Л. І. ДЮЖЕНКОВА, Т. В. КОЛЕСНИК,
М. Я. ЛЯЩЕНКО, Г. О. МИХАЛІН, М. І. ШКІЛЬ

Математичний АНАЛІЗ у ЗАДАЧАХ і ПРИКЛАДАХ

У двох частинах

Частина 1

Допущено Міністерством освіти і науки України

Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів

КИЇВ
«ВИЩА ШКОЛА»
2002

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
М34

Гриф надано Міністерством освіти і науки України (лист від 7 лютого 2001 р. № 14/18.2–112)

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. *І. О. Шевчук* (Київський національний університет імені Тараса Шевченка); канд. фіз.-мат. наук, проф. *І. І. Старун* (Ніжинський педагогічний університет) і канд. фіз.-мат. наук, доц. *В. Ф. Власенко* (Сумський педагогічний університет)

Редакція літератури з економіки і фундаментальних наук
Редактор *Т. Ю. Ходирева*

Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2 ч.:
М34 Навч. посіб. / Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Лященко та ін. — К.: Вища шк., 2002. — Ч. 1. — 462 с.: іл.
ISBN 966–642–034–1 (ч. 1)
ISBN 966–642–035–X

Наведено основні відомості з теоретичного курсу математичного аналізу, а також вправи та зразки розв'язування деяких з них. Значна кількість вправ розкриває суть математичних понять і тверджень. Особливу увагу приділено вивченню елементарних функцій дійсної і комплексної змінної.
Для студентів вищих педагогічних навчальних закладів.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 966–642–034–1 (ч. 1)
ISBN 966–642–035–X

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник «Математичний аналіз у задачах і прикладах» складається з двох частин. У першій частині оригінально підібрано матеріал з курсу математичного аналізу функцій однієї змінної. Значну увагу приділено розгляду елементарних функцій дійсної і комплексної змінної.

Кожний параграф містить короткі теоретичні відомості, вправи та зразки розв'язування деяких з них (їх помічено знаком «•»). Наведений теоретичний матеріал цілком достатній для розв'язування будь-якого завдання з даної теми. У посібнику є значна кількість вправ, розв'язування яких сприятиме осмисленню суті математичних понять і тверджень.

Наведено також вправи для усного розв'язування, що допоможе урізноманітнити форми роботи, а також сприятиме розвитку логічного мислення студента. Зміст запропонованих вправ значною мірою орієнтований на фахову підготовку майбутнього вчителя і тому тісно пов'язаний із шкільним курсом математики.

Посібником можна скористатися при викладанні алгебри і початків аналізу в школі, а також для поглиблення знань про дійсне число, нескінченний десятковий дріб, степінь з дійсним показником, функцію та її графік, похідну, інтеграл, довжину, площу, об'єм тощо.

Кількість наведених вправ достатня для роботи студентів на практичних заняттях і під час виконання самостійної роботи.

У посібнику подано зразки розв'язування як стандартних, так і нетривіальних задач. Найскладніші задачі помічено знаком «*». Їх можна використати при написанні курсових та дипломних робіт, а також при проведенні математичних олімпіад.

Для скорочення записів використовуються логічна символіка та деякі інші позначення, зокрема символи: $\forall$ (кожен, для будь-якого), $\exists$ (існує), $\Rightarrow$ (випливає, якщо ..., то), $\Leftrightarrow$ (тоді й тільки тоді), $\exists!$ (існує єдиний, знайдеться єдиний), : (таких, що; тих, кожен з яких), $:=$ (дорівнює за означенням, надається значення), $O_{\varepsilon}(x_0)$

(ε-окіл точки x_0), $O(x_0)$ (окіл точки x_0), $O_\varepsilon^*(x_0)$ (проколений ε-окіл точки x_0), $O^*(x_0)$ (проколений окіл точки x_0) та ін.

У символічному записі деяких тверджень використовуються круглі дужки для виділення логічно завершених частин твердження.

Матеріал другої частини посібника охоплює розділи курсу математичного аналізу, які пов'язані з метричними просторами, функціями кількох змінних, інтегралом та мірою Лебега, аналітичними функціями.

Структуру цього навчального посібника запропоновано Г. О. Михаліним.

Розділ 1 МНОЖИНИ ДІЙСНИХ І КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

§ 1.1. Поняття множини. Дії над множинами

Поняття множини — одне з основних математичних понять. Воно не означається через простіші поняття, а описується або пояснюється на конкретних прикладах.

Іншими словами, *множина* — це зібрання, сукупність, колекція деяких предметів, об'єднаних за певною ознакою.

Предмети (об'єкти), що входять до даної множини, називають її *елементами.*

Множини, як правило, позначають великими літерами латинського алфавіту ($A, B, C, \ldots, X, Y, Z$), а елементи множин — малими ($a, b, c, \ldots, x, y, z$).

Запис $x \in A$ означає, що об'єкт x є елементом множини A (належить множині A); в іншому разі записують $x \notin A$. Множину, яка не містить жодного елемента, називають *порожньою* і позначають символом $\varnothing$.

Як правило, множину задають або переліком усіх її елементів, або вказують характеристичну властивість елементів множини саме цієї природи. При цьому для запису використовують фігурні дужки. Наприклад, $A = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$ — скінченна множина, $\mathbf{N} = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots\}$ — множина натуральних чисел, $\mathbf{Z} = \{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm n,\ \ldots\}$ — множина цілих чисел, $\mathbf{Q} = \{m/n:\ m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}\}$ — множина раціональних чисел, $\mathbf{R} = \{x:\ x$ — раціональне або ірраціональне$\}$ — множина дійсних чисел, $A = \left\{x \in \mathbf{R}:\ x^3 - 1 = 0\right\}$ — множина дійсних коренів рівняння $x^3 - 1 = 0$.

Множину B називають *підмножиною* множини A і записують $B \subset A$ (або $A \supset B$), якщо кожний елемент множини B є одночасно й елементом множини A (символічно це записують так: $B \subset A \Leftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A)$). При цьому кажуть, що B *включається в* A або A *містить у собі* B.

Множини A і B називають *рівними* і записують $A = B$, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$.

Якщо $B \subset A, B \neq A$ і $B \neq \varnothing$, то B називають *власною підмножиною* множини A. Множина A і порожня множина є також підмножинами множини A, їх називають *невласними*.

Об'єднанням множин A і *B* називають таку множину $A \cup B$, яка містить у собі всі елементи множин A і B і не містить ніяких інших. Отже,

$$A \cup B = \{x: \ x \in A \text{ або } x \in B\}. \qquad (1)$$

Об'єднанням множин A_i, де i пробігає непорожню множину індексів L, називають множину $\bigcup_{i \in L} A_i = \{x: \ \exists i \in L: \ x \in A_i\} = \bigcup_i A_i = \bigcup A_i$. Якщо $L = \{1, 2, ..., n\}$, то

$$\bigcup_{i \in L} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n,$$

а якщо $L = \mathbf{N}$, то

$$\bigcup_{i \in L} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Перерізом множин A і *B* називають множину $A \cap B$, яка містить у собі всі спільні елементи множин A і B і не містить ніяких інших. Отже,

$$A \cap B = \{x: \ x \in A \text{ і } x \in B\}. \qquad (2)$$

Перерізом множин A_i, $i \in L$, називають множину $\bigcap_{i \in L} A_i = \{x: \ x \in A_i \ \forall i \in L\} = \bigcap_i A_i = \bigcap A_i$. Якщо $L = \{1, 2, \ldots, n\}$, то

$$\bigcap_{i \in L} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n,$$

а якщо $L = \mathbf{N}$, то

$$\bigcap_{i \in L} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Різницею множин A і *B* називають множину $A \setminus B$, яка складається з усіх тих елементів множини A, що не належать множині B, і тільки з них. Отже,

$$A \setminus B = \{x: \ x \in A \text{ і } x \notin B\}. \qquad (3)$$

Якщо $B \subset A$, то різницю $A \setminus B$ називають *доповненням множини B до множини A* і позначають $C_A B$ або CB.

Властивості операцій над множинами

1. $A \cup B = B \cup A$ і $A \cap B = B \cap A$ (*комутативні*, або *переставні, закони*).

2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ і $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*асоціативні*, або *сполучні, закони*).

3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ і $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*дистрибутивні*, або *розподільні, закони*).

4. $C(\bigcup_i A_i)=\bigcap_i CA_i$ і $C(\bigcap_i A_i)=\bigcup_i CA_i$ (*принцип двоїстості*).

Декартовим добутком непорожніх множин A і B називають множину $A\times B:=\{(x,y):\ x\in A \text{ і } y\in B\}$.

Вправи

1. Виконати наступні завдання усно.

1) Перевірити, чи є вказані твердження означеннями:

а) множина — це багато чогось, що сприймається як єдине ціле;

б) множина — це сукупність елементів, що мають якісь спільні властивості;

в) множина — це клас об'єктів, який можна задати правилом, згідно з яким про кожний об'єкт можна сказати, що він належить чи не належить до цього класу;

г) елементи множини — це об'єкти, з яких складається множина;

д) $A=\varnothing \Leftrightarrow x\notin A\ \ \forall x$.

2) Перевірити, чи є порожніми множини $A=\left\{x\in \mathbf{R}:\ x^2+2x+3=0\right\}$ і $B=\{x\in\mathbf{R}:\ \sin x-\cos\ 2x=2\}$.

3) Перевірити, чи правильні твердження:

а) A — підмножина B, якщо існує елемент $x\in A$, який належить B;

б) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

в) існує множина, всі підмножини якої невласні;

г) $B\subset A\Leftrightarrow x\notin B\ \ \forall x\notin A$; д) $B\subset A\Leftrightarrow x\in A\ \ \forall x\in B$;

е) $B\subset A\Leftrightarrow\ \exists x\in A:\ x\notin B$; є) $\left\{x:\ \ x^2-5x=0\right\}\subset\mathbf{Z}$;

ж) $\{x:\ \cos x=0\}\subset\mathbf{Z}$; з) $\{x:\ \sin\pi x=0\}\subset\mathbf{Q}$;

и) $x\in\mathbf{Q}\Rightarrow x\in\mathbf{R}$; і) $\sqrt{5}\in\mathbf{Q}$.

2. Записати множини, перелічивши їхні елементи:

1)• $A=\{n:\ n$ — додатні числа, кратні 3 і менші 25$\}$;

2) $A=\{n:\ \ n$ — прості числа, менші 20$\}$;

3) $A=\left\{x\in\mathbf{R}:\ x^2-3x+2=0\right\}$; 4) $A=\left\{x\in\mathbf{R}:\ x+\dfrac{1}{x}\le 2 \text{ і } x>0\right\}$;

5)• $A=\left\{x\in\mathbf{Z}:\ \dfrac{1}{9}\le 3^x<10\right\}$; 6) $A=\left\{x\in\mathbf{N}:\ \log_{\frac{1}{3}}\ \dfrac{1}{x}\le 1\right\}$;

7) $A=\left\{x\in\mathbf{R}:\ \sin x+\cos x=\sqrt{2} \text{ і } 0<x<\dfrac{\pi}{2}\right\}$;

8) $A=\left\{x\in\mathbf{R}:\ \sin^2 2x=1 \text{ і } 0<x<\pi\right\}$.

3. Вказати, які з даних множин скінченні, а які нескінченні: а) множина цілих чисел, що діляться на 3; б) множина коренів заданого многочлена; в) множина всіх рослин на Землі.

4. Довести, що $A = \varnothing \Leftrightarrow A \subset B \ \ \forall B$.

5. Записати усі підмножини множини $A = \{a, b, c\}$.

6. Скільки підмножин має множина $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$?

7. Чи рівні між собою множини A і B, якщо:

1) A — множина, що складається із 30 стільців, а B — множина, що складається із 30 студентів;

2)• $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, c, a\}$; 3) $A = \{0, 1\}$, $B = \left\{x \in \mathbf{R}: \ x^3 - x = 0\right\}$?

8. Серед даних множин знайти усі множини, рівні між собою:

$A = \left\{x: \ x^2/(x - 0,5) > 2\right\}$, $B = \{x: \ (x - 0,5)/x < 0,5\}$,

$C = (0,5; +\infty)$, $D = \{x: \ (x+1)(x-2) > 1\}$, $E = [2; \ +\infty)$.

9. Знайти усі правильні твердження серед даних:

1) об'єднанням множин A і B є будь-яка множина C, елементи якої належать множині A або множині B;

2) $x \in A \bigcup B \Leftrightarrow x \in A$ або $x \in B$; 3) $x \notin A \bigcup B \Leftrightarrow x \notin A$ або $x \notin B$;

4) $x \in A \bigcup B \Leftarrow x \in A$ і $x \notin B$; 5) $x \notin A \bigcup B \Leftrightarrow x \notin A$ і $x \notin B$.

10. Довести, що $A \subset B \Leftrightarrow A \bigcup B = B \Leftrightarrow A \bigcap B = A$.

11. Знайти усі правильні твердження серед даних:

1) перерізом множин A і B є будь-яка множина C, елементи якої належать множині A і множині B;

2) $x \in A \bigcap B \Leftrightarrow x \in A$ або $x \in B$; 3) $x \notin A \bigcap B \Leftrightarrow x \notin A$ або $x \notin B$;

4) $x \in A \bigcap B \Leftarrow x \in A$ і $x \notin B$; 5) $x \notin A \bigcap B \Leftrightarrow x \notin A$ і $x \notin B$.

12. Нехай A — множина цілих чисел, що діляться на 4, а B — множина цілих чисел, що діляться на 3. Які з чисел 9, 0, –24, –53, 128, 1242048 належать множині $A \bigcup B$?

13. Нехай A — множина всіх цілих чисел, що діляться на 2, а B — множина всіх цілих чисел, що діляться на 3. Якими є множини:

1) $A \bigcup B$; 2) $A \bigcap B$; 3) $A \setminus B$; 4)• $B \setminus A$?

14. Нехай $N = \{x: \ x$ — натуральне число$\}$, $M = \{x: \ x$ — додатне раціональне число$\}$, $P = \{x: \ x$ — просте число$\}$, $Q = \{x: \ x$ — додатне непарне число$\}$. Чи правильні твердження:

1) $P \subset (Q \bigcap N) \bigcup M$; 2) $P \subset Q \bigcap N$?

15. За допомогою наочного зображення на площині впевнитись, що для будь-яких трьох множин A, B і C виконуються такі рівності:

1) $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$;

2) $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$;

3) $A \setminus (A \bigcap B) = A \setminus B$; 4)• $(A \bigcup B) \setminus B = A \setminus B$;

5) $(A \bigcup B) \setminus (B \setminus A) = A$;

6) $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus ((A \bigcap B) \setminus C)$.

16. Нехай $A=\{x:\ f(x)=0\}$, $B=\{x:\ \varphi(x)=0\}$. Як виразити через ці множини множину розв'язків:

1) рівняння $f(x)/\varphi(x)=0$; 2) системи $\begin{cases} f(x)=0, \\ \varphi(x)=0; \end{cases}$

3) рівняння $f(x)\,\varphi(x)=0$; 4) рівняння $f(x)/\left(f^2(x)+\varphi^2(x)\right)=0$;

5) рівняння $f^2(x)+\varphi^2(x)=0$?

17. Довести дані твердження або показати, що вони є неправильними:

1) $A\bigcup B=A\bigcup(B\setminus A)$; 2) $A\bigcap B=A\setminus(B\setminus A)$;

3) $A\setminus B=A\setminus(A\bigcap B)$; 4)• $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$;

5) $A\bigcup(B\setminus C)=(A\bigcup B)\setminus C$; 6) $\bigcup\limits_i A_i\setminus\bigcup\limits_i B_i=\bigcup\limits_i(A_i\setminus B_i)$;

7) $\mathrm{C}(A\setminus B)=\mathrm{C}A\bigcup B$; 8) $(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap \mathrm{C}B)\bigcup(\mathrm{C}A\bigcap B)=A\bigcup B$.

18. Спростити вираз $\mathrm{C}(\mathrm{C}(X\bigcup Y)\bigcap(\mathrm{C}X\bigcup \mathrm{C}Y))$.

19. Серед даних тверджень знайти правильні:

1) різницею множин A і B називають будь-яку множину, що містить усі елементи множини A, які не належать B;

2) $\mathrm{C}_F E=F\setminus E$ для будь-яких множин F і E;

3) $x\notin A\setminus B \Leftrightarrow x\notin A$ і $x\in B$;

4) $x\notin A\setminus B \Leftrightarrow x\notin A$ або $x\in B$; 5) $x\notin \mathrm{C}A \Leftrightarrow x\in A$.

20. Знайти доповнення до відрізка [0; 1] таких множин:

1) $\{0,\ 1\}$; 2) $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$; 3)• $\left(0;\ \frac{1}{5}\right]$; 4) $\left\{\frac{1}{2}\right\}\bigcup\left[\frac{2}{3};\ 1\right]$.

21. Знайти об'єднання, переріз та різницю множин A і B:

1) $A=\{x:\ 0<x<3\}$, $B=\{x:\ 1\le x\le 4\}$;

2) $A=\left\{x:\ x^2-2x>0\right\}$, $B=\left\{x:\ x^2-4x+3\le 0\right\}$;

3) $A=\left\{x:\ (x^2-5x+6)/(x-4)<0\right\}$, $B=\{x:\ (x-1)/(x+2)\ge 1\}$;

4) $A=\left\{x:\ \sqrt{x+2}>x\right\}$, $B=\left\{x:\ 1/\sqrt{x+2}<1/x\right\}$;

5) $A=\{x:\ \sin x>0{,}5\}$, $B=\{x:\ \cos x\le 0{,}5\}$;

6) $A=\left\{x:\ 2^{2x}-6\cdot 2^x+8\ge 0\right\}$, $B=\left\{x:\ \log_{\frac{1}{2}}(x-1{,}5)>1\right\}$.

22. Знайти об'єднання та переріз множин $X_n\ (n=1,\ 2,\ \ldots)$:

1)• $X_n=[-1/n;\ 1/n]$; 2) $X_n=(-1/n;\ 1/n)$; 3) $X_n=(0;\ 1/n]$;

4) $X_n=[-1/n;\ (2n-1)/n]$; 5) $X_n=(0;\ n/(n+1))$;

6) $X_n=[n/(n+1);\ n/(2n+1))$; 7) $X_n=\{1/n\}$;

8) $X_n=\{1,\ 1/2,\ 1/3,\ \ldots,\ 1/n\}$; 9) $X_n=(3n-2;\ 3n+1)$.

23. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) декартовим добутком множин A і B називають множину усіх пар (x, y), де $x \in A$, а $y \in B$;

2) $A \times B = B \times A$; 3) $A \times (B \bigcup C) = (A \times B) \bigcup (A \times C)$;

4) $(A \bigcap B) \times C = (A \times C) \bigcap (B \times C)$; 5) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

24. Виписати всі елементи множин $A \times B$ і $B \times A$, де $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$. Чи рівні множини $A \times B$ і $B \times A$? У яких випадках $A \times B = B \times A$?

25. З'ясувати, за яких умов справджуються такі твердження:

1) $(x, y) \in A \times B \Rightarrow (y, x) \in A \times B$; 2) $(x, y) \in A \times B \Rightarrow (x, x) \in A \times B$;

3) $(x, y) \in A \times B \Rightarrow (y, y) \in A \times B$.

26. Дати геометричну інтерпретацію множин $\mathbf{R}^2 := \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ і $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$.

27. Зобразити на координатній площині такі множини:

1) $A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x + y - 1 = 0\right\}$;

2) $A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\right\}$;

3) $A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon (x-1)(y+1) = 0\right\}$;

4)• $A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon y \geq \sqrt{2x}\right\}$; 5) $A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon xy > 1\right\}$.

28. Визначити і зобразити на рисунках множини $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A \setminus B$ і $B \setminus A$, якщо:

1) $A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 4\right\}$, $B = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon xy \geq 0\right\}$;

2) $A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x = y\right\}$, $B = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon |x| + |y| \leq 1\right\}$;

3) $A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon y > \sqrt{x}\right\}$, $B = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 + (y-1)^2 \leq 1\right\}$;

4) $A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon 1/x > 1/y\right\}$, $B = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x > 0 \text{ і } y > 0\right\}$;

5) $A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon 2^{x+1} = y^2 + 4\right\}$, $B = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon y \geq 2^{x-1}\right\}$.

29. 1) Для визначення впливу реклами на купівлю мийних засобів було проведено опитування. В результаті було встановлено, що при виборі товару 50 % осіб керувались рекламою, 30 — власною думкою про якість товару, 40 % — порадами друзів та знайомих. Виявилось, що 10 % керувались рекламою та власною думкою, 9 — рекламою та порадами друзів, 15 % — власною думкою та порадами друзів. Скільки процентів опитуваних керувались тільки рекламою, власною думкою та порадами друзів? Скільки процентів опитуваних керувались тільки рекламою, тільки власною думкою, тільки порадами друзів?

2) Для аналізу попиту населення на побутові прилади було проведено дослідження серед 1000 відвідувачів магазину. В результаті було встановлено, що протягом року 500 осіб купили пральні машини, 150 — електричні плити, 350 — телевізори. Виявилось, що 100 відвідувачів купили пральні машини та електричні плити, 90 — пральні машини та телевізори, 80 — електрич-

ні плити та телевізори, 20 — пральні машини, електричні плити та телевізори. Користуючись наочним зображенням (діаграмами Венна), визначити, скільки відвідувачів купили: а) принаймні один; б) жодного; в) тільки один з названих побутових приладів.

Зразки розв'язування задач

2. 1) Оскільки на 3 діляться числа, сума цифр яких ділиться на 3, то $A = \{3,\ 6,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ 24\}$.

5) Оскільки $1/9 = 3^{-2} \le 3^x < 10 = 3^2 + 1$, то, враховуючи монотонність функції 3^x, дістаємо, що задану нерівність задовольняють такі значення x: $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$. Отже, $A = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$.

7. 2) $A = B$, оскільки ці множини складаються з однакових елементів. Порядок розміщення елементів у множині не має значення.

13. 4) Множині $B \setminus A$ належать ті елементи множини B, які не входять до A, тобто всі непарні числа, кратні 3. Отже,

$$B \setminus A = \{n:\ n = 2k+1 \text{ і } n = 3m;\ k, m \in \mathbf{Z}\}.$$

15. 4) Для зображення дій над множинами зручно використовувати умовні рисунки, які часто називають кругами Ейлера або діаграмами Венна (відповідь див. на рис. 1).

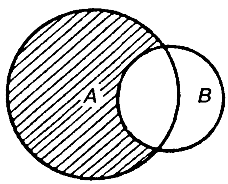


Рис. 1

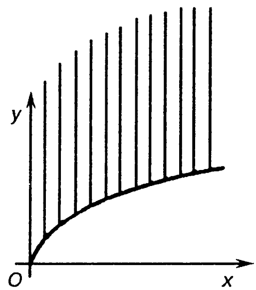


Рис. 2

17. 4) За означенням рівних множин треба довести такі два включення: $(A \setminus B) \setminus C \subset (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ і $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) \subset (A \setminus B) \setminus C$.

Нехай маємо довільне фіксоване $x \in (A \setminus B) \setminus C$. Тоді за означенням різниці $x \in A \setminus B$ і $x \notin C \Rightarrow (x \in A$ і $x \notin B)$ і $x \notin C \Rightarrow (x \in A$ і $x \notin C)$ і $x \notin B \Rightarrow x \in A \setminus C$ і $x \notin B \setminus C \Rightarrow x \in (A \setminus B) \setminus (B \setminus C)$. Перше включення доведено.

Візьмемо довільне фіксоване $x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$. Тоді за означенням різниці $x \in A \setminus C$ і $x \notin B \setminus C \Rightarrow (x \in A$ і $x \notin C)$ і $(x \notin B$ або $x \in C) \Rightarrow (x \in A$ і $x \notin C)$ і $x \notin B \Rightarrow (x \in A$ і $x \notin B)$ і $x \notin C \Rightarrow x \in A \setminus B$ і $x \notin C \Rightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C$. Цим доведено друге включення, а отже, задана рівність правильна.

20. 3) Нехай $A = (0;\ 0{,}2]$. Згідно з означенням доповнення маємо $CA = [0;\ 1] \setminus (0;\ 0{,}2] = \{0\} \cup (0{,}2;\ 1]$.

22. 1) Оскільки $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$, то, користуючись означеннями об'єднання і перерізу множин, дістаємо

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = [-1;\ 1] \cup [-1/2;\ 1/2] \cup \ \ldots\ \cup [-1/n;\ 1/n] \cup \ \ldots = [-1;\ 1],$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = [-1;\ 1] \cap [-1/2;\ 1/2] \cap \ \ldots\ \cap [-1/n;\ 1/n] \cap \ \ldots = \{0\}.$$

27. 4) Задану нерівність задовольняють координати тих точок площини Oxy, для яких $x \ge 0$ і $y \ge \sqrt{2x}$. Отже, це є точки, які лежать у першій чверті над віткою параболи $y = \sqrt{2x}$, включаючи точки осі Oy і точки параболи (рис. 2).

§ 1.2. Множина дійсних чисел та основні її властивості

Під *множиною* **R** *дійсних чисел* розумітимемо множину, що задовольняє задані нижче властивості 1—5. При цьому елементи цієї множини називають *дійсними числами*.

Основні властивості дійсних чисел

1. *Упорядкованість:* $\forall\, a,\ b \in \mathbf{R}$ має місце одне й тільки одне із співвідношень: або $a = b$, або $a < b$, або $a > b$. При цьому, якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$ (транзитивність співвідношення «менше»).

2. *Властивості операції додавання:* переставна, сполучна, існування нуля і протилежного числа, зв'язок з упорядкованістю $(a \le b \Rightarrow a + c \le b + c$ $\forall a, b, c \in \mathbf{R})$.

3. *Властивості операції множення:* переставна, сполучна і розподільна, існування одиниці та оберненого числа, зв'язок з упорядкованістю $(a \le b,\ c > 0 \Rightarrow ac \le bc;\ a \le b,\ c < 0 \Rightarrow ac \ge bc)$.

З властивостей 2 і 3 випливає наслідок: $\forall\, a,\ b \in \mathbf{R}:\ a < b\ \exists\, c \in \mathbf{R}:\ a < c < b$ (властивість щільності). Властивості 2 і 3 дають також можливість визначити такі множини: *натуральних чисел* $\mathbf{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$, де $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$ і т. д.; *цілих чисел* $\mathbf{Z} = \{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3, \ldots\}$; *раціональних чисел* $\mathbf{Q} = \{x = m/n:\ m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}\}$. Дійсне число, що не є раціональним, називають *ірраціональним*.

4. *Аксіома Архімеда:* $\forall\, a \in \mathbf{R}\ \exists n \in \mathbf{Z}:\ n \ge a$.

5. *Аксіома Кантора* (властивість неперервності).

Нехай дано систему відрізків $\{[a_n;\ b_n]\}$ таких, що:

1) $[a_n;\ b_n] \supset [a_{n+1};\ b_{n+1}]$ $\forall n \in \mathbf{N}$ (система вкладених відрізків);

2) $b_n - a_n \to 0,\ n \to \infty$, тобто $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon):\ n > n_0 \Rightarrow |\, b_n - a_n \,| < \varepsilon$ (система стяжних відрізків).

Тоді існує єдина точка $c \in [a_n;\ b_n]$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$, тобто $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n;\ b_n] = \{c\}$.

За означенням вважають, що $-\infty < x < +\infty$ $\forall\, x \in \mathbf{R}$, а символи $+\infty$ і $-\infty$ називають *невласними числами*. Числові проміжки: *відрізок, піввідрізок, інтервал* та *півінтервал* визначаються відповідно рівностями $[a;\ b] = \{x \in \mathbf{R}:\ a \le x \le b\}$; $[a;\ b) = \{x \in \mathbf{R}:\ a \le x < b\}$ $(a;\ b) = \{x \in \mathbf{R}:\ a < x < b\}$; $(a;\ b] = \{x \in \mathbf{R}:\ a < x \le b\}$ $\forall\, a,\ b \in \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Можна показати, що кожне раціональне число задається у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу, а ірраціональне — нескінченного неперіодичного десяткового дробу (див. вправу 13).

Числова, або *координатна, пряма* — це будь-яка пряма, на якій вказано додатний напрям, початок відліку й одиничний відрізок. Кожному дійсному числу можна поставити у відповідність одну і тільки одну точку числової прямої. Тому множину **R** і числову пряму ототожнюють і замість слів «число $x \in \mathbf{R}$» кажуть «точка x числової прямої» і навпаки. Невласні дійсні числа $+\infty$ і $-\infty$ називають *нескінченно віддаленими точками.*

Вправи

1. Відповісти на запитання усно.

1) Які з властивостей 1—5 задовольняють множини **N**, **Z**, **Q**, **R** \ **Q**?

2) Якою основною властивістю відрізняється множина **R** від множини **Q**?

3) Чи кожне дійсне число є до деякого дійсного числа: а) протилежним; б) оберненим?

4) Чи є множина **R** дійсних чисел: а) відрізком; б) проміжком; в) інтервалом; г) півінтервалом; д) піввідрізком?

5) Якому числовому проміжку належить x, якщо: а) $|x| < 3$; б) $|x| \geq 2$; в) $|x| \leq 1$; г) $|x| > 4$?

6) Для яких $x \in \mathbf{R}$ мають зміст вирази: а) $\frac{1}{x+7}$; б) $\sqrt{x+1}$; в) $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$; г) $\log_a x$; д) $\frac{1}{\log_a x}$; е) $2^{\frac{1}{x-2}}$?

7) Які числа мають два різних зображення у вигляді десяткового дробу?

2. Довести, що коли $0 < a \leq b$ або $a \leq b < 0$, то $1/a \geq 1/b$.

3. 1) Користуючись тільки властивостями існування суми та добутку, довести єдиність: а) нуля; б) протилежного числа; в) одиниці; г) оберненого числа.

2) Назвемо за означенням число $x \in \mathbf{R}$: а) додатним, якщо $x > 0$; б) від'ємним, якщо $x < 0$; в) невід'ємним, якщо $x \geq 0$; г) недодатним, якщо $x \leq 0$. Довести, що кожне дійсне число або додатне, або недодатне.

4. Суму n дійсних чисел $x_k \left(k = \overline{1, n}\right)$ позначають $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k := x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Довести, що $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k + \sum\limits_{k=1}^{n} y_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k + y_k)$.

5. Чи можна стверджувати, що існує сума: а) будь-якої скінченної кількості дійсних чисел $x_k \left(k = \overline{1, n}\right)$; б) нескінченної множини дійсних чисел x_k, $k \in \mathbf{N}$?

6. Добуток n дійсних чисел $x_k \left(k = \overline{1, n}\right)$ позначають $\prod\limits_{k=1}^{n} x_k := x_1 x_2 \ldots x_n$.

Довести, що $\left(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\prod\limits_{k=1}^{n} y_k\right) = \prod\limits_{k=1}^{n} (x_k y_k)$.

7. Переформулювати вправу 5 для добутку та виконати її.

8. Довести, що:

1) коли $P > 0$, то $\forall\, a \in \mathbf{R}\ \ \exists\, n \in \mathbf{Z}:\ nP > a$;

2) $a \le b, b \le a \Rightarrow a = b$ (властивість антисиметричності).

9. Чи рівносильна аксіома Архімеда твердженню: $\forall\, a \in \mathbf{R}\ \ \exists\, n \in \mathbf{Z}:\ n \le a$?

10. Нехай $\{[a_n\,;\ b_n]\}$ — система вкладених відрізків. Серед даних тверджень вказати правильні:

1) $\exists c : \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n\,;\ b_n] = \{c\}$; 2) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n\,;\ b_n] \neq \varnothing$;

3) $\exists [a\,;\ b] \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n\,;\ b_n]$.

11. Нехай c — число, про яке йдеться в аксіомі Кантора. Чи можна стверджувати, що:

1) $c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n]$; 2) $c = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n\,;\ b_n]$; 3) $a_n < c < b_n\ \ \forall\, n \in \mathbf{N}$;

4) $a_n \le c < b_n\ \forall n \in \mathbf{N}$; 5) $a_n < c \le b_n\ \forall n \in \mathbf{N}$; 6) $a_n \le c \le b_n\ \ \forall\, n \in \mathbf{N}$?

12. Назвемо нескінченним десятковим дробом вираз $x = {*}a_n a_{n-1}\ \ldots\ a_1 a_0,$ $a_{-1}a_{-2}\ \ldots\ a_{-m}\ \ldots =: \sum\limits_{k=-n}^{\infty} a_{-k} \cdot 10^{-k}$, де $n \ge 0$, $*$ — означає знак $+$ або $-$, $a_{-k} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, причому $\{a_{-k} :\ a_{-k} \neq 9\}$ — нескінченна множина. Як можна ввести співвідношення «$<$», «$>$» та «$=$» для нескінченних десяткових дробів?

13. Нескінченний десятковий дріб ${*}a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0,\ a_{-1}a_{-2}\ldots$ називають періодичним, якщо $\exists\ k \ge 0$ і $p \ge 1$: $a_{-(k+i)} = a_{-(k+i+pm)}$, $1 \le i \le p$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Довести, що кожне раціональне число можна записати у вигляді нескінченного періодичного дробу і навпаки.

14. Для невід'ємного нескінченного десяткового дробу $x = \sum\limits_{k=-n}^{\infty} a_{-k} \cdot 10^{-k}$ число $x_m^- = \sum\limits_{k=-n}^{m} a_{-k} \cdot 10^{-k}$, $m \ge -n$, називають m-м *раціональним наближенням з недостачею,* а число $x_m^+ = \sum\limits_{k=-n}^{m} a_{-k} \cdot 10^{-k} + \dfrac{1}{10^m}$ — m-м *раціональним наближенням з надлишком.* Довести, що $x_m^- \le x < x_m^+\ \ \forall\ m \ge -n$.

15. Знайти m-ті раціональні наближення ($m = 0, 1, 2, 3$) для даних чисел:

1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) π; 4) $\frac{1}{7}$.

16. Серед даних чисел знайти раціональні і записати їх у вигляді звичайних дробів:

1) $\sqrt{5}$; 2)• $2,075$; 3)• $5,(82)$; 4) $3,12(3)$; 5) $1,268(48)$;

6) $4,26(9)$; 7) $1,010010001\ldots$; 8) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

17*. «Золотий переріз» відрізка AB точкою C визначається співвідношенням $AB \cdot AC = BC^2$. Довести, що відношення AC/AB ірраціональне.

18. Нехай a і b — раціональні числа. Що можна сказати про раціональність чисел: а) $a+b$; б) $a-b$; в) ab; г) a/b?

19. Сформулювати задачу, аналогічну попередній, для ірраціональних чисел та розв'язати її.

20. Вказати два ірраціональних числа, для яких:

1)• сума є числом раціональним;

2) добуток є числом ірраціональним.

21. Довести, що:

1) не існує раціонального числа r такого, що: а)• $r^2=2$; б) $r^2=7$; в)• $r=0,2020020002\ldots2\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ нулів}}2\ldots$;

2) будь-яке число, в якого нулі стоять на всіх місцях з номерами 10^n після коми і лише на цих місцях, є ірраціональним;

3)• число $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ є ірраціональним;

4) сума і різниця раціонального числа a та ірраціонального числа b є числа ірраціональні;

5) добуток ab і частка a/b, де $0 \neq a \in \mathbf{Q}$, а $b \notin \mathbf{Q}$, є числа ірраціональні;

6)• якщо $r>0, r\in \mathbf{Q}$, і $r^2<1$, то $\exists\ h>0:\ (r+h)^2<1$;

7) якщо $r>0, r\in \mathbf{Q}$, і $r^2>1$, то $\exists\ h>0:\ (r-h)^2>1$.

22. Знайти всі раціональні значення числа x, для яких є раціональним число:

1)• $\sqrt{x^2+1}$; 2) $\sqrt{x^2+x+3}$.

23. Серед даних тверджень знайти правильні:

1) $a\ge b \Rightarrow a+c\ge b+c$; 2) $a\ge b\Rightarrow -a\le -b$;

3) $a\ge b\Rightarrow ac\ge bc$; 4) $a\ge b\Rightarrow 1/a\le 1/b$;

5) $a\ge b\Rightarrow a/c\ge b/c\quad \forall c>0$.

24. Вказати спосіб зображення на числовій прямій будь-якого дійсного числа.

25. Серед даних множин вказати ті, які є числовими проміжками: $A=\{x:\ (x+2)/(x-3)>0\}$, $B=\{x:\ (x+2)/(x-3)\le 1\}$, $C=\{x:\ 1/x+2\ge -x\}$, $D=\{x:\ -1<(x+1)/(x-1)<1\}$.

26. Як доцільно визначити арифметичні операції над числами a і b, з яких принаймні одне є невласним числом?

Зразки розв'язування задач

16. Раціональними є всі нескінченні періодичні дроби. Згідно з правилом перетворення нескінченних дробів у звичайні маємо:

2) $2{,}075 = 2\frac{75}{1000} = 2\frac{3}{40}$; 3) $5{,}(82) = 5\frac{82}{99}$.

20. 1) Розглянемо, наприклад, два ірраціональних числа a і b: $a = 0{,}1010010001\ldots$; $b = 0{,}7878878887\ldots$. Їх сума $a + b = 0{,}888\ldots = 0{,}(8)$ є періодичним дробом, а отже, раціональним числом, тоді як самі числа a і b є ірраціональними, бо зображаються неперіодичними дробами.

21. 1), а) Доведення проведемо від супротивного. Нехай існує нескоротний дріб $\frac{m}{n}$ $(m,\ n \in \mathbf{N})$ такий, що $\frac{m^2}{n^2} = 2$. Тоді $m^2 = 2n^2$, тобто число m є парним. Позначимо $m = 2p$. Тоді $4p^2 = 2n^2$, або $n^2 = 2p^2$. Отже, і n — парне число, тобто число $\frac{m}{n}$ є скоротним дробом, що суперечить припущенню. Таким чином, $\sqrt{2}$ не є раціональним числом.

1), в) Треба довести, що даний дріб не є періодичним. Справді, між n-ю і $(n+1)$-ю двійками записано n нулів, чого не може бути у періодичному дробі.

3) Припустимо, що сума $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ є раціональним числом. Тоді число $\sqrt{2} - \sqrt{5} = \frac{-3}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$ також є раціональним як частка двох раціональних чисел. Тому число $\sqrt{2} = \frac{1}{2}((\sqrt{2} + \sqrt{5}) - (\sqrt{2} - \sqrt{5}))$ є раціональним, що суперечить ірраціональності числа $\sqrt{2}$ (вправа 1), а)). Отже, наше припущення неправильне, і число $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ є ірраціональним.

6) Нехай $0 < h < 1$. Тоді $h^2 < h$ і $(r+h)^2 = r^2 + 2rh + h^2 < r^2 + 2rh + h$. Тому досить покласти, що $r^2 + 2rh + h = 1$, тобто $h = \frac{1 - r^2}{2r + 1}$.

