УНІВЕРСИТЕТСЬКА БІБЛІОТЕКА
Заснована в 2001 році

В. П. ДУБОВИК
І. І. ЮРИК

ВИЩА МАТЕМАТИКА

*Затверджено
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
технічних і технологічних спеціальностей
вищих навчальних закладів*

Київ
«А.С.К.»
2006

ББК 22.11я73
Д79

Затверджено Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вищих навчальних закладів

Рецензенти: *Л. Ф. Баранник*, д-р фіз.-мат. наук, проф.; *В. О. Марченко*, канд. фіз.-мат. наук (Полтавський пед. ін-т); *В. Б Рудницький*, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Хмельницький технолог. ін-т).

Дубовик В. П., Юрик І. І.
Д79 Вища математика: Навч. посібн. — К.: А.С.К., 2006. — 648 с.: іл. — Бібліогр.: с. 632-633.— (Університет. б-ка).
ISBN 966-539-320-0.

У посібнику розглянуто питання з таких розділів вищої математики, як векторна алгебра й аналітична геометрія; диференціальне й інтегральне числення; функції багатьох змінних; диференціальні рівняння; ряди; кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли.

Теоретичний матеріал відповідає навчальній програмі з курсу вищої математики і супроводжується достатньою кількістю прикладів і задач. Особливу увагу приділено прикладній і практичній спрямованості курсу.

Для студентів технічних і технологічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

ББК 22.11я73

Навчальне видання

Університетська бібліотека

ДУБОВИК Володимир Панасович
ЮРИК Іван Іванович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Затверджено Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вищих навчальних закладів

Редактор *Є. Бондарчук*

Підписано до друку 28.06.06. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний. Друк офсетний. Гарнітура літературна. Умовн.-друк. арк. 37,66. Тираж 10 000 (1-й завод 4000). Зам.6-550.

"А.С.К.", 03057, Київ-57, вул. Петра Нестерова, 3, корп. 1.
Свідоцтво Держкомінформу України ДК № 66 від 29.05.2000.

Висновок державної санітарно-епідеміологічної експертизи Міністерства охорони здоров'я України № 5.03.02-04/15808 від 12.04.05.

ВАТ «Поліграфкнига», 03057, Київ-57, вул. Довженка, 3.

ISBN 966-539-320-0

ВСТУП

Математика — одна з найдавніших наук, що зародилась на світанку цивілізації. Вона постійно збагачувалася, час від часу істотно оновлювалася і все більше утверджувалась як засіб пізнання закономірностей навколишнього світу. Розширюючи і зміцнюючи свої багатогранні зв'язки з практикою, математика допомагає людству відкривати і використовувати закони природи і є у наш час могутнім рушієм розвитку науки і техніки.

Саме нашому часу видаються особливо співзвучними пророчі слова великого Леонардо да Вінчі про те, що ніякі людські дослідження не можна назвати справжньою наукою, якщо вони не пройшли через математичні доведення.

Що ж таке математика? Відповісти на це запитання далеко не просто, і залежно від рівня математичних знань відповіді будуть дуже різними. Випускник середньої школи словом «математика» користується як збірним терміном для позначення арифметики, алгебри та початків аналізу і геометрії. Студент технічного вузу дізнається, що існують й інші розділи математики, наприклад аналітична геометрія, диференціальне та інтегральне числення, диференціальні рівняння тощо. Для спеціаліста-математика число таких розділів сягає кількох десятків. Причому кількість ця з часом зростає, тому що розвиток сучасної математики супроводжується виникненням нових розділів. В останній третині 20-го ст. у математиці сформувалося уже понад 250 напрямів. Проте перелік їх не відповідає на поставлене запитання.

Загальноприйнятого означення предмета математики немає. У минулому математику вважали наукою про вимірні величини або числа. Пізніше виникло означення математики як науки про нескінченні величини. У сучасний період під математикою розуміють науку про математичні структури. Таку точку зору започаткувала група французьких математиків, яка відома під колективним псевдонімом Н. Бурбакі [3].

Слід зазначити, що математичні структури — не довільні творіння розуму, а відбиття об'єктивного світу, нехай нерідко навіть у дуже абстрактному вигляді. Математика вивчає поняття, одержані шляхом абстракції від явищ реального світу, а також абстракції від попередніх абстракцій. Абстрактність у математиці не відриває пізнання від дійсного світу, а дає змогу пізнати його глибше і повніше. Абстракції виникають з реальної дійсності і тому з нею тісно пов'язані. По суті, саме це зумовлює придатність математичних результатів до описування різноманітних навколишніх явищ, успіх того процесу, який ми сьогодні спостерігаємо і який одержав назву математизації знань. Математичний результат має ту властивість, що він застосовний не тільки при вивченні якогось одного явища чи процесу, а може використовуватись і в багатьох інших, які суттєво відрізняються своєю фізичною природою. Наприклад, одне й те саме диференціальне рівняння $y' = ky$ описує характер радіоактивного розпаду, швидкість розмноження бактерій, зміну атмосферного тиску, процес опріснення розчину, зміну температури речовини, хід хімічної реакції тощо.

Історію розвитку математики можна умовно поділити на чотири періоди.

Перший період розвитку математики — період зародження математики як самостійної дисципліни — почався в глибині тисячолітньої історії людства і тривав приблизно до 6—5 ст. до н. е. У цей період формувались поняття цілого числа і раціонального дробу, відстані, площі, об'єму, створювались правила дій з числами та найпростіші правила обчислення площ фігур і об'ємів тіл. Так накопичувався матеріал, на базі якого зародились арифметика та алгебра. Вимірювання площ і об'ємів сприяло розвитку геометрії, а в зв'язку з запитами астрономії виникли початки тригонометрії. Однак у цей період математика не мала ще форми дедуктивної науки, вона являла собою збірку правил для розв'язування окремих практичних задач.

Другий період — період елементарної математики — тривав від 6—5 ст. до н. е. до середини 17 ст. У цей період математика стає самостійною наукою з своєрідним, чітко вираженим методом і системою основних понять. В Індії було створено десяткову систему числення, в Китаї знайдено метод розв'язування лінійних рівнянь, а запропонований стародавніми греками спосіб викладу елементарної геометрії на базі системи аксіом став зразком дедуктивної побудови математичної теорії на багато століть. У 15—16 ст. замість громіздкого словесного описання арифметичних дій та алгебраїчних виразів почали застосовувати знаки додавання, віднімання, знаки степенів, коренів, дужки, букви для позначення заданих та невідомих величин тощо.

Велике значення в розвитку елементарної математики відіграли праці грецьких вчених Фалеса, Піфагора, Евкліда, Архімеда, індійського математика і астронома Аріабхатти, китайського математика Чжан Цана, італійських математиків Кардано і Феррарі, французького математика Вієта та багатьох інших вчених.

Третій період — період створення математики змінних величин (середина 17 — початок 20 ст.). Природознавство і техніка дістали новий метод вивчення руху і зміни стану речовин — диференціальне та інтегральне числення. Створився ряд нових математичних наук — теорія диференціальних рівнянь, теорія функцій, диференціальна геометрія та інші. Бурхливий розвиток математики в той період пов'язаний з іменами французьких вчених Р. Декарта, П. Ферма, Ж. Лагранжа, англійських математиків Дж. Валліса, І. Ньютона, німецьких математиків В. Лейбніца, К. Якобі, К. Вейєрштрасса та багатьох інших учених.

Значну роль у розвитку математики змінних величин відіграли праці М. В. Остроградського, П. Л. Чебишева та інших російських та українських вчених [2].

На Україні в цей період відкрито університети в Харкові (1805), Києві (1834) та Одесі (1865), в яких були математичні відділення чи факультети.

Четвертий період — період сучасної математики — характеризується надзвичайно широким застосуванням математики до задач, що їх висуває природознавство і техніка. На базі їхніх запитів виникає і бурхливо розвивається ряд нових математичних дисциплін і напрямів: функціональний аналіз, теорія множин, теорія ймовірностей, теорія ігор та інші. У розвитку математики цього періоду значну роль відіграли роботи німецьких математиків Д. Гільберта і Г. Кантора, французького математика А. Лебега, українських та російських математиків П. С. Александрова, М. М. Боголюбова, А. М. Колмогорова, В. М. Глушкова, М. П. Кравчука, Ю. О. Митропольського та багатьох інших.

Створення всередині нашого століття електронних обчислювальних машин (ЕОМ) значно розширює можливості математики. Завдяки ЕОМ математичні методи застосовуються нині не тільки в таких традиційних науках, як механіка, фізика, астрономія, а й в хімії, біології, психології, соціології, медицині, лінгвістиці та ін.

У посібнику нумерація рисунків і формул дається автономно в межах кожної глави. Символи ○ і ● в тексті означають відповідно початок і кінець доведення теореми чи розв'язання задачі. Для скорочення запису замість слів «існує», «для довільного» і «слідує» використовуються відповідно такі логічні символи: $\exists$, $\forall$, $\Rightarrow$.

Глава 1

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Термін «алгебра» походить від назви твору «Альджебр аль-мукабала» узбецького математика Мухаммеда аль-Хорезмі. Цей твір містить методи розв'язування задач, що зводяться до рівняннь першого і другого степенів.

Алгебраїчна символіка була створена в основному в 16—17 ст. Першим застосував буквенні позначення як для невідомих, так і для заданих в задачі величин, французький математик Ф. Вієт.

До середини 18 ст. алгебра склалася приблизно в тому об'ємі, який нині називають елементарною алгеброю.

Однією з основних задач лінійної алгебри є розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. У зв'язку з вивченням цих систем виникли поняття визначника та матриці. Побудову загальної теорії систем лінійних рівнянь було завершено в 19 ст.

§ 1. ВИЗНАЧНИКИ

1.1. Визначники другого і третього порядків та їхні властивості

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1}$$

називається *визначником (детермінантом) другого порядку.*

Поняття «визначник» (від латинського determino — визначаю) ввів В. Лейбніц.

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}x_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \tag{2}$$

називається *визначником (детермінантом) третього порядку.*

Символи a_{ij} називаються елементами визначника, причому перший індекс i показує номер рядка, а другий індекс j — номер стовпця, на

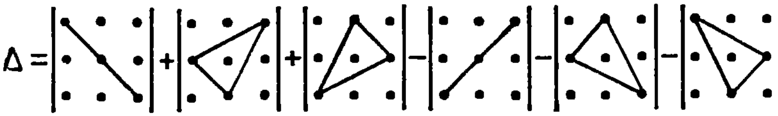


Рис. 1.1

перетині яких стоїть даний елемент. Так, елемент a_{23} стоїть у другому рядку і третьому стовпці.

Елементи a_{11}, a_{22} у визначнику (1) і a_{11}, a_{22}, a_{33} у визначнику (2) складають головну діагональ визначника, а елементи a_{12}, a_{21} і a_{13}, a_{22}, a_{31} в тих самих визначниках — побічну діагональ.

Для обчислення визначника другого порядку потрібно від добутку елементів, що стоять на головній діагоналі, відняти добуток елементів, розміщених на побічній діагоналі.

Визначник третього порядку обчислюється за правилом трикутників (рис. 1.1): перші три доданки в правій частині формули (2) є добутками елементів, що стоять на головній діагоналі і в вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Аналогічно утворюються доданки зі знаком мінус, де за основу береться побічна діагональ.

Зауважимо, що елементами визначника можуть бути не тільки числа, а й алгебраїчні чи тригонометричні вирази, функції тощо.

Приклад

Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

○ За формулами (1) і (2) маємо:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-4) \cdot 3 = 22$; б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha =$

$= 1$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot 4 - 1 \cdot 2 \times$

$\times 2 - 3 \cdot 5 \cdot 3 = -10$. ●

Розглянемо (на прикладі визначників третього порядку) *основні властивості визначників*.

1°. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ця властивість доводиться безпосередньо перевіркою: достатньо розкрити обидва визначники за формулою (2). Властивість 1^0 встановлює рівноправність рядків і стовпців визначника. Тому всі подальші властивості справедливі і для рядків і для стовпців. Доводяться вони, як і властивість 1^0, перевіркою.

2^0. Якщо переставити місцями два рядки (стовпці), то визначник поміняє знак. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3^0. Якщо один з рядків (стовпців) визначника складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4^0. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a_{13} \\ b & b & a_{23} \\ c & c & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

5^0. Спільний множник, що міститься в усіх елементах одного рядка (стовпця), можна винести за знак визначника. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6^0. Якщо у визначнику елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

7^0. Якщо кожен елемент n-го рядка (n-го стовпця) є сума двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у одного з яких n-й рядок (n-й стовпець) складається з перших доданків, а у другого — з других; інші елементи усіх трьох визначників однакові. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8^0. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

1.2. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця

Нехай задано визначник третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається визначник, який утворюється з даного визначника в результаті викреслення i-го рядка та j-го стовпця. Наприклад, для визначника (3) мінорами елементів a_{23} і a_{32} є такі визначники:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}; \quad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{4}$$

Наприклад, якщо $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}$, то $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} =$

$$= -5.$$

Тепер сформулюємо і доведемо теореми про розклад визначника за елементами рядка (стовпця).

Теорема 1. *Визначник дорівнює сумі добутків елементів якого-небудь рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.*

○ Покажемо, що для визначника (3) виконуються такі рівності:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}; \quad \Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31};$$
$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}; \quad \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32};$$
$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}; \quad \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}. \tag{5}$$

Доведемо, наприклад, першу з них.

Розкриваючи визначник (3) за формулою (2) і групуючи доданки, що містять елементи першого рядка, маємо

$$\Delta = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}(a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

За формулою (4) вирази, що стоять у дужках, відповідно дорівнюють алгебраїчним доповненням A_{11}, A_{12}, A_{13}, тому

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Аналогічно доводяться й інші рівності. ●

Запис визначника за будь-якою з формул (5) називають *розкладом визначника* за елементами відповідного рядка чи стовпця.

Приклад

Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$, розкладаючи його за елементами третього рядка.

○ За третьою з формул (5) маємо

$$\Delta = 3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 9.$$

Такий самий результат дає формула (2). ●

Теорема 2. *Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.*

○ Розглянемо, наприклад, суму добутків елементів першого рядка визначника (3) на алгебраїчні доповнення елементів другого рядка:

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = -a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} -$$

$$- a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{12}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) -$$

$$- a_{13}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) = 0.$$ ●

1.3. Поняття про визначники вищих порядків

Теорема 1 дає змогу ввести означення визначника довільного порядку. За означенням визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення. Можна довести, що всі розглянуті вище властивості визначників третього порядку справджуються для визначників будь-якого порядку.

Розглянемо, наприклад, визначник четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Цей визначник можна розкласти за елементами будь-якого рядка, наприклад першого:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}. \qquad (6)$$

Оскільки всі алгебраїчні доповнення A_{ij} у формулі (6) є визначники третього порядку, то цією формулою можна користуватись для обчислення визначника четвертого порядку. Але такий спосіб обчислення громіздкий: якщо для знаходження визначника четвертого порядку треба обчислювати чотири визначники третього порядку, то для знаходження визначника п'ятого порядку вже прийдеться обчислювати двадцять визначників третього порядку! Тому на практиці спочатку за допомогою властивості 8° перетворюють визначник так, щоб у деякому рядку чи стовпці всі елементи, крім одного, стали нулями. Розкладаючи тоді визначник згідно з теоремою за елементами цього рядка, дістанемо тільки один доданок, тому що всі інші доданки є добутками алгебраїчних доповнень на нуль.

Приклади

Обчислити визначники:

$$1)\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}; \quad 2)\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & 17 & -6 & -11 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 9 \\ 8 & 3 & 6 & 8 & 11 \end{vmatrix}.$$

○ 1) У першому рядку перетворимо всі елементи, крім першого, на нулі. Для цього, залишаючи перший і другий стовпці без змін, до третього додамо перший, а до четвертого — перший, помножений на (—2). Тоді

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розклавши цей визначник за елементами першого рядка, дістанемо

$$\Delta_1 = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -21.$$

2) У першому стовпці перетворимо всі елементи, крім другого, на нулі. Для цього, залишаючи другий рядок без змін, до першого рядка додамо другий, помножений на (—2), до третього — перший, до четвертого — перший, помножений на (—2), а до п'ятого — четвертий, помножений на (—2). Матимемо

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 20 & -2 & -6 \\ 0 & -12 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -6 & -7 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо цей визначник за елементами першого стовпця і винесемо за знак визначника спільний множник 2 з третього рядка і (—1) з четвертого:

$$\Delta_2 = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & -1 & -3 \\ 12 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & -7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & -1 & -3 \\ 11 & 10 & 1 & 1 \\ 6 & -31 & -6 & -7 \end{vmatrix}.$$

Розклавши цей визначник за елементами першого рядка, дістанемо

$$\Delta = 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 11 & 10 & 1 \\ 6 & -31 & -6 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 15 & 5 & 0 \\ -18 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 150. \bullet$$

Завдання для самоконтролю

1. Що називається визначником другого порядку?
2. Що називається визначником третього порядку?
3. Сформулювати основні властивості визначників.
4. Що називається мінором і алгебраїчним доповненням?
5. Сформулювати і довести теорему про розклад визначника за елементами рядка (стовпця). Чому дорівнює сума добутків елементів одного рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця)?
6. Як обчислюються визначники вищих (четвертого, п'ятого і т. д.) порядків?
7. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 8 & 5 \end{vmatrix}$; є) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & 6 & -4 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & 3 \end{vmatrix}$.

8. Розв'язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

9. Розв'язати нерівності:

а) $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & x & 1 \end{vmatrix} \leqslant 0$; б) $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \end{vmatrix} < 1$.

Відповіді. 7. а) 11; б) —1; в) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$; г) 3; д) —10; е) —216 є) —303. 8. а) 2; 3; б) 0; 2. 9. а) [0; 1]; б) $(0; \sqrt[3]{2})$.

§ 2 МАТРИЦІ

2.1. Основні означення

Прямокутна таблиця чисел a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, складена з m рядків та n стовпців і записана у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \cdot\ \cdot & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot\ \cdot & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

називається *матрицею*. Поняття матриці вперше ввели англійські математики У. Гамільтон і Д. Келі. Коротко матрицю позначають так:

$$A = (a_{ij}) \text{ або } A = \| a_{ij} \|,$$

де a_{ij} — елементи матриці, причому індекс i в елементі a_{ij} означає номер рядка, а j — номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Добуток числа рядків m на число стовпців n називають розміром матриці і позначають $m \times n$. Якщо хочуть вказати розмір $m \times n$ матриці A, то пишуть $A_{m \times n}$.

Матриця, в якої число рядків дорівнює числу стовпців, називається *квадратною*. Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її *порядком*. Матриця, у якої всього один рядок, називається матрицею-рядком, а матриця, у якої всього один стовпець,— матрицею-стовпцем. Дві матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$ та $B_{m \times n} = (b_{ij})$ називаються рівними, якщо вони однакових розмірів і мають рівні відповідні елементи: $a_{ij} = b_{ij}$. *Нульовою* називається матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю. Позначається така матриця буквою O. Як і в визначниках (п. 1.1), в квадратних матрицях виділяють головну і побічну діагональ.

Квадратна матриця називається *діагональною*, якщо всі її елементи, крім тих, що знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю. Діагональна матриця, у якої кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називається *одиничною* і позначається буквою E. Наприклад, одинична матриця третього порядку має вигляд

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Будь-якій квадратній матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

можна поставити у відповідність певне число, яке називається *визначником (детермінантом)* цієї матриці і позначається символом $\det A$. За означенням

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Наприклад, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \text{ то } \det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Прямокутна матриця розміром $m \times n$ $(n \neq m)$ визначника не має.

2.2. Дії над матрицями

1^0. Операція *додавання матриць* вводиться тільки для матриць однакового розміру. Сумою $C = A + B$ двох матриць $A_{m\times n} = (a_{ij})$ і $B_{m\times n} = (b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times n} = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$. Наприклад,

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

2^0. *Добутком матриці $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на число k* (або числа k на матрицю $A_{m\times n}$) називається матриця $B_{m\times n} = (ka_{ij})$. Наприклад,

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

3^0. *Різниця матриць $A - B$* визначається як сума матриці A і матриці B, помноженої на -1:

$$A - B = A + (-1) B.$$

Справедливі такі властивості операцій:

а) $A + B = B + A$ — *комутативність відносно додавання матриць;*

б) $A + (B + C) = (A + B) + C$ — *асоціативність відносно додавання матриць;*

в) $A + O = A$; $A - A = O$ — *роль нульової матриці* в діях над матрицями така, як і числа нуль в діях над числами;

г) $\alpha (\beta A) = (\alpha\beta) A$ — *асоціативність відносно множення чисел;*

д) $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$ — *дистрибутивність множення на число відносно додавання матриць;*

е) $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$ — *дистрибутивність множення на матрицю відносно додавання чисел.*

4^0. Операція *множення двох матриць* вводиться лише для узгоджених матриць. Матриця A називається *узгодженою з матрицею B*, якщо кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості рядків другої матриці B.

Якщо ця умова не виконується, тобто матриці неузгоджені, то множення таких матриць неможливе.

З узгодженості матриці A з B не випливає, взагалі кажучи, узгодженість матриці B з A.

Квадратні матриці одного порядку взаємно узгоджені.

Добутком $C = AB$ *матриці* $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *на матрицю* $B_{n\times k} = (b_{ij})$ називається така матриця, у якої елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}; \quad C = C_{m\times k} = (c_{ij}),$$
$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m; \quad j = 1,\ 2,\ \ldots, k.$$

Це означення називають *правилом множення рядка на стовпець*. Наприклад, щоб визначити елемент c_{24}, що стоїть в другому рядку і четвертому стовпці матриці $C = AB$, потрібно знайти суму добутків елементів другого рядка матриці A на відповідні елементи четвертого стовпця матриці B.

Приклад

Знайти матрицю $C = AB$, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = (1 \quad 2)$.

○ а) Матриця $A_{2\times 2}$ узгоджена з матрицею $B_{2\times 3}$, тому за означенням маємо

$$C = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2(-2) & 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 1\cdot 3 + 2(-1) \\ 0\cdot 1 + (-1)(-2) & 0\cdot 2 + (-1)\cdot 0 & 0\cdot 3 + (-1)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) $C = AB = A_{2\times 1}B_{1\times 2} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 & 0\cdot 2 \\ -2\cdot 1 & -2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. ●

З правила множення матриць випливає, що завжди можна перемножити дві квадратні матриці одного порядку; в результаті дістанемо матрицю того самого порядку. Зокрема, квадратну матрицю можна помножити саму на себе, тобто піднести до квадрата; прямокутну неквадратну матрицю піднести до квадрата не можна.

Операція множення матриць не комутативна, тобто при множенні матриць не можна міняти місцями множники:

$$AB \neq BA.$$

Наприклад (перевірте):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -5 & 17 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -9 & 35 \\ 15 & -10 & 20 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для дій 1^0—4^0 над матрицями виконуються такі властивості (за умови, що вказані операції мають зміст):

а) $(AB)\,C = A\,(BC)$; б) $(\alpha A)\,B = A\,(\alpha B) = \alpha\,(AB)$;

в) $(A + B)\,C = AC + BC$; г) $C\,(A + B) = CA + CB$;

д) $A \cdot O = O \cdot A = O$; е) $AE = EA = A$; є) $\det(AB) = \det A \times \times \det B$.

2.3. Обернена матриця

Нехай A — квадратна матриця. Матриця A^{-1} називається *оберненою* до матриці A, якщо виконується умова

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Квадратна матриця A називається *виродженою,* якщо $\det A = 0$, і *невиродженою,* якщо $\det A \neq 0$.

Теорема 3. *Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою.*

○ Необхідність. Нехай обернена матриця A^{-1} існує, тоді $AA^{-1} = E$. Застосовуючи правило знаходження визначника добутку двох матриць, маємо $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, тому $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай $\det A \neq 0$, тоді матриця A має обернену матрицю A^{-1}, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

де A_{ij} — алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Дійсно, добутки AA^{-1} і $A^{-1}A$ матриць (7) і (8) дорівнюють матриці, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці (за теоремою 1), а всі недіагональні елементи — нулю (за теоремою 2). Отже, $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Покажемо, що A^{-1} — єдина обернена матриця. Нехай A'' — ще одна обернена матриця, тоді

$$A^{-1} = A^{-1}E = A^{-1}(AA'') = (A^{-1}A)A'' = EA'' = A''. \quad \bullet$$

Приклад
Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

○ Обчислимо визначник матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 15.$$

Матриця A невироджена, тому обернена матриця знаходиться за формулою (7). Знаходимо алгебраїчні доповнення всіх елементів даної матриці:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Складаємо обернену матрицю

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Переконуємось, що

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \bullet$$

2.4. Ранг матриці

Нехай задано матрицю $A_{m\times n} = A$. Виділимо в матриці A будь-які k рядків і стільки ж стовпців, де k — число, не більше чисел m і n, тобто $k \leqslant \min(m, n)$.

Визначник порядку k, складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називається *мінором* k-го порядку матриці A.

Рангом $r(A)$ матриці A називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Безпосередньо з означення випливає, що:

1) Ранг існує для будь-якої матриці $A_{m\times n}$, причому

$$0 \leqslant r(A) \leqslant \min(m, n);$$

2) $r(A) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $A = 0$;

3) для квадратної матриці n-го порядку ранг дорівнює n тоді і тільки тоді, коли матриця невироджена.

Ранг матриці можна знайти так. Якщо всі мінори першого порядку (елементи матриці) дорівнюють нулю, то $r = 0$. Якщо хоч один з мінорів першого порядку відмінний від нуля, а всі мінори другого порядку дорівнюють нулю, то $r = 1$. У випадку, коли є мінор другого порядку, відмінний від нуля, досліджуємо мінори третього порядку. Так продовжуємо доти, поки не станеться одне з двох: або всі мінори порядку k дорівнюють нулю, або мінорів порядку k не існує, тоді $r = k - 1$.

Приклад

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

○ Серед мінорів першого порядку (тобто елементів матриці) є відмінні від нуля) тому $r(A) \geqslant 1$.

Оскільки один з мінорів другого порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

а всі мінори третього порядку дорівнюють нулю, то $r(A) = 2$. ●

Вказаний метод знаходження рангу матриці не завжди зручний, тому що пов'язаний з обчисленням значного числа визначників. Простіший метод грунтується на тому, що ранг матриці не змінюється, якщо над матрицею виконати так звані елементарні перетворення, а саме [1]:

а) переставити місцями два рядки (стовпці);

б) помножити кожен елемент рядка (стовпця) на один і той самий відмінний від нуля множник;

в) додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи другого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число.

Приклад

Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 10 & 8 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

○ Виконуючи елементарні перетворення, маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 10 & 8 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$r(A)=3.$$

(Знак $\sim$ між матрицями показує, що вони утворюються одна з другої елементарними перетвореннми і, отже, мають один і той самий ранг). ●

Завдання для самоконтролю

1. Що називається матрицею?
2. Як визначаються: сума двох матриць, добуток матриці на число, різниця та добуток двох матриць?
3. Що називається оберненою матрицею?
4. Сформулювати і довести теорему про існування оберненої матриці.
5. Що називається рангом матриці? Як знаходиться ранг?

6. Які перетворення над матрицями назнваються елементарнимн?

7. Пересвідчитись, що

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 & 3 & 22 \\ 14 & -1 & 8 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

9. Знайти ранг матрнць:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & 4 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Відповіді. 8. $A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{pmatrix}$. 9. $r(A)=1$, $r(B)=3$.

§ 3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

3.1. Основні означення

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається система виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (9)$$

Числа a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ біля невідомих називаються коефіцієнтами, а числа b_i — вільними членами системи (9).

Система рівнянь (9) називається *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і *неоднорідною*, якщо хоч один з них відмінний від нуля.

Множина чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називається *впорядкованою*, якщо вказано порядок слідування цих чисел, тобто вказано, яке з них є першим, яке другим, яке третім і т. д. Наприклад, якщо впорядкована трійка чисел, то в запису a, b, c число a вважається першим, b — другим, c — третім, в запису b, a, c першим є число b, другим — число a і третім — число c.

Упорядкований набір n чисел $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ називається *розв'язком системи* (9), якщо при підстановці цих чисел замість невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ усі рівняння системи перетворюються в тотожності. Таку систему чисел називають також *n-вимірним вектором*, або точкою n-вимірного простору (див. п. 2.6, гл. 2).

Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, тобто існує тільки один набір n чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, який перетворює всі рівняння системи (9) в тотожності.

Сумісна система називається *невизначеною*, якщо вона має більше, ніж один розв'язок.

Дві системи лінійних рівнянь називаються *еквівалентними*, якщо вони мають одну й ту ж множину розв'язків. Еквівалентні системи дістають, зокрема, внаслідок елементарних перетворень даної системи. Елементарні перетворення системи лінійних рівнянь відповідають елементарним перетворенням матриці (п. 2.4) за умови, що вони виконуються лише над рядками матриці.

3.2. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера

Нехай задано систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими x і y:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \tag{10}$$

Виконаємо такі елементарні перетворення системи (10): спочатку помножимо перше рівняння на a_{22}, друге — на $-a_{12}$, а потім складемо їх; після цього перше рівняння помножимо на a_{21}, а друге — на $-a_{11}$ і складемо їх. Дістанемо систему

$$\begin{cases} x(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = b_1a_{22} - b_2a_{12}; \\ y(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases} \tag{11}$$

Систему (11) можна записати за допомогою визначників:

$$\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x; \\ y \cdot \Delta = \Delta_y, \end{cases} \tag{12}$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \ \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Визначник Δ, складений з коефіцієнтів системи (10), називається *визначником системи*. Визначники Δ_x та Δ_y утворюються з визначника Δ відповідно заміною стовпців при невідомих x та y вільними членами.

При розв'язуванні рівнянь (12) можуть бути такі випадки.

1) $\Delta \neq 0$, тоді система (10) має єдиний розв'язок:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \tag{13}$$

Формули (13) вперше вивів К. Крамер і вони називаються *формулами Крамера.*

2) $\Delta = 0$; $\Delta_x \neq 0$ або $\Delta_y \neq 0$, тоді система (10) не має розв'язків, тобто є несумісною.

3) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, тоді система (10) зводиться до одного рівняння і має безліч розв'язків, тобто є невизначеною.

Розглянемо тепер систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими x, y, z:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2; \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases} \tag{14}$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Якщо визначник системи $\Delta \neq 0$, то система (14) має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{15}$$

Доведемо, наприклад, другу з формул (15). Помножимо перше, друге і третє рівняння системи (14) на алгебраїчні доповнення відповідних коефіцієнтів при y, тобто на A_{12}, A_{22}, A_{32}, а потім складемо їх:

$$x(a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32}) + y(a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}) +$$

$$+ z(a_{13}A_{12} + a_{23}A_{22} + a_{33}A_{32}) = b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}.$$

За теоремою 2 вирази в дужках при x і z в цій рівності дорівнюють нулю, а за теоремою 1 вираз в дужках при y і права частина дорівнюють відповідно Δ і Δ_y, тобто $\Delta_y = \Delta \cdot y$.

Аналогічно доводяться формули Крамера для знаходження невідомих x і z. Якщо задано n лінійних рівнянь з n невідомими ($n > 3$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{16}$$

і визначник системи $\Delta \neq 0$, то така система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера, аналогічними до формул (13) і (15):

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}. \tag{17}$$

У випадку, коли визначник системи (14) чи (16) дорівнює нулю, формули Крамера (15) і (17) не мають змісту. Такі системи, а також системи, у яких число невідомих не дорівнює числу рівнянь і до яких, очевидно, формули Крамера теж не можна застосувати, розглянемо в п. 3.5.

Приклад

Розв'язати системи за формулами Крамера:

а) $\begin{cases} 2x - y = 0; \\ x + 3y = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y + z = 0; \\ 2x + y + z = 5; \\ 2y - z = 3. \end{cases}$

○ а) Знаходимо визначники Δ, Δ_x, Δ_y:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14.$$

За формулами (13)

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2.$$

б) Розв'язок дістанемо за формулами (15). Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 1. \; \bullet$$

3.3. Матричний запис системи лінійних рівнянь і її розв'язування

Нехай задано систему (16), яка містить n лінійних рівнянь n з невідомими.

Введемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Матрицю A, складену з коефіцієнтів системи (16), називають *матрицею* або *основною матрицею* системи, матрицю X — матрицею з невідомих, а матрицю B — матрицею з вільних членів. Тоді згідно з правилом множення матриць систему (16) можна записати одним матричним рівнянням з невідомою матрицею X:

$$AX = B. \tag{18}$$

Припустимо, що матриця A системи (16) має обернену матрицю A^{-1}; помножимо обидві частини рівності (18) на A^{-1} зліва:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Оскільки $A^{-1}A = E$ і $EX = X$, то

$$X = A^{-1}B. \tag{19}$$

Отже, щоб розв'язати систему рівнянь (16), достатньо знайти матрицю, обернену до матриці системи, і помножити її справа на матрицю з вільних членів.

Формулу (19) називають *матричним записом розв'язку системи* (16) або *розв'язком матричного рівняння* (18).

Зауважимо, що розв'язок системи рівнянь у матричній формі можливий лише тоді, коли матриця системи невироджена.

Приклад

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y = 3; \\ -x + y + 2z = 5; \\ 3x + z = -2. \end{cases}$$

○ Маємо (див. приклад п. 2.3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

За формулою (19) знаходимо

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x = -1$, $y = 2$, $z = 1$. ●

3.4. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса

Одним з найпоширеніших методів розв'язування систем лінійних рівнянь є метод послідовного виключення невідомих, або метод Гаусса. Цей метод запропонований К. Гауссом і грунтується на елементарних перетвореннях системи рівнянь (п. 2.1).

Нехай маємо систему (9), яка містить m рівнянь і n невідомих. Очевидно, серед коефіцієнтів a_{i1} хоча б один відмінний від нуля. Якщо ж $a_{11} = 0$, то першим в системі (9) запишемо те рівняння, в якому коефіцієнт при x_1 відмінний від нуля. Позначимо цей коефіцієнт через a'_{11}.

Перетворимо систему (9), виключаючи x_1 в усіх рівняннях, крім першого. Для цього помножимо перше рівняння на $-\frac{a_{21}}{a'_{11}}$ і додамо до другого, потім помножимо перше рівняння на $-\frac{a_{31}}{a'_{11}}$ і додамо до третього і т. д. При цьому може статись так, що друге невідоме x_2 також не входить в усі рівняння з номером $i > 1$. Нехай x_k — невідоме з найменшим номером, яке входить в будь-яке рівняння, не рахуючи першого. Дістанемо систему

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + \cdots \qquad + a'_{1n}x_n = b'_1; \\ \qquad a'_{2k}x_k + \cdots \qquad + a'_{2n}x_n = b'_2; \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a'_{mk}x_k + \cdots \qquad + a'_{mn}x_n = b'_m, \quad k > 1, \quad a'_{11} \neq 0. \end{cases} \tag{20}$$

Застосовуючи до всіх рівнянь, крім першого, таку саму процедуру і виконавши ряд елементарних перетворень, дістанемо систему

$$\begin{cases} a''_{11}x_1 + \cdots \qquad + a''_{1n}x_n = b''_1; \\ \qquad a''_{2k}x_k + \cdots \qquad + a''_{2n}x_n = b''_2; \\ \qquad\qquad a''_{3l} + \cdots \qquad + a''_{3n}x_n = b''_3; \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a''_{ml}x_l + \cdots + a''_{mn}x_n = b''_m, \quad a''_{11} \neq 0, \quad a''_{2k} \neq 0. \end{cases} \tag{21}$$

Якщо продовжити цей процес, то матимемо систему

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{a}_{11}x_1 + \cdots \qquad\qquad + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1; \\ \quad \bar{a}_{2k}x_k + \cdots \qquad + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2; \\ \qquad \bar{a}_{3l}x_l + \cdots \quad + \bar{a}_{3n}x_n = \bar{b}_3; \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\quad \bar{a}_{rs}x_s + \cdots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \bar{b}_{r+1}; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \bar{b}_m. \end{array}\right. \tag{22}$$

Таку систему рівнянь називають *східчастою* або *трапецієподібною*. Дослідимо цю систему.

1. Якщо система містить рівняння виду $0 = b_t$ і $b_t \neq 0$, то вона очевидно несумісна.

2. Нехай система (22) не містить рівнянь виду $0 = b_t$ ($b_t \neq 0$). Назвемо невідомі x_1, x_k, x_l, ..., x_s, з яких починаються перше, друге, ..., r-е рівняння, основними, а всі інші, якщо вони є, вільними. Основних невідомих за означенням r. Надаючи вільним невідомим довільні значення і підставляючи ці значення в рівняння системи, з r-го рівняння знайдемо x_s. Підставляючи це значення в перші $r - 1$ рівнянь і, піднімаючись вгору по системі, знайдемо всі основні невідомі. Оскільки вільні невідомі можуть набувати будь-яких значень, система має безліч розв'язків.

3. Нехай в системі (22) $r = n$. Тоді вільних невідомих немає, тобто всі невідомі основні і система (22) має так званий трикутний вигляд:

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{a}_{11}x_1 + \cdots \qquad + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1; \\ \qquad \bar{a}_{22}x_2 + \cdots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2; \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad \bar{a}_{nn}x_n = \bar{b}_n. \end{array}\right.$$

З останнього рівняння системи знайдемо x_n, і, піднімаючись по системі вгору, знайдемо всі інші невідомі. Отже, в цьому випадку система має єдиний розв'язок.

Зауваження 1. Викладений нами метод послідовного виключення змінних називають ще алгоритмом Гаусса. Він складається з однотипових операцій і легко реалізується на сучасних ЕОМ.

Зауваження 2. При розв'язуванні системи лінійних рівнянь методом Гаусса зручніше приводити до трикутного чи трапецієподібного вигляду не саму систему рівнянь, а розширену матрицю цієї системи, тобто матрицю, утворену приєднанням до матриці її коефіцієнтів стовпця вільних членів. Виконуючи над рядками розширеної матриці елементарні перетворення, приходимо до розв'язку системи.

Приклад

Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x - y + 2z = -1; \\ -x + 2y - 3z = 3; \\ 2x - y + 3z = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = 1; \\ 2x + y + 2z = 1; \\ x + y + 3z = 2; \\ x + 3z = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -x + y + 2z = 1; \\ x + 2y - z = 2; \\ 2x + y - 3z = 1; \\ x + 5y = 5. \end{cases}$

○ а) Виконуємо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці даної системи (позначатимемо це символом $\Rightarrow$):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, система а) еквівалентна системі

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1; \\ 0 \cdot x + y - z = 2; \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 2. \end{cases}$$

В останньому рівнянні вільний член дорівнює двом, а коефіцієнти при невідомих дорівнюють нулю (тобто $0 = 2$), тому система несумісна.

б) Маємо

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, система б) еквівалентна системі трикутного вигляду

$$\begin{cases} x + y + z = 1; \\ -y + 0 \cdot z = -1; \\ 2z = 1; \end{cases}$$

і має єдиний розв'язок: $x = -\frac{1}{2}, \quad y = 1, \quad z = \frac{1}{2}$.

в) Маємо

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, система в) еквівалентна системі трапецієподібного вигляду

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 1; \\ 3y + z = 3 \end{cases}$$

і має безліч розв'язків. З останньої системи знаходимо

$$y = 1 - \frac{z}{3}, \quad x = \frac{5}{3} z.$$

Таким чином, розв'язки системи в) мають вигляд $x = \frac{5}{3} t$, $y = 1 - \frac{t}{3}$, $z = t$, де t — довільне число $(-\infty < t < -\infty)$.

Зазначимо, що жодну з наведених у цьому прикладі систем не можна розв'язувати ні за формулами Крамера, ні матричним способом. ●

3.5. Однорідна система лінійних рівнянь

Нехай задано однорідну систему m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Ця система завжди має нульовий розв'язок $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$, тому що підстановка нулів замість невідомих в кожне з рівнянь (23) перетворює їх в тотожності. Ненульові розв'язки (якщо вони існують) системи (23) можна знайти методом Гаусса.

Покажемо, що для однорідної системи трьох рівнянь з трьома невідомими можна знайти загальні формули, що виражають ненульові розв'язки через коефіцієнти системи.

Розглянемо систему

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0; \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0; \\ c_1x + c_2y + c_3z = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Якщо визначник системи $\Delta \neq 0$, то система має єдиний нульовий розв'язок. Дійсно, визначники $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ (один стовпець в кожному визначнику містить тільки нулі), тому за формулами Крамера $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Покажемо, що коли визначник $\Delta = 0$, то система (24) має безліч розв'язків. Розглянемо такі два випадки.

1. Припустимо, що у визначнику Δ існує *принаймні один відмінний від нуля мінор другого порядку*. Нехай, наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{25}$$

Візьмемо ті рівняння системи (24), що містять відмінний від нуля мінор, і запишемо їх у вигляді

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = -a_3z; \\ b_1x + b_2y = -b_3z. \end{cases} \tag{26}$$

Оскільки визначник (25) системи (26) відмінний від нуля, то за формулами Крамера

$$x = \frac{\Delta_x z}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y z}{\Delta}, \tag{27}$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Оскільки z може набувати будь-яких дійсних значень, покладемо $z = \Delta \cdot t$, де t — довільне дійсне число, тоді з формул (27)

$$x = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot t; \quad y = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \cdot t; \quad z = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot t. \tag{28}$$

Підставляючи розв'язки (28) у третє рівняння системи (24) і використовуючи теорему 1, впевнюємося, що формули (28) при будь-якому t визначають розв'язки однорідної системи (24)..

2. Нехай тепер визначник системи (24) і *всі його мінори другого порядку дорівнюють нулю.* Це значить, що коефіцієнти всіх трьох рівнянь (24) пропорційні, тому система зводиться до одного рівняння з трьома невідомими. Надаючи двом невідомим довільних значень, знаходять відповідне їм третє невідоме.

Отже, якщо визначник Δ однорідної системи (24) дорівнює нулю, то така система має безліч розв'язків.

Приклад

Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0; \\ 2x + y + z = 0; \\ x - y + 2z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x + y - 2z = 0; \\ x - y + 2z = 0; \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$

○ а) Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

тому система а) має єдиний розв'язок: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

б) Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

тому система б) невизначена. Всі мінори другого порядку, що містяться у першому і другому рядках визначника, дорівнюють нулю. Візьмемо друге і третє рівняння системи:

$$x - y + 2z = 0;$$
$$2x + y - z = 0.$$

Ці рівняння містять відмінний від нуля мінор другого порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

тому за формулами (28) маємо

$$x = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot t = -t; \quad y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot t = 5t; \quad z = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot t = 3t.$$

Отже, система б) має безліч розв'язків: $x = -t$, $y = 5t$, $z = 3t$, де t — довільне дійсне число. ●

3.6. Критерій сумісності системи лінійних рівнянь

Нехай задано систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{29}$$

Складемо основну матрицю A і розширену матрицю $\tilde{A}$ даної системи:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Вичерпну відповідь на запитання про існування розв'язку системи (29) дає теорема Кронекера — Капеллі. Наводимо її без доведення.

Теорема 4. *Для того щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці.*

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок.

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, але менший числа невідомих, то система має безліч розв'язків [1, 9].

Приклад

Дослідити на сумісність систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1; \\ 2x - y + 2z = 3; \\ 3x + y + z = 5, \end{cases}$$

○ Оскільки ранг основної матриці $r(A) = 2$, а ранг розширеної матриці $r(\widetilde{A}) = 3$ (перевірте), то задана система рівнянь несумісна. ●

Завдання для самоконтролю

1. Що називається системою m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими?
2. Яка система лінійних рівнянь називається сумісною; несумісною; визначеною; невизначеною?
3. Записати формули Крамера. В якому випадку вони застосовуються? Довести формули Крамера для системи трьох рівнянь з трьома невідомими.
4. У чому полягає метод Гаусса?
5. За яких умов однорідна система лінійних рівнянь має єдиний нульовий розв'язок; безліч розв'язків?
6. Сформулювати теорему Кронекера — Капеллі.
7. Розв'язати системи рівнянь, користуючись формулами Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$

8. Розв'язати систему матричним способом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

9. Розв'язати системи методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7; \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$

10. Розв'язати однорідні системи:

а) $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0; \\ x + 4y - 3z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0; \\ 2x - y + 3z = 0; \\ x + y - z = 0. \end{cases}$

11. Дослідити на сумісність системи:

а) $\begin{cases} x + y + z = 2; \\ 2x - 3y - z = 5; \\ x + y - z = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 4; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1; \\ 6x_1 - x_2 + 4x_3 - 11x_4 = 6. \end{cases}$

Відповіді. 7. а) (2; —2; 3); б) (—1; —1; 0; 1). 8. (1; 2; —2). 9. а) $x_3 = -x_1 + 2x_2$, $x_4 = 1$; б) (1; 2; —2). 10. а) ($7t$; $8t$; $13t$); б) (0; 0; 0). 11. а) Сумісна; б) несумісна.

Глава 2

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Векторна алгебра — розділ математики, в якому вивчаються дії над векторами. Векторна алгебра виникла і вдосконалювалась у зв'язку з потребами механіки і фізики. До 19 ст. величини, що зустрічались у механіці і фізиці, задавали числом або кількома дійсними числами. Дальший розвиток фізики показав, що деякі з фізичних величин набагато доцільніше характеризувати не тільки числом, а й напрямом, тобто вектором.

Вперше вектори застосував К. Вессель у 1799 р. для інтерпретації комплексних чисел. Проте справжній розвиток векторної алгебри розпочався лише в середині 19 ст. і привів до створення нової математичної дисципліни — векторного аналізу.

Апарат векторного числення ефективно використовується в багатьох загальнонаукових та інженерних дисциплінах (електро- і гідродинаміці, теоретичній і технічній механіці, теорії механізмів і машин).

§ 1. ВЕКТОРИ І ЛІНІЙНІ ДІЇ З НИМИ

1.1. Скалярні і векторні величини

Багато фізичних величин повністю визначаються своїм числовим значенням (об'єм, маса, густина, температура тощо); вони називаються *скалярними*. Але є й такі величини, які крім числового значення мають ще й напрям (швидкість, сила, напруженість магнітного поля тощо). Такі величини називаються *векторними*.

Будь-яка упорядкована пара точок A і B простору визначає *напрямлений відрізок*, або *вектор*, тобто відрізок, що має певну довжину і певний напрям. (Термін «вектор» (від лат. vector — переносник) ввів у 1848 р. Гамільтон.) Першу точку A називають початком вектора, а другу B — кінцем вектора. Напрямом вектора вважають напрям від його початку до кінця.

Вектор, початок якого знаходиться в точці A, а кінець — в точці B, позначається символом $\vec{AB}$ або $\vec{a}$. Напрям вектора на рисунку показують стрілкою (рис. 2.1). Відстань між початком вектора $\vec{a} = \vec{AB}$ і його кінцем називається *довжиною* (або *модулем*) *вектора* і позначається $|\vec{a}|$ або $|\vec{AB}|$.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одиничним*. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, називається *ортом вектора* $\vec{a}$ і позначається через $\vec{a}^0$.

Вектор, початок якого збігається з кінцем, називається *нульовим* і позначається через $\vec{o}$; напрям нульового вектора невизначений, а його довжина дорівнює нулю.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Колінеарні вектори можуть бути напрямлені однаково або протилежно. Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *рівними* ($\vec{a} = \vec{b}$), якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і мають рівні довжини.

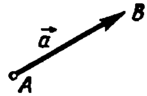


Рис. 2.1

В означенні рівності векторів не передбачено якесь певне розміщення їх, тому, не порушуючи рівності, вектори можна переносити паралельно самим собі. У зв'язку з цим вектори в аналітичній геометрії називаються вільними. Іноді вільність переміщення вектора обмежується. В механіці, наприклад, розглядаються ковзні і зв'язані вектори. Прикладом ковзного вектора є вектор кутової швидкості при обертанні тіла, тому що він може розміщуватися лише на осі обертання. Прикладом зв'язаного вектора є сила, прикладена до якоїсь точки пружного тіла, оскільки результат дії сили залежить від точки прикладання.

Три вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах. Зокрема, вектори компланарні, якщо два з них або всі три колінеарні. Три вектори вважаються компланарними також у тому випадку, коли хоча б один з них нульовий.

1.2. Лінійні дії з векторами

До лінійних дій з векторами належать додавання і віднімання векторів, множення вектора на число.

1. *Додавання векторів.* Сума $\vec{a} + \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ за означенням є вектор $\vec{c}$, напрямлений з початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$ за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$ (рис. 2.2). Це правило додавання вектора називають правилом трикутника.

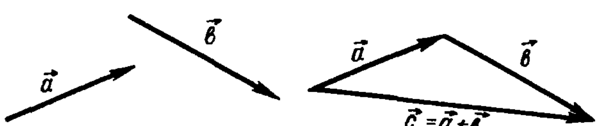


Рис. 2.2

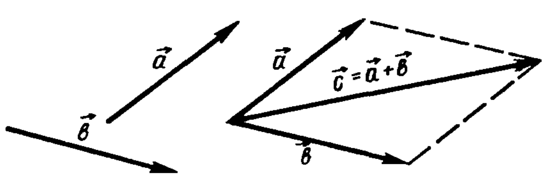


Рис. 2.3

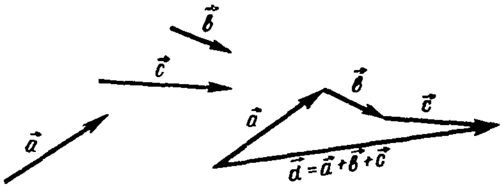


Рис. 2.4

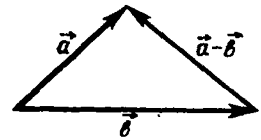


Рис. 2.5

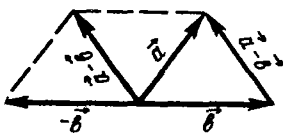


Рис. 2.6

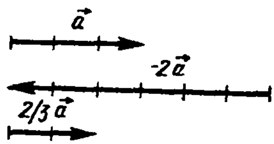


Рис. 2.7

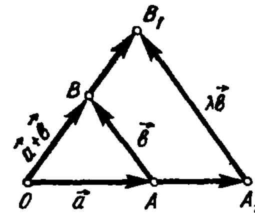


Рис. 2.8

Суму двох векторів можна побудувати також за правилом паралелограма (рис. 2.3).

Щоб побудувати суму будь-якого скінченного числа векторів, потрібно в кінці першого вектора побудувати другий, в кінці другого побудувати третій і т. д. Напрямлений відрізок, що йде з початку першого вектора в кінець останнього і буде сумою даних векторів (рис. 2.4).

2. *Віднімання векторів* визначається як дія, обернена додаванню. Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який, будучи доданий до вектора $\vec{b}$, дає вектор $\vec{a}$ (рис. 2.5).

Два вектори називаються *протилежними*, якщо вони колінеарні, довжини їх однакові, а напрями протилежні. Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначається через $-\vec{a}$. Тоді різницю $\vec{a}-\vec{b}$ можна тлумачити ще й так (рис. 2.6): відняти від вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$, це все одно, що до вектора $\vec{a}$ додати вектор, протилежний вектору $\vec{b}$, тобто $\vec{a}-\vec{b}=$ $=\vec{a}+(-\vec{b})$.

3. *Множення вектора на число.* Нехай задані вектор $\vec{a}\neq 0$ і число $\lambda\neq 0$. Добутком $\lambda\vec{a}$ називається вектор, довжина якого дорівнює $|\lambda|\,|\vec{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda>0$, і протилежний йому, якщо $\lambda<0$. Якщо $\lambda=0$ або $\vec{a}=0$, то $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

Геометричний зміст операції множення вектора на число такий: множення вектора $\vec{a}$ на число λ можна розуміти як «розтяг» вектора $\vec{a}$

в λ разів при $\lambda > 1$ і «стиск» при $0 < \lambda < 1$, причому при $\lambda < 0$ відбувається ще й зміна напряму. На рис. 2.7 показано вектори $\vec{a}, -2\vec{a}, \frac{2}{3}\vec{a}$.

З означення множення вектора на число випливає, що коли вектори колінеарні, то існує єдине число λ таке, що $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ і, навпаки, якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

Лінійні операції над векторами мають такі *властивості*:

1^0. Комутативність відносно додавання векторів:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

2^0. Асоціативність відносно додавання векторів:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

3^0. Асоціативність відносно множення чисел: $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$.

4^0. Дистрибутивність відносно додавання чисел:

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}.$$

5^0. Дистрибутивність відносно додавання векторів:

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

○ Доведемо, наприклад, властивість 5^0: нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні вектори і $\lambda > 0$. Побудуємо (рис. 2.8) вектори $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OA_1} = \lambda\vec{a}$, $\overrightarrow{OB_1} = \lambda(\vec{b} + \vec{a})$. З подібності трикутників OAB і OA_1B_1 випливає, що $\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda\vec{b}$, а із $\triangle OA_1B_1$ маємо $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1}$, тобто $\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$. Випадок $\lambda < 0$ розглядається аналогічно.

Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні і $\vec{a} \neq \vec{0}$, то вектор $\vec{b}$ можна записати у вигляді $\vec{b} = \mu\vec{a}$. Тоді, використовуючи властивості 3^0 і 4^0, маємо: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda(\vec{a} + \mu\vec{a}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$. ●

Розглянуті властивості мають велике значення у векторній алгебрі, бо вони дають право робити перетворення в лінійних операціях з векторами так само, як у звичайній алгебрі: векторні доданки можна переставляти місцями і сполучати їх в групи, вводити дужки, виносити за дужки як скалярні, так і векторні спільні множники.

1.3. Розклад вектора за базисом

Застосовуючи лінійні операції над векторами, можна знаходити суми добутків чисел α_i, де $i = 1, 2, \ldots, n$, на вектори $\vec{a_i}$: $\alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} + \ldots + \alpha_n\vec{a_n}$. Вирази такого виду називаються *лінійними комбіна-*

ціями векторів, а числа α_i, що входять в лінійну комбінацію,— її коефіцієнтами.

Базисом на прямій називається довільний ненульовий вектор на цій прямій.

Базисом на площині називається довільна упорядкована пара неколінеарних векторів, а *базисом у просторі* — довільна упорядкована трійка некомпланарних векторів. Вектори, що складають базис, називаються базисними. Розкласти вектор за базисом означає зобразити його у вигляді лінійної комбінації базисних векторів.

Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ складають базис і вектор $\vec{d}$ розкладений за цим базисом, тобто $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, то числа α, β, γ називаються *координатами вектора $\vec{d}$ в даному базисі*, а вектори $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$ і $\gamma\vec{c}$ — компонентами, або складовими векторами $\vec{d}$. Кажуть також, що вектор $\vec{d}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ або є лінійною комбінацією їх.

Теорема 1. *Кожен вектор, паралельний якій-небудь прямій, можна розкласти за базисом на цій прямій.*

Кожен вектор, паралельний якій-небудь площині, можна розкласти за базисом на цій площині

Кожен вектор можна розкласти за базисом у просторі.

Координати вектора у кожному випадку визначаються однозначно.

Не зупиняючись на доведенні цієї теореми [4], розглянемо її геометричний зміст.

Перше твердження теореми означає, що для довільного вектора $\vec{d}$, колінеарного ненульовому вектору $\vec{a}$ (рис. 2.9, *а*), знайдеться таке число α, що $\vec{d} = \alpha\vec{a}$. Очевидно, що $\alpha = +\frac{|\vec{d}|}{|\vec{a}|}$, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{d}$ однаково напрямлені, і $\alpha = -\frac{|\vec{d}|}{|\vec{a}|}$, якщо ці вектори протилежно напрямлені.

Друге твердження означає, що для кожного вектора $\vec{d}$, компланарного з двома неколінеарними векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (рис. 2.9, *б*), знайдуться такі числа α та β, що $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Щоб указати компоненти $\alpha\vec{a}$ та $\beta\vec{b}$, досить розкласти вектор $\vec{d}$ на суму векторів, колінеарних векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (згадайте розклад сили у фізиці на дві складові).

Третє твердження теореми означає, що для кожного вектора $\vec{d}$ і некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ знайдуться такі числа α, β і γ, що $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Складові $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$ та $\gamma\vec{c}$ показані на рис. 2.9, *в*.

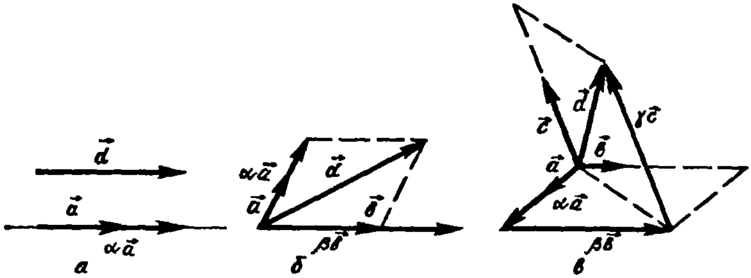


Рис. 2.9

Таким чином, базис в просторі дає змогу кожному вектору однозначно співставити упорядковану трійку чисел (координат цього вектора) і, навпаки, кожній упорядкованій трійці чисел α, β і γ за допомогою базису можна співставити єдиний вектор $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, де $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — вектори базису, тобто обраний базис дає змогу встановити взаємно однозначну відповідність між векторами і упорядкованими трійками чисел.

Приклад

Нехай $ABCD$ — паралелограм, M і N — середини його сторін (рис. 2.10). Розкласти вектор $\overrightarrow{DC}$ за векторами $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$.

○ З трикутників AND і AMB маємо

$$\vec{b} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}, \quad \vec{a} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

Якщо з першої рівності знайти вектор $\overrightarrow{AD}$ і підставити його значення в другу, дістанемо

$$\vec{a} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right) = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{DC} = \frac{4}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}.$$

Отже, якщо базисними векторами є вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$, то координатами вектора $\overrightarrow{DC}$ в цьому базисі є числа $\frac{4}{3}$ і $\frac{-2}{3}$. ●

1.4. Проекція вектора на вісь

Віссю називається напрямлена пряма. Напрям прямої позначають стрілкою. Заданий на осі напрям вважають додатним, а протилежний йому — від'ємним.

Проекцією точки A на вісь u називається основа A_1 перпендикуляра AA_1, опущеного з точки A на дану вісь. Таким чином, проекція A_1 є точкою перетину осі u з площиною, яка проходить через точку A, перпендикулярно до осі u.

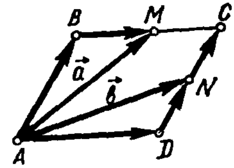


Рис. 2.10

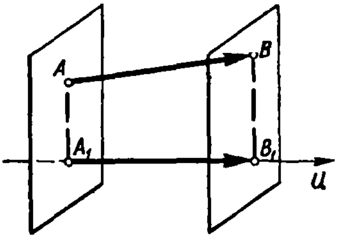


Рис. 2.11

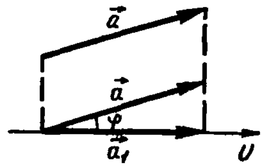


Рис. 2.12

Нехай у просторі задано вісь u і вектор $\overrightarrow{AB}$. Позначимо через A_1 та B_1 проекції на вісь u відповідно початку A і кінця B вектора $\overrightarrow{AB}$ і розглянемо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ (рис. 2.11).

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь u називають додатне число $|\overrightarrow{A_1B_1}|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь u однаково напрямлені, і від'ємне число — $|\overrightarrow{A_1B_1}|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь u протилежно напрямлені. Проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь позначають так: пр$_u\vec{a}$. Якщо $\vec{a} = \vec{0}$, то вважають, що пр$_u\vec{a} = 0$.

Кутом φ між вектором $\vec{a}$ і віссю u (або між двома векторами) називається менший з кутів, на який потрібно повернути один вектор або вісь, щоб він збігався за няпрямом з другим вектором або віссю: $\varphi = \widehat{(\vec{a}, u)} = \widehat{(\vec{a}, \vec{u}^0)}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

У деяких випадках ми будемо вказувати, від якого вектора і в якому напрямі кут відраховується.

Справедливі такі *властивості проекцій.*

1. *Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь u дорівнює добутку довжини вектора $\vec{a}$ на косинус кута φ між вектором і віссю, тобто*

$$\text{пр}_u\vec{a} = \vec{a}\cos\varphi. \qquad (1)$$

○ Якщо $\varphi = \widehat{(\vec{a}, u)} < \frac{\pi}{2}$ (рис. 2.12), то пр$_u\vec{a} = |\vec{a}_1| = |\vec{a}|\cos\varphi$.

Якщо $\varphi > \frac{\pi}{2}$ (рис. 2.13), то пр$_u\vec{a} = -|\vec{a}_1| = -|\vec{a}|\cos(\pi - \varphi) = |\vec{a}|\cos\varphi$.

Якщо $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то формула (1) справедлива, оскільки пр$_u\vec{a} = 0$. ●

2°. *Проекція суми кількох векторів на дану вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь, тобто*

$$\text{пр}_u(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \text{пр}_u\vec{a} + \text{пр}_u\vec{b} + \text{пр}_u\vec{c}. \qquad (2)$$

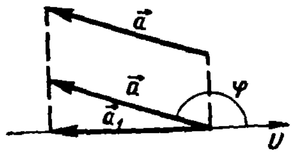


Рис. 2.13

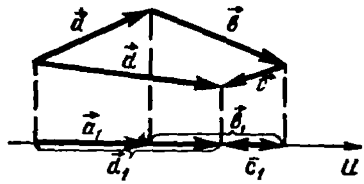


Рис. 2.14

○ Нехай вектор $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (рис. 2.14). Маємо

$$\text{пр}_u \vec{d} = |\vec{d}_1| = |\vec{a}_1| + |\vec{b}_1| - |\vec{c}_1| = \text{пр}_u \vec{a} + \text{пр}_u \vec{b} + \text{пр}_u \vec{c}. \quad ●$$

3^0. *При множенні вектора $\vec{a}$ на число λ його проекція також помножиться на це число:*

$$\text{пр}_u (\lambda \vec{a}) = \lambda \, \text{пр}_u \vec{a}. \qquad (3)$$

○ Нехай $\varphi = (\widehat{\vec{a}, u})$ і $\varphi' = (\widehat{\lambda \vec{a}, u})$. Якщо $\lambda > 0$, то за формулою (1)

$$\text{пр}_u (\lambda \vec{a}) = |\lambda \vec{a}| \cos \varphi' = \lambda |\vec{a}| \cos \varphi = \lambda \, \text{пр}_u \vec{a};$$

якщо $\lambda < 0$, то

$$\text{пр}_u (\lambda \vec{a}) = |\lambda \vec{a}| \cos \varphi' = -\lambda |\vec{a}| \cos (\pi - \varphi) = \lambda \, \text{пр}_u \vec{a}. \quad ●$$

Таким чином, основні властивості проекції вектора на вісь полягають в тому, що лінійні операції над векторами приводять до відповідних лінійних операцій над проекціями цих векторів.

Завдання для самоконтролю

1. Що називається: вектором, ортом, нульовим вектором?
2. Які вектори називають рівними, колінеарними, компланарними?
3. Як визначається сума двох векторів, сума кількох векторів, різниця двох векторів, добуток вектора на число?
4. Сформулювати властивості лінійних операцій над векторами.
5. Що називається базисом на прямій, на площині, в просторі? Сформулювати теорему про розклад вектора за базисом і з'ясувати її геометричний зміст.
6. Що називається проекцією вектора на вісь? Сформулювати і довести властивості проекцій.
7. Довести, що при будь-якому розміщенні точок A, B, C справедлива формула

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0.$$

8. У трикутнику OAB проведена медіана OC. Довести, що

$$\overrightarrow{OC} = 0{,}5\,(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

9. Довести, що умова $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ є необхідною і достатньою для того, щоб з векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ можна було утворити трикутник $(\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}, \vec{c}\neq\vec{0})$.

10. Відомо, що $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=60^\circ$, $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$. Показати, що $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{129}$, $|\vec{a}-\vec{b}|=7$.

11. Відомо, що $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=120^\circ$, $|\vec{a}|=4$. Показати що $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=-2$.

Вказівка. Кожну вісь можна задати вектором, який лежить на цій осі і має з нею однаковий напрям. Тому символ $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$ потрібно тлумачити як проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь, яка визначається вектором $\vec{b}$.

§ 2. СИСТЕМИ КООРДИНАТ

2.1. Декартова система координат

Розглянемо в просторі точку O і деякий базис, що задається векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (рис. 2.15).

Сукупність точки і базису називається *декартовою системою координат в просторі* на честь французького математика Р. Декарта. Точка O називається *початком координат*, а осі, які проходять через початок координат в напрямі базисних векторів, називаються *осями координат*. Перша з них проходить в напрямі вектора $\vec{e}_1$ і називається *віссю абсцис*, друга вісь, яка проходить у напрямі вектора $\vec{e}_2$,— *віссю ординат* і третя — в напрямі вектора $\vec{e}_3$ — *віссю аплікат*.

Площини, які проходять через осі координат, називаються *координатними площинами*.

Всякій точці простору можна співставити вектор $\vec{OM}$, початок якого збігається з початком координат O, а кінець — з точкою M. Такий вектор називається *радіусом-вектором точки М* відносно точки O. Згідно з теоремою 1 існують такі дійсні числа x_1, x_2, x_3, що

$$\vec{OM}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3. \quad (4)$$

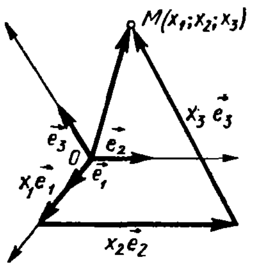


Рис. 2.15

Координати x_1, x_2, x_3 радіуса-вектора точки M відносно початку координат називають *декартовими координатами точки*

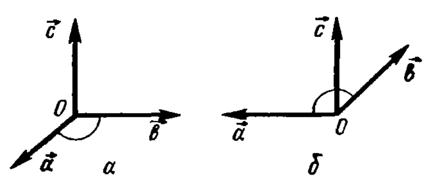


Рис. 2.16

M в даній системі координат і пишуть: $M(x_1; x_2; x_3)$. Координата x_1 називається *абсцисою* точки M, координата x_2 — *ординатою* і координата x_3 — *аплікатою* точки M.

Аналогічно визначаються декартові координати точки на площині і на прямій. Різниця лише в тому, що точка на площині має дві координати, а точка на прямій — одну. Таким чином, якщо в просторі обрано декартову систему координат, то кожній точці простору відповідає одна упорядкована трійка дійсних чисел — декартові координати цієї точки. І навпаки, для кожної упорядкованої трійки чисел знайдеться єдина точка простору, для якої ці числа є декартовими координатами. Це означає, що обрана тим чи іншим способом декартова система координат установлює взаємно однозначну відповідність між точками простору і упорядкованими трійками чисел.

Система координат на площині визначає таку саму відповідність між точками площини і упорядкованими парами чисел, а на прямій — між точками прямої і дійсними числами.

2.2. Прямокутна система координат

Очевидно, декартових систем координат можна задати скільки завгодно. Серед них широко використовується прямокутна декартова система координат. Щоб визначити цю систему, введемо такі поняття

Упорядкована трійка одиничних попарно ортогональних векторів називається *ортонормованим базисом*. Позначають ортонормований базис через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, де $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, $(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = (\widehat{\vec{j}, \vec{k}}) = (\widehat{\vec{k}, \vec{i}}) = \frac{\pi}{2}$.

Упорядкована трійка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарних векторів називається *правою* (рис. 2.16, *а*), якщо з кінця третього вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від першого вектора $\vec{a}$ до другого вектора $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки; в протилежному випадку трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається *лівою* (рис. 2.16, *б*).

Прямокутною декартовою системою координат (або просто *прямокутною системою координат*) називається декартова система координат, базис якої ортонормований. Прямокутна система координат називається *правою (лівою)*, якщо її ортонормований базис утворює праву (ліву) трійку векторів. Надалі користуватимемося правою системою координат, яка визначається правим ортонормованим базисом: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Прямокутну систему координат позначають (рис. 2.17) через $Oxyz$ (Ox — вісь абсцис, Oy — вісь ординат, Oz — вісь аплікат), а координатні площини — через Oxy, Oyz, Ozx. Вони поділяють простір

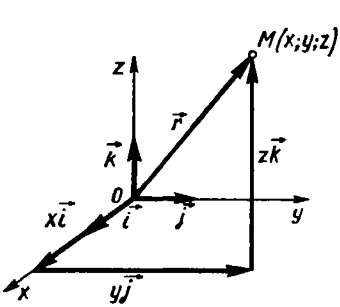


Рис. 2.17

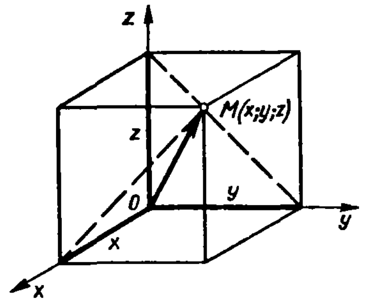


Рис. 2.18

на вісім октантів. При зображенні системи координат, як правило, показують лише осі координат; вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ не вказують.

Нехай задана прямокутна система координат $Oxyz$ і довільна точка M (рис. 2.17). Радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ цієї точки згідно з формулою (4) записують у вигляді

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \text{ або } \vec{r} = (x;\ y;\ z). \tag{5}$$

Координати x, y, z радіуса-вектора точки M називаються *координатами точки* M. Точка M з координатами x, y, z позначається через $M\,(x;\ y;\ z)$.

З ортогональності базисних векторів системи $Oxyz$ випливає, що координати точки M дорівнюють відповідним проекціям (п. 1.4) радіуса-вектора цієї точки на осі координат, тобто

$$x = \text{пр}_{Ox}\overrightarrow{OM}, \quad y = \text{пр}_{Oy}\overrightarrow{OM}, \quad z = \text{пр}_{Oz}\overrightarrow{OM}, \tag{6}$$

і визначаються проектуванням точки M на координатні осі (рис. 2.18).

Прямокутні координати точки на площині і на прямій визначаються таким самим способом, як і в просторі.

Прямокутна система координат Oxy на площині задається точкою O — початком координат і двома взаємно перпендикулярними оди-

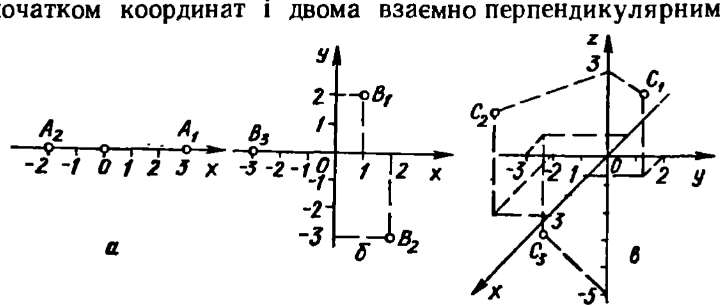


Рис. 2.19

ничними векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$ — базисом системи координат; система координат на прямій задається точкою O і одиничним вектором $\vec{i}$. Зрозуміло, що точка M (x; y) на площині має лише дві координати (абсцису і ординату), а точка M (x) на прямій — одну.

Приклади

1. На координатній прямій Ox побудувати точки: A_1 (3), A_2 (—2).

2. У прямокутній системі координат Oxy побудувати точки B_1 (1; 2), B_2 (2; —3), B_3 (—3; 0).

3. У прямокутній системі координат $Oxyz$ побудувати точки C_1 (1; 2; 3), C_2 (3; —2; 3), C_3 (—1; —3; —5).

Побудову точок показано на рис. 2.19, *а—в*.

2.3. Полярна система координат

Декартова система координат не єдиний спосіб визначати за допомогою чисел місце знаходження точки на площині. Для цієї мети використовують багато інших координатних систем.

Найважливішою після прямокутної системи координат є *полярна система координат*. Вона задається точкою O, яка називається *полюсом*, і променем Op, який виходить з полюса і називається *полярною віссю*. Задаються також одиниці масштабу: лінійна — для вимірювання довжин відрізків і кутова — для вимірювання кутів.

Розглянемо полярну систему координат і візьмемо на площині довільну точку M (рис. 2.20). Нехай $\rho = |\overrightarrow{OM}|$ — відстань від точки O до точки M і $\varphi = (\widehat{Op, \overrightarrow{OM}})$ — кут, на який треба повернути полярну вісь проти годинникової стрілки, щоб сумістити її з вектором $\overrightarrow{OM}$.

Полярними координатами точки M називаються числа ρ і φ. При цьому число ρ вважається першою координатою і називається *полярним радіусом*, а число φ — другою координатою і називається *полярним кутом*. Точка M з полярними координатами ρ і φ позначається так: M (ρ; φ). Очевидно, полярний радіус може набувати довільних невід'ємних значень: $0 \leqslant \rho < +\infty$ полярний кут вважатимемо таким, що змінюється в межах $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Іноді розглядають кути φ, більші від 2π, а також від'ємні кути, тобто такі, що відкладаються від полярної осі за годинниковою стрілкою.

Виразимо декартові координати точки M через полярні.

Вважатимемо, що початок прямокутної системи збігається з полюсом, а вісь Ox — з полярною віссю Op. Якщо точка M (рис. 2.21) має декартові координати x і y і полярні ρ і φ, то

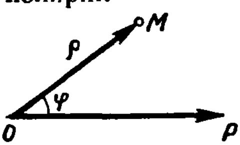


Рис. 2.20

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \tag{7}$$

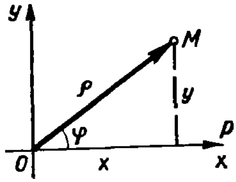


Рис. 2 21

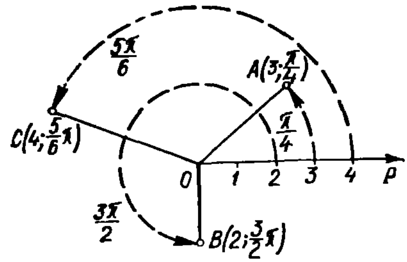


Рис 2.22

звідки

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \qquad (8)$$

Зауважимо, що друга з формул (8) дає два значення кута φ, оскільки він змінюється від 0 до 2π. З цих двох значень кута треба взяти те, для якого задовольняються формули (7). Формули (7) називають *формулами переходу від полярних координат до декартових*, а формули (8) — *формулами переходу від декартових координат до полярних.*

Приклад

Побудувати точки за полярними координатами: $A\left(3; \frac{\pi}{4}\right)$, $B = \left(2; \frac{3}{2}\pi\right)$, $C = \left(4; \frac{5}{6}\pi\right.$. Дані точки показано на рис. 2.22.

2.4. Перетворення прямокутних координат на площині

При розв'язуванні задач іноді треба переходити від однієї прямокутної системи до іншої. Виконується такий перехід за допомогою формул перетворення координат.

Розглянемо перетворення координат на площині.

1°. *Паралельне перенесення осей.* Візьмемо дві прямокутні декартові системи координат Oxy і O_1XY з різними початками координат і однаково напрямленими осями.

Нехай точки O_1 і M в системі Oxy (рис. 2.23) мають відповідно координати $(a; b)$ і $(x; y)$, тоді координати точки M в системі O_1XY задовільняють рівності

$$X = x - a, \quad Y = y - b. \qquad (9)$$

Формули (9) називаються *формулами перетворення координат при паралельному перенесенні осей*. Вони виражають координати точок в системі O_1XY через координати точок в системі Oxy.

2°. *Поворот осей координат.* Нехай на площині задані дві прямокутні системи координат Oxy і OXY, що мають спільний початок координат, причому система OXY утворена з системи Oxy поворотом осей на додатний кут α (рис. 2.24).

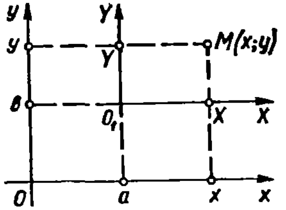


Рис. 2.23

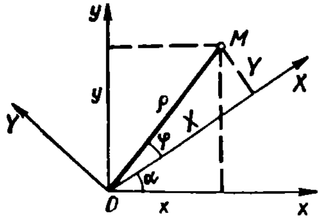


Рис. 2.24

Знайдемо формули, що виражають координати $(x;\ y)$ точки M в системі Oxy через координати $(X;\ Y)$ цієї точки в системі OXY. Введемо дві полярні системи координат із спільним полюсом O і полярними осями Ox і OX, тоді згідно з формулами (7) маємо

$$x = \rho\cos(\varphi + \alpha) = \rho\cos\varphi\cos\alpha - \rho\sin\varphi\sin\alpha = X\cos\alpha - Y\sin\alpha;$$

$$y = \rho\sin(\varphi + \alpha) = \rho\sin\varphi\cos\alpha + \rho\cos\varphi\sin\alpha = Y\cos\alpha + X\sin\alpha,$$

звідки

$$X = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \tag{10}$$

Формули (10) називаються *формулами перетворення координат при повороті осей.*

Приклад

В системі Oxy точка M має координати (2; 4). Знайти її координати в системі OXY, яка утворюється з системи Oxy поворотом на кут $\pi/2$.

○За формулами (10) маємо

$$X = 2\cos\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{\pi}{2} = 4,$$

$$Y = -2\sin\frac{\pi}{2} + 4\cos\frac{\pi}{2} = -2.$$

Такий самий результат можна дістати геометрично, побудувавши точку M і системи координат Oxy і OXY.●

2.5. Циліндрична та сферична системи координат

У просторі крім прямокутної системи координат часто вживаються циліндрична та сферична системи координат.

1°. *Циліндрична система координат.* Якщо в прямокутній системі координат $Oxyz$ замість перших двох координат x, y взяти полярні координати ρ, φ, а третю координату z залишити без зміни, то дістанемо циліндричну систему координат (рис. 2.25). Координати точки M простору в цій системі записуються у вигляді $M\ (\rho;\ \varphi;\ z)$.

Залежності між прямокутними координатами точки $M\ (x;\ y;\ z)$ і її циліндричними координатами $M\ (\rho;\ \varphi;\ z)$ випливають з формул (7):

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z, \tag{11}$$

де

$$0 \leqslant \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Отже, якщо прямокутна і циліндрична системи координат розміщені так, як на рис. 2.25, то зв'язок між прямокутними і циліндричними координатами виражається формулами (11).

2°. *Сферична система координат.* У системі $Oxyz$ візьмемо точку M і через цю точку і вісь Oz проведемо площину (рис. 2.26). Нехай r — відстань від початку координат до точки M; φ — двогранний кут між площинами Ozx і zOM; θ — кут між віссю Oz і променем OM. Упорядкована трійка чисел r, φ, θ однозначно визначає положення точки M у просторі. Ці числа називаються *сферичними координатами точки* M.

Знайдемо залежність між прямокутними і сферичними координатами точки M. З прямокутних трикутників ONM і OPN маємо

$$z = r\cos\theta, \quad \rho = r\sin\theta, \quad x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

тоді

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta, \tag{12}$$

де

$$0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Таким чином, якщо прямокутна і сферична системи координат розміщені так, як на рис. 2.26, то зв'язок між прямокутними і сферичними координатами виражається формулами (12).

2.6. Поняття про n-вимірний простір

Як уже вказувалось в п. 2.1, між геометричними векторами і їхніми координатами у фіксованому базисі існує взаємно однозначна відповідність. При цьому кожному вектору простору співставляється упорядкована трійка чисел, кожному вектору, що належить деякій площині,— упорядкована пара чисел, а кожному вектору, що належить деякій прямій,— дійсне число, і навпаки.

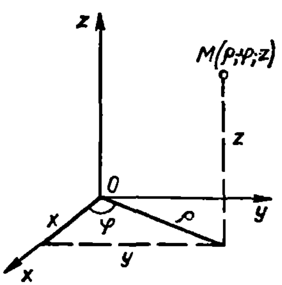


Рис. 2.25

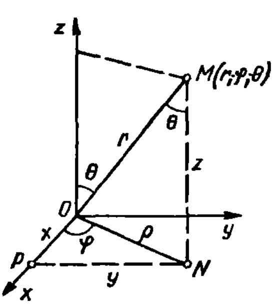


Рис. 2.26

Упорядковану трійку чисел називають *тривимірним вектором*, а множину всіх тривимірних векторів називають *тривимірним простором* і позначають через R_3.

Упорядковані пари чисел називають *двовимірними векторами*, а числа — *одновимірними*. Множини двовимірних і одновимірних векторів називають відповідно *двовимірними* і *одновимірними просторами* і позначають через R_2 і R_1.

Узагальнюючи простори R_1, R_2, R_3, приходимо до n-вимірного простору R_n, де n — довільне натуральне число.

Упорядкована множина n дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається n-вимірним *вектором* $\vec{x}$ і позначається так: $\vec{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$.

Множина всіх n-вимірних векторів називається *n-вимірним простором* і позначається через R_n. Якщо довільний вектор $\vec{x} = (x_1; x_2; \ldots$ $\ldots; x_n)$ простору R_n розглядати як радіус-вектор відповідної точки M відносно початку вибраної системи координат, то координати точки M визначаються як координати цього радіуса-вектора. У зв'язку з цим n-вимірний простір R_n можна тлумачити також як множину впорядкованих сукупностей n дійсних чисел.

Простори R_1, R_2, R_3 є окремими випадками простору R_n. Їх можна зобразити геометрично; для $n > 3$ простори R_n геометрично вже уявити не можна, проте вони відіграють важливу роль у науці і техніці

Приклади

1. У системі (9) лінійних рівнянь (гл. I) кожне рівняння можна розглядати як $(n + 1)$-вимірний вектор, бо воно визначається впорядкованою сукупністю $(n + 1)$ чисел. Так, перше рівняння визначається вектором

$$(a_{11}; a_{12}; \ldots; a_{1n}; b_1).$$

2. Розв'язок системи рівнянь з n невідомими є n-вимірним вектором.

3. Кожний рядок матриці A (гл. I, п. 2.1) є n-вимірним вектором, а кожний стовпець — m-вимірним. Рядки називають горизонтальними, а стовпці — вертикальними векторами матриці. Отже, довільну матрицю можна розглядати як деяку упорядковану сукупність її вертикальних або горизонтальних векторів.

2.7. Лінійна залежність векторів

Розглянемо систему з m n-вимірних векторів

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \qquad (13)$$

За означенням вектори (13) називаються *лінійно залежними*, якщо рівність

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_m\vec{a}_m = 0 \qquad (14)$$

можлива за умови, що хоча б одне з чисел $\alpha_i \neq 0$, де $i = 1, 2, \ldots, m$. Якщо ж рівність (14) можлива лише за умови, що $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots =$ $= \alpha_m = 0$, то вектори (13) називаються *лінійно незалежними*.

Для з'ясування питання про лінійну залежність векторів (13) кожен із заданих векторів $\vec{a}_i = (a_{1i}; a_{2i}, ...; a_{ni})$ і нуль-вектор $\vec{o} = (0; 0; ...; 0)$ запишемо як матрицю-стовпець, тоді векторну рівність (14) можна записати у матричній формі (гл. 1, п. 2.2):

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \cdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1m}\alpha_m = 0; \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2m}\alpha_m = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nm}\alpha_m = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Маємо лінійну однорідну систему рівнянь (гл. 1, п. 3.5) відносно невідомих α_i. Якщо система (15) має лише нульовий розв'язок, то вектори (13) будуть лінійно незалежними. Якщо ж крім нульового система (15) має ще й ненульові розв'язки, то вектори (13) лінійно залежні.

Наводимо без доведення такі властивості поняття лінійної залежності [1, 4]:

1) *якщо серед векторів* (13) *є нульовий, то ці вектори лінійно залежні;*

2) *якщо вектори* (13) *лінійно залежні, то після додавання до них одного чи кількох нових векторів дістанемо лінійно залежну систему векторів;*

3) *якщо вектори* (13) *лінійно незалежні, то після відкидання одного чи кількох векторів дістанемо знову лінійно незалежні вектори;*

4) *вектори* (13) *лінійно залежні тоді і лише тоді, коли один з них є лінійною комбінацією інших;*

5) *якщо два ненульові тривимірні вектори лінійно залежні, то вони колінеарні, і навпаки;*

6) *якщо три ненульові тривимірні вектори лінійно залежні, то вони компланарні, і навпаки;*

7) *чотири (і більше) тривимірних вектори завжди лінійно залежні.*

Поняття лінійної залежності має досить глибокий зміст і широко використовується в математиці. Не вдаючись до подробиць, наведемо такі застосування цього поняття [7].

1⁰. Всяка упорядкована сукупність лінійно незалежних векторів, через які лінійно виражається довільний вектор простору, називається *базисом* цього простору. Неважко переконатись в еквівалентності цього означення і означення базисів у просторах R_1, R_2, R_3.

2⁰. Максимальне число лінійно незалежних векторів деякого простору називається його *розмірністю*. Розмірність простору дорівнює числу базисних векторів цього простору. Відповідно до цього означення пряму лінію розглядають як одновимірний простір R_1 з одним базисним вектором; площина — це двовимірний простір R_2, базис якого містить два вектори і т. п.

3^0. Максимальне число лінійно незалежних стовпців матриці дорівнює максимальному числу її лінійно незалежних рядків, і це число дорівнює рангу матриці.

Розглянемо систему лінійних рівнянь (9) (див. гл. 1) і зафіксуємо який-небудь відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці цієї системи. Рівняння, у яких коефіцієнти при невідомих утворюють обраний мінор, називають *базисними*. Тоді з твердження 3^0 випливає такий важливий для практики висновок: система лінійних рівнянь еквівалентна системі своїх базисних рівнянь.

Приклад

Довести, що вектори $\vec{a} = (1;\ 2;\ 3)$, $\vec{b} = (0;\ 1;\ 2)$, $\vec{c} = (1;\ 3;\ -1)$ лінійно незалежні.

○ Розв'яжемо рівняння $\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{c} = 0$. Маємо

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ або } \begin{cases}\alpha_1 + \alpha_3 = 0;\\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0;\\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0.\end{cases}$$

Оскільки визначник системи відмінний від нуля (перевірте), то система має єдиний розв'язок $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Отже, задані вектори лінійно незалежні. ●

Завдання для самоконтролю

1. Що називається декартовою системою координат?
2. Дати визначення декартових координат точки: на прямій; на площині; в просторі.
3. Визначити прямокутну систему координат. Яка система координат називається правою; лівою?
4. Довести, що координати точки у прямокутній системі дорівнюють відповідним проекціям радіуса-вектора цієї точки на осі координат.
5. Охарактеризувати полярну, циліндричну та сферичну системи координат.
6. Довести формули перетворення координат при паралельному перенесенні осей координат і при їхньому повороті навколо осі.
7. Дати поняття n-вимірного вектора і n-вимірного простору.
8. З'ясувати поняття лінійної залежності векторів і сформулювати його властивості.
9. Довести, що вектори $\vec{a} = (1;\ -1;\ 2)$, $\vec{b} = (10;\ 1;\ 1)$ і $\vec{c} = (2;\ -1;\ 6)$ лінійно незалежні.
10. Довести, що вектори $\vec{a} = (3;\ -2;\ 1)$, $\vec{b} = (-1;\ 1;\ -2)$, $\vec{c} = (2;\ 1;\ -3)$ і $\vec{d} = (11;\ -6;\ 5)$ лінійно залежні. Виразити вектор $\vec{d}$ як лінійну комбінацію векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Відповідь. $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

§ 3. ВЕКТОРИ В СИСТЕМІ КООРДИНАТ

3.1. Координати, довжина і напрямні косинуси вектора

Для того щоб операції над векторами звести до операцій над числами, розглядатимемо вектори в системі координат.

1. *Координати вектора.* Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано вектор $\vec{a}$. Це означає, що в ортонормованому базисі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, який задає обрану систему координат, вектор $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ (п. 1.3), де числа a_x, a_y, a_z — координати вектора $\vec{a}$ в цьому базисі. Але з властивостей проекції (п. 1.4) випливає, що

$$a_x = \text{пр}_{Ox}\,\vec{a}, \quad a_y = \text{пр}_{Oy}\,\vec{a}, \quad a_z = \text{пр}_{Oz}\,\vec{a}. \qquad (16)$$

Отже, координати вектора в системі координат $Oxyz$ це його проекції на осі координат.

2. *Довжина вектора.* Вектор $\vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда (рис. 2.27) з вимірами $|a_x|$, $|a_y|$, $|a_z|$, тому довжина цього вектора дорівнює

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (17)$$

Якщо початок вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ (рис. 2.28) міститься в точці $A\,(x_1;\, y_1;\, z_1)$, а кінець — в точці $B\,(x_2;\, y_2;\, z_2)$, то з формул (2) і (16) випливає, що $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$, тобто

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1). \qquad (18)$$

Тоді з формули (17) знаходимо довжину вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (19)$$

Цією формулою користуються для знаходження *відстані між точками* A і B.

3. *Напрямні косинуси вектора.* Напрям довільного вектора $\vec{a} = (a_x;\, a_y;\, a_z)$ визначається кутами α, β, γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат (рис. 2.27):

$$\alpha = (\widehat{\vec{a},\ \vec{i}}), \quad \beta = (\widehat{\vec{a},\ \vec{j}}), \quad \gamma = (\widehat{\vec{a},\ \vec{k}}), \quad 0 \leqslant \alpha,\ \beta,\ \gamma \leqslant \pi.$$

Косинуси цих кутів називаються *напрямними косинусами*. Формули для напрямних косинусів дістаємо з формул (1) і (16):

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \qquad (20)$$

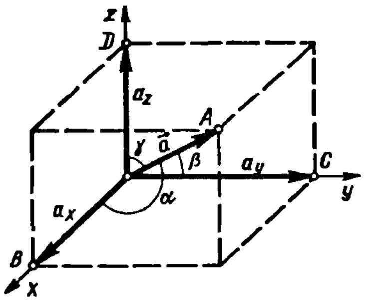


Рис. 2.27

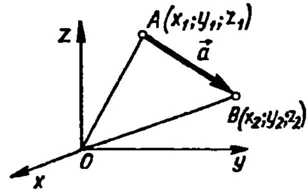


Рис. 2.28

Підносячи обидві частини кожної з рівностей (20) до квадрата і підсумовуючи, з урахуванням формули (17) дістанемо

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \qquad (21)$$

тобто сума квадратів напрямних косинусів довільного вектора дорівнює одиниці.

Приклади

1. Задано точки $A\ (0;\ -1;\ 2)$ і $B\ (-1;\ 1;\ 4)$.

Знайтн координатн, довжину та напрямні коснннуси вектора $\overrightarrow{AB}$.

○ З формул (18), (19) і (20) маємо $\overrightarrow{AB} = (-1;\ 2;\ 2)$; $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+4+4} = 3$; $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos\beta = \cos\gamma = \frac{2}{3}$. ●

2. Чн може вектор утворюватн з осями коордннат кутн $\alpha = \beta = 60°$, $\gamma = 30°$?

○ $\cos^2 60° + \cos^2 60° + \cos^2 30° = \frac{5}{4} \neq 1$,

тому згідно з формулою (21) дістанемо на це запнтаиия негатнвну відповідь. ●

3.2. Лінійні дії з векторами. Рівність і колінеарність векторів

1. *Дії з векторами.* Якщо відомі координати векторів, то лінійним діям з векторами відповідають відповідні арифметичні дії над їхніми координатами. Це випливає з властивостей 2^0, 3^0 проекцій (п. 1.4). Нехай задано вектори $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$, $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$ і дійсне число λ, тоді $\lambda\vec{a} = (\lambda a_x;\ \lambda a_y;\ \lambda a_z)$, $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_y;\ a_y \pm b_y;\ a_z \pm b_z)$.

2. *Рівність векторів.* Нехай вектори $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ та $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$ рівні, тобто мають однакові довжини і напрям, тоді з формул (1) і (16) випливає, що

$$a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z \qquad (22)$$

і навпаки, якщо мають місце формули (22), то $\vec{a} = \vec{b}$. Отже, всяка векторна рівність виду $\vec{a} = \vec{b}$ еквівалентна трьом скалярним рівностям (22).

3. *Колінеарність векторів.* Необхідною і достатньою умовою того, що вектори $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ та $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$ колінеарні, є пропорціональність їхніх проекцій:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \qquad (23)$$

Дійсно, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то існує таке число λ, що $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, тоді з формул (22) дістаємо рівності $a_x = \lambda b_x$; $a_y = \lambda b_y$; $a_z = \lambda b_z$, з яких випливають формули (23).

Приклади

1. Знайти вектор $\vec{a} = (a_x;\ -1;\ a_z)$, колінеарний вектору $\vec{b} = (1;\ -2;\ 3)$.

○ З умов (23) маємо $\frac{1}{a_x} = \frac{-2}{-1} = \frac{3}{a_z}$; $a_x = \frac{1}{2}$, $a_z = \frac{3}{2}$. ●

2. Довести, що координати орта $\vec{a}^0$ вектора $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ збігаються з напрямними косинусами даного вектора.

○ $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{|\vec{a}|}(a_x;\ a_y;\ a_z) = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|};\ \frac{a_y}{|\vec{a}|};\ \frac{a_z}{|\vec{a}|}\right) = (\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$. ●

3.3. Поділ відрізка в даному відношенні. Координати центра мас

Нехай задано відрізок AB точками $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$. Знайдемо на відрізку таку точку $M\ (x;\ y;\ z)$, яка ділить цей відрізок у відношенні λ, тобто $|\vec{AM}| : |\vec{MB}| = \lambda$. Введемо радіуси-вектори $\vec{r}_1 = \vec{OA}_1 = (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{r} = \vec{OM} = (x;\ y;\ z)$, $\vec{r}_2 = \vec{OB} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ (рис. 2.29). Оскільки $\vec{AM} = \vec{r} - \vec{r}_1$, $\vec{MB} = \vec{r}_2 - \vec{r}$ і за умовою $\vec{AM} = \lambda\vec{MB}$, то $\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r})$, звідки $\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2}{1+\lambda}$. Прирівнюючи проекції обох частин цієї рівності на осі координат, згідно з формулами (22) маємо

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (24)$$

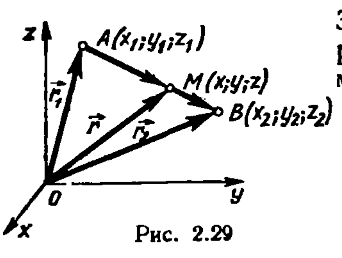


Рис. 2.29

Зокрема, координати точки, яка ділить відрізок AB навпіл ($\lambda = 1$), знаходять за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (25)$$

Виведемо тепер формули для координат

центра мас системи матеріальних точок $M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2\ (x_2;\ y_2;\ z_2), \ldots$ $\ldots, M_n\ (x_n;\ y_n;\ z_n)$, в яких зосереджено маси $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n$. Знайдемо спочатку центр маси $N_1\,(x_{N_1};\ y_{N_1};\ z_{N_1})$ системи двох точок M_1 та M_2. Оскільки центр маси лежить на відрізку M_1M_2 і ділить його у відношенні $\lambda_1 = \frac{m_2}{m_1} = \frac{|\overrightarrow{M_1N_1}|}{|\overrightarrow{N_1M_2}|}$, то за формулами (24)

$$x_{N_1} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_{N_1} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}, \quad z_{N_1} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2} \tag{26}$$

Точка, координати якої обчислюються за формулами (26), називається *центром мас двох матеріальних точок* M_1 і M_2.

Розглянемо тепер систему точок N_1 і M_3, в яких зосереджено маси $m_1 + m_2$ і m_3 і знайдемо центр маси $N_2\ (x_{N_2};\ y_{N_2};\ z_{N_2})$ цих точок. Оскільки $\lambda_2 = \frac{m_3}{m_1 + m_2} = \frac{|\overrightarrow{N_1N_2}|}{|\overrightarrow{N_2M_3}|}$, то з формул (24) і (26) маємо

$$x_{N_2} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_2x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y_{N_2} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \tag{27}$$

$$z_{N_2} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Точка, координати якої обчислюються за формулами (27), називається центром мас трьох матеріальних точок M_1, M_2, M_3.

Методом математичної індукції можна довести, що центр мас системи n матеріальних точок знаходиться в точці $C\ (x_C;\ y_C;\ z_C)$, де

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_iz_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad \bullet$$

Завдання для самоконтролю

1. Як визначаються координати і довжина вектора?
2. Як знайти відстань між точками $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$?
3. Що називається напрямними косинусами вектора? Як вони знаходяться?
4. Довести, що напрямні косинуси вектора задовольняють умову $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
5. Довести, що координатами орта довільного вектора є напрямні косинуси цього вектора.
6. Як визначаються лінійні операції з векторами, заданими своїми координатами?
7. Які умови рівності та колінеарності векторів, заданих своїми проекціями?
8. У чому полягає задача про поділ відрізка в даному відношенні?
9. Записати формули для координат точки, яка ділить даний відрізок у даному відношенні.

10. У чому полягає задача про центр мас системи матеріальних точок?

11. Вивести формули для координат центра мас двох матеріальних точок.

12. Відомо, що $\vec{a} = (0; -2; -3)$, $\vec{b} = (3; 2; 3)$. Переконатись, що $|3\vec{a} + 2\vec{b}| = 7$.

13. Відрізок між точками A (2; —3) і B (6; 8) точками C і D поділено на три рівні частини. Пересвідчитись, що

$$x_C = \frac{10}{3}, \quad y_C = \frac{2}{3}; \quad x_D = \frac{14}{3}, \quad y_D = \frac{13}{3}.$$

14. В точках A (—2) і B (7) містяться маси $m_1 = 5$ і $m_2 = 3$. Упевнитись, що центр мас цих точок міститься в точці $C\left(\frac{11}{8}\right)$.

§ 4. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ

4.1. Означення, геометричний та механічний зміст скалярного добутку

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a} \cdot \vec{b}$, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi, \tag{28}$$

де $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Якщо хоча б один з векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ нульовий, то за означенням $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Оскільки за формулою (3) $|\vec{a}|\cos\varphi = \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, $|\vec{b}|\cos\varphi = \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$, то з (28) маємо

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\,\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}. \tag{29}$$

Формули (29) виражають геометричний зміст скалярного добутку: скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного вектора на проекцію на нього другого вектора.

З фізики відомо, що робота A сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки з початку в кінець вектора $\vec{S}$, який утворює з вектором $\vec{F}$ кут α (рис. 2.30), дорівнює $A = |\vec{F}||\vec{S}|\cos\alpha$, або

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S}. \tag{30}$$

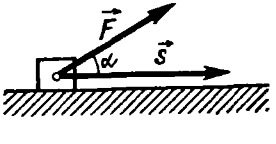


Рис. 2.30

Отже, робота дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення. В цьому суть механічного змісту скалярного добутку.

4.2. Властивості скалярного добутку

У векторному численні величину $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ називають скалярним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ тому, що, по-перше, ця величина є скаляр і, по-друге, має деякі алгебраїчні властивості звичайного добутку чисел.

Розглянемо три *алгебраїчні властивості* скалярного добутку.

1°. *Комутативна* властивість множення:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

○ За означенням скалярного добутку $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ і $\vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{b}||\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{b}, \vec{a}})$. Оскільки $|\vec{a}||\vec{b}| = |\vec{b}||\vec{a}|$ як добуток чисел і $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \cos(\widehat{\vec{b}, \vec{a}})$, тому що $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = (\widehat{\vec{b}, \vec{a}})$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. ●

2°. *Асоціативна* властивість відносно множення на число λ:

$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

○ З формул (29) і (3) маємо

$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = |\vec{b}|\,\text{пр}_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}) = \lambda|\vec{b}|\,\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad ●$$

3°. *Дистрибутивна* властивість відносно додавання векторів:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

○ Згідно з формулами (29) і (2) дістанемо

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} +$$

$$+ |\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \quad ●$$

Ці три властивості обумовлюють глибоку аналогію між векторною алгеброю і алгеброю чисел. Перша властивість дає змогу міняти місцями множники, друга — об'єднувати числові коефіцієнти векторних множників, а третя — розкривати або вводити дужки і виносити за них спільні скалярні чи векторні множники. Проте аналогія між скалярним добутком векторів і добутком чисел є неповною. Зокрема, не існує скалярного добутку трьох і більшого числа векторів; рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ може виконуватись і при ненульових множниках $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$, якщо $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{2}$; не можна робити висновок, що з рівності

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ випливає рівність $\vec{b} = \vec{c}$ навіть коли $\vec{a} \neq 0$. Рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ при $\vec{a} \neq 0$ означає, що $(\widehat{\vec{a}, \vec{b} - \vec{c}}) = \frac{\pi}{2}$ і правильна при $\vec{b} \neq \vec{c}$.

Наведемо *геометричні властивості* скалярного добутку.

4°. *Якщо $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, коли кут $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ — гострий, і $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, коли кут $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ — тупий.*

5°. *Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори взаємно перпендикулярні.*

6°. *Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини*

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, \tag{31}$$

звідки

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}. \tag{32}$$

Властивості 4°—6° безпосередньо випливають з формули (28).

Приклади

1. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ і $\vec{n} = 4\vec{a} + 5\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$.

○ Користуючись властивостями 1°—3°, маємо

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = (2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (4\vec{a} + 5\vec{b}) = 8\vec{a}^2 + 10\vec{a} \cdot \vec{b} - 12\vec{a} \cdot \vec{b} - 15\vec{b}^2 =$$
$$= 8\vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 15\vec{b}^2.$$

Застосовуючи формули (28) і (31), знаходимо

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = 8 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 15 \cdot 2^2 = -54. \bullet$$

2. Знайти довжину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 4$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$.

○ За формулою (32) дістанемо

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^2} = \sqrt{(2\vec{a} - 3\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2} = \sqrt{124} = 2\sqrt{31}. \bullet$$

4.3. Вираз скалярного добутку через координати. Кут між векторами

Нехай задано два вектори $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ та $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$. Знайдемо їхній скалярний добуток. Використовуючи властивості 1° і 3° скалярного добутку, дістанемо

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$$

$$=a_xb_x\vec{i}^2+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}+a_yb_x\vec{i}\cdot\vec{j}+a_yb_y\vec{j}^2+$$

$$+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_zb_z\vec{k}^2.$$

Оскільки $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — попарно ортогональні орти, то $\vec{i}^2=\vec{j}^2=\vec{k}^2=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$, тому

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{33}$$

Отже, скалярний добуток двох векторів, заданих координатами в прямокутній системі координат, дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат

Вкажемо на ряд важливих висновків з формули (33).

1. Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a}=(a_x; a_y; a_z)$ і $\vec{b}=(b_x; b_y; b_z)$ є рівність

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0. \tag{34}$$

2. Довжина вектора $\vec{a}=(a_x; a_y; a_z)$ визначається за формулою

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{35}$$

Формула (35) випливає з формул (32) і (33). В п. 3.1 цю формулу ми довели іншим способом.

3. Кут $\varphi=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ між векторами $\vec{a}=(a_x; a_y; a_z)$ та $\vec{b}=(b_x; b_y; b_z)$ визначається рівністю

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{36}$$

Ця формула є наслідком формул (28), (33) і (35).

Приклади

1. Обчислити, яку роботу виконує сила $\vec{F}=(2; -1; 4)$, яка прямолінійно переміщує матеріальну точку з точки $M(-1; 0; 3)$ в точку $N(2; -3; 5)$.

○ За формулами (18) знайдемо вектор переміщення $\vec{S}=\overrightarrow{MN}=(3; -3; 2)$, тоді за формулами (30) і (33) робота $A=\vec{F}\cdot\vec{S}=17$. ●

2. Задані вектори $\vec{a}=(2; 0; -2)$ і $\vec{b}=(-2; 1; 2)$. Знайти проекцію вектора $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$ на вектор $\vec{b}$.

○ Знайдемо координати вектора $\vec{c}$:

$$\vec{c}=2(2\vec{i}-2\vec{k})+(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}=(2; 1; -2).$$

З формул (29), (33) і (35) дістаємо

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{c} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|} = \frac{2\cdot(-2)+1\cdot 1+(-2)\cdot 2}{\sqrt{4+1+4}} = -\frac{7}{3}. \bullet$$

3. Трикутник заданий вершинами A (0; —1; 2), B (—1; —2; 7), C (1; —2; 6). Знайти його внутрішній кут при вершині A.

○ Користуючись формулами (18) і (36), дістанемо

$$\vec{AB} = (-1;\ -1;\ 5),\quad \vec{AC} = (1;\ -1;\ 4),\ \cos\varphi = \cos(\widehat{\vec{AB},\ \vec{AC}}) = \frac{20}{9\sqrt{6}} \approx 0{,}91,$$

$$\varphi \approx 25^\circ. \bullet$$

Завдання для самоконтролю

1. Що називається скалярним добутком двох векторів?
2. У чому полягає геометричний та механічний зміст скалярного добутку?
3. Сформулювати і довести алгебраїчні властивості скалярного добутку.
4. Сформулювати і довести геометричні властивості скалярного добутку.
5. Довести, що скалярний добуток векторів, заданих координатами в прямокутній системі координат, дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат.
6. Сформулювати і довести необхідну і достатню умову перпендикулярності двох векторів, заданих координатами.
7. Записати і довести формулу для знаходження кута між векторами, заданими координатами.
8. Відомо, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}) = 120^\circ$. Обчислити:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; 4) $(\vec{a} + 2\vec{b})\cdot(3\vec{a} - 2\vec{b})$.

9. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{j} + 2\vec{k}$.
10. Задано точки A (1; 1; 1) і B (4; 5; —3). Знайти проекцію вектора $\vec{AB}$ на вісь, яка утворює з координатними осями рівні кути.

Відповіді. 8. 1) —6; 2) 9; 3) 37; 4) —61. 9. $\frac{\pi}{2}$. 10. $\sqrt{3}$.

§ 5. ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ

5.1. Означення і властивості векторного добутку

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який визначається такими трьома умовами:

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\varphi$, де $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) якщо $\vec{c} \neq 0$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів (п. 2.2).

Векторний добуток позначають одним із символів:

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = [\vec{a}\vec{b}] = [\vec{a}\times\vec{b}].$$

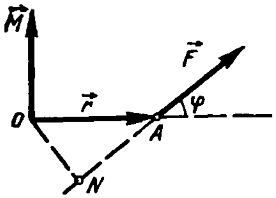


Рис. 2.31

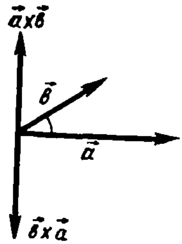


Рис. 2.32

Розглянемо кілька прикладів.

1. Нехай в точці A (рис. 2.31) прикладена сила $\vec{F}$ і O — деяка фіксована точка. Як відомо з фізики, моментом сили $\vec{F}$ відносно точки O називається вектор $\vec{M}$, довжина якого дорівнює добутку сили на плече і який напрямлений по осі обертання так, що коли дивитися з його кінця, то обертання тіла відбувається проти руху стрілки годинника. Оскільки

$$|\vec{M}| = |\vec{F}|ON = |\vec{F}||r|\sin\varphi = |\vec{F}||\overrightarrow{OA}|\sin(\widehat{\vec{F}, \overrightarrow{OA}}),$$

то момент сили $\vec{F}$, прикладеної в точці A, відносно точки O визначається векторним добутком

$$\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}. \tag{37}$$

2. Швидкість $\vec{v}$ точки P твердого тіла, яке обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо нерухомої осі l, визначається за формулою Ейлера $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

3. Якщо електрон, заряд якого дорівнює e, рухається з швидкістю $\vec{v}$ в магнітному полі сталої напруги $\vec{H}$, то на електрон діє сила $\vec{F}$, яка визначається за формулою

$$\vec{F} = \frac{e}{c}(\vec{v} \times \vec{H}),$$

де c — швидкість світла.

Розглянемо *алгебраїчні властивості векторного добутку.*

1°. *Антикомутативність множення:*

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}),$$

тобто від перестановки множників векторний добуток змінює знак. Це випливає з того, що вектори $\vec{a} \times \vec{b}$ і $\vec{b} \times \vec{a}$ мають однакові модулі, колінеарні і трійки векторів $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ і $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b} \times \vec{a})$ протилежної орієнтації (рис. 2.32).

2°. *Асоціативність відносно скалярного множника* λ:

$$\lambda\vec{a} \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}); \quad \vec{a} \times \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}).$$

3°. *Дистрибутивність відносно додавання векторів:*

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Алгебраїчні властивості векторного добутку дають змогу при множенні лінійних векторів виконувати дії так само, як з алгебраїчними многочленами. Проте при виконанні векторного множення слід пам'ятати, що воно некомутативне: при переставлянні співмножників знак векторного добутку змінюється на протилежний.

Наведемо *геометричні властивості векторного добутку.*

4°. *Векторний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори колінеарні.*

5°. *Модуль* $|\vec{a} \times \vec{b}|$ *векторного добутку неколінеарних векторів дорівнює площі* S *паралелограма, побудованого на векторах* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$, *віднесених до спільного початку, тобто*

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|. \tag{38}$$

6°. *Векторні добутки ортів задовольняють такі рівності:*

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0, \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}; \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

Приклад

Обчислити $|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})|$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{2}$.

○ $(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b}) = 3(\vec{a} \times \vec{a}) - 6(\vec{a} \times \vec{b}) - (\vec{b} \times \vec{a}) + 2(\vec{b} \times \vec{b}) = -6(\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{a} \times \vec{b} = -5(\vec{a} \times \vec{b})$; $|-5(\vec{a} \times \vec{b})| = 5|\vec{a}||\vec{b}|\sin\frac{\pi}{2} = 5 \cdot 3 \times 4 \cdot 1 = 60$. ●

5.2. Векторний добуток двох векторів, заданих координатами

Нехай в прямокутній системі координат задано вектори $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ і $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$. Покажемо, що векторний добуток вектора $\vec{a}$

на вектор $\vec{b}$ визначається за формулою

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{39}$$

○ Використовуючи властивості 1°—3° і 6° векторного добутку і теорему про розклад визначника (гл. 1, п. 1.2), маємо

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x(i \times i) + a_xb_y(\vec{i} \times \vec{j}) + a_xb_z(\vec{i} \times \vec{k}) + a_yb_x(\vec{j} \times \vec{i}) + a_yb_y(\vec{j} \times \vec{j}) + a_yb_z(\vec{j} \times \vec{k}) + a_zb_x(\vec{k} \times \vec{i}) + a_zb_y(\vec{k} \times \vec{j}) + a_zb_z(\vec{k} \times \vec{k}) = (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} - \vec{j}(a_xb_z - a_zb_x) + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$ ●

Приклади

1. Знайти площу трикутника, заданого вершинами A (1; 2; 0), B (0; —2; 1), C (—1; 0; 2).

○ Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$. Оскільки $\vec{AB}=(-1; -4; 1)$, $\vec{AC}=(-2; -2; 2)$ і за формулою (39)

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 6\vec{k},$$

то за формулою (38) площа $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 6^2} = 3\sqrt{2}$. ●

2. Знайти момент сили $\vec{F} = (1; -2; 4)$, прикладеної до точки A (1; 2; 3), відносно точки B (3; 2; —1).

○ Згідно з формулою (37) момент сили $\vec{M} = \vec{BA} \times \vec{F}$. Оскільки $\vec{BA} = (-2; 0; 4)$, то

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 12\vec{j} + 4\vec{k}.$$ ●

Завдання для самоконтролю

1. Дати означення векторного добутку двох векторів.
2. Сформулювати властивості векторного добутку.
3. Записати і вивести формулу для обчислення векторного добутку двох векторів, заданих координатами в прямокутній системі координат.
4. Довести, що $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}) = 2(\vec{b}\times\vec{a})$.
5. Довести тотожність: $(\vec{a}\times\vec{b})^2 + (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2$.
6. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \frac{\pi}{6}$.
7. Дві сили $\vec{F}_1 = (2; 1; 3)$ і $\vec{F}_2 = (1; 3; -5)$ прикладені в точці A $(2; -1; -2)$. Знайти момент рівнодійної цих сил відносно початку координат.

Відповіді. 6. 3,5. 7. 15.

§ 6. МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

6.1. Означення і обчислення мішаного добутку

При множенні двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вище було визначено два види добутків: скалярний, результатом якого є число $\vec{a}\cdot\vec{b}$, і векторний, результатом якого є вектор $\vec{a}\times\vec{b}$.

Множення трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ можна виконати різними способами. Зокрема, можно утворити такі добутки:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c},\quad (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c},\quad (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$$

Перший з цих добутків відповідає множенню скаляра $\vec{a}\cdot\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ і не розглядається. Те саме стосується добутків $(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}$ та $(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a}$.

Результатом другого добутку є вектор $\vec{d}$, який називається *подвійним векторним* або *векторно-векторним добутком* даних трьох векторів:

$$\vec{d} = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}.$$

Для знаходження подвійного векторного добутку застосовують формули

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a};$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}.$$

Подвійний векторний добуток часто зустрічається у векторному численні, але певного геометричного змісту не має.

Останній з наведених добутків $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ — це скалярний добуток вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$; його називають *мішаним добутком* векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Цей добуток має чіткий геометричний зміст і широко використовується в задачах.

Знайдемо мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, заданих координатами:

$$\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z),\quad \vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z),\quad \vec{c} = (c_x;\ c_y;\ c_z).$$

Координати вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ визначаються за формулою (39):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Помноживши вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ скалярно на вектор $\vec{c}$, за формулою (33) дістанемо

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{40}$$

6.2. Властивості мішаного добутку

1⁰. *Якщо в мішаному добутку поміняти місцями які-небудь два множники, то мішаний добуток змінить знак, наприклад:*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}).$$

Дійсно, якщо в мішаному добутку поміняти місцями два множники, то це те саме, що у визначнику (40) поміняти місцями два рядки, а від цього визначник змінює знак.

2⁰. *При циклічній перестановці множників мішаний добуток не змінюється:*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}.$$

Справді, при циклічній перестановці міняються місцями два рази множники, або, що те саме, у визначнику (40) рядок міняється місцем два рази, а від цього визначник не змінюється.

3⁰. *У мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутків можна міняти місцями:*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Дійсно, з властивості 2⁰ і комутативності скалярного добутку маємо

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot (b \times c).$$

У зв'язку з цим мішані добутки $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ (векторно-скалярний добуток) і $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ (скалярно-векторний добуток) скорочено позначають так: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

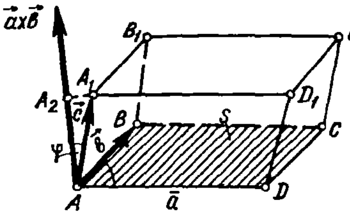


Рис. 2.33

4⁰. *Модуль мішаного добутку $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, віднесених до спільного початку:*

$$V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|. \qquad (41)$$

○ Візьмемо три некомпланарних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ і побудуємо на цих векторах паралелепіпед (рис. 2.33). Об'єм цього паралелепіпеда

$$V = Sh,$$

де S — площа основи, а h — висота. Але $S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = |\vec{a}\times\vec{b}|$, $h = |\overrightarrow{AA_2}| = |\text{пр}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}|$, тому $V = |\vec{a}\times\vec{b}||\text{пр}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}| = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}| = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$. ●

5⁰. Якщо мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ додатний, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку, а якщо від'ємний, то ліву.

○ З формул (29) випливає, що $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = |\vec{a}\times\vec{b}|\,\text{пр}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}$. Якщо $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то $\text{пр}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c} > 0$ і кут $\varphi = (\widehat{\vec{a}\times\vec{b}, \vec{c}})$ гострий, тобто вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку. Якщо $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то $\text{пр}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c} < 0$, кут $\varphi = (\widehat{\vec{a}\times\vec{b}, \vec{c}})$ тупий, тому вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють ліву трійку. ●

6⁰. *Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю.*

○ Якщо $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$, то вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ і лежить з векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ в одній площині. Це означає, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні. Навпаки, якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, то можна вважати, що вони лежать в одній площині, тому $(\widehat{\vec{a}\times\vec{b}, \vec{c}}) = \frac{\pi}{2}$; $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ ●

Властивості 4⁰—6⁰ виражають геометричний зміст мішаного добутку трьох векторів.

Приклади

1. Знайти об'єм тетраедра, заданого вершинами $A(2; -1; 0)$, $B(5; 5; 3)$, $C(3; 2; -2)$, $D(4; 1; 2)$.

○ Відомо, що об'єм тетраедра V_{ABCD}, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, дорівнює шостій частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Тому за формулою (41) маємо

$$V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\ \ \overrightarrow{AC}\ \ \overrightarrow{AD}\right|.$$

Знаходимо вектори $\overrightarrow{AB}=(3;\ 6;\ 3)$, $\overrightarrow{AC}=(1;\ 3;\ -2)$, $\overrightarrow{AD}=(2;\ 2;\ 2)$.

За формулою (40) дістанемо

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}\right|=3.\ ●$$

2. Довести, що точки $A\ (0;\ 1;\ 2)$, $B\ (-2;\ 0;\ -1)$ $C\ (-1;\ 5;\ 8)$, $D\ (1;\ 6;\ 11)$ лежать в одній площині.

○ Точки A, B, C, D лежать в одній площині, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарні. Знаходимо вектори $\overrightarrow{AB}=(-2;\ -1;\ -3)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;\ 4;\ 6)$, $\overrightarrow{AD}=(1;\ 5;\ 9)$.

Оскільки мішаний добуток

$$\overrightarrow{AB}\ \ \overrightarrow{AC}\ \ \overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & -1 & -3\\ -1 & 4 & 6\\ 1 & 5 & 9\end{vmatrix}=0,$$

то за властивістю 6° вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ компланарні, тому задані точки лежать в одній площині. ●

3. Яку трійку утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо $\vec{a}=(1;\ 2;\ 3)$, $\vec{b}=(-1;\ 0;\ 2)$, $\vec{c}=(1;\ -2;\ 5)$?

○ Оскільки мішаний добуток

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{vmatrix}=24>0,$$

то за властивістю 5° дані вектори утворюють праву трійку. ●

Завдання для самоконтролю

1. Що називається мішаним добутком трьох векторів?
2. Як обчислюється мішаний добуток трьох векторів, заданих координатами в прямокутній системі координат?
3. У чому полягає геометричний зміст мішаного добутку?
4. У чому полягає умова компланарності трьох векторів?
5. Довести, що коли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку, то $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}>0$, а коли ліву трійку, то $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}<0$.
6. Довести, що об'єм тетраедра дорівнює шостій частині модуля мішаного добутку трьох некомпланарних векторів, які утворюють ребра тетраедра.
7. Задані вершини тетраедра $A\ (1;\ 2;\ 3)$, $B\ (9;\ 6;\ 4)$, $C\ (3;\ 0;\ 4)$, $D\ (5;\ 2;\ 6)$. Переконатись, що висота тетраедра, опущена з вершини D, дорівнює $\frac{4}{3}\sqrt{2}$.
8. Довести, що вектори $\vec{a}=(1;\ 9;\ -11)$, $\vec{b}=(-1;\ 6;\ -6)$ і $\vec{c}=(-2;\ -3;\ 5)$ компланарні.
9. Довести, що вектори $\vec{a}=(8;\ 4;\ 1)$, $\vec{b}=(2;\ -2;\ 1)$, $\vec{c}=(4;\ 0;\ 3)$ утворюють ліву трійку векторів.

Глава 3
ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Аналітична геометрія — це розділ математики, в якому властивості геометричних об'єктів (точок, ліній, поверхонь, фігур, тіл тощо) вивчаються засобами алгебри на основі методу координат.

Основоположником аналітичної геометрії вважають Р. Декарта, який вперше в 1637 р. у своїй книзі «Геометрія» дав чіткий виклад ідеї методу координат на площині. Р. Декарт запропонував положення точки на площині відносно заданої системи координат визначати за допомогою двох чисел — її координат, а кожну лінію на площині розглядати як множину точок, заданих певною геометричною умовою. Ця умова записується у вигляді рівняння, яке зв'язує змінні координати точки, що належить даній лінії, і називається рівнянням цієї лінії. Такий спосіб дослідження геометричних об'єктів і називають методом координат.

Наступний важливий вклад в аналітичну геометрію зробив французький учений Ж.-Л. Лагранж, який вперше в 1788 р. у своєму творі «Аналітична механіка» запропонував положення вектора визначати за допомогою чисел — його проекцій на координатні осі. Розвиток ідей Лагранжа привів до створення векторної алгебри.

Метод координат та апарат векторної алгебри широко використовуються в сучасній аналітичній геометрії.

§ 1. ЛІНІЇ НА ПЛОЩИНІ ТА ЇХНІ РІВНЯННЯ

1.1. Поняття про лінію та її рівняння

Розглянемо рівність

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

яка зв'язує змінні величини x та y.

Рівність (1) називають *рівнянням з двома змінними* x і y, якщо ця рівність виконується не для всіх пар чисел x, y, і тотожністю, якщо вона справедлива для всіх значень x і y. Наприклад, рівності $x + y = 0$ і $x^2 + y^2 = 9$ є рівняннями, а рівності $x + y - (x + y) = 0$ та $(x + y)^2 - x^2 - 2xy - y^2 = 0$ — тотожностями.

Рівняння (1) називається *рівнянням лінії* l, яка задана на площині відносно певної системи координат, якщо це рівняння задовольняють координати x і y кожної точки лінії l і не задовольняють координати x і y жодної точки, яка не лежить на цій лінії.

Коли рівняння (1) є рівнянням лінії l, то кажуть, що це рівняння визначає (або задає) лінію l. Отже, якщо лінія задана рівнянням, то про кожну точку площини можна сказати, чи лежить вона на цій лінії, чи не лежить. Якщо координати точки задовольняють рівняння лінії, то точка лежить на ній, якщо не задовольняють, то не лежить.

Лінія, яка задана рівнянням (1) відносно певної системи координат у площині, є геометричним місцем точок, координати яких задовольняють задане рівняння.

Змінні x і y в рівнянні (1) лінії l називаються *змінними координатами* її точок.

Нехай лінія l відносно системи координат Oxy визначається рівнянням (1). В аналітичній геометрії лінії класифікують залежно від властивостей цього рівняння. Якщо вираз $F(x, y)$ в рівнянні (1) є многочленом від змінних x та y (тобто сума скінченного числа одночленів ax^ky^m, де a — сталий коефіцієнт, а показники k і m — цілі додатні числа або нулі), то лінія, що задається цим рівнянням, називається *алгебраїчною*.

Алгебраїчні лінії розрізняють залежно від їхнього порядку. *Степенем одночлена* ax^ky^m називається сума $k+m$ показників при змінних. *Степенем рівняння* (1) називається найвищий степінь одночлена, що входить до його складу. Алгебраїчною лінією n-го порядку називається лінія, що виражається рівнянням n-го степеня. Порядок алгебраїчної лінії не змінюється при заміні однієї декартової системи на іншу.

Лінія, яка не є алгебраїчною, називається *трансцендентною*. Ми вивчатимемо лише лінії першого та другого порядків, тобто лінії, що задаються рівняннями

$$ax + by + c = 0 \text{ та } ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

Таким чином, лінію на площині можна задати геометрично як сукупність точок з певними геометричними властивостями і аналітично — за допомогою рівняння. У зв'язку з цим виникають дві типові для аналітичної геометрії задачі: скласти рівняння лінії, яка задана геометрично, і навпаки, встановити геометричний образ лінії, заданої аналітично. Зазначимо, що в аналітичній геометрії друга задача розв'язується лише для алгебраїчних ліній першого та другого порядків. Загальний метод дослідження ліній, заданих рівняннями, дається в курсі математичного аналізу.

Приклади

1. Рівняння $y = 2x - 1$ визначає на площині пряму лінію.
2. Рівняння $x^2 - y^2 = 0$ або $(x + y)(x - y) = 0$ визначають дві прямі — бісектриси координатних кутів.
3. Рівняння $x^2 + y^2 = 0$ задовольняє лише одна точка $O(0; 0)$. У подібних випадках кажуть, що рівняння визначає вироджену лінію.
4. Рівняння $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не визначає ніякого геометричного місця точок, оскільки для будь-яких значень x та y маємо $x^2 + y^2 + 1 > 0$.

1.2. Знаходження рівняння лінії за її геометричними властивостями

Зупинимося детальніше на задачі про складання рівняння лінії, заданої геометрично. Для її розв'язання потрібно встановити геометричну властивість, яку задовольняють лише точки даної лінії, і записати цю властивість у вигляді рівняння. Таке рівняння пов'язує змінні координати точок даної лінії і ті відомі сталі величини, які геометрично визначають саме цю лінію.

Приклади

1. Скласти рівняння лінії, сума квадратів відстаней кожної точки якої до точок A (—1; 0) і B (1; 0) дорівнює 4.

○ Нехай точка M (x; y) лежить на лінії, тоді за умовою $AM^2 + BM^2 = 4$. Оскільки $AM^2 = (x+1)^2 + y^2$, $BM^2 = (x-1)^2 + y^2$, то $(x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = 4$, звідки після спрощень дістаємо шукане рівняння: $x^2 + y^2 = 1$. ●

2. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої розміщена від точки A (1; 2) в два рази далі, ніж від точки B (—2; 0).

○ Позначимо змінну точку лінії через M (x; y), тоді за умовою $AM = 2BM$, тобто

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 2\sqrt{(x+2)^2 + y^2}.$$

Перетворюючи це рівняння, маємо

$$3x^2 + 3y^2 + 18x + 4y + 11 = 0. \; ●$$

1.3. Полярні рівняння лінії

Рівняння $\Phi(\rho, \varphi) = 0$ називається *рівнянням лінії l в полярних координатах*, або *полярним рівнянням*, якщо його задовольняють полярні координати ρ і φ будь-якої точки лінії l і не задовольняють координати жодної точки, яка не лежить на цій лінії. Щоб від полярного рівняння лінії перейти до рівняння (1), потрібно полярні координати в рівнянні $\Phi(\rho, \varphi) = 0$ виразити через декартові (п. 2.3, гл. 2).

Приклади

1. *Спіраллю Архімеда* називається лінія, описана точкою, що рівномірно рухається по променю, який сам рівномірно обертається навколо свого початку. Рівняння спіралі Архімеда (рис. 3.1) має вигляд $\rho = a\varphi$, де $a > 0$ — стала величина.

2. *Равликом Паскаля* називають криву (рис. 3.2), що задається рівнянням $\rho = a\cos\varphi + b$.

3. *Лемніскатою Бернуллі* називають криву, що задається рівнянням $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ і має вигляд вісімки (рис. 3.3). У прямокутних координатах рівняння лемніскати Бернуллі записується складніше: $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$.

4. *Трипелюстковою розою* називають криву (рис. 3.4), що задається рівнянням $\rho = a\cos 3\varphi$.

5. *Координатними лініями* називають лінії, в яких одна з координат є сталою величиною. У декартових координатах координатні лінії утворюють два сімейства прямих, паралельних одній з осей координат (рис. 3.5, *а*). У полярних координатах лінії $\rho = \text{const}$ утворюють сімейство концентричних кіл з центром у полюсі, а лінії $\varphi = \text{const}$ — сімейство променів, що виходять з полюса (рис. 3.5, *б*).

1.4. Параметричні рівняння лінії

Нехай залежність між змінними x і y виражена через третю змінну t, тобто

$$x = x(t), \quad y = y(t). \tag{2}$$

Змінна t називається *параметром* і визначає положення точки $(x;\ y)$ на площині. Наприклад, якщо $x = 2t + 1$, $y = t^2$, то значенню параметра $t = 3$ відповідає на площині точка $(7;\ 9)$, тому що $x = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, $y = 3^2 = 9$.

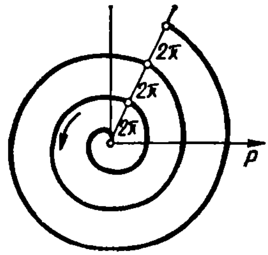


Рис. 3.1

Якщо t змінюється, то точка на площині переміщується, описуючи деяку лінію l. Такий спосіб задання лінії називається параметричним, а рівняння (2) — *параметричними рівняннями лінії* l. Щоб від рівняння (2) перейти до рівняння (1), потрібно будь-яким способом з двох рівнянь (2) виключити параметр t (наприклад, з першого рівняння виразити через x і результат підставити в друге рівняння). Але такий перехід не завжди доцільний і не завжди можливий, тому доводиться користуватись параметричними рівняннями (2).

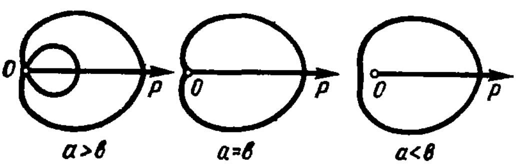
Приклади

1. Розглянемо траєкторію точки кола, яке котиться без ковзання вздовж нерухомої прямої. Якщо вздовж осі Ox котиться без ковзання коло радіуса R, то будь-яка нерухома точка кола описує криву, яка називається циклоїдою (рис. 3.6) і задається рівнянням

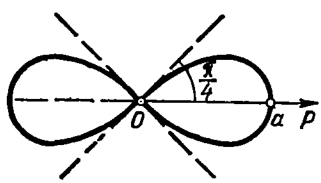
$$x = R\,(t - \sin t), \quad y = R\,(1 - \cos t); \quad -\infty < t < +\infty.$$

Якщо параметр t змінюється від 0 до 2π, то дані рівняння визначають першу арку циклоїди, якщо $2\pi < t < 4\pi$ — то другу арку і т. д.

Циклоїда є найпростішою з кривих, які описує на нерухомій площині точка однієї лінії, що котиться без ковзання по другій лінії.



Рнс. 3.2



Рнс. 3.3

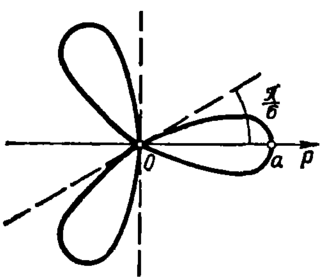


Рис. 3.4

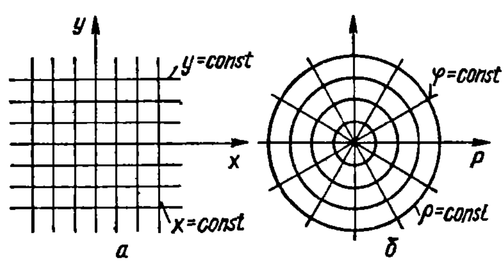


Рис. 3.5

Рис. 3.6

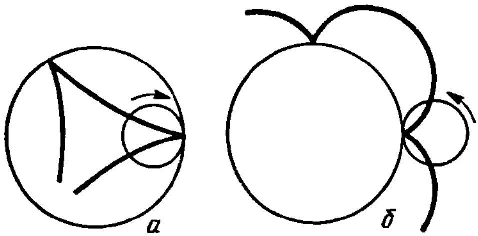


Рис. 3.7

2. Гіпоциклоїдами (рис. 3.7, *а*) та епіциклоїдами (рис. 3.7, *б*) називаються криві, які описує точка кола, яка котиться по нерухомому колу усередині та ззовні. Вигляд і рівняння кривих залежать від відношення радіусів кіл.

Гіпоциклоїда при відношенні радіусів 1 : 4 називається астроїдою (рис. 3.8, *а*), а епіциклоїда при відношенні радіусів 1 : 1 називається кардіоїдою (рис. 3.8, *б*). Параметричні рівняння астроїди мають такий вигляд:

$$x = R\cos^3 t, \quad y = R\sin^3 t;$$
$$0 \leqslant t < 2\pi.$$

Кардіоїда задається параметричними рівняннями

$$x = 2R\cos t\,(1 + \cos t), \quad y = 2R\sin t\,(1 + \cos t); \quad 0 \leqslant t < 2\pi.$$

Простіше записується полярне рівняння кардіоїди:

$$\rho = 2R\,(1 + \cos\varphi).$$

Усі ці криві широко застосовуються в теорії механізмів.

3. Евольвентною розгорткою кола (від латинського evolvo — розгортати) називається крива, що задається рівняннями

$$x = R\,(\cos t + t\sin t), \quad y = R\,(\sin t - t\cos t); \quad 0 \leqslant t < +\infty.$$

Механічне креслення евольвенти виконується так: на коло туго намотують гнучку й нерозтяжну нитку, закріплену в точці A (рис. 3.9), і з вільним кінцем M в цій точці. Відтягуючи нитку за вільний кінець, змотують її з кола; точка M при цьому описує дугу евольвенти кола, тобто, якщо M — довільна точка евольвенти, то довжина дуги AB дорівнює довжині відрізка MB.

Профілі переважної більшості зубців зубчастих коліс окреслені з боків дугами евольвенти кола.

1.5. Векторне рівняння лінії

Лінію можна задати також векторним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$, де t — скалярний змінний параметр. Кожному значенню t_0 відповідає ціл-

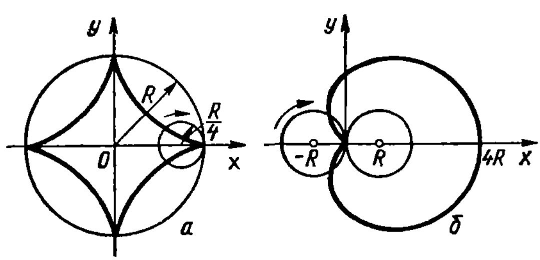


Рис. 3.8

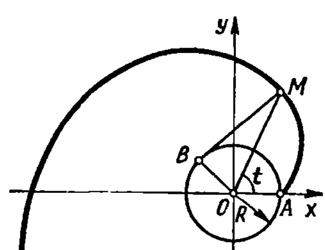


Рис. 3.9

ком визначений вектор $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ площини. Таким чином, якщо параметр t набуває певної множини деяких значень, то рівняння $\vec{r} = \vec{r}(t)$ задає деяку множину векторів. Якщо від точки 0 (рис. 3.10) площини відкласти вектори $\vec{OM} = \vec{r}$, то геометричне місце точок, які збігаються з кінцями цих векторів (за умови, що всі вектори компланарні), визначить на площині деяку лінію l.

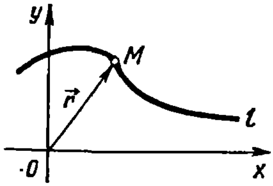


Рис. 3.10

Векторному параметричному рівнянню $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в прямокутній системі координат Oxy відповідають два скалярних рівняння:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

тобто проекціями на осі координат векторного рівняння лінії є її параметричні рівняння.

Векторне рівняння та параметричні рівняння лінії мають такий механічний зміст: якщо точка рухається на площині, то вказані рівняння називаються рівняннями руху точки, а лінія l — траєкторією точки; параметром t при цьому є час.

1.6. Про залежність рівняння лінії від вибору системи координат

У попередніх прикладах вказувалось, що одну й ту саму лінію можна задати різними рівняннями. Таким чином, вигляд рівняння лінії залежить від вибору системи координат або, що те саме, від розміщення лінії відносно системи координат. Рівняння лінії змінюється як при переході від однієї декартової системи до іншої, тобто при перетворенні координат (гл. 2, п. 2), так і при переході від декартових до будь-яких інших координат (гл. 2, п. 2.5).

У зв'язку з цим виникають такі задачі: як обрати таку систему координат, у якій рівняння лінії, заданої геометрично, було б найпростішим, або як замінити систему координат, щоб задане рівняння лінії спростилось? Подібні задачі ми розглядатимемо при вивченні ліній другого порядку.

Усе сказане тут про залежність рівняння лінії на площині від вибору системи координат однаково стосується і рівнянь поверхонь та ліній у просторі. Про це йтиметься в § 2.

Завдання для самоконтролю

1. Що називається рівнянням з двома змінними? Яка різниця між рівнянням і тотожністю?
2. Що називається рівнянням лінії на площині?
3. Яка лінія називається алгебраїчною? Що називається порядком алгебраїчної лінії? Як записуються в загальному вигляді алгебраїчні лінії першого та другого порядків?

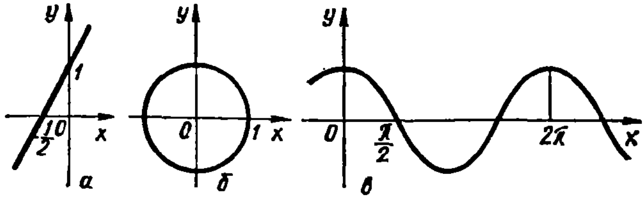


Рис. 3.11

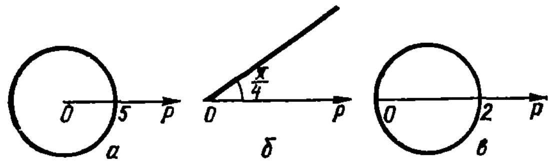


Рис. 3.12

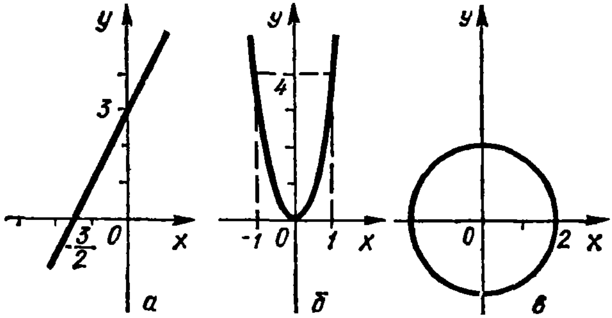


Рис. 3.13

4. Як знайти рівняння лінії за її геометричними властивостями?

5. Що називається полярним рівнянням лінії? Навести приклади.

6. Як записуються векторні та параметричні рівняння лінії? У чому полягає їхній механічний зміст? Навести приклади.

7. Чому вигляд рівняння лінії залежить від системи координат?

8. Побудувати лінії, задані рівняннями в декартових координатах: а) $y = 2x + 1$; б) $x^2 + y^2 = 1$; в) $y = \cos x$.

9. Побудувати лінії, задані полярними рівняннями: а) $\rho = 5$; б) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; в) $\rho = 2\cos\varphi$.

10. Побудувати лінії, задані параметричними рівняннями: а) $x = t - 1$, $y = 2t + 1$; б) $x = \frac{t}{2}$, $y = t^2$; в) $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$.

11. Точка M рухається так, що під час руху залишається весь час у два рази ближчою до A (1; 0), ніж до B (4; 0). Скласти рівняння її траєкторії.

12. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від точки A (3; 0) і прямої $x + 3 = 0$.

Відповіді. 8. Рис. 3.11. 9. Рис. 3.12, 10. Рис. 3.13, 11. $x^2 + y^2 = 4$. 12. $y^2 = 12x$.

2.1. Поверхня та її рівняння

Розглянемо співвідношення

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (3)$$

між трьома змінними величинами x, y, z.

Рівність (3) називають рівнянням з трьома змінними x, y, z, якщо ця рівність не виконується для всіх трійок чисел x, y, z, і тотожністю, якщо вона справджується при будь-яких значеннях x, y, z.

Припустимо, парою значень $x = x_0$ і $y = y_0$ з рівняння (3) визначається єдине значення $z = z_0$. Упорядкована трійка чисел x_0, y_0, z_0 у заданій прямокутній системі координат визначає точку M $(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

Сукупність всіх розв'язків z рівняння (3), які відповідають певним значенням x та y, визначає в просторі деяке геометричне місце точок M $(x;\ y;\ z)$, яке називається *поверхнею* (рис. 3.14), а рівняння (3) — рівнянням цієї поверхні.

Отже, рівняння (3) називається *рівнянням поверхні* відносно заданої системи координат, якщо це рівняння задовольняють координати x, y, z кожної точки даної поверхні і не задовольняють координати x, y, z жодної точки, яка не лежить на цій поверхні.

Поверхнею, заданою рівнянням (3) відносно певної системи координат, називається геометричне місце точок M $(x;\ y;\ z)$, координати яких x, y, z задовольняють дане рівняння.

Якщо вираз $F(x;\ y;\ z)$ в рівнянні (3) є многочленом від x, y, z, тобто сумою скінченного числа одночленів $ax^ky^mz^p$ із сталими коефіцієнтами a і невід'ємними цілими показниками k, m, p, то поверхня, яка задається цим рівнянням, називається *алгебраїчною.*

Неалгебраїчні поверхні називаються *трансцендентними. Порядком алгебраїчної поверхні* називається степінь многочлена, яким задається дана лінія.

Ми розглядатимемо лише алгебраїчні поверхні першого порядку і деякі алгебраїчні поверхні другого порядку. Отже, як і лінію на площині, поверхню в просторі можна задати геометрично і аналітично. Якщо поверхня задана геометрично, то виникає задача про складання рівняння цієї поверхні і, навпаки, якщо поверхня задана рівнянням, то постає задача про її геометричні властивості.

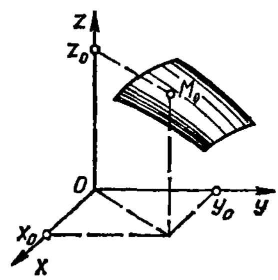


Рис. 3.14

Приклад

Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точок A $(1;\ -1;\ 2)$ і B $(0;\ -2;\ 3)$.

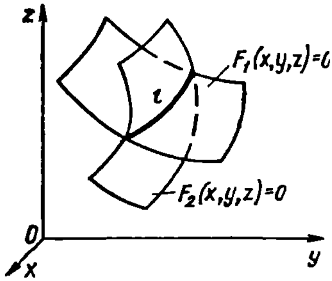


Рис. 3.15

○ Нехай точка M $(x; y; z)$ лежить на заданій поверхні. Тоді за умовою $AM = BM$, тобто

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y+2)^2+(z-3)^2},$$

звідки після спрощень дістаємо шукане рівняння $2x + 2y - 2z + 7 = 0$. ●

2.2. Рівняння лінії в просторі

Лінію l в просторі можна розглядати як лінію перетину двох поверхонь, або геометричне місце точок, що знаходяться одночасно на двох поверхнях; отже, якщо $F_1(x, y, z) = 0$ і $F_2(x, y, z) = 0$ рівняння двох поверхонь, які визначають лінію l (рис. 3.15), то координати точок цієї лінії задовольняють систему двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0; \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Рівняння системи (4) сумісно визначають лінію l і називаються *рівняннями лінії в просторі*.

Лінію в просторі можна розглядати також як траєкторію рухомої точки. При такому підході лінію в просторі задають векторним параметричним рівнянням

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{5}$$

Векторному параметричному рівнянню (5) відповідають скалярні параметричні рівняння

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

— проекції вектора (5) на осі координат. Таким чином, векторні рівняння лінії на площині і в просторі мають однаковий вигляд і однакову суть, а відповідні параметричні рівняння відрізняються лише кількістю рівнянь, яка залежить від числа базисннх векторів на площині і в просторі.

Приклади

1. Якщо деяка точка M рівномірно рухається по твірній кругового циліндра, а сам циліндр рівномірно обертається навколо своєї осі, то точка M описує криву, яка називається *гвинтовою лінією*.

Радіусом гвинтової лінії називають радіус циліндра, а її *віссю* — вісь циліндра. Відстань, на яку зміститься точка вздовж твірної при повному оберті циліндра, називається *кроком гвинта* і позначається через h. Щоб вивести рівняння гвинтової лінії, візьмемо вісь циліндра за вісь Oz, а площину Oxz — за початок відліку кута повороту циліндра (рис. 3.16, *а*).

Нехай $\angle NOB = t$ і M $(x; y; z)$ — довільна точка гвинтової лінії. Координати x і y точки M збігаються з координатами точки B (рис. 3.16, *б*): $x = R\cos t$, $y =$

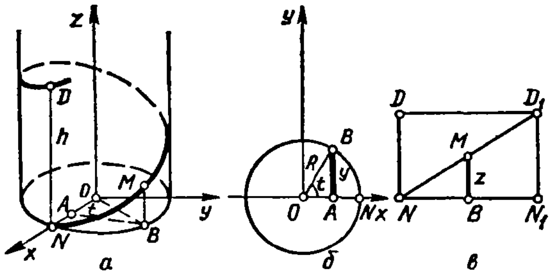


Рис. 3.16

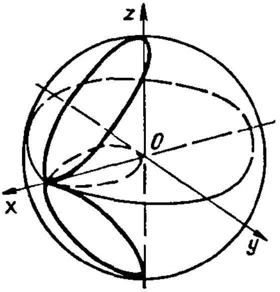


Рис. 3.17

$= R \sin t$, де R — радіус циліндра. Щоб визначити координату z, побудуємо розгортку циліндра NN_1D_1D (рис. 3.16, *в*), в якій $NN_1 = 2\pi R$, $N_1D_1 = ND = h$, $NB = Rt$, $BM = z$. З подібності трикутників NMB і ND_1N_1 дістанемо

$$\frac{z}{h} = \frac{Rt}{2\pi R}, \quad z = \frac{h}{2\pi} t.$$

Таким чином, параметричні рівняння гвинтової лінії мають вигляд

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad z = \frac{h}{2\pi} t$$

або у векторній формі $\vec{r}(t) = R\cos t\,\vec{i} + R\sin t\,\vec{j} + \frac{ht}{2\pi}\vec{k}$.

2. Лінія, яка задається рівняннями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2; \\ x^2 + y^2 + Rx = 0, \end{cases}$$

утворюється при перетині циліндричної та сферичної поверхонь (§ 7) і називається *лінією Вівіані* (рис. 3.17).

Завдання для самоконтролю

1. Що називається рівнянням поверхні?
2. Що називається алгебраїчною поверхнею n-го порядку?
3. Як аналітично задати лінію, яка утворюється при перетині двох поверхонь?
4. Як аналітично задати лінію, яка є траєкторією рухомої точки?
5. Упевнитись, що точка A (1; 0; —1) лежить на поверхні $x^2 + y^2 + 2z^2 - 3 = 0$, а точка B (1; 2; 0) — не лежить на ній.
6. Пересвідчитись, що точка A (1; 2; 3) лежить на лінії, яка визначається системою рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + xy - z^2 + 6 = 0; \\ x + 2y - 3z + 4 = 0. \end{cases}$$

7. Вивести рівняння геометричного місця точок, суми відстаней яких від двох даних точок A (0; 0; —4) і B (0; 0; 4) — величини сталі і дорівнюють 10.

Відповідь. 7. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$.

§ 3. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

3.1. Різні види рівнянь прямої на площині

Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами: точкою і вектором, паралельним даній прямій; двома точками; точкою і вектором, перпендикулярним до даної прямої, тощо. Різним способам задання прямої відповідають у прямокутній системі координат різні види її рівнянь.

Нехай пряма (на площині чи в просторі) проходить через задану точку M_0 паралельно заданому ненульовому вектору $\vec{s}$, який називається *напрямним вектором прямої*. Пряма має безліч напрямних векторів, їхні відповідні координати пропорційні. Точка M_0 і її напрямний вектор цілком визначають пряму, тому що через точку M_0 можна провести лише одну пряму, паралельну вектору $\vec{s}$. Складемо рівняння цієї прямої. Позначимо через M (рис. 3.18) довільну точку прямої і розглянемо радіуси-вектори $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ та $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ точок M_0 та M і вектор $\overrightarrow{M_0M}$, що лежить на даній прямій.

Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ і $\vec{s}$ колінеарні, то $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{s}t$, звідки

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t. \qquad (6)$$

Змінна t у формулі (6) може набувати довільних дійсних значень і називається *параметром*, а рівняння (6) називається *векторним параметричним рівнянням прямої*.

Векторне параметричне рівняння прямої має однаковий вигляд і на площині, і в просторі.

Якщо пряма l розглядається на площині і задається точкою M_0 $(x_0; y_0)$ та напрямним вектором $\vec{s} = (m; n)$, то, прирівнюючи відповідні координати векторів $\vec{r}$ та $\vec{r}_0 + \vec{s}t$ за формулою (6), маємо

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \qquad (7)$$

звідки

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \qquad (8)$$

Рівняння (7) називаються *параметричними рівняннями прямої*, а рівняння (8) — її *канонічним рівнянням*.

Зокрема, якщо пряма проходить через точку M_0 $(x_0; y_0)$ паралельно осі Ox, то її напрямний вектор $\vec{s} = (m; 0)$, тому рівняння (8) набирає вигляду

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{0}.$$

Як відомо, добуток середніх членів пропорції дорівнює добутку крайніх членів. Тому маємо $(y - y_0)\, m = (x - x_0) \cdot 0$, звідки $y = y_0$. Це і є рівняння прямої, яка паралельна осі Ox.

Аналогічно, якщо пряма проходить через точку $M_0\,(x_0;\ y_0)$ паралельно осі Oy, то її рівнянням є $x = x_0$.

Виведемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Якщо пряма не перпендикулярна до осі Ox, то рівняння (8) можна записати у вигляді

$$y - y_0 = \frac{n}{m}(x - x_0) \text{ або } y = \frac{n}{m}x + \left(y_0 - \frac{n}{m}x_0\right).$$

Позначивши $\frac{n}{m} = k$, $\quad y_0 - \frac{n}{m}x = b$, дістанемо

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{9}$$

або

$$y = kx + b. \tag{10}$$

Відношення $k = \frac{n}{m} = \operatorname{tg}\alpha$, де α — кут, утворений прямою з додатним напрямом осі Ox (рис. 3.19), називається *кутовим коефіцієнтом прямої*, а величина $b = y_0 - \frac{n}{m}x_0$ — ордината точки перетину прямої з віссю Oy Якщо пряма проходить через початок координат, то $b = 0$ і рівняння такої прямої має вигляд

$$y = kx. \tag{11}$$

Рівняння (9) називається *рівнянням прямої, яка проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт*, а рівняння (10) — *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*.

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1\,(x_1;\ y_1)$ та $M_2\,(x_2;\ y_2)$, дістанемо з рівняння прямої, що проходить через точку M_1 і має напрямний вектор $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{12}$$

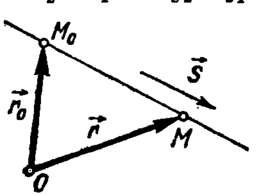


Рис. 3,18

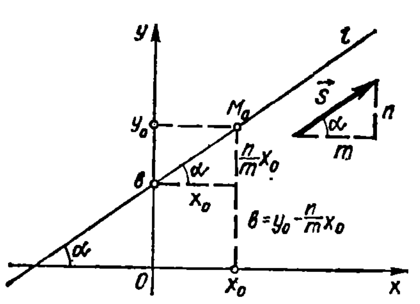


Рис. 3.19

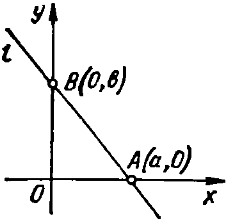


Рис. 3.20

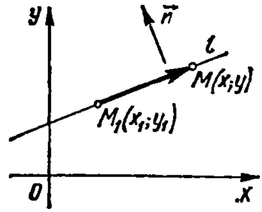


Рис. 3.21

Рівняння (12) називається *рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки.*

Зокрема, якщо пряма прохо ить через точки A (a; 0) та B (0; b), тобто відтинає на осях відрізки a та b (рис. 3.20), то з рівняння (11) маємо

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0} \text{ або } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{13}$$

Рівняння (13) називається *рівнянням прямої у відрізках на осях.*

Розглянемо рівняння прямої, яка проходить через задану точку M_1 (x_1; y_1) перпендикулярно до заданого ненульового вектора $\vec{n}$ = = (A; B).

Візьмемо на прямій l довільну точку (рис. 3.21) M (x; y) і введемо вектор $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;\ y-y_1)$. Оскільки вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_1M}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0. \tag{14}$$

Рівняння (14) називається *рівнянням прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.*

Вектор $\vec{n}=(A;\ B)$ називається *нормальним вектором прямої.* Пряма має безліч нормальних векторів. Усі вони паралельні, отже, їхні відповідні координати пропорційні.

3.2. Загальне рівняння прямої та його дослідження

Усі одержані вище рівняння прямої лінії є рівняннями першого степеня відносно змінних x і y, тобто лінійними рівняннями. Отже, рівняння будь-якої прямої, яка лежить в площині Oxy, є лінійним рівнянням відносно x і y.

Покажемо, що правильним буде й обернене твердження: кожне лінійне рівняння

$$Ax+By+C=0 \tag{15}$$

з двома змінними x і y визначає на площині в прямокутній системі координат п яму лінію.

Дійсно, якщо (x_1, y_1) — будь-який розв'язок рівняння (15), то

$$Ax_1 + By_1 + C = 0. \qquad (16)$$

Віднімаючи почленно від рівняння (15) рівність (16), дістаємо

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \qquad (17)$$

Рівняння (17) еквівалентне рівнянню (15) і згідно з формулою (14) визначає на площині Oxy пряму, яка проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A; B)$, тобто рівняння (15) також визначає пряму і називається *загальним рівнянням прямої*. Коефіцієнти A і B при невідомих x і y загального рівняння є координатами її нормального вектора.

Кожне з рівнянь (7) — (14) зводиться до рівняння (15), отже, кожна пряма лінія задається рівнянням (15), і навпаки, кожне рівняння (15) визначає на площині Oxy пряму. Це означає, що кожна пряма — це лінія першого порядку, і навпаки, кожна лінія першого порядку є пряма.

Дослідимо загальне рівняння, тобто розглянемо окремі випадки розміщення прямої в системі координат Oxy залежно від значень коефіцієнтів A, B і C.

1. Якщо $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, то рівняння (15) зводиться до рівняння прямої у відрізках на осях

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1,$$

тобто пряма перетинає осі координат в точках з координатами $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$ і $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$.

2. Якщо $A = 0$, то пряма $By + C = 0$ паралельна осі Ox і проходить через точку $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$, оскільки нормальний вектор $\vec{n} = (0; B)$ прямої перпендикулярний до осі Ox, а координати даної точки задовольняють рівняння прямої.

3. Аналогічно попередньому, якщо $B = 0$, то пряма $Ax + C = 0$ паралельна осі Oy і проходить через точку $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$.

4. Якщо $C = 0$, то пряма $Ax + By = 0$ проходить через початок координат, тому що координати точки $O(0; 0)$ задовольняють рівняння прямої.

5. Якщо $A = C = 0$, то згідно з попереднім рівняння $By = 0$ або $y = 0$ визначає вісь Ox.

6. Якщо $B = C = 0$, то рівняння $Ax = 0$ або $x = 0$ визначає вісь Oy.

3.3. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих

Кут між двома прямими вимірюється кутом між їхніми напрямними векторами. При цьому слід зазначити, що, вибравши на одній із прямих напрямний вектор, напрямлений в протилежну сторону, дістанемо другий кут, який доповнює перший до π.

а) Нехай прямі l_1 та l_2 задано канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}; \qquad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$$

і φ — кут між цими прямими: $\varphi = (\widehat{l_1, l_2})$, $0 < \varphi < \pi$. Оскільки вектори $\vec{s}_1 = (m_1; n_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2; n_2)$ є напрямними векторами даних прямих (рис. 3.22) і $\varphi = (\widehat{\vec{s}_1, \vec{s}_2})$, то за формулою (36) (див. гл. 2) маємо

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\,|\vec{s}_2|} = \frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2}}. \tag{18}$$

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ теж паралельні, тому їхні координати пропорційні, тобто

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2} \tag{19}$$

— *умова паралельності двох прямих*. Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ теж перпендикулярні і їхній скалярний добуток дорівнює нулю, отже,

$$m_1m_2+n_1n_2=0 \tag{20}$$

— *умова перпендикулярності двох прямих.*

б) Нехай тепер прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, тоді кут φ між ними (рис. 3.23) дорівнює куту між їхніми нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$; тому аналогічно випадку а) дістанемо:

1) формулу для кута φ між прямими l_1 і l_2:

$$\cos\varphi = \frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}; \tag{21}$$

2) умову паралельності прямих l_1 і l_2:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}; \tag{22}$$

3) умову перпендикулярності прямих l_1 і l_2:

$$A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0. \tag{23}$$

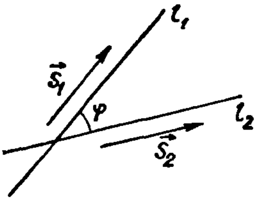


Рис. 3.22

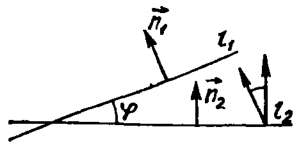


Рис. 3.23

Нехай прямі l_1 і l_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, де $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ — кутові коефіцієнти, то з рис. 3.24 видно, що

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{24}$$

Зауважимо, що формула (24) визначає кут, на який треба повернути пряму l_1 (проти годинникової стрілки), щоб вона збіглась з прямою l_2. Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то $\varphi = 0$ і $\operatorname{tg}\varphi = 0$, тому з формули (24) маємо $k_2 - k_1 = 0$. Отже, умовою паралельності двох прямих є рівність їхніх кутових коефіцієнтів:

$$k_1 = k_2. \tag{25}$$

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то $\varphi = 90°$ і $\operatorname{tg}\varphi$ не існує, тому що знаменник дробу (24) дорівнює нулю. Таким чином, умова перпендикулярності прямих має вигляд

$$k_1k_2 + 1 = 0 \text{ або } k_2 = -\frac{1}{k_1}. \tag{26}$$

Формули (18), (21) і (24) дають змогу визначити один із двох суміжних кутів, які утворюються при перетині двох прямих. Другий кут дорівнює $\pi - \varphi$. Іноді вирази справа в цих формулах записують по модулю, тоді визначається гострий кут між прямими.

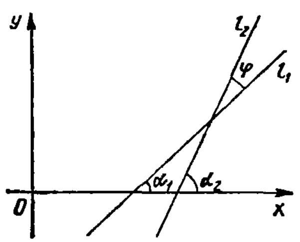


Рис. 3.24

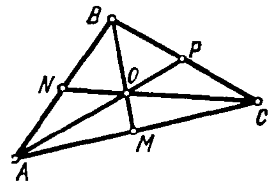


Рис. 3.25

Приклади.

1. Знайти кут між прямими $3x - 4y + 1 = 0$ і $5x - 12y + 3 = 0$.

За формулою (21) маємо

$$\cos\varphi = \frac{3 \cdot 5 + (-4) \cdot (-12)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{15 + 48}{5 \cdot 13} = \frac{63}{65} \approx 0{,}96,$$

$$\varphi = \arccos 0{,}96. \; \bullet$$

2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $(-8;\ 1)$ паралельно прямій $2x - y + 7 = 0$.

○ Приведемо задане рівняння до вигляду (10): $y = 2x - 7$, отже, кутовий коефіцієнт прямої $k = 2$.

Оскільки шукана і задана прямі паралельні, то за умовою (25) їхні кутові коефіцієнти рівні між собою, тому, скориставшись рівнянням (9), дістанемо $y - 1 = 2(x + 8)$ або $y - 2x - 17 = 0$. ●

3. Медіани BM і CN (рис. 3.25) трикутника ABC лежать на прямих $x + y = 3$ і $2x + 3y = 1$, а точка A $(1;\ 1)$ — вершина трикутника. Скласти рівняння прямої BC.

○ Розв'язуючи систему рівняння $\begin{cases} x + y = 3; \\ 2x + 3y = 1, \end{cases}$ знаходимо точку перетину медіан: O $(8;\ -5)$. З відношення $\frac{AO}{OP} = \frac{2}{1} = \lambda$ і формул (24) (гл. 2) дістанемо координати точки P: $8 = \frac{1 + 2x_P}{1 + 2}$, $-5 = \frac{1 + 2y_P}{1 + 2}$; $x_P = \frac{23}{2}$, $y_P = -8$. Оскільки точки B і C лежать на заданих прямих, то їхні координати задовольняють задані рівняння. Точка P ділить відрізок BC пополам, отже, маємо систему рівнянь

$$\frac{x_B + x_C}{2} = \frac{23}{2}; \quad \frac{y_B + y_C}{2} = -8; \quad x_B + y_B = 3; \quad 2x_C + 3y_C = 1,$$

звідки $x_C = 11$, $y_C = -7$. Пряма BC проходить через точки $P\left(\frac{23}{2};\ -8\right)$ і C $(11;\ -7)$, тому за формулою (12) дістанемо $\frac{x - 23/2}{11 - 23/2} = \frac{y + 8}{-7 + 8}$ або $2x + y - 15 = 0$. ●

3.4. Відстань від точки до прямої

Нехай задано пряму l рівнянням $Ax + By + C = 0$ і точку M_0 $(x_0;\ y_0)$. Відстань d (рис. 3.26) точки M_0 від прямої l дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$, де M_1 $(x_1;\ y_1)$ — довільна точка прямої l, на напрям нормального вектора $\vec{n} = (A;\ B)$. Отже,

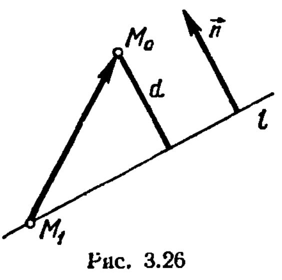


Рис. 3.26

$$d = |\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}| = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Оскільки $Ax_1 + By_1 + C = 0$, то $-Ax_1 -$

$-By_1 = C$, тому

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{27}$$

Зауваження. Число d завжди додатне, бо це відстань. *Відхиленням* δ точки M_0 $(x_0; y_0)$ від прямої $Ax + By + C = 0$ називається додатне число $\delta = d$, якщо точки M_0 і O (0; 0) лежать по різні сторони від прямої, і від'ємне число $\delta = -d$, якщо ці точки лежать по один бік від неї. З формули (27) випливає, що відхилення

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

де знак знаменника має бути протилежний до знака C.

Приклад

Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $4x - 3y - 10 = 0$ і $8x - 6y + 15 = 0$.

○ Оскільки задані прямі паралельні, то довжину d сторони квадрата можна знайти як відстань від довільної точки однієї прямої до другої прямої.

Знайдемо яку-небудь точку на першій прямій. Нехай, наприклад, $x = 1$, тоді $4 \cdot 1 - 3y - 10 = 0$, звідки $y = -2$. Отже, точка M_0 (1; —2) належить першій прямій.

За формулою (27) знайдемо відстань від точки M_0 до другої прямої:

$$d = \frac{|8 \cdot 1 - 6 \cdot (-2) + 15|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{7}{2}.$$

Площа квадрата $S = d^2 = \frac{49}{4}$. ●

Завдання для самоконтролю

1. Що називається напрямним вектором прямої?
2. Скласти рівняння прямої, яка проходить через задану точку паралельно заданому вектору.
3. Вивести канонічні та параметричні рівняння прямої на площині.
4. Вивести рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом та рівняння прямої, що проходить через дві точки.
5. Вивести рівняння прямої у відрізках на осях та загальне рівняння прямої.
6. Довести, що всяке рівняння $Ax + By + C = 0$ визначає на площині Oxy пряму лінію. Дослідити загальне рівняння прямої.
7. Як знайти кут між двома прямими? Сформулювати і записати умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.
8. Вивести формулу для знаходження відстані точки від прямої.
9. Вказати хоча б один напрямний вектор прямої, яка: а) має кутовий коефіцієнт k; б) задана рівнянням $Ax + By + C = 0$.
10. Вказати хоча б один нормальний вектор кожної з прямих у задачі 9.
11. Задано три точки: A (5; 2), B (9; 4) і C (7; 3). Показати, що вони лежать на одній прямій і написати її рівняння.
12. Знайти кут між прямими $x = 4$ і $2x - y - 1 = 0$.
13. Точка A (2; 0) є вершиною правильного трикутника, а протилежна їй сторона лежить на прямій $x + y - 1 = 0$. Скласти рівняння двох інших сторін.

14. Скласти рівняння прямих, які знаходяться від точки A (1; —2) на відстані $d=\sqrt{20}$ і паралельні прямій $2x-y-5=0$.

15. Довести, що пряма $3x+2y-6=0$ перетинає відрізок AB, де A (1; 1), B (2; 2).

Відповіді. 9. $(1;\ k)$; $(B;\ -A)$. 10. $(k;\ -1)$; $(A;\ B)$. 12. $\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. 13. $x-(2+\sqrt{3})\,y-2=0$, $x-(2-\sqrt{3})\,y-2=0$. 14. $2x-y-14=0$, $2x-y+6=0$. 15. *Вказівка.* Упевнитись, що точки A та B лежать по різні боки від прямої.

§ 4. ПЛОЩИНА В ПРОСТОРІ

4.1. Загальне рівняння площини та його дослідження

Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано площину $П$ (рис. 3.27) точкою M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і вектором $\vec{n}=(A;\ B;\ C)$, перпендикулярним до цієї площини. Візьмемо на площині точку M $(x;\ y;\ z)$ і знайдемо вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0)$. При будь-якому положенні точки M на площині $П$ вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ взаємно перпендикулярні, тому їхній скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{28}$$

або

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{29}$$

де $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

Рівняння (28) називається *рівнянням площини, яка проходить через точку M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(A;\ B;\ C)$*, а рівняння (29) — *загальним рівнянням площини.*

Вектор $\vec{n}=(A;\ B;\ C)$ називається *нормальним вектором площини.* Кожна площина має безліч нормальних векторів. Усі вони паралельні між собою, а їхні координати пропорційні. Отже, всяка площина в прямокутній системі координат визначається рівнянням першого степеня.

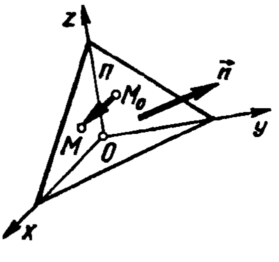


Рис. 3.27

Покажемо тепер справедливість оберненого твердження: всяке рівняння першого степеня

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{30}$$

з трьома змінними x, y і z задає в прямокутній системі координат $Oxyz$ площину.

Нехай задано довільне рівняння (30) і $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ — будь-який розв'язок цього рівняння, тобто

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \tag{31}$$

Віднявши від рівняння (30) рівність (31), дістанемо

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (32)$$

Рівняння (32) еквівалентне рівнянню (30) і згідно з формулою (28) визначає в просторі площину, яка проходить через точку M_0 (x_0; y_0; z_0) перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(A;\ B;\ C)$. Отже, рівняння (30) також визначає площину.

Таким чином, кожне алгебраїчне рівняння першого степеня із змінними x, y і z є рівнянням площини.

Дослідимо загальне рівняння площини.

1. Якщо в рівняннях (30) $D=0$, то воно набирає вигляду $Ax+$ $+By+Cz=0$. Це рівняння задовольняє точка O (0; 0; 0). Отже, якщо в загальному рівнянні площини відсутній вільний член, то така площина проходить через початок координат.

2. Якщо $A=0$, то рівняння (30) набирає вигляду $By+Cz+$ $+D=0$ і визначає площину, нормальний вектор якої $\vec{n}=(0;\ B;\ C)$ перпендикулярний до осі Ox. Отже, якщо в загальному рівнянні площини коефіцієнт при змінній x дорівнює нулю, то таке рівняння визначає площину, що паралельна осі Ox.

