

ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ

Кафедра Телекомунікаційних технологій

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
з дисципліни
ТЕХНІЧНА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

Київ – 2018

Фіалковський О.Т., Дочкін А.Г., Бондаренко Т.Г. Технічна електродинаміка. Навчальний посібник. - Київ, ДУТ, 2018, 159с.

Посібник написаний колективом авторів відповідно до програми дисципліни "Технічна електродинаміка" для студентів, що навчаються у Державному університеті телекомунікацій за напрямами підготовки "Телекомунікації", освітньо-кваліфікаційний рівень "бакалавр". Основну увагу приділено властивостям електромагнітних хвиль та явищ, які широко використовуються в техніці зв'язку на надвисоких частотах, конструкціям та параметрам ліній передачі в діапазоні НВЧ.

1. Предмет технічної електродинаміки.

1.1 Уявлення про електромагнітне поле.

В основі теорії електромагнетизму полягає уявлення про електромагнітне поле (ЕМП). Електродинаміка – наука, що вивчає електромагнітне поле.

Взагалі термін "поле" застосовують тоді, коли потрібно встановити відповідність координат кожній точці простору та деяких фізичних характеристик. Кажуть: "поле електромагнітне", "поле температур", "гравітаційне поле", "поле швидкостей газу" та ін.

В філософському змісті електричне "поле" слід розглядувати як одну із форм існування матерії.

Матерію, що нас оточує, прийнято поділяти на два великих класу: речовина та поле (якщо не торкатися ще не зовсім зрозумілих в наш час таких понять, як темна матерія та темна енергія).

Подібно цьому про електромагнітне поле можна казати як про "поле сил", що діє на заряди та струми, які знаходяться в середовищі, де діє поле. Важливо, що ми можемо за допомогою дослідів встановити, що електромагнітне поле існує: воно впливає на речовину, на заряди, ми можемо виміряти силу, з якою поле впливає на предмети.

У чому принципова різниця між полем та речовиною:

- речовина має масу спокою, інертну масу. Рух речей описується відомими рівняннями механіки Ньютона;
- поле не має маси спокою. Маса та імпульс можуть бути встановлені тільки для випадків поля, що рухається.

Взагалі, електромагнітне поле характеризується деякими векторними функціями координат і часу.

Важливо, що електромагнітне поле зазнає вплив інших полів та речовини: гравітаційне поле, створене речовиною, впливає на електромагнітне поле та скривлює його рух (відомий приклад – гравітаційний вплив зірок та галактик на напрям руху світла). З іншого боку, електромагнітне поле може тиснути на речовину, наприклад, відштовхуючи елементарні частки від зірок. Тобто, речовина та електромагнітне поле можуть взаємодіяти друг з другом.

Цікаво, що і невеликі елементарні частки має властивості, що звичайно притаманні полю: відома дифракція електронів на отворі в екрані, тобто хвильові якості можуть мати не тільки поле, але й частки речовини.

З іншого боку, електромагнітне поле має такі риси речовини, як маса, енергія, кількість руху.

Зробимо такий уявний експеримент.

Припустимо, що існують дві антени в вакуумі: передавальна та приймальна.

Будемо здійснювати передачу електромагнітної енергії на протязі короткого проміжку часу τ . Зробимо велику відстань між антенами, таку, коли час t , потрібний, щоб енергія досягла приймальної антени, був значно більший за час передавання сигналу: $t \gg \tau$.



Тоді легко уявити, що може бути момент часу, коли енергія вже випромінена з передавальної антени, а до приймальної ще не дійшла. Це означає, що енергія знаходиться у просторі. Таким чином, в просторі буде присутнє електромагнітне поле зі своєю енергією.

Носій енергії - не звична для нас середовище із речовина, а інша фізична реальність. Це і є "поле".

"Електромагнітне поле" - це вид матерії, що характеризує сукупність взаємно зв'язаних електричного і магнітного полів. ЕМП може самостійно існувати в вакуумі, без речовини.

Властивості електромагнітних полів доступні спостереженню: по дії на електричні заряди і токи. З величині цих дій визначають основні величини, що характеризують поле – напруженість електричного поля \vec{E} та індукцію магнітного поля \vec{B} . А ці фізичні величини характеризуються не тільки своєю числом (величиною), а й напрямом дії, тобто ЕМП – векторне поле.

Визначення \vec{E} і \vec{B} виявляються різними в рухомій і не рухомій системі координат.

Маса ЕМП дорівнює енергії поля, поділену на c^2 .

Одночасно з рухом енергії ЕМП рухається і маса поля. Маса дуже мала, але не дорівнює нулю.

При максимально можливих значеннях напруженості електричного та магнітного полів об'ємна щільність маси електромагнітного поля має порядок $10^{-17} \dots 10^{-12} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Це мале значення, але наявність маси у ЕМП має принципове значення.

ЕМП може перетворюватись в речовину, а речовина в поле. Може проходити процес переходу речовини із одного виду матерії в іншу.

У нашому курсі ми будемо вивчати класичну макроскопічну електродинаміку. Це означає, що розміри об'єктів, що вивчаються та відстань до них значно більші за розміри атомів та молекул, а час зміни векторів поля значно менше за час внутрішньоатомних та молекулярних процесів.

Класична електродинаміка правильно вивчає та пояснює дуже велике коло питань радіотехніки. Проте не всі: не може пояснити явища на дуже великій частоті (в оптичному діапазоні), явища поглинання речовиною світла (фотоефект) та в цілому взаємодію речовини та ЕМП. Такі явища повинні враховувати квантову структуру поля, що і зроблено в квантовій електродинаміці. Ми не будемо також торкатися питань релятивістської електродинаміки, яка вивчає електромагнітні поля в середовищах, що рухаються з швидкостями, близькими до швидкості світла.

Класична технічна електродинаміка (ТЕД) також вивчає конструкцію та принцип дії різних пристроїв, що використовуються в діапазоні надвисоких частот (НВЧ). До числа таких елементів відносяться: хвилевід, коаксіальна лінія, симетрична лінія, оптичний хвилевід, елементи антени, та інші пристрої НВЧ.

Для нас важливо, що теорія ЕМП і ТЕД дозволяють зрозуміти принципи роботи таких корисних радіотехнічних пристроїв, проектувати та розраховувати їх параметри.

1.2 Розподіл часу на вивчення дисципліни.

Звітність з дисципліни: письмовий диференційований залік.

Рекомендована література:

1. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика. Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 2000. – 536с.

2. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение раадиоволн. Учеб. пособие для вузов по спец. “Радиотехника”. – М.: Высшая школа, 1992.

1.3 Історія розвитку науки про ЕМП.

Наукові твердження в цій області склались відносно недавно. В 1784-89 роках були опубліковані роботи Шарля Кулона про електричні і магнітні взаємодії. Він відкрив свій відомий закон Кулона, математично дуже схожий на закон земного тяжіння.

Пізніше, в 20-х роках XIX століття Андре-Мари Ампер досліджував взаємодію електричних струмів, провідників та магнітів. Він сформулював кілька законів про взаємодію електричних струмів, зокрема, відомий закон Ампера про циркуляцію магнітного поля (1822 рік), який далі ми будемо називати законом повного струму.

Ці вчені вважали, що дія зарядів і токів проходить дуже швидко (діє принцип дальності), тобто миттєво на відстані.

З іменем Майкла Фарадея (його великі досягнення були зроблені в 30-ті роки XIX століття) пов'язана ідея принципу близькодії. Згідно його, взаємодії відбуваються в вакуумі, в якому вміщуються електромагнітні процеси. В 1831 році Фарадей відкрив свій закон електромагнітної індукції, сконструював потужний електромагніт (піднімав 1 тону).

Великий вклад в науку вніс Джеймс Клерк Максвел. Він в 1873 році опублікував фундаментальний "Трактат про електрику та магнетизм". В сучасній фізиці рівняння Максвелла з цього трактату являються фундаментом теорії електромагнетизму.

Максвел в своїх рівняннях зв'язав вектори електричного та магнітного поля, заряди та струми, зробив теоретичний висновок про існування електромагнітних хвиль, висунув гіпотезу про електромагнітну природу світла. Максвел поєднав та узагальнив раніш відомі закони про електрику та магнетизм. Рівняння Максвелла неможливо вивести із інших законів, це узагальнення експериментальних законів природи.

Після появи рівнянь Максвелла постало питання про електромагнітні хвилі (ЕМХ). Вперше експериментально в лабораторії існування ЕМХ було зроблено Генріхом Герцом в кінці XIX століття.

Герц винайшов багато із того, що зараз називається радіотехнічною електродинамікою: параболічні дзеркала, випромінювачі, вібратор Герца. Проте він вважав, що ЕМХ не мають практичної користі.

В кінці 19 – на початку 20 століття працею багатьох вчених було винайдено радіо. Герц зробив передавач та параболічну антену, Попов – приймач, Марконі об'єднав ці винаходи та запатентував їх, Лодж зробив чутливий приймач (когерер), Тесла винайшов щоглову антену. Всі ці винаходи було зроблено в 90-ті роки XIX століття. Вже в нульові роки XX століття почали використовувати перші серійні приймачі, спочатку у військових цілях.

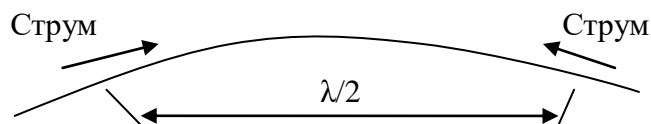
В ХХ-му столітті теорія та практика застосування електромагнітних хвиль розвивалась дуже швидко. Збільшувалась частота електричних сигналів.

Довжина хвиль, що використовуються в радіотехніці, вимірюються від довгих (кілометри), метрових та дециметрових (телебачення, мобільний зв'язок), сантиметрових і міліметрових (радіолокація, космічний зв'язок, радіорелейні лінії) і до мікрометрових (в оптиці).

При цьому розміри елементів стали порівнянними або більше за довжину хвилі.

Чому ми вимушені вивчати окремо технічну електродинаміку? Чому не можна обмежитись застосуванням таких відомих законів радіотехніки, як закони Ома та Кірхгофа?

Зробимо уявний експеримент. Будемо пропускати струм по провіднику. Помітимо два перерізу, відстань між якими дорівнює половині довжини хвилі.



Це значить, що фаза струму в цих перерізах провідника (лінії передачі) не однакова, і струми навіть будуть протифазними. Зрозуміло, що просте застосування закону Ома для розрахунку напруги на кінцях провідника приведе до неправильних результатів. Як показує практика, при цьому провідник ще й починає випромінювати енергію в простір, він працює як антена. Пояснити це явище за допомогою законів Ома та Кірхгофа неможливо.

В діапазоні НВЧ замість коливальних контурів використовуються об'ємні резонатори, замість двох провідної лінії - хвилеводи різних конструкцій або оптичний діелектричний світловод.

Для розуміння принципів їх роботи, свідомого застосування та конструювання потрібне знання теорії електромагнетизму, яка побудована на основі рівнянь Максвелла.

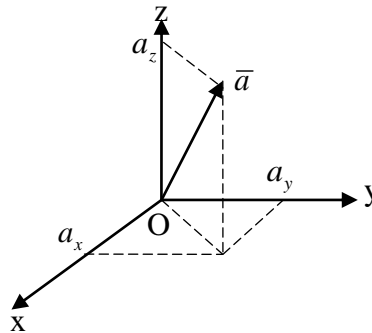
2. Математичний апарат ТЕД

2.1. Векторний та скалярний добуток. Скалярні та векторні поля. Векторний аналіз. Інтегральні лінії векторного поля.

Вектор – величина, що характеризується не тільки числом (значенням), але й напрямом.

Звичайно використовують прямокутну, циліндричну та сферичну системи координат. Наприклад, в прямокутній системі координат вектор \vec{a} має складові a_x , a_y та a_z :

$$\vec{a} = a_x \vec{x}_0 + a_y \vec{y}_0 + a_z \vec{z}_0 .$$

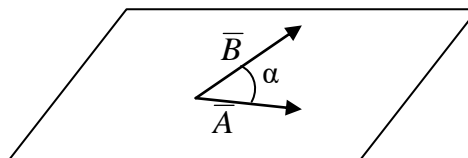


Визначена операція суми векторів, яка зводиться до складання їх складових:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x) \vec{x}_0 + (A_y + B_y) \vec{y}_0 + (A_z + B_z) \vec{z}_0$$

Скалярний добуток визначено як

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z , \text{ це скаляр.}$$



Для скалярних добутків векторів-ортів мають місце такі співвідношення:

$$\vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0 = \vec{y}_0 \cdot \vec{y}_0 = \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_0 = 1,$$

$$\vec{x}_0 \cdot \vec{y}_0 = \vec{y}_0 \cdot \vec{z}_0 = \vec{z}_0 \cdot \vec{x}_0 = 0.$$

Тому легко перевірити, що

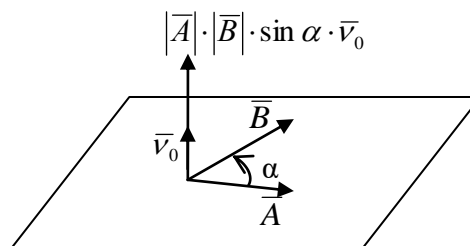
$$\begin{aligned}
& (A_x \bar{x}_0 + A_y \bar{y}_0 + A_z \bar{z}_0) \cdot (B_x \bar{x}_0 + B_y \bar{y}_0 + B_z \bar{z}_0) = A_x B_x \cdot \bar{x}_0 \cdot \bar{x}_0 + A_y B_x \cdot \bar{y}_0 \cdot \bar{x}_0 + A_z B_x \cdot \bar{z}_0 \cdot \bar{x}_0 + \\
& + A_x B_y \cdot \bar{x}_0 \cdot \bar{y}_0 + A_y B_y \cdot \bar{y}_0 \cdot \bar{y}_0 + A_z B_y \cdot \bar{z}_0 \cdot \bar{y}_0 + A_x B_z \cdot \bar{x}_0 \cdot \bar{z}_0 + A_y B_z \cdot \bar{y}_0 \cdot \bar{z}_0 + A_z B_z \cdot \bar{z}_0 \cdot \bar{z}_0 = \\
& = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.
\end{aligned}$$

Запитання: коли скалярний добуток векторів дорівнює нулю, якщо вектори не рівні нулю? Відповідь: якщо вони ортогональні (перпендикулярні).

Векторний добуток визначено як

$$\bar{A} \times \bar{B} = [\bar{A}, \bar{B}] = |\bar{A}| \cdot |\bar{B}| \cdot \sin \alpha \cdot \bar{v}_0,$$

де \bar{v}_0 - орт, перпендикулярній площині, в якій лежать вектори \bar{A} та \bar{B} . Напрямок вектора \bar{v}_0 визначається за відомим правилом "правого свердла", як показано на рисунку.



Важливо відмітити, що векторні добутки ортів знаходяться так:

$$[\bar{x}_0, \bar{x}_0] = [\bar{y}_0, \bar{y}_0] = [\bar{z}_0, \bar{z}_0] = 0, \quad \bar{y}_0 = [\bar{z}_0, \bar{y}_0], \quad \bar{z}_0 = [\bar{x}_0, \bar{y}_0], \quad \bar{x}_0 = [\bar{y}_0, \bar{z}_0].$$

Завдання на самостійну роботу: знайти вираз для векторного добутку векторів $\bar{A} \times \bar{B} = [\bar{A}, \bar{B}]$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned}
& (A_x \bar{x}_0 + A_y \bar{y}_0 + A_z \bar{z}_0) \times (B_x \bar{x}_0 + B_y \bar{y}_0 + B_z \bar{z}_0) = \\
& = 0 + A_x B_y [\bar{x}_0, \bar{y}_0] + A_x B_z [\bar{x}_0, \bar{z}_0] + A_y B_x [\bar{y}_0, \bar{x}_0] + 0 + A_y B_z [\bar{y}_0, \bar{z}_0] + A_z B_x [\bar{z}_0, \bar{x}_0] + A_z B_y [\bar{z}_0, \bar{y}_0] + 0 = \\
& = A_x B_y \bar{z}_0 - A_x B_z \bar{y}_0 - A_y B_x \bar{z}_0 + A_y B_z \bar{x}_0 + A_z B_x \bar{y}_0 - A_z B_y \bar{x}_0 = \\
& = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Важливо відмітити: $[\bar{A} \times \bar{B}] = -[\bar{B} \times \bar{A}]$.

2.2 Добуток матриць (лінійне перетворення)

Якщо задані матриці $\|m\|$ та $\|A\|$

$$\|m\| = \begin{vmatrix} m_{xx} & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{yx} & m_{yy} & m_{yz} \\ m_{zx} & m_{zy} & m_{zz} \end{vmatrix},$$

$$\|A\| = \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix},$$

то добуток матриць знаходиться за формулою

$$\|B\| = \|m\| \cdot \|A\| = \begin{vmatrix} m_{xx} & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{yx} & m_{yy} & m_{yz} \\ m_{zx} & m_{zy} & m_{zz} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{xx}A_x + m_{xy}A_y + m_{xz}A_z \\ m_{yx}A_x + m_{yy}A_y + m_{yz}A_z \\ m_{zx}A_x + m_{zy}A_y + m_{zz}A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix}.$$

2.3. Градієнт скалярної функції φ

$\text{grad } \varphi = \bar{V}_0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ - направлений в сторону максимального збільшення φ і дорівнює

швидкості зміни φ в цьому напрямку.

$$\text{grad } \varphi = \bar{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Градієнт показує швидкість зміни функції φ в напрямку її найшвидшої зміни.

Градієнт - це вектор. Які проекції має градієнт? Складові градієнту дорівнюють швидкості зміни скалярної функції φ вздовж вісі x , y та z : $\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

Висновок: скалярне поле φ породжує векторне поле $\text{grad } \varphi$.

Часто застосовується символічний векторний оператор "набла" $\bar{\nabla}$:

$$\bar{\nabla} = \bar{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \bar{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \bar{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}$$

Запис $\bar{\nabla} \cdot \varphi$ - означає множення $\bar{\nabla}$ (вектор) на скаляр φ :

$$\bar{\nabla} \varphi = \bar{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{grad } \varphi.$$

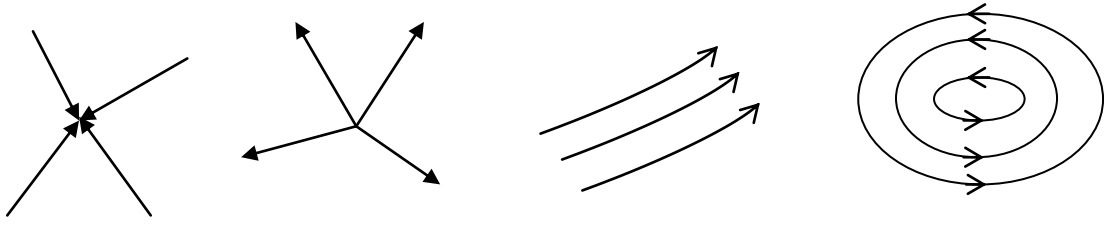
2.4. Векторні або силові лінії

Це лінії, дотичні до яких в кожній точці показують напрям вектора.

Чим густіше векторні лінії, тим більша величина поля (вектора).

Кількість ліній, які проходять через площину, пропорціональна абсолютному значенню вектора.

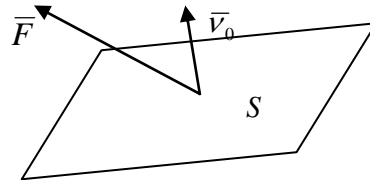
Можуть бути принципово різні варіанти структури векторних ліній, наприклад:



2.5. Дивергенція векторної функції

Операція над вектором, за допомогою якої можна визначити, чи є в області V витік чи стік вектору, має назву дивергенція.

Потоком Φ вектора \vec{F} через поверхню S називається інтеграл $\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$.



У виразі під інтегралом - скалярний добуток $\vec{F} \cdot d\vec{s} = F_n dS$,

де \vec{n}_0 - зовнішня нормаль до поверхні S , інколи для неї користуються позначенням $\vec{n} \cdot ds = d\vec{s}$.

Потік $\Phi > 0$, якщо силові лінії виходять з поверхні, та $\Phi < 0$, якщо входять.

Якщо потік більше нуля, то з середині об'єму V є витік силових ліній, якщо менше нуля – то там є стік.

Дивергенція вектора \vec{F} - це скалярна величина

$$\text{div} \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta V} .$$

Дивергенція є функція координати точки спостереження.

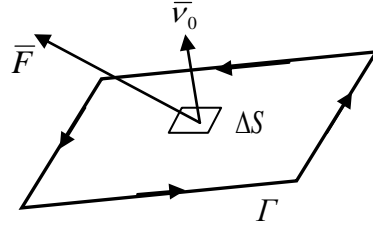
Якщо $\text{div} \vec{F}$ в точці дорівнює нулю, то тут немає джерел вектора (витоків та стоків), силові лінії не починаються і не закінчуються в цій точці.

Завдання на самостійну роботу:

1. Довести формулу $\text{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$.
2. Довести, що дивергенцію можна також виразити за допомогою символічного вектора $\vec{\nabla}$ як скалярний добуток векторів $\vec{\nabla}$ та \vec{F} : $\text{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$.

2.6. Ротор векторної функції

Циркуляцією вектора \vec{F} по замкненому контуру Γ називають інтеграл $\mathcal{C} = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l}$.



Ротором вектора \vec{F} називається векторна величина, що має три складові:

$$\text{rot} \vec{F} = \text{rot}_x \vec{F} \cdot \bar{x}_0 + \text{rot}_y \vec{F} \cdot \bar{y}_0 + \text{rot}_z \vec{F} \cdot \bar{z}_0.$$

Проекції ротора на напрямок \bar{v}_0 (в прямокутній системі координат це \bar{x}_0, \bar{y}_0 або \bar{z}_0) дорівнює в околиці елемента поверхні ΔS

$$\text{rot}_v \vec{F} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Ротор можливо виразити через проекції вектора на координатні вісі. У прямокутній системі координат справедливо рівняння

$$\text{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Ротор також можливо виразити за допомогою вектора $\bar{\nabla}$ як векторний добуток $\text{rot} \vec{F} = \bar{\nabla} \times \vec{F}$.

Таким чином, ротор – це операція над компонентами вектора, яка приводить до отримання нового вектора.

2.7. Деякі властивості ротора і дивергенції.

$$\text{rot} \text{rot} \vec{F} = \text{grad} \text{div} \vec{F} - \nabla^2 \vec{F}$$

$$\nabla - \text{оператор Гамільтона, «набла» } \nabla = \bar{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \bar{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \bar{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$\nabla^2 = \Delta - \text{оператор Лапласа, «лапласіан» } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Оператор Лапласа над скаляром – це скаляр: $\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$.

Оператор Лапласа над вектором приводить до нового вектора:

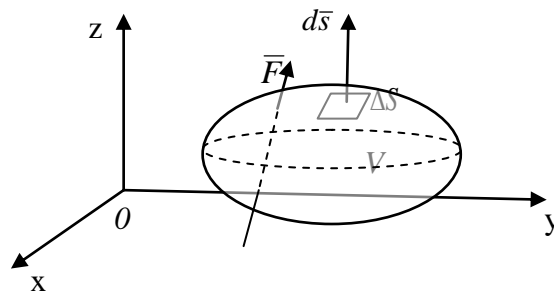
$$\nabla^2 \vec{F} = \bar{x}_0 \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \right) + \bar{y}_0 \left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \right) + \bar{z}_0 \left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \right).$$

2.8. Теорема Остроградського-Гауса і Стокса.

Це векторні інтегральні формули, які використовуються при операціях з векторами електромагнітного поля.

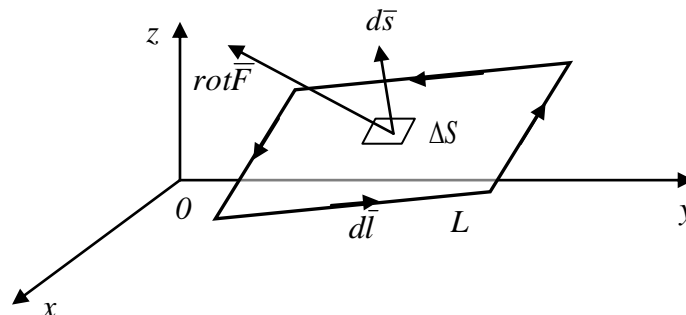
а) формула Остроградського-Гауса $\int_V \text{div} \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$: інтеграл по об'єму V від

дивергенції вектора \vec{F} дорівнює потоку вектора \vec{F} через поверхню S, що обмежує цей об'єм.



б) Теорема Стокса $\int_S \text{rot} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l}$: поверхневий інтеграл від ротора вектора

\vec{F} по поверхні S дорівнює лінійному інтегралу цього вектора (циркуляції), що взятий по замкнутому контуру L, який обмежує цю поверхню.



в) справедлива аналогічна формула Остроградського-Гауса для ротора вектора:

$$\int_V \text{rot} \vec{F} \cdot dV = \oint_S [d\vec{s}, \vec{F}].$$

3. Величини, що характеризують електромагнітне поле

3.1 Закон Кулона. Сила Лоренца. Вектори електричного та магнітного поля у вакуумі

В нашому курсі ми вивчаємо макроскопічну електродинаміку. Це означає, що розміри наших об'єктів значно більші за розміри молекул, атомів та зарядів, час зміни поля значно більше за час процесів усередині молекул. Вважаємо, що середовище - суцільне, заряди безперервно розповсюдженні, в середовищі знаходиться дуже велика кількість заряджених частин, які ми не розглядаємо як дискретні частини.

3.1.1 Напруженість електричного поля

Силовою характеристикою електричного поля в точці M' , за допомогою якої можливо виміряти величину електричного поля, є вектор напруженості електричного поля

$$\vec{E}(M') = \frac{\vec{F}(M')}{q},$$

це відношення сили, що діє на електричний заряд, розміщений в точці M' , до величини цього заряду.

Завдання на самостійну роботу: пригадати та записати у зошитах закон Кулона про силу взаємодії двох електричних зарядів. Пояснити зміст величин у виразі.

$$\text{Відповідь: } \vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \vec{r}_0.$$

3.1.2 Електричний заряд в точці M' позначається $q(M')$.

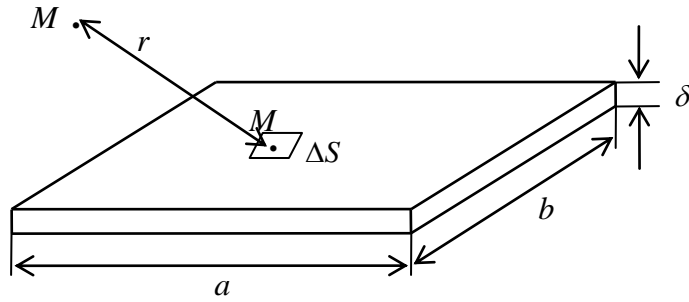
Щільність електричного заряду в точці M'

$$\rho(M') = \lim_{\substack{\Delta V \rightarrow 0 \\ \Delta V \rightarrow M'}} \frac{\Delta q}{\Delta V}, \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$$

де Δq - заряд, що міститься в об'ємі ΔV .

$$\text{З цього виразу } q = \int_V \rho(M') dV.$$

У деяких випадках корисно ввести поняття поверхневого заряду $\rho_{\text{пов}}(M')$.



У тому випадку, коли електричний заряд зосереджено у тонкому шарі товщиною, значно меншою за відстань r між точкою спостереження поля M та точкою, де знаходиться електричний заряд та розмірами поверхні a та b ($\delta \ll r; a; b$), можливо казати про поверхневий заряд $q_{\text{нов}}(M')$ з поверхневою густиною

$$\rho_{\text{нов}}(M') = \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \Delta S \rightarrow M'}} \frac{\Delta q_{\text{нов}}}{\Delta S}, \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2},$$

де M – точка, у якій знаходимо вектори електромагнітного поля,
 M' – точка, у якій задано значення поверхневого заряду.

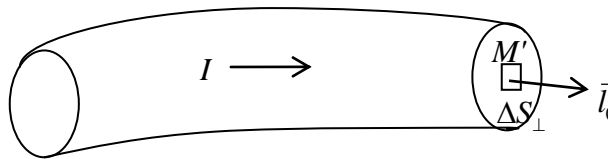
$$\text{Справедливий вираз } q_{\text{нов}} = \int_S \rho_{\text{нов}}(M') dS.$$

3.1.3 Характеристики струму провідності

Якщо є рух електричних зарядів, з'являється електричний струм

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}, \text{ А},$$

де Δq - кількість електричного заряду, що пройшов за час Δt .



$$\text{Щільність току провідності } \vec{j} = \lim_{\Delta S_{\perp} \rightarrow 0} \vec{l}_0 \cdot \frac{\Delta I}{\Delta S_{\perp}} = \frac{dI}{dS_{\perp}} \cdot \vec{l}_0,$$

де \vec{l}_0 - орт, що співпадає з напрямком руху зарядів,
 ΔS_{\perp} - площа, перпендикулярна до напрямку руху зарядів,
 ΔI - струм, який проходить через площину ΔS_{\perp} .

Якщо задана щільність струму \vec{j} у кожній точці поверхні S , то через всю поверхню проходить загальний струм $I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$.

3.1.3. Індукція магнітного поля

Силовою характеристикою магнітного поля, за допомогою якої можливо виміряти величину магнітного поля, є вектор індукції магнітного поля \vec{B} .

На заряд q , що рухається з швидкістю \vec{v} , діє сила Лоренца $F_n = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$,

де \vec{B} - вектор магнітної індукції.

Перший доданок характеризує внесок електричного поля. Другий – внесок магнітного поля. Напрямок сили, що діє на позитивний електричний заряд, коли вектор швидкості \vec{v} ортогональний до вектора \vec{B} , показано на рисунку. Траєкторія позитивного заряду показано штриховою лінією.

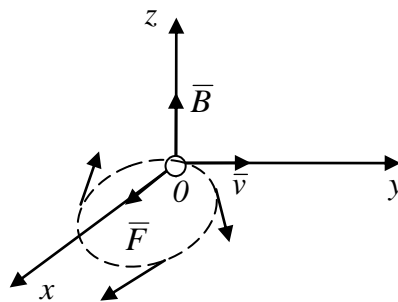


Рис. 3.1. Траєкторія руху позитивного заряду у магнітному полі

Проте користуватись таким рівнянням для виміру напруженості магнітного поля не дуже зручно, бо виміряти силу, що діє на рухомий електричний заряд, дуже важко. Значно легше виміряти силу, що діє на провідник зі струмом.

Тому примусимо заряди рухатись по провіднику. За час t заряди пройдуть відрізок довжиною $\vec{l} = \vec{v}t$. За цей час через переріз провідника пройде заряд $q = It$, де I – величина струму у провіднику.

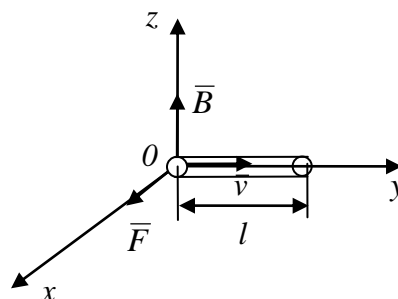


Рис. 3.2. Сила, що діє у магнітному полі на провідник з струмом

Перетворимо вираз для сили Лоренца: $F_L = q[\vec{v}, \vec{B}] = It \left[\frac{\vec{l}}{t}, \vec{B} \right] = I[\vec{l}, \vec{B}]$. Це одна із форм запису відомого закону Ампера про сили між провідниками з струмом..

Звідси, у випадку $\vec{l} \perp \vec{B}$, отримуємо, що $|\vec{B}| = \frac{|\vec{F}|}{I \cdot |\vec{l}|}$: вектор магнітної індукції чисельно дорівнює відношенню сили, з якою магнітне поле діє на малий відрізок провідника з струмом, до добутку величини струму на довжину провідника, якщо провідник орієнтований так, що сила максимальна.

3.2. Вектори напруженості електричного поля, поляризованості, електричного зміщення у середовищі. Діелектрики, провідники та напівпровідники. Тензор діелектричної проникності.

Наявність речовини у середовищі впливає на величину векторів електромагнітного поля. Якщо ми послідовно візьмемо різні речовини, то в одній й тій же самій точці простору можемо отримати різні значення векторів поля, різні струми, заряди. Тобто, електромагнітне поле взаємодіє з речовиною у середовищі.

Причини цієї взаємодії:

- а) рух електричних вільних зарядів під дією електричного та магнітного полів;
- б) поляризація речовини;
- в) намагніченість речовини.

3.2.1. Поляризація діелектриків

Якщо у матеріалі середовища немає вільних електричних зарядів (у діелектрику), то при розміщенні речовини у зовнішньому електричному полі відбувається поляризація діелектриків — явище, пов'язане з обмеженим зміщенням пов'язаних електричних зарядів в діелектрику або з поворотом електричних диполів. Ці зміщені заряди створюють своє електричне поле.

Існують такі основні види поляризації діелектриків:

- а) електронна;
- б) іонна;
- в) дипольна (орієнтаційна),

та деякі інші види (електронно-релаксаційна, іонно-релаксаційна, спонтанна, структурна, резонансна), які мають менший вплив.

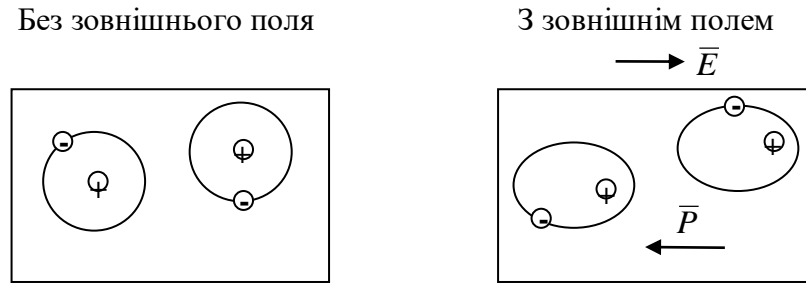


Рис. 3.3. Електронна поляризація

Електронна та іонна поляризації мають місце в неполяризованих діелектриках, відбуваються за малий час (10^{-13} с), без втрат на нагрівання. Орієнтаційна поляризація (або дипольна) спостерігається в полярних діелектриках, пов'язана з переорієнтацією молекул у зовнішньому електричному полі та супроводжується втратами на нагрівання.

Загальним для всіх видів поляризації є те, що у діелектрику з'являється вектор поляризації \bar{P} . В постійному або достатньо повільно змінному від часу зовнішньому електричному полі при достатньо малій величині напруженості цього поля вектор поляризації \bar{P} , як правило (виняток складають сегнетоелектрики), лінійно залежить від вектора напруженості поля \bar{E} .

В результаті в діелектрику буде виникати власне електричне поле, пропорційне зовнішньому \bar{E} :

$$\bar{P} = \varepsilon_0 \chi_0 \bar{E},$$

де χ_0 (читається як "хі") - коефіцієнт, що залежить від хімічного складу, концентрації, структури (в тому числі від агрегатного стану) середовища, температури, механічного напруження та т. і., має назву діелектричної сприйнятливості,

$$\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \approx \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{\Phi}{\text{м}} \quad \text{- електрична стала (стара назва -}$$

діелектрична проникність вакууму).

Для врахування впливу середовища на електричне поле вводять вектор електричної індукції (електричного зміщення) \bar{D} , який пропорційний сумі вектора напруженості електричного поля та вектора поляризації.

У вакуумі (де немає вектора поляризації) вектор електричної індукції просто пропорційний вектору електричного поля

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E},$$

але у реальному діелектричному середовищі добавляється вектор поляризації

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P} = \varepsilon_0 \bar{E} + \varepsilon_0 \chi_0 \bar{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_0) \bar{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \bar{E} = \varepsilon_a \bar{E},$$

де $\epsilon_r = 1 + \chi_\delta$ - відносна діелектрична проникність,

$\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon_r$ - абсолютна діелектрична проникність.

Вакуум, у якому нема чому поляризуватися та $\chi_\delta = 0$, має абсолютну діелектричну проникність $\epsilon_a = \epsilon_0$ та відносну діелектричну проникність $\epsilon_r = 1$. З великою точністю це справедливо також для повітря та газів атмосфери Землі. Відносна діелектрична проникність ϵ_r твердих та рідинних діелектриків більша за 1, у більшості з них становить від 2 до 10 (для поліетилену 2,25, для фторопласта 2,2, для паперу 2,0...3,5, для склотекстоліту 5, для гуми 7, для кераміки 8...20), у деяких випадках ще більше (для води на низьких частотах в залежності від температури $\epsilon_r = 55...88$, для спирту 27, для титанату барію 1250...10000).

Таким чином, отримуємо матеріальне рівняння для електричного поля, в яке входять параметри середовища

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_a \vec{E}.$$

У випадку, коли величина відносної діелектричної проникності залежить від орієнтації матеріалу, тобто неоднакова в різних напрямках, вводять тензор діелектричної проникності

$$\vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Такими середовищами є сегнетоелектрики, намагнічена плазма, деякі кристали. Внаслідок залежності діелектричної проникності від орієнтації з'являється непаралельність векторів \vec{E} та \vec{D} .

У цьому випадку складові вектора електричної індукції знаходять за допомогою матричного рівняння:

$$\vec{D} = \vec{\epsilon} \cdot \vec{E} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \\ \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z \\ \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix}.$$

3.2.2. Намагніченість матеріалів

Вірну інтерпретацію магнетизму можливо дати тільки за допомогою квантової механічної теорії. Елементарні магнітні диполі атомів та молекул пов'язані з квантовим орбітальним моментом та спіном електронів.

Тому в макроскопічній електродинаміці спрощено припускають існування елементарних магнітних диполів, пов'язаних з класичними струмами. Молекулярні струми можливо інтерпретувати як кругові струми, що циркулюють в атомах або молекулах речовини. Середні по об'єму молекулярні струми називають струмами намагнічування. Коли зовнішнього поля немає, струми намагнічування в середньому дорівнюють нулю.

При наявності зовнішнього поля молекулярні струми можуть орієнтуватися однаково в один бік та створювати магнітний момент.

Таким чином, у речовині за відсутності зовнішнього магнітного поля магнітні моменти атомів та молекул направлені хаотично, а при наявності такого поля магнітні моменти у речовині орієнтуються однаково, їх магнітні поля підсумовуються. Кажуть, що речовина намагнічується.

При цьому можливі різні варіанти співвідношення напрямів зовнішнього магнітного поля та поля, створеного магнітними моментами атомів та молекул речовини. Можливе невелике послаблення (діамагнетика) або невелике підсилення (парамагнетика) зовнішнього поля. У випадку сильного підсилення ми отримуємо ферромагнетика.

Намагніченість середовища визначається як магнітний момент одиниці об'єму та позначається \bar{M} .

Для характеристики магнітних властивостей середовища вводиться вектор напруженості магнітного поля \bar{H} . Це векторна величина, що дорівнює різниці вектора магнітної індукції та вектора намагніченості у середовищі:

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu_0} \bar{B} - \bar{M}.$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ - магнітна стала (стара назва - магнітна проникність вакууму).

Зрозуміло, що у вакуумі, де немає намагніченості, $\bar{H} = \frac{1}{\mu_0} \bar{B}$.

У невеликих полях для діа- та парамагнетиків справедливо лінійне співвідношення

$$\bar{M} = \chi_m \bar{H},$$

де χ_m - магнітна сприйнятливність. Значення χ_m можуть бути як негативними, так і позитивними, близькими до нуля або дуже великими (наприклад, для діамагнетика срібла $\chi_m = -2,6 \cdot 10^{-5}$, для парамагнетика кальцію $\chi_m = +4,4 \cdot 10^{-5}$, для ферромагнетика чистого заліза $\chi_m = +2 \cdot 10^5$).

Таким чином, отримуємо матеріальне рівняння для магнітного поля

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0\vec{H} + \mu_0\chi_m\vec{H} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu_a\vec{H},$$

де $\mu_r = 1 + \chi_m$ - відносна магнітна проникність,

$\mu_a = \mu_0\mu_r$ - абсолютна магнітна проникність.

Для вакууму, повітря, діаманетиків та парамагнетиків з великою точністю можливо вважати, що $\mu_r = 1$, $\mu_a = \mu_0$.

Феромагнітні матеріали мають властивість залежності магнітної проникності від напрямку. Для них користуються тензором магнітної проникності

$$\|\vec{\mu}\| = \begin{vmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{vmatrix}.$$

У цьому випадку складові вектора магнітної індукції знаходять за допомогою матричного рівняння:

$$\|\vec{B}\| = \|\vec{\mu}\| \cdot \|\vec{H}\| = \begin{vmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_{xx}H_x + \mu_{xy}H_y + \mu_{xz}H_z \\ \mu_{yx}H_x + \mu_{yy}H_y + \mu_{yz}H_z \\ \mu_{zx}H_x + \mu_{zy}H_y + \mu_{zz}H_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix}.$$

3.2.3. Закон Ома у диференціальній формі.

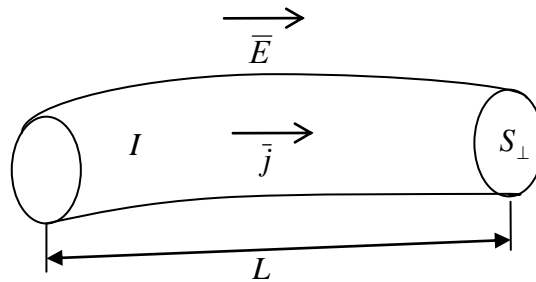


Рис. 3.4. Трубка струму

Оберемо дуже малу ділянку середовища з вільними носіями заряду (провідник) таку, що можливо вважати значення струму однаковим у всій частині. Позначимо довжину ділянки L , перпендикулярну площу поперечного перетину S_{\perp} . Помістимо середовище у зовнішнє електричне поле \vec{E} . У середовищі почнеться рух вільних зарядів з густиною струму \vec{j} .

Буде створено струм з силою $I = j \cdot S_{\perp}$.

Якщо в матеріалі напруженість електричного поля E , а довжина матеріалу L , то різниця потенціалів між боковими перетинами частини середовища буде $U = E \cdot L$.

З іншого боку, згідно з законом Ома, на бокових перетинах буде різниця потенціалу

$$U = I \cdot R = I \cdot \rho_{onip} \cdot \frac{L}{S_{\perp}},$$

де ρ_{onip} - питомий електричний опір.

Після підстановки виразу для струму, отримуємо $U = I \cdot R = j \cdot S_{\perp} \cdot \rho_{onip} \cdot \frac{L}{S_{\perp}} = E \cdot L$,

або $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ - закон Ома у диференціальній формі,

де $\sigma = \frac{1}{\rho_{onip}}$ - питома електрична провідність.

3.3. Класифікація середовищ.

В залежності від характеристик зв'язку між векторами \vec{E} та \vec{D} , \vec{H} та \vec{B} , \vec{j} та \vec{E} у матеріальних рівняннях $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$ та у законі Ома $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, розрізняють такі групи середовищ:

- ізотропні, анізотропні,
- однорідні, неоднорідні,
- лінійні, нелінійні,
- рухомі, нерухомі.

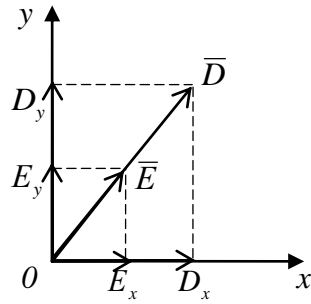
3.3.1. Ізотропні середовища – якщо у всіх напрямках властивості середовища однакові і не залежать від орієнтації векторів $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{j}$. В ізотропному середовищі ϵ, μ, σ - скаляри. В усіх парах: \vec{E} та \vec{D} ; \vec{H} та \vec{B} ; \vec{j} та \vec{E} ; вектори будуть паралельні.

Переважає більшість середовищ у природі є ізотропними.

Анізотропні середовища – якщо хоча б в одній парі: \vec{E} та \vec{D} ; \vec{H} та \vec{B} ; \vec{j} та \vec{E} ; вектори не паралельні або відношення їх модулів залежить від орієнтації векторів.

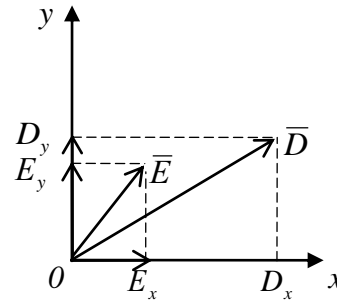
Розглянемо питання про паралельність орієнтації векторів в анізотропному середовищі. Для спрощення на рисунку показано двомірний випадок, де видно, що при залежності відношення модулів векторів від орієнтації (відношення векторів вздовж осей

Ox та Oy неоднакове, $\frac{D_x}{E_x} = \epsilon_{xx} > \frac{D_y}{E_y} = \epsilon_{yy}$) порушується паралельність векторів.



Ізотропне середовище,

$$\frac{D_x}{E_x} = \frac{D_y}{E_y} = \varepsilon \cdot \bar{E} \parallel \bar{D}.$$



Анізотропне середовище,

$$\frac{D_x}{E_x} = \varepsilon_{xx} > \frac{D_y}{E_y} = \varepsilon_{yy} \cdot \bar{E} \text{ не } \parallel \bar{D}.$$

Рис. 3.5. Непаралельність векторів в анізотропному середовищі

Приклади анізотропних середовищ: намагнічена плазма, кристалічні діелектрики (відносно електричного поля), намагнічений ферит (відносно магнітного поля).

В анізотропних середовищах відповідні матеріальні параметри – тензори:

$$\|\vec{\mu}\| = \begin{vmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{vmatrix}, \quad \|\vec{\varepsilon}\| = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \quad \text{та} \quad \|\vec{\sigma}\| = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}.$$

Матеріальні рівняння для анізотропних середовищ мають звичайний вигляд матричних рівнянь:

$$\|\bar{D}\| = \|\vec{\varepsilon}\| \cdot \|\bar{E}\|, \quad \|\bar{B}\| = \|\vec{\mu}\| \cdot \|\bar{H}\| \quad \text{та} \quad \|\bar{j}\| = \|\vec{\sigma}\| \cdot \|\bar{E}\|.$$

3.3.2. Лінійні та нелінійні середовища

У лінійному середовищі параметри ε, μ, σ не залежать від величини векторів. І навпаки, якщо хоча б один параметр ε, μ, σ в матеріальних рівняннях залежить від величини векторів, то ми будемо мати нелінійне середовище.

Більшість реальних середовищ – саме нелінійні. Проте в не дуже сильних полях можливо нехтувати залежністю ε, μ, σ від величини електричного або магнітного поля та вважати, що середовища є лінійними.

Приклад нелінійного середовища: феромагнітні матеріали з відомою петлею гістерезису (залежність $|\bar{B}| = f|\bar{H}|$ є дуже нелінійною), оптичний світловод при передачі оптичних сигналів з великою потужністю.