22. 1) Припустимо, що x і $y = \sqrt{x^2 + 1}$ — раціональні числа. Тоді їх різниця $y - x = r > 0$ є також раціональним числом. Виразимо x через r:

$$y - x = \sqrt{x^2 + 1} - x = r, \quad \sqrt{x^2 + 1} = r + x, \quad x^2 + 1 = r^2 + 2rx + x^2,$$

$$x = \frac{1 - r^2}{2r}, \ r \neq 0.$$

Покажемо тепер, що y є раціональним числом, якщо $x = \frac{1 - r^2}{2r}$, де r — довільне раціональне число, відмінне від нуля. Справді,

$$y = \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{\frac{(1 - r^2)^2}{(2r)^2} + 1} = \sqrt{\frac{(1 + r^2)^2}{(2r)^2}} = \frac{1 + r^2}{2|r|}.$$

Цей вираз є раціональним $\forall\, r \in \mathbf{Q},\ r \neq 0$.

§ 1.3. Модуль (абсолютна величина) дійсного числа

Модуль (абсолютну величину) дійсного числа x визначають рівністю

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{якщо } x \ge 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Основні властивості модуля

1. $|x| \ge 0$ (*невід'ємність модуля*).

2. $|x| = |-x|$ (*про модулі протилежних чисел*).

3. $|x| \ge x$ і $|x| \ge -x$ (*про порівняння модуля з числом та протилежним числом*).

4. $|xy| = |x||y|, \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ (*про модуль добутку та частки*).

5. $||x| - |y|| \le |x \pm y| \le |x| + |y|$ (*про модуль суми та різниці*).

6. $|x - x_0| < a \Leftrightarrow x_0 - a < x < x_0 + a \Leftrightarrow x \in (x_0 - a;\ x_0 + a)$,

$|x - x_0| \le a \Leftrightarrow x_0 - a \le x \le x_0 + a \Leftrightarrow x \in [x_0 - a;\ x_0 + a]$,

$|x - x_0| > a \Leftrightarrow x > x_0 + a$ або $x < x_0 - a \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ x_0 - a) \cup (x_0 + a;\ +\infty)$,

$|x - x_0| \ge a \Leftrightarrow x \ge x_0 + a$ або $x \le x_0 - a \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ x_0 - a] \cup [x_0 + a;\ +\infty)$.

Околом, або *ε-околом*, *точки* x_0 називають множину $O_\varepsilon(x_0) := (x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon) =: O(x_0)$, де $\varepsilon > 0$ — задане число (*радіус околу*).

Окіл, або *ε-окіл*, *нескінченно віддаленої точки* $+\infty$ $(-\infty)$ визначається рівністю $O_\varepsilon(+\infty) := (\varepsilon; +\infty) =: O(+\infty)$ $(O_\varepsilon(-\infty) := (-\infty; -\varepsilon)$ $=: O(-\infty))$, де $\varepsilon > 0$ — задане число.

Проколений окіл точки x_0 — це множина $O^*(x_0) = O(x_0) \setminus \{x_0\}$.

З означення арифметичного кореня випливає, що $\sqrt{x^2} = |x|$ $\forall x \in \mathbf{R}$.

Вправи

1. Виконати наступні вправи усно.

1) Серед даних тверджень знайти правильні: а) модуль будь-якого числа дорівнює цьому числу; б) модуль деякого числа є число недодатне; в) $|x| > 0 \Rightarrow x > 0$; г) $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$; д) $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$; е) $a \ne b \Rightarrow |a| \ne |b|$.

2) Для яких чисел маємо: а) $|x| \le x$; б) $|x| \le -x$; в) $|x - y| = x - y$; г) $|x + y| = -x - y$?

3) Розв'язати рівняння та нерівності:

а) $|x+1|=0$; б) $\sqrt{x^2}=2$; в) $\sqrt{\sin^2 x}=1$;

г) $|x|>2$; д) $|x|\le 4$; е) $|x-1|<1$.

2. Відстань $\rho(x, y)$ між числами x і y можна визначити за допомогою рівності $\rho(x,y):=|x-y|$. Довести, що:

1) $\rho(x, y)\ge 0$; 2) $\rho(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y$; 3) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$;

4) $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)\ \ \forall\, x,y,z\in \mathbf{R}$.

3. Зобразити на площині Oxy множину точок $(x; y)$, для яких:

а) $|x|\le y$; б) $x=|y|$; в) $|x|=|y|$; г) $y\le|x|$; д) $|y|\ge|x|$; е) $|x-y|<1$.

4. Довести, що $O_\varepsilon(x_0)=\{x:\ |x-x_0|<\varepsilon\}$.

5. Що можна сказати про об'єднання та переріз:

1) двох околів точки x_0; 2) скінченної кількості околів точки x_0; 3) нескінченної множини околів точки x_0?

6. Довести, що:

1) $\left(\dfrac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2\quad \forall\, x\in\mathbf{R}$;

2) $\left|\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\right|=\prod\limits_{k=1}^{n}|x_k|\ \ \forall\, n\in\mathbf{N}$; 3) $|x_n|-\sum\limits_{k=1}^{n-1}|x_k|\le\left|\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right|\le\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|$.

7. Чи є рівносильними такі нерівності (усно):

1) $\sqrt{f^2(x)}<\varphi(x)$ і $f(x)<\varphi(x)$;

2) $\sqrt{f^2(x)}<\sqrt{\varphi^2(x)}$ і $|f(x)|<|\varphi(x)|$?

8. Чи мають розв'язки дані рівняння:

1)• $|x|=x-1$; 2) $|x|=x+1$?

9. Визначити, для яких x справедливі дані рівності:

1)• $|x^2-9|=9-x^2$; 2) $|1-x^2|=x^2-1$;

3) $\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|=\dfrac{x-2}{x+2}$; 4) $|x^2-3x+2|=x^2-3x+2$;

5)• $|(x^2+x+2)+(2x+1)|=|x^2+x+2|+|2x+1|$;

6) $|(x^2+4x+7)+(x^2-4x+3)|=|x^2+4x+7|+|x^2-4x+3|$;

7)• $|(x^4-1)-(x^2+1)|=|x^4-1|-|x^2+1|$;

8) $|\sin x+\cos x|=|\sin x|+|\cos x|$;

9) $|(x^4-4)-(x^2+2)|=|x^4-4|-|x^2+2|$.

10. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) $\{x: |x+1|+|x-2|=1\}=\varnothing$; 2) $\{x: |x|>x+1\}\subset(0;\ 1)$;

3) $\{x: ||x+1|-|x-1||<1\}$ є числовим проміжком;

4) $\left\{x: \dfrac{1}{|x-1|-1}\le 1\right\}=(0;\ 2)$.

11. Розв'язати такі рівняння та нерівності:

1) $|x-1|<3$; 2) $|2x+3|<5$; 3) $x^2-4\ge 0$; 4) $\log_2|x|\ge 1$;

5)• $\log_3|x+2|>1$; 6) $|\log_{\cos x}\sin x|=1$; 7)• $2^{|x|-3}\le 1$;

8) $3^{|x|-2}<1$; 9)• $x^2<3-2x$; 10)• $|x+2|>x+2$;

11) $\left|\dfrac{x+2}{x}\right|>\dfrac{x+2}{x}$; 12) $|x+1|=3$; 13)• $|\cos x|=\cos x+1$;

14) $|\cos 2x|=\cos 2x+3$; 15) $|\sin x|=\sin x+2$;

16) $|\operatorname{tg} x|=2-\operatorname{tg} x$; 17) $\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+2}>1$;

18) $||x+1|-|x-1||<1$; 19) $\dfrac{1}{|x-1|-1}\le 1$; 20) $\left(x^2+x\right)|\sin x|=2\sin x$;

21) $\sin^2 x>1/2$; 22) $\cos^2 x\le\dfrac{3}{4}$; 23)• $|x-3|-|x+1|=2x-1$;

24) $|x+1|-|3x+4|=2x-5$; 25)• $|x-2|+|2x-1|>3x+1$;

26) $|3x+1|-|x+2|<x+4$; 27) $|x|<|x+1|-|2x-4|$.

12. Вказати, для яких рівнянь і нерівностей з попередньої задачі множини їхніх розв'язків містять у собі околи нескінченно віддалених точок.

13. Чи можна стверджувати, що кожний окіл (проколений окіл) точки x_0 є числовим проміжком, і навпаки?

Зразки розв'язування задач

8. 1) Якщо $x\ge 0$, то $|x|=x$, і задане рівняння набирає вигляду $x=x-1$. Отже, невід'ємних розв'язків не існує. Якщо $x<0$, то $|x|=-x$, і тоді $-x=x-1$, звідки $x=1/2$, що суперечить нашому припущенню ($x<0$). Отже, задане рівняння не має розв'язків.

9. 1) Оскільки завжди $|x^2-9|\ge 0$, то й права частина рівності має бути невід'ємною, тобто $9-x^2\ge 0$, звідки $x^2\le 9$, причому для цих x маємо $|x^2-9|=9-x^2$. Отже, розв'язками даного рівняння є ті значення x, для яких $|x|\le 3$, тобто $-3\le x\le 3$.

5) Рівність $|a+b|=|a|+|b|$ справедлива тоді й тільки тоді, коли обидва доданки мають однаковий знак. Оскільки

$$x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0\quad\forall x\in\mathbf{R},$$

то задана рівність має місце для тих значень x, для яких $2x+1\ge 0$, тобто для $x\ge -1/2$.

7) Рівність $|a-b|=|a|-|b|$ справедлива лише тоді, коли a і b одного знака і $|a|\geq|b|$ або $b=0$, або $a=b=0$ (довести це). Задана рівність виконуватиметься лише для тих значень x, для яких $x^4-1\geq x^2+1$, тобто $\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)\geq x^2+1\Leftrightarrow x^2-1\geq 1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow|x|\geq\sqrt{2}\ \Leftrightarrow\ x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};\ +\infty\right)$.

11. 5) Запишемо нерівність у вигляді $\log_3|x+2|>\log_3 3$, звідки $|x+2|>3$. Враховуючи тепер властивість 6 модуля, дістаємо $x\in(-\infty;\ -5)\cup(1;+\infty)$.

7) Оскільки основа степеня є додатним числом $2>1$, то задана нерівність $2^{|x|-3}\leq 1=2^0$ справджується тоді й тільки тоді, коли $|x|-3\leq 0$, тобто для $|x|\leq 3$. Отже, $x\in[-3;\ 3]$.

9) Перепишемо дану нерівність у вигляді $x^2+2x-3<0$ або $(x+1)^2<4$. Розв'язуючи цю нерівність, маємо $|x+1|<2$ або $-2<x+1<2$, звідки $-3<x<1\ \Leftrightarrow\ x\in(-3;\ 1)$.

10) Згідно з означенням модуля ця нерівність має місце тоді й тільки тоді, коли $x+2<0$, звідки $x<-2$, тобто $x\in(-\infty;\ -2)$.

13) Якщо x таке, що $\cos x\geq 0$, то $|\cos x|=\cos x$, і рівняння має вигляд $\cos x=\cos x+1$. Воно не має розв'язків. Якщо $\cos x<0$, то $|\cos x|=-\cos x$, і рівняння набирає вигляду $-\cos x=\cos x+1$, або $-2\cos x=1$, звідки $x=\pm\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)+2\pi k=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$.

23) Розглянемо ті значення x, для яких вирази, записані під знаком модуля, дорівнюють нулю: це $x=-1$ і $x=3$. Розіб'ємо знайденими точками числову пряму на три інтервали: $(-\infty;\ -1)$, $(-1;3)$ і $(3;\ +\infty)$ (тобто скористаємось методом інтервалів). На кожному інтервалі запишемо рівняння без знаків модуля. Якщо $x\in(-\infty;\ -1)$, то дістанемо рівняння $-x+3+x+$ $+1=2x-1\ \Leftrightarrow\ x=5/2\notin(-\infty;\ -1)$.

Для $x\in(-1;\ 3)$ маємо рівняння $3-x-x-1=2x-1$, звідки $x=3/4$. Оскільки $3/4\in$ $\in(-1;\ 3)$, то це число є коренем рівняння.

При $x\in(3;\ +\infty)$ рівняння набирає вигляду $x-3-x-1=2x-1$, звідки $x=-3/2$. Оскільки $-3/2\notin(3;\ +\infty)$, то це число не є розв'язком.

Отже, маємо єдиний розв'язок $x=3/4$.

25) Скористаємось методом інтервалів. Вирази, записані під знаком модуля, дорівнюють нулю при $x=1/2$ і $x=2$. Розглянемо задану нерівність в інтервалах $\left(-\infty;\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2};\ 2\right)$ і $(2;+\infty)$.

У першому інтервалі, тобто для $-\infty<x<\dfrac{1}{2}$, нерівність матиме вигляд $2-x-2x+1>$ $>3x+1$, або $3x<1$, звідки $x<1/3$. Оскільки ці значення x належать вказаному інтервалу, то вони задовольняють задану нерівність.

В інтервалі $\left(\dfrac{1}{2};\ 2\right)$ нерівність еквівалентна такій: $2-x+2x-1>3x+1$, тобто $-2x>0$, звідки $x<0$. Ці значення x не є розв'язками даної нерівності, оскільки вони не належать вказаному інтервалу $\left(\dfrac{1}{2};\ 2\right)$.

Нарешті, для $2<x<+\infty$ нерівність матиме вигляд $3x-3>3x+1$ (поясніть чому). Ця нерівність розв'язку не має. Отже, задану нерівність задовольняють значення $x<1/3$.

§ 1.4. Верхня та нижня межі числових множин

Числовою множиною називають будь-яку множину $E \subset \mathbf{R}$ або будь-яку множину, яка лежить на числовій прямій. У цьому параграфі розглядатимуться тільки числові множини.

Множину E називають *обмеженою зверху* (*знизу*), якщо $\exists M\ (\exists m):\ x \le M\ (x \ge m)\ \forall x \in E$. При цьому число M називають *верхньою межею*, а число m — *нижньою межею множини E*. *Множину E* називають *обмеженою*, якщо вона обмежена і зверху, і знизу.

Кожна непорожня обмежена зверху (знизу) множина має найменшу верхню (найбільшу нижню) межу.

Точна верхня (нижня) межа непорожньої обмеженої зверху (знизу) множини E — це найменша верхня (найбільша нижня) межа цієї множини, яку позначають $\sup E\ (\inf E)$. Якщо E — необмежена зверху (знизу), то вважають, що $\sup E := +\infty\ (\inf E := -\infty)$.

Якщо $\sup\ E \in E$, то його називають *найбільшим елементом E* або *максимумом E* і позначають $\max E$. Аналогічно визначають *найменший елемент E*, або *мінімум E*: $\min E = \inf E$, коли $\inf E \in E$.

На відміну від $\sup E$ і $\inf E$ максимум і мінімум множини E не завжди існують, проте якщо $E \subset \mathbf{N}$, то $\exists \min E$. Звідси випливає так званий *принцип математичної індукції:* якщо деяке твердження T_n правильне для $n = 1\ (n = n_0)$ і з припущення, що воно правильне для $n = k > 1\ (k > n_0)$, випливає його правильність для $n = k + 1$, то це твердження правильне для будь-якого $n \in \mathbf{N}\ (n \ge n_0)$.

На принципі математичної індукції ґрунтується *метод математичної індукції*, який використовується при доведенні тверджень: 1) перевірити, чи правильне твердження T_n для $n = 1\ (n = n_0)$; 2) припустити, що T_n правильне для $n = k$; 3) довести правильність T_n для $n = k + 1$; 4) зробити висновок про те, що згідно з принципом математичної індукції T_n правильне $\forall n \in \mathbf{N}\ (n \ge n_0)$.

Вправи

1. Відповісти на запитання усно.

1) Чи правильні такі твердження:

а) множина E обмежена знизу тоді і тільки тоді, коли $\exists k \ge 0:\ |x| \ge k\ \forall\ x \in E$;

б) множина E обмежена зверху тоді і тільки тоді, коли $\exists k > 0:\ |x| < k\ \forall\ x \in E$;

в) множина E обмежена тоді і тільки тоді, коли $\exists k > 0:\ |x| < k\ \ \forall\ x \in E$;

г) множина E обмежена зверху тоді і тільки тоді, коли множина $-E$ обмежена знизу, де $-E := \{-x:\ x \in E\}$;

д) множина E необмежена, якщо вона необмежена і зверху, і знизу;

е) твердження, обернене до д), є правильним?

2) Які з множин $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\langle a;\ b\rangle$, $[a;b]$, $(a;\ b)$, $\{-1,-2,-3,\ ...\}$,

$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3},\ ...,\ \frac{1}{n},\ ...\right\}$, $\left\{x = ((-1)^n + 1)n:\ n \in \mathbf{N}\right\}$ є:

а) обмеженими зверху; б) обмеженими знизу; в) обмеженими?

3) Скільки верхніх (нижніх) меж може мати числова множина?

4) Відомо, що множина E має єдину верхню межу. Що можна сказати про її обмеженість?

2. Навести приклад обмеженої множини, яка: а) не має найбільшого елемента, але має найменший; б) не має найменшого елемента, але має найбільший; в) не має ні найменшого, ні найбільшого елементів. Знайти точні межі цих множин.

3. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) якщо не існує $\max E$ або $\min E$, то E — нескінченна множина;

2) твердження, обернене до 1), є правильним;

3)• якщо існує $\max E$ і $\min E$, то E — обмежена множина;

4) твердження, обернене до 3), є правильним.

4. Довести, що $a = \inf E$ тоді й тільки тоді, коли виконуються умови: 1) $x \geq a \quad \forall\, x \in E$; 2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, x^* \in E:\ x^* < a + \varepsilon$.

5. Сформулювати і довести твердження, подібне до попереднього, але для $\sup E$.

6. Довести, що аксіома Кантора разом з аксіомою Архімеда і теорема про існування $\sup E$ є еквівалентними твердженнями.

7. Нехай A і B — довільні обмежені множини з $\mathbf{R}$. Довести, що:

1)• $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ і $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$, якщо $A + B := \{x + y:\ x \in A \text{ і } y \in B\}$;

2) $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$, якщо $A - B := \{x - y:\ x \in A \text{ і } y \in B\}$.

8. Нехай $|E| = \{|x|:\ x \in E\}$. Які з даних тверджень є правильними:

1) $\sup|E| = |\sup E|$ і $\inf|E| = |\inf E|$; 2) $\sup|E| = |\sup E|$ або $\sup|E| = |\inf E|$;

3) $\inf|E| = |\inf E|$ або $\inf|E| = |\sup E|$; 4) $\sup|E| = \max\{|\sup E|,\ |\inf E|\}$;

5) $\inf|E| = \min\{|\sup E_-|,\ \inf E_+\}$, де $E_- := \{x \in E:\ x \leq 0\}$,

$E_+ := \{x \in E:\ x \geq 0\}$?

9. Довести, що $\max E$ існує тоді і тільки тоді, коли E не є підмножиною проміжку $[\inf E;\ \sup E)$.

10. Довести, що $E \subset (\inf E;\ \sup E)$ тоді і тільки тоді, коли не існує ні $\max E$, ні $\min E$.

11. Для даної множини E знайти $\inf E$, $\sup E$, $\max E$ і $\min E$:

1) $E = (0;1)$; 2)• $E = (0;1]$; 3) $E = [0;1]$;

4) $E = \mathbf{Q} \cap [\sqrt{2}; 5]$; 5) $E = [2;3] \setminus \mathbf{Q}$;

6) E — множина раціональних наближень числа $\sqrt{2}$:
а) з недостачею, б) з надлишком;

7) $E=\{x\in \mathbf{Q}:\ \sqrt[3]{x+2}\ <4\}$; 8) $E=\left\{x=\dfrac{n}{n^2+1}:\ n\in \mathbf{Z}\right\}$;

9) $E=\{1,\ 1/2,\dots,\ 1/n,\ \dots\}$; 10) $E=\left\{x\notin \mathbf{Q}:\ x^2-5x+6<0\right\}$;

11) $E=\{x:\ |x-1|-|x-2|\le 1\}$; 12) $E=\{x:\ \sin x-\cos 2x\ge 0\}$;

13) E — множина десяткових дробів виду $0,a_{-1}a_{-2}\dots a_{-n}\dots$, де $a_{-k}\ne 9$ $\forall\, k\in \mathbf{N}$.

12. Чи правильні дані твердження:

1) $\forall\, E\subset \mathbf{N}\ \exists \min E$; 2) $\forall\, E\subset \mathbf{Z}\ \exists \min E$ або $\max E$;

3) якщо з припущення, що твердження T_n правильне для $n=k$, випливає його правильність для $n=k+1$, то це твердження правильне для будь-якого $n\in \mathbf{N}$;

4) метод математичної індукції — це те саме, що й принцип математичної індукції?

13. Довести такі твердження:

1) $x-1<[x]\le x$, де $[x]$ — ціла частина x, тобто найбільше ціле число, що не перевищує x;

2) $\dfrac{[nx]}{n}\le x\le \dfrac{[nx]}{n}+\dfrac{1}{n}$ $\forall\, n\in \mathbf{N}$, $\forall\, x\in \mathbf{R}$; 3) $1+2+\dots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

4) $1^2+2^2+\dots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; 5) $1^3+2^3+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2$;

6) якщо $x_1<1$ і $x_2>1$, то $x_1+x_2>x_1x_2+1$;

7) а) $x+1/x\ge 2,\ x>0$; б) $\lg 3+\log_3 10>2$;

8)• якщо $x_k>0$ $\forall\, k\in \mathbf{N}$ і $x_1x_2\dots x_n=1$, то $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\ge n$;

9) $\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\ \le \dfrac{1}{n}\left(x_1+x_2+\dots+x_n\right)$ $\forall\, n\in \mathbf{N}$, $\forall\, x_k\ge 0$ (*зв'язок між середнім геометричним і середнім арифметичним n невід'ємних чисел*);

10)• $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ $\forall\, n\in \mathbf{N}$; 11) $n!\le\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$ $\forall\, n\in \mathbf{N}$;

12) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ >\sqrt{n},\ n\ge 2$;

13) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{8}+\dots+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2n^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{n+1}{n+2}$;

14) $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)\ge 1+x_1+x_2+\dots+x_n$, де $x_1, x_2,\dots, x_n$ — числа одного знака, більші за -1 (*нерівність Бернуллі*);

15) якщо $x \ge -1$, то $(1+x)^n \ge 1+nx$;

16) $(a+b)^n = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m}$, де $C_n^m = \dfrac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}$

(*біном Ньютона*).

Зразки розв'язування задач

3. 3) Це твердження є правильним, оскільки $\forall\, x \in E$ маємо $m = \min E \le x \le \max E = M$, а це й означає, що множина E обмежена.

7. 1) Покажемо, що $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$. Оскільки множини A і B обмежені знизу, то $\exists\, m$ і m_1 такі, що $x \ge m$ $\forall\, x \in A$ і $y \ge m_1$ $\forall\, y \in B$. Тоді $x+y \ge m+m_1$ $\forall\,(x+y) \in A+B$, тобто множина $A+B$ обмежена знизу, а тому з існування $\inf A = a$ і $\inf B = a_1$ випливає існування $\inf(A+B)$. Ясно, що $x+y \ge a+a_1$ $\forall\,(x+y) \in A+B$. Далі, для довільного $\varepsilon > 0$ існують такі $x^* \in A$ і $y^* \in B$, що $a < x^* < a + \frac{\varepsilon}{2}$ і $a_1 < y^* < a_1 + \frac{\varepsilon}{2}$ (див. вправу 4). Звідси $x+y < a+a_1+\varepsilon$. Отже, за вправою 4 $\inf(A+B) = a+a_1 = \inf A + \inf B$.

11. 2) Ця множина не має найменшого елемента, тобто $\min E$ не існує, оскільки $\forall\, x \in (0;\ 1]$ $\exists\, x^* \in E$ таке, що $x^* < x$. Множина нижніх меж для E — це множина $(-\infty;\ 0]$ з найбільшим елементом, що дорівнює нулю, який і є точною нижньою межею півінтервалу $(0;\ 1]$. Отже, $\inf(0;1] = 0$.

Найбільший елемент для $(0;\ 1]$ існує і дорівнює 1. Множина верхніх меж — це множина $[1;\ +\infty)$ з найменшим елементом, що дорівнює 1, який і є точною верхньою межею множини E. Отже, $\max(0;\ 1] = \sup(0;\ 1] = 1$.

13. 8) Перевіримо справедливість заданого твердження для $n = 2$. Нехай $x_1 x_2 = 1$, тоді з нерівності $\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 \ge 0$ дістаємо, що $x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 \ge 0 \Rightarrow x_1 + x_2 \ge 2$, причому рівність можлива тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2 = 1$.

Припустимо, що твердження справедливе для $n = k$. Перевіримо його справедливість для $n = k+1$.

Нехай $x_1 x_2 ... x_k x_{k+1} = 1$. Якщо $x_1 = x_2 = ... = x_{k+1} = 1$, то $x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} = k+1$, і твердження доведено. Нехай $\exists\, x_i < 1$, $i = \overline{1,\ k+1}$, тоді $\exists\, x_j > 1$, бо в іншому разі $x_1 x_2 ... x_k x_{k+1} < 1$. Вважаємо $x_i = x_k$, $x_j = x_{k+1}$, а добуток $x_k x_{k+1}$ — одним множником. Тоді з нашого припущення для $n = k$ дістаємо $x_1 x_2 ... x_{k-1}(x_k x_{k+1}) = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} + (x_k x_{k+1}) > k$.

У цій нерівності додамо зліва і справа вираз $x_k + x_{k+1}$. Дістанемо $x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} + (x_k x_{k+1}) + x_k + x_{k+1} \ge k + x_k + x_{k+1} \Rightarrow x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \ge k + x_k + x_{k+1} - x_k x_{k+1}$. Оскільки $x_k + x_{k+1} > x_k x_{k+1} + 1$ (див. вправу 13.6)), то $x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} > k + x_k x_{k+1} + 1 - x_k x_{k+1}$, тобто $x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} > k+1$.

Отже, з принципу математичної індукції дістаємо, що задане твердження правильне $\forall\, n \in \mathbf{N}$. З наведених міркувань випливає, що знак рівності можливий тоді й тільки тоді, коли $x_k = 1 \ \forall\, k \in \mathbf{N}$.

10) Ця нерівність еквівалентна такій:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < 1+\frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Покладаючи $x_1 = 1$, $x_2 = \ldots = x_{n+1} = 1+\frac{1}{n}$, дістаємо $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} = 1 + n\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + 1 + n = n+2$. Залишилося скористатися вправою 13.9).

§ 1.5. Основні відомості про комплексні числа

Комплексним числом називають вираз виду $z = x + iy$ (*алгебраїчна форма запису комплексного числа*), де x, y — задані дійсні числа, i — *уявна одиниця*, $i^2 = -1$. При цьому $x =: \operatorname{Re} z$ — *дійсна частина* z, $y =: \operatorname{Im} z$ — *уявна частина* z. За означенням $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ і $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$. Множину комплексних чисел позначають через $\mathbf{C}$. Вважаючи $x + i \cdot 0 = x$, дістаємо включення $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. Комплексне число z називають *уявним*, якщо $\operatorname{Im} z \neq 0$, а якщо при цьому $\operatorname{Re} z = 0$, то z називають *суто уявним*. Геометрично комплексне число $z = x + iy$ зображають на площині Oxy (комплексній площині) точкою (x, y) або вектором з початком у точці $(0, 0)$ і кінцем у точці (x, y), тому замість слів «комплексне число z» кажуть «вектор z». Вісь Ox називають *дійсною віссю*, а вісь Oy — *уявною віссю*. Довжину вектора $z = x + iy$ називають *модулем комплексного числа* z і позначають $|z|$. Отже, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Кут, який вектор z утворює з додатним напрямом дійсної осі, називають *аргументом комплексного числа* z і позначають $\operatorname{Arg} z$. Кожне $\mathbf{C} \ni z \neq 0$ має безліч аргументів, серед яких виділяють *головне значення аргументу:* $\arg z = \operatorname{Arg} z$, якщо $\operatorname{Arg} z \in (-\pi; \pi]$. Для обчислення $\arg z$ користуються формулами

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, \ y \geq 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0, \ y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, \ y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, \ y < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Зрозуміло, що $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. Вважають, що число $z = 0$ не має аргументу, а іноді вважають, що аргументом нуля є будь-яке дійсне число. З геометричних міркувань легко дістати формулу

$$z = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z) \tag{2}$$

(*тригонометрична форма запису комплексного числа*).

Арифметичні операції над комплексними числами визначаються так: *сума* $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$; *добуток* $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$, де $x_k = \operatorname{Re} z_k$, $y_k = \operatorname{Im} z_k$, $k = 1, 2$; *різниця* $z_1 - z_2$ — це таке комплексне число z, для якого $z + z_2 = z_1$; *частка* z_1 / z_2 — це таке комплексне число z, для якого $zz_2 = z_1$.

Властивості модуля комплексного числа

1. $|z| \geq 0 \ \ \forall\, z \in \mathbf{C}$.

2. $|z| \geq |\operatorname{Re} z|$, $|z| \geq |\operatorname{Im} z|$, $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

3. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

4. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$.

5. $|\overline{z}| = |z|$, $z\overline{z} = |z|^2$, де $\overline{z} = x - iy$ — спряжене до $z = x + iy$.

Оскільки $|z^n| = |z|^n$, а $\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z$, то

$$z^n = |z|^n \ (\cos n \operatorname{Arg} z + i \sin n \operatorname{Arg} z) \tag{3}$$

— *формула Муавра*.

Якщо визначити $\sqrt[n]{z}$ як число $w \in \mathbf{C}$: $w^n = z$, то дістанемо формулу для обчислення різних значень $\sqrt[n]{z}$:

$$\sqrt[n]{z} = \underset{+}{\sqrt[n]{|z|}} \left(\cos \frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{n} \right), \tag{4}$$

де $\underset{+}{\sqrt[n]{|z|}}$ — *арифметичний корінь*, $k = \overline{0, n-1}$.

Вправи

1. Виконати вказані завдання усно.

1) Перевірити, чи правильні дані твердження:

а) кожне дійсне число є комплексним;

б) будь-яке комплексне число є уявним;

в) $z = x + iy$ суто уявне тоді й тільки тоді, коли $x = 0$;

г) кожна точка дійсної осі зображає дійсне число;

д) кожна точка уявної осі зображає суто уявне число.

2) Визначити дійсну та уявну частини комплексних чисел $2-3i$, 135, $-7i$.

3) Визначити модуль і головне значення аргументу чисел 5, -7, i, $-i$, $1+i$, $-1+i$, $1-i$.

4) Описати множину точок комплексної площини, що задовольняють умови $\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Re} z = 0$, $|z| \le 1$, $|z| > 2$, $|z-2| < 1$.

2. Довести, що $\forall\ z_1,\ z_2 \in \mathbf{C}\ \ \exists (z_1 - z_2)$, причому $z_1 - z_2 = (\operatorname{Re} z_1 - \operatorname{Re} z_2) + i(\operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Im} z_2)$.

3. Показати, що:

1) $z\overline{z} \ge 0$; 2) $z\overline{z} = |z|^2$; 3) $|z| = |\overline{z}|$; 4) $\operatorname{Re} \sum\limits_{k=1}^{n} z_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z_k$;

5) $\operatorname{Im} \sum\limits_{k=1}^{n} z_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Im} z_k$; 6) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$; 7) $\left(\overline{\sum\limits_{k=1}^{n} z_k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{z}_k$;

8) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$; 9) $\left(\overline{z_1 / z_2}\right) = \overline{z}_1 / \overline{z}_2$.

4. Довести, що $\forall z_1,\ z_2 \in \mathbf{C}:\ z_2 \ne 0\ \ \exists\, z_1 / z_2$, причому $z_1 / z_2 = (z_1 \overline{z}_2) / |z_2|^2$.

5. 1) Визначити геометричний зміст суми, різниці, добутку та частки двох комплексних чисел.

2) Довести, що коли $z_1 = |z_1|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \ne 0$, $z_2 = |z_2|(\cos\psi + i\sin\psi)$, то $z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$, $\varphi = \psi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

6. 1) Виконати арифметичні операції над комплексними числами:

а)• $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - 5i$; б) $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = i - 1$;

в) $z_1 = 2 + \sqrt{5}i$, $z_2 = 2 - \sqrt{5}i$.

2) Обчислити: а)• $i^{10} + i^{11} + i^{12} + i^{13}$; б) $i^{37} - i^{28}$;

в) $\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{8}\right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{i}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{i}{6}\right)$; г) $\left(\sqrt{3} + i\right)^6$.

7. Визначити дійсну та уявну частини комплексних чисел:

1) $-6i + 5$; 2) $\frac{2i+1}{2-5i}$; 3)• $\frac{i}{4+i}$;

4) $\frac{9+2i}{4-i} - \frac{2-5i}{5+2i} + \frac{1}{i}$; 5) $\frac{(1-3i)^3}{i} + i^{21}$.

8. 1)• Для яких дійсних значень x і y комплексні числа $z_1 = x^2 - y$ і $z_2 = (y^2 - 1)\, i + 1$ рівні між собою?

2) Для яких дійсних значень x і y комплексні числа $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi$ і $z_2 = 8y^2 + 20i^7$ є взаємно спряженими?

9. Для даних комплексних чисел знайти їхні модулі, головні аргументи, аргументи та записати ці числа у тригонометричній формі:

1) i; 2) 1; 3) -1; 4) $-i$; 5) i^{23}; 6) $i+1$; 7)• $1-i$;

8) $-1+i$; 9) $-1-i$; 10) $(1+i)(1-i)$; 11) $\dfrac{1+i}{1-i}$; 12) $i+\sqrt{3}$;

13) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; 14) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{2+2i}$; 15)• $-\cos\dfrac{\pi}{7}-i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

10. Довести формулу (1).

11. Довести рівність $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$ та визначити її геометричний зміст.

12. Перевірити, чи справедливі для комплексних чисел властивості:

1) переставні, сполучні та розподільні для операцій додавання і множення;
2) існування нуля, одиниці, протилежного та оберненого чисел;
3) відношення порядку.

13. Довести дані рівності та нерівності:

1) $\left||z_n|-\left|\sum\limits_{k=1}^{n-1} z_k\right|\right| \le \left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum\limits_{k=1}^{n}|z_k|$; 2) $\left|\prod\limits_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod\limits_{k=1}^{n}|z_k|$;

3) $\operatorname{Arg}\prod\limits_{k=1}^{n} z_k = \sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{Arg} z_k$; 4) $\prod\limits_{k=1}^{n} z_k = \prod\limits_{k=1}^{n}|z_k|\left(\cos\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{Arg} z_k + i\sin\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{Arg} z_k\right)$.

14. Показати, що відстань $\rho(z_1,\ z_2)$ між точками z_1 і z_2 комплексної площини, яка дорівнює $|z_1-z_2|$, задовольняє умови:

1) $\rho(z_1,\ z_2)\ge 0\ \ \forall\, z_1,\ z_2\in \mathbf{C}$;

2) $\rho(z_1,\ z_2)=0 \iff z_1=z_2\ \ \forall\, z_1,\ z_2\in \mathbf{C}$;

3) $\rho(z_1,\ z_2)=\rho(z_2,\ z_1)\ \ \forall\, z_1,\ z_2\in \mathbf{C}$;

4) $\rho(z_1,\ z_2)\le\rho(z_1,\ z_3)+\rho(z_3,\ z_2)\ \ \forall\, z_1,\ z_2,\ z_3\in \mathbf{C}$.

15. 1) Користуючись формулою Муавра, обчислити:

а)• $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{200}$; б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)^{127}$.

2) Виконати вказані дії: а) $\dfrac{(1-i)\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$;

б) $\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6}{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$.

16. Знайти всі значення даних коренів та зобразити їх на комплексній площині:

1) $\sqrt[3]{2-2i}$; 2) $\sqrt[4]{4i}$; 3)• $\sqrt[4]{i^4}$;

4) $\sqrt[5]{\dfrac{2+2i}{2-2i}}$; 5) $\sqrt{(1-i)(1+i)}$.

17. Розв'язати дані рівняння та системи:

1) $z^2-1=i$; 2) $z^3+8=0$; 3) $z^3=i$; 4) $z^4=1$; 5) $z^6-1=0$;

6) $z^6=-64$; 7) $|z|+2z+1=0$; 8) $z+|z|-1+i=0$;

9) $z^2-\overline{z}=0$; 10) $z^2+|z|^2=0$; 11) $z^2+4=4\overline{z}$;

12) $\begin{cases} \left|\dfrac{z-1}{z+i}\right|=1, \\ \left|\dfrac{z-2}{z-4}\right|=1; \end{cases}$ 13) $\begin{cases} |z^2+i|=1, \\ |z-1-i|=|z+1+i|. \end{cases}$

18. Зобразити на комплексній площині множини точок, що задовольняють такі умови:

1) $\operatorname{Re} z>0$; 2) $\operatorname{Im} z<-3$; 3) $\operatorname{Re} z>a$ і $\operatorname{Im} z\le b$, де a, $b\in \mathbf{R}$;

4) $-1<\operatorname{Im} z<1$; 5) $|\operatorname{Re} z-a|<1, a\in \mathbf{R}$; 6) $0\le \arg z\le \pi/3$;

7) $|z-z_0|=1$; 8) $|z+1|=3$; 9)• $|z-2+i|=|z+2-i|$;

10) $r_1<|z-z_0|<r_2$, де $r_2\ge r_1\ge 0$; 11) $|z+i-2|<4$;

12) $-\pi<\alpha<\arg z\le\beta\le\pi$; 13) $\dfrac{\pi}{4}<\arg(z-z_0)<\dfrac{\pi}{2}$;

14) $|z-1|<|z-i|$; 15) $|z-i|+|z+i|=3$;

16) $\dfrac{|z|^2}{2\operatorname{Re} z}\ge 1$; 17) $\dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|}>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

19. Довести, що $1+z+\ldots+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

20. Поклавши у завданні 19 $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, виділити дійсні та уявні частини виразів $1+z+\ldots+z^n$ та $\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$. Які формули можна дістати при цьому?

Зразки розв'язування задач

6. 1), а) За правилами дій над комплексними числами маємо $z_1+z_2=3-3i$, $z_1-z_2=-1+7i$. Добуток можна обчислити за загальним правилом множення двочленів $1+2i$ та $2-5i$, враховуючи, що $i^2=-1$. Отже, $z_1z_2=(1+2i)(2-5i)=2+4i-5i+10=12-i$. Частку обчислюємо, скориставшись вправою 4, а саме, домноживши чисельник і знаменник дробу на число, спряжене до знаменника, і врахувавши, що $\bar{z}z = |z|^2 = x^2 + y^2$. Отже,

$$\frac{1+2i}{2-5i} = \frac{(1+2i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{2+4i+5i-10}{4+25} = -\frac{8}{29} + \frac{9}{29}i.$$

2), а) Враховуючи властивість степеня і те, що $i^2 = -1$, маємо

$$i^{10} + i^{11} + i^{12} + i^{13} = i^{10}\left(1 + i + i^2 + i^3\right) = (-1)^5\left(1 + i - 1 - i\right) = 0.$$

7. 3) Виконаємо такі перетворення:

$$z = \frac{i}{4+i} = \frac{i(4-i)}{(4+i)(4-i)} = \frac{4i - i^2}{16+1} = \frac{1+4i}{17} = \frac{1}{17} + \frac{4}{17}i.$$

Отже, $\operatorname{Re} z = \frac{1}{17}$, а $\operatorname{Im} z = \frac{4}{17}$.