Аналогічно рівняння $Ax+Cz+D=0$ визначає площину, паралельну осі Oy, а рівняння $Ax+By+C=0$ — площину, паралельну Oz.

3. Якщо $A=0$, $B=0$, $C\neq 0$, $D\neq 0$, то рівняння (30) набирає вигляду $Cz+D=0$ або $z=-\frac{D}{C}$. З випадку 2 випливає, що це рівняння визначає площину, яка паралельна осям Ox та Oy (коефіцієнти при x і y дорівнюють 0), тобто площину, паралельну площині Oxy.

Аналогічно площина $By+D=0$ паралельна площині Oxz, а площина $Ax+D=0$ паралельна площині Oyz.

4. Якщо в рівнянні (30) $A=D=0$, то площина $By+Cz=0$ проходить через вісь Ox. Справді, згідно з попереднім, при $D=0$ площина проходить через початок координат, а при $A=0$ — паралельно осі Ox, отже, проходить через вісь Ox.

Аналогічно площина $Ax+Cz=0$ проходить через вісь Oy, а площина $Ax+By=0$ — через вісь Oz.

5. Якщо в рівнянні площини $A=B=D=0$, то площина $Cz=$ $=0$ або $z=0$ збігається з площиною Oxy. Аналогічно площина $Ax=$ $=0$ або $x=0$ збігається з площиною Oyz, а площина $y=0$ — з площиною Oxz.

Приклади

1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M (1; 2; 3) перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(-1;\ -3;\ 1)$.

○ Шукане рівняння знаходимо за формулою (28):

$$-1 \cdot (x-1) + (-3) \cdot (y-2) + 1 \cdot (z-3) = 0,$$

або

$$x + 3y - z - 4 = 0. \quad ●$$

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_0 (—3; 4; 5) перпендикулярно до осі Oy.

○ Орт $\vec{j} = (0; 1; 0)$ перпендикулярний до площини, тому його можна розглядати як нормальний вектор. Отже, шукане рівняння має вигляд

$$0 \cdot (x+3) + 1 \cdot (y-4) + 0 \cdot (z-5) = 0 \text{ або } y = 4. \quad ●$$

4.2. Рівняння площини, що проходить через три точки. Рівняння площини у відрізках на осях

Нехай на площині Π задано три точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, які не лежать на одній прямій. Ці точки однозначно визначають площину. Знайдемо її рівняння.

Візьмемо на площині довільну точку $M(x; y; z)$ і знайдемо вектори

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1), \quad \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1).$$

Ці вектори лежать в площині Π, тобто вони компланарні. Оскільки мішаний добуток компланарних векторів дорівнює нулю, то $\overrightarrow{M_1M}\,\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{M_1M_3} = 0$ або

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (33)$$

Маємо *рівняння площини, що проходить через три точки.* Зокрема, нехай площина відтинає на осях Ox, Oy, Oz відрізки a, b, c, тобто проходить через точки $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ і $C(0; 0; c)$. Підставляючи координати цих точок у формулу (33) і розкриваючи визначник, дістанемо

$$xbc + yac + zab - abc = 0 \quad \text{або} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (34)$$

Рівняння (34) називається *рівнянням площини у відрізках на осях.* Ним зручно користуватись при побудові площини.

Приклади.

1. Написати загальне рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(-1; 0; 2)$, $M_3(-2; 1; 0)$.

○ Підставимо координати точок у рівняння (33):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

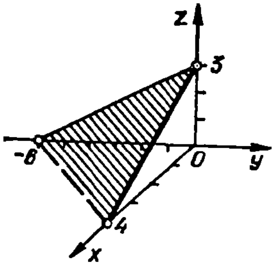


Рис. 3.28

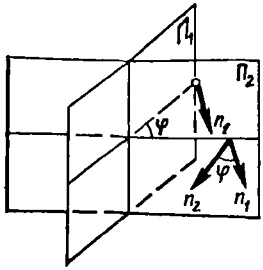


Рис. 3.29

Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$(x-1)\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & -3\end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -3 & -3\end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -3 & -1\end{vmatrix}=0.$$

Обчислюючи визначники другого порядку, знаходимо шукане рівняння:

$(x-1)\,5-(y-2)\,3+(z-3)\,(-4)=0$ або $5x-3y-4z+13=0$. ●

2. Побудувати площину $3x-2y+4z-12=0$.

○ Запишемо задане рівняння у відрізках на осях. Для цього перенесемо у праву частину вільний член і поділимо на нього обидві частини рівняння:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{3}=1,$$

звідки $a=4$, $b=-6$, $c=3$.

Знаючи відрізки, які відтинає площина на осях координат, легко побудувати площину (рис. 3.28). ●

4.3. Кут між двома площинами. Умови паралельності і перпендикулярності двох площин

Нехай задано дві площини Π_1 і Π_2 відповідно рівняннями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Двогранний кут між площинами вимірюється лінійним кутом, який дорівнює куту між нормальними векторами $\vec{n}_1=(A_1;\ B_1;\ C_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2;\ B_2;\ C_2)$ цих площин (рис. 3.29). Отже, з формули (36) (гл. 2) маємо

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\,\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.\tag{35}$$

Якщо площини Π_1 і Π_2 перпендикулярні, то скалярний добуток їхніх нормальних векторів дорівнює нулю, тобто рівність

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0\tag{36}$$

є *умовою перпендикулярності площин.*

Якщо площини Π_1 і Π_2 паралельні, то координати нормальних векторів пропорційні, тобто *умовою паралельності площин* є рівність відношень:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (37)$$

Приклад

Знайти кут між площинами $2x + y + 3z - 1 = 0$ і $x + y - z + 5 = 0$.

○ За формулою (35) маємо

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 3\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = 0,$$

отже, дані площини перпендикулярні. ●

4.4. Відстань від точки до площини

Якщо задане рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$ площини Π і точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, що не лежить на цій площині, то відстань d від точки M_0 до площини Π знаходиться за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (38)$$

Доведення формули (38) таке саме, як і формули (27).

Приклад

Знайти висоту AH піраміди, заданої своїми вершинами $A(-1;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 0;\ 2)$, $C(0;\ 1;\ -1)$, $D(2;\ 0;\ -1)$.

○ За формулою (33) знаходимо рівняння площини, що проходить через точки B, C, D:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

звідки $3x + 6y + z - 5 = 0$.

Висоту AH знайдемо як відстань точки $A(-1;\ 2;\ -1)$ від площини BCD за формулою (38):

$$AH = \frac{3\cdot(-1) + 6\cdot 2 + 1\cdot(-1) - 3}{\sqrt{3^2+6^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{46}}. \ ●$$

Завдання для самоконтролю

1. Довести, що кожна площина може бути виражена лінійним рівнянням відносно прямокутної системи координат $Oxyz$ і, навпаки, кожне лінійне рівняння з трьома невідомими x, y і z визначає у просторі площину.
2. Записати і дослідити загальне рівняння площини.
3. Вивести рівняння площини, яка проходить через три точки.
4. Вивести рівняння площини у відрізках на осях.
5. Як обчислити кут між двома площинами? Які умови паралельності і перпендикулярності двох площин?
6. Вивести формулу для обчислення відстані від точки до площини.

7. Задано точки M_1 (1; 2; —1) і M_2 (0; 3; 1). Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

8. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A (1; 0; —1) паралельно векторам $\vec{a} = (5; 0; 1)$ і $\vec{b} = (0; 1; -1)$.

9. Знайти відстань між площинами $2x - y + 2z + 9 = 0$ і $4x - 2y + 4z - 21 = 0$.

Відповіді. 7. $x - y - 2z - 1 = 0$. 8. $x - 5y - 5z - 6 = 0$. 9. 6,5.

§ 5. ПРЯМА ЛІНІЯ В ПРОСТОРІ

5.1. Різні види рівнянь прямої в просторі

Як уже зазначалося в § 3, коли пряма задана точкою і напрямним вектором, то її векторне параметричне рівняння (як на площині, так і в просторі) має вигляд (6): $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t$, де $\vec{r}$ — радіус-вектор змінної точки M прямої; $\vec{r}_0$ — радіус-вектор заданої точки M_0; $\vec{s}$ — ненульовий напрямний вектор прямої; t — параметр.

Нехай у просторі в прямокутній системі координат задано пряму точкою M_0 (x_0; y_0; z_0) і напрямним вектором $\vec{s} = (m; n; p)$. Візьмемо довільну точку M (x; y; z) цієї прямої (рис. 3.30). Тоді аналогічно тому, як було знайдено формули (7), (8) і (12), дістаємо:

1) *параметричні рівняння прямої в просторі:*

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt; \tag{39}$$

2) *канонічні рівняння прямої в просторі:*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}; \tag{40}$$

3) *рівняння прямої в просторі, яка проходить через дві задані точки* M_1 (x_1; y_1; z_1) і M_2 (x_2; y_2; z_2):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{41}$$

У рівняннях (39) — (41) одна або дві координати напрямного вектора можуть дорівнювати нулю (випадки $m = n = p = 0$ та $x_2 - x_1 = y_2 - y_1 = z_2 - z_1 = 0$ неможливі, бо за означенням $\vec{s} \neq 0$).

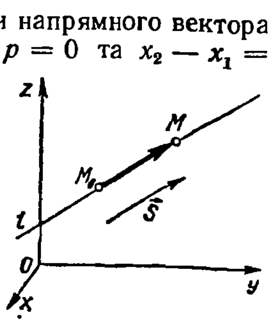


Рис. 3.30

Якщо $m = 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$, то напрямний вектор $\vec{s}$ перпендикулярний до осі Ox, тому рівняння

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

визначає пряму, перпендикулярну до осі Ox.

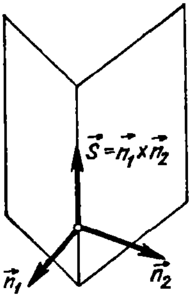


Рис. 3.31

Аналогічно рівняння, в яких лише $n = 0$ або $p = 0$, визначають прямі, перпендикулярні до осі Oy або Oz.

Якщо $m = n = 0$, $p \neq 0$, або $m = p = 0$, $n \neq 0$, або $n = p = 0$, $m \neq 0$, то рівняння (40) визначають прямі, відповідно паралельні осям Oz, Oy, Ox.

Розглянемо тепер випадок, коли пряма в просторі задається перетином двох площин. Відомо, що дві непаралельні площини перетинаються по прямій лінії. Отже, система рівнянь двох площин

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{42}$$

нормальні вектори яких $\vec{n}_1 = (A_1;\ B_1;\ C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2;\ B_2;\ C_2)$ не колінеарні, визначає в просторі пряму лінію.

Рівняння (42) називаються *загальними рівняннями прямої в просторі*. Щоб від загальних рівнянь (42) перейти до канонічних рівнянь (40), потрібно знайти точку $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ на прямій і її напрямний вектор $\vec{s} = (m;\ n;\ p)$. Для знаходження точки M_0 одну з її координат, наприклад, $x = x_0$ беруть довільною, а дві інші визначають із системи

$$\begin{cases} B_1y + C_1z = -D_1 - A_1x_0; \\ B_2y + C_2z = -D_2 - A_2x_0. \end{cases}$$

Ця система матиме розв'язок за умови, що $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. Якщо ця умова порушується, то в системі (42) довільне значення надають змінній y або змінній z.

Для знаходження напрямного вектора $\vec{s}$ врахуємо, що нормальні вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ даних площин перпендикулярні до прямої (рис. 3.31). Тому за вектор $\vec{s}$ можна взяти їхній векторний добуток:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \tag{43}$$

Приклад

Звести рівняння прямої

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0; \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$$

до канонічного вигляду.

○ Знайдемо яку-небудь точку M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ на даній прямій. Для цього покладемо в обох рівняннях $x = 0$ і розв'яжемо систему

$$\begin{cases} y - z - 1 = 0; \\ -y + 3z + 5 = 0, \end{cases}$$

звідки $z = -2$, $y = -1$. Отже, точка M_0 $(0;\ -1;\ -2)$ належить даній прямій.

Напрямний вектор $\vec{s}$ знаходимо за формулою (43):

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Канонічні рівняння заданої прямої мають вигляд

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z+2}{-3}. \ ●$$

5.2. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Нехай прямі l_1 і l_2 задано рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}; \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Кут між цими прямими (рис. 3.32) дорівнює куту φ між їхніми напрямними векторами $\vec{s_1} = (m_1;\ n_1;\ p_1)$ і $\vec{s_2} = (m_2;\ n_2;\ p_2)$, тому аналогічно з випадком а) п. 3.3 дістанемо:

1) формулу для *кута* φ *між прямими* l_1 *і* l_2:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s_1} \cdot \vec{s_2}}{|\vec{s_1}|\,|\vec{s_2}|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\,\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}; \tag{44}$$

2) *умову паралельності прямих* l_1 *і* l_2:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}; \tag{45}$$

3) *умову перпендикулярності прямих* l_1 і l_2:

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0. \tag{46}$$

Приклади

1. Знайти кут φ між прямими

$$\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0; \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$$

і $\begin{cases} x = 2t; \\ y = 2 - t; \\ z = -2 + 3t. \end{cases}$

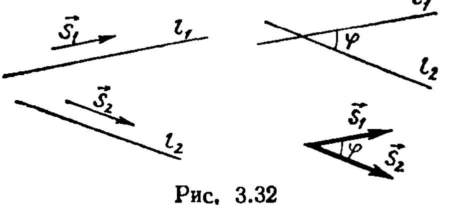


Рис. 3.32

○ За формулами (43) і (39) знаходимо напрямні вектори даних прямих: $\vec{s_1} = (2; -8; -4)$ і $\vec{s_2} = (2; -1; 3)$.

Оскільки $\vec{s_1} \cdot \vec{s_2} = 0$, то $\varphi = 90°$. ●

2. При яких значеннях m_1 і n_2 прямі

$$\frac{x}{m_1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{4} \quad \text{і} \quad \frac{x+1}{-1} = \frac{y+5}{n_2} = \frac{z+3}{-2}$$

паралельні?

○ З умови (45) маємо

$$\frac{m_1}{-1} = \frac{2}{n_2} = \frac{4}{-2}; \quad \frac{m_1}{-1} = -2, \quad \frac{2}{n_2} = -2,$$

звідки $m_1 = 2$, $n_2 = -1$. ●

5.3. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини

Кут між прямою l і площиною Π за означенням є кут між прямою l і її проекцією на площину Π.

Нехай площина Π і пряма l задані рівняннями

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{і} \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Позначимо гострий кут між прямою l (рис. 3.33) і її проекцією l_1 на площину Π через φ, а кут між нормальним вектором $\vec{n} = (A; B; C)$ площини Π і напрямним вектором $\vec{s} = (m; n; p)$ прямої l — через θ. Якщо $\theta \leqslant 90°$, то $\varphi = 90° - \theta$, тому $\sin \varphi = \cos \theta$; якщо ж $\theta > 90°$, то $\varphi = \theta - 90°$ і $\sin \varphi = -\cos \theta$.

Отже, в будь-якому випадку $\sin \varphi = |\cos \theta|$. Але

$$\cos \theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}||\vec{s}|},$$

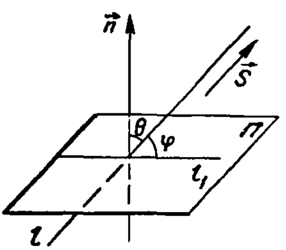


Рис. 3.33

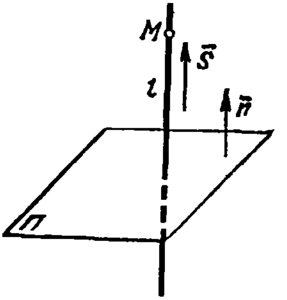


Рис. 3.34

тому *кут між прямою і площиною* знаходиться за формулою

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{|\vec{n}|\,|\vec{s}|} = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (47)$$

Якщо пряма l паралельна площині Π, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ перпендикулярні, тому $\vec{n}\cdot\vec{s}=0$, тобто

$$Am+Bn+Cp=0 \qquad (48)$$

— *умова паралельності прямої і площини.*

Якщо пряма l перпендикулярна до площини Π, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ паралельні, тому співвідношення

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \qquad (49)$$

є *умовою перпендикулярності прямої і площини.*

Приклади

1. Через задану точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ провести пряму l, перпендикулярну до площини Π, заданої рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$.

○ Оскільки пряма l перпендикулярна до площини Π, то напрямним вектором прямої l можна взяти нормальний вектор площини Π: (рис. 3.34): $\vec{s}=\vec{n}=(A;\ B;\ C)$. Тому згідно з формулою (40) рівняння прямої l має вигляд

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}. \ \bullet$$

2. Через задану точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ провести площину Π, перпендикулярну до прямої l, заданої рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}.$$

○ Нормальним вектором площини Π може бути напрямний (рис. 3.35) вектор прямої l: $\vec{n}=\vec{s}=(m;\ n;\ p)$, тому за формулою (28) рівняння площини Π має вигляд

$$m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0. \ \bullet$$

3. Через задану точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і пряму l, задану рівняннями $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$, провести площину Π.

○ Нехай $M(x;\ y;\ z)$ — довільна точка площини Π (рис. 3.36), а $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ — задана точка прямої l. Тоді вектори $\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1;\ y_0-y_1;\ z_0-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1)$ і напрямний вектор $\vec{s}=(m;\ n;\ p)$ прямої компланарні, тому рівняння площини Π має вигляд

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0. \ \bullet$$

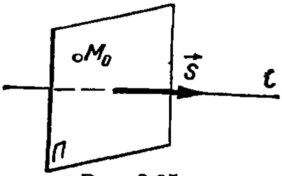


Рис. 3.35

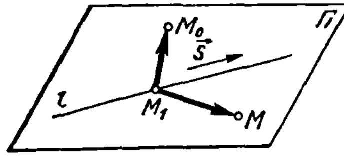


Рис. 3.36

4. Як розміщена пряма l, задана рівняннями

$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

відносно площини Π, заданої рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$?

○ Підставивши в рівняння площини Π замість x, y, z їхні значення з рівнянь прямої l, дістанемо рівняння

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0,$$

з якого можна визначити те значення параметра t, яке відповідає шуканій точці перетину. Якщо це рівняння має єдиний розв'язок, то пряма l перетинає площину Π, якщо безліч розв'язків — пряма l лежить в площині Π, якщо одержане рівняння не має розв'язків, то пряма l паралельна площині Π. ●

5. Знайти точку перетину прямих l_1 і l_2, заданих рівняннями

$$\begin{cases} x = x_1 + m_1 t; \\ y = y_1 + n_1 t; \\ z = z_1 + p_1 t \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = x_2 + m_2 t; \\ y = y_2 + n_2 t; \\ z = z_2 + p_2 t. \end{cases}$$

○ Нехай $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — точка перетину заданих прямих. При якомусь значенні t_1 параметра t її координати задовольнятимуть рівняння прямої l_1, а при певному значенні t_2 — рівняння прямої l_2, тобто

$$\begin{cases} x_0 = x_1 + m_1 t_1; \\ y_0 = y_1 + n_1 t_1; \\ z_0 = z_1 + p_1 t_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = x_2 + m_2 t_2; \\ y_0 = y_2 + n_2 t_2; \\ z_0 = z_2 + p_2 t_2. \end{cases}$$

Прирівнюючи праві частини цих систем, дістаємо систему трьох лінійних рівнянь з двома невідомими t_1 і t_2, яку можна розв'язати, наприклад, методом Гаусса. Якщо ця система має один розв'язок, то прямі перетинаються, якщо безліч розв'язків — прямі збігаються, якщо система не має розв'язків, то прямі мимобіжні. ●

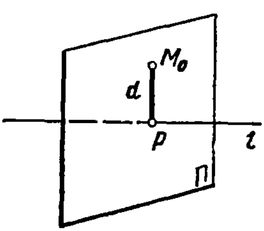


Рис. 3.37

6. Знайти відстань заданої точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ від прямої l, заданої рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

○ Відстань d від точки M_0 (рис. 3.37) до прямої l дорівнює відстані між точкою M_0 та її проекцією P на цю пряму: $d = M_0P$. Щоб знайти точку P, досить через точку M_0 провести площину Π, перпендикулярну до прямої l (приклад 3), і знайти точку її перетину з прямою l (приклад 4). ●

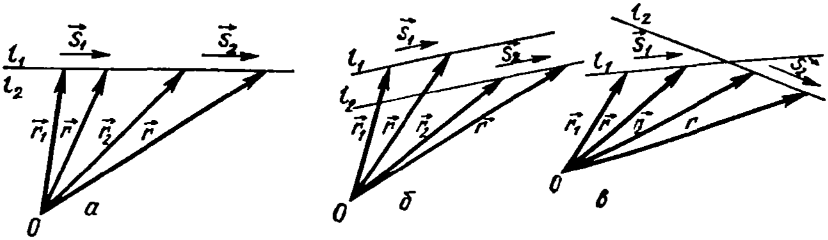


Рис. 3.38

7. Як розміщені прямі

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{s}_1 t \quad \text{і} \quad \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 t?$$

○ Прямі l_1 і l_2 збігаються, якщо вектори $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ і $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ колінеарні (рис. 3.38, *а*). Умовою паралельності даних прямих є колінеарність векторів $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ (рис. 3.38, *б*), тобто $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = 0$.

Прямі l_1 і l_2 перетинаються, якщо вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ не колінеарні, а вектори $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ і $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ компланарні (рис. 3.38, *в*), тобто $\vec{s}_1\vec{s}_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0$.

Отже, умова $\vec{s}_1\vec{s}_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \neq 0$ еквівалентна тому, що прямі l_1 і l_2 мимобіжні. ●

8. Довести, що відстань d точки M_0 (рис. 3.39) з радіусом-вектором $\vec{r}_0$ від прямої l, заданої рівнянням $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{s}t$, визначається за формулою

$$d = \frac{|\vec{s} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{s}|}.$$

○ Відстань d дорівнює одній з висот паралелограма, побудованого на векторах $\vec{s}$ і $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$. ●

9. Довести, що відстань (рис. 3.40) між мимобіжними прямими (довжина спільного перпендикуляра) l_1 і l_2, заданими рівняннями $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{s}_1 t$ і $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 t$, знаходиться за формулою

$$d = \frac{|\vec{s}_1\vec{s}_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}.$$

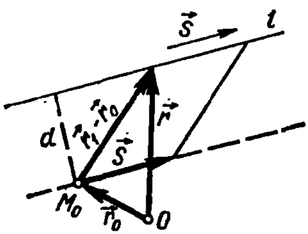


Рис. 3.39

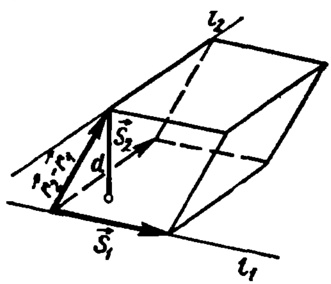


Рис. 3.40

○ Відстань d дорівнює відстані між паралельними площинами, в яких лежать прямі l_1 і l_2. Ця відстань, в свою чергу, дорівнює висоті паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ і $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$. ●

Завдання для самоконтролю

1. Скласти векторне параметричне рівняння прямої, яка задана в просторі точкою і напрямним вектором.

2. Вивести канонічні та параметричні рівняння прямої в просторі і рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.

3. Написати загальні рівняння прямої. Як перейти від загальних рівнянь прямої до канонічних?

4. Як знайти кут між двома прямими в просторі? Написати умови паралельності і перпендикулярності прямих.

5. Як знайти кут між прямою і площиною? Які умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини?

6. Довести, що умову, за якої дві прямі

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{і} \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

лежать в одній площині, можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Довести, що рівняння площини, яка проходить через пряму

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

паралельно прямій $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$, можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Довести, що рівняння площини, яка проходить через пряму

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

перпендикулярно до площини $Ax + By + Cz + D = 0$, можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m & n & p \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

9. Знайти точку, симетричну точці (4; 3; 10) відносно прямої

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}.$$

10. Знайти точку, симетричну точці (1; 5; 2) відносно площини $2x - y - z + 11 = 0$.

Відповіді. 9. (2; 9; 6). 10. (-3; 7; 4).

6.1. Поняття лінії другого порядку

Як зазначалося в п. 1.1, лінія другого порядку — це множина точок, координати яких задовольняють рівняння виду

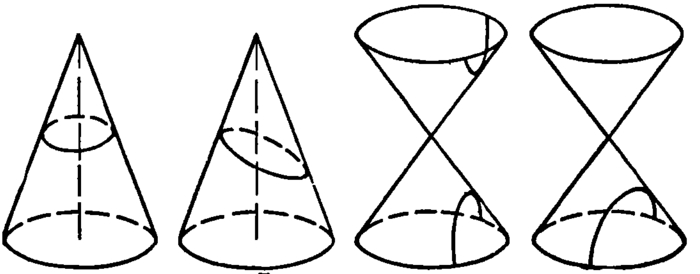
$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0, \tag{50}$$

де коефіцієнти a, b, c, d, e, f — дійсні числа, причому хоча б одне з чисел a, b, c відмінне від нуля, тобто $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Зокрема, до ліній другого порядку належать такі лінії: коло, еліпс, гіпербола і парабола. Виявляється, що множиною точок $(x; y)$ з дійсними координатами, які задовольняють рівняння (50), може бути не тільки одна з названих ліній. Рівняння (50) може визначати на площині Oxy також дві прямі, одну пряму, точку або не визначати жодної точки.

Отже, коло, еліпс, парабола і гіпербола задаються рівняннями другого степеня, але, на відміну від прямої лінії, обернене твердження неправильне.

Щоб відповісти на запитання, яке геометричне місце точок визначається рівнянням (50), треба підібрати таку систему координат, в якій це рівняння спростилось би. Відомо [1], що для всякої лінії другого порядку існує прямокутна система координат (її називають канонічною), в якій рівняння (50) має найпростіший або канонічний вигляд. Ми не займатимемося тут зведенням загального рівняння (50) до канонічного вигляду, а встановимо і дослідимо лише окремі канонічні рівняння.

Лінії другого порядку називають також конічними перерізами через те, що їх можна дістати як лінії перетину кругового конуса з площиною. Коло утворюється як лінія перетину площини, яка перпендикулярна до осі конуса і не проходить через його вершину (рис. 3.41, *а*); еліпс — лінія перетину площини, яка перетинає всі твірні конуса, не перпендикулярна до осі конуса і не проходить через його вершину (рис. 3.41, *б*); якщо перетнути двопорожнинний конус пло-



а *б* *в* *г*

Рис. 3.41

щиною, паралельною двом твірним, дістанемо гіперболу (3.41, *в*), а одній твірній — параболу (рис. 3.41, *г*).

Лінії другого порядку широко застосовуються в науці і техніці.

Приклади

1. Планети Сонячної системи рухаються по еліпсах, що мають спільний фокус, в якому розташовано Сонце.

2. Якщо у фокусі параболи розмістити джерело світла, то промені, відбившись від параболи, підуть паралельно її осі. На цій властивості грунтується побудова прожектора.

3. У динаміці космічних польотів використовуються поняття трьох космічних швидкостей: $v_1 = 7{,}9$ км/с, $v_2 = 11{,}2$ км/с, $v_3 = 16{,}7$ км/с. Нехай v_0 — початкова швидкість, з якою штучний супутник запускається з поверхні Землі. При недостатній початковій швидкості $v_0 < v_1$ супутник обертатися навколо Землі не буде. Якщо $v_0 = v_1$, то супутник буде обертатися по круговій орбіті, центр якої знаходиться в центрі Землі. Якщо $v_1 < v_0 < v_2$, то обертання супутника відбуватиметься по еліпсу, причому центр Землі знаходитиметься в одному з фокусів еліпса.

Прн $v_2 \leqslant v_0 < v_3$ супутник долає земне тяжіння і стає штучним супутником Сонця, рухаючись при цьому по параболі (при $v_0 = v_2$) або по гіперболі (при $v_2 < v_0 < v_3$) відносно Землі. Якщо $v_0 \geqslant v_3$, то супутник спочатку долає земне, а потім і сонячне тяжіння і залишає Сонячну систему.

4. Рух матеріальної точки під дією центрального поля сили тяжіння відбувається по одній з ліній другого порядку.

6.2. Коло

Колом називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки площини (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу).

Щоб вивести рівняння кола, використаємо прямокутну систему координат Oxy; позначимо через O_1 $(a;\ b)$ — центр кола, через M $(x;\ y)$ — довільну точку площини і через R — радіус кола (рис. 3.42).

Точка M лежить на колі тоді і лише тоді, коли $O_1M = R$ або

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R. \tag{51}$$

Рівняння (51) і є шуканим рівнянням кола. Але зручніше користуватись рівнянням, яке дістанемо при піднесенні обох частин рівняння (51) до квадрата:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \tag{52}$$

Оскільки рівняння (52) випливає з рівняння (51), то координати всякої точки, які задовольняють рівняння (51), задовольнятимуть також рівняння (52). Проте при піднесенні будь-якого рівняння до квадрата, як відомо, можуть з'явитися сторонні корені, тобто рівняння (51) і (52) можуть виявитися нееквівалентними. Покажемо, що в цьому випадку так не буде. Справді, добувши корінь з обох частин рівняння (52), дістанемо $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \pm R$. Але в правій частині знак мінус треба відкинути, бо відстань $R > 0$. Отже, рівняння (51) і (52) еквівалентні, тобто визначають одну й ту саму криву — коло.

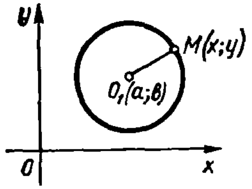


Рис. 3.42

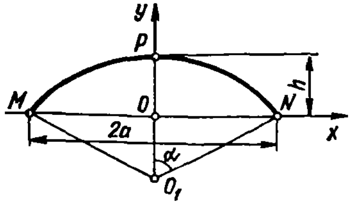


Рис. 3.43

Якщо центр кола міститься в початку координат, то $a = b = 0$ і рівняння (52) набирає вигляду

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (53)$$

Рівняння (53) називається *канонічним рівнянням кола*. Якщо в рівнянні розкрити дужки, то дістанемо *загальне рівняння кола*

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0, \qquad (54)$$

де $A = -2a$, $B = -2b$, $C = a^2 + b^2 - R^2$. Отже, коло — лінія другого порядку.

Рівняння кола має такі *властивості*.

1^0. *Коефіцієнти при x^2 і y^2 рівні між собою.*

2^0. *У рівнянні відсутній член з добутком xy.*

Обернене твердження неправильне: не всяке рівняння другого степеня, яке задовольняє умови 1^0 і 2^0, є рівнянням кола, тобто не всяке рівняння виду (54) визначає коло.

Приклади

1. Написати рівняння кола, якщо точки A (—1; 4) і B (3; 2) є кінцями його діаметра.

○ Нехай O_1 (a; b) — центр кола. Тоді $AO_1 = O_1B$, тому за формулами (25) (гл. 2) маємо

$$a = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1, \quad b = 3.$$

Оскільки радіус кола $R = AO_1 = \sqrt{5}$, то за формулою (52) дістаємо шукане рівняння: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$. ●

2. Знайти центр і радіус кола $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$.

○ Згрупуємо доданки із зміною x та змінною y і доповнимо одержані вирази до повних квадратів:

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y - 23 = 0,$$

або

$$(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) - 9 - 23 = 0,$$

звідки

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 36.$$

Отже, точка (—2; 3) — центр кола, а $R = 6$ — його радіус. ●

3. Показати, що рівняння $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 19 = 0$ не визначає ніякого геометричного об'єкта.

○ Перетворимо рівняння

$$(x^2+6x+9)-9+(y^2-6y+9)-9+19=0$$

або

$$(x+3)^2+(y-3)^2=-1.$$

Оскільки сума невід'ємних чисел не може бути від'ємним числом, то задане рівняння не задовольняють координати жодної точки площини Oxy. ●

4. Арка має форму дуги кола. Знайти довжину l дуги арки, якщо її проліт і підйом відповідно дорівнюють $2a$ і b. (Підйом арки дорівнює відношенню її висоти до прольоту.)

○ Введемо систему координат Oxy так, як показано на рис. 3.43, де арка MPN — дуга кола, $MO=ON$, $OP=h=2ab$. В обраній системі координат точки M, P і N мають координати M $(-a;\ 0)$, P $(0;\ 2ab)$, N $(a;\ 0)$. Нехай O_1 $(0;\ y_0)$ і R відповідно центр і радіус кола, тоді його рівняння має вигляд

$$x^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

Оскільки коло проходить через точки P і N, то

$$(2ab-y_0)^2=R^2;\quad a^2+y_0^2=R^2,$$

звідки

$$R=\frac{(4b^2+1)\,a}{4b};\quad |y_0|=\frac{(4b^2-1)\,a}{4b}.$$

Знайдемо центральний кут $2\alpha=\angle MO_1N$, на який спирається дуга арки. Маємо

$$\cos\alpha=\frac{|y_0|}{R}=\frac{|4b^2-1|}{4b^2+1},\ \text{тому}\ 2\alpha=2\arccos\frac{|4b^2-1|}{4b^2+1},$$

отже,

$$l=2R\alpha=\frac{(4b^2+1)\,a}{2b}\arccos\frac{|4b^2-1|}{4b^2+1}.\ ●$$

6.3. Еліпс

Еліпсом називають множину всіх точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок цієї площини, які називаються фокусами, є величина стала і більша від відстані між фокусами. Щоб вивести рівняння еліпса, візьмемо на площині дві точки F_1 і F_2 — фокуси еліпса і розмістимо прямокутну систему координат так, щоб вісь Ox проходила через фокуси, а початок координат ділив відрізок F_1F_2 навпіл (рис. 3.44).

Позначимо відстань між фокусами, яку називають фокальною, через $2c$: $F_1F_2=2c$, а суму відстаней від довільної точки еліпса до фокусів — через $2a$. Тоді фокуси мають такі координати: F_1 $(-c;\ 0)$ і F_2 $(c;\ 0)$. За означенням $2a>2c$, тобто $a>c$.

Нехай M $(x;\ y)$ — довільна точка площини. Ця точка лежить на еліпсі тоді, коли $F_1M+F_2M=2a$ або

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{55}$$

Це, по суті, і є *рівняння еліпса*. Щоб спростити його, перенесемо один радикал у праву частину, піднесемо обидві частини до квадрата і зведемо подібні. Матимемо

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Піднісши обидві частини цього рівняння ще раз до квадрата та спростивши вираз, дістанемо $x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$.

Оскільки $a>c$, то $a^2-c^2>0$, тому можна позначити

$$a^2-c^2=b^2. \tag{56}$$

Тоді рівняння (55) набере вигляду

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$$

або

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{57}$$

Можна довести, що рівняння (55) і (57) еквівалентні. Рівняння (57) називається *канонічним рівнянням еліпса.* Отже, еліпс — крива другого порядку.

Встановимо деякі *властивості* і дослідимо форму еліпса.

1°. *Рівняння* (57) *містить змінні x та y лише в парних степенях, тому, якщо точка* (x; y) *належить еліпсу, то йому також належать точки* ($-x$; y), (x; $-y$) *і* ($-x$; $-y$). Тому еліпс симетричний відносно осей Ox та Oy, а також відносно точки O (0; 0), яку називають *центром еліпса.* Отже, для встановлення форми еліпса достатньо дослідити ту його частину, яка розміщена в одному, наприклад в першому, координатному куті.

2°. *В першому координатному куті* $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, *тому з рівності* (57) *маємо*

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \tag{58}$$

звідки випливає, що точки A_1 (a; 0) *та* B_0 (0; b) *належать еліпсу, причому, якщо x збільшується від 0 до a, то y зменшується від b до 0. Крім того, не існує точок еліпса, у яких $x>a$, бо вираз* (58) *при $x>a$ не має змісту.* Таким чином, частина еліпса, розміщена в першому

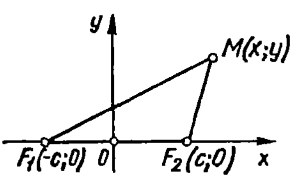


Рис. 3.44

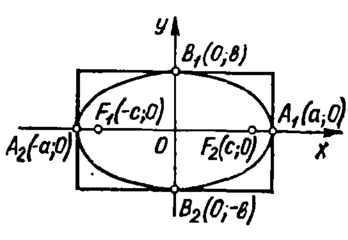


Рис. 3.45

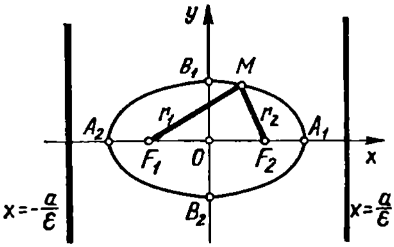


Рис. 3.46

координатному куті, має форму дуги A_1B_1 (рис. 3.45). Відобразивши цю дугу симетрично відносно осей Ox та Oy, дістанемо весь еліпс. Він вміщується в прямокутник із сторонами $2a$ і $2b$. Сторони прямокутника дотикаються до еліпса в точках перетину його з осями Ox і Oy.

Еліпс перетинає осі координат в точках A_1 $(a; 0)$, A_2 $(-a;\ 0)$, B_1 $(0; b)$, B_2 $(0; -b)$. Ці точки називаються *вершинами еліпса.*

Величини $A_1A_2 = 2a$ та $B_1B_2 = 2b$ називаються відповідно *великою* та *малою осями еліпса.*

Таким чином, з властивостей 1° і 2° випливає, що всякий еліпс має *дві взаємно перпендикулярні осі симетрії (головні осі еліпса)* і *центр симетрії (центр еліпса)*. Точки, в яких еліпс перетинає головні осі, обмежують на головних осях відрізки довжинами $2a$ і $2b$, які називаються *великою і малою осями еліпса,* а числа a та b — *великою* і *малою півосями еліпса.* Весь еліпс вміщується в прямокутник із сторонами $2a$ і $2b$. Сторони прямокутника дотикаються до еліпса в його вершинах.

3°. *Якщо $a = b$, то рівняння* (57) *набирає вигляду*

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

тобто дістаємо рівняння кола. Отже, коло є окремим випадком еліпса. З формули (56) випливає, що при $a = b$ значення $c = 0$, тобто коло — це еліпс, у якого фокуси збігаються з його центром.

Міра відхилення еліпса від кола характеризується величиною ε, яка називається *ексцентриситетом еліпса* і дорівнює відношенню половини його фокальної відстані до довжини більшої півосі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \tag{59}$$

причому $0 \leqslant \varepsilon < 1$, оскільки $0 \leqslant c < a$.

З формул (56) і (59) дістаємо

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Отже, якщо $\varepsilon = 0$, то $b = a$, тобто еліпс перетворюється в коло; якщо ε наближається до одиниці, то відношення осей b/a зменшується, тобто еліпс все більше розтягується вздовж осі Ox.

4°. *Нехай M $(x;\ y)$ — довільна точка еліпса з фокусами F_1 і F_2* (рис. 3.46). *Відстані $F_1M = r_1$ і $F_2M = r_2$ називаються фокальними* *радіусами точки М. Очевидно, $r_1 + r_2 = 2a$. Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ називаються директрисами еліпса.*

Відношення фокальних радіусів довільної точки еліпса до відстаней цієї точки від відповідних директрис є величина стала і дорівнює ексцентриситету еліпса, тобто

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon. \tag{60}$$

Приклади

1. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $M_1 (3; 2)$ і $M_2 \left(4; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, якщо фокуси його лежать на осі Ox симетрично початку координат.

○ За умовою координати заданих точок задовольняють рівняння (57):

$$\frac{16}{a^2} + \frac{8}{9b^2} = 1, \quad \frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо $a^2 = 18$ і $b^2 = 8$. Отже, шукане рівняння має вигляд

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1. \ \bullet$$

2. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі Ox симетрично початку координат, якщо відстань між фокусами дорівнює 14, а ексцентриситет дорівнює 7/9.

○ Оскільки $2c = 14$, то $c = 7$. З формул (59) і (56) дістаємо, що $a = 9$ і $b^2 = 32$. Отже, шукане рівняння має вигляд

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{32} = 1. \ \bullet$$

3. Довести, що полярне рівняння $\rho = \dfrac{16}{5 - 3\cos\varphi}$ визначає еліпс. Знайти півосі цього еліпса.

○ Використовуючи формули (7), (8) (гл. 2), перейдемо від заданого рівняння до рівняння в прямокутній системі координат:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{16}{5 - 3\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}.$$

Далі маємо

$$5\sqrt{x^2 + y^2} - 3x = 16, \quad 25(x^2 + y^2) = 256 + 96x + 9x^2,$$

$$16(x - 3)^2 + 25y^2 = 400, \quad \frac{(x-3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Враховуючи формули паралельного переносу (гл. 2, п. 2.4), робимо висновок, що останнє рівняння визначає еліпс з центром у точці (3; 0) і півосями $a = 5$ і $b = 4$. ●

6.4. Гіпербола

Гіперболою називається множина всіх точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох даних точок цієї площини, що називаються фокусами, є величина стала і менша відстані між фокусами.

Позначимо через F_1 і F_2 фокуси гіперболи, відстань між ними — через $2c$, а модуль різниці відстаней від довільної точки гіперболи до фокусів — через $2a$. За означенням $a < c$. Щоб вивести рівняння гіперболи, візьмемо на площині прямокутну систему координат Oxy так, щоб вісь Ox проходила через фокуси, а початок координат поділив відрізок F_1F_2 навпіл (рис. 3.44). Точка $M(x;\ y)$ площини лежить на гіперболі тоді і лише тоді, коли $|MF_1 - MF_2| = 2a$ або

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a.$$

Виконавши ті самі перетворення, що й при виведенні рівняння еліпса, дістанемо канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{61}$$

де

$$b^2 = c^2 - a^2. \tag{62}$$

Отже, гіпербола є лінією другого порядку.

Встановимо деякі *властивості* і дослідимо *форму гіперболи.*

1^0. *Гіпербола симетрична осям Ox, Oy і початку координат.*

2^0. *Для частини гіперболи, яка лежить у першому координатному куті, з рівняння* (61) *дістанемо*

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{63}$$

З рівності (63) випливає, що $x \geqslant a$.

Точка $A_1(a;\ 0)$ належить гіперболі і є точкою перетину гіперболи з віссю Ox. *Гіпербола не перетинає вісь Oy.* Якщо $x > a$, то $y > 0$, причому якщо x збільшується, то y також збільшується, тобто якщо $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$.

Покажемо, що, *віддаляючись у нескінченність, змінна точка $M(x;\ y)$ гіперболи необмежено наближається до прямої*

$$y = \frac{b}{a}x. \tag{64}$$

Така пряма називається *асимптотою гіперболи*. Для цього візьмемо точку N, що лежить на асимптоті і має ту саму абсцису x, що й точка $M(x;\ y)$, і знайдемо різницю MN між ординатами ліній (63) і (64) (рис. 3.47):

$$MN = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2-a^2}\right) =$$

$$= \frac{b}{a}\,\frac{\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{x+\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Звідси, якщо $x \to +\infty$, то знаменник теж прямує до $+\infty$, а $MN \to 0$, бо чисельник є сталою величиною. Отже, точки M гіперболи, віддаляючись від точки A_1 (a; 0) у нескінченність, необмежено наближаються до прямої (64), тобто ця пряма є асимптотою.

Таким чином, частина гіперболи, розміщена у першому координатному куті, має вигляд дуги, яка показана на рис. 3.47. Відобразивши цю дугу симетрично відносно координатних осей, дістанемо вигляд всієї гіперболи.

Гіпербола складається з двох віток (лівої і правої) і має дві асимптоти:

$$y = \frac{b}{a} x, \quad y = -\frac{b}{a} x.$$

Осі симетрії називаються *осями гіперболи*, а точка перетину осей — її центром. Вісь Ox перетинає гіперболу в двох точках A_1 (a; 0) і A_2 (—a; 0), які називаються *вершинами гіперболи*. Ця вісь називається *дійсною віссю гіперболи*, а вісь, яка не має спільних точок з гіперболою,— *уявною віссю*.

Дійсною віссю називають також відрізок A_1A_2, який сполучає вершини гіперболи і його довжину $A_1A_2 = 2a$. Відрізок B_1B_2, який сполучає точки B_1 (0; b) і B_2 (0; —b), а також його довжину, називають *уявною віссю*. Величини a і b відповідно називаються *дійсною* і *уявною півосями гіперболи*.

Прямокутник із сторонами $2a$ і $2b$ називається *основним прямокутником гіперболи*.

При побудові гіперболи (61) доцільно спочатку побудувати основний прямокутник C_1D_1DC (рис. 3.48), провести прямі, що проходять через протилежні вершини цього прямокутника — асимптоти гіперболи і визначити вершини A_1 і A_2 гіперболи.

Рівняння

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad (65)$$

також визначає гіперболу, яка називається *спряженою до гіперболи* (61). Гіпербола (65) показана на рис. 3.48 штриховою лінією. Верши-

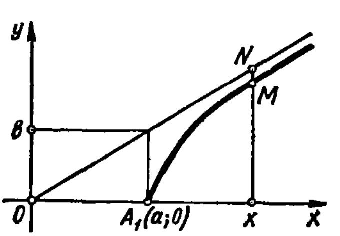


Рис. 3.47

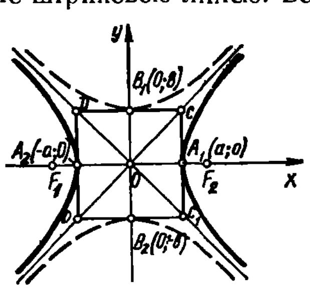


Рис. 3.48

ни цієї гіперболи лежать в точках B_1 (0; b) і B_2 (0; $-b$), а її асимптоти збігаються з асимптотами гіперболи (61).

Гіпербола з рівними півосями ($a = b$) називається *рівносторонньою,* її канонічне рівняння має вигляд

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Основним прямокутником рівносторонньої гіперболи є квадрат із стороною $2a$, а її асимптотами — бісектриси координатних кутів.

3⁰. *Ексцентриситет гіперболи визначається як відношення половини фокальної відстані до довжини її дійсної півосі:*

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{66}$$

Оскільки $c > a$, то $\varepsilon > 1$. Крім того, з формул (62) і (66) випливає, що

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Отже, ексцентриситет гіперболи характеризує її форму: чим більший ексцентриситет, тим більше відношення $\frac{b}{a}$, тобто тим більше основний прямокутник розтягується в напрямі осі Oy, а гіпербола відхиляється від осі Ox; чим ближче ексцентриситет до одиниці, тим більше основний прямокутник розтягується в напрямі осі Ox, а гіпербола наближається до цієї осі.

4⁰. *Прямі* $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, *де* a — *дійсна піввісь гіперболи, а* ε — *її ексцентриситет, називаються директрисами гіперболи.* Директриси гіперболи мають ту саму властивість (60), що й директриси еліпса.

Приклади

1. Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої розміщено на осі Ox симетрично початку координат, якщо дійсна вісь дорівнює 6, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

○ Оскільки $2a = 6$, то $a = 3$. З формул (62) і (66) знаходимо, що $b = 4$. Шукане рівняння має вигляд $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. ●

2. Знайти відстань фокуса гіперболи $x^2 - 8y^2 = 8$ від її асимптоти.

○ Запишемо канонічне рівняння даної гіперболи:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{1} = 1,$$

звідки $a = \sqrt{8}$, $b = 1$ — півосі гіперболи, тому згідно з формулою (64) рівняння асимптоти має вигляд $x - y\sqrt{8} = 0$.

З формули (62) знаходимо, що $c = 3$, тому F_1 (—3; 0) і F_2 (3; 0) — фокуси гіперболи.

За формулою (27) обчислюємо відстань d від фокуса F_1 (або, що те саме, фокуса F_2) до знайденої асимптоти: $d = 1$. ●

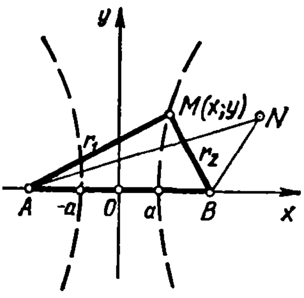


Рис. 3.49

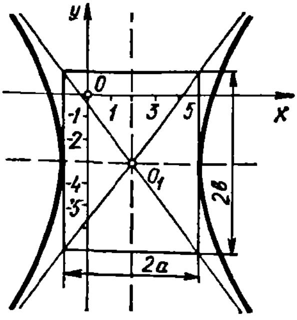


Рис. 3.50

3. На прямолінійному відрізку залізниці розташовано станції A і B, відстань між якими l. Від заводу N йдуть прямі автомагістралі NA і NB, причому $NB < NA$. Вантаж із заводу N на станцію A можна транспортувати або по автомагістралі NB, а звідти залізницею (перший шлях), або безпосередньо по автомагістралі NA (другий шлях). При цьому тариф (вартість перевезення 1 т вантажу на 1 км) залізницею і автотранспортом становить відповідно m і n $(n > m)$, а розвантаження-завантаження однієї тонни коштує k. Визначити зону впливу станції B, тобто множину точок, з яких дешевше доставити вантаж в A першим шляхом, ніж другим.

○ Введемо систему координат Oxy так, як показано на рис. 3.49, де $AO = OB$. Знайдемо рівняння множини точок $M(x; y)$, для яких обидва шляхи «однаково вигідні», тобто таких, що вартість доставки вантажу $S_1 = r_2 n + k + lm$ першим шляхом дорівнює вартості $S_2 = r_1 n$ доставки вантажу другим шляхом

$$r_2 n + k + lm = r_1 n, \quad (AM = r_1 \;\; BM = r_2).$$

З цієї умови дістаємо

$$r_2 - r_1 = \frac{k + lm}{n} = \mathrm{const}.$$

Отже, множиною точок, в яких $S_1 = S_2$, є права вітка гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $a = \dfrac{lm + k}{2n}$, $b = \dfrac{1}{2}\sqrt{l^2 - 4a^2}$. Для точок площини, які лежать справа від цієї вітки, $S_1 < S_2$, тобто вигіднішим є перший шлях, а для точок, які лежать зліва,— другий шлях.

Таким чином, права вітка гіперболи обмежує зону впливу станції B, а ліва — станції A. ●

4. Встановити, що рівняння $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$ визначає гіперболу. Знайти її центр і півосі.

○ Виділимо повні квадрати відносно x та y:

$$16(x^2 - 4x) - 9(y^2 + 6y) - 161 = 0;$$

$$16(x^2 - 4x + 4 - 4) - 9(y^2 + 6y + 9 - 9) - 161 = 0;$$

$$16(x - 2)^2 - 64 - 9(y + 3)^2 + 81 - 161 = 0;$$

$$16(x - 2)^2 - 9(y + 3)^2 = 144; \quad \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1.$$

Врахувавши формули паралельного переносу, дійдемо висновку, що задане рівняння визначає гіперболу з центром у точці O_1 (2; —3) і півосями $a = 3$; $b = 4$ (рис. 3.50). ●

6.5. Парабола

Параболою називається множина всіх точок площини, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від даної точки, яка називається фокусом, і від даної прямої, яка називається директрисою і не проходить через фокус.

Знайдемо рівняння параболи. Нехай на площині задані фокус F і директриса, причому відстань фокуса від директриси дорівнює p. Візьмемо прямокутну систему координат Oxy так, щоб вісь Ox проходила через фокус, перпендикулярно до директриси, а вісь Oy ділила відстань між фокусом F і директрисою навпіл (рис. 3.51). Тоді фокус має координати $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а рівняння директриси має вигляд $x = -\frac{p}{2}$. Нехай $M(x; y)$ — довільна точка площини, а відрізки MB і MF — відстані цієї точки від директриси і фокуса. Точка M тоді лежить на параболі, коли $MB = MF$ або

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \tag{67}$$

Це і є рівняння параболи. Щоб спростити його, піднесемо обидві частини рівності (67) до квадрата:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

тобто

$$y^2 = 2px. \tag{68}$$

Можна довести, що рівняння (67) і (68) рівносильні.

Рівняння (68) називається *канонічним рівнянням параболи*. Отже, парабола є лінія другого порядку.

Дослідимо форму параболи. Оскільки рівняння (68) містить змінну y в парному степені, то парабола симетрична відносно осі Ox. Тому достатньо розглянути лише ту її частину, яка лежить у верхній півплощині. Для цієї частини $y \geqslant 0$, тому з рівняння (68) дістанемо

$$y = \sqrt{2px}. \tag{69}$$

З цієї рівності випливає, що парабола розміщена справа від осі Oy, тому що при $x < 0$ вираз (69) не має змісту. Значення $x = 0$, $y = 0$ задовольняють рівняння (69), тобто парабола проходить через початок координат. Із зростанням x значення y також зростає. Отже, змінна точка $M(x; y)$ параболи, виходячи з початку координат із зростанням x, рухається по ній вправо і вверх.

Виконавши симетричне відображення розглянутої частини параболи відносно осі Ox, матимемо всю параболу (рис. 3.52).

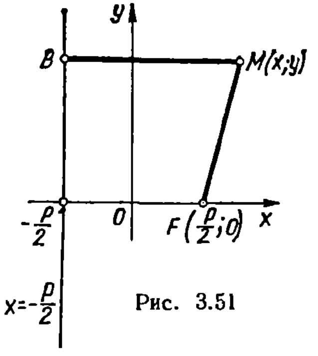


Рис. 3.51

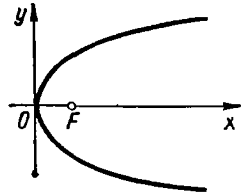


Рис. 3.52

Вісь симетрії параболи називається її *віссю*; точка перетину осі з параболою — *вершиною* параболи; число, яке дорівнює відстані фокуса від директриси,— *параметром* параболи. Віссю параболи, заданої рівнянням (68), є вісь Ox, вершиною — точка O (0; 0) і параметром — число p.

З'ясуємо вплив параметра p на форму параболи. Якщо в рівнянні (68) покласти $x = \frac{p}{2}$, то відповідні значення ординати $y = \pm p$, тобто маємо на параболі дві симетричні відносно осі Ox точки $\left(\frac{p}{2};\ p\right)$ і $\left(\frac{p}{2};\ -p\right)$. Відстань між цими точками дорівнює $2p$ і збільшується із збільшенням p. Отже, параметр p характеризує «ширину» області, яку обмежує парабола.

Рівняння $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$, у яких параметр $p > 0$ визначають параболи, зображені на рис. 3.53.

Зауваження. Використовуючи властивість 4^0 еліпса та гіперболи і означення параболи, можна дати таке загальне означення кривої другого порядку (крім кола): множина точок, для яких відношення ε відстані до фокуса і до відповідної директриси є величина стала,— це еліпс (при $0 < \varepsilon < 1$), або парабола (при $\varepsilon = 1$) або гіпербола (при $\varepsilon > 1$).

Приклади

1. Дослідити взаємне розміщення параболи $y^2 = x$ і прямої $x + y - 2 = 0$.

○ Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} y^2 = x; \\ x + y - 2 = 0, \end{cases}$ знаходимо розв'язки (4; —2) і (1; 1). Це означає, що пряма перетинає параболу в точках M_1 (4; —2), M_2 (1; 1). ●

2. В параболу $x^2 = y\sqrt{3}$ вписано рівносторонній трикутник так, що одна з вершин його збігається з вершиною параболи. Знайти сторону трикутника.

○ Нехай точка A $(x_0;\ y_0)$ — одна з вершин трикутника. Тоді іншими його вершинами будуть точки B $(-x_0;\ y_0)$ і O (0; 0). Оскільки трикутник рівносторонній, то $AB = AO = BO$, звідки $2x_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Розв'язуючи це рівняння разом з рів-

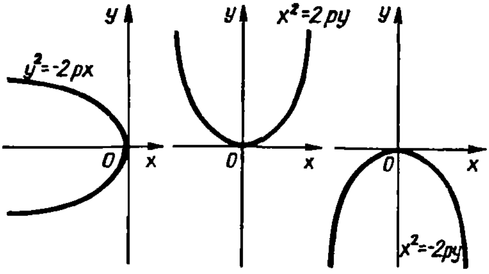


Рис. 3.53

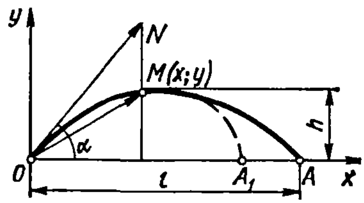


Рис. 3.54

нянням $x_0^2 = y_0 \sqrt{3}$, знаходимо $x_0 = 3$. Отже, сторона трикутника дорівнює $2x_0 = 6$. ●

3. Струмінь води витікає з конічної насадки з швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Нехтуючи опором повітря, скласти рівняння струменя відносно прямокутної системи координат Oxy, вважаючи, що струмінь міститься в площині Oxy, точка O збігається з вихідним отвором насадки, а вісь Ox проходить горизонтально в напрямі польоту струменя (рис. 3.54). Знайти дальність польоту l, висоту підйому h і кут, при якому дальність польоту найбільша.

○ Виділимо в струмені води частинку одиничної маси. Якби на неї не діяла сила тяжіння, то за час t вона пройшла б шлях, який дорівнює модулю вектора $\overrightarrow{ON} = (v_0 t \cos \alpha;\ v_0 t \sin \alpha)$, де v_0 — початкова швидкість частинки.

Під дією сили тяжіння частинка за той же час t пройде шлях, що дорівнює довжині дуги OM. Оскільки сила тяжіння напрямлена вертикально вниз, то радіус-вектор частинки має вигляд $\overrightarrow{OM} = (x;\ y) = \left(v_0 t \cos \alpha;\ v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}\right)$, де g — прискорення сили тяжіння. Рівняння

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha; \\ y = v_0 t \sin \alpha - \dfrac{gt^2}{2}, \end{cases}$$

— це параметричні рівняння траєкторії польоту частинки. Виключивши параметр t, дістанемо $y = ax - bx^2$, де

$$a = \operatorname{tg} \alpha; \quad b = \frac{g}{2v_0^2} \sec^2 \alpha.$$

Таким чином, траєкторія руху частинки, а отже, і весь струмінь мають форму параболи. Дальність польоту струменя дістанемо з його рівняння при $y = 0$, а висоту підйому — при $x = \frac{l}{2}$:

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \quad h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Дальність польоту найбільша, якщо $\alpha = 45°$. ●

6.6. Полярні та параметричні рівняння кривих другого порядку

1. Нехай в прямокутній системі координат рівнянням (53) задано

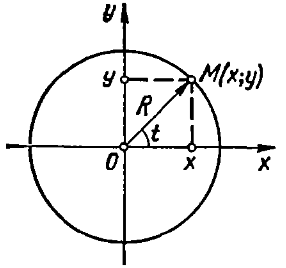


Рис. 3.55

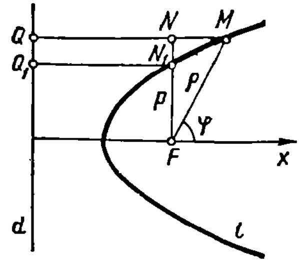


Рис. 3.56

коло. Якщо ввести полярні координати ρ і φ так, як указано в п. 2.3 (гл. 2), то рівняння (53) запишеться у вигляді

$$(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = R^2; \text{ або } \rho = R. \tag{70}$$

Це і є *полярне рівняння кола* з центром у полюсі і радіусом R. Щоб вивести параметричні рівняння кола, позначимо через t кут між віссю Ox і радіусом-вектором $\overrightarrow{OM}$ довільної точки M $(x;\ y)$ кола (рис. 3.55). Точка M $(x;\ y)$ лежить на колі тоді і тільки тоді, коли

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t; \quad 0 \leqslant t < 2\pi. \tag{71}$$

Рівняння (71) називаються *параметричними рівняннями кола*.

2. Розглянемо тепер криву l, яка може бути еліпсом, параболою або правою віткою гіперболи (рис. 3.56).

Нехай F — фокус кривої l (якщо l — еліпс, то F — його лівий фокус), d — відповідна цьому фокусу директриса, $2p$ — довжина хорди, яка проходить через фокус паралельно директрисі, і ε — ексцентриситет кривої l. Введемо полярну систему координат так, щоб її полюс збігався з F, а полярна вісь Fx була перпендикулярною до директриси d і напрямлена в бік, протилежний від неї. Тоді згідно з загальним означенням кривої другого порядку (зауваження п. 6.5) маємо

$$\frac{MF}{MQ} = \varepsilon. \tag{72}$$

Оскільки $MF = \rho$, то

$$\frac{N_1F}{Q_1N_1} = \frac{p}{Q_1N_1} = \varepsilon, \quad MQ = Q_1N_1 + MN = \frac{p}{\varepsilon} + \rho\cos\varphi$$

і з рівності (72) дістанемо

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}. \tag{73}$$

Це і є *загальне полярне рівняння кривої* l. При $0 < \varepsilon < 1$ рівняння (73) визначає еліпс, при $\varepsilon = 1$ — параболу, а при $\varepsilon > 1$ — праву вітку

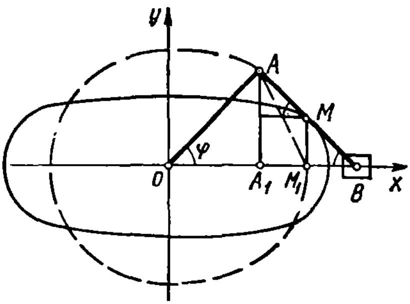


Рис. 3.57

гіперболи. Рівняння лівої вітки гіперболи в обраній полярній системі має вигляд

$$\rho = \frac{-p}{1+\varepsilon\cos\varphi}.$$

Число p в полярних рівняннях називається полярним параметром кривої. Для того щоб виразити p через параметри канонічних рівнянь (57), (61) і (68) кривої l, досить в це рівняння підставити координати точки $N_1: x = c,\ y = p$ — для еліпса і гіперболи і $x = \frac{p}{2},\ y = p$ — для параболи. Тоді для еліпса і гіперболи маємо $p = \frac{b^2}{a}$, а для параболи полярний параметр дорівнює параметру p її канонічного рівняння (68). Рівняння (73) застосовується в механіці.

Приклад

Яку криву визначає полярне рівняння $\rho = \dfrac{8}{2-\sqrt{2}\cos\varphi}$?

○ Привівши дане рівняння до вигляду $\rho = \dfrac{4}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi}$, дістанемо: $p = 4,\ \varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$. Отже, задана лінія є еліпс. Знайдемо його півосі. Оскільки, $p = 4 = \frac{b^2}{a^2}$ і $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{2}$, то $a = 8$ і $b = 4\sqrt{2}$. ●

Наведемо без доведення *параметричні рівняння еліпса і гіперболи* [9]. Параметричні рівняння

$$x = x_0 + a\cos t;\quad y = y_0 + b\sin t,\quad (a > 0,\ b > 0,\ 0 \leqslant t < 2\pi)$$

задають еліпс з центром у точці $(x_0;\ y_0)$ і з півосями a і b.

Параметричні рівняння гіперболи з центром у точці $(x_0;\ y_0)$ і півосями a і b мають вигляд

$$x = x_0 + a\,\mathrm{ch}\,t;\quad y = y_0 + b\,\mathrm{sh}\,t,\quad (a > 0,\ b > 0,\ -\infty < t < +\infty),$$

де ch t і sh t — гіперболічний косинус і гіперболічний синус (гл. 5, п. 2.4).

Приклад

Кривошип OA (рис. 3.57) обертається навколо точки O із сталою кутовою швидкістю ω і приводить у рух повзун B за допомогою шатуна AB, причому $OA = AB = a$. Скласти рівняння траєкторії середньої точки M шатуна.

○ Нехай $M(x; y)$ — середня точка шатуна AB, $\varphi = \angle AOB$, тоді

$$x = OA_1 + A_1M_1 = OA\cos\varphi + \frac{1}{2}OA\cos\varphi = \frac{3}{2}a\cos\varphi;$$

$$y = MM_1 = MB\sin\varphi = \frac{1}{2}a\sin\varphi.$$

Оскільки $\varphi = \omega t$, то

$$x = \frac{3}{2}a\cos\omega t; \quad y = \frac{1}{2}a\sin\omega t,$$

де t — час. Отже, траєкторією середньої точки шатуна є еліпс. Виключивши параметр t, дістанемо його канонічне рівняння:

$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{4}} = 1. \quad \bullet$$

Завдання для самоконтролю

1. Що називається лінією другого порядку?
2. Що називається колом? Вивести рівняння кола з центром у точці $M_0(x_0; y_0)$ і радіусом R.
3. Вивести полярне і параметричні рівняння кола.
4. Що називається еліпсом? Вивести канонічне рівняння еліпса.
5. Дослідити форму еліпса, заданого канонічним рівнянням, і побудувати його.
6. Записати полярне і параметричні рівняння еліпса.
7. Що називається гіперболою? Вивести канонічне рівняння гіперболи.
8. Дослідити форму гіперболи, заданої канонічним рівнянням, і побудувати її.
9. Записати полярні і параметричні рівняння гіперболи.
10. Вивести рівняння асимптот гіперболи.
11. Що називається фокальним радіусом, ексцентриситетом і директрисою еліпса, гіперболи?
12. Що називається параболою? Вивести канонічне рівняння параболи і дослідити її форму.
13. Записати полярне рівняння параболи. Чому дорівнює полярний параметр в полярних рівняннях еліпса, гіперболи і параболи?
14. У чому полягає характерна особливість директрис еліпса, гіперболи і параболи? Дати загальне означення цих кривих.
15. Знайти радіус і координати центра кола

$$2x^2 + 2y^2 - 12x + y + 3 = 0.$$

16. Скласти рівняння кола з центром у точці (2; 2), яке дотикається до прямої $3x + y - 18 = 0$.
17. Знайти довжину хорди еліпса $4x^2 + 9y^2 = 36$, яка проходить через його фокус перпендикулярно до великої осі.
18. Обчислити ексцентриситет еліпса, якщо відстань між його фокусами дорівнює середньому арифметичному довжин осей.
19. Скласти канонічне рівняння гіперболи, яка проходить через точку $\left(-\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$ і має асимптоти $y = \pm 2x$.
20. Скласти канонічне рівняння параболи, у якої відстань від фокуса до директриси дорівнює 12.

21. Яку крнву визиачає полярне рівняиия $\rho = \dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{\varphi}{2}}$?

Відповіді. 15. 2; (0; −2). 16. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 10$. 17. $\frac{8}{3}$. 18. 0,8. 19. $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$. 20. $y^2 = 24x$. 21. $y^2 = 4(x+1)$.

§ 7. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

7.1. Поняття поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина точок, прямокутні координати яких задовольняють рівняння виду

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz + l = 0, \quad (74)$$

де принаймні один з коефіцієнтів a, b, c, d, e, f відмінний від нуля.

Рівняння (74) називається *загальним рівнянням поверхні другого порядку.*

Поверхня другого порядку як геометричний об'єкт не змінюється, якщо від заданої прямокутної системи координат перейти до іншої. При цьому рівняння (74) і рівняння, знайдене після перетворення координат, будуть еквівалентні.

Можна довести [14], що існує система координат, в якій рівняння (74) має найпростіший (або канонічний) вигляд.

До поверхонь другого порядку належать, зокрема, циліндричні та конічні поверхні, поверхні обертання, сфера, еліпсоїд, однопорожнинний та двопорожнинний гіперболоїди, еліптичний та гіперболічний параболоїди. Розглянемо ці поверхні та їхні канонічні рівняння.

7.2. Циліндричні поверхні

Циліндричною поверхнею називають поверхню σ, утворену множиною прямих (твірних), які перетинають задану лінію L (напрямну) і паралельні заданій прямій l (рис. 3.58). Вивчатимемо лише такі циліндричні поверхні, напрямні яких лежать в одній з координатних площин, а твірні паралельні координатній осі, яка перпендикулярна до цієї площини.

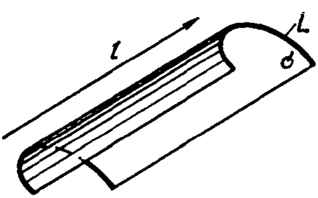


Рис. 3,53

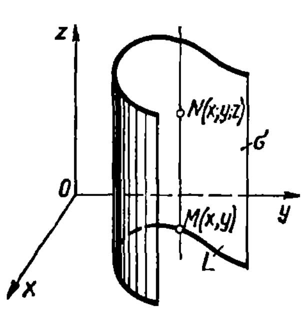


Рис. 3.59

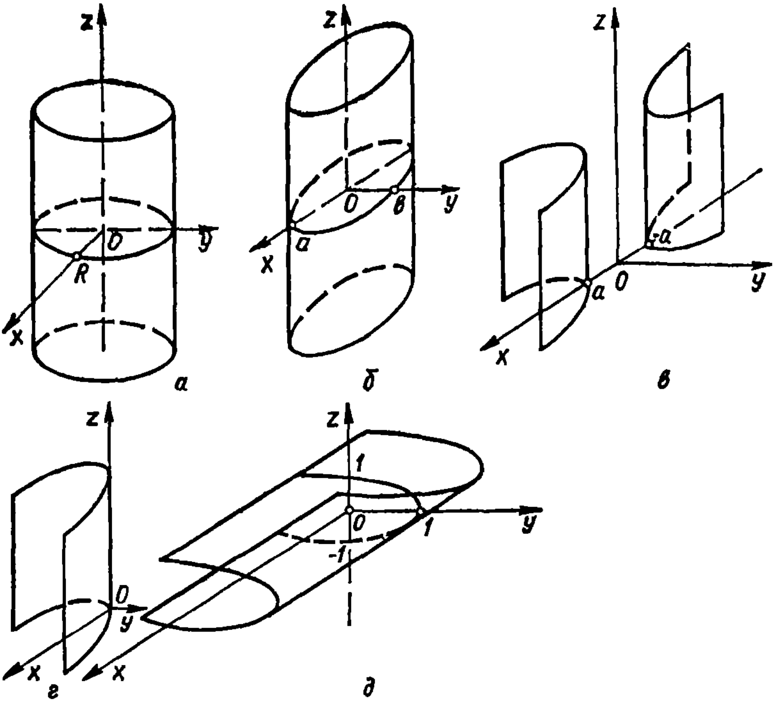


Рис. 3.60

Розглянемо випадок, коли твірні циліндричної поверхні паралельні осі Oz, а напрямна лежить в площині Oxy.

Нехай задано рівняння

$$f(x, y) = 0, \tag{75}$$

яке в площині Oxy визначає (рис. 3.59) деяку лінію L — множину точок M (x; y), координати яких задовольняють це рівняння. Дане рівняння задовольняють також координати всіх тих точок N (x; y; z) простору, у яких дві перші координати x і y збігаються з координатами будь-якої точки лінії L, а третя координата z — довільна, тобто тих точок простору, які проектуються на площину Oxy в точки лінії L.

Всі такі точки лежать на прямій, яка паралельна осі Oz і перетинає лінію L в точці M (x; y). Сукупність таких прямих і є циліндричною поверхнею σ.

Якщо точка не лежить на поверхні σ, то вона не може проектуватися в точку лінії L, тобто координати такої точки рівняння (75) не задовольняють. Отже, рівняння (75) визначає поверхню σ. Таким чином, рівняння $f(x, y) = 0$ визначає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі Oz, а напрямна L в площині Oxy задається тим самим рівнянням $f(x, y) = 0$. Ця сама лінія в просторі $Oxyz$ задається двома рівняннями:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0; \\ z = 0. \end{cases}$$

Аналогічно рівняння $f(x, z) = 0$, в якому відсутня зміна y, визначає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі Oy, а напрямна L в площині Oxz задається тим самим рівнянням $f(x, z) = 0$; рівняння $f(y, z) = 0$ визначає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі Ox.

Приклади

1. Поверхня, яка визначається рівнянням $x^2 + y^2 = R^2$, є циліндричною і називається *прямим круговим циліндром*. Її твірні паралельні осі Oz, а напрямною в площині Oxy є коло $x^2 + y^2 = R^2$ (рис. 3.60, *а*).

2. Поверхня, яка визначається рівнянням $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, є циліндричною і називається *еліптичним циліндром* (рис. 3.60, *б*).

3. Циліндрична поверхня, яка визначається рівнянням $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, називається *гіперболічним циліндром* (рис. 3.60, *в*).

4. Циліндрична поверхня, яка визначається рівнянням $y^2 = 2px$, називається *параболічним циліндром* (рис. 3.60, *г*).

5. Рівняння $z^2 = 1 - y$ визначає в просторі параболічний циліндр, напрямна якого в площині Oyz є парабола $z^2 = 1 - y$, а твірні паралельні осі Ox (рис. 3.60, *д*).

7.3. Поверхні обертання

Поверхню, утворену обертанням заданої плоскої кривої l навколо заданої прямої (осі обертання), яка лежить в площині кривої l, називають *поверхнею обертання*.

Нехай лінія l, що лежить в площині Oyz, задана рівняннями

$$\begin{cases} F(Y, Z) = 0; \\ X = 0 \end{cases}$$

(X, Y, Z — змінні координати точок лінії l, а x, y, z) — змінні координати точок поверхні).

Розглянемо поверхню, утворену обертанням цієї лінії навколо осі Oz (рис. 3.61), і знайдемо рівняння поверхні обертання.

Проведемо через довільну точку $M(x; y; z)$ поверхні обертання площину, перпендикулярну до осі Oz, і позначимо через K і N точки перетину цієї площини з віссю Oz і лінією l. Оскільки відрізки $|Y|$, KN і KM рівні між собою як радіуси, $KP = y$, $PM = x$, то $Y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, крім того, $Z = z$. Оскільки координати точки N задовольняють рівняння $F(X, Z) = 0$, то, підставляючи в це рівняння

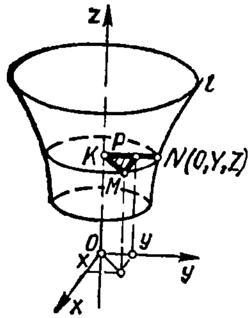


Рис. 3.61

замість Y, Z рівні їм величини $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, z, дістанемо рівняння

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0, \qquad (76)$$

яке задовольняє довільна точка M (x; y; z) поверхні обертання. Можна показати, що координати точок, які не лежать на цій поверхні, рівняння (76) не задовольняють. Отже, рівняння (76) є рівнянням поверхні обертання.

Аналогічно можна скласти рівняння поверхонь обертання навколо осей Ox і Oy. Таким чином, щоб дістати рівняння поверхні обертання кривої навколо якої-небудь координатної осі, треба в рівнянні кривої залишити без зміни координату, яка відповідає осі обертання, а другу координату замінити на квадратний корінь із суми квадратів двох інших координат, взятий із знаком $+$ або $-$.

Приклад

Знайти рівняння поверхні обертання еліпса $x^2 + 4y^2 = 4, z = 0$ навколо осі Ox.

○ У рівнянні еліпса треба залишити без зміни координату x, а замість координати y підставити в рівняння $\pm\sqrt{y^2+z^2}$:

$$x^2 + 4(y^2+z^2) = 4 \text{ або } \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1. \ \bullet$$

7.4. Конічні поверхні

Конічною поверхнею називається поверхня, утворена множиною прямих, що проходять через задану точку P і перетинають задану лінію L. При цьому лінія L називається *напрямною конічної поверхні*, точка P — її *вершиною*, а кожна з прямих, які утворюють конічну поверхню,— *твірною*.

Нехай напрямна L задана в прямокутній системі координат рівняннями

$$\begin{cases} F_1(X, Y, Z) = 0; \\ F_2(X, Y, Z) = 0, \end{cases} \qquad (77)$$

а точка P (x_0; y_0; z_0) — вершина конічної поверхні (рис. 3.62). Щоб скласти рівняння конічної поверхні, візьмемо на поверхні довільну точку M (x; y; z) і позначимо точку перетину твірної PM з напрямною L через N (X; Y; Z).

Канонічні рівняння твірних, які проходять через точки N і P, мають вигляд

$$\frac{x-x_0}{X-x_0} = \frac{y-y_0}{Y-y_0} = \frac{z-z_0}{Z-z_0}. \qquad (78)$$

Виключаючи X, Y і Z з рівнянь (77) і (78), дістанемо шукане рівняння конічної поверхні.

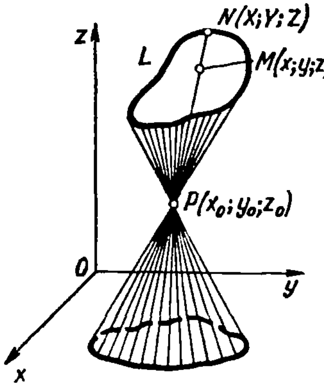


Рис. 3.62

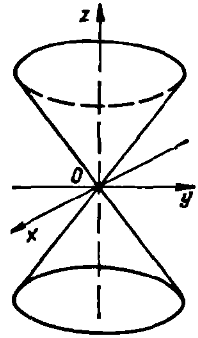


Рис. 3.63

Приклади

1. Скласти рівняння конічної поверхні з вершиною в точці O (0; 0; 0) і з напрямною L, заданою рівняннями

$$\frac{X}{a^2}+\frac{Y}{b^2}=1, \quad Z=c.$$

○ Нехай M $(x;\ y;\ z)$ — довільна точка конічної поверхні, а N $(X;\ Y;\ Z)$ — точка перетину твірної OM і лінії L. Канонічні рівняння твірної OM мають вигляд $\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z}$. Оскільки $Z=c$, то $X=c\frac{x}{z}$, $Y=c\frac{y}{z}$. Підставляючи ці значення X і Y в перше з рівнянь напрямної L, дістанемо шукане рівняння:

$$\frac{c^2x^2}{a^2z^2}+\frac{c^2y^2}{b^2z^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

При $a=b$ напрямною L є коло $X^2+Y^2=a^2$, $Z=c$, а рівняння конічної поверхні має вигляд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$. Ця поверхня називається *прямим круговим конусом* (рис. 3.63).

2. Рівняння конічної поверхні, вершиною якої є точка O (0; 0; 0), а напрямною — еліпс (рис. 3.64)

$$\frac{X^2}{9}+\frac{Z^2}{4}=1, \quad Y=5$$

має вигляд

$$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{25}=0.$$

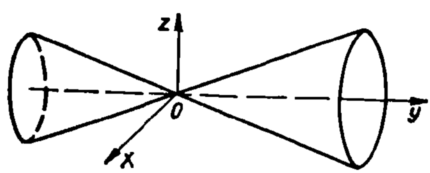


Рис. 3.64

7.5. Сфера

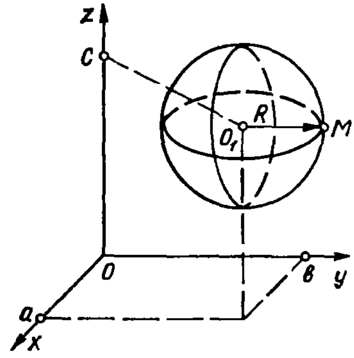


Рис. 3.65

Сферою називають множину всіх точок простору, рівновіддалених від заданої точки, яка називається *центром кола*. Відрізок, що сполучає центр сфери в її довільною точкою, називається *радіусом сфери.*

Візьмемо в просторі прямокутну систему координат $Oxyz$. Щоб скласти рівняння сфери з центром у точці O_1 $(a;\ b;\ c)$ і радіусом R (рис. 3.65), візьмемо в просторі довільну точку M $(x;\ y;\ z)$. Точка M належить сфері тоді і лише тоді, коли $O_1M = R$, або $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. Це і є *рівняння сфери.* Для зручності його записують у такому вигляді:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \tag{79}$$

Зокрема, якщо центр сфери збігається з початком координат, тобто $a = b = c = 0$, то рівняння такої сфери має вигляд

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Якщо в рівнянні (79) розкриємо дужки, то матимемо загальне рівняння сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0, \tag{80}$$

де $A = -2a$, $B = -2b$, $C = -2c$, $D = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$.

Це рівняння має такі властивості.

1°. *Рівняння* (80) *є рівнянням другого степеня відносно x, y і z, отже, сфера — поверхня другого порядку.*

2°. *Коефіцієнти при x^2, y^2, z^2 рівні між собою.*

3°. *У рівнянні відсутні члени з добутками xy, xz, yz.*

Проте не всяке рівняння виду (80), яке задовольняє умови 1°—3°, вображує сферу.

Приклади

1. Знайти центр і радіус сфери, заданої рівнянням

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z - 11 = 0.$$

○ Виділяючи повні квадрати по x, y і z, запишемо задане рівняння у вигляді $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Отже, точка O_1 $(-1;\ -2;\ 3)$ — центр сфери і $R = 5$ — її радіус. ●

2. Рівняння $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 15 = O_1$ або $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = -1$ не визначає ніякого геометричного об'єкта.

7.6. Еліпсоїд

Еліпсоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{81}$$

Рівняння (81) називається *канонічним рівнянням еліпсоїда.* Дослідження форми еліпсоїда проведемо методом паралельних перерізів. Для цього розглянемо перерізи даного еліпсоїда площинами, паралельними площині Oxy. Кожна з таких площин визначається рівнянням $z = h$, де h — довільне дійсне число, а лінія, яка утвориться в перерізі, визначається рівняннями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}; \quad z = h. \tag{82}$$

Дослідимо рівняння (82) при різних значеннях h.

1. Якщо $|h| > c$, $c > 0$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$ і рівняння (82) ніякої лінії не визначають, тобто точок перетину площини $z = h$ з еліпсоїдом не існує.

2. Якщо $h = \pm c$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ і лінія (82) вироджується в точки $(0; 0; c)$ і $(0; 0; -c)$, тобто площини $z = c$ і $z = -c$ дотикаються до еліпсоїда.

3. Якщо $|h| < c$, то $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$, де $a_1 = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$, $b_1 = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$, тобто площина $z = h$ перетинає еліпсоїд по еліпсу з півосями a_1 і b_1. При зменшенні h значення a_1 і b_1 збільшуються і досягають своїх найбільших значень при $h = 0$, тобто в перерізі еліпсоїда площиною Oxy матимемо найбільший еліпс з півосями $a_1 = a$, $b_1 = b$.

Аналогічні результати дістанемо, якщо розглядатимемо перерізи еліпсоїда площинами $x = h$ і $y = h$.

Таким чином, розглянуті перерізи дають змогу зобразити еліпсоїд як замкнуту овальну поверхню (рис. 3.66). Величини a, b, c називаються *півосями еліпсоїда.* Якщо будь-які дві півосі рівні між собою, то триосний еліпсоїд перетворюється в еліпсоїд обертання, а якщо всі три півосі рівні між собою,— у сферу.

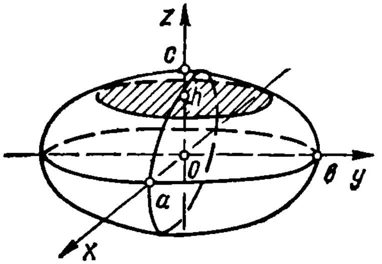


Рис. 3,66

Приклад

Знайти центр і півосі еліпсоїда, заданого рівнянням

$$3x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 6x + 16y - 36z + 49 = 0.$$

○ Виділяючи повні квадрати відносно x, y, z, дістанемо

$$3(x-1)^2 + 4(y+2)^2 + 6(z-3)^2 = 36$$

або $\frac{(x-1)^2}{12} + \frac{(y+2)^2}{9} + \frac{(z-3)^2}{6} = 1.$

Отже, даний еліпсоїд має півосі: $a = 2\sqrt{3}$, $b = 3$, $c = \sqrt{6}$; його центр знаходиться в точці $O(1;\ -2;\ 3)$. ●

7.7. Однопорожнинний гіперболоїд

Однопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (83)$$

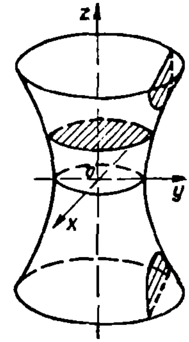


Рис. 3.67

Рівняння (83) називається *канонічним рівнянням однопорожнинного гіперболоїда.*

Досліджують рівняння (83), як і в попередньому пункті, методом паралельних перерізів. Перетинаючи однопорожнинний гіперболоїд площинами, паралельними площині Oxy, дістанемо в перерізі еліпси. Якщо поверхню (83) перетинати площинами $x = h$ або $y = h$, то в перерізі дістанемо гіперболи.

Детальний аналіз цих перерізів показує, що однопорожнинний гіперболоїд має форму нескінченної трубки, яка необмежено розширюється в обидва боки від найменшого еліпса, по якому однопорожнинний гіперболоїд перетинає площину Oxy (рис. 3.67).

Приклад

Знайти лінії перетину однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ площинами: а) Oxz; б) Oxy; в) $x = 4$.

○ а) Лінією перетину площини Oxz з даним гіперболоїдом є гіпербола

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1, \quad y = 0, \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1, \quad y = 0.$$

б) Лінією перетину площини Oxy з даним гіперболоїдом є еліпс:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1, \quad z = 0, \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad z = 0.$$

в) Лінія перетину площини $x = 4$ з даним гіперболоїдом є гіпербола:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1, \quad x = 4, \quad \text{або} \quad \frac{y^2}{27} - \frac{z^2}{48} = -1, \quad x = 4. \ ●$$

7.8. Двопорожнинний гіперболоїд

Двопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \qquad (84)$$

Рівняння (84) називається *канонічним рівнянням двопорожнинного гіперболоїда.*

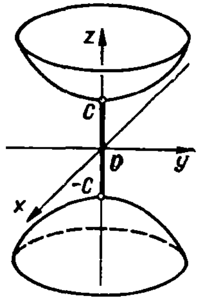


Рис. 3.68

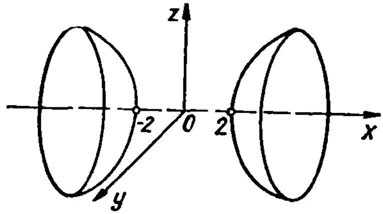


Рис. 3.69

Метод паралельних перерізів дає змогу зобразити двопорожнинний гіперболоїд як поверхню, що складається з двох окремих порожнин (звідси назва двопорожнинний), кожна з яких перетинає вісь Oz і має форму опуклої нескінченної чаші (рис. 3.68).

Приклад

Скласти рівняння поверхні обертання, утвореної обертанням гіперболи $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, $z = 0$ навколо осі абсцис, і визначити вид поверхні.

○ Підставивши в рівняння гіперболи замість y вираз $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$, маємо

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2 + z^2}{9} = 1, \text{ або } \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} - \frac{x^2}{4} = -1.$$

Це рівняння двопорожнинного гіперболоїда, який перетинає вісь Ox в точках (2; 0; 0) і (—2; 0; 0) (рис. 3.69). ●

7.9. Еліптичний параболоїд

Еліптичним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z, \tag{85}$$

що є канонічним рівнянням еліптичного параболоїда. Він має форму нескінченної опуклої чаші (рис. 3.70). Лініями паралельних перерізів еліптичного параболоїда є параболи або еліпси.

Приклад

Знайти точки перетину еліптичного параболоїда

$$z = \frac{x^2}{4} + y^2$$

з прямою

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-10}{4}.$$

○ Запишемо параметричні рівняння даної прямої:

$$x = 2t + 2, \quad y = -t - 1, \quad z = 4t + 10.$$

Підставимо вирази для x, y, z в рівняння параболоїда і знайдемо ті значення параметра, які відповідають точкам перетину:

$$4t + 10 = \frac{(2t+2)^2}{4} + (-t-1)^2; \quad 4t + 10 = 2t^2 + 4t + 2; \quad t_1 = -2, \quad t_2 = 2.$$

Підставляючи знайдені значення параметра в параметричні рівняння прямої, знайдемо точки перетину: M_1 (—2; 1; 2) і M_2 (6; —3; 18). ●

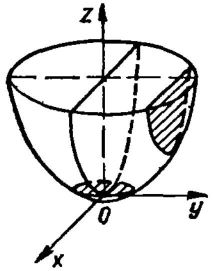


Рис. 3.70

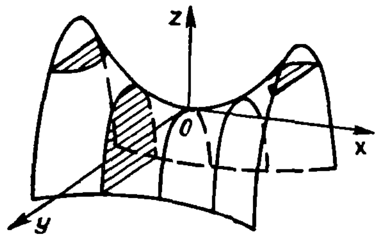


Рис. 3.71

7.10. Гіперболічний параболоїд

Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z, \tag{86}$$

що є *канонічним рівнянням гіперболічного параболоїда.* Ця поверхня має форму сідла (рис. 3.71).

Лініями паралельних перерізів гіперболічного параболоїда є гіперболи або параболи.

7.11. Лінійчаті поверхні

Поверхні, твірні яких є прямі лінії, називаються *лінійчатими.* Такими поверхнями є циліндричні та конічні поверхні. Розглянемо рівняння однопорожнинного гіперболоїда (83) і запишемо його у вигляді

$$\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right). \tag{87}$$

Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = k\left(1 + \dfrac{x}{a}\right); \\ \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{k}\left(1 - \dfrac{x}{a}\right), \end{cases} \tag{88}$$

де k — довільний, відмінний від нуля, параметр.

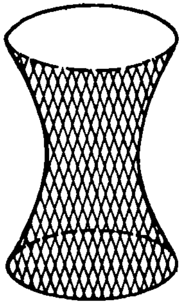


Рис. 3.72

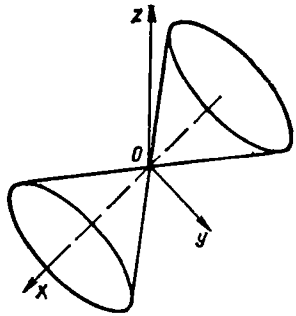


Рис. 3.73

При певному значенні параметра k кожне з рівнянь системи (88) визначає площину, а кожна з систем визначає пряму лінію як перетин площин.

Якщо перемножити рівняння (88) почленно, то дістанемо рівняння (87). Тому довільна точка $(x;\ y;\ z)$, що задовольняє систему (88), лежить на поверхні (87). Це означає, що кожна з прямих (88) повністю лежить на поверхні однопорожнинного гіперболоїда (рис. 3.72). Отже, однопорожнинний гіперболоїд — лінійчата поверхня. Те саме стосується і гіперболічного параболоїда (86).

Зазначимо, що однопорожнинні гіперболоїди застосовуються в будівництві. Спорудження різноманітних висотних веж з використанням прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда поєднує в собі міцність конструкції і простоту її виконання. Ідея використання однопорожнинного гіперболоїда в будівництві належить російському вченому В. Г. Шухову. За проектом Шухова побудована телевізійна вежа на Шаболовці в Москві. Вона складається з секцій однопорожнинних гіперболоїдів обертання.

Приклад

Знайти ті прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда $x = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$, які проходять через точку $A\left(4;\ 2;\ \frac{7}{9}\right)$.

○ Запишемо задане рівняння у вигляді $z = \left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right)$.

Складемо систему рівнянь $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = zk; \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{1}{k}. \end{cases}$ Підставивши координати точки

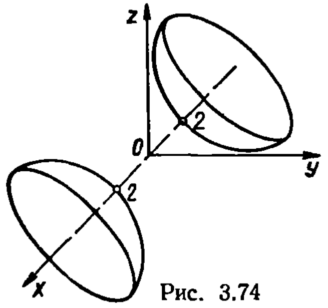


Рис. 3.74

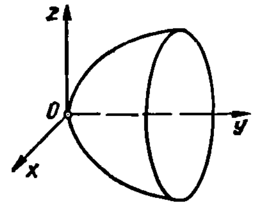


Рис. 3.75

A в перше рівняння системи, знайдемо $k = \frac{3}{7}$. Отже, пряма

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{3}{7} z; \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{7}{3}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 14x - 21y - 18z = 0; \\ 2x - 3y - 14 = 0 \end{cases}$$

є однією з тих твірних заданого параболоїда, яка проходить через точку A. Другу твірну знаходимо аналогічно з системи

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = zk; \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{1}{k}. \end{cases}$$ ●

Завдання для самоконтролю

1. Що називається поверхнею другого порядку?

2. Довести, що рівняння $f(x, y) = 0$ задає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі Oz, а напрямна задається тим самим рівнянням.

3. Скласти рівняння поверхні, яка утворюється обертанням лінії, заданої рівнянням $f(y, z) = 0$ навколо осі Oz.

4. Як скласти рівняння конічної поверхні, заданої вершиною і напрямною лінією?

5. Скласти і охарактеризувати рівняння сфери.

6. Що називається еліпсоїдом? У чому полягає метод паралельних перерізів?

7. Що називається однопорожнинним гіперболоїдом? Довести, що в перерізах однопорожнинного гіперболоїда площинами $x = h$ і $y = h$ утворюються гіперболи.

8. Що називається двопорожнинним гіперболоїдом? Дослідити перерізи цієї поверхні площинами $z = h$.

9. Що називається еліптичним параболоїдом? Дослідити лінії перетину параболоїда площинами $x = h$.

10. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії $y = x$ навколо осі Ox. Побудувати поверхню.

11. Яку поверхню визначає рівняння $x^2 - y^2 - z^2 - 4 = 0$? Побудувати поверхню.

12. Яка поверхня визначається рівнянням $y = x^2 + z^2$? Побудувати поверхню.

Відповіді. **10.** $x^2 = y^2 + z^2$ (рис. 3.73). **11.** Двопорожнинний гіперболоїд обертання (рис. 3.74). **12.** Параболоїд обертання (рис. 3.75).

Глава 4
ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Математичний аналіз — це сукупність розділів математики, присвячених дослідженню функцій методами нескінченно малих. Основи дано у працях І. Ньютона, Г. Лейбніца, Л. Ейлера та інших математиків 17—18 ст. Обгрунтування математичного аналізу за допомогою поняття границі належить О. Л. Коші.

Курс математичного аналізу містить такі розділи: вступ до аналізу, диференціальне числення, інтегральне числення і теорія рядів.

У 19—20 ст. методами математичного аналізу почали вивчати складніші математичні об'єкти, ніж функції. Це привело до створення функціонального аналізу та багатьох інших математичних дисциплін.

§ 1. ДІЙСНІ ЧИСЛА

1.1. Множини. Логічні символи

Поняття множини є одним з фундаментальних у математиці. Воно належить до понять, яким не можна дати строге означення, тобто до так званих первісних, які не можна виразити через простіші поняття. Інтуїтивно множину розуміють як сукупність (сімейство, набір, зібрання) деяких об'єктів, об'єднаних за певною ознакою чи властивістю.

Прикладами множин може бути множина деталей, з яких складається даний механізм, множина шкіл даного міста, множина зірок певного сузір'я, множина розв'язків даного рівняння, множина всіх цілих чисел тощо.

Об'єкти, з яких складається множина, називаються її елементами. Множини позначають великими буквами латинського алфавіту, а їх елементи — малими. Якщо елемент x належить множині X, то пишуть $x \in X$: запис $x \overline{\in} X$ або $x \notin X$ означає, що елемент x не належить множині X.

Множина вважається заданою, якщо відома характеристика її елементів, коли про кожний елемент можна сказати, належить він цій множині чи ні. Так, множині цілих чисел належить число 7, але не належить число 0,7.

Множина, яка містить скінченну кількість елементів, називається *скінченною.* Запис $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_m\}$ означає, що множина A скінченна і містить m елементів. Множина $X = \{x_1; x_2; \ldots, x_n; \ldots\}$, яка містить нескінченну кількість елементів, називається *нескінченною.* Так, множина слухачів в даній аудиторії — скінченна, а множина трикутників, які можна вписати в дане коло,— нескінченна.

Множина, яка не містить жодного елемента, називається *порожньою* і позначається символом $\varnothing$. Прикладом порожньої множини є множина дійсних коренів рівняння $x^2 + 1 = 0$. Нехай задано дві множини A і B. Якщо кожен елемент множини A є елементом множини B, то множину A називають *підмножиною* множини B і пишуть $A \subset B$ або $B \supset A$ («A міститься в B» або «B містить A»). Наприклад, множина натуральних чисел є підмножиною цілих чисел. Очевидно, що кожна множина є своєю підмножиною і порожня множина є підмножиною будь-якої множини. Якщо множини A і B містять одні і ті самі елементи, тобто $A \subset B$ і $B \subset A$, то їх називають *рівними* і пишуть $A = B$.

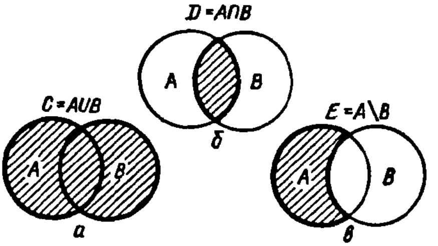


Рис. 4.1

Визначимо деякі операції, які можна виконувати над множинами.

Множину C, яка містить елементи, кожен з яких належить множині A або множині B, називають *об'єднанням (сумою) множин* A, B і позначають $C = A \cup B$ (рис. 4.1, *а*). Отже,

$$a \in A \cup B \Leftrightarrow a \in A \text{ або } a \in B.$$

Множину D, що складається з елементів, кожен з яких одночасно належить множинам A і B, називають *перерізом (добутком) множин* A і B і позначають $D = A \cap B$ (рис. 4.1, *б*). Отже, $a \in A \cap B \Leftrightarrow a \in B$ і $a \in A$.

Множину E, що складається з елементів, кожен з яких належить множині A і не належить множині B, називають різницею множин A і B і позначають $E = A \setminus B$ (рис. 4.1, *в*). Отже, $a \in A \setminus B \Leftrightarrow a \in A$ і $a \notin B$.

Наприклад, якщо

$$A = \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\},\quad B = \left\{-\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{2};\ 1\right\},$$

то

$$C = A \cup B = \left\{-2;\ -1;\ -\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{2};\ 1;\ 2\right\},$$

$$D = A \cap B = \{0;\ 1\},\quad E = A \setminus B = \{-2;\ -1;\ 2\}.$$

Нехай $P(x)$ — деяка властивість числа x, тоді запис $\{x \mid P(x)\}$ означає множину всіх тих чисел x, для яких виконується властивість $P(x)$. Наприклад,

$$\{x \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1;\ 1\},\ \{x \mid x < 1,\ x > 5\} = \varnothing.$$

1.2. Множина дійсних чисел

У курсі вищої математики часто використовують множини, елементи яких є числа. Такі множини називаються *числовими*. Назвемо деякі з них:

1) множина натуральних чисел $N = \{1; 2; ...; n; ...\}$;

2) множина цілих невід'ємних чисел $Z_0 = \{0; 1; 2; ...; n; ...\}$;

3) множина цілих чисел $Z = \{0; \pm 1, \pm 2; ...; \pm n; ...\}$;

4) множина раціональних чисел $Q = \{p/q \mid p \in Z, \ q \in N\}$;

5) множина дійсних чисел $R = \{x \mid x = a, \ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 ...\}$, де $a \in Z$, α_i — цифри десяткової системи числення.

Між цими множинами існує зв'язок:

$$N \subset Z_0 \subset Z \subset Q \subset R.$$

Множина дійсних чисел містить раціональні та ірраціональні числа. Всяке раціональне число є або цілим числом, або скінченним чи періодичним десятковим дробом. Ірраціональне число — це нескінченний неперіодичний десятковий дріб. Так, $\frac{2}{5} = 0{,}4$; $\frac{1}{3} = 0{,}333...$ — раціональні числа; $\sqrt{2} = 1{,}4142...$, $\pi = 3{,}1415 ...$ — ірраціональні числа.

Не вдаючись до теорії дійсних чисел [11], зазначимо, що на множині дійсних чисел завжди виконуються операції додавання, віднімання, множення і ділення (крім ділення на 0). Корінь непарного степеня з довільного дійсного числа має одне дійсне значення. Корінь парного степеня з додатного числа має два значення, які відрізняються лише знаком. Корінь парного степеня з від'ємного числа на множині дійсних чисел змісту не має.

Дійсні числа зображають точками (гл. 2. п. 2.2) на координатній осі або числовій прямій.

Таким чином, між множиною дійсних чисел R і множиною всіх точок прямої можна встановити взаємно однозначну відповідність. Це означає, що кожному числу $x \in R$ відповідає певна точка прямої і, навпаки, кожній точці прямої відповідає певне число.

1.3. Числові проміжки. Окіл точки

Нехай a і b — дійсні числа, причому $a < b$. Розглянемо числові множини:

$$[a;\ b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}; \qquad (a;\ +\infty) = \{x \mid a < x\};$$
$$(a;\ b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}; \qquad (-\infty;\ b) = \{x \mid x < b\};$$
$$(a;\ b) = \{x \mid a < x < b\}; \qquad [a;\ +\infty) = \{x \mid a \leqslant x\};$$
$$[a;\ b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}; \qquad (-\infty;\ b] = \{x \mid x \leqslant b\};$$
$$(-\infty;\ +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}.$$

Усі ці множини називаються числовими *проміжками,* причому $[a;\ b]$ — *відрізок (сегмент)*, $(a;\ b)$, $(a;\ +\infty)$, $(-\infty;\ b)$, $(-\infty;\ +\infty)$ — *інтервали,* $(a;\ b]$, $[a;\ b)$, $[a;\ +\infty)$, $(-\infty,\ b]$ — *півінтервали.*

Проміжки $[a;\ b]$, $(a;\ b)$, $(a;\ b]$, $[a;\ b)$ називаються скінченними і позначаються спільним символом $\langle a;\ b\rangle$; точки a і b називають відповідно лівим і правим кінцем цих проміжків.

Останні з наведених проміжків називаються нескінченними. Символи $-\infty$ і $+\infty$ в цих проміжках не треба розглядати як числа; це символічне позначення процесу необмеженого віддалення точок числової осі від її початку вліво і вправо. Арифметичні операції над символами $-\infty$ і $+\infty$ неприпустимі. Вважають, що будь-яке дійсне число x більше, ніж $-\infty$, і менше, ніж $+\infty$: $-\infty < x < +\infty$.

Введемо інтервали, що називаються околами точки. Нехай x_0 — довільне дійсне число. *Околом* точки x_0 називають будь-який інтервал $(\alpha; \beta)$, що містить цю точку, тобто $\alpha < x_0 < \beta$. Так, околами точки $x_0 = 1$ є інтервали $(-0,5; 1,5)$, $(0; 2)$ і т. д.

Інтервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$, називають *ε-околом* точки x_0, причому точку x_0 називають *центром*, а число ε — *радіусом околу*. Цей окіл називають досить малим, якщо число ε досить мале.

1.4. Модуль (абсолютна величина) дійсного числа

Модулем дійсного числа x називають число $|x|$, яке визначається за формулою

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо} \quad x > 0; \\ 0, & \text{якщо} \quad x = 0; \\ -x, & \text{якщо} \quad x < 0. \end{cases}$$

Так, $|5| = 5$, $|-4| = 4$, $|\pi - 5| = 5 - \pi$,

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & x > 3; \\ 0, & x = 3; \\ 3 - x, & x < 3. \end{cases}$$

Геометрично число $|x|$ визначає відстань від початку відліку O до точки, відповідної числу x на числовій осі.

Розглянемо арифметичне значення кореня $\sqrt{a^2}$, де a — довільне дійсне число. Очевидно, що

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & a > 0; \\ 0, & a = 0; \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Отже, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Сформулюємо *властивості модуля дійсного числа*.

1°. *Рівні між собою числа мають рівні між собою модулі:*

$$a = b \Rightarrow |a| = |b|.$$

2°. *Модуль числа є число невід'ємне:*

$$|x| \geqslant 0.$$

3°. *Число не більше свого модуля:*

$$x \leqslant |x|.$$

4^0. *Протилежні числа мають рівні між собою модулі:*

$$|x| = |-x|.$$

5^0. *Модуль суми двох чисел не більший суми їхніх модулів:*

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

6^0. *Модуль різниці двох чисел не менший різниці їхніх модулів:*

$$|x-y| \geqslant |x| - |y|.$$

7^0. *Модуль добутку двох чисел дорівнює добутку їхніх модулів:*

$$|x \cdot y| = |x||y|.$$

8^0. *Модуль частки дорівнює частці модулів діленого і дільника:*

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0.$$

9^0. *Якщо $a > 0$, то нерівності $|x| \leqslant a$ та $-a \leqslant x \leqslant a$ рівносильні:*

$$\forall a > 0 : |x| \leqslant a \Leftrightarrow \{x \mid -a \leqslant x \leqslant a\}.$$

10^0. *Для довільного числа $a > 0$ нерівності $|x| \geqslant a$ та $x \leqslant -a$ або $x \geqslant a$ рівносильні*:

$$(\forall a > 0 : |x| \geqslant a) \Leftrightarrow \{x \mid x \leqslant -a \quad \text{або} \quad x \geqslant a\}.$$

Користуючись поняттям модуля, деякі з наведених вище проміжків можна записати у вигляді

$$-a \leqslant x \leqslant a \Leftrightarrow [-a;\ a] \Leftrightarrow |x| \leqslant a;$$

$$-\infty < x < +\infty \Leftrightarrow (-\infty;\ +\infty) \Leftrightarrow |x| < +\infty.$$

Зокрема, ε-окіл точки x_0 записується у вигляді $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \Leftrightarrow (x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - x_0| < \varepsilon$; цей самий *окіл з виколотою точкою* x_0 записується так:

$$0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

Приклад

Розв'язати нерівності: а) $|2x - 3| < 5$; б) $(x-2)^2 \geqslant 9$.

○ а) За властивістю 9^0 маємо

$$-5 < 2x - 3 < 5, \text{ або } -2 < 2x < 8, \text{ або } -1 < x < 4.$$

Отже, дана нерівність виконується для тих значень x, які належать інтервалу $(-1;\ 4)$.

б) Оскільки $\sqrt{a^2} = |a|$, то $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$ і за властивістю 10^0 маємо $x - 2 \geqslant 3$ або $x - 2 \leqslant -3 \Rightarrow x \geqslant 5$ або $x \leqslant -1$. Таким чином, дана нерівність справедлива для всіх значень $x \in (-\infty;\ -1] \cup [5;\ +\infty)$. ●

Завдання для самоконтролю

1. Як описати поняття множини? Навести приклади.
2. Записати множини: натуральних чисел, цілих невід'ємних чисел, цілих чисел, раціональних чисел, дійсних чисел.

3. Які множини називаються числовими проміжками?
4. Що називається ε-околом точки x_0?
5. Який зміст запису $A = \{x \mid P(x)\}$?
6. Як визначаються об'єднанни, переріз та різниця двох заданих множин? Навести приклади.
7. Що називається модулем дійсного числа? Який геометричний зміст модуля?
8. Сформулювати властивості модуля дійсного числа.
9. Розв'язати нерівності:
а) $|3x + 1| < 2$; б) $(x - 1)^2 \geqslant 9$; в) $|x^2 - 5x + 6| > x^2 - 5x + 6$.
10. Розв'язати рівняння: а) $|2x + 1| = x^2$; б) $|\sin x| = \sin x + 2$; в) $|x - 1| + |x - 2| = 1$.

Відповіді. 9. а) $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$; б) $(-\infty; -2) \cup [4; +\infty)$; в) $(2; 3)$. 10. а) -1; $1 + \sqrt{2}$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$; в) $[1; 2]$.

§ 2. ФУНКЦІЯ

2.1. Сталі і змінні величини

Величина — одне з основних математичних понять, зміст якого з розвитком математики змінювався і узагальнювався. Це поняття настільки широке і всеохоплююче, що його важко визначити. Маса, сила, тиск, напруга, довжина, об'єм, дійсне число, вектор — все це приклади величин. На першій стадії під величиною розуміли те, що, виражаючись в певних одиницях (наприклад, довжина в метрах, маса — в грамах і т. д.), характеризується своїм числовим значенням.

Згодом величинами стали і такі поняття, як число, вектор та інші. Величини в деякому процесі можуть набувати різних або однакових числових значень. У першому випадку величина називається *змінною*, у другому — *сталою*.

Приклади

1. Відношення довжини кола до його діаметра є величина стала для всіх кіл і дорівнює числу π.
2. Величина x, яка задовольняє умову $x \in [0; 1]$, є змінною величиною.
3. Якщо в різних місцях і на різних глибинах озера вимірювати одночасно тиск води і її густину, то виявиться, що тиск — змінна величина, а густину можна вважати величиною сталою.

У перших двох прикладах стала і змінна величини визначаються точно. У третьому випадку густина води, хоч і незначно, але змінюється, тому вона є сталою тільки з певною точністю. В багатьох реальних явищах можна вказати величини, які лише умовно будуть сталими.

Предметом вищої математики є вивчення змінних величин.

Стала величина вважається окремим випадком змінної: стала — це така змінна, всі значення якої рівні між собою.

Якщо величина набуває своїх значень дискретно (перервно), то її називають *послідовністю* (п. 3.1). Якщо ж змінна величина набуває неперервних значень, то її просто називають змінною.

2.2. Поняття функції

Вивчаючи те чи інше явище, ми, як правило, оперуємо кількома величинами, які пов'язані між собою так, що зміна деяких з них приводить до зміни інших.

Такий взаємозв'язок у математиці виражається за допомогою *функції*. Цей термін вперше ввів Г. Лейбніц.

Приклади

1. Нехай електричне коло складається з джерела постійної напруги U і реостата R. При зміні опору R змінюватиметься сила струму. Напруга U — величина стала (в даному колі), а опір R і струм I — змінні, причому I змінюється залежно від зміни R за законом Ома: $I = \frac{U}{R}$, тобто сила струму I є функція опору R.

2. Під час вільного падіння тіла пройдений шлях S залежить від зміни часу t. Зв'язок між змінними величинами S і t задається формулою

$$S = \frac{gt^2}{2},$$

де g — прискорення при вільному падінні (стала величина). Величина S залежить від зміни величини t, тобто шлях S є функцією часу t.

3. Згідно з законом Бойля — Маріотта об'єм газу V та тиск P при сталій температурі пов'язані формулою $PV = c$, де c — деяка стала. Звідси

$$V = \frac{c}{P},$$

тобто змінна величина V змінюється залежно від зміни P, тому об'єм V є функція тиску P.

4. Довжина l кола діаметра d визначається за формулою $l = \pi d$, де π — стала величина. Змінна l залежить від змінної величини d, тобто довжина кола l є функцією діаметра d.

Спільним у цих прикладах є те, що зв'язок між змінними величинами описується певним правилом (залежністю, законом, відповідністю) так, що кожному значенню однієї величини (R, P, t, d) відповідає єдине значення другої (I, V, S, l).

Дамо тепер означення функції. Якщо кожному числу x з деякої числової множини X за певним правилом поставлене у відповідність єдине число y, то кажуть, що y є функція від x і пишуть $y = f(x)$, $x \in X$. Це означення належить М. І. Лобачевському і Л. Діріхле.

Змінна x називається *незалежною змінною,* або *аргументом,* а змінна y — *залежною змінною,* або *функцією;* під символом f розуміють те правило, за яким кожному x відповідає y, або ті операції, які треба виконати над аргументом, щоб дістати відповідне значення функції.

Множина X називається *областю визначення функції*. Множина Y усіх чисел y, таких, що $y = f(x)$ для кожного $x \in X$ називається *множиною значень функції*, тобто

$$Y = \{y \mid y = f(x), \quad \forall x \in X\}.$$

Іноді у означенні функції припускають, що одному значенню аргумента відповідає не одне, а кілька значень y або навіть нескінченна множина значень y. У цьому випадку функцію називають *багатозначною,* на відміну від означеної вище *однозначної функції*. Прикладами многозначних функцій є $y = \pm\sqrt{x}$, $y = \operatorname{Arcsin} x$ тощо. Надалі ми розглядатимемо лише однозначні функції.

У ширшому розумінні поняття функції вживається як синонім поняття відображення множини на множину.

Нехай задано дві непорожні множини X і Y з елементами $x \in X$ і $y \in Y$ і нехай перетворення f переводить x в y. Тоді це перетворення f (правило, закон, відповідність, відображення, залежність) називають функцією і пишуть

$$X \xrightarrow{f} Y \text{ або } f: X \to Y$$

(X та Y множини деяких елементів, не обов'язково числові).

У цьому випадку, як і у випадку числових множин X та Y, ці множини називають *областю визначення* та *множиною значень функції*. Залежно від природи множини X та Y для функції f вживають різні назви. Так, якщо X та Y — множини дійсних чисел, то кажуть, що f — дійсна функція дійсного аргументу; якщо X — множина комплексних чисел (гл. 7, п. 1.4), а Y — множина дійсних чисел, то f — дійсна функція комплексного аргументу; якщо X — множина функцій, а Y — числова множина, то f називається *функціоналом.*

Порівнюючи означення функції, бачимо, що в першому з них під функцією $y = f(x)$ розуміють її значення — число y. За другим означенням функція — це закон або правило f, за яким кожному елементу $x \in X$ ставиться у відповідність єдиний елемент $y \in Y$. Таким чином, за першим означенням поняття функції зводиться до поняття змінної величини, а за другим — до поняття відповідності. Іноді поняття функції виражається і через інші поняття (наприклад, множину). Надалі користуватимемось першим означенням функції.

У курсі математичного аналізу розглядають функції, для яких область визначення X і множина значень Y складаються з дійсних чисел. Тому під поняттям «число», якщо не зроблено застереження, розумітимемо дійсне число.

З означення функції не випливає, що різним значенням аргументу відповідають різні значення функції. Функція може в усій області визначення набувати кількох або навіть одного значення. Зокрема, якщо множина значень функції складається лише з одного числа c, то таку функцію називають сталою і пишуть $y = c$.

2.3. Способи задання функцій

Щоб задати функцію $y = f(x)$, треба вказати її область визначення X, множину значень Y і правило f, за яким для довільного числа $x \in X$ можна знайти відповідне йому число $y \in Y$.

Основні способи задання функції: аналітичний, графічний і табличний.

При аналітичному способі задання функції відповідність між аргументом і функцією задається формулою (аналітичним виразом), де зазначено, які дії потрібно виконати над значенням аргументу та сталими числами, щоб дістати відповідне значення функції. Якщо при цьому область визначення не вказується, то під останньою розуміють *область існування функції* — множину всіх дійсних значень аргументу, для яких аналітичний вираз має зміст.

Зауваження. Не слід ототожнювати функцію і формулу, за допомогою якої ця функція задана. Однією й тією формулою можна задавати різні функції, і навпаки, одна й та сама функція на різних ділянках її області визначення може задаватись різними формулами. Так, функції $y = x^3$, $x \in [0; 1]$ і $y = x^3$, $x \in (2; 5)$ — різні, бо вони мають різні області визначення; функція

$$y = \begin{cases} 2x - 1, & x \leqslant 0; \\ \lg x, & x > 0 \end{cases}$$

визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$, але для недодатних і додатних значень аргументу її задано різними формулами.

Приклад

Знайти області визначення функції:

$$а)\ y = \frac{x+2}{\sqrt{-x^2+3x+4}};\quad б)\ y = \lg\sin(x-2);\quad в)\ y = \arcsin\frac{x-1}{3x};$$

$$г)\ y = \sqrt{4-x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-1}} + \lg(x-2);\quad д)\ y = n!.$$

○ а) $X = \{x \mid -x^2 + 3x + 4 > 0\} = \{x \mid -1 < x < 4\} = (-1; 4)$;

б) $X = \{x \mid \sin(x-2) > 0\} = \{x \mid 2(\pi n + 1) < x < (2n+1)\pi + 2\}$;

в) $X = \left\{x \mid \left|\frac{x-1}{3x}\right| \leqslant 1\right\} \cap \{x \mid x \neq 0\} = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$;

г) $X = \{x \mid 4 - x \geqslant 0\} \cap \{x \mid x \neq 1\} \cap \{x \mid x - 2 > 0\} = (2; 4]$;

д) формула $y = n!$ ставить у відповідність кожному натуральному числу n число $y = n!$. Наприклад, якщо $n = 3$, то $y = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, якщо $n = 5$, то $y = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Отже, $X = Z_0$ (вважають, що $0! = 1$). ●

Ці приклади показують, що областю існування функції можуть бути досить різноманітні множини: відрізок, кілька або навіть нескінченна кількість відрізків, дискретна множина точок тощо.

Зазначимо, що задача знаходження множини Y значень аналітично заданої функції набагато складніша і пов'язана з задачею про екстремуми функції (гл. 6, п. 6.3).

При графічному способі задання функції $y = f(x)$ відповідність між змінними x і y задається *графіком* — множиною точок $(x; y)$ площини, прямокутні координати яких задовольняють рівність $y =$

$= f(x)$. Залежно від того, яку задано функцію, графік її може складатись з однієї суцільної лінії, кількох ліній, дискретної множини точок площини тощо.

Графічним способом задання функції широко користуються при дослідженнях, пов'язаних з використанням таких самописних приладів, як барограф (для запису змін атмосферного тиску), осцилограф (для запису змін електричного струму або напруги), електрокардіограф (для запису електричних явищ, пов'язаних з діяльністю серця), термограф (для запису змін температури повітря) тощо. Криві (їх називають відповідно барограма, осцилограма, електрокардіограма, термограма), що їх виписують прилади, задають цілком певну функцію, властивості якої характеризують перебіг того чи іншого процесу.

Графіки функцій можна спостерігати на дисплеях комп'ютерів. У математиці графіками широко користуються для геометричного зображення функцій, навіть тоді, коли ці функції задані аналітично. Якщо функція $y = f(x)$ задана на деякій множині X формулою, то завжди можна вважати, що їй відповідає певний графік, який визначає цю функцію геометрично. А якщо функція задана довільним графіком, то чи можна її задати деякою формулою? Це дуже складне запитання. Щоб відповісти на нього, потрібно з'ясувати, який зміст має поняття формули. Якщо функція $y = f(x)$ задана формулою, то ми поки що вважаємо, що функція y утворюється за допомогою скінченного числа таких операцій над x, як додавання, віднімання, множення, ділення, добування кореня, логарифмування, взяття sin, arcsin тощо. Математичний аналіз дає змогу значно розширити поняття формули. Зокрема, формулою вважається також і нескінченний ряд, членами якого є ті чи інші функції, тобто допускається нескінченне число операцій над цими функціями. За допомогою таких формул більшість кривих, що зустрічаються на практиці, можна задати аналітично (гл. 9).

Приклади

1. Графіком функції $y = 2n - 3$, $n \in N$ є нескінченна множина ізольованих точок (рис. 4.2), які лежать на прямій $y = 2x - 3$.

2. Графіком функції $y = |x|$ є сукупність бісектрис першого і другого координатних кутів (рис. 4.3).

3. Графіком функції

$$y = \begin{cases} x^2 - 2, & -\infty < x \leqslant 2; \\ 2, & 2 < x < +\infty, \end{cases}$$

що задана різними аналітичними виразами на різних частинах області зміни x, є сукупність параболи і прямої (рис. 4.4). Стрілка на графіку означає, що точка $M(2; 2)$ не належить прямій.

4. Функція

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

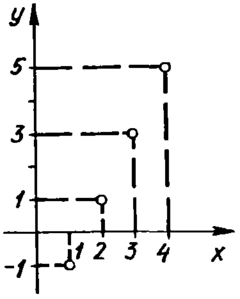


Рис. 4.2

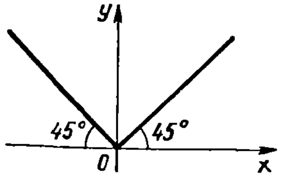


Рис. 4.3

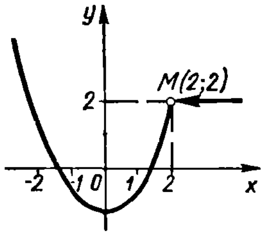


Рис. 4.4

(читається «сигнум ікс») визначена на всій числовій осі і набуває трьох значень: -1; 0; 1; $X = (-\infty; +\infty)$, $Y = \{-1, 0, 1\}$. Графік цієї функції зображено на рис. 4.5.

5. Функція $y = \frac{|x|}{x}$ (рис. 4.6) визначена при $x \neq 0$ і набуває двох значень: -1; 1; $X = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $Y = \{-1, 1\}$.

Зауважимо, що в прямокутній системі координат Oxy (рис. 4.7) функцію задає лише така крива l_2, яку кожна пряма, що проходить через точку $x \in X$ паралельно осі Oy, перетинає лише в одній точці. Область визначення цієї функції — відрізок $[a; b]$, який є проекцією кривої на вісь Ox. Щоб знайти значення функції $y_0 = f(x_0)$, що відповідає значенню аргументу x_0, потрібно через точку $x_0 \in [a; b]$ провести перпендикуляр до осі Ox. Довжина цього перпендикуляра від осі Ox до точки $M_0(x_0; y_0)$ перетину з кривою, взята з належним знаком, і є значенням функції в точці x_0, тобто $y_0 = f(x_0)$. Крива l_1 не задає функцію.

Табличний спосіб задання функції $y = f(x)$ полягає в тому, що відповідність між змінними x та y задається у вигляді таблиці.

Табличний спосіб досить часто використовується при проведенні експериментів, коли задають певну сукупність $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значень аргументу і дослідним шляхом знаходять відповідні значення функції: $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Якщо функція задана аналітично, то для неї можна побудувати таблицю, тобто табулювати функцію. Табулюються, як правило, функції, які виражаються складною формулою, але часто зустрічаються в практиці. Такими є, наприклад, таблиці логарифмів, тригонометричні

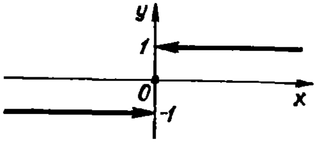


Рис. 4.5

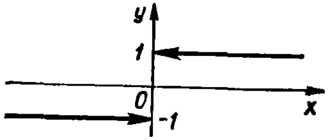


Рис. 4.6

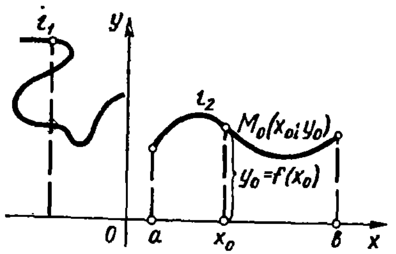


Рис. 4.7

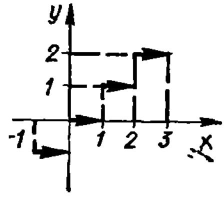


Рис. 4.8

таблиці тощо. І тут, як і при графічному заданні функції, виникає обернене запитання: чи завжди можна від табличного задання функції перейти до аналітичного, тобто чи можна функцію, задану таблицею, задати формулою? Щоб відповісти на нього, зауважимо, що таблиця дає не всі значення функції. Проміжні її значення, які не входять у задану таблицю, можна знайти наближено за допомогою так званої *операції інтерполювання функції*. Тому в загальному випадку знайти точний аналітичний вираз функції за її таблицею неможливо. Проте можна побудувати формулу, причому не одну, яка для значень x_i, що є в таблиці, буде давати відповідні значення y_i функції. Такі формули називаються *інтерполяційними* (гл. 5, п. 72).

Останнім часом табличний спосіб широко застосовується у зв'язку з використанням електронно-обчислювальних машин (ЕОМ), тому що вихідну інформацію ЕОМ видає у вигляді числових масивів (таблиць). У зв'язку з цим все більше поширюється і стає одним з основних четвертий спосіб задання функції — за допомогою комп'ютерних програм. Як правило, цим способом задаються такі функції, які є розв'язками складних математичних задач. Жодним з попередніх способів подібні функції задати не можна.

Крім розглянутих існують й інші способи задання функції. Так, функцію можна задати словесним описом залежності між змінними.

Приклади

1. Функцію y задано умовою: кожному дійсному числу x ставиться у відповідність найбільше ціле число, яке не перевищує x (рис. 4.8). Ця функція, визначена на множині дійсних чисел, називається *цілою частиною* x і позначається $y = [x]$ або $y = E(x)$ (E — початкова літера французького слова entier — цілий). Наприклад, $[0,2] = 0$, $[-2,5] = -3$, $[5] = 5$ і т. д.

2. Кожному раціональному числу ставиться у відповідність число 1, а ірраціональному — число 0. Ця функція теж визначена на множині R. Вона позначається через $D(x)$ і називається *функцією Діріхле:*

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ — раціональне число;} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ — ірраціональне число.} \end{cases}$$

Графік функції $D(x)$ практично зобразити не можна, бо він складається з точок прямої $y = 1$, що мають абсцисами раціональні числа, і з точок прямої $y = 0$, в яких абсциси — ірраціональні числа.

2.4. Класифікація елементарних функцій

Основними елементарними функціями називаються такі:

1. *Степенева функція* $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$. Область визначення і графіки цієї функції залежать від значення α (рис. 4.9, *а—є*).

2. *Показникова функція* $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ (рис. 4.10).

3. *Логарифмічна функція* $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ (рис. 4.11).

4. *Тригонометричні функції:* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 4.12, *а—г*).

5. *Обернені тригонометричні функції:* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ (рис. 4.13, *а—г*).

Графіки основних елементарних функцій треба пам'ятати. Перетворюючи їх, можна дістати графіки багатьох інших функцій. Нехай графік функції $y = f(x)$ відомий, розглянемо деякі перетворення цього графіка.

1. Графік функції $y = f(x) + b$ дістанемо з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням останнього вздовж осі Oy на величину, що дорівнює b (рис. 4.14).

2. Графік функції $y = f(x + a)$ дістаємо з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням останнього вздовж осі Ox на величину, що дорівнює a (рис. 4.15).

3. Графік функції $y = cf(x)$, $c \neq 0$ (рис. 4.16) дістаємо з графіка функції $y = f(x)$ при $0 < c < 1$ за допомогою стискування в $\frac{1}{c}$ разів ординат останнього, а при $c > 1$ за допомогою розтягування в c разів

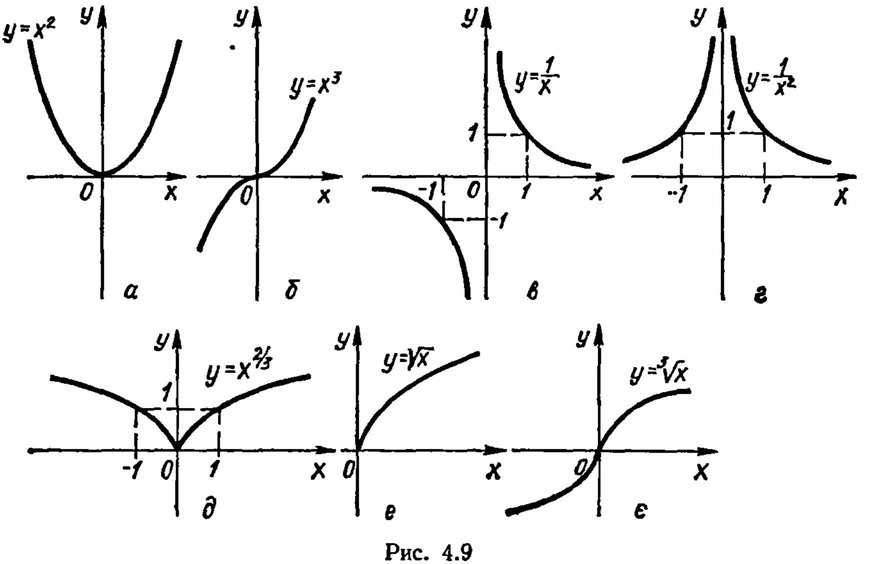


Рис. 4.9

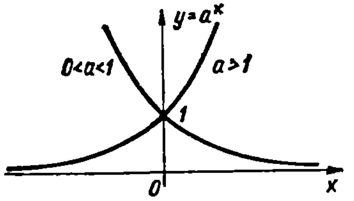


Рис. 4.10

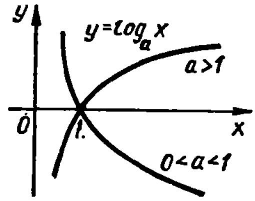


Рис. 4.11

його ординат із збереженням відповідних абсцис. Якщо $-\infty < c < 0$, то графік $y = cf(x)$ є дзеркальним відображенням графіка $y = -cf(x)$ відносно осі Ox (відповідно до випадків $-1 < c < 0$ і $c < -1$).

4. Графік функції $y = f(kx)$, $k \neq 0$ дістаємо з графіка функції $y = f(x)$ при $0 < k < 1$ збільшенням в $\frac{1}{k}$ разів абсцис його точок, а при $1 < k < +\infty$ зменшенням в k разів абсцис його точок із збереженням їхніх ординат (рис. 4.17).

Якщо $-\infty < k < 0$, то графік $y = f(kx)$ є дзеркальним відображенням графіка $f(-kx)$ відносно осі Oy.

Введемо арифметичні операції над функціями. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині A, а $\varphi(x)$ — на множині B, причому переріз цих множин $C = A \cap B \neq \varnothing$. Тоді на множині C можна визначити суму функцій $f(x) + \varphi(x)$. Значення суми в точці $x = x_0 \in C$ — це число, яке дорівнює сумі $f(x_0) + \varphi(x_0)$. Аналогічно

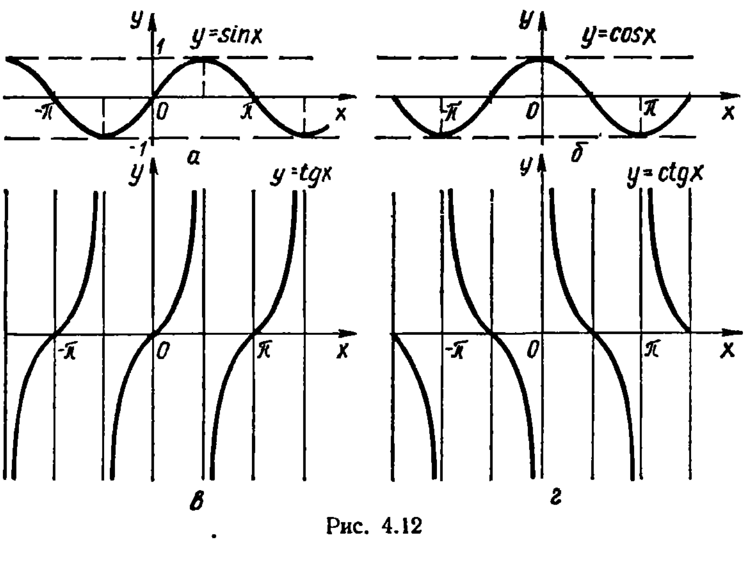


Рис. 4.12

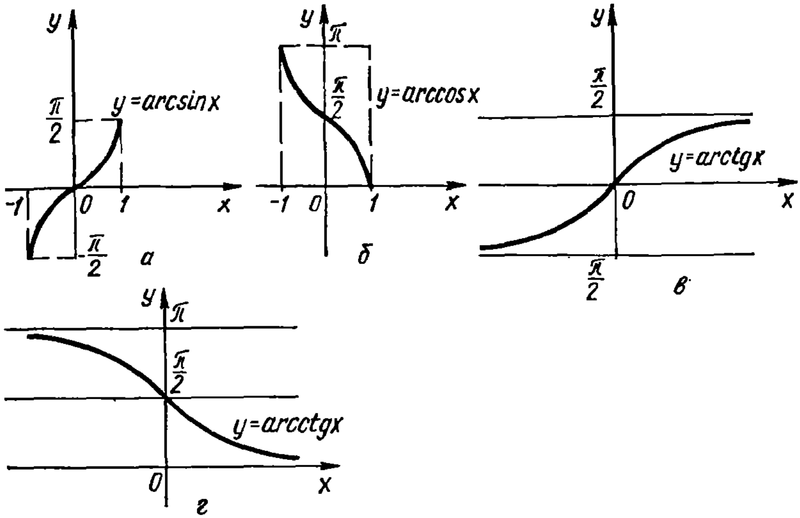


Рис. 4.13

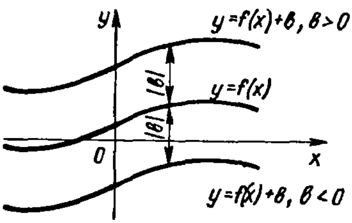


Рис. 4.14

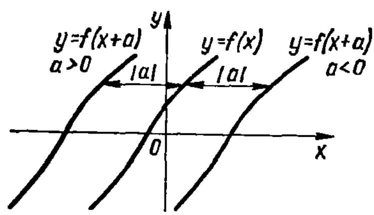


Рис. 4.15

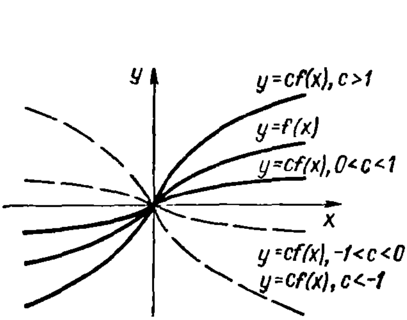


Рис. 4.16

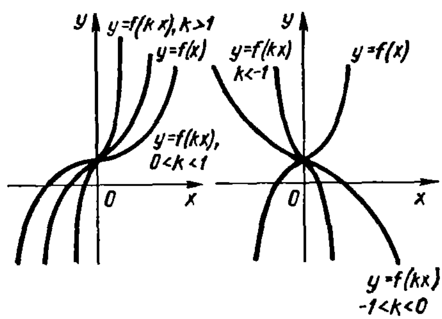


Рис. 4.17

можна визначити різницю $f(x) - \varphi(x)$, добуток $f(x)\ \varphi(x)$ та частку $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ цих функцій (останню за умови, що $\varphi(x) \neq 0,\ \forall x \in C$).

Над функціями виконують і так звану операцію *суперпозиції*, або *накладання*. Нехай функція $y = f(u)$ визначена на множині A, а функція $u = \varphi(x)$ — на множині B, причому для кожного значення $x \in B$ відповідне значення $u = \varphi(x) \in A$. Тоді на множині B визначена функція $f(\varphi(x))$, яку називають *складеною функцією* від x, або *суперпозицією* заданих функцій, або *функцією від функції*.

Змінну $u = \varphi(x)$ функції $y = f(u)$ називають *проміжним аргументом*, або *внутрішньою функцією*, а змінну $y = f(u)$ *зовнішньою функцією*.

Наприклад, функція $y = \sqrt[3]{\sin x}$ є суперпозицією двох основних елементарних функцій — степеневої та тригонометричної: $y = \sqrt[3]{u}$, $u \in [-1;\ 1]$, $u = \sin x$, $x \in (-\infty;\ +\infty)$. Складені функції можна утворювати за допомогою суперпозиції не тільки двох, а й більшої кількості функцій.

Наприклад, функцію $y = 2^{\sin x^3}$ можна розглядати як суперпозицію трьох функцій:

$$y = 2^u,\quad u \in [-1;\ 1],\ u = \sin v,\quad v \in (-\infty;\ +\infty),$$
$$v = x^3,\quad x \in (-\infty;\ +\infty).$$

Основні елементарні функції, а також функції, утворені за допомогою формул, в яких над основними елементарними функціями виконується лише скінченне число арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення) і суперпозицій, називаються *елементарними*.

Так, функція $y = \arccos\frac{1}{x} + \frac{5x^2 - 1}{\sin x}$ є елементарною функцією, а функції

$$y = \begin{cases} x^2, & -\infty < x \leq 1; \\ 2x + 1, & 1 < x < +\infty; \end{cases} \qquad y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$$

не є елементарними. Неелементарними є також функції $n!$, $\operatorname{sign} x$, $E(x)$, $D(x)$.

Елементарні функції поділяють на такі класи.

1) Функція виду $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, де $n \in Z_0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — дійсні числа — коефіцієнти ($a_0 \neq 0$), називається *цілою раціональною функцією*, або *многочленом* (*поліномом*) *степеня* n. Многочлен першого степеня називається також *лінійною функцією*, а другого — *квадратичною*.

2) Функція, що є відношенням двох многочленів

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m},$$

називається *дробовою раціональною функцією,* або *раціональним дробом.*

Сукупність многочленів і раціональних дробів утворює клас *раціональних функцій.*

3) Функція, утворена за допомогою скінченного числа суперпозицій та арифметичних операцій над раціональними функціями і над степеневими функціями з дробовими показниками і яка не є раціональною, називається *ірраціональною функцією.*

Наприклад, функції $y = \sqrt{\frac{2x+1}{x^3+1}}$; $y = \sqrt{x} + 5$ — ірраціональні.

4) Елементарна функція, яка не є раціональною або ірраціональною, називається *трансцендентною функцією.* Це, наприклад, функції $y = \sin x$, $y = 2^x + x$, $y = \lg x$, $y = \operatorname{arctg} x$ тощо.

2.5. Обмежені функції

Функцію $f(x)$, визначену на множині A, називають *обмеженою* на цій множині, коли існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in A$ виконується нерівність $|f(x)| \leqslant M$. Таким чином, значення обмеженої функції не виходять за межі відрізка $[-M; M]$. Тому її графік лежить між прямими $y = -M$ та $y = M$ (рис. 4.18). Наприклад, функції $y = \sin x$ та $y = \cos x$ обмежені на всій числовій осі, бо $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Якщо для функцій $f(x)$ або $\varphi(x)$, визначених на множині A, існує таке число N, що виконується нерівність $f(x) \leqslant N$ або $\varphi(x) \geqslant N$, то функцію $f(x)$ називають *обмеженою зверху,* а $\varphi(x)$ — *обмеженою знизу.* Наприклад, функція $y = a^x$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ обмежена знизу прямою $y = 0$, але не обмежена зверху; функція $y = -x^2 + 4x - 3$ (рис. 4.19) обмежена зверху прямою $y = 1$, але не обмежена знизу; функція $y = \frac{1}{x}$ — необмежена.

Розглядаючи обмеженість функції $f(x)$, ми тим самим характеризуємо множину значень цієї функції.

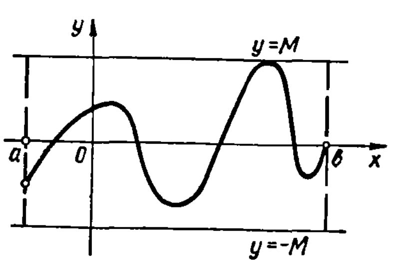


Рис. 4.18

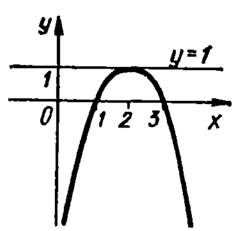


Рис. 4.19

2.6. Монотонні функції

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині A. Якщо для двох довільних різних значень x_1 і x_2 аргументу, взятих із множини A, з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що:

а) $f(x_1) < f(x_2)$, то функція називається *зростаючою;*

б) $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, то функція називається *неспадною;*

в) $f(x_1) > f(x_2)$, то функція називається *спадною;*

г) $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то функція називається *незростаючою.*

Наприклад, функція $y = a^x$ (рис. 4.10) є зростаючою при $a > 1$ і спадною при $0 < a < 1$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$; функція $y = -x^2 + 4x - 3$ (рис. 4.19) є зростаючою на інтервалі $(-\infty; 2)$ і спадною на інтервалі $(2; +\infty)$; функція $E(x)$ (рис. 4.8) — неспадна.

Зростаючі, незростаючі, спадні й неспадні функції на множині A називаються *монотонними* на цій множині, а зростаючі і спадні — *строго монотонними.*

Нехай функція не є монотонною в усій своїй області визначення, але цю область можна розбити на деяке (скінченне чи нескінченне) число проміжків, які не перетинаються і на кожному з яких функція монотонна. Такі проміжки називаються *проміжками монотонності функції.*

Так, функція $y = x^2$ не є монотонною на всій числовій осі, але має два проміжки монотонності: $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$; на першому з них функція спадає, а на другому — зростає.

Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ мають нескінченну кількість проміжків монотонності.

2.7. Парні і непарні функції

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині A точок осі Ox, розміщених симетрично відносно точки $x = 0$, тобто якщо $x \in A$, то й $-x \in A$.

Функцію $f(x)$ називають *парною,* якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in A$, і *непарною,* якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in A$.

Приклади

1. Функція $y = \dfrac{1}{x+2}$ не є парною і не є непарною, бо її область визначення не симетрична відносно точки $x = 0$: в точці $x = 2$ функція визначена, а в точці $x = -2$ — не визначена.

2. Функція $y = \dfrac{2x^2 + x}{x}$ має область визначення $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, симетричну відносно точки $x = 0$, але не є ні парною, ні непарною, бо

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2 + (-x)}{-x} = -\frac{2x^2 - x}{x}; \quad -f(x) = -\frac{2x^2 + x}{x};$$

$$f(-x) \neq f(x), \quad f(-x) \neq -f(x).$$

3. Область визначення функції $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-3}$ симетрична відносно точки $x=0$ ($x\neq\pm\sqrt{3}$), і ця функція парна, бо

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-3}=\frac{x^2+1}{x^2-3}=f(x).$$

4. Функції $y=\sin x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ — непарні, а $y=\cos x$ — парна.

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy, а непарної — відносно початку координат. Крім того, якщо парна чи непарна функція має певну властивість для додатних значень x, то можна визначити відповідну властивість для від'ємних значень x. Наприклад, якщо для $x>0$ парна функція зростає, то для $x<0$ ця функція спадає.

2.8. Періодичні функції

Функція $f(x)$, визначена на всій числовій прямій, називається *періодичною*, якщо існує таке число T, що $f(x+T)=f(x)$. Число T називається *періодом* функції. Якщо T — період функції, то її періодами є також числа kT, де k дорівнює ±1, ±2, ... Найменший з додатних періодів функції, якщо такий існує, називається *основним періодом* функції.

Ми визначили періодичну функцію, задану на всій числовій прямій. Більш загальним є таке означення.

Функція $f(x)$, визначена на множині X, називається *періодичною на цій множині*, якщо існує таке число $T\neq0$, що $x+T\in X$ і $f(x+T)=f(x)$, $x\in X$.

З означення випливає, що для побудови графіка періодичної з періодом T функції досить побудувати її графік на довільному проміжку довжини T, а потім продовжити цей графік на всю область визначення, повторюючи його через кожний проміжок довжини T.

Приклади

1. Основним періодом функцій $y=\sin x$, $y=\cos x$ є число $T=2\pi$.
2. Функції $y=\operatorname{tg} x$ і $y=\operatorname{ctg} x$ мають основний період $T=\pi$.
3. Періодом функції $y=C$ (C — стала) є довільне, відмінне від нуля число; ця функція не має основного періоду.
4. Знайти період функції $y=\sin(ax+b)$, $x\in(-\infty;+\infty)$.

○ Якщо ця функція періодична, то існує таке число $T\neq0$, що

$$\sin(ax+b)=\sin(a(x+T)+b),$$

звідки

$$2\pi n+ax+b=ax+aT+b,\qquad T=\frac{2\pi n}{a},\ n\in Z.$$

Отже, основним періодом даної функції є число $T=\frac{2\pi}{|a|}$. ●

Періодичні функції відіграють важливу роль для математичного опису періодичних явищ, що спостерігаються в природі. Характерною особливістю цих явищ є періодичне повторення їх через певні проміжки часу. Прикладами можуть бути рух маятника навколо осі, рух небесних тіл (планети рухаються по еліптичних орбітах), робота майже всіх машин і механізмів пов'язана з періодичним рухом (рух поршнів, шатунів тощо).

2.9. Неявно задані функції

Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$, розв'язаним відносно залежної змінної y, то кажуть, що функція задана у явній формі або є явною.

Під неявним заданням функції розуміють задання функції у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, не розв'язаного відносно залежної змінної.

Це рівняння задає функцію лише тоді, коли множина впорядкованих пар чисел (x, y), які є розв'язком даного рівняння, така, що будь-якому числу x_0 у цій множині відповідає не більше однієї пари (x_0, y_0) з першим елементом x_0. Так, рівняння $2x + 3y - 1 = 0$ задає функцію, а рівняння $x^2 + y^2 = 4$ не задає, бо значенню $x_0 = \sqrt{3}$ відповідає дві пари чисел: $(\sqrt{3}, 1)$, $(\sqrt{3}, -1)$.

Довільну явно задану функцію $y = f(x)$ можна записати як неявно задану рівнянням $f(x) - y = 0$, але не навпаки. Наприклад, функцію $e^y - x + y = 0$ явно записати не можна, бо це рівняння не можна розв'язати відносно y. Тому неявна форма запису функції більш загальна, ніж явна. Неявно задану функцію називають *неявною*.

Зауважимо, що терміни «явна функція» і «неявна функція» характеризують не природу функції, а аналітичний спосіб її задання.

2.10. Обернені функції

Нехай задана функція $y = f(x)$ з областю визначення X і множиною значень Y. Функція $f(x)$ кожному значенню $x_0 \in X$ ставить у відповідність єдине значення $y_0 \in Y$ (рис. 4.20). При цьому може виявитись, що різним значенням аргументу x_1 і x_2 відповідає одне й те саме значення функції y_1 (рис. 4.21). Додатково вимагатимемо, щоб функція $f(x)$ різним значенням x ставила у відповідність різ-

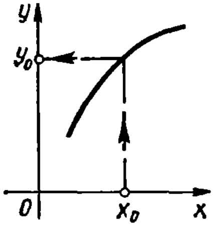


Рис. 4.20

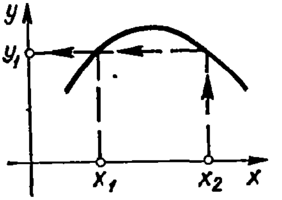


Рис. 4.21

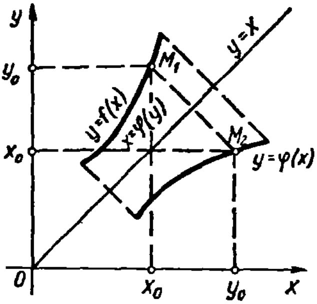


Рис. 4.22

ні значення y. Тоді кожному значенню $y \in Y$ відповідатиме єдине значення $x \in X$, тобто можна визначити функцію $x = \varphi(y)$ з областю визначення Y і множиною значень X. Ця функція називається *оберненою функцією* до даної.

Отже, функція $x = \varphi(y)$ є оберненою до функції $y = f(x)$, якщо:

1) областю визначення функції φ є множина значень функції f;

2) множина значень функції φ є областю визначення функції f;

3) кожному значенню змінної $y \in Y$ відповідає єдине значення змінної $x \in X$.

З цього випливає, що кожна з двох функцій $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ може бути названа прямою або оберненою, тобто ці функції взаємно обернені.

Щоб знайти функцію $x = \varphi(y)$, обернену до функції $y = f(x)$, достатньо розв'язати рівняння $f(x) = y$ відносно змінної x (якщо це можливо). Оскільки кожна точка $(x; y)$ кривої $y = f(x)$ є одночасно точкою кривої $x = \varphi(y)$, то графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ збігаються. Якщо ж додатково зажадати, щоб, як звичайно, незалежна змінна позначалась через x, а залежна — через y, то замість функції $x = \varphi(y)$ матимемо функцію $y = \varphi(x)$. Це означає, що кожна точка $M_1(x_0; y_0)$ кривої $y = f(x)$ стане точкою $M_2(y_0; x_0)$ кривої $y = \varphi(x)$. Оскільки в системі координат Oxy точки M_1 і M_2 симетричні відносно прямої $y = x$, то графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$ симетричні відносно бісектриси першого і третього координатних кутів (рис. 4.22).

З означення оберненої функції випливає, що функція $y = \varphi(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ має обернену тоді і тільки тоді, коли ця функція задає взаємно однозначну відповідність між множинами X і Y. Таку властивість мають, зокрема, зростаючі функції, оскільки для них $(x_1 < x_2) \Leftrightarrow (y_1 < y_2)$, і спадні функції, тому що для них $(x_1 < x_2) \Leftrightarrow (y_1 > y_2)$. Звідси випливає, що будь-яка строго монотонна функція має обернену функцію. При цьому, якщо пряма функція строго зростає (спадає), то обернена їй функція також строго зростає (спадає).

Зазначимо без доведення, що коли функція $y = f(x)$ зростає (спадає) і неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона має обернену функцію, яка зростає (спадає) і неперервна на відрізку $[f(a); f(b)]$ $([f(b); f(a)])$ [12].

Приклади

1. Функція $y = 2x - 1$ має обернену функцію $y = \dfrac{x+1}{2}$ (рис. 4.23).

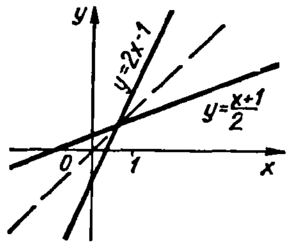


Рис. 4.23

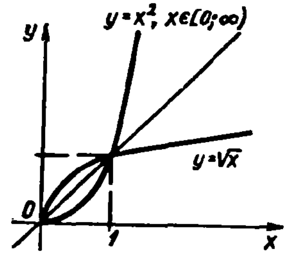


Рис. 4.24

2. Функція $y = x^2$ на множині $(-\infty; +\infty)$ не має оберненої, тому що вона не є монотонною; на множині $(0; +\infty)$ вона має обернену функцію $y = \sqrt{x}$, $x \in (0; +\infty)$ (рис. 4.24).

3. Функція $y = a^x$, $x \in R$, $y \in (0; +\infty)$ (рис. 4.10) має обернену функцію $y = \log_a x$, $x \in (0; +\infty)$, $y \in R$ (рис. 4.11).

4. Функція $y = \sin x$, $x \in R$ (рис. 4.12, *а*) не має оберненої; функція $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ має обернену функцію $y = \arcsin x$, $x \in [-1; 1]$ (рис. 4.13, *а*).

5. Функція $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$ (рис. 4.12, *б*) має обернену функцію $y = \arccos x$, $x \in [-1; 1]$, $y \in [0; \pi]$ (рис. 4.13, *б*).

6. Функція $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in (-\infty; +\infty)$ (рис. 4.13, *в*) обернена функції $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $y \in R$ (рис. 4.12, *в*).

7. Функція $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in R$ (рис. 4.13, *г*) обернена функції $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$, $y \in R$ (рис. 4.12, *г*).

2.11. Параметрично задані функції

Нехай задано дві функції

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t) \tag{1}$$

однієї незалежної змінної t, визначені на одному й тому самому проміжку. Якщо функція $x = \varphi(t)$ строго монотонна, то згідно з попереднім пунктом вона має обернену функцію $t = \Phi(x)$. Тому змінну y можна розглядати як складену функцію від x : $y = \psi(\Phi(x))$.

Задання функціональної залежності між x і y у вигляді двох функцій (1) називають *параметричним заданням функцій.* Допоміжна змінна t при цьому називається *параметром.* Всяка параметрично задана функція (1) визначає на площині Oxy деяку криву, проте не всяка параметрично задана крива (гл. 3, п. 1.4) визначає функцію.

Приклади

1. Рівняння $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $t \in [0; \pi]$ визначають функцію, оскільки змінна $x = R \cos t$, $t \in [0; \pi]$ строго монотонна. Задана функція визначає півколо $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, розміщене у верхній півплощині, тому що при $0 \leqslant t < \pi$ значення $y = R \sin t \geqslant 0$.

2. Рівняння $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ визначають функцію, графіком якої є дуга астроїди, що знаходиться у першому координатному куті (рис. 3.8).

Завдання для самоконтролю

1. Що називається функцією? Навести приклади.
2. Що називається областю визначення та множиною значень функції?
3. Охарактеризувати основні способи задання функції.
4. Які функції називаються основними елементарними функціями?
5. Побудувати графіки таких основних елементарних функцій:

$y = x$; $y = x^2$; $y = x^3$; $y = x^{-1}$; $y = a^x$;

$y = \log_a x$; $y = \sin x$; $x = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$;

$y = \operatorname{ctg} x$; $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \operatorname{arctg} x$.

6. Як, маючи графік функції $y = f(x)$, побудувати графік функції $y = af(kx + b)$?
7. Яка функція називається складеною? Навести приклади.
8. Яка функція називається елементарною?
9. Як класифікують елементарні функції?
10. Які функції називаються монотонними? Навести приклади.
11. Яка функція називається парною, непарною? Які особливості цих функцій? Навести приклади.
12. Яка функція називається періодичною? Що називається її основним періодом? Навести приклади.
13. Як знайти функцію, обернену до даної? За яких умов існує обернена функція? Навести приклади.
14. Яка функція називається неявно заданою, параметрично заданою?
15. Знайти область визначення функцій:

а) $y = \sqrt{x} + \arcsin \dfrac{3x - 1}{4} + \lg(9 - x^2)$; б) $y = \lg\cos x$.

16. Нехай $f(x) = (x + 1)(x - 1)^{-1}$. Довести, що $f(x^{-1}) = -f(x)$.
17. За допомогою перетворень відповідних графіків основних елементарних функцій побудувати графіки функцій: а) $y = \sin x + 3$; б) $y = 3\sin 2x$; в) $y = \lg(x - 1)$.
18. Довести, що коли кожна з функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ зростає на інтервалі $(a; b)$, то їхня сума $f(x) + \varphi(x)$ також зростає на цьому інтервалі.
19. Довести: а) функція $y = x^4 + 2x^2$, $x \in [0; 1]$ не є ні парною, ні непарною; б) функція $y = x^2 + \cos x$, $x \in (-\infty; +\infty)$ парна; в) функція $y = x^3 - 3\sin x$, $x \in R$ — непарна.

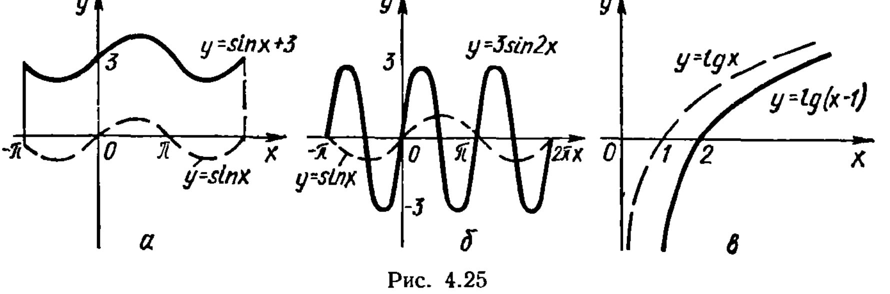


Рис. 4.25

20. Довести, що функція $y = \sin \frac{1}{x}$ неперіодична, а функція $y = \sin 3x$ має основним періодом число $T = \frac{2}{3}\pi$.

Відповіді. 15. а) $\left[0; \frac{5}{3}\right]$; б) $\left(2\pi k - \frac{\pi}{2}; 2\pi k + \frac{\pi}{2}\right)$, $k \in Z$.

17. Див. рис. 4.25, *а — в*.

§ 3. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

3.1. Числова послідовність

З поняттям числової послідовності ми зустрічались під час вивчення шкільного курсу алгебри та геометрії. Зокрема, числовими послідовностями є арифметична прогресія, геометрична прогресія, послідовність периметрів і площ правильних n-кутників, вписаних у коло, послідовність площ поверхонь та об'ємів правильних n-гранних призм, вписаних в циліндр, тощо.

Сформулюємо означення числової послідовності в загальному вигляді: якщо кожному натуральному числу $n \in N$ за певним правилом ставиться у відповідність число x_n, то множину чисел

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$$

називають *числовою послідовністю* (або коротко *послідовністю*) і позначають символом $\{x_n\}$.

Окремі числа x_1, x_2, ..., x_n, ... називають членами або елементами послідовності: x_1 — перший член послідовності, x_2 — другий і т. д., x_n — n-й, або загальний член послідовності.

За означенням послідовність містить нескінченну кількість членів, причому будь-які два з них відрізняються, принаймні, номерами. Отже, елементи x_n і x_m при $n \neq m$ вважаються різними, хоча як числа вони можуть бути рівні між собою. Якщо всі елементи послідовності $\{x_n\}$ дорівнюють одному й тому самому числу, то її називають сталою.

Геометрично послідовність зображається на числовій осі у вигляді послідовності точок, координати яких дорівнюють відповідним членам послідовності. Можна також зображати послідовність точками координатної площини Oxy, відкладаючи на осі Ox номери членів послідовності, а на осі Oy — відповідні члени.

Послідовність вважається заданою, якщо вказано спосіб знаходження її загального члена. Найчастіше послідовність задається формулою її загального члена.

Очевидно, що всяка функція $y = f(n)$, задана на множині натуральних чисел N, визначає деяку числову послідовність $\{y_n\}$ з загальним членом $y_n = f(n)$.

Числові послідовності можна задавати і так званим рекурентним (від латинського recurrens — зворотний) способом. Суть його полягає в тому, що задають кілька членів послідовності і вказують правило, за яким можна знайти наступний її член.

Іноді числові послідовності задають словесним описом. Зазначимо, що в загальному випадку задача написання формули загального члена послідовності не розв'язується, тобто не можна стверджувати, що для довільної послідовності можна знайти формулу її загального члена.

Приклади

1. Записати перші п'ять членів послідовності, заданої її загальним членом:

а) $x_n = \frac{2n+1}{n}$; б) $y_n = \frac{n + (-1)^n n}{n}$.

○ Підставляючи у формулу n-го члена послідовно числа 1, 2, 3, 4, 5, дістанемо :

а) $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots\} = \left\{3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \ldots\right\}$;

б) $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, \ldots\} = \{0, 2, 0, 2, 0, \ldots\}$. ●

2. Записати перші п'ять членів послідовності $\{a_n\}$, заданої рекурентним співвідношенням $a_n = \frac{3a_{n-1} - a_{n-2}}{3}$, де $n = 3, 4, \ldots$, якщо $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

○ Згідно з рекурентною формулою маємо

$$a_3 = \frac{3a_2 - a_1}{3} = \frac{5}{3}, \quad a_4 = \frac{3a_3 - a_2}{3} = 1, \quad a_5 = \frac{3a_4 - a_3}{3} = \frac{4}{9},$$

отже,

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots\} = \left\{1, 2, \frac{5}{3}, 1, \frac{4}{9}, \ldots\right\}. ●$$

3. Евклід довів, що множина простих чисел

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots\}$$

нескінченна, тобто прості числа утворюють послідовність. Формула загального члена цієї послідовності досі не знайдена і навіть невідомо, чи така формула існує.

3.2. Границя числової послідовності. Границя змінної величини. Єдиність границі

Нехай змінна x_n перебігає значення послідовності $\{x_n\}$, тобто є дискретною змінною.

Число x_0 називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N$ виконується нерівність

$$|x_n - x_0| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Якщо число x_0 є границею послідовності $\{x_n\}$, то пишуть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \text{ або } \lim x_n = x_0, \ x_n \to x_0,$$

і кажуть, що послідовність $\{x_n\}$, або змінна x_n, має границю, яка дорівнює числу x_0 або прямує до x_0. Коротко означення границі можна записати так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Послідовність, яка має границю x_0, називається *збіжною до* x_0 (або просто збіжною). Послідовність, яка не є збіжною, називається *розбіжною.*

Розглянемо геометричний зміст границі послідовності. Нерівність (2) рівносильна нерівностям

$$-\varepsilon < x_n - x_0 < \varepsilon, \text{ або } x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon,$$

які показують, що елемент x_n знаходиться в ε-околі точки x_0 (рис. 4.26). Тому означення границі геометрично можна сформулювати так: число x_0 називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для довільного ε-околу точки x_0 існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що всі значення x_n, для яких $n > N$, попадають в цей окіл. Поза цим околом може залишитися хіба що скінченна кількість членів послідовності $\{x_n\}$.

Приклади

1. Відомо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right) = 2$. Нехай $\varepsilon = 0{,}01$.

Скільки членів послідовності $\{x_n\}$ лежить поза околом $(2 - 0{,}01;\ 2 + 0{,}01) = (1{,}99;\ 2{,}01)$?

○ Оскільки

$$|x_n - 2| = \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2},$$

то нерівність $|x_n - 2| < 0{,}01$ виконуватиметься при $\frac{1}{n^2} < 0{,}01$, звідки $n > 10$.

Отже, поза околом $(1{,}99;\ 2{,}01)$ знаходиться лише 10 членів даної послідовності.

Геометрично це означає, що всі члени послідовності $\{x_n\}$ при $n > 10$ знаходяться від точки 2 на відстані, яка менша від 0,01. На рисунку це зобразити не можна, бо точки 1,99; 2,01 — кінці околу і нескінченна кількість точок x_n, де $n > 10$, які лежать в цьому околі, практично зливаються в одну точку. ●

2. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+3} = 1$.

○ Нехай $\{x_n\} = \left\{\frac{2n-1}{2n+3}\right\}$, тоді $|x_n - 1| = \left|\frac{2n-1}{2n+3} - 1\right| = \frac{4}{2n+3}$.

Задамо довільне число $\varepsilon > 0$. Нерівність $|x_n - 1| < \varepsilon$ виконуватиметься, якщо $\frac{4}{2n+3} < \varepsilon$, звідки $n > \frac{2}{\varepsilon} - \frac{3}{2}$. Позначимо через N найбільше ціле число,

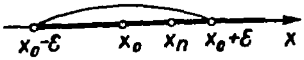


Рис. 4.26

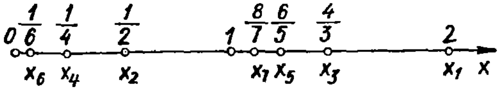


Рис. 4.27

яке не перевищує $\frac{2}{\varepsilon} - \frac{3}{2}$: $N = E\left(\frac{2}{\varepsilon} - \frac{3}{2}\right)$. Тоді при всіх $n > N$ матимемо $|x_n - 1| < \varepsilon$. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+3} = 1$. ●

3. Довести, що послідовність $\{\cos \pi n\}$ розбіжна.

○ Задана послідовність має вигляд

$$\{-1, +1, -1, +1, \ldots, (-1)^n, \ldots\}.$$

Вона не має границі, тому що поза довільним ε-околом $(0 < \varepsilon < 1)$ будь-якої точки числової осі міститься нескінченна кількість членів даної послідовності. ●

4. Довести, що послідовність, яка задана загальним членом

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{n}, & n = 1, 3, 5, \ldots, \\[2ex] \dfrac{1}{n}, & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

не має границі.

○ Знайдемо кілька початкових членів послідовності і зобразимо їх схематично на числовій прямій (рис. 4.27). Для цієї послідовності характерним є те, що при достатньо великих k значення x_{2k} з парними номерами як завгодно мало відрізняються від нуля, а значення x_{2k+1} з непарними номерами як завгодно мало відрізняються від одиниці.

За означенням число x_0 буде границею послідовності, якщо в будь-якому ε-околі точки x_0 знаходиться нескінченна, а за околом — скінченна множина її членів. У даному випадку в довільному ε-околі $(0 < \varepsilon < 1)$ нуля міститься нескінченна множина членів послідовності з парними номерами, а за цим околом знаходиться нескінченна множина її членів з непарними номерами. Це значить, що число 0 не буде границею заданої послідовності.

Аналогічно переконуємось, що границею не може бути і число 1. Отже, задана послідовність розбіжна. ●

Нехай тепер змінна величина x набуває всіх числових значень деякого скінченного проміжку X, тобто є *неперервною змінною*, і нехай точка $x_0 \in X$ або $x_0 \notin X$.

Число x_0 називають *границею змінної* x, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке значення x', починаючи з якого для всіх наступних значень x виконується нерівність $|x - x_0| < \varepsilon$ і пишуть

$$\lim x = x_0 \text{ або } x \to x_0.$$

Геометричний зміст поняття границі змінної такий: число x_0 є границею змінної x, якщо для довільного ε-околу точки x_0 знайдеться таке значення x', що всі наступні значення змінної x попадають в цей окіл.

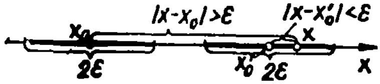


Рис. 4.28

Якщо порівняти означення границі послідовності і границі змінної, то в означенні границі послідовності говориться про номер n того члена послідовності $\{x_n\}$, починаючи з якого виконується нерівність $|x_n - x_0| < \varepsilon$, а в означенні границі змінної x йдеться про числове значення змінної x', тобто про те значення x', починаючи з якого всі наступні значення змінної задовольняють нерівність $|x - x_0| < \varepsilon$.

Отже, границею змінної величини x є границя довільної послідовності значень, які ця змінна набуває:

$$\lim_{n\to\infty} x = x_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ або } x \to x_0 \Leftrightarrow x_n \to x_0.$$

Як зазначалось в § 1, сталу величину C можна розглядати як змінну, всі значення якої однакові: $x = C$.

Границя сталої величини дорівнює цій сталій тому, що

$$|x - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon.$$

Із означення границі випливає, що змінна не може мати двох границь. Дійсно, якби виявилось, що $x \to x_0$ і $x \to x_0'$ $(x_0 < x_0')$, то x має задовольняти відразу дві нерівності:

$$|x - x_0| < \varepsilon \text{ і } |x - x_0'| < \varepsilon$$

для як завгодно малого ε, а це неможливо, якщо $\varepsilon < \frac{x_0' - x_0}{2}$ (рис. 4.28).

Цю властивість не треба розуміти так, що всяка змінна обов'язково має одну границю. Приклади 3 і 4 свідчать, що це не так. Але якщо змінна має границю, то ця границя тільки одна.

3.3. Нескінченно великі змінні величини

При означенні границі x_0 змінної величини x вважалось, що x змінюється на деякому скінченному проміжку і що x_0 — стале число. Розглянемо тепер змінну, яка набуває всіх значень деякого нескінченного проміжку X.

Якщо для довільного числа $M > 0$ існує таке значення x', починаючи з якого всі наступні значення x задовольняють нерівність $|x| > M$, то кажуть, що змінна x прямує до нескінченності і пишуть

$$\lim x = \infty \text{ або } x \to \infty.$$

Якщо змінна $x \to \infty$, то її називають *нескінченно великою змінною величиною*. Коротко означення нескінченно великої змінної величини можна записати так:

$$(\forall M > 0\ \exists x' \in X: \forall |x| > |x'| \Rightarrow |x| > M) \Leftrightarrow \lim x = \infty.$$

Додатна і від'ємна нескінченно великі змінні величини відповідно визначаються так:

$$(\forall M > 0\ \exists x' \in X: \forall x > x' \Rightarrow x > M) \Leftrightarrow \lim x = +\infty;$$

$$(\forall M > 0\ \exists x' \in X: \forall x < x' \Rightarrow x < -M) \Leftrightarrow \lim x = -\infty.$$

Приклади

1. Змінна $\{x_n\} = n! = \{1, 2, 6, 24, 120, \ldots\}$ — нескінченно велика величина, яка прямує до плюс нескінченності: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

2. Змінна $\{y_n\} = \{-n^3\} = \{-1, -8, -27, \ldots\}$ є нескінченно великою величиною, що прямує до мінус нескінченності: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$.