3.3.4. Однорідні та неоднорідні середовища

Однорідними називають середовища, у яких параметри ε, μ, σ не залежать від точки спостереження, тобто є однаковими в усіх точках середовища. Середовища, у яких хоча б один з параметрів ε, μ, σ є функцією координат, називають неоднорідними.

3.3.5. В класичній нерелятивістській електродинаміці вважають, що параметри ε, μ, σ не залежать від часу. Якщо всі ці параметри не залежать від часу, то середовище називають нерухомим.

Саме у цьому випадку справедливі ті вирази для матеріальних рівнянь, що були наведені вище. Інакше форму їх запису потрібно ускладнити з додаванням складових частин, що враховують швидкості об'єктів.

Висновки:

1. Звичайно ми будемо мати справу з ізотропними, лінійними, однорідними, нерухомими середовищами.
2. В теорії ЕМП дуже часто розглядаються дві моделі ідеальних середовищ: ідеальні провідники $\sigma \rightarrow \infty$ або ідеальні діелектрики $\sigma = 0$.
3. Реальні середовища в залежності від частоти можуть бути діелектриками, напівпровідниками або провідниками.

4. Система рівнянь Максвелла

4.1. Струм зміщення та узагальнений струм. Узагальнений закон індукції Фарадея

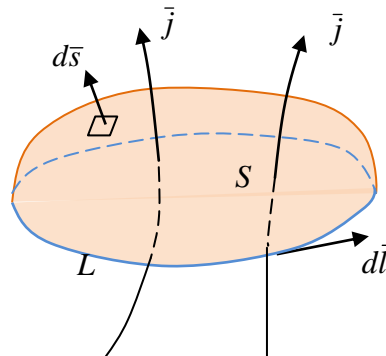
Всі електромагнітні процеси, що відносяться до макроскопічної електродинаміки у нерухомих середовищах, підкоряються законам, які були вперше сформульовані у 1873 Джеймсом Клерком Максвеллом.

Ці рівняння були отримані в результаті накопичених до того часу експериментальних даних і називаються рівняннями Максвелла.

Незважаючи на те, що з тих пір фізика просунулась далеко вперед, рівняння Максвелла, як і досі, служать фундаментом тих галузей науки та техніки, які пов'язані з практичним використанням електромагнітного поля.

На початку 19 століття датський фізик Ерстед експериментально встановив, що при пропусканні електричного струму по провіднику навкруги нього виникає магнітне поле.

На підставі цих дослідів французький учений Ампер сформулював свій відомий закон повного струму.



Припустимо, що в середовищі розташовано замкнений контур L , елемент цього контуру позначимо $d\vec{l}$. На контур спирається гладка поверхня S . На поверхні показано елементарну площадку з орієнтацією вектора $d\vec{s}$.

Через поверхню S проходять струми провідності з густиною \vec{j} . Раніше вже було встановлено, що повний струм через поверхню S зв'язаний з густиною струму інтегральним рівнянням

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (4.1)$$

Ампер сформулював свій закон так: циркуляція вектора напруженості магнітного поля \vec{H} по замкненому контуру L дорівнює повному струму, що пронизує цей контур:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I.$$

Формула (4.1) є записом закону повного струму в інтегральній формі. Можливо закон записати також в диференціальній формі. Використовуючи формулу Стокса, отримуємо:

$$\oint_L \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_S \text{rot} \bar{H} \cdot d\bar{S}. \quad (4.2)$$

Тоді з рівнянь (4.1) та (4.2) одержуємо

$$\int_S \text{rot} \bar{H} \cdot d\bar{S} = \int_S \bar{j} \cdot d\bar{S}. \quad (4.3)$$

Контур L та поверхня S було обрано довільно. Тому з рівняння (4.3) слідує, що підінтегральні функції також повинні бути рівними:

$$\text{rot} \bar{H} = \bar{j}. \quad (4.4)$$

Максвелл запропонував, щоб уникнути парадоксу залежності вектора \bar{H} від положення поверхні S при незмінному контуру L в непровідних середовищах та змінних полів, в правій частині цього рівняння, справедливого для струмів провідності та провідних середовищ, додати струм зміщення $\bar{j}_{zm} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \epsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$. Ми пам'ятаємо, що струм зміщення існує в непровідних середовищах та у випадку змінних в часі полів.

Таким чином, Максвелл узагальнив закон повного струму, додавши струм зміщення $\oint_L \bar{H} \cdot d\bar{l} = I + I_{zm}$, $I_{zm} = \int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{S}$, та записав його у вигляді

$$\text{rot} \bar{H} = \bar{j} + \bar{j}_{zm} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}. \quad (4.5)$$

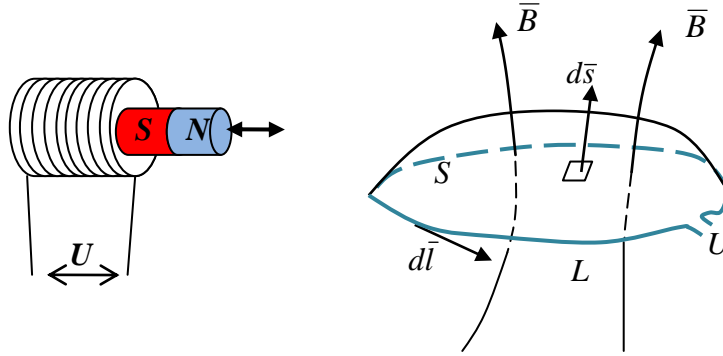
Узагальнення, зроблене Максвеллом, полягає у тому, що Максвелл поширив закон повного струму Ампера на випадок провідних та непровідних середовищ та на випадок змінних полів. Він встановив зв'язок між електричним та магнітним полями: змінне в часі електричне поле викликає появу струмів зміщення, що спричиняє появу змінного в просторі магнітного поля.

4.2 Закон електромагнітної індукції Фарадея

В 30-х роках 19 століття англійський фізик Фарадей досліджував взаємодію електричних струмів та магнітного поля. Він експериментально встановив, що при переміщенні постійного магніту всередині котушки з провідника на кінцях провідника з'являється різниця потенціалів (електрична напруга) U . Так Фарадей відкрив свій закон електромагнітної індукції.

В середовищі розташуємо контур L з провідника, елемент цього контуру позначимо $d\vec{l}$. На контур спирається гладка поверхня S , на якій знаходиться елементарна площадка $d\vec{s}$.

Через поверхню S проходять силові лінії вектору індукції магнітного поля \vec{B} .



Закон електромагнітної індукції формулюється так: циркуляція вектора \vec{E} по контуру L дорівнює зі зворотнім знаком швидкості зміни магнітного потоку Φ , що пронизує цей контур:

$$U = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}. \quad (4.6)$$

У цьому виразі було враховано, що магнітний потік $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$.

На основі цього рівняння Максвелл сформулював своє друге рівняння в інтегральній формі:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}. \quad (4.7)$$

Якщо використати формулу Стокса $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{s}$, та прирівняти підінтегральні вирази, то отримуємо друге рівняння Максвелла у диференціальній формі:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (4.8)$$

Узагальнення, зроблене Максвеллом, полягає у тому, що Максвелл поширив закон електромагнітної індукції на всі, не обов'язково провідні контури L .

4.3. Рівняння Максвелла у диференціальній та інтегральній формах.

4.3.1 Рівняння Максвелла у диференціальній формі.

Система Основних Диференціальних Рівнянь (СОДР) включає в себе звичайно шість рівнянь, іноді до неї можуть додавати ще деякі рівняння. СОДР – це математичне формулювання основних закономірностей електромагнітного поля.

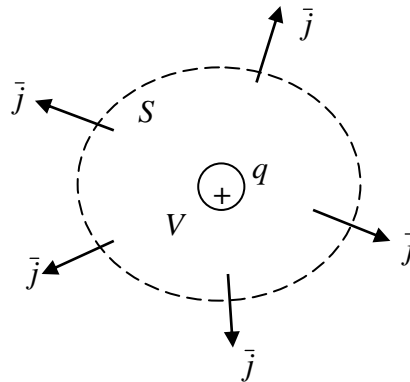
Перше та друге рівняння було розглянуто віще.

$$\text{Перше рівняння } \text{rot}\bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial\bar{D}}{\partial t}. \quad (4.9)$$

$$\text{Друге рівняння } \text{rot}\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}. \quad (4.10)$$

4.3.2 Два наступних рівняння часто називають рівняннями для дивергенцій векторів \bar{D} та \bar{B} . Їх можливо отримати із першого та другого рівнянь СОДР, із закону збереження заряду у диференціальній формі, або із закону Гауса.

Спочатку отримаємо рівняння для закону збереження заряду у диференціальній формі.



Уявимо, що у нас є позитивний електричний заряд q в об'ємі V . Проведемо навкруги нього замкнену поверхню S . Припустимо, що кількість заряду з часом зменшується, що супроводжується струмом

$$I = -\frac{\partial q}{\partial t}.$$

Знак "-" стоїть тому, що позитивному струму відповідає зменшення заряду в об'ємі V .

$$\text{Якщо використати зв'язок між кількістю заряду та його густиною } q = \int_V \rho dV,$$

отримаємо:

$$I = -\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (4.11)$$

Далі використаємо відомий вираз для співвідношення струму через поверхню S та густиною струму в точках поверхні $I = \int_S \bar{j} \cdot d\bar{S}$.

За допомогою формули Остроградського – Гауса перетворимо цей вираз:

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{j} \cdot dV. \quad (4.12)$$

Прирівняємо вирази (4.11) та (4.12):

$$\int_V \operatorname{div} \vec{j} \cdot dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

де прирівняємо підінтегральні вирази та одержимо кінцеву формулу:

$$\operatorname{div} \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (4.13)$$

Це і є закон збереження заряду у диференціальній формі. Він має дуже простий фізичний зміст: розходження вектора густини електричного струму дорівнює швидкості зменшення густини електричного заряду в цій точці. Скористуємося цим законом для отримання формули для дивергенції вектору \vec{D} .

В першому рівнянні Максвелла $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ візьмемо дивергенцію від правої та лівої частини:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \equiv 0.$$

Ми використали відому тотожність $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} \equiv 0$ для любого вектора \vec{a} .

$$\text{Звідси одержимо: } \operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0.$$

$$\text{Підставимо сюди вираз (4.13) та одержимо: } - \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0,$$

$$\text{Змінимо місцями операції диференціювання по часу та простору: } \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} = \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

$$\text{або } \operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (4.14)$$

Це рівняння часто називають третім рівнянням Максвелла або рівнянням для дивергенції вектора \vec{D} .

4.3.3 Рівняння для дивергенції вектора \vec{B} отримаємо із другого рівняння Максвелла $\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, де візьмемо дивергенцію від правої та лівої частини:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{div} \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \equiv 0,$$

$$\text{звідки } \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

або $div\bar{B} = const$.

З фізичних міркувань зрозуміло, що магнітне поле не може існувати нескінченно довго, був час, коли поля не було. Таким чином одержуємо

$$div\bar{B} = 0. \quad (4.15)$$

Це четверте рівняння Максвелла або рівняння для дивергенції вектора \bar{B} .

4.3.4 В СОДР часто включають закон збереження заряду:

$$div\bar{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}. \quad (4.16)$$

4.3.5 До СОДР також часто включають матеріальні рівняння та закон Ома у диференційній формі:

$$\bar{D} = \varepsilon_a \bar{E},$$

$$\bar{B} = \mu_a \bar{H},$$

$$\bar{j} = \sigma \bar{E}.$$

4.3.6 Що потрібно знати про СОДР Максвелла:

- всі величини електромагнітного поля, що входять до рівнянь, являються функціями координат точки спостереження (x, y, z) та часу t. Робимо припущення, що середовища нерухомі та параметри середовища в часі не змінюються: $\varepsilon, \mu, \sigma = const$;

- рівняння СОДР неможливо вивести з інших, більш простих рівнянь. Вони являються узагальненнями експериментальних законів електромагнітних явищ;

- це повна система рівнянь. В кожному конкретному випадку при заданих джерелах поля, параметрах середовищ, значеннях поля в початковий момент часу можливо знайти вектори поля в кожній точці простору та у будь-який момент часу;

- СОДР правильно відображає зв'язки між величинами, що входять до неї, в регулярних точках простору, тобто там, де параметри ε, μ, σ змінюються безперервно (де можливо диференціювання по координатам простору) та не залежать від часу;

- шляхом розв'язання СОДР можливо встановити нові властивості електромагнітного поля. Із СОДР в окремих випадках походять більш прості закономірності;

- рівняння СОДР – векторні. Кожне з них розбивається на кілька скалярних.

Наприклад, в прямокутній системі координат перше рівняння $rot\bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial\bar{D}}{\partial t}$ розбивається

на три (для x-, y- та z-складових лівої та правої частини рівняння):

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j_y + \frac{\partial D_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}; \end{cases}$$

- електричне та магнітне поля тісно пов'язані одне з іншим. Зміна одного в часі призводить до зміни другого в просторі. Незалежність існування їх можливо тільки в статиці;

- рівняння СОДР – лінійні. При їх розв'язанні можливо використовувати принцип суперпозиції: поле від кількох джерел дорівнює сумі полів від кожного джерела.

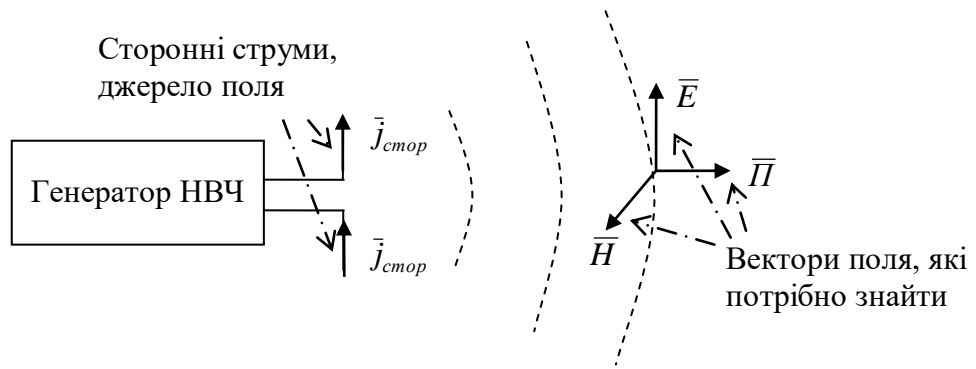
4.4 Рівняння Максвелла в інтегральній формі

Диференційна форма	Інтегральна форма	Назва закону
$\text{rot} \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$	$\oint_L \bar{H} \cdot d\bar{l} = I + I_{zm}$	Закон Ампера повного струму
$\text{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$	$\oint_L \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$	Закон Фарадея електромагнітної індукції
$\text{div} \bar{D} = \rho$	$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = \int_V \rho dV = q$	Закон Гауса
$\text{div} \bar{B} = 0$	$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0$	Закон про відсутність магнітних зарядів
$\text{div} \bar{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$	$I = -\frac{\partial q}{\partial t}$	Закон збереження електричного заряду

Рівняння Максвелла в інтегральній формі мають більш простий фізичний зміст. Вони можуть застосовуватися в усіх точках, а не тільки в регулярних. Їх можливо застосовувати на границях розділу середовищ, де не існують похідні функції по координатах простору і де не існують ротори та дивергенції векторів.

4.5 Поняття про сторонні заряди та струми

Стороннім струмом називають струм провідності, який являється джерелом електромагнітного поля, на відміну від струму провідності, що наводиться полем в середовищі та призводить до теплових втрат.



Сторонні струми $\vec{j}_{стор}$ та заряди $\rho_{стор}$ повинні бути відомою функцією координат точки спостереження.

Сторонні струми вводяться в перше рівняння Максвелла:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{стор}.$$

Сторонні заряди входять в рівняння для дивергенції вектора \vec{D} :

$$\text{div}\vec{D} = \rho + \rho_{стор}.$$

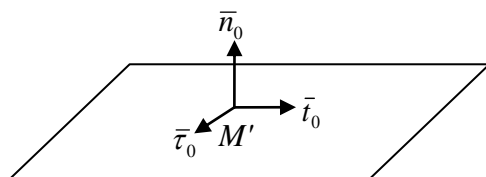
4.6 Класичні граничні умови до рівнянь Максвелла

На практиці в області з електромагнітним полем може знаходитись кілька середовищ з різними електричними параметрами ϵ, μ, σ .

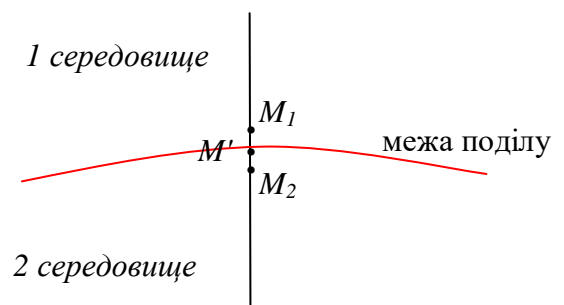
Поверхня, що відокремлює середовище з одними значеннями параметрів ϵ, μ, σ від іншого середовища, має назву межі поділу.

В точках на межі поділу не можна використовувати СОДР, тому що на межі всі вектори змінюються стрибком і похідні $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ не існують.

У цьому випадку користуються граничними умовами – це співвідношення, що зв'язують складові вектор поля по різні сторони від межі поділу на нескінченно близькій відстані один від одного.



\vec{n}_0 - нормаль до межі поділу,
 \vec{t}_0, \vec{t}_0' - дотичні до межі поділу.

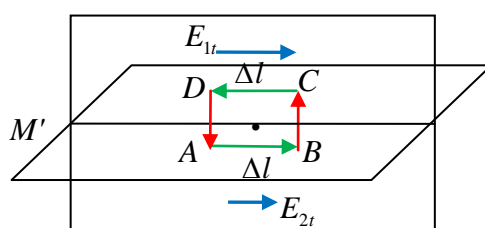


Розглянемо дотичні та нормальні складові векторів до межі поділу в точках M_1 та M_2 . Ці точки нескінченно близькі до точки M' на межі.

Вирази для дотичних та нормальних складові векторів отримують із першого та другого рівнянь Максвелла в інтегральній формі, тому що там немає похідних по координатах x , y та z .

Знайдемо граничні умови для дотичних складових вектора \vec{E} . Для цього скористуємося другим рівнянням Максвелла в інтегральній формі: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \rightarrow 0$.

Побудуємо контур ABCD навколо точки M' , як показано на рисунку. Довжини відрізків AB та CD однакові та дорівнюють Δl .



Будемо зменшувати відрізки $BC \rightarrow 0$ та $DA \rightarrow 0$. Площа контуру ABCD при цьому буде наближатись до нуля, тому потік вектора \vec{B} через контур ABCD також буде наближатись до нуля. Згідно з другим рівнянням Максвелла, циркуляція вектора \vec{E} по контуру ABCD також буде наближатись до нуля.

Знайдемо $\oint_{L=ABCD} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_{BC} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_{CD} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_{DA} \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Добутки вектора \vec{E} на довжину відрізків $BC \rightarrow 0$ та $DA \rightarrow 0$ будуть близькі до нуля. Залишились добутки: $E_{2t} \cdot AB - E_{1t} \cdot CD \rightarrow 0$. Знак "-" стоїть тому що напрям вектора \vec{E}_1 та напрям обходу контуру в першому середовищі протилежні.

Так як $AB = CD$, $\oint_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_{CD} \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow 0$, то отримуємо першу граничну умову:

$$E_{2t} = E_{1t}. \quad (4.17)$$

Висновок: дотичні складові вектора \vec{E} при переході через межу поділу середовищ змінюються безперервно.

У випадку, коли друге середовище – ідеальний провідник, у ньому електричне поле відсутнє, $E_{2t} = 0$. Тому на межі з ідеальним провідником $E_{1t} = 0$. Це означає, що на межі з добре провідними матеріалами, якими є метали, вектор \vec{E} обов'язково перпендикулярний до поверхні.

Аналогічно із першого рівняння Максвелла в інтегральній формі отримуємо граничні умови для дотичних складових вектора \vec{H} :

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = j_{\text{новт}}. \quad (4.18)$$

У випадку, коли друге середовище – ідеальний провідник, $H_{2\tau} = 0$. Тому на межі з ідеальним провідником $H_{1\tau} = j_{\text{новт}}$. Це означає, що на межі з добре провідними матеріалами, вектор \vec{H} має дотичну складову, рівну густині поверхневих струмів.

Значно рідше використовують граничні умови для нормальних складових дивергенцій векторів:

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_{\text{новт}}, \quad (4.19)$$

$$B_{1n} - B_{2n} = 0. \quad (4.20)$$

5. Рівняння Максвелла для монохроматичного поля

5.1. Гармонійні поля. Комплексний вектор та комплексна амплітуда вектора.

Звичайно в електродинаміці ставиться така задача: задані джерела поля, параметри середовищ. Потрібно знайти вектори електромагнітного поля.

Джерела поля задаються у вигляді сторонніх струмів $\vec{j}_{\text{стор}}(M', t)$ (або зарядів), які є функцією від координат точки спостереження $M'(x, y, z)$ та часу t . Параметри середовища також залежать від координат точки спостереження $M'(x, y, z)$. Отже, вектора поля також залежать від чотирьох аргументів: трьох координат x, y, z та часу t .

У загальному випадку знайти рішення системи рівнянь Максвелла при чотирьох аргументах дуже важко. Доводиться вводити ті чи інші спрощення.

Одне з таких спрощень – використання метода комплексних амплітуд. Як буде показано нижче, використання цього методу дозволить позбавитись від одного з аргументів – від часу t . Використання цього методу можливо у випадку полів, що змінюються за гармонічним (синусоїдальним) законом. Проте реальні сигнали за допомогою спектрального аналізу можливо представити у вигляді суми кількох гармонічних складових.

Отже, вважаємо, що проекції векторів поля змінюються за гармонічним законом:

$$U(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi),$$

де U_m - амплітуда,

$$\omega = 2\pi f \text{ - кругова частота,}$$

φ - початкова фаза.

Величині, що змінюється за гармонічним законом, ставимо у відповідність її комплексне відображення, додаючи уявну складову $iU_m \sin(\omega t + \varphi)$:

$$U(t) \rightarrow \dot{U}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) + iU_m \sin(\omega t + \varphi) = U_m e^{i(\omega t + \varphi)} = U_m e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \dot{U}_m e^{i\omega t},$$

де $\dot{U}_m = U_m e^{i\varphi}$ - комплексна амплітуда.

Вектор, що має три складові, буде мати комплексне відображення з трьох комплексних складових:

$$\begin{aligned} \vec{\dot{E}}(M', t) &= \dot{E}_x(M', t)\bar{x}_0 + \dot{E}_y(M', t)\bar{y}_0 + \dot{E}_z(M', t)z_0 = \\ &= \dot{E}_{mx}(M')e^{i\omega t}\bar{x}_0 + \dot{E}_{my}(M')e^{i\omega t}\bar{y}_0 + \dot{E}_{mz}(M')e^{i\omega t}z_0 = \\ &= [\dot{E}_{mx}(M')\bar{x}_0 + \dot{E}_{my}(M')\bar{y}_0 + \dot{E}_{mz}(M')z_0]e^{i\omega t} = \vec{\dot{E}}_m(M')e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

де $\dot{\vec{E}}_m(M')$ - має три складових з комплексних амплітуд та зветься комплексною амплітудою вектора.

Як перейти у зворотному напрямку, від комплексної амплітуди до реального сигналу, після того, як в результаті розв'язання рівнянь ми отримали потрібну комплексну амплітуду? Потрібно буде знайдену комплексну амплітуду помножити на $e^{i\omega t}$ та від результату взяти реальну частину:

$$\dot{U}_m \rightarrow \dot{U}_m \cdot e^{i\omega t} \rightarrow \text{Re}(\dot{U}_m \cdot e^{i\omega t}) = \text{Re}(U_m e^{i\varphi} e^{i\omega t}) = \text{Re}[U_m \cos(\omega t + \varphi) + iU_m \sin(\omega t + \varphi)] = U_m \cos(\omega t + \varphi) = U(t).$$

5.2. Система рівнянь Максвелла в комплексному вигляді

Зробимо важливі попередні зауваження:

а) якщо складова вектора змінюється за гармонічним законом $U(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$,

то похідна від її комплексного відображення $\dot{U}(t) = \dot{U}_m \cdot e^{i\omega t}$ дорівнює

$$\frac{\partial \dot{U}(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\dot{U}_m \cdot e^{i\omega t}) = i\omega \dot{U}_m \cdot e^{i\omega t},$$

тобто для диференціювання необхідно помножити комплексне відображення функції на $i\omega$;

б) щільність струмів \vec{j} представимо у вигляді суми струму наведеного (провідності) $\sigma \vec{E}$ та стороннього $\vec{j}_{\text{стор}}$: $\vec{j} = \sigma \vec{E} + \vec{j}_{\text{стор}}$;

в) припустимо, що параметри середовищ не змінюються в часі, $\varepsilon, \mu, \sigma = \text{const}$, тоді

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

5.2.1. Перше рівняння Максвелла у комплексному вигляді

В перше рівняння Максвелла

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma \vec{E} + \vec{j}_{\text{стор}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

підставимо комплексні відображення векторів:

$$\vec{H}(t) \rightarrow \dot{\vec{H}}_m e^{i\omega t}, \quad \vec{E}(t) \rightarrow \dot{\vec{E}}_m e^{i\omega t}, \quad \vec{j}_{\text{стор}}(t) \rightarrow \dot{\vec{j}}_{\text{стор}} e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \rightarrow i\omega \dot{\vec{D}}_m e^{i\omega t} = i\omega \varepsilon \dot{\vec{E}}_m e^{i\omega t},$$

отримуємо

$$\text{rot}(\dot{\vec{H}}_m e^{i\omega t}) = \sigma \dot{\vec{E}}_m e^{i\omega t} + \dot{\vec{j}}_{\text{стор}} e^{i\omega t} + i\omega \varepsilon \dot{\vec{E}}_m e^{i\omega t}.$$

Об'єднуючи складові з $\dot{\vec{E}}_m$ та скорочуючи праву та ліву частини рівняння на $e^{i\omega t}$, отримуємо

$$\operatorname{rot}(\dot{\vec{H}}_m) = (i\omega\varepsilon + \sigma)\dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_{\text{сторм}} = i\omega\left(\varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega}\right)\dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_{\text{сторм}}.$$

Якщо позначити $\varepsilon_\kappa = \varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon\left(1 - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$, то одержимо кінцеву формулу для

першого рівняння Максвелла у комплексному вигляді:

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{H}}_m = i\omega\varepsilon_\kappa\dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_{\text{сторм}} \quad (5.1)$$

де $\varepsilon_\kappa = \varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon\left(1 - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$ - комплексна діелектрична проникність,

$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ - абсолютна діелектрична проникність середовища.

Як відомо, вираз $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ дорівнює відношенню амплітуд струмів провідності та

зміщення. Це відношення має назву тангенсу кута діелектричних втрат $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \operatorname{tg}\delta$ та

характеризує втрати на струми провідності у діелектрику. У якісних високочастотних

діелектриках (поліетилен, фторопласт, полістирол) $\operatorname{tg}\delta = 10^{-4} \dots 10^{-3}$, у низькоякісних

діелектриках (папір, полівінілхлорид) $\operatorname{tg}\delta = 10^{-3} \dots 10^{-2}$. Чим більше струми провідності у

діелектрику, тим більша частина енергії поля витрачається на нагрів середовища.

Наявність уявної одиниці i у виразі для комплексної діелектричної проникності показує,

що струми провідності та струми зміщення мають фазовий зсув $\frac{\pi}{2}$ (90°).

Якщо враховувати втрати на орієнтаційну (дипольну) поляризацію, пов'язану з

переорієнтацією молекул та з відповідним запізненням поляризації (зсувом фаз), то у

загальному випадку комплексна діелектрична проникність, що має дійсну та уявну

частини, може бути записана у вигляді:

$$\varepsilon_\kappa = \varepsilon_0\left(\varepsilon' - i\varepsilon''\right) = \varepsilon_0\left[\varepsilon' - i\left(\varepsilon_p'' + \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)\right],$$

де ε_p'' - вклад в уявну частину діелектричної провідності, обумовлений втратами

на поляризацію з запізненням (дипольну поляризацію).

5.2.2. Друге рівняння Максвелла у комплексному вигляді

В друге рівняння Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

підставимо комплексні відображення векторів:

$$\vec{E}(t) \rightarrow \dot{\vec{E}}_m e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \rightarrow i\omega\dot{\vec{B}}_m e^{i\omega t} = i\omega\mu\dot{\vec{H}}_m e^{i\omega t},$$

отримуємо

$$\operatorname{rot}(\dot{\vec{E}}_m e^{i\omega t}) = -i\omega\mu\dot{\vec{H}}_m e^{i\omega t}.$$

Скорочуючи праву та ліву частини рівняння на $e^{i\omega t}$, одержимо друге рівняння Максвелла у комплексному вигляді

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{E}}_m = -i\omega\mu\dot{\vec{H}}_m. \quad (5.2)$$

5.2.3. Інші рівняння Максвелла у комплексному вигляді

Аналогічно можливо записати інші рівняння системи рівнянь Максвелла :

$$\operatorname{div}\dot{\vec{E}}_m = \frac{\dot{\rho}_m}{\varepsilon},$$

$$\operatorname{div}\dot{\vec{H}}_m = 0,$$

$$\operatorname{div}\dot{\vec{j}}_m = -i\omega\dot{\rho}_m,$$

$$\dot{\vec{D}}_m = \varepsilon\dot{\vec{E}}_m,$$

$$\dot{\vec{B}}_m = \mu\dot{\vec{H}}_m,$$

$$\dot{\vec{j}}_m = \sigma\dot{\vec{E}}_m.$$

Висновок: система рівнянь Максвелла у комплексному вигляді містить у собі функції тільки трьох аргументів (x, y, z) і тому значно простіше.

5.3. Хвильові рівняння для векторів електричного та магнітного поля

Постановка задачі: розв'язати систему рівнянь Максвелла відносно векторів \vec{E} та \vec{H} .

Зробимо деякі припущення та обмеження, які дозволять спростити знаходження формул для векторів \vec{E} та \vec{H} :

а) параметри середовищ не змінюються в часі, $\varepsilon, \mu, \sigma = const$;

б) в середовищі немає вільних зарядів, $\dot{\rho}_m = 0$.

5.3.1. Хвильове рівняння для вектору \vec{E}

Візьмемо операцію ротора від лівої та правої частини другого рівняння Максвелла:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\vec{E}}_m = \operatorname{rot}(-i\omega\mu\dot{\vec{H}}_m).$$

Тому що $\mu = const$, цю величину можливо винести за знак ротора.

Відома наступна тотожність з векторної алгебри: $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \nabla^2\vec{a}$. Тому розпишемо так ліву частину рівняння:

$$\text{grad div } \dot{\vec{E}}_m - \nabla^2 \dot{\vec{E}}_m = -i\omega\mu \text{rot} \dot{\vec{H}}_m.$$

Підставимо в цей вираз перше рівняння Максвелла $\text{rot} \dot{\vec{H}}_m = i\omega\epsilon_\kappa \dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_{\text{сторон}}$:

$$\text{grad div } \dot{\vec{E}}_m - \nabla^2 \dot{\vec{E}}_m = -i\omega\mu \left(i\omega\epsilon_\kappa \dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_{\text{сторон}} \right).$$

Згадаємо, що $\text{div} \dot{\vec{E}}_m = \frac{\dot{\rho}_m}{\epsilon}$, а з урахуванням зроблених припущень

$$(\dot{\rho}_m = 0) \text{div} \dot{\vec{E}}_m = 0.$$

$$\text{Тому } -\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m = -i\omega\mu \left(i\omega\epsilon_\kappa \dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_{\text{сторон}} \right) = \omega^2 \epsilon_\kappa \mu \dot{\vec{E}}_m - i\omega\mu \dot{\vec{j}}_{\text{сторон}},$$

Остаточно одержуємо хвильове рівняння для вектора \vec{E} :

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + \omega^2 \epsilon_\kappa \mu \dot{\vec{E}}_m = i\omega\mu \dot{\vec{j}}_{\text{сторон}}.$$

Позначаючи $\omega^2 \epsilon_\kappa \mu = k^2$, прийдемо до рівняння

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + k^2 \dot{\vec{E}}_m = i\omega\mu \dot{\vec{j}}_{\text{сторон}}. \quad (5.3)$$

Це неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку, відоме як векторне хвильове неоднорідне рівняння Гельмгольца. Параметр $k = \sqrt{\omega^2 \epsilon_\kappa \mu}$ має назву хвильового числа. Як ми побачимо пізніше, рішення цього рівняння описують хвилі, що розповсюджуються у середовищі.

У випадку відсутності сторонніх струмів $\dot{\vec{j}}_{\text{сторон}} = 0$ одержимо однорідне рівняння Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + k^2 \dot{\vec{E}}_m = 0. \quad (5.4)$$

Рівняння (4) є векторним. Воно представляє собою систему рівнянь з трьох скалярних рівнянь відносно складових \dot{E}_{xm} , \dot{E}_{ym} та \dot{E}_{zm} по координатах (x, y, z) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \dot{E}_{xm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{xm}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{xm}}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_{xm} = 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_{ym}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{ym}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{ym}}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_{ym} = 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_{zm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{zm}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{zm}}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_{zm} = 0. \end{cases} \quad \text{або записується так: } \begin{cases} \nabla^2 \dot{E}_{xm} + k^2 \dot{E}_{xm} = 0, \\ \nabla^2 \dot{E}_{ym} + k^2 \dot{E}_{ym} = 0, \\ \nabla^2 \dot{E}_{zm} + k^2 \dot{E}_{zm} = 0. \end{cases}$$

Після того, як векторна функція $\dot{\vec{E}}_m$ знайдена, функцію $\dot{\vec{H}}_m$ простіше всього знайти за допомогою другого рівняння Максвелла у комплексному вигляді:

$$\dot{\vec{H}}_m = -\frac{1}{i\omega\mu} \text{rot} \dot{\vec{E}}_m.$$

5.3.2. Хвильове рівняння для вектору \bar{H}

Візьмемо операцію ротора від лівої та правої частини першого рівняння Максвелла:

$$\text{rot rot } \dot{\bar{H}}_m = \text{rot} \left(i\omega \epsilon_\kappa \dot{\bar{E}}_m + \dot{\bar{j}}_{\text{стор}} \right).$$

Аналогічно вектору \bar{E} , послідовно одержимо:

$$\text{grad div } \dot{\bar{H}}_m - \nabla^2 \dot{\bar{H}}_m = i\omega \epsilon_\kappa \left(\text{rot } \dot{\bar{E}}_m \right) + \text{rot } \dot{\bar{j}}_{\text{стор}}.$$

Враховуючи, що $\text{div } \dot{\bar{H}}_m = 0$ (четверте рівняння системи рівнянь) та $\text{rot } \dot{\bar{E}}_m = -i\omega \mu \dot{\bar{H}}_m$ (друге рівняння), отримуємо неоднорідне хвильове рівняння для вектора \bar{H} :

$$\nabla^2 \dot{\bar{H}}_m + k^2 \dot{\bar{H}}_m = -\text{rot } \dot{\bar{j}}_{\text{стор}}. \quad (5.5)$$

У випадку відсутності сторонніх струмів $\dot{\bar{j}}_{\text{стор}} = 0$ одержимо однорідне рівняння Гельмгольца для вектора \bar{H}

$$\nabla^2 \dot{\bar{H}}_m + k^2 \dot{\bar{H}}_m = 0. \quad (5.6)$$

Висновок: хвильові рівняння широко застосовуються для розв'язання практичних задач. Для цього звичайно робляться припущення відносно характеристик поля, які дозволять спростити розв'язання хвильових рівнянь.

5.3. Рівняння енергетичного балансу електромагнітного поля

5.3.1. Баланс енергії електромагнітного поля

Ми можемо виявляти електромагнітне поле завдяки його дії на предмети, що нас оточують. Наприклад: нагрів різних речей у електромагнітному полі, рух роторів електродвигунів, передача сигналів електромагнітними хвилями.

Під час взаємодії з предметами енергія електромагнітного поля перетворюється в інші види: теплова, механічна, хімічна.

Потрібно встановити зв'язок між векторами електромагнітного поля та його енергією.

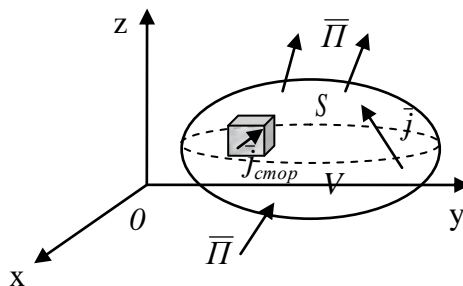


Рис. 5.1. Шляхи зміни енергії в об'ємі V

Розглянемо об'єм V, що обмежений поверхнею S.

Припустимо, що в об'ємі V є енергія поля W. Швидкість зміни енергії – потужність $\frac{\partial W}{\partial t}$. Ця енергія може змінюватися, перетворюючись різними способами:

а) в теплову, потужністю $P_{\text{тепл}}$,

б) приходити від джерел поля внаслідок дії сторонніх струмів $\vec{j}_{\text{стор}}$, позначимо цю потужність $P_{\text{стор}}$,

в) виходити назовні або приходити усередину через поверхню S.

Інших шляхів зміни енергії в об'ємі V немає.

Позначимо щільність потоку потужності, що проходить через поверхню S, вектором \vec{P} , як це зробив у 1884 році англійський вчений Пойнтінг. Загальна потужність, що проходить через поверхню S, буде $\int_S \vec{P} \cdot d\vec{s}$.

Доведемо це.

Згідно із законом збереження енергії зміна енергії в об'ємі V пов'язана з вказаними потужностями рівнянням:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + P_{\text{тепл}} + P_{\text{стор}} + \int_S \vec{P} \cdot d\vec{s} = 0. \quad (5.7)$$

Це є рівняння балансу енергії в об'ємі V.

Із першого рівняння Максвелла, якщо помножити його ліву та праву частини на \vec{E} :

$$\vec{E} \text{rot} \vec{H} = \vec{E} \sigma \vec{E} + \vec{E} \vec{j}_{\text{стор}} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Із другого рівняння Максвелла, якщо помножити його ліву та праву частини на \vec{H} :

$$\vec{H} \text{rot} \vec{E} = -\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Із другого рівняння віднімемо перше:

$$\vec{H} \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \text{rot} \vec{H} = -\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \sigma \vec{E}^2 + \vec{E} \vec{j}_{\text{стор}}.$$

Згідно з відомою тотожністю $\vec{b} \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \text{rot} \vec{b} = \text{div}[\vec{a}, \vec{b}]$:

$$\text{div}[\vec{E}, \vec{H}] = -\left(\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) - \sigma \vec{E}^2 + \vec{E} \vec{j}_{\text{стор}}.$$

Перенесемо все у ліву частину та проінтегруємо по всьому об'єму V:

$$\int_V \operatorname{div}[\bar{E}, \bar{H}] dV + \int_V \left(\bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) dV + \int_V \sigma \bar{E}^2 dV + \int_V \bar{E} \bar{j}_{\text{сноп}} dV = 0. \quad (5.8)$$

Всі інтеграли мають розмірність потужності.

Розглянемо фізичний зміст інтегралів.

5.3.2. Перший інтеграл $\int_V \operatorname{div}[\bar{E}, \bar{H}] dV$.

За формулою Остроградського-Гаусса $\int_V \operatorname{div}[\bar{E}, \bar{H}] dV = \int_S [\bar{E}, \bar{H}] \cdot d\bar{s}$. Тобто цей

інтеграл – потік якогось вектора $\bar{\Pi} = [\bar{E}, \bar{H}]$ через поверхню S.

5.3.3. Другий інтеграл $\int_V \left(\bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) dV =$

$$= \int_V \left(\frac{1}{2} \frac{\partial(\bar{H}\bar{B})}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\bar{E}\bar{D})}{\partial t} \right) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\bar{H}\bar{B}}{2} + \frac{\bar{E}\bar{D}}{2} \right) dV \quad - \text{це швидкість зміни якийсь}$$

величини, що була запасена в об'ємі V.

5.3.4. Третій інтеграл $\int_V \sigma \bar{E}^2 dV$.

Оберемо об'єм $dV = d\bar{s} \cdot d\bar{l}$ так, що $d\bar{l} \parallel \bar{E}$, $d\bar{s} \perp \bar{E}$.

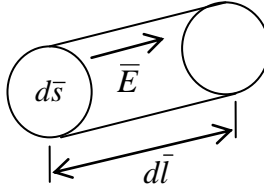


Рис. 5.2. Джоулеві втрати в об'ємі V

$$\text{Тоді можемо записати } \int_V \sigma \bar{E}^2 dV = \int_S \sigma \bar{E} d\bar{s} \cdot \int_L \bar{E} d\bar{l}.$$

Для першого співмножника використовуємо рівняння $\bar{j} = \sigma \bar{E}$ і далі $\int_S \bar{j} d\bar{s} = I$, це

електричний струм провідності, що проходить через поверхню S.

Для другого співмножника $\int_L \bar{E} d\bar{l} = U$, це електрична напруга на відстані $d\bar{l}$ в

електричному полі \bar{E} .

Остаточно отримуємо добуток електричного струму на напругу, що дорівнює потужності джоулевих теплових втрат: $\int_S \sigma \bar{E} d\bar{s} \cdot \int_L \bar{E} d\bar{l} = IU = P_{\text{менл}}$.

5.3.5. Четвертий інтеграл $\int_V \bar{E} \bar{j}_{\text{сноп}} dV$

Аналогічно оберемо об'єм $dV = d\vec{s} \cdot d\vec{l}$ так, що $d\vec{l} \parallel \vec{j}_{стор}$, $d\vec{s} \perp \vec{j}_{стор}$.

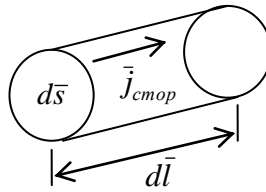


Рис. 5.3. Робота сторонніх струмів

Тоді аналогічно одержимо $\int_V \vec{E} \vec{j}_{стор} dV = \int_S \vec{j}_{стор} d\vec{s} \cdot \int_L \vec{E} d\vec{l} = I_{стор} U = P_{стор}$. Це

потужність, яку джерело поля віддає електричному полю в об'ємі V .

5.3.6. Теорема Пойнтінга

Пойнтінг, порівнюючи формули (7) та (8), зробив висновок, що можливо ототожнювати

$$\int_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{s} = \int_S [\vec{E}, \vec{H}] \cdot d\vec{s}.$$

Інтеграл $\int_V \left(\frac{\vec{H}\vec{B}}{2} + \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} \right) dV = W$ має зміст запасу енергії в об'ємі V .

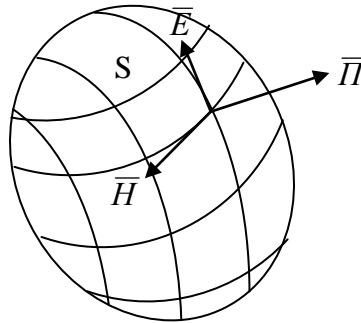


Рис. 5.4. Потужність, що проходить через поверхню S

Пойнтінг сформулював свою теорему: з об'єму V через поверхню S , що його оточує, проходить електромагнітна енергія з потужністю

$$\int_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{s} = \int_S [\vec{E}, \vec{H}] \cdot d\vec{s}.$$

Вектор Пойнтінга $\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}]$ має фізичний зміст густини потоку потужності в точках на поверхні S . Напрямок цього вектора показує напрям поширення енергії, яка може як виходити з об'єму V , так і входити до нього. Питання напрямку поширення, швидкості,

густини енергії у твердих тілах досліджував до Пойнтінга вчений Умов, тому в багатьох наукових джерелах вектор має назву вектора Умова-Пойнтінга.

При використанні метода комплексних амплітуд застосовують комплексний вектор $\bar{P}^* = [\dot{\bar{E}}, \dot{\bar{H}}^*]$,

де $\dot{\bar{H}}^*$ - комплексно-сполучена амплітуда вектора \bar{H} .

5.4. Потенціали електромагнітного поля

При розв'язанні задач електродинаміки іноді зручно вводити допоміжні функції, так звані електродинамічні потенціали, які мають менше складових, ніж вихідні вектори $\dot{\bar{E}}_m$ та $\dot{\bar{H}}_m$. Наприклад, вектори $\dot{\bar{E}}_m$ та $\dot{\bar{H}}_m$ мають $3 + 3 = 6$ складових. Можливо ввести так званий векторний потенціал $\dot{\bar{A}}_m$ (три складових) та скалярний потенціал $\dot{\phi}_m$ (одна складова), загалом чотири складових.

За допомогою рівнянь зв'язку

$$\dot{\bar{H}}_m = \frac{1}{\mu} \text{rot} \dot{\bar{A}}_m,$$

$$\dot{\bar{E}}_m = -i\omega \dot{\bar{A}}_m - \text{grad} \dot{\phi}_m.$$

та з використанням умови калібрування потенціалів Лоренца $\text{div} \dot{\bar{A}}_m + i\omega \epsilon_k \mu \dot{\phi}_m = 0$, з хвильових рівнянь для векторів $\dot{\bar{E}}_m$ (3) та $\dot{\bar{H}}_m$ (5) одержують хвильове рівняння для векторного потенціалу $\dot{\bar{A}}_m$:

$$\nabla^2 \dot{\bar{A}}_m + k^2 \dot{\bar{A}}_m = -\mu \dot{j}_{\text{сторм}}.$$

Розв'язавши це рівняння, одержують формули для вектору $\dot{\bar{A}}_m$. Далі з умови калібрування потенціалів Лоренца знаходять скалярний потенціал $\dot{\phi}_m$, та за допомогою рівнянь зв'язку знаходять вектори $\dot{\bar{E}}_m$ та $\dot{\bar{H}}_m$.

Крім векторного $\dot{\bar{A}}_m$ та скалярного $\dot{\phi}_m$ потенціалів, часто використовують інші електродинамічні потенціали. Це електричний вектор Герца $\dot{\bar{P}}_m^e$ та магнітний вектор Герца $\dot{\bar{P}}_m^h$.

Вектора Герца зручно застосовувати тоді, коли в силу певних причин (наприклад, симетрії поля) вони мають менше складових, ніж вектори $\dot{\bar{E}}_m$ та $\dot{\bar{H}}_m$.

5.5. Теорема про єдинність рішення СОДР

Вивчити та законспектувати матеріал самостійно з літератури:

Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика. Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 2000. – с.64 – 67.

5.6. Принцип перестановочної подвійності

Вивчити та законспектувати матеріал самостійно з літератури:

Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн. Учеб. пособие для вузов по спец. “Радиотехника”. – М.: Высшая школа, 1992. - с.45 - 47.