8. 1) З умови рівності двох комплексних чисел дістаємо систему $\begin{cases} x^2 - y = 1, \\ y^2 - 1 = 0, \end{cases}$ розв'язками якої є три пари чисел: $x_1 = -\sqrt{2},\ y_1 = 1;\ \ x_2 = \sqrt{2},\ y_2 = 1;\ \ x_3 = 0,\ y_3 = -1.$

9. 7) Користуючись означеннями модуля й аргументу комплексного числа та формулами (1) і (2), дістаємо

$$|1 - i| = \sqrt{2},\ \arg(1 - i) = \operatorname{arctg}\frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4},$$

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right).$$

15) Маємо $x = \operatorname{Re} z = -\cos\frac{\pi}{7}$, $y = \operatorname{Im} z = -\sin\frac{\pi}{7}$. Згідно з означенням модуля дістаємо

$$|z| = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7}} = 1,$$

а за формулою (1) знаходимо

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\right) - \pi = \frac{\pi}{7} - \pi = -\frac{6\pi}{7}.$$

Отже, $\operatorname{Arg} z = -\frac{6\pi}{7} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. У тригонометричній формі задане число запишеться так:

$$z = \cos\left(-\frac{6\pi}{7} + 2\pi k\right) + i\sin\left(-\frac{6\pi}{7} + 2\pi k\right).$$

15. 1), а) Оскільки $\left|\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = 1$ і $\arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, то за формулою (3) дістаємо

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{200} = \cos 200\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) + i\sin 200\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) = \cos 50\pi + i\sin 50\pi = 1.$$

16. 3) Враховуючи, що $i^4 = 1$, знайдемо корінь четвертого степеня з числа $z = 1$. Оскільки $1 = \cos 0 + i \sin 0$, то за формулою (4) маємо

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos\frac{0 + 2\pi k}{4} + i \sin\frac{0 + 2\pi k}{4} = \cos\frac{\pi k}{2} + i \sin\frac{\pi k}{2}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Надаючи k відповідних значень, дістаємо чотири значення кореня:

$$z_0 = 1, \quad z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i, \quad z_2 = \cos\pi + i \sin\pi = -1, \quad z_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Як бачимо, корені цього рівняння відповідають точкам, розміщеним у вершинах квадрата, вписаного в коло радіуса 1 з центром у точці $z = 0$.

18. 9) Записавши задану рівність у вигляді $|z - (2 - i)| = |z - (-2 + i)|$ і скориставшись геометричним змістом модуля різниці двох комплексних чисел, робимо висновок, що задану рівність задовольняють ті точки комплексної площини, які однаково віддалені від точок $z_1 = 2 - i$ та $z_2 = -2 + i$. Це є точки площини, які лежать на прямій, перпендикулярній до відрізка, що сполучає точки z_1 і z_2.

Розділ 2 ВІДПОВІДНІСТЬ, ВІДОБРАЖЕННЯ, ФУНКЦІЯ

§ 2.1. Поняття відповідності та функції (відображення). Область визначення та множина значень

Відповідністю між множинами A і B називають деяку множину пар (x, y), де $x \in A$, а $y \in B$. При цьому кажуть, що елемент y відповідає елементу x. *Відображенням* множини A у множину B називають таку відповідність між A і B, для якої кожному елементу $x \in A$ відповідає єдиний елемент $y \in B$, який називають *образом елемента* x або *значенням відображення* у точці x і позначають $y = f(x)$ або $y = \varphi(x)$ тощо. Саме відображення позначають $f: A \to B$, або $A \to B$, або $y = f(x), x \in A, y \in B$, і називають ще *функцією* з множини A у множину B. Отже, терміни відображення та функція ототожнюються. Для відображення (функції) $f: A \to B$ множину A називають *областю визначення* і позначають $D(f)$, а довільний елемент $x \in A$ називають *незалежною змінною.* Якщо $A \subset \mathbf{R}$ і $B \subset \mathbf{R}$, то відображення $f: A \to B$ називають *функцією дійсної змінної*, а якщо $A \subset \mathbf{C}$ і $B \subset \mathbf{C}$, то маємо *функцію комплексної змінної*.

Якщо функцію дійсної змінної задано однією або кількома формулами, а область визначення не вказано, то під нею розуміють множину тих значень незалежної змінної, для яких вказані формули мають зміст.

Образом множини $M \subset A$ при відображенні $f: A \to B$ називають множину $f(M) = \{f(x): x \in M\}$. Множину $E(f)$ називають *множиною значень* відображення (функції) $f: A \to B$, якщо $E(f)$ — це образ множини A, тобто $f(A)$. Якщо при цьому $f(A) = B$, то f називають *відображенням* A на B.

Через $f: A \leftrightarrow B$ позначають *взаємно однозначне відображення* A на B, тобто таке відображення, для якого $f(A) = B$ і $f(x_1) \neq f(x_2)$ $\forall x_1 \neq x_2$ з множини A.

Якщо $f: A \leftrightarrow B$, то для нього існує так зване *обернене відображення* $f^{-1}: B \leftrightarrow A$, яке визначається умовою $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$. Обернене відображення називають також *оберненою функцією* і позначають $x = f^{-1}(y)$, $y \in B$, $x \in A$, або $y = f^{-1}(x)$, $x \in B$, $y \in A$.

Суперпозицією відображень (функцій) $\varphi: A \to B$ і $f: B \to C$ називають відображення $f \circ \varphi: A \to C$, яке визначається рівністю $(f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x))$ $\forall\, x \in A$. Суперпозицію функцій (відображень) φ і f називають також *складною функцією* $y = f(\varphi(x))$, $x \in A$, $y \in C$. При цьому φ називають *внутрішньою*, а f — *зовнішньою* функцією.

Графіком відображення (функції) $f: A \to B$ називають множину $\Gamma = \{(x, y): x \in A, y = f(x) \in B\}$. Якщо f — функція дійсної змінної, то її графіком може бути деяка крива на площині Oxy.

Функції $f: A \to B$ і $\varphi: C \to D$ називають *тотожними*, якщо $A = C$ і $f(x) = \varphi(x)$ $\forall\, x \in A$.

Вправи

1. Виконати вказані завдання усно.

1) Серед даних тверджень знайти правильні:

а) поняття «відображення A в B» і «функція з A в B» є синонімами;

б) поняття «функція з A в B» і «відповідність між A і B» є синонімами;

в) будь-яке відображення A на B є відображенням A в B;

г) довільне відображення A в B є функцією з A на B;

д) існує функція $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, для якої точка $y = 1$ є образом точок $x_1 = 1$ і $x_2 = 2$, а точка $y = 2$ є образом точок $x_3 = 2$ і $x_4 = 3$.

2) Обчислити значення даних функцій у вказаних точках:

$$f(x) = \frac{1}{2+x},\ x = -1,\ x = 0,\ x = 1/2;\quad f(x) = \sin x,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2},\ x = 1.$$

3) Знайти область визначення таких функцій: $f(x) = \sqrt{x+1}$; $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$; $\varphi(x) = \sin^2 x$; $g(x) = \arcsin 2x$; $\psi(x) = \lg|x|$.

2. 1)• Дано функцію $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$. Знайти $f(-2)$, $f(0)$, $f(a)$, $f\left(x^2\right)$, $(f(x))^2$. Чи існує $f(-1)$, $f(1)$?

2) Дано функцію $f(x) = \operatorname{tg} x$. Визначити $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $f\left(x^3\right)$, $\sqrt{f(x)}$.

3)• Обчислити значення функцій $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ і $\varphi(x) = x^4 + \dfrac{1}{x^4}$ у тих точках, в яких $x + \dfrac{1}{x} = 2$.

4) Обчислити значення функції комплексної змінної $f(z)$ у точках $z = i$, $z = -i$, $z = 1 + i$:

а) $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$; б) $f(z)=z\cdot\overline{z}$; в) $f(z)=z-\overline{z}$;

г) $f(z)=\dfrac{1}{z}$; д) $f(z)=|z|+\operatorname{Re} z$; е) $f(z)=z^3-\dfrac{1}{z^2}$.

3. Для даних функцій дійсної змінної знайти їхні значення у вказаних точках чи довести, що ці значення не існують:

1)• $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{якщо } -2<x<0,\\ 1-x, & \text{якщо } 0<x<2;\end{cases}$ $x_0=-\dfrac{\pi}{2}$, $x_1=\pi$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=0$;

2) $f(n)=\alpha_n$, де α_n визначається з рівності $\sqrt{3}=\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3,\ldots$, $n_0=1$, $n_1=2$, $n_2=0$;

3) $f(t)=[t]$ — ціла частина t, тобто найбільше ціле число, що не перевищує t; $t=\dfrac{1}{2}$, $t=-\dfrac{5}{3}$, $t=10{,}7$, $t=-\pi$;

4) $f(u)=\{u\}=u-[u]$ — дробова частина u; $u=-2{,}1$, $u=1{,}5$, $u=-5$, $u=7$;

5) $f(x)=ax+b$, причому $f(0)=2$, $f(1)=3$; $x=-1$, $x=2$;

6) $f(x)=ax^2+bx+c$, причому $f(1)=1$, $f(-1)=2$, $f(2)=3$; $x=0$, $x=-2$.

4. 1) Довести, що функція $f(x)=\dfrac{1}{x}$ задовольняє співвідношення $f(x)-f(x+1)=f(x)f(x+1)$.

2) Визначити функцію $y=f(x)$, яка задовольняє дану умову:

а)• $f(x-1)=x^2-4$; б) $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}, x\neq 0$;

в) $f(x_1+x_2)=\cos x_1\cos x_2-\sin x_1\sin x_2$; г) $f(x_1+x_2)=a^{x_1}a^{x_2}$.

3) Вказати функції, які задовольняють дані функціональні рівняння: а) $f(xy)=f(x)+f(y)$; б) $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$; в) $f(xy)=f(x)f(y)$.

5. Побудувати всі можливі відповідності між множинами $A=\{1,\ 2\}$ і $B=\{3,\ 5\}$. Які з цих відповідностей будуть функціями?

6. Знайти області визначення даних функцій:

1)• $y=\sqrt{x+2}$; 2) $y=\sqrt{4-x}$; 3) $y=\sqrt{1-|x|}$; 4) $y=\sqrt{x^2-1}$;

5)• $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}$; 6) $y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x+5}$;

7)• $y=\sqrt{(x-2)(x+3)}$; 8) $\varphi(u)=\sqrt{(u+1)(u-2)}$;

9) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$; 10) $y=\dfrac{1}{x+|x|}$; 11)• $y=\dfrac{1}{x^2-8x+7}$;

12) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$; 13) $y(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-t-12}}$; 14) $y(x)=\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}$;

15) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}}$; 16) $y=\log_2(x-8)$; 17)• $y=\log_a\left(x^2-16\right)$;

18) $f(x)=\log_x 7$; 19) $f(t)=\lg\left(4t-t^2-3\right)$; 20) $y=\lg\dfrac{x+1}{x}$;

21) $\psi(u)=\lg\dfrac{2u-1}{u+2}$; 22) $y=\dfrac{1}{\lg(x+2)}$; 23) $y=\sqrt{1-x}+\lg(x-1)$;

24) $\varphi(t)=\dfrac{1}{\lg(1-t)}+\sqrt{t+1}$; 25) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$;

26)• $y=\log_4\log_3\log_2 x$; 27) $y=\lg\sin x$; 28) $f(u)=\sqrt[4]{\sin u}$;

29) $u(y)=\dfrac{|\sin y|}{\sin y}$; 30) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$;

31)• $y=\sqrt{\cos(\sin x)}+\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$; 32) $y=\lg(\sin(x-3))+\sqrt{16-x^2}$;

33)• $y=\arcsin\dfrac{x+3}{4}$; 34) $y=\arccos\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$;

35) $y(t)=\arcsin\dfrac{t-2}{3}$; 36)• $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\arccos\dfrac{x-2}{x}$;

37) $y=\arcsin\dfrac{x-4}{3}-\lg(1+x)$; 38)• $y=\sqrt{\arccos(\lg x)}$;

39) $y=3^{\arcsin(1-x)}$; 40)• $y=\arcsin\dfrac{2}{2+\sin x}$;

41) $y=\arcsin\left(x^2-5x+7\right)$; 42) $y=\arccos(2\sin x)$;

43) $y=f(\varphi(x))$, якщо функція f визначена на відрізку $[0;1]$, а φ задається умовами: а) $\varphi(x)=x^2$; б) $\varphi(x)=\sin x$; в) $\varphi(x)=x+a$.

7. Знайти множину E значень даних функцій:

1) $y=x^2,\ x\in[-2;\ 1)$; 2) $f(x)=2^x,\ x\in(-1;\ 2)$;

3) $\varphi(x)=\lg x,\ x\in\left[\dfrac{1}{10};\ 10\right]$; 4) $f(x)=\arcsin x,\ x\in[-1;\ 1]$;

5) $\psi(x)=\operatorname{tg}x,\ x\in\left[-\pi;\ -\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{2};\ 0\right)$; 6)• $y=\dfrac{1}{5+\sin 2x}$;

7) $f(x)=[x]$; 8) $f(x)=\{x\}$; 9) $f(x)=|x|$;

10) $f(x)=\operatorname{sign}x=\begin{cases}1, & \text{якщо } x>0,\\ -1, & \text{якщо } x<0,\\ 0, & \text{якщо } x=0;\end{cases}$ 11) $f(x)=\cos\pi x,\ x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right)$.

8. Функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[0;1]$. Якими є області визначення функцій:

1)• $f\left(x^2\right)$; 2) $f(x+1)$; 3) $f(3x+1)$; 4) $f(x+a)$; 5)• $f(\sin x)$; 6) $f(\operatorname{tg} x)$?

9. Нехай $f(x) = x^2 + 2$, $\varphi(x) = 3x$. Розв'язати рівняння $f(x) = |\varphi(x)|$.

10. Шлях, пройдений тілом, що вільно падає, визначається за формулою $s = \frac{gt^2}{2}$. Тіло падає з висоти H.

а)• Яка область визначення цієї функції?

б)• Яка область визначення (існування) відповідного аналітичного виразу?

11. Виразити площу прямокутного трикутника як функцію його катета x, якщо периметр цього трикутника дорівнює $2p$. Знайти область визначення цієї функції.

12. 1) Швидкість різання стружки визначається за формулою $\upsilon = \frac{k}{\sqrt[\alpha]{S}}$ (м/с), де S (мм^2) — площа перерізу стружки, що знімається.

Для хромонікелевої сталі маємо такі дослідні дані: для S, що дорівнює 1,1; 1,4; 1,7; 7; 10 відповідно υ дорівнює 0,42; 0,38; 0,34; 0,17; 0,14. Використовуючи мікрокалькулятор, визначити сталі k і α, взявши довільних два відповідних значення S і υ. Перевірити, чи задовольняють інші дані задану формулу.

2) Електричне коло містить конденсатор, ємність якого C, і активний опір R. При замиканні кола конденсатор починає розряджатися за законом $j = j_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ (j_0 — струм у початковий момент часу). Через який час струм, що протікав у початковий момент часу через конденсатор, зменшиться: на 10 %; вдвоє? Обчислення провести при $C = 10^{-6}$ Ф, $R = 10^8$ Ом.

13. 1) Кондитерська фабрика реалізує шоколад у плитках вартістю 12 грн за 1 кг, причому обсяг щоденного виробництва шоколаду не перевищує 150 кг. Записати функцію, яка виражає щоденний дохід від продажу шоколаду. Побудувати графік цієї функції, враховуючи її область визначення. На скільки збільшиться дохід, якщо кількість проданого шоколаду збільшиться на 65 кг?

2) Залежність витрат y на купівлю молочної продукції від щомісячного доходу x сім'ї виражається функцією $y = 0{,}3x - 36$. Який дохід повинна мати сім'я щомісяця, щоб витрачати на молочну продукцію 120 грн у місяць? Скільки сім'я витрачатиме на молочну продукцію, маючи дохід у 1300 грн?

14. Серед даних відображень $f:\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ знайти відображення **R** на **R**:

1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = ax^2 + bx + c$; 3) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$;

4) $f(x) = 2^x$; 5) $f(x) = \sin x$; 6) $f(x) = \cos 2x$;

7) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; 8) $f(x) = \ln(|x|+1)$;

9) $f(x)=\begin{cases} x-a, \text{ якщо } x<a, \\ x+a, \text{ якщо } x\ge a, \end{cases}$ $a\in\mathbf{R}$.

15. Нехай $A\subset\mathbf{R}$, $B\subset\mathbf{R}$ і $f:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}$. Довести дані рівності множин або показати, що ці рівності не мають місця: а) $f(A\bigcup B)=f(A)\bigcup f(B)$; б) $f(A\bigcap B)=f(A)\bigcap f(B)$;

16. Серед відображень вправи 14 знайти взаємно однозначні.

17. Довести, що довільне відображення A на A є взаємно однозначним тоді і тільки тоді, коли A — скінченна множина.

18. Побудувати взаємно однозначне відображення відрізка $[a;b]$ на відрізок $[c;d]$.

19. Чи існує суперпозиція $f\circ\varphi$ даних функцій f і φ, якщо:

1) $f(x)=2^x+1$, $\varphi(x)=\arcsin x$; 2) $f(x)=\arcsin x$, $\varphi(x)=2^x+1$;

3) $f(x)=\lg x$, $\varphi(x)=-4+x-x^2$; 4) $f(x)=x-x^2-4$, $\varphi(x)=\lg x$?

20. Визначити вид графіків даних функцій, дослідивши можливі значення параметрів:

1) $f(x)=C$; 2) $f(x)=(x+a)^2+b$; 3) $f(x)=ax^2+bx+c$;

4) $f(x)=\dfrac{a}{x+b}+c$; 5) $f(x)=a^{x+b}+c$; 6) $f(x)=\log_a(x+b)+c$;

7) $f(x)=a\sin(x+b)+c$; 8) $f(x)=a\cos(x+b)+c$;

9) $f(x)=a\,\mathrm{tg}(x+b)+c$; 10) $f(x)=a\,\mathrm{ctg}(x+b)+c$;

11) $f(x)=a\arcsin(x+b)+c$; 12) $f(x)=\arccos(x+b)+c$;

13) $f(x)=b\,\mathrm{arctg}(x+a)+c$; 14) $f(x)=b\,\mathrm{arcctg}(x+b)+c$.

21. Вказати функції, графіками яких є: а) пряма; б) парабола; в) гіпербола; г) півколо. Чи існує функція $y=f(x)$, графіком якої у площині Oxy є коло?

22. Побудувати графіки таких функцій:

1) $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{\sin x}$; 2) $f(x)=\mathrm{sign}\,x$; 3) $f(x)=|x|$; 4) $f(x)=\{x\}$;

5) $f(x)=\begin{cases} \cos x, \text{ якщо } -\pi<x<0, \\ 2, \quad \text{ якщо } x=0, \\ x^3, \quad \text{ якщо } 0<x<2; \end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases} 2, & \text{якщо } -2<x<0, \\ 1, & \text{якщо } 0\le x<1, \\ x^2-x+1, & \text{якщо } 1\le x<2. \end{cases}$

7) $f(x)=|x-2|$; 8) $f(x)=\left|x^2-4x-6\right|$; 9) $f(x)=|\sin x|$;

10) $f(x)=\sin|x|$; 11) $f(x)=|\sin|x||$; 12) $f(x)=|\lg x|$;

13) $f(x)=\lg|x|$; 14) $f(x)=|\lg|x||$; 15) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x+1|}+1$;

16) $y=\arccos(\cos 2x)$; 17) $y=|\mathrm{arctg}(x-1)|$; 18) $y=\sin\left(\arcsin\dfrac{x+1}{3}\right)$;

19) $f(x)=|x+1|+|x-2|$; 20) $f(x)=x^2-x+|x|$; 21) $f(x)=x^2-4|x|+4$.

23. Виразити без використання знаків радикалів і модуля дані функції та побудувати їхні графіки:

1)• $f(x)=\sqrt{x^2+6x+9}-\sqrt{x^2-8x+16}$;

2) $f(x)=\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-2x+1}$.

24. Розв'язати рівняння і нерівності:

1) $\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-12x+36}=6$; 2) $\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-12x+36}=8$;

3) $\sqrt{x^2+16x+64}-\sqrt{x^2+2x+1}>5$; 4) $\sqrt{x^2+16x+64}-\sqrt{x^2+2x+1}<8$.

25. Чи є тотожними функції:

1)• $f(x)=x-2$ і $\varphi(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x}$ і $\varphi(x)=x-1$;

3) $f(x)=\dfrac{x}{x}$ і $\varphi(x)=1$ для $x\in[1;2]$; 4) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin x}$ і $\varphi(x)=1$;

5)• $f(x)=3\lg x$ і $\varphi(x)=\lg x^3$; 6) $f(x)=\lg x^2$ і $\varphi(x)=2\lg x$;

7) $f(x)=\sqrt{x^2}$ і $\varphi(x)=|x|$;

8) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$, де $x\le-1$, і $\varphi(x)=-x-1$, де $x\le-1$;

9) $f(x)=\lg\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$ і $\varphi(x)=-\lg\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$?

26. Для даних функцій визначити, чи мають вони обернені функції, і якщо мають, то знайти їх:

1) $f(x)=ax+b$; 2) $f(x)=x^2$; 3) $f(x)=8x^3$; 4) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$;

5) $y=\sin 2x$; 6) $f(x)=\lg 3x$; 7) $f(x)=\lg\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$;

8) $f(x)=5^{\frac{x}{5}}$; 9) $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\left(10^x+10^{-x}\right)$; 10) $y=\left(1+x^2\right)\operatorname{sign}x$;

11) $y=x+[x]$; 12) $y=\begin{cases}x, & \text{якщо } x\in\mathbf{Q},\\ -x, & \text{якщо } x\notin\mathbf{Q}.\end{cases}$

Зразки розв'язування задач

2. 1) Підставляючи замість x відповідно значення -2, 0, a, x^2, дістаємо $f(-2)=$ $=\dfrac{-2}{1-4}=\dfrac{2}{3}$, $f(0)=\dfrac{0}{1}=0$, $f(a)=\dfrac{a}{1-a^2}$, $f\left(x^2\right)=\dfrac{x^2}{1-x^4}$. Для відшукання $(f(x))^2$ треба значення функції $f(x)$ піднести до квадрата. Отже, $(f(x))^2=\left(\dfrac{x}{1-x^2}\right)^2=$

$= \dfrac{x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$. У точках $x=-1$ і $x=1$ функція не визначена, оскільки ділення на нуль неможливе.

3) Маємо $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$. Оскільки за умовою $x+\dfrac{1}{x}=2$, то $f(x)=2^2-2=2$. Аналогічно $x^4+\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2=\left(f(x)\right)^2-2=2$. Тому й $\varphi(x)=2$.

3. 1) Функція визначена на інтервалах (–2; 0) і (0; 2). На інтервалі (–2; 0) закон відповідності між x і $f(x)$ визначається формулою $f(x)=\sin x$, а на інтервалі (0; 2) — формулою $f(x)=1-x$. Оскільки точка $x_0=-\dfrac{\pi}{2}$ належить першому проміжку, то $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$. Точка $x_2=1$ належить інтервалу (0; 2), і тому $f(1)=1-1=0$. Точки x_1, x_3 і x_4 не належать до області визначення функції, а тому значення функції у цих точках не існують.

4. 2), а) Нехай $x-1=t$. Тоді $x=t+1$ і $x^2-4=(t+1)^2-4=t^2+2t+1-4=t^2+2t-3$. Отже, $f(t)=t^2+2t-3$. Тому шукана функція $f(x)=x^2+2x-3$.

6. 1) Задана функція визначена при всіх x, для яких підкореневий вираз є невід'ємним, тобто $x+2\ge 0$, або $x\ge -2$. Отже, областю визначення цієї функції є множина $A=\{x:\ x\ge -2\}$, тобто піввідрізок $[-2;\ +\infty)$.

5) Область визначення заданої функції складається з тих значень x, для яких обидва доданки набувають дійсних значень. Для цього мають виконуватися дві умови: $x-2\ge 0$ і $3-x\ge 0$. Розв'язуючи ці нерівності, дістаємо $x\ge 2$ і $x\le 3$. Отже, $D(f)=[2;\ 3]$.

7) У даному випадку область визначення функції знаходимо з умови $(x-2)(x+3)\ge 0$. Остання нерівність виконується на проміжках $(-\infty;\ -3]$ і $[2;\ +\infty)$. Отже, $D(f)=(-\infty;\ -3]\cup$ $\cup[2;\ +\infty)$.

11) Функція визначена на всій множині дійсних чисел, крім тих значень x, коли $x^2-8x+7=0$. Розв'язуючи останнє рівняння, маємо $x_1=1$, $x_2=7$. Отже, областю визначення цієї функції є множина $A=(-\infty;\ 1)\cup(1;\ 7)\cup(7;\ +\infty)$.

17) Вираз, що стоїть під знаком логарифма, має бути додатним, тобто $x^2-16>0$. Розв'язуючи цю нерівність, дістаємо, що $D(f)=(-\infty;\ -4)\cup(4;\ +\infty)$.

26) Задана функція визначена, якщо $\log_3\log_2 x>0$, звідки $\log_2 x>1$ і $x>2$. Тому областю визначення є інтервал $(2;\ +\infty)$.

31) Мають одночасно виконуватися умови $\cos(\sin x)\ge 0$ і $|x|>x$. Перша з них виконується $\forall x\in \mathbf{R}$, а друга — для $x<0$. Отже, функція визначена на інтервалі $(-\infty;\ 0)$.

33) Оскільки для функцій $y=\arcsin x$ і $y=\arccos x$ маємо $D(f)=[-1;\ 1]$, то для заданої функції область визначення знаходимо з умови $-1\le\dfrac{x+3}{4}\le 1$, або $-4\le x+3\le 4$. Звідси дістаємо $D(f)=[-7;\ 1]$.

36) Задана функція визначена, якщо одночасно виконуються умови $4-x^2>0$ і $\left|\frac{x-2}{x}\right|\le 1$. Перша нерівність має розв'язок $|x|<2$, або $-2<x<2$, а другу можна записати у вигляді $|x-2|\le|x|$, $x\ne 0$, розв'язуючи яку, дістаємо $x\ge 1$. Остаточно маємо $D(f)=$ $=(-2;\ 2)\cap[1;\ +\infty)=[1;\ 2)$.

38) Повинна виконуватися нерівність $|\lg x|\le 1$, звідки $-1\le\lg x\le 1$ і $10^{-1}\le x\le 10$.

40) Функція визначена у тих точках x, де $-1\le\frac{2}{2+\sin x}\le 1$. Оскільки $2+\sin x>0$ $\forall\ x\in\mathbf{R}$, то слід лише розв'язати нерівність $\frac{2}{2+\sin x}\le 1$, або $2\le 2+\sin x$, звідки $\sin x\ge 0$, а отже, $2\pi k\le x\le\pi(1+2k)$, $k\in\mathbf{Z}$.

7. 6) Розв'яжемо цю рівність відносно $\sin 2x$: $\sin 2x=\frac{1}{y}-5=\frac{1-5y}{y}$.

Оскільки $-1\le\sin 2x\le 1$, то маємо $-1\le\frac{1-5y}{y}\le 1$. Враховуючи, що $y>0$, дістаємо $-y\le 1-5y\le y$. Ліва частина подвійної нерівності дає розв'язок $y\le 1/4$, а права — розв'язок $y\ge 1/6$. Отже, $E(f)=(-\infty;\ 1/4]\cap[1/6;\ +\infty)=[1/6;\ 1/4]$.

8. Задані функції є складними функціями, тобто суперпозиціями функцій.

1) Введемо новий аргумент $t=x^2$. Тоді функція $f\left(x^2\right)=f(t)$ визначена, якщо $0\le t\le 1$, тобто $0\le x^2\le 1$, звідки $-1\le x\le 1$.

5) Маємо $0\le\sin x\le 1$, звідки $2\pi k\le x\le\pi(2k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$.

10. а) Оскільки t — час, то $t\ge 0$. За умовою шлях, пройдений тілом, дорівнює H. Розв'язуючи рівняння $H=\frac{gt^2}{2}$ відносно змінної t, дістаємо, що час, через який тіло упаде, дорівнює $t=\sqrt{\frac{2H}{g}}$. Отже, область визначення даної функції $D(f)=\left[0;\ \sqrt{\frac{2H}{g}}\right]$.

б) Оскільки даний аналітичний вираз є многочленом другого степеня, який набуває дійсних значень при будь-яких дійсних значеннях t, то тут $t\in\mathbf{R}$.

23. 1) Використовуючи рівність $\sqrt{x^2}=|x|$, дістаємо $f(x)=\sqrt{(x+3)^2}-\sqrt{(x-4)^2}=$ $=|x+3|-|x-4|$. На інтервалі $(-\infty;\ -3)$ маємо $x+3<0$, $x-4<0$, і тому $|x+3|=-x-3$, $|x-4|=-x+4$. Отже, для $x\in(-\infty;\ -3)$ маємо $f(x)=-x-3+x-4=-7$. Аналогічно для $x\in[-3;\ 4]$ дістаємо $f(x)=x+3+x-4=2x-1$, а для $x\in(4;\ +\infty)$ маємо $f(x)=x+3-x+4=7$. Отже,

$$f(x)=\begin{cases}-7, & \text{якщо } x<-3,\\ 2x-1, & \text{якщо } -3\le x\le 4,\\ 7, & \text{якщо } x>4.\end{cases}$$

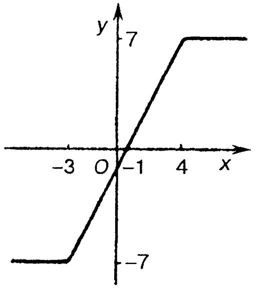


Рис. 3

Графік функції зображено на рис. 3.

25. 1) Функції f і φ не тотожні, оскільки вони мають різні області визначення. Так, функція $f(x) = x - 2$ визначена $\forall x \in \mathbf{R}$, а областю визначення функції $\varphi(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ є множина $D(\varphi) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

5) Задані функції є тотожними, оскільки $\lg x^3 = 3\lg x$, і обидві ці функції визначені для $x > 0$.

§ 2.2. Елементарні функції

До *основних елементарних функцій* дійсної або комплексної змінної належать такі функції: 1) стала; 2) степенева; 3) показникова; 4) логарифмічна (що є оберненою до показникової); 5) тригонометричні (синус, косинус, тангенс і котангенс); 6) обернені тригонометричні.

Сумою, різницею, добутком та часткою функцій f і φ дійсної або комплексної змінної називають функції, що визначаються відповідно рівностями $(f + \varphi)(x) := f(x) + \varphi(x)$, $(f - \varphi)(x) := f(x) - \varphi(x)$, $(f\varphi)(x) := f(x)\varphi(x)$, $(f / \varphi)(x) := f(x) / \varphi(x)$, а за область визначення цих функцій беруть переріз областей визначення функцій f і φ, і у випадку частки, крім того, виключають точки, де $\varphi(x) = 0$.

Елементарною функцією дійсної або комплексної змінної називають таку функцію, яку можна дістати з основних елементарних функцій за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій та операції суперпозиції функцій.

Елементарні функції поділяють на такі класи.

Многочлени — це функції виду $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n =: \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, де $a_k \left(k = \overline{0, n}\right)$ — задані дійсні або комплексні числа, які є коефіцієнтами многочлена. Якщо $a_n \neq 0$, то кажуть, що P — многочлен степеня n.

Раціональні функції — це функції виду $R(z) = P(z) / Q(z)$, де P і Q — задані многочлени, $Q(z) \not\equiv 0$. Наприклад, функції $R(z) = (1 + z)/(1 - z)$ і $f(z) = k / z$ є раціональними.

Ірраціональні функції — це функції, які не є раціональними. Наприклад, $f(z) = \sqrt{z}$, $f(z) = \sqrt{z^2 + 1} - 1/z$, $f(x) = \sin 2x$.

Алгебраїчні функції — це такі функції $y = f(z)$, які задовольняють рівняння $y^n + P_1(z) y^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(z) y + P_n(z) = 0$, де $P_k(z)$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$ — задані многочлени.

Трансцендентні функції — це функції, які не є алгебраїчними. До них належать, наприклад, показникові, логарифмічні, тригонометричні та обернені тригонометричні функції.

Вправи

1. Серед даних функцій знайти основні елементарні (усно):

1) $f(z)=z^2$; 2) $f(x)=x^2-5x+6$; 3) $f(x)=\sin 2x$; 4) $f(z)=1+i$;

5) $f(x)=\sqrt{x}$; 6) $f(x)=2^x$; 7) $f(x)=\lg(x+1)$; 8) $\varphi(t)=\cos t$;

9) $u(\alpha)=\operatorname{tg}(\alpha+\pi)$; 10) $f(x)=\arcsin x$; 11) $x(t)=\arccos(1-t)$;

12) $y(t)=\operatorname{arctg}(t+1)$; 13) $z(u)=\operatorname{arcctg}\left(u^2-u+1\right)$;

14) $f(x)=|x|$; 15) $g(u)=[u]$; 16) $v(t)=\operatorname{sign} t$.

2. Для функцій із завдання 1, які не є основними елементарними, вказати, за допомогою яких операцій вони утворені з основних елементарних функцій.

3. Виконати вказані завдання усно.

1) Перевірити правильність даних тверджень:

а) кожна функція дійсної змінної є основною елементарною або елементарною;

б) якщо f — основна елементарна функція, то вона є також елементарною функцією;

в) твердження, обернене до б), є правильним;

г) існує сума двох будь-яких елементарних функцій.

2) Серед основних елементарних функцій знайти: а) многочлени; б) раціональні; в) ірраціональні; г) алгебраїчні; д) трансцендентні.

3) Перевірити правильність даних тверджень:

а) квадратний тричлен є многочленом;

б) кожний многочлен є раціональною функцією;

в) якщо f — раціональна функція, то вона є алгебраїчною;

г) твердження, обернене до в), є правильним;

д) кожна ірраціональна функція не є алгебраїчною.

4. Нехай відомо графік функції $y=f(x)$. Пояснити, як можна побудувати графіки таких функцій: $y=f(x-x_0)$; $y=f(x)+y_0$; $y=af(x)$; $y=f(kx)$; $y=af\left(k\left(x-x_0\right)\right)+y_0$.

5. Побудувати графіки даних функцій шляхом зсуву і деформації графіка простішої функції.

1) $y=kx+b$, якщо: а) $k=1, b=0$; б) $k=0, b=-1$; в) $k=-1$, $b=-4$.

2) $y=k(x-x_0)^2+y_0$, якщо: а) $k=1$, $x_0=0$; $y_0=-2$;

б) $k=-1$, $x_0=-1$, $y_0=0$; в)• $k=1/2$, $x_0=-2$, $y_0=-3/2$.

3) $y=k/(x-x_0)+y_0$, якщо: а) $k=1$, $x_0=0$, $y_0=-1$;

б) $k=-1$, $x_0=1$, $y_0=2$.

4) $y=a^{kx+b}$, якщо: а) $a=3$, $k=1$, $b=-1$; б) $a=1/3$, $k=-1$, $b=1$.

5) $y=\log_a(kx+b)$, якщо: а) $a=10$, $k=10$, $b=1$; б) $a=1/10$, $k=1$, $b=-1$.

6) $y=a\sin(\omega x+\varphi)$, якщо: а) $a=1$, $\omega=2$, $\varphi=\pi/2$;

б) $a=-1,\ \omega=1/2,\ \varphi=-\pi/2$.

7) $y=a\operatorname{tg}(\omega x+\varphi)$, якщо: а) $a=1,\ \omega=1/2,\ \varphi=\pi/4$;

б) $a=-1/2,\ \omega=2,\ \varphi=-\pi/4$.

8) $y=k\arcsin(x+b)$, якщо: а) $k=2,\ b=-1$; б) $k=-1/3,\ \ b=1/2$.

6. Застосовуючи правила додавання або множення графіків, побудувати графіки таких функцій:

1) $y=x+\dfrac{1}{x}$ (*гіпербола*); 2) $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ (*тризуб Ньютона*);

3) $y=\dfrac{2x^2+4x+1}{x+2}$; 4) $y=1+x+e^x$;

5)• $y=x+\sin x$; 6) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$;

7) $y=\operatorname{ch} x:=\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$ (*гіперболічний косинус*);

8) $y=\operatorname{sh} x:=\dfrac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$ (*гіперболічний синус*); 9) $y=x\sin x$;

10) $y=x\operatorname{sign}(\sin x)$; 11) $y=\lg(1-x)$; 12) $y=\sin x\operatorname{sign}(\cos x)$.

7. Побудувати графік функції $1/f(x)$, якщо: 1) $f(x)=x^2$;

2) $f(x)=x(1+x)$; 3) $f(x)=2^x$; 4) $f(x)=\lg x$; 5) $f(x)=\sin^2 x$.

8. Вказати множини, на яких справедливі рівності:

1) $\sqrt{x^2+4x+2}=x+2$; 2) $\lg\left(x^2-1\right)=\lg(x-1)+\lg(x+1)$;

3) $\sqrt{x^2+8x+16}+\sqrt{x^2-8x+16}=8$.

9. Розв'язати графічно дані рівняння та системи рівнянь:

1) $x^3+6x-8=0$; 2) $x^4-2x-2=0$;

3) $\lg x=0,1x$; 4)• $\sin x=x^2$; 5) $e^x+x=0$;

6) $\begin{cases} x+y^2=1, \\ 16x^2+y=4; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ y=10\left(x^2-x-2\right). \end{cases}$

10. Розв'язати дані ірраціональні рівняння та нерівності:

1) $(x+2)\sqrt{16x+33}=(x+2)(8x-15)$; 2) $5x^2+35x-\sqrt{x^2+7x-1}=4$;

3) $\sqrt{x/(x-1)}+\sqrt{(x-1)/x}\le\dfrac{5}{2}$; 4) $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}\ge\sqrt{6}$.

11. Розв'язати дані трансцендентні рівняння та нерівності:

1) $x^{1+\lg x}=10x$; 2) $\log_5 x+\log_7 x=\log_5 35$; 3) $4^x+6^x\le 2\cdot 9^x$;

4)• $\log_{\frac{1}{3}}\left(6+x-x^2\right)>\log_{\frac{1}{3}}\left(4+3x-x^2\right)$; 5) $|x-1|^{\lg^2 x-\lg x^2}\ge|x-1|^3$;

6) $|\cos x| = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

7) $2\pi\cos x = |x| - |x - \pi|$;

8) $\sqrt{4 - x^2}(\sin 2\pi x - 3\cos \pi x) = 0$;

9) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}$;

10) $\log_{\frac{1}{2}} \cos x < \log_{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} x$.

