU KPI, Seriya — Radiotekh. Radioaparaturbuduv. — 2008. — Vol. 36. — P. 53–59. DOI: 10.20535/RADAP.2008.36.53-59.
71. Bulashenko A., Piltyay S., Demchenko I. Energy efficiency of the D2D direct connection system in 5G networks // IEEE International Conference on Problems of Infocommunications. Science and Technology (PIC S&T 2020), Kharkiv, Ukraine, October 2020, pp. 324–329.
72. Piltyay S., Bulashenko A., Demchenko I. Wireless sensor network connectivity in heterogeneous 5G mobile systems // IEEE International Conference on Problems of Infocommunications. Science and Technology (PIC S&T 2020), Kharkiv, Ukraine, October 2020, pp. 508–513.
73. Bulashenko A., Piltyay S., Polishchuk A., Bulashenko O. New traffic model of M2M Technology in 5G wireless sensor networks // IEEE 2nd International Conference on Advanced Trends in Information Theory (IEEE ATIT 2020), Kyiv, Ukraine, November 2020, pp. 125–131.
74. Bulashenko A., Piltyay S., Kalinichenko Ye., Bulashenko O. Mathematical modeling of iris-post sections for waveguide filters, phase shifters and polarizers // IEEE 2nd International Conference on Advanced Trends in Information Theory, Kyiv, Ukraine, November 2020, pp. 330–336.
75. Piltyay S., Bulashenko A., Kushnir H., Bulashenko O. New tunable iris-post square waveguide polarizers for satellite information systems // IEEE 2nd International Conference on Advanced Trends in Information Theory (IEEE ATIT 2020), Kyiv, Ukraine, November 2020, pp. 342–348.
76. Piltyay S., Bulashenko A., Herhil Ye., Bulashenko O. FDTD and FEM simulation of microwave waveguide polarizers // IEEE 2nd International Conference on Advanced Trends in Information Theory (IEEE ATIT 2020), Kyiv, Ukraine, November 2020, pp. 357–363.
77. Bulashenko A., Piltyay S., Kalinichenko Ye., Bulashenko O. Mathematical model of adjustable waveguide polarizer with diaphragm and pins // IEEE 16th International Conference on The Experience of Designing and Application of CAD Systems, Lviv, Ukraine, February 2021.
78. Piltyay S., Bulashenko A., Bykovskiy O., Bulashenko O. FDTD simulation of a waveguide diaphragm polarizer for satellite television systems // IEEE 16th International Conference on The Experience of Designing and Application of CAD Systems, Lviv, Ukraine, February 2021.

79. Bulashenko A., Piltyay S., Kushnir H., Bulashenko O. Mathematical model of a square waveguide polarizer with four diaphragms // IEEE 16th International Conference on The Experience of Designing and Application of CAD Systems, Lviv, Ukraine, February 2021.
80. Piltyay S., Bulashenko A., Herhil Ye., Bulashenko O. Modern microwave polarizers and their electromagnetic characteristics // IEEE 16th International Conference on The Experience of Designing and Application of CAD Systems, Lviv, Ukraine, February 2021.
81. Bulashenko A., Piltyay S., Dikhtyaruk I., Bulashenko O. FDTD and wave matrix simulation of adjustable DBS-band waveguide polarizer // IEEE 16th International Conference on The Experience of Designing and Application of CAD Systems, Lviv, Ukraine, February 2021.
82. Piltyay S., Bulashenko A., Shuliak V., Bulashenko O. Compact 2-step septum polarizer for narrowband radars and satellite systems // IEEE 16th International Conference on The Experience of Designing and Application of CAD Systems, Lviv, Ukraine, February 2021.
83. Пільтяй С. І. Широкопasmові когерентні ортомодові перетворювачі на основі коаксіальних ребристих структур. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.12.07—Анени та пристрої мікрохвильової техніки. — Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, 2017. — 202 с. Режим доступу: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/22164>.
84. Анени системи: Лабораторний практикум [Електронний ресурс]: навчальний посібник для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / С. Є. Мартинюк, С. І. Пільтяй, О. Ю. Сушко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл 1,83 Мбайт). — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. — 30 с. (гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського, протокол № 3 від 28.11.2019 р.). Режим доступу: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/34840/1/AS.pdf>.
85. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. — 440 с.
86. Оптика и квазиоптика СВЧ: учебное пособие / Н. Я. Молотков, О. В. Ломакина, А. А. Егоров. — Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. — 380 с.
87. Технічна електродинаміка. Конспект лекцій / В. В. Пілінський, П. В. Попович. — К.: Національний Технічний Університет України “КПІ”, 2006. — 224 с.