6. Поняття, що характеризують хвилі. Типи хвиль.

6.1. Поняття хвильового процесу

Проведемо в просторі поверхні так, щоб в усіх їх точках вектори поля мали однакову фазу. Такі поверхні називаються поверхнями рівних фаз. Процес, коли відбувається переміщення поверхні рівних фаз, називається хвилею. Лінії, перпендикулярні до поверхні рівних фаз, називаються променями. Швидкість руху точки з постійною фазою векторів поля називається фазовою швидкістю V_ϕ .

Загальна математична запис хвильового процесу має вигляд

$$U(x,t) = U_m \cos(\omega t - \beta x),$$

де $U(x,t)$ - значення складової вектора в точці з координатою x в момент часу t ,

$\omega t - \beta x = \Phi$ - фаза хвильового процесу,

ω - кругова частота,

β - фазова стала.

Як видно з формули, величина векторів поля залежить як від часу, так і від координати точки спостереження.

6.2. Типи хвиль

Залежно від форми поверхні рівних фаз розрізняють різні типи хвиль. Прості типи – плоскі, сферичні і циліндричні. Хвиля називається плоскою, якщо поверхні рівних фаз утворюють в просторі паралельні площини, як показано на рисунку.

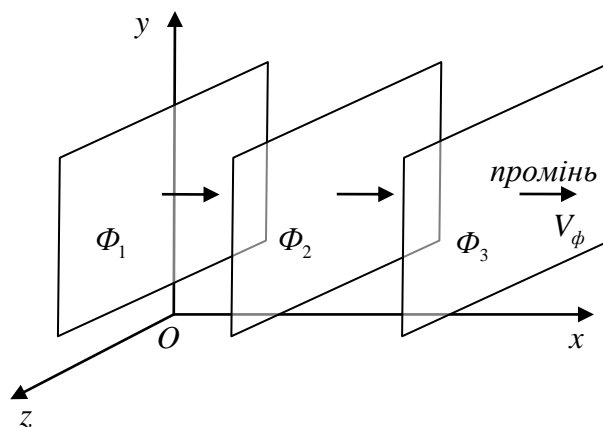


Рис. 6.1. Плоскі хвилі

Постійність фази в площині означає, що у момент часу $t = t_1$ в усіх точках площини вектори поля мають однакову величину Φ_1 і напрям. З перебігом часу напрям і величина векторів змінюється в усіх точках площини однаково (синхронно). В точках простору з іншою координатою x фаза в цей момент часу буде інша (Φ_2, Φ_3)

Циліндричною називається хвиля, у якої поверхні рівних фаз утворюють в просторі ряд коаксіальних циліндрів навколо однієї з координатних осей.

Сферичною хвилею називається хвиля, у якої поверхні рівній фазі утворюють в просторі ряд концентричних сфер навколо фазового центру.

В залежності від орієнтації векторів поля відносно напрямку поширення, хвилі поділяються на хвилі типу Е, Н та Т. В деяких випадках можливі також гібридні хвилі ЕН та НЕ.

Хвилею типу Е називається хвиля, у якої вектор \vec{E} має не рівну нулю проекцію на напрям поширення, а проекція вектору \vec{H} на напрям поширення дорівнює нулю.

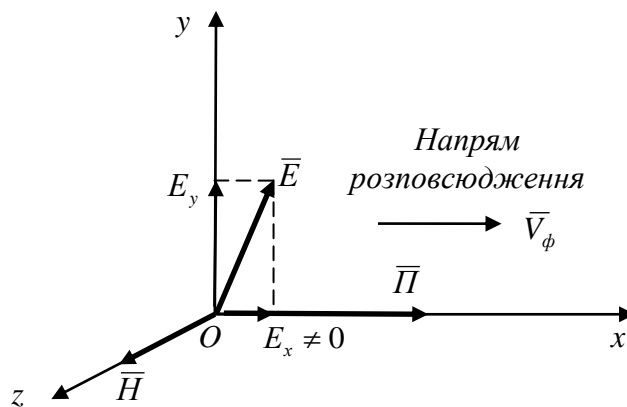


Рис. 6.2. Хвиля типу Е

Хвилею типу Н називається хвиля, у якої вектор \vec{H} має не рівну нулю проекцію на напрям поширення, а проекція вектору \vec{E} на напрям поширення дорівнює нулю. Хвилі типів Е та Н розповсюджуються у прямокутних та круглих металевих хвилеводах.

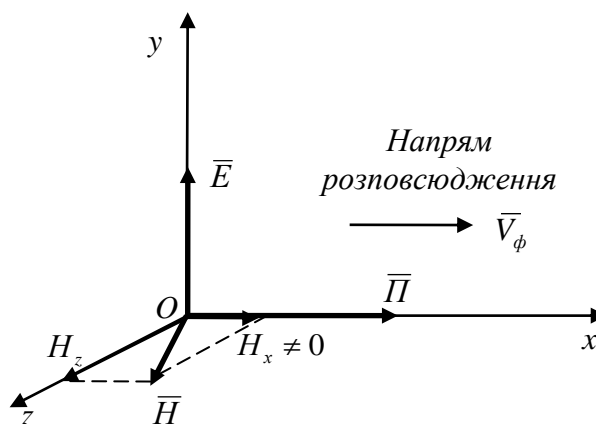


Рис. 6.3. Хвиля типу Н

У хвилі типу Т (іноді має назву TEM) вектори \vec{E} та \vec{H} взаємно перпендикулярні і перпендикулярні напрямку поширення, тобто обидва вектора не мають проекції на напрям поширення. Така хвиля називається поперечною. Хвилі типу Т розповсюджуються у вільному просторі, у коаксіальних та симетричних ліній передачі.

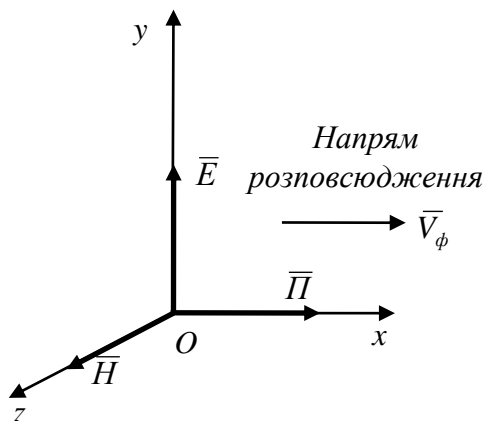


Рис. 6.4. Хвиля типу Т

В хвилях типу HE та EH (гібридних) обидва вектори мають складові, що співпадають з напрямом поширення хвилі. Хвилі типів HE та EH розповсюджуються в оптичних хвилеводах.

6.3. Плоскі хвилі в однорідному ізотропному середовищі.

6.3.1. Послідовність розв'язання хвильових рівнянь для плоскої хвилі

Плоскі хвилі спостерігаються в багатьох лініях передачі (симетричних, коаксіальних), у вільному просторі на великій відстані від антени. Сферичні хвилі — в атмосфері навколо антени, що передає. Циліндричні хвилі — в пристроях СВЧ та в антенній техніці.

Рішення для різних типів хвиль можуть бути отримані як часткові рішення системи основних диференціальних рівнянь (СОДР), що відповідають деяким додатковим умовам. Для вирішення СОДР необхідно коректно сформулювати постановку завдання, математично записати те, що відоме про шукане поле, його джерела і середовище. Завдання по знаходженню векторів ЕМП в однорідному середовищі вирішуються в такій послідовності:

- а) обирається система координат;
- б) в обраній системі координат записуються відомі властивості поля;

в) записуються хвильові рівняння для комплексних амплітуд векторів \vec{E}_m, \vec{H}_m , або для електромагнітних потенціалів $\vec{A}_m, \vec{\phi}_m$ та векторів Герца \vec{P}_m^e, \vec{P}_m^h . Рівняння спрощуються;

г) розв'язують хвильові рівняння та знаходяться вектора поля, робляться висновки.

6.3.2. Постановка задачі

Робимо наступні припущення:

а) в необмеженому однорідному ізотропному середовищі з відомими параметрами ε, μ, σ існує електромагнітне поле з частотою ω ;

б) сторонні струми відсутні, їх щільність $\vec{j}_{стор} = 0$, вільні заряди відсутні $\rho_m = 0$;

в) вектори поля \vec{E}_m, \vec{H}_m залежать тільки від однієї декартової координати точки спостереження x (це означає, що поверхні рівних значень векторів поля – площини yOz).

Потрібно визначити функції $\vec{E}_m(M'), \vec{H}_m(M')$.

6.3.3. Розв'язок системи рівнянь

Обираємо прямокутну декартову систему координат. Поверхня рівних фаз в цій системі координат представляю собою площину, паралельну yOz .

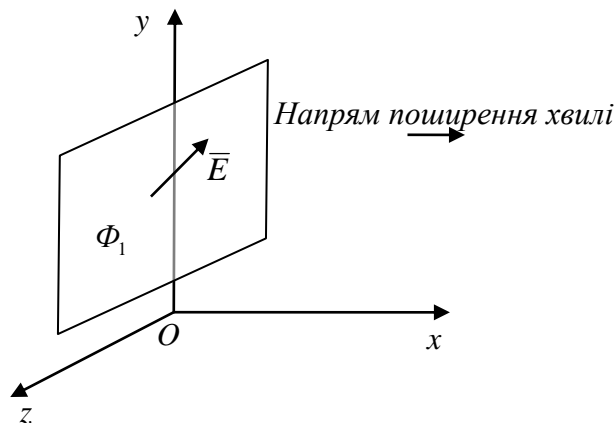


Рис. 6.5. Поширення плоскої хвилі у напрямку координати x .

Оскільки вектора \vec{E}_m, \vec{H}_m залежать тільки від координати x і не залежать від координат y та z , то похідні по координатах y та z дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial \vec{E}_m}{\partial y} = \frac{\partial \vec{E}_m}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \vec{H}_m}{\partial y} = \frac{\partial \vec{H}_m}{\partial z} = 0. \quad (6.1)$$

Використовуємо хвильове рівняння для вектора $\dot{\vec{E}}_m$ (однорідне рівняння, тому що $\dot{J}_{стор} = 0$), а також рівняння для дивергенції вектора $\dot{\vec{E}}_m$ (враховуємо, що $\dot{\rho}_m = 0$):

$$\begin{cases} \nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + k^2 \dot{\vec{E}}_m = 0, \\ \text{div} \dot{\vec{E}}_m = 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

де $k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} = \omega \sqrt{\varepsilon \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right) \mu}$ - комплексна діелектрична проникність

середовища;

ε , μ - абсолютні діелектрична та магнітна проникності середовища.

Перше рівняння є векторним, воно розкладається на три скалярних рівняння. Тому систему (2) запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \dot{E}_{xm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{xm}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{xm}}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_{xm} = 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_{ym}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{ym}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{ym}}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_{ym} = 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_{zm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{zm}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{zm}}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_{zm} = 0, \\ \frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

З рівняння (6.1) виходить, що всі похідні складових вектора $\dot{\vec{E}}_m$ по координатах y та z дорівнюють нулю. Тому з останнього рівняння системи (6.3) одержимо, що

$$\frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial x} = 0, \quad \dot{E}_{mx} = \text{const}.$$

Таким чином, залишиться:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \dot{E}_{xm}}{\partial x^2} + k^2 \dot{E}_{xm} = 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_{ym}}{\partial x^2} + k^2 \dot{E}_{ym} = 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_{zm}}{\partial x^2} + k^2 \dot{E}_{zm} = 0, \\ \frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Підставимо четверте рівняння системи ($\frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 \dot{E}_{mx}}{\partial x^2} = 0$) в перше та

одержимо:

$$0 + k^2 \dot{E}_{xm} = 0, \quad \dot{E}_{xm} = 0.$$

Отже, залишилися два рівняння:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \dot{E}_{my}}{\partial x^2} + k^2 \dot{E}_{my} = 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}}{\partial x^2} + k^2 \dot{E}_{mz} = 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

Це диференційні однорідні рівняння другого порядку. Відомо, що розв'язок таких рівнянь має вигляд:

$$\dot{E}_{my} = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx},$$

$$\dot{E}_{mz} = A_2 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx},$$

де A_1, A_2, B_1, B_2 - довільні постійні,

$$k = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_k \mu} - \text{хвильове число або постійна поширення.}$$

Далі ми скористуємося принципом суперпозиції, та будемо розглядати послідовно окремо два поля. У кожного з них буде тільки одна складова (або $\dot{E}_{my} \neq 0$, або $\dot{E}_{mz} \neq 0$), інша дорівнюватиме нулю. Потім ми розглянемо сумарне поле, що буде створене сумою обох полів з ортогональними складовими \dot{E}_{my} та \dot{E}_{mz} .

Спочатку припустимо $\dot{E}_{my} \neq 0$, $\dot{E}_{mz} = 0$. Тоді $\dot{E}_{my} = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$.

Проаналізуємо це рівняння.

6.4. Властивості плоских хвиль

6.4.1. Постійна поширення

Постійна поширення $k = \omega \sqrt{\varepsilon_k \mu}$ (або хвильове число) є комплексною внаслідок того, що діелектрична проникність $\varepsilon_k = \varepsilon \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)$ комплексна. Тому окремо виділимо реальну та уявну частини постійної поширення:

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_k \mu} = \beta - i\alpha,$$

де β - реальна частина, має назву "фазова стала",

α - уявна частина, має назву "коефіцієнт загасання".

Знак "-" перед α записують, виходячи з фізичних міркувань. Пізніше ми побачимо, що інакше б хвиля під час проходження середовища збільшувала свою амплітуду, фізично що неможливо.

Знайдемо реальну та уявну частини постійної поширення:

$$\omega \sqrt{\left(\varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega} \right) \mu} = \beta - i\alpha.$$

Підносимо в квадрат ліву та праву частини рівняння та прирівнюємо дійсну та уявну частини:

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \varepsilon \mu, \\ \beta \alpha = \frac{\omega \mu \sigma}{2}. \end{cases}$$

Звідки

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2}}, \quad 1/m \\ \beta &= \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{+\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2}}, \quad \text{рад}/m. \end{aligned} \quad (6.6)$$

6.4.2. Фазова стала та фазова швидкість хвилі

Знайдемо вираз для дійсного миттєвого значення складової вектора E_y з її комплексної амплітуди, для чого помножимо комплексну амплітуду на $e^{i\omega t}$ та візьмемо реальну частину з результату:

$$\begin{aligned} E_y(t) &= \text{Re}(\dot{E}_{my} \cdot e^{i\omega t}) = \text{Re}[A_1 e^{ikx} e^{i\omega t} + B_1 e^{-ikx} e^{i\omega t}] = \text{Re}[A_1 e^{i(\beta - \alpha)x} e^{i\omega t} + B_1 e^{-i(\beta - \alpha)x} e^{i\omega t}] = \\ &= \text{Re}[A_1 e^{\alpha x} e^{i(\omega t + \beta x)} + B_1 e^{-\alpha x} e^{i(\omega t - \beta x)}] = A_1 e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x) + B_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Проаналізуємо фазу першого доданка $\Phi_A = \omega t + \beta x$.

При збільшенні часу t координата вектора x , у якій фаза залишиться постійною, повинна зменшуватися. Тільки тоді сума ωt та βx може бути незмінною. Це означає, що перший доданок описує хвилю, поверхня рівних фаз якої поширюється в напрямку зменшення координати x . Таку хвилю ми називаємо зворотною та поки не будемо розглядати.

З виразу фази другого доданка $\Phi_B = \omega t - \beta x$ виходить, що при збільшенні часу t координата вектора x , у якій фаза залишиться постійною, повинна збільшуватися. Таку хвилю ми називаємо прямою.

Координата точки, у якій фаза приймає значення $\Phi_B = \text{const}$, залежить від часу та може бути розрахована за виразом $x = \frac{\omega t - \Phi_B}{\beta}$. Звідси виходить, що при зміні часу

координата точки з постійною фазою рухається зі швидкістю

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\omega t - \Phi_B}{\beta} \right) = \frac{\omega}{\beta}.$$

А це і є фазова швидкість:

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta}. \quad (6.8)$$

Важливе співвідношення між фазовою сталою β та довжиною хвилі λ . Відомо, що довжина хвилі – це відстань, яку проходить хвиля за час одного періоду коливань T . Тому

$$\lambda = V_\phi \cdot T = \frac{\omega}{\beta} \cdot \frac{1}{f} = \frac{2\pi f}{\beta f} = \frac{2\pi}{\beta}, \text{ або } \beta = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Підкреслимо ще раз, що у виразі для комплексної амплітуди $\dot{E}_m = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$ перший доданок відноситься до хвилі, що поширюється у напрямку зменшення координати x , а другий – до хвилі, що поширюється у напрямку збільшення координати x . Аналогічно, наприклад, вираз e^{-ikz} буде відноситися до хвилі, що поширюється у напрямку збільшення координати z .

6.4.3. Коефіцієнт загасання

Як видно з виразу (7), при розповсюдженні амплітуда складової вектору зменшується за експоненціальним законом $e^{-\alpha x}$. Відбувається загасання хвилі з коефіцієнтом α .

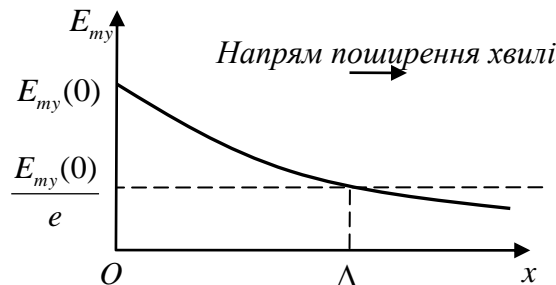


Рис. 6.6. Загасання хвилі

Відстань, на якій амплітуда зменшиться в $e = 2,7182818\dots$ разів, називається глибиною проникнення хвилі у середовище та позначається буквою Δ . З рівняння $e^{-\alpha\Delta} = \frac{1}{e}$ отримуємо

$$\Delta = \frac{1}{\alpha}. \quad (6.9)$$

6.4.4. Знайдемо вектор \dot{H}_m з другого рівняння Максвелла $rot\dot{E}_m = -i\omega\mu\dot{H}_m$. З цього рівняння, враховуючи, що вектор \dot{E}_m має тільки одну складову $\dot{E}_m = B_1 e^{-ikx} \bar{y}_0$, одержимо

$$\dot{\vec{H}}_m = -\frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m = -\frac{1}{i\omega\mu} \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & B_1 e^{-ikx} & 0 \end{vmatrix} = -ik B e^{-ikx} \bar{z}_0. \quad (6.10)$$

Відношення комплексних амплітуд поперечних складових векторів $\dot{\vec{E}}_m$ та $\dot{\vec{H}}_m$ має назву характеристичного опору:

$$Z_c = \frac{\dot{E}_{my}}{\dot{H}_{mz}} = \frac{\omega\mu}{k}. \quad (6.11)$$

У вакуумі характеристичний опір $Z_c = \frac{\omega\mu_0}{\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \text{ Ом}$.

Важливо підкреслити, що у плоскій хвилі вектор $\dot{\vec{H}}_m$ (має одну складову \dot{H}_{mz}) перпендикулярний до вектора $\dot{\vec{E}}_m$ (має одну складову \dot{E}_{my}). Обидві два вектори перпендикулярні до напрямку поширення хвилі вздовж вісі Ox . Тобто плоска хвиля у вільному необмеженому середовищі – хвиля типу Т.

6.4.5. Коефіцієнт загасання та фазова стала у діелектриках та провідниках

Для діелектрика, коли $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1$, вирази (6) можливо спростити:

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \beta \approx \omega\sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Фазова швидкість у діелектрику $V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \text{const}$ не залежить від частоти.

Для добре провідного середовища, коли $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$, з формул (6) одержимо

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}.$$

Фазова швидкість в провідному середовищі, де $V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} = \text{var}$, залежить від частоти.

6.5. Поняття про сферичні та циліндричні хвилі

Сферичні хвилі реально існують у просторі навколо випромінювачів – антен.

Точне розв'язання задачі для сферичних хвиль здійснюється у сферичній системі координат, що приводить до громіздких рівнянь. При цьому, як правило, використовуються електродинамічні потенціали \dot{A}_m та $\dot{\phi}_m$.

В залежності від виду джерела поля $\dot{J}_{\text{сферм}}$ можливе існування хвиль типу Е чи Н.

В так званій далекій зоні, коли відстань до точки спостереження r значно більше довжини хвилі λ і виконується нерівність $2\pi \frac{r}{\lambda} \gg 1$, справедливі такі співвідношення:

$$\begin{cases} \dot{H}_{m\varphi} = C_1 \sin \Theta \frac{e^{-ikr}}{r}, \\ \dot{E}_{m\Theta} = C_2 \sin \Theta \frac{e^{-ikr}}{r}, \\ \dot{E}_{mr} = iC_3 \cos \Theta \frac{e^{-ikr}}{r^2}, \end{cases}$$

де r, Θ, φ - сферичні координати точки спостереження,

C_1, C_2, C_3 - коефіцієнти пропорційності, мають реальне значення.

Висновки:

а) хвиля поширюється у напрямку збільшення координати r , тобто по радіусах від центра координат O . Фаза хвилі збільшується за законом $\Phi = \omega t - \beta r$, поверхні рівних фаз – сфери $r = \text{const}$;

б) вирази описують хвилю типу Е, тому що існує складова $\dot{E}_{mr} \neq 0$;

в) складові $\dot{H}_{m\varphi}$ та $\dot{E}_{m\Theta} \sim \frac{1}{r}$, а складова $\dot{E}_{mr} \sim \frac{1}{r^2}$. Це означає, що на великій відстані r складова $\dot{E}_{mr} \rightarrow 0$, вектори \bar{E}, \bar{H} будуть перпендикулярні напрямку поширення;

г) характеристичний опір $Z_c = \frac{\dot{E}_{m\Theta}}{\dot{H}_{m\varphi}} = \frac{\omega\mu}{k}$, як у плоскій хвилі;

д) фазова швидкість хвилі $V_\phi = \frac{\omega}{\beta}$, як у плоскій хвилі.

6.6. Поляризація електромагнітних хвиль

Відпрацювати це питання самостійно за літературою: Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика., с.170-186.

7. Падіння плоскої хвилі на плоску межу розділу.

7.1. Постановка крайової задачі. Визначення основних понять.

У реальних умовах хвилі поширюються за наявності різних середовищ, які відрізняються електричними параметрами ϵ , μ та σ . В техніці зв'язку дуже часто телекомунікаційні сигнали передаються вздовж меж розділу кількох середовищ, у так званих напрямних системах.

Поверхня, що відокремлює середовище з одними параметрами від середовища з іншими параметрами, називається межею розділу.

Наприклад – межею розділу є поверхня Землі, межі між серцевиною і оболонкою оптичного волокна, між струмопровідною жилою та діелектриком в симетричному або коаксіальному кабелі.

Сьогодні ми вивчатимемо хвилі за наявності простих меж розділу. Розуміння явищ на межі розділу, властивостей хвиль необхідно при вивченні антенної техніці, властивостей різних типів ліній передачі, для розуміння особливостей поширення радіохвиль в атмосфері.

Задачі електродинаміки, що пов'язані з визначенням напруженості поля за наявності меж розділу, називають крайовими задачами електродинаміки.

Постановка крайової задачі: припустимо, що в середовищі з відомими електричними параметрами ϵ , μ , σ знаходиться предмет з параметрами $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$.

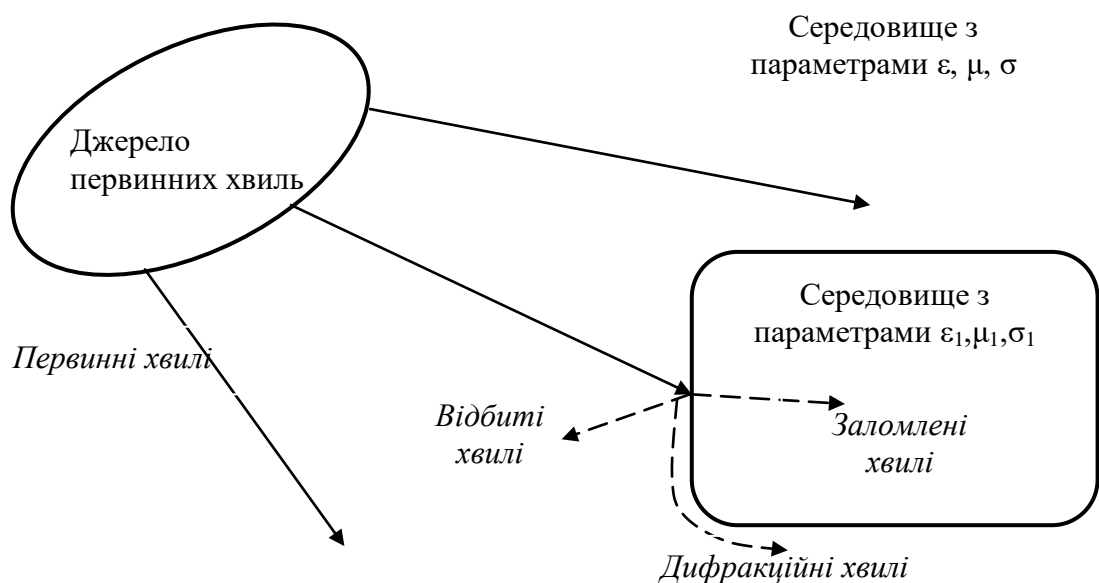


Рис.7.1. Первинні та вторинні (відбиті, заломлені, дифракційні) хвилі

Первинну хвилю збуджує джерело із заданими параметрами – це випромінювач (антена). Внаслідок наявності межі розділу середовищ з'являються вторинні хвилі:

- відбиті хвилі у області прямої видимості;
- заломлені хвилі у середовищі з параметрами $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$;
- дифракційні хвилі у області тіні.

Нам відомо:

- характеристики первинних хвиль;
- електричні параметри середовищ;
- форма межі розділу.

Звичайно крайові задачі розв'язуються за таким планом:

- обирається система координат так, щоб поверхня розділу середовищ співпадала з однією з координатних площин;
- в обраній системі координат записуються відомі умови задачі;
- записуються рівняння граничних умов;
- за допомогою граничних умов визначаються характеристики вторинних хвиль;
- проводиться аналіз отриманих рішень та вивчаються властивості вторинних хвиль.

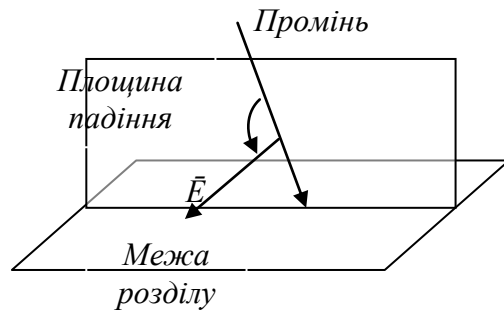
7.2. Рівняння плоскої хвилі, промінь якої не паралельний до координатних осей

Будемо розв'язувати найпростішу задачу: межа розділу плоска, первинна хвиля плоска.

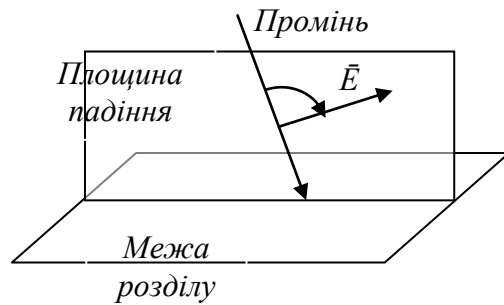
Розрізняють два випадки поляризації падаючої хвилі: горизонтальна та вертикальна поляризація.

Площина падіння – це площина, яка проходить через промінь та перпендикулярна межі розділу. У випадку горизонтальної поляризації вектор \vec{E} перпендикулярний до площини падіння. У випадку вертикальної поляризації вектор \vec{E} лежить у площині падіння (паралельний цій площині).

Потрібно знайти рівняння падаючої хвилі у загальному випадку, коли промінь падаючої хвилі не співпадає з жодною з координатних осей.



Горизонтальна (нормальна) поляризація – вектор \vec{E} перпендикулярний до площини падіння.



Вертикальна (паралельна) поляризація – вектор \vec{E} паралельний до площини падіння.

Рис. 7.2. Горизонтальна та вертикальна поляризації

Раніше було записано рівняння для комплексної амплітуди хвилі, що поширюється у напрямку збільшення координати r :

$$\vec{E}_m(r) = \vec{E}_0 e^{-ikr}. \quad (7.1)$$

Зрозуміло, що фаза та амплітуда вектора \vec{E} залежить від пройденого шляху вздовж координати r . Знайдемо вираз для фази комплексної амплітуди хвилі у випадку, коли хвиля поширюється під кутом до координатних осей.

Для спрощення розглянемо двовірну задачу в координатах xOz (рис.7.3). Позначимо кути між променем хвилі та координатними осями Ox та Oz відповідно α та γ , як показано на рисунку.

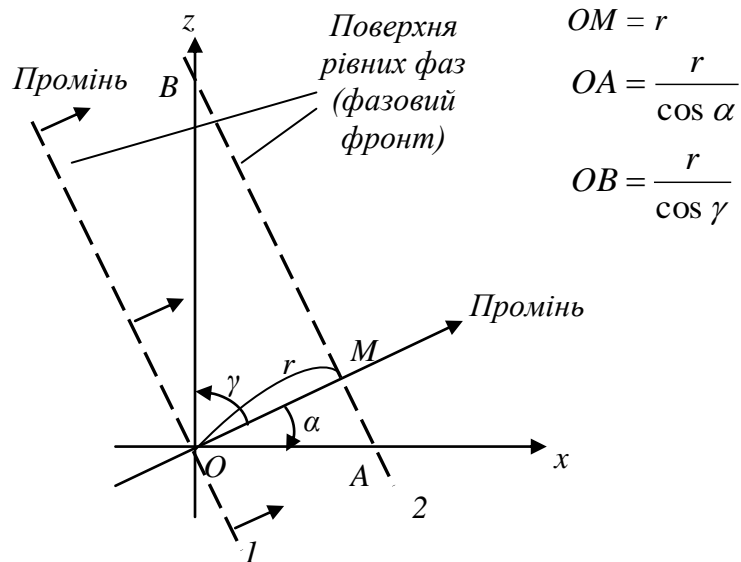


Рис. 7.3. Поширення плоскої хвилі під кутом до координатних осей

Положення фазового фронту, коли він проходив через початок координат, позначено цифрою 1. За деякий час хвиля пройде відстань r та займе положення 2. Потрібно виразити відстань r через відомі кути α та γ .

Загальне рівняння прямої лінії фазового фронту має вигляд

$$ax + cz = d. \quad (7.2)$$

Якщо $x = 0$, то $z = OB = \frac{r}{\cos \gamma}$; $cz = d$; $c = \frac{d}{z} = \frac{d \cos \gamma}{r}$.

Якщо $z = 0$, то $x = OA = \frac{r}{\cos \alpha}$; $ax = d$; $a = \frac{d}{x} = \frac{d \cos \alpha}{r}$.

Підставляючи ці значення в рівняння (7.2), отримуємо

$$\frac{d \cos \alpha}{r} x + \frac{d \cos \gamma}{r} z = d,$$

звідки

$$x \cos \alpha + z \cos \gamma = r.$$

Це так зване рівняння площини фазового фронту через направляючі косинуси. Аналогічно, у тривимірному випадку, якщо нам відомі кути між променем хвилі та координатними осями α , β та γ , ми можемо знайти комплексну амплітуду вектора у точці спостереження з координатами x , y та z :

$$\dot{\vec{E}}_m(r) = \dot{\vec{E}}_{0m} e^{-ikr} = \dot{\vec{E}}_{0m} e^{-ik(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)}. \quad (7.3)$$

де \vec{E}_{0m} - комплексна амплітуда вектора в початку координат.

7.3. Відбиття та заломлення плоских хвиль на межі розділу двох середовищ

7.3.1. Комплексні амплітуди падаючої, відбитої та заломленої хвилі

Нам відомі: параметри середовищ, частота падаючої хвилі, направляючі косинуси падаючої хвилі. Спочатку припустимо, що падаюча хвиля має горизонтальну поляризацію.

Систему координат повернемо так, щоб межа розділу співпадала з площиною xOy , а вектор \vec{E} з горизонтальної поляризацією був паралельний до вісі Oy (яка спрямована у площину рисунка). Тому вектор \vec{E} буде мати тільки одну складову E_y (рис. 7.4).

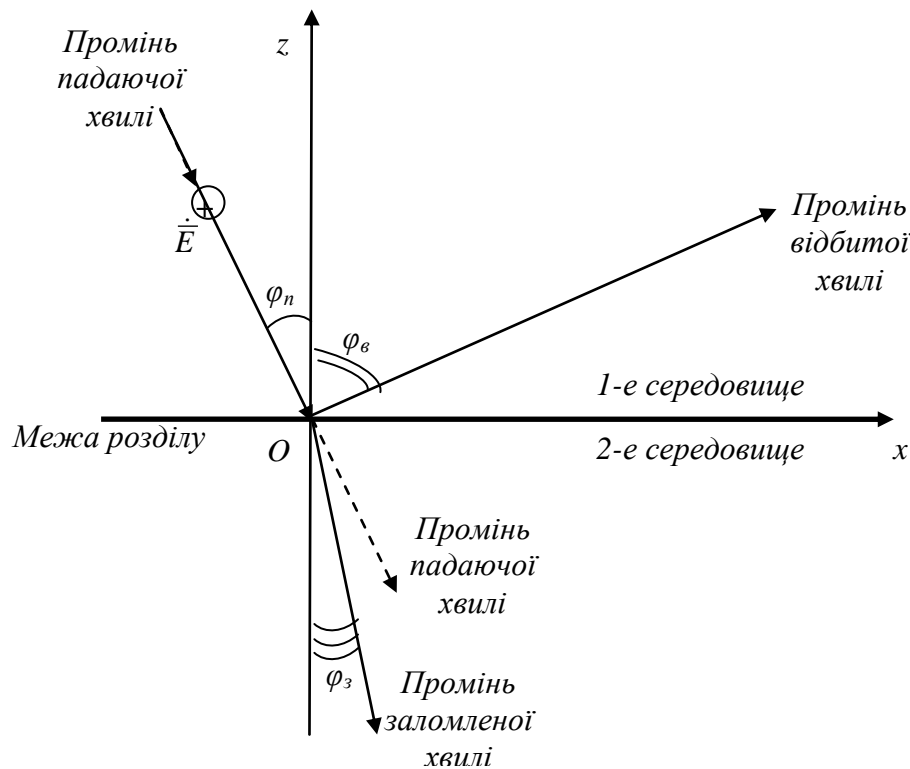


Рис. 7.4. Падіння плоскої хвилі на плоску межу розділу

Зробимо такі позначення (рис. 7.4):

- φ_n - кут падіння, між нормаллю до межі розділу та променем падаючої хвилі;
- φ_v - кут відбиття, між нормаллю до межі розділу та променем відбитої хвилі;
- φ_z - кут заломлення, між нормаллю до межі розділу та променем заломленої хвилі.

Припустимо, що відбита та заломлена хвилі мають таку ж поляризацію, як і падаюча. Щоб отримати вирази для комплексних амплітуд всіх трьох хвиль, потрібно записати направляючі косинуси через кути падіння, відбиття та заломлення (рис.5).

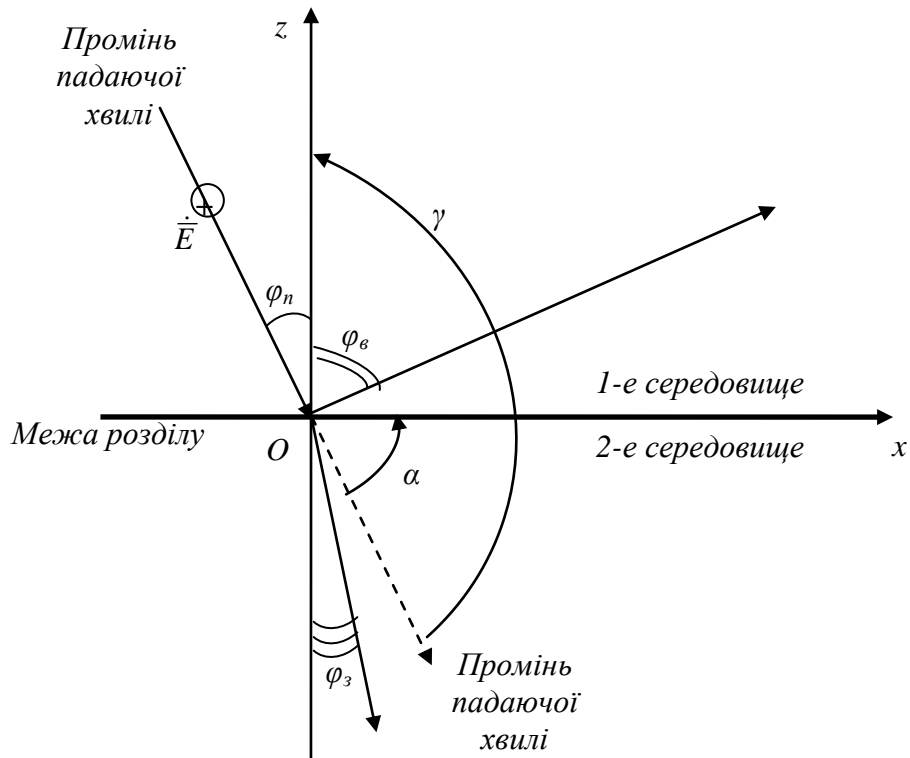


Рис.7.5 Направляючі косинуси падаючої хвилі

На рисунку видно, що кут між променем падаючої хвилі та Ox $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi_n$, а кут між променем падаючої хвилі та Oz $\gamma = \pi - \varphi_n$. Тому комплексна амплітуда падаючої хвилі

$$\dot{E}_{ym}^n = \dot{E}_{0ym}^n \cdot e^{-ik_1(x \cos \alpha + z \cos \gamma)} = \dot{E}_{0ym}^n \cdot e^{-ik_1(x \sin \varphi_n - z \cos \varphi_n)}. \quad (7.4)$$

Аналогічно знайдемо дві інші комплексні амплітуди:

$$\dot{E}_{ym}^e = \dot{E}_{0ym}^e \cdot e^{-ik_1(x \sin \varphi_e + z \cos \varphi_e)} \quad \text{- відбита хвиля;} \quad (7.5)$$

$$\dot{E}_{ym}^z = \dot{E}_{0ym}^z \cdot e^{-ik_2(x \sin \varphi_z - z \cos \varphi_z)} \quad \text{- заломлена хвиля,} \quad (7.6)$$

де \dot{E}_{0ym} - комплексні амплітуди при $z = 0$, на межі розділу;

$$k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_{k1}\mu_1}; \quad k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_{k2}\mu_2} - \text{хвильові числа середовищ.}$$

В рівняннях (7.4-7.6) задано кут φ_n та амплітуду падаючої хвилі \dot{E}_{0ym}^n , невідомі кути φ_6, φ_3 та амплітуди відбитої та заломленої хвилі $\dot{E}_{0ym}^6, \dot{E}_{0ym}^3$.

7.3.2. Закони Снелліуса

Для знаходження невідомих величин використаємо межові умови для дотичних складових вектора $\dot{\vec{E}}$:

$$\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau} \text{ при } z = 0,$$

У першому середовищі є дві хвилі, падаюча та відбита: $\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{ym}^n + \dot{E}_{ym}^6$. У другому середовищі тільки заломлена: $\dot{E}_{2\tau} = \dot{E}_{ym}^3$. Звідки отримуємо, що повинне виконуватись рівняння

$$\dot{E}_{ym}^n + \dot{E}_{ym}^6 = \dot{E}_{ym}^3 \text{ при } z = 0. \quad (7.7)$$

Підставимо в рівняння (7.7) вирази (7.4-7.6), та при $z = 0$ отримуємо:

$$\dot{E}_{0ym}^n \cdot e^{-ik_1 x \sin \varphi_n} + \dot{E}_{0ym}^6 \cdot e^{-ik_1 x \sin \varphi_6} = \dot{E}_{0ym}^3 \cdot e^{-ik_2 x \sin \varphi_3}. \quad (7.8)$$

Це рівняння повинне виконуватись при всіх значеннях x . А це можливо тільки тоді, коли при всіх x буде справедливе:

$$e^{-ik_1 x \sin \varphi_n} = e^{-ik_1 x \sin \varphi_6} = e^{-ik_2 x \sin \varphi_3}. \quad (7.9)$$

З першої частини рівняння (7.9) отримуємо $e^{-ik_1 x \sin \varphi_n} = e^{-ik_1 x \sin \varphi_6}$, звідки виводимо перше рівняння Снелліуса

$$\varphi_n = \varphi_6. \quad (7.10)$$

З другої частини виразу (7.9) $e^{-ik_1 x \sin \varphi_n} = e^{-ik_2 x \sin \varphi_3}$ отримуємо друге рівняння Снелліуса

$$k_1 \sin \varphi_n = k_2 \sin \varphi_3. \quad (7.11)$$

7.3.3. Явище повного відбиття. Граничний кут повного відбиття

Розглянемо більш докладно випадок, коли обидва середовища – діелектрики, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Загасання в середовищах немає, хвильові числа будуть цілком дійсними числами та дорівнюватимуть фазовим сталим: $k_1 = \beta_1$, $k_2 = \beta_2$:

Розв'яжемо рівняння $\beta_1 \sin \varphi_n = \beta_2 \sin \varphi_3$ відносно кута заломлення, під яким поширюється хвиля у другому середовищі:

$$\sin \varphi_3 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \sin \varphi_n.$$

Якщо перше середовище більш оптично щільне, $\beta_1 > \beta_2$, то може існувати такий кут падіння, при якому буде $\sin \varphi_3 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \sin \varphi_n = 1$. Це означає, що $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$, заломлена хвиля поширюється паралельно межі розділу. Це відповідає граничному куту падіння.

При збільшенні кута падіння може бути, що $\sin \varphi_3 > 1$, а це означає, що кут заломлення буде уявним і не існує в області дійсних чисел. В друге середовище хвиля не проходить, спостерігається повне відбиття від межі розділу.

Таке явище відбувається в оптичних світловодах на межі серцевини та оболонки. Промінь світла, що поширюється в серцевині, повністю відбивається від межі та не проходить в оболонку, завдяки чому є можливість передавати сигнали на великі відстані (десятки та сотні кілометрів).

Якщо $\sin \varphi_3 > 1$, то кут φ_3 буде чисто уявним, $\cos \varphi_3 = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_3} = \pm ic$. Можливо довести, що з фізичних міркувань може існувати тільки рішення $\cos \varphi_3 = -ic$.

З виразу (7.6) проаналізуємо залежність амплітуди заломленої хвилі від z ($x = 0$):

$$\dot{E}_{ym}^z = \dot{E}_{0ym}^z \cdot e^{-ik_2(x \sin \varphi_3 - z \cos \varphi_3)} = \dot{E}_{0ym}^z \cdot e^{-ik_2(-z(-ic))} = \dot{E}_{0ym}^z \cdot e^{+k_2 cz}.$$

Таким чином, при проникненні в друге середовище збільшується від'ємне значення координати z та зменшується амплітуда заломленої хвилі за експоненціальним законом.

7.3.4. Коефіцієнти відбиття та заломлення. Формули Френеля.

Комплексним коефіцієнтом відбиття називають відношення комплексної амплітуди відбитої хвилі до комплексної амплітуди падаючої хвилі, що взяті на поверхні розділу. Для горизонтально поляризованої хвилі:

$$\dot{P}_6^{\rho} = P_6^{\rho} \cdot e^{i\psi_6^{\rho}} = \frac{\dot{E}_{0ym}^6}{\dot{E}_{0ym}^n},$$

де P_6^{ρ} - модуль коефіцієнта відбиття,

ψ_6^{ρ} - фаза коефіцієнта відбиття.

Аналогічно, комплексним коефіцієнтом заломлення називають відношення комплексної амплітуди заломленої хвилі до комплексної амплітуди падаючої хвилі, що взяті на поверхні розділу. Для горизонтально поляризованої хвилі:

$$\dot{P}_3^{\rho} = P_3^{\rho} \cdot e^{i\psi_3^{\rho}} = \frac{\dot{E}_{0ym}^3}{\dot{E}_{0ym}^n},$$

де P_3^{ρ} - модуль коефіцієнта заломлення,

ψ_3^{ρ} - фаза коефіцієнта заломлення.

Для того, щоб знайти дві невідомі амплітуди \dot{E}_{0ym}^6 та \dot{E}_{0ym}^3 , потрібно використати два межові рівняння.

Запишемо рівняння для дотичних складових векторів при $z = 0$, для у-вої складової вектора \bar{E} та для x-вої складової вектора \bar{H} :

$$\begin{cases} \dot{E}_{ym}^n + \dot{E}_{ym}^6 = \dot{E}_{ym}^3 \\ \dot{H}_{xm}^n + \dot{H}_{xm}^6 = \dot{H}_{xm}^3 \end{cases} \Big|_{z=0}. \quad (7.12)$$

Якщо відомий вектор \bar{E} хвилі, то можливо знайти вектор \bar{H} цієї хвилі з другого рівняння Максвелла:

$$\text{rot} \dot{E}_m = -i\omega\mu \dot{H}_m, \quad \text{звідки} \quad \dot{H}_m = -\frac{1}{i\omega\mu} \text{rot} \dot{E}_m.$$

Вектор $\dot{\vec{E}}_m$ має тільки одну складову \dot{E}_{ym} .

$$\text{Тому } \dot{H}_{xm} = -\frac{1}{i\omega\mu} \text{rot}_x \dot{\vec{E}}_m = \frac{1}{i\omega\mu} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{ym}}{\partial z}.$$

Вирази (7.4 – 7.6) для \dot{E}_{ym}^n , \dot{E}_{ym}^e та \dot{E}_{ym}^z диференціюємо по z та підставимо в друге рівняння межових умов (7.12) :

$$\frac{1}{i\omega\mu_1} \left(ik_1 \cos \varphi_n \cdot \dot{E}_{0ym}^n - ik_1 \cos \varphi_e \cdot \dot{E}_{0ym}^e \right) = \frac{1}{i\omega\mu_2} \cdot ik_2 \cos \varphi_3 \cdot \dot{E}_{0ym}^z.$$

Підставимо в отримане рівняння перший закон Снелліуса $\varphi_n = \varphi_e$ та хвильові

опори середовищ $\frac{k_1}{\omega\mu_1} = \frac{1}{Z_1}$, $\frac{k_2}{\omega\mu_2} = \frac{1}{Z_2}$,

отримуємо $\frac{\cos \varphi_e}{Z_1} (\dot{E}_{0ym}^n - \dot{E}_{0ym}^e) = \frac{\cos \varphi_3}{Z_2} \cdot \dot{E}_{0ym}^z.$

Поєднуємо це рівняння з першим рівнянням з (7.12) $\dot{E}_{ym}^n + \dot{E}_{ym}^e = \dot{E}_{ym}^z$, та маємо систему двох рівнянь з двома невідомими \dot{E}_{ym}^e , \dot{E}_{ym}^z . Розв'язання системи відносно коефіцієнтів відбиття та заломлення має вигляд

$$\dot{P}_e^z = \frac{\frac{Z_2}{\cos \varphi_3} - \frac{Z_1}{\cos \varphi_e}}{\frac{Z_2}{\cos \varphi_3} + \frac{Z_1}{\cos \varphi_e}}, \quad \dot{P}_3^z = \frac{2 \frac{Z_2}{\cos \varphi_3}}{\frac{Z_2}{\cos \varphi_3} + \frac{Z_1}{\cos \varphi_e}}. \quad (7.13)$$

де $Z_1 = \frac{\omega\mu_1}{k_1} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$ - характеристичний опір першого середовища;

$Z_2 = \frac{\omega\mu_2}{k_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$ - характеристичний опір другого середовища.