3. Змінна $\{z_n\} = \{n^2 \cos \pi n\} = \{-1, 4, -9, \ldots\}$ є нескінченно великою величиною, у якої необмежено зростає модуль, тому $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

4. Змінна величнна $\{t_n\} = \left\{\dfrac{n + (-1)^n n}{2}\right\} = \{0, 2, 0, 4, 0, 6, \ldots\}$

не є нескінченно великою величиною, бо для довільного числа M не існує чнсла $t' \in \{t_n\}$ такого, щоб при $t_n > t'$ виконувалась нерівність $t_n > M$.

Звертаємо увагу на те, що вираз «x прямує до нескінченності», може викликати неправильне уявлення, що x прямує до якогось числа, в той час як несправді x нікуди не прямує, а лише змінюється так, що $|x|$ переростає в будь-яке велике додатне число. Те саме потрібно сказати відносно виразів «границею змінної x є нескінченність» та «нескінченно велика величина». Говорячи про нескінченно велику величину, мають на увазі величину змінну, яка нескінченно зростає, тобто суть нескінченно великої величини зовсім не в її величині або розмірах, а в характері її зміни.

Користуючись означеннями, можна показати, що сума нескінченно великої величини і величини обмеженої є величина нескінченно велика. Символічно це записують так: $C + \infty = \infty$.

Сума двох нескінченно великих величин одного знака є нескінченно велика величина: $\infty + \infty = \infty$.

На відміну від цього сума двох нескінченно великих величин різних знаків не завжди буде нескінченно великою величиною, тому ця сума називається невизначеністю виду $\infty - \infty$.

Добуток двох нескінченно великих величин є величиною нескінченно великою: $\infty \cdot \infty = \infty$.

Добуток нескінченно великої величини на величину, що більша за абсолютним значенням деякого додатного числа, також є нескінченно велика величина.

Частка двох нескінченно великих величин не завжди є нескінченно великою величиною, тому дробовий вираз, чисельник і знаменник якого нескінченно великі змінні величини, називають невизначеністю виду $\frac{\infty}{\infty}$.

Таким чином, з виразами ∞, $+\infty$ і $-\infty$ не можна поводитись як з числами, бо це не числа, а лише символи, які характеризують певну змінну величину.

3.4. Границя функції в точці

Припустимо, що незалежна змінна x має границю x_0. Розглянемо зміну функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі X точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Число A називають *границею функції* $y = f(x)$ *в точці* x_0 (або при $x \to x_0$), якщо для довільної збіжної до x_0 послідовності $\{x_n\}$, де $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ має границю, яка дорівнює числу A, і записують

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A. \tag{3}$$

Отже, якщо для довільних збіжних до x_0 послідовностей $\{x_n\}$ існує одна і та сама границя $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, то ця границя і буде границею функції $f(x)$ в точці x_0.

Якщо ж для деякої хоча б однієї послідовності $\{x_n'\}$ $x_n' \neq x_0$, збіжної до x_0, послідовність $\{f(x_n')\}$ границі не має, то функція $f(x)$ не має границі в точці x_0.

Аналогічно функція $f(x)$ не має границі в точці x_0, якщо для двох різних, збіжних до x_0, послідовностей $\{x_n'\}$ і $\{x_n''\}$ відповідні послідовності $\{f(x_n')\}$ і $\{f(x_n'')\}$ мають різні границі.

Функція $f(x)$ може мати в точці x_0 тільки одну границю. Це випливає з того, що кожна змінна може мати лише одну границю.

Приклади

1. Функція $f(x) = x$ в будь-якій точці x_0 числової прямої має границю, яка дорівнює x_0, тому що послідовності $\{x_n\}$ і $\{f(x_n)\}$ збігаються: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

2. Функція $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ (рис. 4.29), визначена для всіх $x \neq 0$, в точці $x = 0$ границі не має. Дійсно, візьмемо дві збіжні до 0 послідовності значень аргументу:

$$\{x_n'\} = \left\{\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \ldots, \frac{1}{n\pi}, \ldots\right\},$$

$$\{x_n''\} = \left\{\frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \ldots, \frac{2}{(4n-3)\pi}, \ldots\right\}.$$

Очевидно, $x_n' \to 0$, $x_n'' \to 0$ і $x_n' \neq 0$, $x_n'' \neq 0$.

Знайдемо відповідні послідовності значень функції:

$$\{f(x_n')\} = \{\sin n\pi\} = \{0, 0, \ldots, 0, \ldots\},$$

$$\{f(x_n'')\} = \left\{\sin \frac{(4n-3)\pi}{2}\right\} = \left\{\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right\} = \{1, 1, \ldots, 1, \ldots\},$$

звідки $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'') = 1$. Отже, для двох різних збіжних до нуля послідовностей значень аргументу послідовності відповідних значень функції мають різні границі. Це означає, що $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ не існує.

Геометричний зміст границі функції: співвідношення $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ означає, що для всіх точок x досить близьких до точки x_0 відповідні значення функції як завгодно мало відрізняються від точки A.

З цим пов'язане друге означення границі. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі X точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0. Число A називається *границею функції в точці* x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Це означення коротко можна записати так:

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Геометрично це ілюструється так: число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для довільного ε-околу точки A знайдеться δ-окіл точки x_0 такий, що коли значення аргументу x взяти з множини $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, то відповідні значення функції $f(x)$ лежатимуть в ε-околі точки A (рис. 4.30).

Перше означення границі функції базується на понятті границі послідовності, тому його називають *означенням на «мові послідовнос-*

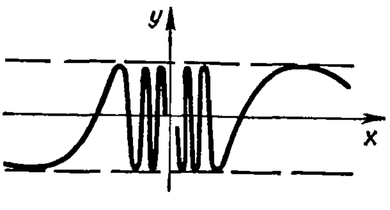


Рис. 4.29

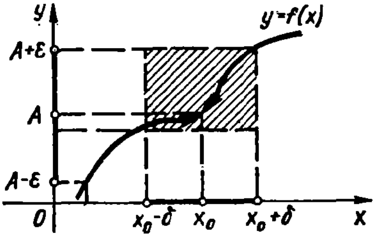


Рис. 4.30

тей», або *означенням границі за Гейне.* Друге означення називають *означенням «на мові ε — δ»*, або *означенням границі за Коші.*

Можна показати [22], що ці означення еквівалентні.

Приклад

Довести, що $\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)=5$.

○ Нехай $y=3x+2$ і задано довільне $\varepsilon>0$. Знайдемо $\delta>0$ таке, що для всіх x, які задовольняють нерівності $0<|x-1|<\delta$, виконується нерівність $|y-5|<\varepsilon$. Для виконання цієї нерівності необхідно, щоб

$$|3x+2-5|<\varepsilon, \text{ або } |x-1|<\frac{\varepsilon}{3},$$

звідси $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$. Якщо тепер для довільного $\varepsilon>0$ і знайденого δ взяти значення x, що задовольняють нерівності $|x-1|<\delta$, то

$$|x-1|<\delta\Rightarrow|x-1|<\frac{\varepsilon}{3}\Rightarrow|3x+2-5|<\varepsilon\Rightarrow|y-5|<\varepsilon. \ \bullet$$

У наведених вище означеннях границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ вважалось, що x прямує до x_0 довільним способом: залишаючись меншим від x_0 (зліва від x_0), більшим від x_0 (справа від x_0) чи коливаючись навколо x_0, тобто $x\to x_0$, набуваючи значень то менших, то більших від x_0 (то зліва то справа від x_0), як амплітуда затухаючих коливань маятника. Проте трапляється, що спосіб наближення аргументу x до x_0 суттєво впливає на значення границі функції. Тому доцільно ввести поняття *односторонніх границь.*

Нехай функція $y=f(x)$ (рис. 4.31) визначена в деякому околі точки x_0. Число A називається границею функції $y=f(x)$ *зліва* (або *лівою границею*) в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ таке, що при $x\in(x_0-\delta;x_0)$ виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Число B називається границею функції $y=f(x)$ *справа* (або *правою границею*) в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ таке, що при $x\in(x_0;x_0+\delta)$ виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

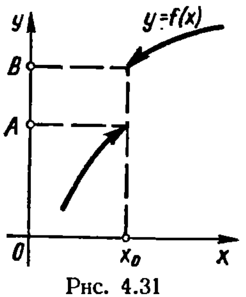


Рис. 4.31

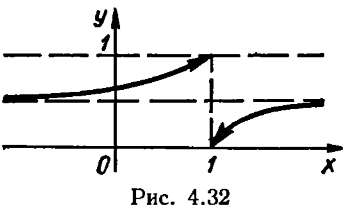


Рис. 4.32

Ліву і праву границі функції (рис. 4.31) називають *односторонніми границями* і позначають так:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) = A;$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0) = B.$$

Якщо $x_0 = 0$, то записують

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{x\to -0} f(x) = f(-0) = A;$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{x\to +0} f(x) = f(+0) = B.$$

Якщо функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $\langle a;\ b\rangle$, то в точці a може мати зміст лише число $f(a+0)$, а в точці b — лише число $f(b-0)$.

Умова $f(x_0+0) = f(x_0-0)$ є необхідною і достатньою [10] для існування границі функції $y = f(x)$ в точці x_0:

$$(f(x_0+0) = f(x_0-0) = A) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A. \tag{4}$$

Приклади

1. Нехай $f(x) = \operatorname{sign} x$ (рис. 4.5), тоді

$$\lim_{x\to -0} f(x) = -1, \quad \lim_{x\to +0} f(x) = +1.$$

2. Якщо $\varphi(x) = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ (рис. 4.32), то

$$\varphi(1+0) = 0, \quad \varphi(1-0) = 1.$$

3.5. Границя функції при $x \to \infty$. Нескінченно велика функція

Ми розглянули поняття границі функції в скінченній точці x_0. Досліджуючи функції, визначені на нескінченних проміжках, часто доводиться вивчати поведінку цих функцій при як завгодно великих за модулем значеннях аргументу x, тобто при $x \to \infty$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty;\ +\infty)$. Число A називають границею функції $f(x)$ при $x \to \infty$ і пишуть $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M = M(\varepsilon) > 0$, що при $|x| > M$ виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Коротко це означення можна записати так:

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 : |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

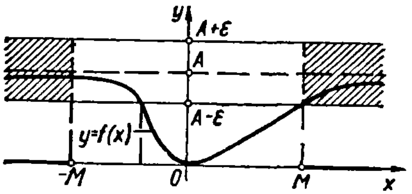


Рис. 4.33

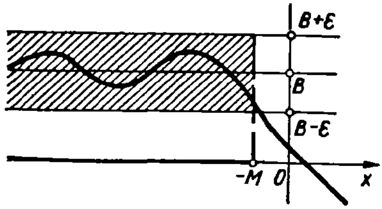


Рис. 4.34

Геометричний зміст цього означення такий (рис. 4.33). Для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M > 0$, що при $x \in (-\infty; -M)$ або при $x \in (M; +\infty)$ відповідні значення функції $f(x)$ попадають в ε-окіл точки A, тобто відповідні точки графіка цієї функції лежать у смузі, обмеженій прямими $y = A + \varepsilon$ і $y = A - \varepsilon$.

Знаючи зміст символів $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$, легко сформулювати означення границі функції для випадків, коли $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = B$ (рис. 4.34) та $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = C$ (рис. 4.35).

Досі розглядались випадки, коли функція мала границею деяке число. Розглянемо тепер випадок, коли границею функції є нескінченність.

Функція $y = f(x)$ при $x \to x_0$ називається *нескінченно великою* (має границю ∞), якщо вона визначена в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0 і для довільного числа $M > 0$ існує таке число $\delta = \delta(M) > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$. Позначення: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ або $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$. Геометрично це означає: яким би великим не було задане число $M > 0$, точки графіка функції $y = f(x)$, крім, можливо, точки $(x_0; f(x_0))$, лежать зовні смуги, обмеженої прямими $y = M$ і $y = -M$, якщо значення x взяті з δ-околу точки x_0 (рис. 4.36).

Якщо $f(x)$ прямує до нескінченності при $x \to x_0$ і при цьому набуває лише додатних (рис. 4.37) або лише від'ємних значень (рис. 4.38), то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \text{ або } \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Функцію $f(x)$, задану на всій числовій прямій, при $x \to \infty$ називають *нескінченно великою* і пишуть $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, якщо для довільного числа $M > 0$ можна знайти таке число $N = N(M) > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x| > N$, виконується нерівність $|f(x)| > M$ (рис. 4.39).

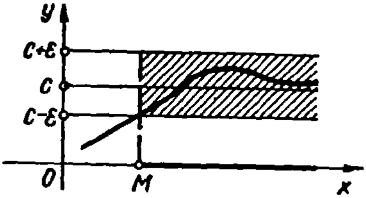


Рис. 4.35

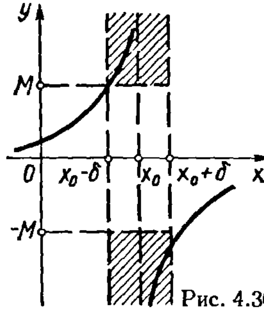


Рис. 4.36

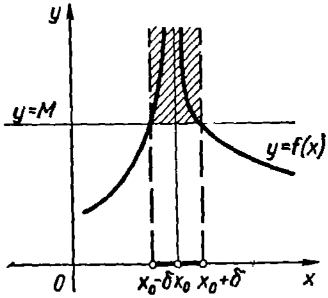


Рис. 4.37

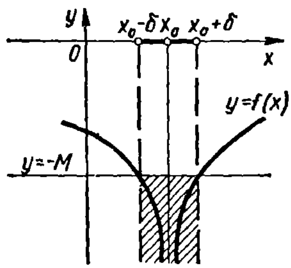


Рис. 4.38

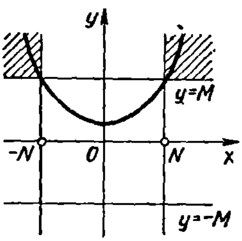


Рис. 4.39

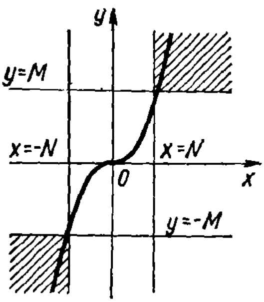


Рис. 4.40

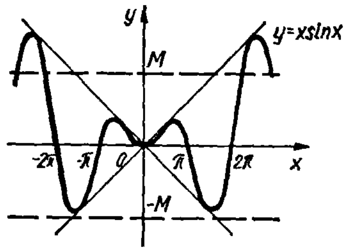


Рис. 4.41

Зокрема, функція $f(x)$ є нескінченно великою при $x \to \infty$, якщо

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Очевидно, всяка нескінченно велика функція в околі точки x_0 є необмеженою в цьому околі. Обернене твердження неправильне: не всяка необмежена функція є нескінченно великою. Проте якщо функція $f(x)$ має скінченну границю A при $x \to x_0$, то ця функція обмежена при $x \to x_0$. Справді, з означення (3) випливає, що при $x \to x_0$ $|f(x) - A| < \varepsilon$, або

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon, \text{ звідки } |f(x)| < |A| + \varepsilon,$$

а це й означає, що функція $f(x)$ при $x \to x_0$ обмежена. Коли $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, то при $x \to x_0$ буде обмеженою також функція $\frac{1}{f(x)}$. Обернене твердження неправильне: не всяка обмежена функція має скінченну границю.

Приклад

1. Довести, що $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+5}{x} = 2$.

○ Нехай $y = \frac{2x+5}{x}$ і задано довільне число $\varepsilon > 0$. Знайдемо число $M(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх x, що задовольняють нерівність $|x| > M$, виконується нерівність $|y - 2| < \varepsilon$. Остання нерівність виконуватиметься, якщо

$$\left|\frac{2x+5}{x} - 2\right| < \varepsilon, \text{ або } \left|2 + \frac{5}{x} - 2\right| < \varepsilon, \text{ або } \left|\frac{5}{x}\right| < \varepsilon,$$

звідки $|x| > \frac{5}{\varepsilon}$. Нехай $M = \frac{5}{\varepsilon}$, тоді

$$|x| > M \Leftrightarrow |x| > \frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{5}{x}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2x+5}{x} - 2\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = 2. \bullet$$

2. Довести, що функція $y = 2x^2$ при $x \to \infty$ є нескінченно великою функцією.

○ Візьмемо довільне число $M > 0$ і знайдемо таке число $N = N(M)$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x| > N$, виконується нерівність $|y| > M$. Маємо

$$|y| > M \Rightarrow 2x^2 > M \Rightarrow |x| > \sqrt{\frac{M}{2}}.$$

Нехай $N = \sqrt{\frac{M}{2}}$, тоді

$$\forall x : |x| > N \Leftrightarrow |x| > \sqrt{\frac{M}{2}} \Rightarrow x^2 > \frac{M}{2} \Rightarrow 2x^2 > M \Rightarrow \lim_{x\to\infty} 2x^2 = +\infty. \bullet$$

3. Функція $y = x^3$ прямує до $-\infty$ при $x \to -\infty$ і до $+\infty$ при $x \to +\infty$ (рис. 4.40):

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty.$$

4. Функція $y = \sin x$ обмежена на всій числовій осі. Але при $x \to \infty$ вона границі не має.

5. Функція $y = x \sin x$ (рис. 4.41) при $x \to \infty$ необмежена, але не є нескінченно великою, тому що вона дорівнює нулю при $x = 0, \pi, 2\pi, \ldots$. А це означає, що для довільного числа $M > 0$ не можна знайти таке число N, щоб

$$\forall x : |x| > N \Rightarrow |f(x)| > M,$$

3.6. Нескінченно малі величини. Їхні властивості

Нескінченно малою величиною називається змінна величина, границя якої дорівнює нулю.

Зокрема, функція $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою величиною* (або *нескінченно малою функцією*) при $x \to x_0$ або $x \to \infty$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \text{ або } \lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0.$$

Можна дати еквівалентне означення на «мові ε — δ»: *функція* $\alpha(x)$ *називається нескінченно малою при* $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, *якщо для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує число* $\delta > 0$ $(M > 0)$ *таке, що для всіх* x, *що задовольняють нерівність* $|x - x_0| < \delta$ $(|x| > M)$, *виконується нерівність* $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Аналогічні означення нескінченно малої величини $\alpha(x)$ при $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0 - 0$ і при $x \to -\infty$, $x \to +\infty$: в усіх цих випадках $\alpha(x) \to 0$.

Приклади

1. Функція $y = (x-2)^4$ є нескінченно малою величиною при $x \to 2$: $\lim\limits_{x \to 2}(x-2)^4 = 0$ (рис. 4.42).

2. Функція $y = \dfrac{1}{x-1}$ є нескінченно малою величиною при $x \to \infty$: $\lim\limits_{x \to \infty} y = 0$ (рис. 4.43).

Розглянемо *основні властивості нескінченно малих величин.*

1⁰. *Для того щоб число* A *було границею функції* $f(x)$ *при* $x \to x_0$, *необхідно і достатньо, щоб різниця* $f(x) - A$ *була нескінченно малою величиною, тобто*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \text{ де } \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

○ Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, тоді

$$(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Це означає, що величина $\alpha(x) = f(x) - A$ є нескінченно малою.

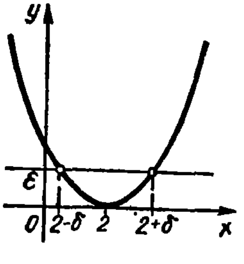


Рис. 4.42

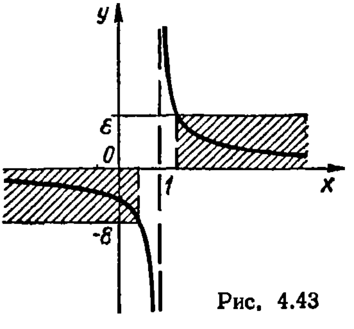


Рис. 4.43

Навпаки, нехай $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, тоді

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A. \ \bullet$$

2^0. *Якщо функція* $\alpha(x)$ — *нескінченно мала величина при* $x \to x_0$ $(\alpha \neq 0)$, *то функція* $\frac{1}{\alpha(x)}$ *є нескінченно великою величиною при* $x \to x_0$, *і навпаки, якщо функція* $\beta(x)$ — *нескінченно велика величина при* $x \to x_0$, то $\frac{1}{\beta(x)}$ *є нескінченно малою величиною при* $x \to x_0$.

○ Нехай $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ є нескінченно малою величиною, тоді

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| > M = \frac{1}{\varepsilon},$$

тобто функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою при $x \to x_0$. ●

Аналогічно доводиться обернене твердження. ●

3^0. *Сума скінченного числа нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.*

○ Нехай $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ — нескінченно малі величини при $x \to x_0$. Це означає, що для довільного числа $\varepsilon > 0$ існують числа $\delta_1 > 0$ і $\delta_2 > 0$ такі, що для всіх значень x з околу $0 < |x - x_0| < \delta_1$ виконується нерівність $|\alpha_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, а для значень x з околу $0 < |x - x_0| < \delta_2$ справедлива нерівність $|\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

У меншому з цих околів виконуються обидві нерівності:

$$|\alpha_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, в цьому околі

$$|\alpha_1(x) + \alpha_2(x)| \leqslant |\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

тобто сума $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ двох нескінченно малих функцій є функція нескінченно мала.

Аналогічне доведення для довільного скінченного числа нескінченно малих. ●

4^0. *Добуток обмеженої функції на нескінченно малу є величина нескінченно мала.*

○ Нехай функція $f(x)$ обмежена при $x \to x_0$, $\alpha(x)$ — нескінченно мала. Тоді для деякого числа $M > 0$ існує таке число $\delta_1 > 0$, що для значень x з околу $0 < |x - x_0| < \delta_1$ виконується нерівність $|f(x)| \leqslant M$. Крім того, для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta_2 > 0$, що для всіх значень x з околу $0 < |x - x_0| < \delta_2$ виконується нерівність $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$. Для меншого з цих околів маємо

$$|f(x)\alpha(x)| = |f(x)||\alpha(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

а це означає, що добуток $f(x)\alpha(x)$ при $x \to x_0$ є нескінченно малою функцією. ●

5^0. *Частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, яка має відмінну від нуля границю, є величина нескінченно мала.*

Доведення цієї властивості аналогічне попередньому.

З а у в а ж е н н я. Частка від ділення двох нескінченно малих величин у загальному випадку не є нескінченно малою величиною.

Величини $\alpha_1(x) = x$, $\alpha_2(x) = 2x$, $\alpha_3(x) = x^2$ — нескінченно малі при $x \to 0$ тому, що

$$\lim_{x\to 0} \alpha_1(x) = \lim_{x\to 0} \alpha_2(x) = \lim_{x\to 0} \alpha_3(x) = 0.$$

Маємо

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_3(x)} = \infty, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\alpha_3(x)}{\alpha_2(x)} = 0,$$

тобто границя відношення двох нескінченно малих величин може дорівнювати деякому числу, нескінченності або нулю. У зв'язку з цим відношення двох нескінченно малих величин называють невизначеністю виду $\frac{0}{0}$. Те саме стосується добутку нескінченно малої величини на нескінченно велику величину. Такий добуток называють невизначеністю виду $0 \cdot \infty$.

3.7. Основні теореми про границі

У попередніх прикладах ми бачили, що знаходження границі функції на основі означення досить громіздке. Справді, при обчисленні границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ спочатку треба взяти яку-небудь збіжну до x_0 послідовність $\{x_n\}$ значень аргументу і визначити послідовність відповідних значень функції $\{f(x_n)\}$. Знайшовши число $A = \lim\limits_{x_n\to x_0} f(x_n)$, ще треба впевнитись, що $f(x) \to A$ і тоді, коли $x \to x_0$ довільним способом.

Наведемо теореми, які значно полегшують знаходження границі функції. Формулювання і доведення цих теорем для випадків, коли $x \to \infty$ та $x \to x_0$, аналогічні.

Теорема 1 *(про границю суми, добутку і частки). Якщо кожна з функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ має скінченну границю в точці x_0, то в цій точці існують також границі функцій $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x)\varphi(x)$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (остання за умови, що $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) \neq 0$) і справедливі формули*

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} \varphi(x); \tag{5}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\varphi(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} \varphi(x); \tag{6}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)}. \tag{7}$$

○ Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = B$, тоді за властивістю 1^0 (п. 3.6)

$$f(x) = A + \alpha_1(x), \quad \varphi(x) = B + \alpha_2(x), \text{ де } \alpha_1(x)\to 0, \quad \alpha_2(x)\to 0$$

$$\text{при } x\to x_0.$$

Звідси маємо

$$f(x) \pm \varphi(x) = A \pm B \pm [\alpha_1(x) + \alpha_2(x)]; \tag{8}$$

$$f(x)\varphi(x) = AB + [A\alpha_2(x) + B\alpha_1(x) + \alpha_1(x)\alpha_2(x)]; \tag{9}$$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B} + \left[\frac{B\alpha_1(x) - A\alpha_2(x)}{B^2 + B\alpha_2(x)}\right]. \tag{10}$$

За властивостями 3^0—5^0 (п. 3.6) вирази в квадратних дужках є величини нескінченно малі при $x \to x_0$, тому, застосувавши до рівностей (8), (9), (10) ще раз властивість 1^0 нескінченно малих, дістанемо відповідно формули (5), (6), (7). ●

Зауважимо, що доведена теорема справджується для алгебраїчної суми та добутку будь-якого скінченного числа функцій, які мають границю в точці.

Н а с л і д к и. *Якщо* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *існує, то виконуються рівності:*

1) $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\quad c\in R$;
2) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^n$, зокрема,
3) $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, $\quad n \in N$.

Приклади

1. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2} (5x^2 - 13x + 5)$.

○ Використовуючи теорему про границю суми і наслідки 1) —3), маємо

$$\lim_{x\to 2} (5x^2 - 13x + 5) = 5\lim_{x\to 2} x^2 - 13\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 5 = -1. \ ●$$

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{2x-1}$.

○ За теоремою про границю частки дістанемо

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{2x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)} = 2. \ ●$$

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$.

○ Тут теорему про границю частки застосувати не можна, тому що $\lim\limits_{x\to 3}(x^2 - 9) = 0$. Крім того, $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-5x+6)=0$, тобто маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Розкладемо чисельник і знаменник на множники:

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3), \quad x^2-9=(x-3)(x+3).$$

Оскільки при знаходженні границі функцій в точці $x = 3$ розглядаються значення $x \neq 3$, то даний дріб можна скоротити на $x - 3$, тому

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x+3}=\frac{1}{6}. \; ●$$

4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2}{x-2}$.

○ Тут $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$, тому теорему про границю частки застосувати не можна. Оскільки $x^2 \to 4$ при $x \to 2$ і $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=\infty$ (п. 3.6), то $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2}{x-2}=\infty$ як добуток нескінченно великої величини на обмежену величину, яка не є нескінченно малою. ●

Теорема 2 *(про границю проміжної функції). Нехай в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0, визначені функції $\varphi(x)$, $f(x)$ і $\psi(x)$ і виконуються нерівності*

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x). \tag{11}$$

Тоді, якщо функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ мають в точці x_0 одну й ту саму границю

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}\psi(x)=A, \tag{12}$$

то таку саму границю має функція $f(x)$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

○ З рівностей (12) випливає, що для довільного числа $\varepsilon > 0$ існують два околи точки x_0, в одному з яких виконуються нерівності $-\varepsilon < \varphi(x) - A < \varepsilon$, а в другому — нерівності $-\varepsilon \leqslant \psi(x) - A \leqslant \varepsilon$. З нерівностей (11) знаходимо, що

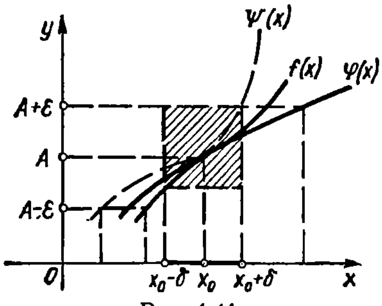


Рис. 4.44

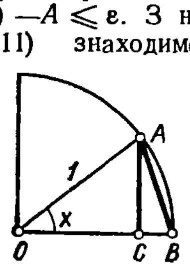


Рис. 4.45

$\varphi(x) - A < f(x) - A < \psi(x) - A$, тому в меншому з околів виконуються нерівності $-\varepsilon \leqslant \varphi(x) - A \leqslant f(x) - A \leqslant \psi(x) - A < \varepsilon$ (рис. 4.44).

Звідси $-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. ●

Теорема 3 *(про граничний перехід у нерівностях). Якщо в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0, виконується нерівність $f(x) \geqslant 0$ і існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$, то $b \geqslant 0$.*

○ Припустимо, що $b < 0$, тоді при $x \to x_0$ маємо $|f(x) - b| \geqslant |b| > 0$, тому $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - b] \neq 0$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq b$. Це суперечить умові теореми. Отже, $b \geqslant 0$. ●

Наслідок. *Якщо в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0, виконується нерівність $f(x) \geqslant \varphi(x)$ і існують границі*

$$\lim_{x\to x_0} f(x),\quad \lim_{x\to x_0} \varphi(x),\ \text{то}\ \lim_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim_{x\to x_0} \varphi(x).$$

Теорема 4 *(про границю монотонної функції). Якщо функція $f(x)$ монотонна і обмежена при $x < x_0$ або при $x > x_0$, то існує відповідно її ліва границя $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$ або її права границя $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$.*

Доведення цієї теореми дано, наприклад, в [29].

Приклад

Довести, що: а) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{x}{2} = 0$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

○ а) Позначимо через x радіанну міру центрального кута кола радіуса 1 (рис. 4.45). Якщо $x > 0$, то $OA = 1$, $AC = \sin x$, $\smile AB = x$, $0 < \sin x < x$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$, $\lim\limits_{x\to +0} x = 0$, то з теореми 2 випливає, що $\lim\limits_{x\to +0} \sin x = 0$.

Якщо $x < 0$, то $|\sin x| < |x|$ або $-|x| < \sin x < |x|$, тому $\lim\limits_{x\to -0} \sin x = 0$. Отже,

$$\lim_{x\to -0} \sin x = \lim_{x\to +0} \sin x = \lim_{x\to 0} \sin x.$$

б) Оскільки $\left|\sin \frac{x}{2}\right| < |\sin x|$ або $-|\sin x| < \sin \frac{x}{2} < |\sin x|$ і $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$, то $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{x}{2} = 0$.

в) Оскільки $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$, то

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right) = 1 - 2\left(\lim_{x\to 0} \sin \frac{x}{2}\right)^2 = 1. \quad ●$$

Завдання для самоконтролю

1. Що називається числовою послідовністю і як її можна задати? Навести приклади.

2. Що називається границею числової послідовності? Який геометричний зміст границі?

3. Що називається границею змінної величини?

4. Довести, що коли змінна величина має границю, то ця границя лише одна.

5. Довести, що границя сталої величини дорівнює цій сталій.

6. Яка величина називається нескінченно великою? Сформулювати властивості нескінченно великих величин.

7. Дати означення границі функції в точці на «мові послідовностей» і на «мові $\varepsilon - \delta$».

8. У чому полягає геометричний зміст границі функції в точці? Навести приклади.

9. Що називається лівою границею функції в точці?

10. Що називається правою границею функції в точці?

11. Що називається границею функції при $x \to \infty$?

12. Що називається нескінченно великою функцією?

13. Довести твердження: якщо існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то при $x \to x_0$ функція $f(x)$ обмежена; якщо існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq 0$, то при $x \to x_0$ функція і $\frac{1}{f(x)}$ обмежена.

14. Які величини називаються нескінченно малими? Сформулювати і довести властивості нескінченно малих.

15. Сформулювати і довести теореми про границю суми, добутку і частки; про границю проміжної функції; про граничний перехід у нерівностях.

16. Сформулювати теорему про існування границі монотонної функції.

17. Довести такі твердження:

1) якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ і $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$;

2) якщо існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq 0$ і $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$;

3) якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ і існує скінченна границя $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$;

4) якщо існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq 0$ і $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\varphi(x) = \infty$;

5) якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ і існує скінченна границя $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm \varphi(x)] = \infty$;

6) якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = +\infty$, $(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = -\infty)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + \varphi(x)] = +\infty$, $(\lim [f(x) + \varphi(x)] = -\infty)$.

18. Користуючись означенням границі, довести, що

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n + 1}{5n - 1} = \frac{2}{5}$; б) $\lim\limits_{x \to 2} (2x + 1) = 5$.

19. Користуючись теоремами про границі, обчислити:

а) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$;

в) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{16-x^2}{3-\sqrt{5+x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a}{x^n}$, $a\in R$, $n\in N$.

Відповідь. 19. а) $-\dfrac{1}{4}$; б) -6; в) 48; г) 0.

§ 4. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЙ

4.1. Перша важлива границя

Доведемо, що

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{13}$$

○ Візьмемо круг радіуса 1 (рис. 4.46) і позначимо радіанну міру кута AOD через x, $0<x<\frac{\pi}{2}$. Порівнюючи площі трикутників AOD, BOD і колового сектора AOD, дістанемо

$$S_{\triangle AOD}<S_{\text{сект}AOD}<S_{\triangle BOD},$$

звідки

$$\frac{1}{2}AC\cdot OD<\frac{1}{2}OD^2\cdot x<\frac{1}{2}OD\cdot BD$$

або

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg}x.$$

Розділивши останні нерівності на $\frac{1}{2}\sin x>0$, дістанемо

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\quad \text{або}\quad 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to0}1=1$ і $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$, то за теоремою 2 (п. 3.7)

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{14}$$

Нехай тепер $x<0$. Розглянемо функцію $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ (рис. 4.47). Оскільки $f(x)=f(-x)$, то

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin(-x)}{-x}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{15}$$

З рівностей (14) і (15) дістанемо формулу (13), яка досить часто використовується при обчисленні границь. Тому її називають *першою важливою границею*. ●

Приклади

1. Знайти $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin kx}{x}$, $k\neq0$.

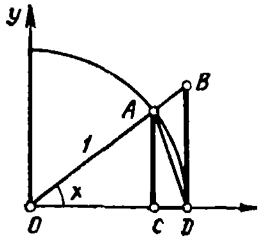


Рис. 4.46

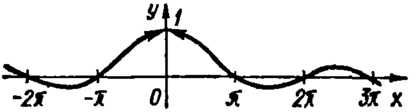


Рис. 4.47

○ Зведемо цю граннцю до першої важливої границі, поділивши та помноживш дріб на k:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{k\sin kx}{kx}=k\lim_{kx\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=k. \bullet$$

2. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}$.

○ Маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x\sin(-x)}{x^2}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}=-8. \bullet$$

3. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} kx}{x}$.

○ Маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} kx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x\cos kx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos kx}=k. \bullet$$

4. Знайти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x$.

○ Введемо нову змінну $y=x-\dfrac{\pi}{2}$, тоді $x=y+\dfrac{\pi}{2}$ і

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x=\lim_{y\to 0}y\operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=-\lim_{y\to 0}y\operatorname{ctg} y=-\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cos y=-1. \bullet$$

4.2. Число e. Натуральні логарифми

Розглянемо дві числові послідовності:

$$\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n\geqslant 1\right\}\ \text{і}\ \{y_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, n\geqslant 1\right\}.$$

Покажемо, що вони мають такі *властивості:*

1) $x_n < y_n$, $n \geqslant 1$;

2) *змінна* x_n *строго зростає;*

3) *змінна* y_n *строго спадає.*

○ Справді, оскільки

$$y_n = x_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = x_n + \frac{x_n}{n} > x_n,$$

то властивість 1) справедлива.

Властивості 2) і 3) доводяться за допомогою *нерівності Коші:*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

де

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset [0; +\infty), \quad n \in N.$$

Застосуємо цю нерівність до числової множини, яка містить число 1, а також n чисел $1 + \frac{1}{n}$:

$$1,\ 1 + \frac{1}{n},\quad 1 + \frac{1}{n}, \ldots, 1 + \frac{1}{n},$$

де $n \in N$. Дістанемо

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1 + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n <$$
$$< \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

звідки і випливає властивість 2).

Аналогічно для доведення твердження 3) досить застосувати нерівність Коші до числової множини, яка містить 1 і n чисел $1 - \frac{1}{n}$, де $n \in N$, $n \geqslant 2$. ●

З властивостей 1) — 3) маємо

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n < \cdots < y_2 < y_1, \quad n \in N.$$

Отже, змінна x_n зростаюча і обмежена зверху. Тому за теоремою 4 (п. 3.7) вона має границю, яку позначають буквою e (це позначення, як і позначення числа π, належить Л. Ейлеру):

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \text{e}. \tag{16}$$

Змінна y_n спадає і обмежена знизу, тому границя $\lim\limits_{n \to \infty} y_n$ також існує. Оскільки

$$y_n = x_n + \frac{x_n}{n}, \quad \text{то} \quad \lim_{n \to \infty} y_n = \text{e}.$$

Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e,$$

причому

$$\forall n \in N: \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Доведено, що e — ірраціональне число. Більше того, Ш. Ерміт довів, що e — трансцендентне число, тобто не є коренем ніякого алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами. Його наближене значення з точністю до 10^{-15} дорівнює 2,718281828459045.

Число e широко використовується в математиці та її застосуваннях. Зокрема, показникова функція $y = e^x$ за основою e відіграє важливу роль в теорії механічних коливань, в електротехніці та радіотехніці. Цю функцію називають також *експоненціальною функцією,* або *експонентою* (від англійського exponential — показниковий), і позначають так: $y = \exp x$.

Досить часто доводиться зустрічатись з логарифмами за основою e. Як відомо, функція $y = \log_a x$ визначається, якщо $a > 0$, $a \neq 1$. Зокрема, якщо $a = 10$, то y називається *десятковим логарифмом числа* x і позначається $\lg x$. Десяткові логарифми були введені Г. Бріггсом. Якщо $a = e$, то y називається *натуральним,* або *неперовим* (на честь шотландського математика Дж. Непера — винахідника логарифмів), *логарифмом числа* x і позначається $\ln x$.

У вищій математиці застосовують в основному натуральні логарифми, оскільки для них, як побачимо далі, значно спрощується ряд формул.

Знайдемо зв'язок між десятковими і натуральними логарифмами. Нехай $y = \ln x$, тоді $x = e^y$. Логарифмуючи цю рівність за основою a, дістанемо $\log_a x = y \log_a e$, звідки

$$\log_a x = \log_a e \ln x \Rightarrow \ln x = \frac{1}{\log_a e}\log_a x.$$

Число $M = \log_a e$ називають модулем переходу від натуральних логарифмів до логарифмів з основою a. Зокрема, при $a = 10$ маємо

$$M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}4343; \quad \frac{1}{M} = \frac{1}{\lg e} = \ln 10 \approx 2{,}3026.$$

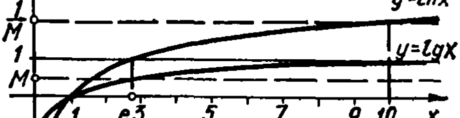


Рис. 4.48

Отже, зв'язок між десятковими і натуральними логарифмами виражаються формулами

$$\lg x = \lg e \ln x = \frac{1}{\ln 10} \ln x \approx 0{,}4343 \ln x;$$

$$\ln x = \frac{1}{\lg e} \lg x = \ln 10 \lg x \approx 2{,}3026 \lg x.$$

Графіки функцій $y = \lg x$ та $y = \ln x$ зображено на рис. 4.48.

4.3. Друга важлива границя

Доведемо, що

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{17}$$

Спочатку покажемо, що

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{18}$$

Нехай $x \geqslant 1$ і $E(x) = n$, тоді $n \leqslant x < n + 1$; тому справедливі нерівності

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}; \quad \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{19}$$

Якщо $x \to +\infty$, то $n \to \infty$, тому за формулою (16) маємо

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e;$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

Застосувавши до нерівності (19) теорему 2 (п. 3.7), дістанемо формулу (18). Тепер доведемо, що

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{20}$$

Нехай $x < -1$. Введемо змінну $y = -x$, тоді

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \lim_{y\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = e \cdot 1 = e.$$

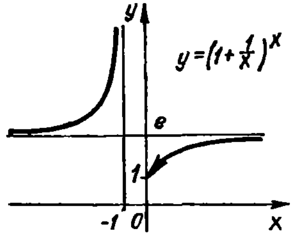


Рис. 4.49

Об'єднавши випадки (18) і (20), дістанемо формулу (17). Поклавши $x = \frac{1}{y}$, маємо

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = \mathrm{e}. \qquad (21)$$

Рівності (17) та (21) називають *другою важливою границею* і широко використовують при обчисленні границь. Графік функції $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ показано на рис. 4.49.

Зауваження. При обчисленні границь, пов'язаних з числом e, часто застосовують таке твердження: якщо існують границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$, причому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, то існує також границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$, яка обчислюється за формулою

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}. \qquad (22)$$

Приклади

1. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$.

○ Скористаємось рівностями (17) і (22). Маємо $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \lim\left(1+\frac{1}{x/k}\right)^{\frac{x}{k}\cdot k} = \mathrm{e}^k$. ●

2. Знайти

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin 2x}.$$

○ Скориставшись рівностями (13), (21) і (22), дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin 2x} = \lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}} = \mathrm{e}^2. \text{ ●}$$

3. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-5x}$.

○ Маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-5x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{2x+3}-1\right)^{1-5x} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{2x+3}\right)^{1-5x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-4}}\right)^{\frac{2x+3}{-4}\cdot\frac{-4}{2x+3}\cdot\frac{1-5x}{1}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20x-4}{2x+3}} = \mathrm{e}^{10}. \text{ ●}$$

4. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$.

○ Дістанемо

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 3x}} = \lim_{x\to 0}[1+(\cos 2x - 1)]^{\frac{1}{\sin^2 3x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}[1+(-2\sin^2 x)]^{\frac{1}{-2\sin^2 x}\cdot\frac{-2\sin^2 x}{\sin^2 3x}} = e^{-2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 3x}} = e^{-\frac{2}{9}}. \bullet$$

5. Багато хімічних реакцій і процесів проходять так, що в кожний момент часу t швидкість утворення деякої речовини пропорційна кількості цієї речовини в заданий момент часу.

Знайти закон, за яким відбувається утворення речовини.

○ Нехай m_0 — кількість речовини в момент часу $t=0$ (тобто початкова кількість речовини). Проміжок часу $(0;\ t)$ розіб'ємо на n дрібних проміжків:

$$\left(0;\ \frac{t}{n}\right),\quad \left(\frac{t}{n};\ \frac{2t}{n}\right),\quad \left(\frac{2t}{n};\ \frac{3t}{n}\right),\ \ldots,\ \left(\frac{(n-1)\,t}{n};\ t\right).$$

Якщо вважати, що протягом кожного з цих малих проміжків часу швидкість реакції стала, то кількості речовини в моменти часу

$$\frac{t}{n},\quad \frac{2t}{n},\quad \frac{3t}{n},\ \ldots,\ t$$

відповідно дорівнюватимуть

$$m_1 = m_0 + km_0\frac{t}{n} = m_0\left(1+\frac{kt}{n}\right);$$

$$m_2 = m_1 + km_1\frac{t}{n} = m_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)^2;$$

$$m_3 = m_2 + km_2\frac{t}{n} = m_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)^3;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m_n = m_{n-1} + km_{n-1}\frac{t}{n} = m_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)^n,$$

де k — заданий коефіцієнт пропорційності. Але за умовою задачі процес утворення речовини відбувається неперервно. Тому, щоб знайти точну формулу, треба припустити, що число дрібних проміжків необмежено зростає, а їхня тривалість прямує до нуля. Звідси для кількості речовини m в довільний момент часу t дістаємо формулу

$$m = \lim_{n\to\infty} m_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)^n = m_0 e^{kt}.$$

Це і є закон, за яким відбувається утворення речовини. Він зустрічається при дослідженні таких процесів, як розклад радію, розмноження бактерій тощо. Пізніше ми ще повернемось до цієї задачі (гл. 8, п. 1.9). ●

4.4. Порівняння нескінченно малих функцій. Еквівалентні нескінченно малі функції

Дві нескінченно малі функції порівнюються між собою за допомогою дослідження їхнього відношення. Нехай $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ —

нескінченно малі функції при $x \to x_0$, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\alpha_1(x) = 0, \quad \lim_{x\to x_0}\alpha_2(x) = 0.$$

Введемо такі означення:

1) функції $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ називаються *нескінченно малими одного порядку при* $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = A \neq 0, \quad A \in R;$$

2) функція $\alpha_1(x)$ називається *нескінченно малою вищого порядку, ніж* $\alpha_2(x)$ *при* $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0;$$

3) функція $\alpha_1(x)$ називається *нескінченно малою нижчого порядку, ніж* $\alpha_2(x)$ *при* $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \infty;$$

4) функція $\alpha_1(x)$ називається *нескінченно малою k-го порядку відносно* $\alpha_2(x)$ *при* $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2^k(x)} = A \neq 0, \quad A \in R;$$

5) нескінченно малі функції $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ називаються *непорівнянними при* $x \to x_0$, якщо в точці x_0 не існує границі їхнього відношення.

Введені означення охоплюють усі випадки, які можуть трапитись при порівнянні двох нескінченно малих функцій в околі точки x_0. Такі самі правила порівняння нескінченно малих при $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$ та при $x \to x_0 \pm 0$.

Аналогічно порівнюються нескінченно великі величини.

Приклади

1. Функції $\alpha_1(x) = x$, $\alpha_2(x) = \sin 5x$ нескінченно малі одного порядку при $x \to 0$, тому що

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 5x} = \frac{1}{5}.$$

2. Функція $\alpha_1(x) = x^2$ при $x \to 0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж функція $\alpha_2(x) = \operatorname{tg} x$, тому що

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} x \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}\cos x = 0.$$

Очевидно, функція $\alpha_2(x) = \operatorname{tg} x$ при $x \to 0$ є нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\alpha_1(x) = x^2$.

3. Функція $\alpha_1(x) = 1 - \cos 4x$ при $x \to 0$ є нескінченно малою другого порядку відносно функції $\alpha_2(x) = x$, тому що

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 2x}{x^2} = 8.$$

4. Нескінченно малі функції $\alpha_1(x) = x$ і $\alpha_2(x) = x \sin \frac{1}{x}$ непорівнянні при $x \to 0$, тому що

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$$

не існує (див. п. 3.5).

Серед нескінченно малих функцій одного порядку особливу роль відіграють так звані еквівалентні нескінченно малі.

Функції $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$, нескінченно малі при $x \to x_0$, називаються *еквівалентними нескінченно малими*, якщо

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1.$$

Еквівалентність позначається так: $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$.

Розглянемо деякі властивості еквівалентних нескінченно малих функцій.

Теорема 1. *Нескінченно малі $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ еквівалентні при $x \to x_0$ тоді і тільки тоді, коли різниця $\alpha_1(x) - \alpha_2(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж кожна з функцій $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$.*

⊙ Нехай $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$ при $x \to x_0$, тобто

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = 1,$$

тоді

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(1 - \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}\right) = 1 - \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = 0.$$

Аналогічно

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}{\alpha_2(x)} = 0.$$

Отже, різниця $\alpha_1(x) - \alpha_2(x)$ при $x \to x_0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$.

Нехай тепер, навпаки, відомо, що різниця $\alpha_1(x) - \alpha_2(x)$ при $x \to x_0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha_1(x)$ і ніж $\alpha_2(x)$, тобто

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}{\alpha_2(x)} = 0.$$

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \left(1 - \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}\right) = 0$, звідки $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = 1$, тобто $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$ при $x \to x_0$. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}{\alpha_2(x)} = 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} - 1\right) = 0$, звідки $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$, тобто $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$ при $x \to x_0$. ●

Теорема 2. *Нехай $\alpha_1(x) \sim \alpha_1^*(x)$, $\alpha_2(x) \sim \alpha_2^*(x)$ при $x \to x_0$. Якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$, то існує і $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)}$ і ці границі рівні між собою.*

○ Маємо

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_1^*(x)} \cdot \frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)} \cdot \frac{\alpha_2^*(x)}{\alpha_2(x)}\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_1^*(x)} \times$$

$$\times \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)} \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_2^*(x)}{\alpha_2(x)} = 1 \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)} \cdot 1 = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)}. \quad ●$$

Ця теорема дає змогу при знаходженні границі відношення двох заданих нескінченно малих функцій кожну з них (або тільки одну) заміняти іншою нескінченною малою, яка еквівалентна заданій. Часто зустрічаються, наприклад, такі еквівалентні нескінченно малі величини [12]:

$\sin\alpha \sim \alpha,\ \alpha \to 0;$	$e^\alpha - 1 \sim \alpha,\ \alpha \to 0;$
$\operatorname{tg}\alpha \sim \alpha,\ \alpha \to 0;$	$a^\alpha - 1 \sim \alpha \ln a,\ \alpha \to 0;$
$\arcsin\alpha \sim \alpha,\ \alpha \to 0;$	$\log_a(1+\alpha) \sim \alpha \log_a e,\ \alpha \to 0;$
$\operatorname{arctg}\alpha \sim \alpha,\ \alpha \to 0;$	$\ln(1+\alpha) \sim \alpha,\ \alpha \to 0;$
$1 - \cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2},\ \alpha \to 0;$	$(1+\alpha)^k - 1 \sim k\alpha,\ \alpha \to 0,\ k > 0.$

Зазначимо, що ці еквівалентності досить просто дістати за допомогою правила Лопіталя (гл. 5, п. 5.3).

Теорема 3. *Сума скінченного числа нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку нижчого порядку.*

○ Доведемо теорему для двох функцій. Нехай $\alpha_1(x) \to 0$ і $\alpha_2(x) \to 0$ при $x \to x_0$, причому $\alpha_1(x)$ — нескінченно мала функція вищого порядку, ніж $\alpha_2(x)$ при $x \to x_0$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0$, тоді

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x)}{\alpha_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} + 1 = 0 + 1 = 1,$$

отже,

$$\alpha_1(x) + \alpha_2(x) \sim \alpha_2(x), \quad x \to x_0 \quad ●$$

Приклади

1. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 2x}$.

○ Оскільки $\sin 8x \sim 8x$, $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$ при $x \to 0$, то за теоремою 2 дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{8x}{2x} = 4. \bullet$$

2. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\arcsin(x-3)}{x^2-4x+3}$.

○ $\arcsin(x-3) \sim x-3$ при $x \to 3$, тому

$$\lim_{x\to 3}\frac{\arcsin(x-3)}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}. \bullet$$

3. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{x^2}$.

○ Оскільки $\ln\cos 2x = \ln(1+\cos 2x - 1) \sim \cos 2x - 1$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{x^2} = -2. \bullet$$

4. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x + x^2 - 10x^3}{2x - x^5}$.

○ За теоремою 3 маємо при $x \to 0$

$$\sin 6x + x^2 - 10x^3 \sim \sin 6x; \quad 2x - x^5 \sim 2x,$$

тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x + x^2 - 10x^3}{2x - x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{2x} = \frac{6}{2} = 3. \bullet$$

4.5. Розкриття деяких невизначеностей

Як уже вказувалось, у найпростіших випадках знаходження границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ зводиться до підстановки у функцію $f(x)$ граничного значення аргументу x_0. Але часто така підстановка приводить до невизначених виразів. Це такі вирази:

1) відношення двох нескінченно великих величин — невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$;

2) різниця двох нескінченно великих величин — невизначеність виду $\infty - \infty$;

3) добуток нескінченно малої функції на нескінченно велику — невизначеність виду $0 \cdot \infty$;

4) відношення двох нескінченно малих величин — невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$;

5) якщо $\alpha_1(x) \to 0$ та $\alpha_2(x) \to 0$ при $x \to x_0$, то вираз $\alpha_1^{\alpha_2}$ — невизначеність виду 0^0;

6) якщо $\alpha(x) \to 0$, $\beta(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, то вираз β^α — невизначеність виду ∞^0;

7) якщо $f(x) \to 1$, $\beta(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, то вираз f^β — невизначеність виду 1^∞ (це не одиниця в якомусь конкретному степені, а символ для скороченого позначення границі виразу f^β, де $f \to 1$, $\beta \to \infty$).

Операцію знаходження границі у цих випадках називають *розкриттям невизначеності*.

Загальний спосіб розкриття невизначеностей дамо в гл. 5, а тут розглянемо деякі окремі випадки.

1. *Невизначеність виду* $\frac{\infty}{\infty}$ *задана відношенням двох многочленів.*

Приклад

Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+2x-1}{3x^4-x^2+10x+5}$.

○ Маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельник і значенник дробу на x^4:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+2x-1}{3x^4-x^2+10x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}}{3-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{10}{x^3}+\dfrac{5}{x^4}} = \frac{1}{3}. \quad ●$$

Застосований прийом є загальним: щоб розкрити невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$, задану відношенням двох многочленів, треба чисельник і знаменник розділити на найвищий степінь x у цих многочленах.

2. *Невизначеність виду* $\frac{0}{0}$ *задана відношенням двох многочленів.*

Приклад

Знайти $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x-4}$.

○ Оскільки

$$\lim_{x\to 1}(x^3+2x^2-x-2)=0, \quad \lim_{x\to 1}(x^2+3x-4)=0,$$

то маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Щоб розкрити невизначеність, розкладемо чисельник і знаменник на множники:

$$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x^2+3x+2); \quad x^2+3x-4=(x-1)(x+4).$$

Маємо

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x-4} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+3x+2)}{(x-1)(x+4)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x+2}{x+4} = \frac{6}{5}. \quad ●$$

Це теж загальний прийом. Скорочення на $x - 1$ тут можливе, тому що при визначенні границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ значення $x \neq x_0$.

Множник $x - x_0$, через який чисельник і знаменник прямують до нуля, іноді називають *критичним множником*.

Таким чином, щоб розкрити невизначеність $\frac{0}{0}$, задану відношенням двох многочленів, треба в чисельнику і знаменнику виділити критичний множник і скоротити на нього дріб. Якщо при цьому розкладання на множники виявиться утрудненим, то треба розділити чисельник і знаменник на критичний множник «у стовпчик».

Приклад

Знайти $\lim\limits_{x \to -1} \frac{5x^4 - 3x^2 + x - 1}{4x^3 + 2x^2 - 3x - 1}$.

○ Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Оскільки ця невизначеність задається відношенням двох многочленів, то чисельник і знаменник треба поділити на критичний множник $x + 1$. Маємо

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} 5x^4 - 3x^2 + x - 1 \\ 5x^4 + 5x^3 \end{array} & \begin{array}{l} x + 1 \\ \hline 5x^3 - 5x^2 + 2x - 1; \end{array} \\ -\begin{array}{r} -5x^3 - 3x^2 \\ -5x^3 - 5x^2 \end{array} & \\ -\begin{array}{r} 2x^2 + x \\ 2x^2 + 2x \end{array} & \\ -\begin{array}{r} -x - 1 \\ -x - 1 \end{array} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} 4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 \\ 4x^3 + 4x^2 \end{array} & \begin{array}{l} x + 1 \\ \hline 4x^2 - 2x - 1; \end{array} \\ -\begin{array}{r} -2x^2 - 3x \\ -2x^2 - 2x \end{array} & \\ -\begin{array}{r} -x - 1 \\ -x - 1 \end{array} & \\ 0 & \end{array}$$

$$5x^4 - 3x^2 + x - 1 = (x + 1)(5x^3 - 5x^2 + 2x - 1);$$

$$4x^3 - 2x^2 - 3x - 1 = (x + 1)(4x^2 - 2x - 1);$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{5x^4 - 3x^2 + x - 1}{4x^3 + 2x^2 - 3x - 1} = \lim_{x \to -1} \frac{5x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{4x^2 - 2x - 1} = -\frac{13}{5}. \quad ●$$

3. *Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана ірраціональними виразами.*

Приклади

1. Знайти $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2}$.

○ Тут невизначеність $\frac{0}{0}$, $x - 2$ — критичний множник. Позбудемось від ірраціональності в чисельнику. Маємо

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x^2 + 5} - 3)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 5 - 9}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \frac{2}{3}. \quad ●$$

Іноді від ірраціональності можна позбутися введенням нової змінної.
2. Знайти:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x^2}-2}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^4}-1}{x}$.

○ а) Введемо змінну $y^3=8+x^2$. Якщо $x\to 0$, то $y\to 2$, тому

$$\lim_{y\to 2}\frac{y-2}{y^3-8}=\lim_{y\to 2}\frac{1}{y^2+2y+4}=\frac{1}{12}.$$

б) Нехай $y^5=x+1$ тоді

$$\lim_{y\to 1}\frac{y^4-1}{y^5-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3+y^2+y+1}{y^4+y^3+y^2+2y+4}=\frac{4}{5}.$$

Цей самий результат дістанемо з еквівалентності $(1+x)^{\frac{4}{5}}-1\sim\frac{4}{5}x$. ●

4. *Невизначеності виду $\infty-\infty$ задані ірраціональними виразами.*

Приклад

Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$.

○ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=1.$ ●

5. *Невизначеності виду $\frac{0}{0}$ задані виразами, що містять тригонометричні функції, часто розкриваються за допомогою першої важливої границі.*

Приклад

Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

○ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$ ●

6. *При розкритті невизначеності виду 1^∞ використовують другу важливу границю.*

Приклади

Знайти:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5\,\mathrm{tg}^2 x)^{\mathrm{ctg}^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

○ а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5\,\mathrm{tg}^2 x)^{\frac{1}{5\,\mathrm{tg}^2 x}\cdot\frac{5\,\mathrm{tg}^2 x}{1}\mathrm{ctg}^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{5\,\mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{ctg}^2 x} = e^5$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\cos x-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$. ●

З а в д а н н я   д л я   с а м о к о н т р о л ю

1. Довести:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\quad n\in N$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$; г) $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$.

2. Як порівнюються між собою нескінченно малі величини?
3. Які нескінченно малі величини називаються еквівалентними?
4. Довести, що $1-\cos 2x\sim 2x^2$ при $x\to 0$.
5. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+6}{x^2+4}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x-\sin x}{x^3}$;

є) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+5}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$.

Відповіді. 5. а) $\frac{1}{8}$; б) -1; в) 1; г) $\frac{2}{3}$; д) $2\cos a$; е) $\frac{1}{2}$; є) e; ж) k; з) $\alpha-\beta$.

§ 5. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

З поняттям границі функції тісно пов'язане інше важливе поняття математичного аналізу — поняття неперервності функції.

Розглянемо графіки функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ (рис.4.50). Чим відрізняються ці графіки? Недвозначну і чітку відповідь на це запитання дати не так уже й просто. Можна сказати, що графіком функції $f(x)$ є суцільна крива (рис. 4.50, *а*), а функції $\varphi(x)$ — не суцільна (рис. 4.50, *б*). Графік функції $f(x)$ можна провести, не відриваючи

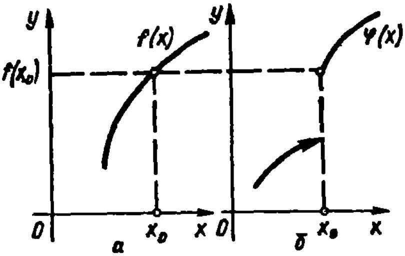


Рис. 4.50

олівець від паперу, а функції $\varphi(x)$ — не можна; при поступовій зміні аргументу x значення функції $f(x)$ також змінюється поступово, а значення функції $\varphi(x)$ — не поступово, у точці x_0 здійснюється стрибок. Усі ці відповіді правильні, але не досить чіткі для математичних формулювань. Навіть якби якась із них нас задовольнила, то як відповісти на таке запитання: «суцільний» чи «розривний» графік функції, заданої, скажімо, формулою? Побудова графіка «по точках» не допоможе, тому що особливу точку x_0 можна випадково пропустити (рис. 4.50, *б*).

Зрозуміло, що характер графіків функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ в точці x_0 різний. Кажуть, що функція $f(x)$ в точці x_0 неперервна, а функція $\varphi(x)$ в точці x_0 розривна. Переходимо до чітких означень.

5.1. Неперервність функції в точці. Точки розриву

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки.

Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0, якщо границя функції і її значення в цій точці рівні, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{23}$$

Якщо порівняти це означення з означенням границі функції $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то при означенні границі функції число x_0 могло й не належати області визначення функції, а якщо число x_0 належало області визначення, то значення функції $f(x_0)$ в цій точці могло й не збігатися з границею A.

Таким чином, функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

1) функція визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки;

2) існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) границя функції $f(x)$ в точці x_0 і значення функції в цій точці x_0 збігаються, тобто виконується рівність (23).

Оскільки $x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$, то формулу (23) можна записати у вигляді

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0). \tag{24}$$

Формула (24) виражає правило граничного переходу: при знаходженні границі неперервної функції $f(x)$ можна перейти до границі під знаком функції, тобто у функцію $f(x)$ замість аргументу x підставити значення $x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$. Геометричний зміст поняття неперервності відповідає геометричному змісту границі (23): точки графіка функції $y = f(x)$ як завгодно близькі до точки $(x_0; f(x_0))$, якщо їхні абсциси достатньо мало відрізняються від числа x_0 (рис. 4.50, *а*).

«Мовою $\varepsilon - \delta$» неперервність ілюструється на рис. 4.30, де число $A = f(x_0)$.

Можна дати ще одне означення неперервності функції, опираючись на поняття приростів аргументу і функції.

Нехай числа x_0 та x належать області визначення функції $y = f(x)$. Різниця $x - x_0$ називається *приростом аргументу* в точці x_0 і позначається через Δx («дельта x»):

$$\Delta x = x - x_0.$$

Різниця відповідних значень функції $f(x) - f(x_0)$ називається *приростом функції* в точці x_0 і позначається через Δy:

$$\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Очевидно, приріст Δx може бути додатним або від'ємним числом, приріст Δy — довільним числом. Запишемо рівність (23) в нових позначеннях, для чого перенесемо в ній значення $f(x_0)$ в ліву частину і внесемо його під знак границі. Оскільки умови $x \to x_0$ і $x - x_0 \to 0$ однакові, то рівність (23) набуває вигляду

$$\lim_{x - x_0 \to 0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \text{ або } \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \quad (25)$$

Рівність (25) і є ще одним означенням неперервності функції, яке можна сформулювати так.

Функція $f(x)$, визначена в околі точки x_0, називається неперервною в точці x_0, якщо її приріст в цій точці є нескінченно малою функцією при $\Delta x \to 0$.

Часто зустрічається поняття *односторонньої неперервності*. Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0 *зліва*, якщо вона визначена на півінтервалі $(x_0 - \varepsilon; x_0]$, де $\varepsilon > 0$ і $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$; якщо функція $f(x)$ визначена на півінтервалі $[x_0; x_0 + \varepsilon)$ і $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, то функція називається *неперервною в точці* x_0 *справа*.

Використовуючи ці поняття та формули (4), можна сказати, що функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли вона визначена в деякому околі точки x_0 і

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \quad (26)$$

Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то функція називається *розривною в точці* x_0, а сама точка x_0 називається *точкою розриву функції*.

Розрізняють такі види розривів. Якщо для функції $f(x)$ існують скінченні границі

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0),\quad \lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0),$$

причому не всі числа $f(x_0)$, $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ рівні між собою, то розрив в точці x_0 називають *розривом першого роду*, точку x_0 — *точкою розриву першого роду*. Зокрема, якщо

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0),$$

то розрив в точці x_0 називають *усувним*, а точку x_0 — *точкою усувного розриву*. У цьому випадку досить довизначити функцію лише в одній точці x_0, поклавши $f(x_0)=f(x_0\pm 0)$, щоб дістати функцію, неперервну в точці x_0. Величину $\delta=|\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)|$ називають *стрибком функції*.

Якщо хоча б одна з односторонніх границь у формулі (26) не існує або дорівнює нескінченності, то розрив в точці x_0 називається *розривом другого роду*, а сама точка x_0 — *точкою розриву другого роду*.

Приклади

1. Функція $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ (рис. 4.47) не визначена в точці $x=0$, але має в цій точці границю, тому $x=0$ — точка усувного розриву; досить покласти $f(0)=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, щоб функція стала неперервною. Отже, функція

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0\end{cases}$$

є неперервною в точці $x=0$.

2. Функція $y=\begin{cases}3x^2, & x\leqslant 1\\ x+2, & x>1\end{cases}$; в точці $x=1$ буде неперервною (рис. 4.51), тому що функція визначена в точці $x=1$ і в будь-якому околі цієї точки. Крім того,

$$f(1)=3;\quad \lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<0}} 3x^2=3;\quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x+2)=3.$$

3. Функція $y=\begin{cases}4-x^2, & x<2\\ -1, & x\geqslant 2\end{cases}$; має в точці $x=2$ (рис. 4. 52) розрив першого роду: $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(4-x^2)=0$; $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(-1)=-1$. Стрибок функції в точці $x=2$ дорівнює $\delta=|-1-0|=1$.

4. Функція $y=E(x)$ (рис. 4.8) має безліч точок розриву першого роду.

5. Функція $y=\sin\dfrac{1}{x}$ (рис. 4.29) в точці $x=0$ має розрив другого роду, тому що жодна з односторонніх границь в цій точці не існує.

6. Функція $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ (рис. 4.53) в точці $x=1$ має розрив другого роду,

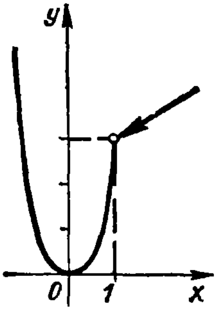


Рис. 4.51

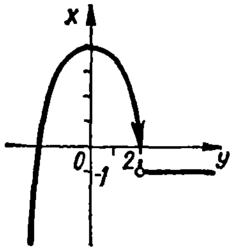


Рис. 4.52

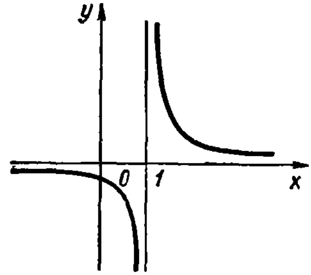


Рис. 4.53

тому що

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{1}{x-1}=+\infty,\quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{1}{x-1}=-\infty.$$

7. Функція $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ розривна в точках $x=\pm 1$, тому що в цих точках вона не визначена. Оскільки

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x}{x^2-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to -1+0}\frac{x}{x^2-1}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x}{x^2-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to 1+0}\frac{x}{x^2-1}=+\infty,$$

то $x=\pm 1$ — точки розриву другого роду (рис. 4.54).

8. Дослідити на неперервність функцію $f(x)=2^{\frac{1}{x+1}}$ в точці $x=-1$.

○ Функція не визначена в точці $x=-1$, тому функція в цій точці розривна. Щоб визначити характер розриву, знайдемо границі зліва і справа:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} 2^{\frac{1}{x+1}}=0;\quad \lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} 2^{\frac{1}{x+1}}=+\infty.$$

Отже, точка $x=-1$ є точкою розриву другого роду (рис. 4.55). ●

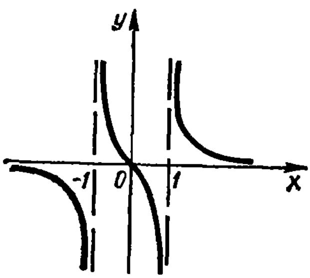


Рис. 4.54

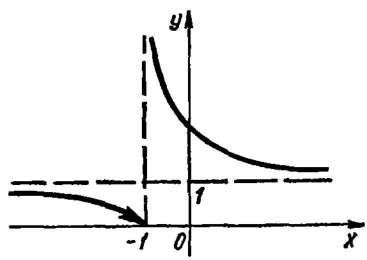


Рис. 4.55

9. Довести, що функція $f(x) = x^3$ неперервна в будь-якій точці $x_0 \in R$.

○ Скористаємось другим означенням неперервності. Для довільних значень x_0 і Δx маємо

$$f(x_0) = x_0^3,\ f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3;$$

$$\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3;$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3) = 0. \ \bullet$$

Аналогічно можна довести, що кожна основна елементарна функція неперервна в кожній точці, в якій вона визначена.

5.2. Дії над неперервними функціями. Неперервність елементарних функцій

Теорема 1. *Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервними є функції*

$$f(x) \pm \varphi(x),\ f(x)\varphi(x),\ \frac{f(x)}{\varphi(x)} \tag{27}$$

(остання за умови, що $\varphi(x_0) \neq 0$).

○ Оскільки неперервні в точці x_0 функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають границі, що дорівнюють $f(x_0)$ і $\varphi(x_0)$, то за теоремою 1 (п. 3.7) границі функцій (27) існують і відповідно дорівнюють $f(x_0) \pm \varphi(x_0)$, $f(x_0)\varphi(x_0)$, $\frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)}$. Але ці величини дорівнюють значенням відповідних функцій. Отже, функції (27) за першим означенням неперервності є неперервними в точці x_0. ●

Доведена теорема справедлива для алгебраїчної суми та добутку довільної скінченної кількості неперервних в точці x_0 функцій.

Теорема 2. *Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $y = f(u)$ неперервна в точці $u_0 = f(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ неперервна в точці x_0.*

○ Для доведення теореми досить встановити, що

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\varphi(x_0)).$$

Оскільки функція $u = \varphi(x)$ за умовою неперервна в точці x_0, то

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0,$$

тобто при $x \to x_0$ значення функції $u \to u_0$. Тому внаслідок неперервності функції $f(u)$

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0)). \ \bullet$$

Як відомо (п. 2.4), елементарною називається така функція, яку можна задати однією формулою, яка містить скінченне число арифметичних дій і суперпозицій основних елементарних функцій.

Оскільки основні елементарні функції неперервні в усіх точках, в яких вони визначені, то з теорем 1 і 2 випливає така теорема.

Теорема 3. *Всяка елементарна функція неперервна в кожній точці, в якій вона визначена.*

5.3. Властивості функцій, неперервних на відрізку

Якщо функція неперервна в кожній точці інтервалу(a, b), то вона називається неперервною на цьому інтервалі.

Функція називається неперервною на відрізку $[a; b]$, якщо вона неперервна на інтервалі $(a; b)$ і, крім того, неперервна справа в точці a і зліва в точці b.

Приклади

1. Функція $y = \begin{cases} 4 - x^2, & x < 2; \\ -1, & x \geqslant 2 \end{cases}$ (рис. 4.52) неперервна на проміжках $(-\infty; 2)$ і $[2; +\infty)$. В точці $x = 2$ вона неперервна справа.

2. Функція $y = [x]$ (рис. 4.8) неперервна на кожному з проміжків $[n; n + 1)$, $n \in N$. В точках $x = n$ вона неперервна справа.

3. Функція $y = \sqrt{1 - x^2}$ неперервна на відрізку $[-1; 1]$. В точці $x = -1$ вона неперервна справа, а в точці $x = 1$ зліва.

Неперервні на відрізку функції мають ряд важливих властивостей.

Сформулюємо деякі з них без доведення [12].

Теорема 1. *(перша теорема Больцано-Коші). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і на його кінцях набирає значень різних знаків, то всередині відрізка $[a, b]$ знайдеться хоча б одна точка $x = c$, в якій функція дорівнює нулю: $f(c) = 0$, $a < c < b$.*

Геометричний зміст цієї теореми такий (рис. 4.56): неперервна крива при переході з однієї півплощини в другу, межею між якими є вісь Ox, перетинає цю вісь.

Теорема 1 застосовується при розв'язуванні рівнянь і лежить в основі так званого *методу половинного поділу* (його називають також *методом «вилки»*).

Приклад

Довести, що на відрізку $[0; 1]$ рівняння $x^4 + x^3 - 1 = 0$ має корінь, знайти його з точністю до 0,1.

○ Нехай $f(x) = x^4 + x^3 - 1$. Ця функція неперервна на всій числовій осі, а отже, і на відрізку $[0; 1]$. Оскільки $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$, то за теоремою 1 дане рівняння на відрізку $[0; 1]$ має корінь. Точкою $x_1 = 0{,}5$ ділимо відрізок $[0; 1]$ навпіл і знаходимо $f(0{,}5) = -0{,}81$. Оскільки $f(1) = 1$, то корінь лежить на відрізку $[0{,}5; 1]$.

Точкою $x_2 = 0{,}75$ ділимо відрізок $[0{,}5; 1]$ навпіл і знаходимо $f(0{,}75) = -0{,}12$; отже, корінь знаходиться на відрізку $[0{,}75; 1]$.

Точкою $x_3 = 0{,}875$ ділимо відрізок $[0{,}75; 1]$ навпіл. Оскільки $f(0{,}875) = 0{,}27 > 0$, а $f(0{,}75) < 0$, то корінь знаходиться на відрізку $[0{,}75; 0{,}875]$. При цьому $0{,}875 - 0{,}75 = 0{,}125 = \frac{1}{8}$, тому, якщо за корінь рівняння взяти довільне число

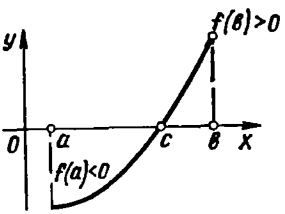


Рис. 4.56

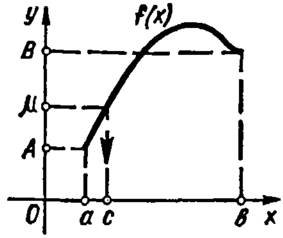


Рис. 4.57

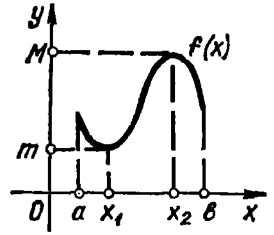


Рис. 4.58

$c \in [0{,}75;\ 0{,}875]$, то це число буде коренем з точністю до $\frac{1}{8}$. Наступна точка поділу $x_4 = \frac{1}{2}(0{,}75 + 0{,}875) = 0{,}8125$, буде коренем з точністю до $\frac{1}{16}$. Отже, в точністю до 0,1 коренем даного рівняння є число 0,81.

Продовжуючи цей процес, можна знайти корінь в будь-якою наперед заданою точністю. ●

Теорема 2 *(друга теорема Больцано — Коші). Нехай функція неперервна на відрізку* $[a;\ b]$ *і набуває на його кінцях різних значень:* $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$. *Тоді для довільного числа* $\mu \in (A;\ B)$ *знайдеться таке число* $c \in (a;\ b)$, *що* $f(c) = \mu$.

Отже, неперервна функція при переході від одного значення до другого набуває також всіх проміжних значень.

Зміст теореми 2 ілюструється на рис. 4.57.

Зазначимо, що теорему 1 можна розглядати як окремий випадок теореми 2: якщо A та B протилежні за знаком, то число $\mu = 0$ лежатиме між числами A та B.

Теорема 3 *(Вейєрштрасса). Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;\ b]$, *то серед її значень на цьому відрізку існує найменше і найбільше.*

Отже, неперервна на відрізку $[a,\ b]$ функція $f(x)$ досягає на цьому відрізку найбільшого значення $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ і найменшого значення $m = \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ (рис. 4.58).

Завдання для самоконтролю

1. Дати означення неперервності функції в точці: а) через односторонні границі; б) через прирости аргументу і функції.
2. Який розрив називається: а) розривом першого роду; б) розривом другого роду? Навести приклади.
3. Який розрив називається усувним. Навести приклади.
4. Довести, що функція $y = \sin x$ неперервна на всій числовій прямій.
5. Довести, що функція $y = 2^{\frac{1}{2-x}}$ має в точці $x = 2$ розрив другого роду.

6. Довести, що функція $y = \dfrac{2}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$ має в точці $x = 0$ розрив першого роду.

7. Довести, що функція $y = \dfrac{2}{1 + 3^{\frac{1}{(x-1)^2}}}$ має в точці $x = 1$ усувний розрив.

8. Сформулювати і довести теорему про неперервність в точці елементарних функцій.

9. Яка функція називається неперервною на проміжку?

10. Сформулювати теореми про властивості функції, неперервних на відрізку. Який геометричний зміст цих теорем?

Глава 5

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Диференціальне числення — розділ математики, в якому розглядається дослідження функцій за допомогою похідних та диференціалів.

Деякі задачі диференціального числення розв'язані ще в давнину. Так, Евклід розв'язав задачу про паралелограм найбільшої площі, який можна вписати в даний трикутник; Архімед побудував дотичну до спіралі, що носить його ім'я, а Аполлоній — дотичну до еліпса, гіперболи та параболи.

Загальні методи диференціального числення розроблено Ньютоном і Лейбніцем наприкінці 17 ст., але лише в 19 ст. Коші обгрунтував ці методи на основі теорії границь.

§ 1. ПОХІДНА

Центральне поняття диференціального числення — похідна — широко використовується при розв'язуванні багатьох задач з математики, фізики та інших наук, а також при вивченні різних процесів. Якщо перебіг того чи іншого процесу описується деякою функцією, то дослідження даного процесу зводиться до вивчення властивостей цієї функції та її похідної.

1.1. Задачі, які приводять до поняття похідної

1. *Задача про швидкість прямолінійного руху.* Нехай матеріальна точка рухається нерівномірно вздовж деякої прямої (рис. 5.1) і за час t проходить відстань S, що дорівнює відрізку OM. Тоді різним моментам часу t відповідатимуть різні положення точки M, тобто відстань S рухомої точки M є деякою функцією часу t : $S = S(t)$. Треба знайти швидкість руху точки M.

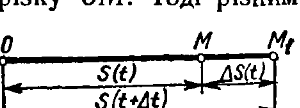


Рис. 5.1

Нехай з моменту t пройшов деякий час Δt ($\Delta t > 0$ — приріст часу). За час Δt рухома точка перейде в положення M_1 і пройде шлях, який позначимо через ΔS (ΔS — приріст шляху, що дорівнює відрізку MM_1). Отже, за час $t + \Delta t$ матеріальна точка пройде шлях $S(t) + \Delta S = S(t + \Delta t)$, тому

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t).$$

Середньою швидкістю v_c руху точки за проміжок часу $[t;\ t + \Delta t]$ називають відношення приросту шляху до приросту часу:

$$v_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Середня швидкість залежить від значення Δt, причому чим менший проміжок Δt після моменту часу t, тим точніше середня швидкість відображає швидкість руху точки у даний момент часу t. Істинну ж (миттєву) швидкість руху точки дістанемо як границю, до якої прямує середня швидкість v_c при $\Delta t \to 0$. Цю границю називають *швидкістю руху точки в момент часу* (або *миттєвою швидкістю*) і позначають

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}. \quad (1)$$

Приклади

1. Знайти середню v_c і миттєву v швидкості точки, яка рухається рівномірно прискорено з прискоренням a і з нульовою початковою швидкістю.

○ З курсу фізики відомо, що для даного випадку закон руху виражається формулою $S = \frac{at^2}{2}$. Знайдемо приріст шляху ΔS:

$$S + \Delta S = \frac{a(t + \Delta t)^2}{2} = \frac{at^2}{2} + at\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2},$$

$$\Delta S = \frac{a(t + \Delta t)^2}{2} - \frac{at^2}{2} = at\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2}.$$

Далі маємо

$$v_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = at + \frac{a\Delta t}{2};$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_c = \lim \left(at + \frac{a\Delta t}{2}\right) = at. \ ●$$

2. Нехай закон руху точки виражається формулою $S = t^3 + 3t + 1$, де S вимірюється в метрах. Знайти середню швидкість руху на проміжку часу від $t_0 = 1$ с до $t_1 = 5$ с і від t_0 до $t_2 = 2$ с та швидкість в момент часу $t_0 = 1$ с.

○ Знайдемо приріст шляху ΔS за проміжок часу Δt:

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S = [(t + \Delta t)^3 + 3(t + \Delta t) + 1] -$$

$$- (t^3 + 3t + 1) = 3(t^2 + 1)\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3.$$

Середня швидкість за час Δt

$$v_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = 3(t^2 + 1) + 3t\Delta t + \Delta t^2.$$

Проміжок часу $\Delta t_1 = t_1 - t_0 = 5 - 1 = 4$ с, тому

$$V_c = 3(1^2 + 1) + 3 \cdot 1 \cdot 4 + 4^2 = 34 \text{ м/с}.$$

Проміжок часу $\Delta t_2 = t_2 - t_0 = 2 - 1 = 1$ с, тому

$$V_c = 3(1^2 + 1) + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1^2 = 10 \text{ м/с}.$$

Знайдемо миттєву швидкість в будь-який момент часу t:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_c = \lim [3(t^2 + 1) + 3t\Delta t + \Delta t^2] = 3(t^2 + 1).$$

Зокрема, при $t_0 = 1$ с маємо

$$V = 3(1^2 + 1) = 6 \text{ м/с}. \ \bullet$$

2. *Задача про густину неоднорідного стержня.* Розглянемо тонкий прямолінійний неоднорідний стержень довжини l (рис. 5.2) і розмістимо його на осі Ox так, щоб лівий кінець стержня збігався з початком координат (матеріальне тіло називається *неоднорідним*, якщо його густина не є сталою, а змінюється від точки до точки). Позначимо через m масу стержня між точками O і M з координатами 0 і x. Оскільки маса відрізка OM залежить від його довжини, то m є функцією від x:

$$m = m(x).$$

Треба знайти густину стержня в точці M. Як і в попередній задачі крім точки M візьмемо ще точку M_1 з координатою $x + \Delta x$ (Δx — приріст довжини x) і позначимо через $m + \Delta m$ масу відрізка OM_1 (Δm — приріст маси, що дорівнює масі відрізка MM_1):

$$m + \Delta m = m(x + \Delta x).$$

Відрізок стержня між точками M і M_1 має довжину Δx і масу

$$\Delta m = m(x + \Delta x) - m(x).$$

Середньою густиною γ_c стержня на відрізку $[x;\ x + \Delta x]$ називають відношення приросту маси до приросту довжини:

$$\gamma_c = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}.$$

Границю середньої густини γ_c при $\Delta x \to 0$ називають *лінійною густиною стержня в точці* x і позначають

$$\gamma = \lim_{\Delta x \to 0} \gamma_c = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}. \qquad (2)$$

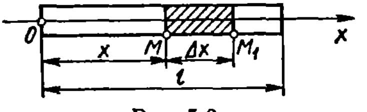


Рис. 5.2

3. *Задача про силу струму.* Нехай $Q = Q(t)$ — кількість електрики, що проходить через поперечний переріз провідника за час t, треба знайти силу струму в момент часу t. *Середньою силою струму* I_c *за проміжок часу* $[t;\ t + \Delta t]$ називають відношення приросту кількості електрики до приросту часу:

$$I_c = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}.$$

Границя середньої сили струму I_c при $\Delta t \to 0$ є *сила струму* в момент часу t:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} I_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}. \qquad (3)$$

4. *Задача про теплоємність.* Нехай $\omega = \omega(\tau)$ — кількість теплоти, яку дістає тіло при нагріванні його до температури τ. Треба знайти теплоємність тіла при температурі τ.

Середньою теплоємністю C_c тіла на проміжку $[\tau;\ \tau + \Delta\tau]$ називають відношення приросту теплоти до приросту температури:

$$C_c = \frac{\Delta\omega}{\Delta\tau} = \frac{\omega(\tau + \Delta\tau) - \omega(\tau)}{\Delta\tau}.$$

Границю середньої теплоємності C_c при $\Delta\tau \to 0$ називають *теплоємністю тіла* при температурі τ:

$$C = \lim_{\Delta\tau \to 0} C_c = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\omega(\tau + \Delta\tau) - \omega(\tau)}{\Delta\tau}. \qquad (4)$$

5. *Задача про швидкість хімічної реакції.* Нехай $N = N(t)$ — кількість речовини, що вступає в хімічну реакцію за час t. Треба знайти швидкість реакції. Середньою швидкістю v_c реакції за проміжок часу $[t;\ t + \Delta t]$ називають відношення приросту кількості речовини до приросту часу:

$$v_c = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}.$$

Границя середньої швидкості v_c реакції при $\Delta t \to 0$ є швидкість реакції в момент часу t:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}. \qquad (5)$$

6. *Задача про дотичну до кривої.* Відомо, що дотичною до кола називають пряму, яка має з колом одну спільну точку. Це означення дотичної не можна застосувати до незамкнених кривих. Дійсно, парабола $y = x^2$ має з віссю Oy лише одну спільну точку $(0;\ 0)$, але пряма $x = 0$ не є дотичною до цієї параболи у вказаній точці. З іншого

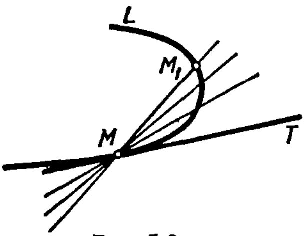


Рис. 5.3

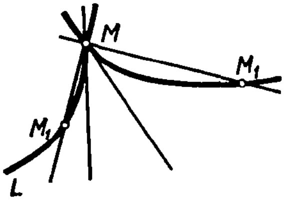


Рис. 5.4

боку, пряма $y = 1$ має безліч спільних точок з кривою $y = \sin x$ і є дотичною до цієї кривої.

Дамо загальне означення дотичної. Розглянемо криву L і на ній точки M, M_1 (рис. 5.3). Пряму MM_1, що проходить через ці точки, називають *січною*. Нехай точка M_1, рухаючись вздовж кривої, наближається до точки M. Тоді січна MM_1 повертатиметься навколо точки M, а довжина відрізка MM_1 прямуватиме до нуля.

Якщо при цьому і величина кута M_1MT прямує до нуля, то пряму MT називають граничним положенням січної MM_1.

Пряму MT, яка є граничним положенням січної MM_1, називають *дотичною до кривої* L в точці M.

З цього означення випливає, що існування дотичної не залежить від того, з якого боку точка M_1 наближається до точки M. У будь-якому випадку січна MM_1 має наближатись до однієї і тієї самої прямої MT.

Якщо січна MM_1 наближається до різних прямих (рис. 5.4) або взагалі не наближається ні до якої прямої, то вважають, що в точці M дотичної не існує.

Розглянемо випадок, коли крива в прямокутній системі координат (рис. 5.5) задана рівнянням $y = f(x)$ і має в точці $M(x; y)$ не вертикальну дотичну. Розглянемо задачу про знаходження кутового коефіцієнта цієї дотичної. Надамо аргументу x приросту Δx: тоді значенню $x + \Delta x$ відповідатимуть значення функції $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ і точка $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$ на кривій.

Проведемо січну MM_1 і позначимо через φ кут, утворений цією січною з додатним напрямом осі Ox. З графіка видно, що кутовий коефіцієнт січної MM_1 дорівнює

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AM_1}{AM} =$$

$$= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

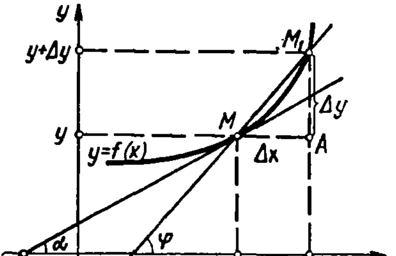


Рис. 5.5

Якщо $\Delta x \to 0$, то точка M_1 прямує до точки M вздовж кривої $y = f(x)$, а січна MM_1, повертаючись навколо точки M, переходить в дотичну MT. Кут φ при цьому прямує до деякого граничного значення α. Отже, кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (6)$$

Розглянуті задачі, незважаючи на різний зміст, приводять нас до знаходження границь (1) — (6) одного й того самого виду — границі відношення приросту функції до приросту аргументу.

Цю границю в математиці називають *похідною*. Переходимо до точного означення.

1.2. Означення похідної. Механічний, фізичний та геометричний зміст похідної

Нехай на деякому проміжку $\langle a;\ b\rangle$ задано функцію $y = f(x)$. Візьмемо будь-яку точку $x \in \langle a;\ b\rangle$ і надамо x довільного приросту Δx такого, щоб точка $x + \Delta x$ також належала проміжку $\langle a;\ b\rangle$. Знайдемо приріст функції: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції Δy в цій точці до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Похідна функції $y = f(x)$ в точці x позначається одним із таких символів:

$$y'; \quad \frac{dy}{dx}; \quad \frac{df}{dx}; \quad y'_x; \quad f'(x).$$

Таким чином, за означенням

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (7)$$

Якщо в деякій точці x границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, то похідну $f'(x)$ в цій точці називають нескінченною.

Якщо границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ в деякій точці x не існує, то не існує в цій точці і похідної $f'(x)$.

Значення похідної функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ позначається одним із таких символів:

$$f'(x_0); \quad f'(x)|_{x=x_0}; \quad y'|_{x=x_0}; \quad \frac{df(x_0)}{dx}.$$

З означення похідної випливає такий спосіб її знаходження. Щоб знайти похідну функції $y = f(x)$ в деякій точці x, треба:

1) надати значенню x довільного приросту Δx і знайти відповідний приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

2) знайти відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

3) знайти границю цього відношення:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо ця границя існує, то вона й дорівнює похідній $f'(x)$.

Операція знаходження похідної від функції $f(x)$ називається *диференціюванням цієї функції.*

Приклади

1. Знайти похідну функції $y = x^2$: а) в довільній точці x; б) в точці $x = 5$.

○ а) Надамо аргументу x приросту Δx і обчислимо приріст Δy:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x;$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Отже, $(x^2)' = 2x$.

б) Підставивши в загальний вираз для похідної значення $x = 5$, дістанемо

$$(x^2)'\big|_{x=5} = 2x\big|_{x=5} = 2 \cdot 5 = 10. \; ●$$

2. Довести, що функція $y = x^n$, $x \in R$, $n \in N$ має похідну $y' = nx^{n-1}$.

○ Візьмемо довільну точку x і надамо їй приросту Δx. Тоді функція матиме приріст $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$. Застосовуючи до виразу $(x + \Delta x)^n$ формулу бінома Ньютона

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \cdots + b^n, \tag{8}$$

при $a = x$, $b = \Delta x$, дістанемо

$$\Delta y = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3}\Delta x^3 + \cdots + \Delta x^n,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}\Delta x + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3}\Delta x^3 + \cdots + \Delta x^{n-1}.$$

Перейшовши в останній рівності до границі при $\Delta x \to 0$, дістанемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

Отже,

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \; ● \tag{9}$$

Користуючись означенням похідної, розв'язки задач 1—6 п. 1.1 можна тлумачити так.

1. *Швидкість в даний момент часу* — це похідна від пройденого шляху $S(t)$ за часом $t: v = S'(t)$.

Це *механічний зміст похідної*. Узагальнюючи, можна сказати: якщо функція $y = f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна $y' = f'(x)$ є швидкістю зміни цього процесу. В цьому полягає *фізичний зміст похідної*. Інакше кажучи, яку б залежність не відображала функція $y = f(x)$, відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ можна розглядати як *середню швидкість зміни функції* y відносно аргументу x, а похідну $f'(x)$ — *миттєву швидкість зміни функції*.

2. *Лінійна густина неоднорідного стержня* — це похідна від маси $m(x)$ за довжиною $x: \gamma = m'(x)$

3. *Сила струму* — це похідна від кількості електрики $Q(t)$ за часом t: $I = Q'(t)$.

4. *Теплоємність* — це похідна від кількості теплоти $\omega(\tau)$ за температурою τ: $c = \omega'(\tau)$.

5. *Швидкість хімічної реакції* — це похідна від кількості речовини $N(t)$, що вступила в реакцію, за часом t: $v = N'(t)$.

6. *Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої* $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ або тангенс кута α (рис. 5.6), що утворює дотична до кривої в даній точці з додатним напрямом осі Ox,— це похідна $f'(x_0)$ в цій точці:

$$k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0).$$

У цьому полягає *геометричний зміст похідної*.

Знайдемо рівняння дотичної. Оскільки дотична проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ в напрямі, що визначається кутом α, то, поклавши в формулі (9) (гл. 3) $k = f'(x_0)$, маємо

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{10}$$

Рівняння (10) називається *рівнянням дотичної до кривої* $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Зокрема, якщо функція в точці M_0 має нескінченну похідну, то дотична в цій точці паралельна осі Oy, а її рівняння таке: $x = x_0$.

Нормаллю до кривої називається пряма, що проходить через точку дотику, перпендикулярно до дотичної.

Оскільки кутові коефіцієнти дотичної і нормалі пов'язані між собою умовою перпендикулярності ((24), гл. 3), то рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{11}$$

За допомогою рівняння (10) можна знайти довжину відрізка AM_0 (рис. 5.6), яка називається *довжиною відрізка дотичної* (як відстань між точками M_0 і C), і довжину відрізка AB, який називається *піддотичною* (як відстань між точками A і B). Аналогічно за допомогою рівняння (11) знаходять *довжину відрізка нормалі* M_0C та *піднормалі* BC. Ці відрізки часто зустрічаються в задачах.

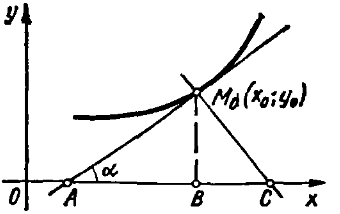


Рис. 5.6

Наведемо деякі твердження, які випливають з геометричного змісту похідної.

Нехай на інтервалі (a, b) задано (рис. 5.7) неперервну функцію $f(x)$. Якщо похідна $f'(x_1)$ при $x_1 \in (a, b)$ додатна, то дотична до графіка функції $f(x)$ в точці $(x_1; f(x_1))$ утворює з віссю Ox гострий кут. Якщо похідна $f'(x_2) = 0$, то дотична в точці $(x_2; f(x_2))$ паралельна осі Ox: якщо похідна $f'(x_3) < 0$, то дотична до графіка в точці $(x_3; f(x_3))$ утворює з віссю Ox тупий кут; якщо похідна $f'(x_4)$ не існує, то в точці $(x_4; f(x_4))$ не існує й дотичної, тобто графік в цій точці має злом (кажуть також, що графік має кутову точку); якщо похідна $f'(x_5)$ дорівнює нескінченності, то дотична у відповідній точці графіка паралельна осі Oy. Справедливі й обернені твердження. Наприклад, якщо дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці $(x_1; f(x_1))$ утворює з віссю Ox гострий кут, то $f'(x_1) > 0$; якщо дотична до графіка в точці $(x_2; f(x_2))$ паралельна осі Ox, то $f'(x_2) = 0$ і т. д.

Такий зв'язок між похідною і дотичною, як і зв'язок між похідною і швидкістю, допомагає інтуїтивному сприйняттю багатьох математичних фактів.

Приклади

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3$ в точці A (2; 8). Знайти довжини відрізка дотичної і піднормалі в цій точці.

○ За формулою (9) при $n = 3$ маємо $y' = (x^3)' = 3x^2$, звідки $f'(2) = 12$.

Поклавши в формулах (10) і (11) $x_0 = 2$, $y_0 = 8$, $f'(x_0) = 12$, дістанемо рівняння дотичної (рис. 5.8)

$$y - 8 = 12(x - 2) \Rightarrow 12x - y - 16 = 0$$

і рівняння нормалі

$$y - 8 = -\frac{1}{12}(x - 2) \Rightarrow x - 12y - 98 = 0.$$

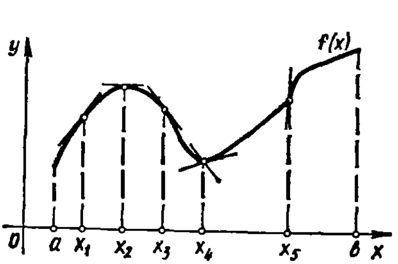


Рис. 5.7

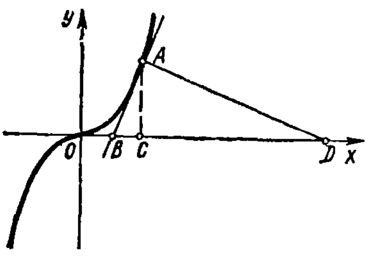


Рис. 5.8

Довжину відрізка AB дотичної знайдемо як відстань між точками A і B. Координати точки B визначимо з системи рівнянь $y = 12x - 16$; $y = 0$ (точка перетину дотичної і осі Ox). Маємо A (2; 8), $B\left(\frac{4}{3}; 0\right)$, тому довжина відрізка дотичної

$$AB = \sqrt{\left(2 - \frac{4}{3}\right)^2 + (8-0)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{145}.$$

Поклавши в рівнянні нормалі $y = 0$, знайдемо $x_D = 98$. Оскільки $x_C = x_A = 2$, то піднормаль $CD = 96$. ●

2. Знайти кути між параболами $y = x^2$, $y = x^3$ в точках перетину їх.

○ Розв'язуючи систему рівнянь $y = x^2$; $y = x^3$, знайдемо точки O (0; 0) і A (1; 1) перетину даних кривих.

За формулою (9)

$$(x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2.$$

Зазначимо, що *кутом між кривими в точці їхнього перетину* вважають (за означенням) кут між дотичними до даних кривих у цій точці. Оскільки при $x = 0$ ці похідні однакові (дорівнюють нулю), то це означає, що в точці O (0; 0) дотичні мають однакові кутові коефіцієнти, тобто параболи $y = x^2$ і $y = x^3$ в точці O (0; 0) мають одну й ту саму дотичну, тому кут між кривими в цій точці дорівнює нулю. Цей самий результат дістанемо, коли в формулі (9) (гл. 3) покладемо $k_1 = k_2 = 0$.

Знайдемо кутові коефіцієнти дотичних до даних кривих у точці A (1; 1). Маємо

$$k_1 = 2x\,|_{x=1} = 2, \quad k_2 = 3x^2\,|_{x=1} = 3, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} = \frac{1}{7},$$

звідки $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$. ●

1.3. Графічне диференціювання

Наведемо ще одне застосування геометричного змісту похідної. *Графічним диференціюванням* називається наближена побудова графіка похідної $y' = f'(x)$ за даним графіком функції $y = f(x)$.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ (рис. 5.9).

Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ на n частин і позначимо відповідні їм точки M_0, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, M_n графіка. В кожній з цих точок проведемо дотичну. Через точку A (—1; 0) проведемо паралельні цим дотичним прямі до перетину з віссю Oy в точках B_0, B_1, B_2, ..., B_{n-1}, B_n, тоді

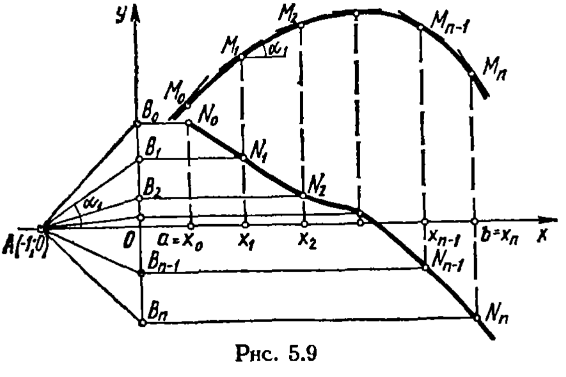


Рис. 5.9

$$y_{B_0} = f'(x_0),$$
$$y_{B_1} = f'(x_1),$$
$$y_{B_2} = f'(x_2), \quad \ldots,$$
$$y_{B_{n-1}} = f'(x_{n-1}),$$
$$y_{B_n} = f'(x_n).$$

Справді, наприклад, з $\triangle\ OB_1A$ маємо

$$\frac{OB_1}{OA} = \frac{OB_1}{1} = \operatorname{tg}\alpha_1 = f'(x_1).$$

Проведемо через точку B_1 пряму, паралельну осі Ox, а через M_1 пряму, паралельну осі Oy. Точка N_1 перетину їх належить графіку похідної $y = f'(x)$, оскільки

$$x_{N_1} = x_1, \quad y_{N_1} = f'(x).$$

Аналогічно знаходять точки $N_0, N_2, \ldots, N_n$. Сполучивши плавною лінією всі ці точки, матимемо наближений графік похідної $y' = f'(x)$. Цей графік тим точніший, чим більше число n поділу відрізка $[a; b]$ на частини.

1.4. Односторонні похідні. Неперервність і диференційовність

Односторонні похідні визначаються за допомогою односторонніх границь (гл. 4, п. 5.1). Нехай функція $f(x)$ визначена в околі точки x. Якщо в формулі (7) передбачається, що $\Delta x \to 0$ і $\Delta x > 0$, то відповідну границю (коли вона існує) називають *правою похідною* від $f(x)$ в точці x і позначають

$$f'_+(x) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Аналогічно визначається *ліва похідна:*

$$f'_-(x) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[a; b]$, то під похідною в точці a розуміють праву похідну, а в точці b — ліву.

З формули (25) (гл. 4) випливає, що коли неперервна функція $f(x)$ має ліву і праву похідні в точці x і вони рівні, то похідна $f'(x)$ існує і

$$f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x). \tag{12}$$

Якщо ж $f'_-(x) \neq f'_+(x)$, то похідна в точці x не існує. Не існує похідної і в точках розриву функції.

Як уже зазначалося, похідна може бути як скінченною, так і нескінченною, залежно від значення границі

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Надалі під словом «похідна» розумітимемо, якщо не буде спеціального застереження, лише скінченну похідну.

Функція $f(x)$ називається *диференційовною* в точці x_0, якщо в цій точці вона має похідну $f'(x_0)$.

Функцію $f(x)$ називають *диференційовною на проміжку*, якщо вона диференційовна в кожній точці цього проміжку.

Приклади

1. Функція $y = \sin x$ (рис. 4.15) неперервна і диференційовна на всій числовій осі.

2. Функція $y = E(x)$ (рис. 4.8) в точках $x = n$ має розриви першого роду, тому в цих точках вона недиференційовна.

3. Функція $y = |x|$ (рис. 4.3) в точці $x = 0$ неперервна, але недиференційовна, тому що порушується умова (12) і похідна не існує. Справді, $f'_+(0) \neq f'_-(0)$:

$$f'_+(0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$$

$$f'_-(0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

4. Функція $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 4.9, *в*) в точці $x = 0$ неперервна і має нескінченну похідну

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x + 0} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = \infty.$$

Тому в точці $x = 0$ дана функція є недиференційовною.

5. Функція $y = e^{|x|}$ в точці $x = 0$ є неперервною, тому що

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = e^{|0+\Delta x|} - e^{|0|} = e^{|\Delta x|} - 1;$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (e^{|\Delta x|} - 1) = 0.$$

Оскільки

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{|\Delta x|} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0; \\ -1, & \Delta x < 0, \end{cases}$$

то дана функція в точці $x = 0$ є недиференційовною.

6. Функція $y = e^x$ в точці $x = 0$ є неперервною і диференційовною, оскільки

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Зв'язок між неперервністю функції в точці і диференційовністю її в цій точці встановлює така теорема.

Теорема. *Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона в цій точці неперервна.*

○ Справді, якщо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

то за властивістю 1° (п. 3.6 гл. 4)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

де $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тоді $\Delta y = (f'(x_0) + \alpha)\Delta x \to 0$ при $\Delta x \to \to 0$, а це означає, що функція $f(x)$ в точці x_0 неперервна. ●

Як показують приклади 3, 4, 5, обернене твердження неправильне: існують неперервні функції, які в деяких точках не є диференційовними. Крім того, відомі приклади функцій, неперервних на всій числовій осі і недиференційовних в жодній її точці [12]. Таким чином, неперервність функції в точці є лише необхідною умовою її диференційовності в цій точці.

Завдання для самоконтролю

1. Дати означення похідної заданої функції.
2. Охарактеризувати символи $f'(x)$, $f'(x_0)$.
3. Який геометричний, механічний і фізичний зміст похідної?
4. Як знайти похідну, виходячи з її означення?
5. Довести, користуючись означенням похідної, що

$$(3x^2 - 5x + 2)' = 6x - 5.$$

6. Довести, користуючись означенням похідної, що

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

7. Вивести рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$.
8. Як знайти довжини дотичної, піддотичної, нормалі і піднормалі, користуючись рівнянням дотичної і нормалі?
9. Упевнитись, що довжини піддотичної і нормалі параболи $y = x^2$ в точці $A(2; 4)$ дорівнюють відповідно 1 і $4\sqrt{17}$.
10. Нехай точка $M_1(x_1; y_1)$ належить кривій $y = f(x)$ і існує похідна $y_1' = f'(x_1)$ в цій точці M_1. Нехай T, S_T, N, S_N — відповідно довжини відрізка дотичної, піддотичної, відрізка нормалі та піднормалі до даної кривої в точці M_1. Довести, що

$$S_T = \left|\frac{y_1}{y_1'}\right|; \quad T = \left|\frac{y_1}{y_1'}\sqrt{y_1'^2 + 1}\right|; \quad S_N = |y_1 y_1'|; \quad N = \left|y_1\sqrt{1 + y_1'^2}\right|.$$

11. Виконати завдання 9 за допомогою формул із завдання 10.
12. Як визначається кут між лініями?
13. Упевнитись, що лінії $y = x^2$ і $y = x$ перетинаються під кутом 45° в точці $O(0; 0)$ і під кутом $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ в точці $A(1; 1)$.
14. Дотична до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ нахилена під кутом 45°. Чому дорівнює $f'(x_0)$?
15. Дотична до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ паралельна осі Ox. Чому дорівнює $f'(x_0)$?
16. Описати спосіб графічного диференціювання.
17. Дати означення правої і лівої похідних функцій в точці. Який зв'язок між односторонніми похідними і похідною функції в точці? Навести приклад функції, для якої існує права і ліва похідні в деякій точці, але не існує похідна в цій точці.
18. Упевнитись, що для функції $f(x) = e^{-|x|}$ права похідна $f'_+(0) = -1$, а ліва похідна $f'_-(0) = 1$.
19. Дати означення диференційовної функції в точці і на проміжку.
20. Який клас функцій ширший: неперервних в точці $x = x_0$ чи диференційовних в цій точці? Навести приклади.

§ 2. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

У попередньому параграфі ми знаходили похідні деяких функцій, виходячи з означення похідної. На практиці функції диференціюють за допомогою ряду правил і формул.

2.1. Правила диференціювання суми, різниці, добутку і частки

Теорема 1. *Якщо функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ диференційовні в точці x, сума, різниця, добуток і частка цих функцій (частка за умови, що $v(x) \neq 0$) також диференційовні в цій точці і справедливі такі формули:*

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; \tag{13}$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \tag{14}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{15}$$

○ На основі означення похідної і теореми 1 (гл. 4, п. 3.7) маємо

$$(u \pm v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)] - [u(x) \pm v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v';$$

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x)\, v(x + \Delta x) - u(x)\, v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)\, v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta v \frac{\Delta u}{\Delta x} \right] =$$

$$= v(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= vu' + u'v + 0 \cdot u' = u'v + uv'.$$

Тут ми скористалися теоремою (п. 1.4) про зв'язок диференційовності і неперервності: оскільки функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні в точці x, то вони в цій точці неперервні, тому $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Знайдемо похідну частки:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x) + \Delta u}{v(x) + \Delta v} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)\,v(x) + v(x)\,\Delta u - v(x)\,u(x) - u(x)\,\Delta v}{(v(x) + \Delta v)\,v(x)\,\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\Delta u - u\Delta v}{(v^2 + v\Delta v)\,\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta u} =$$

$$= \frac{v\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\lim\limits_{\Delta x \to 0}\Delta u} = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \quad ●$$

2.2. Похідні сталої, добутку сталої на функцію, степеневої, тригонометричних, показникової і логарифмічної функцій

Теорема 2. *Якщо $y = f(x) = C$, де C — стале число, то*

$$f'(x) = C' = 0. \tag{16}$$

○ Для довільних x і $\Delta x \neq 0$ маємо $f(x) = C$, $f(x + \Delta x) = C$, тому $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0$. Отже,

$$C' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0. \quad ●$$

Теорема 3. *Сталий множник можна виносити за знак похідної, тобто*

$$(Cu)' = Cu'. \tag{17}$$

○ З формул (14) і (16) маємо

$$(Cu)' = C'u + Cu' = 0 \cdot u + Cu' = Cu'. \quad ●$$

Теорема 4. Похідну степеневої функції $y = x^\alpha$, де α — довільне число, знаходять за формулою

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}. \tag{18}$$

○ Застосувавши еквівалентність $(1 + t)^\alpha - 1 \sim \alpha t$ при $t \to 0$ (гл. 4, п. 4.3), маємо

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^\alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\Delta x} =$$

$$= x^\alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \alpha x^\alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Формула (18) є узагальненням формули (9). ●

Теорема 5. *Похідні тригонометричних функцій знаходять за формулами*

$$(\sin x)' = \cos x; \tag{19}$$

$$(\cos x)' = -\sin x; \tag{20}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};\qquad (21)$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.\qquad (22)$$

○ $$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x,$$

оскільки з першої важливої границі випливає, що $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$,

а внаслідок неперервності функції $\cos x$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right] = \cos x.$$

Таким чином, формулу (19) доведено. Аналогічно доводиться формула (20):

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x.$$

Формули (21) і (22) випливають з правила диференціювання частки і формул (19) і (20):

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$ ●

Теорема 6. *Похідну показникової функції* $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ *знаходять за формулою*

$$(a^x)' = a^x \ln a.\qquad (23)$$

○ Скориставшись еквівалентністю $a^{\alpha} - 1 \sim \alpha \ln a$ при $\alpha \to 0$ маємо

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} =$$

$$= a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a. \ \bullet$$

Наслідок. Похідну функції $y = e^x$ знаходять за формулою

$$(e^x)' = e^x. \tag{24}$$

Теорема 7. *Похідну логарифмічної функції* $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ *знаходять за формулою*

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e. \tag{25}$$

○ Скориставшись еквівалентністю $\log_a (1 + t) \sim t \log_a e$, $t \to 0$, (гл. 4, п. 4.3), дістанемо

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \log_a e}{x \Delta x} = \frac{1}{x} \log_a e. \ \bullet$$

Наслідок. Похідну функції $y = \ln x$ знаходять за формулою

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{26}$$

2.3. Похідна складеної функції

Нехай $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$, тоді $y = f[\varphi(x)]$ — складена функція з проміжним аргументом u і кінцевим x.

Теорема 8. *Якщо функція* $u = \varphi(x)$ *має похідну* u'_x *в точці* x, *а функція* $y = f(u)$ *має похідну* y'_u *у відповідній точці* u, *то складена функція* $y = f[\varphi(x)]$ *має похідну* y'_x *в точці* x *і справедлива формула*

$$y'_x = y'_u u'_x. \tag{27}$$

○ Оскільки функція $y = f(u)$ диференційовна в точці u, то за властивістю 1° (гл. 4, п. 3.6) маємо

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha \quad \text{або} \quad \Delta y = y'_u \Delta u + \alpha \Delta u, \tag{28}$$

де $\alpha \to 0$ при $\Delta u \to 0$.

Функція $u = \varphi(x)$ має похідну u'_x в точці x, тому

$$\Delta u = u'_x \Delta x + \alpha_1 \Delta x, \tag{29}$$

де $\alpha_1 \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Підставивши значення Δu з формули (29) у формулу (28), дістанемо

$$\Delta y = y'_u u'_x \Delta x + y'_u \alpha_1 \Delta x + u'_x \alpha \Delta x + \alpha \alpha_1 \Delta x.$$

Якщо цю рівність розділити на Δx і перейти до границі при $\Delta x \to 0$, то одержимо формулу (27). ●

Згідно з формулою (27) маємо таке правило диференціювання складеної функції: похідна складеної функції дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжному аргументу на похідну від проміжного аргументу по кінцевому аргументу. Це правило залишається справедливим, коли складена функція має кілька проміжних аргументів. Якщо, наприклад, $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, то

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x. \tag{30}$$

Зазначимо, що при диференціюванні складених функцій потрібно чітко уявляти собі, яка з дій, що приводять до значення складеної функції, є останньою. Та величина, над якою виконується остання дія, приймається за проміжний аргумент.

Зауваження. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$. Дійсно, нехай $x > 0$, тоді $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$. Якщо $x < 0$, то $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$.

Приклад

Знайти похідні функцій:

а) $y = \sin^3 x$; б) $y = \ln \operatorname{tg} x^3$; в) $y = 2^{\sqrt[3]{\cos 5x}}$.

○ а) Для функції $y = \sin^3 x$ останньою дією є піднесення до кубу, тому проміжний аргумент $u = \sin x$ і $y = u^3$. За формулами (27), (18) і (19) дістанемо

$$y'_x = (\sin^3 x)'_x = (u^3)'_u (\sin x)'_x = 3u^2 \cos x = 3 \sin^2 x \cos x.$$

б) Для функції $y = \ln \operatorname{tg} x^3$ останньою операцією є взяття логарифма, тому проміжним аргументом є значення $u = \operatorname{tg} x^3$. Проміжним аргументом виразу $\operatorname{tg} x^3$ є $v = x^3$, тому дана функція має вигляд

$$y = \ln u, \quad u = \operatorname{tg} v, \quad v = x^3.$$

Застосовуючи формули (30), (26), (21) і (18), дістанемо

$$y'_x = (\ln u)'_u (\operatorname{tg} v)'_v (x^3)'_x = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\cos^2 v} \cdot 3x^2 =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg} v} \cdot \frac{1}{\cos^2 v} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{\sin x^3 \cos x^3}.$$

На практиці проміжні аргументи не виписують, але похідні від них позначають штрихом. Ось як, наприклад, знаходять похідну функції б):

$$(\ln \operatorname{tg} x^3)' = \frac{1}{\operatorname{tg} x^3} (\operatorname{tg} x^3)' = \frac{1}{\operatorname{tg} x^3} \cdot \frac{1}{\cos^2 x^3} \cdot (x^3)' = \frac{3x^2}{\sin x^3 \cos x^3}.$$

в) При достатній підготовці похідну знаходять зразу, не вводячи допоміжних позначень для похідних від проміжних аргументів:

$$y'_x = (2^{\sqrt[3]{\cos 5x}})' = 2^{\sqrt[3]{\cos 5x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{3} (\cos 5x)^{-\frac{2}{3}} (-\sin 5x) \cdot 5 =$$

$$= \frac{-5 \ln 2 \cdot 2^{\sqrt[3]{\cos 5x}} \sin 5x}{3 \sqrt[3]{\cos^2 5x}}. \bullet$$

2.4. Гіперболічні функції та їхні похідні

У математиці, будівельній механіці, електротехніці та інших дисциплінах зустрічаються так звані *гіперболічні функції*.

Гіперболічними синусом $\operatorname{sh} x$, косинусом $\operatorname{ch} x$, тангенсом $\operatorname{th} x$ і котангенсом $\operatorname{cth} x$ називаються функції, які визначаються за такими формулами:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \tag{31}$$

Функції $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ визначені на всій числовій осі, а функція $\operatorname{cth} x$ визначена для всіх дійсних значень x, крім точки $x = 0$.

Графіки цих функцій (рис. 5.10) можна побудувати, використовуючи метод, описаний в п. 2.4 (гл. 4).

Гіперболічні функції зв'язані співвідношеннями, аналогічними до співвідношень між відповідними тригонометричними функціями,

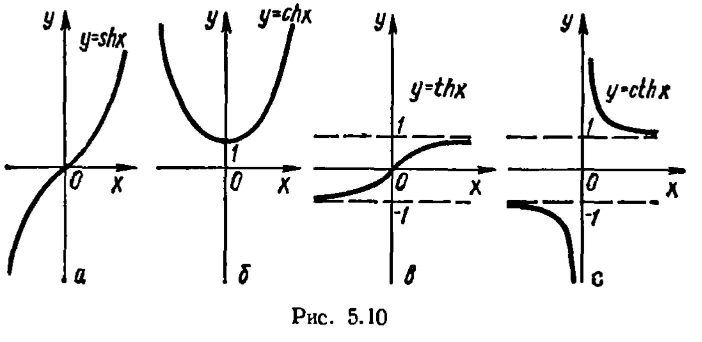


Рис. 5.10

чим і пояснюються їхні назви. Зокрема, справедливі формули

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1;$$

$$\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, y \pm \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{sh}\, y;$$

$$\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{ch}\, y \pm \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{sh}\, y;$$

$$\mathrm{th}(x \pm y) = \frac{\mathrm{th}\, x \pm \mathrm{th}\, y}{1 \pm \mathrm{th}\, x\, \mathrm{th}\, y};$$

$$\mathrm{sh}\, 2x = 2\, \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x; \quad \mathrm{ch}\, 2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x.$$

Всі ці формули випливають з означень гіперболічних функцій. Наприклад,

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x})^2}{4} = 1;$$

$$\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, y + \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{sh}\, y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^y - e^{-y}}{2} =$$

$$= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \mathrm{sh}(x + y).$$

Природу цих аналогій з'ясуємо пізніше, коли розглянемо комплексні числа. За їх допомогою можна буде довільне співвідношення між тригонометричними функціями перетворити у відповідне співвідношення між гіперболічними функціями.

Геометрична інтерпретація гіперболічних функцій також аналогічна інтерпретації тригонометричних функцій. Як відомо (гл. 3, п. 1.4), параметричні рівняння

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

визначають одиничне коло $x^2 + y^2 = 1$, причому $\sin t = MP$, $\cos t = OP$ (рис. 5.11). Параметричні рівняння

$$x = \mathrm{ch}\, t, \quad y = \mathrm{sh}\, t$$

задають гіперболу (рис. 5.12) $x^2 - y^2 = 1$, оскільки $x^2 - y^2 = \mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$, причому

$$\mathrm{sh}\, t = NQ, \quad \mathrm{ch}\, t = OQ.$$

Неважко пересвідчитись, що параметр t в параметричних рівняннях кола чисельно дорівнює подвійній площі кругового сектора OAM. Зазначимо без доведення, що в параметричних рівняннях гіперболи параметр t також чисельно дорівнює подвійній площі, але не кругового, а гіперболічного сектора ONA.

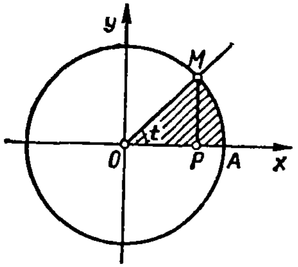


Рис. 5.11

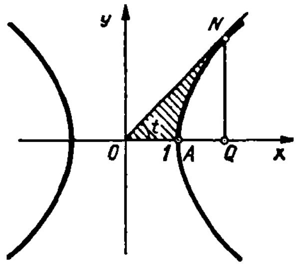


Рис. 5.12

Теорема 9. *Похідні гіперболічних функцій визначаються за формулами*

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; \tag{32}$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x; \tag{33}$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \tag{34}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \tag{35}$$

○ Відповідно до формул (31), (27), (24) маємо

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x'}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \quad \bullet$$

2.5. Похідна оберненої функції. Диференціювання обернених тригонометричних функцій

Нехай $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ — пара взаємно обернених функцій (гл. 4, п. 2.10). Сформулюємо без доведення теорему про зв'язок між похідними цих функцій:

Теорема 10. *Якщо функція $y = f(x)$ строго монотонна на інтервалі $(a; b)$ і має відмінну від нуля похідну $f'(x)$ в довільній точці цього інтервалу, то існує обернена функція $x = \varphi(y)$, яка також має похідну $\varphi'(y)$, причому*

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{36}$$

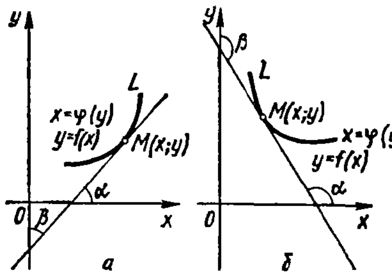


Рис. 5.13

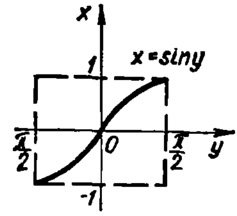


Рис. 5.14

Таким чином, похідні двох взаємно обернених функцій обернені за величиною. Якщо аргумент оберненої функції в формулі (36) позначити через x, а саму функцію — через y, то дістанемо формулу для похідної оберненої функції:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}. \tag{37}$$

Формула (36) має такий геометричний зміст. Нехай крива L (рис. 5.13, *а*) задається функцією $y = f(x)$ або оберненою функцією $x = \varphi(y)$. Тоді з геометричного змісту похідної випливає, що

$$y'_x = \operatorname{tg}\alpha; \quad x'_y = \operatorname{tg}\beta.$$

Оскільки $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$, звідки $x'_y = \frac{1}{y'_x}$. Якщо функція $y = f(x)$ монотонно спадає (рис. 5.13, *б*), то $\alpha = \frac{\pi}{2} + (\pi - \beta)$, тому $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \beta\right) = \operatorname{ctg}\beta$, що приведе до того самого висновку.

Теорема 11. *Похідні від обернених тригонометричних функцій знаходять за формулами:*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \tag{38}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \tag{39}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}; \tag{40}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}. \tag{41}$$

○ Доведемо формулу (38). Функція $y = \arcsin x$, де $x \in [-1; 1]$ є оберненою до функції $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

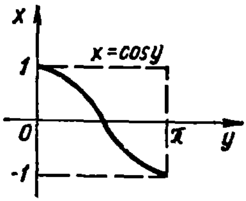


Рис. 5.15

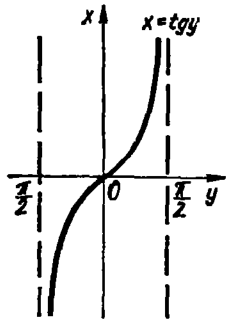


Рис. 5.16

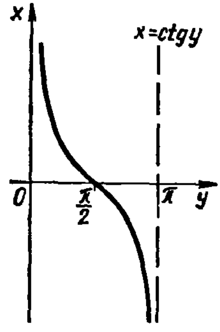


Рис. 5.17

Оскільки на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ функція $x = \sin y$ зростає (рис. 5.14) і похідна $x'_y = (\sin y)'_y = \cos y > 0$, тобто всі умови теореми 10 виконуються, то за формулою (37) $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}$, звідки $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Формула (39) доводиться аналогічно. Функція $y = \arccos x$ є оберненою до функції $x = \cos y$, де $y \in [0;\ \pi]$, $x \in [-1;\ 1]$. Оскільки на інтервалі $(0;\ \pi)$ функція $x = \cos y$ спадає і $x'_y = -\sin y < 0$ (рис. 5.15), то

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Доведемо формули (40) і (41). Функція $y = \operatorname{arctg} x$ є оберненою до функції $x = \operatorname{tg} y$, де $y \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Оскільки на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ функція $x = \operatorname{tg} y$ зростає (рис. 5.16) і

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y} > 0, \text{ то } y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y,$$

звідки

$$(\operatorname{arctg} x)' = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Функція $y = \operatorname{arcctg} x$ є оберненою до функції $x = \operatorname{ctg} y$, де $y \in \in (0;\ \pi)$, $x \in (-\infty;\ +\infty)$. Оскільки на інтервалі $(0;\ \pi)$ функція

$x = \operatorname{ctg} y$ спадає (рис. 5.17) і

$$x'_y = -\frac{1}{\sin^2 y}, \text{ то } y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\sin^2 y,$$

звідки

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}. \ ●$$

2.6. Похідна функції, заданої параметрично

Виведемо формулу для похідної функції $y = f(x)$, заданої параметрично (гл. 4, п. 2.11)

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Припустимо, що функція $\varphi(t)$ на інтервалі $(\alpha; \beta)$ задовольняє всі умови теореми 10, а функція $\psi(t)$ на цьому самому інтервалі має похідну $\psi'(t)$. Тоді існує обернена функція $t = \Phi(x)$, яка має похідну і яку знаходять за формулою (37):

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} \text{ або } \Phi'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Функцію $y = f(x)$ можна розглядати як складену функцію $y = \psi(t) = \psi(\Phi(x))$ з проміжним аргументом $t = \Phi(x)$, тому за формулою (27) маємо

$$y'_x = y'_t t'_x = \psi'(t)\,\Phi'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Таким чином, похідну функції, заданої параметрично, знаходять за формулою

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{42}$$

Приклади

1. Знайти y'_x, якщо $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

○ Оскільки $x'_t = -a\sin t$, $y'_t = a\cos t$, то за формулою (42) дістанемо

$$y'_x = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{ctg} t. \ ●$$

2. Скласти рівняння дотичної до циклоїди

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$$

в точці $M_0(x_0; y_0)$, яка відповідає параметру $t = \frac{\pi}{2}$.

○ Знайдемо координати точки M_0:

$$x_0 = (t - \sin t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1; \quad y_0 = (1 - \cos t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Обчислимо значения похідиої y'_x при $t = \frac{\pi}{2}$: $y'_x \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin t}{1-\cos t}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1.$

Скориставшись формулою (10), складемо рівияиня дотичиої:

$$y - 1 = 1 \cdot \left(x - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right) \text{ або } y = x + 2 - \frac{\pi}{2}. \; \bullet$$

3. Зиайти піднормаль до кривої

$$x = t^2 - 2t - 2, \quad y = t - 1$$

в точці $M_0(2;\ 1)$.

○ Точці $M_0(2;\ 1)$ відповідае значения параметра $t = 2$, оскільки $y|_{t=2} = 1$ і $x|_{t=2} = 2$. Обчислимо похідну y'_x при $t = 2$: $y'_x|_{t=2} = \frac{1}{3t^2-2}\Big|_{t=2} = 0{,}1$. Піднормаль S_N знайдемо за формулою $S_N = |y_1 y'_1|$ (завдания 10 для самоконтролю § 1): $S_N = 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}1$. ●

2.7. Диференціювання неявно заданої функції

Нехай неявна функція $y(x)$ (гл. 4, п. 2.9) задана рівнянням

$$F(x, y) = 0. \qquad (43)$$

Щоб продиференціювати неявно задану функцію, потрібно взяти похідну по x від обох частин рівності (43), вважаючи y функцією від x, і одержане рівняння розв'язати відносно y'. Похідна неявної функції виражається через незалежну змінну x і саму функцію y.

Приклад

Знайти похідну y', якщо $x^2 + y^2 - 2y + 3x = 1$.

○ Маємо

$$2x + 2yy' - 2y' + 3 = 0,$$

$$y'(2y - 2) = -2x - 3, \quad y' = \frac{2x+3}{2-2y}.$$

Зауважимо, що при дифереиціюванні другого доданка ми скористалися правилом диференціювання складеиої фуикції:

$$(y^2)'_x = (y^2)'_y y'_x = 2yy'. \; \bullet$$

2.8. Логарифмічне диференціюваиня. Похідна показниково-степеневої функції

У деяких випадках при знаходженні похідної доцільно задану функцію спочатку прологарифмувати, а потім знайти похідну як від неявної функції. Така операція називається *логарифмічним диференціюванням.*

Приклад

Знайти похідну функції $y = \frac{x^2(x^2+1)\,e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}$.

○ Цю функцію можна диференціювати за правилом диференціювання частки. Проте такий спосіб дуже громіздкий. Застосуємо логарифмічне диференціювання. Маємо

$$\ln y = 3\ln x + \ln(x^2+1) + x - \ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln|3x+5|;$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2(3x+5)};$$

$$y' = \frac{x^3(x^2+1)e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}\left(\frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2(3x+5)}\right). \bullet$$

У розглянутому прикладі похідну можна знаходити двома способами: за допомогою відомих правил і формул диференціювання і логарифмічним диференціюванням. Проте існують функції, похідні яких знаходять лише логарифмічним диференцюванням. Прикладом такої функції є *показниково-степенева функція*

$$y = u^v, \tag{44}$$

де u, v — задані і диференційовні функції від x. Знайдемо похідну функції (44):

$$\ln y = v\ln u; \quad \frac{y'}{y} = v'\ln u + v\frac{u'}{u};$$

$$y' = u^v\left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v\ln u\cdot v' + vu^{v-1}u'.$$

Отже, похідна показниково-степеневої функції (44) дорівнює сумі похідної показникової функції за умови, що $u = \text{const}$, і похідної степеневої функції за умови, що $v = \text{const}$:

$$(u^v)' = u^v\ln u\cdot v' + vu^{v-1}u'. \tag{45}$$

Приклад

Знайти похідну функції $y = x^{\sin 5x}$.

○ За формулою (45) маємо

$$y' = x^{\sin 5x}\ln x\cdot 5\cos 5x + \sin 5x\cdot x^{\sin 5x - 1} = x^{\sin 5x}\left(5\ln x\cos 5x + \frac{\sin 5x}{x}\right). \bullet$$

2.9. Таблиця похідних

У попередніх пунктах виведено формули, які дають змогу знаходити похідні, не користуючись означенням похідної, тобто диференціювати довільну елементарну функцію, не вдаючись до знаходження границь.

Зведемо формули в таблицю. Вважатимемо, що $u = u(x)$, $v = v(x)$ — диференційовні функції, C — стала величина.

П р а в и л а д и ф е р е н ц і ю в а н н я:

$$(u \pm v)' = u' \pm v; \qquad y = f(u), \quad u = u(x) \Rightarrow y'_x = y'_u u'_x;$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \qquad y = f(x), \quad x = \varphi(y) \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y};$$

$$(Cu)' = Cu'; \qquad y = y(t), \quad x = x(t) \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t};$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \qquad (u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1}u'.$$

Формули диференціювання:

1. $C' = 0$;
2. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u', \quad \alpha \in R$;
3. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u', \quad a > 0, \quad a \neq 1$;
4. $(e^u)' = e^u u'$;
5. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u'$;
6. $(\ln u)' = \frac{1}{u} u'$;
7. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
8. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
9. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} u'$;
10. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$;
11. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$;
12. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$;
13. $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} u'$;
14. $(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} u'$;
15. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$;
16. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$;
17. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} u'$;
18. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} u'$.

Завдання для самоконтролю

1. Вивести правила диференціювання суми, різниці, добутку і частки двох функцій. Навести приклади.
2. Вивести правило диференціювання складеної функції. Навести приклад.
3. Дати означення гіперболічних функцій. Чим пояснюється їхня назва? Який геометричний зміст?
4. Вивести формули для похідних гіперболічних функцій.

5. Вивести правило диференціювання оберненої функції.

6. Вивести правило диференціювання параметрично заданої функції. Навести приклад.

7. Як диференціювати неявно задану функцію? Навести приклад.

8. У чому суть логарифмічного диференціювання? Навести приклад.

9. Вивести формули похідних всіх основних елементарних функцій.

10. Довести методом логарифмічного диференціювання формули:

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}; \quad (a^x)' = a^x \ln a.$$

11. Продиференціювати функцію:
$y = \log_u v, \ u = u(x), \ v = v(x)$.

Вказівка. Якщо $y = \log_u v$, то $y = \dfrac{\ln v}{\ln u}$.

12. Нехай

$$f(x) = \frac{2^x (x+1)^3}{(x-1)^2 \sqrt{2x+1}}, \quad u(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x^4}{1-x^8},$$

$$v(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \sin x + \ln \cos \sin x, \quad z(x) = \log_x e.$$

Упевнитись, що $f'(0) = \ln 2 + 4, \ u'(0) = 0, \ v'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \ z'(e) = -\frac{1}{e}$.

13. Нехай $x = e^{-t} \sin t, \ y = e^t \cos t$. Довести, що

$$y'_x \big|_{t=1} = e^2.$$

14. Нехай $x^{y^2} + y^2 \ln x - 4 = 0$. Перевірити, що

$$y' \big|_{x=e} = -\frac{y}{2e}.$$

§ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛ

Поняття диференціала тісно пов'язане з поняттям похідної, і є одним з найважливіших в математиці. Диференціал наближено дорівнює приросту функції і пропорційний приросту аргументу. Внаслідок цього диференціал широко застосовується при дослідженні різноманітних процесів і явищ. Будь-який процес протягом достатньо малого проміжку часу змінюється майже рівномірно, тому дійсний приріст величини, що характеризує процес, можна замінити диференціалом цієї величини на даному проміжку часу. Таку заміну називають *лінеаризацією процесу*.

Термін «диференціал» (від латинського слова differentia — різниця) ввів у математику Лейбніц.

3.1. Означення, геометричний та механічний зміст диференціала

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці $x \in [a; b]$, тобто в цій точці має похідну

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тоді з властивості 1° (гл. 4, п. 3.6)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \quad \alpha \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0,$$

звідки

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x. \tag{46}$$

Перший з доданків лінійний відносно Δx і при $\Delta x \to 0$ та $f'(x) \neq 0$ є нескінченно малою одного порядку з Δx, тому що (гл. 4, п. 4.3):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x).$$

Другий доданок — нескінченно мала вищого порядку, ніж Δx, тому що

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Цей доданок не є лінійним відносно Δx, тобто містить Δx в степені, вищому від одиниці. Таким чином, перший доданок у формулі (46) є головною частиною приросту функції, лінійною відносно приросту аргументу.

Диференціалом dy функції $y = f(x)$ в точці x називається головна, лінійна відносно Δx, частина приросту функції $f(x)$ в цій точці:

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{47}$$

Диференціал dy називають також *диференціалом першого порядку*.

Якщо $y = x$, то $y' = x' = 1$, тому $dy = dx = \Delta x$, тобто диференціал dx незалежної змінної x збігається з її приростом Δx. Тому формулу (47) можна записати так:

$$dy = f'(x)dx. \tag{48}$$

Формула (48) дає змогу розглядати похідну як відношення диференціала функції до диференціала незалежної змінної.

Зауважимо, що коли в точці x_0 похідна $f'(x_0) = 0$, то перший доданок у формулі (46) дорівнює нулеві і вже не є головною частиною приросту Δy. Але і в цьому випадку диференціал dy знаходять за формулою (48).

Геометричний зміст диференціала зрозумілий з рис. 5.18. Маємо

$$PN = \Delta y, \quad QN = MN \operatorname{tg}\alpha = \Delta x f'(x) = f'(x)dx = dy.$$

Отже, диференціал функції $f(x)$ при заданих значеннях x і Δx дорівнює приросту ординати дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці x. Приріст функції Δy при цьому дорівнює приросту ординати кривої. Таким чином, заміна приросту функції на її диференціал геометрично означає заміну ординати AP кривої ординатою дотичної AQ. Зрозуміло, що така заміна доцільна лише для достатньо малих значень Δx.

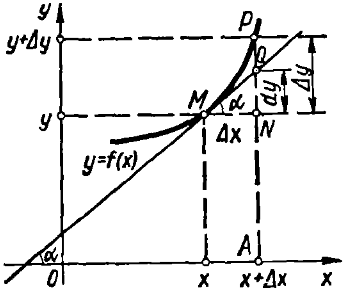


Рис. 5.18

З'ясуємо механічний зміст диференціала. Нехай матеріальна точка рухається за відомим законом $S = f(t)$, де $f(t)$ — диференційовна на деякому проміжку функція. Тоді диференціал цієї функції $dS = f'(t)\,\Delta t$ при фіксованих значеннях t і Δt — це той шлях, який пройшла б матеріальна точка за час Δt, якби вона рухалась прямолінійно і рівномірно із сталою швидкістю $v = f'(t)$.

Зрозуміло, що фактичний шлях ΔS у випадку нерівномірного руху на відміну від диференціала dS не є лінійною функцією часу Δt і тому відрізняється від шляху dS. Проте якщо час Δt достатньо малий, то швидкість руху не встигає суттєво змінитись, і тому рух точки на проміжку часу від t до $t + \Delta t$ є майже рівномірним.

Поняття диференціала можна проілюструвати і на інших прикладах, які розглянуто в п. 1.1. У кожному з них поняття диференціала набуває конкретного фізичного змісту.

3.2. Властивості диференціала. Інваріантність форми диференціала

Оскільки диференціал функції дорівнює добутку її похідної на диференціал незалежної змінної, то властивості диференціала можна легко дістати із відповідних властивостей похідної. Якщо, наприклад, u і v — диференційовні функції від x, C — стала, то маємо такі правила знаходження диференціалів:

$$dC = 0; \qquad d(uv) = vdu + udv;$$

$$d(Cu) = Cdu; \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv;$$

Доведемо, наприклад, четверту формулу. За означенням диференціала маємо

$$d(uv) = (uv)'_x dx = (u'v + uv')\,dx =$$
$$= vu'dx + uv'dx = vdu + udv.$$

Особливо важливий висновок випливає з правила диференціювання складеної функції. Нехай $y = f(x) = f(\varphi(t))$ — складена функція з проміжним аргументом $x = \varphi(t)$ і кінцевим аргументом t, причому функції $f(x)$, $\varphi(t)$ диференційовні в точках x і t. Тоді існує похідна $y'_t = y'_x x'_t$, а отже, і диференціал

$$dy = y'_t dt = y'_x x'_t dt = y'_x dx. \tag{49}$$

Порівнюючи формули (48) і (49), бачимо, що перший диференціал функції $y = f(x)$ визначається за однією і тією самою формулою незалежно від того, чи змінна x є незалежною змінною, чи вона є функцією іншої змінної.

Цю властивість диференціала називають *інваріантністю (незмінністю) форми диференціала*. Проте слід зауважити, що формули (48), де x — незалежна змінна, і (49), де x — залежна змінна, однакові лише на вигляд, а зміст їх різний: якщо у формулі (48) $dx = \Delta x$, то у формулі (49)

$$dx = x'(t)\,dt \neq \Delta x.$$

3.3. Застосування диференціала в наближених обчисленнях

Як уже зазначалось, приріст Δy функції $y = f(x)$ у точці x можна наближено замінити диференціалом dy в цій точці: $\Delta y \approx dy$. Підставивши сюди значення Δy і dy, дістанемо

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x. \tag{50}$$

Абсолютна похибка величини $\Delta y - dy$ є при $\Delta x \to 0$ нескінченно малою вищого порядку, ніж Δx, тому що при $f'(x) \neq 0$ величини Δy і dy еквівалентні (гл. 4, п. 4.3):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\,\Delta x + \alpha\Delta x}{f'(x)\,\Delta x} = 1.$$

Оцінка (точність) формули (50) при фіксованих значеннях x та Δx з'ясована в п. 5.2.

Іноді користуються наближеною рівністю

$$f(x + \Delta x) \approx f(x). \tag{51}$$

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x, то абсолютна похибка формули (51) наближено дорівнює абсолютній величині диференціала:

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| = |\Delta y| \approx |dy| = |f'(x)\,\Delta x|.$$

Відносна похибка формули (51) визначається за формулою

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx \left|\frac{dy}{y}\right|.$$

Приклади

1. Знайти диференціал функції $y = \ln \sin 2x$: а) при довільних значеннях x і Δx; б) при $x = \frac{\pi}{8}$; в) при $x = \frac{\pi}{8}$ і $\Delta x = 0{,}1$.

○ а) Користуючись формулою (48), знаходимо

$$dy = (\ln \sin 2x)'\,dx = 2\operatorname{ctg} 2x\,dx;$$

б) $dy\Big|_{x=\frac{\pi}{8}} = 2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\,dx = 2dx$; в) $dy\Big|_{\substack{x=\frac{\pi}{8}\\ \Delta x=0{,}1}} = 0{,}2.$ ●

2. Порівняти приріст Δy і диференціал dy функції $y = x^3 + 2x^2$.

○ Знаходимо приріст і диференціал функції:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 + 2(x + \Delta x)^2 - (x^3 + 2x^2) =$$
$$= (3x^2 + 4x)\Delta x + (3x + 2 + \Delta x)\Delta x^2;$$
$$dy = f'(x)\Delta x = (3x^2 + 4x)\,dx.$$

Величини Δy і dy еквівалентні при $\Delta x \to 0$ і $x \neq 0$, оскільки $dx = \Delta x$ і

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3x^2 + 4x)\Delta x + (3x + 2 + \Delta x)\Delta x^2}{(3x^2 + 4x)\Delta x} = 1.$$

Абсолютна похибка $|\Delta y - dy| = |3x + 2 + \Delta x|\,\Delta x^2$ при $\Delta x \to 0$ є нескінченно малою другого порядку в порівнянні з Δx, тому що

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta y - dy|}{\Delta x^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|3x + 2 + \Delta x|\,\Delta x^2}{\Delta x^2} = |3x + 2| \neq 0,$$

якщо $x \neq -\frac{2}{3}$ і є нескінченною малою більш високого порядку, ніж другий, коли $\Delta x \to 0$ і $x \to -\frac{2}{3}$. ●

3. Довести, що при малих значеннях Δx і $x > 0$ справедлива формула

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}.$$

○ Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in (0; +\infty)$. Маємо $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ і шукана рівність випливає з формули (50). Зокрема, якщо $x = 1$, то $\sqrt{1 + \Delta x} \approx \approx 1 + \frac{\Delta x}{2}$.

Наприклад,

$$\sqrt{1{,}08} = \sqrt{1 + 0{,}08} \approx 1 + \frac{0{,}08}{2} = 1{,}04;$$

$$\sqrt{146} = \sqrt{144 + 2} = \sqrt{144\left(1 + \frac{2}{144}\right)} = 12\sqrt{1 + \frac{1}{72}} \approx 12{,}008. \; ●$$

4. Обчислити наближено arctg 1,05.

○ Нехай $f(x) = \operatorname{arctg} x$, тоді за формулою (48) маємо

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + (\operatorname{arctg} x)'\Delta x;$$
$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + \frac{\Delta x}{1 + x^2}.$$

Якщо

$$x = 1, \quad \Delta x = 0{,}5, \text{ то } \operatorname{arctg} 1{,}05 \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{0{,}5}{2} = \frac{\pi}{4} + 0{,}025 \approx 0{,}811. \; ●$$

Завдання для самоконтролю

1. Що називається диференціалом функції? Як визначається диференціал функції через її похідну?

2. Який геометричний та механічний зміст диференціала.

3. Який фізичний зміст диференціала в задачах п. 1.1 про густину неоднорідного стержня; про силу струму; про теплоємність; про швидкість хімічної реакції?

4. Назвати властивості диференціала. У чому полягає інваріантність форми диференціала?

5. Обгрунтувати формулу для наближеного обчислення значення функції за допомогою диференціала.

6. Показати, що диференціал і приріст функції $y = x^3$ при $x = 1$ і $\Delta x = 0{,}1$ відповідно дорівнюють 0,3 і 0,331.

7. Знайти диференціали функцій:

а) $y = \frac{x}{2}\sqrt{16 - x^2} + 8\arcsin\frac{x}{4}$; б) $y = 3\ln \operatorname{ch}\frac{x}{3}$;

в) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, $x \in (0;\ \pi)$; г) $y = \arccos\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

8. Користуючись формулою (50), переконатись, що

$$\operatorname{tg} 46° \approx 1{,}035;\quad \arcsin 0{,}51 \approx 0{,}513;\quad \cos 61° \approx 0{,}485.$$

9. Довести формули:

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \Delta x \cos x;$$

$$\cos(x + \Delta x) \approx \cos x - \Delta x \sin x;$$

$$\sqrt[n]{x + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}},\quad n \geqslant 2;$$

$$e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x;\quad \ln(x + \Delta x) \approx \ln x + \frac{\Delta x}{x},$$

Відповіді

7. а) $\sqrt{16 - x^2}\,dx$; б) $\operatorname{th}\frac{x}{3}\,dx$;

в) $\frac{dx}{2}$; г) $\frac{-2x\,dx}{|x|(x^2+1)}$.

§ 4. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

4.1. Похідні вищих порядків явно заданої функції

Нехай на інтервалі $(a;\ b)$ задана диференційовна функція $y = f(x)$, тоді її похідна $f'(x)$, яку називатимемо ще *першою похідною* (або *похідною першого порядку*), також є функцією від x. Може трапитись, що функція $f'(x)$ також має похідну на інтервалі $(a;\ b)$ або в деякій точці $x \in (a;\ b)$. Цю останню похідну називають *другою похідною* (або *похідною другого порядку*) і позначають одним із таких символів:

$$y'',\quad f''(x),\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{\partial^2 f}{dx^2},\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Друга похідна має такий механічний зміст. Якщо рух матеріальної точки відбувається за законом $S = f(t)$, то похідна S', як було з'ясовано в п. 1.1, дорівнює швидкості точки в даний момент часу: $v = S' = f'(t)$. Оскільки прискорення — це похідна від швидкості, то $a = v' = S'' = f''(t)$.

Отже, другу похідну можна тлумачити як величину, що дорівнює прискоренню рухомої точки в даний момент часу.

Похідну від другої похідної, якщо вона існує, називають *третьою похідною,* або *похідною третього порядку,* і позначають так:

$$y''', \quad f'''(x), \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \frac{d^3f}{dx^3}, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^3}\right).$$

Похідною n-го порядку функції $y = f(x)$ називають першу похідну, якщо вона існує, від похідної $(n - 1)$-го порядку:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' \quad \text{або} \quad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))',$$

або

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Похідні порядку вище першого називають *похідними вищого порядку.*

Починаючи з похідної четвертого порядку, похідні позначають не штрихами, а цифрами. Порядок похідної береться в дужки для того, щоб не сплутати його з показником степеня.

Приклади

1. Знайти четверту похідну функції $y = x^5 - 7x^2 + x - 1$.

○ Маємо $y' = 5x^4 - 14x + 1$, $y'' = 20x^3 - 14$, $y''' = 60x^2$, $y^{(4)} = 120x$. ●

2. Знайти похідну n-го порядку функцій:

а) $y = e^{ax}$; б) $y = \sin x$.

○ а) $y' = ae^{ax}$, $y'' = a^2e^{ax}$, $y''' = a^3e^{ax}$,
$y^{(4)} = a^4e^{ax}$, . . . , $y^{(n)} = a^ne^{ax}$.

б) $y = \sin x$;

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(y + 2\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y''' = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right);$$

. . . .

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \; ●$$

4.2. Похідні вищих порядків неявно заданої функції

Нехай функція $y = f(x)$ задана неявно рівністю $F(x, y) = 0$. Диференціюючи цю рівність по x і розв'язуючи одержане рівняння відносно y', знайдемо першу похідну.

Щоб знайти другу похідну, потрібно продиференціювати по x першу похідну і в одержане співвідношення підставити її значення. Продовжуючи диференціювання, можна знайти одну за одною послідовно похідні будь-якого порядку. Всі вони будуть виражені через незалежну змінну x і саму функцію y.

Приклад

Знайти y'', якщо $x^2 + y^3 = 1$.

○ Продиференціюємо задану рівність по x і знайдемо y':

$$2x + 3y^2y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x}{3y^2}.$$

Далі маємо

$$y'' = -\frac{2}{3}\frac{y^2 - x2yy'}{y^4} = -\frac{2}{3}\frac{y - 2xy'}{y^3} =$$

$$= -\frac{2}{3}\frac{y - 2x\left(-\dfrac{2x}{3y^2}\right)}{y^3} = -\frac{2}{9}\frac{3y^3 + 4x^2}{y^5} =$$

$$= -\frac{2}{9}\frac{3y^3 + 3x^2 + x^2}{y^5} = -\frac{2}{9}\frac{3(x^2 + y^3) + x^2}{y^5} = -\frac{2(3 + x^2)}{9y^5}. \bullet$$

4.3. Похідні вищих порядків параметрично заданої функції

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \text{де} \quad t \in (\alpha; \beta).$$

Якщо функції $x(t)$ і $y(t)$ мають перші похідні, причому $x'(t) \neq 0$, а $x(t)$ строго монотонна функція, то, як відомо (п. 2.6), першу похідну знаходять за формулою

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Якщо функції $x(t)$ і $y(t)$ мають похідні другого порядку, то можна знайти другу похідну від y по x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t \frac{1}{x'(t)} = \frac{(y'_x)'_t}{x'(t)}.$$

Дійсно, диференціюючи першу похідну за правилом диференціювання складеної функції і використовуючи похідну оберненої функції, маємо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_x = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t t'_x = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t \frac{1}{x'(t)}.$$

Аналогічно знаходять похідну будь-якого порядку $n > 2$:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)'_t \frac{1}{x'(t)}.$$

Приклад

Знайти $\frac{d^n y}{dx^n}$, якщо $x = \ln t$, $y = t^3$.

○ Маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(t^3)'_t}{(\ln t)'_t} = 3t^3;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (3t^3)'_t \frac{1}{(\ln t)'_t} = 9t^3 = 3^2t^3;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (9t^3)'_t \frac{1}{(\ln t)'_t} = 27t^3 = 3^3t^3;$$

. . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = 3^n t^3. \; ●$$

4.4. Диференціали вищих порядків

Нехай маємо диференційовну на деякому проміжку функцію $y = f(x)$, де x — незалежна змінна. Тоді її перший диференціал або диференціал першого порядку

$$dy = f'(x)\, dx \tag{52}$$

— це деяка функція від x і можна говорити про диференціал цієї функції.

Другим диференціалом d^2y, або *диференціалом другого порядку*, називається диференціал від першого диференціала:

$$d^2y = d(dy).$$

Оскільки dx не залежить від x, то при диференціюванні першого диференціала dx можна винести за знак похідної, тому

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)\, dx) = (f'(x)\, dx)'_x\, dx = f''(x)\, dx dx = f''(x)\, dx^2.$$

Тут dx розглядається як єдиний символ (а не як добуток d на x), тому дужки в степені диференціала dx опускають, $(dx)^n = dx^n$:

$$d^2y = f''(x)\, dx^2. \tag{53}$$

Третім диференціалом d^3y, або *диференціалом третього порядку*, називається диференціал від другого диференціала:

$$d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)\, dx^2) = f'''(x)\, dx^3. \tag{54}$$

Взагалі, *n-м диференціалом* d^ny, або *диференціалом n-го порядку*, називається диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку:

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)\, dx^n. \tag{55}$$

Зауважимо, що формули (53) — (55) справедливі лише для випадку, коли x — незалежна змінна. Дійсно, нехай задано складену функцію $y = f(x)$, $x = x(t)$. Відомо (п. 3.2), що перший диференціал має інваріантну форму, тобто рівність (52) виконується як для випадку, коли x є функцією від t, так і за умови, що x є незалежною змінною.

Виявляється, що диференціали вищих порядків інваріантної властивості не мають. Покажемо це на прикладі диференціала другого порядку. Користуючись правилом диференціювання добутку, маємо:

$$d^2y = d(f'(x)\,dx) = d(f'(x))\,dx + f'(x)\,d(dx) =$$
$$= f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,x''(t)\,dt^2;$$
$$d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,x''(t)\,dt^2. \qquad (56)$$

Порівнявши формули (53) і (56), переконаємось, що у випадку складеної функції формула другого диференціала змінюється. Отже, диференціал другого порядку інваріантної властивості не має. Якщо виявиться, що x — незалежна змінна, то

$$d^2x = d(dx) = d(1 \cdot dx) = dx\,d(1) = dx \cdot 0 = 0$$

і формула (56) переходить у формулу (53).

Приклади

1. Знайти d^3y, якщо $y = \sin 2x$.

○ Скористаємось формулою (54). Оскільки

$$y' = 2\cos 2x, \quad y'' = -4\sin 2x, \quad y''' = -8\cos 2x,$$

то

$$d^3y = -8\cos 2x dx^3. \ ●$$

2. Знайти d^2y, якщо $y = x^2$, $x = t^3 - 1$.

○ Застосуємо формулу (56). Оскільки $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$ і $x'(t) = 3t^2$, $x''(t) = 6t$, то $d^2y = 2dx^2 + 2x6tdt^2 = 2(3t^2dt)^2 + 2(t^3 - 1)\,6tdt^2 = (30t^4 - 12t)\,dt^2$.

Такий самий результат дістанемо, коли виключимо залежну змінну x і скористаємось формулою (53):

$y = x^2$, $x = t^3 - 1$, тому $y = (t^3 - 1)^2 = t^6 - 2t^3 + 1$, $y' = 6t^5 - 6t^2$, $y'' = 30t^4 - 12t$, $d^2y = (30t^4 - 12t)\,dt^2$. ●

Завдання для самоконтролю

1. Що називається похідною другого порядку від функції $y = f(x)$? У чому полягає її механічний зміст?

2. Що називається похідною n-го порядку?

3. Як знайти похідні вищих порядків від функцій, заданих явно, неявно, параметрично? Навести приклади.

4. Довести формулу Лейбніца для диференціювання добутку функцій $u = u(x)$ та $v = v(x)$:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + uv^{(n)}$$

для випадку, коли $n = 4$.

5. Довести, що другу похідну функції $y(x)$, заданої рівияннями $y = y(t)$, $x = x(t)$, знаходять за формулою

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''(t)\,x'(t) - y'(t)\,x''(t)}{(x'(t))^3}.$$

6. Що називається диференціалом n-го порядку даної функції?
7. Як знайти диференціал d^ny, якщо $y = f(x)$ і x — незалежна змінна?
8. Чи мають диференціали вищих порядків інваріантну властивість?
9. Довести формули:

$$d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x;$$

$$d^3y = f'''(x)\,dx^3 + 3f''(x)\,dx d^2x + f'(x)\,d^3x.$$

10. Знайти похідні другого порядку функцій:

а) $y = x\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \sqrt{x^2+1}$; б) $x^2 + 3y^2 = 3$;
в) $x = \arccos\sqrt{t}$, $y = \sqrt{t - t^2}$.

11. Знайти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, якщо:

а) $y = (x^2+1)\operatorname{arctg} x$;
б) $2x^2 + y^2 = 2$;
в) $x = \cos t$, $y = \sin t$.

12. Показати, що функція $y = e^x + 2e^{2x}$ задовольняє рівняння $y''' - 6y'' + 11y - 6y = 0$.

13. Довести, що $(x^n)^{(n)} = n!$, $n \in N$; $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$.

14. Нехай $y = 1 + 3\cos^2 x$. Переконатись, що

$$y^{(n)} = 3 \cdot 2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

15. Нехай $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$. Переконатись, що

$$d^2y = \frac{4\ln x - \ln^3 x - 4}{x^2(\ln^2 x - 4)^{3/2}}\,dx^2.$$

16. Довести, що

$$d^n(\sin^2 x) = 2^{n-1}\sin\left(2x + \frac{\pi(n-1)}{2}\right)dx^n.$$

Відповіді. 10. а) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; б) $-\dfrac{1}{3y^3}$; в) $-4\sqrt{t - t^2}$.
11. а) $\dfrac{4}{(x^2+1)^2}$; б) $-\dfrac{24x}{y^5}$; в) $-\dfrac{3\cos t}{\sin^5 t}$.

§ 5. ДЕЯКІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

5.1. Теореми Ферма і Ролля

Теорема Ферма.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $(a; b)$ і набуває свого найбільшого або найменшого значення у деякій точці c цього інтервалу. Тоді, якщо в точці c існує похідна $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

○ Для визначеності вважатимемо, що в точці c функція $f(x)$ набуває свого найбільшого значення (рис. 5.19), тобто

$$f(x) \leqslant f(c), \quad x \in (a;\ b). \qquad (57)$$

Оскільки точка c є внутрішньою точкою інтервалу $(a;\ b)$, то приріст Δx може бути як додатним, так і від'ємним, а відповідний приріст функції, як випливає з умови (57), не може бути додатним: $f(c + \Delta x) - f(c) \leqslant 0$. Звідси при $\Delta x > 0$ маємо

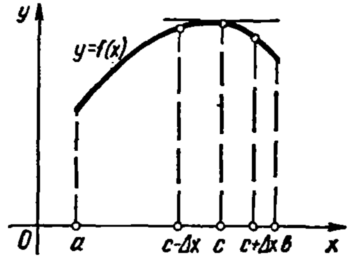


Рис. 5.19

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} < 0, \text{ тому } f'_+(c) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leqslant 0.$$

Аналогічно, якщо $\Delta x < 0$, то $f'_-(c) \geqslant 0$. За умовою похідна існує, тобто

$$f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c). \qquad (58)$$

З рівностей (58) за умов $f'_+(c) \leqslant 0$ і $f'_-(c) \geqslant 0$ випливає, що $f'(c) = 0$. ●

Геометричний зміст теореми Ферма зрозумілий з рис. 5.19: якщо в точці $x = c$ функція $f(x)$ досягає найбільшого або найменшого значення, то дотична до графіка цієї функції в точці $(c;\ f(c))$ паралельна осі Ox.

Теорема Ролля. *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$, диференційовна в інтервалі $(a;\ b)$ і на кінцях відрізка набуває однакових значень $f(a) = f(b)$, то знайдеться хоча б одна точка $c \in (a;\ b)$, в якій $f'(c) = 0$.*

○ Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$, то вона досягає на цьому відрізку свого найбільшого значення M і найменшого значення m. Якщо $M = m$, то $f(x) = \text{const}$ і $f'(x) = 0$ в довільній точці $x \in [a,\ b]$.

Нехай $M \neq m$ (рис. 5.20, *а*, *б*, *в*), тоді хоча б одне із значень M чи m досягається функцією у внутрішній точці інтервалу $(a;\ b)$, тому

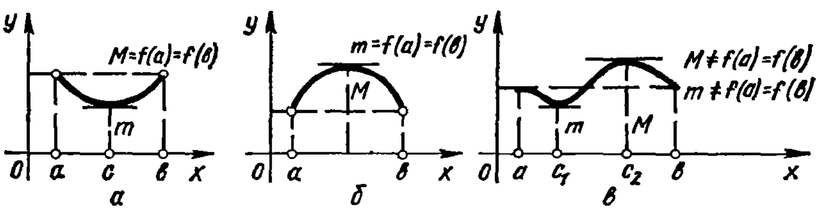


Рис. 5.20

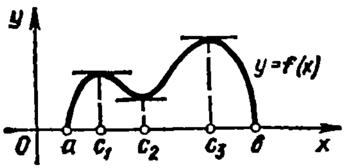


Рис. 5.21

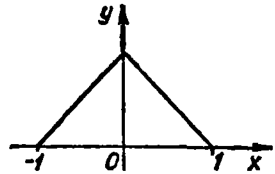


Рис. 5.22

що $f(a) = f(b)$. За теоремою Ферма похідна в такій точці дорівнює нулю. ●

Геометричний зміст теореми Ролля: якщо функція задовольняє умови теореми Ролля, то на графіку цієї функції знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична паралельна осі Ox.

Якщо $f(a) = f(b) = 0$, то теорему Ролля можна сформулювати так: між двома коренями функції лежить хоча б один корінь похідної. Так, на рис. 5.21 значення $x = a$ і $x = b$ — корені функції, $x = c_1$; $x = c_2$; $x = c_3$ — корені похідної. У зв'язку з цим теорему Ролля іноді називають теоремою про корені похідної.

Зауваження. Всі три умови теореми Ролля є суттєвими, тобто якщо хоча б одна з умов не виконується, то теорема Ролля не справджується також.

Наприклад, функція $1 - |x|$ (рис. 5.22) неперервна на відрізку $[-1; 1]$ і має на його кінцях рівні значення $f(-1) = f(1) = 0$. Проте не існує жодної точки $x \in [-1; 1]$, де б $f'(x) = 0$. Це пояснюється тим, що при $x = 0$ дана функція недиференційовна.

Для функцій $\varphi(x) = x^2$, $x \in [0; 1]$; $\psi(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; 1); \\ 0, & x = 1, \end{cases}$ теорема Ролля не виконується, тому що $\varphi(0) \neq \varphi(1)$; функція $\psi(x)$ на відрізку $[0; 1]$ розривна.

5.2. Теореми Коші і Лагранжа

Теорема Коші. *Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a; b]$, диференційовні в інтервалі $(a; b)$, причому $\varphi'(x) \neq 0$, $x \in (a; b)$, то існує така точка $c \in (a; b)$, що*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{59}$$

○ Введемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} [\varphi(x) - \varphi(a)],$$

яку можна розглядати на відрізку $[a; b]$, бо $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. У протилежному разі за теоремою Ролля знайшлася б точка $c \in (a; b)$, в якій $\varphi'(c) = 0$, що неможливо, бо за умовою $\forall x \in (a; b) : \varphi'(x) \neq 0$.

Неважко пересвідчитись, що функція $F(x)$ задовольняє всі умови теореми Ролля. Тому знайдеться точка $c \in (a; b)$, в якій $F'(c) = 0$ або

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \varphi'(c) = 0,$$

звідки й випливає формула (59). ●

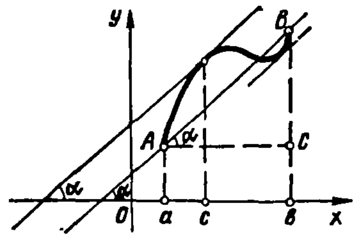


Рис. 5.23

Теорема Лагранжа. *Якщо функція $f(x)$, неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційовна в інтервалі $(a; b)$, то всередині цього інтервалу знайдеться хоча б одна точка $c \in (a; b)$, в якій*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{60}$$

○ Цю теорему можна розглядати як окремий випадок теореми Коші. Справді, поклавши у формулі (59) $\varphi(x) = x$, дістанемо формулу (60). ●

Розглянемо геометричний зміст теореми Лагранжа (рис. 5.23). Запишемо формулу (60) у вигляді

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad a < c < b,$$

тоді

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg}\alpha = f'(c).$$

Тобто якщо функція $y = f(x)$ задовольняє умови теореми Лагранжа, то на графіку цієї функції знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична до графіка паралельна хорді, що сполучає кінці кривої $A(a; f(a))$ і $B(b; f(b))$. Таких точок може бути і кілька, але хоча б одна завжди існує.

Формулу (60) називають *формулою Лагранжа*, або *формулою скінченних приростів*, оскільки вона виражає точне значення приросту функції $\Delta y = f(b) - f(a)$ через похідну в деякій точці c інтервалу $(a; b)$ і скінченне значення приросту аргументу $\Delta x = b - a$; $\Delta y = f'(x)\Delta x$. У теоремі Лагранжа вказується лише на існування точки c, для якої справедлива формула (60), але використання цієї теореми у математичному аналізі надзвичайно широке.

Теорема Лагранжа має також і механічну інтерпретацію. Якщо $S = S(t)$, $t_1 < t < t_2$,— закон руху матеріальної точки, то відношення $\frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}$ — це середня швидкість руху за проміжок часу $[t_1; t_2]$. Теорема Лагранжа стверджує, що в деякий момент часу $c \in (t_1; t_2)$ миттєва швидкість неодмінно збігається із середньою швидкістю:

$$\frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} = S'(c), \quad c \in (t_1; t_2).$$

Іншими словами, серед усіх можливих швидкостей $S'(t)$, $t \in \in [t_1; t_2]$, неодмінно знайдеться така швидкість $S'(c)$, що коли її підтримувати сталою, то за той самий проміжок часу $[t_1; t_2]$ точка пройде той самий шлях $S(t_2) - S(t_1)$, що і при русі із змінною швидкістю $S'(t)$:

$$S(t_2) - S(t_1) = S'(c)(t_2 - t_1).$$

Якщо при цьому русі в деякий момент часу τ доводиться повертати назад, то для цього швидкість потрібно повністю погасити: ($S'(\tau) = = 0$ (теорема Ролля!). Зрозуміло, що ці інтерпретації вірні лише тоді, коли закон руху $S(t)$ задовольняє умови, які відповідають умовам теорем Ролля і Лагранжа.

Приклади

1. Довести, що рівняння $x^7 + 7x - 1 = 0$ має лише один дійсний корінь.

○ Введемо функцію $f(x) = x^7 + 7x - 1$. Оскільки $f(0) = -1 < 0$, а $f(1) = = 7 > 0$, то дане рівняння має дійсний корінь $x_1 \in (0; 1)$ (гл. 4, п. 5.3). Припустимо, що існує принаймні ще один корінь x_2, тоді $f(x_1) = f(x_2) = 0$, причому для визначенності вважатимемо, що $x_1 < x_2$. Отже, на відрізку $[x_1; x_2]$ функція $f(x)$ задовольняє всі умови теореми Ролля, тому знайдеться точка $c \in (x_1; x_2)$, в якій $f'(c) = 0$. Але $\forall x \in R$: $f'(x) = 7(x^6 + 1) \neq 0$.

Знайдена суперечність показує, що припущення про існування ще одного кореня було хибним ●.

2. Чи виконується теорема Ролля для функції $f(x) = x^2 - 6x + 7$ на відрізку $[1; 5]$? При якому значенні c?

○ Оскільки дана функція неперервна і диференційовна при всіх значеннях $x \in [1; 5]$ і її значення на кінцях відрізка $[1; 5]$ рівні між собою ($f(1) = f(5) = 2$), то теорема Ролля на цьому відрізку справджується.

Значення c знаходимо з рівняння $f'(x) = 2x - 6 = 0$, звідки $c = 3$. ●

3. Крива $y = x^2 - 4x$ сполучає точки $A(1; -3)$ і $B(4; 0)$. На дузі AB знайти точку $M_0(x_0; y_0)$, в якій дотична паралельна хорді AB.

○ Функція $f(x) = x^2 - 4x$ неперервна і диференційовна на відрізку $[1; 4]$. Тому за теоремою Лагранжа існує точка $x_0 \in (1; 4)$, для якої

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = f'(x_0),$$

де $f'(x) = 2x - 4$. Підставивши відповідні значення, дістанемо

$$\frac{0 - (-3)}{4 - 1} = 2x_0 - 4 \Rightarrow x_0 = \frac{5}{2}, \quad y_0 = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{15}{4}.$$

Отже, точка M_0 має координати $x_0 = \frac{5}{2}$, $y_0 = -\frac{15}{4}$. ●

4. Для того щоб диференційовна на відрізку $[a; b]$ функція $f(x)$ була сталою, необхідно і достатньо, щоб $\forall x \in (a; b)$: $f'(x) = 0$. Довести.

○ Необхідність була доведена в п. 2.2.

Достатність. Нехай $\forall x \in (a; b): f'(x) = 0$ і точки $x_1 < x_2 \in [a; b]$. Тоді за теоремою Лагранжа

$$\exists c \in (x_1; x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

але $\forall x \in (x_1; x_2) : f'(x) = 0$, тому $f'(c) = 0$. Отже, $f(x_2) - f(x_1) = 0$, або $f(x_1) = = f(x_2)$.

Оскільки x_1 і x_2 — довільні точки відрізка $[a;\ b]$, то $\forall x \in [a;\ b] : f(x) = c$. ●

5. Довести, що

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1;\ 1].$$

○ Введемо функцію $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, тоді

$$\forall x \in (-1;\ 1) : f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

тому з попередньої задачі випливає, що

$$\arcsin x + \arccos x = c.$$

Поклавши в цій рівності $x = 0$, знайдемо, що $c = \frac{\pi}{2}$ і $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Безпосередньо переконуємось, що ця рівність виконується і при $x = \pm 1$. ●

6. Оцінити точність наближеної рівності $\Delta y \approx dy$ (п. 3.3).

○ Нехай функція $f(x)$ має похідні $f'(x)$, $f''(x)$, $x \in [a;\ b]$. Візьмемо на інтервалі $(a;\ b)$ дві точки: x і $x + \Delta x$, тоді за теоремою Лагранжа

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c_1)\,\Delta x,$$

де c_1 лежить між x і $x + \Delta x$.