Зразки розв'язування задач

5. 2), в) Треба побудувати графік функції $y = (x+2)^2/2 - 3/2$. Спочатку будуємо графік функції $y = x^2$. Потім паралельно переносимо його вліво на 2 одиниці вздовж осі Ox, зменшуємо всі ординати у 2 рази і, нарешті, паралельно переносимо вниз на 3/2. Дістаємо шуканий графік.

6. 5) Будуємо спочатку графіки функцій $y = x$ і $y = \sin x$. Додаючи ординати цих графіків, у результаті дістаємо графік заданої функції. Для точнішої побудови слід врахувати властивості функції $\sin x$. Оскільки $\sin \pi k = 0$, $k \in \mathbf{Z}$, то графік заданої функції перетинатиме пряму $y = x$ у точках з абсцисами $x = \pi k$. Враховуючи, що $\sin(\pi/2 + 2\pi k) = 1$ і $\sin(3\pi/2 + 2\pi k) = -1$, дістаємо, що цей графік дотикатиметься до прямих $y = x + 1$ і $y = x - 1$ у відповідних точках (рис. 4).

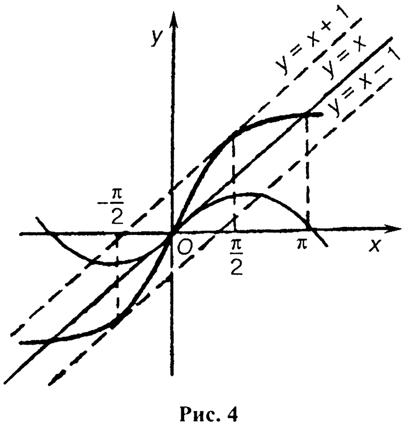


Рис. 4

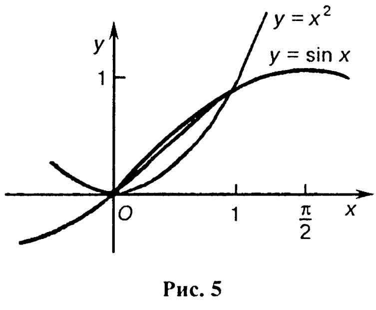


Рис. 5

9. 4) Для графічного розв'язування рівняння $\varphi(x) = \psi(x)$ треба побудувати графіки функцій $y = \varphi(x)$ та $y = \psi(x)$ і знайти точки перетину цих графіків. Абсциси точок перетину і будуть коренями рівняння. Отже, треба побудувати графіки функцій $y = \sin x$ і $y = x^2$ (рис. 5). Ці графіки перетинаються у двох точках з абсцисами $x_1 = 0$ і $x_2 \approx 0{,}9$. Ці числа і є коренями заданого рівняння.

11. 4) Область визначення функцій, які входять у дану нерівність, задається системою

$$\begin{cases} 6+x-x^2>0, \\ 4+3x-x^2>0. \end{cases}$$

З умови задачі випливає, що $6+x-x^2<4+3x-x^2$, тобто $2<2x$. Отже, розв'язок заданої нерівності дістаємо з системи нерівностей:

$$\begin{cases} x^2-x-6<0, \\ x^2-3x-4<0, \\ 2<2x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2<x<3, \\ -1<x<4, \\ x>1, \end{cases} \Rightarrow 1<x<3.$$

§ 2.3. Найпростіші властивості функцій

Функцію $f: A \to B$ дійсної або комплексної змінної називають *обмеженою зверху* (*знизу*) на множині $E \subset A$, якщо множина $f(E)$ обмежена зверху (знизу). В іншому випадку f називають *необмеженою зверху* (*знизу*) на E. Якщо функція f обмежена на E і зверху, і знизу, то її називають *обмеженою* на множині E. В іншому випадку f називають *необмеженою* на множині E.

Функцію дійсної змінної $f: A \to B$ на множині $E \subset A$ називають:

а) *неспадною*, якщо $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)\ \ \forall\, x_1, x_2 \in E$;

б) *незростаючою*, якщо $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)\ \ \forall\, x_1, x_2 \in E$;

в) *спадною*, якщо $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\ \ \forall\, x_1, x_2 \in E$;

г) *зростаючою*, якщо $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\ \ \forall\, x_1, x_2 \in E$.

Функцію f називають *монотонною* на множині E, якщо вона є на цій множині або неспадною, або незростаючою, або спадною, або зростаючою. В останніх двох випадках функцію називають *строго монотонною* на множині E.

Функцію $f: A \to B$ дійсної або комплексної змінної називають:

а) *парною*, якщо $\forall x \in A\ \ -x \in A$ і $f(x) = f(-x)$;

б) *непарною*, якщо $\forall x \in A\ \ -x \in A$ і $f(-x) = -f(x)$.

Не кожна функція $f: A \to B$ є обов'язково парною або непарною, проте якщо $-x \in A\ \ \forall\, x \in A$, то функцію можна подати у вигляді суми парної і непарної функцій, і це подання єдине.

Функцію $f: A \to B$ називають *періодичною*, якщо $\exists T \ne 0:\ f(x+T) = f(x)$ $\forall\, x \in A$. При цьому число T називають *періодом* функції f. Якщо число T є періодом функції f, то $\forall n \in \mathbf{N}$ число nT також є періодом функції f, а якщо і $(-T)$ — період f, то $\forall n \in \mathbf{Z}$ і nT — період f.

Вправи

1. Серед даних тверджень знайти правильні:

1) функція f обмежена на множині E тоді й тільки тоді, коли $\exists b > 0:\ |f(x)| \le b \ \ \forall\, x \in E$;

2) якщо існує $\max f(x) := \max\{f(x):\ x \in E\}$, то функція f обмежена зверху на множині E;

3) твердження, обернене до 2), є правильним;

4) функція f обмежена зверху на множині E тоді й тільки тоді, коли $\sup\limits_E f(x) := \sup\{f(x):\ x \in E\} < +\infty$;

5) кожну функцію, обмежену на множині $\mathbf{R}$, можна записати у вигляді суми двох необмежених функцій;

6) якщо функція f необмежена на множині E, то вона необмежена на цій множині і зверху, і знизу.

2. Вказати, які основні елементарні функції в області визначення є: а) обмеженими; б) обмеженими зверху; в) обмеженими знизу.

3. Що можна сказати про обмеженість складної функції $f(\varphi(x))$, якщо: а) f — обмежена, а φ — необмежена; б) f — необмежена, а φ — обмежена; в) f — необмежена і φ — необмежена; г) f — обмежена і φ — обмежена?

4. Відповісти на запитання та виконати завдання усно.

1) Що можна сказати про графік функції дійсної змінної, якщо вона: а) обмежена зверху; б) обмежена знизу; в) обмежена?

2) Знайти проміжки монотонності для кожної з основних елементарних функцій.

3) Визначити, які з основних елементарних функцій є парними, непарними, ні парними і ні непарними.

4) Що можна сказати про графіки функцій дійсної змінної, якщо вони є: а) парними; б) непарними?

5) Чи може функція одночасно бути і парною, і непарною?

5. Показати, що функція:

1)• $y = 1/x^3$ обмежена знизу на інтервалі (0; 1);

2) $y = -5^x$ обмежена зверху на $\mathbf{R}$; 3)• $y = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ обмежена на $\mathbf{R}$;

4) $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$, $z \in \mathbf{C}$, обмежена в крузі $|z| \le 1$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ не є обмеженою в будь-якому околі точки $x = 0$.

6. Знайти вказане значення функцій:

1) $y = x + 1/x$, $x < 0$ (найбільше); 2) $y = 2x^2 - 4x + 1$, $x \in \mathbf{R}$ (найменше);

3) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, $\operatorname{tg} x > 0$ (найменше);

4)• $y = a\cos\omega t + b\sin\omega t$, $t \in \mathbf{R}$, $a^2 + b^2 > 0$ (найменше і найбільше).

7. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) сума двох монотонних функцій є монотонною функцією;

2) сума двох зростаючих функцій є зростаючою функцією;

3) у твердженні 2) слово «сума» можна замінити словом «добуток», і при цьому воно буде правильним;

4) суперпозиція двох монотонних функцій є монотонною функцією;

5) кожна функція має проміжок монотонності, тобто такий найбільший з можливих проміжок $\langle a;\ b\rangle$, $a<b$, де вона є монотонною;

6) кожна основна елементарна функція має проміжки монотонності.

8. Чи можна стверджувати, що коли функція f монотонна на $E_1 \cup E_2$, то вона є монотонною на E_1 і на E_2 та навпаки?

9. Знайти проміжки монотонності даних функцій:

1) $y=x^4$; 2) $y=x^2-2x+3$; 3)• $y=\dfrac{1}{x^3}$; 4) $y=\dfrac{1}{x-1}$; 5) $y=\sqrt{x}$;

6) $y=\dfrac{x+1}{2x-3}$; 7) $y=2^{3x+1}$; 8) $y=10^{\lg x}$; 9) $y=\sin(\arcsin x)$;

10) $y=\arcsin(\sin x)$; 11) $y=[x]$; 12)• $y=\begin{cases}2+x^2, & -\infty<x<0,\\ 2, & x\ge 0.\end{cases}$

10. Дослідити дані функції на парність:

1) $y=x^2+1$; 2) $y=3x^3+x$; 3) $y=x^4-2x^2+5$; 4) $y=x^5+3x^3-1$;

5) $y=|x|+1$; 6) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$; 7)• $y=\dfrac{x^2+x}{x+1}$; 8) $y=\sqrt{4-x^2}$;

9)• $y=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$; 10) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; 11) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$; 12) $y=\dfrac{x}{3^x-1}$;

13) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$; 14) $y=2^{x^2-1}$; 15) $y=x\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$; 16)• $y=\log_2\dfrac{1+x}{1-x}$;

17) $y=\log_3\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; 18) $y=\sin 5x$; 19) $y=1/\operatorname{tg} x$;

20) $y=\sin x+\operatorname{tg} x$; 21) $y=\cos(x+1)$; 22) $y=\sin x+\cos x$;

23) $y=\sin^2 x+\cos x$; 24) $y=\sin(2x/3)+x^3$; 25) $y=\cos x/3+x^4$;

26) $y=\cos^2 x$, $x\in[\pi;2\pi]$; 27)• $y=\dfrac{\sin^2 x}{x+x^3}$, $x\in[1;2]$; 28) $y=\sin\dfrac{x^3-x^2}{x-1}$;

29) $y=3^{\cos x}+|x|$; 30) $y=\arcsin x$; 31) $y=\arcsin(\sin x)$;

32) $y=[x]$; 33) $y=\{x\}$; 34) $y=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\notin\mathbf{Q}.\end{cases}$

11. Довести, що добуток двох парних або двох непарних функцій є парною функцією, а добуток парної і непарної є непарною функцією.

12. Показати, що $f(x)+f(-x)$ — парна функція, а $f(x)-f(-x)$ — непарна функція, якщо $-x\in D(f)\quad \forall\, x\in D(f)$.

13. Подати у вигляді суми парної і непарної функцій такі функції:

1) $y=x^4+x^3-3x^2+1$; 2) $y=x+\sin x-5$; 3) $y=(x+1)^3$;

4) $y=\cos x+x^3-2x+1$; 5) $y=\sin(\omega x+\varphi)$; 6) $y=2^x$;

7) $y=\sqrt[3]{x-1}$; 8) $y=\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi$;

9) $y=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}+\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$; 10) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{-x-1}}{2}+\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{-x-1}}{2}$.

14. 1) Нехай $y=f(u)$ і $u=\varphi(x)$ — непарні функції. Показати, що складна функція $y=f(\varphi(x))$ є непарною.

2)• Нехай $u=\varphi(x)$ — непарна функція, а $y=f(x)$ — парна. Показати, що складна функція $y=f(\varphi(x))$ є парною.

15. 1) Продовжити функцію $f(x)=\cos x,\ x\in[0;\ \pi]$, на відрізок $[-\pi;0]$ парним і непарним способами.

2)• Функцію $f(x)=x^2,\ x\in[0;\ 1]$, продовжити так, щоб на відрізку $[-1;1]$ вона була: а) парною; б) непарною.

3) Продовжити функцію $f(x)=x^3+x^2-3\sin x,\ x\geq 0$, на всю числову пряму так, щоб дістати непарну функцію.

16•. Нехай функція $y=f(x),\ x\in\mathbf{R}$, є періодичною з періодом T. Довести, що функція $y=f(ax+b)$ є періодичною з періодом $T/a,\ a>0$.

17. Користуючись результатом вправи 16, показати, що для функцій $y=\sin(\omega x+\varphi)$ і $y=\cos(\omega x+\varphi),\ \omega>0$, основним (найменшим додатним) періодом є число $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$, а для функцій $y=\mathrm{tg}(\omega x+\varphi)$ і $y=\mathrm{ctg}(\omega x+\varphi)$ основним періодом є число $T=\dfrac{\pi}{\omega}$.

18. Визначити, які з даних функцій є періодичними, і вказати їхній основний період:

1) $y=\sin 5x$; 2) $y=\cos\dfrac{x}{6}$; 3) $y=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)$;

4) $y=\cos\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{\pi}{2}\right)$; 5) $y=\mathrm{tg}\,4x$; 6) $y=\mathrm{ctg}\,\dfrac{x}{2}$;

7) $y=\mathrm{tg}\,2\pi x$; 8) $y=\mathrm{ctg}(\pi x+1)$; 9)• $y=|\sin x|$;

10) $y=|\mathrm{tg}\,x|$; 11) $y=\cos^2 x$; 12) $y=\sin^4 x$; 13) $y=\sin^2 4x$;

14)• $y=\sin x^2$; 15) $y=2^{\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$; 16) $y=\sin\dfrac{1}{x}$; 17) $y=\mathrm{tg}\left(\sqrt{3x}-1\right)$;

18) $y=1+\sin\frac{\pi}{2}x$; 19) $y=x\cos x$; 20) $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$;

21) $y=\arccos(\cos x)$; 22) $y=[x]$; 23) $y=\{x\}$; 24) $y=\sin\frac{2x}{3\pi}\cos\frac{2x}{3\pi}$.

19. Навести приклади функцій з періодом:

1) 3; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $a>0$.

20. Навести приклад функції $y=f(x)\neq\text{const}$, $x\in\mathbf{R}$, для якої періодом є: а) будь-яке раціональне число; б) кожне з чисел 3 і $\sqrt{2}$; в) кожне з чисел $T_1, T_2, \ldots, T_n$, $n\geq 2$, $n\in\mathbf{N}$.

21. Довести, що не існує функції $y=f(x)$, $x\in\mathbf{R}$, для якої кожне ірраціональне число є періодом, а кожне раціональне число $r\neq 0$ не є періодом.

22. 1) Довести, що період функції $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\sin n_ix+\sum\limits_{i=1}^{p}b_i\cos m_ix$, $n_i, m_i\in\mathbf{N}$, визначається за формулою

$$T=\frac{2\pi}{\text{НСД}\left(n_1,\ \ldots,\ n_k,\ m_1,\ \ldots,\ m_p\right)},\tag{1}$$

а період функції $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\operatorname{tg}n_ix+\sum\limits_{i=1}^{p}b_i\operatorname{ctg}m_ix$, $n_i, m_i\in\mathbf{N}$, визначається за формулою

$$T=\frac{\pi}{\text{НСД}\left(n_1,\ \ldots,\ n_k,\ m_1,\ \ldots,\ m_p\right)}.\tag{2}$$

2) Вивести формули для відшукання періодів функцій: $\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\sin n_ix$, $\sum\limits_{i=1}^{k}b_i\operatorname{tg}n_ix$, якщо $n_i=\frac{p_i}{q_i}$, $i=\overline{1,\ k}$, p_i, $q_i\in\mathbf{N}$.

23. Користуючись результатами вправи 22, визначити періоди функцій або показати, що вони не існують:

1) $y=\sin 2x+\cos x$; 2) $y=\sin x+\cos\sqrt{2x}$;

3) $y=a\sin\alpha x+b\cos\beta x$; 4) $y=\operatorname{tg}x+2\operatorname{tg}(x/2)$;

5) $y=\sin(x/2)+\sin(x/6)$; 6) $y=\sin 2x+\sin 4x+\cos 6x$;

7) $y=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}(x/2)+\operatorname{tg}(2x/3)$; 8) $y=\sin x+\cos 5x+\operatorname{tg}\sqrt{5x}$.

24. Довести, що коли графік функції $y=f(x)$ симетричний відносно прямих $x=a$ і $x=b, b\neq a$, то f — періодична функція.

25. Продовжити періодично на числову пряму задану функцію f з даним періодом T:

1) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } 0\le x<\pi,\\ \sin x, & \text{якщо } \pi\le x<2\pi,\end{cases}\quad T=2\pi;$

2) $f(x)=x^2+x+1,\ x\in[0;\ 4),\ T=4.$

26. Продовжити функцію $y=3^x,\ 0\le x\le 2$, парним способом на відрізок $[-2;0]$, а потім здобуту функцію продовжити періодично на числову пряму з періодом $T=4$.

27. Відомо, що f — антиперіодична функція, тобто $\exists T>0:\ f(x+T)=$ $=-f(x)\ \forall x$. Довести, що f — періодична функція з періодом $2T$.

28. Чи буде кожна періодична функція антиперіодичною?

29. Побудувати графіки даних функцій:

1) $y=2^{\cos x}$; 2) $y=3^{\operatorname{tg} x}$; 3) $y=2^{|x|}+2$; 4) $y=\cos^2 x$;

5) $y=x^2-4|x|+1$; 6) $y=\lg(\cos x)$; 7) $y=x+\cos x$; 8)• $y=x\sin x$;

9) $y=\arcsin(\sin x)$; 10) $y=\arccos(\cos x)$; 11) $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

Зразки розв'язування задач

5. 1) Оскільки $\frac{1}{x^3}>0\ \forall x\in(0;\ 1)$, то це й означає, що функція $f(x)=\frac{1}{x^3}$ обмежена знизу на заданому інтервалі.

3) Відразу помічаємо, що $f(x)>0\ \forall x\in\mathbf{R}$, тобто функція обмежена знизу. Оскільки $\left(1-x^2\right)^2\ge 0$, то

$$1+x^4\ge 2x^2\Rightarrow\frac{x^2}{1+x^4}\le\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2},\quad x\ne 0,\quad\Rightarrow\ f(x)=\frac{1}{1+x^4}+\frac{x^2}{1+x^4}\le 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\quad x\ne 0.$$

Враховуючи, що $f(0)=1$, остаточно дістаємо $0<f(x)\le 3/2$, тобто функція обмежена на всій числовій прямій.

6. 4) Запишемо задану функцію у вигляді:

$$a\cos\omega t+b\sin\omega t=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega t+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega t\right).$$

Оскільки

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1,$$

то існує аргумент φ_0 такий, що

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi_0,\quad\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi_0.$$

Увівши позначення $A=\sqrt{a^2+b^2}$, дістаємо

$$f(t)=A(\sin\varphi_0\cos\omega t+\cos\varphi_0\sin\omega t)=A\sin(\omega t+\varphi_0).$$

Зрозуміло, $f(t)$ набуває найбільшого значення, що дорівнює A, якщо $\sin(\omega t+\varphi_0)=1$. Розв'язуючи це рівняння, дістаємо $\omega t+\varphi_0=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$, звідки

$$t=\frac{-2\varphi_0+\pi(4k+1)}{2\omega},$$

де $\varphi_0=\operatorname{arctg}(a/b)$. Найменшого значення $-A$ функція набуває, якщо

$$t=-\frac{2\varphi_0+\pi(4k-1)}{2\omega}.$$

9. 3) Задана функція визначена на множині $D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. Для $0<x_1<x_2$ маємо $\frac{1}{x_1^3}>\frac{1}{x_2^3}$, тобто функція є спадною на інтервалі $(0;\ +\infty)$. Якщо $x_1<x_2<0$, то також $\frac{1}{x_1^3}>\frac{1}{x_2^3}$, і функція є спадною і на інтервалі $(-\infty;\ 0)$.

12) У даному випадку $D(f)=\mathbf{R}$. Для $x_1<x_2<0$ $f(x_1)>f(x_2)>2$, а для $0\le x_1<x_2$ $f(x_1)=f(x_2)=2$. Отже, $x_1<x_2\ \Rightarrow\ f(x_1)\ge f(x_2)\ \forall\, x_1,\ x_2\in\mathbf{R}$, а це означає, що задана функція є незростаючою.

10. 7) У даному випадку область визначення $D(f)=\mathbf{R}\setminus\{-1\}$ не є симетричною відносно 0, тому досліджувати функцію на парність чи непарність не можна. Якщо не врахувати це зауваження, то можна допустити помилку, записавши: $f(x)=x\frac{x+1}{x+1}=x$ (а функція $f(x)=x$ — непарна).

9) Для заданої функції $D(f)=\mathbf{R}$ і $f(-x)=\frac{-2x+1}{x^2+1}=-\frac{2x-1}{x^2+1}$. Як бачимо, $f(-x)\ne$ $\ne f(x)$ і $f(-x)\ne -f(x)$. Отже, функція є ні парною, ні непарною.

16) Оскільки $D(f)=(-1;\ 1)$ і $f(-x)=\log_2\frac{1-x}{1+x}=\log_2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\log_2\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$, то функція непарна.

27) Функція задана на відрізку $[1;\ 2]$, який не є симетричним відносно точки 0, тому, як і в прикладі 7), досліджувати функцію на парність чи непарність не можна, хоча формально

$$f(-x)=\frac{(\sin(-x))^2}{(-x)+(-x)^3}=\frac{\sin^2 x}{-\left(x+x^3\right)}=-\frac{\sin^2 x}{x+x^3}=-f(x).$$

(Як доозначити функцію, щоб вона стала непарною?)

14. 2) За умовою $D(f)\supset E(\varphi)\ne\varnothing$ ($E(\varphi)$ — множина значень функції φ), тоді $f(\varphi(-x))=f(-\varphi(x))=f(-u)=f(u)=f(\varphi(x))$, тобто складна функція є парною.

15. 2), а) Функція f парна на відрізку $[-1;\ 1]$ тоді й тільки тоді, коли $f(-x)=$ $=f(x),\ x\in[-1;\ 1]$. Тому на проміжку $[-1;\ 0)$ покладемо $f(x)=(-x)^2=x^2$. Отже, функція $f(x)=x^2$ парна на відрізку $[-1;\ 1]$; б) функція f непарна на відрізку $[-1;\ 1]$, якщо $f(-x)=-f(x)$ або $f(x)=-f(-x)$. Тому на проміжку $[-1;\ 0]$ покладемо $f(x)=$ $=-(-x)^2=-x^2$. Тоді функція

$$f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\in[-1;\ 0),\\ x^2, & x\in[0;\ 1],\end{cases}$$

є непарною на відрізку $[-1;\ 1]$.

16. Оскільки $f\left(a\left(x+T_1\right)+b\right)=f\left(ax+b+aT_1\right)=f(ax+b)\ \forall x\in\mathbf{R}$, якщо $aT_1=T$, то $T_1=T/a$ — період функції $f(ax+b)$.

18. 9) Маємо $|\sin x|=\sqrt{\sin^2 x}=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}$. Оскільки функція $\cos 2x$ має період $T=$ $=2\pi/2=\pi$ (див. вправу 17), то й задана функція має той самий період.

14) Покажемо, що функція $\sin x^2$ не є періодичною. Доведення проведемо методом від супротивного. Нехай $T\neq 0$ є періодом заданої функції. Тоді має виконуватись тотожність $\sin(x+T)^2=\sin x^2$. Внаслідок рівності синусів маємо $x^2+2Tx+T^2-(-1)^k x^2\equiv \pi k$. Звідси при $x=0$ маємо $T^2=\pi k$, а тому остання тотожність набуває вигляду x^2+ $+2Tx\pm x^2\equiv 0$. Проте це неможливо, оскільки записана функція є лінійною або квадратичною, а отже, приймає і ненульові значення.

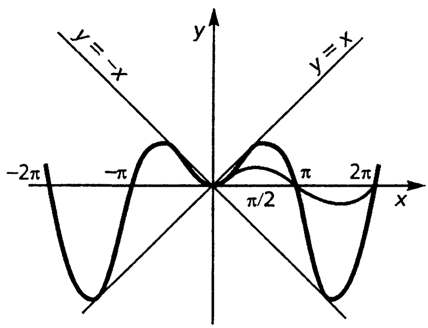


Рис. 6

29. 8) Область визначення функції $D(f)=$ $=\mathbf{R}$. Функція парна як добуток двох непарних функцій (покажіть це), тому її графік симетричний відносно осі Oy. Будуємо спочатку графіки функцій $y_1=x$ і $y_2=$ $=\sin x$ для $x\geq 0$. Враховуючи, що $\sin \pi k=$ $=0$, дістаємо $y_2(\pi k)=0$. На тих проміжках, де y_1 і y_2 мають однакові знаки, графік буде розміщено у верхній півплощині, а там, де y_1 і y_2 різних знаків — під віссю Ox. Оскільки $|\sin x|\leq 1$, то $|x\sin x|\leq|x|$, і тому графік функції розміщується між прямими $y=x$ і $y=-x$, дотикаючись до них у тих точках, де $\sin x=1$ і $\sin x=-1$ відповідно. Враховуючи тепер парність функції, дістаємо графік заданої функції (рис. 6).

§ 2.4. Функції обмеженої варіації

(*T*)-*розбиттям* відрізка $[a;b]$ називають множину точок $\{x_k\}_{k=0}^{n}$, де $x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b$. Нехай функція f визначена на відрізку $[a;b]$. Для (*T*)-розбиття відрізка $[a;b]$ позначимо $\sigma(T)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left|f\left(x_{k+1}\right)-f\left(x_k\right)\right|$. *Варіацією* (або *повною зміною*) функції f на відрізку $[a;\ b]$ називають число

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f := \sup_{(T)} \sigma(T) = \sup_{(T)} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(x_{k+1}) - f(x_k) \right|.$$

Якщо $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f < +\infty$, то функцію f називають *функцією обмеженої варіації* на відрізку $[a;\ b]$. В іншому разі f — функція необмеженої варіації на відрізку $[a;\ b]$.

Функції обмеженої варіації пов'язані з монотонними функціями так:

1) якщо f — монотонна функція на відрізку $[a;\ b]$, то $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f < +\infty$;

2) якщо f — функція обмеженої варіації на відрізку $[a;\ b]$ і $f(x) \in \mathbf{R}$ $\forall x \in [a;\ b]$, то $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, де φ і ψ — деякі неспадні функції на $[a;\ b]$. Зокрема, можна вважати, що $\varphi(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$ — варіація функції f на відрізку $[a;\ x]$, а $\psi(x) = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f - f(x)$.

Вправи

1. Знайти $\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$ для будь-якої монотонної на відрізку $[a\,; b]$ функції f.

2. Довести, що коли f — функція обмеженої варіації на відрізку $[a\,; b]$, то $\forall c \in (a\,; b)$ f є функцією обмеженої варіації на відрізках $[a\,; c]$ і $[c\,; b]$, причому $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f = \overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f + \overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}} f$.

3. Нехай розбиття (T_1) відрізка $[a\,; b]$ утворюється з розбиття $(T) = \{x_k\}_{k=1}^{n}$ цього відрізка доданням однієї нової точки. Яке співвідношення між $\sigma(T) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left| f(x_{k+1}) - f(x_k) \right|$ і $\sigma(T_1)$?

4. Показати, що коли $\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f < +\infty$ і $\overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}} f < +\infty$, де $c \in (a\,; b)$, то $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f = \overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f + \overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}} f$.

5. Знайти варіацію даних функцій на вказаних відрізках:

1) $f(x) = x^2$, $x \in [-1;\ 1]$; 2) $f(x) = 2^{|x|}$, $x \in [-1;\ 1]$;

3) $f(x) = \sin x$, $x \in [0,\ 2\pi]$; 4) $f(x) = \arccos x$, $x \in [-1;\ 1]$;

5)• $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x=0, \\ 1-x, & \text{якщо } 0<x<1, \\ 3, & \text{якщо } x=1, \end{cases}$ $x\in[0;\ 1]$;

6) $f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{якщо } x<1, \\ 10, & \text{якщо } x=1, \\ x, & \text{якщо } x>1, \end{cases}$ $x\in[0;\ 2]$;

7) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x=0, \\ x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x\neq 0, \end{cases}$ $x\in[0;\ 1]$;

8)• $f(x)=\begin{cases} 0, & x\in \mathbf{Q}, \\ 1, & x\notin \mathbf{Q}, \end{cases}$ $x\in[0;\ 1]$.

6. Нехай функція f задовольняє умову Ліпшиця на відрізку $[a;b]$, тобто $\exists L>0:\ |f(x)-f(y)|\le L|x-y|\ \ \forall\, x,\ y\in[a;\ b]$. Довести, що f — функція обмеженої варіації на відрізку $[a;b]$.

7. Довести: а) якщо $\bigvee\limits_a^b f<+\infty$, то f — обмежена на $[a;b]$; б) якщо $\bigvee\limits_a^b f<+\infty$ і $\bigvee\limits_a^b \varphi<+\infty$, то $\bigvee\limits_a^b (f\pm\varphi)<+\infty$ і $\bigvee\limits_a^b (f\varphi)<+\infty$; в) якщо $\bigvee\limits_a^b f<+\infty$, то $\bigvee\limits_a^b |f|<+\infty$.

8. Відповісти на поставлені запитання усно.

1) Чи збігається клас функцій обмеженої варіації на відрізку $[a;b]$ із: а) класом функцій, монотонних на $[a;b]$; б) класом функцій, кожна з яких є різницею двох зростаючих функцій?

2) Варіація функції f на відрізку $[a;b]$ дорівнює A. Чому дорівнює варіація функції $kf+C$ на цьому відрізку?

9. Чи правильне твердження, обернене до твердження 7. в)?

10•. Функція f має обмежену варіацію на відрізку $[0;1]$. Довести, що функція $\varphi(x)=f(x+1)$ також має обмежену варіацію на відрізку $[-1;0]$, причому $\bigvee\limits_0^1 f=\bigvee\limits_{-1}^0 \varphi$.

11. Записати задані функції у вигляді різниці двох неспадних функцій (якщо це можливо):

1)• $f(x)=\cos x,\ x\in[0;\ 2\pi]$; 2) $f(x)=\sin x,\ x\in[0;\ 2\pi]$;

3) $f(x)=\cos^2 x,\ x\in[0;\ \pi]$; 4) $f(x)=\begin{cases} -x^2, & \text{якщо } x\in[0;\ 1), \\ 0, & \text{якщо } x=1, \\ 1, & \text{якщо } x\in(1;\ 2]. \end{cases}$

Зразки розв'язування задач

5. 5) Виконаємо (T)-розбиття відрізка $[0;\ 1]$. Тоді

$$\sigma(T)=\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1})-f(x_k)\right|=\left|f(x_1)-f(x_0)\right|+\left|f(x_2)-f(x_1)\right|+\ldots$$

$$\ldots+\left|f(x_n)-f(x_{n-1})\right|=\left|f(x_1)-f(x_0)\right|+\left(\left|f(x_2)-f(x_1)\right|+\ldots+\left|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})\right|\right)+$$

$$+\left|f(x_n)-f(x_{n-1})\right|=(1-x_1)+(x_{n-1}-x_1)+(3-(1-x_{n-1}))=3+2(x_{n-1}-x_1)<5.$$

При цьому суму $\sigma(T)$ можна зробити як завгодно близькою до числа 5, оскільки x_{n-1} та x_1 можуть бути як завгодно близькими до 1 і 0 відповідно. Тому $\sup\limits_{(T)}\sigma(T)=\bigvee\limits_0^1 f(x)=5$, тобто варіація заданої функції на відрізку $[0;\ 1]$ дорівнює 5.

8) Дана функція є функцією Діріхле. Покажемо, що вона має необмежену варіацію. Задамо довільне натуральне число n і з відрізка $[0;\ 1]$ виберемо n точок, розмістивши їх у порядку зростання: $0<x_1<x_2<\ldots<x_n<1$. Розглянемо такі околи $O(x_k)$, $k=\overline{1,\ n}$, цих точок, які попарно не перетинаються. У кожному з них візьмемо дві точки x_k' і x_k'' такі, що $x_k'\notin\mathbf{Q}$, $x_k''\in\mathbf{Q}$. Тоді

$$\bigvee_0^1 f(x)\geq\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x'')_k-f(x_k')\right|=n.$$

Отже, варіація функції f на відрізку $[0,\ 1]$ більша за будь-яке натуральне число n, тобто вона дорівнює нескінченності.

10. Припустимо, що функція $\varphi(x)=f(x+1)$ має необмежену варіацію на відрізку $[-1;\ 0]$. Тоді для будь-якого натурального числа n_0 можна знайти таке (T)-розбиття відрізка $[-1;\ 0]$ точками x_k, $k=\overline{0,\ n}$, що

$$\sigma(T)=\sum_{k=0}^{n-1}\left|\varphi(x_{k+1})-\varphi(x_k)\right|>n_0.$$

Розіб'ємо тепер відрізок $[0;\ 1]$ точками $\overset{*}{x}_k=x_k+1$, $k=\overline{0,\ n}$. Тоді

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(\overset{*}{x}_{k+1}\right)-f\left(\overset{*}{x}_k\right)\right|=\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1}+1)-f(x_k+1)\right|=\sum_{k=0}^{n-1}\left|\varphi(x_{k+1})-\varphi(x_k)\right|=\sigma(T)>n_0.$$

Отже, коли б функція φ мала необмежену варіацію на відрізку $[-1;\ 0]$, то й функція f також мала б необмежену варіацію на відрізку $[0;\ 1]$. Тому функція φ має обмежену варіацію на $[-1;\ 0]$. Перейшовши до верхніх граней в останній рівності, дістанемо $\bigvee\limits_0^1 f=\bigvee\limits_{-1}^0\varphi$.

11. 1) Оскільки $f(x)=\cos x$ — спадна функція на проміжку $(0;\ \pi]$, то $\bigvee\limits_0^x f=f(0)-$ $-f(x)=1-\cos x$ $\forall x\in[0;\ \pi]$. Якщо $x>\pi$, то $\bigvee\limits_0^x f=\bigvee\limits_0^\pi f+\bigvee\limits_\pi^x f$ (див. вправу 4). На проміж-

ку $(\pi;\ 2\pi]$ функція $f(x)=\cos x$ зростає, а тому $\overset{x}{\underset{\pi}{\mathrm{V}}} f = f(x)-f(\pi)=\cos x-\cos\pi =$
$=\cos x+1 \Rightarrow \overset{x}{\underset{0}{\mathrm{V}}} f = 1-\cos\pi+\cos x+1=3+\cos x\ \ \forall\, x\in(\pi;\ 2\pi]$. Отже, можна покласти:

$$\varphi(x)=\begin{cases}1-\cos x, & x\in[0;\ \pi],\\ 3+\cos x, & x\in(\pi;\ 2\pi];\end{cases}\quad \psi(x)=\varphi(x)-\cos x=\begin{cases}1-2\cos x, & x\in[0;\ \pi],\\ 3, & x\in(\pi;\ 2\pi].\end{cases}$$

Неважко помітити, що φ і ψ — неспадні функції на $[0;\ 2\pi]$ і $\cos x=\varphi(x)-\psi(x)$ $\forall\, x\in[0;\ 2\pi]$.

§ 2.5. Поняття еквівалентних множин та потужності множини

Множини A і B називають *еквівалентними* і записують $A\sim B$, якщо існує $f:\ A\leftrightarrow B$. В іншому разі A і B називають *нееквівалентними* і записують $A\nsim B$.

Основні властивості еквівалентних множин

1. $A\sim A$ (*рефлексивність*).

2. $A\sim B\Rightarrow B\sim A$ (*симетричність*).

3. $A\sim B,\ B\sim C\Rightarrow A\sim C$ (*транзитивність*).

4. $(A_i\sim B_i\ \ \forall\, i\subset L,\ A_i\cap A_j=\varnothing,\ B_i\cap B_j=\varnothing\ \ \forall\, i\neq j)\Rightarrow\bigcup\limits_i A_i\sim\bigcup\limits_i B_i$.

Основні властивості еквівалентних множин дають змогу розподілити усі множини так, що до одного класу входять ті й тільки ті множини, які еквівалентні між собою. Такі різні класи не перетинаються між собою. Це дає можливість увести поняття потужності множини A як деякого символу $\mu(A)$, який приписують класу множин, еквівалентних множині A. Наведемо важливі приклади потужностей множин: $\mu(\varnothing)=0$ — потужність порожньої множини; $\mu(\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\})=n$ — скінченна потужність (кількість елементів скінченної множини); $\mu(\mathbf{N})=a$ — зчисленна потужність; $\mu([0;1])=c$ — континуальна потужність; $\mu(\{f(x):\ x\in[0;\ 1]\})=f$ — потужність множини функцій, визначених на відрізку $[0;\ 1]$.

Порівняння потужностей здійснюється за такими правилами:

1) $\mu(A)=\mu(B)\Leftrightarrow A\sim B$;

2) $\mu(A)<\mu(B)\Leftrightarrow A\nsim B$ і $\exists C\subset B:\ A\sim C$;

3) $\mu(A)>\mu(B)\Leftrightarrow\mu(B)<\mu(A)$;

4) $\mu(A)\le\mu(B)\Leftrightarrow\mu(A)<\mu(B)$ або $\mu(A)=\mu(B)$;

5) $\mu(A)\ge\mu(B)\Leftrightarrow\mu(A)>\mu(B)$ або $\mu(A)=\mu(B)$.

Для будь-яких двох множин A і B має місце одне і тільки одне із співвідношень: або $\mu(A)=\mu(B)$, або $\mu(A)<\mu(B)$, або $\mu(A)>\mu(B)$. При цьому $\mu(A)<\mu(B)$, $\mu(B)<\mu(C)\Rightarrow\mu(A)<\mu(C)$ — транзитивність відношення «<» (менше).

Вправи

1. Виконати вказані завдання усно.

1) Перевірити, чи правильні дані твердження:

а) $A\sim B \Leftrightarrow (\exists f:\ A\to B$ таке, що $\forall b\in B\quad \exists! a\in A:\ b=f(a))$;

б) якщо $A\subset B$, то $A\nsim B$;

в) множина A нескінченна тоді й тільки тоді, коли $\exists B\subset A:\ B\neq A$ і $B\sim A$;

г) скінченні множини еквівалентні тоді й тільки тоді, коли вони мають однакову кількість елементів;

д) A — скінченна множина тоді й тільки тоді, коли кожне відображення A на A є взаємно однозначним.