Аналогічно у випадку вертикальної поляризації

$$\dot{P}_e^e = \frac{Z_2 \cos \varphi_3 - Z_1 \cos \varphi_e}{Z_2 \cos \varphi_3 + Z_1 \cos \varphi_e}; \quad \dot{P}_3^e = \frac{2Z_2 \cos \varphi_3}{Z_2 \cos \varphi_3 + Z_1 \cos \varphi_e}. \quad (7.14)$$

7.3.5. Явище повного проходження. Кут Брюстера

Проаналізуємо формули для коефіцієнтів відбиття та заломлення (7.13) та (7.14).

7.3.5.1. Повне проходження у друге середовище.

У випадку ідеальних діелектриків $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

Коефіцієнт відбиття для горизонтальної поляризації дорівнює нулю тільки при $Z_1 = Z_2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, тобто коли обидва середовища – однакові і межі розділу між ними фізично немає.

У випадку вертикальної поляризації для $\dot{P}_e^s = 0$ потрібно виконання рівняння $Z_2 \cos \varphi_3 - Z_1 \cos \varphi_6 = 0$.

Підставимо в це рівняння:

$$Z_1 = \frac{\omega \mu_1}{k_1} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}},$$

$$Z_2 = \frac{\omega \mu_2}{k_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}},$$

$$\cos \varphi_3 = \sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \sin^2 \varphi_n},$$

$$\cos \varphi_6 = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_6} = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_n},$$

Після спрощень отримуємо, що коефіцієнт відбиття $\dot{P}_e^s = 0$ при $\sin \varphi_n = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}$,

або при $\operatorname{tg} \varphi_n = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$.

Цей кут падіння має назву кута Брюстера.

7.3.5.2. Повне відбиття від межі розділу.

Якщо друге середовище – ідеальний провідник, тобто $\sigma_2 \rightarrow \infty$, то

характеристичний опір $Z_2 = \frac{\omega \mu_2}{k_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2 - i \frac{\sigma_2}{\omega}}} \rightarrow 0$, має комплексне значення і модуль

його прямує к нулю. Як видно з (13) та (14), при $|Z_2| \rightarrow 0$ буде $\dot{P}_e^s = \dot{P}_e^z \rightarrow -1$ при будь-якому куті падіння.

Випадок, коли обидва середовища – діелектрики, а друге – більш щільне, був вже розглянутий раніше.

Нагадаємо, що у цьому випадку для повного відбиття потрібно виконання нерівності $\sin \varphi_3 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \sin \varphi_n > 1$.

7.4. Хвильові явища на межі з провідним середовищем. Наближені граничні умови Леонтовича-Щукіна

Розглянемо випадок, коли в другому середовищі модуль хвильового числа $k_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_{k_2} \mu_2}$ значно більший, ніж у першому $k_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_{k_1} \mu_1}$: $|k_2| \gg |k_1|$.

Із другого закону Снелліуса (7.11) $k_1 \sin \varphi_n = k_2 \sin \varphi_3$:

$$\sin \varphi_3 = \frac{k_1}{k_2} \sin \varphi_n \rightarrow 0.$$

Це означає, що у другому середовищі заломлена хвиля поширюється майже перпендикулярно межі розділу. Тоді вектори заломленої хвилі \vec{E} та \vec{H} у другому середовищі будуть паралельні межі розділу. Вектор \vec{E} буде мати тільки одну складову E_y . Вектор \vec{H} буде мати тільки одну складову H_x .

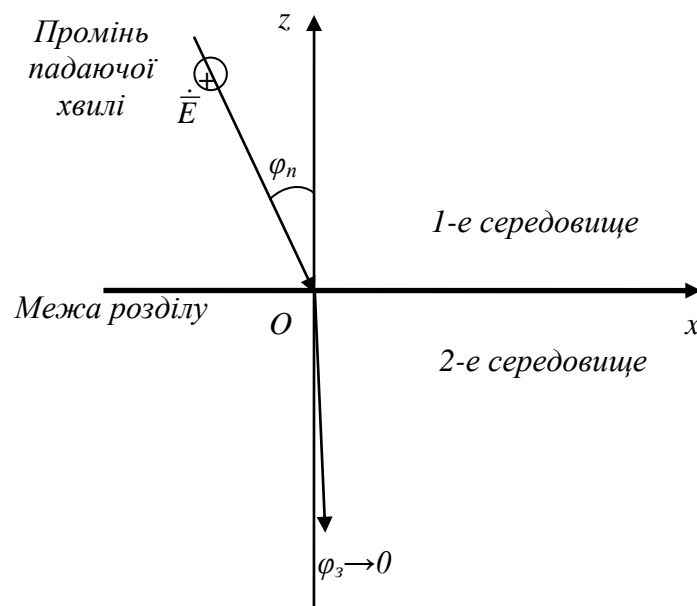


Рис. 7.6. Граничні умови Леонтовича - Щукіна

Для другого середовища можна записати

$$\dot{Z}_2 = \frac{\dot{E}_{ym}^3}{\dot{H}_{xm}^3}, \text{ або } \dot{E}_{ym}^3 = \dot{Z}_2 \cdot \dot{H}_{xm}^3. \quad (7.15)$$

Застосуємо відомі межові умови для дотичних складових векторів \bar{E} та \bar{H} :

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \text{ або } E_{ym1} = E_{ym}^3;$$

$$H_{t1} = H_{t2}, \text{ або } H_{xm1} = H_{xm}^3.$$

Замінімо в рівнянні (15) дотичні складові поля заломленої хвилі на рівні складові поля у першому середовищі та отримаємо граничні умови Леонтовича - Щукіна:

$$\dot{E}_{ym1} = \dot{Z}_2 \cdot \dot{H}_{xm1}.$$

Ми отримали рівняння, у якому дотичні складові поля в першому середовищі зв'язані через параметри другого середовища Z_2 . За допомогою цього співвідношення є можливість простіше знаходити поля у першому середовищі, не розв'язуючи рівняння для другого середовища. Це значно спрощує задачу у деяких важливих випадках.

8. Фактори, що впливають на поширення радіохвиль. Діапазони радіохвиль. Передавальні антени та їх основні параметри

8.1. Фактори, що впливають на поширення радіохвиль (ПРХ) в земній атмосфері.

При побудові систем зв'язку нас завжди цікавить розподіл амплітуд напруженості електромагнітного поля (ЕМП) у просторі. Цей розподіл залежить від характеристик джерел поля та від електричних параметрів середовища.

Джерелами є передавальні антени, а середовищем - атмосфера і земна поверхня, впливає її рельєф і електричні параметри.

В інтересах ПРХ необхідно також знати властивості Землі як межі розділу, тому що радіо зв'язок не цікавиться властивостями радіохвиль (РХ) в земній корі.

Звичайно Земну поверхню представляють або у вигляді площини, або у вигляді гладкої сфери. Діелектричні та магнітні параметри земної поверхні можна прийняти:

$$\varepsilon' = 4 \dots 20; \quad \varepsilon'' = 10^{-2} \dots 10^{-3} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}; \quad \mu' = 1.$$

При ПРХ поблизу земної поверхні, частина енергії хвиль проходить в землю, де і загасає.

Крім того, частина енергії відбивається від Землі. Це призводить до інтерференції прямої і відбитої від Землі хвиль.

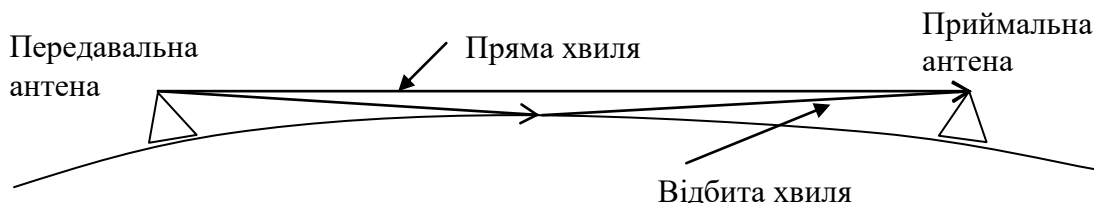


Рис. 8.1. Пряма та відбита від Землі хвилі

При знаходженні приймача в області земної тіні радіохвилі приходять до нього внаслідок дифракції електромагнітного поля, як показано на рис.8.2.

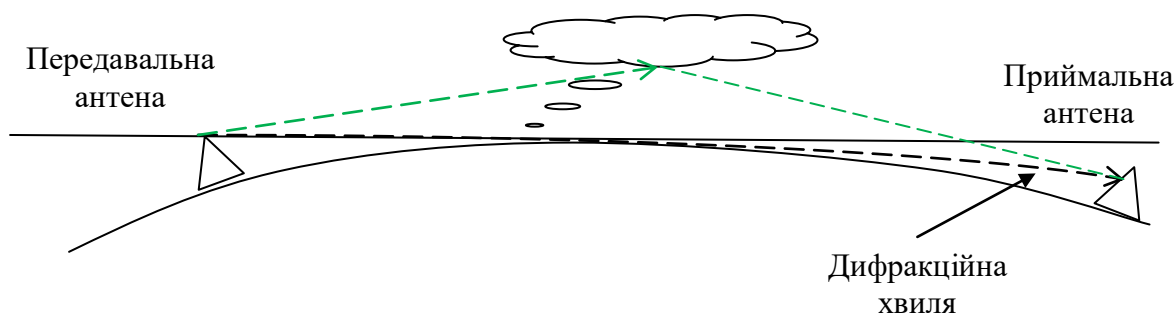


Рис. 8.2. Дифракція радіохвиль над Землею

8.2. Діапазони радіохвиль.

Поширення радіохвиль суттєво залежить від частоти. Класифікація радіохвиль за діапазонами:

Назва діапазону за МЕК	Діапазон	Довжина хвиль	Частота
Дуже Низькі Частоти (ДНЧ)	Наддовгі	100...10 км	3...30 кГц
Низькі Частоти (НЧ)	Довгі	10...1 км	30...300 кГц
Середні Частоти (СЧ)	Середні	1000...100 м	300...3000 кГц
Високі Частоти (ВЧ)	Короткі	100...10 м	3...30 МГц
Дуже Високі Частоти (ДВЧ)	УКХ метрові	10...1 м	30...300 МГц
Ульт्रा Високі Частоти (УВЧ)	дециметрові	100...10 см	300...3000 МГц
Над Високі Частоти (НВЧ)	сантиметрові	10...1 см	3...30 ГГц

Край Високі Частоти (КВЧ)	міліметрові	10...0,1 мм	30...300 ГГц
	Інфрачервоні	100...0,75 мкм	
	Оптичні (світлові)	0,75...0,37 мкм	
	Ультрафіолетові	0,370...0,05 мкм	
	Рентгенівські	$5 \cdot 10^{-8} \dots 10^{-10}$ м	
	Гамма-промені	$10^{-12} \dots 10^{-18}$ м	

8.3. Характеристики передавальної антени

8.3.1 Характеристика направленості антени

При вивченні та конструюванні антен важливе місце займають параметри, що відносяться до їх просторових характеристик.

Властивості антен у просторі описуються за допомогою прямокутної або, частіше, сферичної системи координат, яка показана на рис.3.

В сферичній системі координат використовуються координати: r – відстань від початку системи координат O до точки спостереження M ; ϑ (або Θ) – кут в вертикальній площині від вертикальної осі до напрямку на точку спостереження; φ – кут в горизонтальній площині від обраного напрямку (осі Ox) до площини, що проходить через точку спостереження.

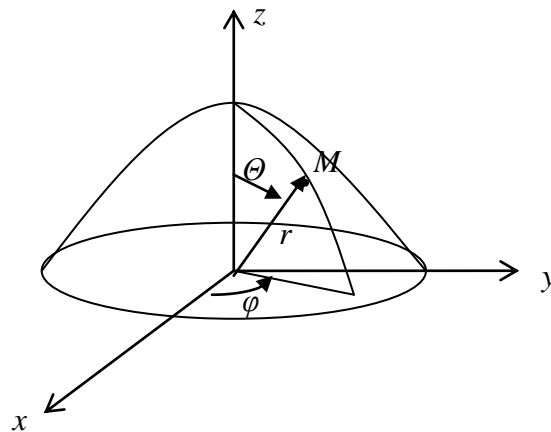


Рис. 8.3. Сферична система координат

Будемо переміщувати точку спостереження M по сфері постійного радіусу r і вимірювати амплітуду напруженості електричного поля $E_m(\Theta, \varphi)$.

Визначення: функція

$$F(\Theta, \varphi) = C \cdot E_m(\Theta, \varphi) \Big|_{\substack{r=const \\ r \gg \lambda \\ r \gg l}}$$

де l – лінійний розмір антени,

яка показує залежність амплітуди напруженості поля хвилі, що випромінює антена, від координати точки спостереження, називається характеристика спрямованості (ХС) антени.

На практиці використовують ХС в площинах, як правило: горизонтальній (залежність від θ) і вертикальній (залежність від ϑ):

$$F(\theta) = cE_m(\theta) \quad \text{при} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} = const.$$

$$F(\varphi) = cE_m(\varphi) \quad \text{при} \quad \theta = \frac{\pi}{2} = const.$$

Зрозуміло, що величина напруженості поля залежить від багатьох факторів (відстань, потужність передавача, загасання в атмосфері). Тому для зручності порівняння тільки спрямованих якостей антен їх характеристики направленості нормують:

$$f(\theta, \varphi) = \frac{F(\theta, \varphi)}{F_{\max}(\theta, \varphi)} = \frac{E_m(\theta, \varphi)}{E_{\max}(\theta, \varphi)}. \quad (8.1)$$

Зрозуміло, що найбільше значення нормованої ХН дорівнює 1.

Графічне зображення ХН – діаграма направленості (ДНА). Діаграма спрямованості може бути побудована в прямокутній (рис. 4) або полярній системі координат (рис. 8.5).

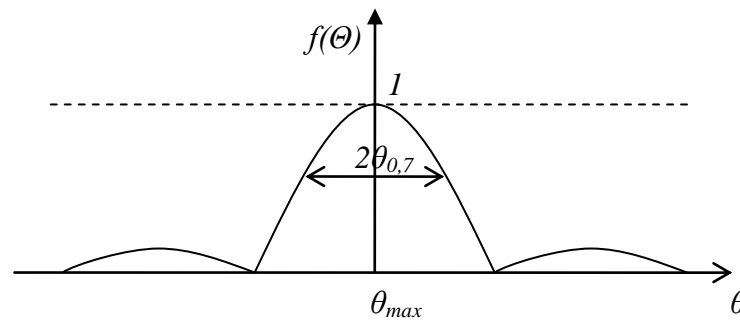


Рис. 8.4. Діаграма спрямованості в прямокутній системі координат

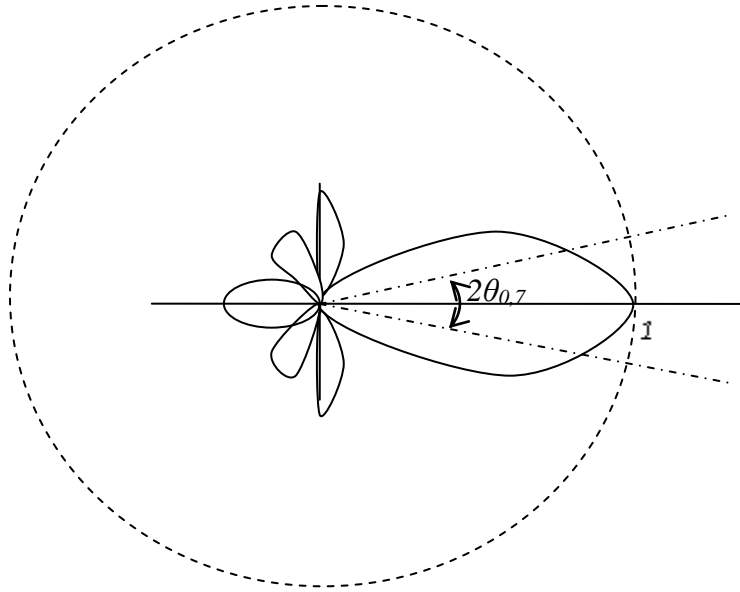


Рис. 8.5. Діаграма спрямованості в полярній системі координат

8.3.2. Потужність, яку випромінює антена

Для розрахунку потужності, що випромінює антена через поверхню S , запишемо теорему Умова-Пойнтінга в комплексному вигляді:

$$P_{cp} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S [\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m^*] d\vec{s}. \quad (8.2)$$

При поширенні плоскої хвилі у повітрі (характеристичний опір якого $Z_c = 120\pi$)

справедливо співвідношення між векторами $\dot{\vec{E}}_m$ та $\dot{\vec{H}}_m$: $\dot{\vec{H}}_m = \frac{\dot{\vec{E}}_m}{120\pi}$.

З формули (8.1) запишемо, що $E_m(\Theta, \varphi) = E_{макс} f(\Theta, \varphi)$, та підставимо це у вираз (8.2):

$$P_{cp} = \frac{1}{2} \int_S (E_{макс} f(\Theta, \varphi)) \left(\frac{E_{макс}}{120\pi} f(\Theta, \varphi) \right) ds = \frac{1}{2} \int_S \frac{E_{макс}^2}{120\pi} f^2(\Theta, \varphi) ds = \frac{E_{макс}^2}{240\pi} \int_S f^2(\Theta, \varphi) ds.$$

Припустимо, що у нас антена ненаправлена, $f(\Theta, \varphi) = 1$. Позначимо відстань від антени до точки спостереження r . Тоді, враховуючи, що повна площа поверхні сфери радіуса r дорівнює $\oint_S ds = 4\pi r^2$, знайдемо потужність ненаправленої антени P_0 :

$$P_0 = \frac{E_{макс}^2}{240\pi} \oint_S ds = \frac{E_{макс}^2 \cdot 4\pi r^2}{240\pi} = \frac{E_{макс}^2 r^2}{60}.$$

Звідки напруженість поля хвилі, що випромінена ненаправленою антеною,

$$E_{\text{макс}} = \frac{\sqrt{60P_0}}{r}.$$

Тоді напруженість поля направленої антени

$$E_m(\Theta, \varphi) = E_{\text{макс}} f(\Theta, \varphi) = \frac{\sqrt{60P_0}}{r} f(\Theta, \varphi).$$

Позначимо потужність, що випромінена направленою антеною, P_Σ .

Вводимо ще один параметр: коефіцієнт направленої дії $D = \frac{P_0}{P_\Sigma}$. Цей параметр

показує, в скільки разів потрібно збільшити потужність випромінювання при переході від даної направленої антени до ненаправленої, щоб зберегти незмінною напруженість поля в точці спостереження. Інакше кажучи, якщо дві антени, направлена і ненаправлена, створюють в точці спостереження на напрямку максимуму направленої антени однакову напруженість поля, то ненаправлена антена випромінює потужність у $D = \frac{P_0}{P_\Sigma}$ разів більше.

$$E_m(\Theta, \varphi) = E_{\text{макс}} f(\Theta, \varphi) = \frac{\sqrt{60P_0}}{r} f(\Theta, \varphi) = \frac{\sqrt{60DP_\Sigma}}{r} f(\Theta, \varphi). \quad (8.3)$$

Формула (8.3) має назву «формули ідеальної радіопередачі».

Висновок: амплітуда напруженості залежить від потужності, що випромінена антеною, коефіцієнта направленої дії (залежить від конструкції антени, звичайно він відомий) та зворотно пропорційна відстані від антени до точки спостереження.

8.2. Поширення радіохвиль понад Землею

8.2.1. Поширення радіохвиль понад плоскою Землею

Існують дві хвилі, які показано на рис.8.6:

- пряма (або та, що падає)
- відбита від Землі

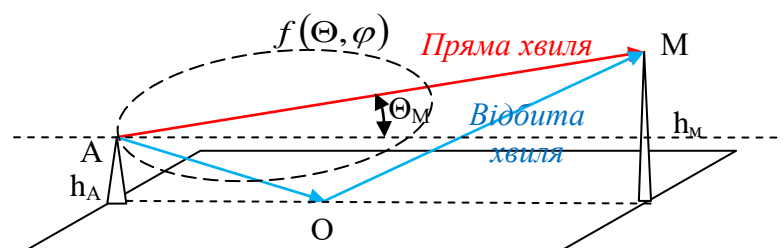


Рис. 8.6. Інтерференція хвиль над плоскою Землею

Хід розв'язування:

- знаходять амплітуду напруженості поля прямої хвилі,
- знаходять амплітуду напруженості поля відбитої хвилі в точці O,
- знаходять амплітуду напруженості поля відбитої хвилі в точці M,
- підсумовують обидві хвилі.

Для отримання результату роблять деякі спрощення та припущення:

- передавальна антена слабо спрямована, $f(\Theta_O, \varphi) \approx f(\Theta_M, \varphi)$,
- як можливо довести розрахунками, при $\sin(\Theta_M) \rightarrow 0$ модуль коефіцієнта

відбиття $P_{\text{відб}} \approx 1$, а його фаза $\psi_{\text{відб}} \approx \pi$, тобто $\dot{P}_{\text{відб}} \approx -1$.

При цих припущення з великою точністю справедлива формула

$$E_m(\Theta_M) = E_{\text{mнад}}(\Theta_M) + E_{\text{mвідб}}(\Theta_O) = \frac{2\sqrt{60DP_\Sigma}}{r} f(\Theta_M) \sin\left(\frac{2\pi h_A}{\lambda} \sin \Theta_M\right). \quad (8.4)$$

Зробимо аналіз цього виразу.

Множник $\sin\left(\frac{2\pi h_A}{\lambda} \sin \Theta_M\right)$ враховує вплив Землі, має назву «інтерференційний множник». Він залежить від висоти антени, довжини хвилі, координат точки спостереження. Перший максимум існує при $\frac{2\pi h_A}{\lambda} \sin \Theta_{1\text{max}} = \frac{\pi}{2}$, звідки $\sin \Theta_{1\text{max}} = \frac{\lambda}{4h_A}$.

Можливо зробити висновок, що діаграма направленості антени при наявності відбиття від Землі приймає пелюстковий характер, як показано на рис.8.7.

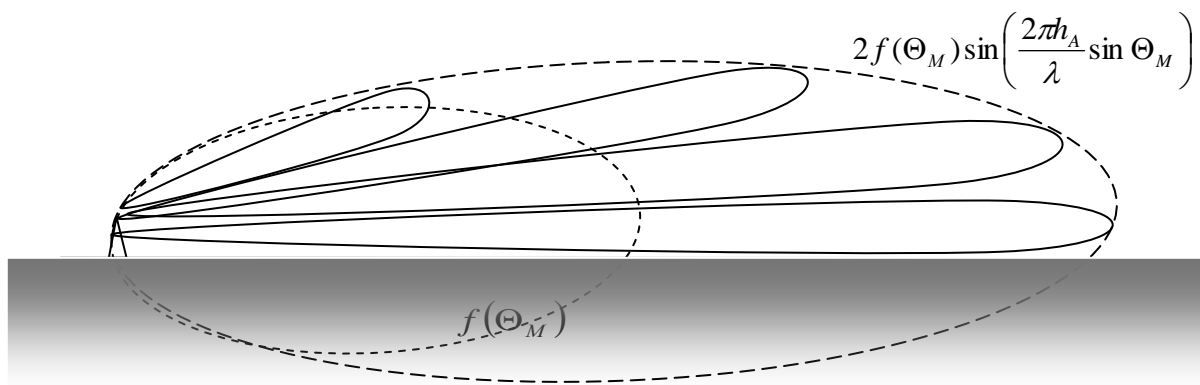


Рис. 8.7. Пелюстковий характер діаграми направленості антени внаслідок інтерференції хвиль над плоскою Землею

При $\Theta \rightarrow 0$ можливо спростити формулу (8.4):

$$E_m(\Theta_M) = \frac{2\sqrt{60DP_\Sigma}}{r} f(\Theta_M) \left(\frac{2\pi h_A}{\lambda} \frac{h_M}{r} \right).$$

Ця формула має назву «формула академіка Введенського».

З неї видно, що в області, близької до області тіні, поле зворотно пропорційно квадрату відстані до точки спостереження $\frac{1}{r^2}$.

8.2.2. Вплив кривизни Землі на поширення радіохвиль

Відстань, що виміряна по поверхні Землі, між двома точками А і М, коли ці точки знаходяться на лінії горизонту, називається відстанню прямої видимості.

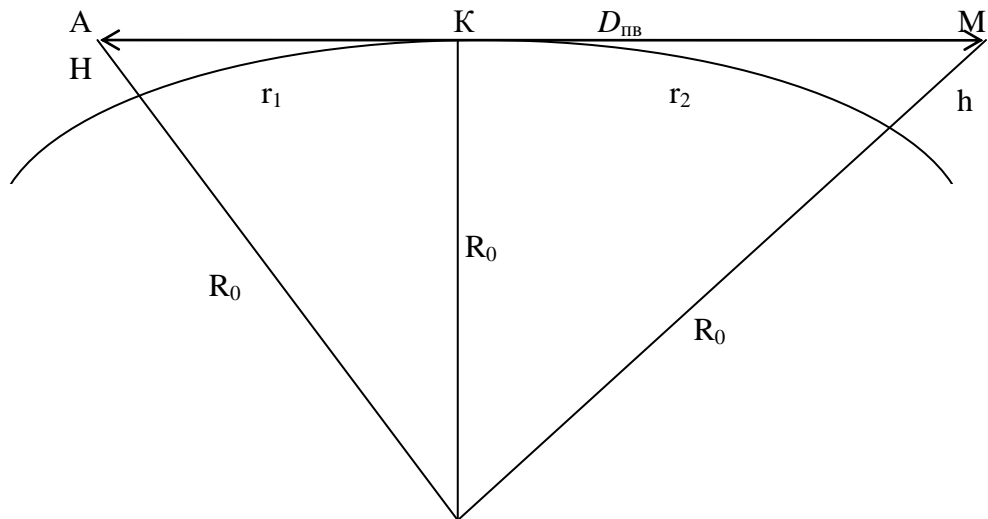


Рис. 8.8. Відстань прямої видимості $D_{пв}$

Радіус Землі $R_0 = 6370$ км, тому дальність прямої видимості обмежена.

Відстань прямої видимості r_0 :

$$r_0 = r_1 + r_2 \approx AK + KM ,$$

$$r_1 = \sqrt{(R_0 + H)^2 - R_0^2} = \sqrt{R_0^2 + 2R_0H + H^2 - R_0^2} \approx \sqrt{2R_0H} ,$$

$$r_2 = \sqrt{(R_0 + h)^2 - R_0^2} = \sqrt{R_0^2 + 2R_0h + h^2 - R_0^2} \approx \sqrt{2R_0h} ,$$

$$r_0 = r_1 + r_2 \approx \sqrt{2R_0H} + \sqrt{2R_0h} = \sqrt{2R_0} (\sqrt{H} + \sqrt{h}).$$

Якщо виміряти висоти антен H, h в метрах, а відстань r_0 у кілометрах, то:

$$r_0 = 3,57(\sqrt{H} + \sqrt{h}), \text{ км}$$

Як провести розрахунок напруженості поля з урахуванням сферичності Землі?

Якщо точка спостереження в області прямої видимості, то напруженість електричного поля можливо розраховувати за формулами відбиття для плоскої Землі (за формулами Введенського).

Висоти приймальної антени та передавальної антени, потрібно зменшити на δ_1 та δ_2 відповідно. Отримаємо так звані приведені висоти:

δ_i - висоти точок, що знаходяться на відстані прямої видимості.

Можна показати, що

$$H_E = H - \delta_1 = H - \frac{r_1^2}{2R_0}$$

$$h_E = h - \delta_2 = h - \frac{r_2^2}{2R_0}$$

Якщо точка спостереження знаходиться в області тіні чи в околі конуса тіні, то розв'язування буде дуже важким.

Променева модель не може бути застосована, потрібно враховувати дифракцію електромагнітних хвиль навколо сферичної Землі.

Відомі результати числового аналізу та відповідні графіки. Результати належать відомим вченим: Зоммерфельд, Шулейкін, Ван-дер-Поль, академік Фок.

Висновки:

1. Зі збільшенням відстані між точкою спостереження і антеною напруженість поля швидко зменшується, зворотно пропорційно до квадрату відстані $\frac{1}{r^2}$.

2. При зменшенні висот джерела поля та точки спостереження напруженість поля зменшується.

3. Аналіз залежності від довжини хвилі складний:

- при знаходженні точки спостереження на лінії горизонту (в області конуса тіні) при збільшенні довжини хвилі напруженість поля зменшується,

- при знаходженні в області тіні при збільшенні довжини хвилі напруженість поля зростає.

9. Вплив атмосфери на поширення радіохвиль

Взагалі структура земної атмосфери та її фізичні властивості дуже складні (тиск, температура, хімічний склад, іонізація). Проте з точки зору поширення електромагнітних хвиль атмосфера Землі складається з трьох шарів з різними фізичними властивостями:

- тропосфера, висота до 10...12 км,
- стратосфера, висота 12...60 км - не впливає на поширення радіохвиль (РРХ),
- іоносфера, висота > 60 км, впливає сильно на радіохвилі різних діапазонів.

Електричні властивості тропосфери

Це суміш газів: кисень O_2 (21% за об'ємом), озон O_3 , азот N_2 (78%), вуглекислий газ CO_2 (0,04%), пари води H_2O (0,2...2,5%) та деякі інші, яких порівняно мало.

У тропосфері міститься 80 % всієї земної атмосфери.

Загальним є те, що з висотою щільність газів зменшується та змінюються електричні параметри атмосфери.

З висотою, із-за зменшення тиску, коефіцієнт заломлення $n = \sqrt{\epsilon}$ зменшується, дуже повільно. У поверхні Землі за нормальних погодних умов коефіцієнт заломлення дуже близький до одиниці, $n = 1,000325$. Зміна його вимірюється у тисячних та мільйонних долях.

Тому дуже зручно замість коефіцієнта заломлення n використовувати так званий індекс заломлення $N = (n - 1) \cdot 10^6$. Біля поверхні Землі індекс заломлення $N = 325$. На рис.9.1 показано залежність індексу заломлення в атмосфері від висоти.

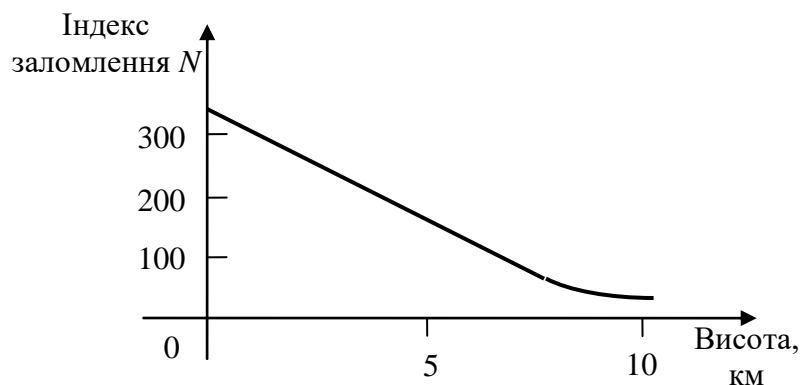


Рис.9.1. Залежність індексу заломлення в атмосфері від висоти

Індекс заломлення залежить від погоди, температури, пори року, і може швидко змінюватися.

На вплив земної тропосфери на поширення радіохвиль також діють такі фактори, як дощ, туман, сніг, град (так звані гідрометеори, у яких відносна діелектрична проникність $\epsilon_r > 1$). Їх наявність призводять до розсіювання радіохвиль та їх загасання.

9.2. Радіохвилі у тропосфері.

9.2.1. Рефракція радіохвиль у тропосфері. Еквівалентний радіус Землі.

Відмінність коефіцієнту заломлення в тропосфері від 1 та його зміна з висотою відчутно впливає на поширення радіохвиль, особливо в УКХ діапазоні.

Розіб'ємо уявно тропосферу на тонкі шари, у межах кожного будемо наближено вважати показник заломлення постійним, $n = const$.

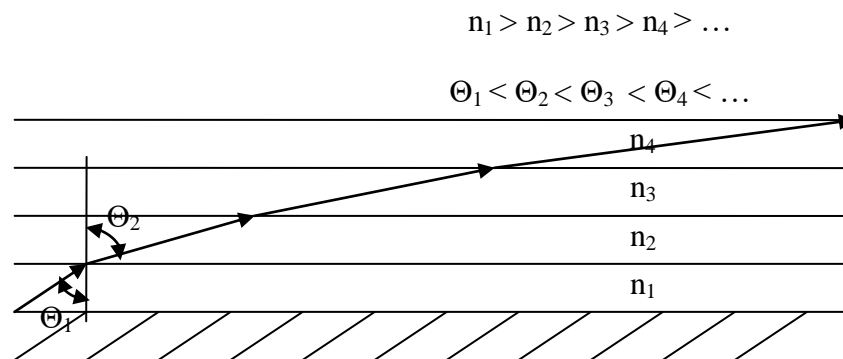


Рис. 9.2. Рефракція радіохвиль в тропосфері

На межі розподілу шарів діє другий закон Снеліуса:

$$n_1 \sin \Theta_1 = n_2 \sin \Theta_2 .$$

Тому при $n_1 > n_2$ буде $\sin \Theta_1 < \sin \Theta_2$.

Це означає, що при проходженні променя в менш щільні шари повітря промінь буде йти більш похило. Його траєкторія викривлюється.

Це явище має назву «рефракція».

В реальному середовищі, де коефіцієнт заломлення змінюється плавно, і траєкторія буде плавною кривою.

Можна показати, що радіус кривизни траєкторії променя у земній атмосфері визначається виразом

$$\rho = \frac{n}{\sin \Theta_0 \left(-\frac{dn}{dh} \right)} .$$

Звичайно $\frac{dn}{dh} < 0$, тому $\rho > 0$, і промінь викривляється в сторону Землі.

Особливий інтерес являє собою випадок горизонтально направлених променів, коли $\sin \theta_0 = 1$. У поверхні Землі $n \approx 1$. При типовій залежності показника заломлення від висоти (при нормальній рефракції) $\frac{dn}{dh} = -4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{км}}$, звідки ми отримуємо радіус кривизни променя $\rho = \frac{n}{-\frac{dn}{dh}} = 25000 \text{ км}$.

Вплив тропосфери на траєкторію променів зручно враховувати введенням еквівалентного радіусу Землі. Якщо припустити, що промінь іде прямолінійно, то відстань між траєкторією прямого променя та поверхнею з еквівалентним радіусом буде така ж сама, як в реальності між викривленим променем та реальною земною поверхнею (рис.3).

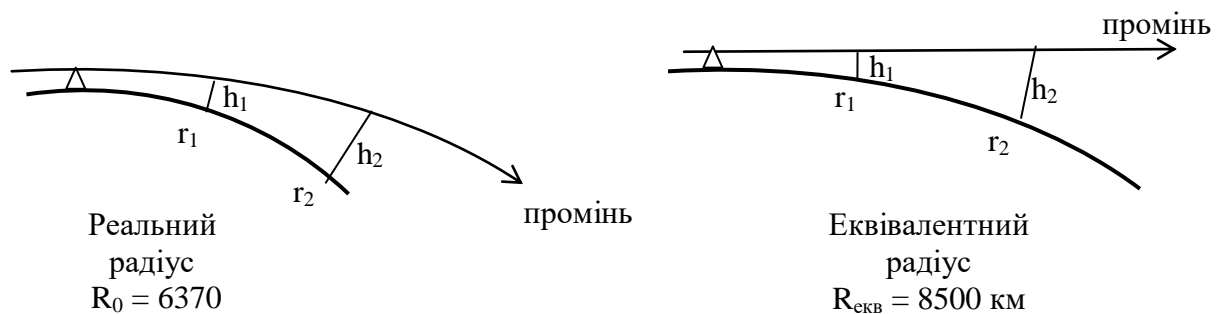


Рис. 9.3. Еквівалентний радіус Землі

Можливо довести, що еквівалентний радіус Землі $R_{\text{екв}} = \frac{R_0}{1 - \frac{R_0}{\rho}} = 8500 \text{ км}$.

Висновки:

1. Значенням еквівалентного радіусу $R_{\text{екв}} = 8500 \text{ км}$ можна користуватися при нормальній рефракції $\frac{dn}{dh} = -4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{км}}$.

2. Відстань прямої видимості з урахуванням рефракції розраховується за формулою $r_0 = \sqrt{2R_{\text{екв}}}(\sqrt{H} + \sqrt{h}) = 4,12(\sqrt{H} + \sqrt{h}) \text{ км}$, де висоти виражені у метрах.

3. У формули для приведених висот при розрахунку напруженості електричного поля підставляють еквівалентний радіус Землі: $h_E = h - \frac{r^2}{2R_{\text{екв}}}$.

9.2.2. Поглинання радіохвиль в тропосфері

Ослаблення в тропосфері практично відчувають тільки радіохвилі дециметрового та більш коротких діапазонів.

Причина поглинання радіохвиль: часткове перетворення електромагнітної енергії у інші види енергії та розсіювання в інші боки на гідро метеорах.

Коефіцієнт ослаблення вимірюють в децибелах:

$$\Gamma'_{\text{звод}} = 20 \lg \frac{E_0}{E_m} \frac{\text{дб}}{\text{км}},$$

де E_0 - напруженість поля у вільному просторі без загасання,

E_m - напруженість поля в реальній тропосфері.

Залежність коефіцієнта ослаблення Γ від інтенсивності дощу і туману показана на рис. 9.4:

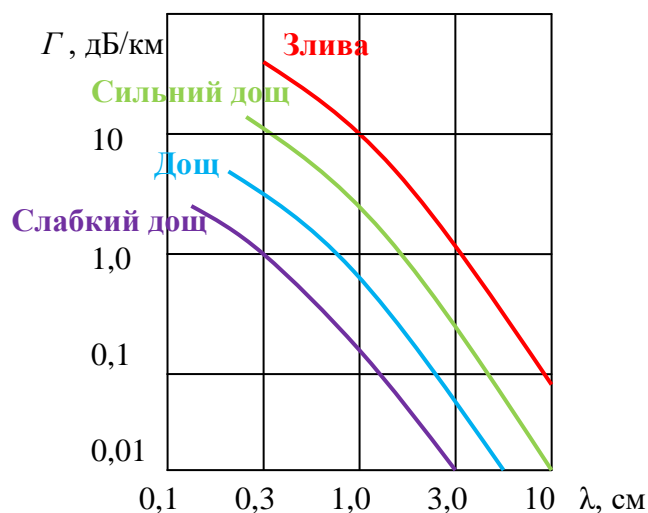


Рис. 9.4. Загасання радіохвиль в дощі

Висновки:

1. Дані про поглинання перевіряються експериментально.
2. Поглинання різко зменшується зі збільшенням довжини хвилі.
3. При довжині хвилі $\lambda > 10\text{см}$ поглинанням у дощі, тумані, граді, у снігу можна знехтувати.

Міліметрові хвилі відчувають додаткове розсіювання і поглинання на молекулах води, кисню .

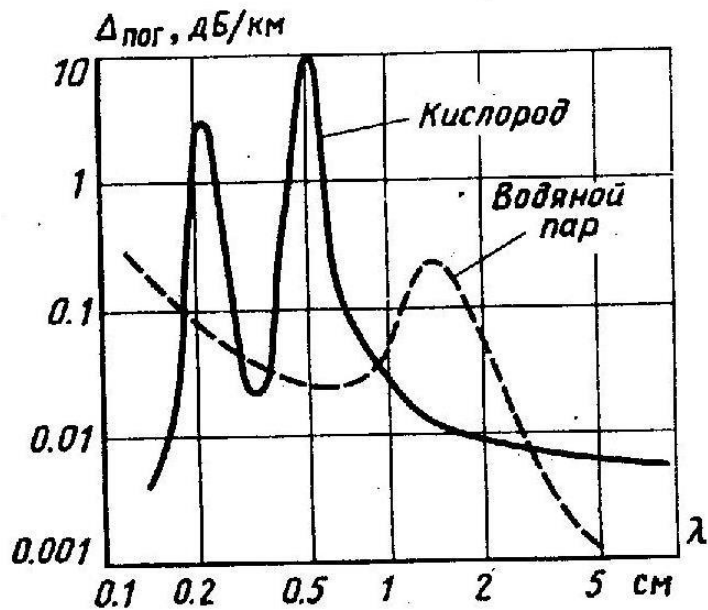


Рис.9.5. Загасання радіохвиль на молекулах води та кисню

Залежність загасання міліметрових хвиль від довжини хвилі суттєво резонансна.

Існують максимуми поглинання:

- на молекулах кисню це 0,25 см; 0,5 см;
- на молекулах води це $\lambda = 1,3$ см.

Проте існують і вікна прозорості: $\lambda = 0,3$ см; 0,8 см; >2 см.

Можливо зробити висновок, що міліметрові хвилі можна використовувати у хорошу погоду, на невеликій відстані (кілька кілометрів), та треба уважно обрати довжину хвилі і потрапити у вікно прозорості.

9.3. Радіохвилі у іоносфері. Відбивання радіохвиль від іоносфери

9.3.1. Електричні параметри іоносфери

В іоносфері спостерігається значна концентрація вільних електронів і іонів.

Причина іонізації: сонячне опромінення, космічні промені, ультрафіолетове і корпускулярне опромінювання.

Експериментально отримана залежність концентрації вільних іонів вдень та вночі, яка наведена в книзі: [2], с. 288, рис. 14.1.

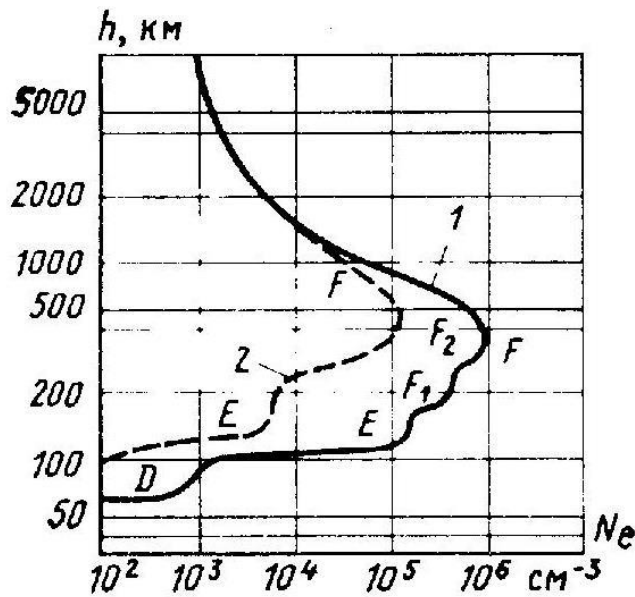


Рис.9.6. Залежність концентрації вільних іонів в іоносфері від висоти:
1- вдень, 2- вночі.

Вплив іоносфери на радіохвилі проявляється у наступному:

- відбиття хвиль від іоносфери,
- загасання хвиль у іоносфері,
- проходження радіохвиль через іоносферу в космос.

Для радіохвиль різних діапазонів цей вплив різний.

Іоносфера – це плазма, її діелектрична проникність залежить від частоти. Можливо довести, що коефіцієнт заломлення плазми розраховується за формулою

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1 - 80,6 \frac{N}{f^2}}, \quad (9.1)$$

де N – концентрація вільних носіїв заряду (іонів та електронів);
 f – частота хвилі.

При збільшенні висоти над земною поверхнею, як видно з рис.6, зростає концентрація вільних носіїв заряду N . Важливо, що характер залежності показника заломлення від концентрації носіїв заряду залежить від частоти.

Якщо частота велика, другий доданок у формулі (9.1) дуже малий, тому показник заломлення зменшується дуже повільно при збільшенні концентрації носіїв. Ультракороткі хвилі характеризуються практично незмінним показником заломлення, траєкторія променів не викривлюється. УКХ проходять у космос.

Якщо частота мала, другий доданок у формулі (9.1) великий, тому при збільшенні висоти над поверхнею і збільшенні концентрації носіїв спостерігається швидке зменшення

показника заломлення. Внаслідок сказаного, для довгих хвиль відбувається сильне викривлення траєкторії променів і, в результаті, відбивання хвиль від нижніх шарів іоносфери. Середні та короткі хвилі відбиваються від шарів, які мають більшу концентрацію іонів.

Траєкторія променів у іоносфері суттєво залежить від діапазону хвиль, як показано на рис.9.7.