Диференціал даної функції для значень x і Δx дорівнює

$$dy = f'(x)\,\Delta x,$$

тому

$$\Delta y - dy = (f'(c_1) - f'(x))\,\Delta x.$$

Застосуємо тепер формулу Лагранжа до різниці перших похідних:

$$\Delta y - dy = (f''(c_2)\,(x - c_2))\,\Delta x,$$

де c_2 лежить між c_1 і x. Нехай $M = \max\limits_{x \in [a;b]} |f''(x)|$. Оскільки $|x - c_1| < \Delta x$, а $|f''(c_2)| \leqslant M$, то дістаємо оцінку

$$|\Delta y - dy| \leqslant M\,|\Delta x|^2,$$

про яку згадувалось в п. 3.3. ●

5.3. Правило Лопіталя

У попередній главі ми ознайомились з деякими способами розкриття невизначеностей. Розглянемо ще один спосіб, який грунтується на застосуванні похідних.

Теорема 1. *Нехай функції $f(x)$, $\varphi(x)$ визначені і диференційовні в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, причому*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0,$$

і у вказаному околі $\varphi'(x) \neq 0$. Тоді якщо існує границя відношення похідних $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує і границя відношення функцій $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ і ці границі рівні між собою:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

○ Вважатимемо, що x_0 — скінченне число: $|x_0| < +\infty$. Довизначимо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ в точці $x = x_0$, поклавши $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. Тоді ці функції будуть неперервні в точці x_0. Розглянемо відрізок $[x_0; x]$, що належить даному околу. Функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на $[x_0; x]$, диференційовні на $(x_0; x)$ і $\forall x \in (x_0; x) : \varphi'(x) \neq 0$. Тому за теоремою Коші знайдеться точка $c \in (x_0; x)$, для якої

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \text{ або } \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \qquad (61)$$

тому що $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. Оскільки за умовою $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ існує і $c \to x_0$, якщо $x \to x_0$, то з рівності (61) маємо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \quad \bullet$$

Зауваження 1. Теорема справедлива і в тому випадку, коли $x_0 = \infty$. Дійсно, поклавши $x = \frac{1}{z}$, маємо

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{z \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z \to 0} \frac{\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\right)'}{\left(\varphi\left(\frac{1}{z}\right)\right)'} =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Зауваження 2. Якщо похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ задовольняють ті самі умови, що і функції $f(x)$ і $\varphi(x)$, то теорему 1 можна застосувати ще раз. При цьому дістанемо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

Взагалі, теорему 1 можна застосовувати доти, поки не прийдемо до відношення похідних $\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}$, яке має певну границю при $x \to x_0$. Цю саму границю матиме й відношення функцій:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}.$$

Теорема 1 дає змогу розкривати невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Сформулюємо теорему, яка стосується розкриття невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 2. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і диференційовні в околі точки x_0 і в цьому околі

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty, \quad \varphi'(x) \neq 0.$$

Тоді якщо існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, *то існує границя* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ *і*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Цю теорему приймемо без доведення [12].

Виражене теоремами 1 і 2 правило обчислення границь називають *правилом Лопіталя* за іменем математика, який опублікував його. Але це правило відкрив І. Бернуллі, тому правило Лопіталя називають ще *правилом Бернуллі — Лопіталя.*

Зауважимо, що правило Лопіталя застосовується лише для розкриття невизначеностей виду $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$, які називають *основними.* Відомі ще й такі невизначеності, як $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, ∞^0, 1^∞, 0^0. Покажемо, як ці невизначеності зводяться до основних.

а) Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, то невизначеність виду $0 \cdot \infty$ можна звести до основних так:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\varphi(x)] = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{1/\varphi(x)} = \frac{0}{0},$$

або

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\varphi(x)] = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{1/f(x)} = \frac{\infty}{\infty}.$$

б) Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, то невизначеність виду $\infty - \infty$ зводиться до невизначеності $\frac{0}{0}$:

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{1/\varphi(x) - 1/f(x)}{1/f(x) \cdot 1/\varphi(x)}.$$

в) Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} (\varphi(x)\ln f(x))}$$

і невизначеність виду 0^0 зводиться до невизначеності $0 \cdot \infty$, розглянутої вище. Аналогічно розкриваються невизначеності 1^∞ і ∞^0.

Таким чином, щоб розкрити невизначеності $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, їх треба спочатку звести до основних і лише після цього застосовувати правило Лопіталя.

Приклад
Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{2x}}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x-\sec x)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}2x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$;

є) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}3x}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}x^n e^{-2x}$, $n\in N$.

○ а) Тут невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$, тому за правилом Лопіталя маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=0.$$

б) Маємо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$, тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}5-e^{2x}2}{1}=3.$$

в) Тут невизначеність виду $0\cdot\infty$. Зведемо її до невизначеності $\dfrac{0}{0}$, після чого застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 2}(2-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{-1/\sin^2\frac{\pi x}{4}\cdot\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}.$$

г) Маємо невизначеність виду $\infty-\infty$. Зведемо її до невизначеності $\dfrac{0}{0}$, після чого застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x-\sec x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x}=0.$$

д) Тут невизначеність виду ∞^0. Маємо

$$\lim_{x\to 0}(\ln\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}2x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg}2x)\ln\ln\operatorname{ctg}x}$$

Знайдемо границю в показнику. Для цього зведемо дану невизначеність до виду $\frac{\infty}{\infty}$, потім скористаємось правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg} 2x \ln\ln\operatorname{ctg} x) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\ln\operatorname{ctg} x}{1/\operatorname{tg} 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\ln\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{-1/\ln\operatorname{ctg} x \; 1/\operatorname{ctg} x \; 1/\sin^2 x}{-2/\sin^2 2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{\sin x\cos x\ln\operatorname{ctg} x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{x\cos x\ln\operatorname{ctg} x} = 0,$$

тому

$$\lim_{x\to 0}(\ln\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^0 = 1.$$

е) Маємо невизначеність виду 1^∞, тоді

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\cos 2x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\cos 2x = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x/\cos 2x}{2x} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} = -2;$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)\ 1/x^2 = e^{-2}.$$

є) Тут невизначеність виду 0^0, тоді

$$\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{\operatorname{tg} 3x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} 3x\ln\sin 2x};$$

$$\lim \operatorname{tg} 3x\ln\sin 2x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\operatorname{ctg} x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{ctg} 2x}{-3/\sin^2 3x} = -\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg} 2x} = -\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{2x} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{\operatorname{tg} 3x} = e^0 = 1.$$

ж) Для розкриття цієї невизначенності правило Лопіталя потрібно застосувати n разів:

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-2x} = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{2e^{2x}} = \frac{n}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-1}}{e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \frac{n}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{(n-1)\,x^{n-2}}{2e^{2x}} = \frac{n\,(n-1)}{2^2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-2}}{e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{2^3} \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n-3}}{e^{2x}} = \cdots =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}{2^n} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{2x}} = \frac{n!}{2^n}\cdot 0 = 0. \bullet$$

5.4. Формула Тейлора

Розглянемо одну з основних формул математичного аналізу, так звану формулу Тейлора, яка широко застосовується як в самому аналізі, так і в суміжних дисциплінах. Зупинимося лише на трьох застосуваннях.

В п. 3.3 ми бачили, що заміна приросту функції її диференціалом дає змогу утворювати різні наближені формули. Виявляється, що ці формули можна уточнити, якщо застосувати диференціали вищих порядків: про це і йдеться у формулі Тейлора.

Формула Тейлора дає змогу розробити простий аналітичний апарат для обчислення значень функції $y = f(x)$, які відповідають заданим значенням незалежної змінної x. Зрозуміло, що в тих випадках, коли функція задається формулою виду $y = \frac{x^2}{2} - 3x + 5$, значення обчислюється лише за допомогою чотирьох арифметичних дій. Але як знайти, наприклад, значення функції $y = \sin x$? Очевидно, цю задачу найпростіше можна «розв'язати» за допомогою калькулятора. Але ж калькулятор дає лише відповідь. А питання про те, які він при цьому виконує дії, залишається відкритим. Формула Тейлора і вказує, які арифметичні дії потрібно виконати над x, щоб одержати $\sin x$.

Іншими словами, формула Тейлора дає змогу зобразити дану функцію многочленом, що зручно для складання програм і обчислень цієї функції на ЕОМ.

Ще одне практичне застосування цієї формули пов'язане з обробкою числових експериментальних даних. Якщо в результаті експерименту одержано масив значень $(x_i; y_i)$, то спочатку будують графік залежності $y = f(x)$, а потім цю залежність описують аналітично, причому, як правило, у вигляді многочлена.

Обгрунтування можливості представляти функцію многочленом дає *формула Тейлора.*

Теорема. *Нехай функція $f(x)$ має в точці x_0 і в деякому її околі похідні до $(n+1)$-го порядку включно, і нехай x — довільне значення аргументу із вказаного околу $(x \neq x_0)$. Тоді між точками x_0 і x знайдеться така точка c, що справедлива формула*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (62)$$

$$(c = x_0 + \theta(x-x_0),\ 0 < \theta < 1).$$

○ Позначимо многочлен, то стоїть у правій частині формули (62), через $\varphi(x, x_0)$:

$$\varphi(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (63)$$

Його називають *многочленом Тейлора* степеня n для функції $f(x)$.

Різницю між функціями $f(x)$ і $\varphi(x, x_0)$ позначимо через $R_n(x)$:

$$R_n(x) = f(x) - \varphi(x, x_0).$$

Теорема буде доведена, якщо встановимо, що

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad (64)$$

де точка C лежить між точками x_0 і x.

Зафіксуємо довільне значення $x > x_0$ із вказаного околу. Позначимо через t величину, що змінюється на відрізку $[x_0; x]$, тобто $x_0 \leqslant t \leqslant x$, і розглянемо функцію

$$F(t) = f(x) - \varphi(x, t) - \frac{(x-t)^{n+1} R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}}. \quad (65)$$

Ця функція задовольняє всі умови теореми Ролля, тому знайдеться точка $c \in (x_0; x)$ для якої

$$F'(c) = 0. \quad (66)$$

Якщо в функцію (65) підставити значення функції $\varphi(x, t)$ з формули (63) і результат продиференціювати по t, то знайдемо

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}}. \quad (67)$$

Покладемо у формулі (67) $t = c$, тоді з рівності (66) дістанемо

$$-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n + \frac{(n+1)(x-c)^n R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно $R_n(x)$, дістанемо формулу (64). ●

Формула (62) називається *формулою Тейлора для функції* $f(x)$ *в околі точки* x_0, а вираз (64) для $R_n(x)$ — *залишковим членом у формі Лагранжа*. Величина $R_n(x)$ показує, яку помилку ми робимо, замінюючи функцію $f(x)$ її многочленом Тейлора (63).

При цьому формулу (64) можна використати для того, щоб оцінити величину $R_n(x)$ при $x \to x_0$ і фіксованому n, а також при $n \to \infty$.

Формулою Маклорена називають формулу Тейлора (62) при $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{68}$$

де точка c знаходиться між 0 і x ($c = \theta x$, $0 < \theta < 1$).

Подамо формулу (62) через диференціали вищих порядків. Для цього покладемо в ній $x - x_0 = \Delta x$, $x = x_0 + \Delta x$:

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x +$$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + R_n(x). \tag{69}$$

Оскільки $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$, $f^{(n)}(x_0)\Delta x^n = d^n y$, то формулу (69) можна записати у вигляді

$$\Delta y = dy + \frac{d^2 y}{2!} + \frac{d^3 y}{3!} + \cdots + \frac{d^n y}{n!} + R_n(x). \tag{70}$$

Покажемо, що коли функція $f^{(n+1)}(x)$ в околі точки x_0 обмежена, то залишковий член $R_n(x)$ при $x \to x_0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $(x - x_0)^n$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^n (n+1)!} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \lim_{x \to x_0} f^{(n+1)}(c)(x - x_0) = 0,$$

тому що добуток обмеженої величини на нескінченно малу є величина нескінченно мала.

Таким чином, обриваючи формулу (69) або (70) все далі і далі, дістаємо все точніші наближені формули: з точністю до величини Δx^2 $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ або $\Delta y \approx dy$ (це відомі формули (п. 3.3) для наближених обчислень за допомогою першого диференціала); з точністю до величини $|\Delta x|^3$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 \text{ або } \Delta y \approx dy + \frac{d^2 y}{2!};$$

з точністю до величини Δx^4

$$f(x + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 +$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}\Delta x^3 \text{ або } \Delta y \approx dy + \frac{d^2 y}{2!} + \frac{d^3 y}{3!}.$$

Те саме можна сказати про формулу (62): для тих значень x, для яких залишковий член $R_n(x)$ достатньо малий, многочлен Тейлора (63) дає наближене зображення функції $f(x)$.

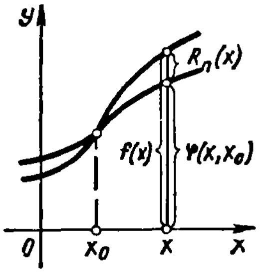


Рис. 5.24

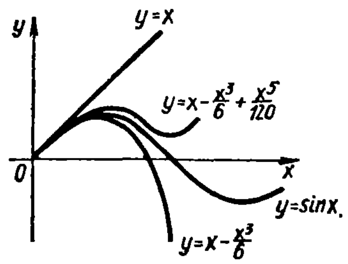


Рис. 5.25

Многочлени Тейлора дають найкраще наближення функції $f(x)$ у вигляді многочлена даного степеня поблизу точки x_0. Це треба розуміти так (рис. 5.24): серед усіх многочленів цього степеня, які збігаються з функцією при $x = x_0$, лише для многочлена Тейлора величина $|R_n(x)|$ виявляється найменшою.

Із формули (64) видно, що залишковий член $R_n(x)$ може бути малим навіть при великому відхиленні x від x_0, якщо взяти достатньо великим порядок n многочлена Тейлора, тому що факторіал при збільшенні n росте швидше степеня.

Приклади

1. Написати формулу Маклорена для функції $f(x) = \sin x$ і оцінити залишковий член. Побудувати функцію і чотири перших многочлени Тейлора.

○ Оскільки (п. 4.1, приклад 2)

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

то

$$f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 0, 2, 4, \ldots, 2k; \\ (-1)^k, & n = 1, 3, 5, \ldots, 2k+1. \end{cases}$$

Підставивши значення похідних у формулу (68), дістанемо для функції $f(x) = \sin x$ формулу Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{(-1)^k \cos c \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

де c лежить між 0 і x.

Оскільки $|\cos x| \leqslant 1$, $|x| < \infty$, то для залишкового члена справедлива оцінка

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Нехай, наприклад, $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Покладемо $k = 4$, тоді

$$|R_9(x)| \leqslant \frac{x^9}{9!} \leqslant \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^9}{9!} < \frac{(0{,}8)^9}{9!} < 0{,}000005.$$

Це означає, що наближена формула

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

дає змогу обчислювати значення $\sin x$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ з точністю до п'яти знаків.

Неважко (за допомогою калькулятора) переконатись, що ця сама формула, але на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ наближає функцію $\sin x$ з точністю до 0,01. На рис. 5.25 показано, як із збільшенням степеня n розширюється «сфера дії» перших трьох многочленів Тейлора:

$$\sin x \approx P_1(x) = x, \quad |R_1(x)| \leqslant \frac{|x^3|}{6};$$

$$\sin x \approx P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}, \quad |R_3(x)| \leqslant \frac{|x^5|}{120};$$

$$\sin x \approx P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad |R_5(x)| \leqslant \frac{|x^7|}{5040};$$

$$\sin x \approx P_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}, \quad |R_7(x)| \leqslant \frac{|x^9|}{362\,880} \text{ і т. д.}$$

Оскільки функція $f(x) = \sin x$ і її многочлени Тейлора є функції непарні, то на рис. 5.25 зображена лише «половина» графіків. ●

2. Знайти формулу Маклорена для функції $f(x) = \ln(1 + x)$.

○ Знаходимо значення даної функції і її похідних при $x = 0$:

$$f(x) = \ln(1 + x), \quad f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(0) = -1 = -1!;$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f'''(0) = 2 = 1 \cdot 2 = 2!;$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}, \quad f^{(4)}(0) = -6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = -3!;$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}, \quad f^{(5)}(0) = 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!;$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Підставляючи значення похідних у формулу Маклорена, маємо

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}.$$

3. Розкласти за формулою Маклорена функції:

а) $f(x) = e^x$; б) $f(x) = \cos x$; в) $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$, $\alpha \in R$.

○ Аналогічно до попереднього розв'язання маємо:

а) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$;

б) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \frac{(-1)^{k+1} \cos c \cdot x^{2k+2}}{(2k+2)!}$;

в) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots +$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+c)^{\alpha-n-1}x^{n+1}. \quad ●$$

4. Знайти многочлен Тейлора для функції $f(x) = e^x$, який зображав би цю функцію на відрізку $[-1; 1]$ з точністю до 0,001. Обчислити наближене значення e.

○ З попереднього прикладу маємо

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Підберемо таке n, при якому модуль залишкового члена був би меншим від числа 0,001, маючи на увазі, що $|x| \leqslant 1$, число c лежить між 0 і x та $e^c < e^{|x|} < e$:

$$|R_n(x)| = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{e|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!};$$

$$|R_1(x)| < \frac{3}{(1+1)!} = \frac{3}{2} > 0{,}001; \quad |R_4(x)| < \frac{3}{5!} = \frac{1}{40} > 0{,}001;$$

$$|R_2(x)| < \frac{3}{(1+2)!} = \frac{1}{2} > 0{,}001; \quad |R_5(x)| < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} > 0{,}001;$$

$$|R_3(x)| < \frac{3}{(3+1)!} = \frac{1}{8} > 0{,}001; \quad |R_6(x)| < \frac{3}{7!} = \frac{1}{1680} < 0{,}001.$$

Отже, $n = 6$, тому з точністю до 0,001 справедлива наближена формула

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}, \quad x \in [-1; 1].$$

Якщо в цій формулі покласти, наприклад, $x = 1$, то матимемо наближене значення числа e:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \approx 2{,}718. \quad ●$$

5. Знайти многочлен Тейлора $P_3(x-1)$ третього степеня відносно двочлена $x - 1$ для функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

○ Маємо

$$f(1) = \sqrt[3]{x}\Big|_{x=1} = 1; \qquad f'''(1) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}\Big|_{x=1} = \frac{10}{27};$$

$$f'(1) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Big|_{x=1} = \frac{1}{3}; \qquad f^{IV}(1) = -\frac{80}{81}x^{-\frac{11}{3}}\Big|_{x=1} = -\frac{80}{81}.$$

$$f''(1) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}\Big|_{x=1} = -\frac{2}{9};$$

Поклавши у формулі Тейлора (62) $x_0 = 1$ і $n = 3$, дістанемо

$$\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{10}{27 \cdot 3!}(x-1)^3 - \frac{80}{81 \cdot 4!}\sqrt[3]{c}\,(x-1)^4,$$

де c лежить між 1 і x, тому

$$P_3(x-1) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3. \bullet$$

Формулу (62) можна записати у вигляді

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{71}$$

Коли функція $f(x)$ є многочленом $P_n(x)$ степеня n, то похідна $P_n^{(n+1)}(x) \equiv 0$, тому формула (71) матиме вигляд

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P_n^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i. \tag{72}$$

Ця формула називається *формулою Тейлора для многочлена.*

Приклади

1. Розкласти многочлен $P_3(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3$ за степенями бінома $x+1$.

○ Скориставшись формулою (72) при $x_0 = -1$, маємо

$$\begin{aligned} &P_3(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3, && P_3(-1) = 10; \\ &P_3'(x) = -2 + 6x - 12x^2, && P_3'(-1) = -20; \\ &P_3''(x) = 6 - 24x, && P_3''(-1) = 30; \\ &P_3'''(x) = -24, && P_3'''(-1) = -24, \end{aligned}$$

тому

$$P_3(x) = 10 - 20(x+1) + 15(x+1)^2 - 4(x+1)^3. \bullet$$

2. Розкласти многочлен $P_n(x) = (b+x)^n$ за степенями x.

○ Маємо $P_n(0) = b^n$, $P_n^{(i)}(x) = n(n-1)\ldots(n-i+1)(b+x)^{n-i}$, тому, поклавши у формулі (72) $P_n(x) = (b+x)^n$, $x_0 = 0$, дістанемо відому формулу бінома Ньютона:

$$(b+x)^n = b^n + nb^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}b^{n-2}x^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}b^{n-3}x^3 + \cdots + x^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!}b^{n-i}x^i. \bullet \tag{73}$$

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати і довести теореми Ферма і Ролля.

2. Упевнитись, що функція $f(x) = \sin x$ на відрізку $[0; \pi]$ задовольняє умови теореми Ролля і що $x = \frac{\pi}{2}$ корінь похідної $f'(x) = \cos x$.

3. Чому для функції $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$, $x \in [-1; 1]$ не виконується теорема Ролля?

4. Сформулювати і довести теорему Коші.

5. Сформулювати і довести теорему Лагранжа. У чому полягає її геометричний і механічний зміст?

6. Користуючись теоремою Лагранжа, переконатись, що дотична до кривої $y = x^4$ при $x = \sqrt[3]{0{,}25}$ паралельна хорді, що сполучає точки $O(0; 0)$ і $A(1; 1)$.

7. Довести за допомогою теореми Лагранжа таке твердження: якщо $\forall x \in [a; b] : \Phi'(x) = F'(x)$, то $\forall x \in [x; b] : \Phi(x) - F(x) = \text{const}$.

8. У чому суть правила Лопіталя? Довести відповідну теорему для розкриття невизначеності $\frac{0}{0}$. Сформулювати теорему для випадку невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$. Навести приклади.

9. Як розкриваються невизначеності $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞? Навести приклади.

10. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{5x + e^x}$; в) $\lim\limits_{x \to 0} (\arcsin \operatorname{ctg} x)$;

г) $\lim\limits_{x \to 0} (x^{-2} - \operatorname{ctg}^2 x)$; д) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}$;

е) $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$; є) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$.

11. Вивести формули Тейлора і Маклорена.

12. Що характеризує і як використовується залишковий член формули Тейлора?

13. Користуючись многочленом Тейлора, перевірити, що

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2 = (x - 2)^4 + 3(x - 2)^3 - (x - 2)^2 - 7(x - 2).$$

14. Вивести формулу Тейлора для функції $f(x) = \sqrt{x}$ при $x_0 = 1$, $n = 3$.

15. Вивести формули Маклорена для функцій:

$$e^x,\ \cos x,\ \sin x,\ \ln(x + 1);\quad (1 + x)^\alpha.$$

16. За допомогою формули Маклорена для функції e^x обчислити $\sqrt{e}$ з точністю до 0,01.

17. З'ясувати походження і оцінити похибку наближених рівностей:

а) $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{8}\right]$; б) $\ln(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, $x \in [0; 0{,}1]$.

Відповіді. 10. а) 8; б) 0; в) 1; г) $\frac{2}{3}$; д) 1; е) $\frac{1}{e}$; є) $\frac{1}{e}$. 14. $1 + \frac{x - 1}{2} - \frac{(x - 1)^2}{8} - \frac{(x - 1)^3}{16} - \frac{5c^{-\frac{7}{2}}}{144}(x - 1)^4$. 16. 1,65. 17. а) $R_n(x) \leqslant 1$; б) $R_n(x) \leqslant 0{,}001$.

§ 6. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

6.1. Монотонність функції

Теорема 1 *(достатні умови строгої монотонності). Якщо функція* $f(x)$ *диференційовна на інтервалі* $(a;\ b)$ і $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) *всюди, крім, можливо, скінченного числа точок, в яких* $f'(x) = 0$ *на* $(a;\ b)$, *то функція* $f(x)$ *зростає* (спадає) на $(a;\ b)$.

○ Нехай для визначеності $f'(x) > 0$ і x_1 та x_2 — дві довільні точки з $(a;\ b)$, причому $x_1 < x_2$. Тоді на відрізку $[x_1;\ x_2]$ виконуються всі умови теореми Лагранжа, тому

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad c \in (x_1;\ x_2).$$

За умовою $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$, тому $f(x_2) - f(x_1) > 0$ або $f(x_2) > > f(x_1)$, тобто функція $f(x)$ на інтервалі $(a;\ b)$ зростає.

Аналогічно доводиться теорема, якщо $f'(x) < 0$. ●

Зауваження. Таким самим способом можна довести, що коли $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) на інтервалі $(a;\ b)$, то функція на цьому інтервалі не спадає (не зростає).

Теорема 2 *(необхідна умова зростання). Якщо диференційовна на інтервалі* $(a;\ b)$ *функція зростає, то* $f'(x) \geqslant 0$ *на* $(a;\ b)$.

○ Дійсно, нерівність $f'(x) < 0$ неможлива — це суперечило б теоремі 1. Отже, $\forall x \in (a;\ b) : f'(x) \geqslant 0$. ●

Наприклад, функція $y = x^3$ зростає на $(-\infty;\ +\infty)$ і має похідну $y' = 3x^2 > 0$, якщо $x \neq 0$, і рівну нулю при $x = 0$.

З цього випливає, що інтервали монотонності можуть відділятися один від одного або точками, де похідна дорівнює нулю (їх називають *стаціонарними точками*), або точками, де похідна не існує. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками*, або *критичними точками першого роду*.

Не кожна критична точка відділяє інтервали монотонності. Теорема 2 має такий геометричний зміст. Якщо на інтервалі $(a;\ b)$ функція $f(x)$ зростає, то дотична до кривої $y = f(x)$ у кожній точці $x \in \in (a;\ b)$ утворює з додатним напрямом осі Ox гострий кут φ або (в окремих точках) горизонтальна; тангенс цього кута невід'ємний: $f'(x) = = \operatorname{tg} \varphi \geqslant 0$ (рис. 5.26). Якщо на інтервалі $(a;\ b)$ функція $f(x)$ спадає, то кут нахилу дотичної тупий, або (в окремих точках) дотична горизонтальна; тангенс цього кута недодатний: $\operatorname{tg} \varphi = f'(x) \leqslant 0$ (рис. 5.27).

Інтервали монотонності можуть відділятися один від одного точками, де дотична або паралельна осі Ox, або паралельна осі Oy, або її не існує. Отже, щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$, треба:

1) знайти область визначення функції; 2) знайти похідну даної функції; 3) знайти критичні точки з рівняння $f'(x) = 0$ та з умо-

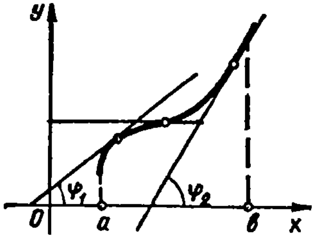


Рис. 5.26

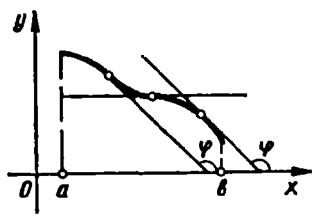


Рис. 5.27

ви, що $f'(x)$ не існує; 4) розділити критичними точками область визначення на інтервали і у кожному з них визначити знак похідної. На інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де від'ємна — спадає.

Приклади

1. Знайти інтервали монотонності функцій:

а) $y = \operatorname{arctg} x$; б) $y = x \ln x + 3x$; в) $y = (2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

○ а) Областю визначення заданої функції є нескінченний інтервал $(-\infty; +\infty)$. Похідна $y' = \dfrac{1}{1+x^2} \neq 0$ також існує на всій числовій осі, тому критичних точок дана функція не має. Оскільки $\forall\, x \in (-\infty; +\infty) : y'(x) > 0$, то функція зростає на всій області визначення.

б) Ця функція визначена на інтервалі $(0; +\infty)$. Знаходимо похідну: $y' = \ln x + 4$; знаходимо критичні точки: $\ln x + 4 = 0 \Rightarrow x = e^{-4}$. Інших критичних точок функція не має, бо похідна існує на всій області визначення.

Розбиваємо область визначення точкою $x = e^{-4}$ на інтервали і встановлюємо знак похідної на кожному з них.

Для цього досить визначити знак похідної в одній довільній внутрішній точці кожного інтервалу. Маємо

$$\forall\, x \in (0;\ e^{-4}) : y'(x) < 0,$$

отже, при $x \in (0; e^{-4})$ функція спадає;

$$\forall\, x \in (e^{-4};\ +\infty) : y'(x) > 0,$$

отже, при $x \in (e^{-4}; +\infty)$ функція зростає.

в) Область визначення $(-\infty; +\infty)$. Знаходимо похідну

$$y' = \frac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x-2}}.$$

Критичні точки: $x_1 = 1$ — похідна дорівнює нулю, $x_2 = 2$ — похідної не існує. Маємо

$\forall\, x \in (-\infty;\ 1) : y'(x) > 0$ — функція зростає;

$\forall\, x \in (1;\ 2) : y'(x) < 0$ — функція спадає;

$\forall\, x \in (2;\ +\infty) : y'(x) > 0$ — функція зростає. ●

2. Довести, що рівняння $\frac{x^5}{5} + x - 1 = 0$ має лише один дійсний корінь.

○ Розглянемо функцію $f(x) = \frac{x^5}{5} + x - 1$, $x \in (-\infty; +\infty)$. Оскільки $f(0) < 0$, $f(1) > 0$, то на інтервалі $(0; 1)$ функція має принаймні один корінь. Похідна $f'(x) = x^4 + 1 > 0$, де $x \in (-\infty; +\infty)$, тому функція зростає на всій області визначення. Отже, більше одного дійсного кореня дана функція мати не може. ●

3. Довести нерівність $\forall x > 0 : \ln(1 + x) < \frac{x(x+2)}{2(x+1)}$.

○ Нехай $f(x) = \ln(1 + x) - \frac{x(x+2)}{2(x+1)}$. Оскільки $\forall x > 0 : f'(x) = -\frac{x^2}{(x+1)^2} < 0$, то функція $f(x)$ на інтервалі $(0; +\infty)$ спадає. Отже,

$$f(x) < f(0) = 0 \Rightarrow \ln(1 + x) < \frac{x(x+2)}{2(x+1)}. \quad ●$$

6.2. Локальний екстремум функції

Точка x_0 називається *точкою локального максимуму (або мінімуму)* функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0 < |x - x_0| < \delta$ точки x_0, який належить області визначення функції, і для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ (або $f(x) > f(x_0)$). Геометричний зміст означення зрозумілий з рис. 5.28.

Точки локального (від латинського lokalis — місцевий) максимуму і локального мінімуму називаються *точками локального екстремуму*, а значення функції в цих точках називаються відповідно *локальним максимумом* і *локальним мінімумом* або *локальним екстремумом*.

З означення випливає, що поняття екстремуму носить локальний характер в тому розумінні, що нерівність $f(x) < f(x_0)$ (або $f(x) > f(x_0)$) може і не виконуватись для всіх значень x з області визначення функції, але повинна виконуватись лише в деякому околі точки x_0. Отже, не слід плутати локальний максимум з найбільшим значенням функції (гл. 4, п. 5.3) якого вона може набувати в області визначення (його називають також *абсолютним максимумом*). Локальних максимумів функція може мати кілька, абсолютний максимум може бути тільки один. Це саме стосується локального і абсолютного мінімумів. Може статись, що окремий локальний мінімум більший від деякого локального максимуму, тоді як абсолютний мінімум не перевищує абсолютного максимуму M (рис. 5.29). Нарешті, локальних екстремумів функція може досягати тільки у внутрішніх точках відрізка, тоді як абсолютні екстремуми мо-

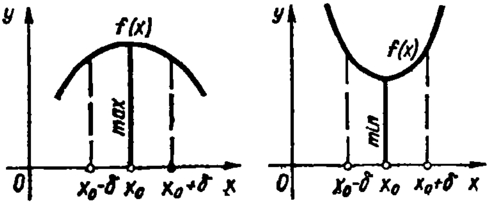


Рис. 5.28

жуть знаходитись і в крайніх його точках. З'ясуємо умови існування локального екстремуму.

Теорема 1 (необхідна умова локального екстремуму). Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум і диференційовна в цій точці, то $f'(x_0) = 0$.

○ Оскільки за умовою x_0 — точка локального екстремуму, то існує інтервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, в якому значення $f(x_0)$ найбільше або найменше. Тоді за теоремою Ферма $f'(x_0) = 0$. ●

Теорема 1 має такий геометричний зміст (рис. 5.29). Якщо точки x_1, x_2, x_3, x_4 — точки локального екстремуму і у відповідних точках графіка існують невертикальні дотичні, то ці дотичні паралельні осі Ox.

Умова $f'(x_0) = 0$ є необхідною але не достатньою для того, щоб диференційовна в точці x_0 функція мала локальний екстремум.

Це означає, що не всяка точка x_0, в якій $f'(x_0) = 0$, є екстремальною точкою. Наприклад, функція $y = x^3$ (рис. 5.8) має похідну $y = 3x^2$, що дорівнює нулю в точці $x = 0$, але не має в цій точці екстремуму.

Досі розглядались функції, які в точках екстремуму мають похідну. Проте існують функції, які в точках екстремуму не мають похідної. Наприклад, функція $y = |x|$ (рис. 4.3) має в точці $x = 0$ мінімум, але не має в цій точці похідної. Це зовсім не означає, що кожна точка, в якій функція не має похідної, обов'язково є точкою екстремуму. Наприклад, функція $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 4.9, *є*) недиференційовна в точці $x = 0$ і не має в цій точці екстремуму.

Таким чином, повну необхідну умову локального екстремуму можна сформулювати так: *якщо функція має в точці локальний екстремум, то ця точка є критичною.* Обернене твердження невірне: не всяка критична точка функції є її екстремальною точкою.

Іншими словами, точки локального екстремуму можуть бути по-перше, серед точок, в яких $f'(x) = 0$, і, по-друге, серед точок, в яких $f'(x)$ не існує.

У зв'язку з цим критичні точки іноді називають точками *можливого екстремуму.*

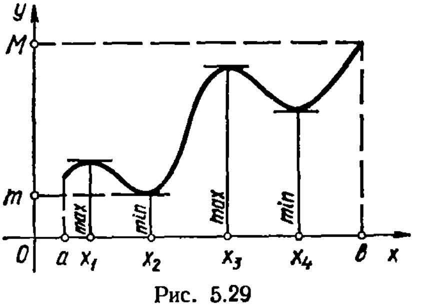


Рис. 5.29

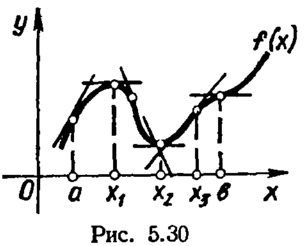


Рис. 5.30

Розглянемо критерії, які дають змогу із множини критичних точок виділити точки максимуму і мінімуму.

Теорема 2 *(перша достатня умова локального екстремуму). Нехай* x_0 *— критична точка функції* $f(x)$, *яка в цій точці неперервна, і нехай існує окіл* $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ *точки* x_0, *в якому функція має похідну* $f'(x)$ *крім, можливо, точки* x_0, *тоді:*

1) *якщо в інтервалі* $(x_0 - \delta;\ x_0)$ *похідна* $f'(x) > 0$, *а в інтервалі* $(x_0;\ x_0 + \delta)$ *похідна* $f'(x) < 0$, *то* x_0 *є точкою локального максимуму функції* $f(x)$;

2) *якщо в інтервалі* $(x_0 - \delta;\ x_0)$ *похідна* $f'(x) < 0$, *а в інтервалі* $(x_0;\ x_0 + \delta)$ *похідна* $f'(x) > 0$, *то* x_0 *в точкою локального мінімуму функції* $f(x)$;

3) *якщо в обох інтервалах* $(x_0 - \delta;\ x_0)$ і $(x_0;\ x_0 + \delta)$ *похідна* $f'(x)$ *має той самий знак, то* x_0 *не є екстремальною точкою функції* $f(x)$.

Можна ще сказати так: якщо при переході зліва направо через критичну точку x_0 знак похідної $f'(x)$ змінюється з плюса на мінус, то x_0 — точка локального максимуму; якщо знак похідної $f'(x)$ змінюється з мінуса на плюс, то x_0 — точка локального мінімуму; якщо похідна не змінює знак, то в точці x_0 екстремум відсутній.

Геометричний зміст теореми 2 ілюструє рис. 5.30.

○ Нехай для деякого $\delta > 0$ виконуються умови: $\forall x \in (x_0 - \delta;\ x_0) : f'(x) > 0;\ \forall x \in (x_0;\ x_0 + \delta) : f'(x) < 0.$
Тоді на інтервалі $(x_0 - \delta;\ x_0)$ функція $f(x)$ зростає і $f(x) < f(x_0)$ для всіх x з цього інтервалу, а на інтервалі $(x_0; x_0 - \delta)$ функція $f(x)$ спадає і $f(x) < f(x_0)$ для всіх x з цього інтервалу.

Отже, існує окіл $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки x_0 такий, що $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 - \delta) \setminus \{x_0\} : f(x) < f(x_0)$, а це й означає, що x_0 — точка локального максимуму функції.

Випадки 1) і 3) доводяться аналогічно. ●

З теорем 1 і 2 випливає таке правило дослідження функції на екстремум: щоб знайти локальні екстремуми функції $f(x)$, треба:

1) знайти критичні точки функції $f(x)$. Для цього слід розв'язати рівняння $f'(x) = 0$ і серед його розв'язків вибрати тільки ті дійсні корені, які є внутрішніми точками області існування функції; знайти точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує;

2) якщо критичних точок функція не має, то вона не має і екстремумів. Якщо критичні точки є, то треба дослідити знак похідної в кожному з інтервалів, на які розбивається область існування цими критичними точками. Для цього достатньо визначити знак похідної в якій-небудь одній точці інтервалу, оскільки похідна може змінити знак лише при переході через критичну точку;

3) за зміною знака $f'(x)$ при переході через критичні точки зліва направо визначити точки максимумів та мінімумів і обчислити значення функції $f(x)$ в цих точках. Результати дослідження доцільно звести в таблицю.

Приклад

Знайти локальні екстремуми функції $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\, e^x$.

○ Область визначення $(-\infty; +\infty)$. Знаходимо похідну $f'(x) = \frac{2+3x}{3\sqrt[3]{x}} e^x$.

Похідна $f'(x)$ дорівнює нулю при $x = -\frac{2}{3}$ і не існує при $x = 0$. Отже $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 0$ — критичні точки даної функції. Складаємо таблицю (символами $\nearrow$ та $\searrow$ умовно позначається відповідно зростання і спадання функції на інтервалі).

При цьому скористаємось тим, що

$$f'(-1) > 0,\ f'\left(-\frac{1}{3}\right) < 0,\ f'(1) > 0,\ f\left(-\frac{2}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{4}{9e}} \approx 0{,}4,\ f(0) = 0.$$

Таблиця

x	$\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$	0	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	∞	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\approx 0{,}4$ max	$\searrow$	0 min	$\nearrow$

Отже, $x_1 = -\frac{2}{3}$ — точка локального максимуму, $y_{\max} \approx 0{,}4$; $x_2 = 0$ — точка локального мінімуму, $y_{\min} = 0$. ●

Теорема 3 *(друга достатня умова локального екстремуму). Нехай x_0 — стаціонарна точка функції $f(x)$, тобто $f'(x_0) = 0$, і в околі точки x_0 існує друга неперервна похідна, причому $f''(x_0) \neq 0$. Якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального мінімуму; якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимуму.*

Приклад

Знайти локальні екстремуми функції

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 3.$$

○ Область визначення $(-\infty; +\infty)$. Похідна $f'(x) = x^2 - 3x + 2$. Розв'язуємо рівняння $f'(x) = 0$:

$$x^2 - 3x + 2 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2.$$

Звідси дістаємо стаціонарні точки: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Точок, в яких похідна $f'(x)$ не існує, немає. Отже, стаціонарні точки є єдиними критичними точками даної функції, тому можна знайти екстремуми за другою достатньою умовою: оскільки $f''(x) = 2x - 3$ і $f''(1) < 0$, то $x_1 = 1$ — точка локального максимуму, $y_{\max} = f(1) = -\frac{13}{6}$; $f''(2) > 0$, тому x_2 — точка локального мінімуму, $y_{\min} = f(2) = -\frac{7}{3}$. ●

Як бачимо, дослідження функції на екстремум за другою достатньою умовою простіше, ніж за першою. Однак ця умова застосовна до вужчого класу функцій. Її не можна використати для дослідження тих критичних точок, в яких перша похідна не існує, а також до тих стаціонарних точок, в яких друга похідна дорівнює нулю.

Проте іноді той випадок, коли в стаціонарній точці друга похідна дорівнює нулю, можна дослідити, застосувавши таку теорему.

***Теорема 4** (третя достатня умова локального екстремуму). Нехай в околі стаціонарної точки x_0 існує неперервна похідна $f^{(n)}(x)$, причому $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0. \tag{74}$$

Тоді:

1) *якщо n — парне і $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $f(x)$ має в x_0 локальний максимум:*

2) *якщо n — парне і $f^{n}(x_0) > 0$, то $f(x)$ має в x_0 локальний мінімум:*

3) *якщо n — непарне, то $f(x)$ в x_0 локального екстремуму не має.*

○ Скориставшись формулою Тейлора і взявши до уваги рівності (74), дістанемо

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n,$$

де c лежить між x та x_0.

Внаслідок неперервності похідної $f^{(n)}(x)$ робимо висновок, що існує δ-окіл точки x_0, в якому числа $f^{(n)}(c)$ і $f^{(n)}(x_0)$ мають однакові знаки. Тому залишковий член у попередній рівності матиме знак $f^{(n)}(x_0)$, як при $x < x_0$, так і при $x > x_0$, якщо число n парне, і набуватиме двох значень, протилежних за знаком, якщо n непарне, тобто $f(x) - f(x_0) < 0$ при $f^{(n)}(x_0) < 0$ і n парному означає, що x_0 — точка локального максимуму; $f(x) - f(x_0) > 0$ при $f^{(n)}(x_0) > 0$ і n — парному означає, що x_0 — точка локального мінімуму; різниця $f(x) - f(x_0)$ при $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ і n непарному має різні знаки на інтервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ та $(x_0; x_0 + \delta)$, тому x_0 не є екстремальною точкою для функції $f(x)$. ●

Зазначимо, що теорема 2 є окремим випадком доведеної теореми і випливає з останньої, якщо покласти $n = 2$.

Приклад

Дослідити на екстремум в точці $x = 0$ функцію

$$f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x.$$

○ Маємо

$$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x, \quad f'(0) = 0;$$
$$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x, \quad f''(0) = 0;$$

$f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x, \quad f'''(0) = 0;$
$f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x, \quad f^{(4)}(0) = 4 > 0.$

Отже, задаиа функція в точці $x = 0$ має локальний мінімум.

6.3. Найбільше і найменше значення функції

Розглянемо спочатку випадок, коли функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$. Як відомо (гл. 4, п. 5.3), така функція досягає своїх найбільшого і найменшого значень, які називають також абсолютними екстремумами функції на цьому відрізку і позначають відповідно $M = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$, $m = \min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$.

Зрозуміло, що для точки x_0, де функція досягає найбільшого значення, може бути лише три можливості:
а) $x_0 = a$, б) $x_0 \in (a;$ в), в) $x_0 = b$. Якщо $x_0 \in (a;\ b)$, то точку x_0 потрібно шукати серед критичних точок даної функції. Те саме можна сказати і про точку, в якій функція набуває найменшого значення.

Отже, щоб знайти найбільше (найменше) значення функції $f(x)$, яка неперервна на відрізку $[a;\ b]$, треба:

1) знайти критичні точки функції $f(x)$, які належать інтервалу $(a;\ b)$;

2) обчислити значення функції $f(x)$ у знайдених критичних точках і точках a та b і серед цих значень вибрати найбільше (найменше).

Нехай тепер функція $f(x)$ неперервна в інтервалі $(a;\ b)$. Така функція може й не мати абсолютних екстремумів. Про наявність їх судять з поводження даної функції на кінцях інтервалу (обчислюючи $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$) та значення $f(x)$ в критичних точках, які належать інтервалу $(a;\ b)$.

При розв'язуванні практичних задач буває наперед відомо, що функція має лише абсолютний максимум або лише абсолютний мінімум, який досягається у внутрішній точці відрізка $[a;\ b]$. Тоді задача зводиться до знаходження критичних точок, які належать $(a;\ b)$. Якщо виявиться, що така точка єдина, то вона й буде точкою абсолютного екстремуму.

Приклади

1. Знайти иайбільше і найменше значення функції $f(x) = x^4 - 8x^2$ на відрізку $[-1;\ 3]$.

○ Знаходимо критичні точки заданої функції. Маємо $f'(x) = 4x^3 - 16x$, $4x^3 - 16x = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2.$

Відрізку $[-1, 3]$ иалежать точки $x_2 = 0$ та $x_3 = 2$. Обчислюємо значення функцій в цих точках і иа кінцях відрізка:

$$f(-1) = -7,\ f(0) = 0;\quad f(2) = -16,\ f(3) = 9.$$

Отже,

$$M = \max_{-1\leqslant x\leqslant 3} f(x) = 9,\quad m = \min_{-1\leqslant x\leqslant 3} f(x) = -16. \quad ●$$

2. Завод A потрібно з'єднати шосейною дорогою з прямолінійною залізничною колією, на якій розміщено місто B. Відстань AC до залізничної колії дорівнює a, відстань CB по залізничній колії — l. Вартість перевезень вагової одиниці вантажу на одиницю відстані дорівнює α — залізницею і β — по шосе. Як провести шосе AM до залізниці, щоб вартість перевезень від заводу до міста B була найменшою?

○ Вартість y перевезень одиниці вантажу при довільному положенні точки M (рис. 5.31) дорівнює

$$y = \alpha(l - x) + \beta\sqrt{x^2 + a^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Маємо

$$y'_x = \frac{\beta x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \alpha = \beta\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Якщо $\alpha \geqslant \beta$, то похідна y'_x зберігає знак мінус, не перетворюючись взагалі в нуль. Функція y спадає із зростанням x від 0 до l і очевидно, що набуває свого найменшого значення при $x = l$. У цьому випадку шосе треба починати безпосередньо від міста B, причому

$$y_{\min} = y\big|_{x=l} = \beta\sqrt{l^2 + a^2}.$$

Якщо $\alpha < \beta$, то похідна y'_x має єдиний корінь

$$x_0 = \frac{\alpha a}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}.$$

При $x_0 \leqslant l$ цей корінь лежить зовні допустимого для x проміжку або на кінці його, так що всередині проміжку похідна $y'_x < 0$ і ми приходимо до уже розглянутого випадку. Лише коли $\alpha < \beta$ і $x_0 < l$ значення x_0 визначає положення точки M між B та C, при якому витрати на перевезення будуть найменшими:

$$y_{\min} = y\big|_{x=x_0} = \alpha l + a\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}. \quad ●$$

3. З круглої колоди діаметра d треба вирізати стояк, який має прямокутний переріз і може сприймати найбільше навантаження. Якими повинні бути розміри стояка?

○ Оскільки стояк є елементом конструкції, що працює на стиск, то він сприйматиме найбільшу нагрузку тоді, коли площа його поперечного перерізу буде найбільшою. Таким чином, задача зводиться до визначення прямокутника найбільшої площі, який можна вписати в круг діаметра d (рис. 5.32). Нехай x і y — сторони шуканого прямокутника, тоді $y = \sqrt{d^2 - x^2}$, тому площа прямокутника $S = S(x) = x\sqrt{d^2 - x^2}$, $0 < x < d$. Далі маємо

$$S'(x) = \frac{d^2 - 2x^2}{(d^2 - x^2)^{1/2}}; \quad S''(x) = \frac{x(2x^2 - 3d^2)}{(d^2 - x^2)^{3/2}};$$

$S'(x) = 0$ при $x = \pm\dfrac{d}{\sqrt{2}}$ і не існує при $x = \pm d$.

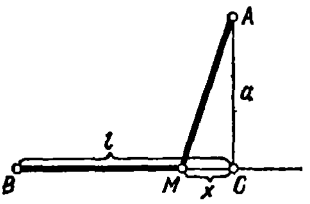


Рис. 5.31

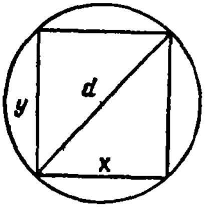


Рис. 5.32

Оскільки функція $S(x)$ визначена на інтервалі $(0; d)$, то вона має єдину критичну точку $x=\frac{d}{\sqrt{2}}$. У цій точці $S(x)$ досягає максимуму, тому що $S''\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)<0$. При цьому $y=\frac{d}{\sqrt{2}}$, $S_{max}=\frac{d^2}{2}$. Отже, найбільше навантаження сприймає квадратний стояк із стороною перерізу, рівною $d/\sqrt{2}$. ●

4. У чашку, яка має форму півкулі радіуса r (рис. 5.33), опущено однорідний стержень AB довжини l, $2r<l<4r$. Знайти положення рівноваги стержня.

○ Положенню рівноваги стержня відповідає мінімальне значення його потенціальної енергії, тобто найнижче положення центра його тяжіння O (оскільки стержень однорідний, то центр тяжіння збігається з його серединою). Позначивши через OK перпендикуляр до площини KL, на якій стоїть чашка, зведемо задачу до знаходження такого кута $\alpha=(\widehat{AB, OC})=(\widehat{AB, KL})=(\widehat{ED, AB})$, при якому відрізок OK має мінімальну довжину.

Враховуючи, що $ED=2r$, $AO=OB=\frac{l}{2}$, з $\triangle EAD$ маємо $AD=2r\cos\alpha$, тому $OD=2r\cos\alpha-\frac{l}{2}$. Крім того, $DC=r-OK$, тоді з $\triangle DCO$ дістаємо

$$\sin\alpha=\frac{DC}{OD}=\frac{r-OK}{2r\cos\alpha-\frac{l}{2}},$$

звідки

$$OK=f(\alpha)=r+\frac{l}{2}\sin\alpha-r\sin 2\alpha,\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Тепер залишається знайти те значення кута α, при якому функція $f(\alpha)$ має мінімум. Оскільки

$$f'(\alpha)=\frac{l}{2}\cos\alpha-2r\cos 2\alpha=\frac{l}{2}\cos\alpha+2r-4r\cos^2\alpha,$$

то критичні точки функції $f(\alpha)$ знаходимо з рівняння

$$4r\cos^2\alpha-\frac{l}{2}\cos\alpha-2r=0.$$

За умовою задачі $\cos\alpha>0$, тому функція $f(\alpha)$ має лише одну критичну точку:

$$\cos\alpha_0=\frac{l+\sqrt{l^2+128r^2}}{16r}.$$

Знайдений кут α_0 нахилу стержня до площини, на якій стоїть чашка, відповідає положенню рівноваги стержня, тому що, як неважко упевнитись,

$$f''(\alpha_0)=\frac{\sin\alpha_0}{2}\sqrt{l^2+128r^2}>0. \quad ●$$

5. Визначити розміри консервної банки об'єму V, при яких на її виготовлення піде найменше матеріалу.

○ Нехай банка має форму циліндра з радіусом основи r і висотою h. Тоді повна поверхня банки дорівнює

$$S=2\pi r^2+2\pi rh.$$

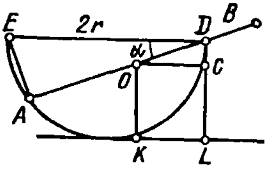


Рис. 5.33

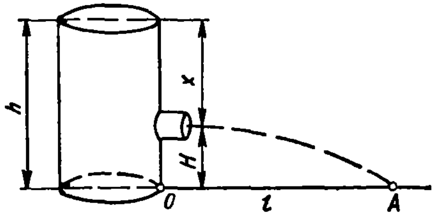


Рис. 5.34

Оскільки об'єм банки відомий:

$$V = \pi r^2 h, \text{ то } h = \frac{V}{\pi r^2},$$

тому

$$S = S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\left(\pi r^2 + \frac{V}{r}\right).$$

Знайдемо найменше значення функції $S(r)$:

$$\frac{dS}{dr} = 2\left(2\pi r - \frac{V}{r^2}\right), \quad \frac{dS}{dr} = 0 \text{ при } r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}};$$

$$\left.\frac{d^2S}{dr^2}\right|_{r=r_0} = 2\left.\left(2\pi + \frac{2V}{r^3}\right)\right|_{r=r_0} > 0.$$

Отже, при $r = r_0$ функція $S(r)$ має мінімум. Це значення найменше на проміжку $(0; +\infty)$, оскільки $\lim\limits_{r\to 0} S(r) = \infty$ і $\lim\limits_{r\to+\infty} S(r) = \infty$.

Обчислимо висоту

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r.$$

Таким чином, для того щоб при заданому об'ємі циліндрична банка мала найменшу повну поверхню, її висота має дорівнювати діаметру.

Аналогічно розв'язується задача, коли банка має форму прямокутного паралелепіпеда. ●

6. Посудина з вертикальною стінкою висотою h стоїть на горизонтальній площині (рис. 5.34). На якій глибині треба розмістити отвір, щоб дальність вильоту води з отвору була найбільшою (швидкість рідини, що витікає, за законом Торрічеллі дорівнює $\sqrt{2gx}$, де x — глибина розміщення отвору; g — прискорення вільного падіння)?

○ Позначимо через H відстань отвору в посудині від горизонтальної площини, а через $l = OA$ — дальність вильоту. Тоді $l = vt = \sqrt{2gx}t$, де t — час вильоту води з отвору на площину. З курсу фізики відомо, що

$$H = \frac{gt^2}{2}, \text{ звідки } t = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}, \quad (H = h - x),$$

тобто

$$l = l(x) = \sqrt{2gx}\sqrt{\frac{2(h-x)}{g}} = 2\sqrt{x(h-x)}, \quad 0 < x < h.$$

Далі маємо

$$l'(x) = \frac{h-2x}{\sqrt{x(h-x)}}; \quad l'(x) = 0 \text{ при } x = \frac{h}{2}.$$

Оскільки функція $l(x)$ має тільки одну критичну точку $x = \frac{h}{2}$, а за умовою задачі існує таке положення отвору, при якому дальність вильоту найбільша, то ця критична точка і є шуканою. ●

7. З круга радіуса R потрібно вирізати сектор так, щоб з нього можна було виготовити конусоподібний фільтр з максимальним об'ємом.

○ Нехай x — кут вирізаного сектора (рис. 5.35). При $x \to 0$ і $x \to 2\pi$ об'єм конуса $V \to 0$, тому на проміжку $(0; 2\pi)$ існує таке значення x, при якому цей об'єм найбільший.

При склеюванні сектора утворюється конус, твірна якого дорівнює R, довжина кола основи дорівнює Rx, радіус основи $r = \frac{Rx}{2\pi}$, висота

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

і об'єм

$$V = V(x) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{R^3}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

Знайдемо похідну

$$\frac{dV}{dx} = \frac{x(8\pi^2 - 3x^2)}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}};$$

$$\frac{dV}{dx} = 0 \text{ при } x_1 = 0, \ x_2 = -\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \ x_3 = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Значення x_1 та x_2 лежать зовні проміжка $(0; 2\pi)$, тому функція $V(x)$ має єдину критичну точку x_3. Оскільки на проміжку $(0; 2\pi)$ функція досягає максимуму, то, не досліджуючи значення x_3, можна стверджувати, що йому відповідатиме найбільший об'єм. ●

8. Пряма l ділить площину на два середовища: I і II. В середовищі I точка рухається з швидкістю v_1, а в середовищі II — із швидкістю v_2. По якому шляху має рухатись точка, щоб найшвидше дістатися з точки A середовища I в точку B середовища II?

○ Нехай AA_1 і BB_1 — перпендикуляри до прямої l і $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$ (рис. 5.36).

Зрозуміло, що як в середовищі I, так і в середовищі II найкоротший шлях має бути прямолінійним, але шлях по прямій AB найкоротшим не буде. Отже, найкоротший шлях складається з двох прямолінійних відрізків AM і MB, причому

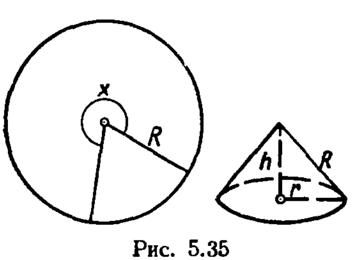


Рис. 5.35

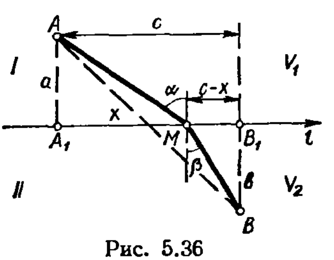


Рис. 5.36

точка $M \in l$. За незалежну змінну x виберемо абсцису точки $M: x = A_1M$ і знайдемо час t, за який рухома точка перейде з точки A в точку B:

$$t = f(x) = \frac{AM}{v_1} + \frac{MB}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Знайдемо похідні

$$f'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}};$$

$$f''(x) = \frac{a^2}{v_1(a^2+x^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{v_2(b^2+(c-x)^2)^{3/2}}.$$

Рівняння $f'(x) = 0$ розв'язати не можна (для цього треба мати числові дані задачі), тому дослідимо його.

Оскільки похідні $f'(x)$ і $f''(x)$ існують при всіх значеннях x і $f''(x) > 0$, то похідна $f'(x)$ зростає на всьому проміжку $(-\infty; +\infty)$ і не може дорівнювати нулю більше одного разу. Але $f'(0) < 0$, а $f'(c) > 0$, тому рівняння $f'(x) = 0$ має єдиний корінь x_0, який лежить між O і c (гл. 4, п. 5.3) і якому відповідає єдиний мінімум функції $f(x)$. Абсциси $x = 0$ і $x = c$ відповідають точкам A_1 і B_1, тому точка M знаходиться між точками A_1 і B_1.

З'ясуємо геометричний зміст знайденого розв'язку. Абсциса x шуканої точки M має задовольняти рівняння $f'(x) = 0$ або

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}},$$

звідки

$$\frac{A_1M}{v_1AM} = \frac{MB}{v_2BM} \text{ або } \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Ми дістали відомий з фізики закон заломлення світла: заломлення світла відбувається так, наче промінь світла обирає найшвидший шлях з точок одного середовища в точки другого. Цей результат повністю узгоджується з відомим в оптиці принципом Ферма: із всіх можливих шляхів, які йдуть з A в B, промінь світла обирає такий, який він проходить за найменший час. ●

9. Нехай в результаті однакових і ретельно проведених експериментів (спостережень) дістали n різних (у зв'язку з неточністю інструментів) значень величини $x: a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Найімовірнішим значенням x_0 величини x вважатимемо те, при якому сума квадратів похибок найменша. Знайти це значення.

○ Сума квадратів похибок виражається функцією

$$f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \cdots + (x-a_n)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x-a_i)^2,$$

тому x_0 знаходиться з умови найменшого значення цієї функції. Маємо

$$f'(x) = 2\sum_{i=1}^{n}(x-a_i), \quad f''(x) = 2n > 0.$$

Прирівнюючи першу похідну до нуля, знаходимо єдину критичну точку

$$x_0 = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

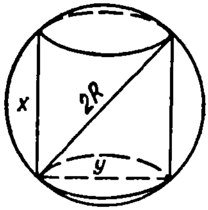


Рис. 5.37

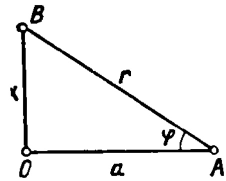


Рис. 5.38

якій відповідає найменше значення функції $f(x)$, оскільки $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Отже, найімовірнішим значенням величини x буде середнє арифметичне наближених значень a_i. ●

10. З кулі радіуса R потрібно виготовити циліндр найбільшого об'єму. Які його розміри?

○ Нехай x і y — висота і діаметр циліндра (рис. 5.37), тоді $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$, тому об'єм циліндра

$$V = V(x) = \pi R^2 x - \frac{\pi x^3}{4}, \quad 0 < x < 2R.$$

Оскільки $V(x) > 0$ і при $x \to 0$ та $x \to 2R$ значення $V(x) \to 0$, то існують такі розміри циліндра, при яких його об'єм буде максимальним.

Далі маємо

$$V'(x) = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi x^2, \quad 0 < x < 2R.$$

На інтервалі $(0; 2R)$ похідна $V'(x) = 0$ лише в точці $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$, тому циліндр матиме найбільший об'єм, коли його висота $x = \frac{2R\sqrt{3}}{2}$. При цьому

$$y = \sqrt{4R^2 - \left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

Отже, шуканий діаметр циліндра має дорівнювати його висоті. ●

11. Нехай електрична лампочка рухається вздовж вертикальної прямої OB (рис. 5.38). На якій висоті від горизонтальної площини треба розмістити лампочку, щоб в даній точці A площини ($OA = a$) освітленість була найбільшою.

○ З фізики відомо, що освітленість I визначається законом $I = k\frac{\sin\varphi}{r^2}$, де k — коефіцієнт пропорційності, який залежить від сили світла лампочки; $r = BA$ — відстань від лампочки до точки A.

Нехай шукана висота $OB = x$, тоді $\sin\varphi = \frac{x}{r}$, тому $I = I(x) = \frac{kx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$, причому за змістом задачі $x \in (0; +\infty)$. Маємо $I'(x) = \frac{k(a^2 - 2x^2)}{(x^2 + a^2)^{5/2}} = 0$ при $x_{1,2} = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$. Інших критичних точок функція $I(x)$ не має.

Оскільки в інтервалі $(0; +\infty)$ лежить лише одна критична точка $x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ і за умовою задачі існує положення лампочки, при якому освітленість в точці A найбільша, то шукана висота $OB = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Якби в даній задачі потрібно було ще з'ясувати, чи існує положення лампочки, при якому освітленість найбільша, то треба було б далі перевірити, що

$$I''\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) < 0, \ I\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) > 0, \ \lim_{x\to 0} I(x) = \lim_{x\to +\infty} I(x) = 0. \ \bullet$$

12. Газова суміш містить оксид азоту і кисню. Знайти концентрацію кисню, при якій оксид азоту, який є в суміші, окислятиметься з максимальною швидкістю.

○ Швидкість реакції $2NO + O_2 = 2NO_2$ виражається формулою $v = kx^2y$, де x — концентрація NO в будь-який момент часу; y — концентрація O_2; k — стала швидкості реакції, що не залежить від концентрації реагуючих компонентів, а залежить лише від температури.

Якщо концентрації газів виразити в об'ємних процентах, то $y = 100 - x$ і $v = kx^2(100 - x)$. Далі маємо

$$v'_x = k(200x - 3x^2).$$

Оскільки $k \neq 0$, то $v'_x = 0$ при $x_1 = 0$ і $x_2 = \frac{200}{3}$;

$$\frac{d^2v}{dx^2} = k(200 - 6x); \ \left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=x_1} > 0; \ \left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=x_2} < 0.$$

Отже, при $x = 0$ швидкість окислення мінімальна, а при $x = \frac{200}{3}$ — максимальна, тобто швидкість окислення оксиду азоту буде максимальною, коли газова суміш міститиме $y = 100 - \frac{200}{3} \approx 33{,}3\ \%$ кисню. ●

6.4. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину

Крива $y = f(x)$ називається *опуклою* на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Крива $y = f(x)$ називається *вгнутою* на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі.

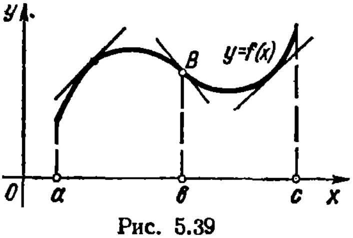


Рис. 5.39

Точкою перегину називається така точка кривої, яка відділяє її опуклу частину від вгнутої.

На рис. 5.39 крива $y = f(x)$ опукла на інтервалі $(a; b)$, вгнута на інтервалі $(b; c)$ і точка $B(b; f(b))$ — точка перегину.

Зрозуміло, що в точці перегину до-

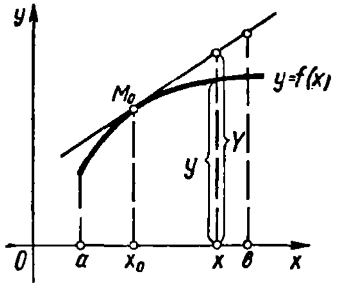


Рис. 5.40

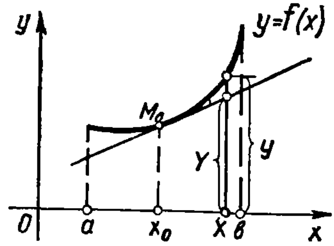


Рис. 5.41

тична перетинає криву, оскільки з одного боку околу цієї точки графік кривої знаходиться під дотичною, а з другого — над дотичною.

Позначимо довільну ординату кривої через y, а дотичної — через Y. Нехай $M(x_0;\ y_0)$ — точка дотику, $x_0 \in (a;\ b)$. Тоді означення опуклості і вгнутості можна записати так: крива $y = f(x)$ опукла (рис. 5.40) на $(a;\ b)$, якщо

$$\forall x \in (a;\ b),\quad x \neq x_0 : y - Y < 0;$$

крива $y = f(x)$ вгнута (рис. 5.41) на $(a;\ b)$, якщо

$$\forall x \in (a;\ b),\quad x \neq x_0 : y - Y > 0.$$

Інтервали опуклості і вгнутості знаходять за допомогою такої теореми.

Теорема 1. *Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційовною на $(a;\ b)$, тоді:*

1) *якщо $f''(x) < 0$, $x \in (a;\ b)$, то крива $y = f(x)$ опукла на $(a;\ b)$;*
2) *якщо $f''(x) > 0$, $x \in (a;\ b)$, то крива $y = f(x)$ вгнута на $(a;\ b)$;*

○ З формули Тейлора і рівняння дотичної маємо

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)(x - x_0)^2}{2},$$

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

де точка c лежить між x і x_0. Віднімаючи почленно ці рівності, дістанемо $y - Y = \frac{f''(c)\,(x - x_0)^2}{2}$.

Нехай $\forall x \in (a;\ b) : f''(x) < 0$. Тоді $\forall x \in (a;\ b)$, $x \neq x_0$: $y - Y < 0$, а це й означає, що крива $y = f(x)$ на $(a;\ b)$ опукла.

Аналогічно доводиться теорема для випадку $f''(x) > 0$. ●

З теореми 1 випливає, що в точці перегину друга похідна дорівнює нулю (якщо вона існує). Однак точками перегину кривої $y = f(x)$ можуть бути також і точки, в яких друга похідна $f''(x)$ не існує (наприклад, точка $x = 0$ кривої $f(x) = \sqrt[3]{x}$).

Точки, в яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками другого роду* функції $f(x)$. Отже, якщо x_0 — абсциса точки перегину функції $f(x)$, то x_0 є критичною точкою другого роду цієї функції. Обернене твердження неправильне.

Приклади

1. Функція $f(x) = x^4$ має другу похідну $f''(x) = 12x^2$, яка дорівнює нулю при $x = 0$. Але критична точка, $x = 0$ не є абсцисою точки перегину даної кривої.

2. Функція $y = x^3$ має критичну точку $x = 0$, яка є абсцисою точки перегину.

Встановимо достатні умови існування точки перегину.

Теорема 2. *Нехай x_0 — критична точка другого роду функції $f(x)$. Якщо при переході через точку x_0 похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка $(x_0;\ f(x_0))$ є точкою перегину кривої $f(x)$.*

○ Нехай, наприклад, існує δ-окіл точки x_0 такий, що

$$\forall x \in (x_0 - \delta;\ x_0) : f''(x) < 0;$$

$$\forall x \in (x_0;\ x_0 + \delta) : f''(x) > 0.$$

Тоді за теоремою 1 крива $y = f(x)$ опукла на інтервалі $(x_0 - \delta;\ x_0)$ і вгнута на інтервалі $(x_0;\ x_0 + \delta)$, тобто точка $(x_0;\ f(x_0))$ — точка перегину.

Якщо похідна $f''(x)$ не змінює знак в δ-околі точки x_0, то крива буде в цьому околі або опуклою (при $f''(x) < 0$), або вгнутою (при $f''(x) > 0$). ●

Отже, щоб знайти точки перегину кривої, треба знайти критичні точки другого роду і дослідити зміну знака другої похідної при переході через ці точки.

Приклади

1. Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривих:

а) $f(x) = x^5 - x + 2$; б) $f(x) = 2 + (x - 5)^{5/3}$.

○ а) Область визначення $(-\infty;\ +\infty)$. Оскільки $f''(x) = 20x^3 = 0$ при $x = 0$, то точка $x = 0$ є критичною точкою другого роду. Інших критичних точок ця функція не має, бо $f''(x)$ існує на всій числовій осі.

Розбиваємо область визначення критичною точкою на інтервали і досліджуємо зміну знака другої похідної: якщо $x \in (-\infty;\ 0)$, то $f''(x) < 0$ — крива опукла: якщо $x \in (0;\ +\infty)$, то $f''(x) > 0$ — крива вгнута. Точка $(0;\ 2)$ — точка перегину кривої.

б) Область визначення $(-\infty;\ +\infty)$. Оскільки

$$f''(x) = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-5}} \neq 0$$

і не існує при $x = 5$, то єдиною критичною точкою другого роду є точка $x = 5$. Маємо

$$\forall x \in (-\infty;\ 5) : f''(x) < 0; \quad \forall x \in (5;\ +\infty) : f''(x) > 0.$$

Тому крива опукла на інтервалі $(-\infty;\ 5)$ і вгнута на інтервалі $(5;\ +\infty)$; точка $(5;\ 2)$ — точка перегину. ●

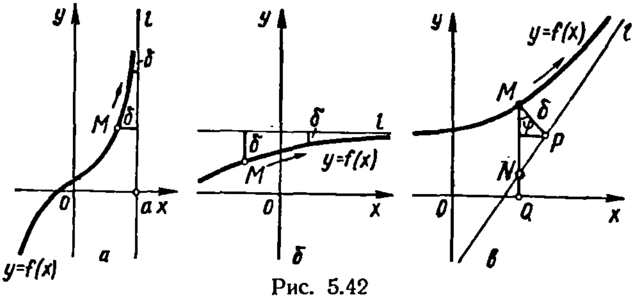


Рис. 5.42

2. Довести, що верхня частина еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $y>0$ опукла (гл. 3, п. 6.3).

○ Маємо $\forall x\in(-a;\ a): y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $y''=\frac{-ba}{(a^2-x^2)^{3/2}}<0$.
Тому верхня частина еліпса є опукла крива (рис. 3.45). ●

6.5. Асимптоти кривої

З поняттям асимптоти ми ознайомились при дослідженні форми гіперболи (гл. 3, п. 6.4). Поширимо це поняття на довільні криві.

Пряма l називається *асимптотою кривої*, якщо відстань δ від змінної точки M кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка M, рухаючись по кривій, віддаляється на нескінченність.

На рис. 5.42 показано вертикальну (*а*), горизонтальну (*б*) і похилу (*в*) асимптоти. З означення асимптоти випливає, що для існування вертикальної асимптоти $x=x_0$ необхідно і достатньо, щоб $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$, або $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$, або $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

Дійсно, в цьому випадку (рис. 5.42, *а*)

$$\delta=\sqrt{(x-x_0)^2+(f(x)-f(x))^2}=|x-x_0|\to 0 \text{ при } x\to x_0.$$

Рівняння похилої асимптоти будемо шукати у вигляді

$$y=kx+b. \tag{75}$$

Знайдемо k та b. З рис. 5.42, *в* маємо $\delta=MP$, $MN=\frac{MP}{\cos\varphi}=\frac{\delta}{\cos\varphi}$, тому, якщо $\delta\to 0$ при $x\to\infty$, то $MN\to 0$, і навпаки. Але $MN=$ $=MQ-NQ=f(x)-(kx+b)$, тому якщо при $x\to\infty$ пряма (75) є асимптотою, то

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0 \tag{76}$$

або

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=0.$$

Тому

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=0,\ \text{звідки}\ k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}. \qquad (77)$$

Знайшовши k, з рівності (76) дістанемо

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx). \qquad (78)$$

Отже, якщо існує похила асимптота (75), то k та b знаходяться за формулами (77) і (78). Навпаки, якщо існують скінченні границі (77) і (78), то виконується рівність (76), тобто пряма (75) є похилою асимптотою.

Зауваження 1. Якщо хоча б одна з границь (77) або (78) не існує, або дорівнює нескінченності, то крива похилої асимптоти не має.

Зауваження 2. Якщо $k=0$, то $b=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, тому $y=$ $=b$ — рівняння горизонтальної асимптоти (рис. 5.42, *б*). Оскільки це рівняння є окремим випадком рівняння (75), то розрізняють не три, а два види асимптот: вертикальні і невертикальні.

Зауваження 3. Асимптоти кривої $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ і $x\to-\infty$ можуть бути різні. Тому при знаходженні асимптот границі (77) і (78) потрібно обчислювати при $x\to+\infty$ і при $x\to-\infty$.

Приклад

Знайти асимптоти кривих:

а) $f(x)=\dfrac{2x^2+5x+1}{x}$; б) $f(x)=xe^x$.

○ а) Знайдемо вертикальні асимптоти. Оскільки $f(x)$ не визначена в точці $x=0$ і

$$\lim_{x\to-0}\frac{2x^2+5x+1}{x}=+\infty,\ \lim_{x\to+0}\frac{2x^2+5x+1}{x}=-\infty,$$

то $x=0$ — вертикальна асимптота.

За формулами (77) і (78) шукаємо похилу асимптоту при $x\to+\infty$:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+5x+1}{x^2}=2,\ b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+5x+1}{x}-2x\right)=5.$$

Пряма $y=2x+5$ є похилою асимптотою даної кривої при $x\to+\infty$. Неважко переконатися, що ця пряма є асимптотою і при $x\to-\infty$. Отже, задана крива має дві асимптоти: $x=0$ і $y=2x+5$.

б) Дана крива вертикальних асимптот не має, оскільки не має точок розриву другого роду. Далі маємо

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x}=+\infty,$$

тому при $x \to +\infty$ задана крива асимптоти не має. При $x \to -\infty$ дістаємо

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \ b = \lim_{x \to -\infty} (xe^x - 0 \cdot x) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

Отже, при $x \to -\infty$ крива має асимптоту $y = 0$. ●

6.6. Схема дослідження функції та побудова її графіка

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік, треба:

1) знайти область існування функції;

2) знайти (якщо це можна) точки перетину графіка з координатними осями;

3) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність;

4) знайти точки розриву та дослідити їх;

5) знайти інтервали мотононності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;

6) знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;

7) знайти асимптоти кривої;

8) побудувати графік функції, враховуючи дослідження, проведені в п. 1—7.

Якщо графік виявиться не зовсім зрозумілим, потрібно додатково знайти кілька точок графіка, обчисливши значення функції при певних значеннях аргументу; бажано також в цих самих точках обчислити першу похідну, щоб визначити в них напрям дотичної.

Якщо дана функція періодична з періодом T, то досить побудувати її графік на відрізку $[0; T]$, після чого повторити цей графік на проміжках $(nT; \ (n+1)\,T)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Якщо функція парна (або непарна), то достатньо побудувати її графік для $x \geqslant 0$, а потім відобразити його симетрично відносно осі Oy (або відносно початку координат).

Приклад

Дослідити та побудувати графік функції

$$y = \frac{x^3}{1 - x^2}.$$

○ 1) Область існування — вся числова вісь, крім точок $x = \pm 1$.

2) Якщо $x = 0$, то $y = 0$, тому графік перетинає осі координат в точці $O\,(0;\ 0)$.

3) Функція не періодична. Оскільки $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = -\dfrac{x^3}{1-x^2} = -f(x)$, то функція непарна, тому досліджуватимемо її лише для $x \geqslant 0$.

4) Функція в точці $x = 1$ має розрив другого роду і

$$\lim_{x \to 1 \pm 0} f(x) = \mp \infty.$$

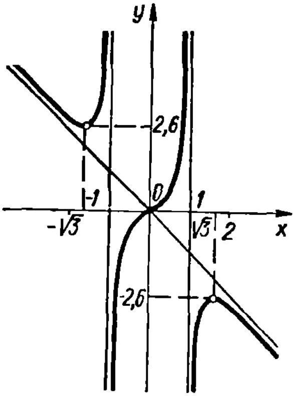


Рис. 5.43

5) Похідна

$$y' = \frac{x^2(3 - x^2)}{(1 - x^2)^2}$$

дорівнює нулю при $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$ і не існує в точках $x = \pm 1$, але останні не входять в область визначення, тому критичними точками функції є точки $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$.

На інтервалі $(0; \infty)$ маємо:
якщо $x \in (0; 1)$, то $f'(x) > 0$ — функція зростає;
якщо $x \in (1; \sqrt{3})$, то $f'(x) > 0$ — функція зростає;
якщо $x \in (\sqrt{3}; +\infty)$, то $f'(x) < 0$ — функція спадає; в точці $x = \sqrt{3}$ функція має локальний максимум: $y_{\max} = f(\sqrt{3}) \approx -2{,}6$.

6) Знаходимо другу похідну:

$$y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(1 - x^2)^3}.$$

Похідна $f''(x) = 0$ при $x = 0$ і не існує при $x = \pm 1$.

Оскільки точки $x = \pm 1$ не входять в область визначення, то $x = 0$ — єдина критична точка. Маємо:
якщо $x \in (-1; 0)$, то $f''(x) < 0$ — крива опукла;
якщо $x \in (0; 1)$, $f''(x) > 0$ — крива вгнута;
якщо $x \in (1; +\infty)$, то $f''(x) < 0$ — крива опукла;
точка $O\ (0;\ 0)$ — точка перегину.

7) З п. 4 випливає, що $x = 1$ — вертикальна асимптота кривої. Оскільки

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{(1 - x^2)\,x} = -1, \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{1 - x^2} - (-1)\,x \right) = 0,$$

то при $x \to \pm\infty$ задана крива має похилу асимптоту $y = -x$.

8) Враховуючи проведене дослідження і непарність функції, будуємо графік (рис. 5.43). ●

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати і довести достатні умови строгої монотонності функції на інтервалі.

2. Які точки називаються стаціонарними?

3. Навести приклад функції, у якої критична точка не відділяє інтервали монотонності, тобто належить інтервалу монотонності.

4. У чому полягає правило знаходження інтервалів монотонності?

5. Знайти інтервали монотонності функцій:

а) $f(x) = \ln(x^2 + 3)$; б) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

6. Що називається точкою локального мінімуму та локальним мінімумом функції? Чому «локальним»?

7. Що називається локальним екстремумом і чим він відрізняється від абсолютного екстремуму?

8. Сформулювати і довести необхідні умови локального екстремуму та першу, другу і третю достатні умови.

9. У чому полягають правила знаходження екстремуму за першою, другою та тертьою достатніми умовами. Навести приклади.

10. Знайти локальні екстремуми функцій:

а) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$; б) $f(x) = \dfrac{(x-2)(3-x)}{x^2}$.

11. Як знайти найбільше та найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$?

12. Довести, що коли x_0 — єдина стаціонарна точка функції $f(x)$, $x \in (a; b)$, причому $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = 0$, $f(x_0) > 0$, то така функція при $x = x_0$ має абсолютний максимум.

13. Знайти абсолютні екстремуми функції:

$$y = 3x - x^3, \quad x \in [-2; 3].$$

14. У конус висотою H і радіусом R вписати циліндр найбільшого об'єму.

15. Яка крива називається опуклою (вгнутою) на інтервалі?

16. Що називається точкою перегину?

17. Які точки називаються критичними точками другого роду?

18. Чи всяка точка перегину є критичною точкою другого роду? А навпаки? Навести приклади.

19. Сформулювати і довести достатню умову опуклості (вгнутості) кривої. Навести приклади.

20. Яка достатня умова того, що критична точка другого роду є абсцисою точки перегину? Навести приклад.

21. Сформулювати правило знаходження інтервалів опуклості, вгнутості та точок перегину.

22. Знайти інтервали опуклості та вгнутості і точки перегину кривої $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$.

23. Що називається асимптотою кривої?

24. Як знайти вертикальну асимптоту? невертикальну?

25. Знайти асимптоти кривої $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$.

26. У чому полягає загальна схема дослідження функції?

27. Дослідити і побудувати графіки функцій

а) $f(x) \dfrac{x^3+4}{x^2}$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-2x^2}$.

Відповіді. 5. а) функція спадає на інтервалі $(-\infty; 0)$ і зростає на інтервалі $(0; +\infty)$; б) функція зростає на інтервалі $(-1; 1)$ і спадає на інтер-

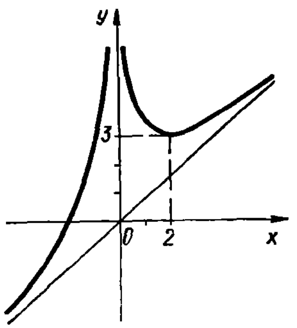


Рис. 5.44

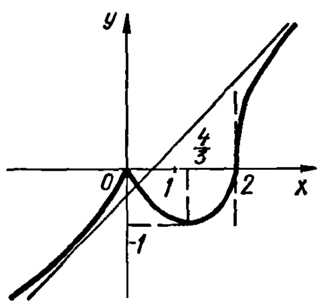


Рис. 5.45

валах $(-\infty; -1)$ та $(1; +\infty)$. **10.** а) $y_{\min} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$; $y_{\max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$; б) $y_{\max} = f\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{1}{24}$. **13.** 2; -18. **14.** $\frac{H}{3}$ і $\frac{2R}{3}$ — висота і радіус шуканого циліндра. **22.** В інтервалах $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$, $(1; +\infty)$ крива вгнута, в інтервалі $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ — опукла; $\left(\frac{1}{3}; \frac{335}{27}\right)$, $(1; 13)$ — точки перегину. **25.** $x = 2$, $y = x + 1$ при $x \to +\infty$; $y = -x - 1$ при $x \to -\infty$. **27.** а) $y_{\min} = f(2) = 3$; $x = 0$, $y = x$ — асимптоти (рис. 5.44); б) $y_{\max} = f(0) = 0$; $y_{\min} = f\left(\frac{4}{3}\right) \approx -1{,}1$, $y = x - \frac{2}{3}$ — асимптота, $(2; 0)$ — точка перегину (рис. 5.45).

§ 7. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ДЕЯКИХ ЗАДАЧ АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ, ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕНЬ

7.1. Наближене розв'язування рівнянь

Алгебраїчні рівняння першого та другого степенів (або лінійні та квадратні рівняння) розв'язуються за формулами, які відомі з шкільного курсу математики.

Існують формули (так звані формули Кардано) для знаходження коренів рівняння третього степеня та метод розв'язування рівнянь четвертого степеня (метод Феррарі). Коли існують формули, які дають змогу виразити корені рівняння через його коефіцієнти за допомогою скінченного числа операцій додавання, віднімання, множення, ділення і добування кореня, то кажуть, що таке рівняння розв'язується в радикалах.

Майже 300 років вчені намагалися розв'язати в радикалах рівняння п'ятого степеня, і лише в першій половині 19 ст. Н. Абель і Е. Галуа довели, що рівняння вище четвертого степеня в загальному випадку в радикалах не розв'язуються. Для розв'язування таких рівнянь застосовують наближені методи. Розглянемо лише ті з них, які безпосередньо стосуються змісту цієї глави.

Нехай треба розв'язати рівняння

$$f(x) = 0. \tag{79}$$

Перед тим як знаходити корені рівняння (79), треба їх відділити, тобто визначити такі проміжки (їх називають *проміжками ізоляції кореня*), які містять тільки один корінь.

Найпростішим методом ізоляції коренів є графічний. Точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю Ox будуть коренями рівняння (79). Якщо рівняння (79) можна зобразити у вигляді різниці двох функцій:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) = 0,$$

то $f_1(x) = f_2(x)$, тому коренями рівняння (79) будуть абсциси точок перетину кривих $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$.

Приклад

Знайти проміжки ізоляції коренів рівняння

$$\cos x - x + 1 = 0.$$

○ Запишемо рівняння у вигляді $\cos x = x - 1$.
Побудувавши графіки функцій $f_1(x) = \cos x$ та $f_2(x) = x - 1$, бачимо (рис. 5.46), що дане рівняння має єдиний корінь, який лежить на проміжку $\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$. ●

Припустимо, що на відрізку $[a, b]$ виконуються такі умови:

1) функція $f(x)$ та її похідні $f'(x)$ і $f''(x)$ неперервні;

2) значення функції на кінцях відрізка мають різні знаки;

3) похідні $f'(x)$ та $f''(x)$ зберігають свої знаки на відрізку $[a; b]$.

Тоді рівняння (79) на $(a; b)$ має лише корінь x_0, тобто $(a; b)$ — проміжок ізоляції [12] кореня x_0. Далі задачу можна розв'язувати одним з таких методів.

1. *Метод «вилки» (метод половинного поділу)*. Цей метод ми детально розглядали в гл. 4, п. 5.3, припускаючи, що інтервал ізоляції наперед відомий.

2. *Метод хорд* [12]. Припустимо для визначеності, що $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ і $\forall x \in (a; b) : f'(x) > 0$. Точку перетину хорди AB з віссю Ox позначимо через x_1, $x_1 \in (a; x_0)$ (рис. 5.47).

Через точку x_1 проведемо пряму, паралельну осі Oy, до перетину з кривою в точці A_1. Сполучивши точки A_1 і B хордою, дістанемо точку x_2, $x_2 \in (x_1; x_0)$ і т. д. Можна довести, що ця послідовність наближених значень $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ прямує до кореня x_0.

Аналітичний вираз для послідовності $\{x_n\}$ одержимо з рівняння хорди (гл. 3, п. 3.1) AB, яка сполучає точки $A(a; f(a))$ і $B(b; f(b))$:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

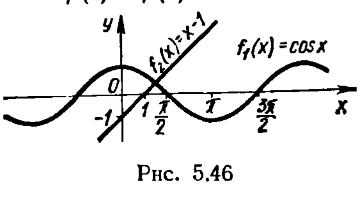


Рис. 5.46

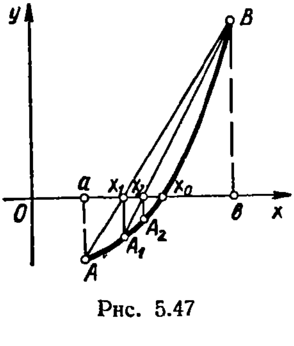


Рис. 5.47

Поклавши $y = 0$, $x = x_1$, дістанемо

$$x_1 = a - \frac{(b-a) f(a)}{f(b) - f(a)}. \qquad (80)$$

Число x_1 називають першим наближенням кореня x_0. Обчисливши значення $f(x_1)$, застосовуємо формулу (80) до відрізка $[x_1;\ b]$, якщо $f(x_1) < 0$ або до відрізка $[a;\ x_1]$, якщо $f(x_1) > 0$. Дістанемо точніше друге наближення x_2 і т. д. Якщо відома точність ε, з якою треба обчислити корінь x_0, то процес припиняється, як тільки $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$.

Приклад

Знайти з точністю до 0,01 корінь рівняння

$$x^3 + x - 1 = 0.$$

○ Нехай $f(x) = x^3 + x - 1$. Оскільки $f(0) = -1 < 0$, а $f(1) = 1 > 0$, то на проміжку (0; 1) є хоча б один корінь. Оскільки $\forall x \in (-\infty;\ +\infty)$: $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, то крива $y = f(x)$ перетинає вісь Ox лише раз. Отже, (0; 1) — проміжок ізоляції кореня x_0.

Знайдемо перше наближення кореня, поклавши в (80) $a = 0$, $b = 1$:

$$x_1 = 0 - \frac{(1-0)\cdot(-1)}{1-(-1)} = \frac{1}{2}.$$

Враховуючи, що $f\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}375 < 0$, $f(1) = 1 > 0$, маємо $\frac{1}{2} < x_0 < 1$.

Застосувавши формулу (80) до відрізка $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$, дістанемо друге наближення кореня (проміжні обчислення виконуємо з точністю до 0,001):

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)(-0{,}375)}{1 - (0{,}375)} = 0{,}636.$$

Оскільки $f(0{,}636) = -0{,}106 < 0$, $f(1) = 1 > 0$, то $x_0 \in (0{,}636;\ 1)$ і формулу (80) треба застосувати до відрізка $[0{,}636;\ 1]$. Щоб прискорити процес, звузимо цей відрізок. Обчисливши $f(0{,}7) = 0{,}043 > 0$, дістанемо, що $x_0 \in (0{,}636;\ 0{,}7)$.

Застосувавши формулу (80) до відрізка $[0{,}636;\ 0{,}7]$, знайдемо третє наближення кореня:

$$x_3 = 0{,}636 - \frac{(0{,}7 - 0{,}636)(-0{,}109)}{0{,}043 - (-0{,}109)} = 0{,}677.$$

Далі знаходимо $f(0{,}68) = -0{,}07 < 0$, $f(0{,}69) = 0{,}08 > 0$, тому $x_0 \in (0{,}68;\ 0{,}69)$ і з точністю до 0,01 дістаємо наближене значення кореня $x_0 \approx 0{,}68$. ●

3. *Метод дотичних (метод Ньютона).* Нехай $f(a) < 0$,

$$f(b) > 0,\quad \forall x \in (a;\ b): f'(x) > 0,\ f''(x) > 0.$$

Ці умови означають, що функція на кінцях відрізка $[a;\ b]$ набуває значень, протилежних за знаком, зростає і вгнута (рис. 5.48).

Запишемо рівняння дотичної, що проходить через точку B і знайдемо точку x_1 перетину цієї дотичної з віссю Ox:

$$y - f(b) = f'(b)(x - b); \quad x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{81}$$

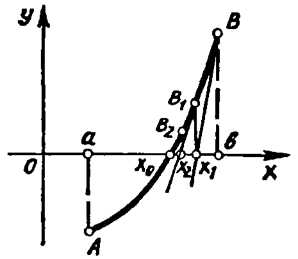


Рис. 5.48

Число x_1 вважають першим наближеним кореня x_0. Проводячи після цього дотичну в точці B_1 $(x_1; f(x_1))$ аналогічно знаходимо друге наближення кореня x_2.

Застосовуючи метод дотичних достатню кількість разів, можна наближено обчислити корінь з довільною точністю.

Зазначимо, що коли провести дотичну в точці A (рис. 5.49), то точка x_1 не наближається до кореня x_0, а віддаляється від нього. Тому дотичну слід проводити через ту точку, в якій функція і друга похідна мають однакові знаки.

4. *Комбінований метод* (рис. 5.50). Застосовуючи на відрізку $[a, b]$ одночасно метод хорд і метод дотичних, знаходимо дві точки x_1 та $\overline{x}_1$, що лежать по різні боки від кореня x_0, тому $x_0 \in (x_1; \overline{x}_1)$. Далі знову застосовуємо метод хорд і метод дотичних, але тепер на відрізку $[x_1; \overline{x}_1]$ і т. д.

Продовжуємо процес доти, доки не виконуватиметься нерівність $|x_n - \overline{x}_n| < \varepsilon$, де ε — задана точність обчислень.

7.2. Інтерполяція функцій. Чисельне диференціювання

Нехай при вивченні деякого явища виявилось, що існує функціональна залежність між змінними величинами x та y. Функція $y = f(x)$ залишається нам невідомою, але внаслідок експерименту встановлено значення цієї функції $y_0, y_1, \ldots, y_n$ при відповідних значеннях аргументу $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Задача полягає в тому, щоб знайти просту функцію, наприклад многочлен, який наближено зображував би функцію $y = f(x)$.

Сформулюємо цю задачу точніше.

Нехай на відрізку $[a; b]$ задані значення функції $y = f(x)$

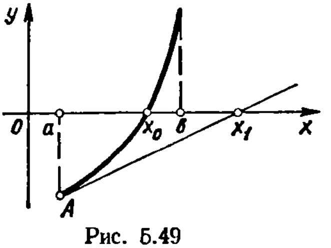


Рис. 5.49

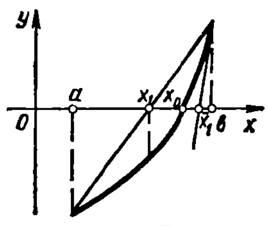


Рис. 5.50

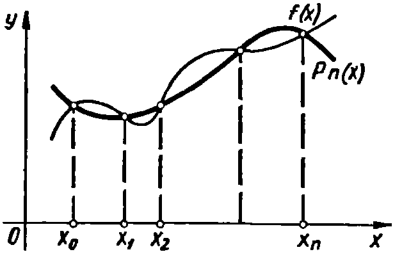


Рис. 5.51

в точках $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$:

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \quad \ldots, f(x_n) = y_n.$$

Треба знайти многочлен n-го степеня

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n+1}x + a_n, \qquad (82)$$

значення якого в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ збігаються із значеннями функції $f(x)$, тобто (рис. 5.51)

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Ця задача називається *задачею інтерполяції*, многочлен (82) — *інтерполяційним многочленом*, а точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — *вузлами інтерполяції*. Вважаючи інтерполяційний многочлен $P_n(x)$ наближеним аналітичним виразом для функції $y = f(x)$, тобто $f(x) \approx P_n(x)$, ми можемо знаходити наближені значення функції $f(x)$ в точках x, що лежать між вузлами.

Можна показати [5], що задача інтерполяції має єдиний розв'язок, причому інтерполяційний многочлен має вигляд

$$P_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}y_1 + \cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n. \qquad (83)$$

Формула (83) називається *інтерполяційною формулою (або інтерполяційним многочленом) Лагранжа*. Зокрема, вона застосовується в *задачі чисельного диференціювання*. Ця задача полягає в тому, щоб за відомою таблицею значень невідомої функції $f(x)$ знайти значення $f'(x)$. Її наближено можна розв'язати так: за формулою (83) замінити функцію $f(x)$ інтерполяційним многочленом і знайти похідну від нього.

Приклад

У точках $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$ відомі значення функції $y = f(x)$: $y_0 = 2$, $y_1 = 1$, $y_2 = 8$. Обчислити наближене значення $f'(4)$.

○ Маємо

$$f(x) \approx P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 +$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2=\frac{(x-3)(x-5)}{(1-3)(1-5)}\cdot 2+\frac{(x-1)(x-5)}{(3-1)(3-5)}\cdot 1+$$

$$+\frac{(x-1)(x-3)}{(5-1)(5-3)}\cdot 8=x^2-\frac{9}{2}x+\frac{11}{2},$$

тоді $f'(x)\approx 2x-\frac{9}{2}$, $f'(4)\approx 2\cdot 4-\frac{9}{2}=\frac{7}{2}$. ●

7.3. Диференціал довжини дуги

Нехай крива L (рис. 5.52) є графіком функції $y=f(x)$, заданої на деякому відрізку $[a;\ b]$. Визначимо довжину дуги кривої. Візьмемо на кривій L точки M_0, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, M_n і сполучимо їх відрізками. Дістанемо ламану лінію $M_0M_1M_2...M_{n-1}M_n$, яка вписана в дугу L. Позначимо периметр цієї ламаної через P_n.

Якщо існує і не залежить від способу вписування ламаної скінченна границя периметра цієї ламаної, коли найбільший її відрізок прямує до нуля, то крива L називається *спрямною*, а величина цієї границі називається *довжиною дуги* і позначається

$$l=\lim_{\max M_iM_{i+1}\to 0} P_n.$$

Зафіксуємо на кривій (рис. 5.53) точку $M_0(x_0;\ y_0)$, а точку $M(x;\ y)$ вважатимемо змінною. Тоді довжина l дуги $\smile{M_0M}$ залежить від положення точки M і тому є деякою функцією $l(x)$ абсциси цієї точки: $\smile{M_0M}=l(x)$.

Задачу знаходження функції $l(x)$ ми розглянемо у гл. 7, а тут знайдемо похідну $l'(x)$ цієї функції.

Надамо x приросту Δx. Тоді дуга l матиме приріст $\Delta l=\smile{MM_1}$. Позначимо через MM_1 хорду, що стягує цю дугу.

Вважатимемо, що функція $y=f(x)$ та її перша похідна $f'(x)$ неперервні на $[a;\ b]$. Тоді в кожній точці кривої L можна провести дотичну. Такі криві називають *гладкими*. Приймемо без доведення такий геометричний факт: *довжини нескінченно малої гладкої дуги*

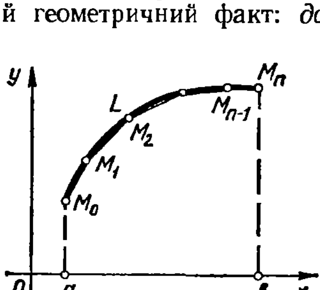


Рис. 5.52

Рис. 5.53

і хорди, що стягує цю дугу, є еквівалентними нескінченно малими величинами [12], тоді

$$l'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\breve{MM_1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{MM_1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Для диференціала дуги маємо

$$dl = l'(x)\, dx = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx, \tag{84}$$

або

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

З останнього виразу випливає геометричний зміст диференціала дуги (рис. 5.54): $dl = MT$, тобто диференціал дуги дорівнює довжині відповідного відрізка дотичної до кривої в початковій її точці.

Зауважимо, що формула (84) справедлива лише тоді, коли $\Delta x > 0$, а якщо $\Delta x < 0$, то $dl = -\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Тому в загальному випадку

$$|dl| = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \tag{85}$$

Якщо крива задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, то $dx = x'(t)\, dt$, $dy = y'(t)\, dt$, тому

$$|dl| = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt. \tag{86}$$

7.4. Кривина плоскої лінії

Однією з особливостей плоскої кривої лінії є її відхилення від прямої, тобто викривлення лінії. Ступінь відхилення кривої від прямої або міру викривлення лінії встановлює її кривина.

Розглянемо довільну гладку криву L. Кут α між дотичними до L в точках A та B називається *кутом суміжності дуги* $\breve{AB}$ (рис. 5.55).

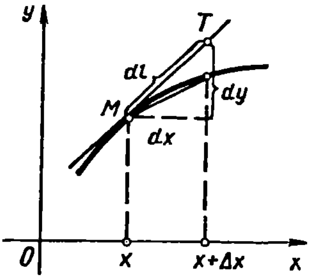


Рис. 5.54

Кут суміжності дає деяке уявлення про викривлення лінії. Наприклад, якщо дуги однакової довжини, то більше викривлена та, у якої кут суміжності більший (рис. 5.56). Але якщо дуги різні, то один і той самий кут суміжності може бути у дуг з різним викривленням (рис. 5.57). Тому для характеристики викривлення лінії кут суміжності дуги розраховують на одиницю її довжини.

Відношення кута суміжності дуги до

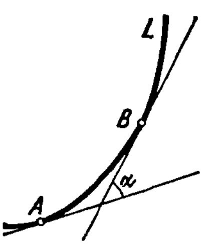


Рис. 5.55

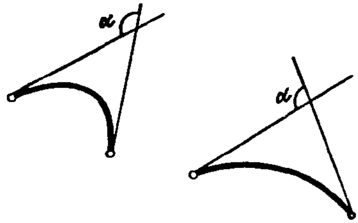


Рис. 5.56

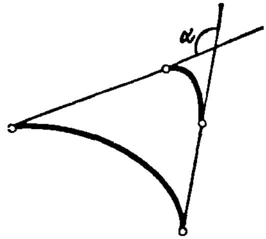


Рис. 5.57

її довжини називається *середньою кривиною* і позначається

$$K_{\text{ср}} = \frac{\alpha}{\breve{AB}}.$$

У цій формулі $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, тому середня кривина завжди невід'ємна.

Кривиною K кривої в точці A називається границя (скінченна чи нескінченна) середньої кривини при прямуванні кінцевої точки B до початкової точки A:

$$K = \lim_{B \to A} K_{\text{ср}} = \lim_{B \to A} \frac{\alpha}{\breve{AB}}.$$

Радіусом R кривини в точці A називається величина, обернена до кривини:

$$R = \frac{1}{K}.$$

Таким чином, $0 \leqslant K \leqslant \infty$.

Точка C, що лежить на нормалі до кривої L в точці A на відстані $CA = R = \frac{1}{K}$ від A в бік вгнутості L, називається *центром кривини кривої* в точці A (рис. 5.58), а коло з радіусом R і центром C називається *колом кривини*.

Геометричне місце γ центрів C кривини плоскої кривої L називається її *еволютою*. Сама крива L відносно своєї еволюти називається *евольвентою* або *розгорткою* (від evolvo — розгортати).

Виведемо формулу для обчислення кривини. Нехай лінія L задана функцією $y = f(x)$, що має неперервну другу похідну.

Проведемо дотичні до кривої в точках $A(x;\ f(x))$ та $B(x + \Delta x;\ f(x + \Delta x))$ і позначимо через α та $\alpha + \Delta\alpha$ кути нахилу цих дотичних до осі Ox (рис. 5.59), а довжину дуги $\breve{AB}$ — через Δl. Тоді за означенням кривина в точці A дорівнює

$$K = \lim_{B \to A} \frac{\Delta\alpha}{\breve{AB}} = \lim_{\Delta l \to 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta l} \right| = \left| \frac{d\alpha}{dl} \right| = \left| \frac{\alpha'_x}{l'_x} \right| = \frac{|\alpha'_x|}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

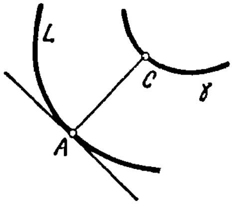


Рис. 5.58

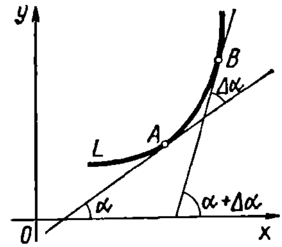


Рис. 5.59

Оскільки $y' = \operatorname{tg}\alpha$, то $\alpha = \operatorname{arctg} y'$, тому $\alpha'_x = \dfrac{y''}{1+(y')^2}$, отже,

$$K = \left| \frac{y''}{1+(y')^2} \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} \right| = \left| \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} \right|. \qquad (87)$$

За формулою (87) кривина лінії в деякій точці визначається як функція абсциси цієї точки. Якщо рівняння лінії задано в параметричній формі:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

то згідно з формулами (87) і (42)

$$K = \left| \frac{y''_{tt} x'_t - y'_t x''_{tt}}{((x'_t)^2 + (y'_t)^2)^{3/2}} \right|. \qquad (88)$$

Приклад

Знайти кривину: а) прямої лінії $y = ax + b$ у будь-якій точці; б) параболи $y = x^2$ у її вершині; в) кола $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ в довільній його точці.

○ а) $y' = a$, $y'' = 0$, тому за формулою (87) $K = 0$.

Таким чином, пряма є лінія нульової кривини. Це цілком узгоджується з нашим безпосереднім уявленням про пряму як невикривлену лінію.

б) $y' = 2x$, $y'' = 2$, $K = \left| \dfrac{2}{(1+4x^2)^{3/2}} \right|$,

зокрема, кривина параболи у її вершині $K = 2$.

в) $x'_t = -R\sin t$, $y'_t = R\cos t$,

$x''_{tt} = -R\cos t$, $y''_{tt} = -R\sin t$,

тому за формулою (88) знаходимо

$$K = \left| \frac{(-R\sin t)(-R\sin t) - R\cos t(-R\cos t)}{[(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2]^{3/2}} \right| = \frac{1}{R}.$$

Такий самий результат дістаємо з означення:

$$K = \lim_{B\to A} \frac{\alpha}{\breve{AB}} = \lim_{B\to A} \frac{\alpha}{R\alpha} = \frac{1}{R}.$$

Отже, кривина кола в довільній його точці є величиною сталою і оберненою до радіуса кола. Це також цілком зрозуміло геометрично (рис. 5.60): із збільшенням

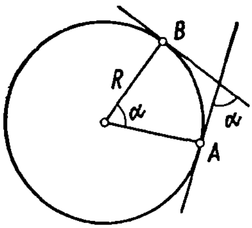


Рис. 5.60

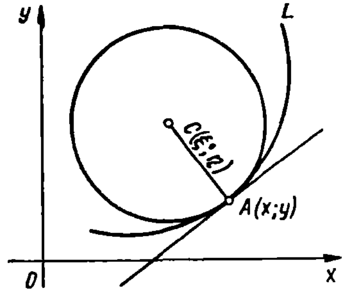


Рис. 5.61

радіуса кола його викривлення зменшується Коли радіус кола стає нескінченно великим, то кривина останнього стає нескінченно малою, тобто коло «перетворюється» на пряму лінію. ●

Наведемо ще деякі факти, пов'язані з кривиною. Координати ξ та η центра кривини $C(\xi;\ \eta)$ кривої $y = f(x)$ в точці $A(x;\ y)$ знаходять за формулами [24]:

$$\xi = x - \frac{y'(1 + (y')^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}. \qquad (89)$$

Практичне значення їх полягає в тому, що вони дають змогу будувати кола кривини для довільної точки $A(x;\ y)$ заданої кривої.

Поблизу точки A дана лінія L прилягає до свого кола кривини щільніше, ніж до дотичної (рис 5.61). Зокрема, малу дугу кривої, що містить точку A, можна замінити дугою кола кривини в цій точці з меншою помилкою, ніж при заміні її відрізком дотичної (п. 7.3).

Знаючи рівняння $y = f(x)$ кривої L, за формулами (89) можна знайти координати центра кривини залежно від абсциси x, тобто можна дістати параметричні рівняння еволюти $\gamma : \xi = \xi(x),\ \eta = \eta(x)$.

Приклад

Знайти рівняння еволюти параболи $y = \frac{x^2}{2}$.

○ Підставляючи значення похідних $y' = x$, $y'' = 1$ заданої функції у формули (89), дістанемо параметричні рівняння еволюти

$$\xi = -x^3, \quad \eta = \frac{3}{2}x^2 + 1.$$

Виключивши з цих рівнянь параметр x, дістанемо

$$\xi^2 = \frac{8}{27}(\eta - 1)^3.$$

Отже, еволютою параболи $y = \frac{x^2}{2}$ є напівкубічна парабола (рис. 5.62). ●

Сформулюємо *основні властивості еволюти та евольвенти* [24].

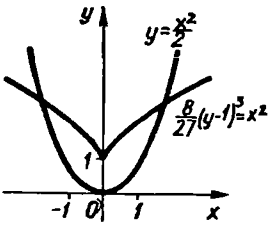


Рис. 5.62

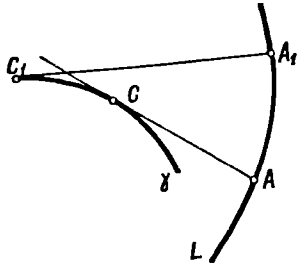


Рис. 5.63

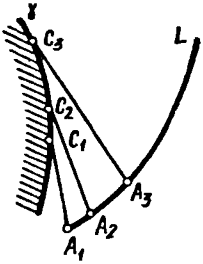


Рис. 5.64

1°. *Якщо* A *— довільна точка евольвенти* L, *а* C *— відповідна точки еволюти* γ, *то пряма* AC *— є нормаллю до евольвенти* L *в точці* A *і дотичною до еволюти* γ *в точці* C (рис. 5.63).

2°. *Якщо точка* A *рухається по евольвенті, то зміна радіуса кривини дорівнює довжині дуги еволюти між відповідними центрами кривини* (рис. 5.63):

$$A_1C_1 - AC = \overset{\frown}{CC_1}.$$

З цих властивостей випливає, що евольвента утворюється внаслідок розгортання (змотування) натягнутої нитки з контура (звідси термін «розгортка»), що має форму еволюти (рис. 5.64). Ця операція розгортання нитки рівнозначна коченню без ковзання прямої лінії по даній еволюті γ; кожна точка такої прямої опише певну евольвенту.

Звідси зрозуміло, що задана еволюта γ має безліч евольвент L. У той самий час кожна задана лінія L, що розглядається як евольвента, має лише одну еволюту γ. Особливо важливе значення мають евольвенти для теорії механізмів. Зокрема, профілі переважної більшості зубців у зубчастих колесах окреслені з боків дугами евольвенти кола, а евольвентне зачеплення зубчастих коліс є одним з найпоширеніших і найнадійніших.

7.5. Вектор-функція скалярного аргументу. Дотична пряма і нормальна площина до кривої в просторі. Застосування у механіці

Відомо, що лінія в просторі може бути задана параметричними рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [t_1;\ t_2]. \tag{90}$$

Кожному значенню параметра $t_0 \in [t_1;\ t_2]$ відповідає певна точка $M\ (x\ (t_0);\ y\ (t_0);\ z\ (t_0))$ простору. При зміні параметра t точка M описує в просторі деяку лінію L. Параметр t часто зручно тлумачити як час.

Приклади

1. Рівняння $x = x_0 + mt$, $y = y_0 + nt$, $z = z_0 + pt$ — параметричні рівняння прямої в просторі.

2. Якщо точка M рівномірно рухається по твірній кругового циліндра із швидкістю v, а сам циліндр рівномірно обертається навколо своєї осі із швидкістю ω, то внаслідок накладання цих рухів точка M описує криву, яка називається гвинтовою лінією (гл. 4).

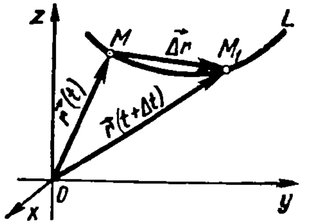


Рис. 5.65

Нехай задана крива (90). Кожній точці M (x; y; z) цієї кривої відповідає її радіус-вектор $\vec{r} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Отже, кожному значенню $t \in [t_1; t_2]$ відповідає (рис. 5.65) вектор

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \qquad (91)$$

Цей вектор називається *вектор-функцією скалярного аргументу*, а рівняння (91) — *векторним рівнянням кривої у просторі*. Лінія L, яку описує кінець вектора $\vec{r}(t)$, називається *годографом вектор-функції* $\vec{r}(t)$.

Якщо радіус-вектор рухомої точки є функція часу, то годографом цієї функції є траєкторія руху. Рівняння (91) тоді називають *рівнянням руху точки*.

Оскільки задання вектор-функції (91) рівнозначне заданню трьох скалярних функцій (90), то багато відомих нам понять для скалярних функцій можна перенести і на вектор-функції. Зупинимось на деяких із цих понять.

Вектор $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ називається *границею вектор-функції* $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ при $t \to t_0$, якщо

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t\to t_0} y(t) = y_0, \quad \lim_{t\to t_0} z(t) = z_0.$$

При цьому записують

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0.$$

Вектор-функція $\vec{r}(t)$ неперервна в точці t_0, якщо вона визначена в деякому околі цієї точки і $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Нехай L — годограф (рис. 5.65) вектор-функції $\vec{r}(t)$. Двом значенням t і $t + \Delta t$ аргументу відповідають два значення $\vec{r}(t)$ і $\vec{r}(t + \Delta t)$ вектор-функції і відповідні їм радіус-вектори $\vec{OM}$ та $\vec{OM_1}$. Вектор $\vec{\Delta r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ називається приростом вектор-функції $\vec{r}(t)$ в точці t.

Похідна $\vec{r}'(t)$ *вектор-функції* в точці t визначається рівністю

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Виразимо цю похідну через її проекції:

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)\vec{i} + y(t+\Delta t)\vec{j} + z(t+\Delta t)\vec{k} - x(t)\vec{i} - y(t)\vec{j} - z(t)\vec{k}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\vec{j} +$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}\vec{k} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Отже, похідну вектор-фукції (91) знаходять за формулою

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}. \tag{92}$$

Основні властивості похідної (гл. 4, § 2) переносяться на вектор-функції. Але зауважимо, що, диференціюючи векторний добуток $\vec{r}_1 \times \times \vec{r}_2$, треба слідкувати за порядком множників (гл. 2, п. 5.1): $(\vec{r}_1 \times \times \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2'$. Крім того, властивості, зв'язані з нерівностями, на вектор-функції не поширюються, оскільки вектори не можна сполучати знаками нерівності.

З'ясуємо напрям вектора (92). Вектор $\Delta \vec{r}$ напрямлено по січній MM_1 (рис. 5.65). Вектор $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ коленіарний вектору $\Delta \vec{r}$ і так само напрямлений по січній MM_1. Оскільки при $\Delta t \to 0$ січна, повертаючись навколо точки M, переходить у дотичну, то вектор $\vec{r}'(t)$ напрямлений по дотичній до кривої L в точці M.

Користуючись цим, напишемо рівняння дотичної до кривої, заданої рівняннями (90) у точці M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, яка відповідає параметру $t = t_0$:

$$x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0), \quad z_0 = z(t_0).$$

Канонічне рівняння цієї дотичної запишеться у вигляді (гл. 3, п. 5.1)

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Оскільки напрямний вектор $\vec{s} = (m;\ n;\ p)$ дотичної колінеарний вектору $\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$, то проекції векторів $\vec{s}$ і $\vec{r}'(t_0)$ пропорційні:

$$m = \lambda x'(t_0), \quad n = \lambda y'(t_0), \quad p = \lambda z'(t_0),$$

де λ — коефіцієнт пропорційності. Тоді рівняння дотичної до просторової кривої (90) матимуть вигляд

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}. \tag{93}$$

Як і у випадку плоскої кривої, пряма, що перпендикулярна до дотичної і проходить через точку дотику, називається нормаллю до просторової кривої в даній точці. Але на відміну від плоскої, до просторової кривої можна провести безліч нормалей. Всі ці нормалі лежать в одній площині, яка перпендикулярна до дотичної прямої. Цю площину називають *нормальною площиною*. Використовуючи перпендикулярність нормальної площини і дотичної, дістаємо (гл. 3, п. 4.1) *рівняння нормальної площини*

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0. \tag{94}$$

Якщо під t розуміти час, то $\vec{r}'(t)$ означає миттєву швидкість $\vec{v}$ точки в момент часу t і ця швидкість напрямлена по дотичній до траєкторії руху в бік зростання часу t. Вважаючи $\vec{v}$ функцією від t: $\vec{v} = \vec{v}(t)$, дістанемо $\vec{v}'(t) = \vec{\omega}(t)$ — прискорення руху. Але $\vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$, тому $\vec{\omega}(t) = \vec{r}''(t) = \vec{v}'(t)$.

Приклад

Знайти рівняння дотичної прямої і нормальної площини до гвинтової лінії $x = \sqrt{2}\cos t,\ y = \sqrt{2}\sin t,\ z = \frac{8t}{\pi}$ у точці M_0, яка відповідає параметру $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

○ Знаходимо координати точки $M_0(x_0;\ y_0;\ y_0)$:

$$x_0 = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 1,\ y_0 = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 1,\ z_0 = \frac{8}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = 2,$$

а також значення похідних при $t = \frac{\pi}{4}$:

$$x'(t) = -\sqrt{2}\sin t,\ x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1;$$

$$y'(t) = \sqrt{2}\cos t,\quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$$

$$z'(t) = \frac{8}{\pi};\quad z'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{8}{\pi}.$$

За формулою (93) дістаємо рівняння дотичної прямої

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{8/\pi},$$

а за формулою (94) — рівняння нормальної площини:

$$-1\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)+\frac{8}{\pi}(z-2)=0,$$

або

$$\pi x-\pi y-8z+16=0. \bullet$$

Розглянемо тепер диференціал і кривину просторової кривої. Оскільки для достатньо малого значення Δt довжина вектора $\Delta\vec{r}$ мало відрізняється від довжини Δl дуги $\breve{MM_1}$, тобто

$$\lim_{\Delta l\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta l}\right|=\left|\frac{d\vec{r}}{dl}\right|=1, \quad \text{то } |d\vec{r}|=|dl|.$$

Звідси випливає формула для диференціала дуги кривої в просторі

$$|dl|=|d\vec{r}|=|d(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})|=$$

$$=|dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}|=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Отже,

$$|dl|=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}. \tag{95}$$

Для кривої (90) маємо

$$|dl|=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt. \tag{96}$$

Формули (95) і (96) аналогічні формулам (85) і (86). Кривину кривої, заданої векторним рівнянням (91), знаходять за формулою

$$K=\frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}. \tag{97}$$

Приклад

Обчислити кривину гвинтової лінії

$$\vec{r}(t)=(a\cos t)\vec{i}+(a\sin t)\vec{j}+(bt)\vec{k}$$

у довільній точці.

○ Знаходимо похідні

$$\vec{r}'(t)=-(a\sin t)\vec{i}+(a\cos t)\vec{j}+b\vec{k};$$

$$\vec{r}''(t)=-(a\cos t)\vec{i}-(a\sin t)\vec{j}.$$

Обчислюємо модулі векторного добутку $\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)$ та вектора $\vec{r}'(t)$:

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = (ab\sin t)\vec{i} - (ab\cos t)\vec{j} + a^2\vec{k};$$

$$|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = \sqrt{(ab\sin t)^2 + (ab\cos t)^2 + a^4} = a\sqrt{a^2 + b^2};$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

За формулою (97) маємо

$$K = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(\sqrt{a^2+b^2})^3} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Таким чином, гвинтова лінія має сталу кривину. ●

Розглянемо деякі застосування вектор-функції та її похідних у механіці.

Якщо закон руху матеріальної точки задано функцією $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то швидкість руху точки $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$, а її прискорення $\vec{\omega}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$, де t — час.

Якщо за параметр t взяти довжину l дуги кривої L (рис. 5.65), тобто покласти у формулі (92) $t = l$, то похідна $\vec{\tau} = \vec{\tau}(l) = \vec{r}'(l)$ напрямлена по дотичній до L і, як зазначалося, $|\vec{\tau}| = 1$. Тоді $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1$, $(\vec{\tau} \cdot \vec{\tau})' = 2\vec{\tau}' \cdot \vec{\tau} = 0$, звідки випливає, що вектор $\vec{n} = \vec{\tau}'$ перпендикулярний до вектора $\vec{\tau}$.

Використовуючи вектори $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{r}}{dl}$ і $\vec{n} = \dfrac{d\vec{\tau}}{dl}$, знайдемо з рівняння (92) прискорення точки:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = v\vec{\tau}, \text{ де } v = |\vec{v}(t)| = |\vec{r}'(t)| = \frac{dl}{dt};$$

$$\vec{\omega} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dl}\frac{dl}{dt} =$$

$$= \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v^2\frac{d\vec{\tau}}{dl} = \omega\vec{\tau} + v^2\vec{n}, \text{ де } \omega = |\vec{\omega}(t)| = \frac{dv}{dt}.$$

Отже, $\vec{\omega} = \omega\vec{\tau} + v^2\vec{n}$.

Це широко відома в механіці формула, яка дає розклад вектора прискорення на тангенціальну (тобто напрямлену по дотичній) і нормальну (тобто перпендикулярну до дотичної) складові.

Завдання для самоконтролю

1. Що називається проміжком ізоляції кореня? Як його знайти?
2. Які умови того, що інтервал $(a; b)$ є проміжком ізоляції?

3. Охарактеризуйте основні методи наближеного розв'язування рівнянь: метод проб, хорд, дотичних, комбінований метод.

4. У чому суть задачі інтерполяції?

5. Записати інтерполяційні многочлени Лагранжа при n, що дорівнює 1, 2, 3.

6. Як визначається довжина дуги?

7. Вивести формулу для диференціала довжини дуги. Який його геометричний зміст.

8. Що називається кривиною лінії? Радіусом кривини? Центром кривини? Колом кривини? Еволютою? Евольвентою?

9. Вивести формулу для обчислення кривини лінії $y = f(x)$.

10. Як знайти центр кривини?

11. Що називається вектор-функцією та її годографом?

12. У чому полягає механічний зміст вектор-функції?

13. Як знайти вектор-функції?

14. Вивести рівняння дотичної прямої і нормальної площини до просторової кривої.

15. Як знайти диференціал просторової кривої? Навести приклад.

16. Як знайти кривину просторової кривої?

17. Обчислити з точністю до 0,001 корінь рівняння $\sin x + x - 1 = 0$.

18. Відомі значення функції $y(x)$: $y_1 = 4$ при $x_1 = 0$; $y_2 = 6$ при $x_2 = 1$; $y_3 = 10$ при $x_3 = 2$. Написати многочлен Лагранжа для цієї функції.

19. Знайти кривину кривої $y = x^3 + x^2 + 5$ у точці A (0; —5).

20. Знайти радіус кривини кривої $y = \operatorname{ch} x$ у довільній точці.

21. Знайти центр кривини кривої $x = t^2$, $y = 2t^3$ у точці A (1; —2).

22. Знайти рівняння еволюти еліпса

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

23. Знайти рівняння дотичної до кривої $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ у точці (3; 9; 27).

24. Знайти кривину кривої $\vec{r}(t) = e^t\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + 4t\vec{k}$ при $t = 0$.

Відповіді. 17. $0{,}5110 < x_0 < 0{,}5111$; 18. $y = x^2 + x + 4$; 19. 2; 20. $\operatorname{ch}^2 x$; 21. $(-3;\ -10/3)$; 22. $x = \dfrac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t$, $y = -\dfrac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t$; 23. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-9}{6} = \dfrac{z-27}{27}$; 24. 1.

Глава 6

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

§ 1. ФУНКЦІЯ, ЇЇ ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ

1.1. Функція багатьох змінних. Означення та символіка

Нехай задано множину D упорядкованих пар чисел (x, y). Якщо кожній парі чисел $(x, y) \in D$ за певним законом відповідає число z, то кажуть, що на множині D визначено функцію z від двох змінних x і y і записують $z = f(x, y)$.

Наведемо такі приклади: а) площу S прямокутника із сторонами a та b знаходять за формулою $S = ab$. Кожній парі значень a і b

відповідає єдине значення площі, тобто S — функція двох змінних: $S = f(a, b)$;

б) за законом Ома електрорушійна сила E, сила струму I та опір R замкнутого електричного кола пов'язані співвідношенням $E = IR$. Тут E є функцією змінних I та R: $E = f(I, R)$.

Змінну z називають залежною змінною (функцією), а змінні x та y — незалежними змінними (аргументами).

Множину пар (x, y) значень x та y, для яких функція $z = f(x, y)$ визначена, називають *областю визначення цієї функції* і позначають $D(f)$ або D.

Множину значень z позначають $E(f)$ або E.

Оскільки кожній упорядкованій парі чисел (x, y) відповідає в прямокутній системі координат Oxy єдина точка $M(x; y)$ площини, що те саме, точка двомірного простору R_2, і, навпаки, кожній точці $M(x; y)$ площини відповідає єдина упорядкована пара чисел (x, y), то функцію $z = f(x, y)$, де $(x, y) \in D$, можна розглядати як функцію точки M і замість $z = f(x, y)$ писати $z = f(M)$. Областю визначення $D \subset R_2$ функції у цьому випадку є деяка множина точок площини Oxy. Зокрема, областю визначення функції може бути вся площина, або частина площини, обмежена певними лініями.

Значення функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ позначають $z_0 = f(x_0, y_0)$ або $z_0 = f(M_0)$, або $z = z|_{M_0}$.

Лінію, що обмежує область D, називають *межею області визначення*. Точки області, які не лежать на її межі, називаються внутрішніми. Область, яка містить одні внутрішні точки, називається *відкритою*. Якщо ж до області визначення належать і всі точки межі, то така область називається *замкненою*.

Функція двох змінних, як і функція однієї змінної, може бути задана різними способами. Ми користуватимемося, як правило, аналітичним способом, коли функція задається за допомогою формули. Областю визначення такої функції вважається множина всіх тих точок площини, для яких задана формула має зміст.

Приклад

Знайти область визначення D та множину E значень функцій:

а) $z = x^2 + y^2$; б) $z = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$; в) $z = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - x}}$.

○ а) Вираз $x^2 + y^2$ існує і невід'ємний для будь-яких значень x та y. Тому областю визначення D функції $z = x^2 + y^2$ є вся площина Oxy, а множиною значень — проміжок $E = [0; +\infty)$.

б) Область D даної функції — множина тих точок $(x; y)$, для яких вираз $\sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$ має зміст, тобто множина точок, для яких $4 - x^2 - 4y^2 \geqslant 0$.

Щоб зобразити область D геометрично, знайдемо її межу $4 - x^2 - 4y^2 = 0$, або $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$. Це рівняння визначає в площині Oxy еліпс з півосями $a = 2$ та $b = 1$. Даний еліпс ділить всю площину на дві частини. Для точок однієї з цих частин $4 - x^2 - 4y^2 > 0$, а для другої $4 - x^2 - 4y^2 < 0$.

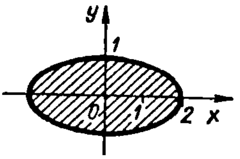


Рис. 6.1

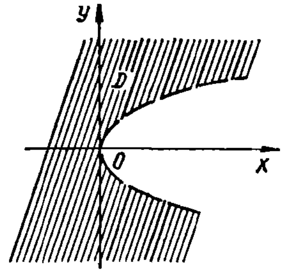


Рис. 6.2

Щоб виявити, яка з частин є областю визначення даної функції, тобто задовольняє умову $4 - x^2 - 4y^2 \geqslant 0$, достатньо перевірити цю умову для якої-небудь однієї точки, яка не лежить на еліпсі. Наприклад, точка $O\,(0;\ 0)$ належить області D, тому що $4 - 0^2 - 4 \cdot 0^2 = 4 > 0$.

Отже, внутрішніми точками області D даної функції є точки, обмежені еліпсом. Сам еліпс також належить області, тому що для точок еліпса $4 - x^2 - 4y^2 = 0$. Це замкнена область (рис. 6.1). Множина значень заданої функції — відрізок $E = [0;\ 2]$.

в) Область визначення D цієї функції визначається з нерівності $y^2 - x > 0$. Межа області (парабола $y^2 = x$) не належить їй, тобто це відкрита область (рис. 6.2). Множина значень заданої функції — інтервал $E = (0;\ +\infty)$.

Функцію двох змінних можна зобразити графічно у вигляді деякої поверхні. Дійсно, нехай функція $z = f\,(x,\ y)$ визначена в області D. Кожній точці $(x;\ y) \in D$ відповідає певне значення функції $z = f\,(x,\ y)$.

Графіком функції $z = f\,(x,\ y)$ в прямокутній системі $Oxyz$ називають геометричне місце точок $M\,(x;\ y;\ f\,(x,\ y))$, проекції яких $(x;\ y)$ належать області D. Це геометричне місце точок утворює в тривимірному просторі R_3 певну поверхню (рис. 6.3), проекцією якої на площину Oxy є множина D.

В аналітичній геометрії уже розглядались поверхні, які є графіками функцій двох змінних. Нагадаємо деякі з них.

Верхня частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ є графіком функції $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, а нижня її частина — графіком функції $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ (рис. 3.65).

Еліптичний параболоїд є графіком функції $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (рис. 3.70).

Гіперболічний параболоїд є графіком функції $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ (рис. 3.71).

Побудова графіків функцій двох змінних часто пов'язана із значними труднощами. Тому для зображення функцій двох змінних користуються методом перерізів (гл. 3, § 7), який полягає у тому, що поверхню $z = f\,(x,\ y)$ перетинають площинами $x = x_0$ та $y = y_0$ і за графіками кривих $z = f\,(x_0,\ y)$ та $z = f\,(y_0,\ x)$ визначають графік функції $z = f\,(x,\ y)$ (рис. 6.4).

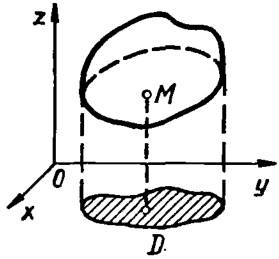


Рис. 6.3

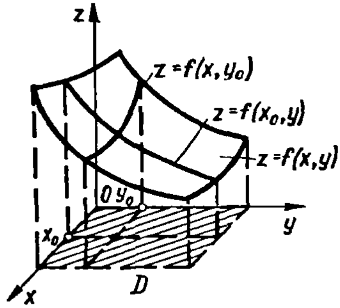


Рис. 6.4

Можна фіксувати не x чи y, а саму функцію z, тобто перетинати дану поверхню площинами $z = c$, де c — довільне число, взяте з множини $E(f)$ значень даної функції. При цьому одержимо криву $f(x, y) = c$, яку називають *лінією рівня (або ізокривою) функції*. (Термін «лінія рівня» запозичений з картографії. Там лінії рівня — це лінії, на яких висота точок земної поверхні над рівнем моря стала.) Інакше кажучи, лінія рівня на площині Oxy — це проекція кривої, яка утворюється при перетині поверхні $z = f(x, y)$ площиною $z = c$. Будуючи лінії рівня для різних значень c, можна дістати певне уявлення про графік функції двох змінних (рис. 6.5.).

Приклад
Знайти лінії рівня і побудувати графік функції

$$z = \frac{1}{x^2 + 2y^2}.$$

○ Лінії рівня $z = c$ знайдемо з рівняння $\frac{1}{x^2 + 2y^2} = c$, де $c > 0$. Маємо

$$x^2 + 2y^2 = \frac{1}{c}, \quad \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{2c}}\right)^2} = 1,$$

тобто лініями рівня даної функції є еліпси з півосями $a = \sqrt{\frac{1}{c}}$ та $b = \sqrt{\frac{1}{2c}}$ (рис. 6.6).

Ми розглянули поняття функції двох змінних. Узагальнимо його на випадок трьох і більшого числа незалежних змінних.

Нехай D — деяка множина упорядкованих трійок (x, y, z) дійсних чисел, тобто точок $M(x; y; z)$ тривимірного простору R_3.

Якщо кожній точці $(x; y; z) \in D$ за певним законом відповідає єдине число u, то кажуть, що на множині D визначено функцію u від трьох змінних x, y і z, і записують $u = f(x, y, z)$ або $u = f(M)$.

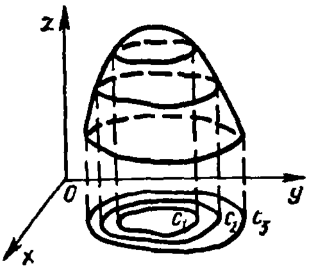


Рис. 6.5

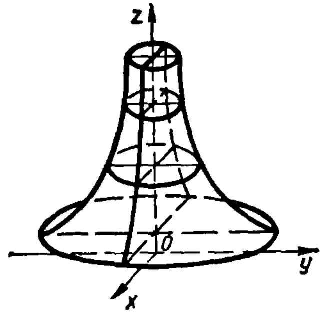


Рис. 6.6

При цьому змінна u називається залежною змінною (функцією), x, y, z — незалежними змінними (аргументами), множина $D \subset \subset R_3$ — областю визначення функції.

Область визначення функції трьох змінних можна геометрично зобразити у вигляді деякої частини тривимірного простору. Але саму функцію $u = f(x, y, z)$ геометрично зобразити вже не можна, тому що наш простір тривимірний і четверту координатну вісь для значень u зобразити неможливо.

Поверхнею рівня функції $u = f(x, y, z)$ називають множину всіх точок $(x; y; z) \in D(f)$, для яких задана функція набуває одне й те саме значення $c \in E(f)$:

$$f(x, y, z) = c \qquad (\textit{ізоповерхні}).$$

Приклади

1. Областю визначення функції

$$u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$$

є куля одиничного радіуса з центром у початку координат. Це замкнена област тому що їй належать точки сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ — межі області.

2. Поверхні рівня функції $u = \dfrac{z^2}{x^2 + y^2}$ визначаються рівнянням $x^2 + y^2 - - \dfrac{z^2}{c} = 0$, де $c > 0$.

Це сім'я конусів з вершиною в точці O (0; 0; 0).

Лінії і поверхні рівня часто зустрічаються на практиці. Наприк лад, сполучивши на карті поверхні Землі точки з однаковою середньо добовою температурою або з однаковим середньодобовим тиском дістанемо відповідно ізотерми та ізобари, які є важливими даними дл прогнозу погоди.

Якщо число n незалежних змінних більше трьох, то їх частіш позначають однією буквою, але з різними індексами: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Функцію u від цих незалежних змінних можна визначити так. Неха задано множину D упорядкованих систем $(x_1, x_2, ...; x_n)$ з n чисел ($n \in N$), або, що те саме, множину точок $M(x_1; x_2; ...; x_n)$ n-вимірного простору R_n.

Якщо кожній точці $(x_1; x_2; ...; x_n) \in D$ за певним законом відповідає єдине число u, то кажуть, що на множині D визначено функцію u від n змінних: $x_1, x_2, ..., x_n$ і записують

$$u = f(x_1, x_2, ..., x_n), \text{ або } u = f(M), \ M \in R_n.$$

Область визначення D цієї функції у випадку $n \geqslant 4$ геометрично зобразити не можна.

Надалі розглядатимемо лише функції двох змінних, тому що результати для функцій двох змінних легко по аналогії узагальнити на випадок більшого числа змінних. Крім того, для функції двох змінних можна дати геометричні ілюстрації.

1.2. Границя функції багатьох змінних

Введемо поняття δ-околу заданої точки $M_0(x_0; y_0)$ і поняття збіжної послідовності точок площини.

Множина всіх точок $M(x; y)$, координати яких задовольняють нерівність $\rho(M; M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, де $\rho(M; M_0)$ — відстань від точки M до M_0, називається δ-околом точки $M_0(x_0; y_0)$.

Іншими словами, *δ-окіл точки M_0* — це всі внутрішні точки круга з центром M_0 радіуса δ (рис. 6.7).

Розглянемо послідовність точок $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, ..., $M_n(x_n; y_n)$, яку позначимо символом $\{M_n\}$. Послідовність точок $\{M_n\}$ називається *збіжною до точки M_0*, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що при $n > N$ виконується нерівність $\rho(M; M_0) < \varepsilon$. При цьому точку M_0 називають границею послідовності $\{M_n\}$ і записують так:

$$\lim_{n \to \infty} M_n = M_0 \text{ або } M_n \to M_0 \text{ при } n \to \infty.$$

Якщо $M_n(x_n; y_n) \to M_0(x_0; y_0)$ при $n \to \infty$, то, очевидно, $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$.

Тепер розглянемо границю функції двох змінних. Її означення аналогічне означенню границі функції однієї змінної (п. 3.4, гл. 4). Нехай функція $z = f(x, y)$ задана в деякій області D і точка $M_0(x_0; y_0) \in D$ або $M_0(x_0; y_0) \notin D$, але має таку властивість, що в довільному δ-околі цієї точки міститься хоча б одна точка множини D, відмінна від M_0. Число A називається *границею функції $z = f(M)$ в точці M_0*, якщо для довільної, збіжної до M_0 послідовності точок $M_1, M_2, ..., M_n, ...$ $(M_n \in D, \ M_n \neq M_0)$, відповідна послідовність значень функції

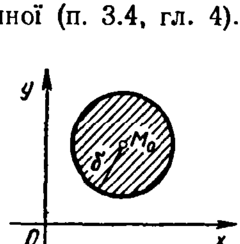


Рис. 6.7

$f(M_1)$, $f(M_2)$, ..., $f(M_n)$, ... збігається до числа A. При цьому пишуть: $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = A$ або $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A$.

Наведене означення границі функції називають *означенням за Гейне або означенням «на мові послідовностей»*.

Дамо еквівалентне означення границі функції за Коші або означення «на мові $\varepsilon - \delta$». Число A називається *границею функції* $z = f(M)$ *в точці* M_0, якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$ таке, що для всіх точок $M(x; y) \in D$, які задовольняють умову $0 < \rho(M; M_0) < \delta$, виконується нерівність $|f(M) - A| < \varepsilon$.

Користуючись означенням границі функції двох змінних, можна перенести основні теореми про границі для функції однієї змінної (гл. 4, п. 3.7) на функції двох змінних. Наприклад, правильне таке твердження.

Теорема. *Нехай функції $f(M)$ і $g(M)$ визначені на одній і тій самій множині D і мають в точці M_0 границі B і C. Тоді функції $f(M) \pm g(M)$, $f(M)\, g(M)$, $\frac{f(M)}{g(M)}$, $g(M) \neq 0$, мають в точці M_0 границі, які відповідно дорівнюють $B \pm C$, $B \cdot C$, $\frac{B}{C}$, $C \neq 0$.*

Функція $z = f(M)$ називається *нескінченно малою в точці* M_0 (або при $M \to M_0$), якщо $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = 0$. Якщо функція $z = f(M)$ має в точці M границю, яка дорівнює A, то функція $\alpha(M) = f(M) - A$ є нескінченно малою в точці M_0, тому що $\lim\limits_{M\to M_0} \alpha(M) = \lim\limits_{M\to M_0} (f(M) - A) = 0$. Звідси випливає, що функція $f(M)$ в околі точки M_0 відрізняється від границі A на нескінченно малу функцію.

Приклад

Знайти границі:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;

○ а) Якщо $M(x; y) \to M_0(0; 0)$, то $\rho(M; M_0) = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$, тому

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 (\sqrt{\rho^2 + 1} + 1)}{(\sqrt{\rho^2 + 1} - 1)(\sqrt{\rho^2 + 1} + 1)} = 2.$$

б) Нехай $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Візьмемо дві послідовності точок: $\{M_n\} = \left\{\left(0; \frac{1}{n}\right)\right\} \to 0$ і $\{P_n\} = \left\{\left(\frac{1}{n}; 0\right)\right\} \to 0$ при $n \to \infty$, тоді

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{0 - \frac{1}{n^2}}{0 + \frac{1}{n^2}} = -1; \qquad \lim_{n\to\infty} f(P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2} - 0}{\frac{1}{n^2} + 0} = 1.$$

Таким чином, двом різним, збіжним до точки (0; 0), послідовностям точок відповідають дві послідовності значень функції, які мають різні границі. Отже, дана функція в точці (0; 0) границі не має. ●

Означення границі функції n змінних при $n > 2$ аналогічне означенням границі при $n = 2$, якщо в n-вимірному просторі ввести таке поняття δ-околу: *δ-околом точки* M_0 $(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$ називається множина всіх точок M $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, координати яких задовольняють нерівності

$$\rho(M; M_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \cdots + (x_n - x_n^0)^2} < \delta.$$

Зокрема, в тривимірному просторі R_3 δ-околом точки M_0 $(x_0; y_0; z_0)$ є множина всіх внутрішніх точок M $(x; y; z)$ кулі з центром у точці M_0 радіуса δ.

1.3. Неперервність функції багатьох змінних

Поняття неперервної функції багатьох змінних вводиться за допомогою поняття границі.

Нехай функція $z = f(M)$ визначена на множині D, точка $M_0 \in D$ і довільний δ-окіл точки M_0 містить точки множини D.

Функція $z = f(M)$ називається *неперервною в точці* M_0, якщо

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0). \tag{1}$$

У випадку функції двох змінних рівність (1) означає, що коли точка M $(x; y)$, залишаючись в області визначення D функції $z = f(x, y)$, наближається до точки M_0 $(x_0; y_0)$, то відповідна апліката $f(M)$ поверхні, яка є графіком заданої функції, прямує до аплікати $f(M_0)$ (рис. 6.8).

Точки, в яких функція неперервна, називаються *точками неперервності*, а точки, в яких неперервність порушується — *точками розриву* цієї функції.

Наприклад, функція

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x - y}{x + y}, & x + y \neq 0; \\ 1, & x + y = 0 \end{cases}$$

розривна в точці (0; 0), оскільки $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ не існує; функція

$$f(x, y) = \begin{cases} x + 2y, & x \in R \setminus \{1\},\ y \in R \setminus \{2\}; \\ 1, & x = 1, \quad y = 2 \end{cases}$$

розривна в точці (1; 2), оскільки $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} f(x, y) = 5$, а $f(1, 2) = 1$.

Умові (1) неперервності можна надати іншого вигляду. Позначимо $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$. Величини Δx,

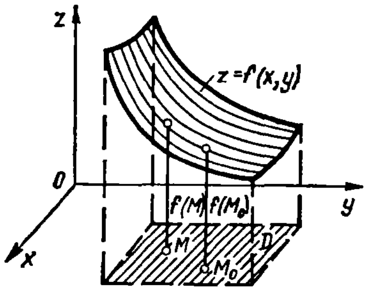


Рис. 6.8

Δy називають *приростами аргументів* x і y, а Δz — *повним приростом функції* $f(x, y)$ в точці $(x_0; y_0)$. З рівності (1) дістаємо:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} (f(x, y) - f(x_0, y_0)) = 0$$

або

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0. \qquad (2)$$

Рівність (2) дає ще одне означення неперервності.

Функція $f(x, y)$ називається *неперервною в точці* $M_0(x_0; y_0)$, якщо повний приріст її в цій точці прямує до нуля, коли прирости її аргументів x та y прямують до нуля.

Функція $f(x, y)$ називається *неперервною на множині* D, якщо вона неперервна в кожній точці $(x; y)$ цієї множини.

Наприклад, функція $z = x^2 + y^2$ неперервна на всій площині Oxy, оскільки повний приріст цієї функції в довільній точці $(x_0; y_0)$ має вигляд

$$\Delta z = (x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 - (x_0^2 + y_0^2) =$$
$$= 2x_0\Delta x + 2y_0\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2$$

і

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Використовуючи поняття неперервності функції кількох змінних і відповідні теореми про границі, можна довести, що арифметичні операції над неперервними функціями і побудова складеної функції з неперервних функцій приводять до неперервних функцій. (Подібна теорема для функції однієї змінної наведена у п. 5.2, гл. 4).

Наведемо *основні властивості функції* $z = f(x, y)$, *неперервної в замкненій і обмеженій області*. Ці властивості аналогічні властивостям неперервної на відрізку функції однієї змінної (гл. 4, п. 5.3). Попередньо уточнимо ряд понять для множин точок площини, про які говорилось в п. 1.1.

Множина D точок площини називається *зв'язною*, якщо будь-які її дві точки можна сполучити неперервною лінією, яка цілком належить множині D. Наприклад, круг — зв'язна множина, а множина, що складається з двох кругів, які не мають спільних точок, не є зв'язною.

Точка M називається *внутрішньою точкою множини* D, якщо існує δ-окіл цієї точки, який цілком міститься у множині D.

Множину D називають *відкритою*, якщо кожна її точка внутрішня.

Областю (або *відкритою областю*) називають зв'язну відкриту множину точок.

Точку M називають *межовою точкою множини* D, якщо будь-який її окіл містить як точки, що належать D, так і точки, що не належать множині D. Множину всіх межових точок області називають *межею області*.

Область разом з її межею називається *замкненою*. Якщо існує круг скінченного радіуса, який цілком містить область, то вона називається *обмеженою*.

Замкнена область, в якій визначена функція двох змінних, є аналогом відрізка для функції однієї змінної.

Тепер сформулюємо *властивості неперервних функцій двох змінних в замкненій обмеженій області*.

1^0. *Якщо функція $z = f(M)$ неперервна в замкненій обмеженій області, то вона обмежена в цій області, тобто існує таке число $c > 0$, що для всіх точок області виконується нерівність $|f(M)| < c$.*

2^0. *Якщо функція $z = f(M)$ неперервна в замкненій обмеженій області, то в цій області існують точки, в яких функція набуває найбільшого і найменшого значень.*

3^0. *Якщо функція $z = f(M)$ неперервна в замкненій обмеженій області D і $f(M_1) < c < f(M_2)$, де M_1, $M_2 \in D$, то існує точка $M_0(x_0; y_0)$, в якій $f(M_0) = c$. Зокрема, якщо $f(M_1) < 0$, а $f(M_2) > 0$, то в області D існує точка M_0, в якій $f(M_0) = 0$.*

Завдання для самоконтролю

1. Що називається функцією двох змінних?
2. Що називається областю визначення функції і який її геометричний зміст?
3. Що являє собою графік функції $z = f(x, y)$? У чому полягає метод перерізів?
4. Що називається лінією рівня функції $z = f(x, y)$? Навести приклад.
5. Дати означення функції трьох змінних, n змінних.
6. Що називається границею функції $z = f(M)$ при $M \to M_0$?
7. Що називається поверхнями рівня функції $u = f(x, y, z)$?
8. Дати означення неперервної функції двох змінних в точці і на множині точок.
9. Що називається замкненою обмеженою областю?
10. Сформулювати властивості функції $z = f(x, y)$, неперервної в замкненій обмеженій області.
11. Знайти область визначення D функції

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2).$$

12. Переконатися, що

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-2)^2} = \frac{1}{2}.$$

13. Довести, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ не існує.

14. Дослідити на неперервність функції

а) $z = 2x^2 + 3y$; б) $z = \dfrac{x^2 + 2y - 1}{x^2 + y^2}$; в) $z = \dfrac{x + y - 1}{y^2 - 2x}$.

Відповіді. 11. D — множина точок, що містяться між колами $x^2 + y^2 = 1$ та $x^2 + y^2 = 4$, причому внутрішнє коло в область D входить, а зовнішнє — ні. 13. *Вказівка.* Якщо $M(x; y) \to O(0; 0)$ по різних прямих $y = kx$, то функція $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ прямує до різних значень. 14. а) Функція неперервна на всій площині Oxy; б) функція не визначена і, значить, розривна в точці $O(0; 0)$; в) точки розриву знаходяться на параболі $y^2 = 2x$.

§ 2. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

2.1. Частинні похідні

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x; y)$. Надамо змінній x приросту Δx, залишаючи змінну y незмінною, так, щоб точка $M_1(x + \Delta x; y)$ належала заданому околу.

Величина

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

називається *частинним приростом функції* $f(x, y)$ *по змінній* x.

Аналогічно вводиться *частинний приріст* $\Delta_y z$ *функції по змінній* y:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

то вона називається *частинною похідною функції* $f(x, y)$ *в точці* $M(x; y)$ *по змінній* x *і позначається* одним із таких символів:

$$z'_x, \ f'_x, \ \frac{\partial z}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial x};$$

$f'_x(x_0, y_0)$, $f'_x|_{M_0}$ — частинні похідні по x в точці $M_0(x_0; y_0)$.

Аналогічно *частинна похідна функції* $f(x, y)$ *по* y визначається як границя

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

і позначається одним із символів:

$$z'_y, \ f'_y, \ \frac{\partial z}{\partial y}, \ \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Згідно з означенням, при знаходженні частинної похідної z'_x обчислюють звичайну похідну функції однієї змінної x, вважаючи змінну y сталою, а при знаходженні похідної z'_y сталою вважається змінна x. Тому частинні похідні знаходять за формулами і правилами обчислення похідних функцій однієї змінної.

Частинна похідна z'_x (або z'_y) характеризує швидкість зміни функції в напрямі осі Ox (або Oy).

З'ясуємо геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних. Графіком функції $z = f(x, y)$ є деяка поверхня (рис. 6.9). Графіком функції $z = f(x, y_0)$ є лінія перетину цієї поверхні з площиною $y = y_0$. Виходячи з геометричного змісту похідної для функції однієї змінної, дістанемо, що $f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha$, де α — кут між віссю Ox і дотичною, проведеною до кривої $z = f(x, y_0)$ в точці $M_0(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$. Аналогічно $f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta$.

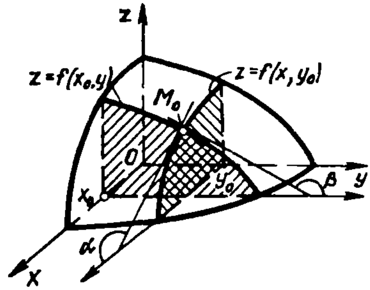


Рис. 6.9

Для функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n змінних можна знайти n частинних похідних:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ \ldots, \ \frac{\partial u}{\partial x_i}, \ \ldots, \ \frac{\partial u}{\partial x_n},$$

де

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i},$$

$$\Delta_{x_i} u = f(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Щоб знайти частинну похідну $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, треба взяти звичайну похідну функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по змінній x_i, вважаючи решту змінних сталими.

Приклад

Знайти частинні похідні функцій:

а) $z = x^2 + y^3 - 2xy^2 + 5x - 1$; б) $u = x^2 z + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

○ Маємо:

а) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y^2 + 5$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 4xy$;

б) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xz + \frac{y}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = x^2$. ●

Якщо функція $z = f(x, y)$ задана в області D і має частинні похідні z'_x, z'_y в усіх точках $(x; y) \in D$, то ці похідні можна розглядати як нові функції, задані в області D. Тому має сенс питання про існування частинних похідних від цих функцій по якій-небудь змінній в точці $(x;\ y) \in D$.

Якщо існує частинна похідна по x від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$, то її називають *частинною похідною другого порядку від функції $f(x, y)$ по змінній* x і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ або f''_{xx}.

Таким чином, за означенням

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{або} \quad f''_{xx} = (f'_x)'_x.$$

Якщо існує частинна похідна від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$ по змінній y, то цю похідну називають *мішаною частинною похідною другого порядку від функції $f(x, y)$* і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ або f''_{xy}.

Отже, за означенням

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{або} \quad f''_{xy} = (f'_x)'_y.$$

Для функції двох змінних $f(x, y)$ можна розглядати чотири похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Якщо існують частинні похідні від частинних похідних другого порядку, то їх називають *частинними похідними третього порядку функції $f(x, y)$*, їх вісім:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Природно поставити запитання: чи залежить результат диференціювання від порядку диференціювання? Інакше кажучи, чи будуть рівними між собою мішані похідні, якщо вони взяті по одних і тих самих змінних, одне й те саме число разів, але в різному порядку? Наприклад, чи дорівнюють одна одній похідні

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{і} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{або} \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial x} \quad \text{і} \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial z}?$$

У загальному випадку відповідь на це запитання негативна.

Проте справедлива теорема [27], яку вперше довів К. Г. Шварц.

Теорема *(про мішані похідні). Якщо функція $f(x, y)$ визначена разом із своїми похідними f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} в деякому околі точки M_0*

$(x_0;\ y_0)$, *причому похідні* f''_{xy} *та* f''_{yx} *неперервні в точці* M_0, *то в цій точці*

$$f''_{xy}\big|_{M_0} = f''_{yx}\big|_{M_0}.$$

Аналогічна теорема справедлива для будь-яких неперервних мішаних похідних, які відрізняються між собою лише порядком диференціювання.

Приклади

1. Знайти похідні другого порядку від функції

$$z = x^3 - x^2y + y^2.$$

○ Маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2xy, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 2y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 + 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2x. \ \bullet$$

2. Нехай

$$f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Переконатись, що

$$f''_{xy}(0,\ 0) \neq f''_{yx}(0,\ 0).$$

○ Знаходимо

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

оскільки

$$\frac{\partial f(0,\ 0)}{\partial x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,\ 0) - f(0,\ 0)}{x} = 0.$$

Звідси

$$\frac{\partial f(0,\ y)}{\partial x} = -y, \quad \frac{\partial^2 f(0,\ y)}{\partial x \partial y} = -1,$$

зокрема $\dfrac{\partial^2 f(0,\ 0)}{\partial x \partial y} = -1.$

Аналогічно обчислюємо $\dfrac{\partial^2 f(0,\ 0)}{\partial y \partial x} = 1$. Отже, для даної функції $f''_{xy}(0,\ 0) \neq f''_{yx}(0,\ 0)$, тобто результат диференціювания залежить від порядку диференціювання. Це пов'язано з тим, що похідні f''_{xy} і f''_{yx} в точці (0; 0) розривні. ●

2.2. Диференційовність функції

Нехай функція $z = f(x,\ y)$ визначена в деякому околі точки $M(x;\ y)$. Виберемо прирости Δx і Δy так, щоб точка $M_1(x + \Delta x;\ y + \Delta y)$

належала розглядуваному околу і знайдемо повний приріст функції в точці M $(x;\ y)$:

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y).$$

Функція f $(x,\ y)$ називається *диференційовною в точці* M, якщо її повний приріст в цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{3}$$

де A та B — дійсні числа, які не залежать від Δx та Δy, $\alpha = \alpha$ $(\Delta x,$ $\Delta y)$, $\beta = \beta$ $(\Delta x,\ \Delta y)$ — нескінченно малі при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$ функції.

Відомо (гл. 5, п. 1.4) що коли функція однієї змінної диференційовна в деякій точці, то вона в цій точці неперервна і має похідну. Перенесемо ці властивості на функції двох змінних.

Теорема 1 *(неперервність диференційовної функції). Якщо функція $z = f$ (M) диференційовна в точці M, то вона неперервна в цій точці.*

○ Якщо функція диференційовна в точці M, то з рівності (3) випливає, що $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$. Це означає, що функція неперервна в точці M. ●

Теорема 2 *(існування частинних похідних диференційовної функції). Якщо функція $z = f$ (M) диференційовна в точці M $(x;\ y)$, то вона має в цій точці похідні $f'_x = f'_x$ $(x,\ y)$ та $f'_y = f'_y$ $(x,\ y)$* і

$$\Delta z = f'_x\Delta x + f'_y\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

○ Оскільки f $(x,\ y)$ диференційовна в точці M $(x;\ y)$, то справджується рівність (3). Поклавши в ній $\Delta y = 0$, $\Delta x \neq 0$, дістанемо

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x,\ 0)\,\Delta x.$$

Поділимо обидві частини цієї рівності на Δx і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(A + \alpha(\Delta x,\ 0)) = A + \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x,\ 0) = A.$$

Отже, в точці M існує частинна похідна f'_x $(x,\ y) = A$. Ааналогічно доводиться, що в точці M існує частинна похідна f'_y $(x,\ y) = B$. ●

Твердження, обернені до теорем 1 і 2, взагалі кажучи, неправильні, тобто із неперервності функції f $(x,\ y)$ або існування її частинних похідних ще не випливає диференційовність. Наприклад, функція $f(x,\ y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ неперервна в точці (0; 0), але не диференційовна в цій точці. Справді, границі

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,\ 0) - f(0,\ 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(0+\Delta x)^2 + 0} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

не існує, тому не існує й похідної $f'_x(0, 0)$. Аналогічно впевнюємося, що не існує також похідної $f'_y(0, 0)$. Оскільки задана функція в точці $(0; 0)$ не має частинних похідних, то вона в цій точці не диференційовна.

Більше того, відомі приклади функцій [11], які є неперервними в деяких точках і мають в них частинні похідні, але не є в цих точках диференційовними.

Теорема 3 *(достатні умови диференційовності). Якщо функція $f(x, y)$ має частинні похідні в деякому околі точки M і ці похідні неперервні в точці M, то функція $f(x, y)$ диференційовна в точці M.*

○ Надамо змінним x і y приростів $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ таких, щоб точка $(x + \Delta x; y + \Delta y)$ належала даному околу точки M. Повний приріст функції

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

запишемо у вигляді

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + \\ + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \tag{4}$$

Вираз у перших квадратних дужках рівності (4) можна розглядати як приріст функції однієї змінної x, а в других — як приріст функції змінної y. Оскільки дана функція має частинні похідні, то за теоремою Лагранжа дістанемо:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \\ = f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y)\Delta x, \quad 0 < \theta_1 < 1,$$

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y)\Delta y, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Похідні f'_x та f'_y неперервні в точці M, тому

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x, y).$$

Звідси випливає, що

$$f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha(\Delta x, \Delta y),$$

$$f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x, y) + \beta(\Delta x, \Delta y),$$

де $\alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — нескінченно малі функції при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$.

Підставляючи ці вирази у рівність (4), знаходимо

$$\Delta z = f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y,$$

а це й означає, що функція $f(x, y)$ диференційовна в точці M. ●

З теорем 2 і 3 випливає такий наслідок: *щоб функція $f(x, y)$ була диференційовною в точці, необхідно, щоб вона мала в цій точці частинні похідні, і достатньо, щоб вона мала в цій точці неперервні частинні похідні.*

Зазначимо, що для функції $f(x)$ однієї змінної існування похідної $f'(x)$ в точці x є необхідною і достатньою умовою її диференційовності в цій точці.

2.3. Повний диференціал функції та його застосування до обчислення функцій і похибок. Диференціали вищих порядків

Нагадаємо, що коли функція $z = f(M)$ диференційовна в точці M, то її повний приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y,$$

де $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ і $\beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Повним диференціалом dz диференційовної в точці M функції $z = f/M$ називається лінійна відносно Δx та Δy частина повного приросту цієї функції в точці M, тобто

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \tag{5}$$

Диференціалами незалежних змінних x та y назвемо прирости цих змінних $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тоді з урахуванням теореми 2 рівність (5) можна записати так:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy. \tag{6}$$

Аналогічна формула має місце для диференційовної функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz. \tag{7}$$

З формул (6) і (7) може здатися, що повний диференціал du існуватиме в кожній точці, в якій існують частинні похідні. Але це не так. Згідно з означенням, повний диференціал можна розглядати лише стосовно диференційовної функції.

Покажемо, що різниця між повним приростом Δz і диференціалом dz при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$ є нескінченно мала величина вищого порядку, ніж величина $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Дійсно, з формул (3) і (5) маємо

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0\\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta z - dz}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0\\ \Delta y \to 0}} \left(\frac{\alpha\Delta x}{\rho} + \frac{\beta\Delta y}{\rho}\right) = 0,$$

оскільки функції α, β — нескінченно малі при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, а $\frac{\Delta x}{\rho}$ та $\frac{\Delta y}{\rho}$ — обмежені функції:

$$\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| = \left|\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}} \leqslant 1, \quad \left|\frac{\Delta y}{\rho}\right| \leqslant 1.$$

Отже, різниця $\Delta z - dz$ — нескінченно мала величина вищого порядку, ніж ρ. Тому повний диференціал називають також головною частиною повного приросту диференційовної функції. При цьому виконується наближена рівність $\Delta z \approx dz$ або

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y. \quad (8)$$

Ця рівність тим точніша, чим менша величина ρ. Рівність (8) широко використовується в наближених обчисленнях, оскільки диференціал функції обчислюється простіше, ніж її повний приріст.

Покажемо, як за допомогою диференціала можна оцінити похибку в обчисленнях.

Нехай задана диференційовна функція $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, незалежні змінні якої виміряні з точністю $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Потрібно знайти похибку, з якою обчислюється u.

Природно вважати, що ця похибка дорівнює величині

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Для малих значень Δx_i маємо

$$\Delta u \approx du = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n,$$

звідки

$$|\Delta u| \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| |\Delta x_1| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| |\Delta x_2| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| |\Delta x_n|.$$

Якщо через $|\Delta^* x_i|$ позначити максимальну абсолютну похибку змінної x_i, то можна дістати значення максимальної абсолютної похибки $|\Delta^* u|$ функції u:

$$|\Delta^* u| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| |\Delta^* x_1| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| |\Delta^* x_2| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| |\Delta^* x_n|. \quad (9)$$

Щоб оцінити максимальну відносну похибку функції u, поділимо обидві частини рівності (9) на $|u| = |f(x_1, x_2, \ldots, x_n)|$:

$$|\delta^* u| = \left|\frac{\Delta^* u}{u}\right| = \left|\frac{f'_{x_1}}{f}\right| |\Delta^* x_1| + \left|\frac{f'_{x_2}}{f}\right| |\Delta^* x_2| + \left|\frac{f'_{x_n}}{f}\right| |\Delta^* x_n|.$$

Оскільки $\frac{f'_{x_i}}{f} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\ln|f|)$, то

$$|\delta^* u| = \left|\frac{\partial}{\partial x_1}(\ln|f|)\right| |\Delta^* x_1| + \left|\frac{\partial}{\partial x_2}(\ln|f|)\right| |\Delta^* x_2| + \cdots$$
$$\cdots + \left|\frac{\partial}{\partial x_n}(\ln|f|)\right| |\Delta^* x_n|$$

або
$$|\delta^* u| = |\Delta^* \ln|f||, \tag{10}$$

тобто максимальна відносна похибка функції дорівнює максимальній абсолютній похибці її логарифма.

Приклади

1. Знайти повний диференціал функції

$$z = x^3 y^2.$$

○ Частинні похідні заданої функції $z'_x = 3x^2y^2$ і $z'_y = 2x^3y$ є неперервними функціями на всій площині Oxy. Тому диференціал цієї функції на всій площині дорівнює

$$dz = 3x^2y^2dx + 2x^3ydy. \; ●$$

2. Обчислити наближено за допомогою повного диференціала

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right).$$

○ Розглянемо функцію $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right)$ і застосуємо до неї формулу (6), поклавши $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = -0,03$, $\Delta y = 0,02$:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - 1\right) \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right) + \frac{y}{y^2 + (x-y)^2}\Delta x - \frac{x}{y^2 + (x-y)^2}\Delta y;$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{2 - 0,03}{1 + 0,02} - 1\right) \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{1} - 1\right) + \frac{1}{1 + (2-1)^2}(-0,03) -$$
$$- \frac{2}{1 + (2-1)^2}\,0,02.$$

Маємо

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right) = \frac{\pi}{4} - 0,015 - 0,02 = 0,75. \; ●$$

3. Період коливання маятника дорівнює $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, де l — довжина маятника, g — прискорення вільного падіння. Розв'язуючи цю рівність відносно g, дістанемо $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$. Цією формулою користуються для обчислення g в різних точках земної поверхні, вимірюючи в цих точках величини l і T. Нехай в результаті вимірювань дістали $l = 50 \pm 0,01$ см, $T = 1,4196 \pm 0,0001$ с.

Потрібно знайти прискорення вільного падіння g і максимальну абсолютну та відносну похибки знайденого значення g, вважаючи, що $\pi = 3,1416 \pm 0,0001$.

○ Маємо

$$\ln g = \ln 4 + 2\ln \pi + \ln l + 2\ln T,$$
$$\Delta^* T = 0{,}0001, \quad \Delta^* l = 0{,}01, \quad \Delta^* \pi = 0{,}0001.$$

Знайдемо наближене значення прискорення:

$$g = \frac{4 \cdot (3{,}1416)^2 \cdot 50}{(1{,}4196)^2} = 979{,}5 \ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

За формулами (9) і (10) дістанемо максимальне значення відносної і абсолютної похибок:

$$|\delta^* g| = |\Delta^* \ln |g|| = \frac{2|\Delta^* \pi|}{\pi} + \frac{|\Delta^* l|}{l} + \frac{2|\Delta^* T|}{T} =$$
$$= \frac{2 \cdot 0{,}0001}{3{,}1416} + \frac{0{,}01}{50} + \frac{2 \cdot 0{,}0001}{1{,}4196} \approx 0{,}0004 = 0{,}04\ \%,$$
$$\Delta^* g| = |\delta^* g|\, g = 0{,}0004 \cdot 979{,}5 \approx 0{,}4 \ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Отже,

$$g = 979{,}5 \pm 0{,}4 \ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}. \ ●$$

Введемо поняття *диференціала вищого порядку*. Нехай $z = f(x, y)$ функція незалежних змінних x, y. Повний диференціал цієї функції, знайдений за формулою (5), називають ще диференціалом першого порядку. *Диференціал другого порядку* визначають за формулою

$$d^2 z = d(dz).$$

Тоді, якщо функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні, то

$$d^2 z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)'_x dy,$$

звідки

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \tag{11}$$

Символічно це записують так:

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 z.$$

Аналогічно можна дістати формулу для *диференціала третього порядку*:

$$d^3 z = d(d^2 z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^3 z.$$

Застосовуючи метод математичної індукції, можна дістати формулу для диференціала n-го порядку:

$$d^n z = d(d^{n-1} z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z. \tag{12}$$

Зазначимо, що формула (12) справедлива лише для випадку, коли змінні x і y функції $z = f(x, y)$ є незалежними змінними.

Приклад

Знайти $d^2 z$, якщо $z = e^{x^2+y^2}$.

○ Послідовно дістаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{x^2+y^2}(1 + 2x^2);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xye^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^{x^2+y^2}(1 + 2y^2).$$

За формулою (11) маємо

$$d^2 z = 2e^{x^2+y^2}[(1 + 2x^2)\,dx^2 + 4xy\,dx\,dy + (1 + 2y^2)\,dy^2]. \bullet$$

2.4. Похідна складеної функції. Повна похідна. Інваріантість форми повного диференціала

Нехай $z = f(x, y)$ — функція двох змінних x та y, кожна з яких, в свою чергу, є функцією незалежної змінної t:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

тоді функція $f(x(t), y(t))$ є складеною функцією змінної t.

Теорема. *Якщо функції $x = x(t)$, $y = y(t)$ диференційовні в точці t, а функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x; y)$, то складена функція $z = f(x(t), y(t))$ також диференційовна в точці t. Похідну цієї функції знаходять за формулою*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{13}$$

○ За умовою теореми

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де $\alpha \to 0$ та $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Поділимо Δz на Δt і перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$:

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\alpha\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} +$$

$$+ \lim_{\Delta t\to 0}\beta\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + 0\cdot\frac{dx}{dt} + 0\cdot\frac{dy}{dt} =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \bullet$$

Аналогічно знаходять похідну, якщо число проміжних змінних більше двох. Наприклад, якщо $u = f(x, y, z)$, де $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{\partial t}. \tag{14}$$

Зокрема, якщо $u = f(x, y, z)$, а $y = y(x)$, $z = z(x)$, то

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx},$$

а оскільки $\frac{dx}{dx} = 1$, то

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}. \tag{15}$$

Цю формулу називають *формулою для обчислення повної похідної* $\left(\text{на відміну від частинної похідної } \frac{\partial u}{\partial x}\right)$.

Приклади

1. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = x^2 - 3xy$, де $x = 2t$, $y = t^2$.

○ За формулою (13) дістанемо

$$\frac{dz}{dt} = (2x - 3y)\,2 - 3x2t = (4t - 3t^2)\,2 - 12t^2 = 8t - 18t^2.$$

Результат буде такий самий, коли попередньо підставити замість x та y їхні значення, а потім знайти звичайну похідну по t:

$$z = 4t^2 - 6t^3, \quad \frac{dz}{dt} = 8t - 18t^2. \; \bullet$$

2. Нехай $u = x^2 - xy + z^2$, де $y = 2x$, $z = x^3$.

○ За формулою (15) маємо:

$$\frac{du}{dx} = 2x - y - x2 + 3z^2 3x^2 = -2x + 9x^8.$$

Іший спосіб:

$$u = x^2 - 2x^2 + x^9 = -x^2 + x^9,$$

$$\frac{du}{dx} = -2x + 9x^8. \; \bullet$$

Розглянемо загальніший випадок. Нехай $z = f(x, y)$ — функція двох змінних x та y, які, в свою чергу, залежать від змінних u, v: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, тоді функція $z = f(x(u, v), y(u, v))$ є складеною функцією незалежних змінних u та v, а змінні x та y — проміжні.

Аналогічно попередній теоремі доводиться таке твердження.

Якщо функції $x(u, v)$ та $y(u, v)$ диференційовні в точці $M_1(u; v)$, а функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_2(x(u, v); y(u, v))$, то складена функція $f(x(u, v), y(u, v))$ диференційовна в точці $M_1(u; v)$ і її частинні похідні знаходяться за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{16}$$

Формули (16) можна узагальнити на випадок більшого числа змінних. Якщо $u = f(x, y, z)$, де

$$x = x(s_1, s_2, s_3), \quad y = y(s_1, s_2, s_3), \quad z = z(s_1, s_2, s_3),$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial s_i} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s_i} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s_i} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Приклад

Знайти z'_u і z'_v, якщо $z = x^2 \ln y$, де $x = \dfrac{u}{v}$, $y = uv$.