2) Показати еквівалентність множин A і B, якщо: а) $A=\mathbf{N}$, $B=\{n\in\mathbf{N}:\ n$ — парне$\}$; б) $A=(0\ ;\ +\infty)$, $B=(-\infty;\ +\infty)$; в) $A=\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, $B=\mathbf{R}$.

2•. Довести, що будь-які два невироджених відрізки є еквівалентними множинами.

3. Довести еквівалентність множин A і B, якщо:

1) $A=\mathbf{N}$, $B=\mathbf{Z}$; 2) $A=\mathbf{N}$, $B=\mathbf{Q}$;

3) $A=(a;\ b)$, $B=(c;\ d)$, де $a<b$, $c<d$;

4) $A=[0;\ 1]$, $B=[a;\ b]$; 5) $A=[0;\ 1]$, $B=[0;\ 1)$;

6) $A=[0;\ 1]$, $B=(0;\ 1)$; 7) $A=[a;\ b]$, $B=(a;\ b)$; 8) $A=[0;\ 1)$, $B=\mathbf{R}$.

4. Чи правильні дані твердження:

1) $A\nsim B\Rightarrow B\nsim A$; 2) $A\nsim B$ і $B\nsim C\Rightarrow A\nsim C$;

3) $A_i\sim B_i$, $i=1,\ 2\ \Rightarrow\ (A_1\cup A_2)\sim(B_1\cup B_2)$;

4) $(A\sim B,\ C\sim D,\ C\subset A,\ D\subset B)\ \Rightarrow\ (A\setminus C)\sim(B\setminus D)$?

5. Довести, що для скінченних множин A і B маємо $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$.

6. Довести дані твердження:

1) $A\subset B\Rightarrow\mu(A)\leq\mu(B)$;

2) $\mu(A)\leq\mu(B)$ і $\mu(B)\leq\mu(A)\Rightarrow\mu(A)=\mu(B)$;

3) $(A\subset B\subset C,\ \mu(A)=\mu(C))\ \Rightarrow\ \mu(B)=\mu(A)$;

4)• $\mu(\mathbf{N})<\mu([0;\ 1))$, тобто зчисленна потужність менша за континуальну.

7. Довести, що зчисленна потужність більша за будь-яку скінченну потужність.

2. Нехай $A=[a;\ b]$ і $B=[c;\ d]$ — невироджені відрізки. Розмістимо A на осі Ox, а B на осі Oy площини Oxy і проведемо пряму через точки $(a,\ c)$ і $(b,\ d)$. Рівняння цієї прямої має вигляд

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-c}{d-c}\Leftrightarrow y=\frac{d-c}{b-a}(x-a)+c=f(x).$$

Покажемо, що ця рівність задає взаємно однозначне відображення відрізка $[a;\ b]$ на $[c;\ d]$. Дійсно, якщо $x\in[a;\ b]$, то $0\le x-a\le b-a\Rightarrow 0\le y-c=\frac{d-c}{b-a}(x-a)\le\frac{d-c}{b-a}(b-a)=$ $=d-c\Rightarrow c\le y\le d$, тобто $y=f(x)\in[c;\ d]$. Якщо $y\in[c;\ d]$ — довільне фіксоване число, то $y=\frac{d-c}{b-a}(x-a)+c\Leftrightarrow x=\frac{b-a}{d-c}(y-c)+a$, тобто $\forall\ y\in[c;\ d]\ \exists!x\in[a;\ b]:\ y=f(x)$. Цим доведено, що $f:\ [a;\ b]\leftrightarrow[c;\ d]$.

6. 4) За означенням порівняння потужностей маємо $\mu(\mathbf{N})<\mu([0;\ 1])\Leftrightarrow\mathbf{N}\not\sim[0;\ 1]$ і $\exists A\subset[0;\ 1]:\mathbf{N}\sim A$. За множину $A\subset[0;\ 1]$ візьмемо $A=\{1,\ 1/2,\ ...,\ 1/n,\ ...\}$. Неважко помітити, що коли $f(n)=\frac{1}{n}$, то $f:\ \mathbf{N}\leftrightarrow A$, а тому $\mathbf{N}\sim A$.

Припустимо, що $\mathbf{N}\sim[0;\ 1]$, тобто існує взаємно однозначне відображення φ множини $\mathbf{N}$ на відрізок $[0;\ 1]$. Позначимо $y_n=\varphi(n)$. Тоді $[0;\ 1]=\{y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n,\ ...\}$, тобто елементи відрізка $[0;\ 1]$ занумеровані рядом натуральних чисел.

Поділимо відрізок $[a;\ b]=[0;\ 1]$ на три рівних відрізки точками c_0 і d_0. Виберемо з відрізків $[a;\ c_0]$, $[c_0;\ d_0]$ і $[d_0;\ b]$ той, який не містить точки y_1, і позначимо його через $[a_1;\ b_1]$.

Припустимо, що нами побудовано відрізок $[a_n;\ b_n]$, який не містить точки y_n. Поділимо його на три відрізки точками c_n і d_n і виберемо з відрізків $[a_n;\ c_n]$, $[c_n;\ d_n]$ і $[d_n;\ b_n]$ той, який не містить точки y_{n+1}. Позначимо його через $[a_{n+1};\ b_{n+1}]$.

За принципом математичної індукції нами побудовано систему відрізків $[a_n;\ b_n]$, $n=1,\ 2,\ ...,$ для якої:

1) $[a_n;\ b_n]\supset[a_{n+1};b_{n+1}]\ \forall\ n\in\mathbf{N}$; 2) $b_n-a_n=\frac{1}{3^n}\to 0,\ n\to\infty$; 3) $y_n\notin[a_n;\ b_n]\ \forall\ n\in\mathbf{N}$.

З умов 1) і 2) за аксіомою Кантора випливає існування точки $c\in[a_n;\ b_n]\ \forall n\in\mathbf{N}$. Оскільки $c\in[0;\ 1]=\{y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n,\ ...\}$, то $\exists n_0:\ c=y_{n_0}\notin\left[a_{n_0};\ b_{n_0}\right]$ (згідно з умовою 3). Дістали суперечність, яка й доводить, що $\mathbf{N}\not\sim[0;\ 1]$. Тому $\mu(\mathbf{N})<\mu([0;\ 1])$.

§ 2.6. Зчисленні множини

Множину A називають *зчисленною*, якщо вона має зчисленну потужність, тобто $\mu(A)=a$. Прикладом зчисленних множин є множини $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ і $\mathbf{Q}$. До зчисленних множин відноситься і множина алгебраїчних чисел, тобто чисел, які є нулями многочленів з цілими коефіцієнтами.

Основні властивості зчисленних множин

1. Множина A — зчисленна тоді й тільки тоді, коли $A=\{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ ...\}$, де $x_k \neq x_j$, $k \neq j$, тобто елементи множини A можна перенумерувати усіма натуральними числами.

2. Якщо A — зчисленна множина, $B \subset A$ і B — нескінченна множина, то B — зчисленна множина.

3. Якщо A — нескінченна множина, то $\exists\ B \subset A:\ B$ — зчисленна множина.

4. Зчисленна потужність найменша серед нескінченних потужностей.

5. Якщо кожна з множин A_i не більше ніж зчисленна (тобто $\mu(A_i) \leq a$) і $i \in L$, де L — не більше ніж зчисленна, то й $\bigcup\limits_{i\in L} A_i$ — не більше ніж зчисленна множина. При цьому, якщо це об'єднання є нескінченною множиною, то воно є зчисленною множиною.

6. Якщо $A=\left\{a_{x_1 x_2 \ldots x_n}:\ \ x_k \in X_k,\ k=\overline{1,\ n}\right\}$ і кожна X_k — зчисленна множина, то A також є зчисленною множиною.

7. Якщо A — нескінченна, а B — не більше ніж зчисленна множина, то $\mu(A \bigcup B)=\mu(A)$.

Вправи

1. Виконати вказані завдання усно.

1) Перевірити, чи правильні дані твердження:

а) кожна послідовність має зчисленну множину різних елементів;

б) якщо елементи множини A є членами деякої послідовності, то A — зчисленна множина;

в) твердження, обернене до б), є правильним;

г) кожна зчисленна множина має зчисленну власну підмножину;

д) якщо $E \subset (0;\ +\infty)$ і E — зчисленна множина, то $\exists\, a>0:\ E \bigcap (a;\ +\infty)$ — зчисленна множина.

2) Відомо, що $A \bigcup B$ — зчисленна множина. Що можна сказати про потужність множин A і B?

3) Що можна сказати про потужність множини $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, де:

а) A_k — скінченні множини;

б) A_k — скінченні множини, які попарно не перетинаються?

2. Довести, що об'єднання зчисленної множини зчисленних множин A_k є зчисленною множиною.

3. Знайти потужність даних множин:

1)• A — множина, елементами якої є деякі інтервали, що попарно не перетинаються;

2) $A=\{ax+b:\ a \in \mathbf{N},\ b \in \mathbf{Z}\}$;

3) A — множина усіх кругів з раціональними координатами центра і натуральними радіусами;

4) $A = \{(a;\ b):\ a,\ b \in \mathbf{Q}\}$;

5) $A = \left\{ \dfrac{ax+b}{cx+d}:\ a \text{ і } b \text{ — алгебраїчні, } c \text{ і } d \text{ — натуральні} \right\}$.

4. Нехай $E \subset \mathbf{R}$ і $|x - y| > a \ \forall\, x, y \in E:\ x \neq y$, де $a > 0$ — фіксоване число. Довести, що E — не більше ніж зчисленна множина.

5. Знайти співвідношення між множинами $\mathbf{Q}$ раціональних і A алгебраїчних чисел.

6. Нехай A — незчисленна множина, тобто нескінченна множина, яка не є зчисленною. Довести, що $A \setminus B \sim A$ для будь-якої не більше ніж зчисленної множини B.

7. Чи правильне попереднє твердження для таких випадків:

1)• A — нескінченна множина, B — не більше ніж зчисленна множина;

2) A — нескінченна множина, B — скінченна множина?

Зразки розв'язування задач

3. 1) Відомо, що елементами множини A є інтервали, причому якщо $(a;\ b) \in A$, $(c;\ d) \in A$ і $(a;\ b) \neq (c;\ d)$, то $(a;\ b) \cap (c;\ d) = \varnothing$. Зафіксуємо у кожному інтервалі з множини A якесь раціональне число. Цим самим вкажемо взаємно однозначне відображення множини A на деяку підмножину B множини $\mathbf{Q}$ раціональних чисел. За властивістю 2 зчисленних множин B є не більшою за зчисленну, тому $\mu(A) \le a$, тобто A — не більше ніж зчисленна множина.

7. 1) Нехай $A = \mathbf{N}$ і $B = \mathbf{N}$. Тоді A — нескінченна, B — не більше ніж зчисленна, проте $A \setminus B = \varnothing \nsim A$. Отже, якщо у твердженні 6 умову, що A — незчисленна множина, замінити умовою, що A — нескінченна множина, то це твердження стане неправильним.

§ 2.7. Континуальні множини. Існування як завгодно великих потужностей

Континуальною множиною називають множину, яка має континуальну потужність, тобто еквівалентна відрізку $[0; 1]$. Таку множину називають також *множиною потужності континууму.*

Континуальні множини є незчисленними множинами, тобто нескінченними, які не є зчисленними. Це випливає з того, що континуальна потужність більша за зчисленну.

Важливими прикладами континуальних множин є: будь-який проміжок $\langle a; b \rangle$, де $a < b$; множини $\mathbf{R}$, $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $\langle a; b \rangle \setminus \mathbf{Q}$; множина $\mathbf{C}$ комплексних чисел, множина трансцендентних чисел $\mathbf{C} \setminus A$, де A — множина алгебраїчних чисел.

Об'єднання скінченної або зчисленної кількості континуальних множин, які попарно не перетинаються, є континуальною множиною. Якщо $A = \{a_{x_1 x_2 \ldots}:\ x_k \in X_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$ і $\mu(X_k) = c \ \ \forall\, k \in \mathbf{N}$, то A — континуальна множина. Континуальними множинами є також множини $A=\{(x_n):\ x_n=0$ або $x_n=1\}$, $B=\{(x_n):\ x_n\in\mathbf{N}\}$ і $C=\{(x_n):\ x_n\in\mathbf{R}\}$.

Якщо множина A скінченна і має n елементів $(n\geq 0)$, то ця множина має 2^n підмножин. Цей факт приводить до такого означення: *для даної множини A символом $2^{\mu(A)}$ позначають потужність множини усіх підмножин множини A*. Для потужностей $\mu(A)$ і $2^{\mu(A)}$ має місце співвідношення $2^{\mu(A)}>\mu(A)$, а тому не існує найбільшої потужності. Зокрема, $2^a>a$, $2^c>c$, де a — зчисленна, а c — континуальна потужності. Можна довести, що $2^a=c$ і $2^c=f$, де f — потужність множини функцій, визначених на відрізку $[0;1]$.

Гіпотеза континууму (Кантора). *Не існує потужності, більшої за зчисленну і меншої за континуальну.*

Вправи

1. Виконати вказані завдання усно.

1) Перевірити, чи правильні дані твердження:

а) континуальною множиною є будь-яка незчисленна множина;

б) якщо множина не є зчисленною, то вона незчисленна;

в) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

г) будь-який проміжок $\langle a;b\rangle$ має потужність континууму;

д) довільна незчисленна множина є нескінченною множиною?

2) Порівняти потужності множин алгебраїчних і трансцендентних чисел.

2. Знайти потужності даних множин:

1) A — квадрат у площині Oxy; 2) B — круг у площині Oxy;

3) E — куб у просторі $Oxyz$;

4) A — деяка множина, елементами якої є круги, які попарно не перетинаються;

5) A — множина трансцендентних чисел з відрізка $[0;1]$;

6) A — множина многочленів з ірраціональними коефіцієнтами;

7) A — деяка множина, елементами якої є кола, які попарно не перетинаються.

3. Чи може бути континуальною множина A, якщо її елементами є фігури з площини Oxy, які утворені з двох відрізків, що становлять: а) літеру Г; б) літеру Т?

4. Довести, що коли $\mu(A\cup B)=c$, то або $\mu(A)=c$, або $\mu(B)=c$.

5. Чи можна континуальну множину записати у вигляді об'єднання зчисленної кількості континуальних множин, які попарно не перетинаються?

6. Нехай елементами множини A є набори чисел виду $(a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots)$, де a дорівнює 0, або 1, або 2. Показати, що A — континуальна множина.

7. Що можна сказати про потужність множини A з попередньої вправи, якщо в кожному наборі усі $a_k=0$, починаючи з деякого номера?

8. Знайти потужність множини чисел, кожне з яких можна записати у вигляді $x = \sum_{k=1}^{n(x)} a_k / 2^k$, де a_k дорівнює 0 або 1 (скінченний двійковий дріб).

9. Чи правильні дані твердження:

1) існує найменша потужність; 2) існує найбільша потужність;

3) існує найбільша скінченна потужність;

4) існує найменша нескінченна потужність;

5) множина $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ має стільки ж двохелементних підмножин, скільки і трьохелементних;

6)● множина з 5) має більше одноелементних підмножин, ніж чотириелементних?

10. Довести, що число k-елементних підмножин n-елементної множини $(0 \le k \le n)$ дорівнює $C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$, $0 < k \le n$, а $C_n^0 = 1$.

11. Довести, що $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$.

12. Чи правильні дані твердження:

1) $\exists A: 2^{\mu(A)} = 1$; 2) $\forall n \in \mathbf{N}\ \exists A: 2^{\mu(A)} = n$; 3) $\forall n \in \mathbf{N}\ \exists A: 2^{\mu(A)} < n$;

4) $\forall n \in \mathbf{N}\ \exists A: 2^{\mu(A)} \ge n$; 5) $2^{\mu(A)} = \mu([0;1])$?

13. Знайти потужності даних множин:

1)● $\{B \subset \mathbf{N}: B$ — скінченна множина$\}$;

2) $\{B \subset [0;1]: B$ — скінченна множина$\}$;

3) $\{B \subset \mathbf{N}: B$ — зчисленна множина$\}$;

4) $\{B \subset [0;1]: B$ — зчисленна множина$\}$;

5) $\{B \subset [0;1]: B$ — континуальна множина$\}$.

Зразки розв'язування задач

9. 6) Якщо $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, то одноелементними підмножинами є $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$, $\{a_4\}$ і $\{a_5\}$, а чотириелементними — $A \setminus \{a_1\}$, $A \setminus \{a_2\}$, $A \setminus \{a_3\}$, $A \setminus \{a_4\}$ і $A \setminus \{a_5\}$. Одноелементних підмножин стільки ж, скільки й чотириелементних, отже, твердження неправильне.

13. 1) Нехай A_n — множина n-елементних підмножин множини $\mathbf{N}$, а $A_n^* = \{B = \{m_1, m_2, ..., m_n\}: m_k \in \mathbf{N}\ \forall k = \overline{1,n}\}$. Зрозуміло, що $A_n \subset A_n^*$ і A_n — нескінченна множина. За відомим твердженням (див. теоретичні відомості до § 2.6, твердження 6) $\mu(A_n^*) = a$ — зчисленна потужність, а отже, і $\mu(A_n) = a$ (за твердженням 2 того самого параграфа). Якщо A — множина усіх скінченних підмножин множини $\mathbf{N}$, то $A = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup \{\varnothing\}$. Звідси за твердженням 5 із § 2.6 маємо $\mu(A) = a$, тобто потужність заданої множини зчисленна.

§ 3.1. Поняття границі послідовності. Основні властивості границь

Послідовністю дійсних (комплексних) чисел називають функцію $f: \mathbf{N} \to \to \mathbf{R} (\mathbf{N} \to \mathbf{C})$, тобто функцію, визначену на множині натуральних чисел, і позначають $y_n = f(n)$ $\forall n \in \mathbf{N}$ або (y_n). При цьому значення y_n називають n-м або *загальним членом послідовності.*

Іноді послідовність задається записом кількох її перших членів (значень функції, що задає послідовність), розміщених у порядку зростання номера n, тобто $y_1, y_2, ..., y_n, ...$.

Дійсну послідовність називають також *послідовністю з дійсними членами*, а комплексну — *послідовністю з комплексними членами.*

Оскільки послідовність — це функція, то для неї справедливі усі твердження, сформульовані для функцій. Зокрема, можна говорити про обмеженість послідовності, монотонність дійсної послідовності, $\sup\limits_{n \in \mathbf{N}} | y_n |$, $\min\limits_{n \geq n_0} y_n$, тощо.

Якщо послідовність (y_n), $y_n \in \mathbf{R}$, зростає, то записують $y_n \uparrow$, а якщо спадає, то $y_n \downarrow$.

Якщо задано послідовність (y_n), то $\forall (n_k): n_k \in \mathbf{N}$ і $n_k \uparrow$ послідовність (y_{n_k}) називають *підпослідовністю послідовності* (y_n).

Дійсну або комплексну послідовність (z_n) називають *збіжною* до числа c і записують $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = c$ або $z_n \to c$, коли $n \to \infty$, якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon): (n > > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - c| < \varepsilon)$. При цьому число c називають *границею послідовності* (z_n). Суть поняття границі послідовності можна сформулювати так: $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = c \Leftrightarrow z_n \approx c$ для досить великих номерів, і абсолютну похибку цього наближення можна зробити як завгодно малою, якщо брати номери n досить великими.

Якщо $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = 0$, то послідовність (z_n) називають *нескінченно малою.*

Основні властивості границь дійсних послідовностей

1. *Єдиність границі:* кожна послідовність може мати не більш однієї границі.

2. *Границя підпослідовності:* якщо $y_n \to c$, $n \to \infty$, то будь-яка її підпослідовність має границю, що дорівнює c.

3. *Границя стаціонарної послідовності:* якщо (y_n) — стаціонарна послідовність, тобто $\exists n_0$: $y_n = c$ $\forall n \geq n_0$, то $y_n \to c$, $n \to \infty$. Зокрема, $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

4. *Зв'язок збіжної послідовності з нескінченно малою:* послідовність (y_n) збігається до c тоді й тільки тоді, коли послідовність $(y_n - c)$ є нескінченно малою.

5. *Зв'язок збіжності з обмеженістю:* якщо послідовність збіжна, то вона обмежена. Якщо, крім того, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ $(y_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbf{N})$, то обмеженою є також послідовність $\left(\dfrac{1}{y_n}\right)$.

6. *Добуток нескінченно малої послідовності на обмежену:* якщо (y_n) — нескінченно мала послідовність, а (x_n) — обмежена, то $(x_n y_n)$ — нескінченно мала послідовність.

7. *Границя суми, добутку, різниці і частки:* нехай $x_n \to a$ і $y_n \to b$. Тоді при $n \to \infty$ маємо $x_n \pm y_n \to a \pm b$, $x_n y_n \to ab$ і $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$, якщо $b \neq 0$. Зокрема, сума, різниця і добуток двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.

8. *Перехід до границі в нерівностях:* якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ і $x_n \leq y_n$ $\forall n \in \mathbf{N}$, то $a \leq b$.

9. *Границя проміжної послідовності:* якщо $x_n \leq y_n \leq z_n$ $\forall n \in \mathbf{N}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$, то й $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$.

10. *Перехід до границі під знаком модуля:* нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - y_n| = |a - b|$. Зокрема, $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} y_n|$, якщо (y_n) — збіжна послідовність.

Якщо (z_n) — послідовність з комплексними членами, то й для неї справедливими є всі вказані властивості, крім 8 і 9. Нехай $x_n = \operatorname{Re} z_n$ і $y_n = \operatorname{Im} z_n$ $\forall n$; c — комплексне число, $a = \operatorname{Re} c$ і $b = \operatorname{Im} c$. Тоді $z_n \to c$, $n \to \infty$, $\Leftrightarrow x_n \to a$ і $y_n \to b$, $n \to \infty$.

Послідовність (z_n) називається *нескінченно великою*, якщо послідовність $\left(\frac{1}{z_n}\right)$ нескінченно мала. При цьому записують $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ або $z_n \to \infty$, $n \to \infty$, і кажуть, що (z_n) має нескінченну границю. Якщо $0 < \frac{1}{z_n} \to 0$, $n_0 < n \to \infty$, то вживають позначення $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = +\infty$ або $z_n \to +\infty$, $n \to \infty$, а якщо $0 > \frac{1}{z_n} \to 0$, $n_0 < n \to \infty$, то записують $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -\infty$ або $z_n \to -\infty$, $n \to \infty$.

Вправи

1. Для даної послідовності записати чотири перших члени, якщо:

1) $x_n = 1 + \frac{1}{n}$; 2) $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$; 3) $x_n = (-1)^n$; 4) $x_n = \sin\frac{\pi}{2}(2n+1)$;

5) $x_n = \frac{n!}{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}$; 6) $x_n = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}$; 7) $x_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2 - n + 1}$;

8)• $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n - \text{парне}, \\ n, & n - \text{непарне}; \end{cases}$ 9) $x_n = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n^2}, & n - \text{непарне}, \\ \frac{n-1}{n}, & n - \text{парне}; \end{cases}$

10) $z_n = \frac{n}{2n+1} + i\frac{n^2}{2n^2+1}$; 11) $z_n = \sin\frac{\pi n}{4} + i\frac{n^2-1}{n^2+1}$.

2. Виконати вказані завдання усно.

1) Сформулювати означення обмеженої послідовності і дати його геометричну інтерпретацію.

2) Дати означення монотонної послідовності дійсних чисел. Пояснити, чому не можна говорити про монотонність комплексної послідовності.

3) За даними першими членами послідовності знайти її можливий загальний член:

а) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \ldots$; б) $11, 21, 31, 41, \ldots$;

в) $\frac{1}{2\cdot 3}, -\frac{2}{3\cdot 4}, \frac{3}{4\cdot 5}, -\frac{4}{5\cdot 6}, \ldots$; г) $\frac{1}{1+1}, \frac{1\cdot 2}{2^2+1}, \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^2+1}, \ldots$;

д) $0, \frac{2}{2^2}, 0, \frac{2}{4^2}, 0, \frac{2}{6^2}, \ldots$; е) $\frac{1}{2}, \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}, \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}, \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}, \ldots$.

4)Перевірити, чи правильні дані твердження:

а) кожна послідовність є збіжною до деякого числа;

б) існують розбіжні послідовності, тобто такі, що не збігаються ні до якого числа;

в) кожна послідовність має єдину границю;

г) якщо деяка підпослідовність послідовності (z_n) збіжна, то й (z_n) збіжна;

д) кожна збіжна послідовність є стаціонарною;

е) якщо послідовність обмежена, то вона не обов'язково збіжна;

є) частка двох нескінченно малих послідовностей може бути нескінченно малою, нескінченно великою, збіжною або розбіжною послідовністю.

3. Записати n-й член послідовності (a_n), якщо:

1) a_n — сторона правильного n-кутника, вписаного в коло радіуса R;

2) $a_1 = 2$ і $a_n = 3a_{n-1} + 1$, $n = 2, 3, \ldots$;

3) $a_1 = a_2 = 1$ і $a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)$, $n = 1, 2, \ldots$;

4)• $a_1 = 1, a_2 = 2$ і $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, $n = 3, 4, \ldots$.

4. Записати одну з можливих формул для загального члена послідовності, якщо відомо її кілька перших членів:

1) $\frac{1}{5}, \frac{2}{6}, \frac{3}{7}, \frac{4}{8}, \frac{5}{9}$; 2) $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0$;

3) $1 \cdot 2,\ 2 \cdot 2^2,\ 3 \cdot 2^3,\ 4 \cdot 2^4,\ 5 \cdot 2^5$;

4) $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2}, \frac{5}{2^2 \cdot 3^2}, \frac{7}{3^2 \cdot 4^2}, \frac{9}{4^2 \cdot 5^2}$; 5) $\frac{3}{2}, \frac{9}{3}, \frac{27}{4}, \frac{81}{5}, \frac{243}{6}$;

6)• $\frac{6}{2}, \frac{7}{5}, \frac{8}{10}, \frac{9}{17}, \frac{10}{26}$; 7) $1 + \frac{2}{1}, \left(1 + \frac{2}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{2}{3}\right)^3, \left(1 + \frac{2}{4}\right)^4$;

8) $\frac{2}{4}, \frac{5}{7}, \frac{10}{12}, \frac{17}{19}, \frac{26}{28}$; 9) $\frac{1}{1 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 9}, \frac{1}{9 \cdot 13}, \frac{1}{13 \cdot 17}, \frac{1}{17 \cdot 21}$.

5. Довести обмеженість послідовності:

1) $\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)$; 2) $\left(\frac{3n+1}{2n+5}\right)$; 3) $((-1)^n \sin \pi n)$;

4)• $\left(\frac{n}{n+1} + i\frac{n^2+1}{n^2+2}\right)$; 5) $\left(\frac{n}{n^2+1} + i\frac{2n}{3n+2}\right)$.

6. 1) Довести, що послідовність (x_n) зростає, якщо:

а)• $x_n = \frac{n}{n+1}$; б) $x_n = \frac{2n-1}{3n+2}$.

2) Довести, що послідовність (y_n) спадає, якщо:

а) $y_n = \frac{n+1}{n}$; б) $y_n = \frac{2n+1}{6n-5}$.

7. Чи правильні дані твердження:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c \Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0,\ \exists n_0:\ (n > n_0 \Rightarrow |z_n - c| < \varepsilon)$;

2) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c \Leftarrow\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall n_0:\ (n > n_0 \Rightarrow |z_n - c| < \varepsilon)$;

4) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon):\ (n \ge n_0 \Rightarrow |z_n - c| \le \varepsilon)$;

6) якщо $x_n < y_n\ \ \forall n \ge n_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \ne \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \ne \infty$, то $a \le b$;

7) твердження, обернене до попереднього, є правильним?

8. Користуючись означенням границі послідовності, довести, що:

1)• $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1}{3n^2-2} = \dfrac{2}{3}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3}}{n} = 1$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n+1}{4^n} = 1$; 5) • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$.

Для вправи 1) визначити число точок x_n, які лежать поза інтервалом $(0{,}49;\ 0{,}51)$.

9. Визначити, які з даних послідовностей є збіжними, і довести це, користуючись означенням:

1) $\left((-1)^n \dfrac{1}{n}\right)$; 2)• $\left(\dfrac{1-2n}{2n+3}\right)$; 3) $\left(\dfrac{1}{2+\pi}\right)$; 4) $\left(\dfrac{n-1}{n^2+1}\right)$; 5) $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

6) $\left(\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{\pi n}{2}\right)$; 7) $(n(1-(-1)^n))$; 8) $(n-(-1)^n)$; 9) $\left(\dfrac{1}{n-(-1)^n}\right)$;

10) $\left(\dfrac{i^n}{n}\right)$, $i = \sqrt{-1}$; 11) $x_n = \begin{cases} 1 & \text{для } n \text{ парного}, \\ 1-\dfrac{1}{n} & \text{для } n \text{ непарного}. \end{cases}$

10. Для кожної із збіжних послідовностей попередньої вправи визначити число $n_0(\varepsilon)$, якщо $\varepsilon = 0{,}1$; $\varepsilon = 0{,}01$; $\varepsilon = 0{,}001$.

11. (Усно). Відомо, що для $\varepsilon = 0{,}0001$ існує n_0: $(n > n_0 \Rightarrow |y_n - 1| < \varepsilon)$. Чи можна стверджувати, що $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$?

12. (Усно). Послідовність нескінченно мала. Чи можуть члени цієї послідовності бути більшими за мільйон?

13. Довести, що послідовність (x_n) є нескінченно малою:

1) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$; 2) $x_n = \dfrac{1}{5^n}$; 3) $x_n = \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{\pi n}{2}$;

4) $x_n = \dfrac{1-(-1)^n}{n^3}$; 5)• $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$, $a > 0$.

14•. Показати, що послідовність $x_n = (-1)^n \dfrac{2}{3\sqrt[3]{n}+1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ є нескінченно малою. Визначити який-небудь номер n_0, починаючи з якого точки x_n належатимуть інтервалу $(-0{,}1;\ 0{,}1)$.

15. Сформулювати мовою «$\varepsilon - n_0$» означення того, що послідовність (z_n) не збігається до числа c.

16. Довести, що послідовність (x_n) не має границі, якщо:

1)• $x_n = \begin{cases} 1/n, & n - \text{непарне}, \\ n/(n+1), & n - \text{парне}; \end{cases}$ 2) $x_n = \begin{cases} 1 - 1/2^n, & n - \text{непарне}, \\ 1/2^n, & n - \text{парне}. \end{cases}$

17. Користуючись властивостями збіжних послідовностей, обчислити границю (x_n), якщо:

1) $x_n = \dfrac{3^n + (-1)^n}{3^n}$; 2) $x_n = \dfrac{\sin n}{n}$; 3)• $x_n = \dfrac{2^n + \sin\dfrac{\pi n}{3}}{2^n}$;

4) $x_n = \dfrac{n^3 + \cos n}{3n^3}$; 5) $x_n = \dfrac{\sin n! - 5n^2}{4n^2}$.

18. Послідовність $(|z_n|)$ збіжна. Що можна сказати про збіжність послідовності (z_n)?

19. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon): (n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow x_n > \varepsilon)$.

20. Сформулювати і довести твердження, аналогічне попередньому, для випадків $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

21. Довести, що послідовність (x_n) є нескінченно великою, якщо:

1) $x_n = n^2$; 2) $x_n = 2^n$; 3) $x_n = \dfrac{n^3+1}{n^2+1}$; 4) $x_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{n+1}$.

22. Відомо, що комплексна послідовність (z_n) є нескінченно великою. Чи можна стверджувати, що:

1) $(\operatorname{Re} z_n)$ або $(\operatorname{Im} z_n)$ — нескінченно велика послідовність?

2) $|z_n| \to +\infty$, $n \to \infty$; 3) $|z_n|$ — необмежена послідовність?

23. Знайти границі даних послідовностей:

1)• $\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{2\sin^2 n}{n^2}\right)$; 2) $\left(\dfrac{3-5n}{n+4}\right)$; 3) $\left(\dfrac{n(n+2)}{2n^2+3}\right)$; 4) $\left(\dfrac{8-n^2}{5n^2+3n+6}\right)$;

5)• $\left(\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3n^3+3n^2+3}\right)$; 6) $\left(\dfrac{0{,}1n^4+9}{0{,}01n^2(n+2)(n+3)}\right)$;

7) $\left(\dfrac{1}{5n}\sin\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{3n}{6n+4}\right)$; 8) $\left(\dfrac{8n}{n^2+3}\cos\dfrac{n+1}{2n-1}-\dfrac{(-1)^n(n^2+1)}{n^2(n+5)}\right)$;

9) $\left(\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}\right)$; 10) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{n^3+3}+\sqrt[3]{n^3-1}}{2n}\right)$; 11) $\left(\dfrac{(3n-5)^2-3n^2}{n^2+5n-4}\right)$;

12) $\left(\dfrac{(n^4-1)(2n^2+5)}{(n^3+1)(n^3-3)}\right)$; 13) $\left(\dfrac{8n-6}{\sqrt{n^2+1}}\right)$; 14) $\left(\dfrac{n\sqrt{5n+4}}{\sqrt{n^3+2}}\right)$;

15) $\left(\dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{3\sqrt[3]{n^6+1}}\right)$; 16)• $\left(\dfrac{2n}{n^2+7}\right)$; 17) $\left(\dfrac{8n^3+4n+6}{n^5+3n^4+5}\right)$;

18) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{n^3+1}}{n+3}\right)$; 19)• $\left(\dfrac{n^4+1}{n^3}\right)$; 20) $\left(\dfrac{n^7+5n^6+3n}{n^4(n^2-6)}\right)$;

21)• $\left(\dfrac{\sqrt[3]{n^3+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}\right)$; 22) $(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+3})$;

23)• $(\sqrt{3+n}-\sqrt{2+n})$; 24) $(n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}))$;

25) $(\sqrt{8+4n}-3\sqrt{5n-1})$; 26) $(\sqrt[3]{1-n^3}+n)$;

27)• $\left(\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}\right)$; 28) $\left(\dfrac{(n+1)!+n!}{(n+1)!-n!}\right)$; 29) $\left(\dfrac{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}\right)$;

30) $\left(\dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}\right)$, $|a|<1$, $|b|<1$; 31) $\left(\dfrac{1+2+\ldots+n}{2n^2}\right)$;

32) $\left(\dfrac{1+2+\ldots+2^n}{2^n}\right)$; 33) $\left(\dfrac{2}{n^2+1}+\dfrac{4}{n^2+1}+\ldots+\dfrac{2n}{n^2+1}\right)$;

34)• $\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$; 35) $\left(\dfrac{1-2+3-4+5-\ldots-2n}{n}\right)$;

36) $(1+2+3+\ldots+n)$; 37)• $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;

38) $\left(\dfrac{1+a+\ldots+a^n}{b^n}\right)$, $|a|>1$, $|b|>1$; 39) $\left(\dfrac{5^n-1}{5^n+1}\right)$; 40) $\left(\dfrac{3^{\frac{1}{n}}-1}{3^{\frac{1}{n}}+1}\right)$;

41) $\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)$; 42) $\dfrac{1}{n}+i\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n}$, $i=\sqrt{-1}$; 43) $\left(\dfrac{2n^2}{n^2+1}+i\dfrac{\cos n^2}{n}\right)$.

24. Знайти наближені значення n-х членів послідовностей комплексних чисел (z_n) для достатньо великих n, якщо:

1) $z_n=\dfrac{i^n}{n}$; 2)• $z_n=n(\sqrt{n^2+1}-n)+i\dfrac{1-\cos n}{n}$;

3) $z_n=\dfrac{2^n}{1-2^n}+i(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2-4n+3})$;

4) $z_n=\dfrac{1-n-2n^2}{(3-2n)^2}+i$; 5) $z_n=\left(\dfrac{1+i}{1-2i}\right)^n$.

25. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=0$.

26. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$. Довести, що число a є також границею послідовності $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots$.

27. Відомо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a\neq 0$. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$. Що можна сказати про цю границю, якщо $a=0$?

28*. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=c$, де $|c|<+\infty$, або $c=+\infty$, або $c=-\infty$. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n}=c$.

Зразки розв'язування задач

1. 8) Надаючи n послідовно значень 1, 2, 3 і 4, дістаємо $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=3$, $x_4=\frac{1}{4}$.

3. 4) Оскільки $a_1=1$, $a_2=2$ і $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$, $n=3,4,\ldots$, то маємо $a_3=3a_2-2a_1=$ $=4=2^2$, $a_4=3a_3-2a_2=8=2^3$.

Припустимо, що $a_n=2^{n-1}$ для $n\le k$. Тоді $a_{k+1}=3a_k-2a_{k-1}=3\cdot 2^{k-1}-2\cdot 2^{k-2}=2^k$, тобто $a_n=2^{n-1}$ для $n\le k+1$, а тоді за принципом математичної індукції дістаємо $a_n=2^{n-1}$ $\forall n\in \mathbf{N}$.

4. 6) Помічаємо, що чисельники дробів послідовності утворюють послідовність натуральних чисел, починаючи з числа 6, що на 5 одиниць відрізняється від номера члена послідовності, а знаменник кожного члена послідовності більший на 1 від квадрата номера цього члена. Отже, $x_n = \frac{n+5}{n^2+1}$.

Зауваження. За кількома першими членами послідовності не можна однозначно записати формулу загального члена. Так, для послідовності, розглянутої вище, можна покласти

$$x_n = \frac{n+5}{n^2+1+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}.$$

Крім того, загальний член однієї й тієї самої послідовності можна записати по-різному. Наприклад, для послідовності, розглянутої у вправі 1.8), загальний член можна записати одним аналітичним виразом

$$x_n = \frac{n}{2}(1-(-1)^n) + \frac{1}{2n}(1+(-1)^n).$$

5. 4) Маємо послідовність комплексних чисел (z_n), де $\operatorname{Re} z_n = x_n = \frac{n}{n+1}$, $\operatorname{Im} z_n = y_n = \frac{n^2+1}{n^2+2}$. Тоді $|z_n| \le |x_n| + |y_n| \le 1+1 = 2$. Отже, задана послідовність обмежена і всі її члени містяться всередині круга з центром у точці $z = 0$ і радіусом $\sqrt{2}$.

6. 1), а) Запишемо $x_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Тоді $x_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} > 1 - \frac{1}{n+1} = x_n$ і послідовність зростає.

8. 1) Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$ і покажемо, що існує такий номер $n_0(\varepsilon)$, що для всіх членів послідовності з номерами $n > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$\left| \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Для визначення $n_0(\varepsilon)$ досить розв'язати попередню нерівність відносно n:

$$\left| \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{n+1-n}{2n} \right| = \frac{1}{2n} < \varepsilon \Leftrightarrow 2n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon}.$$

Отже, якщо $n > \frac{1}{2\varepsilon}$, то нерівність (1) виконується для будь-якого наперед заданого числа $\varepsilon > 0$. Якщо $\frac{1}{2\varepsilon} \ge 1$, то за n_0 можна взяти цілу частину виразу $\frac{1}{2\varepsilon}$, тобто $n_0 = \left[\frac{1}{2\varepsilon} \right]$. А якщо $0 < \frac{1}{2\varepsilon} < 1$, то за n_0 можна взяти будь-яке натуральне число.