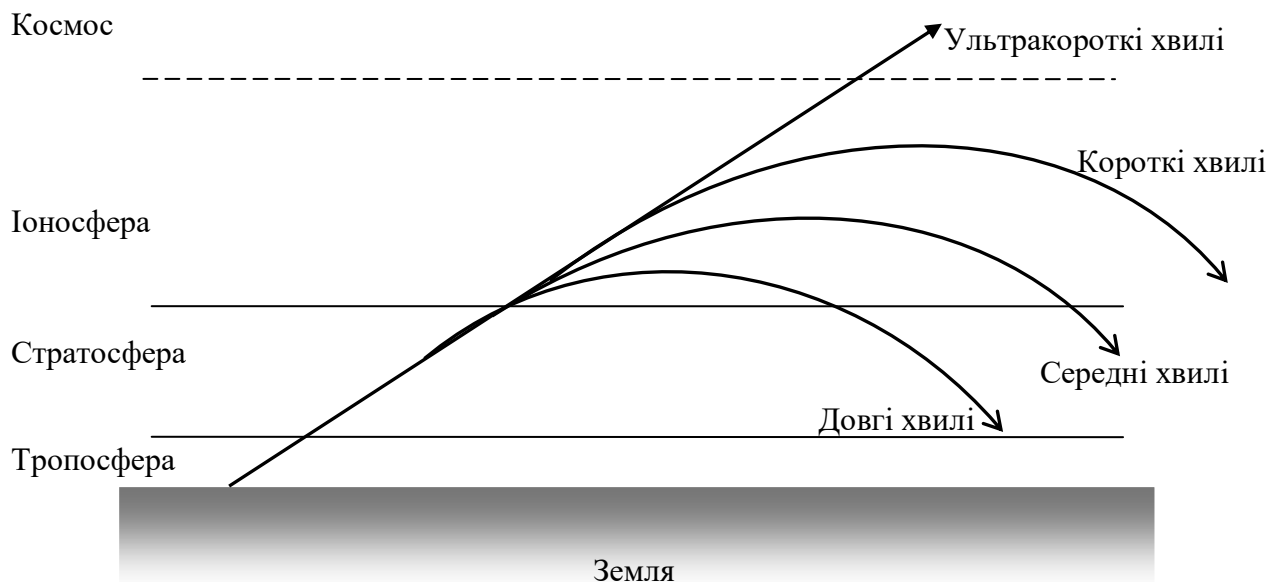


Рис. 9.7. Траєкторії променів різних діапазонів в іоносфері

9.4. Діапазонні особливості поширення радіохвиль

9.4.1. Довгі хвилі, $\lambda > 1000\text{м}$

Довгі хвилі відбиваються від нижніх шарів іоносфери як вдень, так і вночі. Вони відбиваються і від Землі, яка для хвиль цього діапазону є провідником. Тому при поширенні хвиль цього діапазону існують так звані поверхнева (вдovж Земної поверхні) і просторова хвилі (відбита від іоносфери), у хвилеводі між Земною та іоносферою. Хвилі цього діапазону можуть проходити тисячі кілометрів.

В результаті радіозв'язок можливий на сотні та тисячі кілометрів.

Недолік використання довгих хвиль: мала смуга частот, необхідні великі антени.

9.4.2. Середні хвилі, $100\text{м} < \lambda < 1000\text{м}$

Ці хвилі вже доволі сильно поглинається у ґрунті, тому поверхнева хвиля загасає значно швидше, ніж у довгих хвиль.

Відбиття від іоносфери суттєво залежить від часу дня. Іоносферна хвиля може відбитися тільки від шару E з великою концентрацією іонів. Тому вдень хвиля загасає у

більш нижчому шарі Д, поки пройде до шару Е. Вночі цього шару немає, загасання у шарі Д немає, хвиля проходить до шару Е та відбивається від нього.

В результаті зв'язок на середніх хвилях можливий за допомогою іоносферної хвилі тільки вночі, на відстань до кілька сотень кілометрів

9.4.3. Короткі хвилі $10\text{ м} < \lambda < 100\text{ м}$

Земна хвиля сильно поглинається – відстань поширення поверхневої хвилі кілька десятків кілометрів. Короткі хвилі можуть відбиватися від шару F іоносфери.

Максимально застосовна частота - обмежена умовою відбиття від іоносфери.

Вдень – концентрація іонів більша, можна використовувати великі частоти, вони відіб'ються та повернуться на Землю. Вночі іонів менше, високі частоти ідуть у космос і не відбиваються. Використовують нижчі частоти.

Мінімальна застосовна частота - визначається загасанням в іоносфері.

Оптимальна частота на 10-30 % нижча за максимальну застосовну частоту.

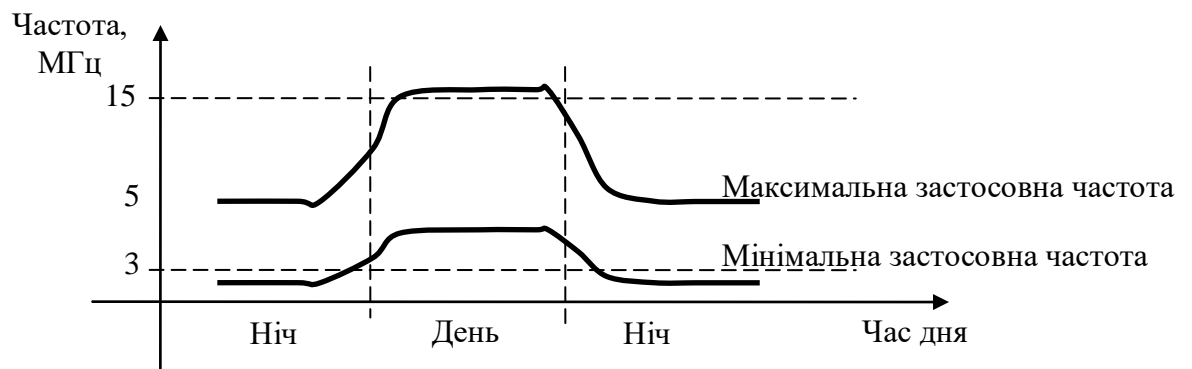


Рис. 9.8. Максимальна та мінімальна застосовні частоти короткохвильового діапазону

Вночі використовують низькочастотну частину короткохвильового діапазону. Вдень - високочастотну частину короткохвильового діапазону.

Дальність короткохвильового зв'язку складає сотні і тисячі км.

9.4.4. Ультракороткі хвилі, $\lambda < 10\text{ м}$

Всі ультракороткі хвилі об'єднане те, що вони проходять через іоносферу і не відбиваються до Землі. У цьому діапазоні можливий зв'язок тільки у межах прямої видимості, наприклад зі супутниками (супутникове телебачення, космічні апарати), в радіорелейних лініях передачі тощо.

Рефракція УКХ слабка.

Є виключення із цього правила зв'язку. Зв'язок можливий завдяки відбиттю хвиль:

- від неоднорідностей іоносфери (що викликані метеоритними потоками),

- від шару Es з високою іонізацією, що тимчасово з'являється під час високої сонячної активності. Тоді зв'язок можливий на метрових хвилях.

- внаслідок надрефракції, зв'язок можливий на відстань до 1000 км.

Дециметрові хвилі не відбиваються від іоносфери.

Сантиметрові хвилі сильно затухають в гідро метеорах.

10. Направлені електромагнітні хвилі та напрямні системи. Загальні властивості й характеристики.

10.1. Поняття про напрямні системи.

Окрім раніше розглянутих плоских хвиль, що вільно розповсюджуються у просторі, існують хвилі, які можуть розповсюджуватися лише при наявності елементів, що направляють їх. Такі хвилі називаються направленими або спрямованими.

Напрямні елементи – межі розділу середовищ; металеві та діелектричні трубки; діелектричні стержні, волоконно-оптичні системи. Ці напрямні елементи утворюють систему, яка призначена для передачі електромагнітної хвилі від джерела до споживача (від генератора до антени, від антени до приймача і т.д.). Тому напрямні системи називають також лініями передачі енергії. Якщо параметри лінії передачі (поперечний переріз) не змінюються вздовж лінії, то таку лінію називають однорідною.

Найчастіше використовують лінії передачі, що показані на рис. 10.1.

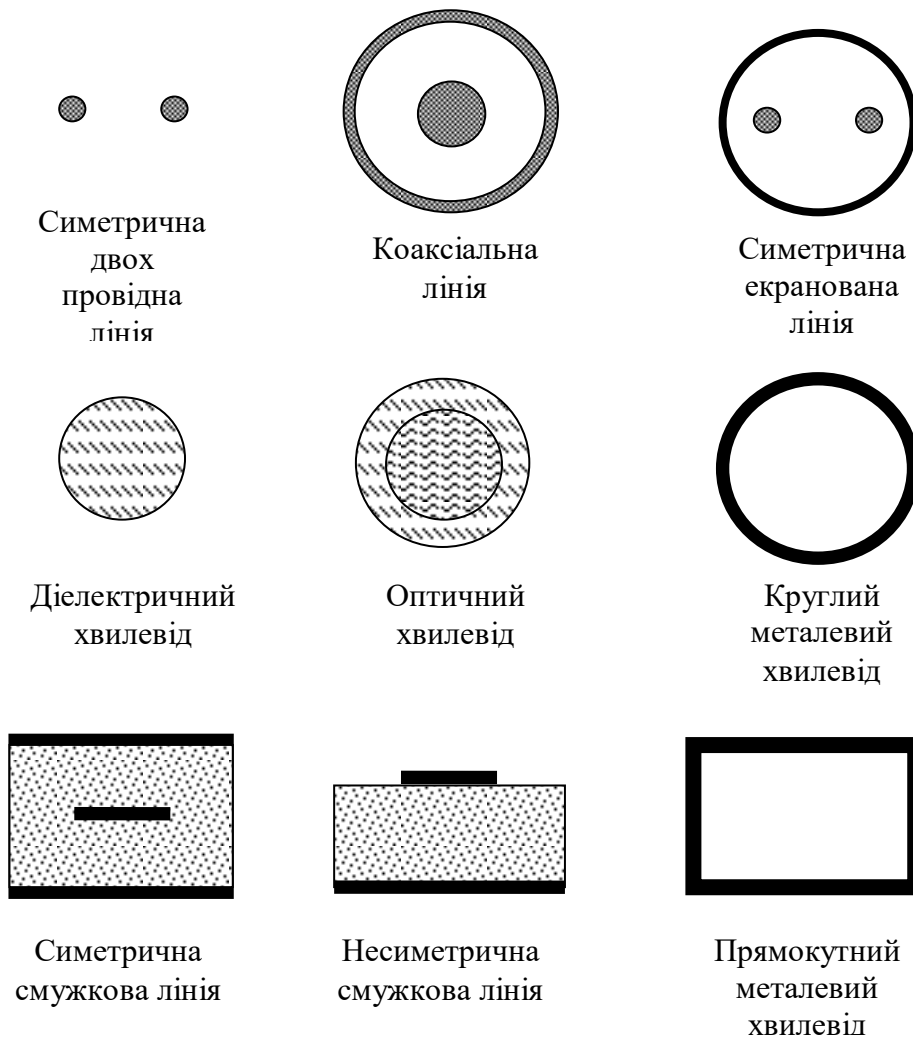


Рис.10.1. Типи напрямних систем

Лінії передачі існують відкритого та закритого типу.

В лініях передачі закритого типу вся енергія екранована від навколишнього простору металевою оболонкою.

В лініях передачі відкритого типу енергія електромагнітного поля розподілена в навколишньому просторі лінії. Але більша частина енергії зосереджена в безпосередній близькості до лінії. Такі лінії піддаються зовнішнім впливам.

По структурі поля хвилі в напрямних системах бувають типу E, H, T (transverse) та гібридні (HE, EH).

В різних діапазонах хвиль доцільно використання напрямних систем різного типу.

Так, наприклад, на низьких частотах до 0,2...10 МГц використовують симетричні лінії. На частотах до приблизно 1...3 ГГц, в метровому та дециметровому діапазонах – використовують коаксіальні лінії. В сантиметровому та міліметровому діапазонах переваги мають круглі, прямокутні та діелектричні хвилеводи.

Симетричні та несиметричні смужкові лінії використовують в сантиметровому та міліметровому діапазонах, при конструюванні інтегральних мікросхем НВЧ та підсилювальних модулів НВЧ.

В інфрачервоному та оптичному діапазонах безперечні переваги мають оптичні хвилеводи.

Хвилі в напрямних системах різного типу мають, в багатьох випадках, загальні риси, проте можуть і сильно відрізнятись. Ми будемо вивчати в різних напрямних системах структуру електромагнітного поля; типи хвиль, що там поширюються; фазову швидкість хвиль та швидкість передачі енергії; загасання хвиль при поширенні.

10.2. Хвилеводи прямокутного перерізу з металевими стінками. Розв'язок хвильових рівнянь для електричних та магнітних хвиль

10.2.1. Постановка крайової задачі для прямокутного хвилеводу.

Задано: однорідний регулярний прямокутний хвилевод, з перерізом $a \times b$ (рис.10.2).

Матеріал хвилеводу – ідеальний провідник з провідністю $\sigma \rightarrow \infty$.

Хвилевід заповнено ідеальним діелектриком з параметрами $\varepsilon, \mu, \sigma = 0$.

Сторонні струми та заряди відсутні $\dot{J}_{\text{сторн}} = 0, \dot{\rho}_{\text{сторн}} = 0$.

Припустимо, що в такому хвилеводі може існувати електромагнітні хвилі на заданій частоті ω .

Потрібно визначити вектори поля \bar{E} та \bar{H} в будь-якій точці всередині хвилеводу.

Важливо, що рішення повинні відповідати хвильовим рівнянням для векторів \vec{E} та \vec{H} , та межовим умовам на стінках хвилеводу. Ця задача може бути розв'язана кількома шляхами, за допомогою використання різних хвильових рівнянь: для векторів \vec{E} та \vec{H} ; для векторного потенціалу \vec{A}_m ; або для електричних і магнітних векторів Герца.

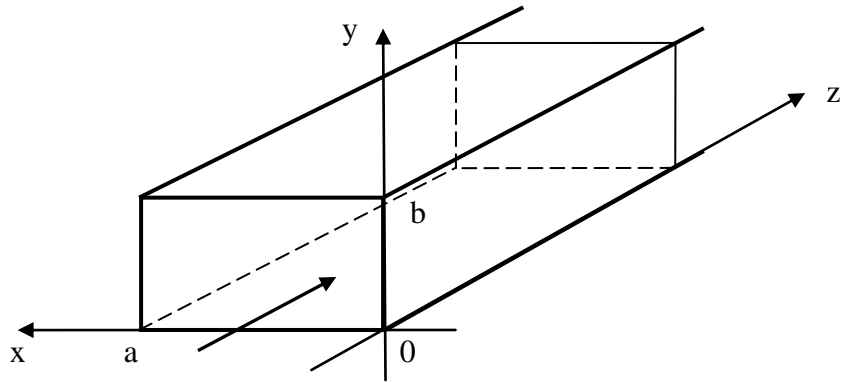


Рис.10.2 Прямокутний хвилевід з розмірами сторін $a \times b$

Під час розв'язання будемо робити деякі припущення. Якщо при цьому отримаємо рішення, що задовольняє хвильовим рівнянням та межовим умовам на стінках хвилеводу, то таке рішення (у відповідності до теореми про єдине рішення) буде єдиним і вірним. Якщо такого рішення отримано не буде, то зроблені припущення невірні і їх потрібно замінити.

Порядок розв'язання задачі:

1. Обираємо систему координат.
2. У цій системі координат розв'язуємо хвильові рівняння для векторів \vec{E} та \vec{H} .
3. З межових умов знаходимо довільні сталі.
4. Записуємо кінцеві вирази для \vec{E} та \vec{H} .

10.2.2. Розв'язання хвильових рівнянь для хвилі типу E.

Обираємо прямокутну декартову систему координат, яка показана на рис.1. Хвиля буде поширюватись у напрямку вісі $0z$.

Спочатку припускаємо, що у хвилеводі поширюється хвиля типу E. Це означає, що:

$$E_z \neq 0, \quad H_z = 0 - \text{умова хвилі типу E.}$$

Якщо знайдемо складову E_z , то з першого та другого рівнянь Максвела

$$\text{rot} \dot{\vec{H}}_m = i\omega \epsilon_k \dot{\vec{E}}_m,$$

$$\text{rot} \dot{\vec{E}}_m = -i\omega \mu \dot{\vec{H}}_m,$$

потім знайдемо всі інші складові векторів: E_x, E_y, H_x, H_y .

Припустимо, що комплексна амплітуда z -вої складової \dot{E}_{zm} може бути записана у вигляді

$$\dot{E}_{zm}(x, y, z) = E_{z\perp}(x, y) \cdot e^{-ihz}, \quad (10.1)$$

де h – невідома величина, яку будемо називати "поздовжнє хвильове число";

$E_{z\perp}(x, y)$ - невідома функція, яку потрібно знайти.

Це припущення дуже логічне, тому що у виразі (10.1) другий множник описує хвилю, яка поширюється у напрямку збільшення координати z , тобто відповідає припущенню про поширення хвилі у хвилеводі. Другий множник характеризує зміну векторів поля в поперечному перерізі хвилеводу. Невідомі функції повинні залежати від a , b , частоти ω .

З рівнянь Максвелла слідує, що комплексна амплітуда $\dot{E}_{zm}(x, y, z)$ повинна задовольняти хвильовому рівнянню

$$\nabla^2 \dot{E}_{zm} + \beta^2 \dot{E}_{zm} = 0$$

(у нашому випадку хвильове число дорівнює фазовій сталій, $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \beta$, тому що вище ми припустили, що провідність діелектрика в хвилеводі $\sigma = 0$).

Розкриємо оператор набла ∇ :

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{zm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{zm}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{zm}}{\partial z^2} + \beta^2 \dot{E}_{zm} = 0. \quad (10.2)$$

В це рівняння підставимо вираз (1) та послідовно спростимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (E_{z\perp}(x, y) \cdot e^{-ihz})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (E_{z\perp}(x, y) \cdot e^{-ihz})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (E_{z\perp}(x, y) \cdot e^{-ihz})}{\partial z^2} + \beta^2 E_{z\perp}(x, y) \cdot e^{-ihz} &= 0, \\ \frac{\partial^2 E_{z\perp}(x, y)}{\partial x^2} e^{-ihz} + \frac{\partial^2 E_{z\perp}(x, y)}{\partial y^2} e^{-ihz} + (-ih) \cdot (-ih) \cdot E_{z\perp}(x, y) \cdot e^{-ihz} + \beta^2 E_{z\perp}(x, y) \cdot e^{-ihz} &= 0, \\ \frac{\partial^2 E_{z\perp}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{z\perp}(x, y)}{\partial y^2} + (\beta^2 - h^2) E_{z\perp}(x, y) &= 0. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Позначимо $(\beta^2 - h^2) = g^2$ - поперечне хвильове число, невідома поки що функція.

Рівняння (10.3) є лінійним диференціальним рівнянням в частинних похідних. В математиці його зазвичай розв'язують методом поділу змінних (метод Фур'є). Тоді ми перейдемо до диференціальних рівнянь відносно однієї невідомої.

Метод поділу змінних полягає в наступному: рішення шукаємо у вигляді добутку $E_{z\perp}(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$, де кожний із множників залежить лише від одного аргументу (x або y).

Підставивши, отримаємо:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} X + g^2 XY = 0.$$

Поділимо на XY :

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + g^2 = 0. \quad (10.4)$$

Ліва частина рівняння являє собою суму двох функцій від двох змінних. Ці функції не пов'язані одна від одної, тобто взаємно незалежні. Поперечне хвильове число g^2 не залежить від x та y .

Виконання рівняння (10.4) можливе тільки у тому випадку, якщо одночасно виконуються для незалежних рівняння:

$$\begin{cases} \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + g_x^2 = 0, \\ \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + g_y^2 = 0, \end{cases}$$

де $g_x^2 + g_y^2 = g^2$; g_x^2 та g_y^2 - невідомі функції, що залежать від a , b та частоти ω ;

$$g^2 = \beta^2 - h^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - h^2.$$

Відомо, що розв'язанням диференційного рівняння $\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + g_x^2 = 0$ є функція

$$X(x) = A \sin(g_x x) + B \cos(g_x x),$$

а розв'язанням диференційного рівняння $\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + g_y^2 = 0$ є функція

$$Y(y) = C \sin(g_y y) + D \cos(g_y y),$$

де A , B , C , D - довільні сталі,

g_x , g_y - функції, які потрібно буде знайти за допомогою межових умов.

Таким чином

$$E_{z\perp}(x, y) = [A \sin(g_x x) + B \cos(g_x x)] \cdot [C \sin(g_y y) + D \cos(g_y y)].$$

10.2.3. Знаходження поперечних хвильових чисел g_x та g_y

Тому що складова \vec{E}_{zm} дотична до стінок хвилеводу, то ми можемо застосувати межові умови $\vec{E}_{zm} = 0$ на стінках хвилеводу, тобто при $x=0, x=a, y=0, y=b$.

Якщо $x=0$, то $E_{z\perp}(x, y) = 0$ тільки при $B=0$.

Якщо $y = 0$, то $E_{z\perp}(x, y) = 0$ тільки при $D = 0$.

Якщо $x = a$, то $E_{z\perp}(x, y) = 0$ тільки при $\sin g_x a = 0$, звідки $g_x = \frac{m\pi}{a}, m = 0, \pm 1, 2, 3, \dots$

Якщо $y = b$, то $E_{z\perp}(x, y) = 0$ тільки при $\sin g_y b = 0$, звідки $g_y = \frac{n\pi}{b}, n = 0, \pm 1, 2, 3, \dots$

Остаточно маємо

$$E_{z\perp}(x, y) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right),$$

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2},$$

де $E_0 = AB$ - довільна стала інтегрування.

Підставимо $E_{z\perp}(x, y)$ в вираз (1) та остаточно знайдемо z - ву складову вектора \vec{E} :

$$\dot{E}_{zm} = E_{z\perp}(x, y) \cdot e^{-ihz} = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-ihz}. \quad (10.5)$$

10.2.4 Знаходження інших складових векторів $\dot{E}_{xm}, \dot{E}_{ym}, \dot{H}_{xm}, \dot{H}_{ym}$

Знайдемо інші складові векторів $\dot{E}_{xm}, \dot{E}_{ym}, \dot{H}_{xm}, \dot{H}_{ym}$ з першого та другого рівнянь

Максвелла:

$$\text{rot} \dot{\vec{H}}_m = i\omega\epsilon_k \dot{\vec{E}}_m \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_{ym}}{\partial z} = i\omega\epsilon \dot{E}_{xm} \\ \frac{\partial \dot{H}_{xm}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial x} = i\omega\epsilon \dot{E}_{ym}, \\ \frac{\partial \dot{H}_{ym}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_{xm}}{\partial y} = i\omega\epsilon \dot{E}_{zm} \end{cases}$$

$$\text{rot} \dot{\vec{E}}_m = -i\omega\mu \dot{\vec{H}}_m \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_{ym}}{\partial z} = -i\omega\mu \dot{H}_{xm} \\ \frac{\partial \dot{E}_{xm}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial x} = -i\omega\mu \dot{H}_{ym}, \\ \frac{\partial \dot{E}_{ym}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_{xm}}{\partial y} = -i\omega\mu \dot{H}_{zm} \end{cases}$$

Візьмемо з першої системи перше рівняння, з другої системи – друге. Отримуємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_{ym}}{\partial z} = i\omega\epsilon \dot{E}_{xm} \\ \frac{\partial \dot{E}_{xm}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial x} = -i\omega\mu \dot{H}_{ym} \end{cases} \quad (10.6)$$

Нам відомі комплексні амплітуди: \dot{E}_{zm} (показана у виразі (10.5)) та $\dot{H}_{zm} = 0$.
Невідомі: \dot{E}_{xm} та \dot{H}_{ym} . Тобто маємо систему двох рівнянь з двома невідомими.

Аналогічно візьмемо з першої системи друге рівняння, з другої системи – перше.
Отримуємо також систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{H}_{xm}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial x} = i\omega\epsilon \dot{E}_{ym} \\ \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_{ym}}{\partial z} = -i\omega\mu \dot{H}_{xm} \end{cases} \quad (10.7)$$

Невідомі: \dot{E}_{ym} та \dot{H}_{xm} . Також маємо систему двох рівнянь з двома невідомими.

Розв'язуючи системи рівнянь (10.6) та (10.7) відносно невідомих $\dot{E}_{xm}, \dot{E}_{ym}, \dot{H}_{xm}, \dot{H}_{ym}$,
знаходимо всі складові векторів \bar{E} та \bar{H} хвилі типу Е:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{xm} &= -i \frac{hm\pi}{g^2 a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{E}_{ym} &= -i \frac{hn\pi}{g^2 b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{E}_{zm} &= E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{H}_{xm} &= i\omega\epsilon \frac{n\pi}{g^2 b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{H}_{ym} &= -i\omega\epsilon \frac{m\pi}{g^2 a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{H}_{zm} &= 0, \end{aligned} \quad (10.8)$$

де $h = \sqrt{\beta^2 - g^2} = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - g^2}$ - поздовжнє хвильове число;

$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$ - поперечне хвильове число;

$m = 0, \pm 1, 2, 3, \dots, n = 0, \pm 1, 2, 3, \dots$

10.2.5 Розв'язання крайової задачі для хвилі типу Н

Рішення проводиться аналогічно тому, як це було зроблено для хвилі типу Е.

Відмінності: $\dot{E}_{zm} = 0$, $\dot{H}_{zm} \neq 0$.

Вирази для всіх складових векторів \bar{E} та \bar{H} хвилі типу Н мають вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{xm} &= i\omega\mu \frac{n\pi}{g^2b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{E}_{ym} &= -i\omega\mu \frac{m\pi}{g^2a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{E}_{zm} &= 0, \\ \dot{H}_{xm} &= i \frac{hm\pi}{g^2a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{H}_{ym} &= i \frac{hn\pi}{g^2b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{H}_{zm} &= H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}.\end{aligned}\tag{10.9}$$

Знання формул для комплексних амплітуд векторів напруженості електричного та магнітного поля необхідно для побудови структури електромагнітного поля у хвилеводі та для аналізу властивостей хвиль типу Е та Н.

10.3. Аналіз отриманих рішень. Загальні властивості хвиль у хвилеводі.

10.3.1 Типи (моди) електромагнітних хвиль

Тип хвилі визначають індекси m та n : хвиля типу E_{mn} , H_{mn} . Наприклад, існують хвилі E_{12} , H_{20} або H_{11} .

Чому можуть дорівнювати індекси m та n ?

В хвилі типу Е не може бути $m = 0$ або $n = 0$. Як ми бачимо з системи (10.8), якщо хоч би один із індексів m або n дорівнює нулю, то буде $\dot{E}_{xm} = 0, \dot{E}_{ym} = 0, \dot{E}_{zm} = 0, \dot{H}_{xm} = 0, \dot{H}_{ym} = 0$. Це означає, що поле у хвилеводі відсутнє.

В хвилі типу Н один із індексів може дорівнювати нулю, але не одночасно обидва. Тобто, може бути $m = 0$, $n \neq 0$ або $m \neq 0$, $n = 0$. Як ми бачимо з системи (10.9), якщо хоч би один із індексів m або n не дорівнює нулю, то вектори \bar{E} та \bar{H} будуть мати ненульові складові, $\dot{H}_{zm} \neq 0$, і поле у хвилеводі буде.

10.3.2. Умови поширення хвилі у хвилеводі. Критична частота

Для того, щоб у хвилеводі поширювалась хвиля, потрібно, щоб позовжне хвильове число $h = \sqrt{\beta^2 - g^2} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - g^2}$ було дійсним.

Коли ця умова не виконується, і частота ω настільки невелика, що $\omega^2 \varepsilon \mu - g^2 < 0$, то $h = \sqrt{\beta^2 - g^2} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - g^2} = \pm i\alpha$ - цілком уявне число. Із фізичних міркувань $h = -i\alpha$.

В цьому випадку $e^{-ihz} = e^{-i(-i\alpha)z} = e^{-\alpha z}$. Це означає, що ніяка хвиля у хвилеводі не поширюється, напруженість поля спадає за експоненціальним законом.

Ситуація, коли $\omega^2 \varepsilon \mu - g^2 = 0$, називається критичною:

$$h = \sqrt{\beta^2 - g^2} = \sqrt{\omega_{кр}^2 \varepsilon \mu - g^2} = 0.$$

$$\text{Звідки } g = \omega_{кр} \sqrt{\varepsilon \mu}.$$

Відповідна критична частота

$$\omega_{кр} = \frac{g}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}{\sqrt{\varepsilon \mu}};$$

$$f_{кр} = \frac{\omega_{кр}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}{2\pi \sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (10.10)$$

Висновок: поширення хвилі у хвилеводі можливе тільки на частотах, більших за критичну, при $f > f_{кр}$. Якщо $f < f_{кр}$, то хвилі у хвилеводі не буде.

Часто використовують поняття «критична довжина хвилі». Це довжина хвилі генератора, яка відповідає критичній частоті. Таку довжину буде мати електромагнітна хвиля у вільному необмеженому діелектрику, що заповнює хвилевід, на критичній частоті:

$$\lambda_{кр} = V_{вільндіел.} \cdot T_{кр} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \cdot \frac{1}{f_{кр}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \frac{2\pi \sqrt{\varepsilon \mu}}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}. \quad (10.11)$$

10.3.3. Залежність векторів поля від поперечних координат

Як видно з систем (10.8) та (10.9), вздовж стінок хвилеводу вектори змінюються за законами косинуса та синуса.

Індекси m та n визначають кількість півперіодів в зміні вектора від однієї стінки до іншої (рис.3). Якщо $m = 0$, то зміни вздовж осі Ox немає. Якщо $n = 0$, то зміни вздовж осі Oy немає. Якщо m або $n = 1$, то вздовж осі Ox або Oy буде один півперіод гармонічної функції.

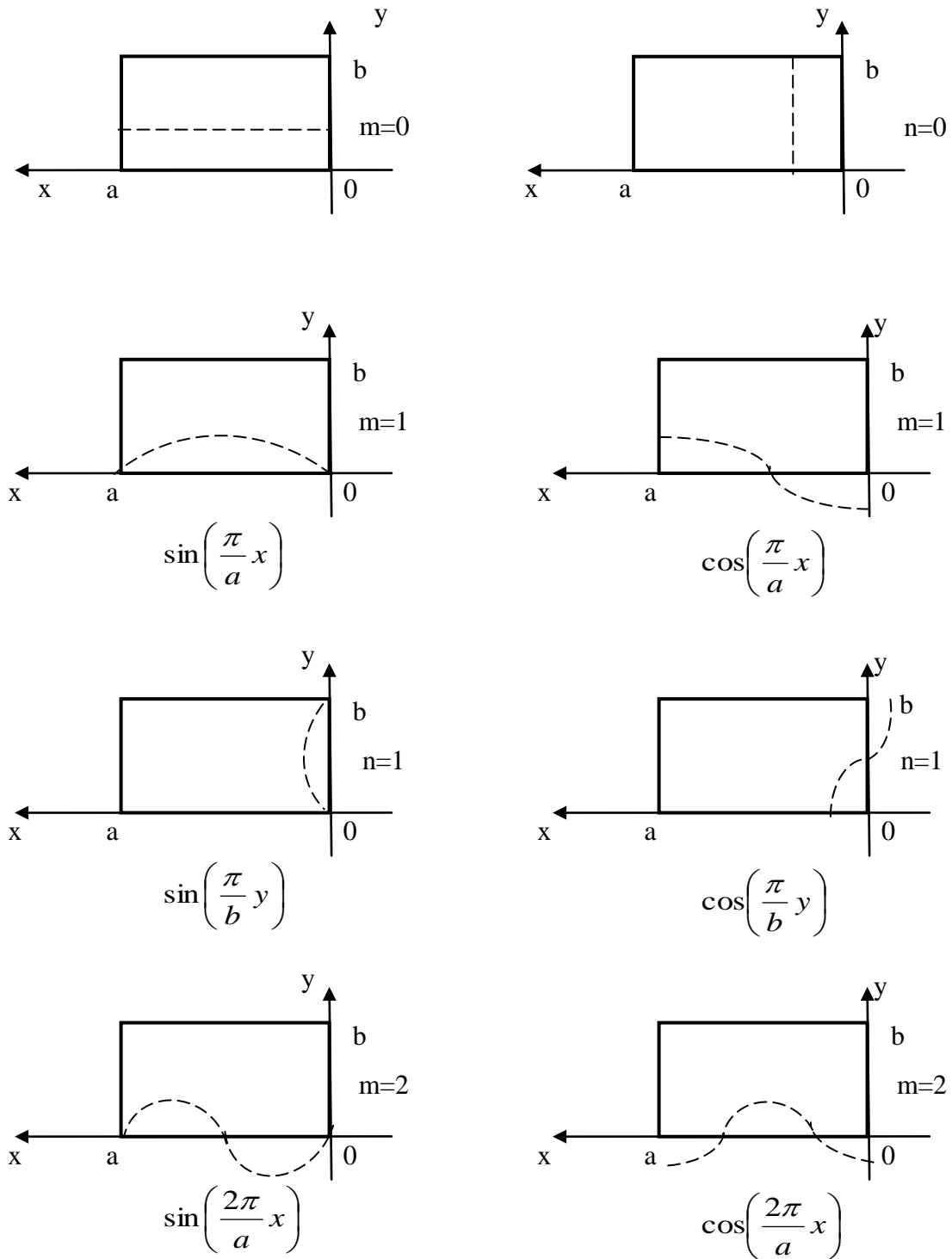


Рис.10.3. Залежність векторів поля від поперечних координат

10.3.4. Фазова швидкість хвилі у хвилеводі

Якщо нам відома фазова стала, що дорівнює дійсній частині поздовжнього хвильового числа $h = \sqrt{\beta^2 - g^2} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - \omega_{кр}^2 \varepsilon \mu}$, то фазову швидкість можемо знайти з виразу

$$V_\phi = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - \omega_{кр}^2 \varepsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}}, \quad (10.12)$$

де $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$ – фазова швидкість у діелектрику, що заповнює хвилевід. Якщо у

хвилеводі повітря, то $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2,99792458 \cdot 10^8 \frac{м}{с} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$.

Часто замість частоти в розрахунках використовують довжину хвилі, яка зворотно пропорційна частоті. Тому маємо:

$$V_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \quad (10.13)$$

У цьому виразі критична довжина хвилі $\lambda_{кр}$ знаходиться за формулою (10.12), а довжина хвилі генератора $\lambda = \frac{c}{f}$, де c – швидкість світла у діелектрику, що заповнює хвилевід. З формули (10.13) видно, що фазова швидкість більша за швидкість світла у вільному діелектрику, $V_\phi > c$.

Графіки залежності швидкості від частоти показано на рис.10.4.

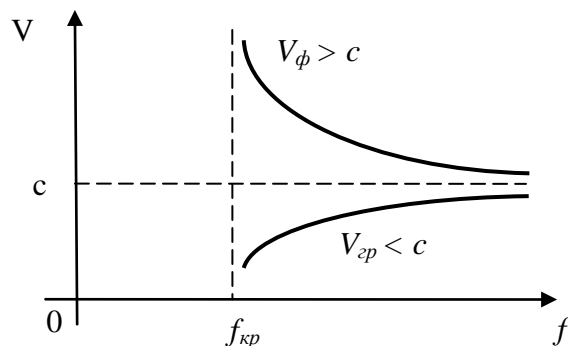


Рис.10.4. Залежність швидкості хвилі від частоти

Проте це не означає, що у хвилеводі є можливість передавати сигнали зі швидкістю більшою, ніж швидкість світла. Можливо показати, що енергія та сигнали передаються з

$$\text{так званою груповою швидкістю } V_{gp} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2} < c .$$

10.3.5. Загасання у хвилеводі

У реальному хвилеводі стінки не з ідеального провідника, його провідність $\sigma < \infty$. Крім того хвилевід заповнено неідеальним діелектриком з провідністю $\sigma \neq 0$. Завдяки цьому при поширенні хвилі у хвилеводі відбувається загасання.

Залежність загасання від частоти показано на рис.10.5.

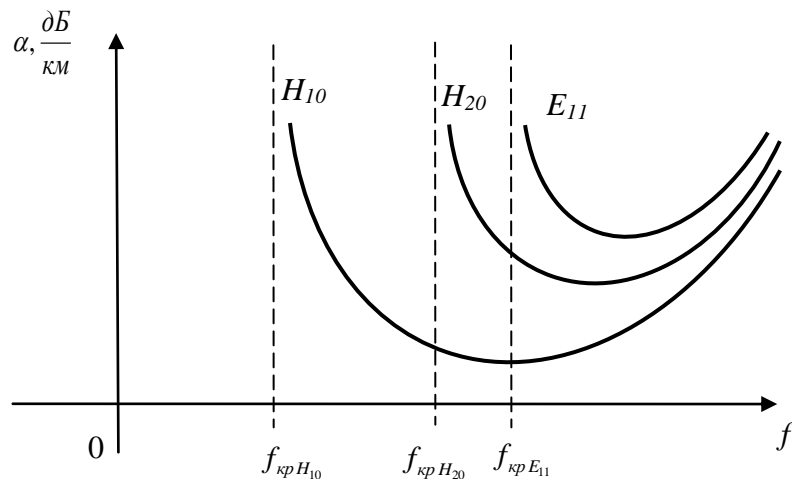


Рис.10.5 Залежність загасання у хвилеводі від частоти

Існує оптимальна частота, на якій загасання мінімальне.

При зменшенні частоти, поки ще $f > f_{кр}$, $f \rightarrow f_{кр}$, зменшується групова швидкість та перенос енергії по хвилеводу. Тому збільшується загасання.

При збільшенні частоти, коли $f \rightarrow \infty$, збільшуються втрати у стінках хвилеводу та у діелектрику внаслідок поверхневого ефекту.

10.3.6. Основний тип хвилі у хвилеводі

Хвиля основного типу – така хвиля, яка може поширюватись єдиною на даній частоті.

У хвилеводі може поширюватись багато типів хвиль, що відрізняються критичною частотою. Хвиля основного типу з'являється на найнижчій частоті. При $a > b$ це хвиля типу H_{10} , яка має найбільшу критичну довжину хвилі:

$$\lambda_{кр\ H_{10}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{0}{b}\right)^2}} = 2a.$$

При збільшенні частоти наступними з'являються хвилі H_{20} , H_{01} , E_{11} ... і т.д. Це так звані «вищі типи хвиль».

Перші вищі типи хвиль мають критичну довжину $\lambda_{кр\ H_{01}} = 2b$, $\lambda_{кр\ H_{20}} = a$. У хвилеводах часто $a = 2b$.

Бажано обирати довжину хвилі генератора $\lambda_{ген}$ так, щоби знаходитись посередині діапазону між $\lambda_{кр\ H_{10}} = 2a$ та $\lambda_{кр\ H_{20}} = a$. Тому звичайно обирають $\lambda_{ген} = (1,4...1,5)a$.

11. Структура електромагнітного поля у хвилеводах прямокутного перерізу

11.1. Правила побудови структури полю

Структура поля - це рисунок силових ліній векторів \vec{E} і \vec{H} , струму провідності і струму зміщення.

Для гармонічного сигналу:

$$\dot{j}_{\text{см ст}} = i\omega\varepsilon \vec{E}_{\text{ст}} = \varepsilon\omega \vec{E}_{\text{ст}} e^{i\frac{\pi}{2}}, \text{ тобто } i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Таким чином, рисунок силових ліній струму зміщення буде подібний рисунку силових ліній вектора \vec{E} , але з різницею по фазі на $\frac{\pi}{2}$.

Для хвилі, що поширюється, це означає, що вектор струму зміщення $\dot{j}_{\text{см}}$ досягає максимального значення в той же момент, що і вектор \vec{E} , але в іншому місці, зміщеному по осі на $\frac{\lambda}{4}$, тобто різниця фаз $\frac{\pi}{2}$ відповідає шляху в $\frac{\lambda}{4}$.

$$\phi = \omega t - \beta z + \varphi_0$$

Якщо $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, то z повинно бути більше на $\frac{\lambda}{4}$.

У струмі зміщення така ж фаза, що і у \vec{E} буде в точці, більш віддаленій на $\frac{\lambda}{4}$ від початку координат.

11.2. Послідовність побудови структури полю

Побудову починають з того вектора, який має менше проєкцій.

Для хвилі H_{10} вектори мають наступні складові: E_y , H_x , H_z . Інші складові дорівнюють нулю

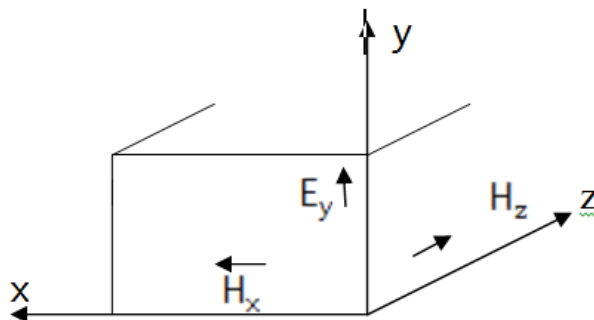


Рис.11.1. Прямокутний хвилевід

Тому потрібно починати побудову з вектора \vec{E} .

11.3. Визначення законів змінення векторів поля в поперечному перерізі

Чим більше значення вектора, тим щільніші силові лінії.

Спочатку будуюмо силові лінії в поперечній площині

$$E_{ст y} \sim \left(\sin \frac{m\pi}{a} x\right) \cdot \left(\cos \frac{n\pi}{b} y\right) = \left(\sin \frac{m\pi}{a} x\right)$$

$$E_{ст x} = 0$$

Вздовж координати x величина вектора \vec{E} змінюється за законом синуса. В стінках $E_y = 0$, в центрі хвильоводу значення E_y максимальне.

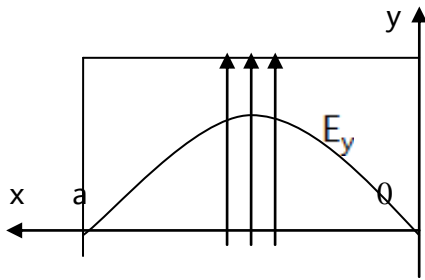


Рис.11.2. Залежність вектор \vec{E} хвилі типу H_{10} від координати x

Вздовж координати y вектор E_y не змінюється, не залежить від y . Це означає, що силові лінії повинні бути прямими, починатися на нижній стінці і закінчуються на верхній (вектор E перпендикулярний поверхні ідеального провідника).

11.4. Після цього будується структура силових ліній вектора \vec{E} в об'ємі, вздовж координати z :

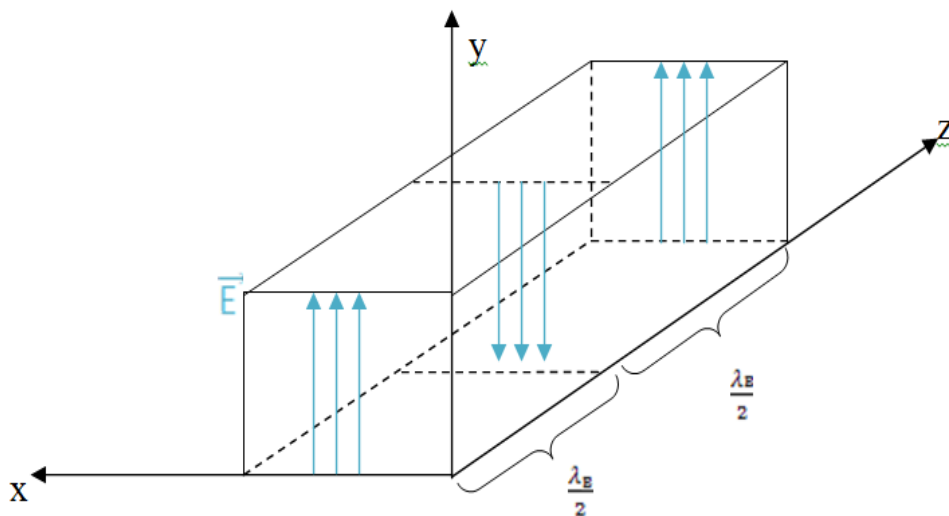


Рис.11.3. Вектор \vec{E} хвилі типу H_{10} у прямокутному хвильоводі

11.5. Побудова силових ліній струму зміщення

Після побудови силових ліній вектора \vec{E} будуються силові лінії струму зміщення. Вони будуть розміщені також, як і силові лінії вектора \vec{E} , але зміщені в бік збільшення координати Z на $\frac{\lambda_g}{4}$.

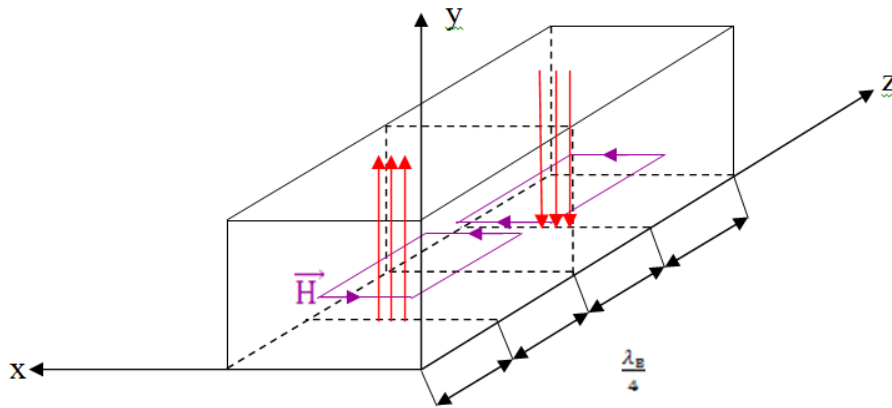


Рис.11.4. Вектор \vec{H} хвилі типу H_{10} у прямокутному хвилеводі

Силові лінії магнітного поля \vec{H} замикають контур навколо струму зміщення. Тому силові лінії \vec{H} будуть мати вигляд замкнутих ліній, а напрямок визначається так, щоб вектор \vec{P} ($\vec{E} \times \vec{H} = \vec{P}$) співпадав з напрямком поширення хвилі:

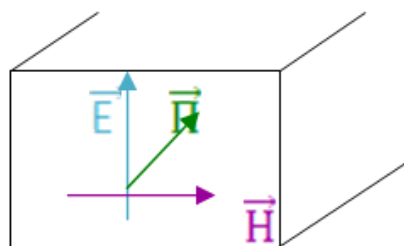


Рис.11.5. Визначення напрямку вектора \vec{H}

Інакше, напрямок силових ліній \vec{H} можливо визначити по правилу правого буравчика, навколо струму зміщення.

11.6. Побудова силових ліній струмів провідності

Структура струмів провідності будується на основі векторного співвідношення:

$$\vec{j}_{\text{пр}} = \vec{n} \times \vec{H}_\tau$$

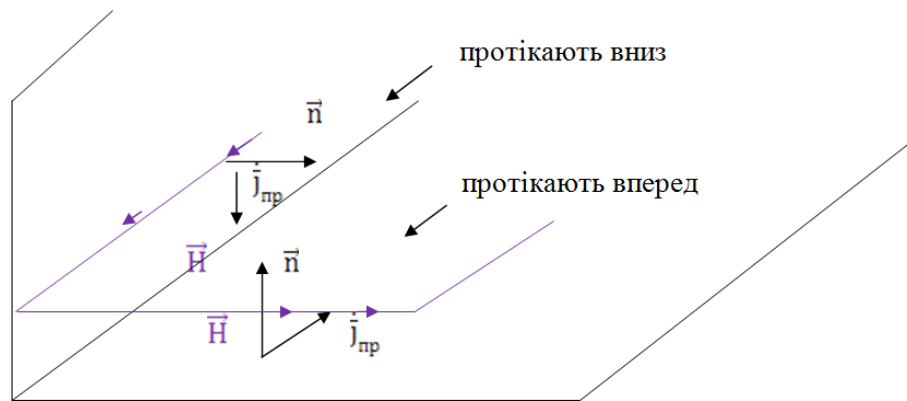


Рис.11.6. Визначення напрямку вектора струму провідності $\vec{j}_{\text{пр}}$ на стінках хвилеводу

В результаті на стінах струми провідності $\vec{j}_{\text{пр}}$ замикаються на струми зміщення.