○ За формулами (16) маємо

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2x \ln y \, \frac{1}{v} + \frac{x^2}{y} v = \frac{u}{v^2}(1 + 2\ln(uv)),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2x \ln y \left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{x^2}{y} u = \frac{u^2}{v^3}(1 - 2\ln uv). \quad ●$$

Знайдемо диференціал складеної функції. Скориставшись формулами (16), дістанемо

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du +$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Отже, диференціал функції $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, визначається формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \tag{17}$$

де

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

Порівнявши формули (17) і (6), дійдемо висновку, що повний диференціал функції $z = f(x, y)$ має інваріантну (незмінну) форму незалежно від того, чи є x та y незалежними змінними, чи диференційовними функціями змінних u та v. Проте формули (6) і (17) однакові лише за формою, а по суті різні, бо в формулі (6) dx і dy — диференціали незалежних змінних, а в формулі (17) dx і dy — повні диференціали функцій $x = x(u, v)$ та $y = y(u, v)$.

Диференціали вищих порядків властивості інваріантності не мають. Наприклад, якщо $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, то

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2y. \qquad (18)$$

Формула (18) відрізняється від формули (11), тому що для складеної функції диференціали d^2x та d^2y можуть і не дорівнювати нулю. Отже, для складеної функції $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, формула (11) невірна.

2.5. Диференціювання неявиої функції

Нехай задано рівняння

$$F(x, y) = 0, \qquad (19)$$

де $F(x, y)$ — функція двох змінних.

Нагадаємо, що коли кожному значенню x з деякої множини D відповідає єдине значення y, яке разом з x задовольняє рівняння (19), то кажуть, що це рівняння задає на множині D неявну функцію $y = \varphi(x)$.

Таким чином, для неявної функції $y = \varphi(x)$, $x \in D$, заданої рівнянням (19), має місце тотожність

$$F(x, \varphi(x)) \equiv 0, \quad x \in D.$$

Які ж умови має задовольняти функція $F(x, y)$, щоб рівняння (19) визначало неявну функцію і при тому єдину? Відповідь на це запитання дає така теорема існування неявної функції [27].

Теорема. *Нехай функція $F(x, y)$ і її похідні $F'_x(x_0, y_0)$ та $F'_y(x, y)$ визначені та неперервні в якому-небудь околі точки $M_0(x_0, y_0)$ і $F(x_0, y_0) = 0$, а $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$; тоді існує окіл точки M_0, в якому рівняння $F(x, y) = 0$ визначає єдину неявну функцію $y = \varphi(x)$, неперервну та диференційовну в околі точки x_0 і таку, що $\varphi(x_0) = y_0$.*

Знайдемо похідну неявної функції. Нехай ліва частина рівняння (19) задовольняє зазначені в теоремі умови, тоді це рівняння задає неявну функцію $y = y(x)$, для якої на деякій множині точок x має місце тотожність $F(x, y(x)) \equiv 0$. Оскільки похідна функції, що тотожно дорівнює нулю, також дорівнює нулю, то повна похідна $\frac{dF}{dx} = 0$. Але за формулою (15) маємо $\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}$, тому

$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$, звідки

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_y}. \qquad (20)$$

За цією формулою знаходять похідну неявної функції однієї змінної. Нагадаємо, що похідну функції, заданої рівнянням (19), можна знаходити й іншим способом (гл. 4, п. 2.9).

Приклад

Знайти похідну $\frac{dy}{\partial x}$ функції y, заданої рівнянням

$$e^y - e^x + 2xy = 0.$$

○ Тут $F(x, y) = e^y - e^x + 2xy$, $F'_x = -e^x + 2y$, $F'_y = e^y + 2x$, отже за формулою (20) маємо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-e^x + 2y}{e^y + 2x} = \frac{e^x - 2y}{e^y + 2x}. \ \bullet$$

Розглянемо рівняння

$$F(x, y, z) = 0. \qquad (21)$$

Якщо кожній парі чисел x та y з деякої множини відповідає єдине значення z, яке разом з x та y задовольняє рівняння (21), то це рівняння задає неявну функцію $z = \varphi(x, y)$.

Справджується така теорема існування.

Теорема. *Нехай функція $F(x, y, z)$ і її похідні $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$ та $F'_z(x, y, z)$ визначені і неперервні в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, причому $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, а $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тоді існує окіл точки M_0, в якому рівняння (21) визначає єдину функцію $z = \varphi(x, y)$, неперервну і диференційовну в околі точки $(x_0; y_0)$ і таку, що $\varphi(x_0, y_0) = z_0$.*

Знайдемо частинні похідні z'_x і z'_y неявної функції z від x та y, заданої рівнянням (21).

Коли визначаємо z'_x (або z'_y), то змінну y (або x) вважаємо сталою, тому за формулою (20)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \qquad (22)$$

Аналогічно знаходять похідні неявної функції $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка задається рівнянням $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_y}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad F'_y \neq 0.$$

Приклад

Знайти повний диференціал функції $z = \varphi(x, y)$, якщо

$$e^z - x^2y + z + 6 = 0.$$

○ Тут $F(x, y, z) = e^z - x^2y + z + 6$, $F'_x = -2xy$, $F'_y = -x^2$, $F'_z = e^z + 1$.

Скориставшись формулами (22) і (6), дістанемо

$$z'_x = \frac{2xy}{e^z + 1}, \quad z'_y = \frac{x^2}{e^z + 1}; \quad dz = \frac{2xydx + x^2dy}{e^z + 1}. \bullet$$

Завдання для самоконтролю

1. Дати означення частинної похідної функції двох змінних по одній з них. З'ясувати її геометричний зміст?
2. Як визначають частинні похідні другого і третього порядку від функції двох змінних?
3. Сформулювати теорему про рівність других мішаних похідних.
4. Дати означення диференційовності функції $z = f(x, y)$.
5. Довести теорему про неперервність диференційовної функції.
6. Довести теорему про існування частинних похідних диференційовної функції.
7. Вивести достатні умови диференційовності функції двох змінних.
8. Дати означення повного диференціала функції двох змінних і вказати формулу для його знаходження. Узагальнити цю формулу для функції n змінних.
9. Як застосовується повний диференціал функції для наближеного обчислення її значень?
10. Вивести формули для максимальних абсолютної і відносної похибок функції двох змінних.
11. Як визначають диференціал n-го порядку?
12. Вивести формули для знаходження диференціала d^2z, якщо $z = f(x, y)$ — функція двох незалежних змінних. Записати формулу для знаходження диференціала n-го порядку цієї функції.
13. Як знайти похідну $\frac{dz}{dt}$ складеної функції $z = f(x(t), y(t))$?
14. Що називається повною похідною?
15. Написати формулу для знаходження похідних z'_x і z'_y, якщо $z = f(u, v, t)$, де $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $t = t(x, y)$.
16. У чому полягає інваріантність форми диференціала першого порядку? Чому цієї властивості не мають диференціали вищих порядків?
17. Сформулювати теореми існування неявних функцій однієї і двох змінних і вивести правила диференціювання цих функцій.
18. Знайти частинні похідні z'_x та z'_y в точці $M_0(1; 1)$, якщо $z = x^3 + y^3 - xy$.
19. Довести, що функція $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ задовольняє рівняння: $xz'_x + yz'_y = 2$.
20. Показати, що функція $z = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}$ задовольняє рівняння $2xz'_x + 2yz'_y = z$.
21. Маємо $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$. Переконатись, що $z''_{xy} = z''_{yx}$. В якому випадку ця рівність порушується?

22. Обчислити наближено за допомогою повного диференціала число $a = 1{,}04^{2{,}03}$.

23. Показати, що для функції $z = x^3 + y^2 + 3xy$ диференціал третього порядку $d^3z = 6\ (dx^3 + dy^3)$.

24. Нехай $z = u + v^2$, де $u = x^2 + \sin y$, $v = \ln\ (x + y)$. Показати, що $z'_x - z'_y = 2x - \cos y$.

25. Нехай $u = \dfrac{e^{2x}\ (y - z)}{5}$, де $y = 2 \sin x$, $z = \cos x$.

Показати, що повна похідна $\dfrac{du}{dx} = e^{2x} \sin x$.

26. Довести, що частинні похідні z'_x і z'_y неявної функції $z\,(x,\ y)$, яка задана рівнянням $z^2 + \dfrac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$, задовольняють умову $x^2 z'_x + \dfrac{1}{y} z'_y = \dfrac{1}{z}$.

Відповіді. 18. $z'_x\,(1,\ 1) = z'_y\,(1,\ 1) = 2$. 22. $a \approx 1{,}08$.

§ 3. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

3.1. Дотична площина та нормаль до поверхні. Геометричний зміст диференціала функції двох змінних

Нехай задано поверхню

$$F\,(x,\ y,\ z) = 0. \tag{23}$$

Точка $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ належить цій поверхні і функція $F\ (x,\ y,\ z)$ диференційовна в точці M_0, причому не всі частинні похідні в точці M_0 дорівнюють нулю, тобто

$$(F'_x\,(M_0))^2 + (F'_y\,(M_0))^2 + (F'_z\,(M_0))^2 \neq 0.$$

Розглянемо довільну криву L, яка проходить через точку M_0, лежить на поверхні (23) і задається рівнянням

$$x = x\,(t),\ y = y\,(t),\ z = z\,(t),$$

де точці M_0 відповідає параметр t_0.

Оскільки крива лежить на поверхні, то координати її точок задовольняють рівняння (23):

$$F\,(x\,(t),\ y\,(t),\ z\,(t)) = 0. \tag{24}$$

Диференціюючи рівність (24), маємо

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0. \tag{25}$$

Ця рівність показує, що вектори (рис. 6.10)

$$\vec{n} = \{F'_x\,(M_0);\ F'_y\,(M_0);\ F'_z\,(M_0)\},\quad \vec{s} = \{x'\,(t_0);\ y'\,(t_0);\ z'\,(t_0)\}$$

ортогональні, причому другий з них є напрямним вектором дотичної до кривої L у точці M_0 (гл. 5, п. 7.5).

Крім того, з рівності (25) випливає, що дотичні до всіх кривих, які проходять через точку M_0 і лежать на поверхні (23), ортогональні до одного й того самого вектора $\vec{n}$. Тоді всі ці дотичні лежать в одній і тій самій площині, яка називається *дотичною площиною до поверхні в точці* M_0.

Знайдемо рівняння дотичної площини. Оскільки ця площина проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{n}$, то її рівняння має вигляд (гл. 3, п. 4.1):

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0. \qquad (26)$$

Нормаллю до поверхні в точці M_0 називають пряму, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини в цій точці.

Оскільки нормаль проходить через точку M_0 і має напрямний вектор $\vec{n}$, то канонічні рівняння нормалі мають такий вигляд (гл. 3, п. 3.1):

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}. \qquad (27)$$

Якщо рівняння поверхні задано в явній формі $z=f(x, y)$, то, поклавши $F(x, y, z)=f(x, y)-z=0$, дістанемо

$$F'_x(M_0)=f'_x(x_0, y_0),\ F'_y(M_0)=f'_x(x_0, y_0),\ F'_z(M_0)=-1,$$

тоді рівняння (26) і (27) наберуть вигляду

$$f'_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0, y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0; \qquad (28)$$

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0, y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0, y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \qquad (29)$$

З'ясуємо геометричний зміст повного диференціала функції $z=f(x, y)$. Якщо в формулі (28) покласти $x-x_0=\Delta x$, $y-y_0=\Delta y$, то ця формула запишеться у вигляді

$$z-z_0=f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Права частина цієї рівності є повним диференціалом функції $z=f(x, y)$ в точці $(x_0; y_0)$, тому $z-z_0=dz$.

Таким чином, повний диференціал функції двох змінних у точці $(x_0; y_0)$ дорівнює приросту аплікати точки на дотичній площині до поверхні в точці M_0 $(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$, якщо від точки $(x_0; y_0)$ перейти до точки $(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$ (рис. 6.11).

Зауваження 1. Ми розглянули випадок, коли функція (19) диференційовна в точці M_0 і $(F'_x(M_0))^2+(F'_y(M_0))^2+(F'_z(M_0))^2\neq 0$.

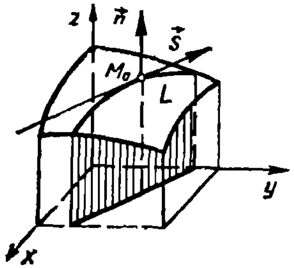


Рис. 6.10

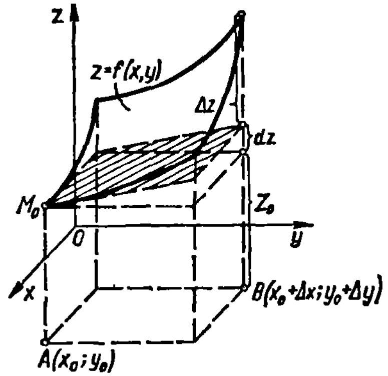


Рис. 6.11

Якщо ці умови не виконуються в деякій точці (її називають *особливою*), то дотична та нормаль в такій точці можуть не існувати.

З а у в а ж е н н я 2. Якщо поверхня (23) є поверхнею рівня для деякої функції $u = u(x, y, z)$, тобто $F(x, y, z) = u(x, y, z) - c = 0$, то вектор

$$\vec{n} = \{F'_x;\ F'_y;\ F'_z\} = \{u'_x;\ u'_y;\ u'_z\}$$

буде напрямним вектором нормалі до цієї поверхні рівня.

Приклади

1. Написати рівняння нормалі та дотичної площини до еліпсоїда $2x^2 + y^2 + z^2 = 15$ в точці $M_0(1;\ 2;\ 3)$.

○ Скористаємось рівняннями (26) і (27). Маємо

$$F(x, y, t) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 15;\ F'_x = 4x;\ F'_y = 2y;$$

$$F'_z = 2z;\ F'_x(M_0) = 4;\ F'_y(M_0) = 4,\ F'_z(M_0) = 6.$$

Отже, шукані рівняння нормалі та дотичної площини мають вигляд

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6} \text{ або } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3};$$

$$4(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0 \text{ або } 2x + 2y + 3z - 15 = 0. \ ●$$

2. Написати рівняння нормалі та дотичної площини до параболоїда $z = x^2 + y^2$ в точці $M_0(1;\ -2;\ 5)$.

○ Скористаємося формулами (28) та (29). Маємо

$$f(x, y) = x^2 + y^2;\ f'_x(x, y) = 2x;$$

$$f'_y(x, y) = 2y;\ f'_x(1,\ -2) = 2;\ f'_y(1,\ -2) = -4.$$

Звідси $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{-1}$ — рівняння нормалі, $2x - 4y - z - 5 = 0$ — рівняння дотичної площини. ●

3.2. Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт

Область простору, кожній точці M якої поставлено у відповідність значення деякої скалярної величини $u(M)$, називають *скалярним полем*. Інакше кажучи, скалярне поле — це скалярна функція $u(M)$ разом з областю її визначення.

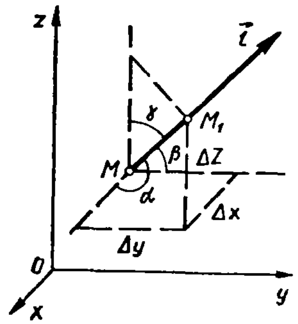


Рис. 6.12

Прикладами скалярних полів є поле температури даного тіла, поле густини даного неоднорідного середовища, поле вологості повітря, поле атмосферного тиску, поле потенціалів заданого електростатичного поля тощо.

Для того щоб задати скалярне поле, досить задати скалярну функцію $u(M)$ точки M і область її визначення.

Якщо функція $u(M)$ не залежить від часу, то скалярне поле називають *стаціонарним*, а скалярне поле, яке змінюється з часом,— *нестаціонарним*. Надалі розглядатимемо лише стаціонарні поля.

Якщо в просторі ввести прямокутну систему координат Oxy, то точка M в цій системі матиме певні координати $(x; y; z)$ і скалярне поле u стане функцією цих координат:

$$u = u(M) = u(x, y, z).$$

Якщо скалярна функція $u(M)$ залежить тільки від двох змінних, наприклад x і y, то відповідне скалярне поле $u(x, y)$ називають *плоским*; якщо ж функція $u(M)$ залежить від трьох змінних: x, y і z, то скалярне поле $u(x, y, z)$ називають *просторовим*.

Геометрично плоскі скалярні поля зображають за допомогою ліній рівня, а просторові — за допомогою поверхонь рівня (п. 1.1).

Для характеристики швидкості зміни поля в заданому напрямі введемо поняття похідної за напрямом.

Нехай задано скалярне поле $u(x, y, z)$. Візьмемо в ньому точку $M(x; y; z)$ і проведемо з цієї точки вектор $\vec{l}$, напрямні косинуси якого $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (рис. 6.12).

На векторі $\vec{l}$ на відстані Δl від його початку візьмемо точку $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z)$.
Тоді

$$\Delta l = MM_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Обчислимо тепер приріст $\Delta_l u$ функції $u(x, y, z)$ при переході від точки M до точки M_1 в напрямі вектора $\vec{l}$:

$$\Delta_l u = u(M_1) - u(M).$$

Якщо існує границя відношення $\frac{\Delta_l u}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$, то цю границю називають *похідною функції* $u\ (x,\ y,\ z)$ *в точці* $M\ (x;\ y;\ z)$ *за напрямом вектора* $\vec{l}$ і позначають $\frac{\partial u}{\partial l}$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}.$$

Виведемо формулу для обчислення похідної за напрямом. Припустимо, що функція $u\ (x,\ y,\ z)$ диференційовна в точці M. Тоді її повний приріст в цій точці можна записати так:

$$\Delta_l u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

де ε_1, ε_2, ε_3 — нескінченно малі функції при $\Delta l \to 0$.

Оскільки

$$\Delta x = \Delta l \cos\alpha,\ \Delta y = \Delta l \cos\beta,\ \Delta z = \Delta l \cos\gamma,$$

то

$$\frac{\Delta_l u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1 \cos\alpha + \varepsilon_2 \cos\beta + \\ + \varepsilon_3 \cos\gamma.$$

Перейшовши до границі при $\Delta l \to 0$, дістанемо формулу для обчислення похідної за напрямом

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{30}$$

З формули (30) випливає, що частинні похідні є окремими випадками похідної за напрямом. Дійсно, якщо $\vec{l}$ збігається з одним із ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$ або $\vec{k}$, то похідна за напрямом $\vec{l}$ збігається з відповідною частинною похідною. Наприклад, якщо $\vec{l} = \vec{i}$, то $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, тому

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Подібно до того як частинні похідні u'_x, u'_y, u'_z характеризують швидкість зміни функції в напрямі осей координат, так і похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ показує швидкість зміни скалярного поля $u\ (x, y, z)$ в точці $M\ (x,\ y,\ z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$.

Абсолютна величина похідної $\left|\frac{\partial u}{\partial l}\right|$ відповідає значенню швидкості, а знак похідної визначає характер зміни функції $u(x, y, z)$ в напрямі $\vec{l}$ (зростання чи спадання).

Очевидно, що похідна за напрямом $\vec{l}_1 = -\vec{l}$, який протилежний напряму $\vec{l}$, дорівнює похідній за напрямом $\vec{l}$, взятій з протилежним знаком.

Справді, при змінні напряму на протилежний кути α, β, γ зміняться на π, тому

$$\frac{\partial u}{\partial l_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\alpha+\pi) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\beta+\pi) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(\gamma+\pi) = -\frac{\partial u}{\partial l}.$$

Фізичний зміст цього результату такий: зміна напряму на протилежний не впливає на значення швидкості зміни поля, а тільки на характер зміни поля. Якщо, наприклад, в напрямі $\vec{l}$ поле зростає, то в напрямі $\vec{l}_1 = -\vec{l}$ воно спадає, і навпаки.

Якщо поле плоске, тобто задається функцією $u(x, y)$, то напрям вектора $\vec{l}$ цілком визначається кутом $\alpha = (\widehat{\vec{l}, Ox})$. Тому, поклавши в формулі (30) $\gamma = \frac{\pi}{2}$ та $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha.$$

Приклад

Знайти похідну функції $u = x^2 - 2xz + y^2$ в точці $A(1; 2; -1)$ за напрямом від точки A до точки $B(2; 4; -3)$. З'ясувати характер зміни поля в даному напрямі.

○ Знаходимо вектор $\vec{l} = \vec{AB}$ і його напрямні косинуси (гл. 2, п. 3.1):

$$\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k},\ \cos\alpha = \frac{1}{3},\ \cos\beta = \frac{2}{3},\ \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

Тепер обчислимо значення частинних похідних у точці A і скористаємось формулою (30):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = (2x - 2z)\,|_A = 4,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = 2y\,|_A = 4,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A = -2x\,|_A = -2;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A = 4\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{2}{3} - 2\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$, то задана функція в даному напрямі зростає. ●

Нехай задано поле $u = u(x, y, z)$ і точку $M(x; y; z)$. У якому напрямі $\vec{l}$ похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ має найбільше значення? Відповідь на це запитання має важливе практичне значення і дається на основі поняття градієнта поля.

Вектор, координатами якого є значення частинних похідних функції $u(x, y, z)$ в точці $M(x; y; z)$, називають *градієнтом функції* в цій точці і позначають grad u. Отже,

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \tag{31}$$

Зв'язок між градієнтом і похідною в даній точці за довільним напрямом показує така теорема.

Теорема. *Похідна функції $u(x, y, z)$ в точці $M(x; y; z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ дорівнює проекції градієнта функції в цій точці на вектор $\vec{l}$, тобто*

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{пр}_{\vec{l}} \operatorname{grad} u. \tag{32}$$

○ Нехай φ — кут між градієнтом (31) і одиничним вектором $\vec{l}^0 = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ (рис. 6.13), тоді з властивостей скалярного добутку (гл. 2, п. 4.3) дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma =$$

$$= (\operatorname{grad} u)\vec{l}^0 = |\operatorname{grad} u| \cdot |\vec{l}^0| \cos\varphi =$$

$$= |\operatorname{grad} u| \cdot \cos\varphi = \text{пр}_{\vec{l}} \operatorname{grad} u. \quad \bullet$$

Зазначимо деякі *властивості градієнта.*

1°. *Похідна в даній точці за напрямом вектора $\vec{l}$ має найбільше значення, якщо напрям вектора $\vec{l}$ збігається з напрямом градієнта, причому*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2}. \tag{33}$$

Справді, з формули (32) випливає, що похідна за напрямом досягає максимального значення (33), якщо $\cos\varphi = 1$, $\varphi = 0$, тобто якщо напрям вектора $\vec{l}$ збігається з напрямом градієнта.

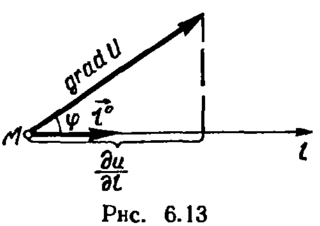


Рис. 6.13

Таким чином, *швидкість зростання скалярного поля в довільній точці є максимальною у напрямі градієнта.* Зрозуміло, що у напрямі, протилежному до напряму градієнта, поле найшвидше зменшуватиметься.

2°. *Похідна за напрямом вектора, пер-*

пендикулярного до градієнта, дорівнює нулю. Інакше кажучи, швидкість зміни поля у напрямі, перпендикулярному до градієнта, дорівнюе нулю, тобто скалярне поле залишаеться сталим.

Справді, за формулою (32) $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$, якщо $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

3⁰. *Вектор-градієнт у кожній точці поля u (x, y, z) перпендикулярний до поверхні рівня, яка проходить через цю точку.* Це твердження випливае з того, що напрямний вектор нормалі до поверхні рівня $u = u(M_0)$, яка проходить через точку M_0, мае координати (п. 3.1)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}.$$

4⁰. *Справедливі рівності:*

$$\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v;$$
$$\operatorname{grad}(Cu) = C \operatorname{grad} u, \quad C = \text{const};$$
$$\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u;$$
$$\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2};$$
$$\operatorname{grad} f(u) = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u.$$

○ Доведемо, наприклад, третю рівність. Маемо:

$$\operatorname{grad}(uv) = \frac{\partial}{\partial x}(uv)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(uv)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(uv)\vec{k} =$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial x} u\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial y} u\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} v + \frac{\partial v}{\partial z} u\right)\vec{k} =$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)v + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}\right)u = v \operatorname{grad} u +$$
$$+ u \operatorname{grad} v.$$

Решта рівностей доводяться аналогічно. ●

Приклади

1. Знайти значення і напрям градієнта функції $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ в точці M_0 (0; 1; 2).

○ Знайдемо частинні похідні в точці M_0:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = (2x - 2yz)\,|_{M_0} = -4;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = (2y - 2xz)\,|_{M_0} = 2; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = (2z - 2xy)\,|_{M_0} = 4.$$

За формулою (81) маемо

$$\operatorname{grad} u\,|_{M_0} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Отже,

$$|\operatorname{grad} u|_{M_0} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 4^2} = 6; \quad \cos\alpha = -\frac{2}{3}, \ \cos\beta = \frac{1}{3},$$

$$\cos\gamma = \frac{2}{3}. \ \bullet$$

2. Знайти найбільшу швидкість зростання поля $u = x^y - z$ в точці M_0 (1; 2; 3).

○ Маємо

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = yx^{y-1}|_{M_0} = 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = x^y \ln x|_{M_0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = -1; \quad \operatorname{grad} u|_{M_0} = 2\vec{i} - \vec{k}.$$

Найбільшу швидкість зростання поля знаходимо за формулою (33)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |2\vec{i} - \vec{k}| = \sqrt{5}. \ \bullet$$

3.3. Формула Тейлора для функції двох змінних

Як відомо (гл. 5, п. 5.4), якщо функція однієї змінної $F(t)$ має на відрізку $[\alpha; \beta]$ неперервні похідні до $(n+1)$-го порядку включно, то справджується формула Тейлора:

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \frac{F''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 +$$

$$+ \cdots + \frac{F^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \frac{F^{(n+1)}(t_0 + \theta(t - t_0))}{(n+1)!}(t - t_0)^{n+1}, \tag{34}$$

$$0 < \theta < 1, \quad t \in [\alpha; \beta].$$

Нехай $t - t_0 = \Delta t = dt$, $F(t) - F(t_0) = \Delta F(t_0)$, тоді

$$F^{(i)}(t_0)(t - t_0)^i = F^{(i)}(t_0)(\Delta t)^i = F^{(i)}(t_0)\,dt^i = d^i F(t_0), \quad i \in N,$$

тому формулу (34) можна записати у вигляді

$$\Delta F(t_0) = dF(t_0) + \frac{d^2F(t_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^nF(t_0)}{n!} +$$

$$+ \frac{d^{n+1}F(t_0 + \theta\Delta t)}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{35}$$

В аналогічному вигляді формулу Тейлора можна дістати і для функції багатьох змінних. Розглянемо функцію двох змінних.

Нехай функція $z = f(x, y)$ в області D має неперервні частинні похідні до $n + 1$-го порядку включно. Візьмемо дві точки $M_0(x_0; y_0)$ та $M_1(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ такі, щоб відрізок M_0M_1 належав області D.

Введемо нову змінну t:

$$x = x_0 + t\Delta x, \quad y = y_0 + t\Delta y, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{36}$$

При $t = 0$ за цими формулами дістанемо координати точки M_0, а при $t = 1$ — координати точки M_1. Якщо t змінюватиметься на відрізку $[0; 1]$, то точка M $(x_0 + t\Delta x;\ y_0 + t\Delta y)$ опише весь відрізок M_0M_1. Тоді вздовж цього відрізка функція буде функцією однієї змінної t:

$$f(x, y) = f(x_0 + t\Delta x;\ y_0 + t\Delta y) = F(t). \tag{37}$$

Запишемо формулу (35) для функції (37) при $t = 0$, $\Delta t = 1$:

$$\Delta F(0) = dF(0) + \frac{d^2F(0)}{2!} + \cdots + \frac{d^nF(0)}{n!} + \frac{d^{n+1}F(\theta)}{(n+1)!}. \tag{38}$$

Обчислимо диференціали, що входять у формулу (38). З рівностей (36) і (37) маємо

$$dF(t) = df(x, y) = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy = f'_x(x, y)\,\Delta x dt +$$
$$+ f'_y(x, y)\,\Delta y dt.$$

Оскільки $dt = \Delta t = 1$, то

$$dF(0) = f'_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\,\Delta y = df(x_0, y_0). \tag{39}$$

Аналогічно

$$d^2F(t) = d^2f(x, y) = f''_{xx}(x, y)\,dx^2 + 2f''_{xy}(x, y)\,dxdy + f''_{yy}(x, y)\,dy^2,$$

$$d^2F(0) = \left(\frac{d}{dx}\Delta x + \frac{d}{dy}\Delta y\right)^2 f(x_0, y_0) = d^2f(x_0, y_0). \tag{40}$$

Продовжуючи цей процес, знайдемо

$$\begin{gathered} d^3F(0) + d^3f(x_0, y_0), \ \ldots, \ d^nF(0) = d^nf(x_0, y_0), \\ d^{n+1}F(\theta) = d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y). \end{gathered} \tag{41}$$

Крім того, приріст

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0) = f(M_1) - f(M_0) = \Delta f(x_0, y_0). \tag{42}$$

Підставивши вирази (39—42) у формулу (36), дістанемо

$$\Delta f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{d^2f(x_0, y_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^nf(x_0, y_0)}{n!} + R_{n+1}, \tag{43}$$

$$R_{n+1} = \frac{d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y)}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{44}$$

Формулу (43) називають *формулою Тейлора для функції двох змінних з залишковим членом* R_{n+1} *у формі Лагранжа*. Цю формулу

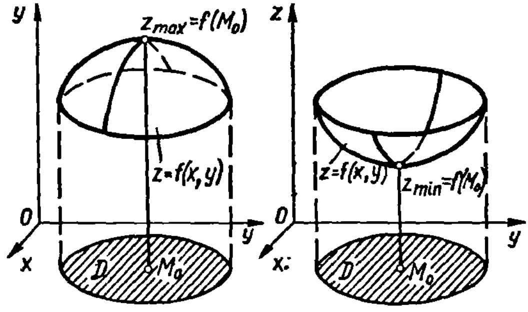


Рис. 6.14

використовують для наближених обчислень. Для різних значень n з формули (43) можна дістати рівності для наближеного обчислення значень функції $f(x, y)$. Абсолютну похибку цих наближених рівностей оцінюють через залишковий член (44).

Формула Тейлора (43) для функції двох змінних нагадує формулу Тейлора (35) для функції однієї змінної. Але насправді, якщо розкрити вирази для диференціалів у формулі (43), то дістанемо складнішу формулу, ніж для функції однієї змінної. Наприклад, при $n = 1$ формула (43) має вигляд:

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)=f'_x(x_0,\ y_0)\,\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\,\Delta y+$$
$$+\frac{1}{2!}\,[f''_{xx}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)\,\Delta x^2+2f''_{xy}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)\,\Delta x\Delta y+$$
$$+f''_{yy}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)\,\Delta y^2]. \qquad (45)$$

3.4. Локальні екстремуми функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області D, а точка $M_0(x_0;\ y_0) \in D$. Якщо існує окіл точки M_0, який належить області D і для всіх відмінних від M_0 точок M цього околу виконується нерівність $f(M) < f(M_0)$ ($f(M) > f(M_0)$), то точку M_0 називають *точкою локального максимуму (мінімуму) функції* $f(x, y)$, а число $f(M_0)$ — *локальним максимумом (мінімумом)* цієї функції (рис. 6.14). Точки максимуму та мінімуму функції називають її *точками екстремуму.*

Це означення можна перефразувати так. Покладемо $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, тоді

$$f(x, y)-f(x_0, y_0)=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)=\Delta f(x_0,\ y_0).$$

Якщо приріст функції $\Delta f(x_0, y_0) < 0$ ($\Delta f(x_0, y_0) > 0$) при всіх достатньо малих за абсолютною величиною приростах Δx і Δy, то функція $f(x, y)$ в точці $M_0(x_0;\ y_0)$ досягає локального максимуму $z_{max} = f(x_0, y_0)$ (локального мінімуму $z_{min} = f(x_0, y_0)$). Інакше кажучи, в околі екстремальної точки прирости функції мають один і той самий знак.

Теорема 1 *(необхідні умови екстремуму). Якщо функція $z = f(x, y)$ має в точці $(x_0;\ y_0)$ локальний екстремум, то в цій точці частинні похідні першого порядку по змінних x та y дорівнюють нулю або не існують.*

○ Нехай (x_0; y_0) — точка екстремуму. Тоді функція $f(x, y_0)$ буде функцією однієї змінної. Ця функція має екстремум у точці $x = x_0$, тому її похідна $f'_x(x_0, y_0)$ дорівнює нулю або не існує (гл. 5, п. 6.2).

Аналогічно, розглянувши функцію $f(x_0, y)$, дістанемо, що $f'_y(x_0, y_0)$ дорівнює нулю або не існує. ●

Подібна теорема справедлива для функції n змінних. Точку (x_0; y_0), в якій частинні похідні першого порядку функції $f(x, y)$ дорівнюють нулю, тобто $f'_x = f'_y = 0$, називають *стаціонарною точкою функції* $f(x, y)$.

Стаціонарні точки та точки, в яких частинні похідні не існують, називаються *критичними точками.*

Таким чином, якщо функція в якій-небудь точці досягає екстремуму, то це може статися лише в критичній точці. Проте не всяка критична точка є точкою екстремуму, тобто теорема 1 встановлює лише необхідні, але не достатні умови екстремуму. Наприклад, частинні похідні функції $z = x^2 - y^2$ (рис. 3.71) дорівнюють нулю в точці (0; 0). Але ця функція у вказаній точці екстремуму не має, тому що в досить малому околі точки (0; 0) вона набуває як додатних (при $|x| > |y|$), так і від'ємних (при $|x| < |y|$) значень.

Слід зазначити, що в задачах з практичним змістом, як правило, відомо, що функція має екстремум. Якщо така функція має лише одну критичну точку, то ця точка і буде точкою екстремуму.

Приклад

Відкритий прямокутний басейн повинен мати об'єм V. Знайти розміри басейну, за яких на його облицювання піде найменша кількість матеріалу.

○ Нехай x — довжина, y — ширина, z — висота басейну, тоді $V = xyz$, звідки $z = \dfrac{V}{xy}$.

Кількість матеріалу, необхідного для облицювання басейну, визначається формулою

$$S = xy + 2yz + 2xz$$

або

$$S = S(x, y) = xy + 2V\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

Треба знайти мінімум функції $S(x, y)$, якщо $x > 0$, $y > 0$. Знайдемо стаціонарні точки функції $S(x, y)$. Маємо

$$S'_x(x, y) = y - \frac{2V}{x^2}, \quad S'_y(x, y) = x - \frac{2V}{y^2};$$

$$\begin{cases} y - \dfrac{2V}{x^2} = 0; \\ x - \dfrac{2V}{y^2} = 0; \quad x = y = \sqrt[3]{2V}. \end{cases}$$

Отже, функція $S(x, y)$ має тільки одну стаціонарну точку $M(\sqrt[3]{2V}; \sqrt[3]{2V})$, яка і є її точкою мінімуму, бо, згідно з умовою задачі, мінімум функції $S(x, y)$ існує. Обчисливши відповідне значення z, дістанемо

$$z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}.$$

Таким чином, басейн повинен мати висоту, рівну $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$, і квадратну основу із стороною, рівною $\sqrt[3]{2V}$. ●

Теорема 2 *(достатні умови екстремуму). Нехай в стаціонарній точці $M_0(x_0; y_0)$ і деякому її околі функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку. Якщо*

$$\Delta(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0,$$

то функція $f(x, y)$ має в точці M_0 екстремум, причому максимум при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ і мінімум при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$. Якщо $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то в точці M_0 функція $f(x, y)$ екстремуму не має.

○ Запишемо формулу Тейлора (45) для функції $f(x, y)$ в околі стаціонарної точки M_0. Враховуючи, що $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$, дістанемо:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= \frac{1}{2!}[f''_{xx}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x\Delta y +$$
$$+ f''_{yy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y^2], \quad 0 < \theta < 1.$$

У випадку мінімуму для довільних достатньо малих значень $|\Delta x|$ та $|\Delta y|$ права частина цієї рівності повинна бути додатною, а у випадку максимуму — від'ємною.

Внаслідок неперервності других частинних похідних для цього достатньо, щоб диференціал другого порядку в точці M_0

$$d^2 f(M_0) = f''_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0, x_0)\Delta y^2$$

зберігав знак для малих значень $|\Delta x|$ та $|\Delta y|$.

Введемо такі позначення: $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, тоді $\Delta(x_0, y_0) = AC - B^2$.

Нехай φ — кут між відрізком $M_0M = \rho$, де M — точка з координатами $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ і віссю Ox; тоді $\Delta x = \rho\cos\varphi$, $\Delta y = \rho\sin\varphi$, тому при $A \neq 0$ маємо

$$d^2 f(M_0) = A\rho^2\cos^2\varphi + 2B\rho^2\sin\varphi\cos\varphi + C\rho^2\sin^2\varphi =$$
$$= \frac{\rho^2}{A}[(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC - B^2)\sin^2\varphi] =$$
$$= \frac{\rho^2}{A}[(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + \Delta(x_0, y_0)\sin^2\varphi].$$

Розглянемо тепер п'ять можливих випадків.

1) Нехай $\Delta(x_0, y_0) > 0$ і $A < 0$, тоді $d^2f(M_0) < 0$, тому при досить малих значеннях ρ приріст $\Delta f(x_0, y_0) < 0$, тобто функція $f(x, y)$ має в точці M_0 максимум.

2) Аналогічно доводимо, що коли $\Delta(x_0, y_0) > 0$ і $A > 0$, то функція $f(x, y)$ в точці M_0 має мінімум.

3) Нехай $\Delta(x_0, y_0) < 0$ і $A > 0$. Якщо з точки M_0 рухатись вздовж променя $\varphi = 0$, то $d^2f(M_0) = \rho^2 A > 0$. Якщо взяти $\varphi = \varphi_1$ таким, щоб $A\cos\varphi_1 + B\sin\varphi_1 = 0$ або $\operatorname{ctg}\varphi_1 = -\frac{B}{A}$, то

$$d^2f(M_0) = \frac{\rho^2}{A}\Delta(x_0\ \ y_0)\sin^2\varphi_1 < 0.$$

Отже, при малих значеннях ρ приріст $\Delta f(x_0, y_0)$ в околі точки M_0 не зберігає знак, тому ця точка не є точкою екстремуму функції $f(x, y)$.

4) Аналогічно встановлюємо, що коли $\Delta(x_0, y_0) < 0$ і $A < 0$, то функція $f(x, y)$ в точці M_0 також не має екстремуму.

5) Нехай $\Delta(x_0, y_0) = AC - B^2 < 0$ і $A = 0$, тоді $B \neq 0$ і

$$d^2f(M_0) = \rho^2\sin\varphi(2B\cos\varphi + C\sin\varphi).$$

При досить малих кутах φ знак величини $2B\cos\varphi + C\sin\varphi$ збігається із знаком B, тому знак величини $d^2f(M_0)$ залежатиме від знака множника $\sin\varphi$. Але знак величини $\sin\varphi$ змінюється при $\varphi > 0$ і $\varphi < 0$, бо $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$. Отже, в достатньо малому околі точки M_0 знак $\Delta f(x_0, y_0)$ не зберігається, тобто функція $f(x, y)$ в цій точці екстремуму не має. ●

Зауваження. З доведення теореми 2 випливають так звані *другі достатні умови екстремуму:* функція $f(x, y)$ має мінімум в стаціонарній точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо диференціал другого порядку в цій точці $d^2f(M_0) > 0$, і максимум — якщо $d^2f(M_0) < 0$.

Можна довести, що другі достатні умови екстремуму справедливі для функцій довільного числа змінних.

На основі теорем 1 і 2 дістанемо правило дослідження диференційовних функцій двох змінних на екстремум. Щоб знайти екстремум диференційовної функції $z = f(x, y)$, необхідно:

1) знайти стаціонарні точки функції із системи рівнянь:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0; \\ f'_y(x, y) = 0; \end{cases}$$

2) у кожній стаціонарній точці $(x_0; y_0)$ обчислити вираз

$$\Delta(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2;$$

якщо $\Delta(x_0, y_0) > 0$, то $(x_0; y_0)$ — точка екстремуму функції, причому точка максимуму при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ і мінімуму при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$; якщо $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то точка $(x_0; y_0)$ не є точкою екстремуму функції;

3) обчислити значення функції $f(x, y)$ в точках максимуму та мінімуму.

Якщо $\Delta(x_0, y_0) = 0$, то ніякого висновку про характер стаціонарної точки зробити не можна і потрібне додаткове дослідження.

Приклад

Знайти екстремуми функції $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

○ Знаходимо частинні похідні

$$z'_x = 4(x^3 - x + y), \quad z'_y = 4(y^3 + x - y).$$

Стаціонарні точки функції визначимо із системи:

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

Додаючи ці рівняння, знайдемо $x^3 + y^3 = 0$, звідки $y = -x$.

Підставляючи $y = -x$ в перше рівняння, дістанемо $x^3 - 2x = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$, тоді

$$y_1 = 0, \ y_2 = -\sqrt{2}, \quad y_3 = \sqrt{2}.$$

Отже, функція має три стаціонарні точки:

$$M_1(0;\ 0), \quad M_2(\sqrt{2};\ -\sqrt{2}), \ M_3(-\sqrt{2};\ \sqrt{2}).$$

Знайдемо величину $\Delta(x, y)$. Оскільки

$$f''_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4, \ f''_{xy}(x, y) = 4, \ f''_{yy}(x, y) = 12y^2 - 4,$$

то

$$\Delta(x, y) = 16(9x^2y^2 - 3x^2 - 3y^2).$$

Обчислимо величину $\Delta(x, y)$ в кожній стаціонарній точці:

$$\Delta(M_1) = 0, \ \Delta(M_2) = \Delta(M_3) = 384 > 0, \quad f''_{xx}(M_2) = f''_{xx}(M_3) = 20 > 0.$$

Таким чином, точки M_2 та M_3 — точки мінімуму. В цих точках $z_{\min} = -8$.

У точці M_1 значення $\Delta(M_1) = 0$, тому теорему 2 застосувати не можна. Переконаємось, що в цій точці екстремум відсутній. Дійсно, якщо $y = 0$, то $z = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0$ в околі точки M_1. Якщо $y = x$, то $z = 2x^4 > 0$. Отже, в околі точки M_1 значення z можуть бути як додатні, так і від'ємні, а це значить, що точка M_1 не є екстремальною. Відзначимо, що інших екстремумів задана функція не має, оскільки точки, в яких похідні z'_x і z'_y не існують, відсутні.

3.5. Найбільше та найменше значення функції

Відомо, що функція $z = f(x, y)$ задана і неперервна в замкненій та обмеженій області D, досягає в цій області найбільшого і найменшого значень. У внутрішніх точках області диференційовна функція може набувати цих значень лише в точках локального екстремуму. Тому треба знайти всі стаціонарні точки функції, які належать області D, розв'язавши систему рівнянь $f'_x(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$, і обчислити значення функції в цих точках. Потім потрібно дослідити функцію на екстремум на межі області D. Використовуючи рівняння межі, цю задачу зводять до знаходження абсолютного екстремуму функції однієї змінної (гл. 5, п. 6.3). Серед здобутих таким чином значень функції всередині і на межі області вибирають найбільше і найменше значення.

Зазначимо, що загального методу знаходження найбільшого та найменшого значень для довільної неперервної функції в замкненій та обмеженій області D немає.

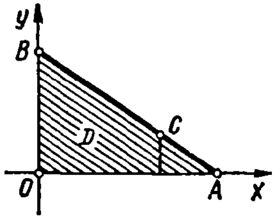


Рис. 6.15

Приклади

1. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2y\,(2 - x - y)$ в замкненій області D, обмеженій прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$ (рис. 6.15).

○ Знаходимо стаціонарні точки. Маємо

$$z'_x = xy\,(4 - 3x - 2y), \quad z'_y = x^2\,(2 - x - 2y).$$

Прирівнюючи похідні до нуля і скорочуючи їх на xy та x^2 (всередині трикутника OAB $x \neq 0$, $y \neq 0$), дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0; \\ 2 - x - 2y = 0, \end{cases}$$

звідки $x = 1$, $y = 1/2$.

Стаціонарна точка $M\,(1;\ 1/2)$ належить області D, тому обчислюємо значення $z\,(M) = 1/4$.

Рівняннями сторін OB та OA трикутника є $x = 0$ та $y = 0$, тому значення функції $z = 0$ в усіх точках відрізків OB і OA, зокрема $z\,(0) = z\,(A) = z\,(B) = 0$.

Знайдемо стаціонарні точки на стороні AB трикутника OAB. Рівняння цієї сторони $y = 6 - x$, тому $z = x^2\,(6 - x)\,(2 - x - 6 + x) = -4x^2\,(6 - x)$, $0 \leqslant x \leqslant 6$.

Далі дістанемо

$$z'_x = -48x + 12x^2 = 0,$$

звідки $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Оскільки $y = 6 - x$, то $y_1 = 6$, $y_2 = 2$.

Знаходимо точки $B\,(0;\ 6)$ і $C\,(4;\ 2)$ і обчислюємо значення $z\,(C) = -128$.

Порівнюючи значення заданої функції в точках A, B, C, O, M, знаходимо найбільше та найменше значення:

$$\max_{(x,y)\in D} z = \frac{1}{4}, \quad \min_{(x,y)\in D} z = -128. \ \bullet$$

2. *(Задача про екстракцію оцтової кислоти з розбавленого бензолом водяного розчину)*. Загальний об'єм бензолу V ділиться на три частини: V_1, V_2, V_3 для трьох послідовних екстрагувань кислоти з водяного шару. За яких умов відбудеться максимальне вилучення кислоти при екстракції?

○ Екстракція (від лат. extraho — витягую, вилучаю) — це розділення суміші речовин за допомогою розчинника, в якому складові частини суміші розчиняються неоднаково. Її застосовують для одержання чистих речовин в хімічній, а найчастіше в харчовій (головним чином у цукровій) промисловості.

Нехай x_0 — початкова концентрація оцтової кислоти в об'ємі a водяного шару. Вважатимемо, що при перемішуванні об'єм не змінюється і після кожної екстракції справджується закон розподілу $y = kx$, тобто $y_1 = kx_1$, $y_2 = kx_2$, $y_3 = kx_3$, де x — концентрація кислоти у водяному розчині; k — коефіцієнт розподілу; y — концентрація кислоти в бензолі, а індекси 1, 2, 3 показують порядковий номер екстракції.

З матеріального балансу для першої екстракції дістанемо

$$ax_0 = V_1y_1 + ax_1 = V_1kx_1 + ax_1,$$

звідки

$$x_1 = \frac{ax_0}{a + V_1k};$$

аналогічно для другої і третьої екстракцій відповідно маємо

$$x_2 = \frac{ax_1}{a + V_2k} = \frac{a^2x_0}{(a + V_1k)(a + V_2k)};$$

$$x_3 = \frac{ax_2}{a + V_3k} = \frac{a^3x_0}{(a + V_1k)(a + V_2k)(a + V_3k)}.$$

Вилучення кислоти для заданої кількості бензолу максимальне при мінімальному значенні x_3. Оскільки a^3x_0 — стала величина, то x_3 буде мінімальним, якщо знаменник $u(V_1, V_2, V_3) = (a + V_1k)(a + V_2k)(a + V_3k)$ буде максимальним за умови, що $V_1 + V_2 + V_3 = V$.

Виключивши змінну V_3, дістанемо задачу на знаходження екстремуму функції двох змінних:

$$u(V_1, V_2) = (a + V_1k)(a + V_2k)(a + Vk - V_1k - V_2k).$$

Оскільки

$$\frac{\partial u}{\partial V_1} = k(a + V_2k)[(a + Vk - V_1k - V_2k) - (a + V_1k)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial V_2} = k(a + V_1k)[a + Vk - V_1k - V_2k) - (a + V_2k)],$$

то із системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial V_1} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial V_2} = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} k^2(a + V_2k)(V - 2V_1 - V_2) = 0, \\ k^2(a + V_1k)(V - V_1 - 2V_2) = 0 \end{cases}$$

маємо $V_1 = V_2 = \frac{V}{3}$, тобто функція $u(V_1, V_2)$ має тільки одну стаціонарну точку $\left(\frac{V}{3}; \frac{V}{3}\right)$, яка і є її точкою максимуму, бо згідно з умовою задачі максимум функції $u(V_1, V_2)$ існує. Обчисливши значення $V_3 = V - V_1 - V_3 = \frac{V}{3}$, бачимо, що $V_1 = V_2 = V_3 = \frac{V}{3}$. За таких умов відбудеться максимальне вилучення оцтової кислоти.

Можна показати, що знайдений результат є загальним: для максимального вилучення речовин при екстракції треба користуватись рівними кількостями розчинника у вигляді окремих порцій незалежно від того, на скільки частин розділена загальна кількість розчинника V. ●

3.6. Умовний екстремум

Нехай в області D задано функцію $z = f(x, y)$ і лінію L, яка визначається рівнянням $\varphi(x, y) = 0$ та лежить в цій області.

Задача полягає в тому, щоб на лінії L знайти таку точку $M(x; y)$, в якій значення функції $f(x, y)$ є найбільшим або найменшим порівняно із значеннями цієї функції в інших точках лінії L. Такі точки M називають *точками умовного екстремуму функції* $f(x, y)$ на лінії L. На відміну від звичайного екстремуму значення функції в точці умовного екстремуму порівнюється із значеннями цієї функції не в усіх точках області D (чи δ-околу точки M), а лише в точках, які лежать на лінії L.

Назва «умовний екстремум» пов'язана з тим, що змінні x та y мають додаткову умову: $\varphi(x, y) = 0$.

Рівняння $\varphi(x, y) = 0$ називається *рівнянням зв'язку;* якщо це рівняння можна розв'язати відносно однієї змінної, наприклад y: $y = \psi(x)$, то, підставляючи замість y значення $\psi(x)$ у функцію $z = f(x, y)$, дістаємо функцію однієї змінної $z = f(x, \psi(x))$. Оскільки додаткова умова врахована, то задача знаходження умовного екстремуму зводиться до задачі на звичайний екстремум функції однієї змінної (гл. 5, п. 6.2).

Проте не завжди можна розв'язати рівняння зв'язку відносно y чи x. Тоді розв'язують поставлену задачу так.

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$, де $y = \psi(x)$, як складену функцію (гл. 4, п. 2.4). З необхідної умови екстремуму випливає, що в точках екстремуму

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (46)$$

У цьому випадку $\frac{dy}{dx}$ означає похідну неявної функції y, заданої рівняннями зв'язку $\varphi(x, y) = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}, \text{ тому } \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right) = 0,$$

тобто

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y}.$$

Позначивши останні відношення через $(-\lambda)$ $(\lambda \neq 0)$ (знак мінус взято для зручності, а саме число λ може мати довільний знак), знайдемо, що в точці умовного екстремуму виконуються умови

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y} = -\lambda, \text{ тобто } f'_x + \lambda\varphi'_x = 0,\ f'_y + \lambda\varphi'_y = 0.$$

Отже, стаціонарні точки умовного екстремуму мають задовольняти систему рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \end{cases} \qquad (47)$$

Аналізуючи цю систему, помічаємо, що знаходження умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$ звелось до знаходження звичайного екстремуму функції

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y). \qquad (48)$$

Функція (48) називається *функцією Лагранжа*, а число λ — *множником Лагранжа*.

Умови (47) є лише необхідними. Вони дають змогу знайти стаціонарні точки умовного екстремуму. З теореми 2 (п. 3.4) випливає, що характер умовного екстремуму (достатні умови) можна встановити за знаком диференціала другого порядку функції Лагранжа: якщо в стаціонарній точці $d^2F > 0$ ($d^2F < 0$), то ця точка є точкою умовного мінімуму (максимуму).

Для функції $u = f(x, y, z)$ з рівняннями зв'язку $\varphi_1(x, y, z) = 0$, $\varphi_2(x, y, z) = 0$ функція Лагранжа записується у вигляді

$$\Phi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1\varphi_1(x, y, z) + \lambda_2\varphi_2(x, y, z).$$

Стаціонарні точки умовного екстремуму знаходяться із системи рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0; \\ \varphi_2(x, y, z) = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

а достатні умови існування умовного екстремуму в цих точках можна визначити за знаком диференціала $d^2\Phi$.

Розглянутий метод можна поширити на дослідження умовного екстремуму функції довільного числа змінних.

Приклад

Знайти найбільше значення функції $z = xy$, якщо x та y додатні і задовольняють рівняння зв'язку

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0.$$

○ Складаємо функцію Лагранжа (48):

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right).$$

Користуючись системою (47), знаходимо стаціонарні точки цієї функції:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1 = 0; \\ y + \lambda\dfrac{x}{4} = 0; \\ x + \lambda y = 0; \\ x > 0, \quad y > 0, \end{cases}$$

звідки $x = 2$, $y = 1$, $\lambda = -2$. Отже, маємо одну стаціонарну точку M (2; 1; —2). Щоб визначити характер умовного екстремуму в цій точці, знайдемо за допомогою формули (18) другий диференціал функції Лагранжа при $\lambda = -2$:

$$d^2F = -\frac{1}{2}dx^2 + 2dxdy - 2dy^2 + \left(y - \frac{x}{2}\right)d^2x + (x - 2y)\,d^2y.$$

Знайшовши з рівняння зв'язку $dy\,(2;1) = -\frac{1}{2}dx$, дістанемо

$$d^2F\,(M) = -\frac{1}{2}dx^2 + 2dx\left(-\frac{1}{2}dx\right) - 2\left(-\frac{1}{2}dx\right)^2 = -2dx^2 < 0,$$

тому точка (2; 1) є точкою умовного максимуму функції $z = xy$. При цьому $z_{max} = 2$.

Цей результат легко перевірити, знайшовши звичайний екстремум функції:

$$z = x\sqrt{2 - \frac{x^2}{4}}. \bullet$$

Завдання для самоконтролю

1. Вивести рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні, заданої рівнянням $F(x, y, z) = 0$.
2. У чому полягає геометричний зміст повного диференціала функції двох змінних.
3. Що називається скалярним полем? Дати приклади.
4. Вивести формулу для похідної за напрямом.
5. У чому полягає фізичний зміст похідної за напрямом?
6. Дати означення градієнта скалярного поля. Довести теорему про зв'язок градієнта і похідної за напрямом.
7. Сформулювати і довести властивості градієнта.

8. Написати формулу Тейлора для функції двох змінних, користуючись диференціалами вищих порядків. Розкрити зміст формули при $n = 0, 1, 2$.

9. Дати визначення точки локального екстремуму.

10. Сформулювати і довести теорему про необхідні умови локального екстремуму функції кількох змінних.

11. Сформулювати і довести теорему про достатні умови локального екстремуму функції двох змінних.

12. Дати означення і описати спосіб знаходження умовного екстремуму.

13. У якому випадку задачу на умовний екстремум можна звести до задачі на звичайний екстремум?

14. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі в точці (1; 2; 1) до однопорожнинного гіперболоїда $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 5$.

15. Знайти похідну функції $u = y^2z - 2xyz + z^2$ в точці (3; 1; 1) за напрямом вектора, який утворює з координатними осями кути $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$.

16. Знайти похідну функції $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точці M (3; 4) за напрямом градієнта функції в цій точці.

17. Знайти екстремуми функції $z = x^3y^2(1 - x - y)$.

18. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x + y$ в крузі $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

19. Знайти умовний екстремум функції $z = xy$, якщо $y + x^2 - 3 = 0$. Розв'язати задачу двома способами: за допомогою функції Лагранжа і як задачу на звичайний екстремум функції однієї змінної.

Відповіді. 14. $x + 4y - 4z - 5 = 0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{4}$. 15. $\frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{5 + 4\sqrt{2}}{2}$. 16. $\frac{2}{5}$. 17. $z_{\max} = z\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{432}$. 18. $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$. *Вказівка.* При знаходженні стаціонарних точок на межі області скористатись параметричними рівняннями кола. 19. $z_{\max} = 2$, $z_{\min} = -2$.

Глава 7

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Інтеграл — одне з центральних понять математичного аналізу і всієї математики. Воно виникло у зв'язку з двома основними задачами: 1) про відновлення функції по заданій її похідній; 2) про обчислення площі, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, прямими $x = a$, $x = b$ і віссю Ox (подібні задачі дістаємо при обчисленні багатьох інших величин, наприклад роботи, яку виконує сила протягом деякого часу, тощо). Термін «інтеграл» ввів Я. Бернуллі у 1690 р. Цікаво, що в історії математики цей термін пов'язують з двома латинськими словами: integro — відновляти та integer — цілий.

Вказані дві задачі приводять до двох пов'язаних між собою видів інтегралів: невизначеного і визначеного. Вивчення властивостей і обчислення цих інтегралів і складають основну задачу інтегрального числення.

Елементи інтегрального числення закладено у працях математиків Стародавньої Греції. Основні поняття і початки теорії інтегрального числення, насамперед зв'язок його з диференціальним численням, а також застосування їх до розв'язування практичних задач, розроблені в кінці 17 ст. Ньютоном і Лейбніцем. Далі історичний розвиток інтегрального числення пов'язаний з іменами Л. Ейлера, О. Коші, Б. Рімана та інших вчених.

§ 1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Основною задачею диференціального числення є знаходження похідної $f'(x)$ заданої функції $f(x)$. Одне з можливих фізичних трактувань цієї задачі — визначення швидкості руху за функцією, яка задає пройдений шлях за час руху. З практичної точки зору природною є обернена задача, а саме, визначення пройденого шляху за відомою швидкістю руху як функцією часу. Більш формально, остання задача є знаходженням функції $f(x)$ за відомою її похідною $f'(x)$. Розв'язується ця задача за допомогою невизначеного інтеграла.

1.1. Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла

Функція $F(x)$ називається *первісною функції* $f(x)$ на проміжку $\langle a;\ b\rangle$, якщо $F(x)$ диференційовна на $\langle a;\ b\rangle$ і $F'(x) = f(x)$, $x \in \langle a;\ b\rangle$.

Наприклад: 1) первісною функції $f(x) = x^2$, $x \in R$ є функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$ $\left(\text{справді, } F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2,\quad x \in R\right)$; очевидно, що первісними будуть також функції $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$, $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2$ і взагалі $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, де C — довільна стала, оскільки $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2,\quad x \in R$;

2) функція $f(x) = \cos x$, $x \in R$ має первісну функцію $F(x) = \sin x + C$, бо $F'(x) = (\sin x + C)' = \cos x$, $x \in R$.

Розглянуті приклади показують, що задача знаходження первісної розв'язується неоднозначно. Інакше кажучи, якщо для функції $f(x)$ існує первісна $F(x)$, то ця первісна не одна. Виникає запитання: як знайти всі первісні даної функції, якщо відома хоча б одна з них? Відповідь дає така теорема.

Теорема. *Якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на проміжку $\langle a;\ b\rangle$, то всяка інша первісна функції $f(x)$ на цьому самому проміжку має вигляд $F(x) + C$.*

○ Нехай $\Phi(x)$ — деяка інша, крім $F(x)$, первісна функції $f(x)$, тобто $\Phi'(x) = f(x)$, $x \in \langle a;\ b\rangle$. Маємо

$$\forall x \in \langle a;\ b\rangle : [\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

а це означає (гл. 5, п. 5.2, прикл. 4), що $\Phi(x) - F(x) = C$. Отже, $\Phi(x) = F(x) + C$. ●

З цієї теореми випливає, що множина функцій $F(x) + C$, де $F(x)$ — одна з первісних функції $f(x)$, а C — довільна стала, визначає всю сукупність первісних заданої функції.

Якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на проміжку $\langle a;\ b\rangle$ і C — довільна стала, то вираз $F(x) + C$ називається *невизначеним інтегралом функції* $f(x)$ на цьому проміжку і позначається символом $\int f(x)\,dx$. Таким чином, символ $\int f(x)\,dx$ означає множину всіх первісних функції $f(x)$.

Знак $\int$, який ввів Лейбніц, називається *інтегралом*, $f(x)\,dx$ — підінтегральним виразом, $f(x)$ — підінтегральною функцією, x — змінною інтегрування. Отже, за означенням,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \text{ якщо } F'(x) = f(x), \quad x \in \langle a;\ b\rangle. \tag{1}$$

Операцію знаходження невизначеного інтеграла від функції називають інтегруванням цієї функції.

З погляду геометрії невизначений інтеграл є множиною кривих, кожна з яких називається *інтегральною кривою* і утворюється зсувом однієї з них паралельно самій собі уздовж осі Oy (рис. 7.1). Щоб з цієї множини виділити певну інтегральну криву $F(x)$, достатньо задати її значення $F(x_0)$ в якій-небудь точці $x_0 \in \langle a;\ b\rangle$.

З рівностей (1) випливають такі *властивості невизначеного інтеграла.*

1°. *Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Інакше кажучи, знаки похідної і невизначеного інтеграла взаємно знищуються. Це природно, бо операції диференціювання та інтегрування — взаємно обернені. Внаслідок цього правильність виконання операції інтегрування перевіряється диференціюванням. Наприклад,

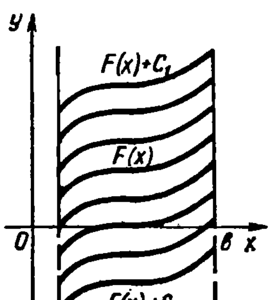


Рис. 7.1

$$\int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C,$$

$$\left(-\frac{\cos 2x}{2} + C\right)' = \sin 2x;$$

$$\int e^{\frac{x}{3}} dx = 3e^{\frac{x}{3}} + C, \ (3e^{\frac{x}{3}} + C)' = e^{\frac{x}{3}};$$

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C, \ \left(\frac{2^x}{\ln 2} + C\right)' = 2^x.$$

2°. *Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої:*

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

3°. *Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:*

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = \left(\int f(x)\,dx\right)'dx = f(x)\,dx.$$

4°. *Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:*

$$\int Cf(x)\,dx = C\int f(x)\,dx.$$

5°. *Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій:*

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

Властивості 4° і 5° перевіряються диференціюванням на основі властивості 1°. Властивість 5° справедлива для довільного скінченного числа доданків.

6°. *Якщо*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

і $u = \varphi(x)$ *— довільна функція, що має неперервну похідну, то*

$$\int f(u)\,du = F(u) + C. \qquad (2)$$

○ Внаслідок інваріантності форми першого диференціала (гл. 5, п. 3.2) і властивості 2° маємо

$$dF(u) = F'(u)\,du = f(u)\,du;$$

$$\int f(u)\,du = \int dF(u) = F(u) + C. \ \bullet$$

Ця властивість (її називають інваріантністю формули інтегрування) дуже важлива. Вона означає, що та чи інша формула для невизначеного інтеграла залишається справедливою незалежно від того, чи змінна інтегрування є незалежною змінною, чи довільною функцією від неї, що має неперервну похідну. Таким чином, кількість інтегралів, які обчислюються (або, як кажуть, «беруться»), необмежено збільшується. Наприклад, $\int x^2dx = \frac{x^3}{2} + C$, оскільки $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$.

Користуючись інваріантністю цієї формули, одержимо формулу $\int u^2du = \frac{u^3}{3} + C$, де $u = \varphi(x)$ — довільна функція, що має неперервну похідну. Зокрема:

$$\int (\sin^2 x)\, d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C,$$

тобто

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C;$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C,$$

тобто

$$\int \operatorname{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C;$$

$$\int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C,$$

тобто

$$\int \ln^2 x \frac{dx}{x} = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

Природно, виникає запитання: чи для всякої функції існує невизначений інтеграл? Негативну відповідь на це запитання дає такий приклад: нехай

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Покажемо, що функція $f(x)$ на проміжку $(-1;\ 1)$ не має первісної. Припустимо протилежне. Нехай існує така функція $F(x)$, що $\forall x \in \in (-1;\ 1)$: $F'(x) = f(x)$. Тоді з теореми Лагранжа на відрізку $[0;\ x]$, $0 < x < 1$, випливає, що

$$\exists c \in (0;\ x) : F(x) - F(0) = F'(c)\, x = f(c)\, x = x \Rightarrow F'_+(0) = 1$$

($F'_+(0)$ — права похідна функції $F(x)$ в точці $x = 0$). Але $F'_+(0) = = F(0) = 0$. Одержане протиріччя означає, що задана функція первісної не має.

Цей приклад показує, що потрібна теорема, яка б гарантувала існування невизначеного інтеграла.

В п. 2.4 буде доведено, що всяка неперервна на проміжку $\langle a;\ b\rangle$ функція має на цьому проміжку первісну. У зв'язку з цим надалі вважатимемо, що підінтегральна функція розглядається лише на тих проміжках, де вона неперервна.

1.2. Таблиця основних інтегралів

Частина формул таблиці основних інтегралів безпосередньо випливає з означення інтегрування як операції, оберненої до операції диференціювання, таблиці похідних і формули (2). Справедливість інших формул можна перевірити диференціюванням.

Інтеграли цієї таблиці називаються табличними. Їх треба знати напам'ять з двох причин. По-перше, мета існуючих методів інтегрування полягає в тому, щоб звести (перетворити) шуканий інтеграл до табличного. Отже, табличний інтеграл треба вміти розпізнавати. По-друге, як зазначено в кінці попереднього пункту, внаслідок інваріантності кожен табличний інтеграл «породжує» безліч інтегралів, що легко обчислюються на основі табличного.

Нехай $u = u(x)$ — довільна функція, що має на деякому проміжку неперервну похідну $u'(x)$; тоді на цьому проміжку справедливі такі формули:

1. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$
3. $\int a^{u} du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C.$
4. $\int e^{u} du = e^{u} + C.$
5. $\int \sin u du = -\cos u + C.$
6. $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C.$
7. $\int \cos u du = \sin u + C.$
8. $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C.$
9. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C.$
10. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C.$
11. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$
12. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$
13. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$
14. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$
15. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{u}{2}\right| + C.$
16. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)\right| + C.$

17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$

18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm A}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm A}| + C.$

19. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C.$

20. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$

21. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C.$

22. $\int \sqrt{u^2 + A}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + A} + \frac{A}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 + A}| + C.$

1.3. Основні методи інтегрування

Операція інтегрування значно складніша, ніж операція диференціювання. У диференціальному численні таблиця похідних і правила диференціювання функцій дають змогу знайти похідну довільної диференційовної функції. В інтегральному численні таких простих і універсальних правил інтегрування не існує. Відсутнє, наприклад, загальне правило інтегрування добутку двох функцій, навіть якщо первісні кожної з них відомі. Те саме стосується частки двох функцій і складеної функції. Інтегрування вимагає, так би мовити, індивідуального підходу до кожної підінтегральної функції.

Основними методами інтегрування є безпосереднє інтегрування, метод підстановки та інтегрування частинами.

1°. *Метод безпосереднього інтегрування.* Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла і таблиці інтегралів називають безпосереднім інтегруванням.

Приклад

Знайти інтеграли:

а) $\int \left(2x + \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$; б) $\int \left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2 dx$;

в) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$; г) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

○ а) $\int \left(2x + \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) dx = 2\int x dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx + 3\int x^{-\frac{1}{3}} dx = 2\left(\frac{x^2}{2} + \right.$

$\left. + C_1\right) + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C_2 + 3\left(\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C_3\right) = x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} +$

$+ (2C_1 + C_2 + 3C_3) = x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + C.$

При кожному інтегруванні утворюються проміжні довільні сталі: C_1, C_2, C_3. Але в підсумку записують лише одну загальну сталу C тому, що коли C_1, C_2, C_3 — довільні сталі, то $2C_1 + C_2 + 3C_3 = C$ також є довільною сталою. Тому надалі стала C означатиме суму всіх проміжних сталих;

б) $\int \left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int \left(\cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) dx = \int (1 + \sin x)\, dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C;$

в) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C;$

г) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$ ●

2^0. *Метод підстановки (заміни змінної)*. Суть цього методу полягає у введенні нової змінної інтегрування. Він грунтується на такій теоремі.

Теорема. *Нехай $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на проміжку $\langle a; b\rangle$, тобто*

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C, \quad x \in \langle a;\ b\rangle,$$

і нехай функція $x = \varphi(t)$ визначена і диференційовна на проміжку $\langle \alpha; \beta\rangle$, причому множина значень цієї функції є проміжок $\langle a; b\rangle$. Тоді справедлива формула

$$\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t)) + C, \quad t \in \langle \alpha;\ \beta\rangle. \tag{3}$$

○ Справді, згідно з правилом диференціювання складеної функції, маємо

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\, \varphi'(t) = f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$$

і формула (3) випливає з властивості 1^0 п. 1.1. ●

Доведена теорема застосовується, як правило, одним із таких двох способів:

1) Інтеграл $\int g(x)\, dx$ записують у вигляді

$$\int g(x)\, dx = \int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx,$$

у якому для функції f відома первісна F; тоді за формулою (3)

$$\int g(x)\, dx = \int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = F(\varphi(x)) + C.$$

Практично зручнішим є такий запис:

$$\int g(x)\, dx = \int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \varphi(x) = u \\ \varphi'(x)\, dx = du \end{matrix} \right| = \int f(u)\, du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C. \tag{4}$$

2) Інтеграл $\int g(x)\,dx$ зображають у вигляді

$$\int g(x)\,dx = \int g(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt,$$

де функція $x = \psi(t)$ має обернену функцію $t = \psi^{-1}(x)$ і для функції $g(\psi)\,\psi'$ відома первісна G, тоді

$$\int g(x)\,dx = \int g(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt = G(t) + C = G(\psi^{-1}(x)) + C. \qquad (5)$$

Зазначимо, що формули (4) і (5) відрізняються «проміжними» інтегралами:

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \quad \text{і} \quad \int g(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt.$$

У першому з цих інтегралів і формулі (4) йдеться про *«введення функції під знак диференціала»*: $\varphi'(x)\,dx = d\varphi(x) = du$, а в другому і формулі (5) — про *«виведення функції з-під знака диференціала»*: $dx = d\psi(t) = \psi'(t)\,dt$.

Спільним у формулах (4) і (5) є зворотний перехід у результаті інтегрування від змінних u і t до змінної x. Інакше кажучи, після обчислення невизначеного інтеграла методом підстановки потрібно від введеної змінної інтегрування перейти до заданої.

Таким чином, при інтегруванні заміною змінної виконуються підстановки двох видів: $u = \varphi(x)$ і $x = \psi(t)$. Ці підстановки підбирають так, щоб одержані після перетворень нові інтеграли у формулах (4) і (5) були табличними, або зводились до відомих. Загальних методів підбору підстановок не існує. Вміння правильно визначити підстановку набувається практикою.

Розглянемо приклади на застосування формул (4) і (5), з найпростішими з них ми уже зустрічались в п. 1.1.

Приклади

1. Знайти інтеграли:

а) $\displaystyle\int \frac{(2\ln x + 3)^3}{x}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{3 + 5\,\mathrm{ctg}\,x}}{\sin^2 x}\,dx$; в) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{x}{2}}\,dx}{e^x - 1}$.

○ а) Маємо $\displaystyle\int \frac{(2\ln x + 3)^2}{x}\,dx = \left| \begin{array}{l} u = 2\ln x + 3 \\ du = 2\dfrac{dx}{x} \\ \dfrac{du}{2} = \dfrac{dx}{x} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{1}{8} \times$

$\times\, u^4 + C = \dfrac{1}{8}(2\ln x + 3)^4 + C.$

При достатньому вмінні диференціювати і знанні таблиць інтегралів змінну u у формулі (4) можна не вводити (але мати її на увазі).

б) $\int \frac{\sqrt[3]{3+5\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{5}\int (3+5\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{3}} d(3+5\operatorname{ctg} x) = -\frac{3}{20} \times$
$\times (3+5\operatorname{ctg} x)^{\frac{4}{3}} + C.$

в) $\int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x - 1} dx = \int \frac{e^{\frac{x}{2}} dx}{(e^{\frac{x}{2}})^2 - 1} = 2\int \frac{d(e^{\frac{x}{2}})}{(e^{\frac{x}{2}})^2 - 1} = \ln\left|\frac{e^{\frac{x}{2}} - 1}{e^{\frac{x}{2}} + 1}\right| +$
$+ C.$ ●

2. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{x^3}{x-1} dx$; б) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

○ а) Маємо $\int \frac{x^3}{x-1} dx = \left|\begin{matrix} u = x-1 \\ du = dx \\ x = u+1 \end{matrix}\right| = \int \frac{(u+1)^3}{u} du =$

$= \int \frac{u^3 + 3u^2 + 3u + 1}{u} du = \int \left(u^2 + 3u + 3 + \frac{1}{u}\right) du = \frac{u^3}{3} + \frac{3}{2} u^2 + 3u +$
$+ \ln|u| + C = \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{3}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + \ln|x-1| + C.$

б) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left|\begin{matrix} x = a\sin t \\ dx = a\cos t\, dt \\ t = \arcsin \frac{x}{a} \end{matrix}\right| = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\; a\cos t\, dt = a^2 \times$
$\times \int \cos^2 t\, dt = \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = \frac{a^2}{2}(t + \sin t \times$
$\times \sqrt{1 - \sin^2 t}) + C = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)}\right) +$
$+ C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \left|\begin{matrix} t = \sqrt{x^2+a} + x \\ dt = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a}} + 1\right) dx \\ \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{dt}{\sqrt{x^2+a}+x} = \frac{dt}{t} \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| +$
$+ C = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$
(тут ми застосували підстановку Ейлера, див. п. 1.7). ●

У прикладах б) і в) виведено формули 21 і 18 таблиці інтегралів.

3°. *Метод інтегрування частинами.* Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$ — функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні. Тоді (гл. 5, п. 3.2)

$$d(uv) = udv + vdu, \quad udv = d(uv) - vdu.$$

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, дістанемо

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu,$$

або

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{6}$$

Формула (6) називається *формулою інтегрування частинами.* Вона дає змогу звести обчислення інтеграла $\int udv$ до обчислення інтеграла $\int vdu$.

Як правило, підінтегральний вираз, який складає добуток udv, можна розбити на множники u та dv кількома способами. Вміння подати підінтегральну функцію через u та dv так, щоб інтеграл справа у формулі (6) був простішим, ніж інтеграл зліва, виробляється в процесі обчислення інтегралів.

Зазначимо, що під час знаходження функції v за диференціалом dv вважають, що стала $C = 0$, оскільки на кінцевий результат ця стала не впливає. Справді, підставивши $v + C$ формулу (6), маємо:

$$\int ud(v + C) = u(v + C) - \int (v + C)du;$$

$$\int udv = uv + uC - \int vdu - Cu = uv - \int vdu.$$

Іноді формулу (6) доводиться застосовувати кілька разів. Вкажемо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегрування частинами:

1) інтеграли виду $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$, де $P(x)$ — многочлен, а k — дійсне число. У цих інтегралах за u слід взяти множник $P(x)$, а за dv — вираз, що залишився;

2) інтеграли виду $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x) \times$ $\times \arccos x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} x\,dx$, де $P(x)$ — многочлен. У цих інтегралах слід взяти $dv = P(x)\,dx$;

3) інтеграли виду $\int e^{\alpha x}\sin \beta xdx$, $\int e^{\alpha x}\cos \beta xdx$, де α, β — дійсні числа. Тут після двократного застосування формули (6) утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв'язуючи це рівняння, знаходять інтеграл.

Приклади

1. Знайти інтеграли

а) $\int (2x + 1)\sin xdx$; б) $\int x^2\ln xdx$; в) $\int e^x\sin 2xdx$; г) $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

○ а) $\int (2x+1)\sin x dx = \begin{vmatrix} u = 2x+1, & du = 2dx \\ dv = \sin x dx, & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{vmatrix} =$

$= -(2x+1)\cos x - \int (-\cos x)\, 2dx = -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C;$

б) $\int x^3 \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, \ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^3 dx, \ v = \dfrac{x^4}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} x^4 \ln|x| - \frac{1}{4}\int x^4 \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} \times$

$\times x^4 \ln|x| - \frac{1}{16} x^4 + C;$

в) $\int e^x \sin 2x dx = \begin{vmatrix} u = e^x, & du = e^x dx \\ dv = \sin 2x dx, & v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{2} \times$

$\times \int e^x \cos 2x dx = \begin{vmatrix} u = e^x, & du = e^x dx \\ dv = \cos 2x dx, & v = \dfrac{\sin 2x}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \sin 2x -$

$- \frac{1}{4} \int e^x \sin 2x dx,$

звідки

$$\int e^x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \sin 2x - \frac{1}{4}\int e^x \sin 2x dx.$$

Дістали рівняння, з якого визначаємо шуканий інтеграл:

$$\int e^x \sin 2x dx = \frac{1}{5} e^x (\sin 2x - 2\cos 2x) + C;$$

г) $\int e^{\sqrt{x}} dx = \begin{vmatrix} x = t^2 \\ dx = 2t dt \\ t = \sqrt{x} \end{vmatrix} = 2\int t e^t dt = \begin{vmatrix} u = t, & du = dt \\ dv = e^t dt, & v = e^t \end{vmatrix} = 2\,(te^t -$

$- \int e^t dt) = 2e^t (t-1) + C = 2e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + C.$ ●

2. Вивести рекурентну формулу для інтеграла $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $n \in N$, $n > 1$.

○ $I_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^n} dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2 + a^2 - x^2}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} -\right.$

$\left. - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^n}\right) = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^n}.$

До останнього інтеграла застосуємо формулу (6):

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^n} = \int x \frac{x dx}{(x^2+a^2)^n} =$$

$$\left|\begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = \dfrac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n}, & v = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (x^2+a^2)^{-n} d(x^2+a^2) = \dfrac{-1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{-x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1},$$

отже,

$$I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\,\frac{2n-3}{2n-2}\,I_{n-1}. \qquad (7)$$

Формула (7) дає змогу знайти інтеграл I_n для будь-якого натурального числа $n > 1$. Обчислимо, наприклад, $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$.

Враховуючи, що

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$$

послідовно дістаємо:

$$I_2 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$$

$$I_3 = \frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2}\left(\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + C. \bullet$$

Використовуючи викладені тут методи інтегрування, перейдемо до інтегрування деяких видів функцій. Для цього будуть потрібні певні відомості з алгебри.

1.4. Поняття про комплексні числа

Комплексним числом називається вираз

$$z = a + bi, \qquad (8)$$

де a та b — дійсні числа, а символ i — *уявна одиниця*, яка визначається умовою $i^2 = -1$. При цьому число a називається *дійсною частиною комплексного числа* z і позначається $a = \operatorname{Re} z$, а b — *уявною частиною* z, $b = \operatorname{Im} z$ (від французьких слів: reel — дійсний, imaginaire — уявний).

Вираз, що стоїть справа у формулі (8), називається *алгебраїчною формою запису комплексного числа.*

Два комплексні числа $z = a + bi$ і $\bar{z} = a - bi$, які відрізняються лише знаком уявної частини, називаються *спряженими.*

Два комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ вважаються рівними ($z_1 = z_2$) тоді і тільки тоді, коли рівні їхні дійсні частини і рівні їхні уявні частини: $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Комплексне число $z = a + bi$ дорівнює нулю ($z = a + bi = 0$) тоді і тільки тоді, коли $a = b = 0$.

Комплексні числа можна зображати на площині. Якщо користуватись декартовою системою координат, то число (8) зображається точкою M $(a;\ b)$. Така площина умовно називається *комплексною площиною* змінної z, вісь Ox — *дійсною віссю*, а Oy — *уявною*.

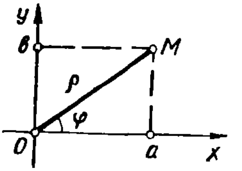


Рис. 7.2

Комплексне число $z = a + bi$ при $b = 0$ збігається з дійсним числом $a : z = a + 0 \cdot i = a$. Тому дійсні числа є окремим випадком комплексних, вони зображаються точками осі Ox.

Комплексні числа $z = a + bi$, в яких $a = 0$, називаються *суто уявними;* такі числа зображаються точками осі Oy.

Полярні координати точки M $(a;\ b)$ на комплексній площині називаються *модулем і аргументом комплексного числа* і позначаються

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Оскільки $a = \rho\cos\varphi$, $b = \rho\sin\varphi$ (рис. 7.2), то з формули (8) маємо

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{9}$$

Вираз, який стоїть справа у формулі (9), називається *тригонометричною формою комплексного числа* $z = a + bi$.

Модуль $|z| = \rho$ комплексного числа визначається однозначно, а аргумент φ — з точністю до $2\pi k$:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Тут під $\operatorname{Arg} z$ розуміють загальне значення аргументу; на відміну від нього, $\arg z$ — головне значення аргументу, воно знаходиться на проміжку $[0;\ 2\pi)$ і відраховується від додатного напряму осі Ox проти годинникової стрілки (іноді розглядають і від'ємні аргументи φ).

Якщо $z = 0$, то вважають, що $|z| = 0$, а $\arg z$ — невизначений.

Основні дії над комплексними числами $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$, заданими в алгебраїчній формі, визначаються такими рівностями:

1) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,i$;
2) $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\,i$;
3) $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2)\,i$;
4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\,i.$

Таким чином, арифметичні дії над комплексними числами виконуються за звичайними правилами дій над двочленами з урахуванням того, що $i^2 = -1$.

Неважко перевірити, що коли в рівностях 1) — 4) кожне комплексне число z замінити спряженим $\bar{z}$, то і результати вказаних дій заміняться спряженими числами. Звідси випливає таке твердження: якщо $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ — многочлен з дійсними коефіцієнтами і $P(z) = A + Bi$, то

$$P(\bar{z}) = A - Bi, \tag{10}$$

тобто якщо в многочлен замість x підставити спряжені числа $z = a + bi$ та $\bar{z} = a - bi$, то результати цих підстановок також будуть взаємно спряженими.

Піднесення числа $z = a + bi$ до цілого натурального степеня виконується за формулою бінома Ньютона (гл. 5, п. 5.4) з урахуванням того, що для довільного числа $n \in N$ справедливі рівності

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

Приклад

Виконати дії:

а) $z_1 - z_2$; б) z_1z_2; в) $\frac{z_1}{z_2}$; г) $(z_1)^3$, де $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 4 - i$.

○ а) $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (4 - i) = -2 + 4i$;

б) $z_1z_2 = (2 + 3i)(4 - i) = 8 - 2i + 12i - 3i^2 = 11 + 10i$;

в) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{4 - i} = \frac{(2 + 3i)(4 + i)}{(4 - i)(4 + i)} = \frac{5 + 14i}{17} = \frac{5}{17} + \frac{14}{17}i$;

г) $(2 + 3i)^3 = 2^3 + 36i - 54 - 27i = -46 + 9i$. ●

Розглянемо дії над комплексними числами в тригонометричній формі. Нехай $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тоді

$$z_1z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= \rho_1\rho_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + (\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)i] =$$

$$= \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Отже, під час множення комплексних чисел їхні модулі перемножуються, а аргументи додаються.

Це правило поширюється на довільно скінченне число множників. Зокрема, якщо всі n множників рівні, то

$$z^n = (\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Ця формула називається *формулою Муавра.*

При діленні комплексних чисел маємо

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Отже, модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів діленого і дільника; аргумент частки дорівнює різниці аргументів діленого і дільника.

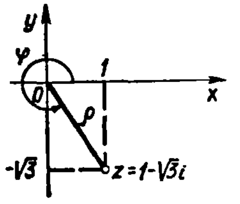


Рис. 7.3

Розглянемо добування кореня n комплексного числа. Якщо для даного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ треба знайти число $w = \sqrt[n]{z} = r(\cos\psi + i\sin\psi)$, то за означенням кореня і формулою Муавра маємо

$$z = w^n = r^n(\cos n\psi + i\sin\psi n) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Звідси $r^n = \rho$, $n\psi = \varphi + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Оскільки $r > 0$ і $\rho > 0$, то $r = \sqrt[n]{\rho}$, де під коренем потрібно розуміти його арифметичне значення; тому

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right). \quad (11)$$

Надаючи k значень $0, 1, 2, \ldots, n-1$, дістанемо n різних значень кореня. Для інших значень k аргументи відрізнятимуться від знайдених на число, кратне 2π, тому значення кореня збігатимуться з уже знайденими.

Приклади

1. Знайти $(1 - \sqrt{3}i)^9$.

○ Запишемо дане число в тригонометричній формі (рис. 7.3):

$$z = 1 - \sqrt{3}i, \quad \rho = \sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2} = 2, \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}, \quad \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varphi = \frac{5}{3}\pi, \quad z = 2\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right).$$

За формулою Муавра маємо

$$z^9 = (1 - \sqrt{3}i)^9 = 2^9(\cos 15\pi + i\sin 15\pi) = -512. \bullet$$

2. Розв'язати рівняння $z^4 - 1 = 0$.

○ Використовуючи формулу (11), дістаємо

$$z^4 = 1, \quad 1 = \cos 0 + i\sin 0;$$

$$z = \sqrt[4]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{2\pi k}{4} + i\sin\frac{2\pi k}{4}; \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Поклавши k рівним 0, 1, 2, 3, знайдемо всі чотири корені даного рівняння:

$$z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1; \quad z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i;$$

$$z_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1; \quad z_4 = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = -i. \bullet$$

Відомо, що показникову функцію з уявним показником можна виразити через тригонометричні функції за формулою

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{12}$$

яка була відкрита Ейлером в 1743 р. (див. гл. 9).

З формул (12) і (9) випливає, що всяке комплексне число можна записати в показниковій формі: $z = \rho e^{i\varphi}$.

Приклад

Записати в показиниковій формі числа:

а) $z = 1$; б) $z = -1$; в $z = 3i$; г) $z = 1 - i$; д) $z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)^6$;

є) $z = \sqrt[6]{1 + i}$.

○ а) $1 = \cos 0 + i\sin 0 = e^{0\cdot i}$;

б) $-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{\pi i}$;

в) $3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3e^{\frac{\pi}{2} i}$;

г) $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\, e^{\frac{7}{4}\pi i}$;

д) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)^6 = \left(e^{\frac{\pi}{3} i}\right)^6 = e^{2\pi i}$;

є) $\sqrt[6]{1 + i} = \sqrt[12]{2}\, e^{\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{3} k\right) i}$, $k = 0, 1, \ldots, 5$. ●

Формула Ейлера дає змогу з'ясувати причини того зв'язку, який існує між гіперболічними і тригонометричними функціями (гл. 5, п. 2.4).

Справді, з формули (12) маємо

$$e^{xi} = \cos x + i\sin x, \quad e^{-xi} = \cos x - i\sin x,$$

звідки

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = \operatorname{ch} xi, \quad \sin x = \frac{1}{i}\operatorname{sh} xi.$$

Підставивши замість x значення xi, дістанемо

$$\cos xi = \operatorname{ch} x, \quad \sin xi = i\operatorname{sh} x.$$

Ці формули дають змогу переходити від довільного співвідношення між тригонометричними функціями до відповідного співвідношення між гіперболічними функціями і навпаки. Подібні перетворення застосовуються при інтегруванні.

Приклад

Виразити $\cos^2 x$, $\cos^3 x$ та $\cos^4 x$ через косинуси кратних дуг.

○ Маємо

$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2xi}+2+e^{-2xi}}{4} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{2xi}+e^{-2xi}}{2}+\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2};$$

$$\cos^3 x = \frac{e^{3xi}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3xi}}{8} = \frac{1}{4}\,\frac{e^{3xi}+e^{-3xi}}{2}+\frac{3}{4}\,\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x;$$

$$\cos^4 x = \frac{e^{4xi}+4e^{2xi}+6+4e^{-2xi}+e^{-4xi}}{16} =$$

$$= \frac{1}{16}\left[(e^{4xi}+e^{-4xi})+4(e^{2xi}+e^{-2xi})+6\right] = \frac{\cos 4x}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{3}{8}.$$ ●

1.5. Деякі відомості про раціональні функції

Як відомо (гл. 5, п. 2.4), *многочленом* (*поліномом* або *цілою раціональною функцією*) називається функція

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \tag{13}$$

де n — натуральне число, яке називається степенем многочлена; a_0, a_1, ..., a_n — коефіцієнти многочлена, дійсні або комплексні числа; незалежна змінна x також може бути як дійсною, так і комплексною.

Далі розглядатимемо лише многочлени з дійсними коефіцієнтами.

Коренем многочлена (13) називається таке числове значення змінної $x = x_1$ (дійсне або комплексне), при якому многочлен перетворюється в нуль, тобто таке, що $P_n(x_1) = 0$.

Теорема 1 (теорема Безу). Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на різницю $x - a$ дорівнює $P_n(a)$.

○ При діленні многочлена n-го степеня на двочлен $x - a$ першого степеня дістанемо деякий многочлен $P_{n-1}(x)$ $(n-1)$-го степеня і остачу R — певне дійсне число. Тому

$$P_n(x) = P_{n-1}(x)(x-a) + R. \tag{14}$$

Ця тотожність справедлива для всіх $x \neq a$ (ділення на $x - a$ при $x = a$ неможливе). Якщо в рівності (14) перейти до границі при $x \to a$, то дістанемо $P_n(a) = R$. ●

Якщо x_1 — корінь многочлена, то згідно з теоремою Безу $R = P_n(x_1) = 0$, тому

$$P_n(x) = P_{n-1}(x)(x - x_1). \tag{15}$$

Підкреслимо, що рівність (15) має місце лише за умови, що x_1 — корінь многочлена $P_n(x)$. У зв'язку з цим виникає запитання: чи всякий многочлен має корені? Позитивну відповідь на це запитання дає таке твердження.

Теорема 2 *(основна теорема алгебри). Всякий многочлен степеня $n > 0$ має хоча б один корінь, дійсний або комплексний.*

Приймемо цю теорему без доведення.

З теореми 2 випливає, що многочлен (13) завжди можна записати у вигляді (15). Неважко помітити (наприклад, з процедури ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен $x - a$ «в стовпчик»), що старший коефіцієнт многочлена $P_{n-1}(x)$, тобто коефіцієнт при x^{n-1}, дорівнює a_0.

Якщо степінь многочлена $P_{n-1}(x)$ не дорівнює нулю, тобто $P_{n-1}(x) \neq a_0$, то до цього многочлена знову можна застосувати теорему 2. Нехай x_2 — корінь многочлена $P_{n-1}(x)$, тоді

$$P_{n-1}(x) = P_{n-2}(x)(x - x_2), \tag{16}$$

де $P_{n-2}(x)$ — многочлен $(n - 2)$-го степеня із старшим коефіцієнтом a_0.

З рівностей (15) і (16) дістанемо, що

$$P_n(x) = P_{n-2}(x)(x - x_1)(x - x_2).$$

Продовжуючи цей процес, приходимо до такого твердження.

Теорема 3. *Всякий многочлен n-го степеня можна подати у вигляді*

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \ \ldots \ (x - x_n), \tag{17}$$

де x_1, x_2, ..., x_n — корені многочлена, a_0 — коефіцієнт многочлена при x^n.

Вираз (17) називається *розкладом многочлена на лінійні множники*. Наприклад,

$$x^3 + x^2 + 9x + 9 = (x + 1)(x - 3i)(x + 3i);$$

$$5x^4 - 40x^3 + 115x^2 - 140x + 60 =$$

$$= 5(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4).$$

Для перевірки цих тотожностей достатньо перемножити їхні праві частини.

Множники $x - x_i$ у формулі (17) називаються *лінійними множниками*. Якщо деякі з лінійних множників однакові, то їх можна об'єднати і тоді формула (17) матиме вигляд

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}(x - x_r)^{k_r}, \tag{18}$$

де r — число різних коренів і $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$.

У цьому випадку корінь x_1 називається *коренем кратності* k_1 або k_1*-кратним коренем*, x_2-коренем кратності k_2 і т. д. Корінь кратності одиниця називається *простим коренем*.

Нехай тепер число $\alpha + \beta i$ — комплексний корінь многочлена (13), тобто $P_n(\alpha + \beta i) = 0$, тоді з рівності (10) випливає, що спряжене число $\alpha - \beta i$ також є коренем многочлена (13). Перемноживши лінійні множники, що відповідають цим кореням, дістанемо

$$[x - (\alpha + \beta i)][x - (\alpha - \beta i)] = [(x - \alpha) - \beta i][(x - \alpha) + \beta i] =$$
$$= (x - \alpha)^2 - (\beta i)^2 = x^2 - 2x\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = x^2 + px + q,$$

де $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2 + \beta^2$ — дійсні числа.

Таким чином, добуток лінійних множників, що відповідають взаємно спряженим комплексним кореням, можна замінити квадратним тричленом з дійсними коефіцієнтами і з від'ємним дискримінантом.

Об'єднуючи у формулі (18) множники із взаємно спряженими коренями, дістанемо

$$P_n(x) = a_0 (x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_m)^{k_m} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \ldots$$
$$\ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}, \tag{19}$$

де k_i ($i = 1, 2, \ldots, m$ — кратності дійсних коренів; l_j ($j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, s$) — кратності комплексно спряжених коренів; $k_1 + k_2 + \ldots$ $\ldots + k_m + 2(l_1 + l_2 + \ldots + l_s) = n$ — сталі; a_0, x_i, p_j, q_j — дійсні числа, причому $p_j^2 - 4q_j < 0$.

Отже, всякий многочлен з дійсними коефіцієнтами можна розкласти на лінійні та квадратні (з комплексними коренями) множники з дійсними коефіцієнтами.

Зауваження 1. Якщо многочлен $P_n(x)$ тотожно дорівнює нулю, тобто дорівнює нулю при довільних значеннях x, $P_n(x) \equiv 0$, то всі його коефіцієнти дорівнюють нулю.

Дійсно, якби $a_0 \neq 0$, то $P_n(x)$ мав n коренів; якби $a_0 = 0$ і $a_1 \neq$ $\neq 0$, то $P_n(x)$ мав би $n - 1$ корінь і т. д. В умові сказано, що $P_n(x)$ має безліч коренів, бо $\forall x \in R : P_n(x) = 0$.

Зауваження 2. Якщо многочлени тотожно дорівнюють один одному, то рівні їхні степені і рівні між собою коефіцієнти при однакових степенях x.

Дійсно, різниця даних многочленів тотожно дорівнює нулю, тому з попереднього зауваження випливає, що всі коефіцієнти цієї різниці — нулі, тобто коефіцієнти даних многочленів однакові. Наприклад, якщо $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \equiv 5x^3 - 3x^2 + 4$, то $a = 0$, $b = 5$, $c = -3$, $d = 0$, $e = 4$.

Відношення двох $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ многочленів $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ називається *раціональною функцією або раціональним дробом* ($P_m(x) \not\equiv 0$, $Q_n(x) \not\equiv$ $\not\equiv 0$).

Раціональний дріб називається *правильним*, якщо степінь чисельника менший степеня знаменника $m < n$; в іншому випадку ($m \geqslant n$) раціональний дріб називається *неправильним*.

Якщо дріб неправильний, то, виконавши ділення, дістанемо

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = W_k(x) + \frac{R_p(x)}{Q_n(x)}, \tag{20}$$

де $W_k(x)$ і $R_p(x)$ — многочлени k-го і p-го степеня, причому $p < n$, тобто дріб $\frac{R_p(x)}{Q_n(x)}$ — правильний. Наприклад,

$$\frac{x^5 + x^3 - x^2 + 1}{x^3 - 2x + 1} = x^2 + 3 - \frac{2x^2 - 6x + 2}{x^3 - 2x + 1}.$$

Елементарними раціональними дробами називаються правильні раціональні дроби таких чотирьох видів:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}; \qquad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^n}, \quad n = 2, 3, \ldots;$$

$$\text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; \qquad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, \quad n \geqslant 2,$$

де A, a, M, N, p, q — дійсні числа, а тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, тобто $p^2 - 4q < 0$.

Теорема 4. *Нехай знаменник правильного раціонального дробу розкладено на множники за формулою (19):*

$$Q_n(x) = a_0(x-a)^{\alpha} \ldots (x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\mu} \ldots (x^2+lx+s)^{\nu},$$

тоді цей дріб можна подати у вигляді

$$\frac{R_p(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \cdots +$$

$$+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{M_\mu x+N_\mu}{(x^2+px+q)^\mu} + \cdots +$$

$$+ \frac{L_1x+F_1}{x^2+lx+s} + \frac{L_2x+F_2}{(x^2+lx+s)^2} + \cdots + \frac{L_\nu x+F_\nu}{(x^2+lx+s)^\nu}, \tag{21}$$

де $A_1, \ldots, A_\alpha$; $B_1, \ldots, B_\beta$; $M_1, N_1, \ldots, M_\mu, N_\mu$; $L_1, F_1, \ldots, L_\nu, F_\nu$ — деякі дійсні числа [12].

Вираз (21) називається *розкладом правильного раціонального дробу на елементарні дроби.*

Для знаходження чисел $A_1, \ldots, F_\nu$ можна скористатись *методом порівнювання коефіцієнтів.* Суть його така. Помножимо обидві частини рівності (21) на $Q_n(x)$, внаслідок чого дістанемо два тотожно рівні многочлени: відомий многочлен $R_p(x)$ і многочлен з невідомими коефіцієнтами $A_1, \ldots, F_\nu$. Прирівнюючи їхні коефіцієнти при однакових степенях x (зауваження 2), дістанемо систему лінійних рівнянь, з якої визначимо невідомі $A_1, \ldots, F_\nu$.

Приклад

Виразити через елементарні дроби дріб $\dfrac{x^4+2x^3+5x^2-1}{x(x^2+1)^2}$.

○ За формулою (9) маємо

$$\frac{x^4+2x^3+5x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на $x(x^2+1)^2$, дістанемо тотожність

$$x^4+2x^3+5x^2-1\equiv A(x^2+1)^2+(Bx+c)(x^2+1)x+(Dx+E)x=$$
$$=(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях у правій і лівій частинах, дістанемо систему рівнянь

$$A+B=1,\quad C=2,\quad 2A+B+D=5,\quad C+E=0,\quad A=-1,$$

розв'язуючи яку, знайдемо $A=-1$, $B=2$, $C=2$, $D=5$, $E=-2$. Отже,

$$\frac{x^4+2x^3+5x^2-1}{x(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{2x+2}{x^2+1}+\frac{5x-2}{(x^2+1)^2}. \bullet$$

Крім методу порівняння коефіцієнтів, користуються також *методом окремих значень аргументу*. Нехай після множення обох частин рівності (21) дістаємо два тотожно рівні многочлени, один з яких — відомий, а другий з невідомими коефіцієнтами. Надаючи змінній конкретні значення стільки разів, скільки невідомих коефіцієнтів, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої і визначимо шукані коефіцієнти. Система рівнянь значно спрощується, коли змінній x надавати значення дійсних коренів знаменника $Q_n(x)$. Іноді зручно скористатись комбінованим методом, тобто деякі з невідомих коефіцієнтів визначати, надаючи x значення дійсних коренів знаменника, а інші — визначати методом порівняння.

Приклади

1. Виразити через елементарні дроби дріб

$$\frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)}.$$

○ Маємо

$$\frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2},$$

$$2x-1\equiv A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1).$$

Якщо в цій тотожності покласти $x=0$, то $-1=A(-1)\cdot(-2)$, звідки $A=-\dfrac{1}{2}$; якщо $x=1$, то $1=-B$ або $B=-1$; якщо $x=2$, то $3=2C$ або $C=\dfrac{3}{2}$.

Отже,

$$\frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)}=\frac{-1}{2x}-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{2(x-2)}. \bullet$$

2. Виразити через елементарні дроби дріб

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}.$$

○ Маємо

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1},$$

$$x^2+1\equiv Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2\equiv(A+C)x^2+(A-B)x-A.$$

Якщо $x=0$, то $1=-B$ або $B=-1$; коли $x=1$, то $2=C$ або $C=2$. Прирівнюючи коефіцієнти при x^2, дістанемо $1=A+C$, звідки $A=-1$, бо $C=2$; отже,

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1}. \bullet$$

1.6. Інтегрування раціональних функцій

Раціональні функції складають важливий клас функцій, інтеграли від яких завжди виражаються через елементарні функції.

Нехай треба знайти

$$\int\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,dx.$$

Враховуючи рівність (20), цей інтеграл можна подати як суму інтеграла від многочлена і правильного раціонального дробу:

$$\int\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,dx=\int W_k(x)\,dx+\int\frac{R_p(x)}{Q_n(x)}\,dx.$$

Інтеграл від многочлена знаходять безпосередньо, а інтеграл від правильного раціонального дробу зводиться за допомогою формули (21) до інтегралів від елементарних дробів.

Розглянемо ці інтеграли:

I. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}\,dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$

II. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^n}\,dx=A\int(x-a)^{-n}\,d(x-a)=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C.$

III. $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\left|\begin{matrix}x=t-\frac{p}{2}\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{\left(t-\frac{p}{2}\right)^2+p\left(t-\frac{p}{2}\right)+q}dt=$

$$=\int\frac{Mt+N-M\frac{p}{2}}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}dt=M\int\frac{tdt}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}+\left(N-M\frac{p}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}.$$

Перший інтеграл знаходиться безпосередньо:

$$\int \frac{tdt}{t^2+q-\frac{p^2}{4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+q-\frac{p^2}{4}\right)}{t^2+q-\frac{p^2}{4}} = \frac{1}{2}\ln\left|t^2+q-\frac{p^2}{4}\right| + C,$$

а другий є табличним (формула 19 табл.), оскільки за умовою $q - \frac{p^2}{4} > 0$.

Зауважимо, що підстановка $x = t - \frac{p}{2}$ «підказана» тим, що квадратний тричлен у знаменнику можна записати у вигляді

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = t^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

У загальнішому випадку маємо

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right),$$

де $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2$. Знак плюс чи мінус береться залежно від того, якими будуть корені знаменника: комплексними чи дійсними. Звідси випливає, що інтеграли виду $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$ обчислюються підстановкою $x = t - \frac{b}{2a}$.

IV. Інтеграл виду

$$I_n = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx, \quad p^2-4q<0, \quad n \geqslant 2$$

підстановкою $x = t - \frac{p}{2}$ зводиться до двох інтегралів:

$$I_n = M\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}, \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4}.$$

Перший з цих інтегралів обчислюється безпосередньо, а другий — за рекурентною формулою (7).

Отже, встановлено, що інтегрування довільної раціональної функції зводиться до інтегрування многочлена і скінченного числа елементарних дробів, інтеграли від яких виражаються через раціональні функції, логарифми і арктангенси. Інакше кажучи, будь-яка раціональна функція інтегрується в елементарних функціях.

Приклади

1. Знайти інтеграл $\int \frac{2x+3}{x^2+4x+9}\,dx$.

○ $\int \frac{2x+3}{x^2+4x+9}\,dx = \left| \begin{matrix} x = t-2 \\ dx = dt \\ t = x+2 \end{matrix} \right| = \int \frac{2(t-2)+3}{(t-2)^2+4(t-2)+9}\,dt =$

$= \int \frac{2t-1}{t^2+5}\,dt = \int \frac{2t\,dt}{t^2+5} - \int \frac{dt}{t^2+5} = \ln(t^2+5) - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} =$

$= \ln(x^2+4x+9) - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} + C.$ ●

2. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^4+2x^3+5x^2+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$.

○ Оскільки розклад підінтегральної функції на елементарні дроби вже відомий п. 1.5), то

$$I = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{2x+2}{x^2+1} + \frac{5x-2}{(x^2+1)^2} \right) dx =$$

$$= -\ln|x| + \ln(x^2+1) + 2\operatorname{arctg} x - \frac{5}{2(x^2+1)} - 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Для обчислення останнього інтеграла застосуємо формулу (7):

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

Отже,

$$I = -\ln|x| + \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x - \frac{5}{2(x^2+1)} - \frac{x}{x^2+1} + C. \quad ●$$

3. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^5+2}{x^3-1}\,dx$.

○ Під знаком інтеграла маємо неправильний дріб, тому спочатку виділимо його цілу частину:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^5+2 & x^3-1 \\ \underline{x^5-x^2} & \overline{x^2} \\ x^2+2 & \end{array}.$$

Звідси

$$\frac{x^5+2}{x^3-1} = x^2 + \frac{x^2+2}{x^3-1}.$$

Розклавши правильний дріб на елементарні, маємо

$$\frac{x^2+2}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1};$$

$$x^2+2 \equiv A(x^2+x+1 + (Bx+C)(x-1) =$$
$$\equiv (A+B)x^2 + (A-B+C)x + (A-C).$$

Скористаємось комбінованим методом знаходження коефіцієнтів A, B і C. Якщо $x = 1$, то $3 = 3A$ або $A = 1$; $A + B = 1$, звідки $B = 0$; $A - C = 2$, тому $C = -1$.

Далі дістанемо

$$I = \int \left(x^2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2+x+1}\right) dx = \frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \int \frac{dx}{x^2+x+1};$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \left| \begin{array}{c} x = t - \frac{1}{2} \\ dx = dt \\ t = x + \frac{1}{2} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Отже,

$$I = \frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \bullet$$

1.7. Інтегрування деяких ірраціональних і трансцендентних функцій

Насамперед зауважимо, що інтеграли від ірраціональних та трансцендентних функцій не завжди обчислюються в елементарних функціях. Розглянемо деякі типи інтегралів, які за допомогою певних підстановок можна звести до інтегралів від раціональних функцій.

Нехай $R(u, v, \ldots, s)$ — раціональна функція від змінних $u, v, \ldots, s$, тобто така функція, в якій над зазначеними змінними та дійсними числами виконується скінченна кількість чотирьох арифметичних дій: додавання, віднімання, множення і ділення.

Наприклад, раціональною відносно змінних u і v є функція

$$R(u, v) = \frac{3u^2 + 2v - 1}{u^2 - 3v^2}.$$

Якщо змінні u та v, в свою чергу, є функціями від x: $u = u(x)$ і $v = v(x)$, то функція $R(u(x), v(x))$ є раціональною відносно функцій $u(x)$ і $v(x)$.

Наприклад, функція

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{6\sqrt[3]{x-1}}{x^2+5}$$

є раціональною функцією від $\sqrt[3]{x-1}$, $\sqrt{x}$ і x:

$$f(x) = R(\sqrt[3]{x-1}, \sqrt{x}, x).$$

Розглянемо тепер інтеграли від деяких ірраціональних функцій і покажемо, що в ряді випадків вони зводяться до інтегралів від раціональних функцій (або, як кажуть, раціоналізуються).

1. *Інтеграли виду*

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$$

раціоналізуються підстановкою

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^k,$$

де k — спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

Дійсно, якщо

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^k, \text{ то } x=\frac{b-dt^k}{ct^k-a}, \; dx=\frac{kt^{k-1}(ad-bc)}{(ct^k-a)^2}dt,$$

тобто, x та dx виражаються через раціональні функції від t.

Оскільки, крім того, кожний степінь дробу $\frac{ax+b}{cx+d}$ виразиться через цілий степінь t, то підінтегральна функція перетвориться в раціональну функцію від t.

Приклад

Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$;

в) $\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$.

○ а) $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}=\left|\begin{matrix} x=t^6 \\ dx=6t^5dt \\ t=\sqrt[6]{x}\end{matrix}\right|=\int\frac{6t^5dt}{t^2+t^3}=6\int\frac{t^3dt}{t+1}=6\int\Big(t^2-$$
$$-t+1-\frac{1}{t+1}\Big)dt=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+C=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+$$
$$+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C;$$

б) $$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}=\left|\begin{matrix} 2x+1=t^6 \\ x=\dfrac{t^6-1}{2} \\ dx=3t^5dt \\ t=\sqrt[6]{2x+1}\end{matrix}\right|=\int\frac{3t^5dt}{t^4-t^3}=3\int\frac{t^2}{t-1}dt=$$
$$=3\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=\frac{3}{2}t^2+3t+3\ln|t-1|+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+$$
$$+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln|\sqrt[6]{2x+1}-1|+C;$$

в) $$\int \frac{1}{(x-1)^2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\, dx = \left| \begin{array}{c} \dfrac{x+1}{x-1} = t^3 \\ x = \dfrac{t^3+1}{t^3-1} \\ dx = -\dfrac{6t^2 dt}{(t^3-1)^2} \\ x-1 = \dfrac{2}{t^3-1} \end{array} \right| = \int \frac{(t^3-1)^2 t}{4} \frac{(-6t^2)}{(t^3-1)^2}\, dt =$$

$$= -\frac{3}{2} \int t^3 dt = -\frac{3}{8} t^4 + C = -\frac{3}{8} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{4}{3}} + C. \bullet$$

2. *Інтегрування диференціальних біномів.* Вираз виду $x^m (a + bx^n)^p$, де m, n, p — сталі раціональні числа, а a і b — довільні сталі числа, називається *диференціальним біномом.* Справедлива така *теорема Чебишева.*

Теорема. *Інтеграл від диференціального бінома*

$$\int x^m (a + bx^n)^p\, dx$$

виражається через інтеграл від раціональної функції відносно нової змінної, якщо:

1) *p — ціле число (додатне, від'ємне чи 0) і виконано підстановку $x = t^s$, де s — найменший спільний знаменник дробів m і n;*

2) *$\frac{m+1}{n}$ — ціле число (додатне, від'ємне чи 0) і виконано підстановку $a + bx^n = t^r$, де r — знаменник дробу p;*

3) *$\frac{m+1}{n} + p$ — ціле число (додатне, від'ємне чи 0) і виконано підстановку $ax^{-n} + b = t^r$, де r — знаменник дробу p.*

В інших випадках інтеграл від диференціального бінома через елементарні функції не виражається [12].

Приклад

Знайти інтеграл $I = \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$.

○ Оскільки в інтегралі

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}} (1 + x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\, dx;$$

$$m = -\frac{1}{2},\ n = \frac{1}{4},\ p = \frac{1}{3}:\ \ \frac{m+n}{n} = 2 \in Z,$$

то застосовний другий випадок теореми Чебишева.

Маємо

$$I=\left|\begin{array}{c} t^3 = 1 + x^{\frac{1}{4}} \\ x = (t^3 - 1)^4 \\ dx = 12t^2 (t^3 - 1)^3 \, dt \end{array}\right| = 12 \int (t^6 - t^3) \, dt = \frac{12}{7} t^7 - 3t^4 + C =$$

$$= \frac{12}{7} (1 + \sqrt[4]{x})^{7/3} - 3 (1 + \sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}} + C. \ \bullet$$

3. *Інтеграли виду* $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ *раціоналізуються підстановкою* $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $(-\pi < x < \pi)$, *яка називається універсальною.*

Дійсно,

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2};$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2};$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \ dx = \frac{2}{1 + t^2} dt,$$

тому

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \frac{2}{1 + t^2} dt = \int R_1(t)\, dt,$$

де $R_1(t)$ — раціональна функція від t.

Приклад

Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin x + 1}$.

$$\circ \int \frac{dx}{\sin x + 1} = \left|\begin{array}{c} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \\ dx = \frac{2}{1 + t^2} dt \end{array}\right| = \int \frac{2dt}{(1 + t^2)\left(\frac{2t}{1 + t^2} + 1\right)} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{(1 + t)^2} = -\frac{2}{1 + t} + C = -\frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C. \ \bullet$$

Зауважимо, що універсальна підстановка завжди раціоналізує інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$. Проте на практиці вона часто приводить до раціональних дробів з великими степенями. Тому в багатьох випадках користуються іншими підстановками. Наведемо деякі з них.

а) $\int R(\sin x)\cos x dx$ раціоналізується підстановкою $\sin x = t$;

б) $\int R(\cos x)\sin x dx$ раціоналізується підстановкою $\cos x = t$;

в) $\int R(\operatorname{tg} x)\, dx$ раціоналізується підстановкою $\operatorname{tg} x = t$;

г) $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ раціоналізується підстановкою $\cos x = t$, якщо функція R непарна відносно $\sin x$: $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ або підстановкою $\sin x = t$, якщо функція R непарна відносно $\cos x$:

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

або підстановкою $\operatorname{tg} x = t$, якщо функція R парна відносно $\sin x$ і $\cos x$ одночасно:

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x);$$

д) $\int \sin^m x \cos^n x dx$ знаходиться підстановкою $\sin x = t$, якщо n — ціле додатне непарне число, або підстановкою $\cos x = t$, якщо m — ціле додатне непарне число, а також за допомогою формули пониження степеня

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

якщо m та n — цілі додатні парні числа; коли ж m і n — цілі парні числа, але хоч одне з них від'ємне, то даний інтеграл раціоналізується підстановкою $\operatorname{tg} x = t$; така сама підстановка використовується у випадку, коли m і n — цілі непарні і від'ємні;

е) інтеграли $\int \sin ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx \times dx$ обчислюються за допомогою відомих формул:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta));$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$$

Приклад

Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx$; б) $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$; в) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

○ а) Оскільки підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$, то скористаємось підстановкою $\cos x = t$. Звідси

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2, \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1, \quad dt = -\sin x dx.$$

Маємо

$$\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx = -\int \frac{(2-t^2)\,dt}{2t^2-1} = \int \frac{t^2-2}{2t^2-1} dt = \frac{1}{2}\int dt -$$

$$-\frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1}\right| + C = \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{2\sqrt{2}} \times$$

$$\times \ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right| + C;$$

б) $\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \int \sin^4 x \cos^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x\,(1-\sin^2 x)^2 \cos x dx =$

$$= \left|\begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix}\right| = \int t^4 (1-t^2)^2\,dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8)\,dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 +$$

$$+ C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C;$$

в) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \frac{1+\cos 2x}{2} dx =$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x \times$$

$$\times d(\sin 2x) = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C. \ \bullet$$

4. *Інтеграл виду* $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ *за допомогою підстановки* $x = t - \frac{b}{2a}$ *зводиться до одного з таких інтегралів:*

а) $\int R(t, \sqrt{t^2+m^2})\,dt$; б) $\int R(t, \sqrt{t^2-m^2})\,dt$;

в) $\int R(t, \sqrt{m^2-t^2})\,dt$,

де $m \in R$. Неважко переконатись, що за допомогою підстановок а) $t = m\,\mathrm{tg}\,z$, б) $t = \frac{m}{\sin z}$, в) $t = m \sin z$ відповідні інтеграли зводяться до інтеграла $\int R(\sin z, \cos z)\,dz$.

Наприклад, $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \left|\begin{matrix} x = \sin z \\ dx = \cos z dz \end{matrix}\right| = \int \frac{\cos z dz}{\cos^3 z} = \mathrm{tg}\,z + C =$

$$= \frac{\sin z}{\cos z} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Необхідно зазначити, що інтеграли виду $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ виражаються через раціональні функції також за допомогою так званих *підстановок Ейлера:*

1) якщо $a > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x + t$;

2) якщо $c > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$;

3) якщо $b^2 - 4ac > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)\,t$,

де α — корінь тричлена ax^2+bx+c [24].

Першу підстановку ми використали при розв'язуванні прикладу 2 б), п. 1.3. Покажемо на прикладі застосування другої підстановки.

Приклад

Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

Скориставшись другою підстановкою Ейлера, дістанемо

$$I = \left| \begin{array}{c} \sqrt{1-x-x^2} = xt - 1 \\ 1 - x - x^2 = x^2t^2 - 2xt + 1 \\ x = \frac{1+2t}{1+t^2}, \; dx = \frac{2(1-t-t^2)}{(1+t^2)^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{-2dt}{1+(t+1)^2} =$$

$$= -2\operatorname{arctg}(t+1) + C = -2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x-x^2}+x+1}{x} + C. \; \bullet$$

5. *Інтеграл виду* $\int R(e^x)\,dx$ *раціоналізується підстановкою* $t = e^x$.

Дійсно, оскільки $x = \ln t$, то $dx = \frac{dt}{t}$ і

$$\int R(e^x)\,dx = \int R(t)\frac{dt}{t}.$$

Приклад

Знайти інтеграл $I = \int \frac{2e^{2x} - e^x - 3}{e^{2x} - 2e^x - 3}\,dx.$

$$\circ\; I = \left| \begin{array}{c} e^x = t \\ x = \ln t \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right| = \int \frac{2t^2 - t - 3}{t(t+1)(t-3)}\,dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-3}\right) dt = \ln|t| +$$

$$+ \ln|t-3| + C = \ln e^x + \ln|e^x - 3| + C = x + \ln|e^x - 3| + C. \; \bullet$$

1.8. Інтеграли, що «не беруться»

Як видно було з диференціального числення, похідна від довільної елементарної функції є також функцією елементарною. Інакше кажучи, операція диференціювання не виводить нас із класу елементарних функцій. Цього не можна сказати про інтегрування — операцію, обернену до диференціювання. Інтегрування елементарної функції не завжди знову приводить до елементарної функції. Подібне спостерігається й для інших взаємно обернених операцій: сума довільних натуральних чисел є завжди число натуральне, а різниця — ні; добуток двох цілих чисел завжди є цілим числом, а частка — ні і т. п. Строго доведено, що існують елементарні функції, інтеграли від яких не є елементарними функціями. Про такі інтеграли кажуть, що вони не обчислюються в скінченному вигляді або «не беруться».

Наприклад, доведено, що «не беруться» такі інтеграли:

$\int e^{-x^2}dx$ — *інтеграл Пуассона;*

$\int \cos x^2 dx$, $\int \sin x^2 dx$ — *інтеграли Френеля;*

$\int \frac{dx}{\ln x}$ — *інтегральний логарифм;*

$\int \frac{\cos x}{x} dx$ — *інтегральний косинус;*

$\int \frac{\sin x}{x} dx$ — *інтегральний синус;*

$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\, dx$, $|k| < 1$ — *еліптичний інтеграл;*

$\int x^{\alpha} \sin x dx$, $\int x^{\alpha} \cos x dx$, $\int x^{\alpha} e^x dx$ $(\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots)$

та ряд інших інтегралів.

Вказані інтеграли хоча й існують, але не є елементарними функціями. В подібних випадках первісна являє собою деяку нову, неелементарну функцію, тобто функцію, яка не виражається через скінченне число арифметичних операцій і суперпозицій над основними елементарними функціями. Неелементарні (або так звані спеціальні) функції розширюють множину елементарних функцій.

Зрозуміло, що інтеграл, який не обчислювався в класі елементарних функцій, може виявитись таким, що обчислюється в розширеному класі функцій.

Таким чином, інтегрування в порівнянні з диференціюванням — операція набагато складніша. Тому треба твердо володіти основними методами інтегрування і чітко знати види функцій, інтеграли від яких цими методами знаходяться. Крім того, виявляється, що треба розрізняти також інтеграли, які «не беруться». Тому в інженерній практиці широко користуються довідниками, в яких містяться докладні таблиці інтегралів, що виражаються через елементарні і неелементарні функції [2, 19].

Завдання для самоконтролю

1. Що називається первісною даної функції? Навести приклади.
2. Сформулювати і довести теорему про загальний вигляд первісної даної функції.
3. Що називається невизначеним інтегралом від даної функції? інтегральною кривою?
4. Сформулювати теорему про існування первісної.
5. Сформулювати і довести основні властивості невизначеного інтеграла.
6. У чому суть інваріантності формули інтегрування? Навести приклади.
7. Написати і перевірити диференціюванням таблицю інтегралів.
8. У чому полягають методи безпосереднього інтегрування, частинами і заміни змінної? Навести приклади.

9. Нехай $J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $n \in N$, $n > 1$. Вивести рекурентну формулу для обчислення цього інтеграла. Записати в явному вигляді значення I_1, I_2, I_3.

10. Що називається комплексним числом? Як записуються комплексні числа в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формі?

11. Що називається модулем і аргументом комплексного числа? Як вони знаходяться і який їхній геометричний зміст?

12. Як визначаються дії над комплексними числами в алебраїчній та тригонометричній формах?

13. Написати і довести формулу Муавра. Навести приклад.

14. Вивести формулу для добування кореня з комплексного числа.

15. Записати формулу Ейлера. В чому полягає зв'язок між тригонометричними і гіперболічними функціями?

16. Сформулювати і довести теорему Безу.

17. Довести теорему про розклад многочлена на лінійні множники.

18. Записати розклад многочлена на лінійні множники і квадратні тричлени з дійсними коефіцієнтами.

19. Який раціональний дріб називається правильним?

20. Які раціональні дроби називаються елементарними?

21. Записати розклад правильного раціонального дробу на елементарні дроби.

22. Як інтегруються елементарні дроби?

23. В чому полягає метод інтегрування раціонального дробу?

24. Навести приклади інтегрування ірраціональних функцій.

25. Як раціоналізується інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$? Чому підстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ називається універсальною?

26. Як обчислюються інтеграли $\int \sin^n x \cos^m x dx$?

27. Як обчислюються інтеграли $\int \sin ax \cos bx dx$?

28. У якому випадку кажуть, що невизначений інтеграл не є елементарною функцією? Навести приклади.

29. Обчислити безпосереднім інтегруванням:

1) $\int (2x^3 - x + 3)\,dx$; 2) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$;

3) $\int (x^2 + 3x + 5)^{10}(2x + 3)\,dx$; 4) $\int e^{4\cos x}\sin x dx$;

5) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}$; 6) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$;

7) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$; 8) $\int \frac{e^x dx}{5+4e^x}$;

9) $\int \frac{dx}{a^2x^2 - b^2}$; 10) $\int \frac{\cos x dx}{4+\sin^2 x}$.

30. Знайти методом підстановки:

1) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$; 2) $\int \frac{6x^4 - 5x^3 + 4x^2}{2x^2 - x + 1}\,dx$;

3) $\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$;

5) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$; 6) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$;

7) $\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}\,dx$; 8) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$;

9) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$; 10) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^{4/3} x}\,dx$.

31. Проінтегрувати частинами:

1) $\int \arcsin x dx$; 2) $\int x^2 \ln x dx$;

3) $\int x \operatorname{arctg} x dx$; 4) $\int (x^2+2x+3)\cos x dx$;

5) $\int \sin(\ln x)\,dx$; 6) $\int e^{2x}\cos x dx$.

32. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{(x^2-2x)^2}$;

3) $\int \sin^4 x dx$; 4) $\int \operatorname{ctg}^5 x dx$;

5) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx$; 6) $\int \cos 2x \sin 4x dx$.

Відповіді. 29. 1) $\frac{x^4}{2}-\frac{x^2}{2}+3x+C$; 2) $\frac{x^2}{2}+\frac{12}{7}x\sqrt[6]{x}+3\sqrt[3]{x}+C$;
3) $\frac{1}{11}(x^2+3x+5)^{11}+C$; 4) $-\frac{1}{4}e^{4\cos x}+C$; 5) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$;
6) $\frac{1}{2\cos^2 x}+C$; 7) $\ln|\operatorname{arctg} x|+C$; 8) $\frac{1}{4}\ln(5+4e^x)+C$;
9) $\frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{ax-b}{ax+b}\right|+C$; 10) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{2}\right)+C$.

30. 1) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$; 2) $x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\ln|2x^2-x+1|+C$;
3) $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}+C$; 4) $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+C$;
5) $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$; 6) $\sqrt{x^2-4}-2\arccos\frac{2}{x}+C$; 7) $\frac{2}{27}\sqrt[4]{x^9}-\frac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C$;
8) $\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$; 9) $-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}+C$;

10) $3(\cos x)^{-\frac{1}{3}}+\frac{3}{5}(\cos x)^{\frac{5}{3}}+C$.

31. 1) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; 2) $\frac{x^3}{3}\left(\ln|x|-\frac{1}{3}\right)+C$;

3) $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$; 4) $(x+1)^2 \sin x + 2(x+1)\cos x + C$;

5) $\frac{x}{2}(\sin(\ln|x|) - \cos(\ln|x|)) + C$; 6) $\frac{1}{5}e^{2x}(\sin x + 2\cos x) + C$.

32. 1) $\frac{x^2}{2} - \frac{33}{16(x-2)} + \frac{127}{32}\ln|x-2| + \frac{31}{16(x+2)} + \frac{129}{32}\ln|x+2| + C$;

2) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| - \frac{x-1}{2x(x-2)} + C$; 3) $\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$;

4) $-\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + \ln|\sin x| + C$; 5) $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C$;

6) $-\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 2x}{4} + C$.

§ 2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

2.1. Задачі, що приводять до визначеного інтеграла

1°. *Задача про площу криволінійної трапеції.* Нехай на відрізку $[a; b]$ задано функцію $y = f(x) \geqslant 0$. Фігура $aABb$ (рис. 7.4), обмежена графіком даної функції і відрізками прямих $y = 0$, $x = a$, $x = b$, називається *криволінійною трапецією.* Обчислити площу S цієї трапеції.

○ Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ за допомогою точок $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на n частинних відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. На кожному з цих відрізків візьмемо довільну точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ і обчислимо значення $f(\xi_i)$. Тоді добуток $f(\xi_i)\Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, дорівнює площі прямокутника з основою Δx_i і висотою $f(\xi_i)$, а сума цих добутків — площі ступінчатої фігури і наближено дорівнює площі криволінійної трапеції:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Із зменшенням усіх величин Δx_i точність цієї формули збільшується, тому природно за площу криволінійної трапеції вважати границю площ ступінчатих фігур за умови, що максимальна довжина частинних відрізків прямує до нуля:

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \quad ● \tag{22}$$

2°. *Задача про роботу змінної сили.* Нехай на матеріальну точку діє сила F, яка стала за напрямом і неперервно змінюється за величиною, і нехай під дією цієї сили точка перемістилася вздовж осі Ox з точки a в точку b $(a < b)$. Обчислити роботу A цієї сили на відрізку $[a; b]$.

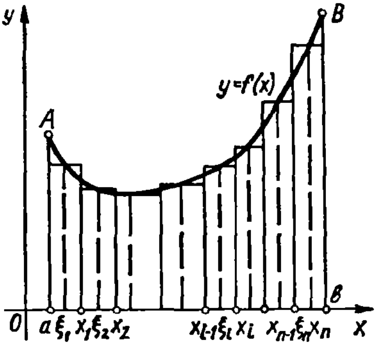


Рис. 7.4

○ У кожній точці $x \in [a; b]$ діє сила F, яка за умовою є неперервною функцією від x: $F = F(x)$. Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < < x_2 < \ldots < x_n = b$ на n частинних відрізків $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Припустимо, що кожний з частинних відрізків такий малий, що силу $F(x)$ на ньому можна вважати сталою і рівною значенню функції $F(x)$ в деякій довільно вибраній точці $x = \xi_i \in \in [x_{i-1}; x_i] : F = F(\xi_i)$. Робота, виконана цією силою на відрізку $[x_{i-1}; x_i]$; дорівнює добутку $F(\xi_i)\Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Насправді, на відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ сила $F(x)$ змінюється, тому вираз $F(\xi_i)\Delta x_i$ дає лише наближене значення роботи на цьому відрізку.

Оскільки робота на відрізку $[a; b]$ дорівнює сумі робіт на всіх частинних відрізках, то

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i.$$

Ця наближена рівність тим точніша, чим менші довжини Δx_i. Тому природно за роботу сили $F(x)$ на шляху $[a; b]$ вважати границю одержаної суми:

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i. \quad \bullet \qquad (23)$$

3°. *Задача про пройдений шлях.* Нехай точка рухається по прямій з швидкістю $v = v(t)$, де v — неперервна функція часу t. Треба визначити шлях s, який пройде точка за проміжок часу $[a; b]$ від моменту $t = a$ до моменту $t = b$ $(a < b)$.

○ Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ точками $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = = b$ на n частинних проміжків часу $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Припустимо, що відрізок $[t_{i-1}, t_i]$ такий малий, що швидкість $v(t)$ при $t \in [t_{i-1}, t_i]$ змінюється мало. Тоді її можна вважати на цьому відрізку сталою і рівною, наприклад, $v(\xi_i)$, де $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Це означає, що рух точки на проміжку $[t_{i-1}, t_i]$ вважається рівномірним, тому шлях, пройдений точкою за час $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, дорівнює добутку $v(\xi_i)\Delta t_i$, а шлях, пройдений за час $[a; b]$, виражається наближеною формулою

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i.$$

Ця наближена рівність тим точніша, чим менші величини Δt_i. Тому природно за шлях s вважати границю знайденої суми:

$$s = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i) \Delta t_i. \bullet \tag{24}$$

4°. *Задача про масу неоднорідного стержня.* Нехай маємо прямолінійний стержень, який лежить на осі Ox в межах відрізка $[a; b]$. Треба знайти масу m цього стержня, якщо його густина γ є деякою неперервною функцією від x: $\gamma = \gamma(x)$.

○ Розіб'ємо стержень на n довільних частин $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Якщо відрізок $[x_{i-1}, x_i]$ достатньо малий, то функція $\gamma(x)$ на ньому змінюється мало, тому маса частини стержня $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, яка відповідає цьому відрізку, наближено дорівнює добутку $\gamma(\xi_i) \Delta x_i$, де $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, а маса всього стержня

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i) \Delta x_i.$$

Точне значення маси знайдемо як границю цієї суми, коли

$$m = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i) \Delta x_i. \bullet \tag{25}$$

Усі розглянуті задачі привели нас до однієї й тієї самої математичної операції — знаходження границі певного виду сум. Проте границі (22) — (25) не зовсім звичайні. Справді, суми під знаком границі залежать не тільки від заданої функції, а й від точок розбиття x_i, t_i і від точок ξ_i. Число точок прямує до нескінченності, коли довжина максимального частинного відрізка прямує до нуля. Інакше кажучи, у кожному випадку, тобто для кожної заданої функції, йдеться про знаходження границі суми нескінченно великого числа нескінченно малих доданків.

До такої самої математичної операції над функціями приводять багато інших задач, тому виникає потреба всебічного вивчення цієї операції, незалежно від конкретного змісту тієї чи іншої задачі.

2.2. Означення та умови існування визначеного інтеграла

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$, $a < b$. Розіб'ємо цей відрізок на n довільних частин точками:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Сукупність точок $x_0, x_1, \ldots, x_n$ позначимо через τ і назвемо τ-розбиттям відрізка $[a, b]$.

На кожному частинному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, візьмемо довільну точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ і побудуємо суму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \tag{26}$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — довжина відрізка $[x_{i-1}; x_i]$.

Сума (26) називається *інтегральною сумою функції* $f(x)$, яка відповідає τ-розбиттю відрізка $[a; b]$ на частинні відрізки і даному вибору проміжних точок ξ_i.

Геометричний зміст інтегральної суми: якщо $f(x) \geqslant 0$, то число σ_n дорівнює площі ступінчатої фігури (рис. 7.4), тобто сумі площ n прямокутників з основами Δx_i і висотами $f(\xi_i)$.

Позначимо через λ довжину найбільшого частинного відрізка τ-розбиття і назвемо його *діаметром цього розбиття:*

$$\lambda = \lambda(\tau) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i.$$

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми (26) при $\lambda \to 0$, яка не залежить ні від τ-розбиття, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається *визначеним інтегралом функції* $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і позначається символом $\int_a^b f(x)\,dx$. Отже, згідно з означенням,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i. \tag{27}$$

У цьому випадку функція $f(x)$ називається *інтегровною на відрізку* $[a; b]$. Числа a і b називаються відповідно *нижньою* і *верхньою межею інтегрування;* функція $f(x)$ називається *підінтегральною функцією;* $f(x)\,dx$ — *підінтегральним виразом;* x — *змінною інтегрування;* $[a; b]$ — *проміжком інтегрування.*

Повертаючись до задач п. 2.1 на основі рівностей (22) — (27), можна сказати, що:

1) площа S криволінійної трапеції, обмеженої прямими $y = 0$, $x = a$, $x = b$ і графіком функції $y = f(x) \geqslant 0$, дорівнює визначеному інтегралу від цієї функції:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{28}$$

У цьому полягає *геометричний зміст визначеного інтеграла:* визначений інтеграл від невід'ємної функції чисельно дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції;

2) робота A змінної сили $F(x)$, яка діє на відрізку $[a;\ b]$, дорівнює визначеному інтегралу від сили:

$$A = \int_a^b F(x)\,dx; \tag{29}$$

3) шлях s, пройдений точкою за проміжок часу від $t = a$ до $t = b$, дорівнює визначеному інтегралу від швидкості $v(t)$:

$$s = \int_a^b v(t)\,dt. \tag{30}$$

Ця формула характеризує *фізичний зміст визначеного інтеграла;*

4) маса m неоднорідного стержня на відрізку $[a;\ b]$ дорівнює визначеному інтегралу від густини $\gamma(x)$:

$$m = \int_a^b \gamma(x)\,dx. \tag{31}$$

В означенні визначеного інтеграла функція f не обов'язково неперервна і невід'ємна на $[a;\ b]$. Це означення не підтверджує також існування визначеного інтеграла для будь-якої функції f, визначеної на $[a;\ b]$. Воно лише говорить про те, що коли границя інтегральної суми існує для заданої на $[a;\ b]$ функції f і при довільному розбитті τ відрізка $[a;\ b]$ і довільному виборі точок ξ_i вона одна і та сама, то ця границя називається визначеним інтегралом функції f на відрізку $[a;\ b]$.

Слід також мати на увазі, що коли кажуть, що функція f інтегровна на $[a;\ b]$, то розуміють, що існує скінченна границя (27), і ця границя не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;\ b]$ на частинні відрізки $[x_{i-1};\ x_i]$, ні від вибору проміжних точок ξ_i в кожному з них.

Сформулюємо умови інтегровності функції [12].

Теорема 1 *(необхідна умова інтегровності). Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;\ b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.*

Слід зазначити, що обернене твердження неправильне: існують функції, які обмежені на відрізку, але не інтегровні на ньому.

Прикладом такої функції є функція Діріхле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ — раціональне;} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ — ірраціональне.} \end{cases}$$

Ця функція на відрізку $[0;\ 1]$ є обмеженою: $|D(x)| \leqslant 1$, але не інтегровною. Справді, якщо на кожному частинному відрізку за проміжні точки ξ_i взяти раціональні числа, то з формули (26) випливає, що сума $\sigma_n = 1$, а якщо ξ_i — ірраціональні числа, то $\sigma_n = 0$. Це означає, що величина границі інтегральної суми, побудованої для функції $D(x)$, залежить від вибору точок ξ_i. Тому функція Діріхле не інтегровна на $[0; 1]$.

Теорема 2 *(достатня умова інтегровності). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку.*

Умова неперервності функції є достатньою умовою її інтегровності. Однак це не означає, що визначений інтеграл існує лише для неперервних функцій. Клас інтегральних функцій значно ширший. Так, існує визначений інтеграл від кусково-неперервних функцій, тобто функцій, які мають скінченне число точок розриву першого роду. Це стверджує така теорема.

Теорема 3. *Якщо функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a; b]$ і неперервна в ньому скрізь, крім скінченного числа точок, то вона інтегровна на цьому відрізку.*

Більше того, справедлива така теорема [9].

Теорема 4. *Всяка обмежена і монотонна на відрізку функція інтегровна на цьому відрізку.*

Ця теорема значно розширює клас інтегровних функцій, оскільки монотонна функція може мати не лише скінченну, а й нескінченну кількість точок розриву першого роду.

Надалі, як правило, розглядатимемо лише неперервні функції.

2.3. Властивості визначеного інтеграла

1^0. *Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz \quad \text{тощо.}$$

Інтегральна сума (26), а отже, і її границя (27) не залежать від того, якою буквою позначено агрумент функції f. Це й означає, що визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування.

Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ введений для випадку, коли $a < b$. Узагальнимо поняття інтеграла на випадки, коли $a = b$ і $a > b$.

2^0. *Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \qquad (32)$$

3^0. *Від переставлення меж інтегрування інтеграл змінює знак на протилежний:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \qquad (33)$$

Властивості 2^0 і 3^0 приймають за означенням. Відзначимо, що ці означення повністю виправдовує наведена далі формула Ньютона — Лейбніца (п. 2.4).

4^0. *Якщо функція $f(x)$ інтегровна на максимальному з відрізків $[a; b]$, $[a; c]$, $[c; b]$, то справедлива рівність*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (34)$$

(адитивність визначеного інтеграла).

⊙ Припустимо спочатку, що $a < c < b$. Оскільки границя інтегральної суми не залежить від способу розбиття відрізка $[a; b]$ на частинні відрізки, то розіб'ємо $[a; b]$ так, щоб точка c була точкою розбиття. Якщо, наприклад, $c = x_m$, то інтегральну суму можна розбити на дві суми:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Переходячи в цій рівності до границі при $\lambda \to 0$, дістанемо формулу (34).

Інше розміщення точок a, b, c зводиться до вже розглянутого. Якщо, наприклад, $a < b < c$, то за формулами (34) і (33) маємо

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \ \bullet$$

На рис. 7.5 показано геометрично цю властивість для випадку, коли $f(x) > 0$ і $a < c < b$: площа трапеції $aABb$ дорівнює сумі площ трапеції $aACc$ і $cCBb$.

Зауваження. Нехай $f(x)$ — знакозмінна неперервна функція на відрізку $[a; b]$, де $a < b$, наприклад, $\forall x \in [a; \alpha] \cup [\beta; b]$: $: f(x) \leqslant 0$ і $\forall x \in (\alpha; \beta)$: $f(x) > 0$ (рис. 7.6).

Скориставшись адитивністю та геометричним змістом інтеграла, дістанемо

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx = -S_1 + S_2 - S_3,$$

де S_1, S_2, S_3 — площі відповідних криволінійних трапецій.

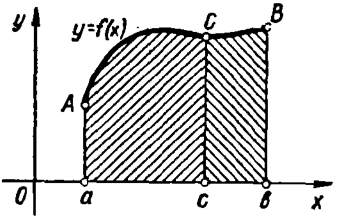


Рис. 7.5

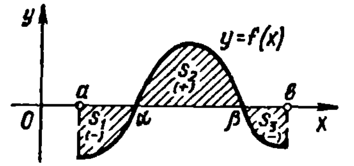


Рис. 7.6

Отже, в загальному випадку, з погляду геометрії визначений інтеграл (27) при $a < b$ дорівнює алгебраїчній сумі площ відповідних криволінійних трапецій, причому площі трапецій, розміщених над віссю Ox, мають знак плюс, а нижче осі Ox — знак мінус. Якщо $a > b$, то все формулюється навпаки.

Зазначимо, що площа заштрихованої на рис. 7.6 фігури виражається інтегралом

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = S_1 + S_2 + S_3.$$

5^0. *Сталий множник C можна винести за знак визначеного інтеграла:*

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx. \tag{35}$$

○ Дійсно,

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n Cf(\xi_i)\,\Delta x_i =$$

$$= C\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i = C\int_a^b f(x)\,dx. \ ●$$

6^0. *Визначений інтеграл від суми інтегровних функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від цих функцій:*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{36}$$

○ Для довільного τ-розбиття маємо

$$\sum_{i=1}^n (f(\xi_i) + g(\xi_i))\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Звідси, переходячи до границі при $\lambda = \lambda(\tau) \to 0$, дістанемо формулу (36). Ця властивість має місце для довільного скінченного числа доданків.

Властивості 5^0 і 6^0 називаються *лінійністю визначеного інтеграла.*

7^0. *Якщо всюди на відрізку* $[a; b]$ *маємо* $f(x) \geqslant 0$ $(a < b)$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0 \tag{37}$$

(збереження знака підінтегральної функції визначеним інтегралом).

○ Оскільки

$$f(\xi_i) \geqslant 0,\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

то будь-яка інтегральна сума і її границя при $\lambda \to 0$ теж невід'ємна. ●

8^0. *Якщо всюди на відрізку* $[a; b]$ *маємо* $f(x) \leqslant g(x)$ $(a < b)$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \tag{38}$$

(монотонність визначеного інтеграла).

○ Оскільки $g(x) \geqslant f(x)$, то з нерівності (37) маємо

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \geqslant 0.$$

Використовуючи властивість 4^0, дістаємо нерівність (38). ●

Якщо $f(x) > 0$ і $g(x) > 0$, то властивість 8^0 можна зобразити геометрично (рис. 7.7): площа криволінійної трапеції aA_1B_1b не менша площі криволінійної трапеції aA_2B_2b.

9^0. *Якщо функція* $f(x)$ *інтегровна на відрізку* $[a; b]$ $(a < b)$, *то*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{39}$$

○ Застосовуючи формулу (38) до нерівності

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

дістаємо

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

звідки й випливає нерівність (39). ●

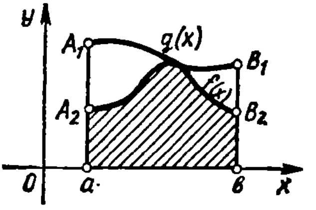


Рис. 7.7

10^0. *Якщо* $\forall x \in [a;\ b] : |f(x)| \leqslant C$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant C(b-a). \tag{40}$$

○ Скориставшись формулами (39) та (35), дістанемо

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant C\int_a^b dx.$$

Звідси й одержуємо нерівність (40), оскільки

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i = b-a. \ \bullet \tag{41}$$

11^0. *Якщо* m і M *— відповідно найменше і найбільше значення функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a;\ b]$ $(a < b)$, *то*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a) \tag{42}$$

(оцінки інтеграла по області).

○ За умовою $\forall x \in [a;\ b]$:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

тому з властивості 7^0 маємо

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx.$$

Застосовуючи до крайніх інтегралів формули (35) і (41), дістаємо нерівність (42). ●

Якщо $f(x) \geqslant 0$, то властивість 11^0 ілюструється геометрично (рис. 7.8): площа криволінійної трапеції $aABb$ не менша площі прямокутника aA_1B_1b і не більша площі прямокутника aA_2B_2b.

12^0. *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;\ b]$, *то на цьому відрізку знайдеться така точка* c, *що*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \tag{43}$$

(теорема про середнє значення функції).

○ Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку, то вона досягає свого найбільшого значення M і найменшого значення m. Тоді з оцінок (42) дістанемо (якщо $a < b$)

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Покладемо

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$, то вона набуває всі проміжні значення відрізка $[m;\ M]$ (п. 5.3, гл. 4). Отже, існує точка $c \in [a;\ b]$ така, що $f(c) = \mu$, або

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx, \tag{44}$$

звідки й випливає дана властивість.

Для випадку, коли $a > b$, приводимо ті самі міркування для інтеграла $\int\limits_b^a f(x)\,dx$, а потім, переставивши границі, приходимо до попередньої формули. ●

Рівність (44) називається формулою середнього значення, а величина $f(c)$ — *середнім значенням функції* на відрізку $[a;\ b]$.

Теорема про середнє значення при $f(x) \geqslant 0$ має такий геометричний зміст (рис. 7.9): значення визначеного інтеграла дорівнює площі прямокутника з висотою $f(c)$ і основою $b - a$.

Термін «середнє значення функції» добре узгоджується з такими фізичними поняттями, як середня швидкість, середня густина, середня потужність тощо. Якщо, наприклад, у формулі (44) інтеграл означає пройдений шлях за проміжок часу $[a;\ b]$ (п. 2.2), то середнє значення $f(c)$ означає середню швидкість, тобто сталу швидкість, при якій точка, рухаючись рівномірно, за той же проміжок часу пройшла б той самий шлях, що і при нерівномірному русі із швидкістю $f(t)$.

13°. *Якщо змінити значення інтегровної функції в скінченному числі точок, то інтегровність її не порушиться, а значення інтеграла при цьому не зміниться.*

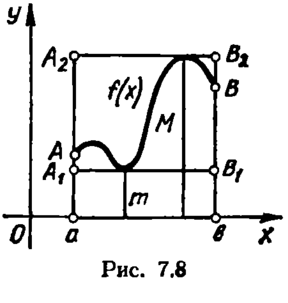


Рис. 7.8

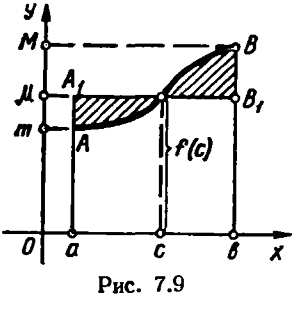


Рис. 7.9

Ця властивість дає змогу говорити про інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ навіть тоді, коли функція $f(x)$ не визначена в скінченному числі точок відрізка $[a;\ b]$. При цьому в цих точках функції можна надати цілком довільних значень і величина інтеграла не зміниться.

2.4. Інтеграл із змінною верхньою межею. Формула Ньютона — Лейбніца

Нехай функція $f(x)$ неперервна на $[a;\ b]$, тоді вона інтегровна на будь-якому відрізку $[a;\ x] \subset [a;\ b]$, тобто для довільного $x \in [a;\ b]$ існує інтеграл $\int_a^x f(t)dt$. (Оскільки визначений інтеграл не залежить від змінної інтегрування, то ми позначили її через t, щоб не плутати з верхньою межею x.) Заданий інтеграл, очевидно, є функцією від x. Позначимо цю функцію через $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{45}$$

і назвемо *інтегралом із змінною верхньою межею.*

Геометрично (рис. 7.10) при $f(x) \geqslant 0$ функція $\Phi(x)$ дорівнює площі заштрихованої криволінійно трапеції. Розглянемо основну властивість функції $\Phi(x)$.

Теорема 1. Похідна визначеного інтеграла із змінною верхньою межею по верхній межі дорівнює значенню підінтегральної функції для цієї межі:

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x). \tag{46}$$

○ Надамо аргументу x функції (45) приросту Δx, тоді, враховуючи адитивність інтеграла, дістанемо

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt =$$

$$= \Phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt,$$

звідки

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Застосовуючи до цього інтеграла теорему про середнє значення, знайдемо, що

$$\Delta\Phi = f(c)(x + \Delta x - x) = f(c)\,\Delta x,$$

де точка c знаходиться між x і $x + \Delta x$. Отже,

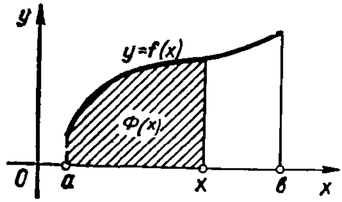


Рис. 7.10

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\,\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c).$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $x + \Delta x \to x$ і $c \to x$, тому в неперервності функції f маємо

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = \lim_{c \to x} f(c) = f(x). \; \bullet$$

З доведеної теореми випливає важливий наслідок:

Для всякої неперервної на відрізку $[a;\ b]$ функції $f(x)$ існує первісна функція. При цьому однією з первісних функцій в визначений інтеграл (45).

○ Справді, оскільки функція $F(x)$, яка задовольняє умову $F'(x) = f(x)$, є первісною функції $f(x)$, то, згідно з формулою (46), функція $\Phi(x)$ є первісною. Але будь-яка інша первісна $F(x)$ функції $f(x)$ може відрізнятися від $\Phi(x)$ лише на сталу C: $\Phi(x) = F(x) + C$, $x \in [a;\ b]$, тому

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a;\ b]. \; \bullet \qquad (47)$$

Теорема 1 розкриває глибокий зв'язок між невизначеним та визначеним інтегралами. Крім того, вона дає змогу встановити простий метод обчислення визначених інтегралів, минаючи громіздкі операції підсумовування і перехід до границі. Цей метод грунтується на такій теоремі.

Теорема 2. *Якщо $F(x)$ є якою-небудь первісною від неперервної функції $f(x)$, $x \in [a;\ b]$, то справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (48)$$

Ця формула називається *формулою Ньютона — Лейбніца.*

○ Нехай $F(x)$ — деяка первісна функції $f(x)$. Оскільки інтеграл (45) є також первісною, то згідно з формулою (47) маємо

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C.$$

Поклавши в цій рівності $x = a$, з формули (32) дістанемо

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C = 0, \quad \text{звідки} \quad C = -F(a),$$

тому

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Зокрема, при $x = b$ дістаємо формулу (48). ●

Різницю $F(b) - F(a)$ умовно позначають символами $F(x)|_a^b$, або $[F(x)]_a^b$, тому формула Ньютона — Лейбніца записується ще й так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b; \quad \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b.$$

Формула Ньютона — Лейбніца дає практично зручний спосіб обчислення визначеного інтеграла: визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює різниці значень довільної її первісної, обчислених для верхньої і нижньої меж інтегрування.

Зазначимо, що формула (48) сама по собі не розв'язує ні задачі знаходження первісної, ні задачі обчислення границі інтегральних сум. Її цінність полягає в тому, що вона встановлює зв'язок між цими задачами.

Формула Ньютона — Лейбніца значно розширює область застосування визначеного інтеграла, тому що дає загальний метод для розв'язування різноманітних практичних задач. Безпосередні ж обчислення визначеного інтеграла за формулою (27) не дозволили створити такого методу. Ще геніальний давньогрецький мислитель Архімед розв'язав задачу знаходження площі параболічного сегмента методом, що нагадує обчислення границь інтегральних сум. Потім протягом декількох століть математики таким самим способом розв'язали багато окремих задач, але лише в 17 ст. Ньютон і Лейбніц показали, що обчислення визначеного інтеграла від довільної неперервної функції зводиться до відшукання її первісної. Наприклад,

$$\int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4};$$

$$\int_0^\pi (2x - \sin x)\,dx = (x^2 + \cos x)|_0^\pi =$$

$$= (\pi^2 + \cos\pi) - (0^2 + \cos 0) = \pi^2 - 2;$$

$$\int_0^1 \frac{x+\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\,(1+x^2)}{1+x^2} + $$

$$+\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,d\,(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 + $$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln 2 + \frac{\pi^2}{16}\right).$$

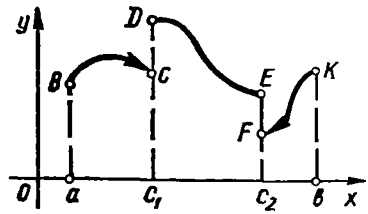


Рис. 7.11

З а у в а ж е н н я 1. Теорема 3 (п. 2.2) стверджує існування визначеного інтеграла від кусково-неперервної функції, яка має скінченне число точок розриву першого роду. Обчислення інтеграла від такої функції можна провести на основі властивостей інтеграла 4° і 13° (п. 2.3).

На рис. 7.11 зображено графік кусково-неперервної функції, заданої на відрізку $[a;\ b]$. Вона інтегровна на $[a;\ b]$ і

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx.$$

Приклади

1. Нехай $f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leqslant x < 1; \\ 1, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$ Обчислити $\int_0^2 f(x)\,dx$.

○ Маємо $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 dx = e^x\Big|_0^1 + x\Big|_1^2 = e.$ ●

2. Обчислити

$$I = \int_0^\pi \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1-\sin^2 x}}.$$

○ Підінтегральна функція $f(x)$ не визначена в точці $x = \frac{\pi}{2}$. Розіб'ємо відрізок $[0, \pi]$ на два: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ і $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. На першому відрізку довизначимо неперервно функцію $f(x)$: нехай $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $\left(\text{оскільки } f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 1\right)$, тоді

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

На другому відрізку покладемо $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ $\left(\text{оскільки } f\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = -1\right)$ і знову дістанемо інтеграл від неперервної функції $f(x) = -1$; $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$:

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-1)\, dx = -x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, $I = I_1 + I_2 = 0$. ●

Зауваження 2. Обчислення визначеного інтеграла від кусочно-неперервної функції можна проводити безпосередньо також за допомогою формули, аналогічної формулі (48). Для цього дамо розширене означення первісної.

Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, якщо:

1) $F(x)$ неперервна на $[a; b]$;

2) $F'(x) = f(x)$ в точках неперервності $f(x)$.

Очевидно, для неперервної функції це означення первісної збігається із загальноприйнятим. Крім того, справедливе таке твердження:

Кусочно-неперервна на відрізку $[a; b]$ функція має первісну на цьому відрізку в розумінні розширеного означення; однією з первісних є функція $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ і справедлива формула Ньютона — Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Наприклад, $\int_{-1}^{2} \operatorname{sign} x dx = |x| \Big|_{-1}^{2} = 1$, оскільки за розширеним означенням функція $f(x) = \operatorname{sign} x$ на $[-1; 2]$ має первісну $F(x) = |x|$.

2.5. Методи обчислення визначених інтегралів

При обчисленні визначених інтегралів, як і невизначених, широко користуються методом заміни змінної (або методом підстановки) і методом інтегрування частинами.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$;

2) функція $x = \varphi(t)$ і її похідна $x' = \varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$;

3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ і $\forall t \in (\alpha; \beta)$: $a < \varphi(t) < b$.

Тоді справджується рівність

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{49}$$

○ Оскільки функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, то вона має первісну. Позначимо її через $F(x)$, $x \in [a; b]$, тоді з теореми про заміну змінної в невизначеному інтегралі випливає, що функція $F(\varphi(t))$ буде первісною функції $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$. Застосувавши формулу Ньютона — Лейбніца, маємо

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a); \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt =$$

$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a). \ \bullet$$

Формула (49) називається *формулою заміни змінної* (або *підстановки) у визначеному інтегралі*.

Зауваження 1. Якщо при обчисленні невизначеного інтеграла заміною $x = \varphi(t)$ у первісній функції необхідно було від змінної t повернутися до змінної x, то при обчисленні визначеного інтеграла замість цього треба змінити межі інтегрування. Нижня межа α знаходиться як розв'язок рівняння $a = \varphi(t)$ відносно невідомого t, а верхня межа β — з рівняння $b = \varphi(t)$.

Якщо функція $\varphi(t)$ не монотонна, то може статися, що ці рівняння дадуть кілька різних пар α і β, які задовольняють умови теореми 1. В цьому випадку можна взяти будь-яку з таких пар.

Зауваження 2. Часто замість підстановки $x = \varphi(t)$ застосовують підстановку $t = \psi(x)$. У цьому випадку нові межі інтегрування визначаються безпосередньо: $\alpha = \psi(a)$, $\beta = \psi(b)$. Проте тут слід мати на увазі, що функція $x = x(t)$, обернена до функції $\psi(t)$, має, як і раніше, задовольняти всі умови теореми 1. Зокрема, функція $x(t)$ в межах інтегрування має бути означеною неперервно диференційовною функцією t і при зміні t від α до β змінна $x(t)$ має змінюватися від a до b.

Найзручніше виконувати заміну монотонно диференційовними функціями. Такі функції гарантують однозначність як прямої, так і оберненої функцій.

Приклади

1. Обчислити інтеграл $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

○ Нехай $x = a\sin t$. Переконуємось, що ця функція задовольняє всі умови теореми 1, причому якщо $x = 0$, то $0 = a\sin t$, звідки $t = 0$; якщо $x = a$, то $a = a\sin t$, звідки $t = \frac{\pi}{2}$. Отже, $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$. (Ця функція не є монотонною, тому існують й інші пари розв'язків, які задовольняють умови теореми 1 і можуть бути межами: $\alpha = 2\pi,\ \beta = \frac{5\pi}{2}$; $\alpha = -2\pi,\ \beta = -\frac{3\pi}{2}$ тощо.)

Далі маємо

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\, a \cos t dt =$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}. \bullet$$

2. Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}\, dx.$$

○ Нехай $\sqrt{e^x - 1} = t$, звідки $\alpha = \sqrt{e^0 - 1} = 0$, $\beta = \sqrt{e^{\ln 5} - 1} = 2$. Отже, якщо x змінюється від 0 до $\ln 5$, то нова змінна t змінюється від 0 до 2. Функція $x = \ln (t^2 + 1)$, обернена до функції $t = \sqrt{e^x - 1}$, на відрізку $[0; 2]$ є монотонною і неперервною разом з похідною $x' = \frac{2t}{t^2 + 1}$ на цьому відрізку. Маємо

$$I = \int_0^2 \frac{(t^2 + 1\ \ t \cdot 2t dt}{(t^2 + 4)\,(t^2 + 1)} = 2 \int_0^2 \frac{t^2 dt}{t^2 + 4} =$$

$$= 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2 + 4}\right) dt = 2 \left(t - 2 \operatorname{arctg} \frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^2 = 4 - \pi. \bullet$$

3. Чи можна обчислити підстановкою $x = \sin t$ інтеграл

$$\int_0^2 x \sqrt[3]{1 - x^2}\, dx.$$

○ Ні, тому що змінні t на проміжку $(-\infty; +\infty)$ відповідає змінна x не на відрізку $[0; 2]$, а на відрізку $[-1; 1]$ $(|\sin x| \leqslant 1)$. ●

4. Довести, що

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2 \int_0^a f(x)\, dx,$$

коли $f(x)$ — парна функція;

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0,\ \text{коли}\ f(x) \text{ — непарна функція.}$$

○ Маємо

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

У першому інтегралі виконаємо підстановку $x = -t$:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx.$$

Далі дістаємо

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} (f(-x) + f(x))\,dx.$$

Якщо функція парна, то $f(-x) + f(x) = 2f(x)$, а якщо непарна, то $f(-x) + f(x) = 0$. ●

Знайдені формули дуже корисні. Можна, наприклад, зразу, не виконуючи обчислень, сказати, що

$$\int_{-a}^{a} x^3 \cos x dx = 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x \cos^4 x\,dx = 0;$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^5 \sin^2 x dx = 0 \quad \text{тощо.}$$

Теорема 2. *Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають на відрізку $[a; b]$ неперервні похідні, то справедлива формула*

$$\int_{a}^{b} u dv = uv\,\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v du. \tag{50}$$

○ Оскільки функція uv є первісною функції $(uv)' = u'v + uv'$, то за формулою Ньютона — Лейбніца дістанемо

$$\int_{a}^{b} (u'v + uv')\,dx = uv\,\Big|_{a}^{b}.$$

Скориставшись лінійністю визначеного інтеграла (п. 2.4), дістаємо формулу (50). ●

Формула (50) називається *формулою інтегрування частинами визначеного інтеграла.*

Всі зауваження відносно формули (6) інтегрування частинами невизначеного інтеграла переносяться і на формулу (50).

Приклади

Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_1^e x\ln x\,dx$; б) $\int\limits_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}\,dx$;

г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

○ а) $$\int\limits_1^e x\ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u = \ln x, & dv = x\,dx \\ du = \frac{1}{x}\,dx, & v = \frac{1}{2}x^2\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}x^2\ln x\,\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int\limits_1^e x\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}(e^2+1);$$

б) $$\int\limits_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx = \left|\begin{matrix} u = \mathrm{arctg}\,x, & dv = x\,dx \\ du = \frac{1}{1+x^2}\,dx, & v = \frac{x^2}{2}\end{matrix}\right| = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,x\,\Big|_0^1 -$$

$$-\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8} - \int\limits_0^1\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{8} - (x - \mathrm{arctg}\,x)\,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2};$$

в) $$\int\limits_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}\,dx = \left|\begin{matrix} t = \sqrt{x}, \quad x = t^2 \\ dx = 2t\,dt\end{matrix}\right| = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt = \left|\begin{matrix} u = t, & dv = \sin t\,dt \\ du = dt, & v = -\cos t\end{matrix}\right| =$$

$$= 2\left(-t\cos t\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt\right) = 2;$$

г) $$I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x\sin x\,dx = \left|\begin{matrix} u = \sin^{n-1}x, \\ du = (n-1)\sin^{n-2}x\cos x\,dx,\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} dv = \sin x\,dx \\ v = -\cos x\end{matrix}\right| = -\sin^{n-1}x\cos x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx = (n-1)\times$$

$$\times\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,(1-\sin^2 x)\,dx = (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,dx - (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$$

Отже, $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$, звідки

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}, \quad n \geqslant 2.$$

Дістали рекурентну формулу, за якою інтеграл I_n послідовно зводиться до інтегралв

$$I_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^0\, dx = \frac{\pi}{2},$$

або до інтеграла

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Наприклад,

$$I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4};$$

$$I_3 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3};$$

$$I_4 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3\pi}{16}.$$

Методом індукції можна довести, що

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}; \quad I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

(Символ $n!!$ означає добуток натуральних чисел, які не перевищують n і однієї з ним парності.)

Так,

$$I_8 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 t dt = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \, \frac{\pi}{2} = \frac{35\pi}{256};$$

$$I_9 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 t dt = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{128}{315}. \bullet$$

2.6. Невласні інтеграли

В п. 2.2 ми ввели визначений інтеграл як границю інтегральних сум, передбачаючи при цьому, що відрізок інтегрування скінченний, а підінтегральна функція на цьому відрізку обмежена. Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то наведене вище означення визначеного інтеграла стає неприйнятним: у випадку нескінченного проміжку інтегрування його не можна розбити на n частинних відрізків скінченної довжини, а у випадку необмеженої функції інтегральна сума явно не має скінченної границі. Узагальнюючи поняття визначеного інтеграла на ці випадки, приходимо до невласного інтеграла — інтеграла від функції на необмеженому проміжку або від необмеженої функції.

1°. *Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду).*

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a; +\infty)$ і інтегровна на будь-якому відрізку $[a; b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$. Тоді, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx, \tag{51}$$

її називають *невласним інтегралом першого роду* і позначають так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{52}$$

Таким чином, за означенням

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{53}$$

У цьому випадку інтеграл (52) називають *збіжним*, а підінтегральну функцію $f(x)$ — *інтегровною на проміжку* $[a; +\infty)$.

Якщо ж границя (51) не існує або нескінченна, то інтеграл (52) називається також невласним, але *розбіжним*, а функція $f(x)$ — *неінтегровною на* $[a; +\infty)$.

Аналогічно інтегралу (53) означається невласний інтеграл на проміжку $(-\infty; b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{54}$$

Невласний інтеграл з двома нескінченними межами визначається рівністю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{55}$$

де c — довільне дійсне число. Отже, інтеграл зліва у формулі (55) існує або є збіжним лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли справа. Можна довести, що інтеграл, визначений формулою (55), не залежить від вибору числа c.

З наведених означень видно, що невласний інтеграл не є границею інтегральних сум, а є границею означеного інтеграла із змінною межею інтегрування.

Зауважимо, що коли функція $f(x)$ неперервна і невід'ємна на проміжку $[a;\ +\infty)$ і коли інтеграл (53) збігається, то природно вважати, що він виражає площу необмеженої області (рис. 7.12).

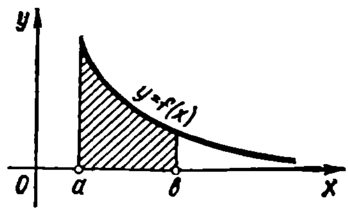


Рис. 7.12

Приклад

Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

а) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\cos 2x\,dx$;

в) $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^x dx$: г) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha\in R$.

○ а) За формулою (53) маємо

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} x\,\Big|_1^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg} b-\operatorname{arctg} 1)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Отже інтеграл а) збігається.

б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\cos 2x\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\cos 2x\,dx=\lim_{a\to-\infty}\frac{\sin 2x}{2}\Big|_a^0=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}(\sin 0-\sin 2a)=$

$\displaystyle=-\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\sin 2a.$

Оскільки ця границя не існує при $a\to-\infty$, то інтеграл б) розбіжний.

в) $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^x dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^x dx=\lim_{b\to+\infty}e^x\,\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}(e^b-e^0)=+\infty.$

Отже інтеграл в) розбіжний.

г) Якщо $\alpha=1$, то

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln x\,\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln 1)=+\infty,$$

Якщо $\alpha \neq 1$, то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} (b^{1-\alpha} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1}, & \alpha > 1; \\ +\infty, & \alpha < 1. \end{cases}$$

Отже інтеграл г) є збіжнним при $\alpha > 1$ і розбіжним при $\alpha \leqslant 1$. ●

У розглянутих прикладах обчислення невласного інтеграла грунтувалося на його означенні. Проте у деяких випадках немає необхідності обчислювати інтеграл, а достатньо знати, збіжний він чи ні. Наводимо без доведення деякі ознаки збіжності.

Теорема 1. *Якщо на проміжку* $[a; +\infty)$ *функції* $f(x)$ і $g(x)$ *неперервні і задовольняють умову* $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, *то із збіжності інтеграла*

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \tag{56}$$

випливає збіжність інтеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{57}$$

а із розбіжності інтеграла (57) випливає розбіжність інтеграла (56).

Наведена теорема має простий геометричний зміст (рис. 7.13); якщо площа більшої за розмірами необмеженої області є скінченне число, то площа меншої області є також скінченне число; якщо площа меншої області нескінченно велика величина, то площа більшої області є також нескінченно велика величина.

Приклад

Дослідити на збіжність інтеграли:

а) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^6+5}}$; $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{2+\sin x+\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$

○ а) Оскільки $\forall x \in [1; +\infty)$:

$$0 < \frac{x}{\sqrt{x^6+5}} < \frac{1}{x^2}$$

і інтеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ збігається, то за теоремою 1 заданий інтеграл також збігається.

б) Цей інтеграл розбігається, бо $\forall x \in [2, +\infty)$:

$$\frac{2+\sin x+\ln x}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$$

і інтеграл $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ розбігається. ●

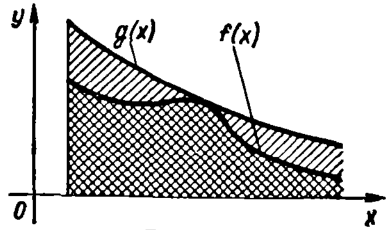


Рис. 7.13

Теорема 2. Якщо існує границя

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 < k < +\infty, \quad (f(x) > 0,\ g(x) > 0),$$

то інтеграли (56) і (57) або одночасно обидва збігаються, або одночасно розбігаються.

Ця ознака іноді виявляється зручнішою, ніж теорема 1, бо не потребує перевірки нерівності $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

Приклад

Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \ln \frac{x^2+2}{x^2+1}\, dx.$$

○ Оскільки інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ збігається і

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln \frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = 1,$$

то заданий інтеграл також збігається. ●

В теоремах 1 і 2 розглядались невласні інтеграли від невід'ємних функцій. У випадку, коли підінтегральна функція є знакозмінною, справедлива така теорема.

Теорема 3. Якщо інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ збігається, то збігається й інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$.

Приклад

Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1+3\sin x}{x^3}\, dx$.

○ Тут підінтегральна функція знакозмінна. Оскільки

$$\left|\frac{1+3\sin x}{x^3}\right| \leqslant \frac{4}{x^3} \quad \text{і} \quad \int\limits_1^{\infty} \frac{4}{x^3}\,dx = 2,$$

то заданий інтеграл збігається. ●

Слід зауважити, що із збіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ не випливає, взагалі кажучи, збіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$. Ця обставина виправдовує такі означення.

Якщо разом з інтегралом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається й інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ називають *абсолютно збіжним*, а функцію $f(x)$ — *абсолютно інтегровною на проміжку* $[a; +\infty)$.

Якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається, а інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ розбігається, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ називають *умовно (або неабсолютно) збіжним*.