Визначимо тепер число точок x_n, які лежать поза інтервалом (0,49; 0,51), довжина якого $2\varepsilon = 0{,}02$, звідки $\varepsilon = 0{,}01$. Використовуючи геометричний зміст границі послідовності і той факт, що послідовність є спадною, робимо висновок, що поза заданим околом точки 0,5 містяться ті члени послідовності, номери яких визначаються з умови $n \le \left[\frac{1}{2\varepsilon} \right] = 50$, тобто перші 50 членів.

5) Використовуючи формулу бінома Ньютона при $n \ge 2$, дістаємо

$$n = (1+\sqrt[n]{n}-1)^n = (1+(\sqrt[n]{n}-1))^n = 1 + n(\sqrt[n]{n}-1) + \\ + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2 + \ldots + (\sqrt[n]{n}-1)^n > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2. \tag{2}$$

Звідси $\frac{n-1}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2 < 1$, або $|\sqrt[n]{n}-1| < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. Для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ нерівність $|\sqrt[n]{n}-1| < \varepsilon$ виконуватиметься тоді, коли $\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$, тобто для $n > 1+\frac{2}{\varepsilon^2}$. Отже, за означенням границі послідовності маємо $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Цю вправу можна розв'язати й іншим способом, користуючись, наприклад, властивістю 9 про границю проміжної змінної. Так, з нерівності (2) дістаємо

$$n-1 > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2, \text{ де } \alpha_n = \sqrt[n]{n}-1,$$

або

$$1 > \frac{n}{2}\alpha_n^2 > 0 \Rightarrow \frac{n}{2} > \alpha_n^2 > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

9. 2) Загальний член послідовності

$$x_n = \frac{1-2n}{2n+3} = \frac{\frac{1}{n}-2}{2+\frac{3}{n}}$$

(поділили на n чисельник і знаменник). Помічаємо, що для великих n чисельник мало відрізняється від -2, а знаменник — від 2, і тому саме x_n близьке до числа $\frac{-2}{2} = -1$. Отже, можна чекати, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-2n}{2n+3} = -1.$$

Доведемо це за допомогою означення границі послідовності. Треба показати, що $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon)$: $(n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{1-2n}{2n+3}-(-1)\right| < \varepsilon)$. Візьмемо $\forall \varepsilon > 0$ і розглянемо $\left|\frac{1-2n}{2n+3}-(-1)\right| = \left|\frac{1-2n+2n+3}{2n+3}\right| = \frac{4}{2n+3} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon}-\frac{3}{2}$. Звідси випливає, що можна взяти $n_0(\varepsilon) = \frac{2}{\varepsilon}-\frac{3}{2}$ (що не обов'язково є натуральним числом). Отже, $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_0(\varepsilon) = \frac{2}{\varepsilon}-\frac{3}{2}$: $\left(n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{1-2n}{2n+3}-(-1)\right| < \varepsilon\right)$. Цим доведено рівність $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2n}{2n+3} = -1$.

13. 5) Розглянемо натуральне число $k > 2a$. Тоді для $n > k$

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{n} = \left(\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{k}\right)\left(\frac{a}{k+1}\cdots\frac{a}{n}\right) < a^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = (2a)^k\,\frac{1}{2^n}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ (див. вправу 13.2)), то для досить великих n маємо $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{(2a)^k}$, а отже, $\frac{a^n}{n!} < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

14. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і оцінимо $|x_n|$. Маємо

$$|x_n| = \frac{2}{3\sqrt[3]{n}+1} < \frac{2}{3\sqrt[3]{n}} < \frac{2}{2\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Тому $|x_n| < \varepsilon$, якщо $n > \frac{1}{\varepsilon^3}$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, тобто задана послідовність є нескінченно малою.

Члени послідовності (x_n) належатимуть інтервалу (–0,1; 0,1), якщо $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{1}{10}$, тобто при $n > 1000$. Однак можна дістати точніший результат, розв'язавши нерівність

$$|x_n| = \frac{2}{3\sqrt[3]{n}+1} < \frac{1}{10},$$

яка справедлива для $n > \left(\frac{19}{3}\right)^3 < 255$. Отже, за номер $n_0(\varepsilon)$ можна взяти число 255, значно менше за 1000.

16. 1) Помічаємо, що члени послідовності з непарними номерами збігаються до числа 0, а з парними — до 1. Коли б задана послідовність мала границю c, то й будь-яка її підпослідовність мала б ту саму границю, а це не так. Звідси випливає, що задана послідовність не має границі.

17. 3) Запишемо

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^n}\sin\frac{\pi n}{3} = 1 + \alpha_n,$$

де $\alpha_n = \frac{1}{2^n}\sin\frac{\pi n}{3}$ – нескінченно мала послідовність (як добуток обмеженої послідовності $\left(\sin\frac{\pi n}{3}\right)$ на нескінченно малу послідовність $\left(\frac{1}{2^n}\right)$). Користуючись тепер властивістю 4 про зв'язок збіжної послідовності з нескінченно малою, дістаємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

23. 1) Скористаємось теоремою про границю суми двох послідовностей (властивість 7). Неважко помітити, що границя першого доданка дорівнює 0, а другий доданок є добутком обмеженої послідовності $(2\sin^2 n)$ на нескінченно малу послідовність $(1/n^2)$, тому його границя також дорівнює 0. Отже, за властивістю 7 задана послідовність є нескінченно малою.

5) У даному випадку чисельник і знаменник дробу мають нескінченні границі, тому користуватись теоремою про границю частки не можна. Перетворимо дріб, поділивши чисельник і знаменник на n^3 (найвищий степінь n). Дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3n^3+3n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}{3+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^3}}.$$

Оскільки при $n\to\infty$ маємо $\frac{1}{n}\to 0$, $\frac{2}{n}\to 0$, $\frac{3}{n}\to 0$, $\frac{3}{n^3}\to 0$, то, застосовуючи теорему про границю суми і добутку, помічаємо, що границя чисельника дорівнює 1, а знаменника 3. Тоді за теоремою про границю частки маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3n^3+3n^2+3} = \frac{1}{3}.$$

16) Поділимо чисельник і знаменник дробу на n^2, а потім скористаємось теоремою про границю суми і частки. Дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+7} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{7}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

19) Аналогічно попередньому маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+1}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n}}.$$

Оскільки $1+\frac{1}{n^4}\to 1$, якщо $n\to\infty$, а знаменник дробу є нескінченно малою послідовністю, то задана послідовність є нескінченно великою, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+1}{n^3}=\infty.$$

21) Винесемо старші степені чисельника і знаменника за дужки. Дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)}{n^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[4]{\frac{1}{n}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{n}\,\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[4]{\frac{1}{n}}}=+\infty.$$

23) У даному випадку маємо різницю двох нескінченно великих послідовностей. Позбавимось ірраціональності в чисельнику, вважаючи, що знаменник дорівнює 1, і застосуємо теорему про зв'язок нескінченно малої і нескінченно великої послідовностей. Матимемо

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3+n}-\sqrt{2+n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3+n}+\sqrt{2+n}}=0.$$

27) Оскільки $(n+1)!=n!(n+1)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

34) Враховуючи, що $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, запишемо

$$x_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

37) Позначимо $y_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. Тоді $y_n>\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=x_n$. Крім того, $y_n<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=z_n$. Отже, маємо $x_n<y_n<z_n$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=1$, то за властивістю 9 дістаємо $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1$.

24. 2) Скористаємось суттю означення границі послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=c\Leftrightarrow z_n\approx c$ для достатньо великих n. Маємо

$$\operatorname{Re}z_n=n(\sqrt{n^2+1}-n)=\frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}\to\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Im} z_n = \frac{1}{n}(1-\cos n) \to 0,\ n\to\infty,$$

бо $\left(\frac{1}{n}\right)$ — нескінченно мала, а $(1-\cos n)$ — обмежена послідовності. За властивістю 11 маємо $z_n \to \frac{1}{2} + i\cdot 0 = \frac{1}{2}$, $n\to\infty$, а тому $z_n \approx \frac{1}{2}$ для достатньо великих n.

§ 3.2. Границя монотонної послідовності

Послідовність з дійсними членами (x_n) називають *квазімонотонною*, якщо існує число $k_0 > 0$ таке, що послідовність (x_{n+k_0}) є монотонною. Таку послідовність називають також монотонною, починаючи з деякого номера. Аналогічно можна означити квазізростаючу, квазіспадну, квазінезростаючу і квазінеспадну послідовності. Зрозуміло, що кожна монотонна послідовність є квазімонотонною.

Теорема (про існування границі квазімонотонної послідовності). *Будь-яка квазімонотонна послідовність має границю, яка:*

а) *є скінченною, якщо послідовність обмежена;*

б) *дорівнює $+\infty$, якщо послідовність необмежена зверху;*

в) *дорівнює $-\infty$, якщо послідовність необмежена знизу.*

Послідовність $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ $\forall n\in \mathbf{N}$ є квазімонотонною й обмеженою для довільного $x\in\mathbf{R}$. Тому існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Цю границю позначають через e^x або $\exp x$. Зокрема, $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \neq \infty$.

Отже, $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x,\quad \text{а}\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}. \tag{1}$$

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) послідовність (x_n) квазінезростаюча тоді й тільки тоді, коли $\exists k_0$: $k_0 < n < n+1 \Rightarrow x_n \le x_{n+1}$;

2) послідовність (x_n) квазімонотонна тоді й тільки тоді, коли (x_n) або квазізростаюча, або квазіспадна, або квазінезростаюча, або квазінеспадна;

3) якщо послідовність (x_n) квазімонотонна, то вона є і монотонною;

4) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

5)• існує квазімонотонна послідовність, яка не обмежена ні зверху, ні знизу?

2. Для даних послідовностей визначити, які з них є монотонними чи квазімонотонними:

1) $\left(\dfrac{n^2}{1+n^2}\right)$; 2)• $\left(\dfrac{5^n}{n!}\right)$; 3) $\left(\cos\dfrac{\pi n}{2}\right)$; 4) $\left(\dfrac{2^n}{100n^2}\right)$; 5) $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$;

6) $\left(\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n\right)$; 7) $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)$, $a>0$; 8) $\left(\dfrac{a^n}{n^\alpha}\right)$, $a>0$, $\alpha>0$;

9)• (x_n), де $x_n=\dfrac{n!}{n^n}$; 10) (a_n), де $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$;

11)• (x_n), де $x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\ \text{радикалів}}$;

12) (x_n), де $x_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}$;

13) (x_n), де $x_n=\dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\ldots\dfrac{n+9}{2n-1}$;

14) $\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}\right)$; 15) $\left((-1)^n\left(2+\dfrac{3}{n}\right)\right)$.

3. Визначити, які послідовності з попередньої вправи мають границю, та знайти її.

4. Довести збіжність послідовності (x_n), якщо:

1) $x_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}$; 2) $x_n=\dfrac{1}{2+1}+\dfrac{1}{2^2+1}+\ldots+\dfrac{1}{2^n+1}$;

3) $x_n=\dfrac{1}{5+1}+\dfrac{1}{5^2+2}+\ldots+\dfrac{1}{5^n+n}$;

4) $x_n=1+\dfrac{1}{2\cdot 2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^2}+\dfrac{1}{4\cdot 2^3}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot 2^{n-1}}$;

5)• $x_n=\dfrac{x_{n-1}}{x_{n-1}+a}$, де $a\geq 1$ і $x_0\geq 0$ — фіксоване число;

6) $x_{n+1}=\dfrac{a+x_n^2}{2x_n}$, $a>0$, $x_1>\sqrt{a}$. Показати, що $x_n\to\sqrt{a}$, $n\to\infty$. Обчислити $\sqrt{5}$, взявши $x_1=3$;

7) $x_{n+1}=\dfrac{a+(p-1)x_n^p}{px_n^{p-1}}$, $a>0$, $x_1>\sqrt[p]{a}$. Показати, що $x_n\to\sqrt[p]{a}$, $n\to\infty$. Обчислити $\sqrt[3]{10}$, взявши $x_1=4$.

5. Обчислити дані границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, де $a_1=0,\ a_2=1$ і $a_{n+1}=\dfrac{a_n+a_{n-1}}{2},\ n>1$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, де $x_1=\dfrac{1}{2},\ x_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{x_{n-1}^2}{2},\ n>1$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, де $b_n=\dfrac{b_{n-1}}{3-b_{n-1}}$ і $1<b_1<2$.

6. Довести, що послідовність

$$x_n=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}_{n\ \text{радикалів}},\quad a>0,$$

має своєю границею число $c=\dfrac{\sqrt{4a+1}+1}{2}$.

7. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, якщо:

1) $x_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $x_n=\lg 2+\lg\dfrac{3}{2}+\ldots+\lg\dfrac{n+1}{n}$.

8. Довести, що $\left(1+\dfrac{1}{p_n}\right)^{p_n}\to \mathrm{e},\ n\to\infty$, якщо: а) $p_n\to\infty,\ n\to\infty$, $|p_n|>1$; б) $p_n\to-\infty,\ n\to\infty,\ |p_n|>1$.

9*. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}$. Користуючись цією рівністю, довести ірраціональність числа e.

10. Довести дані нерівності:

1) $\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\mathrm{e}\left(\dfrac{n}{2}\right)^n\quad \forall n\in\mathbf{N}$; 2) $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}\quad\forall n\in\mathbf{N}$;

3)* $P_1^{p_1}P_2^{p_2}\ldots P_n^{p_n}\ge\left(\dfrac{P_n}{\mathrm{e}}\right)^{P_n}$, де $p_k>0\ \ \forall k\in\mathbf{N}$, а $P_n=\sum\limits_{k=1}^{n}p_k\to\infty$, $n\to\infty$.

11•. Якщо дійсна послідовність (x_n) збігається до числа c, то кожна її монотонна підпослідовність також збігається до числа c. Чи справедливе обернене твердження?

12. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{5n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{1+n}\right)^{n}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+4}\right)^{2n+3}$;

4)• $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{3n-1}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2}{n^2-4}\right)^{\frac{3}{2}n^2}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+3}{2n^2+5}\right)^{7n^2-4}$.

13. 1) Нехай a — початковий внесок у банк, p — річний процент. Визначити величину вкладу через 1 рік і через 5 років, якщо $a=2000$ грн, а $p=10\ \%$. Довести, що при неперервному нарахуванні процентів величину A_t обчислюють за формулою $A_t = a\,e^{\frac{pt}{100}}$, де t — час, роки.

2) Який початковий внесок повинні зробити батьки на рахунок своєї дитини в день її народження для того, щоб у день її 18-річчя вклад становив 10 000 ум. од.? Відомо, що банк виплачує по цьому рахунку $8\ \%$ річних, які нараховуються кожні півроку.

3) Вкладник зробив перший внесок у розмірі 1000 грн на рахунок, по якому виплачують 12 % річних. Визначити величину вкладу через 2 роки. Якою була б величина вкладу через 2 роки при неперервному нарахуванні процентів?

Зразки розв'язування задач

1. 5) Нехай послідовність (x_n) квазімонотонна. Припустимо, що вона квазінеспадна, тобто $\exists k_0\in\mathbf{N}:\ k_0\le n<n+1\Rightarrow x_n\le x_{n+1}$. Звідси маємо $x_n\ge\min\{x_k:\ 1\le k\le k_0\}$, тобто (x_n) — обмежена знизу послідовність. Аналогічно можна показати, що квазінезростаюча послідовність обмежена зверху, а тому твердження неправильне.

2. 2) Якщо $a_n=\dfrac{5^n}{n!}$, $n\in\mathbf{N}$, то $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{5^{n+1}\cdot n!}{5^n(n+1)!}=\dfrac{5}{n+1}<1\Leftrightarrow n>4$. Отже, (a_n) — квазіспадна послідовність (вона спадає, починаючи з номера $n=4$).

У вправі 2.2) показано, що задана послідовність квазіспадна, а отже, обмежена зверху. Оскільки $a_n=\dfrac{5^n}{n!}>0\ \ \forall n\in\mathbf{N}$, то послідовність обмежена і знизу, а тому за теоремою про границю квазімонотонної послідовності існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n}{n!}=c$. Щоб знайти c, скористаємось рівністю $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{5}{n+1}$, звідки $a_{n+1}=\dfrac{5}{n+1}a_n$. Переходячи до границі в останній рівності, дістаємо

$$c=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}a_n=0\cdot c=0.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n}{n!}=0$.

2. 9) Послідовність (x_n) монотонно спадна. Справді,

$$x_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}=x_n\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{x_n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Оскільки $\frac{n^n}{(n+1)^n} < 1$, то $x_{n+1} < x_n$, тобто послідовність монотонно спадає. Вона є обмеженою знизу, бо $x_n > 0$. Отже, існує $\lim_{n\to\infty} x_n = c \ge 0$. Знайдемо шукане число c. Оскільки $x_{n+1} = \frac{x_n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, то, враховуючи (1) та властивості границь, маємо $c = \frac{c}{e} \Rightarrow c = 0$.

11) Неважко перевірити, що $x_n < x_{n+1}$, тобто задана послідовність є зростаючою (покажіть це). Залишається довести, що вона обмежена зверху.

Маємо $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$, $n \ge 2$. Оскільки $x_1 = \sqrt{2} < 2$, то $x_2 = \sqrt{2 + x_1} < \sqrt{2+2} = 2$. Припустимо, що $x_{n-1} < 2$. Тоді $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}} < \sqrt{2+2} = 2$. Звідси за принципом математичної індукції випливає, що $x_n < 2 \quad \forall n \in \mathbf{N}$, а отже, задана послідовність обмежена. Оскільки вона і монотонна, то має границю. Обчислимо її. Нехай $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Підносячи до квадрата рівність $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$ і переходячи до границі, дістаємо $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} (2 + x_{n-1}) = 2 + c$, звідки $c^2 = 2 + c$, тобто $c^2 - c - 2 = 0$. Корені цього рівняння $c_1 = -1$ і $c_2 = 2$. Перше значення не задовольняє умову задачі, бо $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$, тому $\lim_{n\to\infty} x_n = c_2 = 2$.

4. 5) Покажемо, що ця послідовність монотонна й обмежена. Оскільки $x_n \le x_{n-1} \quad \forall n \in \mathbf{N}$, то задана послідовність є незростаючою. За умовою всі члени послідовності є невід'ємними числами, тому послідовність обмежена знизу. Отже, задана послідовність є монотонною й обмеженою, а тому має границю, тобто є збіжною.

11. Припустимо, що (x_n) — обмежена розбіжна послідовність. Тоді послідовності $\alpha_n = \inf\{x_k : k \ge n\}$ і $\beta_n = \sup\{x_k : k \ge n\}$ є монотонними і, отже, існують границі $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ і $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$. Оскільки $\alpha_n \le x_n \le \beta_n \quad \forall n$, то $\alpha < \beta$. За властивістю інфімуму маємо $\forall n \in \mathbf{N} \;\; \exists\, k_n \ge n: \;\; \alpha_n \le x_{k_n} < \alpha_n + \frac{1}{n}$. Звідси за властивістю про границю проміжної змінної дістаємо, що $x_{k_n} \to \alpha$, $n \to \infty$. Для послідовності (x_{k_n}) можливі три випадки: 1) існує нескінченна множина $x_{k_n} = \alpha$; 2) існує нескінченна множина $x_{k_n} < \alpha$; 3) існує нескінченна множина $x_{k_n} > \alpha$. У першому випадку всі члени $x_{k_n} = \alpha$ утворюють монотонну підпослідовність $(x_{k_{n_i}})$ послідовності (x_n) і $x_{k_{n_i}} \to \alpha$, $i \to \infty$. Нехай має місце другий випадок. Тоді існує $x_{k_{n_1}} < \alpha$. Оскільки $x_{k_n} \to \alpha$, $n \to \infty$, то $\exists x_{k_{n_2}}: \; x_{k_{n_1}} < x_{k_{n_2}} < \alpha$, де $n_2 > n_1$. Припустимо, що вже знайдено $x_{k_{n_i}}: \; x_{k_{n_{i-1}}} < x_{k_{n_i}} < \alpha$. Оскільки $x_{k_n} \to \alpha$ і має місце випадок 2), то $\exists x_{k_{n_{i+1}}}: \; x_{k_{n_i}} < x_{k_{n_{i+1}}} < \alpha$. За принципом математичної індукції можна стверджувати існування монотонної підпослідовності $(x_{k_{n_i}})$ послідовності (x_n), яка збігається до α. Аналогічні міркування проводимо і для випадку 3) і показуємо існування монотонної підпослідовності ($x_{k_{n_j}}$), яка збігається до α. Так само показуємо існування монотонної підпослідовності $(x_{k_{n_j}})$ послідовності (x_n), яка збігається до числа β. Отже, обмежена розбіжна послідовність має дві монотонні підпослідовності, які збігаються до різних чисел

α і β. Звідси випливає, що дійсна послідовність (x_n) збіжна тоді й тільки тоді, коли кожна її монотонна підпослідовність збігається до одного й того самого числа.

12. 4) Поділивши чисельник і знаменник виразу, що стоїть у дужках, на n і скориставшись властивістю степеня, дістаємо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3}}{\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{6}}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{-1}.$$

Користуючись теоремою про границю добутку, частки і формулою (1), маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n-1}=\frac{e^3}{e^6}\cdot 1=e^{-3}.$$

§ 3.3. Загальне поняття границі функції в точці та його окремі випадки

Точку z_0, скінченну або нескінченно віддалену, називають *граничною точкою множини E*, якщо у будь-який проколений окіл $O^*(z_0)$ цієї точки попадає нескінченна множина точок з множини E.

Критерій граничної точки: z_0 — гранична точка E тоді й тільки тоді, коли $\exists(z_n):\ z_n\neq z_0\ \ \forall n\in\mathbf{N}$ і $z_n\to z_0,\ n\to\infty$.

Загальне означення границі функції в точці (мовою «ε – δ» або за Коші). Нехай числова функція f визначена на множині E, для якої точка z_0 (скінченна або нескінченно віддалена) є граничною точкою. Число c, скінченне або нескінченно віддалене, називають *границею функції f у точці z_0 відносно множини E* і записують $c=\lim\limits_{E\ni z\to z_0} f(z)$, якщо

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)>0:\ (z\in O_\delta^*(z_0)\Rightarrow f(z)\in O_\varepsilon(c)\ \ \forall z\in E).$$

Суть цього поняття можна виразити так: $c=\lim\limits_{E\ni z\to z_0} f(z)\Leftrightarrow f(z)\approx c$ для всіх $z\in E$, які досить близькі до z_0, але відмінні від нього. При цьому похибку наближення $f(z)\approx c$ можна зробити як завгодно малою, якщо брати $z\in E$ досить близькими до z_0, проте $z\neq z_0$.

Критерій існування границі функції в точці відносно множини:

$$c=\lim_{E\ni z\to z_0} f(z)\Leftrightarrow (f(z_n)\to c,\ \ n\to\infty)(\forall(z_n):\ E\ni z_n\neq z_0,\, z_n\to z_0).$$

Цей критерій можна вважати за означення *границі функції мовою послідовностей (за Гейне).*

Якщо $E = O^*(z_0)$ — проколений окіл точки z_0, причому z_0 і c — скінченні числа, то із загального означення дістаємо означення скінченної границі функції у скінченній точці:

$$c = \lim_{z \to z_0} f(z) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0: \ (0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - c| < \varepsilon).$$

Якщо $E = (x_0; x_0 + \alpha)$, то із загального означення дістаємо означення *границі функції справа у точці* x_0:

$$c = \lim_{x \to x_0+} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon): \ (0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(c)).$$

При цьому користуємось позначенням $c = f(x_0+)$.

Якщо $E = (x_0 - \alpha; x_0)$, то із загального означення дістаємо означення *границі функції зліва у точці* x_0:

$$c = \lim_{x \to x_0-} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon): \ (0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(c)).$$

При цьому користуємося позначенням $c = f(x_0-)$.

Границі справа і зліва називають *односторонніми*.

Зв'язок між границею та односторонніми границями задається співвідношенням

$$c = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow f(x_0+) = f(x_0-) = c.$$

Якщо $z_0 = x_0$ та дорівнює або $+\infty$, або $-\infty$, або ∞ і $E = O^*(x_0)$, то із загального означення дістаємо означення границі функції на нескінченності:

$$c = \lim_{x \to +\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0: \ (x > \delta \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(c));$$

$$c = \lim_{x \to -\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0: \ (x < -\delta \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(c));$$

$$c = \lim_{z \to \infty} f(z) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0: \ (|z| > \delta \Rightarrow f(z) \in O_\varepsilon(c)).$$

Якщо $E = \mathbf{N}$, $z_0 = +\infty$, то із загального означення дістаємо означення *границі послідовності:*

$$c = \lim_{n \to \infty} z_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0(\varepsilon): \ (n > n_0 \Rightarrow z_n \in O_\varepsilon(c)).$$

У наведених вище означеннях число c — скінченне або нескінченно велике. Якщо c конкретизувати, то дістаємо інші окремі випадки: означення нескінченних границь зліва і справа, означення нескінченної границі на нескінченності тощо. Наприклад,

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta(\varepsilon) > 0: \ (|z| > \delta(\varepsilon) \ \Rightarrow f(z) > \varepsilon).$$

Якщо $\lim\limits_{E\ni z\to z_0} f(z) = 0$, то функцію f називають нескінченно малою у точці z_0 відносно множини E. Якщо $\lim\limits_{E\ni z\to z_0} f(z) = \infty$, то функцію f називають нескінченно великою у точці z_0 відносно множини E.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) z_0 — гранична точка E тоді й тільки тоді, коли $\exists\ O(z_0):\ \ E\bigcap O(z_0)$ — нескінченна множина;

2)• z_0 — гранична точка E тоді й тільки тоді, коли $E\bigcap O^*(z_0) \neq \varnothing \quad \forall O^*(z_0)$;

3) z_0 — гранична точка E, якщо $\exists(z_n):\ z_n \in E$ і $z_n \to z_0,\ n\to\infty$;

4) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

5) якщо z_0 — гранична точка E, то $z_0 \in E$;

6) твердження, обернене до попереднього, є правильним?

2. Знайти граничні точки даних множин:

1) $E = (0; 1)$; 2) $E = \left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots\right\}$;

3) $E = \mathbf{N}$; 4) $E = \mathbf{Z}$; 5)• $E = \mathbf{Q}$;

6) $E = (x_0; +\infty)$; 7) $E = (-\infty; x_0)$; 8) $E = \mathbf{R}$;

9) $E = \{z:\ |z - c| < r\}$, де $r > 0$ і $c \in \mathbf{Z}$ — задані числа, а z — довільне комплексне число;

10) $E = \{z:\ \arg z = \alpha\}$; 11) $E = \{z:\ a < \operatorname{Re} z < b\}$.

3. Користуючись означенням границі функції за Коші (мовою «$\varepsilon - \delta$»), довести, що:

1)• $\lim\limits_{x\to 1}(2x + 5) = 7$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+5}{2x-8} = \dfrac{3}{2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sqrt{x}-1} = -2$;

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{(x+1)^2} = +\infty$; 5) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty,\ a > 1$;

6)• $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x = +\infty,\ \ a > 1$; 7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$;

9) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

4. Користуючись означенням границі за Гейне (мовою послідовностей), довести, що:

1) $\lim\limits_{x\to2}(5x-8)=2$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x+3}{4x+8}=\dfrac{5}{12}$;

3)• $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$; 4) $\lim\limits_{x\to6}\sqrt{x+3}=3$; 5) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{5}{2}$.

5. Довести, що дані функції не мають границь у вказаних точках:

1) $y=\cos\left(x\cdot\dfrac{1}{x-1}\right)$, $x_0=1$; 2)• $y=\sin x$, $x_0=\infty$; 3) $y=3^{\frac{1}{x}}$, $x_0=0$.

6. Користуючись суттю поняття границі функції в точці, визначити, чи мають дані функції границі у вказаних точках відносно заданих множин. Якщо відповідь позитивна, то довести потрібну рівність вигляду $c=\lim\limits_{E\ni z\to z_0} f(z)$, користуючись означенням (загальним або якимось окремим випадком):

1) $f(z)=2z+1$, $z_0=1$, $E=\mathbf{R}$; 2) $f(z)=z^2+1$, $z_0=i$, $E=\mathbf{C}$;

3) $f(x)=[x]$, $x_0=2$, $E=(1;2)$; 4) $f(x)=[x]$, $x_0=2$, $E=(2;3)$;

5) $f(x)=[x]$, $x_0=2$, $E=\mathbf{R}$;

6) • $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{якщо } 0\le x\le 1,\\ x^2+1, & \text{якщо } 1<x\le 2,\end{cases}$ $x_0=1$, $E=[0;2]$;

7) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $x_0=+\infty$, $-\infty$, ∞, $E=\mathbf{R}\setminus\{1\}$;

8) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $x_0=1$, $E=(1;+\infty)$ або $E=(-\infty;1)$;

9) $f(x)=2x+1$, $x_0=+\infty$, $-\infty$, ∞, $E=\mathbf{R}$;

10) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$, $x_0=0$, $E=\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

7. Довести, що число c не є границею функції f у точці x_0 відносно множини E, якщо $\exists\ \varepsilon>0:\ (\forall\delta>0\ \exists x\in O^*_\delta(x_0)\cap E:\ f(x)\notin O_\varepsilon(c))$. Чи правильне обернене твердження?

8. Довести, що функція f не має границі у точці z_0 відносно множини E, якщо $\exists(z_n^*)$ і (z_n^{**}): $z_n^*\to z_0$, $z_n^{**}\to z_0$, $n\to\infty$, $z_n^*, z_n^{**}\in E$ та існують $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n^*)$ і $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n^{**})$, які не рівні між собою.

9. Сформулювати і довести твердження, обернене до твердження 8.

10. Сформулювати і довести твердження 7 для границь справа і зліва.

11. Довести, що $\forall \alpha \in [-1; 1]\ \exists (x_n):\ x_n \to 0,\ n \to \infty,$ і $\sin\dfrac{1}{x_n} \to \alpha,\ \ n \to \infty.$

12. Визначити, які з даних функцій є нескінченно малими чи нескінченно великими у вказаних точках, і довести це мовою «ε – δ»:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x-1)^2},\ \ x_0 = -1,\ \ x_0 = \infty,\ \ x_0 = 1,\ \ E = \mathbf{R} \setminus \{1\};$

2) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x+1},\ \ x_0 = -1,\ \ x_0 = \infty,\ \ E = \mathbf{R} \setminus \{-1\};$

3)• $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x},\ \ x_0 = 0,\ \ x_0 = \infty,\ \ E$ — область визначення функції f;

4) $f(x) = x\cos\dfrac{1}{x},\ \ x_0 = 0,\ \ x_0 = \infty,\ \ E = \mathbf{R} \setminus \{0\};$

5) $f(x) = |x|,\ \ x_0 = 0,\ \ x_0 = \infty,\ \ E = \mathbf{R}.$

13. Довести, що функція f нескінченно велика у точці z_0 відносно множини E, якщо функція $1/f$ нескінченно мала у точці z_0 відносно E. Чи правильне обернене твердження?

Зразки розв'язування задач

1. 2) Нехай z_0 — гранична точка множини E. Тоді $O(z_0) \bigcap E$ — нескінченна множина $\forall O(z_0)$. Тому $O^*(z_0) \bigcap E$ — також нескінченна множина, а отже, $O^*(z_0) \bigcap E \neq \varnothing$, і необхідність доведено. Припустимо, що $E \bigcap O^*(z_0) \neq \varnothing \quad \forall O^*(z_0)$. Тоді якщо припустити, що в деякому околі точки z_0 міститься тільки скінченна кількість точок з E, то і в проколеному околі точки z_0 буде скінченна кількість точок з E. Нехай це будуть точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Позначимо $\delta = \min\limits_{1 \le k \le n} |z_k - z_0|$. Тоді $O^*_\delta(z_0) = \{z:\ 0 < |z - z_0| < \delta\}$ не містить жодної точки множини E, що неможливо. Отже, будь-який окіл точки z_0 містить нескінченну множину точок множини E, тобто z_0 — гранична точка E. Таким чином, задане твердження правильне.

2. 5) Оскільки довільний окіл будь-якого дійсного числа містить нескінченну множину раціональних чисел, то кожне дійсне число є граничною точкою множини $\mathbf{Q}$ раціональних чисел.

3. 1) Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$. Треба довести, що знайдеться таке $\delta > 0$, що з нерівності

$$0 < |x - 1| < \delta \tag{1}$$

випливає нерівність

$$|(2x + 5) - 7| < \varepsilon\ . \tag{2}$$

Ліву частину останньої нерівності запишемо у вигляді $|2x+5-7|=|2x-2|=2|x-1|$. Тоді маємо $2|x-1|<\varepsilon$, або $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$. Поклавши $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, дістанемо, що з нерівності (1) випливає нерівність (2), що й треба було довести.

6) Треба довести, що $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0$ таке, що із нерівності $x>\delta$ випливає нерівність $\log_a x>\varepsilon$, тобто $x>a^{\varepsilon}$. Якщо покласти $a^{\varepsilon}=\delta$, то для $x>\delta$ справедлива нерівність $\log_a x>\varepsilon$. Отже, згідно з означенням нескінченної границі функції на $+\infty$ дістаємо, що для $a>1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$.

4. 3) Задана функція визначена у проколеному околі точки $x=2$. Виберемо довільну послідовність (x_n) таку, що $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$ і $x_n\neq 2 \quad \forall n\in\mathbf{N}$. Запишемо відповідну послідовність значень функції

$$f(x_n)=\frac{x_n^2-4}{x_n-2},\ \ n\in\mathbf{N},$$

і обчислимо границю цієї послідовності. Виконавши тотожні перетворення і скориставшись властивостями границь послідовностей, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-4}{x_n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n-2)(x_n+2)}{x_n-2}=\lim_{n\to\infty}(x_n+2)=2+2=4.$$

5. 2) Виберемо дві послідовності $x_n'=\pi n$ і $x_n''=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in\mathbf{N}$, для яких $\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}x_n''=\infty$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\pi n=0$, а $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n'')=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=1$, тобто послідовності $f(x_n')$ і $f(x_n'')$ мають різні границі, то за критерієм існування границі функція $y=\sin x$ не має границі у нескінченно віддаленій точці.

6. 6) Якщо x близьке до 1, але менше за 1, тобто $1>x\approx 1$, то $f(x)=1+x\approx 2$. Якщо $1<x\approx 1$, то $f(x)=x^2+1\approx 2$. Отже, маємо гіпотезу: $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$. Для доведення цієї рівності покажемо, що

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta(\varepsilon)>0:\ (0<|x-1|<\delta\Rightarrow|f(x)-2|<\varepsilon).$$

Візьмемо довільне фіксоване $\varepsilon>0$ і розглянемо $|f(x)-2|$: $|f(x)-2|=|x+1-2|=|x-1|<\varepsilon$, якщо $0\le x\le 1$, $|f(x)-2|=|x^2+1-2|=|x^2-1|=|x-1||x+1|\le 3|x-1|<\varepsilon$, якщо $1<x\le 2$. Якщо $|x-1|<\frac{\varepsilon}{3}$, то $|f(x)-2|<\varepsilon \quad \forall x\in[0;2]$, а отже, можна покласти $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{3}$, і тоді $\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{3}$: $(0<|x-1|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-2|<\varepsilon)$, тобто $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$.

12. 3) Знайдемо область визначення функції f:

$$D(f)=\{x:\ x^2+x\ge 0\ \text{ і }\ x^2-x\ge 0\}=\{x:\ x(x+1)\ge 0\ \text{ і }\ x(x-1)\ge 0\}=$$
$$=((-\infty;-1]\cup[0;+\infty))\cap((-\infty;0]\cup[1;+\infty))=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)\cup\{0\}.$$

Звідси випливає, що точка $x=0$ не є граничною для $D(f)$, а отже, функція f не може бути у цій точці ні нескінченно малою, ні нескінченно великою. Для дослідження точки $x_0=\infty$ дещо перетворимо $f(x)$:

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\frac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}}=\frac{2x}{|x|}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}.$$

Звідси дістаємо, що $f(x)\to 1$, $x\to+\infty$, $f(x)\to -1$, $x\to-\infty$, тобто функція f не є у точці $x_0=\infty$ ні нескінченно великою, ні нескінченно малою.

§ 3.4. Основні властивості границь функцій. Деякі важливі границі

Оскільки поняття границі функції в точці можна ввести через поняття границі послідовності, то властивості границь функцій аналогічні властивостям границь послідовностей.

1. *Єдиність границі:* кожна функція f може мати не більше ніж одну границю у точці z_0 відносно множини E.

2. *Границя відносно підмножини:* якщо $c=\lim\limits_{E\ni z\to z_0} f(z)$, то $\lim\limits_{E_1\ni z\to z_0} f(z)=c$ $\forall E_1\subset E$: z_0 — гранична точка E_1.

3. *Границя сталої функції:* якщо $f(z)=c$ $\forall z\in O^*(z_0)\bigcap E$, то $\lim\limits_{E\ni z\to z_0} f(z)=c$.

4. *Зв'язок границі функції з нескінченно малою функцією:* $\lim\limits_{E\ni z\to z_0} f(z)=c\neq\neq\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{E\ni z\to z_0}(f(z)-c)=0$.

5. *Обмеженість функції, що має границю:* якщо $\lim\limits_{E\ni z\to z_0} f(z)=c\neq\infty$, то $\exists O^*(z_0)$: f обмежена на $E\bigcap O^*(z_0)$. Якщо $\lim\limits_{E\ni z\to z_0} f(z)=c\neq 0$, то $\exists O(z_0)$: $1/f$ обмежена на $E\bigcap O^*(z_0)$.

6. *Добуток нескінченно малої функції на обмежену:* якщо f — нескінченно мала функція в точці z_0 відносно множини E, а φ — обмежена функція на E, то $f\varphi$ — нескінченно мала функція в точці z_0 відносно множини E.

7. *Границя суми, різниці, добутку та частки:* нехай $\lim\limits_{E\ni z\to z_0} f_k(z)=c_k\neq\neq\infty, k=1,2$. Тоді $\lim\limits_{E\ni z\to z_0}(f_1(z)\pm f_2(z))=c_1\pm c_2$, $\lim\limits_{E\ni z\to z_0} f_1(z)f_2(z)==c_1c_2$ і $\lim\limits_{E\ni z\to z_0} f_1(z)/f_2(z)=c_1/c_2$, $c_2\neq 0$.

Зокрема, сума, різниця і добуток двох нескінченно малих функцій у точці z_0 відносно множини E є нескінченно малими функціями у точці z_0 відносно множини E.

8. *Перехід до границь у нерівностях:* якщо $\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f_k(x)=c_k$, $k = 1, 2$, і $f_1(x)\le f_2(x)$ $\forall x\in O^*(x_0)\bigcap E$, то $c_1\le c_2$.