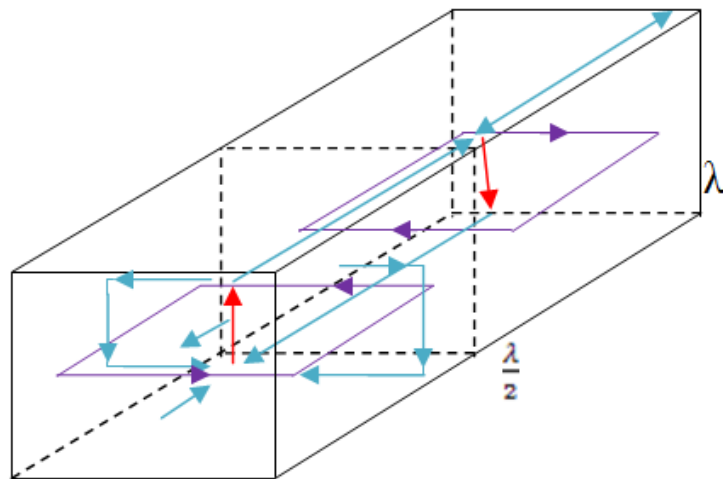


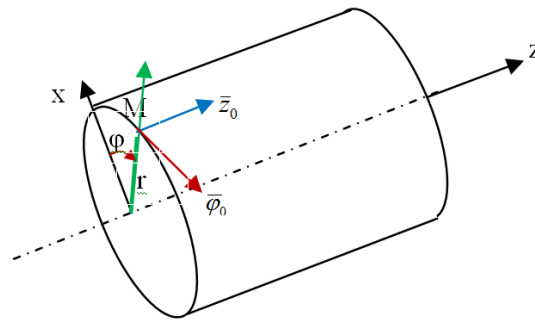
Рис.11.7. Побудова вектора струму провідності та струму зміщення

Знання того, як протікають струми провідності, необхідно для створення різноманітних приладів НВЧ, наприклад – щілинних антен. Вони і мають прорізи в стінках. Якщо струм перпендикулярний прорізу, то на її краях буде різниця потенціалів і виникне збудження електромагнітних хвиль в просторі.

11.7. Електромагнітні хвилі у хвилеводах круглого перерізу

Дослідження поширення електромагнітних хвиль в хвилеводі круглого перерізу здійснюється тим же методом, що в прямокутному хвилеводі.

Використаємо циліндричну систему координат:



Циліндрична система координат

Радіус хвилеводу позначимо a . В середині знаходиться ідеальний діелектрик з параметрами $\epsilon, \mu, \sigma_d=0$. Провідність стінок $\sigma_M \rightarrow \infty$.

Як і у випадку прямокутного хвилеводу, хвилі можуть бути двох типів:

- електричні, типу E, відповідає електричному вектору Герца $\bar{\Pi}^e$;
- магнітні, типу H, відповідає магнітному вектору Герца $\bar{\Pi}^h$.

Вектори Герца задовольняють рівнянню хвилі:

$$\nabla^2 \bar{\Pi}_m^i + k^2 \bar{\Pi}_m^i = 0, \text{ де } \mathbf{r}^x - M; \quad \bar{z}_0 \text{ ке } 1. \text{ Їбно вирішити в циліндричній}$$

системі координат методом розподілу змінних для єдин ої координати вектора Герца:

$$\bar{\Pi}_{mz} = \dot{R}(r) \cdot \dot{\Phi}(\varphi) \cdot \dot{Z}(z),$$

так, як це ми робимо в прямокутному хвилеводі.

В циліндричній системі координат рішення для R, Φ і Z має вигляд:

$$\dot{R}(r) = C_1 I_m(K_i r) + C_2 N_m(K_i r);$$

$$\dot{\Phi}(\varphi) = D \cos m(\varphi - \varphi_0);$$

$$\dot{Z}(z) = A e^{-\gamma_i z} + B e^{\gamma_i z}.$$

$$\text{де } \gamma_i = \sqrt{K_i^2 - \omega^2 \epsilon \mu}.$$

Постійна в цих рівняннях визначається з різних умов.

$m = 0, 1, 2, \dots$ - цілі числа

φ_0 - визначається умовами збудження електромагнітних хвиль, орієнтацією системи координат. Далі рахуємо $\varphi_0 = 0$.

A і B із рішення для \dot{Z} - знаходять аналогічно прямокутному хвилеводу.

Окремо розглянемо функцію $\dot{R}(r) = C_1 I_m(K_i r) + C_2 N_m(K_i r)$

$I_m(K_1 r)$ - функція Бесселя 1-го роду m -го порядку

$N_m(K_1 r)$ - функція Бесселя 2-го роду (інша назва - функція Неймана) m -го порядку.

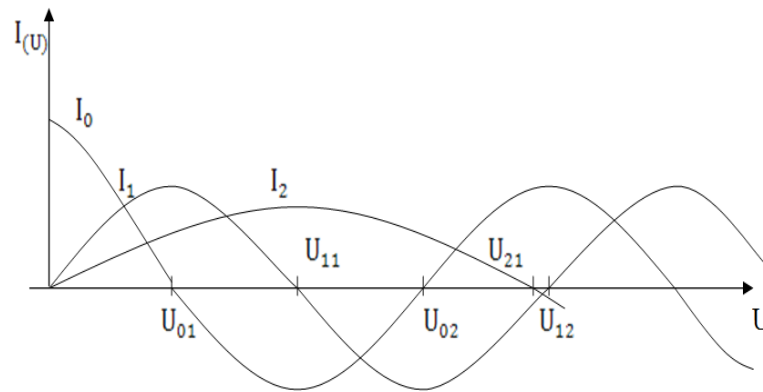


Рис.11.9. Графіки функцій Бесселя першого роду

U_{0i} - i -ий корінь функції Бесселя 0-го порядку

U_{1i} - i -ий корінь функції Бесселя 1-го порядку

n -ий корінь

m -ий порядок

Функція Неймана має вигляд:

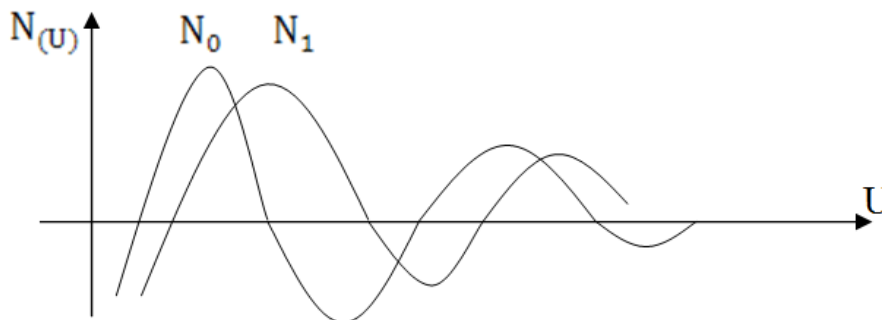


Рис.11.10 Графіки функцій Бесселя другого роду

Тому що вектори поля в середині хвильоводу не можуть бути нескінченно великими, то постійна при N_m , тобто C_1 , повинна бути рівна 0.

Якщо точка $r = 0$ не входить в область, зайняту електромагнітним полем (в коаксіальному кабелі), тому потрібно враховувати і другу складові, тобто $C_1 \neq 0$.

Хвильоводні рівняння зв'язку отримують так само, як і для прямокутного хвильовода, але в циліндричній системі координат. Ці рівняння зв'язують вектори \vec{E} і \vec{H} і функції $R(r)$, $\Phi(\phi)$, $Z(z)$.

Потім застосовують граничні умови: дотична складова \vec{E} не металевої поверхні дорівнює нулю, тобто $E_{\varphi} = 0$ при $r = a$.

Таким чином, отримуємо, що для електричних типів хвиль повинно бути $I_m(K_e a) = 0$ для $E_{\varphi} = 0$, а для магнітних $I_m'(K_h a) = 0$, де I_m' - похідна функції Бесселя.

Значення функції Бесселя та її похідної можуть дорівнювати нулю при різних значеннях аргументу U . Всі ці аргументи задовольняють граничним умовам:

для електричних хвиль $E_{\text{типу}}$ повинно бути $K_e a = U_{mn}$

для магнітних хвиль $H_{\text{типу}}$ повинно бути $K_h a = U'_{mn}$,

де U_{mn} - n -ий корінь функції Бесселя m -го порядку

U'_{mn} - n -ий корінь похідної функції Бесселя m -го порядку.

Тому що значення коренів функції Бесселя і її похідної відомі, можемо знайти постійні K_e і K_h , що відповідають граничним умовам:

$$K_e = \frac{U_{mn}}{a}, m = 0, 1, 2, \dots n = 1, 2, 3, \dots$$

$$K_h = \frac{U'_{mn}}{a}, m = 0, 1, 2, \dots n = 1, 2, 3, \dots$$

Деякі перших коренів похідної функції Бесселя :

N	U_{mn}		U'_{mn}	
	m=0	m=1	m=0	m=1
1	2,405	3,832	3,832	1,841
2	5,520	7,016	7,016	5,332

Аналіз виразів для векторів поля в круглому хвилеводі показує що:

а) фазова стала $\beta_i = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - K_i^2}$ - така ж, як в прямокутному хвилеводі.

б) поперечні хвильові числа $K_e = \frac{U_{mn}}{a}; K_h = \frac{U'_{mn}}{a}$.

в) як і в прямокутному хвилеводі, в круглому можуть розповсюджуватися хвилі типів E та H. Хвилею основного типу являється хвиля H_{11} . Вона має найнижчу критичну частоту.

г) кожний тип хвилі має свою критичну частоту.

Її знаходять при $\beta_i = 0$, звідки $\omega_{кр}^2 \epsilon \mu = K_i^2$;

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{K_i}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

д) індекс m входить в функцію $\Phi(\varphi) = D \cos m\varphi$, (і в порядок функції Бесселя також). Цей індекс показує, скільки періодів зміни поля розподіляється по колу хвилеводу.

При $m = 0$ $\Phi(\varphi) \equiv 1 = \text{const}$. Це означає, що вектори E і H не залежать від координати φ .

При $m = 1$ $\Phi(\varphi) = D \cos \varphi$. При зміні φ від 0 до 2π функція $\Phi(\varphi)$ змінюється один раз від 1 до 0 , -1 ; 0 та $+1$.

Індекс n визначає номер кореня функції (або похідної) функції Бесселя. Цей індекс входить в функції $R(r) = C I_m \left(\frac{U_{mn}}{a} r \right)$ або в функції $R(r) = C I_m' \left(\frac{U'_{mn}}{a} r \right)$, від яких залежать складові поля.

Тому при зміні координати r , тобто при русі від центра хвилеводу до краю, значення векторів поля змінюється по закону функції Бесселя чи її похідної, переходячи через нуль стільки раз, який номер кореня.

е) в круглому хвилеводі хвиля T розповсюджуватись не може, тобто при $U_{mn} = 0$ або $U'_{mn} = 0$ всі складові векторів E і H дорівнюють нулю.

є) критична довжина хвилі

$$\lambda_{\text{кр} e} = \frac{c}{f_{\text{кр}}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \cdot \frac{2\pi}{\omega_{\text{кр}}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \cdot \frac{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}a}{U_{mn} U'_{mn}} = \frac{2\pi a}{U_{mn}},$$

$$\text{тобто} \quad \omega_{\text{кр}} = \frac{K_i}{\sqrt{\epsilon\mu}}; K_e = \frac{U_{mn}}{a}; K_h = \frac{U'_{mn}}{a}.$$

$$\text{Аналогічно} \quad \lambda_{\text{кр} h} = \frac{2\pi}{U'_{mn}}.$$

Найменш мале значення U_{mn}, U'_{mn} дорівнює $1,841$ для хвилі H_{11} .

$$\lambda_{\text{кр} H_{11}} = \frac{2\pi}{1,841} = 3,41a.$$

Якщо буде $\lambda > \lambda_{\text{кр}}$, то хвиля даного типу у хвилеводі не поширюється.

Структура силових ліній хвилі H_{11} подібна хвилі H_{10} в прямокутному хвилеводі, це дозволяє просто здійснити перехід від прямокутного хвилеводу до круглого.

Залежність загасання деяких типів хвиль від частоти наведено на рис.11.11.

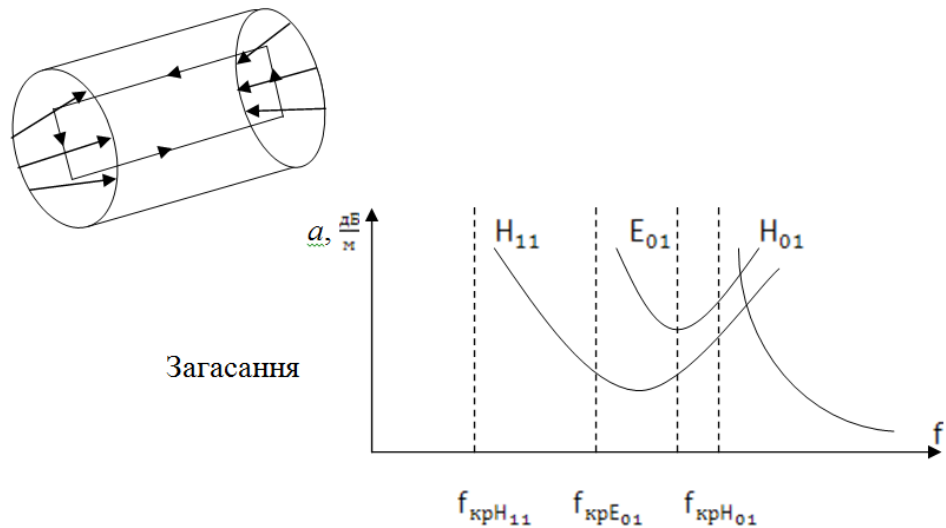


Рис.11.11 Загасання у круглому хвилеводі

Аномальна залежність загасання для хвилі H_{01} пояснюється структурою поля (р.с.11.12).

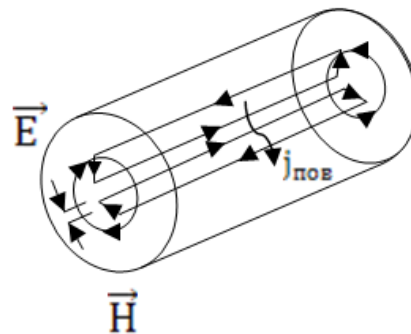


Рис.11.12 Струми провідності хвилі типу H_{01} у круглому хвилеводі

При підвищенні частоти поле ґрунтується в центрі хвилеводу і відділяється від стінок. Тому щільність поверхневих струмів зменшується.

Фільтрація інших типів полів хвиль здійснюється хвилеводними вставками, що мають вигляд спіралей або кілець. Інші типи хвиль мають поверхневі струми, направлені поперек напрямку поширення, тому і загасають.

11.8. Електромагнітні хвилі у коаксіальній лінії

Коаксіальний хвилевід являє собою два металеві циліндра, в просторі між якими розповсюджуються електромагнітні хвилі. Звичайно цей простір заповнюють діелектриком з малими втратами на НВЧ (повітря, поліетилен, полістирол).

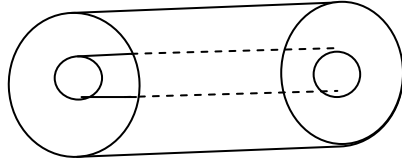


Рис.11.13. Структура коаксіального хвилеводу

Рішення хвильової для коаксіального хвилеводу відрізняється від рішення для круглого тим, що граничні умови накладаються на поверхні внутрішнього і зовнішнього провідників.

В результаті отримуємо трансцендентне рівняння виду:

$$\frac{I_m(K_e r_6)}{N_m(K_e r_6)} = \frac{I_m(K_e r_m)}{N_m(K_e r_m)} \text{ для хвилі } \vec{E}\text{-типу}$$

$$\frac{I'_m(K_h r_6)}{N'_m(K_h r_6)} = \frac{I'_m(K_h r_m)}{N'_m(K_h r_m)} \text{ для хвилі } \vec{H}\text{-типу}$$

Розв'язати такі рівняння можна численними методами, за допомогою яких знаходять постійні $K_{m1}, K_{m2}, \dots, K'_{m1}, K'_{m2}, \dots$ (власні числа).

Кожному власному числу відповідає свій тип хвилі, критична частота.

Важливо, що при $m = 0$ та $n = 0$ одночасно виходить, що $E_z = 0$ і $H_z = 0$. Це означає, що поперечні складові \vec{E} і \vec{H} не дорівнюють нулю.

Тобто в коаксіальному хвилеводі може існувати хвиля типу Т.

Для того, щоб $E_z = 0$ та $H_z = 0$, потрібно $K_e = 0$ і $K_h = 0$.

Відомо: $\beta = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - K_i^2}$. З цього рівняння знайдемо критичну частоту, при якій $\beta = 0$:

$$\omega_{кр}^2 \epsilon \mu = K_i^2; \quad \omega_{кр} = \frac{K_i}{\sqrt{\epsilon \mu}}.$$

З цього випливає дуже важливий висновок, що для хвилі Т-типу, де $K_i = 0$, критична частота $\omega_{кр} = 0$.

Структура хвилі типу Т:

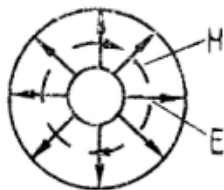


Рис.11.14. Вектори E та H у коаксіальному хвилеводі

Можна показати із трансцендентних рівнянь, що першим вищим типом хвилі в коаксіальному хвилеводі є хвиля типу H_{11} .

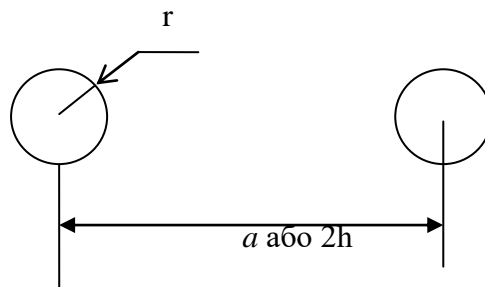
Її структура нагадує хвилю типу H_{11} в круглому хвилеводі.

Критична довжина для цього типу хвилі $\lambda_{крH_{11}} \approx \pi(r_M + r_B)$.

11.9. Інші види направляючих систем

11.9.1. Симетрична лінія

Конструкція симетричної лінії показана на рис.11.15:



Симетрична лінія

Для точного аналізу поля в такій лінії необхідно знайти рішення рівняння Гельмгольца в біполярній системі координат, що являється доволі складною задачею.

Основні висновки із рішення задачі для симетричної лінії:

- у симетричній лінії можливо поширення двох видів Т хвиль, коли струми в проводах у будь-якому перерізі або протифазні або симфазні. На практиці реалізується перший варіант.

- структура поля в симетричній лінії зображена на рис.11.16:

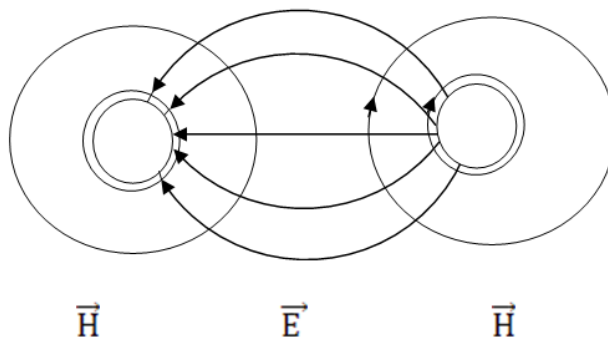


Рис.11.16. Структура поля у симетричній лінії

Хвилі розповсюджуються від нас.

11.9.2. Поняття про смужкову лінію

Потрібно прочитати і законспектувати матеріал за літературою:

Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика, с. 306-309.

Потрібно вивчити питання: які бувають смужкові лінії; який тип хвилі поширюється в смужкових лініях; характер втрат в смужкових лініях; їх переваги і недоліки в порівнянні хвилеводами; області використання симетричних та несиметричних смужкових ліній.

12. Випромінювання електромагнітних хвиль

12.1. Поняття про задачі випромінювання.

Можливість випромінювання і поширення електромагнітної енергії в просторі безпосередньо слідує з рівнянь Максвелла. Перше рівняння зв'язує змінне у просторі магнітне поле та змінне у часі електричне:

$$\text{rot}\bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial\bar{D}}{\partial t} = \bar{j} + \bar{j}_{\text{см}},$$

Це означає, що струми зміщення і провідності створюють навколо себе магнітне поле.

У свою чергу, магнітне поле, що змінюється у часі, породжує електричне поле, змінне у просторі:

$$\text{rot}\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}.$$

Поширення в просторі струму зміщення супроводжується появою потоку енергії, що поширюється від джерела. Випромінювання буде відбуватися у довколишній простір.

Це підтверджується теоремою Пойнтінга.

Таким чином, електрична схема, здатна збуджувати в просторі струми зміщення або провідності, може являти собою випромінювач електромагнітної енергії.

Згадаємо перші два рівняння Максвелла у комплексному вигляді:

$$\text{rot}\dot{\bar{H}}_m = i\omega\epsilon_{\kappa}\dot{\bar{E}}_m + \dot{\bar{j}}_{\text{сморп}},$$

$$\text{rot}\dot{\bar{E}}_m = -i\omega\mu\dot{\bar{H}}_m.$$

З цих двох рівнянь ми раніше вже отримували два векторні хвильові неоднорідні рівняння Гельмгольца:

$$\text{відносно вектора } \dot{\bar{E}}_m : \nabla^2\dot{\bar{E}}_m + k^2\dot{\bar{E}}_m = i\omega\mu\dot{\bar{j}}_{\text{сморп}}, \quad (12.1)$$

$$\text{відносно вектора } \dot{\bar{H}}_m : \nabla^2\dot{\bar{H}}_m + k^2\dot{\bar{H}}_m = -\text{rot}\dot{\bar{j}}_{\text{сморп}}. \quad (12.2)$$

У випадку використання векторного потенціалу $\dot{\bar{A}}_m$ ми отримували хвильове рівняння відносно цього вектора:

$$\nabla^2\dot{\bar{A}}_m + k^2\dot{\bar{A}}_m = -\mu\dot{\bar{j}}_{\text{сморп}}, \quad (12.3)$$

розв'язавши яке, за допомогою рівнянь зв'язку

$$\dot{\bar{H}}_m = \frac{1}{\mu}\text{rot}\dot{\bar{A}}_m,$$

$$\dot{\vec{E}}_m = -i\omega\dot{\vec{A}}_m - \text{grad}\dot{\phi}_m,$$

та з використанням умови калібрування потенціалів Лоренца $\text{div}\dot{\vec{A}}_m + i\omega\varepsilon_k\mu\dot{\phi}_m = 0$, одержують потрібне рішення для векторів $\dot{\vec{E}}_m$ та $\dot{\vec{H}}_m$.

Порівнюючи хвильові рівняння (12.1-3) для векторів $\dot{\vec{E}}_m$, $\dot{\vec{H}}_m$ та $\dot{\vec{A}}_m$, робимо висновок, що у випадку існування джерел поля у вигляді сторонніх струмів $\vec{j}_{\text{ем}}$, з'являються вектори поля $\dot{\vec{E}}_m$, $\dot{\vec{H}}_m$, що змінюються у просторі та часі. Це призводить до існування не рівного нулю вектора Пойнтінга, тобто до поширення електромагнітної енергії у просторі.

Питання: як знайти із неоднорідних рівнянь (12.1-3) вектори $\dot{\vec{E}}_m$ та $\dot{\vec{H}}_m$? Зауважимо, що кожне із векторних рівнянь (12.1-3) розкладається на кілька скалярних рівнянь відносно складових векторів $\dot{\vec{E}}_m$, $\dot{\vec{H}}_m$ та $\dot{\vec{A}}_m$.

В математиці існують методи розв'язання подібних задач.

12.2. Формула Кірхгофа. Фізичний зміст величин в формулі Кірхгофа

При рішенні задач випромінювання доводиться розв'язувати скалярні хвильові рівняння виду:

$$\nabla^2\dot{U}_m(M') + k^2\dot{U}_m(M') = -\dot{g}_m(M'), \quad (12.4)$$

де $\dot{U}_m(M')$ - невідома функція (векторна складова), яку треба знайти,

$k^2 = \omega^2\varepsilon_k\mu$ - хвильове число (або $\omega^2\varepsilon_k\mu$),

$\dot{g}_m(M')$ - функція, пов'язана з джерелом поля,

M' - координати поточної точки.

Розв'язання хвильового рівняння називається формулою Кірхгофа та має вигляд:

$$\dot{U}_m(M) = \frac{1}{4\pi} \int_V \dot{g}_m(M') \frac{e^{-ikR'}}{R'} dV + \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{\partial \dot{U}_m(M')}{\partial n} \frac{e^{-ikR'}}{R'} dV - \dot{U}_m(M') \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikR'}}{R'} \right) \right] dS. \quad (12.5)$$

З якою метою застосовується формула Кірхгофа? З її допомогою можна по значенням джерел поля $\dot{g}_m(M')$ у деякому об'ємі V та за значенням хвильової функції \dot{U}_m на поверхні S , що обмежує об'єм V , визначити хвильову функцію \dot{U}_m у довільній точці M об'єму V .

12.3. Зміст величин, що входять до формули Кірхгофа.

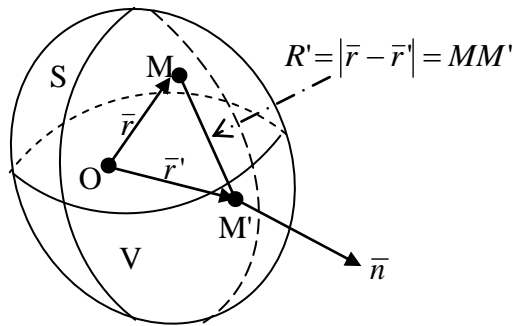


Рис.12.1. Значення величин у формулі Кірхгофа

V – об'єм, обмежений поверхнею S ;
 M – точка спостереження усередині V , в якій знаходять вектори;

M' - поточна точка (інтегрування), знаходиться або на поверхні S , або у об'ємі V ;

$R' = |\vec{r} - \vec{r}'| = MM'$ - відстань від M до M' ;

\vec{n} - нормаль до поверхні S в точці M' ;

функція $\dot{U}_m(M')$ - скалярна функція, яка задовольняє хвильовому рівнянню $\nabla^2 \dot{U}_m(M') + k^2 \dot{U}_m(M') = -\dot{g}_m(M')$;

$\dot{g}_m(M')$ - задана функція, пов'язана з джерелом поля;

$k = const$ (звичайно $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$).

Порівнюючи рівняння (4) з хвильовими рівняннями для векторів електромагнітного поля (1), (2) та (3), робимо висновок, що під функцією $\dot{U}_m(M')$ можна розуміти будь-яку декартову складову векторів \dot{E}_m , \dot{H}_m та \dot{A}_m .

Зміст функції $\dot{g}_m(M')$ залежить від функції $\dot{U}_m(M')$. Але завжди ця функція пов'язана з джерелом поля $\dot{j}_{сторм}$.

З'ясуємо зміст інтегралів у формулі Кірхгофа.

Розглянемо два випадки:

а) джерел поля усередині об'єму V немає, $\dot{g}_m(M') = 0$ усередині об'єму V .

$$\text{Тоді } \frac{1}{4\pi} \int_V \dot{g}_m(M') \frac{e^{-ikR'}}{R'} dV = 0 .$$

Залишився тільки поверхневий інтеграл. Це означає що поверхневий інтеграл характеризує поле, збуджене джерелами ззовні об'єму V .

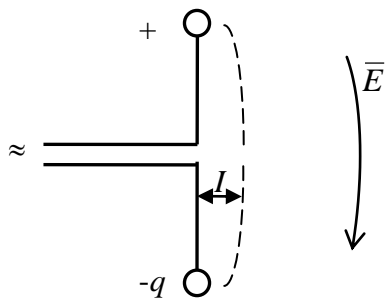
б) припустимо, що ззовні об'єму V джерел поля немає. Тоді поверхневий інтервал повинен бути рівний нулю. Залишився інтервал по об'єму – він визначає складову поля, збудженого джерелами, що знаходяться усередині V .

12.4. Елементарний електричний випромінювач, аналіз структури поля випромінювача. Діаграми направленості випромінювача

12.4.1. Елементарний електричний випромінювач (ЕЕВ)

Елементарним електричним випромінювачем називають короткий, у порівнянні з довжиною хвилі, дріт з током, амплітуда і фаза котрого не змінюється вздовж дроту. Це ідеалізація, на практиці створення такого вібратора неможливе, так як амплітуда та фаза по довжині будуть змінюватись.

Один з варіантів схеми, що забезпечує ефективне випромінювання, є так званий диполь Герца (вібратор Герца). Цей диполь Герца дуже близький до ЕЕВ. Завдяки металевим кулькам амплітуда струму майже постійна, завдяки малій довжині – постійна фаза струму.



Завдяки тому, що кульки на кінцях диполя мають деяку ємність, амплітуда струму у диполі буде майже однакова.

Рис.12.2. Електричний диполь Герца

Вивчення випромінювання ЕЕВ важливе для теорії антен, тому що як будь-яке провідне тіло можна вважати таким, що складається з множини ЕЕВ. Результуюче поле можна отримати шляхом підсумовування полів елементарних випромінювачів.

Постановка задачі:

У необмеженому, однорідному, ізотропному, нерухомому середовищі з параметрами $\varepsilon, \mu, \sigma = 0$, є випромінювач довжиною l , відома комплексна амплітуда току у випромінювачі \dot{I}_m , частота ω .

Визначити: комплексні амплітуди векторів $\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m$ в точці спостереження М.

Рішення:

а) обираємо сферичну систему координат, в початку якої – середина випромінювача, вісь Z спрямована вздовж випромінювача.

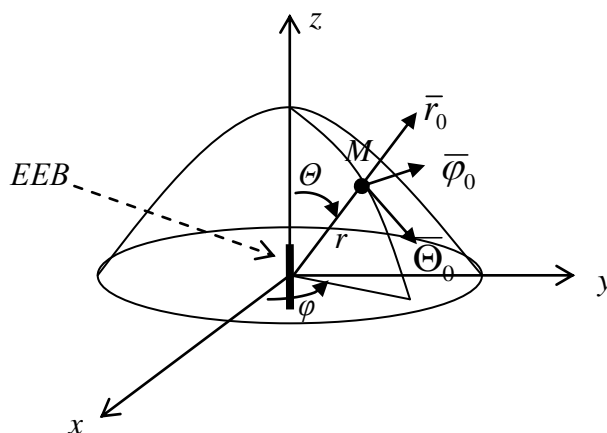


Рис.12.3 Орієнтація ЕЕВ у сферичній системі координат

Струм у випромінювачі має тільки одну z -ву складову: $\dot{j}_{сторм} = \dot{j}_{стормz} \cdot \bar{z}_0$.

б) тому що задане джерело поля, яке знаходиться усередині об'єму V , треба вибрати тільки об'ємний інтеграл в формулі Кірхгофа:

$$\dot{U}_m(M) = \frac{1}{4\pi} \int_V \dot{g}_m(M') \frac{e^{-ikR'}}{R'} dV. \quad (12.6)$$

в) обираємо функції $\dot{U}_m(M')$ та $\dot{g}_m(M')$.

Можна використати різноманітні вектори: електромагнітного поля $\dot{\vec{E}}_m$, $\dot{\vec{H}}_m$, векторний потенціал $\dot{\vec{A}}_m$, електромагнітні потенціали – вектори Герца. Виявляється, що розв'язання буде простішим при використанні векторного потенціалу $\dot{\vec{A}}_m$.

Для векторного потенціалу $\dot{\vec{A}}_m$ раніше вже було отримано хвильове рівняння $\nabla^2 \dot{\vec{A}}_m + k^2 \dot{\vec{A}}_m = -\mu \dot{j}_{сторм}$. Тому

$$\dot{U}_m(M') = \dot{\vec{A}}_m,$$

$$\dot{g}_m(M') = +\mu \dot{j}_{сторм}.$$

У обраній системі координат сторонній струм має тільки одну складову, що не дорівнює нулю (z -ву): $\dot{j}_{сторм} = \dot{j}_{стормz} \cdot \bar{z}_0$.

Підставивши ці вирази в рівняння (6), переходимо до виразу:

$$\dot{\vec{A}}_m(M) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\dot{j}_{стормz}(r') e^{-ik|\bar{r}-\bar{r}'|}}{|\bar{r}-\bar{r}'|} dV. \quad (12.7)$$

г) обчислюємо інтеграл (7).

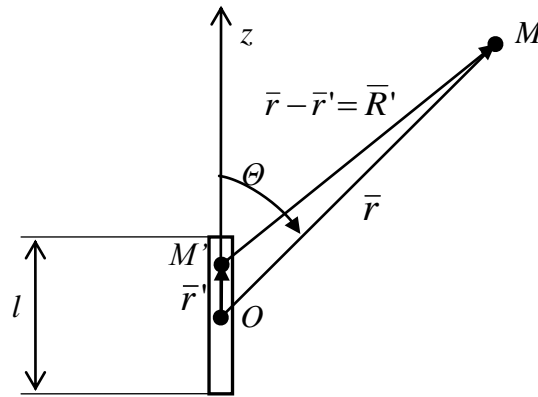


Рис.12.4. Наближене інтегрування по об'єму випромінювача V

Позначення: M – точка, де обчислюється вектор $\dot{\vec{A}}_m$;

M' – поточна точка інтегрування.

Під час інтегрування наближено будемо вважати, що \vec{r} та $\vec{r} - \vec{r}'$ майже рівні (рис.4).

Інтегрування потрібно проводити по тому об'єму V, у якому існують струми ($\dot{g}_m(M') \neq 0$), тобто по об'єму випромінювача. Звичайно всі розміри випромінювача та відстань r' від точки інтегрування M' до початку координат O значно менші за відстань r від точки спостереження M до початку координат O, тобто при $r' \ll r$. У цьому випадку відстань r від точки спостереження M до початку координат O буде приблизно дорівнювати відстані R' між точками інтегрування M' та спостереження M, тобто $\vec{R}' = \vec{r} - \vec{r}' \approx \vec{r}$. Це видно на рис.4. Тому в інтегралі (7) функція $\vec{R}' = \vec{r} - \vec{r}' \approx \vec{r} = const$ не залежить від точки інтегрування і може бути винесена за знак інтеграла. Маємо:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{A}}_m(M) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\dot{j}_{cmopzm}(r') e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV \approx \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \int_V \dot{j}_{cmopzm}(r') dV = \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \int_S \dot{j}_{cmopzm}(r') dS \cdot \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dl = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} I_m l. \end{aligned}$$

д) з знайденого векторного потенціалу $\dot{\vec{A}}_m$ за допомогою рівнянь зв'язку

$$\dot{\vec{H}}_m = \frac{1}{\mu} \text{rot} \dot{\vec{A}}_m,$$

$$\dot{\vec{E}}_m = -i\omega \dot{\vec{A}}_m - \text{grad} \dot{\phi}_m,$$

знаходять вектори $\dot{\bar{E}}_m$ та $\dot{\bar{H}}_m$.

Після очевидних перетворень отримуємо:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{E}}_m = & \frac{\dot{I}_m l k^3}{2\pi\omega\epsilon} \left[\left(\frac{1}{kr} \right)^2 - i \left(\frac{1}{kr} \right)^3 \right] \cos \Theta \cdot e^{-ikr} \cdot \bar{r}_0 + \\ & + i \frac{\dot{I}_m l k^3}{4\pi\omega\epsilon} \left[\left(\frac{1}{kr} \right) - i \left(\frac{1}{kr} \right)^2 - \left(\frac{1}{kr} \right)^3 \right] \sin \Theta \cdot e^{-ikr} \cdot \bar{\Theta}_0; \end{aligned}$$

(8)

$$\dot{\bar{H}}_m = i \frac{\dot{I}_m l k^2}{4\pi} \left[\left(\frac{1}{kr} \right) - i \left(\frac{1}{kr} \right)^2 \right] \sin \Theta \cdot e^{-ikr} \cdot \bar{\varphi}_0.$$

12.4.2. Аналіз структури поля випромінювача. Тип хвилі ЕЕВ

Вектор \bar{E} має дві складові: E_r та E_θ .

Вектор \bar{H} має одну складову H_φ .

Тому ЕЕВ випромінює хвилю типу E .

Вектор \bar{E} лежить у площині, що проходить через вісь вібратора та точку спостереження, а вектор \bar{H} - в площині, перпендикулярній вісі вібратора.

Хвиля, яку випромінює ЕЕВ – сферична, тому що фаза визначається множителем e^{-ikr} , фаза залежить від відстані r від початку координат. Поверхня рівних фаз – сфера з радіусом r .

12.4.3. Ділення простору на зони

Співвідношення між складовими векторів залежить від параметра $\frac{1}{kr} = \frac{\lambda}{2\pi r}$. Тому

простір навколо випромінювача поділяють на зони:

а) дальня зона, відстань до точки спостереження значно більша за довжину хвилі,

$$r \gg \lambda, \quad kr \gg 1, \quad \frac{1}{kr} \ll 1.$$

$$\text{Тому } \left(\frac{1}{kr} \right)^3 \ll \left(\frac{1}{kr} \right)^2 \ll \left(\frac{1}{kr} \right).$$

Дальня зона представляє найбільший практичний інтерес. З рівнянь (8) видно, що у вектора \overline{E} r -ва складова значно менша за Θ -ву, в якій є частина з параметром $\frac{1}{kr}$. У вектора \overline{H} буде присутня φ -ва складова, в якій також є складова частина з параметром $\frac{1}{kr}$.

Нехтуючи доданками $\left(\frac{1}{kr}\right)^3$ та $\left(\frac{1}{kr}\right)^2$, отримуємо

$$\dot{\overline{E}}_m = i \frac{\dot{I}_m l \omega \mu}{4\pi} \sin \Theta \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \overline{r}_0 \cdot \overline{\Theta}_0;$$

$$\dot{\overline{H}}_m = i \frac{\dot{I}_m l \omega \sqrt{\varepsilon \mu}}{4\pi} \sin \Theta \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \overline{\varphi}_0.$$

Зробимо висновок, що у дальній зоні вектори \overline{E} та \overline{H} синфазні та майже перпендикулярні один до одного, $E_r \rightarrow 0$.

Амплітуда векторів пропорційна частоті, довжині випромінювача, амплітуді струму.

ЕЕВ - направлений випромінювач. Мінімум випромінювання спрямований вздовж вісі ЕЕВ (при $\Theta = 0$), а максимум (при $\Theta = \frac{\pi}{2}$) лежить в площині, перпендикулярній до вісі. Від координати φ вектори не залежать;

б) ближня зона.

Відстань до точки спостереження значно менша за довжину хвилі, $r \ll \lambda$, $kr \ll 1$, $\frac{1}{kr} \gg 1$.

Тому $\left(\frac{1}{kr}\right)^3 \gg \left(\frac{1}{kr}\right)^2 \gg \left(\frac{1}{kr}\right)$.

У вектора \overline{E} , нехтуючи доданками $\left(\frac{1}{kr}\right)$ та $\left(\frac{1}{kr}\right)^2$, залишається:

$$\dot{\overline{E}}_m = \frac{\dot{I}_m l k^3}{2\pi\omega\varepsilon} \left[-i \left(\frac{1}{kr}\right)^3 \right] \cos \Theta \cdot e^{-ikr} \cdot \overline{r}_0 + i \frac{\dot{I}_m l k^3}{4\pi\omega\varepsilon} \left[-\left(\frac{1}{kr}\right)^3 \right] \sin \Theta \cdot e^{-ikr} \cdot \overline{\Theta}_0.$$

У вектора \overline{H} , нехтуючи доданком $\left(\frac{1}{kr}\right)$, відповідно:

$$\dot{\vec{H}}_m = i \frac{I_m k^2}{4\pi} \left[-i \left(\frac{1}{kr} \right)^2 \right] \sin \Theta \cdot e^{-ikr} \cdot \vec{\varphi}_0.$$

Ми бачимо, що вектори \vec{E} та \vec{H} в ближній зоні мають зсув по фазі на $\frac{\pi}{2}$ (у вектора \vec{E} присутній множник i у всіх складових, а у вектора \vec{H} його немає, $i \cdot i = -1$). Тому вектор Пойнтінга буде уявним, енергія переноситься в оточуючий простір не буде, середнє за період значення вектора Пойнтінга дорівнюватиме нулю.

В ближній зоні навколо випромінювача існує велике реактивне поле, яке швидко зменшується з віддаленням від випромінювача.

12.5. Елементарний магнітний випромінювач. Елементарний щільний випромінювач

12.5.1. Елементарним магнітним випромінювачем (ЕМВ) називають систему магнітного току, малу у порівнянні з довжиною хвилі, амплітуда і фаза току в котрій однакова в усіх точках.

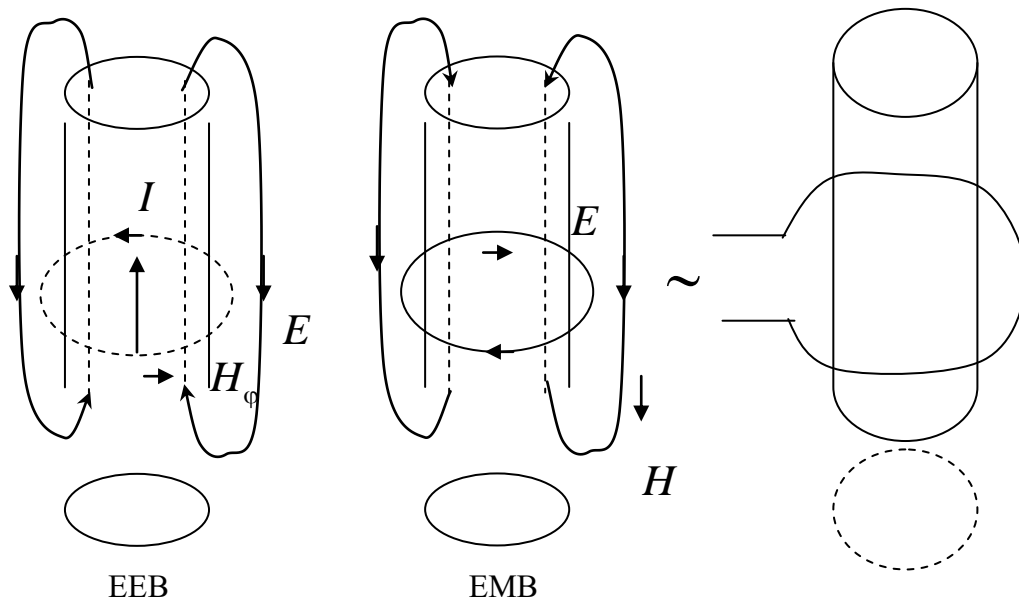


Рис.12.5 Порівняння ЕЕВ та ЕМВ

Створити ЕМВ можна, якщо використати стержень з великою магнітною проникністю μ_r , наприклад з фериту.

В якості збуджуючого пристрою можна використати рамку, по якій тече струм.

Саму рамку теж можна вважати ЕМВ

Порівнюючи поле ЕЕВ та ЕМВ, бачимо, що вектори \overline{E} та \overline{H} помінялись місцями.

Вираз для поля ЕМВ можна отримати з виразів для ЕЕВ, замінивши $E \rightarrow H$, $H \rightarrow E$; $\mu \rightarrow -\varepsilon$; $\varepsilon \rightarrow -\mu$ на основі принципу перестановочної подвійності.

Висновок: ЕМВ випромінює хвилю типу Н.

В дальній зоні це буде також сферична хвиля, вектори \overline{E} та \overline{H} синфазні. Направленні властивості ЕМВ аналогічні властивостям ЕЕВ.

12.5.2. Елементарний щілинний випромінювач

Припустимо, що по металевих стінках протікає струм. Зробимо щілину, яка переріже лінії струму, як показано на рисунку. Між стінками щілини будуть існувати силові лінії напруженості електричного поля.

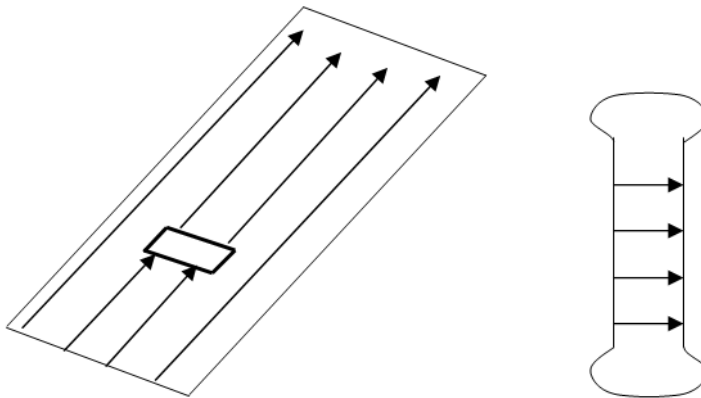


Рис.12.6. Елементарний щілинний випромінювач

Струми провідності перериваються і перетворюються у струми зміщення

Таку систему називають «Елементарний щілинний випромінювач» (ЕЩВ), яка еквівалентна половині елементарного магнітного випромінювача.

В неї дотична складова електричного поля така, як у ЕМВ. Відмінність: у ЕМВ силові лінії вектора \overline{E} замкнуті, а у ЕЩВ закінчуються на краях щілин. Тому структура поля ЕЩВ та ЕМВ будуть однакові. Направлені властивості ЕЩВ та ЕМВ аналогічні.

12.6. Випромінювання з поверхні. Принцип Гюйгенса

Часто буває важко розрахувати поле в дальній зоні, якщо задані джерела поля, тому що відбувається взаємодія поля з різноманітними об'єктами, що викривлюють поле.

Задача спрощується, якщо відомо поле на деякій поверхні, що оточує джерела.

Наприклад, так розраховуються характеристики антен.

Розв'язуємо задачу випромінювання з поверхні S_A (рис.12.7). Вважаємо, що нам задано значення вектора \vec{E}_m на поверхні рівних фаз S_A .

Первинні джерела поля знаходяться всередині конструкції і створюють поле на поверхні S_A .