Тепер теорему 3 можна перефразувати так: абсолютно збіжний інтеграл збігається.

Отже, для знакозмінної функції викладені тут міркування дають змогу встановити лише абсолютну збіжність інтеграла. Якщо ж невласний інтеграл збігається умовно, то застосовують більш глибокі ознаки збіжності [11].

Приклад

Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{b^2+x^2}\,dx \quad (a;\ b \neq 0).$$

○ Оскільки

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{b^2+x^2} = \frac{1}{b} \lim_{a\to+\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{b}\Big|_0^a = \frac{\pi}{2b} \quad \text{і} \quad 0 \leqslant \left|\frac{\sin ax}{b^2+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{b^2+x^2},$$

то за теоремою 3 інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \left| \frac{\sin ax}{b^2 + x^2} \right| dx$ збігається.

Отже, збігається, причому абсолютно, і заданий інтеграл, а функція $f(x) = \frac{\sin ax}{b^2 + x^2}$ на проміжку $[0; +\infty)$ є абсолютно інтегровною. ●

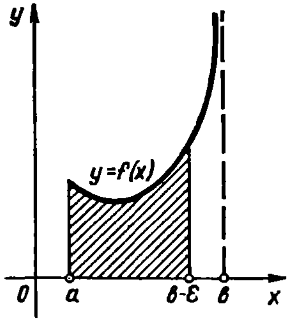


Рис. 7.14

2°. *Невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду).*

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a; b)$. Точку $x = b$ назвемо *особливою точкою функції* $f(x)$, якщо $f(x) \to \infty$ при $x \to b - 0$ (рис. 7.14). Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a; b - \varepsilon]$ при довільному $\varepsilon > 0$ такому, що $b - \varepsilon > a$; тоді, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \tag{58}$$

її називають *невласним інтегралом другого роду* і позначають так:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{59}$$

Отже, за означенням

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{60}$$

У цьому випадку кажуть, що інтеграл (59) існує або збігається. Якщо ж границя (58) нескінченна або не існує, то інтеграл (59) також називають невласним інтегралом, але розбіжним.

Аналогічно якщо $x = a$ — особлива точка (рис. 7.15), то невласний інтеграл визначається так:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Якщо $f(x)$ необмежена в околі якої-небудь внутрішньої точки $c_0 \in (a; b)$, то за умови існування обох невласних інтегралів $\int\limits_a^{c_0} f(x)\,dx$ і $\int\limits_{c_0}^{b} f(x)\,dx$ за означенням покладають (рис. 7.16).

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^{c_0} f(x)\,dx + \int\limits_{c_0}^{b} f(x)\,dx.$$

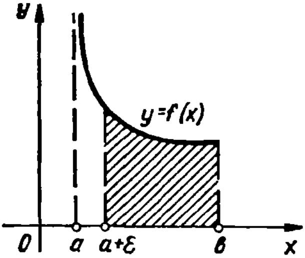


Рис. 7.15

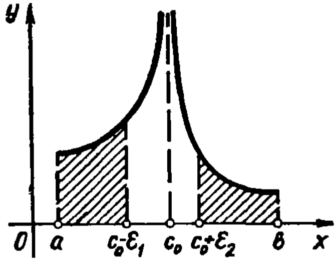


Рис. 7.16

Нарешті, якщо a та b — особливі точки, то за умови існування обох невласних інтегралів $\int_a^c f(x)\,dx$ і $\int_c^b f(x)\,dx$ за означенням покладають

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

де c — довільна точка інтервалу $(a;\ b)$.

Приклад

Обчислити невласні інтеграли:

а) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$.

○ а) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^{2-\varepsilon} =$

$= \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin\frac{2-\varepsilon}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Отже, інтеграл а) збіжний.

б) Якщо $\alpha \neq 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_\varepsilon^1 =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon\to 0} (1-\varepsilon^{1-\alpha}) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & 0<\alpha<1; \\ +\infty, & \alpha>1. \end{cases}$$

Якщо $\alpha = 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln x\,\Big|_\varepsilon^1 = -\lim_{\varepsilon\to+0} \ln\varepsilon = +\infty.$$

Таким чином, інтеграл б) збігається при $0 < \alpha < 1$ і розбігається при $\alpha \geqslant 1$. ●

Сформулюємо тепер ознаки збіжності для невласних інтегралів другого роду.

Теорема 4. *Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на проміжку $[a; b)$, мають особливу точку $x = b$ і задовольняють умову $0 \leqslant f(x) \leqslant \leqslant g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а із розбіжності інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$.*

Приклад

Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+5x^4}$.

○ Заданий інтеграл збігається, бо

$$\forall x \in (0;\ 1] : 0 < \frac{1}{\sqrt{x}+5x^4} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

і збігається інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. ●

Теорема 5. *Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ на проміжку $[a; b)$ неперервні, додатні і мають особливість в точці $x = b$, тоді якщо існує границя*

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 < k < +\infty,$$

то інтеграли $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ і $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Приклад

Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$.

○ Функції $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ та $g(x) = \frac{1}{x}$ мають особливість в точці $x = 0$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, і інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ розбігається, то заданий інтеграл також розбігається. ●

Теорема 6. *Якщо $x = b$ — особлива точка функції $f(x)$ і інтеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ збігається, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ також збігається.*

Приклад

Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^2 \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx.$

○ Заданий інтеграл збігається, тому що $\left|\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ і збігається інтеграл $\int\limits_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx.$ ●

2.7. Наближене обчислення визначених інтегралів

Нехай треба обчислити визначений інтеграл $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, де $f(x)$ — неперервна на відрізку $[a; b]$ функція. Якщо можна знайти первісну $F(x)$ від функції $f(x)$, то цей інтеграл обчислюється за формулою Ньютона — Лейбніца: $I = F(b) - F(a)$. Якщо ж первісна не е елементарною функцією, або функція $f(x)$ задана графіком чи таблицею, то формулою Ньютона — Лейбніца скористатись вже не можна. Тоді визначений інтеграл обчислюють наближено. Наближено обчислюють визначений інтеграл і тоді, коли первісна функція $F(x)$ хоч і є елементарною, але точні її значення $F(b)$ і $F(a)$ дістати не просто.

Наближені методи обчислення визначеного інтеграла здебільшого грунтуються на геометричному змісті визначеного інтеграла: якщо $f(x) \geqslant 0$, то інтеграл I дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

Ідея наближеного обчислення інтеграла полягає в тому, що задана крива $y = f(x)$ замінюється новою лінією, «близькою» до заданої. Тоді шукана площа наближено дорівнює площі фігури, обмеженої зверху цією лінією.

1°. *Формули прямокутників.* Нехай треба обчислити визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ від неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$.

Поділимо відрізок $[a; b]$ на n рівних частин точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

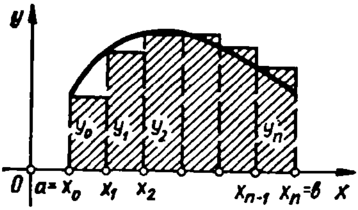


Рис. 7.17

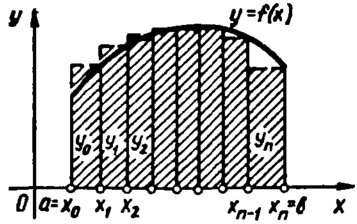


Рис. 7.18

і знайдемо значення функції $f(x)$ в цих точках:

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \ \ldots, \ f(x_n) = y_n.$$

Замінимо задану криволінійну трапецію (рис. 7.17) ступінчатою фігурою, що складається з n прямокутників. Основи цих прямокутників однакові і дорівнюють $\frac{b-a}{n}$, а висоти збігаються із значеннями y_i в початкових точках частинних інтервалів. Площа ступінчатої фігури і буде наближеним значенням визначеного інтеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k). \quad (61)$$

Якщо висоти прямокутників є значення y_i в кінцевих точках частинних інтервалів (рис. 7.18), то

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k). \quad (62)$$

Можна довести, що похибка наближеної формули зменшиться, якщо висотами прямокутників взяти значення функції в точках $c_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$ (середини відрізків $[x_{k-1}, x_k]$), (рис. 7.19); тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right). \quad (63)$$

Формули (61) — (63) називаються *формулами прямокутників*.

2⁰. *Формула трапецій*. Замінимо криву $f(x)$ не ступінчатою лінією, як у попередньому випадку, а ламаною (рис. 7.20), сполучивши сусідні точки (x_i, y_i). Тоді площа криволінійної трапеції наближено дорівнюватиме сумі площ прямокутних трапецій, обмежених зверху відрізками цієї ламаної.

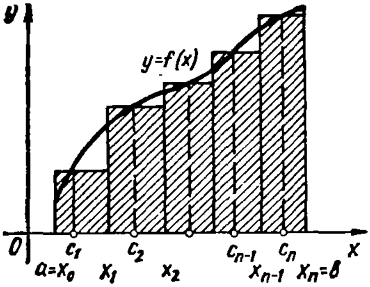


Рис. 7.19

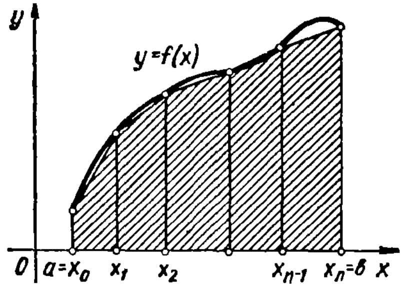


Рис. 7.20

Площа k-ї трапеції дорівнює $\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\cdot\frac{b-a}{n}$, де y_{k-1} і y_k — основи трапеції, а $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ — її висота. Тому

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right) =$$

$$= \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right). \qquad (64)$$

Формула (64) називається *формулою трапецій*.

3°. *Формула Сімпсона*. Під час виведення формули трапеції криву, яка є графіком функцій $y = f(x)$, замінювали ламаною лінією. Щоб дістати точніший результат, замінимо цю криву іншою кривою, наприклад параболою.

Покажемо спочатку, що через три різні точки $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, $M_3(x_3;\ y_3)$, які не лежать на одній прямій, можна провести лише одну параболу $y = ax^2 + bx + c$.

Справді, підставляючи в рівняння параболи координати заданих точок, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1, \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2, \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3, \end{cases} \qquad (65)$$

визначник якої

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1) \neq 0,$$

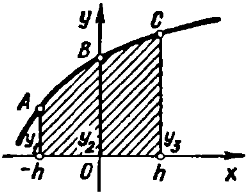


Рис. 7.21

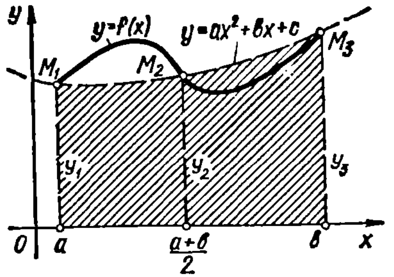


Рис. 7.22

оскільки числа x_1, x_2, x_3 за умовою різні. Отже, ця система має єдиний розв'язок (п. 3.2, гл. 1), тобто коефіцієнти a, b і c параболи визначаються однозначно.

Зокрема, розв'язуючи систему (65) для точок A $(-h;\ y_1)$, B $(0;\ y_2)$, C $(h;\ y_3)$, дістанемо

$$a = \frac{y_1 + y_3 - 2y_2}{2h^2}, \quad b = \frac{y_3 - y_1}{2h}, \quad c = y_2.$$

Знайдемо площу S криволінійної трапеції, обмеженої параболою, яка проходить через точки A, B, C, і прямими $x = -h$, $x = h$ і $y = 0$ (рис. 7.21):

$$S = \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\,dx = \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right)\Big|_{-h}^{h} =$$

$$= \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3}(y_1 + y_3 - 2y_2 + 6y_2) = \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3). \tag{66}$$

Розглянемо тепер криволінійну трапецію $aM_1M_2M_3b$, обмежену кривою $y = f(x)$ (рис. 7.22). Якщо через точки M_1, M_2 і M_3 цієї кривої провести параболу $y = ax^2 + bx + c$, то за формулою (66)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}(y_1 + 4y_2 + y_3). \tag{67}$$

Однак, якщо відрізок $[a;\ b]$ досить значний, то формула (67) даватиме велику похибку. Щоб збільшити точність, розіб'ємо відрізок $[a;\ b]$ на парне число $2n$ однакових частин, а криволінійну трапецію — на n частинних криволінійних трапецій.

Застосовуючи до кожної з цих трапецій формулу (67), дістанемо

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_0 + 4y_1 + y_2);$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_2+4y_3+y_4);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}).$$

Додамо почленно ці наближені рівності:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[(y_0+y_{2n})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})+$$

$$+4(y_2+y_3+\cdots+y_{2n-1})]=$$

$$=\frac{b-a}{6n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{m=0}^{n-2} f(x_{2m+2})+4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1})\right]. \qquad (68)$$

Ця формула називається *формулою парабол* або *формулою Сімпсона.* Формули (61), (62), (63), (64) і (68) називаються *квадратурними.*

Різницю між лівою і правою частиною квадратурної формули називають її *залишковим членом* і позначають через $R_n(f)$. Абсолютна похибка $|R_n(f)|$ квадратурної формули, очевидно, залежить від числа n — кількості частинних відрізків, на які розбивається відрізок інтегрування $[a;\ b]$. Наведемо формули, які дозволяють, по-перше, оцінювати абсолютні похибки квадратурних формул, якщо задано n, і, по-друге, визначати число n так, щоб обчислити заданий інтеграл з наперед заданою точністю [5].

Якщо функція $f(x)$ має на відрізку $[a;\ b]$ неперервну похідну $f'(x)$ і $\forall x \in [a;\ b] : |f'(x)| \leqslant M_1$, то абсолютна похибка наближених рівностей (61) — (64) оцінюється формулою

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{4n}.$$

Для функцій $f(x)$, які мають другу неперервну похідну і $\forall x \in [a;\ b] : |f''(x)| \leqslant M_2$, виконується нерівність

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{M_2\,(b-a)^3}{12n^2},$$

яка справедлива для формул прямокутників і трапецій.

Абсолютна похибка в наближеній рівності (68) оцінюється формулою

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{M_2\,(b-a)^3}{81n^2}.$$

Якщо функція $f(x)$ має на відрізку $[a;\ b]$ четверту неперервну похідну і $\forall x \in [a;\ b]: |f^{IV}(x)| \leqslant M_4$, то для формули Сімпсона справедлива оцінка:

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{M_4(b-a)^5}{2880n^4}.$$

Приклади

1. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$.

○ Це інтеграл від біноміального диференціала, який в елементарних функціях не обчислюється. Обчислимо його наближено. Розіб'ємо відрізок $[0;\ 1]$ на 10 рівних частин точками $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, ..., $x_9 = 09$, $x_{10} = 1$.

Знайдемо значення функції $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ в цих точках:

$$f(x_0) = 1, \quad f(x_1) = 1{,}00005, \quad f(x_2) = 1{,}00080,$$
$$f(x_3) = 1{,}00404, \quad f(x_4) = 1{,}01272, \quad f(x_5) = 1{,}03278,$$
$$f(x_6) = 1{,}06283, \quad f(x_7) = 1{,}11360, \quad f(x_8) = 1{,}18727,$$
$$f(x_9) = 1{,}28690, \quad f(x_{10}) = 1{,}41421.$$

За формулою прямокутників (61) маємо

$$I \approx \frac{1}{10}(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_9)) = 1{,}06990.$$

Оскільки $f'(x) = \dfrac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$ і $M_1 = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} f'(x) = \sqrt{2}$, то залишковий член формули прямокутників

$$|R_{10}(f)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4 \cdot 10} = 0{,}03536.$$

Отже, $I = 1{,}06990 \pm 0{,}03536$.

За формулою трапецій (64) дістанемо

$$I \approx \frac{1}{20}(f(x_0) + f(x_{10}) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_9)) = 1{,}09061.$$

Оскільки $f''(x) = \dfrac{2x^2(x^4+3)}{\sqrt{(1+x^4)^3}}$ і $M_2 = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} f''(x) = 2\sqrt{2}$, то залишковий член формули трапецій

$$|R_{10}(f)| \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{12 \cdot 10^2} \approx 0{,}00236.$$

Отже, $I = 1{,}09061 \pm 0{,}00236$.

За формулою Сімпсона $(2n = 10)$

$$I = \frac{1}{30}(f(x_0) + f(x_{10}) + 2f(x_2) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_8) + 4f(x_1) +$$
$$+ 4f(x_3) + \cdots + 4f(x_9)) = 1{,}08949.$$

Оскільки $f^{\mathrm{IV}}(x) = \dfrac{12(1 - 14x^4 + 5x^8)}{\sqrt{(1 + x^4)^7}}$ і $M_4 = \max\limits_{0 < x < 1} |f^{\mathrm{IV}}(x)| \leqslant 15\sqrt{2}$, то залишковий член формули Сімпсона

$$|R_5(f)| \leqslant \frac{15\sqrt{2}}{2880 \cdot 5^4} < 0{,}000012.$$

Таким чином, $I = 1{,}08949 \pm 0{,}00002$, тобто формула Сімпсона значно точніша формули прямокутників і формули трапецій. ●

2. На скільки частин треба розбити відрізок [1; 2], щоб за формулою прямокутників обчислити інтеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$ з точністю до 0,001?

Оскільки для функції $f(x) = \frac{1}{x}$ маємо $0 < f''(x) = \frac{2}{x^3} \leqslant 2$, якщо $x \in [1; 2]$, то

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{2}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}.$$

Якщо взяти $n = 12$, то $R_{12} = \frac{1}{864} > 0{,}001$; якщо $n = 13$, то $R_{13} < \frac{1}{6 \cdot 169} =$

$$= \frac{1}{1014} < 0{,}001.$$

Отже, щоб за формулою прямокутників обчислити заданий інтеграл з точністю до 0,001, достатньо відрізок [1; 2] розбити на 13 рівних частин. ●

Завдання для самоконтролю

1. У чому полягає задача про площу криволінійної трапеції; роботу сили; шлях; масу?
2. Що називається визначеним інтегралом? Виразити за допомогою визначеного інтеграла поняття, названі в попередньому запитанні.
3. Сформулювати теорему про існування визначеного інтеграла.
4. Сформулювати і довести властивість:

$$\int\limits_a^b (C_1 f(x) + C_2 \varphi(x))\, dx = C_1 \int\limits_a^b f(x)\, dx + C_2 \int\limits_a^b \varphi(x)\, dx.$$

5. Сформулювати і довести властивості адитивності і збереження знака визначеного інтеграла.
6. Сформулювати, довести і геометрично проілюструвати теорему про оцінку інтеграла.
7. Сформулювати, довести і геометрично проілюструвати теорему про середнє значення.
8. Сформулювати і довести теорему про похідну від інтеграла із змінною верхньою межею.
9. Записати і довести формулу Ньютона — Лейбніца.
10. У чому полягає метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі?
11. У чому полягає метод заміни змінної у визначеному інтегралі?
12. Що називається невласним інтегралом першого роду? Навести приклад.
13. Що називається невласним інтегралом другого роду? Навести приклад.
14. Сформулювати ознаки збіжності невласних інтегралів.
15. Вивести формули прямокутників, трапецій і парабол для наближеного обчислення визначених інтегралів.

16. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$; б) $\int\limits_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$; в) $\int\limits_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos\ln x dx$;

г) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$; д) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

17. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$; в) $\int\limits_0^{+\infty} x\sin xdx$; г) $\int\limits_0^1 \ln xdx$.

18. Знайти наближене значення $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 \approx 0{,}69315$ за формулами прямокутників, трапецій і Сімпсона ($n = 10$).

Відповіді. 16. а) $1 - \frac{2}{e}$; б) $\frac{464\sqrt{2}}{15}$; в) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$; г) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; д) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$. 17. а) 1; б) $\frac{\pi}{4}$; в) розбіжний; г) -1.

§ 3. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Існує дві основні схеми застосування визначеного інтеграла.

Перша схема, або так званий *метод інтегральних сум*, базується на означенні визначеного інтеграла. Шукана величина спочатку наближено зображається у вигляді інтегральної суми, а потім точно виражається через границю цієї суми або через визначений інтеграл. Цим методом ми користувалися для розв'язування задач п. 2.1.

Друга схема, або так званий *метод диференціала*, полягає в тому, що спочатку складається диференціал шуканої величини, а сама шукана величина знаходиться інтегруванням цього диференціала у відповідних межах. Особливо широко метод диференціала застосовується в диференціальних рівняннях (гл. 8).

Розглянемо застосування визначеного інтеграла до розв'язування деяких геометричних і фізичних задач.

3.1. Обчислення площ плоских фігур

Як уже зазначалось (п. 2.2), якщо на відрізку $[a; b]$ функція $y = f(x)$ неперервна і $f(x) \geqslant 0$, то площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис. 7.4), знаходять за формулою

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{69}$$

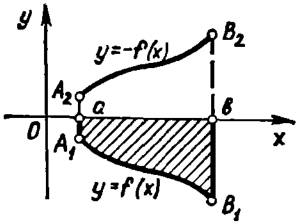


Рис. 7.23

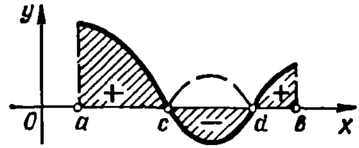


Рис. 7.24

Часто буває, що фігура, площу якої треба знайти, не є криволінійною трапецією. Якщо $f(x) \leqslant 0$ на $[a;\ b]$, то фігура aA_1B_1b лежить під віссю Ox (рис. 7.23). Площа цієї фігури дорівнює площі криволінійної трапеції aA_2B_2b, яка обмежена зверху кривою $-f(x) \geqslant 0$; тоді за формулою (69) маємо

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{70}$$

Формули (69) і (70) можна об'єднати в одну:

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{71}$$

Ця формула залишається справедливою, якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$ скінченне число разів змінює знак (рис. 7.24):

$$S = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Якщо треба обчислити площу фігури $A_1A_2B_2B_1$ (рис. 7.25), то за формулою (69)

$$S = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx, \tag{72}$$

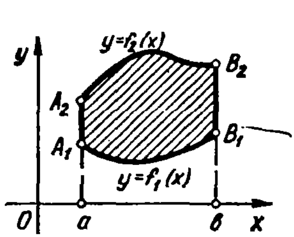


Рис. 7.25

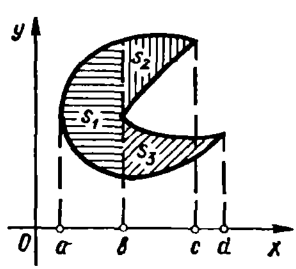


Рис. 7.26

тобто площу фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ і прямими $x = a$ та $x = b$ за умови, що $f_2(x) \geqslant f_1(x)$, знаходять за формулою (72).

Якщо плоска фігура має складнішу форму (рис. 7.26), то прямими, паралельними осі Oy, її треба розбити на скінченну суму (різницю) криволінійних трапецій. Тоді площа фігури дорівнюватиме алгебраїчній сумі площ утворених трапецій.

Розглянемо випадок, коли криволінійна трапеція обмежена кривою, заданою параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \end{cases}$$

де $x(t)$, $y(t)$ — неперервні функції, які мають на відрізку $[\alpha; \beta]$ неперервні похідні $x'(t)$ та $y'(t)$. Тоді якщо $x(t)$ на відрізку $[\alpha; \beta]$ є монотонною, причому $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, то для обчислення площі криволінійної трапеції досить в інтегралі (69) зробити заміну змінної $x = x(t)$, $dx = x'(t)\,dt$. Дістанемо формулу

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt. \tag{73}$$

Тепер розглянемо плоску фігуру OAB, обмежену кривою, заданою в полярній системі координат неперервною функцією $\rho = \rho(\varphi)$ і променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ (рис. 7.27). Таку фігуру називають *криволінійним сектором.*

Обчислимо площу S сектора OAB. Розіб'ємо відрізок $[\alpha; \beta]$ точками

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_{i-1} < \varphi_i < \cdots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$$

на відрізки $[\varphi_{i-1}; \varphi_i]$ і на кожному з них візьмемо довільну точку $\xi_i \in [\varphi_{i-1}; \varphi_i]$. Елемент ΔS_i площі, обмеженої кривою $\rho(\varphi)$ і променями $\varphi = \varphi_{i-1}$ та $\varphi = \varphi_i$, наближено дорівнює площі кругового сектора, обмеженого тими самими променями і дугою кола радіуса $\rho(\xi_i)$:

$$\Delta S_i \approx \frac{1}{2} \rho^2(\xi_i)\, \Delta\varphi_i, \quad \Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}.$$

Сума $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \rho^2(\xi_i)\, \Delta\varphi_i$ дорівнює площі ступінчатого сектора і є інтегральною сумою для функції $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ на відрізку $[\alpha; \beta]$, тоді природно вважати, що

$$S = \lim_{\max \Delta\varphi_i \to 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \rho^2(\xi_i)\, \Delta\varphi_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Отже, площа криволінійного сектора обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi. \tag{74}$$

Приклади

1. Знайти площу фігури, обмеженої прямою $y = x$ і параболою $y = 2 - x^2$ (рис. 7.28).

○ Знайдемо абсциси точок перетину даних ліній Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 2 - x^2; \\ y = x, \end{cases}$$

дістанемо $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Це і є межі інтегрування.

За формулою (72) знаходимо площу:

$$S = \int_{-2}^{1} ((2 - x^2) - x)\,dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}. \ ●$$

2. Знайти площу фігури, обмеженої еліпсом

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Оскільки еліпс симетричний відносно обох координатних осей, то шукана площа дорівнює почетвереній площі фігури, яка знаходиться в першій чверті. За формулою (73)

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\,(-a\sin t)\,dt = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\,dt =$$

$$= 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2}\,dt = 2ab\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab. \ ●$$

3. Обчислити площу, обмежену «трипелюстковою розою» $\rho = a\cos 3\varphi$ (рис. 3.4).

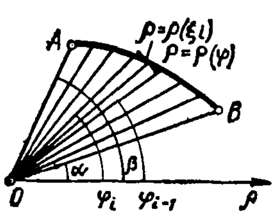


Рис. 7.27

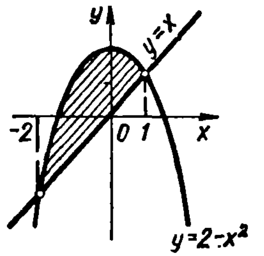


Рис. 7.28

○ Знаходимо площу півпелюстки «рози» і множимо на шість. Тому за формулою (74)

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (a \cos 3\varphi)^2 \, d\varphi = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos 6\varphi}{2} \, d\varphi =$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \left(\varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi a^2}{4}. \ ●$$

3.2. Довжина дуги

Як відомо (п. 7.3, гл. 5), диференціал dl довжини дуги гладкої кривої, заданої функцією $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, знаходять за формулою $dl = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$. Тому довжина дуги

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx. \tag{75}$$

Якщо крива задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$, тому її довжина

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt. \tag{76}$$

Нехай тепер гладка крива задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, в полярних координатах. Якщо в рівностях $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ параметром вважати кут φ, то

$$x'_\varphi = \rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi, \quad y'_\varphi = \rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi \ \text{ і } \ \sqrt{x'^2_\varphi + y'^2_\varphi} =$$

$$= \sqrt{\rho^2 + \rho'^2},$$

тому з формули (76) знаходимо

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\varphi. \tag{77}$$

Довжину дуги гладкої просторової кривої, заданої рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

обчислюють за формулою, аналогічною формулі (76):

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t} \, dt.$$

Приклади

1. Знайти довжину дуги параболи $y = \frac{x^2}{2}$ від точки $O(0; 0)$ до точки $A\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

○ Оскільки $y' = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, то за формулою (75) одержимо

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}|\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})). \bullet$$

2. Знайти довжину однієї арки циклоїди (рис. 3.6):

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

○ Скористаємося формулою (76):

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1-\cos t))^2 + (a\sin t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a. \bullet$$

3. Знайти довжину кардіоїди (рис. 3.8, *б*): $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

○ Змінюючи полярний кут від 0 до π, одержимо половину шуканої довжини. Тому за формулою (77) маємо

$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a. \bullet$$

3.3. Об'єм тіла

Нехай треба знайти об'єм тіла, якщо відомі площі S перерізів цього тіла площинами, перпендикулярними до деякої осі, наприклад Ox: $S = S(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ (рис. 7.29).

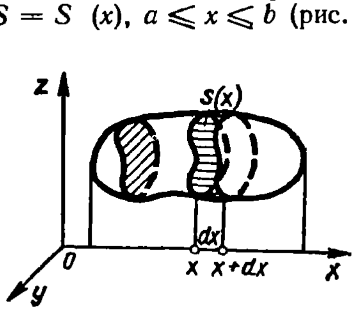


Рис. 7.29

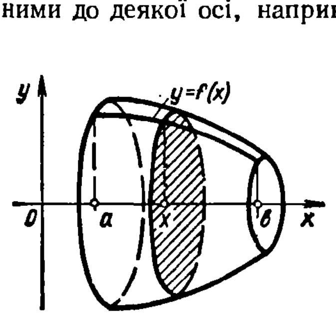


Рис. 7.30

Перетнемо тіло двома площинами, які проходять через точки x та $x + dx$, перпендикулярно до осі Ox. Тоді утворену між перерізами фігуру можна вважати циліндром з основою $S(x)$ і висотою dx, тому диференціал об'єму $dV = S(x)\,dx$, і якщо x змінюється від a до b, то об'єм тіла

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{78}$$

Формула (78) називається *формулою об'єму тіла за площами паралельних перерізів.*

Розглянемо, зокрема, об'єм тіл обертання. Нехай криволінійна трапеція обмежена зверху графіком неперервної функції $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Якщо цю трапецію обертати навколо осі Ox, то утвориться просторова фігура, яка називається тілом обертання (рис. 7.30). Оскільки площа паралельного перерізу $S = \pi y^2 = \pi f^2(x)$, то, згідно з формулою (78), об'єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо осі Ox,

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{79}$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена графіком неперервної функції $x = \varphi(y) \geqslant 0$ і прямими $y = c$, $y = d$, $x = 0$, то об'єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо осі Oy, знаходять за формулою

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\,dy. \tag{80}$$

Приклади

1. Знайти об'єм еліпсоїда (рис. 3.66)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

○ У перерізі еліпсоїда площиною, паралельною площині Oyz на відстані x від неї, утворюється еліпс

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \text{або} \quad \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1$$

з півосями $b_1 = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $c_1 = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Площа такого еліпса (п. 4.1) дорівнює

$$S(x) = \pi b_1 c_1 = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

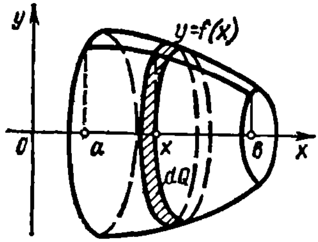


Рис. 7.31

тому за формулою (79) маємо

$$V = \pi bc \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Зокрема, якщо $a = b = c = R$, еліпсоїд перетворюється в кулю, і в цьому випадку

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \bullet$$

2. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням параболи $y = x^2$ на проміжку $1 \leqslant x \leqslant 2$ навколо: а) осі Ox; б) осі Oy.

○ За формулами (79) і (80) маємо

$$V_x = \pi \int_1^2 x^4 dx = \pi \left.\frac{x^5}{5}\right|_1^2 = \frac{31\pi}{5};$$

$$V_y = \pi \int_1^4 y dy = \pi \left.\frac{y^2}{2}\right|_1^4 = \frac{15\pi}{2}. \bullet$$

3.4. Площа поверхні обертання

Нехай крива, задана неперервною функцією $y = f(x) \geqslant 0$, $a \leqslant x \leqslant b$, обертається навколо осі Ox. Перетнемо поверхню обертання двома площинами, які проходять через точки x та $x + dx$, паралельно Oyz. Замінимо утворену між перерізами фігуру зрізаним конусом, твірна якого дорівнює $dl = \sqrt{1 + y'^2}dx$, а радіуси основ дорівнюють $f(x)$ та $f(x + dx)$ (рис. 7.31). Якщо висота конуса dx досить мала, то площа dQ бічної поверхні цієї фігури дорівнює площі бічної поверхні зрізаного конуса, тобто маємо диференціал площі [5]

$$dQ = 2\pi f(x) \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Інтегруючи, знайдемо всю площу поверхні обертання:

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \qquad (81)$$

Приклад

Обчислити площу поверхні частини параболоїда, утвореного обертанням навколо осі Ox параболи $y^2 = 2x$, де $0 \leqslant x \leqslant 4$.

○ Маємо

$$y = \sqrt{2x}, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2x}}; \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{\frac{1 + 2x}{2x}}.$$

За формулою (81) знаходимо

$$Q = 2\pi \int_0^4 \sqrt{2x} \sqrt{\frac{1+2x}{2x}}\, dx = 2\pi \int_0^4 \sqrt{1+2x}\, dx =$$

$$= \frac{2}{3} \pi (1+2x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{52\pi}{3}. \ \bullet$$

3.5. Обчислення роботи

Нехай під дією сили $F = F(x)$ матеріальна точка рухається вздовж прямої лінії. Якщо напрям руху збігається з напрямом сили, то, як відомо (п. 2.1), робота A, виконана з цією силою при переміщенні точки на відрізок $[a; b]$, обчислюється за формулою

$$A = \int_a^b F(x)\, dx. \tag{82}$$

Приклади

1. Обчислити роботу, яку треба затратити, щоб тіло маси m підняти з поверхні Землі вертикально вверх на висоту h, якщо радіус Землі дорівнює R.

○ Згідно з законом Ньютона, сила F притягання тіла Землею дорівнює

$$F = \gamma \frac{mM}{x^2},$$

де M — маса Землі; γ — гравітаційна стала; x — відстань від центра тіла до центра Землі. Покладемо сталу $\gamma m M = k$, тоді $F(x) = kx^{-2}$, де $R \leqslant x \leqslant R + h$. При $x = R$ сила $F(R)$ дорівнює вазі тіла $P = mg$, тобто $\frac{k}{R^2} = P$, звідки $k = PR^2$, $F(x) = PR^2x^{-2}$. За формулою (82) маємо

$$A = PR^2 \int_R^{R+h} x^{-2} dx = \frac{PRh}{R+h}. \ \bullet$$

2. Яка робота виконується під час стискання гвинтової пружини на 5 см, якщо для стискання пружини на 1 см витрачається сила 4 Н. Стиск гвинтової пружини пропорційний прикладеній силі.

○ Сила F і стискання x за умовою пропорційні: $F = kx$, де k — стала. При $x = 0{,}01$ м, $F = 4$ Н, тому з рівності $4 = k \cdot 0{,}01$ знаходимо $k = 400$, отже $F(x) = 400\, x$, $0 \leqslant x \leqslant 0{,}05$. Тому за формулою (82) маємо

$$A = 400 \int_0^{0,05} x dx = 0{,}5 \text{ Дж}. \ \bullet$$

3. Нехай у циліндрі з рухомим поршнем (рис. 7.32) знаходиться деяка кількість газу. Припустимо, що цей газ розширився і пересунув поршень вправо. Яку роботу виконує при цьому газ?

○ Нехай s_1 і s_2 — початкова і кінцева відстані поршня від лівого дна циліндра; s — шлях, на якому перемістився поршень; p — тиск газу на одиницю площі поршня; Q — площа поршня. Оскільки вся сила, що діє на поршень, дорівнює pQ, то

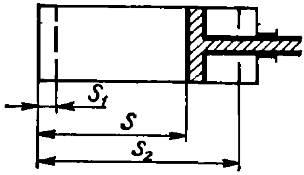


Рис. 7.32

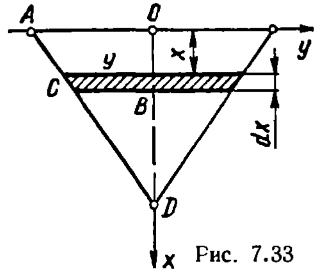


Рис. 7.33

виконана при виштовхуванні поршня робота A виразиться інтегралом

$$A = \int_{s_1}^{s_2} pQds.$$

Позначаючи об'єм даної кількості газу через V, дістанемо, що $V = Qs$. Переходячи в інтегралі від змінної s до нової змінної V, виразимо роботу через об'єм:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV,$$

де V_1 і V_2 — початкове і кінцеве значення об'єму V.

Зокрема, якщо йдеться про ізотермічний процес розширення газу, то, згідно з законом Бойля — Маріотта, $pV = C$ $(C = \text{const})$ і тоді робота

$$A = C\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = C\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Якщо розглядається адіабатичний процес розширення ідеального газу, то за законом Пуассона маємо $pV^k = C$, де $k > 1$ — характерна для кожного газу стала. Звідси $p = CV^{-k}$, тому робота

$$A = C\int_{V_1}^{V_2} V^{-k}dV = \frac{C}{1-k}(V_2^{1-k} - V_1^{1-k}). \bullet$$

4. Знайти роботу, яку необхідно затратити, щоб викачати рідину з конічного резервуара, оберненого вершиною вниз. Радіус і висота конуса дорівнюють відповідно R і H.

○ Розглянемо елементарний шар рідини, що знаходиться на глибині x, циліндром, який має висоту dx і радіус y (рис. 7.33). Тоді вага dP цього шару дорівнює $dP = \gamma g dV = \gamma g \pi y^2 dx$, де γ — густина рідини, g — прискорення вільного падіння, dV — об'єм циліндра. З подібності трикутників AOD і CBD знаходимо y:

$$\frac{R}{y} = \frac{H}{H-x}; \quad y = \frac{R}{H}(H-x),$$

тому

$$dP = \frac{\pi\gamma g R^2}{H^2}(H-x)^2\, dx.$$

Елементарна робота, яку необхідно затратити, щоб підняти цей шар рідини на висоту x, дорівнює $dA = dPx = \frac{\pi\gamma g R^2}{H^2}(H-x)^2 x dx$, тому

$$A = \frac{\pi\gamma g R^2}{H^2}\int_0^H (H-x)\,x dx = \frac{\pi\gamma R^2 H^2}{12}. \bullet$$

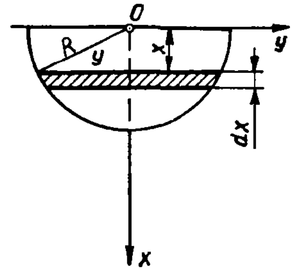


Рис. 7.34

3.6. Обчислення тиску рідини на вертикальну пластину

Як відомо, тиск рідини на горизонтальну площадку, занурену в рідину, визначається за законом Паскаля: тиск P рідини на площадку дорівнює її площі S, помноженій на глибину занурення h, густину рідини γ і на прискорення вільного падіння g:

$$P = \gamma g h S.$$

Якщо в рідину занурити не горизонтальну площадку, то її різні точки лежатимуть на різних глибинах і цією формулою користуватись не можна. Проте якщо площадка дуже мала, то всі її точки лежать на майже одній глибині, яку вважають за глибину занурення площадки. Це дає змогу знайти диференціал тиску на елементарну площадку, а потім тиск на всю поверхню.

Приклад

Знайти тиск рідини на вертикально занурений в рідину півкруг, діаметр якого дорівнює $2R$ і знаходиться на поверхні рідини.

○ Нехай елементарна площадка знаходиться на глибині x (рис. 7.34). Вважаючи її прямокутником з основою $2y$ і висотою dx, знайдемо за законом Паскаля диференціал тиску:

$$dP = \gamma g x \cdot 2y dx = 2\gamma g x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$$

Звідси

$$P = 2\gamma g\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}\,dx = -\frac{2}{3}\gamma g\,(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R = \frac{2}{3}R^3 g\gamma. \bullet$$

Завдання для самоконтролю

1. Охарактеризувати дві основні схеми застосування визначеного інтеграла до розв'язування практичних задач.
2. Як обчислити площу плоскої фігури в системі декартових координат? полярних координат? у випадку лінії, заданої параметричними рівняннями?
3. Як обчислити довжину дуги кривої в системі декартових координат? полярних координат? у випадку, коли крива задана параметричними рівняннями?
4. Способом інтегральних сум вивести формулу для обчислення об'єму тіла за площами його паралельних перерізів.
5. Вивести формули для об'ємів тіл обертання.
6. Способом інтегральних сум вивести формулу для обчислення площі поверхні обертання.

7. Знайти площі фігур, обмежених заданими лініями:

а) $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 41$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

б) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$;

в) $\rho^2 = 2\cos 2\varphi$.

8. Знайти довжини дуг кривих:

а) $y = \ln x$, $\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{8}$;

б) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \ln \pi$;

в) $\rho = a\sin\varphi$.

9. Еліпс $x^2 + 4y^2 = 4$ обертається навколо осі Ox. Знайти об'єм тіла обертання.

10. Фігура, обмежена однією аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ і віссю Ox, обертається навколо осі Ox. Знайти об'єм тіла обертання.

11. Дуга синусоїди $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ обертається навколо осі Ox. Знайти поверхню обертання.

12. Яку роботу треба затратити, щоб розтягнути пружину на 4 см, якщо силою в 1 Н вона розтягується на 1 см?

13. Знайти роботу, яку потрібно затратити, щоб викачати воду з резервуара, який має форму напівциліндра, радіус якого R, а висота a.

14. Знайти тиск води на вертикальну пластину, що має форму рівнобічної трапеції, менша основа якої дорівнює a і лежить на поверхні рідини. Більша основа трапеції дорівнює b, а висота h.

15. Знайти масу стержня довжиною 100 см, якщо лінійна густина стержня змінюється за законом $\gamma = (20x + 0{,}15x^2)$ г/см, де x — відстань від одного з кінців стержня.

16. Швидкість точки змінюється за законом $v = (100 + 8t)$ м/с. Який шлях пройде точка за проміжок часу [0; 10]?

Відповіді. 7. а) $\frac{41}{2}\arcsin\frac{9}{41} + 20\ln\frac{4}{5}$; б) $\frac{3\pi a^2}{8}$; в) 2. 8. а) $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; б) $\sqrt{2}(\pi - 1)$; в) πa. 9. $\frac{8\pi}{3}$. 10. $5\pi a^2$. 11. $2\pi(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1))$. 12. 0,08 Дж. 13. $\frac{2}{3}\gamma g a R^3$. 14. $\frac{1}{6}\gamma g h^2(a + 2b)$. 15. 150 кг. 16. 1400 м.

§ 4. ІНТЕГРАЛИ, ЗАЛЕЖНІ ВІД ПАРАМЕТРІВ. ГАММА- І БЕТА-ФУНКЦІЇ

4.1. Інтеграли, залежні від параметрів

Розглянемо функцію $f(x, y)$ двох змінних, визначену для всіх $x \in [a; b]$ і всіх y з деякої множини Y. Якщо при кожному фіксованому значенні $y \in Y$ функція $f(x, y)$ інтегровна на відрізку $[a; b]$, то визначений інтеграл

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx \tag{83}$$

є функцією параметра y.

Крім того, від параметра може залежати не тільки підінтегральна функція, але й межі інтегрування, тобто

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx. \tag{84}$$

Інтеграли виду (83) і (84) називаються *інтегралами, залежними від параметра*. Ці інтеграли можуть бути і невласними.

Теорія інтегралів, залежних від параметрів, має не тільки теоретичне, але й практичне значення. Не маючи змоги викласти цю теорію детально, розглянемо лише неперервність, диференціювання та інтегрування інтеграла (83) по параметру [12] та наведемо приклади.

Теорема 1. *Якщо функція $f(x, y)$ визначена і неперервна як функція двох змінних у прямокутнику $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, то інтеграл (83) неперервний по параметру y на відрізку $[c; d]$.*

Приклад

Довести, що інтеграл $I(y) = \int\limits_0^\pi e^{xy} \sin x dx$ неперервний по параметру y для всіх $y \in R$.

○ Оскільки функція $f(x, y) = e^{xy} \sin x$ неперервна при $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $-\infty < y < +\infty$, то заданий інтеграл, згідно з теоремою 1, неперервний по y при довільному значенні $y \in R$.

До такого самого висновку можна прийти, обчисливши інтеграл. Інтегруючи частинами, дістанемо

$$I(y) = \int\limits_0^\pi e^{xy} \sin x dx = -e^{xy} \cos x \Big|_0^\pi + y \int\limits_0^\pi e^{xy} \cos x dx = e^{\pi y} + 1 - $$
$$- y^2 \int\limits_0^\pi e^{xy} \sin x dx.$$

Отже,

$$I(y) = e^{\pi y} + 1 - y^2 I(y), \quad I(y) = \frac{e^{\pi y} + 1}{y^2 + 1}.$$

Звідси й випливає неперервність інтеграла $I(y)$ при будь-якому дійсному значенні параметра y. ●

Розглянемо тепер диференціювання інтеграла по параметру.

Теорема 2. *Якщо функція $f(x, y)$ і її похідна $f'_y(x, y)$ — неперервні по x і y при $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, то $\forall\, y \in [c; d]$ справедлива формула*

$$I'_y(y) = \left(\int\limits_a^b f(x, y)\, dx \right)'_y = \int\limits_a^b f'_y(x, y)\, dx. \tag{85}$$

Формула (85) називається *формулою Лейбніца*. Якщо така формула допустима, то кажуть, що функцію (83) можна диференціювати по параметру під знаком інтеграла.

Приклад

Знайти похідну $I'_y(y)$, якщо $I(y) = \int\limits_0^\pi e^{xy} \sin x dx$.

○ Маємо $f(x, y) = e^{xy} \sin x$, $f'_y(x, y) = xe^{xy} \sin x$. Оскільки функції $f(x, y)$ і $f'_y(x, y)$ неперервні для довільних значень x і y, то має місце формула (85). Диференціюючи підінтегральну функцію по y та інтегруючи частинами, дістаємо

$$I'_y(y) = \int_0^\pi xe^{xy} \sin x dx = \frac{\pi e^{\pi y}(y^2+1) - 2y(e^{\pi y}+1)}{(y^2+1)^2}.$$

Пропонуємо переконатися, що таким самим буде результат, якщо спочатку обчислити інтеграл $I(y)$, а потім знайти похідну по y. ●

З'ясуємо умови, за яких функцію (83) можна інтегрувати по параметру y під знаком інтеграла.

Теорема 3. *Якщо функція $f(x, y)$ неперервна по x і y при $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, то справедлива формула*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx,$$

або

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (86)$$

Приклад

Обчислити невласний інтеграл $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$, де $0 < a < b$.

○ Введемо в прямокутнику $0 \leqslant x \leqslant 1$, $a \leqslant y \leqslant b$ функцію $f(x, y) = x^y$. Умови теореми 3 дотримані, тому, згідно з формулою (86), дістанемо

$$\int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy,$$

або

$$\int_a^b \left(\frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_0^1 \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{x^y}{\ln x} \Big|_a^b \right) dx,$$

звідки

$$\int_a^b \frac{dy}{y+1} = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$$

Отже,

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln|y+1| \Big|_a^b = \ln\left|\frac{b+1}{a+1}\right|. \text{ ●}$$

Сформулюємо тепер аналоги теорем 1—3 для залежних від параметра невласних інтегралів. Для цього введемо поняття рівномірної збіжності невласних інтегралів.

Нехай функція $f(x, y)$ визначена і неперервна при всіх $x \in [a; +\infty)$ і всіх $y \in Y$.

Якщо $\forall\, y \in Y$ існує скінченна границя $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x, y)\,dx = I(y)$, то вона називається *невласним інтегралом, збіжним відносно параметра* y, і позначається так:

$$I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x, y)\,dx. \tag{87}$$

Інтеграл (87) називається *рівномірно збіжним відносно* $y \in Y$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться незалежне від y число $B(\varepsilon)$ таке, що при $b > B(\varepsilon)$ і $\forall\, y \in Y$ виконується нерівність

$$\left| \int\limits_b^{+\infty} f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Одна з достатніх умов рівномірної збіжності формулюється так.

Теорема 4. *Нехай функція* $f(x, y)$ *неперервна по* x *при* $x \in [a; +\infty)$. *Якщо існує функція* $\varphi(x, y)$, *яка інтегровна по* x *на проміжку* $[a; +\infty)$ *і задовольняє при* $\forall\, x \in [a; +\infty)$ *і* $\forall\, y \in Y$ *нерівності*

$$|f(x, y)| < \varphi(x, y),$$

то інтеграл (87) *збігається рівномірно відносно параметра* y.

Для рівномірно збіжних відносно y інтегралів (87) справедливі такі теореми.

Теорема 5. *Якщо функція* $f(x, y)$ *визначена і неперервна як функція двох змінних при* $a \leqslant x \leqslant +\infty$ *і* $c \leqslant y \leqslant d$ *і інтеграл* (87) *збігається рівномірно відносно* $y \in [c; d]$, *то:*

1) *інтеграл* (87) *неперервний по параметру* $y \in [c; d]$;

2) *справедлива формула*

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy; \tag{88}$$

3) *якщо, крім того, похідна* $f'_y(x, y)$ *неперервна по обох змінних при* $x \in [a; +\infty)$ *і* $y \in [c; d]$, *а інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx$ *збігається рівномірно відносно* $y \in [c; d]$, *то* $\forall\, y \in [c; d]$ *виконується рівність*

$$I'_y(y) = \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx \right)'_y = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx. \tag{89}$$

Таким чином, при виконанні умов теореми 4 можна, зокрема, переставляти два інтеграли, з яких один має нескінченний проміжок інтегрування, а другий — скінченний. Проте в багатьох випадках доводиться переставляти інтеграли, в яких обидва проміжки інтегрування є нескінченними, тобто користуватися формулою

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,\ y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x,\ y)\,dy. \qquad (90)$$

Обгрунтування формули (90) — справа досить складна, проте для одного класу функцій має місце таке твердження.

Теорема 6. *Нехай $f\ (x,\ y)$ — невід'ємна і неперервна по $x \in [a, +\infty)$ і $y \in [c; +\infty)$ функція, і нехай функція $I\ (y) = \int_a^{+\infty} f\ (x,\ y)\,dx$ неперервна по $y \in [c; +\infty)$, а функція $I\ (x) = \int_c^{+\infty} f\ (x,\ y)\,dy$ неперервна по $x \in [a; +\infty)$. Тоді якщо існує один з інтегралів (90), то існує й другий, і ці інтеграли рівні.*

Приклади

1. Обчислити інтеграл Пуассона $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

○ Застосовуючи підстановку $x = ut$, де $u > 0$ — деяка стала, дістанемо

$$I = u \int_0^{+\infty} e^{-u^2t^2}dt.$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на e^{-u^2} і інтегруючи по параметру u від 0 до $+\infty$, маємо

$$I \int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}u\,du \int_0^{+\infty} e^{-t^2u^2}dt = \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}dt.$$

Оскільки підінтегральна функція $f\ (u,\ t)$ задовольняє умови теореми 6, то, згідно з формулою (90), дістаємо

$$I^2 = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-u^2(1+t^2)}u\,du = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Враховуючи, що $I > 0$, знаходимо

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \ ●$$

Зазначимо, що невизначений інтеграл $\int e^{-x^2}\,dx$ в скінченному вигляді не інтегрується (п. 1.8). Наведемо ще один такий інтеграл.

2. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

○ Розглянемо інтеграл

$$I(y) = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(xy)}{x}\, dx, \text{ де } y > 0.$$

Формальне застосування формули (89) приводить до розбіжного інтеграла

$$\int\limits_0^{\infty} \cos(xy)\, dx,$$

тобто ця формула для інтеграла $I(y)$ не виконується. Тому введемо множник e^{-kx} і розглянемо інтеграл

$$I(y, k) = \int\limits_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin(xy)}{x}\, dx, \text{ де } k > 0,\ y \geqslant 0.$$

Для цього інтеграла формула (89) виконується, оскільки виконуються всі умови теореми 5: підінтегральна функція $f(x, y) = e^{-kx} \frac{\sin(xy)}{x}$ і її частинна похідна $f'_y(x, y) = e^{-kx}\cos(xy)$ неперервні по x і y при $x \geqslant 0$ і $y \geqslant 0$, а інтеграл $\int\limits_0^{\infty} e^{-kx}\cos(xy)\, dx$ збігається рівномірно відносно y за теоремою 4, бо $\forall\ y \in [0, +\infty): |e^{-kx}\cos(xy)| \leqslant e^{-kx}$ і інтеграл $\int\limits_0^{\infty} e^{-kx} dx$ збігається (п. 2.6).

Отже,

$$I'_y(y, k) = \int\limits_0^{\infty} e^{-kx}\cos(xy)\, dx = \frac{k}{y^2 + k^2}.$$

Інтегруючи цю рівність по y в межах від 0 до y, дістанемо

$$I(y, k) = \operatorname{arctg} \frac{y}{k}.$$

Інтеграл $I(y)$ утворюється з $I(y, k)$ при $k \to +0$:

$$I(y) = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(xy)}{x}\, dx = \lim_{x \to +0} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2},$$

зокрема, при $y = 1$ маємо $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$. ●

4.2. Гамма- і бета-функції

Ці функції відіграють важливу роль у різних розділах математики. Через них, зокрема, виражаються багато визначених інтегралів, для яких відповідні невизначені інтеграли в елементарних функціях не обчислюються.

Бета-функція, або *інтеграл Ейлера першого роду*, визначається формулою

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \tag{91}$$

Можна довести, що для всіх $\alpha \in (0, +\infty)$ і $\beta \in (0, +\infty)$ інтеграл (91) збігається. Варто зазначити, що відповідний невизначений інтеграл $\int x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\,dx$, згідно з теоремою Чебишева (п. 1.7), виражається через елементарні функції лише в окремих випадках. Отже, бета-функція не є елементарною.

Гамма-функцією, або *інтегралом Ейлера другого роду*, називається інтеграл

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx, \quad \alpha > 0. \tag{92}$$

Покажемо, що невласний інтеграл (92) при $\alpha > 0$ збігається. Маємо

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$$

Перший інтеграл в правій частині цієї рівності збігається, бо

$$0 < \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx < \int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx = \frac{1}{\alpha}.$$

Другий інтеграл також збігається. Справді, якщо n — довільне натуральне число таке, що $n > \alpha - 1$, то

$$0 < \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx < \int_1^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx < +\infty,$$

в чому можна пересвідчитись, обчислюючи останній інтеграл частинами і враховуючи, що

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0, \quad k \in N.$$

Отже, інтеграл (92) при $\alpha > 0$ збігається і визначає деяку функцію, яку і називають *гамма-функцією* $\Gamma(\alpha)$.

Обчислимо значення $\Gamma(\alpha)$ при $\alpha \in N$. Якщо $\alpha = 1$, то

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1. \tag{93}$$

Нехай $n+1 \in N$. Інтегруючи частинами, дістанемо

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = -\lim_{b\to+\infty} \frac{x^n}{e^x}\Big|_0^b + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx,$$

звідки

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n). \tag{94}$$

З рівностей (93) і (94) випливає, що $\forall\, n \in N$:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

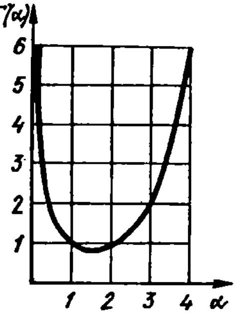


Рис. 7.35

Таким чином, гамма-функція для цілих значень $n \in N$ виражається через $n!$. Проте вона визначена і для нецілих додатних значень аргументу, тобто продовжує факторіальну функцію з дискретних значень аргументу на неперервні. Гамма-функція не є елементарною функцією. Графік цієї функції зображено на рис. 7.35. Властивості гамма-функції досить добре вивчені і значення її протабульовані в багатьох довідниках, наприклад в [19].

Наводимо без доведення формулу Стірлінга для гамма-функції:

$$\Gamma(\alpha) = \sqrt{2\pi}\,\alpha^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-\alpha+\frac{\theta(\alpha)}{12}},$$

де $\alpha > 0$ і $0 < \theta(\alpha) < 1$. Якщо в цій рівності покласти $\alpha = n$ і помножити її на n, дістанемо

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{\theta(n)}{12}}, \quad n \geqslant 1,\ 0 < \theta(n) < 1. \tag{95}$$

Бета- і гамма-функції пов'язані між собою співвідношенням

$$\forall\,\alpha > 0, \quad \forall\,\beta > 0 : \mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{96}$$

Приклади

1. Знайти $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

○ Згідно з формулою (96), при $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ маємо

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(1-2x)^2}} = -\arcsin(1-2x)\,|_0^1 = \pi,$$

отже, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. ●

2. Обчислити інтеграл Ейлера—Пуассона $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

○ Враховуючи результат попереднього прикладу, дістанемо

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \left|\begin{array}{l} x=\sqrt{t} \\ dx=\dfrac{dt}{2\sqrt{t}} \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad \bullet$$

3. Виразити інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^\alpha)^\beta}$ через бета-функцію і обчислити його наближено при $\alpha = 3$, $\beta = \frac{1}{2}$.

○ Маємо

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^\alpha)^\beta} = \left|\begin{array}{l} x=y^{\frac{1}{\alpha}} \\ dx=\dfrac{1}{\alpha}y^{\frac{1}{\alpha}-1}dy \end{array}\right| = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty} y^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+y)^{-\beta}dy =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha},\ \beta-\frac{1}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0,\ \alpha\beta > 1.$$

Зокрема, при $\alpha = 3$ і $\beta = \frac{1}{2}$ згідно з формулою (96) дістанемо

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)} \approx \frac{2{,}676\cdot 5{,}566}{3\sqrt{\pi}} \approx 2{,}804. \quad \bullet$$

Завдання для самоконтролю

1. Які інтеграли називаються інтегралами, залежними від параметра?
2. Сформулювати теореми про неперервність, диференціювання та інтегрування інтеграла, залежного від параметра.
3. Дати означення гамма-функції $\Gamma(\alpha)$.
4. Довести, що $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in N$.
5. Дати означення бета-функції $B(\alpha, \beta)$. Як пов'язані між собою бета- та гамма-функції?
6. Довести, що

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin^\alpha x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}, \quad \alpha > -1.$$

Вказівка. Скористатись підстановкою $\sin x = \sqrt{t}$.

7. Довести, що

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}dx}{(1+x)^{\alpha+\beta}}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Вказівка. Скористатись підстановкою $x = y(1 - y)^{-1}$.

Глава 8

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

При дослідженні різноманітних процесів та явищ, що містять елементи руху, часто користуються математичними моделями у вигляді рівнянь, до яких, крім незалежних величин і залежних від них шуканих функцій, входять також похідні від шуканих функцій. Такі рівняння називають диференціальними (термін «диференціальне рівняння» введений у 1576 р. Лейбніцем).

Диференціальне рівняння називається *звичайним*, якщо невідома функція є функцією однієї змінної, і *диференціальним рівнянням у частинних похідних*, якщо невідома функція є функцією багатьох змінних. Надалі, говорячи про диференціальні рівняння, матимемо на увазі лише звичайні диференціальні рівняння.

§ 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1. Загальні поняття та означення. Задача Коші. Геометричний зміст диференціального рівняння

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y'.

Рівняння (1) може не містити явно x або y, але обов'язково має містити похідну y' (у протилежному випадку воно не буде диференціальним рівнянням).

Диференціальне рівняння (1), нерозв'язне відносно похідної y', називають неявним диференціальним рівнянням. Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно y', то його записують у вигляді

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

і називають рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної, або рівнянням в нормальній формі. Ми, в основному, розглядатимемо саме такі рівняння.

Рівняння (2) можна записати ще й так:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ або } -f(x, y)\,dx + dy = 0.$$

Помноживши останнє рівняння на деяку функцію $Q(x, y) \neq 0$, дістанемо рівняння першого порядку, записане в диференціальній формі:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{3}$$

де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ — відомі функції. Рівняння (3) зручне тим, що змінні x та y в ньому рівноправні, тобто кожну з них можна розглядати як функцію другої. Приклади диференціальних рівнянь виду (1), (2) і (3):

$$xy' + y^2 - 1 = 0; \quad y' = 2x - y; \quad (x - 3y)\,dx + xy\,dy = 0.$$

Знаходження невідомої функції, що входить в деференціальне рівняння, називають розв'язанням або інтегруванням цього рівняння. (Якщо не виникатиме напорозумінь, замість терміну «диференціальне рівняння» іноді використовуватимемо термін «рівняння».)

Розв'язком диференціального рівняння (2) на деякому інтервалі $(a; b)$ називається диференційовна на цьому інтервалі фуцкція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння (2) обертає його в тотожність по x на $(a; b)$, тобто

$$\forall\ x \in (a; b) : \varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)).$$

Наприклад, функція $y = x \ln x$, $x \in (0; +\infty)$, є розв'язком рівняння $xy' - x - y = 0$. Дійсно, підставляючи цю функцію та її похідну $y' = \ln x + 1$ в дане рівняння, дістаємо тотожність

$$x(\ln x + 1) - x - x \ln x \equiv 0; \quad x \in (0; +\infty).$$

Неважко переконатися, що розв'язком даного рівняння є також функція $y = x \ln x + Cx$, де C — довільна стала. Надаючи C довільного дійсного значення, щоразу дістаємо розв'язок даного рівняння, тобто маємо нескінченну множину розв'язків.

Графік розв'язку диференціального рівняння називається *інтегральною кривою* цього рівняння.

Відповідь на запитання про те, за яких умов рівняння (2) має розв'язок, дае така теорема Коші [26].

Теорема 1 *(про існування і єдиність розв'язку). Нехай функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $f'_y(x, y)$ визначені і неперервні у відкритій області G площини Oxy і точка $(x_0; y_0) \in G$. Тоді існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (2), який задовольняє умову*

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0, \text{ тобто } \varphi(x_0) = y_0. \tag{4}$$

Ця теорема дає достатні умови існування єдиного розв'язку рівняння (2).

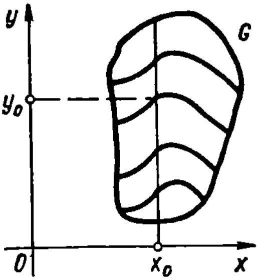


Рис. 8.1

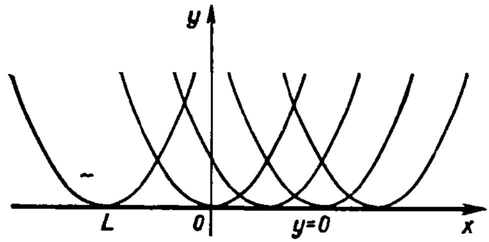


Рис. 8.2

Геометрично теорема Коші стверджує, що через кожну точку $(x_0; y_0) \in G$ проходить єдина інтегральна крива. Якщо зафіксувати x_0 і змінювати y_0, не виходячи при цьому з області G, то діставатимемо різні інтегральні криві. Це наочно показує, що рівняння (2) має безліч різних розв'язків (рис. 8.1).

Умову (4), згідно з якою розв'язок $y = \varphi(x)$ набуває наперед задане значення y_0 в заданій точці x_0, називають початковою умовою розв'язку і записують так:

$$y|_{x=x_0} = y_0 \text{ або } y(x_0) = y_0. \tag{5}$$

Задача знаходження розв'язку рівняння (2), який задовольняє початкову умову (5), називається *задачею Коші*. З погляду геометрії розв'язати задачу Коші — це означає виділити з множини інтегральних кривих ту, яка проходить через задану точку $(x_0; y_0)$.

Точки площини, в яких не виконуються умови теореми Коші (наприклад, $f(x, y)$ або $f'_y(x, y)$ в цих точках розривні), називаються *особливими*. Через кожну з таких точок проходить кілька інтегральних кривих або не проходить жодної.

Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності, називають *особливим розв'язком*.

Графік особливого розв'язку називають *особливою інтегральною кривою*. Щоб з'ясувати її геометричний зміст, введемо поняття обвідної.

Нехай задано рівняння

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{6}$$

де x, y — змінні декартові координати, а C — параметр. Це рівняння визначає сім'ю кривих, які залежать від одного параметра, або, як часто кажуть, *однопараметричну сім'ю кривих*.

Лінія L називається *обвідною однопараметричної сім'ї кривих* (6), якщо вона в кожній своїй точці дотикається до однієї з кривих і якщо в різних точках вона дотикається до різних кривих (рис. 8.2).

Виявляється, що особлива інтегральна крива геометрично є обвідною сім'ї інтегральних кривих диференціального рівняння, визначених його загальним розв'язком.

Приклади

1. Рівняння $y' = 2x$ має безліч розв'язків $y = x^2 + C$ (рис. 8.3) — це сім'я парабол. Права частина рівняння задовольняє умови теореми Коші на всій площині Oxy. Це означає, що через кожну точку площини проходить лише одна інтегральна крива.

2. Рівняння $y' = \frac{y}{x}$ має безліч розв'язків $y = Cx$ (рис. 8.4) — це сім'я прямих, що проходять через точку (0; 0). Права частина рівняння задовольняє умови теореми Коші, якщо $x \neq 0$. Тому через кожну точку, яка не лежить на осі Oy, проходить єдина інтегральна крива (пряма). Точка (0; 0) — особлива, через неї проходить безліч інтегральних кривих. Особливими будуть також точки $(0; y_0)$, де $y_0 \neq 0$. Через ці точки не проходить жодної інтегральної кривої.

3. Рівняння $y' = \sqrt{y}$ має сім'ю інтегральних кривих, парабол, $y = \left(\frac{x}{2} + C\right)^2$. Крім того, очевидно, що це рівняння має також розв'язок $y \equiv 0$. Цей розв'язок особливий, бо функція $f'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ при $y \equiv 0$ розривна. Пряма $y = 0$ дотикається до сім'ї парабол і є її обвідною (рис. 8.2).

Розглянуті приклади показують, що диференціальне рівняння може мати нескінченну множину розв'язків або сім'ю інтегральних кривих. За певних умов з цієї сім'ї можна виділити єдину криву, яка проходить через задану точку. У зв'язку з цим дамо означення частинного розв'язку диференціального рівняння.

Нехай права частина диференціального рівняння (2) задовольняє в області G умови теореми Коші.

Функція $y = \varphi(x, C)$, яка залежить від аргументу x і довільної сталої C, називається *загальним розв'язком* рівняння (2) в області G, якщо вона задовольняє дві умови:

1) функція $\varphi(x, C)$ є розв'язком рівняння при будь-якому значенні сталої C з деякої множини;

2) для довільної точки $(x_0; y_0) \in G$ можна знайти таке значення $C = C_0$, що функція $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє початкову умову:

$$\varphi(x_0, C_0) = y_0.$$

Частинним розв'язком рівняння (2) називається функція $y = \varphi(x, C_0)$, яка утворюється із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ при певному значенні сталої $C = C_0$.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді, тобто у вигляді рівняння $\Phi(x, y, C) = 0$, то такий розв'язок називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння. Рівність $\Phi(x, y, C_0) = 0$ у цьому випадку називають *частинним інтегралом рівняння*.

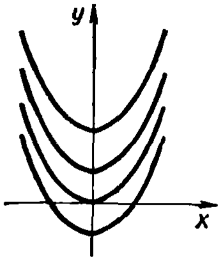


Рис. 8.3

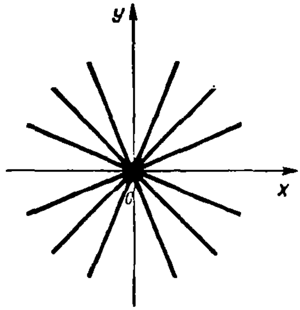


Рис. 8.4

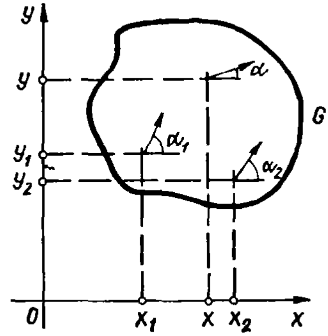


Рис. 8.5

Дамо геометричне тлумачення рівнянню (2). Нехай G — множина точок площини Oxy, в яких задані і неперервні функції $f(x, y)$ і $f'(x, y)$ і нехай точка $M_1(x_1; y_1) \in G$. Підставивши координати точки M_1 в праву частину рівняння (2), знайдемо значення похідної в цій точці:

$$y'|_{M_1} = f(x_1, y_1).$$

Якщо через точку M_1 проходить інтегральна крива рівняння (2), то з геометричного змісту похідної маємо $y'|_{M_1} = \operatorname{tg} \alpha_1$, де α_1 — кут між дотичною до інтегральної кривої в точці M_1 і додатним напрямом осі Ox. Тому точці $M_1(x_1; y_1)$ рівняння (2) ставить у відповідність значення кута

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}(y'|_{M_1}) = \operatorname{arctg} f(x_1; y_1).$$

Аналогічно точці $M_2(x_2; y_2)$ рівняння (2) ставить у відповідність напрям

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg} f(x_2; y_2).$$

Отже, кожній точці $M(x; y) \in G$ диференціальне рівняння (2) ставить у відповідність значення кута

$$\alpha = \operatorname{arctg} f(x, y),$$

тому рівняння (2) геометрично задає так зване *поле напрямів.* На рис. 8.5 це поле зображено стрілками (іноді поле напрямів зображають маленькими відрізками). Кожній точці $M(x; y) \in G$ відповідає певна стрілка з кутовим коефіцієнтом $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$. Зрозуміло, що практично ми можемо побудувати лише кілька стрілок, але можна уявити, що стрілки проведені в кожній точці області G.

Розглянемо тепер інтегральну криву рівняння (2). Оскільки напрям дотичної до інтегральної кривої в даній точці збігається з напрямом поля в цій точці, то геометрично задачу інтегрування диференціального рівняння можна тлумачити так: знайти такі криві, напрям дотичних до яких збігається з напрямом поля у відповідних точках.

Таким чином, з погляду геометрії рівняння $y' = f(x, y)$ визначає на площині поле напрямів, а розв'язок цього рівняння — інтегральну криву, яка в кожній своїй точці дотикається до поля напрямів.

Знаючи поле напрямів диференціального рівняння, можна наближено побудувати його інтегральні криві. Для того щоб полегшити побудову поля напрямів, користуються методом ізоклін. *Ізокліною* називається крива на площині Oxy, в кожній точці якої дотичні до інтегральних кривих мають один і той самий напрям. Отже, усі інтегральні криві, які перетинають ізокліну, в точках перетину нахилені до осі Ox під одним і тим самим кутом. Звідси походить і назва «ізокліна» — лінія однакового нахилу.

Очевидно, для диференціального рівняння (2) рівняння ізокліни, яка відповідає кутовому коефіцієнту $y' = a = \text{const}$, має вигляд

$$f(x, y) = a.$$

Різним значенням a відповідають на площині Oxy різні ізокліни. При цьому напрям кожної ізокліни визначається кутом $\alpha = \operatorname{arctg} a$.

Приклад

Знайти поле напрямів диференціального рівняння $y' = x^2 + y^2$ і інтегральну криву, яка проходить через точку $O(0; 0)$.

○ Ізоклінами тут буде сім'я концентричних кіл $x^2 + y^2 = a$, $a \geqslant 0$. При $a = \frac{1}{2}$, наприклад, ізокліною є коло $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$, напрям поля цієї ізокліни визначається кутом $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \approx 26°$. Якщо $a = 1$, маємо ізокліну $x^2 + y^2 = 1$, напрям поля якої визначається кутом $\operatorname{arctg} 1 = 45°$ і т. д. При $a = 0$ дістанемо $x^2 + y^2 = 0$. Цьому рівнянню відповідає єдина точка $O(0; 0)$, тобто ізокліна містить лише одну точку. Напрям поля в цій точці збігається з додатним напрямом осі Ox. Щоб зобразити інтегральну криву, через початкову точку $O(0; 0)$ проводимо криву, яка б в кожній своїй точці мала напрям поля, тобто дотикалась до відповідної стрілки. ●

Переходимо тепер до розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку. Якщо задачу про знаходження всіх розв'язків диференціального рівняння вдається звести до обчислення скінченного числа інтегралів і похідних від відомих функцій і алгебраїчних операцій, то кажуть, що диференціальне рівняння *інтегрується в квадратурах* (або *зводиться до квадратур*). Зрозуміло, що далеко не всяке диференціальне рівняння, яке інтегрується в квадратурах, має розв'язок, який виражається через елементарні функції. Більше того, дуже часто диференціальне рівняння не можна проінтегрувати не тільки в елементарних функціях, а й у квадратурах. Проте існують окремі типи диференціальних рівнянь, для яких це можливо.

Розглянемо такі рівняння. На жаль, клас інтегровних в квадратурах диференціальних рівнянь надзвичайно вузький.

1.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння виду

$$y' = f(x)\varphi(y), \tag{7}$$

де $f(x)$ і $\varphi(y)$ — задані і неперервні на деякому інтервалі функції, називається *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.*

Права частина рівняння (7) являє собою добуток двох множників, кожен з яких є функцією лише однієї змінної. Щоб розв'язати рівняння (7), треба відокремити змінні. Для цього замінимо y' на $\frac{dy}{dx}$, поділимо обидві частини рівняння (7) та $\varphi(y)$ (вважаємо, що $\varphi(y) \neq 0$) і помножимо на dx, тоді рівняння (7) запишеться у вигляді

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)\,dx. \tag{8}$$

Диференціальне рівняння виду (8), в якому множник при dx є функцією, яка залежить лише від x, а множник при dy є функцією, яка залежить лише від y, називається *диференціальним рівнянням з відокремленими змінними.*

Оскільки рівняння (8) містить тотожно рівні диференціали, то відповідні невизначені інтеграли відрізняються між собою на сталу величину, тобто

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)\,dx + C.$$

Таким чином, рівняння (7) розв'язано в квадратурах.

Диференціальне рівняння (7) є окремим випадком рівняння виду

$$f_1(x)\varphi_1(y)\,dx + f_2(x)\varphi_2(y)\,dy = 0. \tag{9}$$

Для відокремлення змінних у цьому рівнянні досить обидві його частини поділити на функцію $\varphi_1(y) f_2(x)$. Зауважимо, що при діленні обох частин рівняння (7) на $\varphi(y)$ можна загубити деякі розв'язки. Дійсно, якщо $\varphi(y_0) = 0$, то стала $y = y_0$ є розв'язком рівняння (7), оскільки перетворює це рівняння в тотожність. Цей розв'язок може бути як частинним, так і особливим.

Аналогічне зауваження стосується коренів функцій $\varphi_1(y)$ та $f_2(x)$ у рівнянні (9).

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$(x + xy^2)\,dx - (y + yx^2)\,dy = 0.$$

○ Оскільки це рівняння можна записати у вигляді

$$x(1 + y^2)\,dx - y(1 + x^2)\,dy = 0,$$

то воно є рівнянням з відокремлюваними змінними. Поділивши обидві його частини на $(1+x^2)(1+y^2)\neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{x}{1+x^2}\,dx-\frac{y}{1+y^2}\,dy=0 \text{ або } \frac{2x\,dx}{1+x^2}=\frac{2y\,dy}{1+y^2}\,.$$

Інтегруючи останнє рівняння, маємо

$$\ln(1+x^2)=\ln(1+y^2)+\ln|C|,\quad C\neq 0.$$

Потенціюючи, дістаємо загальний інтеграл заданого рівняння:

$$\frac{1+x^2}{1+y^2}=C,\quad C\neq 0. \ \bullet$$

2. Розв'язати рівняння

$$(xy^2+y^2)\,dx+(x^2-x^2y)\,dy=0.$$

○ Перетворимо ліву частину рівняння:

$$y^2(x+1)\,dx+x^2(1-y)\,dy=0.$$

Поділивши обидві частини цього рівняння на функцію $x^2y^2\neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{x+1}{x^2}\,dx+\frac{1-y}{y^2}\,dy=0,$$

інтегруючи яке, знаходимо загальний інтеграл

$$\int\frac{x+1}{x^2}\,dx+\int\frac{1-y}{y^2}\,dy=C,\quad C\in R,$$

або

$$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx+\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}\right)dy=C,$$

звідки

$$\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\ln|y|=C,$$

або

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right|-\frac{x+y}{xy}=C.$$

Рівняння $xy=0$ має розв'язки $x=0$ і $y=0$, тому прямі $x=0$ та $y=0$ є інтегральними кривими даного рівняння. Вони не утворюються із загального інтеграла ні при якому значенні C. Отже, розв'язки $x=0$ та $y=0$ є особливими і їх слід виписувати додатково до загального інтеграла. ●

3. Знайти частинний розв'язок рівняння $(1+x^2)\,dy+y\,dx=0$, який задовольняє початкову умову $y(0)=1$.

○ Відокремимо змінні і проінтегруємо дане рівняння:

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{1+x^2}=0;\quad \int\frac{dy}{y}+\int\frac{dx}{1+x^2}=C;$$

$$\ln|y|+\operatorname{arctg}x=C.$$

Дістали загальний інтеграл. Використовуючи початкову умову, знайдемо сталу C:

$$\ln 1 + \operatorname{arctg} 0 = C, \text{ авідки } C = 0.$$

Підставивши знайдену сталу в загальний інтеграл, дістанемо шуканий частинний розв'язок:

$$\ln |y| + \operatorname{arctg} x = 0, \text{ звідки } y = e^{-\operatorname{arctg} x}. \; ●$$

4. Знайти криву, яка проходить через точку (1; 2), коли відомо, що у кожній точці кривої відрізок дотичної, який міститься між осями координат, ділиться точкою дотику навпіл.

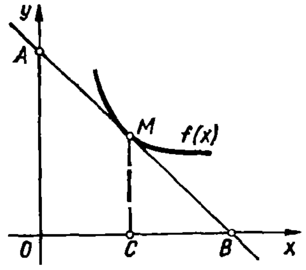


Рис. 8.6

○ Нехай $M(x; y)$ — довільна точка шуканої кривої $y = f(x)$. Запишемо рівняння дотичної, проведеної до цієї кривої в точці M:

$$Y - y = y'(X - x),$$

де $(X; Y)$ — довільна точка дотичної (рис. 8.6).

Оскільки за умовою $AM = MB$, то $OC = CB$, звідки $OB = 2OC$, тобто абсциса X точки B дорівнює подвоєній абсцисі x точки C. У точці B дотична перетинає вісь Ox, тому з рівняння дотичної при $y = 0$ дістанемо абсцису X точки B:

$$X = x - \frac{y}{y'}.$$

Дістаємо рівняння $x - \dfrac{y}{y'} = 2x$.

Відокремивши змінні і проінтегрувавши це рівняння, матимемо загальний розв'язок $y = \dfrac{C}{x}$. За умовою $y(1) = 2$, звідки $C = 2$, тому $y = \dfrac{2}{x}$ — рівняння шуканої кривої. ●

Розглянемо тепер рівняння

$$y' = f(ax + by + c), \tag{10}$$

де a, b, c — задані числа, і покажемо, що заміною

$$u = ax + by + c \tag{11}$$

рівняння (10) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Справді, диференціюючи рівність (11) по x, дістанемо $\dfrac{du}{dx} = a + b\dfrac{dy}{dx}$, тому згідно з (10) маємо рівняння $\dfrac{du}{dx} = a + bf(u)$, у якому при $a + bf(u) \neq 0$ відокремлюються змінні:

$$\frac{du}{a + bf(u)} = dx.$$

Інтегруючи це рівняння і замінюючи u на $ax + by + c$, дістанемо загальний інтеграл рівняння (10).

Якщо $a + bf(x) = 0$, або, що те ж саме, $\dfrac{du}{dx} = 0$, то, згідно з рівністю (11), рівняння (10) може мати розв'язки $ax + by + c = C$.

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = (x + y)^2$.

○ Покладемо $u = x + y$, тоді

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}, \text{ або } \frac{du}{dx} = 1 + u^2,$$

звідки $\dfrac{du}{1 + u^2} = dx$.

Інтегруючи це рівняння, знаходимо $\operatorname{arctg} u = x + C$, тобто $\operatorname{arctg}(x + y) = x + C$ — загальний інтеграл заданого рівняння. Інших розв'язків це рівняння не має, бо $1 + u^2 \neq 0$. ●

1.3. Однорідні диференціальні рівняння

Функція $f(x, y)$ називається *однорідною функцією n-го виміру* відносно змінних x та y, якщо для довільного числа $t \neq 0$ виконується тотожність

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Наприклад, функція $f(x, y) = x^2 - 5xy$ — однорідна функція другого виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = (tx)^2 - 5(tx)(ty) = t^2(x^2 - 5xy) = t^2 f(x, y);$$

функція $f(x, y) = \dfrac{2x - y}{\sqrt{xy}}$ — однорідна функція нульового виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{2(tx) - (ty)}{\sqrt{(tx)(ty)}} = \frac{t(2x - y)}{t\sqrt{xy}} = \frac{2x - y}{\sqrt{xy}} = t^0 f(x, y).$$

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \tag{12}$$

називається *однорідним*, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Очевидно, рівняння виду

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{13}$$

буде однорідним тоді і тільки тоді, коли функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ будуть однорідними функціями одного й того самого виміру.

Покажемо, що однорідні рівняння зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними підстановкою

$$y = ux, \tag{14}$$

де u — невідома функція: $u = u(x)$.

Якщо функція (14) є розв'язком диференціального рівняння (12) і

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}, \text{ то } u + x\frac{du}{dx} = f(x, ux). \tag{15}$$

За умовою $f(x, y)$ — однорідна функція нульового виміру, тобто $f(tx, ty) \equiv f(x, y)$. Поклавши в цій тотожності $y = ux$ і $t = \frac{1}{x}$, дістанемо $f(x, ux) = f(1, u)$, тому рівняння (15) набирає вигляду

$$u + x\frac{du}{dx} = f(1, u). \tag{16}$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Якщо $f(1, u) - u \neq 0$, то, відокремлюючи змінні, дістаємо рівняння

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x};$$

проінтегрувавши, знайдемо

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \ln|x| + C.$$

Підставимо після інтегрування замість u відношення $\frac{y}{x}$ і дістанемо інтеграл рівняння (12). Якщо $f(1, u) - u = 0$, то рівняння (16) запишеться у вигляді

$$x\frac{du}{dx} = 0.$$

У цьому випадку рівняння (12) і (13) можуть мати ще розв'язки $y = Cx$ $(x \neq 0)$ та $x = 0$ $(y \neq 0)$.

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}.$$

○ Права частина цього рівняння є однорідною функцією нульового виміру, тому що

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{2(tx)^2} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} = f(x, y).$$

Отже, диференціальне рівняння є однорідним. Застосувавши підстановку $y = ux$, дістанемо загальний інтеграл даного рівняння:

$$xu' + u = \frac{1 + u^2}{2}; \quad xu' = \frac{1 + u^2}{2} - u;$$

$$xu' = \frac{(u-1)^2}{2}; \quad x\frac{du}{dx} = \frac{(u-1)^2}{2};$$

$$\frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{2du}{(u-1)^2} = \int \frac{dx}{x};$$

$$-\frac{2}{u-1} = \ln|x| + \ln|C|; \quad -\frac{2}{\frac{y}{x} - 1} = \ln|Cx|;$$

$$\frac{2x}{x-y} = \ln|Cx|; \quad Cx = e^{\frac{2x}{x-y}}.$$

При відокремленні змінних ми ділили на x і на $(u-1)^2$, що можливо при $x \neq 0$ та $u \neq 1$. Точки, в яких $x = 0$, не входять в область визначення правої частини заданого рівняння, тому пряма $x = 0$ не може бути інтегральною кривою цього рівняння.

Нехай $u = 1$, тобто $y = x$. Функція $y = x$ перетворює дане рівняння в тотожність, тому є його розв'язком. Цей розв'язок є особливим і його слід вказувати додатково до знайденого інтеграла. ●

2. Знайти криву, яка проходить через точку (1; 0), якщо відомо, що трикутник, утворений віссю Oy, дотичною до кривої в довільній її точці і радіусом-вектором точки дотику, рівнобедрений, причому основою його є відрізок дотичної від точки дотику до осі Oy.

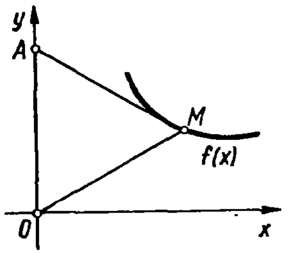


Рис. 8.7

○ Нехай $y = f(x)$ — шукана крива. Проведемо дотичну MA в довільній точці $M(x;\ y)$ кривої до перетину з віссю Oy (рис. 8.7).

За умовою $OM = OA$. Відрізок $OM = \sqrt{x^2+y^2}$, а відрізок OA знайдемо як ординату Y точки A з рівняння дотичної

$$Y - y = y'(X - x);$$

при $X = 0$ маємо $OA = Y = y - y'x$. Дістали рівняння $\sqrt{x^2+y^2} = y - y'x$, звідки $y' = \dfrac{y - \sqrt{x^2+y^2}}{x}$. Це однорідне рівняння. Поклавши $y = ux$, дістанемо загальний інтеграл:

$$u'x + u = u - \sqrt{1+u^2}; \quad \frac{du}{dx}x = -\sqrt{1+u^2};$$

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{dx}{x}; \quad \ln|u + \sqrt{1+u^2}| = -\ln|x| + \ln|C|;$$

$$u + \sqrt{1+u^2} = \frac{C}{x}; \quad y + \sqrt{x^2+y^2} = C.$$

Використавши початкову умову $y(1) = 0$, знайдемо $C = 1$. Отже, рівняння шуканої кривої має вигляд $y + \sqrt{x^2+y^2} = 1$. ●

Розглянемо тепер рівняння, які можна звести до однорідних. Нехай маємо рівняння виду

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{17}$$

де a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — задані сталі.

Якщо $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то підстановкою $z = a_1x + b_1y + c_1$ рівняння (17) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Якщо $\Delta \neq 0$, то можна зробити таку заміну змінних $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, що в лінійних функціях зникнуть вільні члени, тобто виконуватимуться рівності

$$a_ix + b_iy + c_i = a_iu + b_iv, \quad i = 1, 2.$$

Після такої заміни рівняння буде однорідним.

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{x + 2y + 1}{2x + y - 1}$.

○ Для цього рівняння $\Delta = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 \neq 0$, тому, поклавши $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, дістанемо

$$dx = du, \ dy = dv; \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du};$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + 2v + (\alpha + 2\beta + 1)}{2u + v + (2\alpha + \beta - 1)}.$$

Сталі α і β доберемо так, щоб

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 1 = 0; \\ 2\alpha + \beta - 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо $\alpha = 1$, $\beta = -1$, тому заміною змінних $x = u + 1$, $y = v - 1$ задане рівняння зводиться до однорідного:

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + 2v}{2u + v}.$$

За допомогою підстановки $v = uz$ знаходимо загальний інтеграл цього рівняння: $(v - u)^3 = C(u + v)$, $C > 0$. Звідси, враховуючи, що $u = x - 1$, $v = y + 1$, дістанемо загальний інтеграл заданого рівняння

$$(y - x + 2)^3 = C(x + y). \ \bullet$$

1.4. Лінійні диференціальні рівняння

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$y' + p(x)y = f(x), \qquad (18)$$

де $p(x)$ і $f(x)$ — задані і неперервні на деякому проміжку функції.

Термін «лінійне рівняння» пояснюється тим, що невідома функція y і її похідна y' входять до рівняння у першому степені, тобто лінійно.

Є кілька методів інтегрування рівняння (18). Один з них (метод Бернуллі) полягає в тому, що розв'язок цього рівняння шукають у вигляді добутку

$$y = uv, \qquad (19)$$

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ — невідомі функції x, причому одна з цих функцій довільна (але не рівна тотожно нулю).

Знаходячи похідну $y' = u'v + uv'$ і підставляючи значення y та y' в рівняння (18), дістанемо

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x).$$

Користуючись довільністю у виборі функції $v(x)$, доберемо її так, щоб

$$v' + p(x)v = 0; \qquad (20)$$

тоді
$$u'v = f(x). \tag{21}$$

Розв'яжемо ці рівняння. Відокремлюючи в рівнянні (20) змінні та інтегруючи, знайдемо його загальний розв'язок:
$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v; \quad \frac{dv}{v} = -p(x)\,dx;$$
$$\ln|v| = -\int p(x)\,dx + \ln|C_1|; \quad v = C_1e^{-\int p(x)dx}, \quad C_1 \neq 0.$$

Візьмемо за v який-небудь частинний розв'язок рівняння (20), наприклад
$$v = e^{-\int p(x)dx} \tag{22}$$

Знаючи функцію v, з рівняння (21) знаходимо функцію u:
$$du = f(x)\,e^{\int p(x)dx}dx;$$
$$u = \int f(x)\,e^{\int p(x)dx}dx + C. \tag{23}$$

Підставляючи функції (22) і (23) в (19), знаходимо загальний розв'язок рівняння (18)
$$y = uv = e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)\,e^{\int p(x)dx}\,dx + C\right).$$

Приклади

1. Знайти загальний розв'язок рівняння
$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin 2x}{x}.$$

○ Це лінійне рівняння виду (18), в якому
$$p(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = \frac{\sin 2x}{x}.$$

Нехай $y = uv$, тоді $y' = u'v + uv'$. Маємо
$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\sin 2x}{x}; \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\sin 2x}{x}.$$

Доберемо функцію v так, щоб $v' + \dfrac{v}{x} = 0$; тоді $u'v = \dfrac{\sin 2x}{x}$. Інтегруючи перше з цих рівнянь, дістаемо
$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \quad \ln|v| = -\ln|x|; \quad v = \frac{1}{x}.$$

Підставивши значення v у друге рівняння, дістанемо
$$u'\frac{1}{x} = \frac{\sin 2x}{x}; \quad du = \sin 2x dx; \quad u = -\frac{\cos 2x}{2} + C,$$

після чого знайдемо загальний розв'язок

$$y = uv = \frac{1}{x}\left(C - \frac{1}{2}\cos 2x\right). \bullet$$

2. Знайти розв'язок рівняння $y' + 2yx = 2x$, який задовольняє умову $y(0) = 2$.

○ Поклавши $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, матимемо:

$$u'v + uv' + 2uvx = 2x; \quad u'v + u(v' + 2vx) = 2x;$$

$$v' + 2vx = 0; \quad \frac{dv}{dx} = -2vx; \quad \frac{dv}{v} = -2xdx; \quad v = e^{-x^2};$$

$$u'e^{-x^2} = 2x; \quad \frac{du}{dx} = 2xe^{x^2}; \quad u = \int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2} + C.$$

Загальний розв'язок даного рівняння

$$y = uv = Ce^{-x^2} + 1.$$

Знайдемо значення сталої C, при якому частинний розв'язок задовольняє задану початкову умову:

$$2 = Ce^0 + 1, \text{ звідки } C = 1.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд $y = e^{-x^2} + 1$. ●

1.5. Рівняння, які зводяться до лінійних. Рівняння Бернуллі та Ріккаті

Розглянемо класи рівнянь, які за допомогою певних перетворень можна звести до лінійних.

1°. *Рівняння виду*

$$y' = \frac{R(y)}{P(y)x + Q(y)}, \tag{24}$$

де $P(y)$, $Q(y)$, $R(y)$ — задані функції, $R(y) \neq 0$, можна звести до лінійних, якщо x вважати функцією, а y — аргументом: $x = x(y)$; тоді з рівностей (24) і $y'_x x'_y = 1$ (п. 2.5, гл. 5) дістанемо лінійне рівняння відносно x:

$$\frac{dx}{dy} + \varphi(y)x = f(y), \text{ де } \varphi(y) = -\frac{P(y)}{R(y)}, \; f(y) = \frac{Q(y)}{R(y)}.$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді $x = u(y)v(y)$.

Приклад

Розв'язати рівняння $(2xy + y^3)dy - dx = 0$.

○ Оскільки

$$y' = \frac{1}{2xy + y^3},$$

то маємо рівняння виду (24). Якщо x вважати функцією y, то відносно x це рівняння стає лінійним:

$$x' - 2yx = y^3.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$x = uv; \quad u'v + uv' - 2uvy = y^3;$$

$$u'v + u(v' - 2vy) = y^3; \quad v' - 2vy = 0; \quad \frac{dv}{v} = 2ydy;$$

$$\ln|v| = y^2 + \ln|C|; \quad v = e^{y^2}; \quad \frac{du}{dy} e^{y^2} = y^3; \quad du = y^3 e^{-y^2} dy;$$

$$u = \int y^3 e^{-y^2} dy = \frac{1}{2}\int y^2 e^{-y^2} dy^2 = -\frac{1}{2} e^{-y^2}(1 + y^2) + C;$$

$$x = uv = Ce^{y^2} - \frac{1}{2}(1 + y^2). \bullet$$

2°. *Рівняння виду*

$$f'_y(y)\, y' + p(x) f(y) = q(x), \qquad (25)$$

де f, p, q — задані функції, заміною $z = f(y)$ зводиться до лінійного відносно змінної z:

$$z' + p(x) z = q(x). \qquad (26)$$

Справді, якщо $z = f(y)$, де $y = y(x)$ — невідома функція, то

$$\frac{dz}{dy} = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = f'_y(y)\, y',$$

тому рівняння (25) набирає вигляду (26).

3°. *Рівнянням Бернуллі* називається рівняння виду

$$y' + p(x) y = q(x) y^{\alpha}, \quad \alpha \in R, \ \alpha \neq 0; \ 1. \qquad (27)$$

(Рівняння (27) запропонував у 1695 р. Якоб Бернуллі, а в 1697 р. його брат Йоганн Бернуллі це рівняння розв'язав.)

Очевидно, при $\alpha = 0$ це рівняння — лінійне, а при $\alpha = 1$ — з відокремлюваними змінними. Припускаючи $y \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, поділимо рівняння (27) на y^{α}, тоді матимемо рівняння виду (25):

$$y^{-\alpha} y' + p(x) y^{1-\alpha} = q(x).$$

Таким чином, заміною $z = y^{1-\alpha}$ рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння. Проте на практиці розв'язок рівняння Бернуллі зручніше шукати методом Бернуллі у вигляді $y = uv$, не зводячи його до лінійного рівняння. Слід зазначити, що при $\alpha > 0$, крім розв'язку $y = uv \neq 0$, рівняння Бернуллі має розв'язок $y \equiv 0$.

Приклад

Розв'язати рівняння $(x^2 \ln y - x) y' - y = 0$.

○ Перетворимо рівняння:

$$y' = \frac{y}{x^2 \ln y - x},$$

звідки $yx' + x = x^2 \ln y$, або

$$x' + \frac{x}{y} = \frac{x^2}{y} \ln y.$$

Маємо рівняння Бернуллі відносно змінної $x = x(y)$. Знайдемо його розв'язки

$$x = uv; \quad u'v + uv' + \frac{uv}{y} = u^2v^2 \frac{\ln y}{y};$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{y}\right) = u^2v^2 \frac{\ln y}{y}; \quad \frac{dv}{dy} + \frac{v}{y} = 0; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y}; \quad v = \frac{1}{y};$$

$$\frac{du}{dy}\frac{1}{y} = u^2 \frac{1}{y^2} \frac{\ln y}{y}; \quad \frac{du}{u^2} = \frac{\ln y}{y^2} dy;$$

$$u = \frac{y}{1 + \ln y - Cy}; \quad x = uv = \frac{1}{1 + \ln y - Cy}. \ \bullet$$

4°. *Рівняння виду*

$$y' + p(x) y + q(x) y^2 = r(x), \tag{28}$$

де $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ — задані функції, називається *рівнянням Ріккаті*.

Якщо p, q, r — сталі числа, то це рівняння інтегрується відокремленням змінних:

$$\int \frac{dy}{r - py - qy^2} = x + C.$$

Коли $q(x) \equiv 0$, рівняння (28) стає лінійним, а у випадку $r(x) \equiv 0$ — рівнянням Бернуллі. У загальному випадку рівняння (28) не інтегрується у квадратурах. Проте якщо відомий його один частинний розв'язок $y_1 = y_1(x)$, то заміною $y = y_1 + z$ рівняння Ріккаті зводиться до рівняння Бернуллі.

Приклад

Розв'язати в квадратурах рівняння $y' + 2y(y - x) = 1$.

○ Задане рівняння є рівнянням Ріккаті. Неважко пересвідчитись, що функція $y = x$ — розв'язок цього рівняння, тому заміна $y = x + z$ зводить його до рівняння Бернуллі:

$$1 + z' + 2(x + z)(x + z - x) = 1$$

або

$$z' + 2zx = -2z^2.$$

Далі маємо

$$z = uv; \quad u'v + uv' + 2uvx = -2u^2v^2;$$

$$u'v + u(v' + 2vx) = -2u^2v^2;$$

$$\frac{dv}{dx} = -2vx; \quad \frac{dv}{v} = -2xdx; \quad v = e^{-x^2};$$

$$\frac{du}{dx} e^{-x^2} = -2u^2 e^{-2x^2}; \quad -\frac{du}{u^2} = 2e^{-x^2}dx;$$

$$u = \left(2\int e^{-x^2}dx + C\right)^{-1}; \quad z = uv = e^{-x^2}\left(2\int e^{-x^2}dx + C\right)^{-1};$$

отже, розв'язком даного рівияння є:

$$y = x; \quad y = x + z = x + e^{-x^2}\left(2\int e^{-x^2}dx + C\right)^{-1}. \quad \bullet$$

1.6. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

Рівняння виду

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{29}$$

називається *рівнянням у повних диференціалах,* якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

У цьому випадку загальний інтеграл рівняння (29) має вигляд $u(x, y) = C$, де C — довільна стала. Для того щоб рівняння (29) було рівнянням в повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \tag{30}$$

З'ясуємо методику інтегрування рівнянь в повних диференціалах. Якщо для рівняння (29) умова (30) виконується, то невідома функція $u(x, y)$ задовольняє рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \tag{31}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \tag{32}$$

Інтегруючи рівність (31) по x, визначимо функцію $u(x, y)$ з точністю до довільної диференційовної функції $\varphi(y)$:

$$u(x, y) = \int P(x, y)\,dx = F(x, y) + \varphi(y), \tag{33}$$

де $F(x, y)$ — первісна функції $P(x, y)$ по x. Диференціюючи рівність (33) по y і враховуючи (32), дістаємо рівняння для знаходження функції $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} + \frac{d\varphi}{dy} = Q(x, y).$$

Інший спосіб розв'язування рівняння в повних диференціалах наводиться в п. 3.9 (гл. 10).

Приклад

Розв'язати рівняння

$$(3y^2 + 2xy + 2x)\,dx + (6xy + x^2 + 3)\,dy = 0.$$

○ У даному випадку

$$P(x, y) = 3y^2 + 2xy + 2x, \quad Q(x, y) = 6xy + x^2 + 3.$$

Оскільки

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 6y + 2x,$$

то ліва частина заданого рівняння є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, причому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3y^2 + 2xy + 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + x^2 + 3. \tag{34}$$

Інтегруючи, наприклад, перше з рівнянь (34) по x (вважаючи y сталою), маємо

$$u(x, y) = 3xy^2 + x^2y + x^2 + \varphi(y), \tag{35}$$

де $\varphi(y)$ — довільна диференційовна функція y.

Диференціюючи рівність (35) по y, згідно з другим рівнянням (34), дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + x^2 + \frac{d\varphi}{dy} = 6xy + x^2 + 3,$$

тобто $\frac{d\varphi}{dy} = 3$, звідки $\varphi(y) = 3y + C_1$, тому

$$u(x, y) = 3xy^2 + x^2y + x^2 + 3y + C_1.$$

Отже, загальний інтеграл заданого рівняння виражається рівністю

$$3xy^2 + x^2y + x^2 + 3y = C. \bullet$$

Таким чином, рівняння в повних диференціалах інтегрується досить просто. У зв'язку з цим виникає питання, а чи не можна множенням на певний множник $\mu(x, y)$ довільне рівняння в диференціальній формі (3) звести до рівняння в повних диференціалах? Виявляється, що за певних умов це цілком можливо.

Функція $\mu(x, y)$ називається *інтегрувальним множником* рівняння (29), якщо після домножування на неї цього рівняння воно стає рівнянням у повних диференціалах. Можна довести, що всяке диференціальне рівняння першого порядку, яке задовольняє умовам теореми Коші, має безліч інтегрувальних множників.

Розглянемо методи знаходження інтегрувальних множників $\mu(x, y)$. Загального методу знаходження функцій $\mu(x, y)$ немає. Їх можна знайти лише в деяких окремих випадках. Складемо рівняння для інтегрувальних множників. Якщо $\mu = \mu(x, y)$ — інтегрувальний множник рівняння (29), то рівняння $P\mu dx + Q\mu dy = 0$ є рівнянням у повних диференціалах. Тому, згідно з умовою (30), маємо

$$\frac{\partial(P\mu)}{\partial y} = \frac{\partial(Q\mu)}{\partial x},$$

тобто

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial \mu}{\partial x},$$

звідки

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

або

$$P\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (36)$$

Отже, щоб дістати інтегрувальний множник, треба знайти який-небудь частинний розв'язок рівняння (36). Це рівняння є диференціальним рівнянням з частинними похідними відносно невідомої функції $\mu(x, y)$. У загальному випадку задача знаходження $\mu(x, y)$ з рівняння (36) значно складніша, ніж розв'язування самого рівняння (29).

Розглянемо два випадки, коли рівняння (36) спрощується і інтегрувальний множник рівняння (29) можна знайти. Припустимо, що рівняння (29) має інтегрувальний множник, який залежить лише від x, тобто $\mu=\mu(x)$; тоді в рівнянні (36) $\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=0$ і для знаходження μ матимемо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right), \qquad (37)$$

з якого однією квадратурою визначається $\ln\mu$, а потім і μ. Зрозуміло, що рівняння (37) має зміст лише в тому випадку, коли вираз $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)$ не залежить від y, а залежить лише від x.

Аналогічно якщо вираз $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ залежить лише від y і не залежить від x, то інтегрувальний множник є функцією однієї змінної y і його знаходять з рівняння

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right). \qquad (38)$$

Про інші способи побудови інтегрувального множника можна довідатись з [35].

Приклад

Розв'язати рівняння $(x^2y^2-1)\,dx+2x^3y\,dy=0$.

○ Маємо

$$P(x, y)=x^2y^2-1,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=2x^2y;$$

$$Q(x, y)=2x^3y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=6x^2y.$$

Оскільки рівність (30) не виконується, то задане рівняння не є рівнянням у повних диференціалах. Проте $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{-4x^2y}{2x^3y}=-\frac{2}{x}$, тому рівняння має інтегрувальний множник, який залежить лише від x. Складаємо рівняння (37) і розв'язуємо його:

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = -\frac{2}{x}; \quad \ln \mu = -2 \ln |x| + \ln |C|; \quad \mu = \frac{C}{x^2}, \quad C \neq 0.$$

Візьмемо інтегрувальним множником функцію $\mu = \frac{1}{x^2}$ і помножимо обидві частини заданого рівняння на цей множник. Дістанемо рівняння в повних диференціалах

$$\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx + 2xydy = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння (див. попередній приклад), знайдемо, що загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд

$$xy^2 + \frac{1}{x} = C. \quad \bullet$$

1.7. Диференціальні рівняння, нерозв'язувані відносно похідної. Рівняння Лагранжа і Клеро

Нехай маємо рівняння виду

$$F(x, y, y') = 0, \tag{39}$$

яке важко або неможливо розв'язати відносно похідної y'.

Розглянемо деякі інтегровні в квадратурах класи таких рівнянь.

1°. Нехай *рівняння* (39) *залежить лише від* y':

$$F(y') = 0. \tag{40}$$

Якщо алгебраїчне рівняння $F(x) = 0$ має хоча б один дійсний корінь $x = k$, то рівняння (40) має загальний інтеграл

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0, \tag{41}$$

де C = довільна стала.

Справді, оскільки рівняння $y' = k$ інтегрується: $y = kx + C$, то, підставивши $k = \frac{y - C}{x}$ в (40), матимемо рівність (41). Можна показати, що рівняння (40) особливих розв'язків не має.

Приклад

Розв'язати рівняння $y'^3 + y'^2 + y' - 3 = 0$.

○ Оскільки алгебраїчне рівняння $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$ має дійсний корінь $x = 1$, то, згідно з (41), загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд

$$\left(\frac{y - C}{x}\right)^3 + \left(\frac{y - C}{x}\right)^2 + \left(\frac{y - C}{x}\right) - 3 = 0. \quad \bullet$$

2°. Нехай *рівняння* (39) *не залежить від* x:

$$F(y, y') = 0. \tag{42}$$

Якщо ввести параметр t, то рівняння (42) можна замінити двома рівняннями:

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t), \quad t \in [t_0; t_1],$$

такими, що

$$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0, \quad t \in [t_0; t_1].$$

Тоді

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt,$$

звідки

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C.$$

Таким чином, шукані інтегральні криві визначаються параметричними рівняннями

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C, \quad y = \varphi(t).$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y^{\frac{2}{3}} + (y')^{\frac{2}{3}} = 1$.

○ Нехай $y = \cos^3 t$, $y' = \sin^3 t$. Далі маємо

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{-3\cos^2 t \sin t\,dt}{\sin^3 t} = -3\,\mathrm{ctg}^2\, t\,dt,$$

$$x = -3\int \mathrm{ctg}^2\, t\,dt = 3t + 3\,\mathrm{ctg}\, t + C.$$

Отже, параметричні рівняння шуканих інтегральних кривих мають вигляд

$$x = 3t + 3\,\mathrm{ctg}\, t + C, \quad y = \cos^3 t. \; ●$$

Зокрема, якщо рівняння (42) можна розв'язати відносно y: $y = \varphi(y')$, то за параметр зручно взяти y'. Справді, якщо $y' = t$, то $y = \varphi(t)$, тому

$$dx = \frac{\varphi'(t)\,dt}{t}.$$

Отже,

$$x = \int \frac{\varphi'(t)\,dt}{t} + C, \quad y = \varphi(t)$$

— параметричні рівняння інтегральних кривих.

Приклад

Розв'язати рівняння $y\sqrt{y' - 1} = 2 - y'$.

○ Розв'яжемо рівняння відносно y і покладемо $y' = t$:

$$y = \frac{2-t}{\sqrt{t-1}}.$$

Далі дістанемо

$$dx = \frac{dy}{y'} = -\frac{dt}{2(t-1)^{\frac{3}{2}}}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{t-1}} + C.$$

Знаходимо параметричні рівняння інтегральних кривих:

$$x = \frac{1}{\sqrt{t-1}} + C, \quad y = \frac{2-t}{\sqrt{t-1}}.$$

Параметр t тут легко виключити. Для цього з першого рівняння визначимо

$$t = 1 + \frac{1}{(x-C)^2}$$

і підставимо в друге рівняння. Знайдемо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = x - C - \frac{1}{x-C}. \bullet$$

3°. Нехай *рівняння* (39) *не залежить від* y:

$$F(x, y') = 0. \tag{43}$$

Як і в попередньому випадку, можна ввести параметр і замінити рівняння (43) двома рівняннями:

$$x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t), \quad t \in [t_0; t_1],$$

такими, що

$$F(\varphi(t), \quad \psi(t)) \equiv 0, \quad t \in [t_0; t_1].$$

Тоді дістанемо

$$dy = y'dx = \psi(t)\varphi'(t)\,dt.$$

Отже, інтегральні криві визначаються параметричними рівняннями

$$x = \varphi(t), \quad y = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + C.$$

Зокрема, якщо рівняння (43) легко розв'язується відносно x: $x = \varphi(y')$, то за параметр беруть $y' = t$. Тоді $dy = t\varphi'(t)\,dt$, звідки

$$y = \int t\varphi'(t)\,dt + C.$$

4°. Рівняння виду

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{44}$$

де φ, ψ — відомі функції, називається *рівнянням Лагранжа*.

Зокрема, якщо $\varphi(y') \equiv y'$, то рівняння (44) набирає вигляду

$$y = xy' + \psi(y') \tag{45}$$

і називається *рівнянням Клеро*.

Введемо параметр $t = y'$, тоді рівняння (44) запишеться так:

$$y = x\varphi(t) + \psi(t). \tag{46}$$

Диференціюючи (46) по x, дістанемо

$$t = \varphi(t) + (x\varphi'(t) + \psi'(t))\,\frac{dt}{dx}, \tag{47}$$

або

$$t - \varphi(t) = (x\varphi'(t) + \psi'(t))\,\frac{dt}{dx},$$

звідки

$$(t - \varphi(t))\,\frac{dx}{dt} = x\varphi'(t) + \psi'(t). \tag{48}$$

Рівняння (48) є лінійним відносно невідомої функції $x = x(t)$. Розв'язуючи його, знайдемо загальний розв'язок $x = x(t, C)$, який разом з рівнянням (46) визначить шукані інтегральні криві.

Переходячи до рівняння (48), ми ділили обидві частини рівняння (47) на $\frac{dt}{dx}$. При цьому можуть загубитись розв'язки, для яких $\frac{dt}{dx} = 0$, тобто $t = \text{const}$. Вважаючи t сталою, бачимо, що рівняння (47) задовольняється лише в тому випадку, коли t є коренем рівняння $t - \varphi(t) = 0$. Отже, якщо рівняння $t - \varphi(t) = 0$ має дійсні корені $t = t_i$, то знайдені вище розв'язки рівняння (44) треба доповнити розв'язками $y = x\varphi(t_i) + \psi(t_i)$. Якщо ці розв'язки не утворюються з загального ні за яких значень довільної сталої, то вони є особливими розв'язками.

Розглянемо рівняння Клеро. Поклавши $y' = t$, дістанемо

$$y = xt + \psi(t). \tag{49}$$

Диференціюючи рівність (49) по x, маємо

$$t = t + x\,\frac{dt}{dx} + \psi'(t)\,\frac{dt}{dx} \text{ або } (x + \psi'(t))\,\frac{dt}{dx} = 0.$$

Якщо $\frac{dt}{dx} = 0$, то $t = C$, тому з (49) маємо загальний розв'язок рівняння (45):

$$y = Cx + \psi(C). \tag{50}$$

Якщо $x + \psi'(t) = 0$, то дістаємо частинний розв'язок у параметричній формі:

$$x = -\psi'(t), \quad y = xt + \psi(t). \tag{51}$$

Можна довести, що рівняння (51) — особливий розв'язок рівняння Клеро, а саме, рівняння обвідної сім'ї прямих (50).

Приклад

Розв'язати рівняння $y = xy' - y'^2$.

○ Маємо рівняння Клеро. Загальний розв'язок, згідно з (50), має вигляд $y = Cx - C^2$.

Особливий розв'язок заданого рівняння дістанемо з (51): $y = xt - t^2$, $x = 2t$, звідки $y = \frac{x^2}{4}$. Це рівняння обвідної сім'ї прямих $y = Cx - C^2$. ●

1.8. Наближене розв'язування диференціальних рівнянь методом Ейлера

Ми розглянули деякі класи диференціальних рівнянь, які інтегруються в квадратурах. Є ще кілька малопоширених типів рівнянь, які можна розв'язати. Проте більшість рівнянь не інтегруються в квадратурах. Такі рівняння розв'язують наближеними методами. Ознайомимось з найпростішим із них — методом Ейлера.

Нехай треба знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = f(x, y)$$

з початковою умовою $y(x_0) = y_0$. Припустимо, що права частина даного рівняння задовольняє умови теореми Коші про існування і єдиність розв'язку. Тоді на деякому відрізку $[x_0; b]$ існує єдиний розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє дану початкову умову (рис. 8.8).

Розіб'ємо відрізок $[x_0; b]$ точками $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на n рівних частин. Нехай $x_i - x_{i-1} = \Delta x$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Позначимо через y_i наближені значення розв'язку в точках x_i і проведемо через точки x_i прямі, паралельні осі Oy, і послідовно виконаємо такі однотипні операції. Підставимо значення x_0 та y_0 у праву частину даного рівняння і обчислимо кутовий коефіцієнт $y' = f(x_0, y_0)$ дотичної до інтегральної кривої в точці $(x_0; y_0)$. Для знаходження наближеного значення y_1 шуканого розв'язку замінимо на проміжку $(x_0; x_1)$ інтегральну криву відрізком її дотичної в точці $(x_0; y_0)$. При цьому дістаємо $y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$, звідки $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\,\Delta x$.

Підставляючи значення x_1 та y_1 в праву частину даного рівняння, обчислимо кутовий коефіцієнт $y' = f(x_1, y_1)$ дотичної до інтегральної кривої в точці $(x_1; y_1)$. Замінивши на відрізку $[x_1; x_2]$ інтегральну криву відрізком дотичної, знаходимо наближене значення розв'язку y_2 в точці x_2: $y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$, звідки $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\,\Delta x$ тощо. Таким чином, наближено інтегральна крива побудована у вигляді ламаної лінії, яку називають *ламаною Ейлера*, а метод її побудови — методом Ейлера. Наближені значення y_i розв'язку в точках x_i обчислюють за формулою $y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})\,\Delta x$, яка є

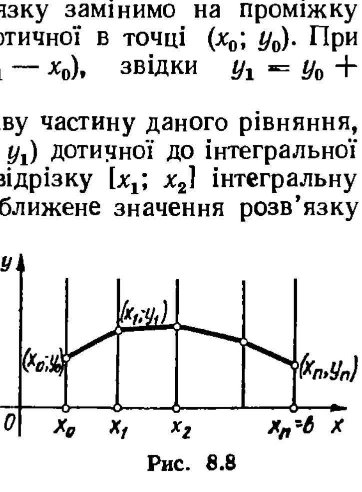


Рис. 8.8

основною розрахунковою формулою методу Ейлера. Точність цієї формули тим вища, чим менша різниця Δx.

Існують і інші наближені методи розв'язку задачі Коші [35].

1.9. Деякі застосування диференціальних рівнянь першого порядку

Як уже говорилося, в різних сферах людської діяльності характер задач, які зводяться до диференціальних рівнянь, та методику розв'язування їх можна схематично описати так. Відбувається деякий процес, наприклад, фізичний, хімічний, біологічний. Нас цікавить певна функціональна характеристика даного процесу, тобто залежність від часу, температури тіла, яке охолоджується, або кількості речовини, яка утворюється в результаті хімічної реакції, або кількості бактерій, які вирощуються за певних умов. Якщо повна інформація про хід цього процесу є достатньою, то можна спробувати побудувати його математичну модель. У багатьох випадках такою моделлю буде диференціальне рівняння, одним із розв'язків якого і є шукана функціональна залежність.

Таким чином, перший етап розв'язування задач з практичним змістом закінчується складанням диференціального рівняння для шуканої функції. Це творча і найважча частина розв'язку, тому що не існує універсального методу складання диференціальних рівнянь. Кожна задача потребує індивідуального підходу, який грунтується на знанні відповідних законів (фізичних, хімічних, біологічних) і вмінні перекладати задачу на умову математики. Математична зрілість інженера характеризується в основному тим, наскільки правильно він може математично формулювати практичні задачі, які пов'язані з його спеціальністю.

Якщо задача зведена до диференціального рівняння, методи розв'язування якого відомі, то другий етап розв'язку, тобто інтегрування рівняння, не викликає утруднень.

Розглянемо кілька конкретних прикладів.

Приклади

1. *(Про розмноження бактерій.)* У сприятливих для розмноження умовах знаходиться деяка кількість N_0 бактерій. Знайти залежність збільшення числа бактерій від часу, якщо швидкість розмноження бактерій пропорційна їхній кількості.

○ Позначимо через $N(t)$ кількість бактерій в момент часу t. Тоді $\frac{dN}{dt}$ — швидкість розмноження за умовою

$$\frac{dN}{dt} = kN, \quad k > 0.$$

Коефіцієнт k залежить від виду бактерій та умов, в яких вони знаходяться. Його визначають експериментально. Інтегруючи знайдене рівняння, дістаємо його загальний розв'язок: $N = Ce^{kt}$. З умови $N(0) = N_0$ знаходимо $C = N_0$, тому

$$N = N_0e^{kt}. \; ●$$

2. *(Про радіоактивний розпад.)* Експериментально встановлено, що швидкість радіоактивного розпаду речовини пропорційна її кількості в даний момент часу. Вказати закон зміни маси речовини від часу, якщо при $t = 0$ маса речовини дорівнювала m_0.

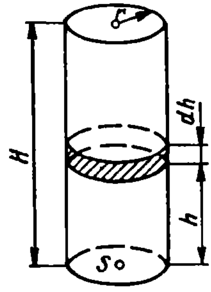


Рис. 8.9

○ Нехай $m = m(t)$ — маса речовини в момент часу t. За умовою

$$\frac{dm}{dt} = -km, \quad k > 0, \quad m(0) = m_0,$$

де k — коефіцієнт пропорційності. Знак мінус береться тому, що з часом кількість речовини зменшується. Розв'язуючи знайдене рівняння, дістаємо, що $m = m_0 e^{-kt}$. ●

3. *(Про охолодження тіла.)* Згідно із законом Ньютона, швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла і температурою навколишнього середовища.

○ Відомо, що нагріте до температури T_0 тіло помістили в середовище, температура якого стала і дорівнює T_1 ($T_0 > T_1$). Знайти залежність температури тіла від часу.

○ Нехай в момент часу t температура T тіла дорівнює $T(t)$. За умовою

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1), \quad k > 0; \quad T(0) = T_0$$

(знак мінус вказує на зменшення температури). Відокремлюючи змінні та інтегруючи, маємо

$$T = T_1 + Ce^{-kt}; \quad T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}. \; ●$$

4. *(Про витікання рідини з циліндра.)* Циліндричний резервуар, у дні якого є отвір, заповнено рідиною. Знайти час t_0, за який рідина витече з резервуару, якщо висота стовпа рідини дорівнює H, радіус циліндра — r, площа отвору — S.

○ Скористаємось законом Торічеллі, згідно з яким для малих отворів швидкість витікання рідини знаходять за формулою $v = \sqrt{2gh}$, де h — висота стовпа рідини над отвором, g — прискорення сили тяжіння.

Нехай у момент часу t висота рідини дорівнювала h і за час dt зменшилась на dh. Вважаючи, що протягом часу dt швидкість витікання була сталою і дорівнювала $\sqrt{2gh}$, знайдемо об'єм dv рідини, яка витікла за час dt: $dv = Svdt = S\sqrt{2gh}dt$ (рис. 8.9).

З іншого боку, рівень рідини понизився на dh, тому $dv = -\pi r^2 dh$. Прирівнюючи елементарні об'єми, дістаємо диференціальне рівняння

$$S\sqrt{2gh}\,dt = -\pi r^2 dh,$$

звідки

$$dt = -\frac{\pi r^2}{S\sqrt{2g}} \frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

Інтегруючи, маємо

$$t = -\frac{2\pi r^2}{S\sqrt{2g}}\sqrt{h} + C.$$

З умови $h(0) = H$ знаходимо сталу $C = \frac{2\pi r^2}{S\sqrt{2g}}\sqrt{H}$, тому

$$t = \frac{2\pi r^2}{S\sqrt{2g}}(\sqrt{H} - \sqrt{h}).$$

Ця формула виражає залежність часу t від висоти стовпа рідини h. Поклавши $h = 0$, знайдемо час, за який витече вся рідина:

$$t_0 = \frac{2\pi r^2 \sqrt{H}}{S\sqrt{2g}} = \frac{\pi r^2}{S}\sqrt{\frac{2H}{g}}. \; \bullet$$

5. *(Про хімічну реакцію.)* Внаслідок хімічної реакції між речовинами A та B масами a та b утворюється третя речовина C. Встановити залежність маси цієї речовини від часу, якщо швидкість реакції пропорційна добутку реагуючих мас.

○ Нехай $x = x(t)$ — кількість речовини C, яка утворилась за час t після початку реакції. Тоді $\frac{dx}{dt}$ — швидкість утворення речовини C (швидкість реакції). За умовою

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x), \quad x(0) = 0,$$

де $k > 0$ — коефіцієнт пропорційності. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, дістаємо:

$$\frac{dx}{(x-a)(x-b)} = kdt; \quad \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)\frac{dx}{a-b} = kdt;$$

$$\ln|x - a| - \ln|x - b| = k(a - b)t + \ln|C|;$$

$$\frac{x-a}{x-b} = Ce^{k(a-b)t}.$$

З початкової умови $C = \frac{a}{b}$, тому $\frac{x-a}{x-b} = \frac{a}{b}e^{k(a-b)t}$, звідки

$$x(t) = ab\frac{1 - e^{k(a-b)t}}{b - ae^{k(a-b)t}}. \; \bullet$$

8. *(Про розчин солі.)* У резервуарі знаходиться a літрів водяного розчину солі, причому в розчині міститься b кілограмів солі. У деякий момент часу вмикається пристрій, який неперервно подає в резервуар m літрів чистої води за секунду і одночасно забирає з нього щосекунди n літрів розчину ($m > n$). При цьому рідина неперервно перемішується. Як змінюється з часом кількість солі в резервуарі?

○ Як відомо, концентрацією c даної речовини називається її кількість, яка міститься в одиниці об'єму. Якщо концентрація рівномірна, то кількість речовини в об'ємі v дорівнює cv.

Нехай $x = x(t)$ — кількість солі, яка залишилася в розчині після того, як пристрій працював t секунд. Кількість суміші в резервуарі в цей момент буде $a + (m - n)t$, тому концентрація

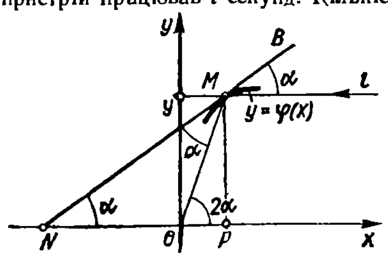


Рис. 8.10

$$c = \frac{x}{a + (m-n)t}.$$

За час dt з резервуару витікає ndt літрів розчину, який містить $ncdt$ кілограмів солі. Тому зміна dx кількості солі в резервуарі характеризується рівнянням

$$-dx = ncdt, \text{ або } -dx = \frac{nxdt}{a + (m-n)t}.$$

Це і є шукане диференціальне рівняння. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, дістанемо

$$x(t) = C(a + (m - n)t)^{\frac{n}{n-m}}.$$

Сталу C визначимо з початкової умови $x(0) = b$:

$$b = Ca^{\frac{n}{n-m}}, \quad C = ba^{\frac{n}{m-n}}.$$

Отже, кількість солі в резервуарі змінюється за законом

$$x(t) = ba^{\frac{n}{m-n}}(a + (m - n)t)^{\frac{n}{n-m}}. \; \bullet$$

7. *(Про силу струму.)* Треба знайти залежність сили струму i від часу k в контурі, який має електрорушійну силу $\mathscr{E}$, опір R та індуктивність L, де $\mathscr{E}$, R, L — сталі.

○ Згідно з законом Ома, маємо

$$L\frac{di}{dt} + Ri = \mathscr{E}.$$

Розв'язуючи це лінійне рівняння заміною $i = uv$, дістанемо загальний розв'язок

$$i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathscr{E}}{R},$$

де C — довільна стала. При $t = 0$ маємо $i(0) = 0$, тому $C = -\frac{\mathscr{E}}{R}$. Отже,

$$i(t) = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Звідки видно, що сила струму при $t \to +\infty$ наближається до свого стаціонарного значення $i_0 = \frac{\mathscr{E}}{R}$. ●

8. *(Про форму дзеркала.)* Знайти форму дзеркала, яке збирає в одну точку пучок променів, які падають на нього паралельно, коли відомо, що форма його поверхні є поверхнею обертання.

○ Виберемо прямокутну систему координат так, щоб промені були паралельні осі Ox, а точкою, в якій збираються відбиті промені, була точка $O(0; 0)$ (рис. 8.10). Нехай $y = \varphi(x)$ — рівняння осьового перерізу дзеркала площиною Oxy; $M(x; y)$ — точка падіння променя l на дзеркало; N — точка перетину дотичної BM з віссю Ox. Тоді за законом відбивання $\angle NMO = \angle BMl = \alpha$, тому $\angle MOP = 2\alpha$. Оскільки $\operatorname{tg}\alpha = y'$, $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2y'}{1 - (y')^2}$, то крива $y = \varphi(x)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{2y'}{1 - y'^2} = \frac{y}{x}.$$

Розв'язуючи його відносно y', дістанемо два однорідних рівняння:

$$y' = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} \text{ і } y' = \frac{-x - \sqrt{x^2 + y^2}}{y}.$$

За допомогою $y = ux$ знаходимо розв'язок першого рівняння:

$$y^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right).$$

Це рівняння в площині Oxy визначає сім'ю парабол, симетричних відносно осі Ox, фокуси яких знаходяться в точці O.

Оскільки форма поверхні дзеркала є поверхнею обертання, то, фіксуючи сталу C і обертаючи параболу навколо осі, дістаємо шукану поверхню у вигляді параболоїда обертання:

$$y^2 + z^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right). \bullet$$

Завдання для самоконтролю

1. Що називається диференціальним рівнянням першого порядку?
2. Що називається розв'язком диференціального рівняння?
3. Сформулювати теорему Коші про існування та єдиність розв'язку рівняння першого порядку.
4. Дати означення загального і частинного розв'язків диференціального рівняння першого порядку. У чому полягає геометричний зміст цих понять?
5. Що таке особливий розв'язок диференціального рівняння? Який його геометричний зміст?
6. У чому полягає геометричний зміст рівняння

$$y' = f(x, y)?$$

7. Дати означення рівняння з відокремлюваними змінними. Як воно розв'язується?
8. Дати означення і описати інтегрування однорідного рівняння першого порядку.
9. Дати означення лінійного рівняння першого порядку та викласти метод його інтегрування.
10. Навести рівняння, звідні до лінійних, та викласти методи їх інтегрування.
11. Дати означення рівняння Бернуллі. Як воно розв'язується?
12. Дати означення рівняння Ріккаті. Як його розв'язати, коли відомо частинний розв'язок?
13. Що називається рівнянням в повних диференціалах? Як воно розв'язується?
14. Що називається інтегрувальним множником? Описати найпростіші випадки, коли він легко знаходиться.
15. Як інтегруються рівняння $F(y') = 0$, $F(x, y') = 0$, $F(y, y') = 0$, нерозв'язні відносно похідних?
16. Яке рівняння називається рівнянням Лагранжа і як воно інтегрується?
17. Яке рівняння називається рівнянням Клеро і як воно інтегрується?
18. Описати метод Ейлера наближеного інтегрування рівняння $y' = f(x, y)$.
19. Розв'язати рівняння:

а) $(y^2 - xy^2)\,dx + (x^2 + yx^2)\,dy = 0$; б) $(y - x)\,dx + (x + y)\,dy = 0$; в) $(x - x^3)\,y' + (2x^2 - 1)\,y = x^3$; г) $y' + xy = x^3y^3$; д) $y^2(1 + y'^2) = 1$; е) $y = 2xy' - y'^2$.

20. Знайти криву, яка проходить через точку (4; 2), якщо довжина піддотичної в кожній її точці дорівнює подвоєній абсцисі цієї точки.
21. Знайти криву, піднормаль якої у кожній точці є середнє арифметичне координат цієї точки.
22. Через який час температура тіла знизиться до 30 °С, якщо температура повітря 20 °С і тіло за 20 хв охолоджується від 100 до 60 °С?

23. За який час витече вода через отвір площею 0,5 см² на дні конічної лійки висотою 10 см і кутом при вершині 60°?

Вказівка. Швидкість v витікання води з отвору, що знаходиться на відстані h від поверхні, знаходиться за формулою $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$, де g — прискорення сили тяжіння.

Відповіді. 19. а) $\frac{x+y}{xy} + \ln\frac{x}{y} = C$; б) $y^2 + 2xy - x^2 = C$; в) $y = x + Cx\sqrt{1-x^2}$; г) $y^2(x^2 + 1 + Ce^{x^2}) = 1$; д) $(x-C)^2 + y^2 = 1$, $y = \pm 1$; е) $x = \frac{C}{t^2} + \frac{2}{3}t$, $y = \frac{2C}{t} + \frac{t^2}{3}$, $t \neq 0$; $y \equiv 0$. 20. $y = \sqrt{x}$. 21. $(x-y)^2(x+2y) = C$. 22. 60 хв. 23. 12,5 с.

§ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

2.1. Основні поняття і означення. Задача Коші

Розглянемо диференціальні рівняння, які містять похідні вищих порядків. Порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння, називається *порядком цього рівняння*. Зокрема, диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{52}$$

де x — незалежна змінна; $y = y(x)$ — невідома функція; F — відома функція.

У рівняння n-го порядку (52) похідна n-го порядку $y^{(n)}$ має справді входити, тоді як наявність у ньому решти змінних, тобто x, y, .., y^{n-1}, необов'язкова.

Рівняння (52), не розв'язане відносно старшої похідної $y^{(n)}$, називається *неявним диференціальним рівнянням*.

Нормальним або *явним диференціальним рівнянням* n-го порядку називається рівняння (52), розв'язане відносно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{53}$$

Розглядатимемо в основному саме такі рівняння.

Розв'язком рівняння (53) на деякому інтервалі $(a;\ b)$ називається n разів неперервно диференційовна на цьому інтервалі функція $\varphi(x)$, яка при підстановці в дане рівняння обертає його в тотожність по $x \in (a;\ b)$, тобто

$$\forall x \in (a;\ b): \varphi^{(n)}(x) \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)).$$

Графік розв'язку диференціального рівняння (52) або (53) називається його *інтегральною кривою*.

Для диференціальних рівнянь вищих порядків, як і для рівнянь першого порядку, розглядається *задача Коші або задача з початковими умовами*. Для рівняння (53) ця задача ставиться так: серед усіх розв'язків рівняння (53) знайти такий розв'язок $y = y(x)$, $x \in (a;\ b)$, який при $x = x_0 \in (a;\ b)$ задовольняє такі умови:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

або

$$y|_{x=x_0} = y_0,\ y'|_{x=x_0} = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \tag{54}$$

де $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — довільні наперед задані дійсні числа.

Умови (54) називають *початковими умовами рівняння* (53). Зокрема, для рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \tag{55}$$

початкові умови при $x = x_0$ мають вигляд

$$y|_{x=x_0} = y_0,\ y'|_{x=x_0} = y_0'. \tag{56}$$

Існування і єдиність розв'язку задачі Коші визначаються такою теоремою Коші.

Теорема 2. *Якщо функція $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ і її частинні похідні по аргументам $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ неперервні в деякій відкритій області $G \subset R_{n+1}$, то для всякої точки $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in G$ існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння (53), який задовольняє початкові умови (54).*

Приймемо дану теорему без доведення. Слід звернути увагу на те, що в цій теоремі мова йде про єдиність розв'язку в $(n+1)$-вимірному просторі: інакше кажучи, єдиність розв'язку рівняння (53) з умовами (54) на відміну від диференціального рівняння першого порядку не означає, що через задану точку $(x_0;\ y_0)$ проходить лише одна інтегральна крива рівняння (53). Так, для рівняння (55) єдиність розв'язку з умовами (56) означає, що через точку $(x_0;\ y_0)$ проходить лише одна інтегральна крива рівняння (55) з кутовим коефіцієнтом дотичної в цій точці, який дорівнює $\operatorname{tg}\alpha = y_0'$ (рис. 8.11). Проте через цю точку можуть проходити й інші інтегральні криві, але з іншим нахилом дотичної.

Нарешті, зупинимось на поняттях загального та частинного розв'язку рівняння (53). Як ми вже бачили, загальний розв'язок рівняння першого порядку знаходиться за допомогою операції інтегрування і містить одну довільну сталу. В загальному випадку розв'язок диференціального рівняння n-го порядку знаходиться в результаті n послідовних інтегрувань, тому загальний розв'язок рівняння (53) містить n довільних сталих, тобто має вигляд

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \tag{57}$$

Якщо загальний розв'язок знаходиться в неявній формі:

$$\Phi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{58}$$

то його називають *загальним інтегралом рівняння* (53).

Частинний розв'язок або *частинний інтеграл* знаходять із загального, якщо у співвідношенні (57) або (58) кожній довільній сталій C_1, C_2, ..., C_n надати конкретного числового значення. З погляду геометрії загальним розв'язком рівняння (53) є *n-параметрична сім'я інтегральних кривих,* залежних від n параметрів C_1, C_2, ..., C_n, а частинний розв'язок — окрема крива з цієї сім'ї.

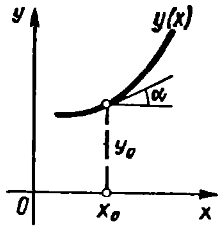


Рис. 8.11

Зауважимо, що не кожний розв'язок рівняння (53), який містить n довільних сталих, є загальним розв'язком. Розв'язок (57) диференціального рівняння (53), який містить n довільних сталих, називається *загальним розв'язком,* якщо можна знайти такі єдині сталі $C_1 = C_{10}$, $C_2 = C_{20}$, ..., $C_n = C_{n0}$, що частинний розв'язок $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0})$ задовольняє початкові умови (54).

Таким чином, розв'язати (проінтегрувати) диференціальне рівняння n-го порядку — це означає: 1) знайти його загальний розв'язок; 2) із загального розв'язку виділити частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови, якщо такі умови задані.

2.2. Диференціальні рівняння n-го порядку, які інтегруються в квадратурах

Рівняння n-го порядку інтегруються в квадратурах дуже рідко. Розглянемо деякі класи таких рівнянь.

1⁰. *Рівняння виду*

$$y^{(n)} = f(x), \tag{59}$$

де $f(x)$ — задана неперервна функція, інтегрується в квадратурах.

Справді, записавши це рівняння у вигляді

$$\frac{d}{dx}(y^{(n-1)}) = f(x) \text{ або } d(y^{(n-1)}) = f(x)\,dx$$

та інтегруючи, дістанемо

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1,$$

де C_1 — стала інтегрування.

Аналогічно знайдемо

$$d(y^{(n-2)}) = \left(\int f(x)\,dx + C_1\right)dx,$$

звідки

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)\,dx\right)dx + C_1x + C_2;$$

$$d(y^{(n-3)}) = \left(\int\left(\int f(x)\,dx\right)dx + C_1x + C_2\right)dx,$$

$$y^{(n-3)} = \int\left(\int\left(\int f(x)\,dx\right)dx\right)dx + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3,$$

де C_1, C_2, C_3 — сталі інтегрування. Продовжуючи далі, після n інтегрувань знайдемо загальний розв'язок рівняння (59):

$$y = \int \left(\dots \int \left(\int f(x)\, dx \right) dx \right) \dots \Big) dx +$$

$$+ \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!} x^{n-2} + \dots + C_n.$$

Приклади

1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{(4)} = \cos 2x$.

○ Послідовно дістанемо

$$y''' = \int \cos 2x dx + C_1 = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1;$$

$$y'' = \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x + C_1 \right) dx + C_2 = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2;$$

$$y' = \int \left(-\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2 \right) dx + C_3 = -\frac{1}{8} \sin 2x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3;$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{8} \sin 2x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3 \right) dx + C_4 =$$

$$= \frac{1}{16} \cos 2x + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4. \text{ ●}$$

2. Матеріальна точка маси m падає вертикально під дією сили земного тяжіння. Знайти закон руху точки, якщо в початковий момент часу точка мала швидкість v_0. Падіння вважати вільним, тобто опором середовища знехтувати.

○ Нехай $S = S(t)$ — шлях, який пройшла точка за час t; $\frac{dS}{dt} = v$, $\frac{d^2S}{dt^2} = w$ — відповідно швидкість і прискорення руху. На тіло діє сила $P = mg$, де g — прискорення вільного падіння. Тоді за другим законом Ньютона

$$mw = P \text{ або } \frac{d^2S}{dt^2} = g.$$

Маємо диференціальне рівняння виду (59) відносно невідомої функції $S(t)$. Згідно з умовою задачі початкові умови мають вигляд

$$S(0) = 0, \quad \frac{dS(0)}{dt} = v(0) = v_0.$$

Послідовно інтегруючи, дістанемо

$$\frac{dS}{dt} = gt + C_1, \quad S = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Скориставшись початковими умовами, знаходимо $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$. Таким чином, дістаємо відомі з фізики формули для швидкості і шляху при вільному падінні тіла:

$$v = gt + v_0, \quad S = \frac{gt^2}{2} + v_0 t. \text{ ●}$$

2°. Розглянемо *рівняння виду*

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \tag{60}$$

Якщо задане рівняння можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, то маємо вже розглянутий випадок 1°. Припустимо, що рівняння (60) можна розв'язати відносно x:

$$x = f(y^{(n)}). \tag{61}$$

Якщо покласти $y^{(n)} = t$, то рівняння (61) набере вигляду $x = f(t)$, звідки $dx = f'(t)\,dt$. Підставляючи значення $y^{(n)}$ і dx у тотожність $d(y^{(n-1)}) = y^{(n)}\,dx$, дістаємо

$$d(y^{(n-1)}) = tf'(t)\,dt, \quad y^{(n-1)} = \int tf'(t)\,dt + C_1. \tag{62}$$

Інтегруючи рівняння (62) тим самим методом, що й рівняння (59), і враховуючи щоразу, що $dx = f'(t)\,dt$, дістанемо розв'язок рівняння (60) в параметричній формі.

Приклад

Розв'язати рівняння $(y'')^3 + 3y'' - x = 0$.

○ Маємо

$$y'' = t, \quad x = t^3 + 3t, \quad dx = (3t^2 + 3)\,dt;$$

$$y' = \int t(3t^2 + 3)\,dt + C_1 = \frac{3}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + C_1;$$

$$dy = \left(\frac{3}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + C_1\right)dx = \left(\frac{3}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + C_1\right)(3t^2 + 3)\,dt =$$

$$= 3\left(\frac{3}{4}t^6 + \frac{9}{4}t^4 + \left(C_1 + \frac{3}{2}\right)t^2 + C_1\right)dt;$$

$$y = \frac{9}{28}t^7 + \frac{27}{20}t^5 + \left(C_1 + \frac{3}{2}\right)t^3 + 3C_1t + C_2.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння у параметричній формі має вигляд

$$x = t^3 + 3t, \quad y = \frac{9}{28}t^7 + \frac{27}{20}t^5 + \left(C_1 + \frac{3}{2}\right)t^3 + 3C_1t + C_2. \quad \bullet$$

2.3. Диференціальні рівняння, які допускають пониження порядку

Одним з методів розв'язування диференціальних рівнянь вищих порядків є *метод пониження порядку*. Суть його полягає в тому, що за допомогою відповідної заміни змінної дане диференціальне рівняння зводиться до рівняння нижчого порядку.

Розглянемо два типи диференціальних рівнянь, які допускають пониження порядку.

1°. Нехай задано *диференціальне рівняння виду*

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{63}$$

яке не містить явно шуканої функції. Порядок такого рівняння можна понизити, якщо за нову невідому функцію $z = z(x)$ взяти найнижчу із похідних даного рівняння, тобто покласти $y^{(k)} = z$; тоді $y^{k+1} = z'$, $y^{(k+2)} = z''$, ..., $y^{(n)} = z^{(n-k)}$, тому дістаємо рівняння

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Таким чином, порядок рівняння понижується на k одиниць. Окремим випадком рівняння (63) є рівняння

$$F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0,$$

яке за допомогою нової змінної $z = y^{(n-1)}$, $z' = y^{(n)}$ зводиться до рівняння першого порядку:

$$F(x, z, z') = 0.$$

Якщо для цього рівняння вдається знайти загальний розв'язок $z = z(x, C_1)$, то приходимо до рівняння $y^{(n-1)} = z(x, C_1)$ виду (59), яке інтегрується в квадратурах.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $y'' + 3y' = e^{2x}$.

○ Покладемо $z = y'$, тоді $z' = y''$ і маємо лінійне рівняння першого порядку відносно невідомої функції $z = z(x)$:

$$z' + 3z = e^{2x}.$$

Розв'язавши це рівняння, знайдемо $z(x) = C_1 e^{-3x} + \frac{1}{5} e^{2x}$, тоді $y' = C_1 e^{-3x} + \frac{1}{5} e^{2x}$, звідки

$$y = -\frac{C_1}{3} e^{-3x} + \frac{2}{5} e^{2x} + C_2. \text{ ●}$$

2. Тіло маси m падає вертикально з деякої висоти без початкової швидкості. При падінні тіло зазнає опору повітря, пропорційного квадрату швидкості тіла. Знайти закон руху тіла.

○ Нехай $S = S(t)$ — шлях, пройдений тілом за час t від початку руху, $\frac{dS}{dt} = v$, $\frac{d^2S}{dt^2} = w$ — швидкість і прискорення руху. На тіло діють сили: $P = mg$ — вага тіла (в напрямі руху) і $F = kv^2 = k\left(\frac{dS}{dt}\right)^2$ — опір повітря (проти напряму руху). За другим законом Ньютона маємо: $mw = P - F$ або $m\frac{d^2S}{dt^2} = mg - k\left(\frac{dS}{dt}\right)^2$, де $k > 0$ — коефіцієнт пропорційності.

Маємо диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить явно невідомої функції $S(t)$. Згідно з умовою задачі дістаємо такі початкові умови:

$$S(0) = 0, \quad \frac{dS(0)}{dt} = v(0) = 0.$$

Покладемо $\frac{dS}{dt} = v$, тоді $\frac{d^2S}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ і дістаємо рівняння

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \text{ або } \frac{m}{k}\,\frac{dv}{dt} = a^2 - v^2,$$

де $a^2 = \frac{mg}{k}$.

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, знаходимо

$$\frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{k}{m}\,dt, \quad \frac{1}{2a}\ln\frac{a+v}{a-v} = kt + C_1.$$

Оскільки $v(0) = 0$, то $C_1 = 0$; тому $\ln\frac{a+v}{a-v} = \frac{2akt}{m}$, звідки

$$v = a\frac{e^{\frac{akt}{m}} - e^{-\frac{akt}{m}}}{e^{\frac{akt}{m}} + e^{-\frac{akt}{m}}} = a\,\mathrm{th}\,\frac{akt}{m} = a\,\mathrm{th}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t.$$

Таким чином, для визначення невідомої функції $S(t)$ маємо рівняння

$$\frac{dS}{dt} = a\,\mathrm{th}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t.$$

Інтегруючи, дістанемо

$$S = \frac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t + C_2.$$

Оскільки $S(0) = 0$, то $C_2 = 0$; тому шуканий закон руху має вигляд

$$S(t) = \frac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t. \;\bullet$$

2^0. Розглянемо *диференціальне рівняння виду*

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{64}$$

яке не містить явно незалежної змінної x.

Рівняння (64) допускають пониження порядку на одиницю. Справді, покладемо $y' = z$, де (на відміну від попереднього випадку) новою невідомою z є функція від $y: z = z(y)$, тоді за правилом диференціювання складеної функції маємо:

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z = z'_y z,$$

тобто порядок другої похідної понизився на одиницю. Аналогічно дістаємо

$$y''' = \frac{d}{dx}(z'_y z) = \frac{d}{dy}(z'_y z)\,\frac{dy}{dx} = z\left(z''_{yy}z + (z'_y)^2\right)$$

тощо. Методом індукції можна довести, що порядок усіх наступних похідних також понижується на одиницю.

Таким чином, від рівняння (64) n-го порядку приходимо до рівняння

$$F(y, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0$$

$(n-1)$-го порядку.

Окремим випадком рівняння (64) є рівняння

$$F(y, y', y'') = 0, \tag{65}$$

яке підстановкою $y' = z$, $y'' = \frac{dz}{dy} z$ зводиться до диференціального рівняння першого порядку:

$$F\left(y, z, \frac{dz}{dy} z\right) = 0.$$

Приклади

1. Розв'язати рівняння $yy'' - 2(y')^2 = 0$.

○ Маємо рівняння виду (65). Поклавши

$$y' = z, \quad y'' = \frac{dz}{dy} z,$$

дістанемо

$$yz \frac{dz}{dy} - 2z^2 = 0 \text{ або } z\left(y \frac{dz}{dy} - 2z\right) = 0.$$

Це рівняння розпадається на два:

$$z = 0, \quad y \frac{dz}{dy} - 2z = 0.$$

З першого маємо $y' = 0$, звідки $y = C$. У другому рівнянні відокремлюються змінні

$$\frac{dz}{z} = \frac{2dy}{y}; \quad \ln|z| = 2\ln|y| + \ln|C_1|, \quad z = C_1y^2, \quad C_1 \neq 0.$$

Оскільки $z = \frac{dy}{dx}$, то

$$\frac{dy}{dx} = C_1y^2, \quad \frac{dy}{y^2} = C_1dx, \quad -\frac{1}{y} = C_1x + C_2.$$

Замінивши C_1 на $-C_1$, C_2 на $-C_2$, знайдемо другий розв'язок даного рівняння:

$$y = \frac{1}{C_1x + C_2}.$$

Отже, задане рівняння має розв'язки

$$y = C \text{ та } y = \frac{1}{C_1x + C_2}. \quad ●$$

2. *Задача про другу космічну швидкість.* Знайти найменшу швидкість, з якою потрібно кинути тіло вертикально вгору, щоб воно не повернулось на Землю. Опором повітря знехтувати.

○ Позначимо через M і m відповідно масу Землі і масу тіла. Згідно закону тяжіння Ньютона, сила F притягання, що діє на тіло, дорівнює $F = k\frac{Mm}{r^2}$, де r — відстань між центром Землі і центром маси тіла; k — гравітаційна стала.

Враховуючи, що на тіло діють лише сила інерції і сила тяжіння, запишемо диференціальне рівняння руху тіла:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -k\frac{Mm}{r^2} \text{ або } \frac{d^2r}{dt^2} = -k\frac{M}{r^2}.$$

Знак мінус беремо тому, що з часом швидкість руху зменшується, а це означає, що прискорення від'ємне.

Знайдене диференціальне рівняння не містить аргументу t, тобто це рівняння виду (65). Розв'яжемо його з початковими умовами: $r = R$, $\frac{dr}{dt} = v_0$ при $t = 0$, де R — радіус Землі; v_0 — швидкість кидання.

Покладемо $\frac{dr}{dt} = v(r) = v$, тоді

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr}v,$$

де v — швидкість руху тіла.

Підставляючи ці величини в рівняння, дістаємо

$$v\frac{dv}{dr} = -k\frac{M}{r^2}.$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, знаходимо загальний розв'язок цього рівняння:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{kM}{r} + C_1.$$

Згідно з початковими умовами на поверхні Землі $v(R) = v_0$, тому

$$C_1 = \frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R}.$$

Підставивши знайдене значення C_1 в загальний розв'язок, дістанемо $\frac{v^2}{2} = \frac{kM}{r} + \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R}\right)$, звідки

$$\frac{kM}{r} + \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R}\right) > 0.$$

За умовою задачі вихід тіла із гравітаційного поля Землі означає, що $r \to \infty$ при $t \to \infty$. Оскільки $\frac{kM}{r} \to 0$ при $r \to \infty$, то одержана нерівність виконуватиметься для довільного r лише у випадку, коли

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \geqslant 0 \text{ або } v_0^2 \geqslant \frac{2kM}{R}.$$

Із закону тяжіння випливає, що прискорення вільного падіння дорівнює

$$g(r) = \frac{F}{m} = \frac{kM}{r^2}.$$

На поверхні Землі $r = R$, тому

$$g = g(R) = \frac{kM}{R^2}.$$

Отже, швидкість кидання повинна задовольняти нерівність

$$v_0^2 \geqslant \frac{2kM}{R} = 2gR \text{ або } v_0 \geqslant \sqrt{2gR}.$$

Оскільки $g = 981$ см/с², $R = 63 \cdot 10^7$ см, то найменша швидкість кидання, яка забезпечить вихід тіла із гравітаційного поля Землі (друга космічна швидкість), дорівнює $v_0 = \sqrt{2gR} = 11{,}2 \cdot 10^5$ см/с $= 11{,}2$ км/с. ●

Завдання для самоконтролю

1. Що називається диференціальним рівнянням n-го порядку? Як визначити порядок диференціального рівняння?
2. У чому полягає задача Коші для диференціального рівняння n-го порядку?
3. Сформулюйте задачу Коші і теорему про існування та єдиність розв'язку для рівняння $y'' = f(x, y, y')$.
4. Що називається загальним розв'язком рівняння n-го порядку? Як знайти його окремий розв'язок?
5. Як інтегруються рівняння $y^{(n)} = f(x)$ та $F(x, y^{(n)}) = 0$?
6. У чому суть методу пониження порядку диференціального рівняння?
7. Як звести до рівнянь першого порядку рівняння $f(x, y', y'') = 0$ та $f(y, y', y'') = 0$?
8. Розв'язати рівняння:

а) $y''' = \dfrac{24}{(x+2)^5}$, якщо $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -1$;

б) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$; в) $y''' = (y'')^2$; г) $2(y')^2 = (y-1)y''$.

Відповіді. 8. а) $y = -\dfrac{1}{(x+2)^2} - \dfrac{5}{16}x^2 + \dfrac{7}{4}x + \dfrac{5}{4}$; б) $y = -x - \dfrac{1}{2}\sin 2x + C_1 \sin x + C_2$; в) $y = (x + C_1)\ln|x + C_1| + C_2 x + C_3$; г) $(x + C_1)(y - 1) = C_2$.

§ 3. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

3.1. Основні означення і поняття

Рівняння виду

$$b_0(x) y^{(n)} + b_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + b_n(x) y = \varphi(x), \tag{66}$$

де $b_0(x)$, $b_1(x)$, ..., $b_n(x)$, $\varphi(x)$ — задані функції, називається *лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку.*

Термін «лінійне рівняння» пов'язаний з тим, що рівняння (66) містить невідому функцію $y = y(x)$ і всі її похідні лише в першому степені.

Функції $b_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, називаються *коефіцієнтами даного рівняння,* а функція $\varphi(x)$ — його вільним членом. Якщо вільний член $\varphi(x)$ тотожно дорівнює нулю, то рівняння (66) називається *однорідним,* якщо $\varphi(x) \not\equiv 0$, то рівняння (66) називається *неоднорідним.* Коефіцієнт $b_0(x) \not\equiv 0$ в своїй області визначення, бо в противному разі рівняння (66) не було б рівнянням n-го порядку. Поділивши дане рівняння на $b_0(x)$, дістанемо

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\,y = f(x), \qquad (67)$$

де

$$a_i(x) = \frac{b_i(x)}{b_0(x)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad f(x) = \frac{\varphi(x)}{b_0(x)}.$$

Таким чином, диференціальне рівняння виду (66) завжди можна ввести до виду (67). У зв'язку в цим ми надалі розглядатимемо лише такі рівняння.

Якщо в деякому інтервалі $(a; b)$ (скінченному чи нескінченному) коефіцієнти $a_i(x)$ і вільний член $f(x)$ — це неперервні функції, то рівняння (67) при будь-яких початкових умовах

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad x_0 \in (a; b), \qquad (68)$$

має єдиний розв'язок, який задовольняє ці умови.

Справді, записавши рівняння (67) у вигляді $y^{(n)} = f(x) - a_1(x) \times y^{(n-1)} - \ldots - a_n(x)\,y$, бачимо, що воно задовольняє всі умови теореми 2. Можна довести, що розв'язок рівняння (67), який задовольняє умови (68), існує і єдиний на всьому інтервалі $(a; b)$ (для рівняння (66) умови теореми 2 можуть не виконуватись в тих точках, де $b_0(x) = 0$).

Надалі вважатимемо, що коефіцієнти і вільний член рівняння (67) на деякому інтервалі $(a; b)$ є неперервними функціями.

3.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0 \qquad (69)$$

і встановимо деякі властивості його розв'язків.

Очевидно, одним з розв'язків рівняння (69) є $y \equiv 0$. Цей розв'язок називають *нульовим* або *тривіальним.* Надалі під задачею розв'язання однорідного диференціального рівняння розумітимемо задачу відшукання його нетривіальних розв'язків.

Теорема 1. *Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — розв'язки рівняння* (69), *то розв'язком цього рівняння є також функція*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{70}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

○ Підставивши функцію (70) в рівняння (69), матимемо:

$$C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x) + a_1(x)(C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)) +$$
$$+ a_2(x)(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)) =$$
$$= C_1 [y_1''(x) + a_1(x) y_1'(x) + a_2(x) y_1(x)] +$$
$$+ C_2 [y_2''(x) + a_1(x) y_2'(x) + a_2(x) y_2(x)].$$

Оскільки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — розв'язки рівняння (69), то вирази в квадратних дужках тотожно дорівнюють нулю, а це означає, що функція (70) є розв'язком рівняння (69). ●

Функція (70) містить дві довільні сталі і є розв'язком рівняння (69), тому природно виникає запитання: чи не є розв'язок (70) загальним розв'язком рівняння (69)? Щоб відповісти на це запитання, введемо поняття лінійної залежності і лінійної незалежності функцій.

Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називаються *лінійно незалежними на проміжку* $(a;\ b)$, якщо тотожність

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0, \tag{71}$$

де α_1, α_2 — дійсні числа, справджується тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Якщо хоча б одне з чисел α_1 чи α_2 відмінне від нуля і виконується тотожність (71), то функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називаються *лінійно залежними на проміжку* $(a;\ b)$.

Неважко переконатись, що функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ тоді і тільки тоді лінійно залежні на проміжку $(a;\ b)$, коли існує таке стале число λ, що для всіх $x \in (a;\ b)$ виконується рівність

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \lambda, \quad \text{тобто} \quad y_1(x) = \lambda y_2(x).$$

Інакше кажучи, дві функції тоді і тільки тоді лінійно залежні, коли вони пропорціональні. Наприклад, нехай $y_1(x) = x$, $y_2(x) = 2x$, $y_3(x) = x^2$, тоді функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійно залежні, а $y_1(x)$ і $y_3(x)$ — лінійно незалежні:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{1}{2} = \text{const}; \quad \frac{y_1(x)}{y_3(x)} = \frac{1}{x} \neq \text{const}.$$

Якщо $y_1 = y_1(x)$ та $y_2 = y_2(x)$ — функції від x, то визначник

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

називається визначником Вронського або вронскіаном цих функцій і позначається символом $W(y_1, y_2)$ або $W(x)$.

Теорема 2. *Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — диференційовні і лінійно залежні на проміжку $(a; b)$, то визначник Вронського на цьому проміжку тотожно дорівнює нулю.*

○ Нехай, наприклад, в тотожності (71) $\alpha_1 \neq 0$, тоді $y_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2$; тому

$$\forall\, x \in (a; b):\ W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 & y_2 \\ -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0. \quad \bullet$$

Теорема 3. *Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — лінійно незалежні розв'язки рівняння (69) на проміжку $(a; b)$, то визначник Вронського цих функцій в жодній точці даного проміжку не дорівнює нулю.*

○ Доведемо теорему методом від супротивного. Припустимо, що існує точка $x_0 \in (a; b)$, в якій $W(x_0) = 0$.

Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(x_0) + \lambda_2 y_2(x_0) = 0, \\ \lambda_1 y_1'(x_0) + \lambda_2 y_2'(x_0) = 0, \end{cases} \tag{72}$$

де λ_1, λ_2 — невідомі числа, а $y_1(x)$, $y_2(x)$ — розв'язки рівняння (69). Оскільки визначник системи (72) $W(x_0) = 0$, то вона має ненульовий розв'язок. Позначимо його через α_1, α_2 (серед чисел α_1, α_2 хоча б одне число відмінне від нуля) і введемо функцію

$$Y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x).$$

Ця функція за теоремою 1 є розв'язком рівняння (69), причому, згідно з системою (72), задовольняє початкові умови

$$Y(x_0) = 0,\ Y'(x_0) = 0. \tag{73}$$

Проте функцією, яка задовольняє і рівняння (69), і початкові умови (73), є також функція $y(x) \equiv 0$. Оскільки для диференціального рівняння (69) виконуються всі умови теореми Коші про існування і єдиність розв'язку, то розв'язки $Y(x)$ та $y \equiv 0$ збігаються, тобто

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0.$$

Ця рівність означає, що розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є лінійно залежні на проміжку $(a; b)$. Дійшли суперечності. Отже,

$$\forall\, x \in (a; b):\ W(x) \neq 0. \quad \bullet$$

З теорем 2 і 3 випливає такий критерій лінійної незалежності розв'язків диференціального рівняння: для того щоб розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ рівняння (69) були лінійно незалежними на заданому проміжку, необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського не дорівнював нулю хоча б в одній точці даного проміжку.

Тепер ми можемо дати відповідь на поставлене раніше запитання. Встановимо умови, за яких функція (70) буде загальним розв'язком рівняння (69).

Теорема 4. *(Про структуру загального розв'язку однорідного рівняння.) Якщо функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ — два лінійно незалежні на проміжку $(a;\ b)$ розв'язки рівняння (69), то функція*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{74}$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі, є його загальним розв'язком.

○ Згідно з теоремою 2 функція (74) є розв'язком рівняння (69) за будь-яких значень сталих C_1 і C_2. Щоб довести, що цей розв'язок загальний, покажемо що з нього можна виділити такий єдиний частинний розв'язок, який задовольняє довільно задані початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \tag{75}$$

де $x_0 \in (a;\ b)$.

Підставивши початкові умови (75) в рівність (74), дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0', \end{cases}$$

в якій C_1 та C_2 — невідомі числа. Визначником цієї системи є визначник Вронського $W(x_0)$. Оскільки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — лінійно незалежні функції, то згідно з теоремою 2 $W(x_0) \neq 0$, тому дана система має єдиний розв'язок $C_1 = C_{10}$ і $C_2 = C_{20}$. Розв'язок $y = C_{10} y_1(x) + C_{20} y_2(x)$ і є тим частинним розв'язком рівняння (69), який задовольняє початкові умови (75). ●

Як уже говорилося, далеко не всяке диференціальне рівняння другого порядку розв'язується в квадратурах. Те саме стосується лінійного рівняння (69) із змінними коефіцієнтами $a_1(x)$ і $a_2(x)$. Проте якщо відомий один частинний розв'язок рівняння (69), то можна знайти і загальний його розв'язок.

Теорема 5. *Якщо відомий який-небудь частинний ненульовий розв'язок рівняння (69), то це рівняння розв'язується в квадратурах.*

○ Нехай $y_1 = y_1(x)$ — ненульовий розв'язок рівняння (69). Покладемо $y = y_1 z$, де z — невідома функція від x, тоді $y' = y_1' z + y_1 z'$, $y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$. Підставляючи значення y, y' та y'' в рівняння (69), дістанемо

$$\{y_1'' + a_1(x) y_1' + a_2(x) y_1\} z + (2y_1' + a_1(x) y_1) z' + y_1 z'' = 0.$$

Оскільки y_1 — розв'язок рівняння (69), то вираз у фігурних дужках дорівнює нулю, тому останнє рівняння набирає вигляду

$$(2y_1' + a_1(x) y_1) z' + y_1 z'' = 0.$$

Покладемо $z' = u(x)$, де u — нова невідома функція від x. Приходимо до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u' y_1 + (2y_1' + a_1(x) y_1) u = 0.$$

Маємо

$$\frac{du}{u} = -\frac{2y_1' + a_1(x) y_1}{y_1}, \quad u = \frac{C_1}{y_1^2} e^{-\int a_1(x)dx}.$$

Оскільки $z' = u$ та $y = y_1 z$, то

$$y = C_1 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a_1(x)dx} dx + C_2 y_1,$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі. ●

Приклади

1. Довести, що функції $y_1 = e^{2x}$ і $y_2 = e^{-2x}$ є лінійно незалежними розв'язками рівняння $y'' - 4y = 0$. Знайти загальний розв'язок цього рівняння.

○ Підставляючи функції y_1 та y_2 в задане рівняння, впевнюємося, що кожна з них обертає рівняння на тотожність, отже є його розв'язком. Оскільки $\frac{y_1}{y_2} = e^{4x} \neq \text{const}$, то функції y_1 та y_2 — лінійно незалежні. Тоді, згідно з теоремою 3, загальний розв'язок цього рівняння запишеться у вигляді $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$, де C_1, C_2 — довільні сталі. ●

2. Розв'язати рівняння $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$, яке має частинний розв'язок $y_1 = \frac{\sin x}{x}$.

○ Згідно з теоремою 5 покладемо $y = y_1 z$, тоді матимемо рівняння $z' \left(2y_1' + \frac{2}{x} y_1\right) + y_1 z'' = 0$. Підставимо замість y_1 його значення і розв'яжемо відносно функції z:

$$z' \left(2 \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} + \frac{2 \sin x}{x^2}\right) + \frac{\sin x}{x} z'' = 0;$$

$$2z' \cos x + z'' \sin x = 0; \quad 2z' \cos x + \frac{d}{dx}(z') \sin x = 0;$$

$$\frac{dz'}{z'} = -2 \frac{\cos x}{\sin x} dx, \quad z' = \frac{C_1}{\sin^2 x}, \quad z = C_2 - C_1 \operatorname{ctg} x.$$

Отже, $y = y_1 z = \frac{\sin x}{x} (C_2 - C_1 \operatorname{ctg} x)$. ●

3.3. Лінійні неоднорідні рівняння другого порядку

Розглянемо тепер неоднорідне лінійне рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = f(x), \qquad (76)$$

де $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ — задані і неперервні на $(a;\ b)$ функції.

Лінійне однорідне рівняння

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = 0, \qquad (77)$$

ліва частина якого збігається з лівою частиною неоднорідного рівняння (76), надалі називатимемо відповідним йому однорідним рівнянням.

Теорема *(про структуру загального розв'язку неоднорідного рівняння). Загальним розв'язком рівняння* (76) *є сума його довільного частинного розв'язку і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння* (77).

○ Нехай $y^*(x)$ — частинний розв'язок рівняння (76), а $\bar{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ — загальний розв'язок рівняння (77). Переконаємось, що функція

$$y(x) = y^*(x) + \bar{y}(x) \qquad (78)$$

— розв'язок рівняння (76). Підставляючи функцію (78) в рівняння (76), дістанемо

$$y^{*''}(x) + \bar{y}''(x) + a_1(x)(y^{*'}(x) + \bar{y}'(x)) + a_2(x)(y^*(x) + \bar{y}(x)) =$$
$$= \{y^{*''}(x) + a_1(x)\, y^{*'}(x) + a_2(x)\, y^*(x)\} +$$
$$+ [\bar{y}''(x) + a_1(x)\, \bar{y}'(x) + a_2(x)\, \bar{y}(x)] = f(x).$$

Оскільки вираз у квадратних дужках дорівнює нулю, а у фігурних — функції $f(x)$, то функція (78) є розв'язком рівняння (76).

Покажемо тепер, що функція (78) — загальний розв'язок рівняння (76). Для цього доведемо, що з розв'язку (78) можна дістати розв'язок рівняння (76), який задовольняє задані початкові умови

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \qquad (79)$$

де $x_0 \in (a;\ b)$.

Підставивши умови (79) у функцію (78), дістанемо систему рівнянь

$$C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 - y^*(x_0);$$
$$C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0' + y^{*'}(x_0),$$

де C_1, C_2 — невідомі.

Визначником цієї системи є визначник Вронського $W(x_0)$ для функцій $y_1(x)$ та $y_2(x)$ в точці x_0. Оскільки ці функції лінійно незалежні, то $W(x_0) \neq 0$. Отже, система має єдиний розв'язок $C_1 = C_{10}$ і $C_2 = C_{20}$. Таким чином, дістали розв'язок $y = C_{10} y_1(x) + C_{20} y_2(x) + y^*(x)$ рівняння (76), який задовольняє початкові умови (79). ●

З теореми випливає, що для знаходження загального розв'язку рівняння (76) потрібно знайти який-небудь його частинний розв'язок, а також загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Обидві ці задачі є складними. Проте якщо відомий загальний розв'язок однорідного рівняння (77), то частинний розв'язок рівняння (76) можна знайти, скориставшись так званим методом варіації довільних сталих, який належить Лагранжу.

3.4. Метод варіації довільних сталих

Нехай

$$\bar{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{80}$$

— загальний розв'язок однорідного рівняння (77), відповідного рівнянню (76). Замінимо у формулі (80) сталі C_1 і C_2 невідомими функціями $C_1(x)$, $C_2(x)$ і підберемо ці функції так, щоб функція

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \tag{81}$$

була розв'язком рівняння (76). Знайдемо похідну

$$y' = C_1'(x) y_1(x) + C_1(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2(x) + C_2(x) y_2'(x).$$

Накладемо на $C_1(x)$ і $C_2(x)$ умову, щоб

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0. \tag{82}$$

З урахуванням умови (82) похідна y' набере вигляду

$$y' = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x).$$

Знайдемо другу похідну

$$y'' = C_1'(x) y_1'(x) + C_1(x) y_1''(x) +$$
$$+ C_2'(x) y_2'(x) + C_2(x) y_2''(x).$$

Підставивши значення y, y', y'' в рівняння (76), дістанемо

$$C_1(x)[y_1''(x) + a_1(x) y_1'(x) + a_2(x) y_1(x)] +$$
$$+ C_2(x)[y_2''(x) + a_1(x) y_2'(x) + a_2(x) y_2(x)] +$$
$$+ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x).$$

Оскільки $y_1(x)$, $y_2(x)$ — розв'язки однорідного рівняння (77), то вирази в квадратних дужках дорівнюють нулю, а тому

$$C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x). \tag{83}$$

Таким чином, функція (81) буде тоді частинним розв'язком рівняння (76), коли функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ задовольнятимуть систему рівнянь (82) і (83):

$$\begin{cases} C_1'(x)\,y_1(x) + C_2'(x)\,y_2(x) = 0; \\ C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{84}$$

Визначником цієї системи є визначник Вронського $W(x)$ для лінійно незалежних розв'язків $y_1(x)$ та $y_2(x)$ рівняння (77), тому $W(x) \neq 0$. Тоді система (84) має єдиний розв'язок $C_1' = \varphi(x)$ та $C_2' = \psi(x)$, де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — деякі функції від x. Інтегруючи ці функції, знаходимо $C_1(x)$ та $C_2(x)$, а потім за формулою (81) складаємо частинний розв'язок рівняння (76).

При знаходженні частинних розв'язків може стати корисною наступна теорема.

Теорема (про накладання розв'язків). *Якщо права частина рівняння $y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = f(x)$ дорівнює сумі двох функцій: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — розв'язки рівнянь*

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = f_1(x) \quad \text{та} \quad y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = f_2(x),$$

то функція $y = y_1(x) + y_2(x)$ буде розв'язком даного рівняння.

○ Дійсно,

$$y_1''(x) + y_2''(x) + a_1(x)\,(y_1'(x) + y_2'(x)) + a_2(x)\,(y_1(x) + y_2(x)) =$$
$$= y_1''(x) + a_1(x)\,y_1'(x) + a_2(x)\,y_1(x) + y_2''(x) + a_1(x)\,y_2'(x) +$$
$$+ a_2(x)\,y_2(x) = f_1(x) + f_2(x) \equiv f(x). \; \bullet$$

Це означає, що коли можна знайти розв'язки рівнянь, правими частинами яких є окремі доданки заданої правої частини, то можна дуже просто — у вигляді суми розв'язків — знайти розв'язок даного рівняння.