9. *Границя проміжної функції:* якщо $f(x)\le\varphi(x)\le\psi(x)$ $\forall x\in O^*(x_0)\bigcap E$ і $\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{E\ni x\to x_0}\psi(x)=c\ne\infty$, то $\lim\limits_{E\ni x\to x_0}\varphi(x)=c$.

10. *Перехід до границі під знаком модуля:* якщо $\lim\limits_{E\ni z\to z_0} f(z)=c\ne\infty$, то $\lim\limits_{E\ni z\to z_0}|f(z)|=|\lim\limits_{E\ni z\to z_0} f(z)|=|c|$.

11. *Границя складної функції:* нехай $\lim\limits_{E\ni z\to z_0} f(z)=c$, а $\lim\limits_{T\ni t\to t_0} z(t)=z_0$ і $z(t)\in E$, $z(t)\ne z_0$ $\forall t\in T$. Тоді $\lim\limits_{T\ni t\to t_0} f(z(t))=c$.

12. *Границя монотонної функції:* якщо f — монотонна функція на множині E, x_0 — гранична точка E і $x<x_0$ $\forall x\in E$, то існує границя $\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)$. Ця границя скінченна, якщо f — обмежена на $E\bigcap O^*(x_0)$, дорівнює $+\infty$, якщо f — необмежена зверху на $E\bigcap O^*(x_0)$ $\forall O^*(x_0)$, і дорівнює $-\infty$, якщо f — необмежена знизу на $E\bigcap O^*(x_0)$ $\forall O^*(x_0)$.

Деякі важливі границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1; \quad (1) \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e; \quad (2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a; \quad (3) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1; \quad (4)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha. \quad (5)$$

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) кожна функція f має в точці z_0 єдину границю відносно множини E;

2) кожна функція f не може мати в точці z_0 двох різних границь відносно множини E;

3) у точці z_0 функція f може мати дві різні границі відносно двох різних множин;

4) якщо $\lim\limits_{E_1 \ni z \to z_0} f(z) = c$, то й $\lim\limits_{E \ni z \to z_0} f(z) = c \quad \forall E \supset E_1$;

5) якщо $\lim\limits_{E_1 \ni z \to z_0} f(z) = c \quad \forall E_1 \subset E$: z_0 — гранична точка E_1, то й $\lim\limits_{E \ni z \to z_0} f(z) = c$;

6) якщо існує $\lim\limits_{E \ni z \to z_0} f(z) = c$, то f — функція, обмежена на E;

7) якщо функція f необмежена на E, то не існує границі f у точці z_0 відносно множини E.

2. Довести, що $\lim\limits_{E \ni z \to z_0} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k f_k(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \lim\limits_{E \ni z \to z_0} f_k(z)$, якщо існують границі $\lim\limits_{E \ni z \to z_0} f_k(z) \neq \infty$ і a_k — фіксовані сталі, $k = \overline{1,\ n}$.

3. Довести дані твердження:

1) якщо $\lim\limits_{E \ni z \to z_0} f_1(z) f_2(z) = 0$, то не обов'язково $\lim\limits_{E \ni z \to z_0} f_1(z) = 0$ або $\lim\limits_{E \ni z \to z_0} f_2(z) = 0$;

2) для нескінченних границь властивість про границю суми — неправильне твердження;

3) якщо f_1 і f_2 — нескінченно малі функції в точці z_0 відносно множини E, то частка f_1 / f_2 може бути нескінченно малою, нескінченно великою, мати скінченну ненульову границю або взагалі не мати границі у точці z_0 відносно множини E;

4) якщо $f_1(z) < f_2(z) \ \forall z \in E$, то можлива рівність $\lim\limits_{E \ni z \to z_0} f_1(z) = \lim\limits_{E \ni z \to z_0} f_2(z)$;

5)• якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$, то не обов'язково $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$.

4. Обчислити вказані границі усно:

1) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x+3}{x-4}$; 2) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x^2 + 7}$; 3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x}$; 5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$; 6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$;

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} 10x}$; 8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$; 9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$;

10) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{\arcsin 3x}$; 11) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 6x}{\operatorname{arctg} 4x}$.

5. Користуючись властивостями границь, обчислити дані границі:

1)• $\lim\limits_{x\to2}(x^2+5x-4)$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-6}$; 3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$; 4)• $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$; 6) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x^3-8}$; 7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+3x-3}{2x^3-2x^2+x-1}$;

8) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$; 9)• $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$; 10) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x-7}{\sqrt{x+2}-3}$; 11) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

12) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; 13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{x}$; 14) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

15) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x+1}}$; 16) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}}$; 17) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$;

18) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$; 19) $\lim\limits_{x\to0}\left(x\cos\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right)$; 20) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin ax-\sin bx}{x^2}$.

6. Користуючись формулами (1) — (5), обчислити:

1)• $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\sin3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin2x}{\sin4x}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{3}}{3x^2}$;

4)• $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos4x-\cos2x}{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x+2)}{x+2}$;

7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\operatorname{tg}^2(x-1)}{1-\cos(x-1)}$; 8) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{1-\cos(x-2)}$; 9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\frac{\pi}{2}-x}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{\sqrt{x+1}-1}$; 11) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{x-a}$; 12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$;

13) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}}$; 14) $\lim\limits_{n\to\infty}5^n\operatorname{tg}\dfrac{x}{5^n}$; 15) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}$;

16) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x-\sin x+1}{\cos x+\sin x-1}$; 17) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2x+\sin x-1}{2\sin^2x-3\sin x+1}$; 18) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{5x}$;

19)• $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}$; 20) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$; 21) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

22)• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{2x}$; 23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\sin x}$; 24) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{7^x-1}$; 25)• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{x^2}$;

26) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin 3x}-1}{\operatorname{tg} 2x}$; 27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-e^{-x}}$; 28) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

7. Обчислити границі в нескінченно віддалених точках:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{3x^2+5}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+6}{x^2+4}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^6+1}{5x^6+x+7}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3}{2x^2+x+1}$; 5)• $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+2x+1}}{x^2+6}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x-2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{(nx-1)^n}$;

9)• $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$; 10) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1})$;

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{\sqrt[3]{8x^6+x^5+3}}$; 12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+4}}{\sqrt[5]{x^4+3x^2+1}}$;

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)}{\ln\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}$;

16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{e^{2x}+1}$; 17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$;

18) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; 19) $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\dfrac{a-x}{b+x}$; 20) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[x]}{x}$;

21) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{[x]}{x}$; 22) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$; 23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{x-6}$;

24) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+6}{2x+3}\right)^{4x+6}$; 25)• $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x^2}{x^2+2}\right)^{3x^2-2}$; 26) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

8. Знайти односторонні границі функції у вказаних точках:

1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1,\\ 2x+3, & 1<x\le 2,\end{cases}$ $x_0=1$; 2) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$, $x_0=2$;

3) $f(x)=\dfrac{\sin 5x}{x}$, $x_0=0$; 4) $f(x)=\dfrac{|\sin(x-1)|}{(x-1)^2}$, $x_0=1$;

5) $f(x)=[x]$, $x_0=-2,-1,0,1,2$;

6) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{|\sin x|}}$, $x_0=0$; 7) $f(x)=\dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right]$, $x_0=0$;

8) $f(x)=\dfrac{b}{x}\left[\dfrac{x}{a}\right]$, $x_0=0$; 9) $f(x)=\dfrac{2}{x-4}$, $x_0=4$;

10) $f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}$, $x_0=0$; 11) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-1}$, $x_0=1$.

9. Знайти $a>0$ і $b>0$, якщо $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b)=0$.

10. Знайти наближені значення даних функцій у вказаних точках без використання таблиць та обчислювальної техніки:

1) $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{2x}$, $x_0=10^{-3}$; 2) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$, $x_0=0{,}99$;

3)• $f(x)=x\operatorname{ctg}3x$, $x_0=10^{-4}$; 4) $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$, $x_0=16{,}001$;

5) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$, $x_0=10^5$; 6) $f(x)=\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$, $x_0=1{,}001$.

11*. Нехай функція f визначена на інтервалі $(a;+\infty)$ і обмежена на $(a;b)$ $\forall b>a$. Довести, що:

1) коли $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=c\neq+\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=c$;

2) коли $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}=c\neq\infty$ і $f(x)\geq H>0$ $\forall x\in(a;+\infty)$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))^{\frac{1}{x}}=c$.

12. Запис $\alpha(x)=O(\beta(x))$, $x\in E$, означає, що $\exists H>0:\ |\alpha(x)|\leq H\,|\beta(x)|$. Зокрема, $\alpha(x)=O(1)$, $x\in E$, означає, що функція α обмежена на E. Довести, що коли $E=(a;+\infty)$, де $a>0$, то:

1) $5x^4-3x^3+2x^2-x+5=O(x^4)$;

2) $P(x)=O(x^n)$, де $P(x)$ — многочлен степеня n;

3) $\dfrac{2x+3}{1-x^2}=O\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

4) $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=O\left(\dfrac{1}{x^{m-n}}\right)$, де P — многочлен степеня n, а Q — многочлен степеня $m>n$;

5)• $\sqrt{x^2+px+q}=x+\dfrac{p}{2}+O\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

13. Запис $\alpha(x)=o(\beta(x))$ означає, що існує така функція $0\le\gamma(x)\to 0$, $x\to x_0$, що $|\alpha(x)|\le\gamma(x)\beta(x)$ для всіх x з деякого проколеного околу точки x_0. Зокрема, запис $\alpha(x)=o(1)$ означає, що $\alpha(x)$ — нескінченно мала функція, $x\to x_0$. Довести, що:

1) $(1+x)^n=1+nx+o(x),\ x\to 0$; 2) $\sin x-x=o(x),\ x\to 0$;

3) $e^x-x-1=o(x),\ x\to 0$; 4) $1-\cos x-\dfrac{x^2}{2}=o(x^2),\ x\to 0$;

5) $\operatorname{tg} x-x=o(x),\ x\to 0$; 6) $\ln(1+x)-x=o(x),\ x\to 0$;

7) $\ln x=o\left(\dfrac{1}{x^{\varepsilon}}\right),\ x\to 0,\ \ \forall\varepsilon>0$; 8) $\ln x=o(x^{\varepsilon}),\ x\to\infty,\ \ \forall\varepsilon>0$;

9) $x^{\varepsilon}=o(a^x),\ x\to\infty,\ \forall\varepsilon>0,\ a>1$.

14. Запис $\alpha(x)\sim\beta(x)$, $x\to x_0$, означає, що $\alpha(x)-\beta(x)=o(\beta(x))$, $x\to x_0$. При цьому функції α і β називають еквівалентними, якщо $x\to x_0$. Довести, що коли $\beta(x)\ne 0$, $x\in O^*(x_0)$, то $\alpha(x)\sim\beta(x)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

15. Довести дані еквівалентності в околі точки 0:

$$x\sim\sin x\sim\operatorname{tg} x\sim\arcsin x\sim\operatorname{arctg} x\sim e^x-1\sim\ln(1+x);$$

$$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x;\quad \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}.$$

16. Визначити, чи еквівалентні дані нескінченно малі функції:

1) $\alpha(x)=\sqrt{1+x}-1,\ \beta(x)=\dfrac{1}{2}x,\ \ x\to 0$;

2) $\alpha(x)=e^{nx}-1,\ \beta(x)=nx,\ \ x\to 0$;

3) $\alpha(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}},\ \beta(x)=\sqrt[8]{x},\ \ x\to 0$;

4) $\alpha(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}},\ \beta(x)=\sqrt{x},\ \ x\to\infty$;

5) $\alpha(x)=x^2+x(\ln x)^{1000},\ \beta(x)=x^2,\ x\to\infty$.

17. Довести, що відношення еквівалентності функцій при $x\to x_0$ має властивості:

1) $\alpha(x)\sim\alpha(x)$ (рефлексивність);
2) $\alpha(x)\sim\beta(x)\Rightarrow\beta(x)\sim\alpha(x)$ (симетричність);
3) $\alpha(x)\sim\beta(x),\ \beta(x)\sim\gamma(x)\Rightarrow\alpha(x)\sim\gamma(x)$ (транзитивність).

18. Довести, що коли $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$, а $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, $x\to x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=c$.

19. Користуючись результатом попередньої вправи, обчислити такі границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{arctg} 5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\operatorname{arctg} 4x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-1}{6\operatorname{tg} x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} bx}{e^{ax}-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg} x)}{\sin 2x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{2x^2}$;

8) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$; 10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

20. Нехай α і β — дві нескінченно малі функції при $x\to x_0$. Довести, що функція $\alpha-\beta$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж α і β, тобто $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$ і $\alpha(x)-\beta(x)=o(\beta(x))$, $x\to x_0$. Обґрунтувати такі рівності:

$$\sin x - x = o(x);\quad \operatorname{arctg} x = x + o(x);$$
$$e^x - 1 - x = o(x);\quad \sqrt[n]{1+x}-1=\frac{x}{n}+o(x).$$

21. В атомній фізиці вивчається формула Релея — Джінса, яка виражає залежність розподілу енергії випромінювання від частоти:

$$u_\upsilon = A\frac{\alpha}{e^{\frac{h\upsilon}{kT}}-1}.$$

Вважаючи υ малою величиною, спростити цю формулу, припускаючи, що α є сталою величиною.

22. Динамічна самоіндукція L антени при видовженні хвилі виражається формулою $L=L_0\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi l}{\lambda}/\dfrac{2\pi l}{\lambda}\right)$, де L_0 — статична самоіндукція, l — діюча довжина антени, λ — довжина хвилі антени. Обчислити $\lim\limits_{\lambda\to\infty} L$.

Зразки розв'язування задач

3. 5) Покладемо $\varphi(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$, $x_0=0$. Тоді $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$ (довести це), але відношення $\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}$ не визначено у будь-якому проколеному околі точки $x_0=0$. Тому не існує границя цього відношення, якщо $x\to x_0$.

5. 1) Користуючись властивістю 7 границь функцій, маємо

$$\lim_{x\to 2}(x^2+5x-4)=(\lim_{x\to 2} x)^2+5\lim_{x\to 2} x-\lim_{x\to 2} 4=4+5\cdot 2-4=10.$$

4) Границі чисельника і знаменника дорівнюють 0, тому не можна безпосередньо користуватися властивістю про границю частки. Виконаємо такі перетворення: розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники і скоротимо на вираз $x-1$. Таке скорочення можливе, оскільки вираз $x-1$ не перетворюється в 0 (за означенням границі $x \to 1$, але $x \neq 1$). Отже, маємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1}=\frac{4}{3}.$$

9) У цьому випадку також границі чисельника і знаменника дорівнюють 0. Позбавимося ірраціональності в чисельнику дробу, домноживши чисельник і знаменник на вираз $\sqrt{x}+2$. Скоротивши на $x-4\neq 0$, дістанемо

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{32}.$$

6. 1) Скористаємось важливою границею (1), виконавши такі перетворення:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5x}{\cos 5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{1}{3x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}.$$

4) Перетворимо чисельник: $\cos 4x-\cos 2x=-2\sin 3x\sin x$. Скориставшись формулою (1), дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot 3\right)=-6\,.$$

19) Помножимо чисельник і знаменник дробу на $\sin x$. Користуючись границями (1) і (4) і зробивши заміну $\sin x=t$ при обчисленні першої з границь добутку, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1\,.$$

22) Виконавши елементарні перетворення і скориставшись формулою (3), матимемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\,.$$

25) Згідно з формулою (5), вважаючи $x^2=t$, дістаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+t}-1}{t}=\frac{1}{4}\,.$$

7. 5) Нехай $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k x^k$, $Q(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}b_k x^k$, де $a_n\neq 0$ і $b_m\neq 0$. Можливі три випадки:

а) $n=m$; б) $n<m$; в) $n>m$. У випадку а), поділивши чисельник і знаменник на x^n, матимемо

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\dfrac{a_0}{x^n}+\ldots+\dfrac{a_{n-1}}{x}+a_n}{\dfrac{b_0}{x^n}+\ldots+\dfrac{b_{n-1}}{x}+b_n}\to\frac{a_n}{b_n},\quad x\to\infty\,.$$

У випадку б) поділимо чисельник і знаменник на x^m і матимемо

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\dfrac{a_0}{x^m}+\ldots+\dfrac{a_{n-1}}{x^{m-n+1}}+\dfrac{a_n}{x^{m-n}}}{\dfrac{b_0}{x^m}+\ldots+\dfrac{b_{m-1}}{x}+b_m}\to 0,\quad x\to\infty .$$

Нарешті, у випадку в) поділимо чисельник і знаменник на x^n і дістанемо

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\dfrac{a_0}{x^n}+\ldots+\dfrac{a_{n-1}}{x^n}+a_n}{\dfrac{b_0}{x^n}+\ldots+\dfrac{b_{m-1}}{x^{n-m+1}}+\dfrac{b_m}{x^{m-n}}}\to\infty,\quad x\to\infty.$$

Отже,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_n}, & \text{якщо } n=m,\\ 0, & \text{якщо } n<m,\\ \infty, & \text{якщо } n>m.\end{cases}$$

9) Маємо різницю двох нескінченно великих функцій. Позбудемося ірраціональності в чисельнику дробу, вважаючи, що знаменник дорівнює 1. Для цього помножимо і поділимо даний дріб на вираз $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}$. Дістанемо

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}=\frac{2}{1+1}=1.$$

25) Спочатку виділимо цілу частину виразу, записаного в дужках. Маємо $\dfrac{1+x^2}{x^2+2}=$ $=\dfrac{x^2+2-1}{x^2+2}=1-\dfrac{1}{x^2+2}$. Далі виконаємо такі перетворення:

$$\left(\frac{1+x^2}{x^2+2}\right)^{3x^2-2}=\left(\left(1-\frac{1}{x^2+2}\right)^{-(x^2+2)}\right)^{-3}\left(1-\frac{1}{x^2+2}\right)^{-8}.$$

Позначивши $\alpha=-\dfrac{1}{x^2+2}$ ($\alpha\to 0$ при $x\to\infty$), дістанемо

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x^2}{x^2+2}\right)^{3x^2-2}=\lim_{\alpha\to 0}((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}})^{-3}\cdot\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-8}=e^{-3}\cdot 1=e^{-3}.$$

10. 3) Оскільки $x_0=10^{-4}$ досить мале число, то треба визначити, як поводить себе функція $f(x)=x\operatorname{ctg}3x$, якщо $x\to 0$. Маємо

$$x\operatorname{ctg}3x=\frac{1}{3}\cos 3x\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\to\frac{1}{3},\quad x\to 0.$$

Отже, $f(x) \approx \frac{1}{3}$, якщо $x \neq 0$, проте досить мале число. Тому $10^{-4}\operatorname{ctg}(3 \cdot 10^{-4}) \approx \frac{1}{3}$.

12. 5) Маємо

$$\sqrt{x^2+px+q}-\left(x+\frac{p}{2}\right)==\frac{\left(\sqrt{x^2+px+q}-\left(x+\frac{p}{2}\right)\right)\left(\sqrt{x^2+px+q}+\left(x+\frac{p}{2}\right)\right)}{\sqrt{x^2+px+q}+x+\frac{p}{2}}=$$

$$=\frac{x^2+px+q-x^2-px-\frac{p^2}{4}}{\sqrt{x^2+px+q}+x+\frac{p}{2}}=\frac{q-\frac{p^2}{4}}{x\left(\sqrt{1+\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}}+1+\frac{p}{2x}\right)}=\frac{\varphi(x)}{x},$$

де $\varphi(x)=\left(q-\frac{p^2}{4}\right)/\left(\sqrt{1+\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}}+1+\frac{p}{2x}\right)$. Оскільки $\varphi(x)\to\frac{1}{2}\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$, $x\to\infty$, то за властивістю про обмеженість функції, що має границю, φ є обмеженою на деякому проміжку $(a; +\infty)$. Звідси і випливає, що $\sqrt{x^2+px+q}=x+\frac{p}{2}+O\left(\frac{1}{x}\right)$.

§ 3.5. Часткові границі послідовностей та функцій

Нехай числова функція f визначена на множині E, для якої точка z_0 є граничною. Число c (скінченне або нескінченно велике) називають *частковою границею функції f у точці z_0 відносно множини E*, якщо $\exists(z_n): z_n \in E \ \forall n\in \mathbf{N}$, $z_0 \neq z_n \to z_0$, $n\to\infty$, і $f(z_n)\to c$, $n\to\infty$. Зокрема, число c — часткова границя послідовності (z_n), якщо існує підпослідовність (z_{n_k}) цієї послідовності така, що $z_{n_k}\to c$, $k\to\infty$.

Кожна числова функція f у будь-якій точці z_0, що є граничною для множини $E\subset D(f)$, має принаймні одну часткову границю відносно множини E. Якщо ця часткова границя єдина, то вона дорівнює $\lim\limits_{E\ni z\to z_0} f(z)$.

Для функції f дійсної змінної множина її часткових границь у точці x_0 відносно множини E має найменший і найбільший елементи. Їх позначають $\varliminf\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)$ і $\varlimsup\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)$ та називають відповідно *нижньою і верхньою границею функції f у точці x_0 відносно множини E*. Якщо $O^*(x_0)\subset E$, то слова «відносно множини E» опускають і записують: $\varliminf\limits_{x\to x_0} f(x)$ і $\varlimsup\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Зокрема, $\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n$ — *нижня границя послідовності* (y_n), *а* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$ — *верхня границя послідовності* (y_n).

Критерії збіжності послідовностей

1. Послідовність (z_n) збіжна тоді й тільки тоді, коли (z_n) — обмежена і має єдину часткову границю.

2. Дійсна послідовність (x_n) збіжна тоді й тільки тоді, коли $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \neq \infty$.

3. Послідовність (z_n) збіжна тоді й тільки тоді, коли $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0(\varepsilon) : (m \geq n \geq n_0 \Rightarrow |z_m - z_n| < \varepsilon)$ (*критерій Коші*).

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) якщо $\lim\limits_{E \ni z \to z_0} f(z) = c$, то c — часткова границя функції f у точці z_0 відносно множини E;

2) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

3) кожна послідовність має принаймні одну часткову границю;

4) якщо послідовність має єдину часткову границю, то вона збіжна;

5) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

6) кожна обмежена послідовність має збіжну послідовність?

2. Довести, що для будь-якої дійсної послідовності (x_n):

1)• $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{x_k : \ k \geq n\}$;

2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{x_k : \ k \geq n\}$.

3. Знайти часткові границі даної послідовності:

1) $z_n = \dfrac{n+1}{1+2n} + i(-1)^n \quad \forall n \in \mathbf{N}$; 2) $z_n = i^n \quad \forall n \in \mathbf{N}$;

3) (x_n), множина значень якої має вигляд $\{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$;

4) (x_n), множина значень якої має вигляд $\left\{2,\ 3,\ 1+\dfrac{1}{2},\ 2+\dfrac{1}{2}, 1+\dfrac{1}{3},\ 2+\dfrac{1}{3},\ \ldots,\ 1+\dfrac{1}{n},\ 2+\dfrac{1}{n},\ \ldots\right\}$;

5) $((-1)^n n)$; 6) $\left(\dfrac{n-1}{n+1}\sin\dfrac{2\pi n}{3}\right)$; 7) $(n^{(-1)^n})$;

8)• $\left(\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \cos\dfrac{\pi n}{4}\right)$; 9) $(n(\ln(n+1) - \ln n))$.

4. Знайти $\underline{\lim}\ x_n$ і $\overline{\lim}\ x_n$ для послідовностей з попередньої вправи.

5. Знайти $\varliminf\limits_{x\to x_0} f(x)$ і $\varlimsup\limits_{x\to x_0} f(x)$ для даних функцій f у вказаних точках x_0:

1) $f(x)=\sin\frac{1}{x}+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, $x_0=0$ і $x_0=\infty$;

2) $f(x)=(2-\sin^2 x)\cos\frac{1}{x}$, $x_0=\infty$ і $x_0=0$;

3• $f(x)=\sin x+\cos x$, $x_0=0$ і $x_0=\infty$;

4) $f(x)=x^2\cos x$, $x_0=0$ і $x_0=\infty$;

5) $f(x)=(\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$, $x_0=\frac{\pi}{4}$ і $x_0=0$.

6. Навести приклади послідовностей, які:
1) не мають скінченних часткових границь;
2) мають єдину часткову границю, проте не є збіжними;
3) мають тільки дві часткові границі $+\infty$ та $-\infty$;
4) мають частковою границею будь-яке дійсне число.

7. Довести, що:

1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \le \varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \le \varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

8. Чи буде правильним твердження 7, якщо знак додавання «+» замінити на знак множення «·»?

9•. Довести, що дійсна послідовність (x_n) є збіжною тоді й тільки тоді, коли $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$, де (y_n) — довільна дійсна послідовність.

10. Чи буде правильним попереднє твердження, якщо знак «+» замінити на знак «·»?

11*. Довести, що для будь-якої дійсної послідовності (x_n) існує послідовність (y_n) така, що

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n=\varliminf_{n\to\infty} y_n,\quad \varlimsup_{n\to\infty} x_n=\varlimsup_{n\to\infty} y_n,\quad x_n-y_n\to 0 \text{ і}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} y_n \le y_k \le \varlimsup_{n\to\infty} y_n \quad \forall k\in \mathbf{N}.$$

12*. Нехай (x_n) — дійсна послідовність, а $c_n=\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ $\forall n\in\mathbf{N}$. Довести, що

$$-\infty\le \varliminf_{n\to\infty} x_n \le \varliminf_{n\to\infty} c_n \le \varlimsup_{n\to\infty} c_n \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n \le +\infty.$$

13. Який висновок можна зробити з попереднього твердження, якщо $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$?

14. Довести, що коли (x_n) — збіжна послідовність і $\forall n \in \mathbf{N}$ $x_n > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n .$$

15. Показати, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = c, \quad x_n > 0 \quad \forall n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \mathrm{e}.$$

16. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}.$$

17*. Нехай $p_n \geq 0$ $\forall n$, $P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k \to +\infty$, $n \to \infty$, (x_n) — дійсна послідовність і $t_n = \dfrac{1}{P_n} \sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Довести, що

$$-\infty \leq \varliminf_{n\to\infty} x_n \leq \varliminf_{n\to\infty} t_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} t_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leq +\infty.$$

Зокрема, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} t_n = c$, де c — скінченне число або $c = +\infty$, або $c = -\infty$.

18. Нехай $y_{n+1} > y_n$ $\forall n \in \mathbf{N}$ і $y_n \to +\infty$, $n \to \infty$. Довести, що коли $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = c$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = c$ (*теорема Штольца*).

19. Знайти дані границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{a^n}$, $a > 1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p + 1}$, де $\mathbf{N} \ni p$ — фіксоване;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 3^p + \ldots + (2n-1)^p}{n^{p+1}}$, де $\mathbf{N} \ni p$ — фіксоване.

Зразки розв'язування задач

2. 1) Нехай $\alpha_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$. Тоді $x_k \geq \alpha_n$ $\forall k \geq n$ і $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists k_n \geq n$: $x_{k_n} < \alpha_n + \frac{1}{n}$. Отже, $\alpha_n \leq x_{k_n} < \alpha_n + \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Оскільки $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n$ $\forall n$, то існує $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = c$, а тому існує і $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = c$. Отже, c — часткова границя послідовності (x_n). Припустимо, що α — довільна фіксована часткова границя (x_n). Тоді $\exists$ (x_{n_i}): $x_{n_i} \to \alpha$, $i \to \infty$. Проте $x_{n_i} \geq \alpha_{n_i}$, тому і $\alpha \geq c$, тобто c — найменша часткова границя послідовності.

3. 8) Маємо $\cos\frac{\pi n}{4}=(-1)^k$, якщо $n = 4k$, $\cos\frac{\pi n}{4}=\cos\left(\pi k+\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^k\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$, якщо $n=4k+1$, $\cos\frac{\pi n}{4}=\cos\left(\pi k+\frac{\pi}{2}\right)=0$, якщо $n=4k+2$, $\cos\frac{\pi n}{4}=\cos\left(\pi k+\frac{3\pi}{4}\right)=(-1)^k\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$, якщо $n=4k+3$, а $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{2k}\to\frac{1}{\mathrm{e}}$, $n=2k\to\infty$ і $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n(-1)^n=\left(-1-\frac{1}{2k+1}\right)^{2k+1}\to-\frac{1}{\mathrm{e}}$, $n = 2k+1\to\infty$. Звідси випливає, що частковими границями даної послідовності є числа: $\frac{1}{\mathrm{e}}+1$, $\frac{1}{\mathrm{e}}-1$, $\frac{1}{\mathrm{e}}$, $-\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{1}{\mathrm{e}}+\frac{\sqrt{2}}{2}$, а отже, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=-\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{\sqrt{2}}{2}$, а $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{\mathrm{e}}+1$, де $x_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n(-1)^n+\cos\frac{\pi n}{4}$.

5. 3) Оскільки $f(x)=\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, то за властивістю косинуса кожне число з відрізка $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$ є частковою границею функції f, якщо $x\to\infty$. Тому $\varliminf\limits_{x\to\infty} f(x)=-\sqrt{2}$, а $\varlimsup\limits_{x\to\infty} f(x)=\sqrt{2}$.

Розглянемо інший спосіб. Візьмемо $x_n=2\pi n-\frac{3\pi}{4}\to\infty$, $n\to\infty$. Тоді $f(x_n)=$ $=\sqrt{2}\cos(2\pi n-\pi)=\sqrt{2}\cos(-\pi)=-\sqrt{2}\ \to\ -\sqrt{2},\ n\to\infty$. Якщо взяти $x_n=2\pi n+\pi/4\to\infty$, $n\to\infty$, то матимемо $f(x_n)=\sqrt{2}\cos 2\pi n=\sqrt{2}\to\sqrt{2}$, $n\to\infty$. Разом з тим $-\sqrt{2}\le f(x)\le$ $\le\sqrt{2}$, а тому $-\sqrt{2}=\varliminf\limits_{x\to\infty} f(x)$, а $\sqrt{2}=\varlimsup\limits_{x\to\infty} f(x)$. Якщо $x\to 0$, то $f(x)\to\sin 0+\cos 0=1$ (довести це), а отже, $\varliminf\limits_{x\to 0} f(x)=\varlimsup\limits_{x\to 0} f(x)=1=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

9. Нехай (x_n) — збіжна числова послідовність, а (y_n) — довільна фіксована дійсна послідовність. Тоді якщо $y_{n_k}\to c$, $k\to\infty$, то $x_{n_k}+y_{n_k}\to\lim\limits_{n\to\infty} x_n+c$, $k\to\infty$. Звідси випливає, що множина часткових границь послідовності (x_n+y_n) має вигляд $\{\lim\limits_{n\to\infty} x_n+c:\ c$ — часткова границя $(y_n)\}$. Тому $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n=$ $=\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$. Необхідність доведено.

Припустимо, що $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$ для довільної послідовності (y_n). Візьмемо $y_n=-x_n$ $\forall n\in\mathbf{N}$. Тоді $x_n+y_n=0$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n=-\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, а тому $0=\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n+$ $+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n=\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n-\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n\Rightarrow\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$. Отже, (x_n) має єдину часткову границю. Якщо припустити, що (x_n) — необмежена послідовність, то для послідовності $y_n=$ $=-\frac{x_n}{2}$, $n\in\mathbf{N}$, рівність $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$ не має змісту. Отже, (x_n) — обмежена послідовність, у якої єдина часткова границя. За критерієм 1 послідовність (x_n) є збіжною. Достатність доведено.

Розділ 4 НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ

§ 4.1. Поняття неперервної функції. Найпростіші властивості неперервних функцій

Функцію f дійсної (або комплексної) змінної, що визначена на множині E, називають *неперервною в точці* $z_0 \in E$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \ |z - z_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \forall z \in E$ (*означення за Коші* або *мовою* «ε — δ»).

Суть поняття неперервності функції f у точці z_0 полягає в тому, що $f(z) \approx f(z_0)$, якщо $E \ni z \approx z_0$. При цьому похибку наближення $f(z) \approx f(z_0)$ можна зробити як завгодно малою, якщо взяти $z \in E$ досить близьким до z_0.

Пригадуючи означення границі функції в точці, дістаємо означення неперервності дещо в іншій формі: функція f неперервна в точці $z_0 \in E$ тоді й тільки тоді, коли $\lim\limits_{E \ni z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ за умови, що z_0 — гранична точка E (*означення мовою границь*). Остання рівність набирає вигляду $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, якщо $O(z_0) \subset E$, а тому функцію f називають *неперервною* в точці z_0, якщо вона визначена в деякому околі цієї точки і $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Оскільки $z \to z_0 \Leftrightarrow z - z_0 \to 0$, а $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = 0$, то, позначивши через $\Delta z = z - z_0$ приріст незалежної змінної (аргументу) і через $\Delta f(z_0) = f(z) - f(z_0)$ приріст функції f у точці z_0, дістанемо ще одне означення неперервності функції в точці: функція f неперервна в точці z_0, якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст цієї функції (*означення мовою приростів*).

Якщо використати зв'язок між границею функції і границею послідовності, то дістанемо ще таке означення неперервності функції в точці: функція f неперервна в точці $z_0 \in E$, якщо $\forall (z_n): \ z_n \in E \ \forall n \in \mathbf{N}$ і $z_n \to z_0$, $n \to \infty$, маємо $f(z_n) \to f(z_0)$, $n \to \infty$ (*означення за Гейне*).

Найпростіші властивості неперервних функцій

1. *Неперервність суми, різниці, добутку та частки:* якщо функції f і φ неперервні в точці $z_0 \in E$, то $f \pm \varphi$, $f\varphi$ і $\dfrac{f}{\varphi}$ (у випадку $\varphi(z_0) \neq 0$) також неперервні в точці $z_0 \in E$.

2. *Неперервність складної функції:* якщо функція f неперервна в точці $z_0 \in E$, а функція $z = \varphi(t)$ неперервна в точці $t_0 \in T$ і $\varphi(t_0) = z_0$, то $f(\varphi(t))$ також неперервна в точці $t_0 \in T$. Функцію f називають *неперервною на множині E*, якщо f неперервна у кожній точці $z_0 \in E$.

3. *Неперервність елементарних функцій:* кожна елементарна функція неперервна в своїй області визначення.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) означення неперервності функції в точці мовою «ε — δ» і мовою границь завжди еквівалентні;

2) будь-яка послідовність є неперервною функцією на множині **N**;

3)• означення неперервності за Коші і за Гейне еквівалентні;

4) якщо функція $f + \varphi$ неперервна в точці z_0, то функції f і φ неперервні в точці z_0;

5) якщо функція $f(\varphi(t))$ неперервна в точці t_0, то функція φ неперервна в точці t_0, а функція f неперервна в точці $x_0 = \varphi(t_0)$;

6) якщо функції $f + \varphi$ і $f - \varphi$ неперервні в точці z_0, то функції f і φ неперервні в точці z_0;

7) якщо функції $f\varphi$ і f неперервні в точці z_0, то і φ — неперервна в точці z_0?

2. Треба виміряти площу квадрата з похибкою, яка не перевищує ε (см^2). З якою похибкою можна виміряти сторону квадрата, якщо вона лежить у межах від 10 до 20 см? Розглянути випадки, коли:

1) $\varepsilon = 1$ см^2; 2) $\varepsilon = 0{,}1$ см^2; 3) $\varepsilon = 0{,}01$ см^2.

3. Сформулювати задачу, аналогічну задачі 2, для об'єму куба. Розв'язати цю задачу.

4. Чи є функція f неперервною в точці x_0, якщо:

1) $\exists \varepsilon > 0\colon\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\colon\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;

2) $\forall n \in \mathbf{N}\ \exists \delta(n) > 0\colon\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \dfrac{1}{n}$;

3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\colon\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \delta$;

4) $\forall\varepsilon>0$ з деякої множини $\exists\delta(\varepsilon)>0: \ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$;

5)• $\forall\delta>0\ \exists\varepsilon(\delta)>0: \ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow |x-x_0|<\delta$?

5•. Користуючись означенням мовою «ε — δ», довести неперервність основних елементарних функцій.

6. Довести, що функція f, яка визначена в деякому околі точки x_0, не є неперервною в цій точці тоді й тільки тоді, коли:

1) $\exists\varepsilon>0: \ \forall\delta>0 \ \exists x: \ |x-x_0|<\delta$, проте $|f(x)-f(x_0)|\geq\varepsilon$;

2) $\exists(x_n): \ x_n\to x_0, \ n\to\infty$, проте $f(x_n)\not\to f(x_0), \ n\to\infty$.

7. Довести, що коли функція f неперервна в точці $x_0\in E$, то і $|f|$ — неперервна в точці $x_0\in E$. Чи правильне обернене твердження?

8. Дослідити на неперервність дані функції:

1) $f(x)=x^2+3x+1$; 2) $f(x)=x^3-5x$; 3)• $f(x)=\dfrac{2x}{4+x^2}$;

4) $f(x)=\sin 2x$; 5) $f(x)=3x^2$; 6) $f(x)=|x+1|-|x-1|$; 7) $f(x)=[x]$;

8) $f(x)=\operatorname{sign} x$; 9) $f(x)=x\operatorname{sign} x$; 10) $f(x)=[\frac{1}{x}]$; 11) $f(x)=\operatorname{sign}(\sin x)$;

12) $f(x)=\operatorname{sign}\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)$; 13) $f(x)=x[x]$; 14) $f(x)=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$;

15) $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$; 16) $f(x)=[x]\sin\pi x$; 17)• $f(x)=(-1)^{[\sin\pi x]}$.

9. Дослідити на неперервність складну функцію $f(\varphi(x))$, якщо:

1) $f(x)=x^2, \ \varphi(x)=\sin x$; 2) $f(x)=2^x, \ \varphi(x)=\operatorname{tg} x$;

3) $f(x)=\operatorname{sign} x, \ \varphi(x)=1+x^2$; 4) $f(x)=1+x^2, \ \varphi(x)=\operatorname{sign} x$;

5) $f(x)=\operatorname{sign} x, \ \varphi(x)=1+x-[x]$; 6) $f(x)=1+x-[x], \ \varphi(x)=\operatorname{sign} x$;

7) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{якщо } 0<x\leq 1, \\ 2-x, & \text{якщо } 1<x<2, \end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases} x, & \text{якщо } x\in\mathbf{Q}\cap(0;1), \\ 2-x, & \text{якщо } x\in(0,1)\setminus\mathbf{Q}. \end{cases}$

10. Нехай дійсна функція f неперервна на множині E, а $c>0$ — довільне фіксоване число. Чи буде неперервною на множині E функція

$$f_c(x)=\begin{cases} f(x), & \text{якщо } |f(x)|<c, \\ c, & \text{якщо } f(x)\geq c, \\ -c, & \text{якщо } f(x)\leq -c? \end{cases}$$

11. Дослідити на неперервність дані функції комплексної змінної:

1) $f(z)=\dfrac{z\operatorname{Im} z}{|z|}, \ z\neq 0, \ f(0)=0$; 2) $f(z)=\dfrac{z}{|z|}, \ z\neq 0, \ f(0)=0$;

3) $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|}, \ z\neq 0, \ f(0)=0$; 4) $f(z)=\arg z$;

5) $f(z)=\dfrac{\operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2}$, $z\neq 0$, $f(0)=0$; 6) $f(z)=\arg(z-z_0)$.