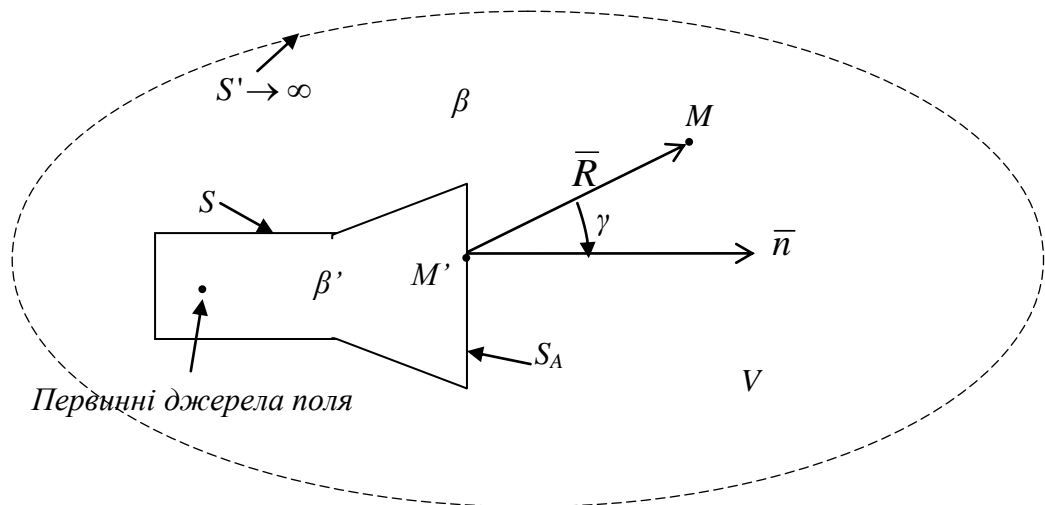


Рис.12.7. Випромінювання з поверхні S_A

На поверхні S поле відсутнє. Дві поверхні - S та S_A повністю оточують джерела поля, і вони є однією межею об'єму V .

Зовні об'єм V обмежений поверхнею $S' \rightarrow \infty$, яка знаходиться дуже далеко і на якій немає електромагнітного поля.

Фазова стала β' всередині поверхні $S_A + S$ може відрізнятись від фазової сталої $\beta = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ ззовні.

Точка спостереження, у якій потрібно знайти поле - M .

Точка інтегрування, у якій задано вектор \vec{E}_m - M' .

Кут між нормаллю до поверхні S_A у точці M' та напрямом до точки M позначимо γ .

Застосовуючи формулу Кірхгофа до об'єму V , обмеженому усередині поверхнею S та S_A , зовні поверхнею $S' \rightarrow \infty$, із (5) можна отримати вираз

$$\dot{E}_m(M) = \frac{i\beta}{4\pi} \int_{S_A} \left(\frac{\beta'}{\beta} + \cos \gamma \right) \dot{E}_m(M') \frac{e^{-i\beta R'}}{R'} dS \approx \sum_{mn} \frac{i\beta}{4\pi} \left(\frac{\beta'}{\beta} + \cos \gamma_{mn} \right) \dot{E}_{mnn} \frac{e^{-i\beta R'_{mn}}}{R'_{mn}} \Delta S_{mn}, \quad (12.9)$$

де R' - поточна відстань від M' до M (рис.12.8).

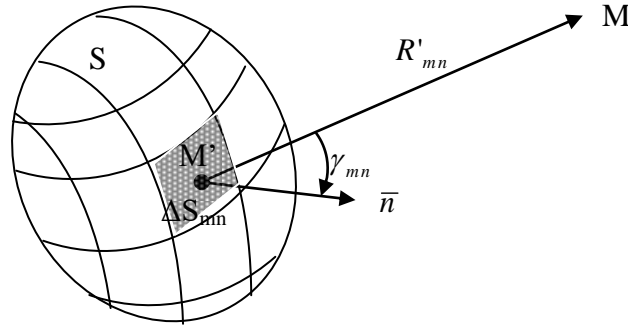


Рис. 12.8. Принцип Гюйгенса

Інтеграл у виразі (12.9) часто заміняють сумою, поверхню S_A розбивають на ділянки ΔS_{mn} . Кожний із доданків має свій фазовий множник $\frac{e^{-i\beta R'_{mn}}}{R'_{mn}}$, а це означає, що кожний з них описує сферичну хвилю з центром у центрі елемента.

Комплексна амплітуда напруженості поля цієї хвилі пропорційна площі ΔS_{mn} , полю $\dot{E}_{mnn}(M)$, зворотно пропорційна довжині хвилі $\sim \frac{1}{\lambda}$ (входить в β).

Інтенсивність випромінювання залежить і від кута γ_{mn} . Максимум буде при $\gamma_{mn} = 0$, по нормалі до поверхні, мінімум при $\gamma_{mn} = \pi$ (у зворотному напрямку).

Принцип Гюйгенса випромінювання з поверхні: кожний елемент поверхні рівних фаз випромінює сферичну хвилю з фазовим центром на елементі. Напруженість поля хвилі пропорційна напруженості поля на елементі та його площі.

Елемент поверхні рівних фаз – направлений випромінювач, максимум направлений у напрямку променя через елемент, мінімум – в протилежному напрямку.

Напруженість поля хвилі, випроміненої усією поверхнею рівних фаз, дорівнює сумі напруженостей хвиль, випромінених усіма елементами поверхні.

13. Типи і параметри антен, що використовуються в техніці зв'язку

13.1. Класифікація антен

Антенною називається радіотехнічний пристрій, призначений для випромінювання або приймання електромагнітних хвиль.

Антенна є одним з найважливіших елементів будь-якої радіотехнічної системи, зв'язаної з випромінюванням або прийманням радіохвиль. До таких систем відносять: системи радіозв'язку, радіонавігації, телебачення, радіоуправління, радіорелейного зв'язку, радіолокації, радіоастрономії та інше.

Конструктивно антенна може бути побудована різними способами: проводи, металеві поверхні, діелектрики, антенні решітки, рупори.

Узагальнена схема радіолінії показана на рис.13.1:

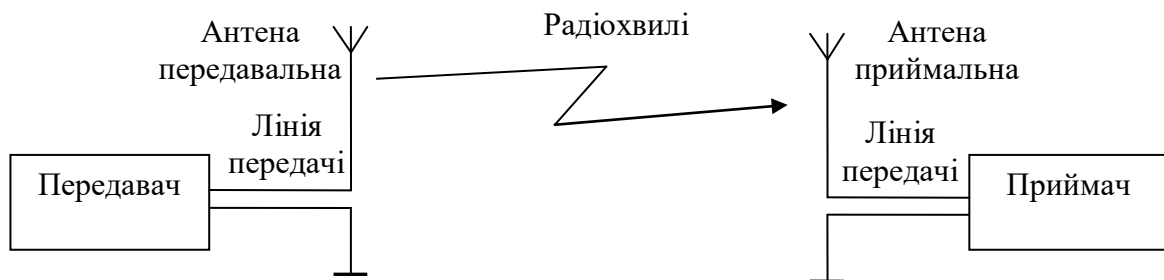


Рис.13.1. Узагальнена схема радіолінії

Електричні сигнали створюються генератором і модулюються по частоті, амплітуді та фазі. Потім вони передаються по лінії передачі до антени, яка перетворює електричні сигнали в електромагнітні хвилі.

Приймальна антенна уловлює радіохвилі і перетворює їх в хвилю в направляючій системі (лінії передачі).

При цьому діє принцип оборотності антени: направлені властивості антени, що працює в режимі передачі, не міняються при роботі цієї антени в режимі приймання.

Антени класифікують за різними ознаками:

- діапазон частот,
- конструкція випромінюючих елементів (вібраторні антени, апертурні, поверхневих хвиль),

- призначення або вид радіотехнічної системи, в якій цю антену будуть використовувати (для радіозв'язку, телебачення, радіолокації, навігації та інше).

За конструкцією розрізняють такі типи антен:

а) прості вібраторні та щілинні:

- вібраторні,
- щілинні,
- друковані,
- директорні,
- спіральні,
- діелектричні стержневі,

б) апертурні

- рупорні,
- дзеркальні,

в) фазовані антенні решітки

13.2. Параметри антен. Коефіцієнт направленої дії (КНД) та коефіцієнт підсилювання (КП) антен

Анени характеризуються такими параметрами:

Коефіцієнт корисної дії (ККД): $\eta = \frac{P_{\Sigma}}{P_0}$;

де P_{Σ} - потужність, що випромінена в простір,

P_0 - потужність, що підведена до антени.

Властивість антени випромінювати електромагнітні хвилі з різною інтенсивністю в різних напрямках описують характеристикою направленості антени (ХНА) $F(\theta, \varphi)$.

Параметри ХНА: ширина головного пелюстка, коефіцієнт направленої дії, коефіцієнт підсилення, рівень бокових пелюстків.

Важлива характеристика - вхідний опір $Z_{вх}$. Це відношення напруги на вхідних клеммах антени до струму в цих точках. В загальному випадку $Z_{вх}$ може бути комплексною величиною.

Потужність, що випромінена антеною P_{Σ} , зв'язана з струмом в точках живлення антени I_0 відношенням:

$$P_{\Sigma} = \frac{I_0^2 R_{\Sigma}}{2}$$

де R_{Σ} - активна складова вхідного опору. Якщо в антені втрат немає, $\eta = 1$, то це буде опір випромінювання.

Один з основних параметрів антени - полоса її робочих частот, в межах якої її основні параметри не виходять за допустимі значення.

Дуже часто раніше за допуски виходять $Z_{\text{вх}}$.

Це приводить до неузгодження антени з лінією передачі (фідером).

При зміні частоти змінюється форма ДНА, КНД, КП, зменшується коефіцієнт корисної дії η .

В залежності від ширини робочого діапазону розрізняють антени: вузькополосні до $10\% f_{cp}$; широкополосні $10...50\% f_{cp}$; діапазонні $(2...5) f_{\text{max}} / f_{\text{min}}$; частотно незалежні $f_{\text{max}} / f_{\text{min}} > 5$.

Вектори \vec{E} і \vec{H} хвиль, випроміненої антени, визначеним чином орієнтовані в просторі. Напрямок векторів поля (\vec{E}) визначає вид поляризації і положення площини поляризації.

Характеристика направленості антени (ХНА) $F(\theta, \varphi)$ - залежність комплексної амплітуди напруги поля від координати точки спостереження.

В загальному випадку ХНА – комплексна величина

$$F(\theta, \varphi) = |F(\theta, \varphi)| \cdot e^{i\delta(\theta, \varphi)},$$

$|F(\theta, \varphi)|$ - амплітудна характеристика направленості,

$\delta(\theta, \varphi)$ - фазова характеристика направленості.

Наприклад, для елементарного електричного вібратора в дальній зоні.

$$\vec{E}_m = i \frac{\dot{I}_m l \omega \mu}{4\pi} \sin \Theta \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \vec{r}_0 \cdot \vec{\Theta}_0.$$

Дуже часто застосовується нормована ХНА $f(\Theta, \varphi) = \frac{|F(\Theta, \varphi)|}{|F_{\text{max}}(\Theta, \varphi)|}$.

Наприклад, для елементарного електричного вібратора в дальній зоні

$$f(\Theta, \varphi) = \frac{|F(\Theta, \varphi)|}{|F_{\text{max}}(\Theta, \varphi)|} = \sin(\Theta).$$

Графічне зображення характеристики направленості називають діаграмою направленості антени (ДНА).

Важливий параметр антени: ширина ДНА. Звичайно вимірюється ширина головного пелюстка ДНА на рівні 0,7 від максимального значення по напруженості вектора \vec{E} або на рівні 0,5 по потужності, що еквівалентно. Позначається $\theta_{0,7}$.

Іноколи ще використовують θ_0 - ширину головного пелюстка на нульовому рівні.

Діаграма направленості може бути побудована в прямокутній (рис. 2) або полярній системі координат (рис. 3).

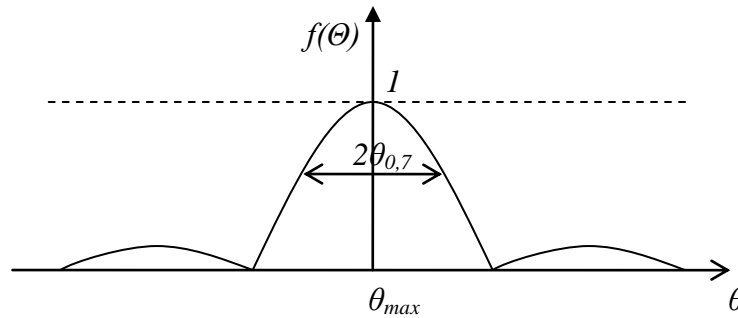


Рис. 13.2. Діаграма направленості в прямокутній системі координат

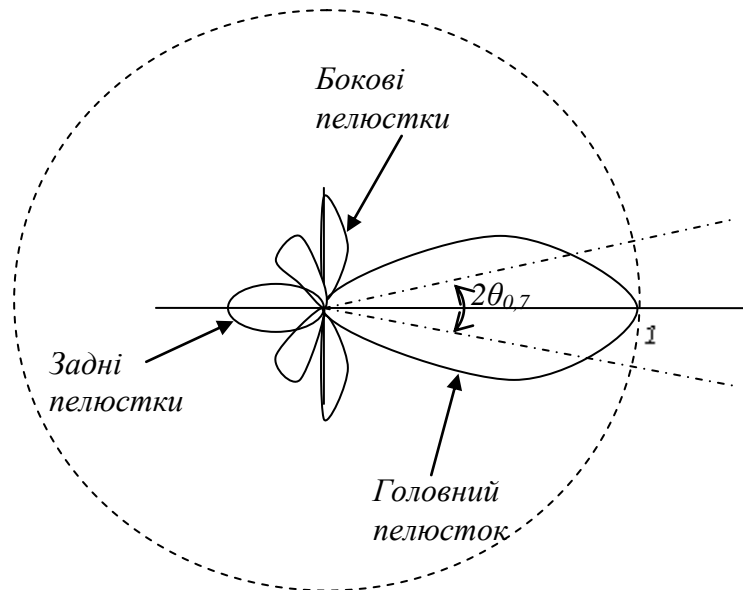


Рис. 13.3. Діаграма направленості в полярній системі координат

Відносний рівень бокових пелюстків – значення нормованої ХНА для бокових пелюстків.

Відносний рівень бокових пелюстків ξ вимірюють в децибелах:

$$\xi = 20 \lg \frac{|f_{\max} N(\theta, \varphi)|}{1} = 20 \lg |f_{\max} N(\theta, \varphi)|, \text{ N- номер бокового пелюстка.}$$

Коефіцієнт направленої дії D показує вираш в потужності направленої антени в порівнянні з ненаправленою, коли обидві вони створюють однакову амплітуду направленості поля (в напрямку максимуму):

$$D = \frac{P_0}{P_\Sigma},$$

де P_0 - потужність ненаправленої антени,

P_Σ - потужність направленої антени.

КНД тим більше, чим вузчий головний пелюсток ДНА і тим менше рівень бокових пелюстків.

КНД не враховує втрат в провідниках антени, в ізоляторах, в землі. Для врахування цього вводять коефіцієнт підсилення $G=D\eta$.

Поляризація хвилі, випромінена антеною, характеризується положенням площини поляризації, яка проходить через вектори \vec{E} і \vec{P} .

В загальному випадку кінець вектора \vec{E} в просторі описує еліпс.

Окремі випадки еліптичної поляризації – лінійна і кругова.

Наприклад, для елементарного електричного випромінювача (ЕЕВ) площина поляризації – площина, яка проходить через дану точку і сам вібратор. Це відповідає випадку лінійної поляризації.

Існують антени, розраховані на приймання хвиль визначеного виду поляризації (лінійна горизонтальна, лінійна вертикальна, кругова ліва, кругова права).

Для створення кругової поляризації можна використовувати, наприклад, два вібратора, використовуючи струми зі зміщенням фаз $\frac{\pi}{2}$ і розміщених перпендикулярно в просторі.

При вивченні приймальних антен використовують так званий принцип взаємності.

Для антен цей принцип означає, що параметри антени на передачу і прийом однакові: форма ДНА, ширина головного пелюстка, рівень бокових пелюстків, КНД, ККД будуть однакові.

Важливе значення в теорії антен має також принцип Гюйгенса випромінювання з поверхні.

Принцип Гюйгенса використовується при аналізі дзеркальних, рупорних антен.

Важливо підкреслити, що від амплітудного розподілу поля на поверхні антени залежать такі характеристики діаграми направленості, як ширина головного пелюстка, рівень бокових пелюстків, коефіцієнт використання поверхні апертури.

Взагалі можна користуватись приблизною формулою для розрахунку ширини діаграми направленості в заданий площині:

$$2\Theta_{0,7[\rho_{\text{зад}}]} \approx \frac{\lambda}{d} \text{ або } 2\Theta_{0,7[\rho_{\text{зад}}]} \approx 60^\circ \frac{\lambda}{d},$$

де λ – довжина хвилі,

d – лінійний розмір антени у цій площині, апертура.

Найвужча буде ДНА при рівномірному розподілу поля на розкритті антени ($2\Theta_{0,7[\rho_{\text{зад}}]} = 59^\circ \frac{\lambda}{d}$), проте при цьому буде найбільший рівень бокових пелюстків (перший пелюсток -17,6дБ).

У випадку спадання поля до країв антени головний пелюсток ДНА буде розширюватись (до $2\Theta_{0,7[\rho_{\text{зад}}]} \approx 75 \dots 90^\circ \frac{\lambda}{d}$), але рівень бокових пелюстків буде знижуватись (перший пелюсток до -25...-36 дБ) в залежності від закону спадання поля до країв розкриття.

13.3. Типи антенних пристроїв

13.3.1. Опромінювачі антен. Прості вібраторні та щілинні антени

В якості опромінювачів апертурних антен використовують прості випромінювачі: вібратори, щілини, рупори.

Симетричний вібратор (СВ) складається з двох однакових провідників, між якими включається генератор високої частоти.

Як самостійну антену СВ використовують на коротких, метрових, і дециметрових хвилях.

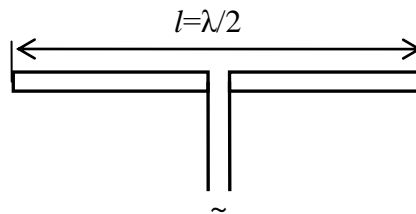


Рис.13.4. Півхвильовий вібратор

Закон зміни струму в вібраторі залежить від співвідношення довжини вібратора та довжини хвилі $\frac{l}{\lambda}$.

При $\frac{l}{\lambda} < 0,15$ його можна вважати синусоїдальним. Впливає на розподіл струму і товщина вібратора.

Довжина впливає на форму ДНА. При великих довжинах поле від різних ділянок буде несинфазне, значення ДНА в площині, перпендикулярній вібратору, зменшується, діаграма направленості буде мати пелюстковий вигляд..

Фаза поля в сусідніх пелюстках буде протилежна.

В діапазонах метрових та дециметрових хвиль широко застосовуються симетричні вібратори різних конструкцій.

Для хорошого узгодження вібратора з лінією, по якій подається сигнал, використовують так звані шлейф-вібратори (рис.6).

Діаграма направленості шлейф-вібратора майже співпадає з діаграмою направленості звичайного півхвильового вібратора. Як показують розрахунки, вхідний опір шлейф-вібратора $R_{вх.шл} \approx 292 \text{ Ом}$. При використанні живлення вібратора симетричним кабелем (фідером) з хвильовим опором $R_e = 300 \text{ Ом}$ коефіцієнт біжучої хвилі буде близький до одиниці.

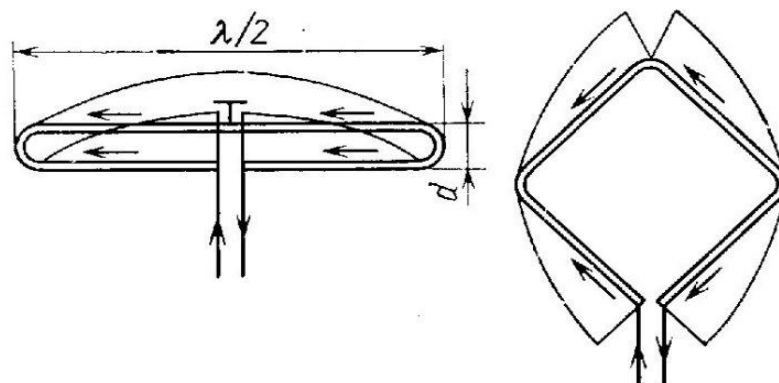


Рис.13.5. Шлейф-вібратор. $d = (0,025 \dots 0,05)\lambda$

Існують і більш складні конструкції вібраторних антен, наприклад діапазонні шунтові (рис.13.6), диполі Найдено (рис.13.7) та інші.

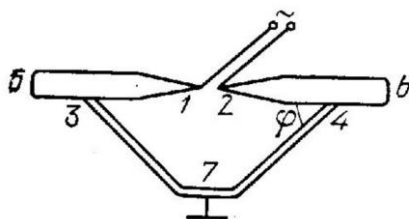


Рис.13.6. Діапазонний шунтовий вібратор

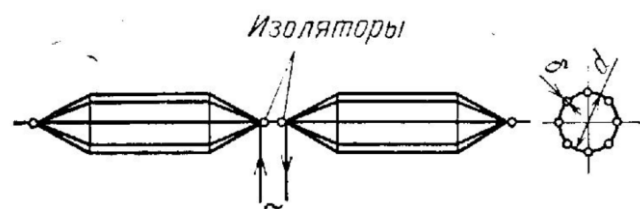


Рис.13.7. Вібратор Найдено

В діапазоні УКХ для живлення вібраторів бажано використовувати не симетричні, а екрановані коаксіальні кабелі. Хвильовий опір таких кабелів значно менше, ніж 300 Ом. Тому постає проблема використання симетруючих пристроїв (рис.13.8), наприклад так званого «U-коліна».

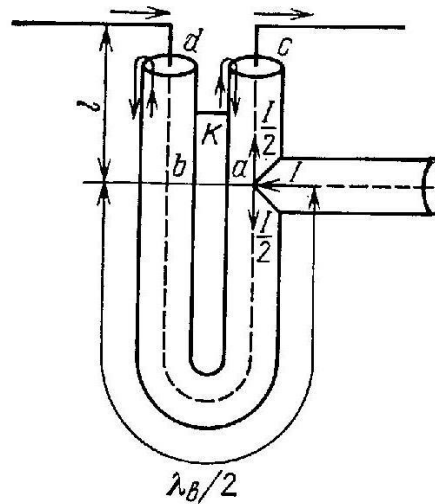


Рис.13.8. Симетруючий пристрій при живленні коаксіальним кабелем

Струм до лівого та правого плеча вібратора поступає у протифазі, тому що до лівого плеча він проходить додатковий шлях $\lambda/2$. Тому плечі збуджуються синфазно струмами однакової амплітуди.

13.3.2. Симетричний щілинний вібратор

Щілинний вібратор має дуже просту форму – це щілина у стінках хвилеводів. Щілини прорізають в стінках прямокутних і круглих хвилеводів, в оболонках коаксіальних кабелів. Можливо також прорізання стінки в плоских металічних екранах.

Припустимо, що по металевих стінках протікає струм. Якщо зробити щілину, яка переріже лінії струму, як показано на рисунку, то між стінками щілини будуть існувати силові лінії напруженості електричного поля.

Струми зміщення, виникають в щіліні, продовжуються в виді струмів провідності в метал. екрані.

В просторі, що оточує щілину, виникає поле.

На практиці довжина щілинних випромінювачів дорівнює довжині хвилі. Застосовують щілинні випромінювачі в дм-, см-, мм-діапазонах.

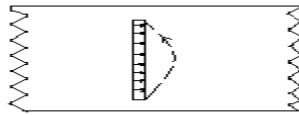


Рис.13.9. Щільний вібратор

13.3.3. Директорна антена

Відома також під назвою «хвильовий канал» або антена Пістолькорса.

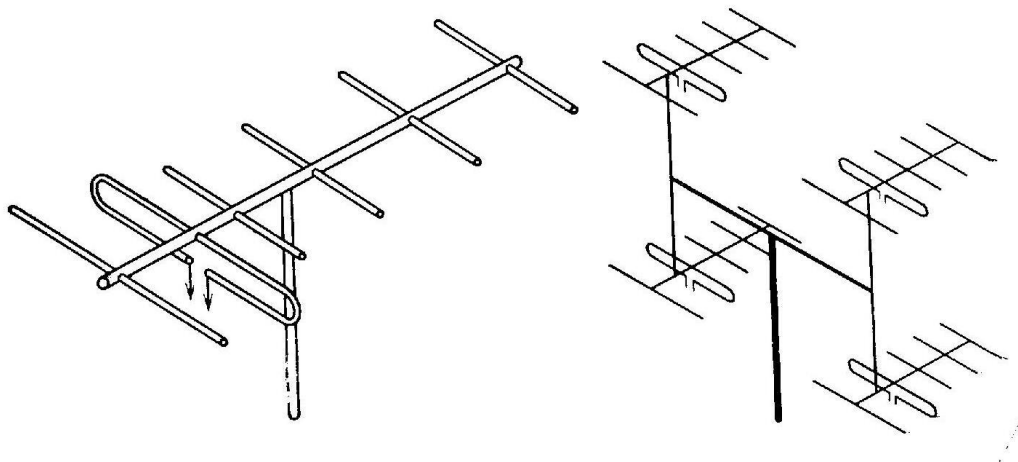


Рис. 13.10. Директорні антени

Антена має у своєму складі активний вібратор (на рисунку показано шлейф-вібратор), рефлектор з одного боку та кілька пасивних вібраторів – директорів, з іншого. Антена випромінює у напрямку директорів. Загального аналізу директорних антен немає, проте існують добре розроблені чисельні методи. З їх допомогою визначають відстані між директорами, активним вібратором, рефлектором та їх розміри.

Хвилю збуджує активний вібратор. Та хвиля, яка йде у напрямку рефлектора, відбивається від нього та далі йде у напрямку директорів. Кожний наступний директор збуджується хвилею, та спрямовує хвилю у напрямку наступного директора.

Максимум випромінювання спрямований вздовж осі антени.

Вхідний пір активного вібратора в складі директорної антени зменшується до 20...30 Ом. Антена має вузьку ДНА, робочій діапазон частот малий (5...15% від центральної частоти).

13.3.4. Спіральні антени

Спиральні антени (рис.13.11) застосовуються у метровому, дециметровому та сантиметровому діапазонах хвиль. Важливою рисою цих антен є формування випромінювання з круговою поляризацією.

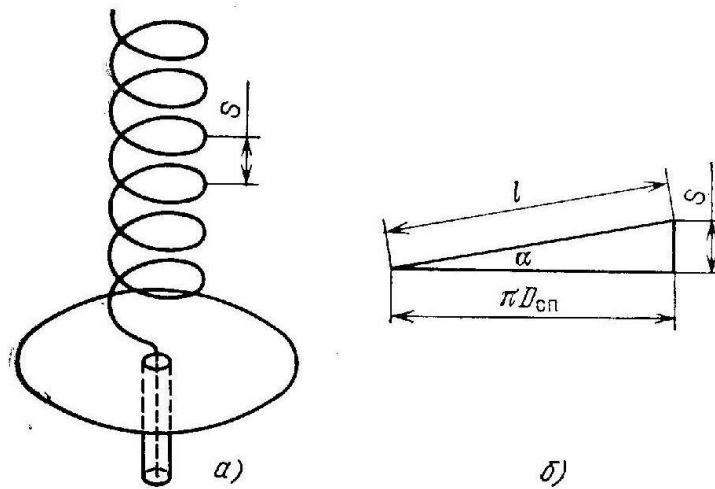


Рис. 13.11. Спиральні антени

Діаметр вітка обирається таким, щоб довжина вітка приблизно співпадала з довжиною хвилі струму в спіралі (рис.13.12). Фаза струму у протилежних частинах вітка буде протилежна. Тому вектор \vec{E} буде спрямований так, як показано на рис.13. Верхня та нижня частини струму можемо розглядати як два елементарні електричні вібратори, що створюють максимум випромінювання вздовж осі антени.

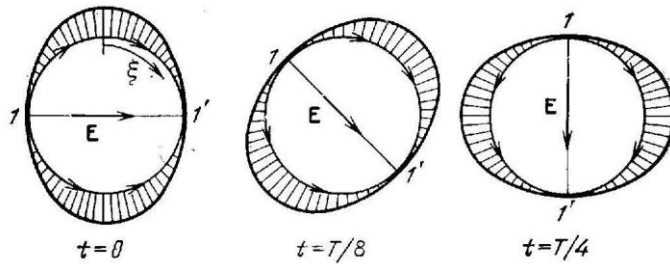


Рис. 13.12. Формування хвилі кругової поляризації в спіральній антені

З часом положення елементарних електричних вібраторів змінюється. Відповідно буде змінюватись і орієнтація вектора \vec{E} хвилі, що випромінюється. Маємо кругову поляризацію хвилі.

13.3.5. Друковані антени

Прикладом друкованого випромінювача резонансного типу є антенни, що зображені на рис.13.13 та 13.14.

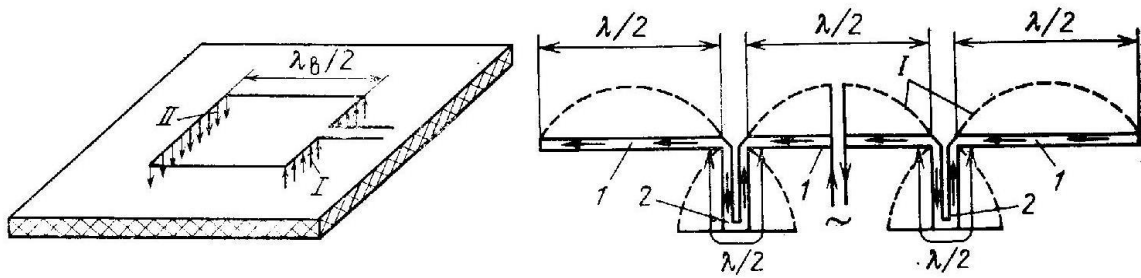


Рис. 13.13. Друкована прямокутна антена Рис. 13.14. Система з друкованих антен

Антена збуджується несиметричною смужковою лінією. Випромінювання формується в основному двома щілинами I та II, що створені краями випромінювача та екраном. Фаза вектора напруженості електричного поля в щілинах відрізняються на π , тому що щілини розташовані на відстані $\lambda_{в}/2$ одна від одної, де $\lambda_{в}$ – довжина хвилі у випромінювачі на смужковій лінії. Проте напрями силових ліній магнітного поля у діелектрику зовні смужкової лінії, що обумовлюють випромінювання, будуть однаковими для обох щілин. Це означає, що обидві щілини є синфазними випромінювачами та будуть формувати максимум випромінювання вздовж нормалі до площини смужкової лінії.

У випадку, коли відстань між щілинами відрізняється від $\lambda_{в}/2$, фаза векторів напруженості електричного поля в щілинах буде відрізнитися від π , максимум випромінювання буде відхилитися від нормалі до площини смужкової лінії.

Якщо довжина щілини менша за половину довжини хвилі, то ми можемо розглядати ці випромінювачі як магнітні випромінювачі або щілинні випромінювачі.

Існують варіанти і інших друкованих антен. Наприклад на рис. 13.14 зображено антену, у якій за рахунок конструкції забезпечується однаковий напрям струму у горизонтальних смужках. Струм у вертикальних смужках спрямований протилежно, тому ці частини конструкції не випромінюють хвилю.

13.4. Апертурні антени

Апертурні антени випромінюють електромагнітні хвилі з поверхні. Дуже часто у якості опромінювача апертурної антени використовують прості вібраторні та щілинні антени

13.4.1 Рупорні антени

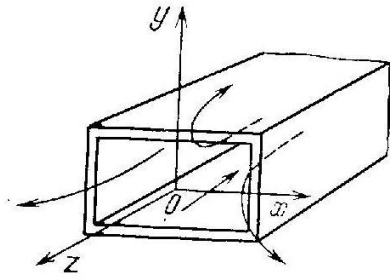


Рис. 13.15. Відкритий кінець хвилеводу

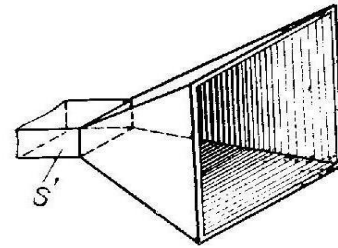


Рис. 13.16. Рупорна антена

Рупорні антени можуть використовуватись самостійно, а також у якості опромінювача апертурної антени (дзеркальної) антени.

Електромагнітна хвиля, що дійшла до відкритого кінця хвилеводу (рис.13.15), частково випромінюється, частково відбивається назад.

Антени з відкритим кінцем хвилеводу застосовують тоді, коли потрібна широка ДНА. Для параболічних антен можливо застосування круглих хвилеводів з хвилею типу H_{11} . Але у відкритого кінця хвилеводу коефіцієнт відбиття досягає 0,25...0,3. Це дуже багато.

Для зменшення коефіцієнта відбиття використовують рупори (рис.13.16). При збільшенні кута рупора спочатку зростає розкриття антени, який залишається майже синфазним. Зростає КНД та звужується ширина головного пелюстка ДНА. Потім із зростанням розмірів починає впливати несинфазність поля на розкритті, КНД падає, головний пелюсток розширюється. Тому існують оптимальні значення довжин сторін рупора.

13.4.2. Дзеркальні антени

В основі роботи дзеркальних параболічних антен покладено математичне визначення параболи: сума відстаней від параболи до точки фокуса та до заданої прямої – постійна.

На рис. 13.17 зображено, що фокус знаходиться у точці F, задана пряма – це MN. Точки на параболі – це P_1, P_2, P_3 .

Якщо ми помістимо випромінювач (вібратор, рупор) у точку F, то хвиля від нього буде розповсюджуватись до параболічної поверхні, потім відіб'ється від неї. Коли хвилі, відбиті від різних точок P_1, P_2, P_3 , дійдуть до площини MN, то виявиться, що фаза хвиль у всіх точках цієї площини буде однаковою, тому що шлях всіх хвиль пройшли однаковий.

Таким чином, хвилі в площині MN будуть синфазні.

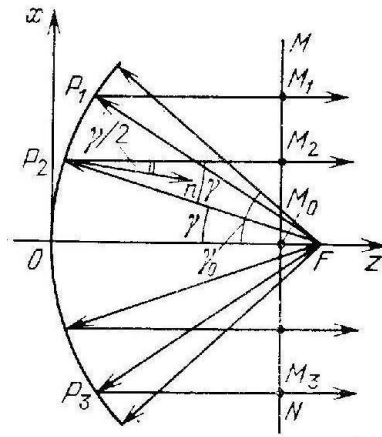


Рис. 13.17. Параболічна дзеркальна антена

13.5. Фазовані антенні решітки

Для одержання високої спрямованості антени, підвищення КНД та звуження головного пелюстка діаграми направленості, можна використовувати систему слабо направлених антен, таких як вібратори, щілини, відкриті кінці хвилеводів. Ці елементи розміщують в просторі визначеним чином, створюючи таким чином фазовану антенну решітку (АР).

Загальна направленість буде визначатися розмірами всієї системи.

Найпростіша АР – лінійна, коли випромінювачі розташовані по прямій.

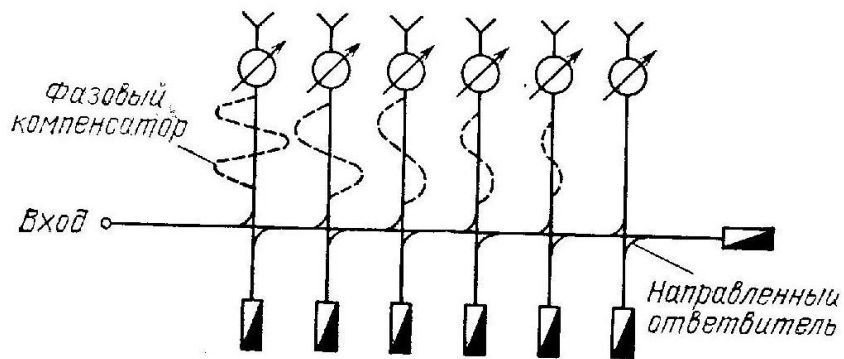


Рис. 13.18. Живлення фазованої решітки

Можливо довести, що у випадку, коли амплітуди випромінювачів рівні, то множник АР описується виразом

$$f_c = \sum_{n=-m}^m e^{in(kd \cos \theta - \varphi)} = \frac{\sin \left[\frac{N}{2} (kd \cos \theta - \varphi) \right]}{\sin \left[\frac{1}{2} (kd \cos \theta - \varphi) \right]},$$

де $N=2M+1$ - загальне число випромінювачів.

φ – різниця фаз сусідніх випромінювачів (маємо AP з лінійною зміною фази).

З аналізу цієї формули слідують такі висновки:

- змінюючи фазу φ , можна змінювати положення головного максимуму;
- результуюча ДНА значно вужча, ніж ДНА кожного випромінювача.

14. Режими роботи лінії передачі

Лінія передачі зв'язує джерело електромагнітних хвиль зі споживачем. Наприклад, передавач із антеною, антену із приймачем і т.д.,

Оптимальні умови передачі ЕМХ будуть тоді, коли енергія спрямовується тільки від джерела до споживача (навантаженню). Однак так буває не завжди. По різних причинах у лінії передачі виникають хвилі, спрямовані в протилежний бік, до генератора.

Поява відбитих хвиль найчастіше відбувається при відбитті енергії від навантаження, рідше - від інших елементів лінії передачі (повороти, з'єднання і т.д.). Тому ми будемо сьогодні аналізувати, як впливають параметри лінії передачі й опори навантаження на появу відбитих хвиль.

Це дуже важливо практично, тому що в багатьох випадках відбиті хвилі шкідливо впливають на генератор. При передачі великих потужностей, якщо є відбита хвиля, збільшується небезпека електричного пробоя лінії передачі.

Тому сьогодні також будуть розглянуті способи усунення відбитої хвилі в більшій частині лінії передачі.

14.1. Падаюча та відбита хвилі в лінії передачі

У лінії передачі на вході стоїть генератор, на виході вона підключається до навантаження:

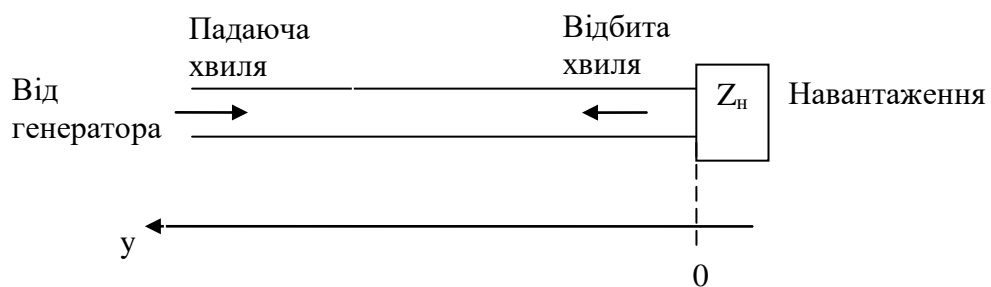


Рис. 14.1 Падаюча та відбита хвилі в лінії передачі

Як правило, обирається система координат, де координата навантаження $u = 0$.

Хвиля, що поширюється від генератора до навантаження, називається падаючою або прямою.

Хвиля, що поширюється у зворотному напрямі, називається відбитою або зворотною.

Рішення рівнянь Максвела для коаксіальної лінії передач має вигляд (у нашій системі координат):

$$\dot{\vec{E}}_m = \frac{\dot{E}_0}{r} (\dot{A}e^{i\beta y} + \dot{B}e^{-i\beta y}) \cdot \vec{r}_0,$$

$$\dot{\vec{H}}_m = \frac{\dot{E}_0}{Z_0 r} (\dot{A}e^{i\beta y} - \dot{B}e^{-i\beta y}) \cdot \vec{\varphi}_0.$$

де $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$ - характеристичний опір діелектрика, що заповнює лінію передачі.

$$\text{У вакуумі } Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \text{ Ом.}$$

Раніше ми вже вивчали визначення довгої лінії передачі: це система, що складається з двох паралельних провідників, поперечні розміри якої значно менше за довжину хвилі в лінії λ , а довжина лінії передачі сумірна або більша за довжину хвилі λ (рис.2). Сума струмів в будь-якому поперечному перетині цих провідників дорівнює нулю.

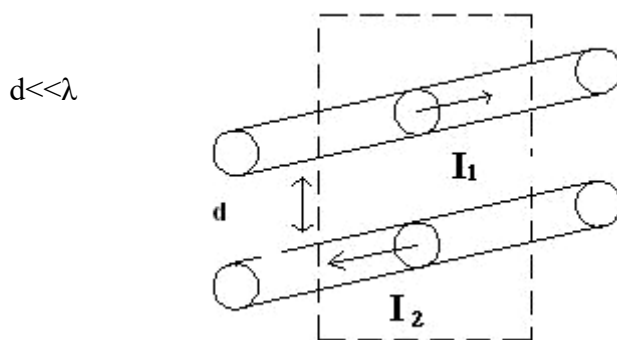


Рис.14.2. Довга лінія

Звичайно при вивченні довгих ліній використовують не вектори напруженості електричного $\dot{\vec{E}}_m$ та магнітного поля $\dot{\vec{H}}_m$, а напругу U та струм I .

Одержимо відповідні вирази для напруги U та струму I .

Інтегруючи по відрітку між провідниками, де є електричне поле $\dot{\vec{E}}_m$, отримуємо різницю потенціалів між двома точками на відстані L в електричному полі:

$$U = \int_L \dot{\vec{E}}_m d\vec{r},$$

де L – шлях від внутрішнього провідника до зовнішнього (рис.14.3).

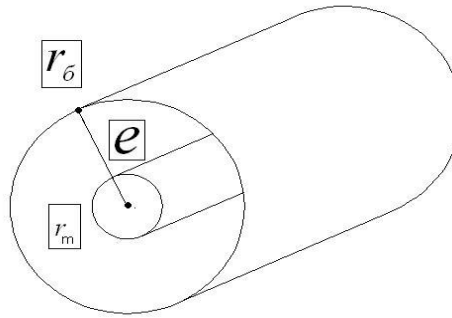


Рис.14.3. Різниця потенціалів між провідниками

Шлях L йде від поверхні внутрішнього провідника r_m до внутрішньої поверхні зовнішнього провідника r_0 , тому

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \int_L \dot{\vec{E}}_m d\vec{r} = \int_{r_m}^{r_0} \left[\frac{\dot{E}_0}{r} (\dot{A}e^{i\beta y} + \dot{B}e^{-i\beta y}) \cdot \vec{r}_0 \right] \cdot \vec{r}_0 dr = \\ &= \dot{E}_0 (\dot{A}e^{i\beta y} + \dot{B}e^{-i\beta y}) \int_{r_m}^{r_0} \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_0}{r} dr = \dot{E}_0 (\dot{A}e^{i\beta y} + \dot{B}e^{-i\beta y}) \cdot \ln \frac{r_0}{r_m}. \end{aligned} \quad (14.1)$$

Ми врахували, що $\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_0 = 1$.

Знайдемо струм у провідниках. Користуючись законом повного струму (законом Ампера про циркуляцію вектора напруженості магнітного поля), згідно з яким циркуляція вектора $\dot{\vec{H}}_m$ по замкненому колу C дорівнює повному струму I , що пронизує це коло, знайдемо струм у лінії:

$$\dot{I}_m = \oint_C \dot{\vec{H}}_m d\vec{l},$$

де C - замкнутий контур, що охоплює внутрішній провідник. Обираємо його на внутрішній поверхні зовнішнього провідника (рис.14.4). Коло має радіус r_0 .

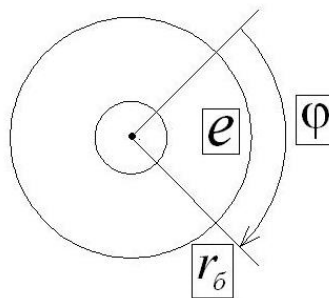


Рис.14.4. Знаходження струму у внутрішньому провіднику

Відомо, що довжина дуги $l = r \cdot \varphi$, $dl = r \cdot d\varphi$, або у векторному вигляді $d\vec{l} = r \cdot d\varphi \cdot \vec{\varphi}_0$.

$$\begin{aligned} \dot{I}_m &= \oint_C \dot{\vec{H}}_m d\vec{l} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left[\frac{\dot{E}_0}{Z_0 r_{\bar{\sigma}}} (\dot{A}e^{i\beta y} - \dot{B}e^{-i\beta y}) \cdot \vec{\varphi}_0 \right] \cdot r_{\bar{\sigma}} \cdot d\varphi \cdot \vec{\varphi}_0 = \\ &= \frac{\dot{E}_0}{Z_0} (\dot{A}e^{i\beta y} - \dot{B}e^{-i\beta y}) \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\frac{1}{r_{\bar{\sigma}}} r_{\bar{\sigma}} \cdot \vec{\varphi}_0 \cdot \vec{\varphi}_0 \right) d\varphi = \frac{2\pi \dot{E}_0}{Z_0} (\dot{A}e^{i\beta y} - \dot{B}e^{-i\beta y}) \end{aligned} \quad (14.2)$$

Також враховано, що $\vec{\varphi}_0 \cdot \vec{\varphi}_0 = 1$.

Перші доданки у формулах (1, 2) характеризують пряму хвилю, що йде від генератора до навантаження, у бік зменшення координати у. Другі доданки – зворотню, яка йде від навантаження до генератора.

Для прямої хвилі:

$$\begin{cases} \dot{U}_{mna\partial} = \dot{E}_0 \dot{A} \ln \frac{r_{\bar{\sigma}}}{r_m} e^{i\beta y}, \\ \dot{I}_{mna\partial} = \frac{2\pi \dot{E}_0}{Z_0} \dot{A} e^{i\beta y} = \frac{\dot{U}_{mna\partial}}{Z_{\epsilon}}. \end{cases}$$

де $Z_{\epsilon} = \frac{Z_0}{2\pi} \ln \frac{r_{\bar{\sigma}}}{r_m}$ - називається хвильовим опором лінії передачі.

У випадку коаксіальної лінії $Z_{\epsilon} = \frac{Z_0}{2\pi} \ln \frac{r_{\bar{\sigma}}}{r_m} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{r_{\bar{\sigma}}}{r_m} = 60 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln \frac{r_{\bar{\sigma}}}{r_m}$.

Можна показати, що для симетричної лінії (рис. 14.5) хвильовий опір Z_B :

$$Z_{\epsilon} = \frac{Z_0}{\pi} \ln \frac{a-r}{r} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{a-r}{r} = 120 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln \frac{a-r}{r}.$$

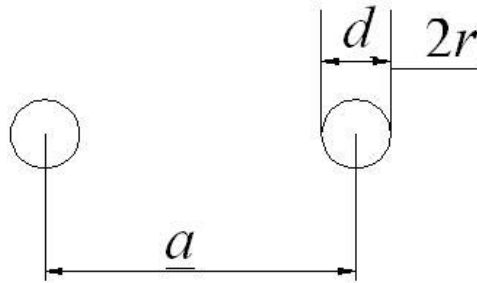


Рис.14.5. Симетрична лінія

Як неважко перевірити, відношення амплітуд напруги та струму для відбитої хвилі також дорівнює Z_{ϵ} .