Приклади

1. Рівняння $y'' + 4y = x$ має частинний розв'язок $y_1 = \frac{x}{4}$, рівняння $y'' + 4x = e^x$ — розв'язок $y_2 = \frac{e^x}{5}$. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y'' + 4x = x + e^x.$$

○ Згідно з теоремою шуканий розв'язок має вигляд

$$y = y_1 + y_2 = \frac{x}{4} + \frac{e^x}{5}. \; \bullet$$

2. Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}, \text{ якщо } \bar{y} = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$$

загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

○ Запишемо частинний розв'язок даного рівняння у вигляді

$$y = C_1(x)\sin 2x + C_2(x)\cos 2x.$$

Для знаходження невідомих функцій $C_1(x)$ та $C_2(x)$ складемо систему рівнянь виду (84):

$$\begin{cases} C_1'\sin 2x + C_2'\cos 2x = 0; \\ 2C_1'\cos 2x - 2C_2'\sin 2x = \dfrac{1}{\cos 2x}. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо $C_1' = \frac{1}{2}$, $C_2' = -\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$. Інтегруючи, дістаємо

$$C_1 = \int \frac{1}{2}\,dx = \frac{x}{2}, \quad C_2 = -\int \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x\,dx = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|.$$

Запишемо частинний розв'язок даного рівняння:

$$y^* = \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x \ln|\cos 2x|.$$

Отже,

$$y = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|$$

— загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння.

Таким самим буде результат, якщо під час інтегрування C_1' та C_2' ввести довільні сталі $\overline{C}_1$ та $\overline{C}_2$:

$$C_1 = \frac{x}{2} + \overline{C}_1, \quad C_2 = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + \overline{C}_2;$$

$$y = \left(\frac{x}{2} + \overline{C}_1\right)\sin 2x + \left(\frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + \overline{C}_2\right)\cos 2x =$$

$$= \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x| + \overline{C}_1\sin 2x + \overline{C}_2\cos 2x. \ \bullet$$

Завдання для самоконтролю

1. Що називається лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку?
2. Що називається лінійним однорідним рівнянням другого порядку?
3. Що називається визначником Вронського для функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$? Сформулювати і довести властивості визначника $W(y_1, y_2)$.
4. Сформулювати і довести теорему про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку.
5. Як знайти загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння другого порядку, якщо відомий його частинний розв'язок?
6. Сформулювати і довести теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку.
7. У чому полягає метод варіації довільних сталих?
8. Довести, що функція $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$, де C_1, C_2 — довільні сталі, є загальним розв'язком рівняння $y'' - 4y = 0$.

Вказівка. Перевірити виконання умов теореми 3.

9. Довести, що функція $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{3}{2} x \cos x$ є загальним розв'язком рівняння

$$y'' + y = 3 \sin x.$$

Вказівка. Перевірити виконання умов теореми 5.

10. Задано рівняння $(1 - x^2) y'' - 2xy' + 2y = 0$. Переконатись, що функція $y = x$ є частинним розв'язком цього рівняння, і знайти його загальний розв'язок.

11. Задано рівняння $y'' - y = x$. Пересвідчитись, що функція $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$, де C_1, C_2 — довільні сталі, є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння, і методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок даного рівняння.

Відповіді. 10. $y = C_1 x + C_2 \left(\frac{x}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \pm 1 \right)$. 11. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - x$.

§ 4. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ІЗ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Як уже зазначалося, основною задачею в диференціальних рівняннях є знаходження їхнього загального розв'язку. Ця задача найповніше вивчена для лінійних рівнянь із сталими коефіцієнтами.

4.1. Лінійні однорідні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{85}$$

де p, q — дійсні числа.

Ейлер запропонував шукати частинні розв'язки цього рівняння у вигляді

$$y = e^{kx}, \tag{86}$$

де k — стала (дійсна чи комплексна), яку треба знайти. Підставивши функцію (86) в рівняння (85), дістанемо

$$e^{kx} (k^2 + pk + q) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{87}$$

Отже, якщо k буде коренем рівняння (87), то функція (86) буде розв'язком рівняння (85). Квадратне рівняння (87) називається *характеристичним рівнянням диференціального рівняння* (85).

Позначимо корені характеристичного рівняння через k_1 і k_2. Можливі три випадки:

I. k_1 і k_2 — дійсні і різні числа ($k_1 \neq k_2$);

II. k_1 і k_2 — комплексні числа ($k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$);

III. k_1 і k_2 — дійсні і рівні числа ($k_1 = k_2$);

Розглянемо кожен випадок окремо.

I. *Корені характеристичного рівняння дійсні і різні:* $k_1 \neq k_2$. У цьому випадку частинними розв'язками рівняння (85) є функції

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні, тому що при $k_1 \neq k_2$

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const}.$$

Згідно з теоремою 4 (п. 3.2) загальний розв'язок рівняння (85) знаходять за формулою

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{88}$$

II. *Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені:*

$$k_1 = \alpha + \beta i, \quad k_2 = \alpha - \beta i.$$

Підставивши значення k_1 та k_2 у формулу (86), знайдемо розв'язки

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}.$$

За формулою Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

маємо

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos\beta x + i \sin\beta x);$$

$$e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos\beta x - i \sin\beta x).$$

Зауважимо, що коли функція $z(x) = u(x) + iv(x)$ є розв'язком рівняння (85), то розв'язками будуть також функції $u(x)$ та $v(x)$. Дійсно, підставивши функцію $z(x)$ в рівняння (85), дістанемо:

$$u'' + v''i + p(u' + v'i) + q(u + vi) \equiv 0,$$

або

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) = 0.$$

Остання тотожність можлива, коли вирази в дужках дорівнюють нулю (гл. 7, п. 1.4). Це означає, що функції u та v — розв'язки рівняння (85). Згідно з цим зауваженням частинними розв'язками рівняння (85) є функції

$$y_1 = e^{\alpha x} \sin\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \cos\beta x.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні, оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\alpha x} \sin\beta x}{e^{\alpha x} \cos\beta x} = \operatorname{tg}\beta x \neq \text{const},$$

тому загальний розв'язок рівняння (85) запишеться у вигляді

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x). \tag{89}$$

III. *Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні:* $k_1 = k_2 = k$. За формулою (86) дістанемо один з розв'язків:

$$y = e^{kx}.$$

Другий розв'язок шукатимемо у вигляді $y_2 = ue^{kx}$, де u — невідома функція від x. Знайшовши y_2' і y_2'' та підставивши їх у рівняння (85), дістанемо

$$(u'' + 2u'k + uk^2)e^{kx} + p(u' + uk)e^{kx} + que^{kx} = 0,$$

або

$$u'' + (2k + p)u' + (k^2 + pk + q)u = 0.$$

Оскільки k — корінь рівняння (87), то $k^2 + pk + q = 0$ і за теоремою Вієта $2k = -p$, тому $2k + p = 0$ і $u'' = 0$, звідки $u = C_1x + C_2$, де C_1, C_2 — довільні сталі. Поклавши $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ (нас цікавить який-небудь розв'язок $u(x) \neq 0$), знайдемо другий частинний розв'язок рівняння (85):

$$y_2 = xe^{kx}.$$

Розв'язки y_1 та y_2 — лінійно незалежні, тому загальний розв'язок рівняння (85) має вигляд

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2x). \tag{90}$$

Приклади

1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

○ Складемо характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 6 = 0$ і знайдемо його корені $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. За формулою (88) шуканий розв'язок має вигляд:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}. \; ●$$

2. Розв'язати рівняння

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

○ Характеристичне рівняння $k^2 + 4k + 13 = 0$ має комплексні корені $k_{1,2} = -2 \pm 3i$. Загальний розв'язок дістанемо за формулою (89):

$$y = e^{-2x}(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x). \; ●$$

3. Знайти розв'язок рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0$, який задовольняє початкові умови $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

○ Знайдемо спочатку загальний розв'язок. Характеристичне рівняння $k^2 + 6k + 9 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = -3$. За формулою (90) маємо загальний розв'язок $y = e^{-3x}(C_1 + C_2x)$.

Скористаємось початковими умовами. Оскільки

$$y' = -3e^{-3x}(C_1 + C_2x) + C_2e^{-3x}, \text{ то } \begin{cases} C_1 = 0; \\ -3C_1 + C_2 = 2, \end{cases}$$

звідки $C_1 = 0$, $C_2 = 2$.

Знаходимо шуканий розв'язок: $y = 2xe^{-3x}$. ●

4.2. Неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Рівняння із спеціальною правою частиною

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (91)$$

де p, q — задані дійсні числа, $f(x) \not\equiv 0$ — задана функція, неперервна на деякому проміжку (a, b).

Згідно з теоремою п. 3.3, загальний розв'язок такого рівняння являє собою суму частинного розв'язку рівняння (91) і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння. Загальний розв'язок однорідного рівняння ми вже знаходити вміємо, тому розглянемо детальніше питання про знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Насамперед слід зазначити, що частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (91) можна знайти в квадратурах методом варіації довільних сталих (п. 3.4). Проте для рівнянь із спеціальною правою частиною частинний розв'язок можна знайти значно простіше, не вдаючись до операції інтегрування.

Розглянемо деякі з таких рівнянь.

I. Нехай права частина в рівнянні (91) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x), \qquad (92)$$

де α — дійсне число, $P_n(x)$ — могочлен степеня n.

Можливі такі випадки:

а) число α не є коренем характеристичного рівняння

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (93)$$

Тоді диференціальне рівняння (91) має частинний розв'язок виду

$$y^* = Q_n(x) e^{\alpha x} = (A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n) e^{\alpha x}, \qquad (94)$$

де A_0, A_1, ..., A_n — невизначені коефіцієнти.

Справді, підставляючи функцію (94) в рівняння (91), після скорочення на $e^{\alpha x}$ дістанемо

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p) Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q) Q_n(x) \equiv P_n(x), \qquad (95)$$

де $Q_n''(x)$ — многочлен степеня $n - 2$, $Q_n'(x)$ — многочлен степеня $n - 1$, а $Q_n(x)$ і $P_n(x)$ — многочлени степеня n. Таким чином, зліва і справа в тотожності (95) стоять могочлени степеня n. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях n, дістанемо систему $n + 1$ лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої визначимо $n + 1$ невідомих коефіцієнтів A_i многочлена $Q_n(x)$.

Не зупиняючись далі на доведеннях (див. [24]), вкажемо форму, в якій потрібно шукати частинний розв'язок рівняння (91), залежно від виду правої частини $f(x)$ цього рівняння;

б) якщо число α збігається з одним коренем характеристичного рівняння (93), тобто є простим коренем цього рівняння, то частинний розв'язок рівняння (91) треба шукати у вигляді

$$y^* = xQ_n(x)\,e^{\alpha x}; \tag{96}$$

в) якщо число α є двократним коренем рівняння (93), то частинний розв'язок рівняння (91) шукають у вигляді

$$y^* = x^2Q_n(x)\,e^{\alpha x}. \tag{97}$$

Об'єднаємо випадки а) — в): якщо права частина рівняння (91) має вигляд (92), то частинний розв'язок цього рівняння треба шукати у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x),$$

де $Q_n(x)$ — многочлен з невизначеними коефіцієнтами того самого степеня, що й многочлен $P_n(x)$, а r — число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють α. Якщо α не є коренем характеристичного рівняння, то приймаємо $r = 0$.

II. Нехай права частина в рівнянні (91) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x), \tag{98}$$

де $P_n(x)$ — многочлен степеня n, $R_m(x)$ — многочлен степеня m; α та β — дійсні числа. (Функція (92) є окремим випадком функції (98) і утворюється з неї при $\beta = 0$).

Частинний розв'язок рівняння (91) треба шукати у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(Q_s(x)\cos\beta x + L_s(x)\sin\beta x), \tag{99}$$

де $Q_s(x)$ та $L_s(x)$ — многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами; s — найвищий степінь многочленів $R_m(x)$ та $P_n(x)$, тобто $s = \max(n, m)$; r — число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють $\alpha + \beta i$.

Зокрема, якщо права частина рівняння (91) має вигляд

$$f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x, \tag{100}$$

де A, B — відомі дійсні числа, то частинний розв'язок цього рівняння треба шукати у вигляді

$$y^* = x^r(a\cos\beta x + b\sin\beta x), \tag{101}$$

де a, b — невідомі коефіцієнти; r — число коренів характеристичного рівняння (93), які дорівнюють βi.

Зауваження. 1. Шукані многочлени $Q_n(x)$ у формулах (94), (96) і (97) мають бути повними, тобто містити всі степені x від 0 до n, незалежно від того, чи повним є заданий многочлен $P_n(x)$. Те саме стосується многочленів $Q_s(x)$ та $L_s(x)$ у формулі (99), причому невизначені коефіцієнти при одних і тих же степенях x у цих многочленах повинні бути, взагалі кажучи, різними.

З а у в а ж е н н я 2. Якщо права частина рівняння (91) є сумою декількох різних за структурою функцій виду (92) або (98), то для відшукання частинного розв'язку потрібно використати теорему про накладання розв'язків (п. 3.4).

З а у в а ж е н н я 3. Використаний метод підбору окремого частинного розв'язку рівняння (91) можна застосовувати лише для певних диференціальних рівнянь, а саме для лінійних рівнянь із сталими коефіцієнтами і з спеціальною правою частиною виду (92) або (98). В інших випадках частинний розв'язок треба шукати методом варіації довільних сталих.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + y = 2x + 3$.

○ Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 1$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\bar{y}(x) = e^x (C_1 + C_2x)$. Оскільки правою частиною даного рівняння є функція виду $P_1(x)\, e^{0\cdot x}$, причому $\alpha = 0$, $\alpha \neq k_1$, $\alpha \neq k_2$, то за формулою (94) частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y^* = Q_1(x)\, e^{0\cdot x}$, тобто $y^* = A + Bx$, де A і B — невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $y^{*\prime} = B$, $y^{*\prime\prime} = 0$ і підставивши їх у рівняння, дістанемо

$$-2B + A + Bx = 2x + 3.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} B = 2; \\ -2B + A = 3, \end{cases}$$

звідки $B = 2$, $A = 7$. Отже, частинний розв'язок даного рівняння має вигляд $y^* = 7 + 2x$, тому

$$y = \bar{y}(x) + y^*(x) = e^x (C_1 + C_2x) + 2x + 7$$

шуканий загальний розв'язок. ●

2. Розв'язати рівняння $y'' - 3y' + 2y = 8e^{3x}$.

○ Характеристичне рівняння $k^2 - 3k + 2 = 0$ має корені $k_1 = 1$ і $k_2 = 2$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$. Оскільки правою частиною даного рівняння є функція виду $P_0(x)\, e^{3x}$, причому $\alpha = 3$, $\alpha \neq k_1$, $\alpha \neq k_2$, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y^* = Q_0(x)\, e^{3x}, \text{ тобто } y^* = Ae^{3x},$$

де A — невідомий коефіцієнт.

Знайшовши похідні $(y^*)' = 3Ae^{3x}$, $(y^*)'' = 9Ae^{3x}$ і підставивши їх у рівняння, дістанемо

$$9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = 8e^{3x},$$

звідки $A = 4$, тому $y^* = 4e^{3x}$ — частинний розв'язок даного рівняння, а $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + 4e^{3x}$ — його загальний розв'язок. ●

3. Розв'язати рівняння

$$y'' + 9y = (54x^2 + 1)\, e^{3x}.$$

○ Характеристичне рівняння $k^2 + 9 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm 3i$, тому $\bar{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$ — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Права частина даного рівняння має вигляд $P_2(x)\,e^{3x}$. Оскільки $\alpha = 3$, $\alpha \neq k_1$, $\alpha \neq k_2$, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y^* = Q_2(x)\,e^{3x}$, тобто

$$y^* = (A + Bx + Cx^2)\,e^{3x},$$

де A, B, C — невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $(y^*)'$ та $(y^*)''$ і підставивши їх в дане рівняння, дістанемо після зведення подібних членів і скорочення на e^{3x}:

$$18Cx^2 + (18B + 12C)\,x + (18A + 6B + 2C) = 54x^2 + 1.$$

Звідси

$$\begin{cases} 18C = 54; \\ 18B + 12C = 0; \\ 18A + 6B + 2C = 1, \end{cases}$$

$$A = \frac{7}{18},\ B = -2,\ C = 3,$$

отже, $y^* = \left(3x^2 - 2x + \frac{7}{18}\right) e^{3x}$ — частинний розв'язок даного рівняння, а $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \left(3x^2 - 2x + \frac{7}{18}\right) e^{3x}$ — загальний розв'язок. ●

4. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' - 3y = (x + 2)\,e^{3x}$.

○ Характеристичне рівняння $k^2 - 2k - 3 = 0$ має корені $k_1 = -1$, $k_2 = 3$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$. Оскільки правою частиною даного рівняння є функція виду $P_1(x)\,e^{3x}$, причому $\alpha = 3 = k_2$, $\alpha \neq k_1$, тобто $\alpha = 3$ є простим коренем характеристичного рівняння, то згідно з формулою (96) частинний розв'язок треба шукати у вигляді $y^* = xQ_1(x)\,e^{3x}$, а саме:

$$y^* = x\,(A + Bx)\,e^{3x},$$

де A, B — невідомі коефіцієнти.

Знайшовши $(y^*)'$ та $(y^*)''$ і підставивши y^*, $(y^*)'$ і $(y^*)''$ в дане рівняння, після спрощень знаходимо

$$8Bx + 2B + 4A = x + 2.$$

Далі маємо

$$\begin{cases} 8B = 1; \\ 2B + 4A = 2, \quad B = \frac{1}{8}, \quad A = \frac{7}{16}; \end{cases}$$

$y^* = \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{16}x\right) e^{3x}$ — частинний розв'язок даного рівняння; $y = C_1 e^{-x} + \left(C_2 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{16}x\right) e^{3x}$ — загальний розв'язок. ●

5. Розв'язати рівняння $y'' + 4y = 5 \sin 2x$.

○ Характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm 2i$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $\bar{y} = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$. Права частина даного рівняння $f(x) = 5 \sin 2x = 5 \sin 2x + 0 \cdot \cos 2x$ є функцією виду (100), де $A = 0$, $B = 5$, $\beta = 2$. Крім того, число $\beta i = 2i$ збігається з одним із коренів характеристичного рівняння, тому згідно з формулою (101) частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y^* = x\,(a \cos 2x + b \sin 2x),$$

де a, b — невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $(y^*)'$ та $(y^*)''$ і підставивши $(y^*)''$ та y^* в дане рівняння, після спрощень дістанемо

$$-4a \sin 2x + 4b \cos 2x = 5 \sin 2x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 2x$ і $\cos 2x$ в лівій і правій частині цієї рівності, знаходимо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4a = 5; \\ 4b = 0, \end{cases}$$

звідки $a = -\frac{5}{4}$, $b = 0$. Отже $y^* = -\frac{5}{4} x \cos 2x$ — частинний розв'язок даного рівняння, а $y = \bar{y} + y^* = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{5}{4} x \cos 2x$ — загальний розв'язок. ●

6. Знайти розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = 3e^x + 2x + 3$, який задовольняє початковим умовам: $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.

○ Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 1$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $\bar{y} = e^x (C_1 + C_2 x)$. Права частина рівняння є сумою двох різних за структурою функцій $f_1(x) = 3e^x$ та $f_2(x) = 2x + 3$, тому за теоремою про накладання розв'язків частинний розв'язок даного рівняння дорівнює $y^* = y_1^* + y_2^*$, де y_1^* та y_2^* — частинні розв'язки рівнянь $y'' - 2y' + y = 3e^x$ та $y'' - 2y' + y = 2x + 3$ відповідно.

Частинний розв'язок першого з цих рівнянь шукаємо у вигляді $y_1^* = x^2 Ae^x$, оскільки $r = 2$ (число коренів характеристичного рівняння, які збігаються з $\alpha = 1$, дорівнює 2). Підставивши y_1^*, $(y_1^*)'$, $(y_1^*)''$ в перше рівняння, після спрощень знайдемо $2A = 3$, тому

$$y_1^* = \frac{3}{2} x^2 e^x.$$

Частинний розв'язок другого рівняння шукаємо у вигляді $y_2^* = A + Bx$, звідки $y_2^* = 2x + 7$ (див. приклад 1). Отже,

$$y = \bar{y} + y_1^* + y_2^* = e^x \left(C_1 + C_2 x + \frac{3}{2} x^2\right) + 2x + 7$$

— загальний розв'язок даного рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок, який задовольняє задані початкові умови. Продиференціюємо загальний розв'язок:

$$y' = e^x \left(C_1 + C_2 + C_2 x + 3x + \frac{3}{2} x^2\right) + 2.$$

Підставивши в загальний розв'язок і його похідну початкові умови $x = 0$, $y = 3$, $y' = -1$, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + 7 = 3; \\ C_1 + C_2 + 2 = -1, \end{cases}$$

звідки $C_1 = -4$, $C_2 = 1$. Отже,

$$y = e^x \left(\frac{3}{2} x^2 + x - 4\right) + 2x + 7$$

— шуканий розв'язок. ●

7: Розв'язати рівняння $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

○ Характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm i$, тому $\bar{y} = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Права частина рівняння $f(x) = \operatorname{tg} x$ не є функцією спеціального виду (92) або (98), тому частинний розв'язок даного рівняння методом підбору шукати не можна

Знайдемо цей розв'язок методом Лагранжа. Складемо систему виду (84) і розв'яжемо її:

$$\begin{cases} C_1' \sin x + C_2' \cos x = 0; \\ C_1' \cos x - C_2' \sin x = \operatorname{tg} x, \end{cases}$$

$$C_1' = \sin x, \quad C_2' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Інтегруючи, дістанемо

$$C_1 = \int \sin x dx = -\cos x + \bar{C}_1;$$

$$C_2 = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx =$$

$$= -\int \frac{dx}{\cos x} + \int \cos x dx = -\ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + \sin x + \bar{C}_2,$$

де $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ — довільні сталі. При $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0$ дістанемо частинний розв'язок

$$y^* = -\sin x \cos x + \left(\sin x - \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \right) \cos x,$$

тоді

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \cos x \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right|$$

— загальний розв'язок даного рівняння. ●

4.3. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку

Застосуємо методи знаходження розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку до рівнянь вищих порядків. Не зупиняючись детально на теорії (див. [26]), сформулюємо необхідні твердження і розглянемо приклади.

Нехай маємо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \tag{102}$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — сталі дійсні числа.

Характеристичним для рівняння (102) називається алгебраїчне рівняння n-го степеня виду

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0, \tag{103}$$

де k — невідоме дійсне чи комплексне число.

Як відомо (гл. 7, п. 1.5), рівняння (103) має n коренів. Позначимо ці корені через $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Теорема. Кожному простому кореню k рівняння (103) *відповідає частинний розв'язок e^{kx} рівняння* (102), *а кожному кореню k кратності $m > 1$ відповідає m частинних розв'язків виду e^{kx}, xe^{kx}, ..., $x^{m-1}e^{kx}$.*

Кожній парі $\alpha \pm \beta i$ простих комплексно-спряжених коренів рівняння (103) *відповідає два частинних розв'язки $e^{\alpha x} \sin \beta x$ та $e^{\alpha x} \cos \beta x$ рівняння* (102), *а кожній парі $\alpha \pm \beta i$ комплексно-спряжених коренів кратності $p > 1$ відповідає $2p$ частинних розв'язків виду*

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad xe^{\alpha x} \sin \beta x, \ \dots\ , x^{p-1}e^{\alpha x} \sin \beta x;$$

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad xe^{\alpha x} \cos \beta x, \ \dots\ , x^{p-1}e^{\alpha x} \cos \beta x.$$

Загальна сума кратностей всіх коренів рівняння (103) дорівнює n, тому кількість всіх частинних розв'язків рівняння (102), складених згідно з цією теоремою, дорівнює n, тобто збігається з порядком рівняння (102). Позначимо ці частинні розв'язки через $y_1, y_2, \dots, y_n$. Можна показати, що знайдені частинні розв'язки є лінійно незалежними, і загальний розв'язок рівняння (102) знаходиться за формулою

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n. \tag{104}$$

Нехай тепер задано неоднорідне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{105}$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n$ — сталі дійсні числа, $f(x) \not\equiv 0$ — неперервна на деякому проміжку функція.

Як і для рівнянь другого порядку, загальним розв'язком рівняння (105) є функція

$$y = \bar{y}(x) + y^*(x),$$

де $\bar{y}(x)$ — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (102), а $y^*(x)$ — частинний розв'язок рівняння (105).

Побудову загального розв'язку $\bar{y}(x)$ рівняння (102) з'ясовано. Проаналізуємо знаходження частинного розв'язку $y^*(x)$. Якщо права частина $f(x)$ рівняння (105) є функцією спеціального виду (98), то частинний розв'язок цього рівняння треба шукати за формулою (99). Якщо права частина $f(x)$ не є функцією виду (98), то для знаходження $y^*(x)$ застосовують метод варіації довільних сталих. Стосовно рівняння (105) суть цього методу така.

Нехай функція (104) є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння (102). Знаходимо частинний розв'язок рівняння (105) за тією ж формулою (104), вважаючи, що величини $C_1, C_2, \dots, C_n$ — функції від x, тобто покладемо

$$y^*(x) = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \cdots + C_n(x) y_n, \tag{106}$$

де $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ — невідомі функції.

Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \cdots + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \cdots + C_n'y_n' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо похідні $C_i'(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а потім інтегруванням і самі функції $C_i(x)$. Якщо взяти всі сталі інтегрування рівними нулю і підставити функції $C_i(x)$ в рівність (106), то матимемо частинний розв'язок рівняння (105); якщо у рівність (106) підставити функції $C_i(x) + \overline{C}_i$, де $\overline{C}_i$ — довільні сталі, то зразу дістанемо загальний розв'язок.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $y^{(5)} + 4y^{(3)} = 0$.

○ Характеристичне рівняння $k^5 + 4k^3 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $k_4 = 2i$, $k_5 = -2i$. Згідно з теоремою маємо частинні розв'язки: $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, $y_4 = \cos 2x$, $y_5 = \sin 2x$. Загальний розв'язок даного рівняння знаходимо за формулою (104):

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x. \bullet$$

2. Знайти розв'язок рівняння $y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x)$, який задовольняє початкові умови $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -1$.

○ Маємо неоднорідне лінійне рівняння третього порядку. Характеристичне рівняння $k^3 - 2k^2 + k = 0$ має корені $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $\bar{y} = C_1 + (C_2 + C_3x)e^x$. Правою частиною даного рівняння є функція виду (100), де $A = B = 4$, $\beta = 1$. Оскільки число $1 \cdot i = i$ не є коренем характеристичного рівняння ($r = 0$), то окремий розв'язок шукаємо у вигляді (101):

$$y^* = a \cos x + b \sin x,$$

де a, b — невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ і підставивши їх у дане рівняння, після спрощень дістанемо

$$2a \cos x + 2b \sin x = 4 \cos x + 4 \sin x,$$

звідки $a = b = 2$, тому $y^* = 2\cos x + 2\sin x$ — частинний розв'язок неоднорідного рівняння, а

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + (C_2 + C_3x)e^x + 2(\sin x + \cos x)$$

— загальний розв'язок. Продиференціювавши його двічі, знайдемо

$$y' = (C_2 + C_3(1 + x))e^x + 2(-\sin x + \cos x);$$

$$y'' = (C_2 + C_3(2 + x))e^x - 2(\cos x + \sin x).$$

Скориставшись початковими умовами $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -1$, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 2 = 2, \\ C_2 + C_3 + 2 = 2, \\ C_2 + 2C_3 - 2 = -1, \end{cases}$$

звідки $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, $C_3 = 1$. Отже, шуканий розв'язок має вигляд

$$y = 1 + (x - 1)e^x + 2(\cos x + \sin x). \quad \bullet$$

3. *Задача про биття вала.* Для швидкого обертання тонкого і довгого вала характерне, як показує досвід, таке явище: при збільшенні кутової швидкості ω вона досягає такого значення $\omega = \omega_1$, при якому вал не зберігає прямолінійної форми, а починає, як кажуть, бити; якщо і далі збільшувати швидкість $\omega > \omega_1$, то биття спочатку припиняється, а потім знову виникає при $\omega = \omega_2 > \omega_1$ тощо. Швидкості ω_1, ω_2, ... називають критичними швидкостями обертання вала. Обчислити ці швидкості.

○ Відомо [7], що величина y прогину вала, закріпленого в точках $x = 0$ і $x = l$, задовольняє рівняння

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{P\omega^2}{g}y,$$

де E — коефіцієнт пружності; I — момент інерції поперечного перерізу вала; P — вага одиниці довжини вала і g — прискорення сили тяжіння.

Поклавши

$$q = \sqrt[4]{\frac{P\omega^2}{gEI}},$$

дістанемо рівняння

$$y^{\mathrm{IV}} - q^4y = 0.$$

Його характеристичне рівняння $k^4 - q^4 = 0$ має корені $\pm q$, $\pm qi$, тому загальний розв'язок даного диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1e^{qx} + C_2e^{-qx} + C_3\cos qx + C_4\sin qx.$$

На кінцях вал закріплено, тому маємо початкові умови

$$y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0,$$

які приводять до системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0; \\ C_1 + C_2 - C_3 = 0; \\ C_1e^{ql} + C_2e^{-ql} + C_3\cos ql + C_4\sin ql = 0; \\ C_1e^{ql} + C_2e^{-ql} - C_3\cos ql - C_4\sin ql = 0. \end{cases}$$

Розв'язок $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ цієї системи відповідає випадку, коли вал зберігає прямолінійну форму: $y = 0$.

Знайдемо тепер ті значення q, для яких система рівнянь має ненульові розв'язки. З перших двох рівнянь маємо $C_1 = -C_2$, $C_3 = 0$. Підставляючи ці значення в останні два рівняння, дістаємо $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $C_4 \sin ql = 0$. Оскільки $C_4 \neq 0$, то $\sin ql = 0$, звідки

$$q = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in N.$$

Скориставшись значенням q, знайдемо шукані критичні швидкості:

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{P}}, \quad n \in N. \bullet$$

Завдання для самоконтролю

1. Що називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами?

2. Яке рівняння називається характеристичним? Як його знаходять?

3. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння: дійсні і різні? рівні? комплексні?

4. У чому полягає метод підбору частинного розв'язку диференціального рівняння з правою частиною виду

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\sin\beta x + R_m(x)\cos\beta x),$$

де $P_n(x)$, $R_m(x)$ — многочлени; α, β — дійсні числа?

Розглянути випадки і навести приклади, якщо:

а) $f(x) = Ae^{\alpha x}$; б) $f(x) = A\sin\beta x + B\cos\beta x$; в) $f(x) = P_n(x)$; г) $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$; д) $f(x) = P_n(x)\sin\beta x + R_m(x)\cos\beta x$; е) $f(x) = e^{\alpha x}(A\sin\beta x + B\cos\beta x)$.

5. Для яких диференціальних рівнянь застосовний метод підбору?

6. Як знаходиться загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння n-го порядку із сталими коефіцієнтами?

7. Як знайти частинний і загальний розв'язки неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку із сталими коефіцієнтами?

8. Знайти загальні розв'язки однорідних рівнянь:

а) $y'' - 7y' + 6y = 0$; б) $y'' + 4y' + 29y = 0$; в) $y'' + 2y' + y = 0$; г) $y^{IV} - 13y'' + 36y = y$; д) $y^{V} + 9y''' = 0$.

9. Знайти загальні розв'язки неоднорідних рівнянь:

а) $y'' - 2y' + y = x^3$; б) $y'' + y = \sin x - 2e^{-x}$; в) $y'' + 4y = x\sin 2x$; г) $y'' - 2y = \frac{2}{x^3}(x^2 - 1)$; д) $y^{IV} + y'' = x^2 + x$.

10. Знайти частинні розв'язки рівнянь, які задовольняють задані початкові умови:

а) $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; б) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 9$; в) $y''' + y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$; г) $y''' - y' = -3x^2 + 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$.

Відповіді. 8. а) $y = C_1e^x + C_2e^{6x}$; б) $y = e^{-2x}(C_1\sin 5x + C_2\cos 5x)$; в) $y = e^{-x}(C_1 + C_2x)$; г) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$; д) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\sin 3x + C_5\cos 3x$. 9. а) $y = (C_1 + C_2x)e^x + x^3 + 6x^2 + 18x + 24$; б) $y = C_1\cos x + C_2\sin x - e^{-x} - \frac{x}{2}\cos x$; в) $y = \left(C_1 - \frac{x^2}{8}\right)\cos 2x + \left(C_2 + \frac{x}{16}\right)\sin 2x$; г) $y = C_1e^{\sqrt{2}x} + C_2e^{-\sqrt{2}x} - \frac{1}{x}$; д) $y = C_1 + C_2x + C_3\cos x + C_4\sin x - x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12}$. 10. а) $y = xe^{5x}$; б) $y = \frac{1}{8}(e^x + 22e^{3x} + e^{5x})$; в) $y = 1 + \cos x$; г) $y = e^x + x^3$.

§ 5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку широко використовують при вивченні явищ, пов'язаних з різноманітними коливаннями.

Нехай у деякому середовищі вздовж осі Ox рухається матеріальна точка масою m. Припустимо, що на цю точку діють такі сили: сила $f_1 = -ax$ ($a > 0$ — коефіцієнт відновлення), яка намагається повернути точку до початку координат; сила опору середовища $f_2 = -bx$ ($b > 0$ — коефіцієнт опору); зовнішня сила $f_3 = f(x)$, напрям якої збігається з напрямом осі Ox.

Задача полягає в тому, щоб знайти закон $x = x(t)$, за яким рухається точка. Скориставшись другим законом Ньютона, запишемо диференціальне рівняння руху

$$mx'' = -bx' - ax + f(t)$$

або

$$x'' + 2hx' + \omega^2 x = \varphi(t), \tag{107}$$

де

$$2h = \frac{b}{m}, \quad \omega^2 = \frac{a}{m}, \quad \varphi(t) = \frac{f(t)}{m}.$$

Якщо $\varphi(t) \not\equiv 0$, то диференціальне рівняння (107) називають *рівнянням вимушених коливань*, а при $\varphi(t) \equiv 0$ — *рівнянням вільних коливань*.

Зауважимо, що рівняння виду (107) описують механічні коливання вантажу на пружній ресорі (коливання залізничних вагонів, автомобілів тощо), малі коливання математичного чи фізичного маятника, вертикальні та бортові коливання корабля, електричні, звукові та багато інших коливань.

5.1. Вільні гармонічні коливання

Розглянемо рівняння вільних коливань

$$x'' + 2hx' + \omega^2 x = 0 \tag{108}$$

Це однорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння $k^2 + 2hk + \omega^2 = 0$ має два корені: $k_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega^2}$. Можливі три випадки.

1°. *Коефіцієнт опору більший за коефіцієнт відновлення:* $h > \omega$, тоді загальний розв'язок рівняння (108) має вигляд

$$x = C_1 e^{-(h-\sqrt{h^2-\omega^2})t} + C_2 e^{-(h+\sqrt{h^2-\omega^2})t}.$$

Графік його за певних початкових умов показано на рис. 8.12, з якого видно, що ніяких коливань не відбувається, $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, тобто матеріальна точка прямує до рівноваги. Такий рух називають аперіодичним затухаючим рухом.

Пояснити це можна тим, що вплив сили опору, яка гальмує рух, настільки переважає вплив сили відновлення, яка викликає рух, що рух затухає раніше, ніж матеріальна точка перейде положення рівноваги.

2^0. *Коефіцієнт опору дорівнює коефіцієнту відновлення:* $h = \omega$, тоді загальний розв'язок рівняння (108) має вигляд (рис. 8.13)

$$x = e^{-ht}(C_1 + C_2 t).$$

Такий рух також називається аперіодичним. Він не відрізняється від попереднього в тому розумінні, що $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

3^0. *Коефіцієнт опору менший від коефіцієнта відновлення:* $h < \omega$, тоді загальний розв'язок рівняння (108) має вигляд

$$x = e^{-ht}(C_1 \sin \sqrt{\omega^2 - h^2}\, t + C_2 \cos \sqrt{\omega^2 - h^2}\, t). \qquad (109)$$

Поклавши

$$C_1 = A\cos\varphi_0, \quad C_2 = A\sin\varphi_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\omega^2 - h^2},$$

перетворимо розв'язок (109) до вигляду

$$x = Ae^{-ht}\sin(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (110)$$

Тепер уже точка справді здійснює коливання — так звані затухаючі гармонічні коливання. Величина A називається початковою амплітудою, $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - h^2}$ — частотою, $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ — періодом, а φ_0 — початковою фазою затухаючих гармонічних коливань.

Якщо коефіцієнт опору $h = 0$, то

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (111)$$

тобто матеріальна точка виконує звичайні гармонічні коливання.

У випадку, коли $h \neq 0$, амплітуда коливань дорівнює Ae^{-ht} і, на відміну від звичайних гармонічних коливань, не є сталою величиною: $Ae^{-ht} \to 0$ при $t \to +\infty$. Отже, точка прямує до рівноваги, але не монотонно, як в попередніх випадках, а коливаючись навколо положення рівноваги з поступово затухаючими амплітудами.

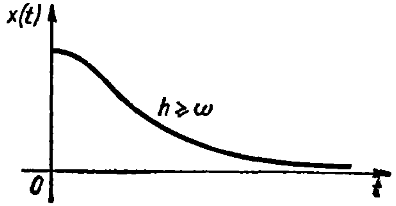


Рис. 8.12

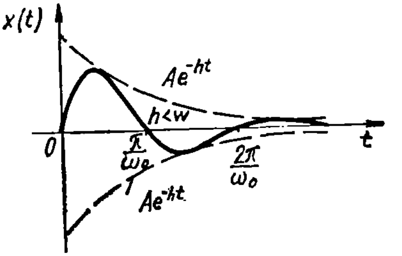


Рис. 8.13

Схематичний графік затухаючого гармонічного коливання (при $\varphi_0 = 0$) зображено на рис. 8.13.

Значення сталих C_1 і C_2 у формулі (109) або A і φ_0 у формулі (110) визначаються з початкових умов — початкового відхилення точки і її швидкості.

5.2. Вимушені коливання. Резонанс

Нехай в рівнянні (107) зовнішня сила $\varphi(t) \neq 0$, тоді рух точки описуватиметься лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами. Загальний розв'язок цього рівняння в квадратурах можна знайти методом варіації довільних сталих.

Розглянемо випадок, коли рух відбувається в середовищі без опору і на коливальну систему діє періодична зовнішня сила $\varphi(t) = H \times \times \sin \omega_1 t$, тоді рівняння (107) набирає вигляду

$$x'' + \omega^2 x = H \sin \omega_1 t. \tag{112}$$

Загальним розв'язком цього рівняння є сума загального розв'язку $\bar{x}(t)$ відповідного однорідного рівняння і якого-небудь частинного розв'язку $x^*(t)$ рівняння (112).

З формули (111) випливає, що загальний розв'язок $\bar{x}(t) = A \times \times \sin(\omega t + \varphi_0)$. Щоб знайти частинний розв'язок $x^*(t)$, розглянемо два випадки.

1^0. *Нерезонансний випадок:* припустимо, що $\omega \neq \omega_1$, тобто частота зовнішньої сили відмінна від частоти вільних коливань. Оскільки число $i\omega_1$ не збігається з коренями $\pm i\omega$ характеристичного рівняння $k^2 + \omega^2 = 0$, то згідно з формулою (101) частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$x^*(t) = a \cos \omega_1 t + b \sin \omega_1 t.$$

Знайшовши коефіцієнти a та b відомим способом (п. 4.2), дістанемо

$$x^*(t) = \frac{H}{\omega^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t,$$

тоді загальний розв'язок рівняння (112) має вигляд

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{H}{\omega^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t.$$

Таким чином, частинний розв'язок $x^*(t)$ визначає коливання точки, зумовлене зовнішньою силою, загальний розв'язок $\bar{x}(t)$ — вільні коливання, а загальний розв'язок $x(t)$ — коливальний рух, що утворюється внаслідок складання двох коливань з різними частотами ω і ω_1. У випадку, коли ω та ω_1 близькі за величиною, матеріальна точка виконує коливання з великою сталою амплітудою.

2^0. *Резонансний випадок:* нехай тепер $\omega = \omega_1$, тобто частота зовнішньої сили дорівнює частоті вільних коливань. Оскільки $i\omega_1$ збігається з коренем $i\omega$ характеристичного рівняння, частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$x^*(t) = t(a\cos\omega t + b\sin\omega t).$$

Знаходячи коефіцієнти a та b, дістанемо розв'язок $x^*(t) = -\frac{Ht}{2\omega} \times \cos\omega t$, тому загальний розв'язок рівняння (112) має вигляд

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0) - \frac{Ht}{2\omega}\cos\omega t.$$

З цієї формули випливає, що, як і в попередньому випадку, маємо коливальний рух, який утворюється внаслідок складання двох коливань, але з однаковими частотами. Другий доданок загального розв'язку показує, що амплітуда коливань необмежено зростає при необмеженому зростанні часу t, тобто матеріальна точка через деякий час виконуватиме коливання з дуже великою амплітудою, навіть якщо амплітуда H зовнішньої сили зовсім мала. Це явище називається резонансом. Отже, резонанс при коливальному русі настає у тому випадку, коли частота вільних коливань збігається з частотою зовнішньої сили. Резонанс відіграє важливу роль у техніці і фізиці. Кожне пружне тіло (наприклад, будь-яка споруда) має свою певну власну частоту коливань, яка залежить лише від властивостей тіла. Уявімо, що це тіло під дією зовнішньої сили виводиться із стану рівноваги. Якщо настає явище резонансу, то дія сили, яка б мала вона не була, може призвести до руйнування коливальної системи. Тому при проектуванні різноманітних споруд (будівель, машин, мостів, літаків, кораблів тощо) особливу увагу звертають на розрахунки міцності споруди, пов'язані з резонансом. Резонансом пояснюється добре відоме з досвіду явище, коли невелике «розкачування» пружного тіла (скажімо, моста) викликає його руйнування.

Завдання для самоконтролю

1. Нехай математичний маятник довжиною l і вагою $P = mg$, відхилений від вертикального положення на кут φ, вільно коливається в середовищі без опору. Довести, що для малих кутів φ диференціальне рівняння руху маятника має вигляд

$$lm\frac{d^2\varphi}{dt^2} + mg\varphi = 0.$$

2. Електричне коло складається з генератора змінної електрорушійної сили $E(t)$, резистора з опором R катушки індуктивності з самоіндукцією L і конденсатора з ємністю C. Довести, що диференціальне рівняння коливання заряду q на конденсаторі має вигляд

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{E(t)}{L}.$$

3. Коливання корабля навколо поздовжньої осі називається бортовою качкою. Рівняння малих коливань має вигляд

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + Pa\varphi = 0,$$

де I — момент інерції; P — вага корабля; a — відстань від поздовжньої осі до центра судна; φ — кут відхилення корабля від горизонтального положення.

Нехай $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi'(0) = 0$. Довести, що амплітуда коливань корабля дорівнює φ_0.

4. Нехай коливання точки в середовищі з опором описується рівнянням

$$x'' + 2hx' + \omega^2 x = \sin t.$$

Довести, що закон руху має вигляд

$$x = \frac{1}{\sqrt{4h^2 + (\omega^2 - 1)^2}}\sin\left(t - \frac{2h}{\omega^2 - 1}\right).$$

§ 6. СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У багатьох науково-технічних задачах буває потрібно знайти не одну, а зразу кілька невідомих функцій, які пов'язані між собою кількома диференціальними рівняннями. Сукупність таких рівнянь утворює систему диференціальних рівнянь.

Приклади

1. Нехай матеріальна точка маси m має криволінійну траєкторію руху в просторі. Потрібно визначити закон руху точки, тобто залежність координат x, y, z від часу t, коли на неї діє сила $\vec{F}$.

Коли

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (x;\ y;\ z)$$

—радіус-вектор рухомої точки, то її швидкість і прискорення знаходяться за формулами (гл. 5, п. 7.5):

$$\vec{v} = \vec{r}'(t) = (x';\ y';\ z'),\quad \vec{w} = \vec{r}''(t) = (x'';\ y'';\ z'').$$

Сила $\vec{F}$, під дією якої рухається точка, взагалі кажучи, є функцією часу, координат точки і проекцій швидкості на осі координат: $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{r}')$. Тому згідно з другим законом Ньютона диференціальне рівняння руху точки має вигляд

$$m\vec{r}'' = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{r}').$$

Це векторне рівняння еквівалентне системі трьох скалярних рівнянь:

$$\begin{cases} mx'' = F_x(t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z'), \\ my'' = F_y(t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z'), \\ mz'' = F_z(t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z'). \end{cases}$$

Наведені диференціальні рівняння утворюють систему трьох диференціальних рівнянь другого порядку відносно трьох невідомих функцій $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

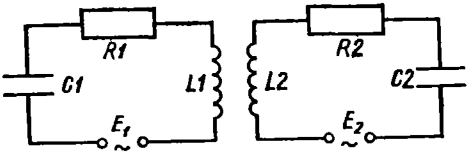


Рис. 8.14

2. Розглянемо два електричних контури. Припустимо, що ці контури знаходяться в електромагнітному зв'язку: зміна струму в одному контурі індукує електрорушійну силу в другому (рис. 8.14).

З фізики відомо, що за певних умов індукована напруга в першому контурі дорівнює $-a\,\dfrac{di_2}{dt}$, а в другому $-a\,\dfrac{di_1}{dt}$, де a — коефіцієнт взаємної індуктивності, $i_1 = i_1(t)$, $i_2 = i_2(t)$ — сила струму відповідно в першому і другому контурах. Якщо в обох контурах відсутня зовнішня електрорушійна сила, то зміна струму в контурах регулюватиметься диференціальними рівняннями:

$$\begin{cases} L_1 i_1' + R_1 i_1 + \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int_0^t i_1\,dt + a i_2' = 0; \\ L_2 i_2' + R_2 i_2 + \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int_0^t i_2\,dt + a i_1' = 0, \end{cases}$$

або, після диференціювання по t,

$$\begin{cases} L_1 i_1'' + R_1 i_1' + \dfrac{1}{C_1}\, i_1 + a i_2'' = 0; \\ L_2 i_2'' + R_2 i_2' + \dfrac{1}{C_2}\, i_2 + a i_1'' = 0. \end{cases}$$

Дістали систему лінійних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами відносно двох невідомих функцій $i_1(t)$ та $i_2(t)$.

Розглянемо деякі найпростіші системи диференціальних рівнянь. У цьому параграфі незалежну змінну позначатимемо буквою t, а невідомі функції — через $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, або (якщо їх не більше трьох) через $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

6.1. Нормальні системи рівнянь

Нормальною системою диференціальних рівнянь називається система виду

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \qquad (113)$$

або

$$x_k' = f_k(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Іншими словами, якщо в лівій частині рівнянь системи (80) стоять похідні першого порядку, а праві частини рівнянь зовсім не містять похідних, то така система називається нормальною. Розв'язком системи (113) називається сукупність функцій $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, які задовольняють кожному з рівнянь цієї системи.

Важливість вивчення саме нормальної системи випливає з того, що до неї в багатьох випадках зводяться системи і рівняння вищих порядків. Наприклад, система другого порядку

$$\begin{cases} x'' = 2x' + y' - x + y; \\ y'' = y' + x \end{cases}$$

введенням нових змінних $x' = u,\ y' = v,\ x'' = u',\ y'' = v'$ зводиться до нормальної системи

$$\begin{cases} x' = u; \\ y' = v; \\ u' = 2u + v - x + y; \\ v' = v + x. \end{cases}$$

Таким самим способом — введенням нових змінних — всяке диференціальне рівняння n-го порядку, розв'язане відносно старшої похідної, зводиться до еквівалентної нормальної системи n рівнянь першого порядку.

Справді, нехай задано рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} = f(t,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}).$$

Покладемо

$$y = x_1,\ y' = x_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)} = x_n,$$

тоді

$$y' = x_1' = x_2,\ y'' = x_2' = x_3,\ \ldots,\ y^{(n-1)} = x_{n-1}' = x_n,\ y^{(n)} = x_n'.$$

Дістали нормальну систему

$$x_i' = x_{i+1}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;\ x_n' = f(t,\ x_1,\ x_2 \ldots,\ x_n),$$

еквівалентну заданому рівнянню.

Покажемо, що можливий і зворотний перехід: нормальну систему рівнянь можна замінити одним рівнянням, порядок якого дорівнює числу рівнянь системи. Нехай задана нормальна система (113). Продиференціюємо по t будь-яке, наприклад, перше рівняння:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

Підставивши в цю рівність значення похідних $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ з системи (113), дістанемо

$$x_1'' = F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Аналогічно знаходимо похідні до n-го порядку включно:

$$x_1''' = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = F_3(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

. . . .

$$x_1^{(n)} = F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_1'' = F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(n)} = F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{114}$$

Якщо з перших $n - 1$ рівнянь системи (114) знайти (коли це можливо) змінні

$$\begin{aligned} x_2 &= \varphi_2(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}), \\ x_3 &= \varphi_3(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \varphi_n(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}) \end{aligned} \tag{115}$$

і підставити їхні значення в останнє рівняння, то одержимо рівняння n-го порядку відносно змінної x_1:

$$x_1^{(n)} = \Phi(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}). \tag{116}$$

Нехай

$$x_1 = \psi_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) \tag{117}$$

(де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — довільні сталі) — розв'язок рівняння (116). Продиференціювавши його $n - 1$ разів і підставивши значення похідних $x_1', x_1'', \ldots, x_1^{(n-1)}$ в рівняння (115), дістанемо

$$\begin{cases} x_2 = \psi_2(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ x_3 = \psi_3(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{cases} \tag{118}$$

Можна довести, що сукупність функцій (117), (118) буде загальним розв'язком системи (114).

Для нормальної системи (114) справджується теорема Коші про існування і єдиність розв'язку: *якщо в деякій області G функції $f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, системи (114) неперервні разом з усіма своїми похідними $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, то для будь-якої точки $(t_0, x_{10}, \ldots \ldots, x_{n0}) \in G$* існує єдиний розв'язок $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, який задовольняє початкові умови:

$$x_1(t_0) = x_{10},\ x_2(t_0) = x_{20},\ \ldots,\ x_n(t_0) = x_{n0}.$$

Для інтегрування системи (114) можна застосувати метод, за допомогою якого ця система була зведена до рівняння (116). Цей метод називають *методом виключення змінної*.

Приклади

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

○ Продиференціюємо перше рівняння:

$$x'' = -7x' + y'.$$

Підставимо в це рівняння значення похідної y' із другого рівняння системи:

$$x'' = -7x' + (-2x - 5y).$$

Знайшовши з першого рівняння значення $y = x' + 7x$ і підставивши його в знайдене рівняння, дістанемо

$$x'' + 12x' + 37x = 0.$$

Маємо лінійне однорідне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Інтегруючи його, одержуємо

$$x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Оскільки $y = x' + 7x$, то

$$y = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) +$$
$$+ 7e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) = e^{-6t}((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t).$$

Отже, загальний розв'язок даної системи має вигляд

$$x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t),$$
$$y = e^{-6t}((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t). \quad ●$$

6.2. Системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Нехай задана нормальна система лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами. Для зручності обмежимося трьома рівняннями

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + a_2y + a_3z; \\ \frac{dy}{dt} = b_1x + b_2y + b_3z; \\ \frac{dz}{dt} = c_1x + c_2y + c_3z, \end{cases} \tag{119}$$

де a_i, b_i, c_i — сталі. Цю систему методом виключення змінних завжди можна звести до одного лінійного одиорідного рівняння третього порядку із сталими коефіцієнтами. Розглянемо ще один метод розв'язування системи (119).

Шукатимемо окремі розв'язки системи у вигляді

$$x = \alpha e^{kt} \quad y = \beta e^{kt}, \; z = \gamma e^{kt}, \tag{120}$$

де α, β, γ, k — невизначені сталі, які треба знайти.

Підставивши функції (120) в систему (119) і скоротивши на множник $e^{kt} \neq 0$, дістанемо

$$\begin{cases} k\alpha = a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma; \\ k\beta = b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma; \\ k\gamma = c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (a_1 - k)\alpha + a_2\beta + a_3\gamma = 0; \\ b_1\alpha + (b_2 - k)\beta + b_3\gamma = 0; \\ c_1\alpha + c_2\beta + (c_3 - k)\gamma = 0. \end{cases} \tag{121}$$

Дістали алгебраїчну однорідну систему лінійних рівнянь. Щоб ця система мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб визначник системи дорівнював нулю (гл. 1, п. 3.5):

$$\begin{vmatrix} a_1 - k & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - k & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - k \end{vmatrix} = 0. \tag{122}$$

Розкривши визначник, дістанемо алгебраїчне рівняння третього степеня відносно k, яке називається характеристичним рівнянням системи (119).

Розглянемо випадок, коли рівняння (122) має три дійсні різні корені k_1, k_2, k_3. Для кожного з цих коренів запишемо систему (121) і визначимо невідомі α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3.

Можна довести, що загальний розв'язок системи (119) має вигляд

$$\begin{cases} x = C_1\alpha_1 e^{k_1t} + C_2\alpha_2 e^{k_2t} + C_3\alpha_3 e^{k_3t}; \\ y = C_1\beta_1 e^{k_1t} + C_2\beta_2 e^{k_2t} + C_3\beta_3 e^{k_3t}; \\ z = C_1\gamma_1 e^{k_1t} + C_2\gamma_2 e^{k_2t} + C_3\gamma_3 e^{k_3t}. \end{cases} \tag{123}$$

Випадки, коли рівняння (122) має кратні або комплексні корені, складніші, і ми їх не розглядатимемо. У зв'язку з цим зауважимо, що характеристичне рівняння (122) системи (119) збігається з характеристичним рівнянням диференціального рівняння третього порядку, до якого зводиться система (119). Таким чином, якщо відомі корені рівняння (122), то завжди можна знайти загальний розв'язок рівняння третього порядку, до якого зводиться система (119), а потім і загальний розв'язок самої системи (119).

Отже, незалежно від структури коренів характеристичного рівняння, систему (119) завжди можна розв'язати, якщо тільки відомі ці корені.

Завдання для самоконтролю

1. Що називається нормальною системою диференціальних рівнянь?
2. У чому полягає метод виключення змінних?
3. Що називається характеристичним рівнянням нормальної системи лінійних рівнянь із сталими коефіцієнтами?
4. Розв'язати системи:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y; \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \sin t; \\ \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z; \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$

Відповідь. 4. а) $x = \cos t - \sin t$, $y = \cos t$; б) $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$, $y = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{-3t} + \cos t$; в) $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$, $y = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}$, $z = -(C_1 + C_3) e^{-t} + C_2 e^{2t}$.

Глава 9
РЯДИ

Ряди досить широко використовуються в математиці, особливо при дослідженні різноманітних технічних проблем, пов'язаних з наближеним інтегруванням диференціальних рівнянь, обчисленням значень функцій та інтегралів, розв'язуванням трансцендентних та алгебраїчних рівнянь тощо.

Найпростіший ряд — суму членів нескінченної геометричної прогресії — вперше ввели вчені Стародавньої Греції, зокрема Архімед застосував такий ряд до обчислення площі параболічного сегмента.

Систематично рядами почали користуватись, починаючи з 17 ст., проте теорія рядів була створена лише в 19 ст. на основі поняття границі в роботах К. Гаусса, О. Коші та багатьох інших учених.

§ 1. ЧИСЛОВІ РЯДИ

1.1. Основні поняття та означення. Геометрична прогресія. Гармонічний ряд

Нехай задано послідовність дійсних чисел

$$\{u_n\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}.$$

Рядом називають вираз

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \qquad (1)$$

Цьому виразу ми не приписуємо ніякого числа, тому що нескінченне число додавань виконати не можна. Для кожного $n \in N$ покладемо

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Число u_n називається n-м членом, а число S_n — n-ю частинною сумою ряду (1).

Якщо послідовність частинних сум $\{S_n\}$ збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то число S називається *сумою ряду* (1), а ряд називається *збіжним*. Символічно це записується так:

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Якщо послідовність $\{S_n\}$ скінченної границі не має, то ряд (1) називається *розбіжним*.

Приклади

Дослідити на збіжність ряди:

а) $1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1^n$;

б) $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$;

в) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$;

г) $a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \quad a \neq 0$;

д) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

○ а) Розгляиемо частинну суму $S_n = 1 + 1 + \ldots + 1 = n$. Оскільки $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$, то ряд а) розбіжний.

б) Випишемо послідовість частинних сум:

$$S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ S_4 = 0,\ \ldots,\ S_{2n-1} = 1,\ S_{2n} = 0.$$

Ця послідовість границі не має, тому ряд б) розбіжний.

в) Знайдемо суму

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{n(n+1)} =$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{n+1}.$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$, то ряд в) збіжний і сума його $S = 1$.

г) Це геометрична прогресія з першим членом a і знаменником q. Точніше було б сказати — ряд, складений з членів геометричної прогресії. Проте для стислості ряд г) далі називаемо геометричною прогресією. При $q \neq 1$ маємо

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} =$$

$$=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{q^n}{1-q};$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q},\ \text{якщо}\ |q|<1;\quad \lim_{n\to\infty} S_n = \infty,\ \text{якщо}\ |q|>1.$$

Отже, при $|q|<1$ ряд г) збіжний, а при $|q|>1$ — розбіжний. Якщо $q = 1$, то матимемо $a + a + \ldots + a + \ldots$; $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} an = \infty$, тобто ряд розбіжний. Якщо $q = -1$, то матимемо ряд $a - a + a - a + \ldots$; $S_n = a$ при непарному n і $S_n = 0$ при парному n, тобто $\lim_{n\to\infty} S_n$ не існує, тому ряд розбіжний.

Таким чином, геометрична прогресія збіжна при $|q| < 1$ і розбіжна при $|q| \geqslant 1$.

д) Цей ряд називається *гармонічним*. Покажемо, що він розбіжний.

Відомо (гл. 4, п. 4.2), що $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$, $n \in N$, звідси

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1;\quad \frac{1}{n}>\ln\frac{n+1}{n};\quad \frac{1}{n}>\ln(n+1)-\ln n,$$

тобто,

$$1>\ln 2-\ln 1;$$

$$\frac{1}{2}>\ln 3-\ln 2;$$

$$\frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n.$$

Додаючи почленно ліві і праві частини нерівностей, дістанемо $S_n > \ln(n+1)$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Отже, гармонічний ряд розбіжний. ●

1.2. Найпростіші властивості числових рядів

Розглянемо деякі властивості збіжних рядів.

1°. *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *збіжний і має суму* S, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Cu_n$ *також збіжний і сума його дорівнює* CS ($C = \text{const}$). *Іншими словами, збіжний ряд можна множити почленно на одне і те саме число.*

○ Нехай $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$,

$$\sigma_n = Cu_1 + Cu_2 + \cdots + Cu_n = C\sum_{k=1}^{n} u_k = CS_n$$

— частинні суми даних рядів. За умовою $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, тому $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} CS_n = CS$. Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Cu_n$ збіжний і сума його дорівнює CS. ●

2°. *Збіжні ряди можна почленно додавати та віднімати, тобто якщо ряди* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *збіжні і мають суми відповідно* S *та* σ, *то збіжними є також ряди* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ *і суми їх дорівнюють* $S \pm \sigma$.

○ Нехай

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} v_k, \quad \overline{S}_n = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k)$$

— частинні суми відповідних рядів.

Оскільки $\overline{S}_n = S_n \pm \sigma_n$ і за умовою $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n \pm \sigma_n) = S \pm \sigma$. ●

3°. *На збіжність ряду не впливає відкидання або приєднання до нього скінченної кількості членів.*

○ Нехай S_n — частинна сума ряду (1), C_m — сума m відкинутих членів (число членів n взяте таким великим, що всі відкинуті члени містяться в S_n), σ_{n-m} — сума членів ряду, які містяться в S_n і не містяться в C_m, тоді $S_n = C_m + \sigma_{n-m}$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = C_m + \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n-m}$. Згідно із знайденою рівністю, границі в лівій і правій частинах одночасно існують або не існують, тобто ряд (1) збіжний (розбіжний) тоді і тільки тоді, коли збіжний (розбіжний) ряд без m його членів. ●

Розглянемо ряд (1) і покладемо

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

Величину r_n називають n-м залишком ряду (1), її можна розглядати як суму ряду, який утворюється з ряду (1) після відкидання перших n його членів.

Якщо ряд збіжний і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то $r_n = S - S_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Справедливе і більш загальне твердження.

4°. *Ряд (1) збіжний (розбіжний) тоді і тільки тоді, коли збіжний (розбіжний) довільний його залишок.*

Ця властивість є наслідком властивості 3°

5°. *(Необхідна умова збіжності ряду.) Якщо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *збіжний, то* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

○ Нехай S — сума заданого ряду, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, де $S_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} u_k$. Проте $u_n = S_n - S_{n-1}$, тому $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. ●

Умова $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ є тільки необхідною для збіжності ряду, але не достатньою. Це означає, що існують розбіжні ряди, для яких ця умова виконується.

6°. *(Достатня умова розбіжності ряду.) Якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *розбіжний.*

Дійсно, якби даний ряд був збіжний, то за властивістю 5° його загальний член прямував би до нуля при $n \to \infty$, що суперечить умові.

Приклади

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

○ а) Тут виконується необхідна умова збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

проте ряд розбіжний. Дійсно,

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{n}} = n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

тобто $S_n > \sqrt{n}$, звідки $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Отже, ряд а) розбіжний.

б) Тут виконується достатня умова розбіжності:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2 \neq 0,$$

тому ряд б) розбіжний.

в) Ряд збіжний як геометрична прогресія із знаменником $q = \frac{1}{2}$.

Таким чином, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ніякого висновку про збіжність чи розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ зробити не можна.

Потрібне додаткове дослідження, яке виконується за допомогою достатніх умов збіжності ряду. Якщо ж $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд розбіжний.

1.3. Знакододатні ряди. Достатні ознаки збіжності

При дослідженні на збіжність знакододатних рядів, тобто рядів з невід'ємними членами, найчастіше користуються такими достатніми умовами (ознаками) збіжності, як ознаки порівняння, ознаки Д'Аламбера і Коші та інтегральна ознака Коші.

Теорема 1 *(ознаки порівняння). Нехай задано два ряди з невід'ємними членами*

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \quad u_n \geqslant 0, \tag{2}$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots, \quad v_n \geqslant 0, \tag{3}$$

і для всіх n виконується нерівність

$$u_n \leqslant v_n. \tag{4}$$

Тоді, якщо ряд (3) збіжний, то збіжний і ряд (2). Якщо ряд (2) розбіжний, то розбіжний і ряд (3).

○ Нехай ряд (3) збіжний і

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$$

— частинні суми рядів (2) і (3).

Оскільки ряд (3) збіжний, то існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ його частинних сум. Члени ряду (3) невід'ємні, тому $\sigma_n \leqslant \sigma$. Але тоді з нерівності (4) випливає, що $S_n \leqslant \sigma_n \leqslant \sigma$, тобто послідовність $\{S_n\}$ частинних сум ряду (2) обмежена зверху. Крім того, члени ряду (2) невід'ємні, тому частинні суми не спадають. Тоді за теоремою 4 (гл. 4, п. 3.7) послідовність $\{S_n\}$ має границю, тобто ряд (2) збіжний. Якщо ж ряд (2) розбіжний, то ряд (3) також розбіжний, бо коли б ряд (3) був збіжний, то за тільки що доведеним ряд (2) теж був би збіжним, а це суперечить умові. ●

Зауваження 1. Ознаки порівняння можна застосовувати і тоді, коли нерівність (4) виконується не для всіх членів рядів (2) і (3), а починаючи з деякого номера N. Це випливає з властивості 3°.

Зауваження 2. При дослідженні рядів за допомогою ознак порівняння необхідно знати, які ряди збіжні і які розбіжні.

Для порівняння часто користуються рядами:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} \text{збіжний при } |q| < 1, \\ \text{розбіжний при } |q| \geqslant 1; \end{cases}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{збіжний при } \alpha > 1, \\ \text{розбіжний при } \alpha \leqslant 1. \end{cases}$

Перший з цих рядів, як відомо, називається геометричною прогресією. Другий з рядів називається *рядом Діріхле, або узагальненим гармонічним рядом.* Його ми дослідимо пізніше. Зокрема, при $\alpha = 1$ дістанемо гармонічний ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

який, як відомо, розбіжний.

Приклад

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot 3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln (n+1)}$.

○ Застосовуємо ознаки порівняння.

а) Оскільки $\dfrac{1}{n \cdot 3^n} \leqslant \dfrac{1}{3^n}$, $n = 1, 2, \ldots$, і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}$ збіжний як геометрична прогресія із знаменником $q = \dfrac{1}{3} < 1$, то ряд а) теж збіжний.

б) Оскільки $\dfrac{1}{\ln (n+1)} > \dfrac{1}{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ і ряд $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n+1} + \cdots$ розбіжний як гармонічний, то ряд б) також розбіжний. ●

Теорема 2 (гранична ознака порівняння). Якщо задано два ряди з додатними членами

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{5}$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots, \tag{6}$$

причому існує скінченна, відмінна від нуля границя

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = a \,(a \neq 0,\ a \neq \infty),$$

то ряди або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

○ Нехай $\lim \frac{u_n}{v_n} = a \neq 0$, тоді для довільного $\varepsilon > 0$ (візьмемо $\varepsilon < a$) знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $\left| \frac{u_n}{v_n} - a \right| < \varepsilon$, звідки

$$(a - \varepsilon)\, v_n < u_n < (a + \varepsilon)\, v_n. \tag{7}$$

Якщо ряд (5) збіжний, то з нерівності (7) і теореми 1 випливає, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a - \varepsilon)\, v_n$ також збіжний. Тоді, згідно з властивістю 1°, ряд (6) збіжний.

Якщо ряд (5) розбіжний, то з нерівності (7), теореми 1 і властивості 1° випливає розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a + \varepsilon)\, v_n$ і ряду (6). Аналогічно, якщо ряд (6) збіжний (розбіжний), то збіжним (розбіжним) буде і ряд (5). ●

Приклад

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3}$.

○ Застосуємо граничну ознаку порівняння.

а) Оскільки $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{3} \neq 0$ і гармонічний ряд розбіжний, то ряд а) також розбіжний.

б) Порівняємо цей ряд із збіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (це ряд вигляду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, де $\alpha = 2 > 1\Big)$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n^3}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2}{n^3}=2\neq 0.$$

Отже, даний ряд збіжний. ●

Теорема 3 *(ознака Д'Аламбера). Якщо для ряду з додатними членами*

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \qquad (8)$$

існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{n_n} = l$, *то:*

1) ряд збіжний при $l < 1$;

2) ряд розбіжний при $l > 1$.

○ 1) Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l < 1$, тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < \varepsilon,$$

або

$$l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon. \qquad (9)$$

Оскільки $l < 1$, то $\varepsilon > 0$ можна вибрати так, щоб число $q = l + \varepsilon < 1$. Тоді з правої частини нерівності (9) дістанемо

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q, \quad u_{n+1} < qu_n, \quad n > N.$$

Надаючи n значень $N + 1$, $N + 2$, ..., з останньої нерівності маємо

$$u_{N+2} < u_{N+1}q;$$
$$u_{N+3} < u_{N+2}q < u_{N+1}q^2;$$
$$u_{N+4} < u_{N+3}q < u_{N+1}q^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

тобто члени ряду

$$u_{N+2} + u_{N+3} + u_{N+4} + \cdots \qquad (10)$$

менші відповідних членів ряду

$$u_{N+1}q + u_{N+1}q^2 + u_{N+1}q^3 + \cdots .$$

Цей ряд збіжний як геометрична прогресія із знаменником q $(0 < q < 1)$, тому за ознакою порівняння ряд (10) також збіжний. Ряд (8) утворюється з ряду (10), якщо до останнього приєднати $N+1$ член u_1, u_2, ..., u_{N+1}. Тому за властивістю 3° (п. 1.2) ряд (8) збіжний.

2) Нехай $l > 1$. Візьмемо $\varepsilon > 0$ так, щоб $l - \varepsilon > 1$, тоді з лівої частини нерівності (9) випливає, що $u_{n+1} > u_n$, $n > N$, тобто члени ряду зростають із зростанням їхнього номера. Тому $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ і ряд (8) розбіжний (властивість 6°). ●

Зауваження 1. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$, то ряд (8) розбіжний, бо існує номер N такий, що $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ при $n > N$.

Зауваження 2. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, то ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. У цьому випадку ряд треба дослідити за допомогою інших ознак.

Приклад

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

○ Скористаємося ознакою Д'Аламбера:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1,$

заданий ряд збіжний.

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot 2^n}{n! \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty,$

отже, ряд розбіжний.

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{n^n (n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$
$= e > 1;$

ряд розбіжний. ●

Теорема 4 *(ознака Коші). Якщо для ряду (8) з додатними членами існує границя* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, *то цей ряд збіжний при* $l < 1$ *і розбіжний при* $l > 1$.

○ Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. Це означає, що для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$, такий, що

$$|\sqrt[n]{u_n} - l| < \varepsilon, \quad n > N,$$

або

$$l - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < l + \varepsilon, \quad n > N. \tag{11}$$

Припустимо, що $l < 1$. Виберемо число $\varepsilon > 0$ так, щоб $l + \varepsilon = q < 1$, тоді з нерівності (11) маємо

$$\sqrt[n]{u_n} < l + \varepsilon = q \text{ або } u_n < q^n, \quad n > N.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{n} q^n$ збіжний як геометрична прогресія із знаменником q $(0 < q < 1)$, то з нерівностей $u_n < q^n$ за ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} u_n$ збіжний. Тоді збіжним буде і ряд (8), який утворюється з ряду $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} u_n$ приєднанням до нього N членів: $u_1, u_2, \ldots, u_N$.

Нехай $l > 1$. Візьмемо число $\varepsilon > 0$ так, щоб число $l - \varepsilon = p > 1$, тоді з нерівності (11) випливає, що $\sqrt[n]{u_n} > l - \varepsilon = p > 1$, або $u_n > 1$, $n > N$, звідки $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Отже, ряд розбіжний (властивість 6°). ●

Приклад

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{4n}{n+1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^n \dfrac{\pi}{3n}$.

○ Застосуємо ознаку Коші.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n}{n+1} = 4 > 1$,

тобто заданий ряд розбіжний.

б) $\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sin \dfrac{\pi}{3n} = 0 < 1$,

тобто заданий ряд збіжний. ●

Теорема 5 *(інтегральна ознака Коші). Нехай задано ряд*

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f(n), \tag{12}$$

члени якого є значеннями неперервної, додатної і монотонно спадної функції $f(x)$ на проміжку $[1; +\infty)$. Тоді ряд (12) збіжний, якщо збіжний невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$, і розбіжний, якщо цей інтеграл розбіжний.

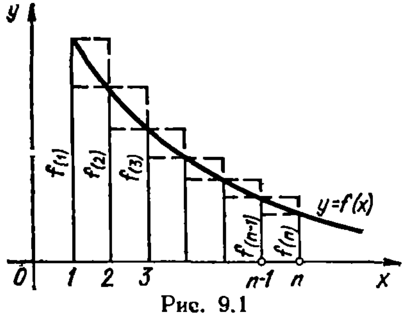


Рис. 9.1

○ Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену кривою $y = f(x)$ і прямими $x = 1$, $x = n$, $y = 0$ (рис. 9.1). Площа її дорівнює інтегралу $I_n = \int\limits_1^n f(x)\,dx$.

Впишемо в цю трапецію і опишемо навколо неї ступінчаті фігури, утворені з прямокутників, основами яких є проміжки $[1; 2]$, $[2; 3]$, ..., $[n-1; n]$, а висоти дорівнюють $f(1), f(2), \ldots, f(n-1), f(n)$, тоді

$$f(2)+f(3)+\cdots+f(n)<I_n<f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)$$

або

$$S_n-f(1)<I_n<S_n-f(n),$$

звідки

$$S_n<f(1)+I_n, \tag{13}$$

$$S_n>f(n)+I_n, \tag{14}$$

де S_n — частинна сума ряду (12).

Нехай інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ збіжний. Це означає, що існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^n f(x)\,dx = I$.
Оскільки $f(x)>0$, то послідовності $\{S_n\}$ та $\{I_n\}$ зростають із зростанням n і послідовність $\{I_n\}$ обмежена зверху своєю границею: $I_n < I$. З нерівності (13) випливає, що $S_n < f(1) + I$, тобто послідовність $\{S_n\}$ обмежена.

Таким чином, монотонно зростаюча послідовність $\{S_n\}$ обмежена зверху, а тому має границю (гл. 4, п. 3.7). Отже, ряд (12) збіжний.

Нехай тепер інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ розбіжний, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \infty$ і з нерівності (14) випливає, що ряд (12) теж розбіжний. ●

Приклад

Дослідити на збіжність ряди (див. п. 1.3):

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

○ Застосуємо інтегральну ознаку Коші.

а) Візьмемо функцію $f(x) = \frac{2x}{x^2+3}$, $x \in [1; +\infty)$, тоді матимемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+3} = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots .$$

Розглянемо невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+3} = \lim_{b\to+\infty} \ln(x^2+3)\Big|_1^b = \infty.$$

Цей інтеграл розбіжний, тому і даний ряд розбіжний.

б) Візьмемо функцію $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, $x \in [1; +\infty)$, $\alpha > 1$, тоді $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. Обчислимо невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha-1}.$$

Невласний інтеграл збіжний при $\alpha > 1$, тому заданий ряд при $\alpha > 1$ теж збіжний.

Розбіжність ряду при $\alpha < 1$ випливає з того, що в цьому разі $\frac{1}{n^{\alpha}} \geqslant \frac{1}{n}$. Гармонічний ряд розбіжний, тому за ознакою порівняння заданий ряд, при $\alpha < 1$ теж розбіжний. Таким чином, узагальнений гармонічний ряд збіжний при $\alpha > 1$ і розбіжний при $\alpha \leqslant 1$. ●

1.4. Ряди, в яких знаки членів строго чергуються. Ознака Лейбніца

У попередньому пункті ми розглянули ряди з додатними членами. Ряди з недодатними членами можна досліджувати аналогічно, оскільки від знакододатних вони відрізняються множником -1, який на збіжність ряду не впливає.

Розглянемо тепер ряд, знаки членів якого строго чергуються, тобто ряд, довільні два сусідні члени якого мають різні знаки:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots , \qquad (15)$$

де $u_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Цей ряд досліджується на збіжність за допомогою такої достатньої ознаки.

***Теорема 1** (ознака Лейбніца). Ряд (15) збіжний, якщо:*

1) $u_{n+1} < u_n, \quad n = 1, 2, \ldots;$ (16)

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$ (17)

При цьому сума ряду додатна і не перевищує першого його члена.

○ Розглянемо частинну суму з парним числом членів:

$$S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} =$$
$$= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}).$$

З умови (16) випливає, що кожна різниця в дужках додатна, тому $S_{2n} > 0$ і послідовність $\{S_{2n}\}$ зростає із зростанням n. Крім того,

$$S_{2n} = u_1 - [(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \cdots + (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}] < u_1,$$

тобто послідовність обмежена зверху.

Отже, послідовність $\{S_{2n}\}$ монотонно зростає і обмежена, тому має границю. Нехай $\lim S_{2n} = S$, тоді $S \leqslant u_1$.

Обчислимо границю сум з непарним індексом. Враховуючи умову (17), маємо

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = S + 0 = S.$$

З рівностей

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$$

випливає, що ряд (15) збіжний і сума його $S \leqslant u_1$. ●

Зазначимо, що до рядів, знаки яких строго чергуються, належить також ряд

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + \cdots + (-1)^n u_n + \cdots, \quad u_n > 0. \quad (18)$$

Якщо для такого ряду виконуються умови 1) і 2), то він збіжний, його сума S від'ємна і задовольняє нерівність $|S| \leqslant u_1$.

Таким чином, для рядів (15) і (18) ознака Лейбніца формулюється так: якщо модуль n-го члена ряду (15) чи (18) із зростанням n спадає і прямує до нуля, то ряд збіжний, причому модуль його суми не перевищує модуля першого члена.

Ряди (15) і (18), для яких виконується ознака Лейбніца, називаються рядами *лейбніцевого типу*.

Наслідок. *Абсолютна похибка від заміни суми збіжного ряду (15) його частинною сумою не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду, тобто*

$$|S - S_n| \leqslant u_{n+1}.$$

Інакше кажучи, модуль n-го залишку r_n збіжного ряду (15) не перевищує модуля $(n+1)$-го члена цього ряду, тобто

$$|r_n| \leqslant u_{n+1}.$$

Дійсно, залишок збіжного ряду (15)

$$r_n = (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \cdots$$

— це збіжний ряд, члени якого строго чергуються. За доведеним абсолютна величина його суми не перевищує абсолютної величини першого члена, тобто $|r_n| \leqslant u_{n+1}$.

Цей наслідок широко використовується при наближених обчисленнях.

Приклад

Довести, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(4n)^3} = \frac{1}{4^3} - \frac{1}{8^3} + \frac{1}{12^3} - \frac{1}{16^3} + \cdots$$

збіжний і знайти його суму з точністю до 0,001.

○ Очевидно, всі три умови ознаки Лейбніца виконуються: 1) знаки членів даного ряду строго чергуються; 2) модулі його членів монотонно спадають; 3) n-й член ряду прямує до нуля при $n \to \infty$. Отже, ряд збіжний і має певну суму S.

Для того щоб обчислити цю суму з точністю до 0,001, треба взяти стільки його членів, щоб перший з наступних членів був за модулем менший від 0,001. Тоді весь залишок ряду, починаючи з цього члена, буде менший від 0,001. У даному разі маємо

$$\frac{1}{4^3} = \frac{1}{64} > 0{,}001; \quad \frac{1}{8^3} = \frac{1}{512} > 0{,}001;$$

$$\frac{1}{12^3} = \frac{1}{1728} < 0{,}001,$$

тобто, щоб знайти суму даного ряду з точністю до 0,001, досить залишити перші два члени ряду, а решту відкинути. Таким чином,

$$S \approx S_2 = \frac{1}{4^3} - \frac{1}{8^3} = \frac{1}{64} - \frac{1}{512} \approx 0{,}015. \; \bullet$$

1.5. Знакозмінні ряди. Абсолютна і умовна збіжності

Ряд називається *знакозмінним*, якщо серед його членів є як від'ємні, так і додатні. (Зрозуміло, що розглядається випадок, коли ряд містить нескінченну кількість додатних членів і нескінченну кількість від'ємних членів.)

Розглянуті в попередньому пункті ряди, в яких знаки чергуються, є, очевидно, окремим випадком знакозмінних рядів.

Візьмемо довільний знакозмінний ряд

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{19}$$

де числа u_i можуть мати довільний знак. Одночасно розглянемо ряд, утворений з модулів ряду (19):

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots. \tag{20}$$

Для знакозмінних рядів справедлива така ознака збіжності.

Теорема. *Якщо ряд (20) збіжний, то збіжний і ряд (19).*

○ Покладемо

$$|u_n| + u_n = 2p_n, \quad |u_n| - u_n = 2q_n,$$

тоді $0 \leqslant p_n \leqslant |u_n|$, $0 \leqslant q_n \leqslant |u_n|$ для довільного $n \in N$.

За умовою ряд (20) збіжний, тому з останніх нерівностей і ознаки порівняння випливає, що ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ також збіжні. Оскільки $u_n = p_n - q_n$, то, згідно з властивістю 2^0 (п. 1.2), ряд (19) теж збіжний. ●

Ця теорема показує, що при дослідженні на збіжність знакозмінних рядів можна користуватися ознаками збіжності знакододатних рядів.

Приклад

Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{\sin \alpha}{1^3} + \frac{\sin 2\alpha}{2^3} + \cdots + \frac{\sin n\alpha}{n^3} + \cdots,$$

де α — довільне дійсне число.

○ Складемо ряд з модулів членів заданого ряду

$$\frac{|\sin \alpha|}{1^3} + \frac{|\sin 2\alpha|}{2^3} + \cdots + \frac{|\sin n\alpha|}{n^3} + \cdots.$$

Оскільки $\frac{|\sin n\alpha|}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^3}$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ збіжний як узагальнений гармонічний (п. 1.3), то за ознакою порівняння ряд з модулів збіжний, тому збіжний і заданий ряд. ●

Зауважимо, що доведена теорема дає лише достатню умову збіжності і не є необхідною умовою збіжності знакозмінного ряду, оскільки існують знакозмінні ряди, які є збіжними, а ряди, утворені з модулів їхніх членів, розбіжні. Наприклад, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ збіжний за ознакою Лейбніца, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, утворений з модулів його членів, розбіжний. У зв'язку з цим всі збіжні ряди можна розділити на абсолютно збіжні і умовно збіжні.

Знакозмінний ряд (19) називають *абсолютно збіжним*, якщо ряд (20), утворений з модулів його членів, є збіжним.

Якщо ж ряд (19) збіжний, а ряд (20), утворений з модулів його членів, розбіжний, то ряд (19) називають *умовно збіжним*. Так, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^3}$ є абсолютно збіжним, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ — умовно збіжним.

Зазначимо, що розмежування рядів на абсолютно і умовно збіжні є досить істотним. Справа в тому, що абсолютно збіжні ряди мають цілу низку важливих властивостей скінченних сум, тоді як умовно збіжні ряди таких властивостей не мають. Наприклад, абсолютно збіжні мають переставну властивість: будь-який ряд, утворений за допомогою перестановки членів абсолютно збіжного ряду, також абсолютно збіжний і має ту саму суму, що і заданий ряд.

Умовно збіжні ряди переставної властивості не мають, тому що від перестановки їхніх членів може змінитися сума ряду і навіть утворитись розбіжний ряд.

1.6. Поняття про числові ряди з комплексними членами

Нехай $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \ldots$ — послідовність комплексних чисел (гл. 7, п. 1.4). Комплексне число $a + ib = c$ називають скінченною границею послідовності $\{z_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що $|z_n - c| < \varepsilon$ для всіх $n > N$ і записують $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$.

Послідовність, яка має скінченну границю, називають збіжною, а послідовність, яка не має скінченної границі — розбіжною. Зв'язок між границею послідовності комплексних чисел $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ та границями послідовностей дійсних чисел $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ встановлює така теорема: *для того щоб послідовність $\{z_n\}$ мала скінченну границю $c = a + ib$, необхідно і достатньо, щоб послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ мали скінченні границі, які дорівнюють відповідно a та b.*

Вираз виду

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, \tag{21}$$

де $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \ldots$ — комплексні числа, називають числовим рядом з комплексними членами.

Суми $S_1 = z_1$, $S_2 = z_1 + z_2$, ..., $S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ називають частинними сумами ряду (21).

Ряд (21) називають збіжним, якщо збіжна послідовність $\{S_n\}$ і розбіжним, якщо ця послідовність розбіжна.

Введемо тепер ряди з дійсними членами:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \tag{22}$$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \tag{23}$$

і побудуємо їхні частинні суми

$$X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad Y_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n;$$

тоді $S_n = X_n + iY_n$ і справджується така теорема.

Теорема 1. *Для того щоб ряд (21) був збіжним до числа $S = X + iY$, необхідно і достатньо, щоб ряди (22) і (23) були збіжними відповідно до чисел X і Y*

При дослідженні на збіжність рядів з комплексними членами користуються також такою достатньою ознакою збіжності.

Теорема 2. *Якщо ряд, утворений з модулів членів ряду (21)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \cdots,$$

де $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$, збіжний, то збіжний, причому абсолютно, і ряд (21).

Приклад

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{i(-1)^n}{n}\right)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+in}{2n^2+3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-i}{3}\right)^n$.

○ а) Розглянемо відповідні ряди з дійсними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Перший з них є збіжним як геометрична прогресія із знаменником $q = \frac{1}{2} < 1$, а другий збігається за ознакою Лейбніца. Отже, за теоремою 1 даний ряд збіжний.

б) Розглянемо відповідні ряди з дійсними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+3} \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+3}.$$

За допомогою, наприклад, інтегральної ознаки Коші можна переконатись, що перший з цих рядів збіжний, а другий розбіжний. Отже, за теоремою 1 даний ряд розбіжний.

в) Скористаємось теоремою 2. Складемо ряд з модулів членів даного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(\frac{2-i}{3}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{2-i}{3}\right|^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n.$$

Цей ряд збіжний, бо є геометричною прогресією, у якої знаменник $q = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$. Отже, даний ряд абсолютно збіжний.

Завдання для самоконтролю

1. Що називається числовим рядом? Що називається загальним членом ряду? Навести приклади.

2. Який ряд називається збіжним? Що називається його сумою? Який ряд називається розбіжним? Навести приклади.

3. Сформулювати і довести необхідну ознаку збіжності ряду. У чому полягає найпростіша достатня ознака розбіжності? Навести приклади.

4. Сформулювати і довести такі достатні ознаки збіжності: ознаки порівняння, граничну ознаку порівняння; ознаки Д'Аламбера і Коші; інтегральну ознаку Коші. Для яких рядів застосовні ці ознаки?

5. Сформулювати і довести ознаку Лейбніца. Для якого ряду застосовна ця ознака?

6. Чому не можна досліджувати за ознакою Лейбніца на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n} = -1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots ?$$

7. У чому полягає наслідок із ознаки Лейбніца?

8. Сформулювати і довести достатню ознаку збіжності знакозмінного ряду.

9. Який ряд називається абсолютно збіжним? Який ряд називається умовно збіжним? Навести приклади.

10. Який ряд називається рядом з комплексними членами? Сформулювати ознаки збіжності такого ряду.

11. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{5n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{5^n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+3}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$;

ж) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1}}{(n+1)!}$.

12. Довести, що дані ряди збіжні, і обчислити їхню суму з точністю до 0,01:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(3n)^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

13. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^n}{(2n+1)^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 5n}{n^2}$.

14. Дослідити на збіжність ряди з комплексними членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + i \sin n}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2+i)\, i}{4}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + i}{3n^2+1}$.

Відповіді. 11. а), г), д) — розбіжні; інші — збіжні. 12. а) 0,31; б) 0,62. 13. а) — умовно збіжний, б), в) — абсолютно збіжні. 14. а) — розбіжний, б) — абсолютно збіжний, в) — умовно збіжний.

§ 2. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

2.1. Функціональні ряди. Поняття рівномірної збіжності. Ознака Вейєрштрасса

Перейдемо тепер до вивчення функціональних рядів, тобто рядів, членами яких є не числа, а функції, визначені на деякій множині E:

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \tag{24}$$

Якщо взяти довільне число $x_0 \in E$ і в ряді (24) покласти $x = x_0$, то дістанемо числовий ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0). \tag{25}$$

Цей ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. Якщо ряд (25) є збіжним, то точка x_0 називається *точкою збіжності функціонального ряду (24)*. Якщо ж ряд (25) є розбіжним, то точка x_0 називається *точкою розбіжності ряду (24)*.

Множина всіх точок збіжності функціонального ряду називається *областю його збіжності*. Область збіжності функціонального ряду може або збігатися з множиною E, на якій визначені члени ряду, або становити деяку частину цієї множини.

Частинна сума функціонального ряду є функцією від x і визначається за аналогією з числовими рядами:

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x).$$

У кожній точці x, яка належить області збіжності ряду (24), існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, яку називають сумою ряду (24) і пишуть

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots.$$

Функція $S(x)$ визначена в області збіжності функціонального ряду. Якщо функціональний ряд (24) збіжний до функції $S(x)$, то різниця $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ називається n-м залишком ряду:

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots.$$

Зрозуміло, що для всіх значень x з області збіжності ряду

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Відомо, що сума скінченного числа неперервних функцій є функцією неперервною. Крім того, суму скінченного числа функцій можна почленно диференціювати та інтегрувати. Виявляється, що ці властивості не завжди виконуються для сум нескінченного числа функцій,

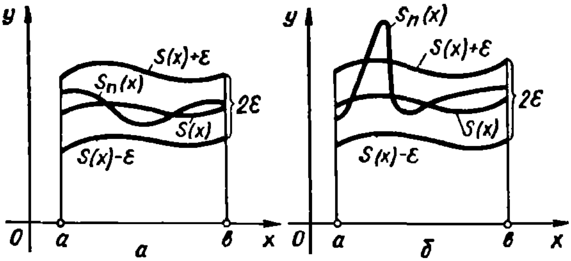


Рис. 9.2

тобто для функціональних рядів. Проте ці властивості зберігаються для так званих рівномірно збіжних рядів.

Функціональний ряд (24) називається *рівномірно збіжним на множині* D, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $N = N(\varepsilon)$, яке залежить лише від ε і не залежить від x, що для всіх $n > N$ і для всіх $x \in D$ виконується нерівність $|r_n(x)| < \varepsilon$.

Розглянемо поняття рівномірної і нерівномірної збіжності функціонального ряду з погляду геометрії.

Нехай $S_n(x)$ — це n-а частинна сума, а $S(x)$ — сума ряду (24). Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$ і побудуємо криві $S(x)$, $S(x) + \varepsilon$ і $S(x) - \varepsilon$ (рис. 9.2). Останні дві криві утворюють смугу шириною 2ε. Якщо ряд (24) рівномірно збіжний на проміжку $(a; b)$ до функції $S(x)$, то можна знайти номер $N = N(\varepsilon)$, починаючи з якого для всіх $n > N$ графіки частинних сум $S_n(x)$ розмістяться на всьому проміжку $(a; b)$ всередині смуги 2ε (рис. 9.2, *а*).

Практично це означає, що суму $S(x)$ на проміжку $(a; b)$ можна наближено, з наперед заданою точністю, замінити однією і тією самою частинною сумою $S_n(x)$:

$$S(x) \approx S_n(x), \quad x \in (a; b).$$

Якщо ряд нерівномірно збіжний на проміжку $(a; b)$, то такого номера не існує: графіки частинних сум $S_n(x)$ виходять за межі смуги 2ε (рис. 9.2, *б*). При цьому збільшення числа доданків в сумах $S_n(x)$ не забезпечує введення їхніх графіків в смугу 2ε. Це означає, що для різних значень $x \in (a; b)$ обчислення суми $S(x)$ за допомогою певної частинної суми $S_n(x)$ з однією й тією самою точністю неможливе. Таке обчислення можна виконати (бо ряд збіжний і $r_n(x) \to 0$), але для різних значень x треба буде брати різні частинні суми, тобто різне число членів n в сумах $S_n(x)$.

Рівномірно збіжні функціональні ряди мають ряд важливих властивостей. Сформулюємо деякі з них без доведення.

1°. *Сума членів рівномірно збіжного на деякому проміжку ряду неперервних функцій є функція, неперервна на цьому проміжку.*

2°. *Якщо на відрізку* $[a;\ b]$ *функціональний ряд* (24) *рівномірно збіжний і члени ряду неперервні на* $[a;\ b]$, *то його можна почленно інтегрувати в межах* $(\alpha;\ \beta)$, *де* $(\alpha,\ \beta) \subset [a;\ b]$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)\,dx.$$

3°. *Якщо функціональний ряд* (24) *збіжний на відрізку* $[a;\ b]$, *а його члени мають неперервні похідні* $u_n'(x)$, $x \in [a;\ b]$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, *причому ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *рівномірно збіжний на* $[a;\ b]$, *то заданий ряд можна почленно диференціювати, тобто*

$$S'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \quad x \in [a;\ b].$$

Таким чином, всі збіжні функціональні ряди поділяються за характером збіжності на рівномірно збіжні і нерівномірно збіжні. Рівномірно збіжні ряди мають ряд властивостей, які дають змогу ефективно використовувати їх при наближених обчисленнях. У цьому полягає практична перевага рівномірно збіжних рядів перед нерівномірно збіжними.

Для дослідження функціонального ряду на рівномірну збіжність користуються такою достатньою умовою рівномірної збіжності.

Теорема *(ознака Вейєрштрасса). Функціональний ряд (24) абсолютно і рівномірно збіжний на відрізку* $[a;\ b]$, *якщо існує знакододатний збіжний числовий ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{26}$$

такий, що

$$|u_n(x)| \leqslant a_n,\ \forall x \in [a;\ b],\quad n = 1, 2, \ldots. \tag{27}$$

○ З умови (27) і ознаки порівняння випливає, що ряд (24) є абсолютно збіжним у довільній точці $x \in [a;\ b]$. З абсолютної збіжності ряду (24) дістанемо абсолютну збіжність його залишку. Маємо

$$|r_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots| \leqslant$$

$$\leqslant |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots \leqslant a_{n+1} + a_{n+1} + \cdots = R_n.$$

Але залишок ряду (26) $R_n \to 0$ при $n \to \infty$, тому для довільного $\varepsilon > 0$ існує незалежний від x номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що $R_n < \varepsilon$ при $n > N$. Тоді для всіх $n > N$ і $x \in [a;\ b]$ виконується нерівність $|r_n(x)| < \varepsilon$. ●

Приклади

1. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}+\cdots .$$

○ Кожен член ряду визначений на множині $R \setminus 0$. На цій множині ряд є геометричною прогресією із знаменником $q=\frac{1}{x}$, тому при $|q|=\left|\frac{1}{x}\right|<1$ або $|x|>1$ і заданий ряд збіжний. Отже, $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ — область збіжності цього ряду. ●

2. Дослідити на рівномірну збіжність ряд

$$\frac{\sin x}{1!}+\frac{\sin 2x}{2!}+\cdots+\frac{\sin nx}{n!}+\cdots .$$

○ Скористаємось ознакою Вейєрштрасса. Оскільки при $-\infty<x<+\infty$ і $n \in N$

$$\left|\frac{\sin nx}{n!}\right| \leqslant \frac{1}{n!} \quad \text{і ряд} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

збіжний (за ознакою Д'Аламбера), то заданий функціональний ряд абсолютно і рівномірно збіжний на всій числовій осі. ●

3. Знайти суму ряду

$$x+2x^2+\cdots+nx^n+\cdots, \quad |x|<\frac{1}{2} .$$

○ Оскільки при $|x|<\frac{1}{2}$ і $n \in N$ виконується нерівність $|nx^n|<\frac{n}{2^n}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ збіжний, то за ознакою Вейєрштрасса ряд $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$ рівномірно збіжний при $|x|<\frac{1}{2}$. Цей ряд утворюється почленним диференціюванням геометричної прогресії

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x}, \quad |x|<\frac{1}{2} .$$

За властивістю 3° рівномірно збіжних рядів маємо

$$\frac{d}{dx}(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right), \quad |x|<\frac{1}{2},$$

або

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x|<\frac{1}{2},$$

звідки

$$x(1+2x+3x^2+4x^3+)\cdots=x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots=$$

$$=\frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x|<\frac{1}{2} . \ ●$$

2.2. Поняття степеневого ряду. Теорема Абеля. Інтервал та радіус збіжності степеневого ряду

Степеневим рядом, називається функціональний ряд вигляду

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \qquad (28)$$

де a_0, a_1, ..., a_n, ...— дійсні числа, які називаються *коефіцієнтами ряду*.

Степеневим рядом за степенями двочлена $x - x_0$, де x_0 — дійсне число, називають функціональний ряд вигляду

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n. \quad (29)$$

Ряд (29) заміною змінної $x - x_0 = t$ зводиться до ряду вигляду (28), тому надалі розглядатимемо лише степеневі ряди вигляду (28).

Всякий степеневий ряд вигляду (28) збіжний в точці $x = 0$ до суми $S = a_0$. Тому область збіжності степеневого ряду завжди містить принаймні одну точку. Детальніші відомості про область збіжності ряду (28) дістанемо з наступної, дуже важливої в теорії рядів теореми.

Теорема Абеля. *Якщо степеневий ряд* (28) *збіжний при* $x = x_0 \neq 0$, *то він абсолютно збіжний для всіх значень* x, *що задовольняють нерівність* $|x| < |x_0|$.

Якщо при $x = x_1$ *ряд* (28) *розбіжний, то він розбіжний всюди, де* $|x| > |x_1|$.

○ Оскільки за умовою ряд (28) збіжний в точці x_0, то збіжним є числовий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx_0^n$, отже, $a_nx_0^n \to 0$ при $n \to \infty$. Звідси випливає, що послідовність $\{a_nx_0^n\}$ обмежена, тобто існує таке число M, що

$$|a_nx_0^n| \leqslant M, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Враховуючи, що для $|x| < |x_0|$ величина $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, маємо

$$|a_nx^n| = |a_nx_0^n| \cdot \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| \leqslant Mq^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Тобто модуль кожного члена ряду (28) не перевищує відповідного члена збіжної геометричної прогресії. Тоді за ознакою порівняння при $|x| < |x_0|$ ряд (28) абсолютно збіжний.

Нехай тепер ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx_1^n$ розбіжний, при $x = x_1$. Тоді ряд (28) буде розбіжним і для всіх x, що задовольняють нерівність $|x| > |x_1|$. Справді, якби припустити, що він збіжний в якій-небудь точці x, що задовольняє цю нерівність, то за доведеним він був би збіжним і в точці x_1, бо $|x_1| < |x|$. А це суперечить тому, що в точці x_1 ряд розбіжний. ●

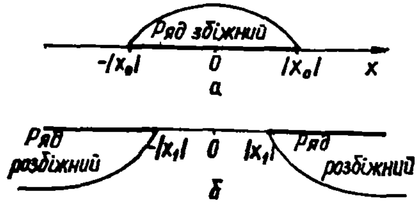


Рис. 9.3

Теорема Абеля характеризує множини точок збіжності та розбіжності степеневого ряду. Дійсно, якщо x_0 — точка збіжності ряду (28), то весь інтервал $(-|x_0|;\ |x_0|)$ заповнено точками абсолютної збіжності цього ряду (рис. 9.3, *а*). Якщо x_1 — точка розбіжності ряду (28), то вся нескінченна напівпряма $(-\infty;\ -|x_1|)$ зліва від точки $-|x_1|$ і вся нескінченна напівпряма $(|x_1|;\ +\infty)$ справа від точки $|x_1|$ (рис. 9.3, *б*) складається з точок розбіжності цього ряду.

Отже, для області збіжності степеневого ряду можливі три випадки: 1) ряд (28) збіжний лише в точці $x = 0$; 2) ряд (28) збіжний при всіх $x \in (-\infty;\ +\infty)$; 3) існує таке скінченне число $R \in (0;\ +\infty)$, що при $|x| < R$ степеневий ряд абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ — розбіжний (рис. 9.4).

Число R називають *радіусом збіжності* степеневого ряду, а інтервал $(-R;\ R)$ — *інтервалом збіжності*.

Вкажемо спосіб визначення радіуса збіжності степеневого ряду. Складемо ряд із модулів членів ряду (28):

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|.$$

Припустимо, що існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| = L|x| \neq 0,\ x \neq 0.$$

Згідно з ознакою Д'Аламбера, ряд (28) є абсолютно збіжним при $L|x| < 1$, або $|x| < \frac{1}{L}$, і розбіжним при $L|x| > 1$, або $|x| > \frac{1}{L}$. Отже, інтервал $\left(-\frac{1}{L};\ \frac{1}{L}\right)$ є інтервалом абсолютної збіжності ряду (28), а число

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{30}$$

— його радіусом збіжності.

Рис. 9.4

Аналогічно скориставшись ознакою Коші, можна встановити, що

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}. \qquad (31)$$

З а у в а ж е н н я 1. Неважко переконатись, що коли

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 \quad \text{або} \quad L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 0,$$

то ряд (28) є абсолютно збіжним на всій числовій осі. У цьому разі вважають $R = +\infty$. Якщо ж $L = \infty$, то $R = 0$, і степеневий ряд має лише одну точку збіжності $x = 0$.

З а у в а ж е н н я 2. Питання про збіжність ряду при $x = \pm R$ (на кінцях інтервалу збіжності) розв'язується для кожного ряду окремо. Таким чином, область збіжності степеневого ряду може відрізнятись від інтервалу $(-R; R)$ не більше ніж двома точками $x = \pm R$.

З а у в а ж е н н я 3. Радіус збіжності ряду (29) визначається за тими самими формулами (30) і (31), що і ряду (28).

Інтервал збіжності ряду (29) знаходять з нерівності $|x - x_0| < R$, тобто має вигляд $(x_0 - R; x_0 + R)$.

З а у в а ж е н н я 4. На практиці інтервал збіжності степеневого ряду часто знаходять за ознакою Д'Аламбера або ознакою Коші, застосовуючи їх до ряду, складеного з модулів членів заданого ряду.

Приклад

Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} (nx)^n$; в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$.

○ Скористаємося формулою (30).

а) $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$

Отже, даний ряд абсолютно збіжний на всій числовій осі.

б) $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{e} \times$
$\times\, 0 = 0,$

тобто даний ряд збіжний лише в точці $x = 0$.

$$\text{в) } R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\frac{2n+3}{2n+1} = 1,$$

отже, $(-1; 1)$ інтервал збіжності даного ряду. Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу. При $x = -1$ маємо числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

який є збіжним за ознакою Лейбніца. При $x = 1$ дістаємо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots,$$

який є розбіжним за ознакою порівняння з гармонічним рядом. Таким чином, областю збіжності даного ряду є проміжок $[-1; 1)$.

г) Скористаємось ознакою Д'Аламбера. Для даного ряду маємо

$$|u_n| = \frac{|x+3|^n}{n^2}, \quad |u_{n+1}| = \frac{|x+3|^{n+1}}{(n+1)^2};$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+3|^{n+1} n^2}{(n+1)^2 |x+3|^n} =$$

$$= |x+3| \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = |x+3|.$$

За ознакою Д'Аламбера ряд буде абсолютно збіжним, якщо $|x+3| < 1$, звідки $-1 < x+3 < 1$, або $-4 < x < -2$. Таким чином, $(-4; -2)$ — інтервал збіжності даного ряду і $R = 1$ — його радіус збіжності.

Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях інтервалу збіжності.

При $x = -4$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4+3)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

який є збіжним за ознакою Лейбніца.

При $x = -2$ дістаємо узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2+3)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

який також збіжний ($\alpha = 2 > 1$). Отже, областю збіжності даного ряду є відрізок $[-4; -2]$. ●

2.3. Властивості степеневих рядів

1°. *Степеневий ряд*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

абсолютно і рівномірно збіжний на будь-якому відрізку $[-\rho; \rho]$, *який цілком міститься в інтервалі збіжності* $(-R; R)$.

○ За умовою $\rho < R$. Візьмемо точку $x_0 \in (\rho; R)$. За теоремою Абеля ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$ збіжний. Для довільної точки $x \in [-\rho, \rho]$ виконується нерівність $|a_n x^n| < |a_n x_0^n|$, тому за ознакою Вейєрштрасса ряд (28) абсолютно і рівномірно збіжний. ●

З цієї властивості і властивостей 1°—3° функціональних рядів (п. 2.1) випливають такі твердження.

2^0. *Сума степеневого ряду* (28) *неперервна всередині його інтервалу збіжності.*

3^0. *Якщо межі інтегрування α та β лежать всередині інтервалу збіжності* $(-R;\ R)$ *ряду* (24), *то на відрізку* $[\alpha;\ \beta]$ *цей ряд можна почленно інтегрувати.*

Зокрема, якщо ряд (28) інтегрувати по відрізку $[0;\ x]$, де $|x| < R$, то в результаті дістанемо степеневий ряд, який має той самий інтервал збіжності, що і ряд (28); при цьому, якщо $S(x)$ — сума ряду (28):

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ то}$$

$$\int_0^x S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx.$$

4^0. *Якщо ряд* (28) *має інтервал збіжності* $(-R;\ R)$, *то ряд, утворений диференціюванням ряду* (28), *має той самий інтервал збіжності* $(-R;\ R)$; *при цьому, якщо* $S(x)$ — *сума ряду* (28), *то*

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R;\ R).$$

Таким чином, ряд (28) на відрізку $[0;\ x]$, $|x| < R$, можна інтегрувати і диференціювати скільки завгодно раз в будь-якій точці $x \in (-R;\ R)$. При цьому інтервалом збіжності кожного ряду є той самий інтервал $(-R;\ R)$.

Сформульовані властивості степеневих рядів широко використовуються в теоретичних дослідженнях і наближених обчисленнях.

Приклад

Знайти суму ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

○ Позначимо суму даного ряду через $S(x)$, тоді

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots.$$

Цю суму можна розглядати як геометричну прогресію з першим членом $a = 1$ і знаменником $q = -x^2$. Знайшовши суму прогресії, дістанемо

$$S'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots.$$

Інтегруючи цю рівність на відрізку $[0;\ x] \subset (-1;\ 1)$, маємо

$$\int_0^x S'(x)\,dx = \int_0^x (1 - x^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots)\,dx = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

звідки

$$x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=$$

$$=\operatorname{arctg} x,\quad |x|<1. \bullet$$

2.4. Ряд Тейлора

Досі ми вивчали властивості суми заданого степеневого ряду. Вважатимемо тепер, що функція задана, і з'ясуємо, за яких умов цю функцію можна подати у вигляді степеневого ряду і як знайти цей ряд.

Нехай функція $f(x)$ є сумою степеневого ряду

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots \tag{32}$$

в інтервалі $(x_0-R;\ x_0+R)$. У цьому разі кажуть, що функція $f(x)$ розкладена в степеневий ряд в околі точки x_0 або за степенями $x-x_0$. Знайдемо коефіцієнти ряду (32). Для цього, згідно з властивістю 4^0 (п. 2.3), послідовно диференціюватимемо ряд (32) і підставлятимемо в знайдені похідні значення $x=x_0$:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+$$
$$+a_4(x-x_0)^4+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots,\ f(x_0)=a_0;$$
$$f'(x)=1\cdot a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+4a_4(x-x_0)^3+$$
$$+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots,\ f'(x_0)=1\cdot a_1;$$
$$f''(x)=1\cdot 2a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+4\cdot 3a_4(x-x_0)^2+$$
$$+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+\cdots,\ f''(x_0)=1\cdot 2a_2;$$
$$f'''(x)=3\cdot 2\cdot 1a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4(x-x_0)+\cdots+$$
$$+n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}+\cdots,\ f'''(x_0)=1\cdot 2\cdot 3a_3;$$
$$f^{\mathrm{IV}}(x)=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1a_4+\cdots+n(n-1)(n-2)(n-3)\times$$
$$\times(x-x_0)^{n-4}+\cdots,$$
$$f^{\mathrm{IV}}(x_0)=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4a_4;$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1a_n+(n+1)n(n-1)\ldots$$
$$2a_{n+1}(x-x_0)+\cdots,$$
$$f^{(n)}(x_0)=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot(n-1)na_n.$$

Звідси знаходимо коефіцієнти

$$a_0=f(x_0),\ a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ \ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \ldots.$$

Підставивши значення цих коефіцієнтів у рівність (32), дістанемо

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots.$$

Ряд

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-$$
$$-x_0)^n+\cdots \tag{33}$$

називається *рядом Тейлора функції* $f(x)$. Отже, доведено таку теорему.

Теорема 1. *Якщо функцію $f(x)$ в інтервалі $(x_0-R;\ x_0+R)$ можна розкласти в степеневий ряд, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора даної функції.*

Нехай тепер $f(x)$ — довільна нескінченне число разів диференційовна функція. Складемо для неї ряд (33). Виявляється, що сума ряду (33) не завжди збігається з функцією $f(x)$. Інакше кажучи, ряд (33) може збігатися до іншої функції, а не до функції $f(x)$, для якої його формально складено. Встановимо умови, за яких сума ряду (33) збігається з функцією $f(x)$.

Теорема 2. *Для того щоб ряд Тейлора (33) збігався до функції $f(x)$ в інтервалі $(x_0-R;\ x_0+R)$, тобто*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

необхідно і достатньо, щоб в цьому інтервалі функція мала похідні всіх порядків і залишковий член її формули Тейлора прямував до нуля при $n\to\infty$ для всіх x з цього інтервалу:

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,\quad x\in(x_0-R;\ x_0+R). \tag{34}$$

○ Відомо (гл. 5, п. 5.4), що для функції, яка має похідні всіх порядків, справедлива формула Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \tag{35}$$

де

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad 0<\theta<1, \tag{36}$$

— залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа.

Якщо позначити n-у частинну суму ряду (33) через $S_n(x)$, то формула (35) матиме вигляд

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x). \tag{37}$$

Нехай $f(x)$ — сума ряду (33), тобто

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x),$$

тоді з формули (37) випливає умова (34). Навпаки, якщо виконується умова (34), то з формули (37) випливає рівність $\lim S_n(x) = f(x)$. ●

Таким чином, функцію $f(x)$ можна розкласти в ряд Тейлора в інтервалі $(x_0 - R;\ x_0 + R)$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови: 1) вона має похідні всіх порядків; 2) залишковий член формули Тейлора (36) прямує до нуля при $n \to 0$ і всіх $x \in (x_0 - R;\ x_0 + R)$.

Безпосередня перевірка цих умов нерідко виявляється непростою задачею. Доведемо теорему, яка дає досить прості достатні умови розкладання функції в ряд Тейлора.

Теорема 3. *Якщо функція $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R;\ x_0 + R)$ має похідні всіх порядків та існує число $M > 0$ таке, що*

$$|f^{(n)}(x)| < M, \quad x \in (x_0 - R;\ x_0 + R), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{38}$$

де $f^{(0)}(x) = f(x)$, то функцію $f(x)$ можна розкласти в ряд Тейлора.

○ Відповідно до теореми 2 досить перевірити умову (34). В силу нерівностей (38) залишковий член формули Тейлора (34) задовольняє нерівність

$$|R_n(x)| < \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}, \quad x \in (x_0 - R;\ x_0 + R), \; n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{39}$$

Побудуємо степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{40}$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{M|x - x_0|^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!\,M|x - x_0|^{n+1}} = |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0 < 1,$$

то за ознакою Д'Аламбера ряд (40) збіжний на всій числовій осі.

Для збіжного ряду

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{M|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

тоді з нерівностей (39) знаходимо

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad x \in (x_0 - R;\ x_0 + R). \; ●$$

2.5. Розкладання елементарних функцій в ряд Маклорена

Рядом Маклорена функції $f(x)$ називають степеневий ряд по степенях x, який можна дістати з ряду (38) при $x_0 = 0$:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots . \qquad (41)$$

З п. 2.4 випливає таке правило розкладання функції в ряд: щоб функцію $f(x)$ розкласти в ряд Маклорена, потрібно:

а) знайти похідні $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^n(x)$, ...;

б) обчислити значення похідних в точці $x = 0$;

в) записати ряд Маклорена (41) для даної функції і знайти інтервал його збіжності;

г) визначити інтервал $(-R; R)$, в якому залишковий член формули Маклорена $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Якщо такий інтервал існує (він може відрізнятись від інтервалу збіжності ряду (41)), то в цьому інтервалі функція $f(x)$ і сума ряду Маклорена збігаються:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots .$$

Розглянемо ряди Маклорена деяких елементарных функцій (вони часто використовуються і тому їх варто запам'ятати):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty); \qquad (42)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots +$$

$$\cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty); \qquad (43)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots +$$

$$+ \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty); \qquad (44)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \quad m \in R, \ x \in (-1; 1); \qquad (45)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots, \quad x \in (-1; 1); \qquad (46)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots +$$

$$+(-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n!}+\dots,\quad x\in(-1;\ 1]; \tag{47}$$

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots+$$
$$+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots,\ x\in[-1;\ 1]. \tag{48}$$

Доведемо формули (42) — (48).

○ 1. Нехай $f(x)=e^x$. Маємо:

а) $f^{(n)}(x)=e^x$, $n\in N$; б) $f^{(n)}(0)=1$, $n=0, 1, 2, \dots$

в) $1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty,$$

отже, знайдений ряд збігається в інтервалі $(-\infty;\ +\infty)$;

г) $|f^{(n)}(x)|\leqslant e^{|x|}<e^R,\quad x\in(-R;\ R)$,

тому за теоремою 3 (п. 2.4) функцію e^x можна розкласти в степеневий ряд на довільному інтервалі $(-R;\ R)\subset(-\infty;\ +\infty)$, а отже, і на всьому інтервалі $(-\infty;\ \infty)$. Формулу (42) доведено.

2. Нехай $f(x)=\sin x$. Дістанемо:

а) $f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$;

$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$;

$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right)$;

. . . .

$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\quad n\in N$;

б) $f^{(n)}(0)=\sin n\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \dots;\\ -1, & n=3,\ 7,\ 11,\ \dots;\\ +1, & n=1,\ 5,\ 9,\ \dots;\end{cases}$

в) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

$$R=\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}=\infty.$$

г) $|f^{(n)}(x)|=\left|\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right|\leqslant 1<2,\quad x\in(-\infty;\ +\infty),\ n=0,\ 1,\ 2,\ \dots$, тобто формулу (43) доведено.

3. Нехай $f(x) = \cos x$. Формулу (44) можна довести так само, як і формулу (43). Проте це можна зробити значно простіше, продиференціювавши почленно ряд (43).

4. Нехай $f(x) = (1 + x)^m$, $m \in R$. Маємо:

а) $f'(x) = m(1+x)^{m-1}$, $f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$, ...,
$f^{(n)}(x) = m(m-1) \ldots (m-n+1)(1+x)^{m-n}$, $n \in N$;

б) $f^{(n)}(0) = m(m-1) \ldots (m-n+1)$, $n \in N$;

в) $$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots +$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n;$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)(n+1)!}{n!\,m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)(m-n)}\right| =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right| = 1,$$

тобто знайдений ряд збіжний в інтервалі $(-1, 1)$. Доведення, що на цьому інтервалі $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, опускаємо.

Ряд (45) називають *біноміальним*. Якщо $m \in N$ дістаємо відомий розклад двочлена, який називають біномом Ньютона (гл. 5, п. 5.4).

Збіжність біноміального ряду в кінцевих точках інтервалу $(-1; 1)$ залежить від числа m.

Ряд (45) збіжний до функції $(1 + x)^m$ в таких випадках:
при $m \geqslant 0$, якщо $x \in [-1; 1]$;
при $-1 < m < 0$, якщо $x \in (-1; 1]$;
при $m \leqslant -1$, якщо $x \in (-1; 1)$.
Приймемо ці твердження без доведення.

5. Нехай $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Формулу (46) виводимо трьома способами: користуючись правилом розкладання функції в ряд; застосувавши формулу (45) і поклавши в ній $m = -1$ і $-x$ замість x; розглядаючи ряд $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ як геометричну прогресію, перший член якої дорівнює одиниці, а знаменник $q = x$. Відомо (п. 1.1), що даний ряд збіжний при $|x| < 1$ і сума його дорівнює $(1 - x)^{-1}$.

6. Не зупиняючись на деталях, зазначимо, що коли у формулі (46) покласти $-x$ замість x, а потім $-x^2$ замість x і знайдені ряди проінтегрувати, то дістанемо розклад в степеневий ряд функції $\ln(1 + x)$ і функції $\operatorname{arctg} x$ (формули (47), (48)). ●

Ряди (42) — (48) використовуються при знаходженні степеневих рядів для інших функцій.

Приклади

1. Розкласти в ряд функцію $f(x) = x^2 \ln(1 - x^3)$.

○ Поклавши у формулі (47) $-x^3$ замість x, маємо

$$\ln(1-x^3) = -x^3 - \frac{x^6}{2} - \frac{x^9}{3} - \cdots - \frac{x^{3n}}{n} - \ldots, \quad x \in [-1;\ 1);$$

$$x^2 \ln(1-x^3) = -x^5 - \frac{x^5}{2} - \frac{x^{11}}{3} - \cdots - \frac{x^{3n+2}}{n} - \ldots, \quad x \in [-1;\ -1). \quad \bullet$$

2. Розкласти в ряд по степенях x функцію $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

○ Поклавши у формулі (45) $-x^2$ замість x, при $m = -\dfrac{1}{2}$ дістанемо

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \cdots +$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}x^{2n} + \ldots, \quad x \in (-1;\ -1). \quad \bullet$$

3. Розкласти в ряд по степенях x функцію $f(x) = \arcsin x$.

○ Інтегруючи знайдений в попередньому прикладі ряд в межах від 0 до x, $|x| < 1$, дістанемо

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \cdots +$$

$$+ \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \quad x \in (-1;\ 1).$$

Можна довести, що ця рівність справедлива і в точках $x = \pm 1$. ●

2.6. Наближені обчислення за допомогою степеневих рядів

1°. *Наближені обчислення значень функцій.* Нехай треба обчислити значення функції $f(x)$ при $x = x_0$. Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд в інтервалі $(-R;\ R)$ і $x_0 \in (-R;\ R)$, то точне значення $f(x_0)$ дорівнює сумі цього ряду при $x = x_0$, а наближене — частинній сумі $S_n(x_0)$. Похибку $|f(x_0) - S_n(x_0)|$ можна знайти, оцінюючи залишок ряду $r_n(x_0)$. Для рядів лейбніцевого типу

$$|r_n(x_0)| = |u_{n+1}(x_0) + u_{n+2}(x_0) + u_{n+3}(x_0) + \ldots| < |u_{n+1}(x_0)|.$$

Для знакозмінних і знакододатних рядів величину $r_n(x_0)$, як правило, оцінюють так:

$$|r_n(x_0)| \leqslant |u_{n+1}(x_0)| + |u_{n+2}(x_0)| + |u_{n+3}(x_0)| + \cdots <$$
$$< a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = S,$$

де $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ — певний знакододатний збіжний ряд, сума якого S легко обчислюється (наприклад, геометрична прогресія), і для якого

$$|u_{n+1}(x_0)| \leqslant a_1, \quad |u_{n+2}(x_0)| \leqslant a_2, \quad |u_{n+3}(x_0)| \leqslant a_3, \quad \cdots .$$

Приклад

Обчислити з точністю до 0,001:

а) значення $\sin 18°$; б) число e.

○ а) Скориставшись формулою (43) при $x = 18°$ або $x = \frac{\pi}{10}$ маємо

$$\sin 18° = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{10^5 \cdot 5!} - \frac{\pi^7}{10^7 \cdot 7!} + \cdots .$$

Дістали ряд лейбніцевого типу. Оскільки

$$\frac{\pi}{10} > 0{,}001, \quad \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} > 0{,}001, \quad \frac{\pi^5}{10^5 \cdot 5!} < 0{,}001,$$

то з точністю до 0,001 маємо

$$\sin 18° \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} \approx 0{,}309.$$

б) Підставивши в ряд (42) $x = 1$, знайдемо знакододатний ряд

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots .$$

Оцінимо n-й залишок цього ряду:

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \frac{1}{(n+4)!} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n} .$$

Залишається підібрати найменше натуральне число n, щоб виконувалась нерівність $\frac{1}{n!\,n} < 0{,}001$.

Неважко обчислити, що ця нерівність виконується при $n \geqslant 6$, тому з точністю до 0,001 маємо

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \approx 2{,}717. \ ●$$

2^0. *Наближене обчислення визначених інтегралів.* Нехай потрібно знайти інтеграл $F(x) = \int\limits_a^x f(x)\,dx$, який або не виражається через елементарні функції, або складний і незручний для обчислень. Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд, що рівномірно збігається на деякому відрізку, то для обчислення заданого інтеграла можна скористатись властивістю про почленне інтегрування цього

ряду. Похибку обчислень визначають так само, як і при обчислен
значень функцій.

Приклад

Обчислити з точністю до 0,001 інтеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}dx$.

○ Формула Ньютона — Лейбніца тут не застосовна, тому що первісна в
e^{-x^2} в елементарних функціях не виражається.

Скориставшись рядом (42), маємо

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots .$$

Цей ряд рівномірно збіжний на всій числовій осі, тому його можна почлен
інтегрувати на будь-якому скінченному сегменті, зокрема на відрізку $\left[0; \frac{1}{3}\right]$:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}dx = \int\limits_0^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 3^3} + \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 3^5} - \frac{1}{3! \cdot 7 \cdot 3^6} + \ldots .$$

Дістали ряд лейбніцевого типу. Оскільки

$$\frac{1}{3} > 0{,}001, \quad \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 3^3} = \frac{1}{81} > 0{,}001, \quad \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 3^5} = \frac{1}{2430} < 0{,}001,$$

то з точністю до 0,001 маємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{81} \approx 0{,}321.$$

Як уже зазначалось, первісна $F(x)$ для функції $f(x) = e^{-x^2}$ не є елементарно
функцією. Проте її легко знайти у вигляді степеневого ряду, проінтегрувавши р
для функції e^{-x^2} в межах від 0 до x:

$$F(x) = \int\limits_0^x e^{-x^2}dx = \int\limits_0^x \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right) dx =$$

$$= x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty). \; ●$$

3°. *Наближене інтегрування диференціальних рівнянь.* Якщо інтегрування диференціального рівняння не зводиться до квадратур, то для наближеного інтегрування можна скористатись рядом Тейлора.

Нехай треба знайти частинний розв'язок $y(x)$ рівняння

$$y' = f(x, y), \tag{49}$$

який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$.

Припустимо, що шуканий розв'язок рівняння (49) в околі точки x_0, в якій задані початкові умови, можна розкласти в ряд

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots . \tag{50}$$

Нам треба знайти $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \ldots$. Значення $y(x_0) = y_0$ задано початковою умовою. Щоб знайти похідну $y'(x_0) = y_0'$, в рівнянні (49) треба покласти $x = x_0$, $y = y_0$.

Похідну $y''(x_0) = y_0''$ знаходимо диференціюванням рівняння (49) по x:

$$y'' = f_1(x, y, y'), \tag{51}$$

поклавши в цьому рівнянні $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$.

Продиференціювавши рівняння (51) і поклавши $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$, $y'' = y_0''$, дістанемо $y'''(x_0) = y_0'''$ і т. д. Процес або обривається на деякому коефіцієнті, або завершується знаходженням загального закону побудови коефіцієнтів.

Зауваження 1. За формулою (50) можна знаходити наближений розв'язок рівняння будь-якого порядку:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Зауваження 2. Питання про те, за яких умов розв'язок диференціального рівняння можна шукати у вигляді ряду Тейлора (50), а також яка похибка цього розв'язку, ми не розглядаємо.

Приклад

Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розкладу в ряд розв'язку рівняння

а) $y'' = xy' + y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

б) $y' = x^2 + y^3$, $y(1) = -1$.

○ а) Шукаємо розв'язок $y(x)$ у вигляді ряду Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots .$$

Тут $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0 \cdot 1 + 0 = 0$.

Послідовно диференціюючи дане рівняння, дістанемо

$$y''' = y' + xy'' + y' = 2y' + xy'', \quad y'''(0) = 2;$$

$$y^{\mathrm{IV}} = 2y'' + y'' + xy''' = 3y'' + xy''', \quad y^{\mathrm{IV}}(0) = 0;$$

$$y^{\mathrm{V}} = 3y''' + y''' + xy^{\mathrm{IV}} = 4y''' + xy^{\mathrm{IV}}, \quad y^{\mathrm{V}}(0) = 8.$$

Підставляючи знайдені похідні в ряд Маклорена, дістаємо шуканий розв'язок

$$y(x) \approx \frac{1}{1!}x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{8}{5!}x^5 = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15}.$$

б) Шукаємо розв'язок $y(x)$ у вигляді ряду Тейлора:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + \ldots .$$

Маємо

$$y(1) = -1, \; y'(1) = 1^2 + (-1)^3 = 0; \quad y'' = 2x + 3y^2y', \; y''(1) = 2;$$

$$y''' = 2 + 6y(y')^2 + 3y^2y'', \; y'''(1) = 8.$$

Отже,

$$y(x) \approx -1 + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{8}{3!}(x-1)^3 = -1 + (x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3. \; ●$$

2.7. Рівняння і функції Бесселя

Рівняння Бесселя має вигляд

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu = \mathrm{const}. \tag{52}$$

До цього рівняння зводиться багато задач математичної фізики, небесної механіки тощо.

Шукатимемо розв'язок рівняння (52) у вигляді ряду

$$y = x^p \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{53}$$

Диференціюючи ряд (53) двічі і підставляючи значення y та y' в (52), дістанемо

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+p}((k+p)^2 + x^2 - \nu^2) = 0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при однакових степенях x, дістаємо систему рівнянь

$$x^p : a_0(p^2 - \nu^2) = 0;$$

$$x^{p+1} : a_1((p+1)^2 - \nu^2) = 0;$$

$$x^{p+2}: a_2((p+2)^2-\nu^2)+a_0=0;$$
$$x^{p+3}: a_3((p+3)^2-\nu^2)+a_1=0; \tag{54}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{p+k}: a_k((p+k)^2-\nu^2)+a_{k-2}=0;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Вважатимемо, що $a_0 \neq 0$, тоді з першого рівняння (54) дістанемо, що $p = \pm\nu$.

Нехай $p = \nu \geqslant 0$, тоді з другого рівняння (54) знаходимо, що $a_1 = 0$, тому і всі коефіцієнти з непарними індексами дорівнюють нулю: $a_{2k+1} = 0$. Далі

$$a_2 = -\frac{a_0}{(\nu+2)^2-\nu^2} = -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)};$$
$$a_4 = -\frac{a_2}{(\nu+4)^2-\nu^2} = \frac{a_0}{2^4(\nu+1)(\nu+2)\cdot 1\cdot 2}; \tag{55}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}k!(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)}.$$

При $p = -\nu$ так само знаходимо

$$a_{2k+1}=0,\ a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}k!(-\nu+1)(-\nu+2)\ldots(-\nu+k)}. \tag{56}$$

З формул (53) і (55) дістанемо розв'язок рівняння (52) при $p = \nu$:

$$y = a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k}k!(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)}. \tag{57}$$

Введемо гамма-функцію Ейлера (гл. 7, п. 4.2)

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}dx \quad (p>0).$$

Відомо, що функція $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$ і для цілих значень $p > 0$ маємо $\Gamma(p+1) = p!$. Для від'ємних p функція $\Gamma(p)$ визначається інакше, але властивість $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ зберігається.

Якщо взяти довільну сталу

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)},$$

то розв'язок (57) запишеться так:

$$y = J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)}. \tag{58}$$

Коли $p = -\nu$, $a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$, то з (53) і (56) аналогічно дістанемо ще один розв'язок рівняння (52):

$$y = J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k-\nu+1)}. \tag{59}$$

Функції $J_\nu(x)$ і $J_{-\nu}(x)$ називаються *функціями Бесселя першого роду порядку* ν і $-\nu$ відповідно. Ряд (58) збіжний при $x \in (-\infty; +\infty)$, а ряд (59) $\forall x \neq 0$. Якщо ν не ціле число, то функції $J_\nu(x)$ і $J_{-\nu}(x)$ лінійно незалежні, тому що їхні ряди починаються з різних степенів x. Загальний розв'язок рівняння (52) у цьому разі має вигляд

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x).$$

Коли ν — ціле число, то $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$, тобто функції (58) і (59) лінійно залежні.

Другий частинний розв'язок у цьому випадку шукають у вигляді

$$K_\nu(x) = J_\nu(x)\ln x + x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Підставляючи цей вираз у рівняння (52), визначають коефіцієнти b_k.

Функція $K_\nu(x)$ з визначеними коефіцієнтами b_k помножена на деяку сталу, називається *функцією Бесселя другого роду ν-го порядку*.

Загальний розв'язок рівняння (52) матиме вигляд

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 K_\nu(x).$$

Приклад

Розв'язати рівняння Бесселя при $\nu = 0: y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$.

○ З формули (57) знайдемо один частинний розв'язок:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Другий частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$K_0(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Можна показати, що

$$K_0(x) = J_0(x)\ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \ldots .$$

Загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$J = C_1 J_0(x) + C_2 K_0(x). \quad \bullet$$

2.8. Поняття про степеневі ряди в комплексній області. Формули Ейлера

Ряд виду

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots +$$
$$+ a_n(z - z_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad (60)$$

де $z = x + iy$ — комплексна змінна, $z_0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — сталі комплексні числа, називається *степеневим рядом в комплексній області.*

При $z_0 = 0$ з ряду (60) дістанемо ряд за степенями z

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \qquad (61)$$

Збіжність рядів (60) та (61) відповідно в точках $z = z_0$ та $z = 0$ очевидна. Під час дослідження цих рядів на збіжність в інших точках комплексної площини користуються теоремою Абеля. Сформулюємо її.

Теорема. *Якщо ряд* (61) *збіжний в точці* $z = z_0 \neq 0$, *то він абсолютно збіжний і при всіх значеннях* z, *для яких* $|z| < |z_0|$.

Якщо ряд (61) *розбіжний в точці* $z = z_1$, *то він розбіжний і при всіх значеннях* z, *для яких* $|z| > |z_1|$.

Доведення цієї теореми таке саме, як і для степеневих рядів в дійсній області (п. 2.2). Розглянемо геометричне тлумачення теореми Абеля для ряду (61). Оскільки для змінної $z = x + iy$ значення $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, то нерівність $|z| < |z_0|$, або $x^2 + y^2 < |z_0|^2$, у комплексній площині означає сукупність точок z, які містяться всередині круга радіуса $|z_0|$ з центром у початку координат (рис. 9.5).

Аналогічно нерівність $|z| > |z_1|$ геометрично означає сукупність точок z комплексної площини, які лежать поза кругом радіуса $|z_1|$ з центром у початку координат. Отже, якщо z_0 — точка збіжності ряду (61), то цей ряд буде абсолютно збіжним у всіх внутрішніх точках круга $|z| < |z_0|$. Якщо z_1 — точка розбіжності ряду (61), то цей ряд буде розбіжним у всіх точках, поза кругом $|z| > |z_1|$.

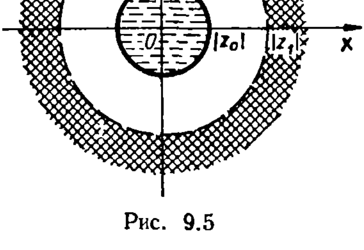


Рис. 9.5

З теореми Абеля випливає існування такого числа R, що для всіх $|z| < R$ степеневий ряд (61) збіжний, а при $|z| > R$ розбіжний.

Круг радіуса R, де $0 < R < +\infty$, з центром у початку координат, всередині якого степеневий ряд (61) абсолютно збіжний, а зовні якого розбіжний, навивають *кругом збіжності цього ряду*, а число R — *радіусом збіжності*. Якщо ряд (61) збіжний лише в точці $z = 0$, то вважають $R = 0$, а якщо ряд (61) збіжний в усій площині, то $R = +\infty$.

Круг збіжності ряду (60) матиме центр в точці $z = z_0$. Радіус збіжності рядів (60) і (61) можна знаходити так само, як і для рядів з дійсними числами (п. 2.2). На межі круга збіжності, тобто в точках z, де $|z| = R$, залежно від конкретних випадків ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. Всередині круга збіжності ряд (61) має властивості, аналогічні властивостям степеневих рядів дійсної змінної.

Сума степеневого ряду в крузі його збіжності є деякою *комплексною функцією комплексної змінної* z; такі функції називаються *аналітичними*.

Приклад

Дослідити на збіжність степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)^2}$.

○ Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|z|^{n+1}(n+1)^2}{|z|^n(n+2)^2} = |z|,$$

то за ознакою Д'Аламбера ряд збіжний у крузі $|z| < 1$.

При $|z| = 1$ маємо збіжний ряд, оскільки ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots,$$

є збіжним (узагальнений гармонічний ряд, в якому $\alpha = 2 > 1$). Отже, областю збіжності заданого ряду є значення z, для яких $|z| \leqslant 1$. ●

За допомогою рядів в комплексній області узагальнимо поняття показникової та тригонометричних функцій на випадок комплексної змінної та доведемо формули Ейлера, які уже зустрічались в п. 1.4 (гл. 7).

Розглянемо розклад в степеневий ряд функції e^x (п. 2.5):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in (-\infty; +\infty). \tag{62}$$

Якщо дійсну змінну x замінити комплексною змінною z, матимемо ряд

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots. \tag{63}$$

Оскільки

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

то ряд (63) є абсолютно збіжним на всій комплексній площині. Позначимо його суму через e^z. Отже, за означенням для довільного комплексного числа

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \quad |z| < \infty. \tag{64}$$

Сума ряду (64) є *комплексною функцією комплексної змінної z*.

Аналогічно визначаються тригонометричні функції

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad |z| < \infty; \tag{65}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad |z| < +\infty. \tag{66}$$

Між показниковою функцією e^z і тригонометричними функціями $\sin z$ і $\cos z$ існує простий зв'язок. Підставимо в ряд (64) значення iz замість z і згрупуємо окремо доданки, які містять множник i і які цього множника не містять:

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \frac{(iz)^7}{7!} +$$

$$+ \cdots = 1 + i\frac{z}{1!} - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - i\frac{z^7}{7!} + \cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right).$$

Порівнюючи ряди в дужках з рядами (65) і (66), дістаємо

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{67}$$

Аналогічно, підставляючи в ряд (64) замість z значення $-iz$, дістаємо

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \tag{68}$$

Формули (67) і (68) називаються *формулами Ейлера*. Якщо почленно додати (відняти) рівності (67) і (68), то матимемо іншу форму запису формул Ейлера:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Який ряд називається функціональним? Що називається областю його збіжності?
2. Який функціональний ряд називається рівномірно збіжним? Дати геометричне тлумачення рівномірної та нерівномірної збіжності.
3. Сформулювати і пояснити властивості рівномірно збіжних рядів.
4. Сформулювати і довести ознаку Вейєрштрасса.
5. Який ряд називається степеневим? Сформулювати і довести теорему Абеля.

6. Навести приклади степеневих рядів, радіус збіжності яких: 1) $R = 0$; 2) $R = +\infty$; 3) $0 < R < +\infty$.

7. Сформулювати і пояснити властивості степеневих рядів.

8. Що називається рядом Тейлора для функції $f(x)$? Як знайти коефіцієнти ряду Тейлора?

9. Сформулювати і довести теорему про необхідні і достатні умови, за яких сума ряду Тейлора функції $f(x)$ збігається з цією функцією.

10. Який ряд називається рядом Маклорена. Розкласти в ряд Маклорена функції: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$.

11. Як наближено обчислити значення функції за допомогою степеневого ряду? Вказати способи оцінки залишку ряду. Навести приклади.

12. У чому полягає метод інтегрування функцій за допомогою рядів? Навести приклади.

13. У чому полягає метод інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою рядів? Навести приклади.

14. Що називається степеневим рядом комплексної змінної?

15. Сформулювати теорему Абеля для степеневого ряду комплексної змінної z і довести формули Ейлера.

16. Дати визначення функцій e^z, $\sin z$, $\cos z$ комплексної змінної z і довести формули Ейлера.

17. Знайти область збіжності ряду:

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx};\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x.$$

18. Довести, що ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^n}$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+x^2}$ рівномірно збіжні на всій числовій осі.

19. Довести, що радіус збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{n}\right)^n n!\, x^{2n}$ дорівнює $R = \sqrt{\dfrac{e}{2}}$.

20. Знайти область збіжності ряду:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}};\quad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3n+1}.$$

21. Показати, що

$$1)\ \ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}} = \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{n+1}2^n+1)\frac{x^n}{n},\quad x\in\left(-\frac{1}{2};\ +\frac{1}{2}\right).$$

$$2)\ \frac{1-\cos 2x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty;\ +\infty).$$

22. Обчислити $\sqrt[3]{130}$ з точністю до 0,0001.

23. Обчислити з точністю до 0,001:

$$\text{а)}\ \int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx;\quad \text{б)}\ \int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x};\quad \text{в)}\ \int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

24. Знайти чотири відмінні від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння:

а) $y' = y^2 + x^2$, $y(0) = 0{,}5$; б) $y'' = (y')^2 + xy$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

25. Розв'язати рівняння Бесселя $y'' + y'\frac{1}{x} + y = 0$.

26. Знайти круг і радіус збіжності ряду

а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}$.

Відповіді. 17. а) $(0; +\infty)$; б) $(e^{-1}; e)$. 20. а) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; б) $[1; 3)$. 22. $\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = 5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 5{,}0658$. 23. а) 0,409; б) 0,098; в) 0,333. 24. а) $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \cdots$; б) $y = 1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{8} + \cdots$. 26. а) $|z| < 1$, $R = 1$; б) $|z-i| < \sqrt{2}$, $R = \sqrt{2}$.

§ 3. РЯДИ ФУР'Є

3.1. Гармонічні коливання

У природі і техніці дуже поширені процеси, які через певні проміжки часу повторюються. Такі процеси називаються періодичними. Прикладами періодичних процесів можуть бути механічні та електромагнітні коливання, періодичні рухи в теорії пружності, акустиці, радіотехніці, електротехніці тощо.

Моделюються періодичні процеси за допомогою періодичних функцій. Нагадаємо, що функція $f(x)$ називається *періодичною* (гл. 4, п. 2.8) з періодом $T > 0$, якщо вона визначена на всій числовій осі і для неї виконується рівність $f(x+T) = f(x)$, $x \in R$.

Періодична функція $x = f(t)$ зображає періодичний рух, або коливання точки, що має в момент часу t координату x.

Найпростішим коливанням є просте гармонічне коливання, яке, як відомо (гл. 4, п. 2.8), задається функцією

$$x(t) = a\sin(\omega t + \varphi_0), \quad t \geqslant 0, \tag{69}$$

де a — амплітуда коливання; ω — циклічна частота; φ_0 — початкова фаза. Основним періодом функції (69) є $T = \frac{2\pi}{\omega}$; тобто одне повне коливання відбувається за проміжок часу $\frac{2\pi}{\omega}$.

Функція (69) (та її графік) називається *простою гармонікою.*

Просту гармоніку зображає також функція

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t. \tag{70}$$

Дійсно,

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t + \right.$$
$$\left. + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega t\right) = a\sin(\omega t + \varphi_0),$$
$$a = \sqrt{A^2+B^2}, \quad \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\varphi_0, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\varphi_0.$$

Коливання, утворені внаслідок накладання кількох простих гармонік, називають *складними гармонічними коливаннями*. Наприклад, функція

$$\varphi(t) = a_1\sin(t+\varphi_1) + a_2\sin(2t+\varphi_2) + \cdots + a_n\sin(nt+\varphi_n)$$

задає складне гармонічне коливання і є результатом накладання n простих гармонік. Перша з цих гармонік має період 2π, друга — $\frac{2\pi}{2}$, третя — $\frac{2\pi}{3}$ і т. д., n-а $\frac{2\pi}{n}$, тому загальний період T функції $\varphi(t)$ дорівнює 2π.

Графік складного гармонічного коливання, яке складається з кількох простих гармонік, може значно відрізнятися від графіків цих гармонік.

Приклад

На рис. 9.6 суцільною лінією показано графік функції

$$S(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5},$$

яка є сумою трьох простих гармонік (штрихові лінії *1, 2, 3*): а) $\sin x$; б) $\frac{\sin 3x}{3}$; в) $\frac{\sin 5x}{5}$.

Таким чином, накладанням простих гармонік можна дістати різноманітні періодичні коливання, які зовсім не схожі на прості гармонічні коливання.

Природно, постає обернена задача: чи не можна періодичний рух, заданий деякою періодичною функцією, подати як суму простих гар-

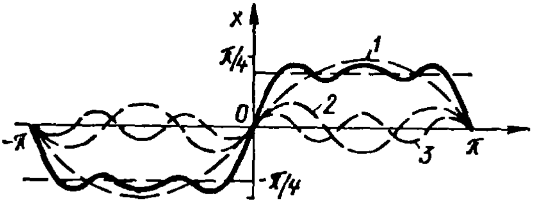


Рис. 9.6

монік? Виявляється, що цього взагалі кажучи, зробити не можна, якщо обмежитися скінченною сумою простих гармонік. Якщо ж ввести нескінченні суми простих гармонік, тобто тригонометричні ряди, то практично кожну періодичну функцію можна розкласти на прості гармоніки.

3.2. Тригонометричний ряд Фур'є. Коефіцієнти Фур'є

Ряд виду

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots +$$

$$+ a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (71)$$

називається *тригонометричним рядом*, а дійсні числа a_0, a_n, b_n ($n = 1, 2, \ldots$) — його коефіцієнтами. Вільний член в сумі (71) для зручності записують у вигляді $\frac{a_0}{2}$.

Припустимо, що ряд (71) на відрізку $[-\pi; \pi]$ рівномірно збіжний до функції $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (72)$$

Оскільки члени ряду (71) є неперервними функціями, то його сума $f(x)$ є також неперервною функцією (п. 2.1). Проінтегрувавши почленно ряд (72) на відрізку $[-\pi; \pi]$ дістанемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx\right),$$

звідки

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx = a_0\pi, \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad (73)$$

оскільки

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0.$$

Помножимо обидві частини рівності (72) на $\cos kx$ і проінтегруємо одержаний ряд почленно на відрізку $[-\pi; \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx\right). \quad (74)$$

Проте

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = 0, \quad k \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx dx = 0,$$

тому з рівності (74) при $k = n$ дістанемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = a_n \pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{75}$$

Аналогічно, помноживши рівність (72) на $\sin kx$ і проінтегрувавши почленно на відрізку $[-\pi; \pi]$, знайдемо

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{76}$$

Нехай $f(x)$ — інтегровна функція на відрізку $[-\pi; \pi]$. Числа a_0, a_n, b_n, які визначаються формулами (73), (75), (76), називаються *коефіцієнтами Фур'є функції* $f(x)$. Тригонометричний ряд (71), коефіцієнтами якого є коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, називають *рядом Фур'є* цієї функції і записують

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{77}$$

Знак відповідності $\sim$ означає, що інтегровній на відрізку $[-\pi; \pi]$ функції $f(x)$ поставлено у відповідність її ряд Фур'є.

Аналогічне явище спостерігалось і для рядів Тейлора (п. 2.4). Доведений вище результат можна тепер сформулювати так.

Теорема 1. *Якщо функцію $f(x)$ можна подати на відрізку $[-\pi; \pi]$ у вигляді рівномірно збіжного на цьому відрізку тригонометричного ряду (76), то цей тригонометричний ряд единий і є рядом Фур'є для функції $f(x)$.*

З'ясуємо умови, за яких знак відповідності у формулі (77) можна замінити знаком рівності, тобто, за яких ряд Фур'є функції є збіжним і має своєю сумою саме функцію $f(x)$.

Теорема 2 *(достатня умова подання функції через її ряд Фур'є). Нехай періодична функція $f(x)$ з періодом 2π є кусково-монотонна і обмежена на відрізку $[-\pi; \pi]$. Тоді ряд Фур'є функції $f(x)$ є збіжним на всій числовій осі. Сума $S(x)$ знайденого ряду дорівнює значенню функції*

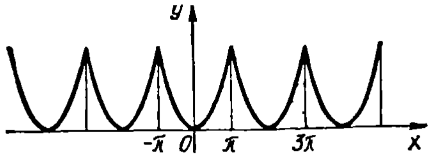


Рис. 9.7

$f(x)$ в усіх точках неперервності функції $f(x)$; якщо x_0 — точка розриву функції $f(x)$, то

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

тобто сума ряду Фур'є в точці x_0 дорівнює середньому арифметичному односторонніх границь функції $f(x)$ в цій точці; в кінцевих точках відрізка $[-\pi; \pi]$ сума ряду Фур'є набуває значень

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Приймемо цю теорему без доведення.

Зауваження 1. Якщо ряд Фур'є збігається до функції $S(x)$, то ця функція 2π-періодична, бо такими є всі члени ряду (72). Тому, якщо ряд (72) збіжний до функції $f(x)$ на відрізку $[-\pi; \pi]$, то він збігатиметься до цієї самої функції на всій числовій осі $(-\infty; +\infty)$; при цьому $f(x + 2\pi) = f(x)$. Отже, функцію, задану на відрізку $[-\pi; \pi]$ та періодично продовжену на всю числову пряму, можна подати через суму ряду Фур'є.

Зауваження 2. При періодичному продовженні функції $f(x)$, $x \in [-\pi; \pi]$ на всю числову вісь знайдена функція буде або неперервною в точках $\pm(2n - 1)\pi$, $n \in N$, або розривною в цих точках.

Неперервність можлива лише, якщо $f(\pi) = f(-\pi)$ (рис. 9.7). У цьому разі сума ряду Фур'є дорівнює $S(\pm(2n - 1)\pi) = f(\pi) = f(-\pi)$. Якщо ж $f(\pi) \neq f(-\pi)$, то ми можемо залишити без зміни значення функції на проміжку $(-\pi; \pi]$ і періодично з періодом 2π продовжити її на всю числову вісь.

При цьому в точках $\pm(2n - 1)\pi$, $n \in N$, можуть виникнути точки розриву першого роду (рис. 9.8), в яких сума ряду Фур'є дорівнює $S(\pm(2n - 1)\pi) = \frac{1}{2}(f(\pi) + f(-\pi))$.

Зауваження 3. Для довільної інтегровної 2π-періодичної функції $\varphi(x)$ виконується рівність (рис. 9.9)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,dx = \int_{a}^{a+2\pi} \varphi(x)\,dx$$

для будь-якого числа $a \in (-\infty; +\infty)$. У зв'язку з цим коефіцієнти ря-

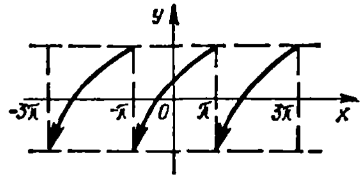


Рис. 9.8

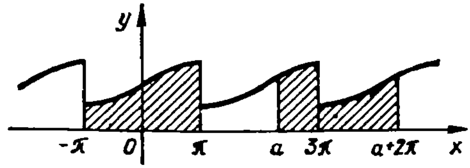


Рис. 9.9

ду Фур'є можна знайти, обчислюючи інтеграли (73), (75), (76) по довільному відрізку, довжина якого дорівнює періоду, тобто

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx dx.$$

У випадку, коли 2π-періодична функція задана на проміжку $[0;\ 2\pi]$, ці формули спрощують задачу знаходження коефіцієнтів ряду Фур'є.

Зауваження 4. Умови, які накладаються на функцію $f(x)$ при розкладі її в ряд Фур'є, значно простіші, ніж при розкладі її в степеневий ряд. Дійсно, якщо функція розкладається в ряд Тейлора, то вона на всьому інтервалі збіжності є не тільки неперервною, а й скільки завгодно разів диференційовною. Для розкладу функції в ряд Фур'є у цьому зовсім немає потреби. Згідно з теоремою 2, достатньо, щоб лише функція була неперервною або навіть мала на відрізку скінченне число точок розриву першого роду.

З цього випливає, що клас функцій, які можна подати рядом Фур'є значно ширший, ніж клас функцій, які можна подати рядом Тейлора.

Зауваження 5. Якщо функція $f(x)$ розкладається в ряд Фур'є, то частинні суми $S_n(x)$ цього ряду (по аналогії з многочленами Тейлора їх називають *многочленами Фур'є*) дають змогу знайти наближення цієї функції

$$f(x) \approx S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

Похибка цієї формули зменшується зі збільшенням числа n. Проте оцінити цю похибку набагато складніше, ніж для многочленів Тейлора, і ми цим займатися не будемо.

Приклади

1. Розкласти в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію:

а) $f(x) = \pi + x, \quad x \in (-\pi;\ \pi]$ (рис. 9.10);

б) $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0; \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$ (рис. 9.11).

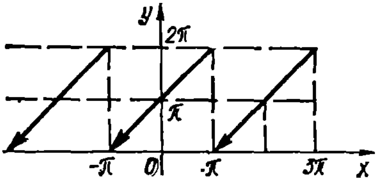


Рис. 9.10

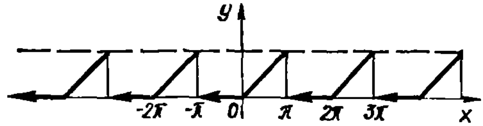


Рис. 9.11

○ Задані функції кусково-монотонні на проміжку $(-\pi; \pi]$, тому їх можна зобразити рядом Фур'є. Отже, задача зводиться до знаходження коефіцієнтів Фур'є.
а) Маємо

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x)\,dx = \frac{1}{\pi} \left.\frac{(\pi + x)^2}{2}\right|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \pi) \cos nx dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x + \pi & dv = \cos nx dx \\ du = dx & v = \frac{1}{n} \sin nx \end{matrix} \right| = \frac{1}{\pi} \left(\left.\frac{x + \pi}{n} \sin nx \right|_{-\pi}^{\pi} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \pi) \sin nx dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x + \pi & dv = \sin nx dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{matrix} \right| = \frac{1}{\pi} \left(\left. -\frac{x + \pi}{n} \cos nx \right|_{-\pi}^{\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \right) = -\frac{1}{\pi} \frac{2\pi (-1)^n}{n} = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (72), дістанемо

$$f(x) = \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Ця рівність справедлива для всіх точок неперервності заданої функції, тобто при $x \neq \pm (2n - 1)\pi$, $n \in N$. У точках $\pm (2n - 1)\pi$ сума ряду Фур'є дорівнює π (півсума односторонніх границь в цих точках).

Зазначимо, що задана періодична функція $f(x)$ збігається з функцією $y = \pi + x$ лише на проміжку $(-\pi; \pi]$, а зовні проміжку $(-\pi; \pi]$ ці функції різні.

б) Знаходимо коефіцієнти Фур'є функції $\varphi(x)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{\pi} x dx\right) = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot \cos nx dx + \int_{0}^{\pi} x \cos nx dx\right) = \frac{\cos nx}{\pi n^2}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot \sin nx dx + \int_{0}^{\pi} x \sin nx dx\right) = -\frac{x \cos nx}{\pi n}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Отже, ряд Фур'є заданої функції має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx + \frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right) +$$

$$+ \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right).$$

Знайдений ряд збіжний до функції $\varphi(x)$ при всіх $x \neq \pm(2n-1)\pi$, $n \in N$. У точках $x = \pm(2n-1)\pi$ сума ряду дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

Зауважимо, що якби

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0; \\ x, & 0 \leqslant x < \pi, \\ \frac{\pi}{2}, & x = \pm\pi, \end{cases}$$

то знайдений у цьому прикладі ряд Фур'є був би збіжним до $\varphi_1(x)$ на всій числовій осі. ●

3.3. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій

Нехай функцію $f(x)$ можна подати на відрізку $[-\pi; \pi]$ рядом Фур'є. Покажемо, що обчислення коефіцієнтів цього ряду спрощується, якщо функція $f(x)$ є парною, або непарною.

Якщо функція $f(x)$ парна, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{78}$$

де

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx. \tag{79}$$

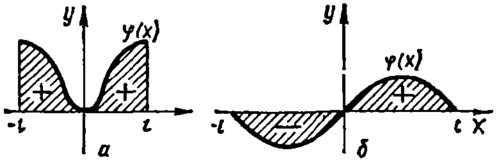


Рис. 9.12

Якщо функція $f(x)$ непарна, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{80}$$

де

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx. \tag{81}$$

○ Для доведення формул (78) — (81) зазначимо спочатку, що коли функція $\varphi(x)$ інтегровна на відрізку $[-l; l]$, то (гл. 7, п. 2.5)

$$\int_{-l}^{l} \varphi(x)\,dx = 2\int_0^{l} \varphi(x)\,dx, \tag{82}$$

якщо $\varphi(x)$ парна (рис. 9.12, *а*) і

$$\int_{-l}^{l} \varphi(x)\,dx = 0, \tag{83}$$

якщо $\varphi(x)$ непарна (рис. 9.12, *б*).

З формул (82) і (83) дістаємо формули (79) і (81). ●

Зазначимо, що ряди (78) і (80) відображають характер функції $f(x)$ Ряд Фур'є для парної функції містить лише косинуси (парні функції), а ряд Фур'є для непарної функції містить лише синуси (непарні функції).

Приклад

Розкласти в ряд Фур'є 2π-періодичні функції

а) $f(x) = |x|, -\pi \leqslant x \leqslant \pi$ (рис. 9.13);

б) $\varphi(x)=\begin{cases} -1, & -\pi \leqslant x < 0; \\ 1, & 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$ (рис. 9.14).

○ Задані функції є кусково-монотонні, тому можуть бути розкладені в ряди Фур'є.

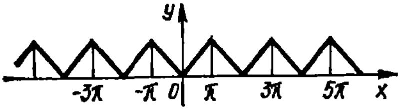


Рис. 9.13

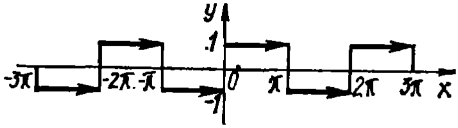


Рис. 9.14

а) Оскільки функція $f(x)$ парна, то, користуючись формулами (78) і (79), дістанемо

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin x}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1);$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right).$$

Ця рівність виконується на всій числовій осі, тому що задана функція неперервна для всіх дійсних значень x.

б) Функція $\varphi(x)$ непарна, тому, згідно з формулами (80) і (81), маємо

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi n}((-1)^n - 1);$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right). \quad (84)$$

Ця рівність справедлива у всіх точках $x \in (-\infty; +\infty)$, крім точок розриву. В точках розриву $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ сума знайденого ряду дорівнює нулю. ●

3.4. Ряд Фур'є для $2l$-періодичної функції

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[-l; l]$ має період $2l$ (l-довільне додатне число) і є на відрізку $[-l; l]$ кусково-моногонною.

Розкладемо її в ряд Фур'є. Виконаємо заміну змінної за формулою $x = \frac{lt}{\pi}$ і розглянемо функцію $\varphi(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$.

Ця функція визначена на відрізку $[-\pi; \pi]$ і кусково-монотонна на ньому.

Розкладемо функцію $\varphi(t)$ на відрізку $[-\pi; \pi]$ в ряд Фур'є:

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt), \quad (85)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt\,dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt\,dt. \tag{86}$$

Повернемось до змінної x. При $t = \frac{\pi x}{l}$, $dt = \frac{\pi}{l} dx$ формули (85) і (86) набирають вигляду

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}\right), \tag{87}$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l}\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l}\,dx. \tag{88}$$

Ряд (87) і є рядом Фур'є для функції $f(x)$ з періодом $2l$. Коефіцієнти цього ряду знаходять за формулами (88). Зауважимо, що всі теореми, які справджуються для рядів Фур'є 2π-періодичних функцій, зберігаються і для рядів Фур'є $2l$-періодичних функцій. Зокрема, справедливими залишаються достатні умови для розкладу функції в ряд Фур'є (п. 3.2), зауваження про можливість обчислювати коефіцієнти ряду Фур'є, інтегруючи її по довільному відрізку, довжина якого дорівнює періоду (п. 3.2), а також особливості рядів Фур'є для парних і непарних функцій (п. 3.3).

Приклад

Зобразити рядом Фур'є функцію (рис. 9.15)

$$f(x) = x^2, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \; f(x+2) = f(x), \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

○ Ця функція неперервна на всій числовій осі, парна і має період $2l = 2$, тому її можна подати через ряд Фур'є вигляду (87). Враховуючи, що задана функція парна і $l = 1$, згідно з формулами (87) і (88), маємо

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x)\,dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}; \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l}\,dx =$$

$$= 2\int_0^1 x^2 \cos \pi n x\,dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & dv = \cos \pi n x dx \\ du = 2x dx & v = \dfrac{1}{\pi n} \sin \pi n x \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{\pi n} \sin \pi n x \Big|_0^1 - \frac{2}{\pi n} \int_0^1 x \sin \pi n x\,dx\right) = -\frac{4}{\pi n} \int_0^1 x \sin \pi n x\,dx =$$

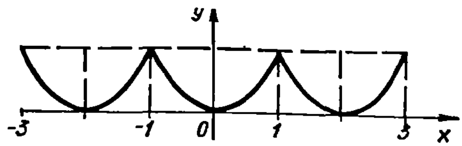


Рис. 9.15

$$= \begin{vmatrix} u = x & dv = \sin \pi n x dx \\ du = dx & v = -\dfrac{1}{\pi n}\cos \pi n x \end{vmatrix} = -\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{x}{\pi n}\cos \pi n x \Big|_0^1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \cos \pi n x dx\right) = \frac{4x}{\pi^2 n^2}\cos \pi n x \Big|_0^1 = \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}; \quad b_n = 0;$$

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos \pi n x = \frac{1}{3} +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2}\left(-\frac{\cos \pi x}{1^2} + \frac{\cos 2\pi x}{2^2} - \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \frac{\cos 4\pi x}{4^2} - \dots\right),$$

$$(-\infty < x < +\infty). \bullet$$

3.5. Ряди Фур'є для функцій заданих на відрізку $[0; l]$ або на відрізку $[a; b]$

Нехай треба розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$ задану на відрізку $[0; l]$. Ми можемо довільним способом продовжити функцію $f(x)$ на відрізок $[-l; 0]$, але так, щоб утворена на відрізку $[-l; l]$ нова функція збігалась з функцією $f(x)$ при $x \in [0; l]$ і була кусково-монотонною (покладемо, наприклад, $F(x) = 0$ при $x \in [-l; 0)$ і $F(x) = f(x)$ при $x \in [0; l]$).

Розклавши функцію $F(x)$ в ряд Фур'є на відрізку $[-l; l]$, дістанемо шуканий ряд функції $f(x)$ при $x \in [0; l]$. Зокрема, функцію $f(x)$ можна продовжити парним способом на відрізок $[-l; 0]$ (рис. 9.16). Тоді графік функції $F(x)$, $x \in [-l; l]$ буде симетричним відносно осі Oy, а її

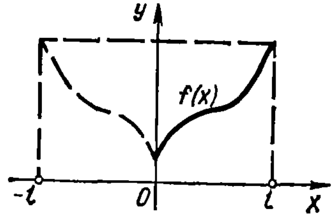


Рис. 9,16

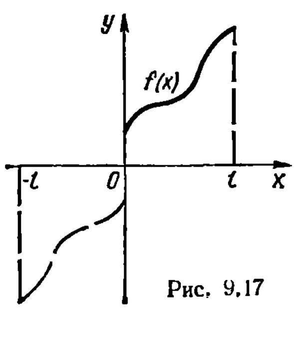


Рис. 9,17

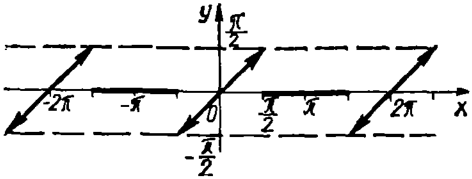


Рис. 9.18

ряд Фур'є міститиме лише косинуси. Якщо ж $f(x)$ продовжити на відрізок $[-l;\ 0]$ непарним способом (рис. 9.17), то графік функції $F(x)$, $x \in [-l;\ l]$ буде симетричним відносно точки $x = 0$, а її ряд Фур'є міститиме лише синуси.

Таким чином, якщо функцію $f(x)$, яка задана на відрізку $[0;\ l]$ можна розкласти в ряд Фур'є, то таких рядів існує безліч. Особливо важливими для застосування є розклади функції $f(x)$ в ряд синусів і ряд косинусів.

Коли функція $f(x)$ задана на відрізку $[a;\ b]$, де $a < b$, $0 < |a|$, $b| < \infty$, то задача подання такої функції через ряд Фур'є зводиться до розглянутої вище.

Приклад

Розкласти в ряд Фур'є по синусах функцію $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

○ Продовжимо функцію $f(x)$ непарним способом на проміжок $[-\pi;\ 0)$, а потім знайдену функцію продовжимо періодично на всю числову вісь (рис. 9.18).

Користуючись формулами (80) і (81), маємо

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0 \cdot \sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right);$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\right)\sin nx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\pi}{2}\sin 2x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\pi}{4}\sin 4x + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\pi}{6}\sin 6x + \cdots\right)$$

Ця рівність справедлива у всіх точках $x \in [0;\ \pi]$, крім точки $x = \frac{\pi}{2}$, в якій сума ряду дорівнює $\frac{\pi}{4}$, а значення функції $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Ряд є збіжним на всій числовій осі до 2π-періодичної функції

$$F(x) = \begin{cases} x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & -\pi \leqslant x < -\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi; \\ \frac{\pi}{4}, & x = \pm\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Зокрема, якщо в ряді Фур'є покласти $x = \frac{\pi}{2}$, дістанемо відомий ряд

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right),$$

$$\text{або } \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots . \ \bullet$$

3.6. Комплексна форма ряду Фур'є

Нехай

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx);$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \tag{89}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Застосувавши формули Ейлера (п. 2.7), дістанемо

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}, \tag{90}$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}. \tag{91}$$

З формул (89) і (91) маємо

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}dx. \tag{92}$$

Зокрема,

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}, \tag{93}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{inx}dx. \tag{94}$$

Враховуючи формули (90) і (93), запишемо ряд (89) у вигляді

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}),$$

або

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}. \tag{95}$$

Коефіцієнти цього ряду, згідно з формулами (92) і (94), можна записати у вигляді

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{96}$$

Рівність (95) називають *комплексною формою ряду Фур'є*, а числа c_n, знайдені за формулою (96) — *комплексними коефіцієнтами Фур'є*.

Аналогічно можна знайти комплексну форму ряду Фур'є на відрізку $[-l; l]$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{i\pi n x}{l}};$$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x)\, e^{\frac{-i\pi n x}{l}} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{97}$$

Члени цього ряду $c_n e^{\frac{i\pi x n}{l}}$ називають *гармоніками*, коефіцієнти c_n — *комплексними амплітудами гармонік*, а числа $\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$, $(n = 0; \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — *хвильовими числами функції*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\alpha_n x}.$$

Сукупність хвильових чисел називається *спектром*. Якщо ці числа відкладати на числовій осі, то дістанемо дискретну множину точок. Відповідний цій множині спектр називають *дискретним спектром*.

Приклад

Написати ряд Фур'є в комплексній формі для функції $f(x)$ з періодом $2l = 2$, якщо

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0; \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

○ За формулами (97) маємо

$$c_n = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-i\pi nx}dx = -\left.\frac{e^{-i\pi nx}}{2i\pi n}\right|_0^1 = -\frac{e^{-i\pi n}-1}{2i\pi n} =$$

$$= \frac{e^{-i\pi n}-1}{2\pi n}\, i = \frac{\cos(-\pi n) + i\sin(-\pi n) - 1}{2\pi n}\, i = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n}\, i.$$

Оскільки задана функція кусково-монотонна, то у всіх точках неперервності цієї функції справедлива рівність

$$f(x) = i\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{2\pi n}e^{i\pi nx} = i\left(\left(\frac{e^{i\pi x}}{\pi} + \frac{e^{-i\pi x}}{\pi}\right) +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{e^{3i\pi x}}{3\pi} + \frac{e^{-3i\pi x}}{3\pi}\right) + \left(\frac{e^{5i\pi x}}{5\pi} + \frac{e^{-5i\pi x}}{5\pi}\right) + \cdots\right). \; \bullet$$

3.7. Ряд Фур'є за ортогональною системою функцій

Нехай на відрізку $[a;\ b]$ задано нескінченну систему функцій

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots. \tag{98}$$

Якщо для довільних $n \neq k$

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 0, \tag{99}$$

а для $n = k$

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = \lambda_n, \quad 0 < \lambda_n < \infty,\ n = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{100}$$

то система функцій (98) називається *ортогональною на відрізку* $[a;\ b]$.

Приклади

1. Система функцій

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots$$

ортогональна на відрізку $[-\pi;\ \pi]$.

2. Система функцій

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \ldots$$

ортогональна на відрізку $[0;\ \pi]$.

3. Система функцій

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{\pi nx}{l},\ \sin\frac{\pi nx}{l},\ \ldots$$

ортогональна на відрізку $[-l;\ l]$.

4. Системи функцій

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{n\pi x}{l},\ \ldots;$$

$$\sin\frac{\pi x}{l},\quad \sin\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \sin\frac{n\pi x}{l},\ \ldots$$

ортогональні на відрізку $[0;\ l]$.

5. Система функцій

$$\sin nx,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \sin nx$$

ортогональна на відрізку $[0;\ \pi]$.

Рекомендуємо читачеві упевнитись в цьому самостійно, обчисливши для кожної з наведених систем інтеграли (99) і (100).

6. Не варто думати, що властивість ортогональності мають лише системи тригонометричних функцій.

Побудуємо систему $\{P_n(x)\}$ ортогональних многочленів. Розглянемо систему функцій

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots,\ -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{101}$$

Перші дві функції ортогональні на відрізку $[-1;\ 1]$:

$$\int_{-1}^{1} 1\cdot x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0,$$

тому покладемо $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$. Проте x^2 вже не ортогональний 1, тому що

$$\int_{-1}^{1} 1\cdot x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Отже, $P_2(x) \neq x^2$; візьмемо $P_2(x)$ як лінійну комбінацію перших трьох функцій системи (101) $1,\ x,\ x^2$, тобто покладемо $P_2(x) = ax^2 + bx + c$. Підберемо коефіцієнти $a,\ b,\ c$ так, щоб многочлен $P_2(x)$ був ортогональним до многочленів $P_0(x)$ і $P_1(x)$, тобто

$$\int_{-1}^{1} P_2(x)\,P_0(x)\,dx = 0,\qquad \int_{-1}^{1} P_2(x)\,P_1(x)\,dx = 0,$$

або

$$\int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c)\,dx = 0,\qquad \int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c)\,x\,dx = 0,$$

звідки

$$\left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}a + 2c = 0,\quad a = -3c;$$

$$\left(\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}b = 0,\quad b = 0,$$

Отже, $P_2(x) = -3cx^2 + c = c\,(1 - 3x^2)$, де c — довільна стала.

Підбирають її, як правило, так, щоб $P_2(1) = 1$;

$$c\,(1 - 3\cdot 1^2) = 1,\quad c = -\frac{1}{2},\ \text{тому}\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

Многочлен $P_3(x)$ шукатимемо як лінійну комбінацію перших чотирьох функцій системи (101): $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Із системи рівнянь

$$\int_{-1}^{1} P_3(x) P_0(x)\,dx = 0; \quad \int_{-1}^{1} P_3(x) P_1(x)\,dx = 0;$$

$$\int_{-1}^{1} P_3(x) P_2(x)\,dx = 0; \quad P_3(1) = 1$$

знаходимо, що

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

Аналогічно будуємо

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3); \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

і т. д. Ці многочлени ортогональні на відрізку $[-1; 1]$. Вони називаються многочленами Лежандра і широко використовуються в математиці і фізиці [13].

Послідовність дій ортогоналізації, подібну до тієї, яку ми виконали над системою функцій (101) на відрізку $[-1; 1]$, можна повторити для довільної системи лінійно незалежних функцій на довільному інтервалі, якщо інтеграли від квадратів цих функцій на взятому інтервалі є збіжними.

Нехай функція $f(x)$ розкладається в ряд за функціями ортогональної системи (98)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x). \tag{102}$$

Вважатимемо ряд (102) рівномірно збіжним на відрізку $[a; b]$. Визначимо коефіцієнти c_n. Помножимо обидві частини рівності (101) на $\varphi_n(x)$ і результат почленно проінтегруємо. Враховуючи рівності (99) і (100), дістанемо

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = c_n \int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx,$$

звідки

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx}. \tag{103}$$

Ряд (102) називаються *рядом Фур'є функції $f(x)$ за системою ортогональних функцій* (98), а коефіцієнти c_n цього ряду, обчислені за формулами (103) — *коефіцієнтами Фур'є* функції $f(x)$ за системою функцій (98).

Ряди Фур'є за системами ортогональних функцій (їх називають ще *узагальненими рядами Фур'є*) використовуються при розв'язуванні багатьох практичних задач, зокрема задач математичної фізики.

Завдання для самоконтролю

1. Який ряд називається тригонометричним? У чому полягає задача про зображення функції рядом Фур'є?
2. Вивести формули для коефіцієнтів Фур'є функції $f(x)$, $x \in [-\pi; \pi]$.
3. Сформулювати достатні умови для зображення функції рядом Фур'є.
4. Вказати особливості рядів Фур'є для парних і непарних функцій і вивести відповідні формули.
5. Написати ряд Фур'є і вивести формули для його коефіцієнтів, якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[-l; l]$.
6. Як можна розкласти в ряд Фур'є функцію, задану на відрізку $[0; \pi]$ або $[0; l]$?
7. Записати ряд Фур'є в комплексній формі. Вивести формули для коефіцієнтів цього ряду.
8. Яка система функцій називається ортогональною? Навести приклади.
9. У чому полягає задача про зображення функції рядом за ортогональною системою? Як знайти коефіцієнти цього ряду?
10. Зобразити рядом Фур'є 2π-періодичні функції:

а) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}, & x \in (-\pi; 0); \\ 1, & x \in [0; \pi]; \end{cases}$

б) $f(x) = 2x - 3, \quad x \in [-\pi; \pi)$.

11. Розкласти в ряд за косинусами функцію

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, \quad x \in (0; \pi].$$

12. Розкласти в ряди Фур'є за синусами і за косинусами функцію $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$, задану на півперіоді $(0; 2]$.
13. Зобразити комплексною формою ряду Фур'є 2π-періодичну функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0; \\ e^{-x}, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

14. Довести, що система функцій

$$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \cos\frac{3\pi x}{l}, \sin\frac{3\pi x}{l}, \ldots$$

ортогональна на відрізку $[-l; l]$.

Відповіді. 10. а) $f(x) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$; б) $f(x) = -3 + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n}$. 11. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. 12. $f(x) =$

$$= \frac{1}{4} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2} \cos\frac{\pi n x}{2}, \qquad f(x) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^3} \times$$

$$\times \sin\frac{\pi n x}{2}. \qquad \textbf{13.}\ f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{2\pi} \quad \frac{1-in}{1+n^2} e^{inx}.$$

§ 4. ІНТЕГРАЛ ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

В п. 3.2 було показано, що всяку кусково-монотонну функцію, визначену на довільному скінченному проміжку, можна розкласти в ряд Фур'є, тобто зобразити нескінченною сумою простих гармонік. Чи не можна дістати такий самий розклад на гармоніки чи подібний до нього для неперіодичних функцій, заданих на нескінченному проміжку $(-\infty;\ +\infty)$? Виявляється, що це можна зробити за допомогою інтеграла Фур'є.

4.1. Інтеграл Фур'є

Нехай неперіодична кусково-монотонна функція $f(x)$ задана на нескінченному проміжку $(-\infty;\ +\infty)$, *абсолютно інтегровна* на ньому, тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = Q < \infty. \qquad (104)$$

Тоді на довільному скінченному проміжку $(-l;\ l)$ цю функцію можна розкласти в ряд Фур'є (87). Підставляючи в цей ряд значення коефіцієнтів a_0, a_n, b_n, з формул (89) дістанемо

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} (f(t) \cos\alpha_n t \cos\alpha_n x +$$

$$+ f(t) \sin\alpha_n t \sin\alpha_n x)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \cos\alpha_n (t-x)\, dt, \qquad (105)$$

де $\alpha_n = \frac{\pi n}{l}$ — хвильові числа функції $f(x)$. Позначимо

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{\pi}{l} = \Delta\alpha_n.$$

Тоді формула (105) набере вигляду

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-l}^{l} f(t) \cos\alpha_n (t-x)\, dt \right] \Delta\alpha_n. \qquad (106)$$

Перейдемо у цій формулі до границі при $l \to +\infty$. Оскільки $f(x)$ не залежить від l, то

$$\lim_{l \to +\infty} f(x) = f(x).$$

З умови (104) випливає, що перший доданок у правій частині формули (106) прямує до нуля при $l \to +\infty$:

$$\lim_{l \to +\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt \leqslant \lim_{l \to +\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} |f(t)|\, dt < \lim_{l \to +\infty} \frac{Q}{2l} = 0.$$

Вираз у квадратних дужках формули (106) при довільному фіксованому l є функція від α_n:

$$\int_{-l}^{l} f(t) \cos \alpha_n (t - x)\, dt = \varphi(\alpha_n),$$

тому

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^{l} f(t) \cos \alpha_n (t - x)\, dt \right) \Delta\alpha_n =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{l \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\alpha_n)\, \Delta\alpha_n.$$

Знайдена сума нагадує інтегральну суму для функції $\varphi(\alpha)$, де $\alpha \in (0; +\infty)$. При досить великих значеннях l величина $\Delta\alpha_n = \frac{\pi}{l}$ стає дуже малою, а спектр хвильових чисел — дуже щільним. Якщо $l \to +\infty$, то $\Delta\alpha_n \to 0$, тобто хвильові числа α_n набувають всіх можливих значень від 0 до $+\infty$; дискретний спектр хвильових чисел стає неперервним, тому природно сподіватись, що

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\alpha_n)\, \Delta\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \varphi(\alpha)\, d\alpha$$

або

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha (t - x)\, dt \right) d\alpha. \tag{107}$$

Знайдений інтеграл називається *інтегралом Фур'є для функції* $f(x)$. Фур'є дістав його у 1811 р.

Точного доведення цієї формули ми не наводимо. Зазначимо лише, що формула (107) справедлива для всіх точок x, в яких функція $f(x)$ неперервна. Якщо ж x_0 — точка розриву, то

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha (t - x_0)\, dt \right) d\alpha = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Отже, коли функція $f(x)$ визначена і абсолютно інтегровна на числовій осі і кусково-монотонна на довільному скінченному проміжку, то для неї існує інтеграл Фур'є. У точках неперервності функції $f(x)$ виконується рівність (107), а в точках розриву даної функції інтеграл Фур'є дорівнює середньому арифметичному її односторонніх границь.

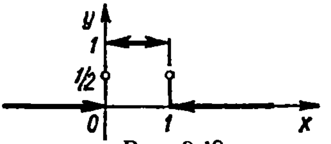


Рис. 9.19

Запишемо інтеграл Фур'є в іншому вигляді:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\alpha t - \alpha x)\,dt\right)d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt\right) \times$$

$$\times \cos\alpha x\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt\right)\sin\alpha x\,d\alpha. \tag{108}$$

Введемо позначення

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt, \quad B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt, \tag{109}$$

тоді

$$f(x) = \int_0^{\infty}(A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x)\,d\alpha. \tag{110}$$

Інтеграл Фур'є у формулі (110) подібний до ряду Фур'є: знак суми ряду Фур'є замінено знаком інтеграла, коефіцієнти a_n та b_n ряду замінено функціями $A(\alpha)$ та $B(\alpha)$. По аналогії з рядом Фур'є кажуть, що формула (110) дає розклад функції $f(x)$ на гармоніки з частотами α, що неперервно змінюються від 0 до $+\infty$. Закон зміни амплітуд залежить від α і визначається формулами (109).

Приклад

Зобразити інтегралом Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1; \\ 0{,}5, & x = 0, \quad x = 1; \\ 0, & x < 0, \quad x > 1. \end{cases}$$

○ Ця функція кусково-монотонна на будь-якому скінченному відрізку $[-l; l]$, оскільки складається з трьох неперервних частин (рис. 9.19):

$$f(x) = 0, \quad -\infty < x < 0; \quad f(x) = 1, \quad 0 < x < 1; \quad f(x) = 0, \quad 1 < x < +\infty.$$

Вона також абсолютно інтегровна на всій числовій осі:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx + \int_0^1 dx + \int_1^{+\infty} 0\cdot dx = 1 < \infty,$$

Отже, таку функцію в точках її неперервності можна подати через інтеграл Фур'є.
Згідно з формулою (107) маємо

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^1 \cos\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\alpha(t-x)}{\alpha}\Bigg|_0^1 d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\alpha(1-x)+\sin\alpha x}{\alpha}\,d\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha(1-2x)}{2}\,d\alpha.$$

У точках розриву $x = 0$ та $x = 1$ інтеграл Фур'є дорівнює

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, знайдений інтеграл Фур'є зображає дану функцію на всій числовій осі. Зокрема, якщо $x = 0$, то дістанемо

$$f(0) = \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha,$$

звідки

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Ми обчислили інтеграл, який за формулою Ньютона — Лейбніца не обчислюється, оскільки первісна від функції $\frac{\sin x}{x}$ не виражається через елементарні функції (гл. 7, п. 1.8).

4.2. Інтеграл Фур'є для парних і непарних функцій

Припустимо, що функція $f(x)$ парна, тоді функція $f(t)\cos\alpha t$ також парна, а функція $f(t)\sin\alpha t$ непарна. Тому формула (108) набере вигляду

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x\,d\alpha. \tag{111}$$

Аналогічно, якщо $f(x)$ непарна функція, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt\right)\sin\alpha x\,d\alpha. \tag{112}$$

Скориставшись виразами (109), запишемо інтеграли (111) і (112) у вигляді:

$$f(x) = \int_0^\infty A(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha; \tag{113}$$

$$f(x) = \int_0^\infty B(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha. \tag{114}$$

Таким чином, якщо $f(x)$ парна функція, то вона зображається інтегралом Фур'є вигляду (111) або (112). Якщо ж $f(x)$ непарна функція, то її зображення інтегралом Фур'є має вигляд (112) або (114).

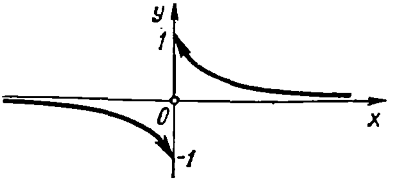


Рис. 9.20

Коли функція $f(x)$ задана лише на проміжку $(0; +\infty)$, то її можна продовжити на проміжок $(-\infty; +\infty)$ різними способами, зокрема парним або непарним. Це означає, що таку функцію можна зобразити різними інтегралами Фур'є, зокрема інтегралами (111) або (112).

Зазначимо, що інтеграли Фур'є (113) і (114) аналогічні відповідним рядам Фур'є (78) і (80) для парних і непарних функцій.

Приклад

Зобразити інтегралом Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 < x < +\infty; \\ -e^{x}, & -\infty < x < 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

○ Ця функція задана на всій осі і кусково-монотонна на довільному скінченному відрізку $[-l; l]$, оскільки складається з двох неперервних частин і має один розрив першого роду при $x = 0$ (рис. 9.20).

Переконаємось, що $f(x)$ абсолютно інтегровна:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x} dx =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} e^{x} dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} e^{-x} dx =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} e^{x} \Big|_{a}^{0} - \lim_{b \to +\infty} e^{-x} \Big|_{0}^{b} = 2 < \infty.$$

Отже, задану функцію можна зобразити інтегралом Фур'є. Оскільки ця функція непарна, то за формулою (112) маємо

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\int_{0}^{\infty} e^{-t} \sin \alpha t\, dt \right) \sin \alpha x\, dt.$$

Інтегруючи частинами, знаходимо

$$\int e^{-t} \sin \alpha t\, dt = \alpha - \alpha^2 \int_{0}^{\infty} e^{-t} \sin \alpha t\, dt; \quad \int_{0}^{\infty} e^{-t} \sin \alpha t\, dt = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}.$$

Таким чином,

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x}{1+\alpha^2}\,d\alpha,\quad x\in(-\infty;+\infty).\ \bullet$$

4.3. Інтеграл Фур'є в комплексній формі. Перетворення Фур'є. Нехай функція $f(x)$ зображується інтегралом Фур'є за формулою (110). Скориставшись формулами Ейлера, дістанемо

$$f(x)=\int\limits_0^{\infty}(A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x)\,d\alpha=$$

$$=\int\limits_0^{\infty}\left(A(\alpha)\frac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{2}+B(\alpha)\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2i}\right)d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}((A(\alpha)-iB(\alpha))e^{i\alpha x}+(A(\alpha)+iB(\alpha))e^{-i\alpha x})\,d\alpha. \qquad (115)$$

Введемо позначення $F(\alpha)=(A(\alpha)+iB(\alpha))\pi$. Згідно з формулами (109) дістанемо

$$F(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)(\cos\alpha t-i\sin\alpha t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-i\alpha t}dt. \qquad (116)$$

Аналогічно

$$\pi(A(\alpha)+iB(\alpha))=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{i\alpha t}dt=F(-\alpha), \qquad (117)$$

Враховуючи формули (116) і (117), запишемо інтеграл (115) у вигляді

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}(F(\alpha)\,e^{i\alpha x}+F(-\alpha)\,e^{-i\alpha x})\,d\alpha. \qquad (118)$$

Перетворимо інтеграл від другого доданку, виконавши заміну змінної $\alpha=-\beta$:

$$\int\limits_0^{+\infty}F(-\alpha)\,e^{-i\alpha x}d\alpha=-\int\limits_0^{-\infty}F(\beta)\,e^{i\beta x}d\beta=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{0}F(\beta)\,e^{i\beta x}d\beta=\int\limits_{-\infty}^{0}F(\alpha)\,e^{i\alpha x}d\alpha,$$

тоді формула (118) набере вигляду

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)\,e^{i\alpha x}d\alpha. \qquad (119)$$

З формул (116) і (119) випливає, що

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-i\alpha t}dt\right)e^{i\alpha x}d\alpha. \qquad (120)$$

Права частина формули (120) називається інтегралом Фур'є в комплексній формі для функції $f(x)$.

Функція $F(\alpha)$, яка визначається формулою (116), називається *перетворенням Фур'є функції* $f(x)$; в свою чергу, функція $f(x)$, зображена формулою (119), називається *оберненим перетворенням Фур'є для функції* $F(\alpha)$.

Якщо функція $f(x)$ парна (або задана на проміжку $(0; +\infty)$ і продовжена на всю числову вісь парним способом), то з формул (111) маємо

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}F_C(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha,$$

де

$$F_C(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt.$$

Аналогічно для непарної функції (або при непарному продовженні) з формули (112) дістанемо

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}F_S(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha, \quad \text{де} \quad F_S(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt.$$

Функції $F_C(\alpha)$ і $F_S(\alpha)$ називаються відповідно *косинус-перетворенням* і *синус-перетворенням Фур'є для функції* $f(x)$.

Функції $F(\alpha)$, $F_C(\alpha)$, $F_S(\alpha)$ називають також *спектральною щільністю функції* $f(x)$. Теорія перетворень Фур'є широко використовується для розв'язування багатьох практичних задач. Існують таблиці перетворень Фур'є, в яких наведено відповідні пари функцій $f(x)$ і $F(\alpha)$.

Приклад

Зобразити інтегралом Фур'є в комплексній формі функцію

$$f(x)=\begin{cases} e^{x}, & 0<x<\infty; \\ 0, & -\infty<x<0; \\ 0{,}5, & x=0. \end{cases}$$

○ За формулою (116) знайдемо перетворення Фур'є заданої функції

$$F(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-i\alpha t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-t}e^{-i\alpha t}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-t(1+i\alpha)}dt=\frac{1}{1+i\alpha}.$$

Комплексна форма (120) інтеграла Фур'є у даному разі має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1 + i\alpha} d\alpha. \bullet$$

Завдання для самоконтролю

1. Що називається інтегралом Фур'є?
2. Назвати достатні умови для зображення функції інтегралом Фур'є.
3. Записати інтеграл Фур'є для парних і непарних функцій.
4. Чим схожі інтеграл Фур'є і ряд Фур'є? У чому їх суттєва відмінність?
5. Записати інтеграл Фур'є в комплексній формі.
6. Що називається перетворенням Фур'є? Оберненим перетворенням Фур'є?
7. Що називається косинус- і синус-перетворенням Фур'є?
8. Зобразити інтегралом Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x \notin \left[0; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$
9. Зобразити інтегралом Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 1]; \\ 0, & x \in (1; +\infty), \end{cases}$

продовживши її на проміжок $(-\infty; 0)$ парним способом.

10. Знайти спектральну щільність перетворення Фур'є функції $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

Відповіді. 8. $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\cos \alpha x}{1 - \alpha^2} \cos \frac{\pi\alpha}{2} + \frac{\sin \alpha x}{1 - \alpha^2} \left(\sin \frac{\pi\alpha}{2} - \alpha \right) \right) d\alpha,$ $x \neq 0,$ $x \neq \frac{\pi}{2}$. 9. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha \cos x\alpha}{\alpha} d\alpha,$ $x \neq 0,$ $x \neq 1$. 10. $F(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{2\alpha}$.

Глава 10

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Узагальнимо на функції декількох змінних основні ідеї і методи інтегрального числення функцій однієї змінної (гл. 7).

§ 1. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла

1°. *Задача про об'єм циліндричного тіла.* Нехай маємо тіло, обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y) \geqslant 0$, знизу — замкненою обмеженою областю D площини Oxy, з боків — циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області D, а твірні паралельні осі Oz (рис. 10.1) Таке тіло називають *циліндричним*.

Обчислимо його об'єм V. Для цього довільним способом розіб'ємо область D на n частин D_i, які не мають спільних внутрішніх точок, і площі яких дорівнюють ΔS_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. У кожній області D_i виберемо довільну точку P_i $(\xi_i; \eta_i)$, знайдемо значення функції в цій точці $f(\xi_i, \eta_i)$ і обчислимо добуток $f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i$. Цей добуток дорівнює об'єму циліндричного стовпчика з твірними, паралельними осі Oz, основою D_i і висотою $f(P_i) = f(\xi_i, \eta_i)$. Усього таких стовпчиків є n, і сума їхніх об'ємів

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i \tag{1}$$

наближено дорівнює об'єму циліндричного тіла $V \approx V_n$. Це наближення тим точніше, чим більше число n і чим менші розміри областей D_i. Назвемо діаметром $d(G)$ замкненої обмеженої області G найбільшу відстань між двома точками межі цієї області. Позначимо через λ найбільший з діаметрів областей $D_i : \lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d(D_i)$. Тоді природно об'єм даного тіла визначити як границю суми (1) при $\lambda \to 0$:

$$V = \lim_{\lambda \to 0} V_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i. \tag{2}$$

2°. *Задача про масу пластини.* Нехай маємо плоску неоднорідну матеріальну пластину, формою якої є область D (рис. 10.2). В області D задана неперервна функція $\gamma = \gamma(x, y)$, яка визначає густину пластини в точці $(x; y)$. Знайдемо масу m пластини. Для цього довільним способом розіб'ємо область D на частини D_i, які не мають спільних внутрішніх точок, і площі яких дорівнюють ΔS_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

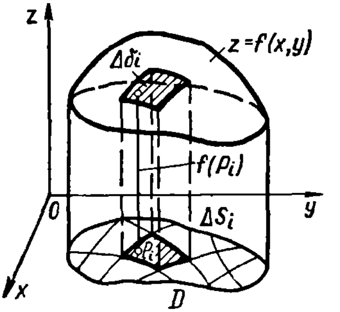


Рис. 10.1

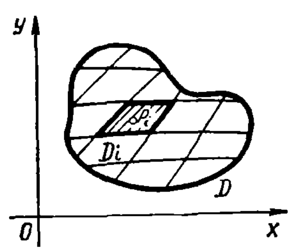


Рис. 10.2

У кожній області D_i візьмемо яку-небудь точку P_i (ξ_i, η_i) і знайдемо густину в цій точці:

$$\gamma(P_i) = \gamma(\xi_i, \eta_i).$$

Якщо розміри області D_i достатньо малі, то густина в кожній точці $(x;\ y) \in D_i$ мало відрізнятиметься від значення $\gamma(P_i)$. Тоді добуток $\gamma(P_i)\,\Delta S_i$ наближено визначає масу тієї частини пластини, яка займає область D_i, а сума

$$m_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i \tag{3}$$

є наближеним значенням маси m всієї пластини. Точне значення маси дістанемо як границю суми (3) при $\lambda \to 0$:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} m_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i. \tag{4}$$

Таким чином, різні за змістом задачі ми звели до знаходження границь (2) і (4) одного й того самого виду. Можна навести ще ряд задач з фізики і техніки, розв'язання яких приводить до обчислення подібних границь. У зв'язку з цим виникає потреба у вивченні властивостей цих границь, незалежно від змісту тієї чи іншої задачі. Кожна така границя називається подвійним інтегралом. Дамо точні означення.

1.2. Поняття подвійного інтеграла. Умови його існування та властивості

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в замкненій обмеженій області $D \subset R_2$. Вважатимемо, що межа області D складається із скінченного числа неперервних кривих, кожна з яких визначається функцією виду $y = f(x)$ або $x = \varphi(y)$.

Розіб'ємо область D на n частини D_i, які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких дорівнюють ΔS_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. У кожній області D_i візьмемо довільну точку P_i $(\xi_i; \eta_i)$ і утворимо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i, \tag{5}$$

яку назвемо *інтегральною сумою для функції* $z = f(x, y)$ по області D. Нехай $\lambda = \max\limits_{1 \leq i \leq n} d(D_i)$ — найбільший з діаметрів областей D_i.

Якщо інтегральна сума (5) при $\lambda \to 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття області D на частині області D_i, ні від вибору точок P_i в них, то ця границя називається *подвійним інтегралом* і позначається одним із таких символів:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dS \quad \text{або} \quad \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy.$$

Таким чином, за означенням

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dxdy = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i. \tag{6}$$

У цьому випадку функція $f(x, y)$ називається *інтегровною в області* D; D — *областю інтегрування;* x, y — *змінними інтегрування;* dS (або $dxdy$) — *елементом площі.*

Звернемося до задач п. 1.1. Якщо границі в рівностях (2) і (4) існують, то з цих рівностей і формули (6) дістаємо формули для обчислення об'єму циліндричного тіла

$$V = \iint\limits_{D} f(x, y)\,dxdy \tag{7}$$

та маси пластинки

$$m = \iint\limits_{D} \gamma(x, y)\,dxdy. \tag{8}$$

Якщо у формулі (7) покласти $f(x, y) \equiv 1$, $(x; y) \in D$, то дістанемо формулу для обчислення площі S області D:

$$S = \iint\limits_{D} dxdy. \tag{9}$$

Рівності (7) і (8) розглядають відповідно як геометричний та механічний зміст подвійного інтеграла, якщо підінтегральна функція невід'ємна в області D.

***Теорема** (достатня умова інтегровності функції). Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, то вона інтегровна в цій області.*

Є ще й інші умови існування подвійного інтеграла, але надалі ми вважатимемо, що підінтегральна функція $f(x, y)$ в області інтегрування D є неперервною.

Порівнюючи означення подвійного інтеграла (6) та означення визначеного інтеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

бачимо, що конструктивно ці означення цілком аналогічні: в обох випадках розглядається деяка функція f, але в першому випадку це функція однієї змінної, визначена на одновимірній області — відрізку $[a; b] \subset R_1$, а в другому — це функція двох змінних, визначена у двовимірній області $D \subset R_2$. В обох випадках область визначення розбивається на частини, в кожній з яких береться довільна точка і в ній знаходиться значення функції. Після цього знайдене значення функції множиться на міру відповідної частини області визначення. У випадку однієї змінної такою мірою була довжина Δx_i відрізка $[x_i; x_{i+1}]$, а у випадку двох змінних — площа ΔS_i області $D_i \subset D$. Наступні кроки знову однакові: утворюються інтегральні суми і знаходяться їхні границі, коли міра частин області визначення прямує до нуля. Пізніше ми побачимо, що за цією самою схемою будується і потрійний інтеграл, тільки мірою області там є об'єм.

У зв'язку з цим, *властивості подвійного інтеграла* аналогічні відповідним властивостям визначеного інтеграла. Сформулюємо ці властивості. (Рекомендуємо читачеві повторити матеріал п. 2.3 гл. 7, довести ці властивості самостійно і дати їм геометричну інтерпретацію.)

1°. *Сталий множник можна винести за знак подвійного інтеграла:*

$$\iint_D Cf(x, y)\,dxdy = C\iint_D f(x, y)\,dxdy, \quad C = \text{const}.$$

2°. *Подвійний інтеграл від суми двох функцій дорівнює сумі подвійних інтегралів від цих функцій:*

$$\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)]\,dxdy = \iint_D f(x, y)\,dxdy \pm \iint_D g(x, y)\,dxdy.$$

Ця властивість має місце для суми довільного скінченного числа функцій.

3°. *Якщо в області D функція $f(x, y) \geqslant 0$, то*

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy \geqslant 0.$$

4°. *Якщо функції $f(x, y)$ і $g(x, y)$ визначені в одній і тій самій області D і $f(x, y) \geqslant g(x, y)$,*

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy \geqslant \iint_D g(x, y)\,dxdy.$$

5°. *(Адитивність подвійного інтеграла.) Якщо область інтегрування функції $f(x, y)$ розбити на області D_1 і D_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то*

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)\,dxdy.$$

Ця властивість називається *адитивністю подвійного інтеграла* і справедлива для довільного скінченного числа областей, які складають область D і не мають спільних внутрішніх точок.

6°. *(Оцінка подвійного інтеграла). Якщо функція неперервна в обмеженій замкненій області D, яка має площу S, то*

$$mS \leqslant \iint_D f(x, y)\,dxdy \leqslant MS,$$

де m і M — відповідно найменше і найбільше значення підінтегральної функції в області D.

7°. *(Середнє значення функції.) Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, яка має площу S, то в цій області існує така точка $(x_0; y_0)$, що*

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = f(x_0, y_0)\,S.$$

Величину

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{S}\iint_D f(x, y)\,dxdy$$

називають *середнім значенням функції* $f(x, y)$ в області D.

1.3. Обчислення подвійного інтеграла

Обчислення подвійного інтеграла за формулою (6) як границі інтегральної суми, так само як і у випадку визначеного інтеграла, пов'язане із значними труднощами. Щоб уникнути їх, обчислення подвійного інтеграла зводять до обчислення так званого повторного інтеграла — двох звичайних визначених інтегралів.

Покажемо, як це робиться. Припустимо, що при $(x; y) \in D$ функція $f(x, y) \geqslant 0$. Тоді, згідно з формулою (7), подвійний інтеграл виражає об'єм циліндричного тіла (рис. 10.3) з основою D, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y)$. Обчислимо цей об'єм за допомогою методу паралельних перерізів (гл. 7, п. 3.3):

$$V = \int_a^b S(x)\,dx, \qquad (9')$$

де $S(x)$ — площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, а $x = a$ та $x = b$ — рівняння площин, які обмежують дане тіло. Перед тим, як обчислювати площу зробимо певні припущення відносно області D.

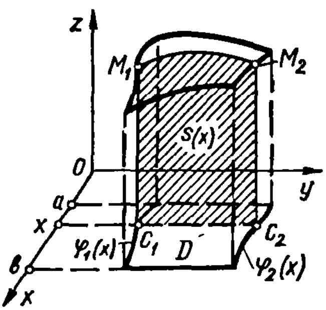


Рис. 10.3

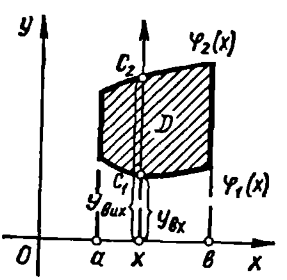


Рис. 10.4

Припустимо спочатку, що область інтегрування D обмежена двома неперервними кривими $y = \varphi_1(x)$ та $y = \varphi_2(x)$ і двома прямими $x = a$ та $x = b$, причому $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ для всіх $x \in (a; b)$ (рис. 10.4).

Проведемо через точку $(x; 0)$, де $x \in (a; b)$, пряму, паралельну осі Oy. Ця пряма перетинає криві $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ в точках c_1 і c_2, які називатимемо відповідно точкою входу в область D і точкою виходу з області D. Ординати цих точок позначимо відповідно $y_{\text{вх}}$ та $y_{\text{вих}}$, тоді $y_{\text{вх}} = \varphi_1(x)$, $y_{\text{вих}} = \varphi_2(x)$.

Визначена таким чином область називається *правильною в напрямі осі* Oy. Інакше кажучи, область D називається правильною в напрямі осі Oy, якщо довільна пряма, яка проходить через внутрішню точку області D паралельно осі Oy, перетинає межу області не більше, ніж у двох точках.

Знайдемо тепер площу $S(x)$. Для цього проведемо через точку $(x; 0; 0)$ площину, перпендикулярну осі Ox (рис. 10.3). У перерізі цієї площини і циліндричного тіла утворюється трапеція $c_1M_1M_2c_2$. Апліката $z = f(x, y)$ точки лінії M_1M_2 при фіксованому x є функцією лише y, причому y змінюється в межах від $y_{\text{вх}} = \varphi_1(x)$ до $y_{\text{вих}} = \varphi_2(x)$. Площа $S(x)$ трапеції $c_1M_1M_2c_2$ дорівнює визначеному інтегралу

$$S(x) = \int\limits_{y_{\text{вх}}}^{y_{\text{вих}}} z\,dy = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

Підставивши знайдене значення $S(x)$ у формулу (9') і враховуючи формулу (7), дістанемо

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx,$$

або в зручнішій формі

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{10}$$

Це і є шукана формула для обчислення подвійного інтеграла. Праву частину формули (10) називають *повторним інтегралом* від функції $f(x, y)$ по області D. У повторному інтегралі (10) інтегрування виконується спочатку по змінній y (при цьому x вважається сталою), а потім по змінній x. Інтеграл по змінній y називають внутрішнім, а по змінній x — зовнішнім. У результаті обчислення внутрішнього інтеграла (в межах від $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$) одержуємо певну функцію від однієї змінної x. Інтегруючи цю функцію в межах від a до b, тобто обчислюючи зовнішній інтеграл, дістаємо деяке число — значення подвійного інтеграла.

Зауваження 1. Наведені геометричні міркування при одержанні формули (10) можливі у випадку, коли $f(x, y) \geqslant 0$, $(x; y) \in D$.

Проте формула (10) залишається справедливою і в загальному випадку. Строге доведення цієї формули ми опускаємо.

Зауваження 2. Якщо область D обмежена двома неперервними кривими $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ і двома прямими $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, причому $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ для всіх $y \in (c; d)$, тобто якщо область *D правильна в напрямі осі Ox* (рис. 10.5), то справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx. \tag{11}$$

Тут внутрішнім є інтеграл по змінній x. Обчислюючи його в межах від $\psi_1(y)$ до $\psi_2(y)$ (при цьому y вважається сталою), дістанемо деяку функцію від однієї змінної y. Інтегруючи потім цю функцію в межах від c до d, дістанемо значення подвійного інтеграла.

Зауваження 3. Якщо область D правильна в обох напрямах, то подвійний інтеграл можна обчислювати як за формулою (10), так і за формулою (11). Результати матимемо однакові.

Зауваження 4. Якщо область D не є правильною ні в напрямі осі Ox, ні в напрямі осі Oy (тобто існують вертикальні і горизонтальні прямі, які, проходячи через внутрішні точки області, перетинають її межу більше, ніж у двох точках), то таку область необхідно розбити на частини, кожна з яких є правильною областю у напрямі Ox чи Oy. Обчислюючи подвійні інтеграли по правильних областях і додаючи результати (властивість адитивності), знаходимо шуканий подвійний інтеграл по області D. Для випадку, зображеного на рис. 10.6 $\left(\text{область } D \text{ обмежена еліпсами } x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ і прямою } x = \frac{3}{4}\right)$, при інтегруванні в напрямі осі Oy маємо

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\,dxdy + \iint\limits_{D_3} f(x, y)\,dxdy.$$

У напрямі осі Ox тут потрібно було б обчислити повторні інтеграли по семи областях.

Зауваження 5. Повторні інтеграли в правих частинах формули (10) і (11) називаються *інтегралами з різним порядком інтегрування*. Щоб змінити порядок інтегрування, потрібно від формули (10) перейти до формули (11), або навпаки.

У кожному конкретному випадку, залежно від виду області D та підінтегральної функції $f(x, y)$, треба обирати той порядок інтегрування, який приводить до простіших обчислень.

Зауваження 6. Правильну в напрямі осі Oy область D коротко позначатимемо так:

$$D = \{\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),\ a \leqslant x \leqslant b\}.$$

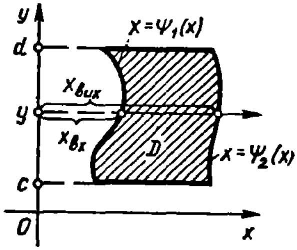


Рис. 10.5

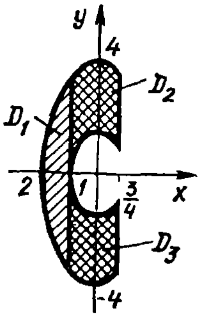


Рис. 10.6

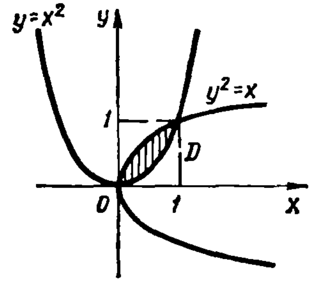


Рис. 10.7

Аналогічно

$$D = \{\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y),\ c \leqslant y \leqslant d\}$$

— область правильна в напрямі осі Ox.

Приклади

1. Обчислити подвійні інтеграли:

а) $\iint\limits_D (x + 2y)\,dxdy$, якщо область D обмежена параболами $y = x^2$, $x = y^2$;

б) $\iint\limits_D xy^2 dxdy$, якщо область D міститься в першій чверті і обмежена лініями $x = 0$, $y = x$, $y = 2 - x^2$;

в) $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}\,dxdy$, якщо область D обмежена прямими $y = x$, $y = 0$, $x = 1$.

○ а) Область інтегрування D зображено на рис. 10.7. Ця область правильна у напрямі як осі Oy, так і осі Ox. Для обчислення даного інтеграла можна користуватись як формулою (10), так і формулою (11), бо функція $f(x, y) = x + 2y$ неперервна в усій площині Oxy і, зокрема, в області D.

Область D правильна в напрямі осі Oy, тобто

$$D = \{x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x},\ 0 \leqslant x \leqslant 1\},$$

тому за формулою (10) маємо

$$\iint\limits_D (x + 2y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (x + 2y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 (xy + y^2)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^1 (x^{\frac{3}{2}} + x - x^3 - x^4)\,dx = \frac{9}{20}\,.$$

б) Область інтегрування D зображено на рис. 10.8. Оскільки функція $f(x, y) = xy^2$ неперервна в даній області, то для обчислення заданого подвійного інтеграла можна скористатися як формулою (10), так і формулою (11).

Область правильна в напрямі осі Oy, тобто

$$D = \{x \leqslant y \leqslant 2 - x^2,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\},$$

тоді за формулою (10) маємо

$$\iint\limits_D xy^2 dx dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} xy^2 dy = \int\limits_0^1 x \frac{y^3}{3}\Big|_x^{2-x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^1 (x(2-x^2)^3 - x^4)\, dx = -\frac{1}{6}\int\limits_0^1 (2-x^2)^3\, d(2-x^2) - \frac{1}{3}\int\limits_0^1 x^4 dx = \frac{67}{120}.$$

Обчислимо цей інтеграл іншим способом, користуючись формулою (11). Область D є правильною в напрямі осі Ox, але її треба розбивати на дві частини D_1 і D_2, оскільки лінія OAB, на якій містяться точки виходу з області, задається двома різними рівняннями. Маємо

$$D_1 = \{0 \leqslant x \leqslant y,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\};$$

$$D_2 = \{0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2-y},\ 1 \leqslant y \leqslant 2\};$$

$$\iint\limits_D xy^2 dx dy = \iint\limits_{D_1} xy^2 dx dy + \iint\limits_{D_2} xy^2 dx dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y xy^2 dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} xy^2 dx = \int\limits_0^1 y^2 \frac{x^2}{2}\Big|_0^y dy +$$

$$+ \int\limits_1^2 y^2 \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2-y}} dy = \int\limits_0^1 \frac{y^4}{2} dy + \int\limits_1^2 \frac{(2-y)\, y^2}{2} dy = \frac{1}{10} + \frac{11}{24} = \frac{67}{120}.$$

Очевидно, при обчисленні цього інтеграла вигідніше користуватися формулою (10).

в) Область інтегрування D зображено на рис. 10.9. Ця область правильна в обох напрямах, але обчислити даний інтеграл можна лише за формулою (10).

Якби ми застосували формулу (11), то нам треба було б обчислювати інтеграл $\int e^{\frac{y}{x}} dx$, який, як відомо (гл. 7, п. 1.8), в елементарних функціях не обчислюється. Отже,

$$\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}} dy dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x e^{\frac{y}{x}} dy = \int\limits_0^1 x e^{\frac{y}{x}}\Big|_0^x dx = \int\limits_0^1 x(e-1)\, dx = \frac{e-1}{2}. \ \bullet$$

2. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

$$I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{e^y} f(x, y)\, dx.$$

○ Тут потрібно перейти від повторного інтеграла виду (11) до інтеграла виду (10).

Область інтегрування D обмежена лініями: $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$, $x = e^y$ або $y = \ln x$ (рис. 10.10). Якщо внутрішнє інтегрування провести по y, а зовнішнє —

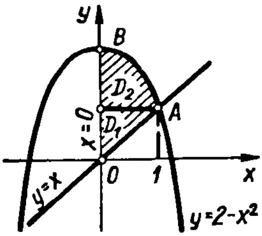


Рис. 10.8

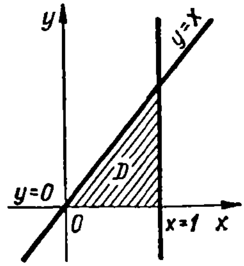


Рис. 10.9

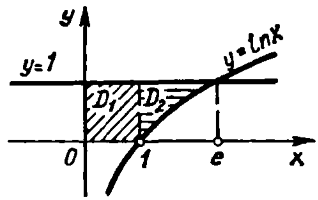


Рис. 10.10

по x, то задану область D треба розглядати як правильну в напрямі осі Oy. Оскільки лінія, на якій містяться точки входу в область, задана двома різними рівняннями, то дану область треба розбити на дві частини D_1 і D_2. Маємо

$$D_1 = \{0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\};$$

$$D_2 = \{\ln x \leqslant y \leqslant 1,\ 1 \leqslant x \leqslant e\};$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\, dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x, y)\, dy. \ \bullet$$

1.4. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярних координатах

Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в деякій замкненій і обмеженій області D, тоді існує інтеграл

$$I = \iint_D f(x, y)\, dxdy.$$

Припустимо, що за допомогою формул

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \tag{12}$$

ми переходимо в інтегралі I до нових змінних u та v. Вважатимемо, що з формул (12) однозначно можна визначити u та v:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \tag{13}$$

Згідно з формулами (13), кожній точці $M(x; y) \in D$ ставиться у відповідність деяка точка $M^*(u; v)$ на координатній площині з прямокутними координатами u і v. Нехай множина всіх точок $M^*(u; v)$ утворює обмежену замкнену область D^*. Формули (12) називаються *формулами перетворення координат*, а формули (13) — *формулами оберненого перетворення*.

Справедлива така теорема.

Теорема. *Якщо перетворення (13) переводить замкнену обмежену область D в замкнену обмежену область D^* і є взаємно однозначним, і якщо функції (12) мають в області D^* неперервні частинні похідні* *першого порядку і відмінний від нуля визначник*

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \tag{14}$$

а функція $f(x, y)$ неперервна в області D, то справедлива така формула заміни змінних:

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{D^*} f(x(u, v), y(u, v))\, |J(u, v)|\, dudv. \tag{15}$$

Функціональний визначник (14) називається *визначником Якобі* або *якобіаном*.

Таким чином, виконуючи заміну змінних в інтегралі I за формулами (12), ми маємо елемент площі $dxdy$ в координатах x, y замінити елементом площі $|J(u, v)|\, dudv$ в координатах u, v і стару область інтегрування D замінити відповідною їй областю D^*.

Розглянемо заміну декартових координат x, y полярними ρ, φ за відомими формулами $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Оскільки

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho, \quad |J(\rho, \varphi)| = \rho,$$

то формула (15) набирає вигляду

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, \rho d\rho d\varphi, \tag{16}$$

де область D задана в декартовій системі координат Oxy, а D^* — відповідна їй область в полярній системі координат.

Зауваження 1. У багатьох випадках формулу (16) доцільно застосовувати тоді, коли підінтегральна функція або рівняння границі області D містить суму $x^2 + y^2$, оскільки ця сума в полярних координатах має досить простий вигляд:

$$x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2.$$

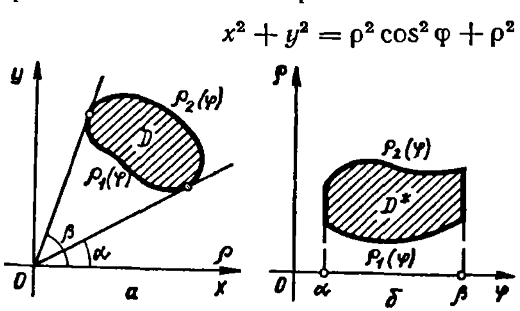


Рис. 10.11

Зауваження 2. Якщо область D (рис. 10.11, *а*) обмежена променями, які утворюють з полярною віссю кути α та β ($\alpha < \beta$) і кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ та $\rho = \rho_2(\varphi)$ ($\rho_1(\varphi) \leqslant \rho_2(\varphi)$), то полярні координати області D^* змінюються в межах $\rho_1(\varphi) \leqslant \rho \leqslant \rho_2(\varphi)$,

$\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ (рис. 10.11, *б*). Тому формулу (16) можна записати у вигляді

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho. \qquad (17)$$

Зауваження 3. Якщо область D охоплює початок координат, тобто точка O (0; 0) є внутрішньою точкою області D, то

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho, \qquad (18)$$

де $\rho(\varphi)$ — полярне рівняння межі області D.

Приклади

1. Обчислити інтеграл $\iint_D (6x - 3y)\,dxdy$, якщо область D — паралелограм, обмежений прямими $x + y = 1$, $x + y = 2$, $2x - y = 1$, $2x - y = 3$ (рис. 10.12).

○ Безпосереднє обчислення цього інтеграла надто громіздке, тому що як в напрямі осі Ox, так і в напрямі осі Oy область D треба спочатку розбити на три області, а потім обчислювати три подвійних інтеграли.

Виконаємо таку заміну змінних: $x + y = u$, $2x - y = v$, тоді прямі $x + y = 1$ та $x + y = 2$ в системі Oxy переходять в прямі $u = 1$ та $u = 2$ в системі O_1uv (рис. 10.13), а прямі $2x - y = 1$ та $2x - y = 3$ відповідно в прямі $v = 1$ та $v = 3$. Таким чином, область D (паралелограм) переходить у системі O_1uv в прямокутник D^*. Далі маємо

$$\begin{cases} x + y = u; \\ 2x - y = v; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(u + v); \\ y = \frac{1}{3}(2u - v); \end{cases}$$

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}, \quad |J(u, v)| = \frac{1}{3}.$$

За формулою (15)

$$\iint_D (6x - 3y)\,dxdy = \iint_{D^*} \left(6 \cdot \frac{1}{3}(u + v) - 3 \cdot \frac{1}{3}(2u - v)\right) \frac{1}{3}\,dudv =$$

$$= \frac{1}{3} \int_1^2 du \int_1^3 3v\,dv = 4. \quad ●$$

2. Обчислити $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dxdy$, якщо D — круг радіуса $R = 2$ з центром у початку координат.

○ Оскільки межа області D в полярних координатах задається рівнянням $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 4$ або $\rho = 2$, то за формулою (18) маємо

$$\iint\limits_D \sqrt{4-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \sqrt{4-\rho^2}\rho d\rho = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (4-\rho^2)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\, d(4-\rho^2) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{2(4-\rho^2)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^2 d\varphi = \frac{16\pi}{3}. \;\bullet$$

3. Обчислити $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, якщо область D обмежена колами $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$ (рис. 10.14).

○ Знайдемо рівняння межі області D в полярних координатах: $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 2\rho\cos\varphi$, звідси $\rho = 2\cos\varphi$ — полярне рівняннн малого кола; аналогічно знаходимо, що $\rho = 4\cos\varphi$ — полярне рівняння великого кола. Якщо кут φ змінюватиметься в межах від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то змінна ρ матиме межі від $2\cos\varphi$ до $4\cos\varphi$. Отже, за формулою (17) маємо

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{56}{3}\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^3\varphi d\varphi = \frac{56}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2\varphi)\,d(\sin\varphi) =$$

$$= \frac{56}{3}\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{224}{9}. \;\bullet$$

1.5. Застосування подвійних інтегралів до задач геометрії

1°. *Площа плоскої фігури.* Якщо в площині Oxy задана фігура, що має форму обмеженої замкненої області D, то площа S цієї фігури знаходиться, як відомо (п. 1.2), за формулою (9):

$$S = \iint\limits_D dxdy.$$

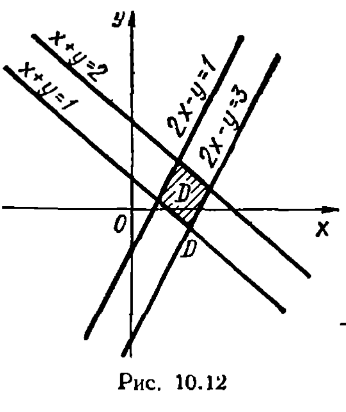


Рис. 10.12

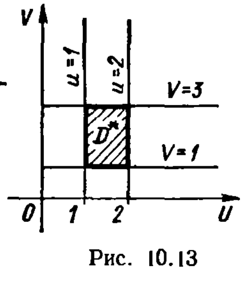


Рис. 10.13

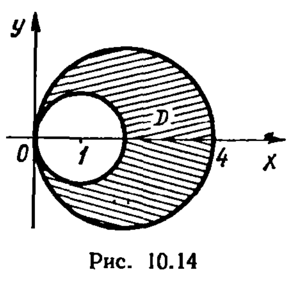


Рис. 10.14

2°. *Об'єм тіла.* Об'єм циліндричного тіла, твірні якого паралельні осі Oz і яке обмежене знизу областю D площини Oxy, а зверху — поверхнею $z = f(x, y)$, де функція $f(x, y)$ неперервна та невід'ємна в області D, знаходиться за формулою (7) (п. 1.2):

$$V = \iint_D f(x, y)\, dxdy.$$

3°. *Площа поверхні.* Якщо поверхня σ, задана рівнянням

$$z = f(x, y), \tag{19}$$

проектується на площину Oxy в область D (рис. 10.15) і функції $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ неперервні в цій області, то площу Q поверхні σ знаходять за формулою

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)}\, dxdy. \tag{20}$$

○ Виведемо цю формулу. Розіб'ємо довільним способом область D на n частин D_i, які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких дорівнюють ΔS_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. У кожній частині D_i візьмемо точку $P_i(\xi_i; \eta_i)$; на поверхні σ їй відповідатиме точка $M_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$, де $\zeta_i = f(\xi_i, \eta_i)$. Через точку M_i проведемо дотичну площину Π_i (гл. 6, п. 2.1):

$$f'_x(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f'_y(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i) - (z - \zeta_i) = 0.$$

На площині Π_i виділимо ту її частину, яка проектується на площину Oxy в область D_i. Позначимо цю частину дотичної площини через σ_i, а її площу — через $\Delta\sigma_i$. Складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i. \tag{21}$$

Границю Q суми (21), коли найбільший з діаметрів областей D_i прямує до нуля, назвемо *площею поверхні* (19), тобто за означенням покладемо

$$Q = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i. \tag{23}$$

Обчислимо цю границю. Оскільки область σ_i, яка має площу $\Delta\sigma_i$, проектується в область D_i з площею ΔS_i, то $\Delta S_i = \Delta\sigma_i \cos\gamma_i$, де γ_i — кут між площинами Π_i та Oxy (рис. 10.15), тому $\Delta\sigma_i = \frac{\Delta S_i}{\cos\gamma_i}$.

Але гострий кут γ_i дорівнює куту між віссю Oz і нормаллю $\vec{n}$ до дотичної площини, тобто куту між векторами $\vec{k} = \{0; 0; 1\}$ та $\vec{n} =$

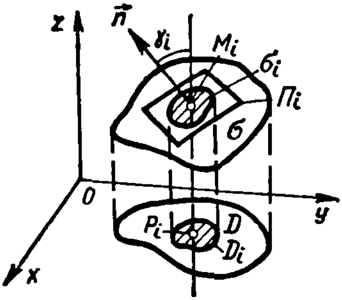


Рис. 10.15

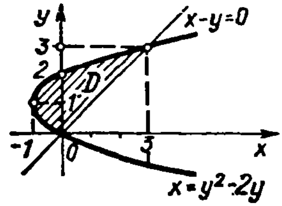


Рис. 10.16

$= \{-f'_x(\xi_i, \eta_i); -f'_y(\xi_i, \eta_i); 1\}$. За формулою (36) (гл. 2)

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i) + 1}}.$$

Отже,

$$\Delta\sigma_i = \sqrt{f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i) + 1}\Delta S_i.$$

Підставляючи значення $\Delta\sigma_i$ в (23), дістаємо

$$Q = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i) + 1}\Delta S_i.$$

Під знаком границі маємо інтегральну суму, складену для неперервної в області D функції $\sqrt{f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y) + 1}$. Ця функція інтегровна в області D, тому границя у формулі (23) існує і дорівнює подвійному інтегралу (20). ●

Приклади

1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $x = y^2 - 2y$, $x - y = 0$ (рис. 10.16).
○ Знайдемо ординату точок перетину даних ліній. Із системи

$$\begin{cases} x = y^2 - 2y; \\ x - y = 0 \end{cases}$$

маємо $y = y^2 - 2y$, $y_1 = 0$, $y_2 = 3$.

За формулою (9) знаходимо

$$S = \iint_D dxdy = \int_0^3 dy \int_{y^2-2y}^{y} dx = \int_0^3 (y - y^2 + 2y)\, dy = \int_0^3 (3y - y^2)\, dy = 4{,}5. \; ●$$

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого циліндром $y = x^2$ та площинами $z = 0$, $z = 2 - y$ (рис. 10.17, *а*).

○ Областю D тут є параболічний сегмент (рис. 10.17, *б*), тому $D = \{x^2 \leqslant y \leqslant 2; -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\}$. За формулою (7) маємо

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\, dx = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{2} (2 - y)\, dy = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(2y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{2} dx =$$

$$= \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{x^4}{2} - 2x^2 + 2\right) dx = \frac{32\sqrt{2}}{15}. \; ●$$

3. Знайти частину площі конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, яка вирізається циліндром $x^2 + y^2 - 2x = 0$ (рис. 10.18, *а*).

○ Із рівняння конуса маємо

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Областю D тут є круг $x^2 + y^2 - 2x = 0$ або $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ (рис. 10.18, *б*). За формулою (20) маємо

$$Q = \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\, dxdy = \sqrt{2} \iint\limits_D dxdy = \sqrt{2}S = \sqrt{2}\pi,$$

де $S = \pi$ — площа круга радіуса 1. Дійсно, перейшовши до полярної системи координат (див. п. 1.4, приклад 3), маємо

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi;$$

$$dxdy = \rho d\rho d\varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

тоді

$$Q = \sqrt{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} \rho d\varphi = \sqrt{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = 2\sqrt{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi = \pi\sqrt{2}. \; ●$$

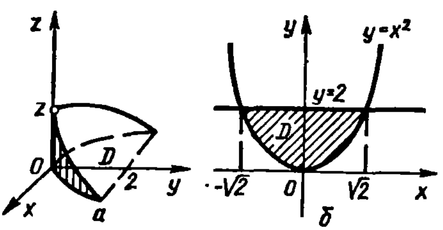


Рис. 10.17

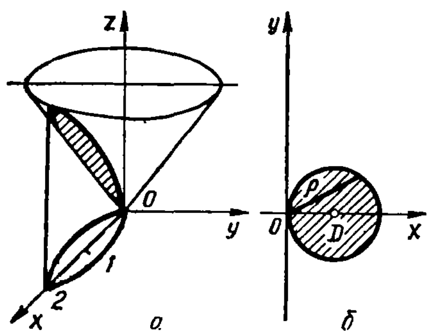


Рис. 10.18

1.6. Застосування подвійного інтеграла до задач механіки.

1^0. *Маса пластини.* Нехай на площині Oxy маємо матеріальну пластину, яка має форму обмеженої замкненої області D, в кожній точці якої густина визначається неперервною функцією $\gamma = \gamma(x, y)$. Як відомо (п. 1.2), маса такої пластини визначається за формулою (8):

$$m = \iint\limits_D \gamma(x, y)\, dxdy.$$

2^0. *Центр маси пластини. Статичні моменти.* Нехай матеріальна пластина в площині Oxy має форму області D; густина пластини в точці $M(x; y)$ дорівнює $\gamma(x, y)$, де $\gamma(x, y)$ — неперервна функція в області D. Розіб'ємо область D на частини D_i $(i = 1, 2, ..., n)$, виберемо в кожній з них довільну точку $P_i(\xi_i; \eta_i)$ і наближено вважатимемо, що маса m_i частини D_i дорівнює $\gamma(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i$, де ΔS_i — площа області D_i. Коли вважати, що кожна з цих мас зосереджена в точці $P_i(\xi_i; \eta_i) \in D$, то пластину можна розглядати як систему цих матеріальних точок. Тоді координати x_c та y_c центра маси пластини наближено визначатимуться рівностями

$$x_c \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \gamma(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i}; \quad y_c \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i \gamma(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i}.$$

Щоб знайти точні значення координат, перейдемо в цих формулах до границі при $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d(D_i) \to 0$. Тоді інтегральні суми перейдуть у подвійні інтеграли і координати центра маси пластини визначатимуться формулами

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\gamma(x, y)\, dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x, y)\, dxdy}; \quad y_c = \frac{\iint\limits_D y\gamma(x, y)\, dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x, y)\, dxdy}. \tag{24}$$

Величини

$$M_y = \iint\limits_D x\gamma(x, y)\, dxdy; \quad M_x = \iint\limits_D y\gamma(x, y)\, dxdy \tag{25}$$

називаються *статичними моментами пластини* відносно осі Oy та Ox.

Враховуючи формули (8), (24) і (25), координати центра мас можна записати у вигляді

$$x_c = \frac{M_y}{m}; \quad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

Якщо пластина однорідна, тобто має сталу густину γ_0, то в формулах (8), (24) і (25) слід покласти $\gamma(x, y) = \gamma_0$.

3°. *Моменти інерції пластини.* Відомо, що момент інерції матеріальної точки відносно деякої осі дорівнює добутку маси точки на квадрат її відстані від цієї осі, а момент інерції системи матеріальних точок відносно однієї і тієї самої осі дорівнює сумі моментів інерції всіх точок системи.

Нехай матеріальна пластина має форму області D у площині Oxy, а неперервна функція $\gamma = \gamma(x, y)$ визначає густину в кожній точці цієї пластини. Розіб'ємо область D на частини D_i, площі яких дорівнюють ΔS_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), і виберемо в кожній з цих частин довільну точку $P_i(\xi_i; \eta_i)$. Замінимо пластину системою матеріальних точок з масами $m_i = \gamma(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$. Якщо пластину розглядати як систему цих матеріальних точок, то моменти інерції пластини відносно осі Oy та відносно Ox наближено визначатимуться за формулами

$$I_y \approx \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \gamma(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i; \quad I_x \approx \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \gamma(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i.$$

Перейшовши до границі в кожній із сум при $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} d(D_i) \to 0$, дістанемо точні формули для обчислення моментів інерції розглядуваної пластини відносно координатних осей:

$$I_x = \iint_D y^2 \gamma(x, y)\,dxdy, \quad I_y = \iint_D x^2 \gamma(x, y)\,dxdy. \tag{26}$$

Знайдемо момент інерції I_0 пластини відносно початку координат. Враховуючи, що момент інерції матеріальної точки $(x; y)$ з масою m відносно початку координат дорівнює $m(x^2 + y^2)$, аналогічно дістаємо, що

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\gamma(x, y)\,dxdy. \tag{27}$$

Приклади

1. Знайти масу пластини D, обмеженої лініями $y = 0$, $x + y = 2$, $y = x^2$, якщо густина пластини в кожній точці $(x; y)$ дорівнює $\gamma(x, y) = y^2x$ (рис. 10.19).

○ Оскільки $D = \{\sqrt{y} \leqslant x \leqslant 2 - y,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, то за формулою (8) маємо

$$m = \iint_D \gamma(x, y)\,dxdy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} xy^2 dx = \int_0^1 y^2 \frac{x^2}{2}\Bigg|_{\sqrt{y}}^{2-y} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(2-y)^2 y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right) dy = \int_0^1 \left(2y^2 - \frac{5}{2}y^3 + \frac{y^4}{2}\right) dy = \frac{17}{120}. \ \bullet$$

2. Знайти центр маси однорідної пластини ($\gamma = 1$), обмеженої кривою $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ та віссю Ox (рис. 10.20).

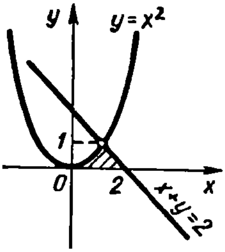


Рис. 10.19

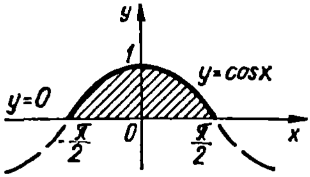


Рис. 10.20

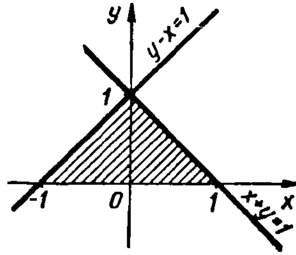


Рис. 10.21

○ Внаслідок симетрії пластини відносно осі Oy маємо $x_c = 0$. Для знаходження y_c скористаємось другою з формул (24). В даному разі $D = \left\{0 \leqslant y \leqslant \cos x, -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$, тому маємо

$$M_x = \iint_D y\gamma(x, y)\,dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} y\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2x)\,dx = \frac{\pi}{4};$$

$$m = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx = 2; \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\pi}{8}.$$

Отже, центр маси даної пластини міститься в точці $\left(0; \frac{\pi}{8}\right)$. ●

3. Знайти момент інерції I_x пластини D, обмеженої прямими $y = 0$, $x + y = 1$, $y - x = 1$, якщо густина в кожній точці пластини дорівнює ординаті цієї точки (рис. 10.21).

○ Оскільки $D = \{y - 1 \leqslant x \leqslant 1 - y,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}, \gamma(x, y) = y$, то за першою з формул (26) маємо

$$I_x = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} y^2 dy = \int_0^1 (2y^3 - 2y^4)\,dy = 0{,}1. \ ●$$

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати задачу про об'єм циліндричного тіла.
2. У чому суть задачі про масу пластини?
3. Що називається подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D?
4. Сформулювати достатню умову існування подвійного інтеграла.
5. Перерахувати властивості подвійного інтеграла.

6. Яка область D називається правильною в напрямі осі Oy? Вивести формулу для обчислення подвійного інтеграла по такій області.

7. Записати формулу для обчислення подвійного інтеграла по області D у випадку, коли ця область правильна в напрямі осі Ox.

8. Сформулювати теорему про заміну змінних у подвійному інтегралі.

9. Чому дорівнює якобіан у полярних координатах?

10. Як обчислюється подвійний інтеграл у полярних координатах за допомогою повторного?

11. Вивести формули для обчислення об'єму циліндричного тіла, площі плоскої фігури та площі поверхні.

12. Вивести формули для обчислення маси, статичних моментів та моментів інерції пластини.

13. Обчислити інтеграли:

$$\text{а) } \int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x+2y)\,dx; \qquad \text{б) } \int_{0}^{1} dy \int_{y-1}^{2y} xy\,dx\,dy.$$

14. Змінити порядок інтегрування в інтегралах:

$$\text{а) } \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\,dx; \qquad \text{б) } \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\,dx.$$

15. Обчислити подвійні інтеграли, перейшовши до полярних координат:

$$\text{а) } \int_{0}^{2} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2-y^2}\,dy; \qquad \text{б) } \int_{0}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)\,dx.$$

16. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = 0$, $y = x$, $x^2 + y^2 = 2x$.

17. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 3x$, $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $z = 0$.

18. Обчислити площу частини поверхні параболоїда $2z = x^2 + y^2$, яка вирізається циліндром $x^2 + y^2 = 1$.

19. Знайти координати центра маси верхньої половини однорідного круга $x^2 + y^2 = 9$.

20. Обчислити момент інерції пластини, обмеженої еліпсом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, відносно: а) осі Oy; б) початку координат.

Відповіді. 13. а) 50.4; б) $\frac{11}{24}$. 14. а) $\int_{0}^{1} dy \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1} f(x, y)\,dx$; б) $\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1-x} f(x, y)\,dx$. 15. а) $\frac{\pi}{6}$; б) 2π. 16. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$. 17. $6(3\pi - 4)$. 18. $\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1)$. 19. $x_c = 0$; $y_c = \frac{4}{\pi}$. 20. а) 6π; б) $\frac{39}{2}\pi$.

§ 2. ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

У попередньому параграфі ми розглянули поняття подвійного інтеграла від функції двох змінних. Визначимо інтеграл від функції трьох змінних — так званий потрійний інтеграл.

2.1. Поняття потрійного інтеграла. Умови його існування та властивості

Схема побудови потрійного інтеграла така сама, як і звичайного визначеного інтеграла та подвійного інтеграла.

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ визначена в обмеженій замкненій області $G \subset R_3$. Розіб'ємо область G сіткою поверхонь на n частин G_i, які не мають спільних внутрішніх точок і об'єми яких дорівнюють ΔV_i, $i = 1, 2, \dots, n$. У кожній частині G_i візьмемо довільну точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ і утворимо суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i, \tag{28}$$

яка називається *інтегральною сумою для функції* $f(x, y, z)$ по області G. Нехай $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(G_i)$ — найбільший з діаметрів областей G_i.

Якщо інтегральна сума (28) при $\lambda \to 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття області G на частини G_i, ні від вибору в них точок P_i, то ця границя називається *потрійним інтегралом* і позначається одним із таких символів:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV, \quad \text{або} \quad \iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz.$$

Таким чином, за означенням

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i, \tag{29}$$

де $f(x, y, z)$ — функція, інтегровна в області G; G — *область інтегрування*; x, y і z — *змінні інтегрування*; dV (або $dxdydz$) — *елемент об'єму*.

Якщо по тілу G розподілено масу з об'ємною густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$ в точці $(x; y; z) \in G$, то маса m цього тіла знаходиться за формулою

$$m = \iiint\limits_G \gamma(x, y, z)\,dxdydz. \tag{30}$$

Формула (30) аналогічна формулі (8) і може розглядатись як *механічний зміст потрійного інтеграла*, коли підінтегральна функція невід'ємна в області G. Якщо всюди в області покласти $f(x, y, z) \equiv 1$, то з формули (29) випливає формула для обчислення об'єму V тіла G:

$$V = \iiint\limits_G dxdydz. \tag{31}$$

Потрійний інтеграл є безпосереднім узагальненням подвійного інтеграла на тривимірний простір. Теорія потрійного інтеграла аналогічна теорії подвійного інтеграла, тому в більшості випадків ми обмежимося лише формулюваннями тверджень і короткими поясненнями.

Теорема *(достатня умова інтегровності функції). Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G, то вона в цій області інтегровна.*

Властивості потрійних інтегралів.

1°. *Сталий множник можна винести за знак потрійного інтеграла:*

$$\iiint\limits_G Cf(x, y, z)\,dV = C\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV.$$

2°. *Потрійний інтеграл від суми кількох інтегровних функцій дорівнює сумі потрійних інтегралів від доданків:*

$$\iiint\limits_G (f(x, y, z) \pm \varphi(x, y, z))\,dV = \iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV + \iiint\limits_G \varphi(x, y, z)\,dV.$$

3°. *Якщо в області інтегрування $f(x, y, z) \geqslant 0$, то*

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV \geqslant 0.$$

4°. *Якщо функції $f(x, y, z)$ та $\varphi(x, y, z)$ визначені в одній і тій самій області G і $f(x, y, z) \geqslant \varphi(x, y, z)$, то*

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV \geqslant \iiint\limits_G \varphi(x, y, z)\,dV.$$

5°. *(Адитивність потрійного інтеграла.) Якщо область інтегрування G функції $f(x, y, z)$ розбити на частини G_1 і G_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то*

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV = \iiint\limits_{G_1} f(x, y, z)\,dV + \iiint\limits_{G_2} f(x, y, z)\,dV.$$

6°. *(Оцінка потрійного інтеграла.) Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G, яка має об'єм V, то*

$$mV \leqslant \iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV \leqslant MV,$$

де m і M — відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x, y, z)$ в області G.

7°. *(Середнє значення функції.) Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G, яка має об'єм V, то в цій області існує така точка $(x_0; y_0; z_0)$, що*

$$\iiint_G f(x, y, z)\,dV = f(x_0, y_0, z_0)\,V.$$

Величина

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{V}\iiint_G f(x, y, z)\,dV$$

називається *середнім значенням функції* $f(x, y, z)$ в області G.

2.2. Обчислення потрійного інтеграла

Як і у випадку подвійних інтегралів, обчислення потрійного інтеграла зводять до обчислення повторних, тобто до інтегрування по кожній змінній окремо.

Нехай область D обмежена знизу і зверху поверхнями $z = z_1(x, y)$ і $z = z_2(x, y)$, а з боків циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz. Позначимо проекцію області G на площину Oxy через D (рис. 10.22) і вважатимемо, що функції $z_1(x, y)$ і $z_2(x, y)$ неперервні в D. Якщо при цьому область D є правильною, то область G називається правильною у напрямі осі Oz. Припустимо, що кожна пряма, яка проходить через кожну внутрішню точку $(x; y; 0) \in D$ паралельно осі Oz, перетинає межу області G у точках M і N. Точку M назвемо точкою входу в область G, а точку N — точкою виходу з області G, а їхні аплікати позначимо відповідно через $z_{\text{вх}}$ і $z_{\text{вих}}$. Тоді $z_{\text{вх}} = z_1(x, y)$, $z_{\text{вих}} = z_2(x, y)$ і для будь-якої неперервної в області G функції $f(x, y, z)$ має місце формула

$$\iiint_G f(x, y, z)\,dV = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \tag{32}$$

Зміст формули (32) такий. Щоб обчислити потрійний інтеграл, треба спочатку обчислити інтеграл $\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz = I(x, y)$ по змінній z, вважаючи x та y сталими. Нижньою межею цього інтеграла є апліката точки M входу $z_{\text{вх}} = z_1(x, y)$, а верхньою — апліката $z_{\text{вих}} = z_2(x, y)$ точки виходу N. Внаслідок інтегрування дістанемо функцію $I(x, y)$ від змінних x та y.

Якщо область D, наприклад, обмежена кривими $y = \varphi_1(x)$ і $y = \varphi_2(x)$ $(a \leqslant b)$, де $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ — неперервні функції, тобто

$$G = \{z_1(x, y) \leqslant z \leqslant y_2(x, y),\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),\quad a \leqslant x \leqslant b\},$$

то, переходячи від подвійного інтеграла $\iint_D I(x, y)\,dxdy$ до повтор-

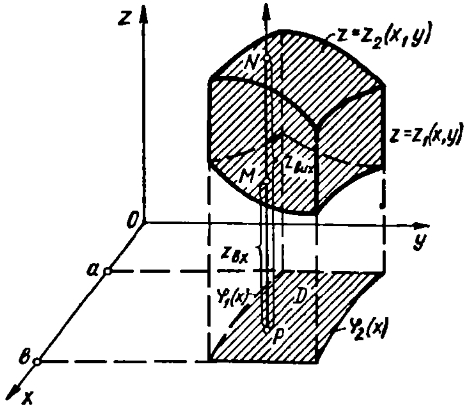


Рис. 10.22

ного (п. 1.3), дістанемо формулу

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \times$$

$$\times f(x, y, z)\,dz, \qquad (33)$$

яка зводить обчислення потрійного інтеграла до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів. Порядок інтегрування може бути й іншим, тобто змінні x, y і z у правій частині формули (33) за певних умов можна міняти місцями.

Якщо, наприклад, область G правильна в напрямі осі Ox:

$$G = \{x_1(y, z) \leqslant x \leqslant x_2(y, z),\ \psi_1(y) \leqslant z \leqslant \psi_2(y),\quad c \leqslant y \leqslant d\},$$

де $x_1(y, z)$, $x_2(y, z)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ — неперервні функції, то

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dz \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)\,dx.$$

Зокрема, якщо областю інтегрування є паралелепіпед:

$$G = \{a \leqslant x \leqslant b,\quad c \leqslant y \leqslant d,\quad k \leqslant z \leqslant l\},$$

то

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dv = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_k^l f(x, y, z)\,dz. \qquad (34)$$

У цьому разі інтегрування виконується в будь-якому порядку, оскільки область G правильна у напрямі всіх трьох координатних осей Ox, Oy, Oz.

Приклади

1. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G (x + y + z)\,dxdydz$ по області G обмеженій площинами $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

○ Оскільки область інтегрування G — паралелепіпед: $G = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$, то за формулою (34) маємо

$$\iiint\limits_G (x + y + z)\,dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 (x + y + z)\,dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(xz + yz + \frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^1 dy = \int_0^1 dx \times$$

$$\times \int_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2}\right) dy = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2}\right)\Big|_0^1 dx =$$

$$= \int_0^1 (x + 1)\, dx = \frac{3}{2}. \ \bullet$$

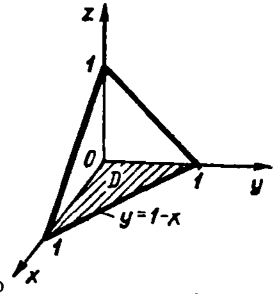


Рис. 10.23

2. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G z\,dxdydz$, якщо область G обмежена площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z - 1 = 0$ (рис. 10.23).

○ Область G проектується на площину Oxy в трикутник $D = \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\}$.

Оскільки $z_{\text{вх}} = 0$, а $z_{\text{вих}} = 1 - x - y$, то за формулою (33) маємо

$$\iiint\limits_G z\,dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z\,dz = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2\, dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2\, d(1 - x - y) = \frac{1}{6}\int_0^1 (1 - x)^3\, dx =$$

$$= -\frac{1}{24}(1 - x)\Big|_0^1 = \frac{1}{24}. \ \bullet$$

2.3. Заміна змінної в потрійному інтегралі

Заміну змінної в потрійному інтегралі виконують за таким правилом: якщо обмежена замкнена область G взаємно однозначно відображається на область G^* за допомогою неперервно диференційовних функцій $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, якобіан J в області G^* не дорівнює нулю:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

і $f(x, y, z)$ — неперервна в G, то справедлива формула

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{G^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \times$$
$$\times |J|\, dudvdw. \quad (35)$$

На практиці найуживанішими є циліндричні та сферичні координати. При переході від прямокутних координат x, y, z до циліндрич-

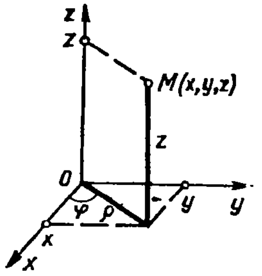


Рис. 10.24

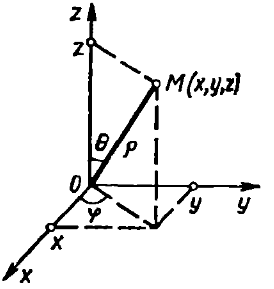


Рис. 10.25

них ρ, φ, z (рис. 10.24), пов'язаних з x, y, z співвідношеннями

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z,$$

$$0 \leqslant \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty,$$

якобіан перетворення

$$J = \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho.$$

З формули (35) дістаємо потрійний інтеграл у циліндричних координатах:

$$\iiint\limits_{G} f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{G^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho d\rho d\varphi dz. \qquad (36)$$

Назва «циліндричні координати» пов'язана з тим, що координатна поверхня $\rho = \mathrm{const}$ є циліндр, прямолінійні твірні якого паралельні осі Oz

При переході від прямокутних координат x, y, z до сферичних ρ, φ, θ (рис. 10.25), які пов'язані з x, y, z формулами (гл. 2, п. 2.5)

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi; \quad z = \rho\cos\theta;$$

$$0 \leqslant \rho < +\infty; \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \quad 0 \leqslant \theta < \pi,$$

якобіан перетворення

$$J = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta.$$

З формули (35) знаходимо потрійний інтеграл у сферичних координатах:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{G^*} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta) \times$$
$$\times\ \rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta. \qquad (37)$$

Назва «сферичні координати» пов'язана з тим, що координатна поверхня $\rho = \mathrm{const}$ є сферою. При обчисленні потрійного інтеграла в циліндричних чи сферичних координатах область G^*, як правило, не будують, а межі інтегрування знаходять безпосередньо за областю G, користуючись геометричним змістом нових координат. При цьому рівняння поверхонь $z_1(x, y)$ та $z_2(x, y)$, які обмежують область G, записують в нових координатах.

Зокрема, якщо область G обмежена циліндричною поверхнею $x^2 + y^2 = R^2$ та площинами $z = a$, $z = b$, $a < b$, то всі межі інтегрування в циліндричній системі координат сталі:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho d\rho \int\limits_a^b f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,dz$$

і не з :інюються при зміні порядку інтегрування. Те саме буде у сферичних координатах у випадку, коли G — куля: $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, або кульове кільце. Наприклад, якщо G — кульове кільце з внутрішньою сферою $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, то рівняння цієї сфери в сферичних координатах має вигляд

$$(\rho\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\theta\sin\varphi)^2 + (\rho\cos\theta)^2 = r^2,$$

або

$$(\rho\sin\theta)^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + (\rho\cos\theta)^2 = r^2,$$

звідки $\rho = r$. Аналогічно $\rho = R$ — рівняння зовнішньої сфери, тому

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_r^R f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta)\,\rho^2 d\rho.$$

У випадку, коли G — куля ($x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$), в цій формулі слід покласти $r = 0$. Інших яких-небудь загальних рекомендацій, коли варто переходити до тієї чи іншої системи координат, дати неможливо. Це залежить і від області інтегрування, і від підінтегральної функції. Іноді треба написати інтеграл в різних системах координат і лише після цього вирішити, в якій з них обчислення буде найпростішим.

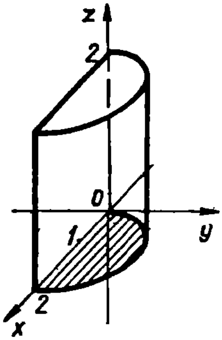


Рис. 10.26

Приклади

1. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, якщо область G обмежена площинами $y=0$, $z=0$, $z=2$ і циліндром $x^2+y^2=2x$ (рис. 10.26).

○ Введемо циліндричні координати

$$x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi,\ \ z=z.$$

Оскільки в циліндричній системі координат $x^2+y^2=\rho^2$, а рівняння кола $x^2+y^2=2x$, яке лежить в основі циліндра, має вигляд $\rho=2\cos\varphi$, то за формулою (36) маємо

$$\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\iiint\limits_{G^*} z\rho^2 d\rho d\varphi dz,$$

де

$$G^*=\left\{0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant z\leqslant 2\right\}.$$

Тому

$$\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2d\rho\int\limits_0^2 zdz=$$

$$=2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=\frac{16}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\varphi d\varphi=\frac{16}{3}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)\,d(\sin\varphi)=$$

$$=\frac{16}{3}\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{32}{9}.\ ●$$

2. Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,\quad \text{де}\quad G — \text{куля}\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1.$$

○ Перейдемо до сферичних координат:

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ \ z=\rho\cos\theta.$$

Оскільки підінтегральна функція $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\rho$ і $0\leqslant\varphi<2\pi$, $0\leqslant\theta<\pi$, $0\leqslant\rho\leqslant 1$, то за формулою (37) дістаємо

$$\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_0^1\rho^3d\rho=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta=\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}(-\cos\theta)\Bigg|_0^{\pi}d\varphi=\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}2d\varphi=\pi.\ ●$$

2.4. Деякі застосування потрійного інтеграла

1. *Обчислення об'ємів.* Якщо деяке тіло є обмеженою і замкненою областю G, що має об'єм V, то згідно з формулою (31)

$$V=\iiint\limits_G dxdydz. \tag{38}$$

32.астосування в механіці. Нехай G — обмежена замкнена область простору R_3, яку займає деяке матеріальне тіло з густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$, де $\gamma(x, y, z)$ — неперервна функція в області G, тоді:

а) маса цього тіла

$$m = \iiint\limits_G \gamma \, dV; \tag{39}$$

б) моменти інерції I_x, I_y, I_z тіла відносно коорлинатних осей Ox, Oy, Oz відповідно дорівнюють

$$I_x = \iiint\limits_G (y^2 + z^2) \gamma \, dV; \tag{40}$$

$$I_y = \iiint\limits_G (x^2 + z^2) \gamma \, dV; \quad I_z = \iiint\limits_G (x^2 + y^2) \gamma \, dV.$$

Моменти інерції I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} тіла відносно координатних площин Oxy, Oxz, Oyz обчислюються за формулами

$$I_{xy} = \iiint\limits_G z^2 \gamma dV; \; I_{xz} = \iiint\limits_G y^2 \gamma dV; \tag{41}$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_G x^2 dV.$$

Момент інерції тіла відносно початку координат

$$I_0 = \iiint\limits_G (x^2 + y^2 + z^2) \gamma dV; \tag{42}$$

в) статичні моменти M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} тіла відносно координатних площин Oxy, Oxz, Oyz обчислюються за формулами

$$M_{xy} = \iiint\limits_G z\gamma dV, \; M_{xz} = \iiint\limits_G y\gamma dV, \; M_{yz} = \iiint\limits_G x\gamma dV; \tag{43}$$

г) координати x_c, y_c, z_c центра маси тіла визначаються за формулами

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\iiint\limits_G x\gamma dV}{\iiint\limits_G \gamma dV};$$

$$y_c = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\iiint\limits_G y\gamma dV}{\iiint\limits_G \gamma dV}; \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\iiint\limits_G z\gamma dV}{\iiint\limits_G \gamma dV}. \tag{44}$$

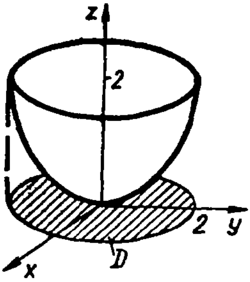


Рис. 10.27

Доведення формули (38), як уже зазначалось, випливає з означення потрійного інтеграла:

$$\iiint_G dxdydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i = \lim_{\lambda\to 0} V = V.$$

Доведення формул (39) — (44) аналогічні доведенням відповідних формул для матеріальної пластини (п. 1.5). Пропонуємо читачеві виконати їх самостійно.

Приклади

1. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $2z = x^2 + y^2$, $z = 2$ (рис. 10.27).

○ Дане тіло обмежено знизу параболоїдом $2z = x^2 + y^2$, зверху площиною $z = 2$ і проектується в круг $x^2 + y^2 \leqslant 4$ площини Oxy. Використовуючи циліндричні координати, знаходимо рівняння параболоїда $z = \frac{\rho^2}{2}$. За формулою (38) маємо

$$V = \iiint_G dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho^2/2}^{2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho\left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right) d\rho = 4\pi. \quad \bullet$$

2. Знайти центр маси однорідної півкулі G, обмеженої поверхнями $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $z = 0$.

○ Координати $x_c = y_c = 0$, тому що півкуля симетрична відносно осі Oz. За третьою з формул (44) при $\gamma(x, y, z) = 1$ маємо

$$z_c = \frac{\iiint_G z dxdydz}{\iiint_G dxdydz} = \frac{\iiint_G z dxdydz}{\frac{2}{3}\pi R^3} =$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{3}{2\pi R^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{3}{8}R.$$

При обчисленні інтеграла в чисельнику ми скористалися сферичними координатами. Значення інтеграла в знаменнику записали не обчислюючи, як об'єм півкулі. Отже, центр маси даної півкулі розміщено в точці $\left(0;\ 0;\ \frac{3}{8}R\right)$. ●

Завдання для самоконтролю

1. Дати означення потрійного інтеграла.
2. Сформулювати достатню умову існування потрійного інтеграла.
3. Сформулювати властивості потрійного інтеграла.
4. Як обчислюється потрійний інтеграл в прямокутних координатах?
5. Як обчислюється потрійний інтеграл в циліндричних координатах? Навести приклад області, для якої межі інтегрування в циліндричних координатах сталі.
6. Як обчислюється потрійний інтеграл в сферичних координатах? Навести приклад області, для якої межі інтегрування в сферичних координатах сталі.
7. Вивести формулу для знаходження об'єму тіла за допомогою потрійного інтеграла.

8. Вивести формулу для знаходження маси тіла.
9. Вивести формули для знаходження моментів інерції тіла.
10. Вивести формули для знаходження координат центра маси тіла.
11. Обчислити потрійні інтеграли:

а) $\iiint\limits_G x^2y^2z\,dxdydz$, де область G обмежена площинами $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 2$, $z = 5$;

б) $\iiint\limits_G (x^2 + y^2)\,dxdydz$, де область G обмежена поверхнями $z = 2$, $x^2 + y^2 = 2z$;

в) $\iiint\limits_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dV$, де сбласть G обмежена сферою $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

12. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = x^2 + y^2$.
13. Знайти масу куба, ребро якого дорівнює 1, якщо густина його в точці $(x; y; z)$ дорівнює $\gamma(x, y, z) = x + y + z$.
14. Знайти координати центра маси однорідного тіла, обмеженого площинами $z = 0$, $y = 1$, $y = 3$, $x + 2z = 3$.
15. Обчислити момент інерції відносно осі Oz однорідної піраміди, обмеженої площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

Відповіді. 11. а) $242\frac{2}{3}$; б) $\frac{16\pi}{3}$; в) $\frac{1}{10}\pi$. 12. $\frac{1}{6}\pi$. 13. $\frac{3}{2}a^4$. 14. $\left(1; 2; \frac{1}{2}\right)$. 15. 27.

§ 3. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Узагальнимо поняття визначеного інтеграла на випадок, коли областю інтегрування є деяка крива. Такі інтеграли називаються криволінійними. Розрізняють два види криволінійних інтегралів: криволінійні інтеграли першого роду і криволінійні інтеграли другого роду.

3.1. Поняття криволінійного інтеграла першого роду (по довжині дуги)

Нехай у площині Oxy задано гладку чи кусково-гладку криву AB (рис. 10.28) і на цій кривій визначено обмежену функцію $f(x, y)$. (Неперервна крива $x = x(t)$, $y = y(t)$ називається *гладкою* на відрізку $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, якщо функції $x(t)$ та $y(t)$ мають на цьому відрізку неперервні похідні $x'(t)$ та $y'(t)$, які одночасно не дорівнюють нулю. Якщо неперервна крива складається із скінченного числа гладких кривих, її називають *кусково-гладкою*.) Розіб'ємо криву AB точками $A = A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$ на n довільних частин, на кожній окремій дузі $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ виберемо

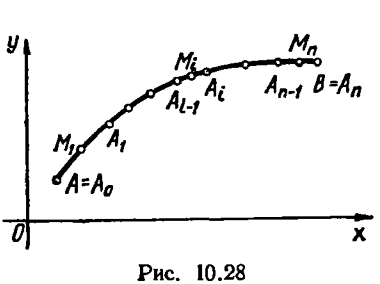


Рис. 10.28

яку-небудь точку M_i $(\xi_i;\ \eta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta l_i, \qquad (45)$$

де Δl_i — довжина дуги $\overset{\smile}{A_{i-1}A_i}$. Сума (45) називається *інтегральною сумою для функції* $f(x, y)$ *по кривій* AB. Нехай $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta l_i$ — найбільша з довжин окремих дуг $\overset{\smile}{A_{i-1}A_i}$.

Якщо при $\lambda \to 0$ інтегральні суми (45) мають скінченну границю, яка не залежить від розбиття кривої AB і вибору точок M_i, то цю границю називають *криволінійним інтегралом першого роду (або криволінійним інтегралом по довжині дуги)* від функції $f(x, y)$ по кривій AB і позначають $\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl$.

Таким чином, за означенням

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta l_i. \qquad (46)$$

Якщо границя (46) існує, то функція $f(x, y)$ називається *інтегровною на кривій* AB, сама крива AB — *контуром інтегрування*, A — початковою, а B — кінцевою точками інтегрування.

Зведемо криволінійний інтеграл першого роду до визначеного інтеграла. Для цього на кривій AB приймемо за параметр довжину дуги l, яка відраховується від точки A до довільної точки кривої AB. Тоді рівняння кривої AB можна записати у параметричній формі: $x = x(l)$, $y = y(l)$, $0 \leqslant l \leqslant L$, де L — довжина кривої AB. При цьому функція $f(x, y)$ визначена на кривій AB, перетворюється у складену функцію однієї змінної — параметра l:

$$f(x, y) = f(x(l), y(l)), \quad 0 \leqslant l \leqslant L.$$

Позначимо через l_i значення параметра l, яке відповідає точці A_i, а через τ_i — яке відповідає точці M_i, тоді сума (45) матиме вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} f(x(\tau_i), y(\tau_i))\Delta l_i, \qquad (47)$$

де $\Delta l_i = l_i - l_{i-1}$, $l_{i-1} \leqslant \tau_i \leqslant l_i$. Сума (47) є інтегральною сумою для визначеного інтеграла від функції $f(x(l), y(l))$ на відрізку $[0; L]$. Оскільки суми (45) і (47) рівні між собою, то рівні і відповідні їм інтеграли:

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl = \int_{0}^{L} f(x(l), y(l))\,dl. \qquad (48)$$

Формула (48) не тільки зводить криволінійний інтеграл до звичайного, але й доводить існування криволінійного інтеграла для функції $f(x, y)$, яка неперервна на кривій AB. Крім того, з формули (48) випливає, що властивості криволінійного інтеграла першого роду аналогічні властивостям визначеного інтеграла (гл. 7), тому ми навіть не будемо їх формулювати. Зауважимо лише,

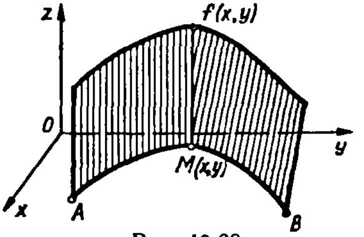


Рис. 10.29

що за означенням криволінійного інтеграла Δl_i — довжина дуги, тому завжди $\Delta l_i > 0$. У визначеному ж інтегралі

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \tag{49}$$

величина Δx_i може бути як додатною, так і від'ємною. У зв'язку з цим

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \quad \text{але} \quad \int_{AB} f(x, y)\,dl = \int_{BA} f(x, y)\,dl,$$

тобто межі інтегрування в криволінійному інтегралі першого роду завжди треба брати від меншої до більшої.

Розглянемо *фізичний зміст криволінійного інтеграла першого роду.* Якщо вздовж неоднорідної матеріальної кривої AB розподілено масу m з лінійною густиною $\gamma(x, y)$, то

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i)\,\Delta l_i = \int_{AB} \gamma(x, y)\,dl,$$

тобто з фізичної точки зору криволінійний інтеграл першого роду від невід'ємної функції вздовж деякої кривої дорівнює масі цієї кривої.

Криволінійний інтеграл першого роду має також і *геометричний зміст.*

Якщо визначений інтеграл (49) при $f(x) \geqslant 0$ визначає площу криволінійної трапеції, то криволінійний інтеграл (46) при $f(x, y) \geqslant 0$ чисельно дорівнює площі частини циліндричної поверхні, твірні якої мають довжину $f(x, y)$ і паралельні осі Oz, а напрямна збігається з кривою AB на площині Oxy (рис. 10.29). Зокрема, якщо AB — не крива, а відрізок $[a; b]$, $(a < b)$, що лежить на осі Ox, то $f(x, y) = f(x, 0) = f(x)$, $\Delta l_i = \Delta x_i$, і формула (46) перетворюється у формулу (49) — циліндрична поверхня «вирівнюється» і стає криволінійною трапецією, тобто криволінійний інтеграл першого роду стає звичайним визначеним інтегралом.

Якщо покласти $f(x, y) \equiv 1$, то площа циліндричної поверхні чисельно дорівнюватиме довжині дуги AB, тому довжину L дуги AB можна знайти за формулою

$$L = \int\limits_{AB} dl.$$

3.2. Обчислення криволінійних інтегралів першого роду

Формула (48), яка зводить криволінійний інтеграл до звичайного, є не зовсім зручною для обчислення, бо не завжди можна легко знайти рівняння кривої AB у вигляді $x = x(l)$, $y = y(l)$, де l — довжина дуги. Спростимо цю формулу.

Нехай крива AB задана рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, причому значення α відповідає точці A, а значення β — точці B. Вважатимемо, що функції $x(t)$ і $y(t)$ разом з похідними $x'(t)$ і $y'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$, а функція $f(x, y)$ неперервна вздовж кривої AB. Для довільної точки $M(x(t); y(t))$ довжину дуги l кривої AM можна розглядати як функцію параметра t: $l = l(t)$, тоді

$$l = \int\limits_0^t \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2}\, d\tau.$$

Звідси, згідно з правилом диференціювання визначеного інтеграла по верхній межі, маємо

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Виконуючи заміну змінної $l = l(t)$ у правій частині формули (48), маємо

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, dl = \int\limits_0^L f(x(l), y(l))\, dl =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt. \qquad (50)$$

Зокрема, якщо крива AB в декартових координатах задана рівнянням $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, де функція $y(x)$ неперервна разом із своєю похідною $y'(x)$ на відрізку $[a; b]$, то формула (50) набирає вигляду

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, dl = \int\limits_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx. \qquad (51)$$

Якщо крива AB задається рівнянням $x = x(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$ і функції $x(y)$ і $x'(y)$ неперервні на відрізку $[c; d]$, то

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, dl = \int\limits_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + x'^2(y)}\, dy. \qquad (52)$$

Досі ми вважали, що криволінійний інтеграл першого роду розглядається для плоскої кривої AB. Знайдені результати легко перенести на випадок просторових кривих.

Нехай функція $f(x, y, z)$ визначена та неперервна на просторовій кривій AB, яку задано рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, де функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ та $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$. Тоді існує криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} f(x, y, z)\, dl$ і справджується формула

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\, dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt \qquad (53)$$

Приклади

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} (x - y)\, dl$, де AB — відрізок прямої $y = \frac{3}{4}x$ від точки $A(0; 0)$ до точки $B(4; 3)$.

○ Скористаємось формулою (51). Оскільки $y = \frac{3}{4}x$, а $y' = \frac{3}{4}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$, то

$$\int\limits_{AB} (x - y)\, dl = \int\limits_0^4 \left(x - \frac{3}{4}x\right)\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}\, dx = \frac{5}{16}\int\limits_0^4 x dx = \frac{5}{2}. \; ●$$

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2})\, dl$, де L — дуга кривої $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

○ Оскільки $x'(t) = \cos t - t\sin t$, $y'(t) = \sin t + t\cos t$, $z'(t) = 1$, $dl = \sqrt{t^2 + 2}\, dt$, то за формулою (53)

$$\int\limits_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2})\, dl = \int\limits_0^{2\pi} (2t - \sqrt{(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2})\sqrt{t^2 + 2}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} t\sqrt{t^2 + 2}\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (t^2 + 2)^{\frac{1}{2}}\, d(t^2 + 2) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left((1 + 2\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right). \; ●$$

3.3. Застосування криволінійного інтеграла першого роду

1. *Застосування в геометрії*. Нехай у площині Oxy задано кусково-гладку криву AB замкнену чи незамкнену і на цій кривій визначено неперервну функцію $f(x, y)$, тоді:

а) площу P циліндричної поверхні, визначеної функцією $z = f(x, y)$, знаходять за формулою

$$P = \int\limits_{AB} f(x, y)\, dl; \qquad (54)$$

б) довжину L кривої AB визначають за формулою

$$L = \int_{AB} dl. \tag{55}$$

2. *Застосування в механіці.* Нехай вздовж неоднорідної матеріальної кривої L розподілено масу з лінійною густиною $\gamma(x, y)$, тоді:

а) маса кривої L обчислюється за формулою

$$m = \int_L \gamma(x, y)\, dl; \tag{56}$$

б) координати x_c, y_c центра маси кривої L знаходяться за формулами

$$x_c = \frac{\int_L x\gamma(x, y)\, dl}{\int_L \gamma(x, y)\, dl} = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{\int_L y\gamma(x, y)\, dl}{\int_L \gamma(x, y)\, dl} = \frac{M_x}{m}, \tag{57}$$

де M_x, M_y — статичні моменти кривої L відносно осей Ox і Oy;

в) моменти інерції I_x, I_y, I_0 кривої L відносно осей Ox, Oy і початку координат відповідно дорівнюють

$$I_x = \int_L y^2\gamma(x, y)\, dl; \quad I_y = \int_L x^2\gamma(x, y)\, dl; \quad I_0 = \int_L (x^2 + y^2)\gamma(x, y)\, dl. \tag{58}$$

У випадку, коли крива однорідна, тобто має сталу густину γ_0, у формулах (56) — (58) слід вважати $\gamma(x, y) = \gamma_0$. Наприклад, треба знайти момент інерції I_x відносно осі Ox однорідної ($\gamma_0 = 1$) дуги кола $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, яка міститься в першій чверті.

Скориставшись першою з формул (58), матимемо

$$I_x = \int_L y^2 dl = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\, dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2}\, dt = 2\pi.$$

Формули (54), (55) випливають з геометричного змісту криволінійного інтеграла першого роду (п. 3.1).

Формули (56) — (58) можна довести тим самим методом, яким були знайдені відповідні формули для матеріальної пластини (п. 1.6).

Формули (55) — (58) можна записати і для випадку, коли підінтегральна функція розглядається на просторовій кривій.

3.4. Поняття криволінійного інтеграла другого роду (по координатах). Фізичний зміст

Криволінійний інтеграл другого роду визначається майже так само, як інтеграл першого роду. Нехай у площині Oxy задано гладку чи кусково-гладку криву AB (рис. 10.30) і на цій кривій визначено обмежену функцію $P(x, y)$. На відміну від інтегралів першого роду вважатимемо криву напрямною лінією, у якої точки A та B є відповідно початковою та кінцевою точками. Розіб'ємо криву AB точками $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_i, \ldots, A_n = B$ на n довільних частин, на кожній частинній дузі $A_{i-1}A_i$ виберемо точку $M_i(\xi_i; \eta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i, \tag{59}$$

де Δx_i — проекція вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на вісь Ox.

Відмінність сум (45) і (59) очевидна.

Якщо при $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta l_i \to 0$ інтегральні суми (59) мають скінченну границю, яка не залежить ні від розбиття кривої AB, ні від вибору точок M_i, то цю границю називають *криволінійним інтегралом від функції* $P(x, y)$ *по координаті* x вздовж кривої AB і позначають $\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx$.

Таким чином,

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i. \tag{60}$$

Аналогічно вводиться криволінійний інтеграл від функції $Q(x, y)$ по координаті y:

$$\int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i, \tag{61}$$

де Δy_i — проекція вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A}$ на вісь Oy (рис. 10.30). Суму

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + \int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy$$

називають *криволінійним інтегралом по координатах* або *криволінійним інтегралом другого роду від функцій* P *і* Q *по кривій* AB і позначають символом

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ іноді позначатимемо через P і Q, а криволінійний інтеграл записуватимемо у вигляді $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$.

Для того щоб дати фізичну інтерпретацію криволінійного інтеграла другого роду, розглянемо задачу про роботу змінної сили на криво-

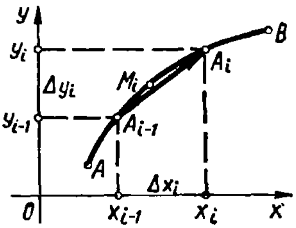


Рис. 10.30

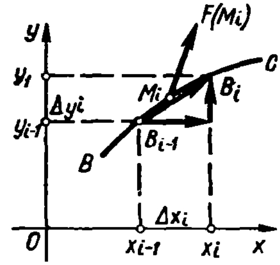


Рис. 10.31

лінійному шляху. Нехай матеріальна точка M (x; y) під дією змінної сили $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$, де $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ — проекції сили на осі Ox та Oy, рухається на площині Oxy вздовж кривої BC. Треба обчислити роботу A сили $\vec{F}$ при переміщенні точки M з точки B в точку C (рис. 10.31).

Розіб'ємо криву BC точками $B = B_0, B_1, \ldots, B_{i-1}, B_i, \ldots, B_n = C$ на n частин і на кожній окремій дузі $\overset{\frown}{B_{i-1}B_i}$ візьмемо довільну точку M_i (ξ_i; η_i), $i = 1, 2, \ldots, n$. На цю точку діє сила $\vec{F}(M_i) = P(M_i)\vec{i} + Q(M_i)\vec{j}$. Роботу ΔA_i, яку виконує ця сила при переміщенні точки по вектору $\overrightarrow{B_{i-1}B_i} = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j}$ можна знайти за допомогою скалярного добутку

$$\Delta A_i = \vec{F}(M_i) \cdot \overrightarrow{B_{i-1}B_i} = P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

Ця робота наближено дорівнює роботі змінної сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки по дузі $\overset{\frown}{B_{i-1}B_i}$ довжиною Δl_i.

Робота сили вздовж усієї ламаної $B_0, B_1, \ldots, B_{i-1}, B_i, \ldots, B_n$ дорівнює

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

Цей вираз дає наближене значення шуканої роботи A. Перейшовши до границі при $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta l_i \to 0$, знайдемо точне її значення:

$$A = \lim_{\lambda \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i\right) = \int\limits_{BC} Pdx + Qdy. \quad (62)$$

Отже, з погляду фізики криволінійний інтеграл другого роду вздовж деякої кривої дорівнює роботі змінної сили при переміщенні матеріальної точки вздовж цієї кривої.

3.5. Обчислення та застосування криволінійного інтеграла другого роду

Зведемо криволінійний інтеграл другого роду до визначеного інтеграла. Нехай крива AB задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, де функції $x(t)$ та $y(t)$ на відрізку $[\alpha;\ \beta]$ неперервні разом із своїми похідними $x'(t)$ та $y'(t)$, причому точці A кривої відповідає параметр α, а точці B — параметр β. Припустимо, що функція $P(x, y)$ неперервна на кривій AB, тоді за означенням

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i. \qquad (63)$$

Але, згідно з формулою Лагранжа,

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1}) =$$
$$= x'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) = x'(\tau_i)\,\Delta t_i,\quad \tau_i \in [t_{i-1};\ t_i].$$

Виберемо точку $(\xi_i;\ \eta_i)$ так, щоб $\xi_i = x(\tau_i)$, $\eta_i = y(\tau_i)$. Тоді інтегральна сума у формулі (63) набере вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} P(x(\tau_i), y(\tau_i))\,x'(\tau_i)\,\Delta t_i.$$

Це інтегральна сума для функції $P(x(t), y(t))\,x'(t)$ на проміжку $[\alpha;\ \beta]$, тому

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))\,x'(t)\,dt. \qquad (64)$$

Аналогічно доводяться формули

$$\int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t))\,y'(t)\,dt; \qquad (65)$$

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t)]\,dt. \qquad (66)$$

Зокрема, якщо крива AB задана рівнянням $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, де функція $y(x)$ і її похідна $y'(x)$ неперервні на проміжку $[a;\ b]$, то з формули (66) дістанемо

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{a}^{b} [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\,y'(x)]\,dx. \qquad (67)$$

Аналогічно, якщо крива AB задана рівнянням $x = x(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, причому функції $x(y)$ та $x'(y)$ неперервні на проміжку $[c; d]$, то

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_c^d [P(x(y), y)\,x'(y) + Q(x(y), y)]\,dy. \qquad (68)$$

Поняття криволінійного інтеграла другого роду можна поширити й на просторові криві. Нехай функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ визначені і неперервні на просторовій кривій AB, яку задано рівняннями

$$x = x(t), \ y = y(t), \ z = z(t), \ \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

де функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ і їхні похідні $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ неперервні на проміжку $[\alpha; \beta]$. Тоді існує криволінійний інтеграл

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

і справджується формула

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t), z(t))\,x'(t) +$$
$$+ Q(x(t), y(t), z(t))\,y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)]\,dt. \qquad (69)$$

Формули (64) — (69) використовуються для обчислення криволінійних інтегралів. З цих формул випливає, що криволінійний інтеграл другого роду має властивості, аналогічні властивостям визначеного інтеграла.

На відміну від криволінійного інтеграла першого роду криволінійний інтеграл другого роду залежить від напряму шляху інтегрування і при зміні цього напряму змінює свій знак:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = -\int_{BA} Pdx + Qdy.$$

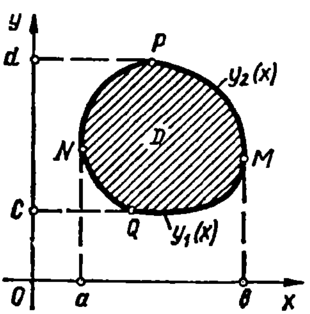


Рис. 10.32

Це пов'язано з тим, що при зміні напряму руху по кривій, змінюються знаки проекцій Δx_i і Δy_i в сумах (60) і (61).

Часто доводиться розглядати криволінійні інтеграли по замкненому контуру, тобто контуру інтегрування, в якому початкова та кінцева точки збігаються (мова йде про замкнені контури без точок самоперетину).

Для замкненого контура існує лише два напрями обходу: проти стрілки годинника (додатна орієнтація контура) та за стрілкою годинника (від'ємна орієнтація контура). Іншими словами, контур вважається додатно орієнтованим, якщо при його обході область, обмежена цим контуром, залишається зліва. Криволінійний інтеграл по додатно орієнтованому контуру L позначають так:

$$\oint_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Розглянемо два застосування криволінійного інтеграла другого роду.

1°. *Обчислення площі плоскої фігури.* Нехай на площині (рис. 10.32) задана правильна (п. 1.3) область

$$D = \{y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),\ a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Межу області D, тобто криву $PNQM$, позначимо через L і вважатимемо додатно орієнтованою. Розглянемо інтеграл $-\oint y\,dx$ і зведемо його до визначених інтегралів:

$$-\oint_L y\,dx = -\left(\int_{MQN} y\,dx - \int_{NPM} y\,dx\right) = \int_{NPM} y\,dx - \int_{MQN} y\,dx =$$

$$= \int_a^b y_2(x)\,dx - \int_a^b y_1(x)\,dx = S,$$

де S — площа області D.

Отже, площу S правильної області D, обмеженої кривою L, знаходять за формулою

$$S = -\oint_L y\,dx. \tag{70}$$

Аналогічно можна довести, що

$$S = \oint_L x\,dy. \tag{71}$$

Додаючи формули (70) і (71) почленно, дістаємо ще одну формулу для обчислення площі:

$$S = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx. \tag{72}$$

2°. *Обчислення роботи.* Нехай сила $\vec{F} = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j}$ виконує роботу A при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L, причому функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$, неперервні на кривій L; тоді, як відомо (п. 3.4),

$$A = \int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{73}$$

Приклади

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L xydx + dy$, де L — замкнений контур, утворений лініями $y = x^2$, $y = 1$, $x = 0$ (рис. 10.33).

○ Застосовуючи адитивність криволінійного інтеграла, маємо

$$\oint\limits_L xydx + dy = \int\limits_{OA} xydx + dy + \int\limits_{AB} xydx + dy + \int\limits_{BO} xydx + dy.$$

З рівняння $y = x^2$ лінії OA дістаємо $dy = 2xdx$, тому

$$\int\limits_{OA} xydx + dy = \int\limits_0^1 (x^3dx + 2xdx) = \frac{5}{4};$$

з рівняння $y = 1$ лінії AB дістаємо $dy = 0$, тому $\int\limits_{AB} xydx + dy = \int\limits_1^0 xdx = -\frac{1}{2}$;

з рівняння $x = 0$ лінії BO дістаємо $dx = 0$, тому $\int\limits_{BO} xydx + dy = \int\limits_1^0 dy = -1$;

$\oint\limits_L xydx + dy = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4}$. ●

2. Знайти площу області, обмеженої еліпсом $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

○ За формулою (72)

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (a\cos t \cdot b\cos t + b\sin t \cdot a\sin t)\, dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\cdot dt = \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} dt = \pi ab. \ ●$$

3. Знайти роботу сили $\vec{F} = yx\vec{i} + (y + x)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки по прямій $y = x$ із точки O (0; 0) в точку B (1; 1).

○ За формулою (73)

$$A = \int\limits_{OB} yxdx + (y + x)\, dy = \int\limits_0^1 (x^2dx + (x + x)\, dx) = \int\limits_0^1 (x^2 + 2x)\, dx = \frac{4}{3}. \ ●$$

4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} y^2dx + 2xydy$ від точки A (0; 0) до точки B (1; 1) по лінії: а) $y = x$; б) $y = x^2$; в) $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 10.34).

○ Маємо:

а) $y = x$, $dy = dx$; $\int\limits_{AB} y^2dx + 2xydy = \int\limits_0^1 (x^2 + 2x^2)\, dx = 1;$

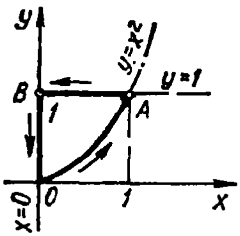


Рис. 10.33

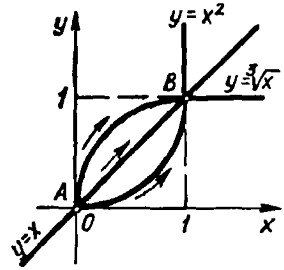


Рис. 10.34

б) $y = x^2$, $dy = 2xdx$;

$$\int\limits_{AB} y^2dx + 2xydy = \int\limits_0^1 (x^4 + 2x \cdot x^2 \cdot 2x)\, dx = 1;$$

в) $y = \sqrt[3]{x}$, $dy = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx$;

$$\int\limits_{AB} y^2dx + 2xydy = \int\limits_0^1 \left(x^{\frac{2}{3}} + 2x \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}\right) dx = \int\limits_0^1 \left(x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}}\right) dx = 1. \bullet$$

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} ydx + 2dy$ від точки A (0; 0) до точк B (1; 1) по кривих а), б), в), які задані в прикладі 4:

○ а) $\int\limits_{AB} ydx + 2dy = \int\limits_0^1 (x + 2)\, dx = \frac{5}{2}$;

б) $\int\limits_{AB} ydx + 2dy = \int\limits_0^1 (x^2 + 2 \cdot 2x)\, dx = \frac{7}{3}$;

в) $\int\limits_{AB} ydx + 2dy = \int\limits_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} x^{-\frac{2}{3}}\right) dx = \frac{11}{4}$. ●

Зазначимо, що в прикладі 4 інтегрування по трьох різних кривих, що сполучают одні й ті самі точки, дає один і той самий результат. У прикладі 5 інтегрування п таких самих кривих дає різні результати. Причина цього з'ясована в п. 3.8.

3.6. Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другог роду

Позначимо через α та β кути, які утворює з осями координат на прямна дотична до кривої AB у точці M (x; y) (рис. 10.35). За додат ний напрям дотичної беремо той, який відповідає напряму руху точк по кривій від A до B. Враховуючи геометричний зміст диференціал функції (гл. 6, п. 3.1) та диференціала дуги (гл. 5, п. 7.3), маємо

$$dx = \cos\alpha dl, \; dy = \cos\beta dl. \qquad (74$$

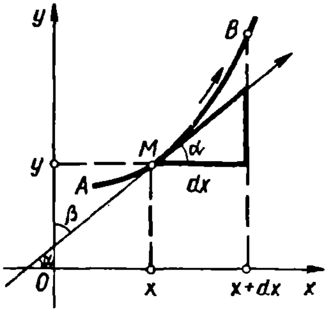


Рис. 10.35

Замінюючи в криволінійних інтегралах другого роду dx та dy їхніми значеннями (74), перетворимо ці інтеграли в криволінійні інтеграли першого роду:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx = \int\limits_{AB} P(x, y)\cos\alpha\,dl;$$

$$\int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy = \int\limits_{AB} Q(x, y)\cos\beta\,dl;$$

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AB} P\cos\alpha\,dl + Q\cos\beta\,dl. \tag{75}$$

Формули (75) виражають криволінійні інтеграли другого роду через криволінійні інтеграли першого роду і встановлюють зв'язок між ними. При зміні напряму руху точки по кривій формули (75) не змінюються, оскільки при цьому змінюють знак dx, dy, $\cos\alpha$, $\cos\beta$.

3.7. Формула Гріна

Формула Гріна зв'язує подвійний інтеграл по області D з криволінійним інтегралом по межі L цієї області. Вона широко застосовується у математичному аналізі.

Доведемо цю формулу для правильної області, контур якої обмежений гладкими чи кусково-гладкими кривими.

Теорема. *Нехай D — деяка правильна область, обмежена замкненим контуром L, і функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в цій області. Тоді справджується формула Гріна*

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint\limits_{L} Pdx + Qdy. \tag{76}$$

○ Нехай область $D = \{y_1(x) \leqslant y \leqslant y_1(x),\ a \leqslant x \leqslant b\}$ (рис. 10.32) обмежена додатно орієнтовним контуром L — межею $MPNQM$. Покажемо, що

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = -\oint\limits_{L} Pdx. \tag{77}$$

Для цього зведемо подвійний інтеграл до повторного, виконаємо інтегрування по змінній y і до знайдених визначених інтегралів застосуємо формулу (67):

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\,dydx = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int\limits_{a}^{b} P(x, y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx =$$

$$= \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))]\, dx = \int_a^b P(x, y_2(x))\, dx -$$

$$- \int_a^b P(x, y_1(x))\, dx = \int_{NPM} P(x, y)\, dx - \int_{NQM} P(x, y)\, dx =$$

$$= - \int_{MPN} P(x, y)\, dx - \int_{NQM} P(x, y)\, dx = - \oint_L P dx.$$

Аналогічно, вважаючи, що область D правильна в напрямі осі Ox: $D = \{x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y),\ c \leqslant y \leqslant d\}$, можна впевнитися, що

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx dy = \oint_L Q dy. \tag{79}$$

Якщо від рівності (79) віднімемо рівність (78), то дістанемо формулу (76). ●

Зауваження 1. Ми вважали, що область D правильна. Формула Гріна буде справедливою і для довільної області, яку можна розбити на скінченне число правильних областей. Нехай, наприклад, область D (рис. 10.36) складається з двох правильних областей: D_1 і D_2. Запишемо формулу (76) для кожної з цих областей і складемо почленно знайдені результати. Зліва матимемо подвійний інтеграл по всій області D, а справа — криволінійний інтеграл по межі цієї області, оскільки криволінійний інтеграл по допоміжній (середній) кривій береться двічі в протилежних напрямах і при додаванні взаємно знищується.

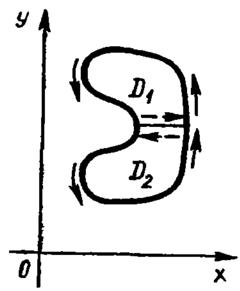


Рис. 10.36

Зауваження 2. З формули Гріна легко дістати формули для обчислення площі плоскої фігури: якщо у формулу (76) підставити $P = -y$, $Q = 0$, то дістанемо формулу (70); якщо $P = 0$, $Q = x$ — формулу (71).

Приклад

Обчислити криволінійний інтеграл $I = \oint_L (x - 2y)\, dx + (x + y)\, dy$, де L — коло: $x^2 + y^2 = R^2$,

а) безпосередньо; б) за формулою Гріна.

○ а) Скористаємось параметричними рівняннями кола:

$$x = R \cos t,\ y = R \sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi.$$

Тоді $dx = -R\sin t dt$, $dy = R\cos t dt$, тому

$$I = \int_0^{2\pi} [(R\cos t - 2R\sin t)(-R\sin t) + (R\cos t + R\sin t) R\cos t]\, dt =$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} (1 + \sin^2 t)\, dt = R^2 \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)\right) dt = 3\pi R^2.$$

б) Такий самий результат дістаємо за формулою Гріна:

$$P = x - 2y,\ Q = x + y,\ \frac{\partial P}{\partial y} = -2,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1;$$

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 3 \iint_D dxdy = 3\pi R^2. \bullet$$

3.8. Умови незалежності криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування

Як уже зазначалось (п. 3.5, приклади 4 і 5), значення криволінійного інтеграла може залежати від того, якою саме кривою сполучено крайні точки шляху інтегрування, а може і не залежати. Якщо значення криволінійного інтеграла залишається однаковим по всіх можливих кривих, які сполучають кінцеві точки кривої інтегрування, то кажуть, що криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування.

З'ясуємо умови, за яких існує така незалежність. Нагадаємо, що однозв'язною називають область, межа якої складається з однієї замкненої без точок самоперетину неперервної кусково-гладкої кривої. На рис. 10.37 показано: а — однозв'язну область; б — двозв'язну область; в — тризв'язну область.

Теорема 1. *Нехай функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ визначені і неперервні разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в деякій замкненій однозв'язній області D. Тоді наступні чотири умови еквівалентні тобто виконання якої-небудь однієї з них тягне за собою виконання останніх трьох:*

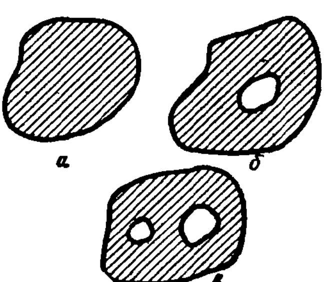


Рис. 10.37

1) *для довільної замкненої кусково-гладкої кривої, що належить області D,*

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0;$$

2) *для довільних двох точок M та N області D значення інтеграла*

$$\int_{MN} Pdx + Qdy$$

не залежить від форми шляху інтегрування, який лежить в області D;

3) *вираз $Pdx + Qdy$ є повним диференціалом деякої функції, визначеної в області D. Іншими словами, існує така функція $F(x, y)$, визначена в області D, що*

$$dF = Pdx + Qdy;$$

4) *в усіх точках області D виконується рівність*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (80)$$

○ Доведемо теорему по схемі $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$, тобто покажемо, що з першої умови випливає друга, з другої — третя, з третьої — четверта, а з четвертої — знову перша. Цим еквівалентність всіх умов буде доведена.

1 ⇒ 2. Нехай MQN і MPN — дві довільні криві, які належать області D, сполучають точки M і N (рис. 10.38) і утворюють в сумі замкнену криву $L = MPNQM$. Згідно з першою умовою,

$$\oint_L Pdx + Qdy = \int_{MPN} Pdx + Qdy + \int_{NQM} Pdx + Qdy = 0,$$

тому

$$\int_{MPN} Pdx + Qdy = -\int_{NQM} Pdx + Qdy,$$

або

$$\int_{MPN} Pdx + Qdy = \int_{MQN} Pdx + Qdy,$$

тобто друга умова виконується.

2 ⇒ 3. Нехай інтеграл $\int_{MN} Pdx + Qdy$ не залежить від форми кривої, яка сполучає точки M та N, а залежить лише від точок M і N. Якщо точку M зафіксувати: $M = M(x_0; y_0)$, то цей інтеграл буде деякою функцією $F(x, y)$ координат x та y точки $N(x, y)$:

$$F(x, y) = \int_{MN} Pdx + Qdy. \qquad (81)$$

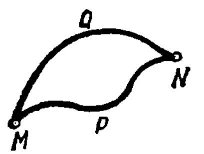


Рис. 10.38

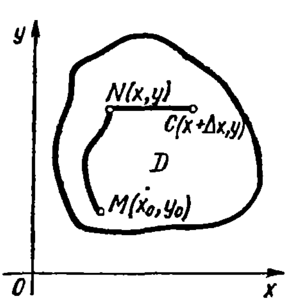


Рис. 10.39

Покажемо, що повний диференціал функції (81) збігається з підінтегральним виразом:

$$dF = Pdx + Qdy. \tag{82}$$

Для цього достатньо показати, що в кожній точці N області D існують частинні похідні, причому

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y). \tag{83}$$

Оскільки функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ за умовою неперервні в D, то з (83) випливатиме диференційовність функції $F(x, y)$ і рівність (82).

Доведемо, наприклад, що $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y)$. Приріст $\Delta_x F$ дорівнює (рис. 10.39)

$$\Delta_x F = F(x + \Delta x, y) - F(x, y) =$$

$$= \int_{MC} Pdx + Qdy - \int_{MN} Pdx + Qdy = \int_{NC} Pdx + Qdy.$$

За другою умовою інтеграл не залежить від форми кривої, тому шлях від N до C можна вважати прямолінійним; тоді

$$\Delta_x F = \int_{NC} Pdx + Qdy = \int_{NC} Pdx = \int_{x}^{x+\Delta x} Pdx.$$

Застосовуючи до останнього інтеграла теорему про середнє (гл. 7, п. 2.3), дістанемо

$$\Delta_x F = P(x + \theta\Delta x, y)\,\Delta x, \quad 0 < \theta < 1,$$

звідки

$$\frac{\Delta_x F}{\Delta x} = P(x + \theta\Delta x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x F}{\Delta x} = P(x, y),$$

оскільки за умовою функція $P(x, y)$ неперервна. Аналогічно доводимо, що $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$. Отже, умова 3 виконується.

3 $\Rightarrow$ *4*. Нехай існує функція $F(x, y)$, $(x; y) \in D$, така, що $dF = Pdx + Qdy$, тоді $F'_x = P$, $F'_y = Q$, і за теоремою про змішані похідні $P'_y = F''_{xy} = F''_{yx} = Q'_x$, тобто дістали рівність (80).

4 $\Rightarrow$ *1*. Нехай виконується четверта умова і L — довільна замкнена кусково-гладка крива, яка належить області D і обмежує деяку область D^*. Застосовуючи до області D^* формулу Гріна (це ми можемо зробити, бо область D — однозв'язна) і враховуючи четверту умову, дістанемо

$$\iint_{D^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy = 0. \quad \bullet$$

З а у в а ж е н н я 1. З еквівалентності умов 1—4 доведеної теореми випливає, що умови 3 і 4 є необхідними і достатніми умовами, за яких криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування. Проте для застосувань найбільш зручною, необхідною і достатньою умовою є рівність (80).

З а у в а ж е н н я 2. Аналогічна теорема справедлива для криволінійних інтегралів другого роду вздовж просторових кривих. Для її формулювання введемо поняття поверхнево-однозв'язної області.

Тривимірна область G називається поверхнево-однозв'язною, якщо на будь-який кусково-гладкий замкнений контур, який належить області G і не має точок самоперетину, можна «натягнути плівку», яка повністю належить області G. Поверхнево-однозв'язними областями є куля, еліпсоїд, многогранник і т. д., неоднозв'язною — тор («бублик»).

Теорема 2. *Нехай функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$; $R(x, y, z)$, неперервні разом зі своїми похідними першого порядку в поверхнево однозв'язній області. Тоді еквівалентні такі твердження:*

1) *для довільної замкненої кусково-гладкої кривої L, що належить області G,*

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0;$$

2) *криволінійний інтеграл*

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$$

не залежить від форми кривої інтегрування, яка сполучає точки A та B і лежить в області G;

3) *вираз $Pdx + Qdy + Rdz$ є повним диференціалом деякої функції $u(x, y, z)$, визначеної в області G;*

4) *в усіх точках області G виконуються рівності*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{84}$$

Приклади

1. Пояснити результати інтегрувань у прикладах 4 і 5 (п. 3.5).

○ У прикладі 4 (п. 3.5) значення криволінійного інтеграла $\int_{AB} y^2dx + 2xydy$ не залежить від форми шляху інтегрування, бо виконується рівність (80); дійсно:

$$P = y^2; \quad Q = 2xy; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y,$$

тому результати інтегрувань а), б), в) були однакові.

У прикладі 5 (п. 3.5) рівність (80) не виконується, тому значення інтеграла залежить від форми контура інтегрування. ●

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_{AB} (x^2 - y^2)\,dx - 2xydy$ по довільній кривій, яка сполучає точки $A(0; 0)$ та $B(1; 1)$.

○ Перевіримо виконання рівності (80):

$$P = x^2 - y^2;\quad Q = -2xy;\quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y.$$

Отже, значення інтеграла не залежатиме від того, якою кривою сполучено точки A (0, 0) та B (1, 1).

Обчислимо інтеграл по прямій $y = x$, яка сполучає ці точки; тоді

$$\int\limits_{AB} (x^2 - y^2)\, dx - 2xydy = -2\int\limits_0^1 x^2 dx = -\frac{2}{3}. \; \bullet$$

3.9. Інтегрування повних диференціалів. Первісна функція

Нехай в деякій однозв'язній області D функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ та їхні частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні, причому $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Зафіксуємо точку $M_0(x_0, y_0)$ і розглянемо функцію

$$F(x, y) = \int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} Pdx + Qdy. \tag{85}$$

Тоді, згідно з п. 3.8, повний диференціал цієї функції

$$dF = Pdx + Qdy. \tag{86}$$

Проте, як і для функцій однієї змінної, існує нескінченна кількість функцій двох змінних, для яких вираз (86) є повним диференціалом; всі такі функції визначаються формулою $u(x, y) + C$, де $u(x, y)$ — яка-небудь з них, а $C =$ const. Кожну з цих функцій називають *первісною* для повного диференціала (86). Оскільки функція (85) — первісна, то

$$\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} Pdx + Qdy = u(x, y) + C. \tag{87}$$

Поклавши $x = x_0$, $y = y_0$, дістанемо $C = u(x_0; y_0)$, тому

$$\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} Pdx + Qdy = u(x, y) - u(x_0, y_0).$$

Зокрема, при $x = x_1$, $y = y_1$ маємо

$$\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x_1;y_1)} Pdx + Qdy = u(x_1, y_1) - u(x_0; y_0). \tag{88}$$

Формулу (88) називають *формулою Ньютона — Лейбніца для криволінійного інтеграла від повного диференціала.*

Розглянемо спосіб знаходження первісної. Оскільки криволінійний інтеграл (87) не залежить від форми шляху інтегрування, то для знаходження первісної $u(x, y)$ досить було б обчислити цей інтеграл по довільній лінії, яка сполучає точки M_0 та M. Проте виявляється, що найзручніше інтегрувати по ламаній лінії, яка сполучає точки M_0 і M так, що сторони ламаної паралельні осям координат.

Обчислимо, наприклад, криволінійний інтеграл (87) від точки M_0 до точки M по ламаній M_0NM (рис. 10.40). На відрізку M_0N $y = y_0$, $dy = 0$, а на відрізку NM $x = \text{const}$, $dx = 0$, тому з формули (87) маємо

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy + C, \qquad (89)$$

де перший визначений інтеграл обчислюється при сталому значенні $y = y_0$, а другий — при сталому значенні x.

Аналогічну формулу дістаємо при інтегруванні по ламаній M_0PM (рис. 10.40):

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + C. \qquad (90)$$

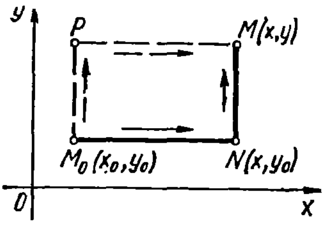
Формули (89) і (90) дають змогу знайти первісну. Початкову точку $(x_0; y_0)$ в цих формулах треба вибирати так, щоб підінтегральні вирази якомога спрощувались.

Зауваження 1. Якщо за формулою (89) або (90) знайти первісну $u(x, y)$, то за формулою Ньютона — Лейбніца (88) можна обчислити інтеграл від повного диференціала. Проте на практиці простіше виконати інтегрування по ламаній лінії, яка сполучає точки $(x_0; y_0)$ і $(x_1; y_1)$ так, що сторони ламаної паралельні осям координат.

Зауваження 2. Якщо для диференціального рівняння

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

виконується рівність (80), то таке рівняння називається *диференціальним рівнянням* у повних диференціалах. Загальний інтеграл цього рівняння $u(x, y) = C$ можна знайти за формулою (89) (гл. 8, п. 1.6).



10.40

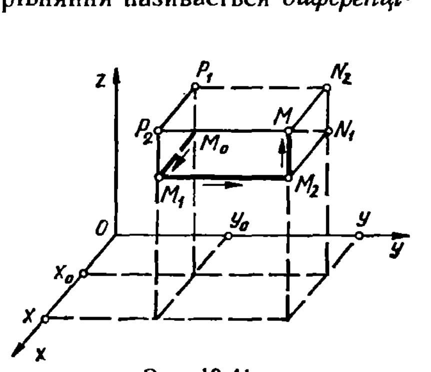


Рис. 10.41

Зауваження 3. Формула для знаходження функції трь змінних по її повному диференціалу $du = Pdx + Qdy + Rdz$ має в гляд

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, y_0)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)\,dz. \quad (9$$

Вона виводиться аналогічно формулі (89) при обчисленні криволіні ного інтеграла $\int\limits_{(x_0;y_0;z_0)}^{(x;y;z)} Pdx + Qdy + Rdz$ по ламаній $M_0M_1M_2$ (рис. 10.41). Ще дві подібні формули можна дістати при інтегруван по ламаних $M_0N_1N_2M$ та $M_0P_1P_2M$.

Приклади

1. Обчислити інтеграл

$$I = \int\limits_{(0;0)}^{(2;1)} (x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy + y^2)\,dy.$$

○ Даний інтеграл не залежить від шляху інтегрування тому, що справджуєт рівність (80):

$$P = x^2 + 2xy - y^2, \quad Q = x^2 - 2xy + y^2;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y,$$

тобто $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ на всій площині Oxy. Виконаємо інтегрування по ламаній O (рис. 10.42). На відрізку $OA: y = 0,\ dy = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 2$; на відрізку $AB: x =$ $dx = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$. Отже,

$$I = \int_0^2 x^2dx + \int_0^1 (4 - 4y + y^2)\,dy = 5. \ ●$$

2. Впевнитись, що вираз

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy$$

є повним диференціалом деякої функції і знайти цю функцію.

○ У даному разі функції

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad Q = \frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}$$

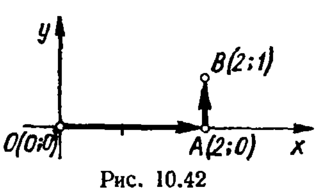


Рис. 10.42

неперервні разом з частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$ на всій площині O крім точки $O(0;\ 0)$. Оскільки рівність (80) викон еться, то даний вираз є повним диференціалом де кої функції $u(x,\ y)$. Для знаходження функ

$u(x, y)$ скористаємося формулою (89), де $(x_0; y_0)$ — деяка фіксована точка, наприклад (1; 1) (не можна брати $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, бо в точці (0; 0) функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ не визначені):

$$u(x, y) = \int_1^x P(x, 1)\,dx + \int_1^y Q(x, y) + C =$$

$$= \int_1^x \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx + \int_1^y \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right) dy + C =$$

$$= (\ln|x| + x)\Big|_1^x + \left(2\ln|y| + \frac{x}{y}\right)\Big|_1^y + C =$$

$$= \ln|x| + 2\ln|y| + \frac{x}{y} + C_1,$$

де $C_1 = C - 1$ — довільна стала. ●

Завдання для самоконтролю

1. Що називається криволінійним інтегралом першого роду? У чому полягає його геометричний і фізичний зміст?
2. Як обчислюється криволінійний інтеграл першого роду за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння контура інтегрування задані в параметричній формі? Довести відповідну формулу.
3. Як обчислюється криволінійний інтеграл першого роду, коли рівняння лінії інтегрування задано у вигляді $y = y(x)$ або $x = x(y)$?
4. Як за допомогою криволінійного інтеграла першого роду обчислити площу циліндричної поверхні та знайти довжину дуги?
5. Як за допомогою криволінійного інтеграла першого роду знайти центр маси та моменти інерції матеріальної кривої відносно осей координат?
6. Що називається криволінійним інтегралом другого роду? У чому полягає його фізичний зміст?
7. Як обчислюється криволінійний інтеграл другого роду за допомогою визначеного інтеграла? Довести відповідні формули.
8. Як за допомогою криволінійного інтеграла другого роду обчислити площу плоскої фігури?
9. Як обчислити роботу змінної сили при переміщенні матеріальної точки вздовж заданої кривої?
10. У чому полягає зв'язок між криволінійними інтегралами першого та другого роду?
11. Написати і довести формулу Гріна.
12. Сформулювати і довести теорему про незалежність криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування.
13. Записати формулу Ньютона — Лейбніца для криволінійного інтеграла від повного диференціала.
14. Як обчислити криволінійний інтеграл від повного диференціала?
15. Як знайти функцію $u(x, y)$ по її повному диференціалу?
16. Знайти координати центра маси однорідної ($\gamma_0 = 1$) дуги циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
17. Знайти площу, обмежену астроїдою

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi.$$

18. Яку роботу виконує сила $\vec{F} = yx\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ при переміщенні матеріальної точки по відрізку AB прямої, де $A(0; 1; 2)$, $B(1; 2; 3)$?

19. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L (-x^2y)\,dx + xy^2dy$ (де L — коло $x^2 + y^2 = R^2$): а) безпосередньо; б) за допомогою формули Гріна.

20. Обчислити $\int\limits_{(1;2)}^{(2;1)} \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

21. Довести, що вираз $(3x^2 - 2xy + y^2)\,dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)\,dy$ є повним диференціалом деякої функції і знайти цю функцію.

Відповіді. 16. $\left(\pi;\ \frac{4}{3}a\right)$. 17. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 18. 6. 19. $\frac{1}{2}\pi R^4$. 20. $\frac{3}{2}$. 21. $x^3 - y^3 + xy^2 - x^2y + C$.

§ 4. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

При розв'язуванні різних задач часто доводиться розглядати функції, визначені на деякій поверхні. Такими функціями є, наприклад, густина розподілу електричних зарядів на поверхні провідника, поверхнева густина маси, розподіленої на поверхні, швидкість рідини, що протікає через задану поверхню, освітленість поверхні тощо.

У цьому параграфі ми розглянемо інтеграли від функцій, заданих на поверхні — це так звані *поверхневі інтеграли.*

4.1. Поверхневі інтеграли першого роду

Поверхневі інтеграли першого роду є узагальненням подвійних інтегралів.

Нехай в точках деякої кусково-гладкої поверхні σ визначена обмежена функція $f(M) = f(x, y, z)$. (Поверхня називається *гладкою*, якщо в кожній її точці існує дотична площина і при переході від точки до точки положення цієї дотичної площини змінюється неперервно. Поверхня, яка складається із скінченного числа неперервно сполучених гладких поверхонь, називається *кусково-гладкою*.) Розіб'ємо поверхню σ на n довільних частин σ_i без спільних внутрішніх точок (рис. 10.43); нехай $\Delta\sigma_i$ — площа, а $\operatorname{diam}(\sigma_i)$ — діаметр частини поверхні σ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. У кожній частині σ_i виберемо довільну точку $M_i(\xi_i;\ \eta_i;\ \zeta_i)$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i;\ \zeta_i)\,\Delta\sigma_i. \tag{92}$$

Цю суму називають *інтегральною сумою для функції* $f(x, y, z)$ по поверхні σ.

Якщо при $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \operatorname{diam}(\sigma_i) \to 0$ інтегральні суми (92) мають скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні σ, ні від вибору точок M_i, цю границю називають поверхневим інтегралом першого роду від функції $f(x, y, z)$ по поверхні σ і позначають $\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)\,d\sigma$.

Таким чином, за означенням

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, d\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta\sigma_i. \tag{93}$$

У цьому разі функція $f(x, y, z)$ називається *інтегровною по поверхні* σ, а поверхня σ — *областю інтегрування*.

Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна на поверхні σ, то вона інтегровна по σ.

Обчислення поверхневого інтеграла першого роду зводиться до обчислення подвійного інтеграла.

Нехай гладка поверхня σ, задана рівнянням $z = z(x, y)$, проектується на площину Oxy в область D. Припустимо, що функція $f(x, y, z)$ неперервна на поверхні σ, а функції $z(x, y)$, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ неперервні в області D.

Внаслідок розбиття поверхні σ на частини σ_i область D розіб'ється на частини S_i, які є відповідними проекціями частин σ_i на площину Oxy (рис. 10.44). Якщо ΔS_i — площа області S_i, $\Delta\sigma_i$ — площа поверхні σ_i, то (п. 1.5)

$$\Delta\sigma_i = \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_i, \eta_i) + z_y'^2(\xi_i, \eta_i)}\, \Delta S_i,$$

тому інтегральну суму (92) можна записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)) \times$$

$$\times \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_i, \eta_i) + z_y'^2(\xi_i, \eta_i)}\, \Delta S_i, \tag{94}$$

Права частина цієї рівності є інтегральною сумою для функції

$$f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}, \quad (x;\ y) \in D,$$

тому з рівностей (93) і (94) випливає, що

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{D} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dxdy. \tag{95}$$

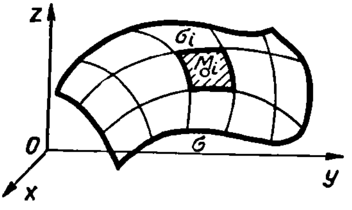


Рис. 10.43

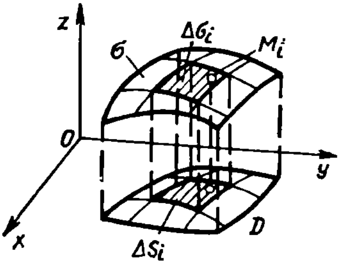


Рис. 10.44

Формула (95) виражає поверхневий інтеграл першого роду через подвійний інтеграл по проекції поверхні σ на площину Oxy.

Аналогічно можна дістати формули, що виражають інтеграл по поверхні σ через подвійні інтеграли по її проекціях на площини Oxz та Oyz. Якщо поверхня σ задається рівнянням $y = y(x, z)$ або $x = x(y, z)$, то

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2}\, dxdz,$$

або

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\, dydz,$$

де D_{xz} та D_{yz} — проекції поверхні σ на координатні площини Oxz та Oyz відповідно.

Якщо у формулі (93) покласти $f(x, y, z) = 1$ на поверхні σ, то дістанемо

$$P = \iint_{\sigma} d\sigma, \tag{96}$$

де P — площа поверхні σ, тобто за допомогою поверхневого інтеграла першого роду можна обчислювати площі поверхонь.

Переходячи у формулі (96) до подвійного інтеграла, дістаємо відому формулу (20) (п. 1.5).

Крім того, поверхневі інтеграли першого роду застосовують при обчисленні маси, координат центра маси, моменту інерції матеріальної поверхні з відомою поверхневою густиною розподілу маси. Виведення відповідних формул по суті не відрізняється від виводу аналогічних формул для матеріальної пластинки (п. 1.6).

Якщо на кусково-гладкій поверхні σ розподілено масу з поверхневою густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$, то:

а) маса матеріальної поверхні

$$m = \iint_{\sigma} \gamma(x, y, z)\, d\sigma;$$

б) координати центра маси поверхні:

$$x_c = \frac{1}{m} M_{yz} = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} x\gamma d\sigma; \quad y_c = \frac{1}{m} M_{xz} = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} y\gamma d\sigma;$$

$$z_c = \frac{1}{m} M_{xy} = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} z\gamma d\sigma,$$

де M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} — статичні моменти поверхні σ відносно площин Oyz, Oxz, Oxy;

в) моменти інерції поверхні відносно осей координат і поча координат:

$$I_x = \iint_\sigma (y^2 + z^2)\gamma d\sigma; \quad I_y = \iint_\sigma (x^2 + z^2)\gamma d\sigma;$$

$$I_z = \iint_\sigma (x^2 + y^2)\gamma d\sigma; \quad I_0 = \iint_\sigma (x^2 + y^2 + z^2)\gamma d\sigma.$$

Приклад

Знайти момент інерції відносно осі Oz частини однорідної ($\gamma = 1$) пове $z = x^2 + y^2$ (рис. 10.27), яка відтинається площиною $z = 1$.

○ Знаходимо

$$z'_x = 2x, \quad z'_y = 2y; \quad \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}.$$

Момент інерції

$$I_z = \iint_\sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma = \iint_D (x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy.$$

Проекцією D поверхні σ на площину Oxy є круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Переходячи до по них координат, маємо

$$I_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{8}\left(\frac{10}{3}\sqrt{5} + \frac{2}{15}\right).$$

Останній інтеграл знайдено заміною змінної: $1 + 4\rho^2 = t^2$. ●

4.2. Поверхневі інтеграли другого роду

Введемо поняття сторони поверхні. Візьмемо на гладкій пове σ довільну точку M, проведемо в ній нормаль $\vec{n}$ певного напряму і глянемо на поверхні σ довільний замкнений контур, який вихо з точки M і повертається в точку M, не перетинаючи при цьому поверхні σ. Переміщатимемо точку M по замкненому контуру р з вектором $\vec{n}$ так, щоб вектор $\vec{n}$ весь час залишався нормальним д При обході заданого контура ми можемо повернутися в точку M з самим або з протилежним напрямом нормалі.

Якщо у довільну точку M поверхні σ після обходу довільного кненого контура, розміщеного на поверхні σ, який не перетина межу, ми повертаємось з початковим напрямом нормалі $\vec{n}$, то пове називають *двосторонньою.*

Якщо при обході деякого контура напрям нормалі змінюєтьс протилежний, то поверхню називають *односторонньою.*

Прикладами двосторонніх поверхонь є площина, сфера, дові замкнена поверхня без самоперетинів, довільна поверхня, задана нянням $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ — функції, непер ні в деякій області D площини Oxy.

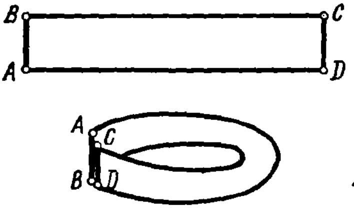


Рис. 10.45

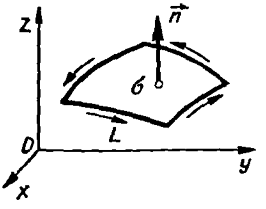


Рис. 10.46

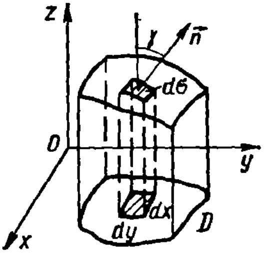


Рис. 10.47

Прикладом односторонньої поверхні є так званий *лист Мебіуса* (рис. 10.45). Модель цієї поверхні можна дістати, якщо прямокутну полоску паперу $ABCD$, перекрутивши один раз, склеїти так, щоб точка A збігалась з C, а точка B — з D.

Двосторонню поверхню називають *орієнтовною*, а вибір певної її сторони *орієнтацією поверхні*. Напрямивши в кожній точці замкненої поверхні нормаль всередину об'єму, обмеженого поверхнею, дістанемо внутрішню сторону поверхні, а напрямивши нормаль зовні поверхні — зовнішню її сторону. Надалі розглядатимемо двосторонні поверхні. Односторонні поверхні неорієнтовні.

Нехай σ — орієнтовна (сторона уже обрана) поверхня, обмежена контуром L, який не має точок самоперетину. Вважатимемо за *додатний* той напрям обходу контура L, при якому спостерігач, розміщений так, що напрям нормалі збігається з напрямом від ніг до голови при русі, залишає поверхню зліва від себе (рис. 10.46). Протилежний напрям обходу називається *від'ємним*. Якщо змінити орієнтацію поверхні на протилежну, то додатний і від'ємний напрями обходу контура L поміняються місцями.

З'ясуємо тепер поняття поверхневого інтеграла другого роду.

Нехай σ — гладка поверхня, задана рівнянням $z = f(x, y)$ і $R(x, y, z)$ — обмежена функція, визначена в точках поверхні σ. Зорієнтуємо поверхню σ. Розіб'ємо її довільно на n частин. Позначимо через D_i проекцію i-ї частини поверхні σ_i на площину Oxy, а через ΔS_i — площу D_i, взяту із знаком плюс, якщо обрана зовнішня сторона поверхні σ, і із знаком мінус, якщо обрана внутрішня сторона поверхні σ. Виберемо в кожній частині σ_i довільну точку M_i $(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta S_i. \tag{97}$$

Вираз (97) називається *інтегральною сумою*. Нехай $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(\sigma_i)$ — максимальний діаметр поверхонь σ_i.

Якщо при $\lambda \to 0$ інтегральні суми (97) мають скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні σ, ні від вибору точок M_i, то цю границю називають *поверхневим інтегралом другого роду* і позначають так: $\iint\limits_{\sigma} R(x, y, z)\, dxdy$. Отже, за означенням

$$\iint\limits_{\sigma} R(x, y, z)\, dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta S_i. \tag{98}$$

З означення поверхневого інтеграла другого роду випливає, що при зміні сторони поверхні на протилежну інтеграл змінює знак, бо змінює знак ΔS_i.

Поверхню σ можна також проектувати на координатні площини Oxz та Oyz. Тоді матимемо ще два поверхневі інтеграли $\iint\limits_{\sigma} P(x, y, z) \times$ $\times\, dxdz$; $\iint\limits_{\sigma} Q(x, y)\, dydz$, де $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ — функції, визначені в точках поверхні σ.

Оскільки $dxdy = \cos\gamma d\sigma$, $dxdz = \cos\beta d\sigma$, $dydz = \cos\alpha d\sigma$ (рис. 10.47), де $d\sigma$ — елемент площі поверхні σ, α, β, γ — кути між нормаллю до поверхні σ та осями Ox, Oy, Oz відповідно, то справедливі такі формули:

$$\iint\limits_{\sigma} P(x, y, z)\, dydz = \iint\limits_{\sigma} P(x, y, z) \cos\alpha d\sigma;$$

$$\iint\limits_{\sigma} Q(x, y, z)\, dxdz = \iint\limits_{\sigma} Q(x, y, z) \cos\beta d\sigma;$$

$$\iint\limits_{\sigma} R(x, y, z)\, dxdy = \iint\limits_{\sigma} R(x, y, z) \cos\gamma d\sigma.$$

На практиці найпоширенішими є поверхневі інтеграли, які об'єднують усі названі, тобто

$$\iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma. \tag{99}$$

Якщо, наприклад, вектор $F = Pi + Qj + Rk$ є швидкість рідини, то кількість Π рідини, яка протікає через поверхню σ за одиницю часу, називається *потоком вектора* F через поверхню σ і знаходиться за формулою [24]:

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma.$$

В цьому полягає фізичний зміст поверхневого інтеграла другого роду. Зрозуміло, коли вектор $\vec{F}$ має іншу природу, поверхневий інтеграл має інший фізичний зміст.

Формула (99) виражає загальний поверхневий інтеграл другого роду через поверхневий інтеграл першого роду.

Поверхневі інтеграли другого роду обчислюються за допомогою подвійних інтегралів.

Нехай функція $R(x, y, z)$ неперервна в усіх точках гладкої поверхні σ, яка задана рівнянням $z = z(x, y)$, $(x; y)$ D_{xy}, де область D_{xy} — проекція поверхні σ на площину Oxy. Виберемо верхню сторону поверхні σ, де нормаль до поверхні утворює з віссю Oz гострий кут, тоді $\Delta S_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Оскільки $z_i = z(\xi_i, \eta_i)$, то суму (91) можна записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i. \qquad (100)$$

У правій частині рівності (100) міститься інтегральна сума для функції $R(x, y, z(x, y))$. Ця функція неперервна в області D_{xy}, тому інтегровна в ній.

Перейшовши в рівності (100) до границі при $\lambda \to 0$, дістанемо формулу

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z)\,dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)\,dxdy,$$

яка виражає поверхневий інтеграл другого роду по змінних x і y через подвійний. Якщо вибрати нижню сторону поверхні (нормаль до поверхні утворює з віссю Oz тупий кут), то одержаний подвійний інтеграл беруть із знаком «мінус», тому

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z)\,dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,dxdy. \qquad (101)$$

Аналогічно

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z)\,dydz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)\,dydz; \qquad (102)$$

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z)\,dxdz = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z)\,dxdz. \qquad (103)$$

У формулі (102) гладку поверхню σ задано рівнянням $x = x(y, z)$, а у формулі (103) — рівнянням $y = y(x, z)$. Знак «плюс» беремо у цих формулах тоді, коли нормаль до поверхні утворює відповідно з віссю Ox, з віссю Oy гострий кут, а знак «мінус» — коли тупий кут; D_{yz}, D_{xz}, — проекції поверхні σ на площини Oyz та Oxz відповідно.

Для обчислення загального інтеграла (99) використовують формули (101) — (103), проектуючи поверхню σ на всі три координатні площини. Таким чином,

$$\iint\limits_{\sigma} P(x, y, z)\,dydz + Q(x, y, z)\,dxdz + R(x, y, z)\,dxdy =$$

$$= \pm \iint\limits_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)\,dydz \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z)\,dxdz \pm$$

$$\pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,dxdy.$$

Правильність вибору знаків перед подвійними інтегралами можна перевірити за допомогою формули

$$\vec{n}^0 = \pm \frac{\varphi'_x \vec{i} + \varphi'_y \vec{j} + \varphi'_z \vec{k}}{\sqrt{\varphi'^2_x + \varphi'^2_y + \varphi'^2_z}},$$

яка визначає одиничний нормальний вектор до поверхні $\varphi(x, y, z) = 0$. Подвійний знак у цій формулі відповідає двом сторонам поверхні σ. З формули (99) випливає, що знак перед подвійним інтегралом збігається із знаком відповідного напрямного косинуса нормалі $\vec{n}$:

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{O}x}) = \vec{n}^0 \cdot \vec{i}; \quad \cos\beta = \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{O}y}) = \vec{n}^0 \cdot \vec{j};$$

$$\cos\gamma = \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{O}z}) = \vec{n}^0 \cdot \vec{k}.$$

Якщо поверхня σ неоднозначно проектується на яку-небудь координатну площину, то цю поверхню розбивають на частини, а інтеграл (99) — на суму інтегралів по одержаних частинах поверхні σ.

Приклади

1. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду

$$I = \iint\limits_{\sigma} xz^2 dxdy + xdydz + dxdz,$$

де σ — зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, розміщена в першому октанті.

○ Нехай D_{xy}, D_{yz}, D_{xz} — проекції заданої поверхні на координатні площини. Це чверті кругів з центром у початку координат і радіусом 1; тоді

$$\iint\limits_{\sigma} xz^2 dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} x(1 - x^2 - y^2)\,dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 \cos\varphi\,(1 - \rho^2)\,d\rho = \frac{2}{15};$$

$$\iint\limits_{\sigma} xdydz = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1 - y^2 - z^2}\,dydz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1 - \rho^2}\rho d\rho = \frac{\pi}{6};$$

$$\iint\limits_{\sigma} dxdz = \iint\limits_{D_{xz}} dxdz = \frac{\pi}{4}; \quad I = \frac{2}{15} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{2}{15} + \frac{5}{12}\pi. \bullet$$

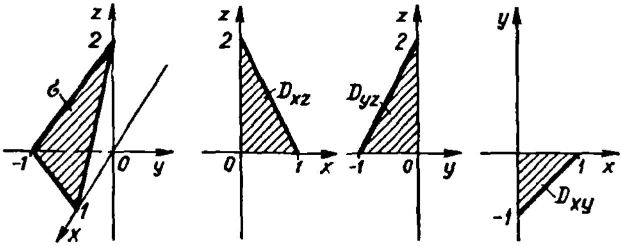


Рис. 10.48

2. Обчислити інтеграл

$$I = \iint_{\sigma} \left(x - y + \frac{3}{2} z\right) dydz + xdxdz - zdxdy,$$

якщо σ — зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $2x - 2y + z - 2 = 0$ з координатними площинами (рис. 10.48).

Знайдемо проекції поверхні σ на координатні площини:

$$D_{xy} = \{x - 1 \leqslant y \leqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\};$$

$$D_{xz} = \{0 \leqslant z \leqslant 2 - 2x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\};$$

$$D_{yz} = \{0 \leqslant z \leqslant 2 - 2y,\ -1 \leqslant y \leqslant 0\}.$$

Визначимо нормальний вектор $\vec{n^0}$ до поверхні σ:

$$\varphi(x;\ y,\ z) = 2x - 2y + z - 2;$$

$$\varphi'_x = 2,\quad \varphi'_y = -2,\quad \varphi'_z = 1,\quad \vec{n^0} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}.$$

Оскільки

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\vec{n},\ \vec{Ox}}) = \vec{n^0}\cdot\vec{i} = \frac{2}{3} > 0,\quad \cos\beta = \cos(\widehat{\vec{n},\ \vec{Oy}}) = \vec{n^0}\cdot\vec{j} =$$

$$= -\frac{2}{3} < 0,\quad \cos\gamma = \cos(\widehat{\vec{n},\ \vec{Oz}}) = \frac{1}{3} > 0,$$

то перед подвійними інтегралами у формулах (101) і (102) треба брати знак «плюс», а перед подвійним інтегралом у формулі (103) — знак «мінус». Отже,

$$I = \int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{2-2y} \left(\frac{1}{2}(2 - z + 2y) - y + \frac{3z}{2}\right) dz - \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{2-2x} xdz +$$

$$+ \int_{0}^{1} dx \int_{x-1}^{0} (2x - 2y - 2)\, dy = 7.$$

4.3. Формула Остроградського — Гаусса

Формула Остроградського — Гаусса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею. Ця формула є аналогом формули Гріна, яка, як відомо, встановлює зв'язок криволінійного інтеграла по замкненому контуру з подвійним інтегралом по плоскій області, обмеженій цим контуром.

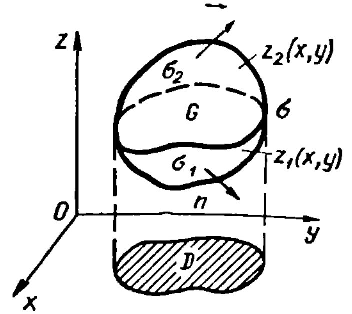


Рис. 10.49

Нехай замкнена область G обмежена замкненою поверхнею σ, причому знизу та зверху обмежена гладкими поверхнями σ_1 та σ_2, рівняння яких $z = z_1(x, y)$ та $z = z_2(x, y)$ (рис. 10.49). Припустимо, що проекцією області G на площину Oxy є область D. Нехай в області G визначено неперервну функцію $R(x, y, z)$, яка в цій області має неперервну похідну $\frac{\partial R}{\partial z}$.

Розглянемо потрійний інтеграл

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_D R(x, y, z_2(x, y))\, dxdy -$$

$$- \iint_D R(x, y, z_1(x, y))\, dxdy.$$

У правій частині цієї рівності перший подвійний інтеграл запишемо за допомогою поверхневого інтеграла по зовнішній стороні поверхні σ_2, а другий подвійний інтеграл — по зовнішній стороні поверхні σ_1. Враховуючи кути між нормаллю $\vec{n}$ та віссю Oz, дістаємо

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{\sigma_1} R(x, y, z)\, dxdy + \iint_{\sigma_2} R(x, y, z)\, dxdy =$$

$$= \iint_{\sigma} R(x, y, z)\, dxdy. \qquad (104)$$

Аналогічно, припустивши, що функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ неперервні в області G, можна дістати формули:

$$\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint_{\sigma} P(x, y, z)\, dydz, \qquad (105)$$

$$\iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint_{\sigma} Q(x, y, z)\, dxdz. \qquad (106)$$

Додавши почленно рівності (104), (105) і (106), дістанемо формулу

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_\sigma P\,dydz + Qdxdz + Rdxdy, \quad (107)$$

яку називають *формулою Остроградського — Гаусса.* Ця формула справедлива і для довільної області G, яку можна розбити на скінченне число областей, для яких виконуються рівності (104) — (106).

За допомогою формули Остроградського — Гаусса зручно обчислювати поверхневі інтеграли по замкнених поверхнях.

Приклад

Обчислити поверхневий інтеграл $I = \iint\limits_\sigma x^2dydz + 3ydxdz - 2zxdxdy$, де σ — зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z - 1 = 0$ (рис. 10.23).

○ Скористаємось формулою (10):

$$P = x^2, \quad Q = 3y, \quad R = -2zx; \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -2x;$$

$$I = \iiint\limits_G (2x + 3 - 2x)\,dxdydz = 3\iiint\limits_G dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \frac{1}{2}. \; ●$$

4.4. Формула Стокса

Формула Стокса встановлює зв'язок між поверхневим і криволінійним інтегралами. Нехай σ — поверхня, задана рівнянням $z = z(x, y)$, причому функції $z(x, y)$, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ — неперервні в області D — проекції поверхні σ на площину Oxy; L — контур, який обмежує σ, а l — проекція контура L на площину Oxy, тобто l — межа області D.

Виберемо верхню сторону поверхні σ (рис. 10.50). Якщо функція $P(x, y, z)$ неперервна разом із своїми частинними похідними першого порядку на поверхні σ, то справедлива формула

$$\oint\limits_L P(x, y, z)\,dx = \iint\limits_\sigma \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) d\sigma. \quad (108)$$

○ Перетворимо криволінійний інтеграл, який міститься у лівій частині рівності (108). Оскільки контур L лежить на поверхні σ, то координати його точок задовольняють рівняння $z = z(x, y)$, і тому значення функції $P(x, y, z)$ в точках контура L дорівнюють значенням функції $P(x, y, z(x, y))$ у відповідних точках контура l. Звідси випливає, що

$$\oint\limits_L P(x, y, z)\,dx = \oint\limits_l P(x, y;\; z(x, y))\,dx.$$

Застосовуючи до знайденого інтеграла формулу Гріна, дістанемо

$$\oint_l P(x, y, z(x, y))\,dx =$$

$$= -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot z_y'\right) dxdy.$$

Тут підінтегральна функція дорівнює частинній похідній по y від складеної функції $P(x, y, z(x, y))$.

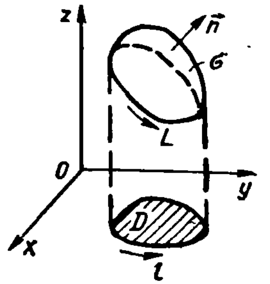


Рис. 10.50

Оскільки σ — верхня сторона поверхні, тобто $\cos\gamma > 0$ (γ — гострий кут між нормаллю $\vec{n}$ до поверхні σ і віссю Oz), то нормаль має проекції $-z_x'$, $-z_y'$, 1. Але напрямні косинуси нормалі пропорційні відповідним проекціям, тому

$$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{-z_y'}{1} = -z_y',$$

тоді

$$-\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} z_y'\right) dxdy = -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right) dxdy =$$

$$= -\iint_\sigma \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right) d\sigma.$$

Отже,

$$\oint_L P(x, y, z)\,dx = \iint_\sigma \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) d\sigma.$$

Аналогічно можна довести, що при відповідних умовах справедливі формули:

$$\oint_L Q(x, y, z)\,dy = \iint_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right) d\sigma; \qquad (109)$$

$$\oint_L R(x, y, z)\,dz = \iint_\sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right) d\sigma. \qquad (110)$$

Додаючи почленно рівності (108), (109) і (110), дістаємо формулу

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma,$$

яка називається *формулою Стокса.* За допомогою формули (99), яка пов'язує поверхневі інтеграли першого та другого роду, цю формулу можна записати так:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz +$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \tag{111}$$

Формула Стокса дає змогу обчислювати криволінійні інтеграли по замкнутих контурах за допомогою поверхневих інтегралів.

Приклад

Обчислити за допомогою формули Стокса інтеграл $I = \oint_L x^2y^3dx + dy + zdz$, де L — коло $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, а поверхня σ — верхня сторона напівсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$, і обхід контура L здійснюється в додатному напрямі.

○ Оскільки

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2y^2; \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0,$$

то за допомогою формули Стокса (111) дістаємо

$$I = -3\iint_\sigma x^2y^2dxdy = -3\iint_{D_{xy}} x^2y^2dxdy = -3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^5 \cos^2\varphi \sin^2\varphi d\rho = -$$

$$-\frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^5 \cos^2\varphi \sin^2\varphi d\rho = -\frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi = -\frac{\pi}{8}. \quad ●$$

З формули Стокса випливає, що коли виконуються рівності

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \tag{112}$$

то криволінійний інтеграл по довільному просторовому замкненому контуру L дорівнює нулю:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0. \tag{113}$$

А це означає, що в даному випадку криволінійний інтеграл не залежить від форми контура інтегрування.

При виконанні умов (112) або (113) підінтегральний вираз

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

є повним диференціалом деякої функції $u(x, y, z)$. Знайти цю функцію можна за формулою (91).

Завдання для самоконтролю

1. Що називається поверхневим інтегралом першого роду? Як обчислюється такий інтеграл?

2. Які поверхні називаються двосторонніми?

3. Що називається поверхневим інтегралом другого роду?

4. Як обчислюється поверхневий інтеграл другого роду?

5. У чому полягає зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду?

6. Записати і довести формулу Остроградського — Гаусса.

7. Записати і довести формулу Стокса.

8. Знайти координати центра маси однорідної напівсфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$; $\gamma = 1$.

9. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{\sigma} zdxdy + xdxdz + ydydz$, де σ — зовнішня сторона трикутника, утвореного в перетині площини $x - y + z = 1$ з координатними площинами.

10. Обчислити за формулою Остроградського — Гаусса поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} xdydz + ydxdz + (1 - z)\, dxdy$, де σ — зовнішня сторона повної поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$.

11. Обчислити за формулою Стокса криволінійний інтеграл $\oint\limits_{L} y^2dx - x^2dy + z^2dz$, де L — замкнений контур, утворений при перетині параболоїда $1 - y = x^2 + z^2$ з координатними площинами.

Відповіді. 8. $\left(0;\, 0;\, \frac{1}{2} R\right)$. 9. $-\frac{1}{2}$. 10. $\frac{1}{3}\pi H^3$. 11. $-\frac{31}{30}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ І ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— М. : Наука, 1987.— 320 с.
2. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.— М. : Наука, 1986.— 544 с.
3. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики.— М. : Изд-во иностр. лит., 1963.— 151 с.
4. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.— М. : Наука, 1983.— 228 с.
5. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальное и интегральное исчисление.— М. : Наука, 1988.— 431 с.
6. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальные уравнения: Кратные интегралы. Ряды.— М. : Наука, 1989.— 464 с.
7. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения.— К. : Вища шк., 1989.— 384 с.
8. *Головина Л. И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения.— М. : Наука, 1985.— 392 с.
9. *Давидов М. О.* Курс математичного аналізу: В 3 ч.— К. : Вища шк., 1990—1992.— Ч. 1.— 383 с.; Ч. 2.— 366 с.; Ч. 3.— 359 с.
10. *Дадаян А. А., Дударенко В. А.* Алгебра и геометрия.— Минск : Вышэйш. шк., 1989.— 288 с.
11. *Дадаян А. А., Дударенко В. А.* Математический анализ.— Минск : Вышэйш. шк., 1990.— 428 с.
12. *Дороговцев А. Я.* Математический анализ: Справ. пособие.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1985.— 527 с.
13. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции.— М : Наука, 1984.— 383 с.
14. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия.— М. : Наука, 1988.— 224 с.
15. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа: В 3 т.— М. : Высш. шк., 1988.
16. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа.— М. : Высш. шк., 1989.— 583 с.
17. *Кудрявцев В. А., Демидович Б. П.* Краткий курс высшей математики.— М. : Наука, 1989.— 656 с.
18. *Мантуров О. В.* Курс высшей математики.— М. : Высш. шк., 1991.— 448 с.
19. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике.— М. : Наука, 1984.— 831 с.
20. *Математическая* энциклопедия: В 5 т.— М. : Сов. энцикл., 1977—1985 — Т. 1.— 5.
21. *Мантуров О. В., Матвеев Н. М.* Курс высшей математики.— М. : Высш. шк., 1986.—399 с.
22. *Овчинников П. Ф., Лисицын Б. М., Михайленко В. М.* Высшая математика.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1989.— 679 с.
23. *Овчинников П. Ф., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М.* Высшая математика.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1987.— 552 с.

24. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов В 3 т.— М. : Наука, 1985.— Т. 1—3.
25. *Федорчук В. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— М. Изд-во Моск. ун-та, 1990.— 329 с.
26. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Наука 1985.— 447 с.
27. *Шкіль М. І., Колесник Т. В.* Вища математика.— К. : Вища шк. Головне вид-во 1986.— 512 с.
28. *Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М.* Вища математика.— К. : Вища шк Головне вид-во, 1985.— 391 с.
29. *Щипачев В. С.* Высшая математика.— М. : Высш. шк., 1991.— 479 с.
30. *Шестаков А. А., Малышева И. А., Полозков Д. П.* Курс высшей математики.— М. : Высш. шк., 1987.— 320 с.

ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

Абель Нільс Хенрік (1802—1829) — норвезький математик
Александров Павло Сергійович (1896—1982) — російський математик
Аріабхатта (біля 476—550) — індійський математик, астроном
Архімед (біля 287—212 до н. е.) — грецький вчений
Безу Етьєнн (1730—1783) французький математик
Бернуллі Йоган (1667—1748) — швейцарський математик
Бернуллі Якоб (1654—1705) — швейцарський математик, родоначальник знаменитої династії вчених Бернуллі, серед яких було вісім математиків і механіків
Бессель Фрідріх Вільгельм (1784—1846) — німецький астроном математик
Боголюбов Микола Миколайович (1909—1992) — російський математик
Больцано Бернард (1781—1848) — чеський математик
Бріггс Генрі (1561—1630) — англійський математик
Бурбакі Нікола — псевдонім, під яким група математиків виступила із спробою дати систематичний виклад сучасної математики на основі аксіоматичного методу
Валліс Джон (1616—1703) — англійський математик
Вейєрштрасс Карл (1815—1897) — німецький математик
Вессель Каспар (1745—1818) — датський математик
Вівіані Вінченцо (1622—1703) — італійський математик, фізик
Вієт Франсуа (1540—1603) — французький математик
Вронський Юзеф (1776—1853) — польський математик
Галуа Еваріст (1811—1832) — французький математик
Гамільтон Уільям Роуан (1805—1865) — ірландський математик
Гаусс Карл (1777—1855) — німецький математик
Гейне Генріх Едуард (1821—1881) — німецький математик
Гільберт Давид (1862—1943) — німецький математик
Глушков Віктор Михайлович (1923—1982) — російський математик
Грін Джордж (1793—1841) — англійський математик, фізик
Д'Аламбер Жан Лерон (1717—1783) — французький математик, механік
Декарт Рене (1596—1650) — французький математик, філософ
Діріхле Лежен Петер Густав (1805—1859) — німецький математик
Евклід (біля 340—287 до н. е.) — давньогрецький математик
Ейлер Леонард (1707—1783) — швейцарський математик, механік, фізик
Ерміт Шарль (1822—1901) — французький математик
Кантор Георг (1845—1918) — німецький математик
Кардано Джероламо (1501—1576) — італійський математик
Келі Артур (1821—1895) — англійський математик
Клеро Алексіс Клод (1713—1765) — французький математик
Колмогоров Андрій Миколайович (1903—1990) — російський математик
Коші Огюстен Луї (1789—1857) — французький математик
Кравчук Михайло Пилипович (1892—1942) — український математик
Крамер Габриель (1704—1752) — швейцарський математик
Лагранж Жозеф (1736—1813) — французький математик, механік

Лебег Анрі (1875—1941) — французький математик
Лежанр Адрієн Марі (1752—1833) — французький математик
Лейбніц Вільгельм (1646—1716) — німецький математнк
Леонардо да Вінчі (1452—1519) — італійський художник, скульптор, вченнй
Лобачевський Микола Іванович (1792—1856) — російський математнк
Лопіталь Гійом Франсуа (1661—1704) — французький математик
Митропольський Юрій Олексійович (р. н. 1917) — украïиський математик
Мебіус Август Фердинанд (1790—1868) — німецький математнк
Непер Джон (1550—1617) — шотландський математик
Ньютон Ісаак (1642—1724) — англійськнй математик, фізнк
Остроградський Михайло Васильович (1801—1862) — російський і український математнк
Паскаль Етьєн (1583—1651) — французький математик, батько Паскаля Блеза (1623—1662) — французького математика, фізика
Піфагор (біля 580—500 до н. е.) — давньогрецький математик
Ріккаті Джакопо Франческо (1676—1754) — італійський математнк
Ролль Мішель (1652—1719) — французький математнк
Сімпсон Томас (1710—1761) — англійськнй математик
Стірлінг Джеймс (1692—1770) — шотландськнй математик
Стокс Джорж (1819—1903) — англійський фізнк, математик
Тейлор Брук (1685—1731) — англійський математик
Торрічеллі Еванджеліста (1608—1647) — італійський фізнк, математик
Фалес (біля 625—548 до н. е.) — грецькнй вчений
Ферма П'єр (1601—1665) — французькнй вчений
Феррарі Людовіко (1522—1565) — італійський математнк
Френель Огюстен Жан (1788—1827) — французькнй математнк, фізик
Фур'є Жан Батист Жозеф (1768—1830) — французький математнк
Чебишев Пафнутій Львович (1821—1894) — російськнй математик
Чжан Цан (2 ст. до н. е.) — китайськнй математик
Шварц Герман (1843—1921) — німецький математнк
Якобі Карл (1804—1851) — німецькнй математик

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