Таким чином, з виразів (14.1) та (14.2) отримуємо:

$$\begin{cases} \dot{U}_m = \dot{U}_{mna\delta} + \dot{U}_{m\epsilon i\delta}, \\ \dot{I}_m = \frac{\dot{U}_{mna\delta}}{Z_g} - \frac{\dot{U}_{m\epsilon i\delta}}{Z_g} = \frac{1}{Z_g} (\dot{U}_{mna\delta} - \dot{U}_{m\epsilon i\delta}). \end{cases} \quad (14.3)$$

1. Основні параметри хвилеводного тракту: коефіцієнти відбиття, біжучої хвилі (КБХ), стоячої хвилі (КСХ), нормовані еквівалентний опір лінії передачі та його залежність від координати. Режими роботи лінії передач

14.2. Коефіцієнт відбиття

Для порівняння падаючої та відбитої хвиль вводять коефіцієнт відбиття.

Коефіцієнтом відбиття по напрузі в довільному перерізі лінії будемо називати відношення комплексних амплітуд напруги відбитої та падаючої хвиль, узятих у місці цього перерізу:

$$\dot{\Gamma}(y) = \frac{\dot{U}_{m\epsilon i\delta}(y)}{\dot{U}_{mna\delta}(y)}.$$

Аналізуючи вираз (1) для напруги в лінії, можна бачити, що комплексна амплітуда у точці з поточною координатою y може бути записана через комплексну амплітуду в початку координат $y=0$:

$$\dot{U}_{mna\delta}(y) = \dot{U}_{mna\delta}(0) \cdot e^{i\beta y} = (U_{mna\delta 0} \cdot e^{i\varphi_{na\delta}}) \cdot e^{i\beta y},$$

де $U_{mna\delta 0}$ - амплітуда падаючої хвилі в точці з координатою $y = 0$ (на навантаженні),

$\varphi_{na\delta}$ - фаза падаючої хвилі в точці початку координат $y = 0$.

Аналогічно для відбитої хвилі:

$$\dot{U}_{m\epsilon i\delta}(y) = \dot{U}_{m\epsilon i\delta}(0) \cdot e^{-i\beta y} = (U_{m\epsilon i\delta 0} \cdot e^{i\varphi_{\epsilon i\delta}}) \cdot e^{-i\beta y},$$

де $U_{m\epsilon i\delta 0}$ - амплітуда відбитої хвилі при $y = 0$ (на початку координат),

$\varphi_{\epsilon i\delta}$ - фаза відбитої хвилі в точці $y = 0$.

У довільному перерізі лінії з координатою y коефіцієнт відбиття $\dot{\Gamma}(y)$ є величиною комплексною:

$$\dot{\Gamma}(y) = \frac{\dot{U}_{m\epsilon i\delta}(y)}{\dot{U}_{mna\delta}(y)} = \frac{(U_{m\epsilon i\delta 0} \cdot e^{i\varphi_{\epsilon i\delta}}) \cdot e^{-i\beta y}}{(U_{mna\delta 0} \cdot e^{i\varphi}) \cdot e^{i\beta y}} = \frac{U_{m\epsilon i\delta 0}}{U_{mna\delta 0}} e^{i(\varphi_{\epsilon i\delta} - \varphi_{na\delta})} e^{-i2\beta y}. \quad (14.4)$$

Перший співмножник $\frac{U_{m\epsilon i\delta 0}}{U_{mna\delta 0}} = \Gamma_0$ - модуль коефіцієнта відбиття в початку

координат, тобто в місці навантаження. Обидві амплітуди взяті в місці навантаження $y = 0$.

В другий співмножник входить вираз $\varphi_{\epsilon i\delta} - \varphi_{na\delta} = \psi_0$ - це фаза коефіцієнта відбиття на навантаженні.

Якщо об'єднати два перші співмножника, отримаємо $\dot{\Gamma}_0 = \Gamma_0 e^{i\psi_0}$ - комплексний коефіцієнт відбиття в початку координат, тобто на навантаженні.

Коефіцієнт відбиття на навантаженні - відношення комплексних амплітуд напруг відбитої та падаючої хвиль, узятих у перерізі навантаження $y = 0$. У загальному випадку це величина комплексна.

Підставляючи це все у формулу (4), отримуємо коефіцієнт відбиття у довільному місці лінії передачі:

$$\dot{\Gamma}(y) = \Gamma_0 e^{i\psi_0} e^{-i2\beta y}. \quad (14.5)$$

Тепер знайдемо зв'язок між коефіцієнтом відбиття та опором навантаження \dot{Z}_n .

Відповідно до закону Ома опір повинен дорівнювати відношенню напруги на елементі до струму, що протікає через елемент:

$$\dot{Z}_n = \frac{\dot{U}_m(y=0)}{\dot{I}_m(y=0)}.$$

Але з виразів (3) маємо:

$$\dot{U}_m(0) = \dot{U}_{mna\delta}(0) + \dot{U}_{m\epsilon i\delta}(0) = \dot{U}_{mna\delta}(0) + \dot{\Gamma}_0 \dot{U}_{mna\delta}(0) = \dot{U}_{mna\delta}(0)(1 + \dot{\Gamma}_0),$$

$$\dot{I}_m(0) = \frac{1}{Z_\epsilon} [\dot{U}_{mna\delta}(0) - \dot{U}_{m\epsilon i\delta}(0)] = \frac{1}{Z_\epsilon} \dot{U}_{mna\delta}(0)(1 - \dot{\Gamma}_0).$$

$$\text{Звідки } \dot{Z}_n = \frac{\dot{U}_m(0)}{\dot{I}_m(0)} = \frac{\dot{U}_{mna\delta}(0)(1 + \dot{\Gamma}_0)}{\frac{1}{Z_\epsilon} \dot{U}_{mna\delta}(0)(1 - \dot{\Gamma}_0)} = Z_\epsilon \frac{(1 + \dot{\Gamma}_0)}{(1 - \dot{\Gamma}_0)}.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно коефіцієнта відбиття $\dot{\Gamma}_0$, отримуємо

$$\dot{\Gamma}_0 = \frac{\dot{Z}_n - Z_0}{\dot{Z}_n + Z_0} = \frac{\frac{\dot{Z}_n}{Z_0} - 1}{\frac{\dot{Z}_n}{Z_0} + 1} = \frac{\dot{Z}'_n - 1}{\dot{Z}'_n + 1}, \quad (14.6)$$

де $\dot{Z}'_n = \frac{\dot{Z}_n}{Z_0}$ - нормований опір навантаження.

Можна зробити висновок, що коефіцієнт відбиття на навантаженні залежить від співвідношення опору навантаження та хвильового опору лінії.

Якщо лінія ідеальна, то немає загасання уздовж лінії, модулі коефіцієнтів відбиття рівні. Інакше потрібно буде замінити $i\beta \rightarrow \alpha + i\beta$.

Тоді в реальних лініях буде $\dot{\Gamma}(y) = \dot{\Gamma}_0 \cdot e^{-2\alpha y} \cdot e^{-2i\beta y}$.

14.3. Коефіцієнти біжучої та стоячої хвилі

Крім коефіцієнта відбиття, режими роботи в лінії передачі характеризуються коефіцієнтами біжучої та стоячої хвилі.

В лінії відбувається інтерференція падаючої й відбитої хвиль. Тому там, де ці напруги синфазні, спостерігаються максимум напруги, а там, де протифазні - мінімум (рис.14.6):

$$\dot{U}_m(y) = \dot{U}_{mпад}(y) + \dot{U}_{mвід}(y) = \dot{U}_{mпад}(y) + \dot{\Gamma}(y)\dot{U}_{mпад}(y) = \dot{U}_{mпад}(y)[1 + \Gamma_0 e^{i\psi} e^{-i2\beta y}]$$

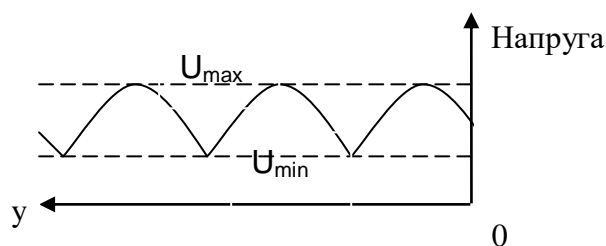


Рис.14.6. Розподіл напруги в лінії внаслідок інтерференції падаючої та відбитої хвилі

Модуль напруги в лінії

$$|\dot{U}_m(y)| = |\dot{U}_{mпад}(y)| \cdot |1 + \Gamma_0 e^{i\psi} e^{-i2\beta y}|.$$

Нас більше цікавить другий співмножник, тому що він залежить від координати y :

$$|1 + \Gamma_0 e^{i\psi} e^{-i2\beta y}| = |1 + \Gamma_0 \cos(\psi - 2\beta y) + i\Gamma_0 \sin(\psi - 2\beta y)| = \\ = \sqrt{[1 + \Gamma_0 \cos(\psi - 2\beta y)]^2 + [\Gamma_0 \sin(\psi - 2\beta y)]^2} = \sqrt{1 + \Gamma_0^2 + 2\Gamma_0 \cos(\psi - 2\beta y)}.$$

Проаналізуємо одержаний вираз.

Якщо буде змінюватись координата y , то буде змінюватись фаза косинуса.

Максимальне значення косинуса дорівнює $+1$. При цьому будуть максимуми напруги в лінії:

$$|1 + \Gamma_0 e^{i\psi} e^{-i2\beta y}| = \sqrt{1 + \Gamma_0^2 + 2\Gamma_0} = 1 + \Gamma_0.$$

Мінімальне значення косинуса дорівнює -1 . При цьому будуть мінімуми напруги в лінії:

$$|1 + \Gamma_0 e^{i\psi} e^{-i2\beta y}| = \sqrt{1 + \Gamma_0^2 - 2\Gamma_0} = 1 - \Gamma_0.$$

Чому рівна відстань Δy між сусідніми мінімумами або максимумами? На цій довжині зміна фази буде точно 2π . Тому $2\beta\Delta y = 2\pi$, або $\Delta y = \frac{\pi}{\beta} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda}{2}$.

Висновок: відстань між сусідніми мінімумами або сусідніми максимумами дорівнює половині довжині хвилі $\frac{\lambda}{2}$.

Зміна фази повинна бути рівна 2π :

Коефіцієнтом біжучої хвилі КБХ називається відношення

$$КБХ = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{1 - \Gamma_0}{1 + \Gamma_0}.$$

КБХ завжди менше або дорівнює одиниці, $0 < КБХ \leq 1$.

Коефіцієнтом стоячої хвилі КСХ називається відношення

$$КСХ = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{1 + \Gamma_0}{1 - \Gamma_0}$$

КСХ завжди більше або дорівнює одиниці, $1 \leq КСХ < \infty$.

Чим ближче ці два коефіцієнти до 1, тим менша відбита хвиля та тим кращий режим роботи.

14.4. Режими роботи лінії передачі

В залежності від величини КСХ або КБХ розрізняють три режими роботи:

а) режим біжучих хвиль.

В цьому режимі немає відбитої хвилі, $\Gamma_0 = 0$, $КСХ = КБХ = 1$.

Це можливо при тільки при $\dot{Z}_H = Z_\epsilon \cdot \frac{1 + \dot{\Gamma}_0}{1 - \dot{\Gamma}_0} = Z_\epsilon$, тобто коли навантаження точно

дорівнює хвилевому опору.

б) режим стоячих хвиль.

Амплітуда відбитої хвилі дорівнює амплітуді падаючої, модуль коефіцієнта відбиття дорівнює одиниці, комплексний коефіцієнт відбиття $\dot{\Gamma}_0 = \pm 1$ або у загальному випадку $\dot{\Gamma}_0 = 1e^{i\psi}$.

Легко перевірити, що модуль коефіцієнта відбиття $\Gamma_0 = \left| \frac{\dot{Z}_H - Z_\epsilon}{\dot{Z}_H + Z_\epsilon} \right| = 1$ при таких

значеннях навантаження \dot{Z}_H :

- коротке замкнення $\dot{Z}_H = 0$,
- розімкнена лінія $\dot{Z}_H = \infty$,
- реактивне навантаження $\dot{Z}_H = iX_H$.

Режим стоячих хвиль – найгірший режим, тому що в навантаження на проходить енергія сигналу, вся падаюча хвиля відбивається.

в) режим змішаних хвиль.

Це буде, якщо опір навантаження $\dot{Z}_H \neq Z_\epsilon$ та має активну складову. Звичайно в лініях спостерігається саме режим змішаних хвиль. При цьому:

$$0 < \text{КБХ} < 1,$$

$$1 < \text{КСХ} < \infty.$$

14.5. Вхідний опір лінії передачі

Якщо ми знайдемо відношення $\dot{Z}_H(y) = \frac{\dot{U}_m(y)}{\dot{I}_m(y)}$ в довільному перерізі, то це й буде

вхідний опір у цьому перетині:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{ex}(y) &= \frac{\dot{U}_m(y)}{\dot{I}_m(y)} = \frac{\dot{U}_{m\text{nad}}(y) + \dot{U}_{m\text{eid}}(y)}{\frac{1}{Z_\epsilon} [\dot{U}_{m\text{nad}}(y) - \dot{U}_{m\text{eid}}(y)]} = \frac{\dot{U}_{m\text{nad}}(y) + \dot{\Gamma}(y)\dot{U}_{m\text{nad}}(y)}{\frac{1}{Z_\epsilon} [\dot{U}_{m\text{nad}}(y) - \dot{\Gamma}(y)\dot{U}_{m\text{nad}}(y)]} = \\ &= \frac{\dot{U}_{m\text{nad}}(y)[1 + \dot{\Gamma}(y)]}{\frac{1}{Z_\epsilon} \dot{U}_{m\text{nad}}(y)[1 - \dot{\Gamma}(y)]} = Z_\epsilon \frac{1 + \dot{\Gamma}(y)}{1 - \dot{\Gamma}(y)} = Z_\epsilon \frac{1 + \dot{\Gamma}_0 e^{-i2\beta y}}{1 - \dot{\Gamma}_0 e^{-i2\beta y}} = Z_\epsilon \frac{e^{i\beta y} + \dot{\Gamma}_0 e^{-i\beta y}}{e^{i\beta y} - \dot{\Gamma}_0 e^{-i\beta y}} \end{aligned}$$

Підставимо в це рівняння $\dot{\Gamma}_0 = \frac{\dot{Z}_H - Z_e}{\dot{Z}_H + Z_e}$ та застосуємо тотожність $e^{i\beta y} = \cos(\beta y) + i \sin(\beta y)$, $e^{-i2\beta y} = \cos(2\beta y) - i \sin(2\beta y)$

Після спрощень отримуємо вираз для вхідного опору довгої лінії в довільному перерізі:

$$\dot{Z}_{ex}(y) = \frac{\dot{U}_m(y)}{\dot{I}_m(y)} = Z_e \frac{\dot{Z}_H + iZ_e \operatorname{tg}(\beta y)}{Z_e + i\dot{Z}_H \operatorname{tg}(\beta y)}. \quad (14.7)$$

Позначимо довжину лінії l . Зробимо висновок з формули (14.7):

а) вхідний опір відрізка лінії залежить не лише від опору навантаження \dot{Z}_H , але і від довжини лінії l ;

б) при зміні довжини лінії на величину, кратну половині довжині хвилі, тобто на $\Delta l = n \frac{\lambda}{2}$, де $n = 1, 2, 3, \dots$, вхідний опір не змінюється, оскільки аргумент тангенса

змінюється на $\beta \Delta l = \beta n \frac{\lambda}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} n \frac{\lambda}{2} = n\pi$, а функція тангенса має період π . Це означає,

що всі перерізи в лінії, що відстоять на $\Delta l = n \frac{\lambda}{2}$ один від одного, мають рівний вхідний

опір. Тому ті перерізи, що знаходяться від навантаження на відстані $l = n \frac{\lambda}{2}$, мають опір,

рівний навантаженню \dot{Z}_H . Ці перерізи називаються перерізами, еквівалентними навантаженню;

в) якщо $\dot{Z}_H = 0$, то $\dot{Z}_{ex}(l) = Z_e \frac{0 + iZ_e \operatorname{tg}(\beta l)}{Z_e + i0 \operatorname{tg}(\beta l)} = iZ_e \operatorname{tg}(\beta l)$. (14.8)

Вхідний опір короткозамкненого відрізка довгої лінії буде чисто уявним і не обов'язково буде дорівнювати нулю. Наприклад, вхідний опір чверть хвильового відрізка

при $l = \frac{\lambda}{4}$ дорівнюватиме нескінченості: $\dot{Z}_{ex}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = iZ_e \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4}\right) = iZ_e \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$. Ця

властивість чверть хвильових відрізків довгої хвилі часто використовується у техніці НВЧ, їх застосовують як ізолятори.

14.6. Принципи узгодження у довгій лінії

В лінії передачі найкращий режим - режим біжучих хвиль. При цьому відсутня відбита хвиля, вся енергія потрапляє до навантаження..

Для створення режиму біжучих хвиль необхідно виконання рівності $\dot{Z}_H = Z_e$, але це не завжди можливо. Тому намагаються створити режим біжучих хвиль на максимальному по довжині відріжку лінії передачі, встановлюючи узгоджуючі пристрої якомога ближче до навантаження. Слід підкреслити, що відбита хвиля може негативно впливати на джерело сигналу.

З практики відома велика кількість узгоджуючих пристроїв: діафрагми, шунти, трансформатори опору, поглиначі відбитої хвилі.

Можливо використання двох принципово різних шляхів узгодження: поглинання зворотної хвилі та повернення зворотної хвилі до навантаження. У першому випадку ставлять пристрій (вентиль), що не пропускають відбиту хвилю до генератора. У другому випадку ставлять такий пристрій, який робить вхідний опір, рівний хвильовому. Тому на відріжку лінії від генератора до узгоджуючого пристрою буде режим біжучої хвилі.

14.6.1. Узгоджуючий реактивний шунт

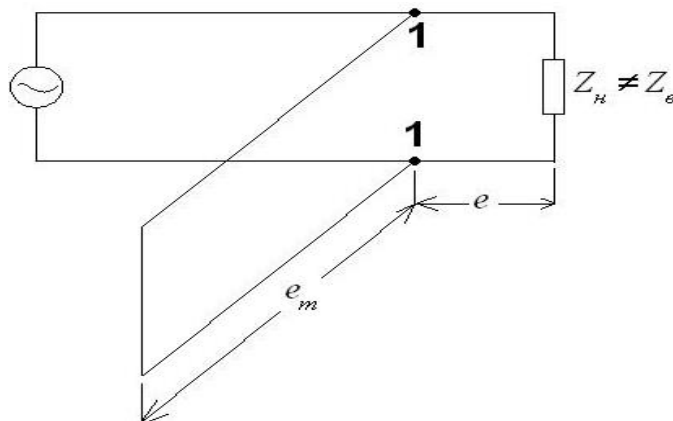


Рис. 14.11. Реактивний шунт

Реактивний шунт - це відрізок короткозамкненої лінії передачі (рис.11).

Шунт включають у перетин, де активна складова вхідної провідності \dot{Y}_{ex} дорівнює хвильовій провідності: $\dot{Y}_{ex} = \frac{1}{Z_e} + iX_{ex}$,

де X_{ex} - реактивна складова вхідної провідності. Її потрібно компенсувати.

Довжину шунта розраховують так, щоб його вхідна провідність була $\dot{Y}_{шл} = -iX_{ex}$ (реактивний опір шлейфа рівний зі зворотним знаком реактивній складовій вхідній провідності лінії).

У результаті реактивні складові вхідної провідності лінії та провідності шлейфу компенсують друг друга:

$$\dot{Y}_{\Sigma} = \dot{Y}_{ex} + \dot{Y}_{шл} = \frac{1}{Z_g} + iX_{ex} - iX_{ex} = \frac{1}{Z_g}.$$

Від генератора до шлейфа буде спостерігатись режим біжучої хвилі. Потрібну довжину шлейфа можна розрахувати за формулою (8).

Реактивний шлейф зручно використовувати в коаксіальних лініях передачі.

14.6.2. Діафрагма та чверть хвильовий трансформатор

В хвилеводних лініях передачі реактивних шлейф конструктивно незручний. Там краще застосовувати діафрагму (рис.14.12) або чверть хвильовий трансформатор.

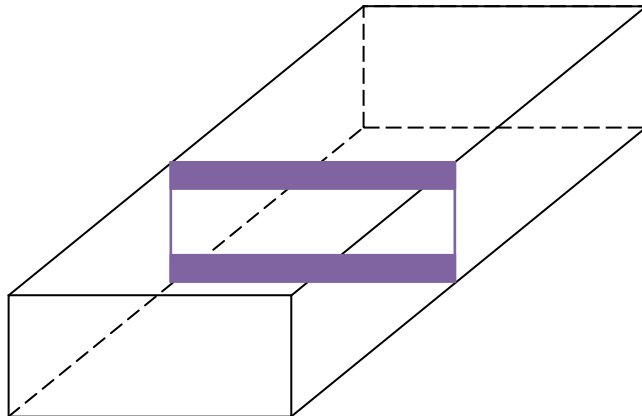


Рис. 14.12 Ємнісна діафрагма у хвилеводі.

Діафрагма представляє собою вставку у хвилевід. Принцип використання реактивної діафрагми такий же, як і реактивного шлейфу. Розраховується місце включення діафрагми так, щоб компенсувати реактивну складову вхідної провідності в цьому місці. Розраховуються і розміри вставки. Можуть використовуватись ємнісні та індуктивні діафрагми. Ємнісні діафрагми використовують переважно в малопотужних, а індуктивні – в потужних хвилеводних системах, тому що скорочення відстані між широкими стінками хвилеводу призводить до електричного пробоя.

$\lambda/4$ трансформатор представляє собою відрізок лінії передачі з іншим хвильовим опором.

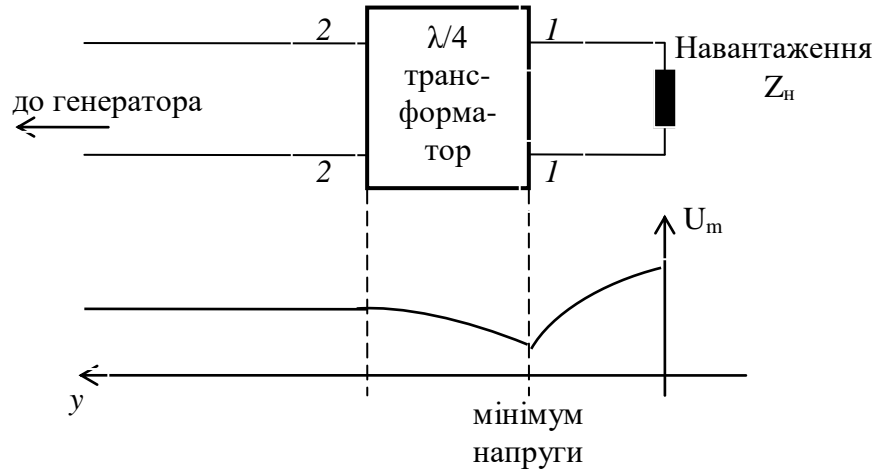


Рис.14.13. Включення $\lambda/4$ трансформатора

Край 1-1 трансформатора розміщується в місці мінімуму напруги. У цьому місці падаюча та відбита хвилі точно протифазні, вхідний опір лінії:

$$Z_{11} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{\dot{U}_{nod} - \dot{U}_{oid}}{\frac{1}{Z_0}(\dot{U}_{nod} + \dot{U}_{oid})} = Z_0 \frac{1 - \Gamma_0}{1 + \Gamma_0} = KBX \cdot Z_0.$$

Потрібно, щоб вхідний опір в перерізі 2-2 дорівнював хвильовому: $Z_{22} = Z_0$. Цей опір можемо розрахувати за формулою (7), де $Z_H = Z_{11}$, а довжина $y = \lambda/4$. Знайдемо потрібний хвильовий опір трансформатора з рівняння:

$$Z_{22} = Z_{mp} \frac{\dot{Z}_{11} + iZ_{mp} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi \lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{4}\right)}{Z_{mp} + i\dot{Z}_{11} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi \lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{4}\right)} = Z_{mp} \frac{\dot{Z}_{11} + iZ_{mp} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{Z_{mp} + i\dot{Z}_{11} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = Z_{mp} \frac{\dot{Z}_{11} + iZ_{mp} \infty}{Z_{mp} + i\dot{Z}_{11} \infty} \approx \frac{Z_{mp}^2}{Z_{11}} = Z_0$$

Звідки $Z_{mp} = \sqrt{Z_0 Z_{11}} = Z_0 \sqrt{KBX}$.

Наприклад, в коаксильній лінії можна змінити хвильовий опір $Z_0 = \frac{Z_0}{2\pi} \ln \frac{r_0}{r_m}$,

змінюючи радіус центрального провідника. Для цього достатньо надіти на нього трубку потрібного радіуса та довжини (рис.14.14):

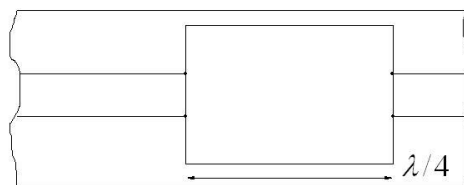


Рис.14.14. Зменшення хвильового опору коаксіальної лінії

Аналогічний $\lambda/4$ трансформатора широко застосовується у мікросмужкових лініях.

Хвилі, що відбиті від перетинів, куди включений трансформатор, повинні бути протифазні. Підпором хвильових опорів в перерізах домагаються, щоб сумарна відбита хвиля дорівнювала нулю.

15. Елементи техніки надвисоких частот

15.1. Збудження електромагнітних хвиль.

Збудження електромагнітних хвиль у хвилеводі може здійснюватись кількома способами.

Перший варіант: штирем зв'язку, як показано на рис. 15.1:

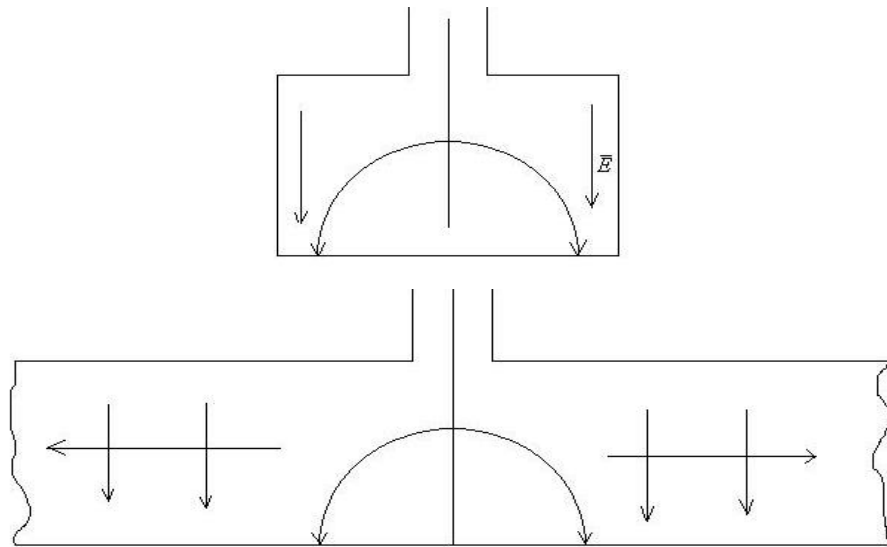


Рис. 15.1. Збудження електромагнітних хвиль штирем зв'язку

Від штиря зв'язку хвиля йде синфазно в дві боки хвилеводу.

Другий варіант збудження хвилі: за допомогою петлі зв'язку. На рис. 15.2 показано структуру вектора \vec{H} хвилі основного типу H_{10} у хвилеводі.

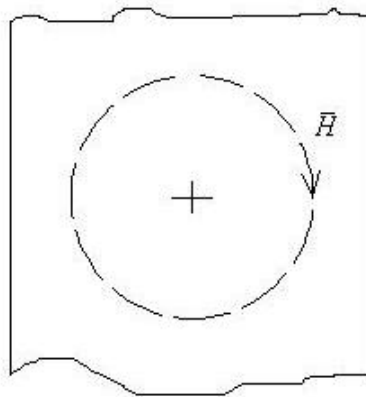


Рис.15.2. Структура вектора \vec{H} хвилі основного типу H_{10}

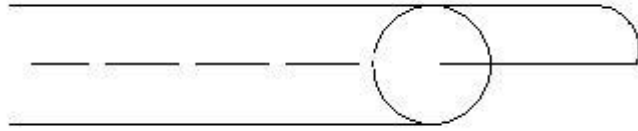


Рис. 15.3. Форма петлі зв'язку

Петля зв'язку повинна формувати магнітне поле, силові лінії якого будуть співпадати з силовими лініями магнітного поля хвилі H_{10} . Для цього в боковій стінці хвилеводу робиться отвір і туди вставляється петля зв'язку. Площина петлі повинна бути перпендикулярна силовим лініям вектора \vec{H} .

Струм, що протікає по центральному проводу, збуджує магнітне поле у хвилеводі.

Третій варіант: використання отворів зв'язку (щілин). Щілина в стінках хвилеводу повинна перерізувати силові лінії струму провідності, як показано на рис.15.4.

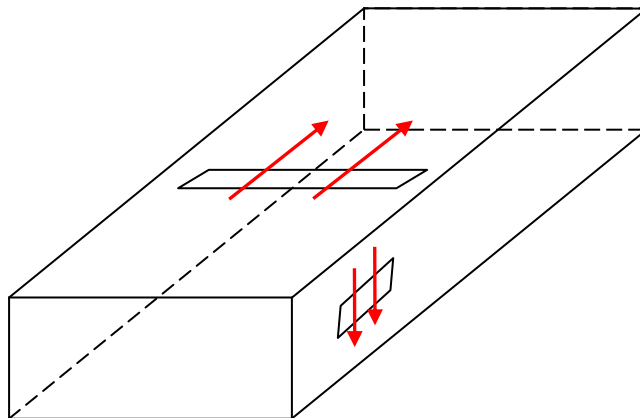


Рис.15.4. Щілини зв'язку у прямокутному хвилеводі перетинають струми провідності на стінках хвилеводу

15.2. Дросельне з'єднання хвилеводів

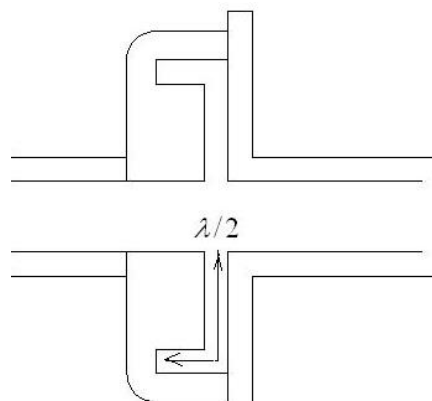


Рис.15.5. Дросельне з'єднання хвилеводів

При довжині короткозамкненого відрізка в половину довжини хвилі ($\frac{\lambda}{2}$) хвильовий опір в місці з'єднання хвилеводів буде точно повторювати опір в кінці короткозамкненого відрізка: $Z_{ex}=iZ_0 \operatorname{tg} \alpha l = iZ_0 \cdot \operatorname{tg} \pi = 0$. Таким чином, спостерігається трансформування короткого замикання в місце контакту хвилеводів, і це не залежить від корозії та якості примикання хвилеводів один до одного.

15.3. Атенюатори

Призначення атенюатора - регулювання та зменшення потужності, що проходить по хвилеводу. Можливо два варіанта регулювання потужності: відбиття хвиль до генератора або поглинання частини енергії у елементі.

Варіант з поглинанням енергії показано на рис.14.20.

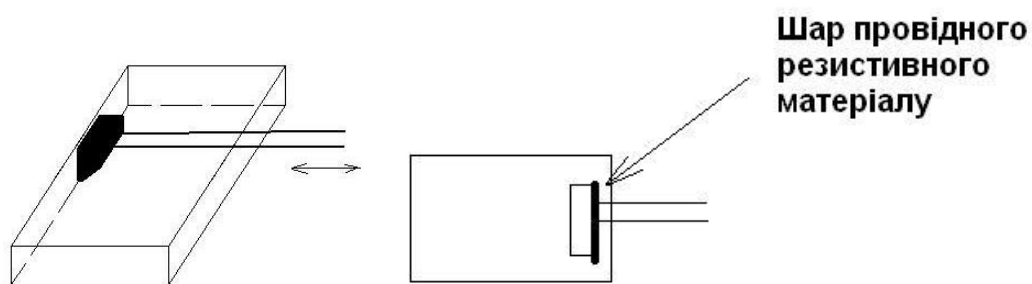


Рис.15.6. Атенюатор з механічним регулюванням

Існують варіанти побудови електричних керованих атенюаторів на напівпровідникових *p-i-n* діодах та на намагнічених феритах.

15.4. Багатоплечі схеми НВЧ

15.4.1 Хвильовідні трійники.

Подвійний хвильовідний трійник складається з двох трійників: типу Е та типу Н.

При підключенні джерела сигналу до плеча Е збуджується хвиля типу H_{10} , структура силових ліній вектора Е показана червоним кольором. На малюнку видно, що у бокових плечах 1 та 2 будуть збуджуватися протифазні хвилі однакової амплітуди.

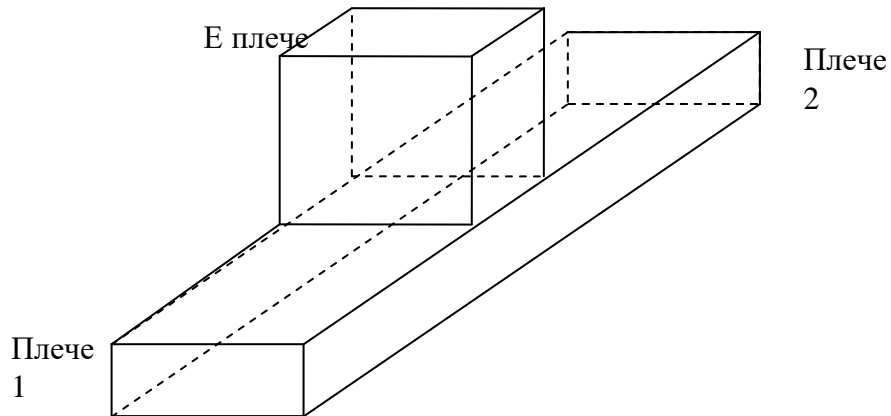


Рис. 15.7. Загальний вид трійника E-типу.

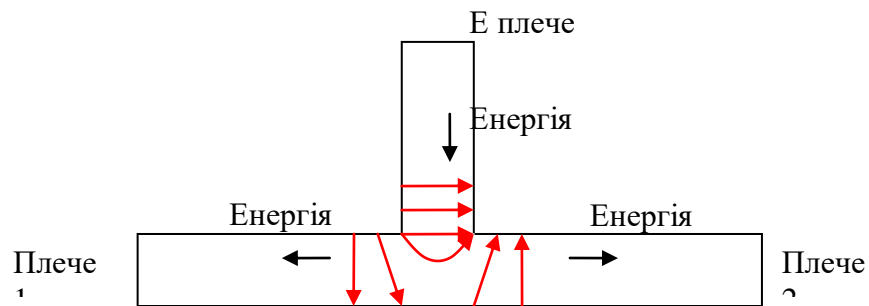


Рис. 15.8. Структура поля в E-трійнику при підключенні енергії в плече E.

При підключенні синфазних джерел сигналів до плечей 1 та 2 структура поля буде така, що у місці з'єднання в плечі E повинна бути збуджена хвиля типу E. Така хвиля розповсюджуватися не може, тому що ми працюємо на хвилі основного типу H_{10} .

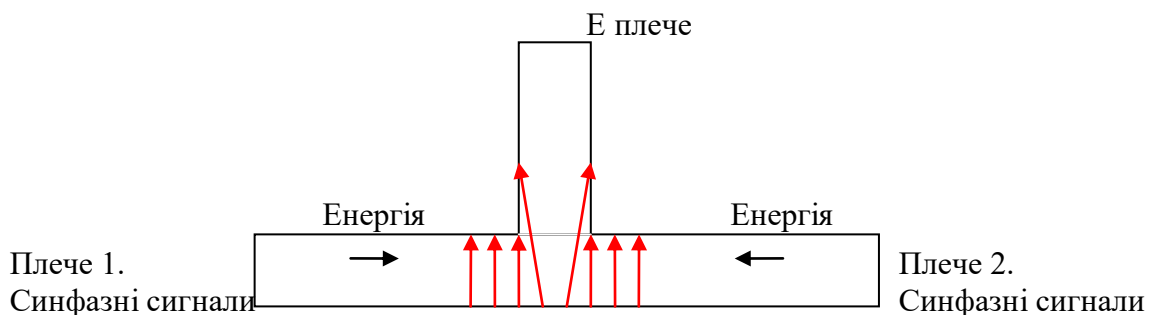


Рис. 15.9. Структура поля в трійнику при синфазному підключенні енергії в плечі 1 та 2.

Таким чином, енергія в плече E проходить не буде.

При підключенні протифазних джерел сигналів до плечей 1 та 2 структура поля буде така, що у місці з'єднання в плечі E повинна бути збуджена хвиля типу H_{10} . Така хвиля розповсюджуватися може.

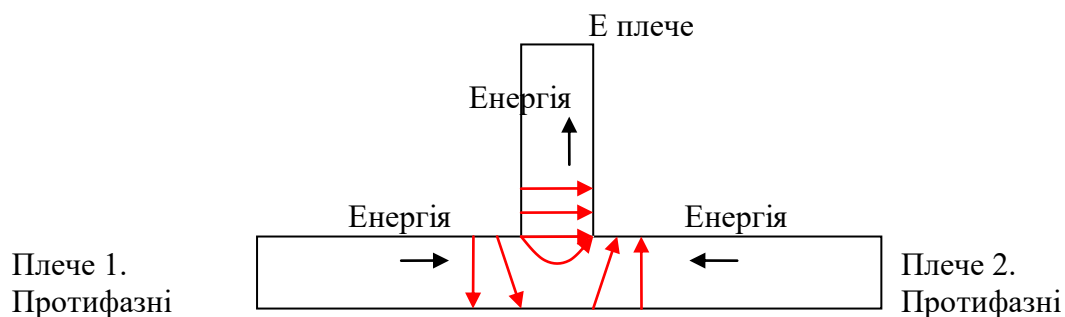


Рис. 15.10. Структура поля в трійнику при протифазному підключенні енергії в плечі 1 та 2.

Структура силових ліній вектора E показана червоним кольором. На малюнку видно, що у бокових плечах 1 та 2 будуть збуджуватися протифазні хвилі однакової амплітуди.

Таким чином, енергія в плече E проходить буде.

Загальний вид та структура електромагнітного поля в трійнику типу H показана на рис.15.11, 15.12 та 15.13.

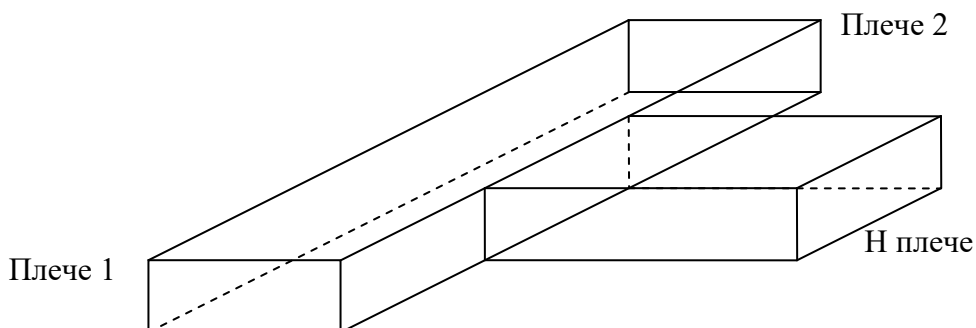


Рис. 15.11. Загальний вид трійника H -типу.

При підключенні джерела сигналу до плеча H збуджується хвиля типу H_{10} , структура силових ліній вектора E показана червоним кольором. На малюнку видно, що у бокових плечах 1 та 2 будуть збуджуватися синфазні хвилі однакової амплітуди.

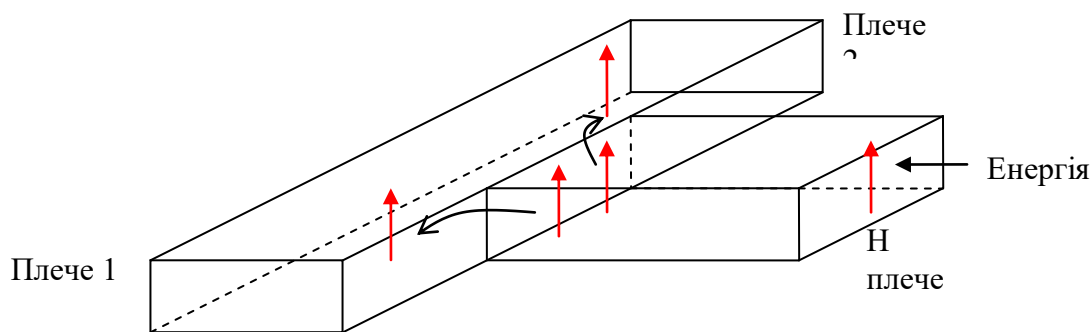


Рис. 15.12. Структура поля в Н-трийнику при підключенні енергії в плече Н.

Навпаки, при збудженні синфазних хвиль в плечах 1 та 2 енергія буде проходити у зворотному напрямку – в плече Н.

При збудженні протифазних сигналів в плечах 1 та 2 буде спроба в плечі Н збуджувати хвилю типу H_{20} , яка розповсюджуватись не може.

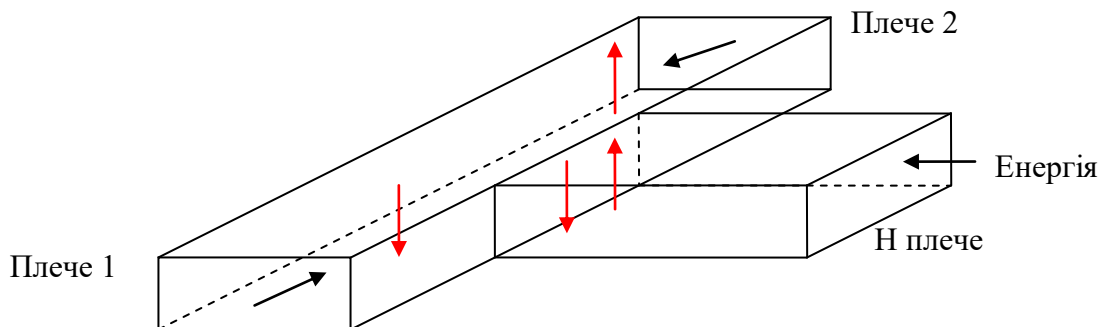


Рис. 15.13. Структура поля в Н-трийнику при протифазному підключенні енергії в плечі 1 та 2.

Висновок: У подвійному хвилевідному трийнику, що об'єднує трийники Е та Н-типу, при підключенні енергії в плечі 1 та 2 синфазно енергія буде проходити в плече Н. При протифазних сигналах в плечах 1 та 2 енергія проходить в плече Е.

При підключенні сигналу в плече Е будуть збуджуватися плечі 1 та 2 протифазно, а при підключення сигналу в плече Н – синфазно.

15.4.2. Аналіз структури електромагнітного поля в кільцевому мості.

Кільцевий міст може бути Е та Н-типу. Коли у кільце згорнуто трийники Е-типу, то отримують міст Е-типу. При згортанні трийника Н-типу отримують міст Н-типу.

Фізичні принципи роботи мостів обох типів однакові, різниця полягаю тільки в тому, що в мості Н-типу в кільці збуджуються синфазні хвилі, а в мості Е-типу протифазні.

З іншого боку, для збудження бокових хвилеводів в першому випадку потрібні синфазні сигнали, в другому – протифазні.

Тому розглянемо роботу моста Н-типу, що зображений на рис. 15.14.

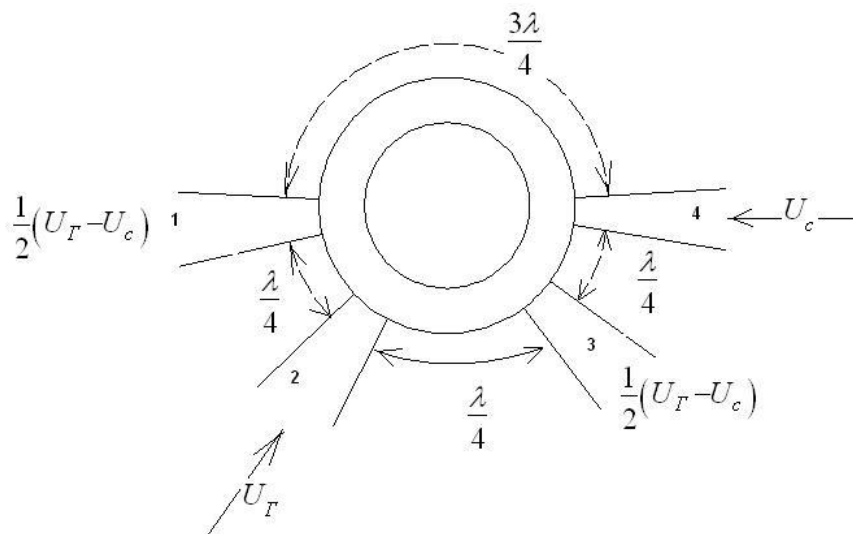


Рис. 15.14. Структура Н-кільцевого моста.

Принциповим моментом є відстань між місцями підключення бокових хвилеводів 1-2, 2-3, 3-4 $\lambda/4$ та між хвилеводами 1-4 $3\lambda/4$.

В кільці будуть збуджуватися синфазні хвилі, що йдуть проти часової стрілки та за часовою стрілкою.

1. Ці дві хвилі будуть підходити до плеча 4 синфазно, тому що проходять однаковий шлях. В результаті плече 4 збуджується.

2. Хвилі до плеча 3 підходять протифазно. Одна з них проходить шлях $4\lambda/4$, інша $2\lambda/4$, різниця шляху $\lambda/2$, що відповідає різниці фаз π . Плече 3 збуджуватися не буде.

3. До плеча 2 хвилі підходять синфазно, різниця шляхів $5\lambda/4 - \lambda/4 = \lambda$. Плече 2 буде збуджуватись.

Аналогічно аналізується робота моста при підключенні сигналу в інші плечі.

Мостові схеми широко використовуються в техніці НВЧ при побудові пристроїв, що виконують підсумовування та віднімання сигналів.

Наприклад, вони застосовуються в приймачах із супергетеродинною схемою для побудови приймачів з малим коефіцієнтом шуму.