12. Дослідити на неперервність функції $m(x)=\min\{f(x), g(x)\}$ і $M(x)=\max\{f(x), g(x)\}$ $\forall x\in(a;b)$, де f і g — неперервні на $(a;b)$ функції.

Зразки розв'язування задач

1. 3) Нехай функція f неперервна в точці $z_0\in E$ за Коші:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ (|z-z_0|<\delta\Rightarrow|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon\quad\forall z\in E).$$

Візьмемо $\forall(z_n):\ z_n\in E\ \ \forall n$ і $z_n\to z_0$, $n\to\infty$. За означенням границі послідовності маємо для числа $\delta(\varepsilon)>0$ $\exists n_0(\varepsilon)$: $n>n_0\Rightarrow|z_n-z_0|<\delta$, а тому $|f(z_n)-f(z_0)|<\varepsilon$, якщо $n>n_0$. Отже, $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)$: $(n>n_0\Rightarrow|f(z_n)-f(z_0)|<\varepsilon)$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=f(z_0)$. Таким чином, $\forall(z_n):\ z_n\in E\ \ \forall n$ і $z_n\to z_0$, $n\to\infty$, маємо $f(z_n)\to f(z_0)$, $n\to\infty$, тобто функція f неперервна в точці $z_0\in E$ за Гейне.

Нехай тепер функція f неперервна в точці $z_0\in E$ за Гейне. Доведемо, що вона неперервна у цій точці і за Коші. Для цього припустимо, що f не є неперервною в точці $z_0\in E$ за Коші, тобто $\exists\varepsilon>0$: $\forall\delta>0\ \exists z\in E$: $|z-z_0|<\delta$, але $|f(z)-f(z_0)|\geq\varepsilon$. Покладемо $\delta=\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbf{N}$ і знайдемо $z_n\in E$ таке, що $|z_n-z_0|<\frac{1}{n}$, проте $|f(z_n)-f(z_0)|\geq\varepsilon$ $\forall n$. Дістали послідовність (z_n): $z_n\in E$ $\forall n$, $z_n\to z_0$, $n\to\infty$, але $f(z_n)\not\to f(z_0)$, $n\to\infty$, що суперечить неперервності функції f у точці $z_0\in E$ за Гейне. Це зумовлено неправильним припущенням. Отже, функція f неперервна в точці z_0 за Коші. Тому задане твердження правильне.

4. 5) Розглянемо функцію

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{якщо } x\in\mathbf{Q}\cap[0;1],\\ 3-x, & \text{якщо } x\in[0;1]\setminus\mathbf{Q}.\end{cases}$$

Покажемо, що ця функція не є неперервною у кожній точці $x_0\in[0;1]$. Дійсно, $\forall x_0\in\in\mathbf{Q}\cap[0;1]$ маємо $f(x_0)=x_0\in[0;1]$, а $f(x)=3-x\in[2;3]$ для $x\in[0;1]\setminus\mathbf{Q}$, незважаючи на те що таке x може бути як завгодно близьким до x_0. Отже, близькість x до x_0 не гарантує близькості $f(x)$ до $f(x_0)$, тобто функція f не є неперервною у кожній точці $x_0\in\mathbf{Q}\cap[0;1]$. Так само можна показати, що f не є неперервною у кожній точці $x_0\in[0;1]\setminus\mathbf{Q}$. Разом з тим $\forall\delta>0$ вважатимемо, що $0<\varepsilon(\delta)<\min\{1,\delta\}$. Тоді $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon<1\Leftrightarrow|x-x_0|<\varepsilon<\delta$. Отже, за умови 5) функція не обов'язково є неперервною в точці x_0.

5. Нехай $f(x)=\sin x$. Зафіксуємо довільне $x_0\in\mathbf{R}$ і $\varepsilon>0$. Тоді $|f(x)-f(x_0)|=$ $=|\sin x-\sin x_0|=2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\ \cos\frac{x+x_0}{2}\right|$. Оскільки $\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\leq 1$, а $\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leq$ $\leq\frac{|x-x_0|}{2}$ $\forall x,\ x_0\in\mathbf{R}$, то $|f(x)-f(x_0)|\leq 2\cdot\frac{1}{2}|x-x_0|=|x-x_0|<\varepsilon\Leftrightarrow|x-x_0|<\varepsilon$. Звідси випливає, що можна покласти $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$, тоді дістанемо, що $\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta(\varepsilon)=\varepsilon:\quad(|x-x_0|<\delta\Rightarrow$ $\Rightarrow|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon)$, тобто функція $\sin x$ неперервна у довільній точці $x_0\in\mathbf{R}$, а тому і на множині $\mathbf{R}$, тобто в області свого визначення.

8. 3) Задана функція визначена $\forall x\in\mathbf{R}$. Зафіксуємо довільне $x_0\in\mathbf{R}$ і надамо йому приросту Δx. Обчислимо відповідний приріст функції:

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{2(x_0+\Delta x)}{4+(x_0+\Delta x)^2}-\frac{2x_0}{4+x_0^2}=$$

$$=\frac{8x_0+2x_0^3+8\Delta x+2x_0^2\Delta x-8x_0-2x_0^3-4x_0^2\Delta x-2x_0\Delta x^2}{(4+(x_0+\Delta x)^2)(4+x_0^2)}=\frac{8-2x_0^2-2x_0\Delta x}{(4+(x_0+\Delta x)^2)(4+x_0^2)}\Delta x.$$

Звідси дістанемо, що $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$, тобто задана функція неперервна в точці x_0 (згідно з означенням мовою приростів), а отже, і на всій множині $\mathbf{R}$.

17) Маємо $\sin\pi x\in[0;1)\Leftrightarrow\pi x\in[2\pi n;\pi+2\pi n]$ і $\pi x\neq\pi/2+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; $\sin\pi x\in[-1;0)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\pi x\in(-\pi+2\pi n;2\pi n)$, $n\in\mathbf{Z}$; $\sin\pi x=1\Leftrightarrow\pi x=\pi/2+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. З цього випливає, що $[\sin\pi x]=0\Leftrightarrow x\in[2n;2n+1]$ і $x\neq\frac{1}{2}+2n$, $n\in\mathbf{Z}$; $[\sin\pi x]=-1\Leftrightarrow x\in(2n-1;2n)$, $n\in\mathbf{Z}$, і $[\sin\pi x]=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}+2n$, $n\in\mathbf{Z}$. Тому $f(x)=(-1)^{[\sin\pi x]}=1^0=1$, якщо $x\in[2n;2n+1]$ і $x\neq\frac{1}{2}+2n$, $n\in\mathbf{Z}$, і $f(x)=(-1)^{[\sin\pi x]}=(-1)^{-1}=-1$, якщо $x\in(2n-1;2n)$, $n\in\mathbf{Z}$, або $x=\frac{1}{2}+2n$, $n\in\mathbf{Z}$. Отже, функція $f(x)=(-1)^{[\sin\pi x]}$ є неперервною в інтервалах $\left(2n;\ \frac{1}{2}+2n\right)$, $\left(\frac{1}{2}+2n;1+2n\right)$, $(2n-1;2n)$, де $n\in\mathbf{Z}$, а на кінцях цих інтервалів задана функція не буде неперервною.

§ 4.2. Одностороння неперервність. Точки розриву та класифікація їх

Функцію f називають *неперервною зліва (справа)* в точці x_0, якщо $f(x_0-)=f(x_0)\,(f(x_0+)=f(x_0))$.

Для неперервності дійсної функції f у точці x_0 необхідно і достатньо, щоб вона була неперервною і зліва, і справа у цій точці.

Функцію f називають *розривною в точці* x_0, якщо вона визначена принаймні в проколеному околі точки x_0 і не є неперервною у цій точці. При цьому точку x_0 називають *точкою розриву* функції f.

Функцію f називають *розривною зліва (справа)* в точці x_0, якщо вона визначена принаймні в інтервалі $(a;x_0)$ (інтервалі $(x_0;b)$) та не є неперервною зліва (справа) у цій точці. При цьому точку x_0 називають *точкою розриву зліва (справа)* функції f.

Нехай x_0 — точка розриву функції f. Тоді цю точку називають:

а) усувною точкою розриву функції f, якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq\infty$;

б) точкою розриву першого роду функції f, якщо існують скінченні границі $f(x_0-)$ та $f(x_0+)$;

в) точкою розриву другого роду функції f, якщо вона не є точкою розриву першого роду цієї функції.

Точку x_0 розриву зліва (справа) функції f називають:

а) точкою розриву зліва (справа) першого роду або усувною точкою розриву зліва (справа) цієї функції, якщо існує скінченна границя $f(x_0-)$ $(f(x_0+))$;

б) точкою розриву зліва (справа) другого роду функції f, якщо вона не є точкою розриву першого роду цієї функції.

Якщо функція монотонна на проміжку $\langle a; b \rangle$, то вона може мати на цьому проміжку тільки точки розриву першого роду.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) якщо функція f неперервна зліва в точці x_0, то вона визначена на деякому відрізку $[x_0; b]$ та існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq \infty$;

2) твердження, обернене до 1), є правильним;

3) якщо функція f не визначена в точці x_0, то вона є розривною у цій точці;

4) твердження, обернене до 3), є правильним;

5) функція розривна в точці x_0, якщо вона розривна у цій точці зліва і справа;

6)• кожна усувна точка розриву функції f є точкою розриву першого роду цієї функції, і навпаки;

7) твердження 6) є правильним для односторонньої точки розриву функції f?

2. Сформулювати означення неперервності зліва (справа): а) мовою «ε — δ»; б) мовою послідовностей.

3. Нехай функція f не визначена в точці x_0, проте визначена в деякому проколеному околі цієї точки. Довести, що x_0 — точка розриву першого роду функції f, якщо x_0 — точка розриву зліва і справа першого роду функції f. Чи правильне це твердження для точки розриву другого роду?

4. Дослідити задані функції на неперервність і з'ясувати характер точок розриву:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, x \neq 2, f(2) = 4$; 2) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{x}$;

3)• $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x}, x \neq 0, f(0) = 1$;

4) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{якщо } -\infty < x \leq 0, \\ x^2, & \text{якщо } 0 < x < +\infty; \end{cases}$ 5) $f(x) = \dfrac{|2x + 4|}{x + 2}$;

6) $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{\sin x}$; 7) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$; 8) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$;

9) $f(x)=\dfrac{1}{e^{x+1}}$; 10)• $f(x)=e^{1/x^2}$;

11) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+3}$; 12) $f(x)=\dfrac{1}{1+4^{1/x}}$; 13) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin x)^{2n}$.

5•. Дослідити на односторонню неперервність та визначити характер точок розриву функцій із вправи 8 § 4.1.

6. Довизначити функцію f у точці x_0 так, щоб вона стала неперервною у цій точці:

1) $f(x)=\dfrac{3x^3-2x}{5x}$, $x=0$; 2) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}(10x-10)}{\sin(5x-5)}$, $x_0=1$;

3) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$, $x_0=0$; 4)• $f(x)=\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}$, $x_0=1$;

5) $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$, $x_0=0$; 6) $f(x)=(2-x)^{\frac{1}{x-1}}$, $x_0=1$.

7. Чи можна довизначити функцію f у точці $x=0$ так, щоб вона стала в цій точці або неперервною зліва, або неперервною справа, або неперервною:

1) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin x$; 3) $f(x)=\dfrac{\sin(1/x)}{\sin(1/x)}$;

4)• $f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{якщо } x<0, \\ a+x, & \text{якщо } x>0; \end{cases}$ 5) $f(x)=D(x)=\begin{cases} 1, & \text{якщо } x\in\mathbf{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x\notin\mathbf{Q}; \end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, & \text{якщо } x<0, \\ \dfrac{\sqrt{x}-1}{x}, & \text{якщо } x>0; \end{cases}$ 7) $f(x)=\begin{cases} D(x), & \text{якщо } x<0, \\ xD(x), & \text{якщо } x>0; \end{cases}$

8) $f(x)=x^x$; 9) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$?

8•. Нехай функція f обмежена на проміжку $\langle a;b\rangle$, $m(x)=\inf\limits_{a<t<x} f(t)$ і $M(x)=\sup\limits_{a<t<x} f(t)$. Дослідити функції m і M на односторонню неперервність в інтервалі $(a;b)$.

9. Побудувати графік даної функції та дослідити її на неперервність:

1) $y=[x^2]$; 2) $y=[\sin x]$;

3) $y=[\ln x]$; 4) $y=\{x^2\}$;

5) $y=\{\sin x\}$; 6) $y=\{\ln x\}$.

Зразки розв'язування задач

1. 6) Якщо x_0 — усувна точка розриву функції f, то $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq \infty$, звідки за властивістю про зв'язок границі з односторонніми границями $\exists \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, тобто x_0 — точка розриву першого роду функції f.

Якщо x_0 — точка розриву першого роду функції f, то існують скінченні границі $f(x_0+)$ і $f(x_0-)$, але не обов'язково $f(x_0+) = f(x_0-)$. Наприклад, для $f(x) = \operatorname{sign} x$ маємо $f(0+) = 1$, $f(0-) = -1$.

Отже, точка розриву першого роду функції f не обов'язково є усувною точкою розриву цієї функції.

4. 3) Якщо $x \neq 0$, то функція $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x}$ неперервна як частка двох неперервних функцій. Оскільки $f(0) = 1$, а $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} = 2$, то $x = 0$ є усувною точкою розриву.

10) Функція $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$ визначена і неперервна на множині $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, то $x = 0$ є точкою розриву другого роду.

5. Розглянемо, наприклад, функцію $f(x) = \operatorname{sign}(\sin x)$ із завдання 8.6) § 4.1. Маємо

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \sin x > 0 \Leftrightarrow x \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n),\ n \in \mathbf{Z}, \\ -1, & \text{якщо } \sin x < 0 \Leftrightarrow x \in (-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n),\ n \in \mathbf{Z}, \\ 0, & \text{якщо } x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Звідси випливає, що функція f неперервна у точках $x \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Оскільки $f(2\pi n+) = 1$, $f(2\pi n-) = -1$, $f((2n+1)\pi+) = -1$, $f((2n+1)\pi-) = 1$ $\forall n \in \mathbf{Z}$, то кожна з точок $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, є неусувною точкою розриву першого роду функції f. Ці самі точки будуть усувними точками розриву зліва або справа функції f.

6. 4) Обчислимо границю заданої функції у точці $x = 1$. Маємо

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{3+x}+2} = \frac{1}{4}.$$

Якщо тепер за значення функції у точці $x = 0$ взяти число $\dfrac{1}{4}$, то функція стане неперервною у цій точці.

7. 4) Маємо

$$f(0-) = \lim_{0>x\to 0} f(x) = \lim_{0>x\to 0} e^x = 1,\quad f(0+) = \lim_{0<x\to 0} f(x) = \lim_{0<x\to 0} (a+x) = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists \lim_{x\to 0} f(x) = f(0-) = f(0+) \Leftrightarrow a = 1).$$

Отже, функцію f можна довизначити у точці $x = 0$ так, щоб вона стала неперервною у цій точці тоді й тільки тоді, коли $a = 1$ (при цьому треба покласти $f(0) = 1$). Якщо покласти $f(0) = 1$ (при довільному a), то дістанемо функцію, неперервну зліва у точці $x = 0$. Якщо покласти $f(0) = a$, то функція f стане неперервною справа у точці $x = 0$ при довільному a.

8. Нехай $x_0 \in (a;\ b)$ — довільне фіксоване число. Тоді $m(x_0) = \inf\limits_{a<t<x_0} f(t)$, а якщо $x < x_0$, то $m(x) = \inf\limits_{a<t<x} f(t) \geq \inf\limits_{a<t<x_0} f(t) = m(x_0)$, тобто m — незростаюча функція на $(a;\ b)$.

Тому $\exists \lim\limits_{x \to x_0 -} m(x) =: m(x_0 -) \geq m(x_0)$. Крім того, $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x^* \in \langle a; x_0) : \; f(x^*) < m(x_0) + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow m(x^{**}) = \inf\limits_{a<t<x^{**}} f(t) \leq f(x^*) < m(x_0) + \varepsilon \;\; \forall x^{**} > x^* \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0 -} m(x) = \lim\limits_{x^{**} \to x_0} m(x^{**}) =:$

$=: m(x_0 -) \leq m(x_0) + \varepsilon \Rightarrow m(x_0 -) \leq m(x_0)$, оскільки $\varepsilon > 0$ — довільне. Отже, $m(x_0 -) \leq$ $\leq m(x_0)$ і $m(x_0 -) \geq m(x_0) \Rightarrow m(x_0 -) = m(x_0)$, тобто функція m неперервна у точці x_0 зліва. Разом з тим для функції $f(x) = -\operatorname{sign} x$ маємо

$$m(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x \leq 0, \\ -1, & \text{якщо} \quad x > 0, \end{cases}$$

і ця функція не є неперервною справа у точці $x_0 = 0$.

Функцію M дослідити самостійно.

§ 4.3. Властивості функцій, неперервних на відрізку

Функцію f називають *неперервною на відрізку* $[a; b]$, якщо вона неперервна у кожній точці інтервалу $(a; b)$, неперервна зліва у точці b і справа — у точці a.

Нехай функція f неперервна на відрізку $[a; b]$. Тоді:

1) f — обмежена на $[a; b]$ (*перша теорема Вейєрштрасса*);

2) $\exists \max\limits_{[a;b]} f(x)$ і $\min\limits_{[a;b]} f(x)$ (*друга теорема Вейєрштрасса*);

3) множиною значень функції f на відрізку $[a; b]$ є відрізок $[\min\limits_{[a;b]} f(x); \max\limits_{[a;b]} f(x)]$ (*теорема Больцано — Коші про проміжні значення функції*);

4) f — рівномірно неперервна на $[a; b]$, тобто $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0: \; (|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \;\; \forall x', x'' \in [a; b]$ (*теорема Кантора*).

Нехай функція f є зростаючою (спадною) і неперервною на проміжку $\langle a; b \rangle$, $A = \inf\limits_{\langle a;b \rangle} f(x)$, $B = \sup\limits_{\langle a;b \rangle} f(x)$. Тоді існує обернена функція $x = f^{-1}(y)$, яка є зростаючою (спадною) на проміжку $\langle A; B \rangle$. При цьому A і B належать самому проміжку, якщо вони є значеннями функції f у точці $x = a$ або $x = b$.

Вправи

1. Виконати наведені завдання усно.

1) Перевірити, чи правильні дані твердження:

а) якщо функція f неперервна на проміжку $\langle a; b \rangle$, то вона обмежена на цьому проміжку;

б) якщо множиною значень функції f на відрізку $[a; b]$ є відрізок $[f(a); f(b)]$, то функція f неперервна на $[a; b]$;

в) якщо $f(a)\, f(b) < 0$ і функція f неперервна на $[a; b]$, то $\exists c \subset \subset (a; b):\ f(c) = 0$;

г) попереднє твердження є правильним, якщо умову неперервності функції f замінити умовою її монотонності;

д) кожна функція, рівномірно неперервна на множині E, є неперервною на цій множині.

2) Визначити, чи є обмеженими дані функції на вказаних проміжках:

а) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ \ x \in [1; 2]$;

б) $f(x) = \ln x,\ \ x \in [2; e^2]$;

в) $f(x) = 2^{-x},\ \ x \in [-3; +\infty)$;

г) $f(x) = \sin x,\ \ x \in (-\infty; \infty)$.

2. Чи правильні дані твердження:

1)• функція f рівномірно неперервна на множині E, якщо $\forall (x_n^*)$ і (x_n^{**}): $x_n^*, x_n^{**} \in E\ \ \forall n$ і $x_n^* - x_n^{**} \to 0,\ n \to \infty$, маємо $f(x_n^*) - f(x_n^{**}) \to 0,\ n \to \infty$;

2) якщо функція f неперервна на проміжку $\langle a; b \rangle$, то вона рівномірно неперервна на ньому?

3. Нехай функція f неперервна на $[a; b]$, $m(x) = \min\limits_{a \le t \le x} f(t)$ і $M(x) = \max\limits_{a \le t \le x} f(t)$. Чи є функції m і M неперервними на $[a; b]$?

4. Нехай функція f неспадна на відрізку $[a; b]$ і множина її значень на $[a; b]$ збігається з відрізком $[f(a);\ f(b)]$. Довести, що f — неперервна на $[a; b]$.

5. Переформулювати попереднє завдання для незростаючої функції та розв'язати його.

6. Нехай функція f неперервна на інтервалі $(a; b)$ та існують скінченні границі $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ і $\lim\limits_{x \to b-} f(x)$. Довести, що функція f:

1)• обмежена на $(a; b)$; 2) рівномірно неперервна на $(a; b)$.

7. Визначити, чи є обмеженими дані функції на вказаних проміжках:

1) $f(x) = 2^x + \lg(1 + x^2),\ \ x \in [0; 1]$;

2) $f(x) = \operatorname{arctg} x + e^{\sin x},\ \ x \in [0; +\infty)$;

3) $f(x) = \ln \sin x,\ \ x \in (0; \pi)$.

Чи набувають ці функції найбільшого та найменшого значень на вказаних проміжках?

8. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & -1\le x\le 0,\\ x, & 0<x\le 1,\end{cases}$$

розривна в точці $x = 0$, але має на відрізку $[-1;\ 1]$ як найбільше, так і найменше значення.

9•. Чи має рівняння $\cos x - x + 1 = 0$ дійсні корені?

10. Показати, що рівняння $x^2+2x+1=-1+\sqrt{x}$ не має дійсних коренів.

11. Чи має дане рівняння корені, які містяться на заданому відрізку:

1) $x^3-15x+2=0,\ [0;1]$; 2) $x^3+x-3=0,\ [1;2]$;

3) $x^3+6x-8=0,\ [1;1{,}5]$; 4) $x^4-3x-1=0,\ [1;2]$;

5) $x^4-4x+1=0,\ [0;1]$; 6) $x^4-2x-2=0,\ [-1;0]$;

7) $x+e^x=0,\ [-1;0]$; 8) $\operatorname{tg}x-\cos x=0,\ \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$;

9) $\ln x=\operatorname{arctg}x,\ [1;2]$; 10) $\ln^2 x-x+2=0,\ [3;4]$;

11) $x^2=e^x+2,\ [-2;-1]$?

12. Показати, що рівняння $2x^3+2x-1=0$ має один корінь на відрізку $[0;1]$ і визначити його з точністю до 0,01.

13. Функція f визначена на відрізку $[a;b]$ і на його кінцях набуває значень одного знака. Чи можна стверджувати, що на $[a;b]$ немає такої точки, в якій функція перетворюється в нуль?

14•. Чи набуває функція $f(x)=\dfrac{x^3}{2}-\sin\pi x+2$ значення 2 на відрізку $[-1;\ 1]$?

На відрізку $\left[-2;\dfrac{\pi}{4}\right]$ задано функцію

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & -2\le x<0,\\ \cos x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Чи існує на цьому відрізку точка, в якій $f(x) = 0$?

16. Нехай функція f неперервна на інтервалі $(a;b)$ і $f(x)=0$ тільки в точках x_k, $k=\overline{1,n}$, де $x_0=a<x_1<\ldots<x_n<b=x_{n+1}$.

Довести, що для кожного фіксованого $k=\overline{0,n}$ маємо $f(x)>0$ $\forall x\in(x_k;x_{k+1})$ або $f(x)<0$ $\forall x\in(x_k;x_{k+1})$ (*теоретичне обґрунтування методу інтервалів при розв'язуванні нерівностей*).

17. Методом інтервалів розв'язати нерівності:

1) $(2x+3)(x-1)^2(x+1)^3(x^2-5x+6)>0$;

2) $\dfrac{(x+1)(x^2-2x-3)}{(x-1)(x-5)(2x-3)}\le 0$;

3) $\sin 2x-\cos 2x<0$;

4)• $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}<0$;

5) $\log_a(x+1)-\log_a(2x-1)\ge\log_a(x-1)-\log_a(2x+1)$;

6) $\log_a|x^2-5x+6|<\log_a|1-x^2|$.

18. Знайти $\min f(x)$ і $\max f(x)$, якщо функція f неперервна і:

а) $f(x)\in\mathbf{Q}\quad\forall x\in[0;1]$, а $f(1/3)=0{,}4$;

б) $f(x)\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\quad\forall x\in[0;1]$, а $f(1/3)=\sqrt{2}$.

19. Довести, що функція f рівномірно неперервна на проміжку $[0;+\infty)$, якщо вона неперервна і періодична на цьому проміжку.

20. Визначити, на яких проміжках є рівномірно неперервними основні елементарні функції.

21. Довести, що функція f рівномірно неперервна на відрізку $[a;b]$, якщо вона рівномірно неперервна на відрізках $[a;c]$ і $[c;b]$ при деякому c.

22. Чи буде правильним твердження 21, якщо в ньому відрізок $[c;b]$ замінити на проміжок $(c;b]$?

23*. Нехай функція f рівномірно неперервна на інтервалі $(a;b)$, де $-\infty<a<b<+\infty$. Довести, що: а) існують скінченні $f(a+)$ і $f(b-)$; б) функція f обмежена на $(a;b)$.

24. Знайти функції, обернені до даних:

1) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $ad-bc\ne 0$; 2)• $f(x)=x+[x]$; 3) $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbf{Q},\\ -x, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q};\end{cases}$

4) $f(x)=\sin x$, $x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$; 5) $f(x)=\operatorname{tg}x$, $x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$;

6) $f(x)=\cos x$, $x\in[0;2\pi]$; 7) $f(x)=\left(1+x^2\right)\operatorname{sign}x$.

25. Функція $f\colon A\leftrightarrow B$ неперервна на множині A. Чи може обернена функція $f^{-1}\colon B\leftrightarrow A$ бути розривною на множині B?

26. Довести дані тотожності:

1) $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$, $x\in[-1;1]$;

2) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sign}x$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

27. Стріла провисання (в сантиметрах) телеграфного проводу визначається з рівняння $h^3 - 2241h - 146\,600 = 0$. Знайти наближений розв'язок цього рівняння з точністю до 0,1, враховуючи, що $60 \le h \le 70$.

28. Показати, що так зване рівняння Кеплера $x = \varepsilon \sin x + a$, де $0 < \varepsilon < 1$, має лише один дійсний корінь, і визначити його з точністю до 0,01 при $\varepsilon = 0{,}54$ і $a = 1$.

29.[×] Нехай функція f неперервна на $\mathbf{R}$ та має своїми періодами числа $0 < T_1 \in \mathbf{Q}$ і $0 < T_2 \notin \mathbf{Q}$. Довести, що $f(x) = \text{const}$.

Зразки розв'язування задач

2. 1) Нехай f — рівномірно неперервна функція на множині E, тобто $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : \left(|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \forall\, x', x'' \in E\right)$. Візьмемо $\forall\left(x_n^*\right)$ і $\left(x_n^{**}\right)$: $x_n^*, x_n^{**} \in E$ $\forall n$ і $x_n^* - x_n^{**} \to 0$, $n \to \infty$. Тоді за означенням границі послідовності для числа $\delta(\varepsilon)$ $\exists n_0(\varepsilon)$: $\left(n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left|x_n^* - x_n^{**}\right| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left|f\left(x_n^{**}\right) - f\left(x_n^{**}\right)\right| < \varepsilon \quad \forall\, n > n_0(\varepsilon)\right)$, тобто $f\left(x_n^*\right) - f\left(x_n^{**}\right) \to 0$, $n \to \infty$. Отже, необхідність даного твердження виконується.

Нехай тепер $\forall\left(x_n^*\right)$ і $\left(x_n^{**}\right)$: $x_n^*, x_n^{**} \in E$ і $x_n^* - x_n^{**} \to 0$ маємо $f\left(x_n^*\right) - f\left(x_n^{**}\right) \to 0$, $n \to \infty$. Треба довести рівномірну неперервність функції на множині E. Припустимо, що це не так, тобто $\exists\, \varepsilon > 0$: $\forall \delta > 0$ $\exists x'$ і $x'' \in E$: $\left(|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \ge \varepsilon\right]$. Покладаючи $\delta = \frac{1}{n}$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$, знаходимо x_n^* і x_n^{**}: $\left|x_n^* - x_n^{**}\right| < \frac{1}{n}$, але $\left|f\left(x_n^*\right) - f\left(x_n^{**}\right)\right| \ge \varepsilon$. Звідси випливає, що $x_n^* - x_n^{**} \to 0$, проте $f\left(x_n^*\right) - f\left(x_n^{**}\right) \not\to 0$, $n \to \infty$, що неможливо. Отже, достатність також виконується, тому задане твердження є правильним.

6. 1) Нехай $A = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$, $B = \lim\limits_{x \to b-} f(x)$. За означенням односторонніх границь $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\left(0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \text{ і } 0 < b - x < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon\right)$. Вважатимемо $\delta(\varepsilon) > 0$ досить малим: $a + \delta < b + \delta$. Тоді на інтервалі $(a; a + \delta)$ маємо $|f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| < |A| + \varepsilon$, а на інтервалі $(b - \delta; b)$ маємо $|f(x) - B| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| < |B| + \varepsilon$. На відрізку $[a + \delta; b - \delta]$ функція f неперервна, а тому обмежена (за першою теоремою Вейєрштрасса), тобто $\exists\, H > 0$: $|f(x)| < H$ $\forall x \in [a + \delta; b - \delta]$. Покладаємо $M = \max\{|A| + \varepsilon,\ |B| + \varepsilon,\ H\}$. Тоді $|f(x)| < M$ $\forall x \in (a; b)$, тобто функція f обмежена на проміжку $(a; b)$.

9. Функція $f(x) = \cos x - x + 1$ неперервна на множині $\mathbf{R}$ і змінює знак, оскільки $f(0) = 2$, а $f(\pi) = -\pi$. Отже, за теоремою Больцано—Коші на інтервалі $(0; \pi)$ є принаймні один корінь цього рівняння.

14. Функція $f(x) = \frac{x^3}{2} - \sin \pi x + 2$ неперервна на відрізку $[-1; 1]$. Крім того, на кінцях цього відрізка вона набуває значень $f(-1) = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$, $f(1) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$. Оскільки $\frac{3}{2} < 2 < \frac{5}{2}$, то згідно з теоремою Больцано—Коші всередині відрізка $[-1; 1]$ існує принаймні одна точка x така, що $f(x) = 2$.

17. 4) Оскільки

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{3}=\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}-\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}}=\frac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{3}\right)}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}}=\frac{\sin\frac{x}{6}}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}}<0$$

тоді й тільки тоді, коли $\sin\frac{x}{6}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}<0$, то за методом інтервалів знайдемо спочатку корені рівняння $\sin\frac{x}{6}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}=0$.

Маємо

$$\sin\frac{x}{6}=0 \Leftrightarrow \frac{x}{6}=\pi k \Leftrightarrow x=6\pi k, \quad k\in Z,$$

$$\cos\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi m \Leftrightarrow x=\pi+2\pi m, \quad m\in Z,$$

$$\cos\frac{x}{3}=0 \Leftrightarrow \frac{x}{3}=\frac{\pi}{2}+\pi n \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{2}+3\pi n, \quad n\in Z.$$

Виділимо точки — корені заданого рівняння, які містяться на відрізку $[0;6\pi]$: 0, π, $\frac{3\pi}{2}$, 3π, $\frac{9\pi}{2}$, 5π і 6π. Ці точки поділяють інтервал $(0;6\pi)$ на шість інтервалів: $(0;\pi)$, $\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2};3\pi\right)$, $\left(3\pi;\frac{9\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{9\pi}{2};5\pi\right)$ і $(5\pi;6\pi)$, у кожному з яких визначаємо знак добутку $\sin\frac{x}{6}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}$ за допомогою довільних точок з цих інтервалів. У результаті дістаємо, що

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{3}<0 \Leftrightarrow x\in\left(\pi+6\pi k;\frac{3\pi}{2}+6\pi k\right)\cup\left(3\pi+6\pi k;\frac{9\pi}{2}+6\pi k\right)\cup$$
$$\cup(5\pi+6\pi k;6\pi+6\pi k).$$

24. 2) На кожному з проміжків $[n;n+1]$, $n\in Z$, маємо $f(x)=x+n=y\in[2n;2n+1]$. Звідси випливає, що $x=y-n=f^{-1}(y)$, якщо $y\in[2n;2n+1]$, $n\in Z$.

Розділ 5 ПОХІДНА І ДИФЕРЕНЦІАЛ

§ 5.1. Поняття похідної, її геометричний та механічний зміст

Нехай дано криву $y = f(x)$ (тобто графік функції f) і точки $M_0(x_0, f(x_0))$, $M_1(x_1, f(x_1))$ цієї кривої. Пряму M_0M_1 називають *січною* даної кривої; її рівняння $y - f(x_0) = k(\Delta x)(x - x_0)$, де $\Delta x = x_1 - x_0$ — приріст незалежної змінної у точці x_0, $\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приріст функції f у точці x_0, а $k(\Delta x) = \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ — кутовий коефіцієнт січної (рис. 7).

Якщо існує $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = k(x_0)$, то пряму $y - y_0 = k(x_0)(x - x_0)$ називають *дотичною* до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0, f(x_0))$.

Нехай матеріальна точка рухається по прямій за законом $s = s(t)$ (шлях s є функцією часу t). *Середньою швидкістю* точки за проміжок часу від t_0 до t називають відношення $\dfrac{\Delta s(t_0)}{\Delta t} =: v_c$, де $\Delta t = t - t_0$, $\Delta s(t_0) = s(t) - s(t_0)$, а *миттєвою швидкістю* або просто *швидкістю* цієї точки у момент часу t_0 називають скінченну границю (якщо вона існує) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta s(t_0)}{\Delta t} =: v(t_0)$. Є й інші задачі, розв'язування яких вимагає обчислення границі вигляду $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Похідною функції f у точці x_0 називають границю (якщо вона існує)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} =: f'(x_0) =: \frac{df(x_0)}{dx}. \qquad (1)$$

Якщо цієї границі не існує, то вважають, що функція f у точці x_0 похідної не має.

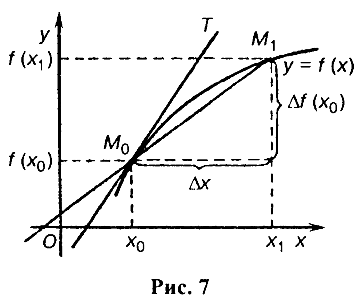


Рис. 7

Геометрично похідна $f'(x_0)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0, f(x_0))$. Рівняння цієї дотичної має вигляд $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Під кутом φ між прямою і віссю Ox розуміють кут, який відраховується від додатного напряму осі Ox до даної прямої проти годинникової стрілки. І оскільки кутовий коефіцієнт k прямої дорівнює тангенсу кута між прямою і віссю Ox, то, знаючи k, кут φ обчислюють за формулою

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} k, & \text{якщо } k \geq 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} k, & \text{якщо } k < 0. \end{cases}$$

Пряму, що проходить через точку дотику $M_0(x_0, f(x_0))$ перпендикулярно до дотичної до графіка функції f у точці $M_0(x_0, f(x_0))$, називають *нормаллю* до графіка функції f у точці M_0. Кутові коефіцієнти дотичної $k_д$ і нормалі $k_н$ пов'язані між собою співвідношенням $k_д k_н = -1$. Тому $k_н = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$, а рівняння нормалі до графіка функції f у точці $M_0(x_0, f(x_0))$ має вигляд

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Механічний зміст похідної: $s'(t_0)$ — це швидкість матеріальної точки, яка рухається по прямій за законом $s = s(t)$, у момент часу t_0.

Лівою (правою) похідною функції f у точці x_0 називають границю

$$\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} =: f'_-(x_0); \tag{2}$$

$$\left(\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} =: f'_+(x_0) \right). \tag{3}$$

Зв'язок похідної з односторонніми похідними задається співвідношенням

$$\left(\exists f'(x_0) \neq \infty\right) \Leftrightarrow \left(\exists f'_-(x_0) \text{ і } f'_+(x_0) : f'_-(x_0) = f'_+(x_0)\right).$$

Ліва (права) дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці $(x_0, f(x_0))$ — це пряма $y - f(x_0) = k(x - x_0)$, де $k = f'_-(x_0) \neq \infty \left(k = f'_+(x_0) \neq \infty\right)$.

Якщо ліва (права) похідна функції f у точці x_0 нескінченна, а сама функція f неперервна в точці x_0, то $f'_-(x_0)=+\infty$ або $f'_-(x_0)=-\infty$ $\left(f'_+(x_0)=+\infty\right.$ або $\left.f'_+(x_0)=-\infty\right)$. Якщо функція неперервна в точці x_0 і:

а) $f'(x_0)=\infty$; б) $f'_-(x_0)=\infty$; в) $f'_+(x_0)=\infty$, то пряма $x=x_0$ є:

а) вертикальною дотичною; б) вертикальною лівою дотичною; в) вертикальною правою дотичною до графіка функції $y=f(x)$ у точці $(x_0, f(x_0))$, тобто дотична паралельна осі Oy.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) $\Delta(f(x)+\varphi(x))=\Delta f(x)+\Delta\varphi(x)$, $\Delta(f(x)\varphi(x))=f(x)\Delta\varphi(x)+\varphi(x+\Delta x)\times$ $\times\Delta f(x)$;

2) нехай похідна $f'(x_0)$ скінченна. Тоді $f'(x_0)\approx\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ і абсолютну похибку цього наближення можна зробити як завгодно малою, якщо взяти $\Delta x\neq$ $\neq 0$ досить малим;

3) якщо існує $f'(x_0)=k$, то $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)\right)=k$;

4)• твердження, обернене до 3), є правильним;

5) якщо $\exists f'(x_0)\neq\infty$, то функція f неперервна в точці x_0;

6) якщо функція f має в точці x_0 ліву та праву похідні, то вона має в цій точці і похідну;

7) якщо $f'(x_0)=\infty$, то $f'(x_0)=+\infty$ або $f'(x_0)=-\infty$;

8) якщо $f'(x_0)<0$, то $\exists\delta>0$: $f(x)>f(x_0)$ $\forall x\in(x_0-\delta;\ x_0)$ і $f(x)<$ $<f(x_0)$ $\forall x\in(x_0;\ x_0+\delta)$?

2. Знайти приріст функції f у точці x_0, якщо:

1) $f(x)=kx+b$; 2) $f(x)=ax^2+bx+c$; 3) $f(x)=k/x$; 4) $f(x)=\sqrt{x}$;

5) $f(x)=a^x$; 6) $f(x)=\log_a x$; 7) $f(x)=\sin x$; 8) $f(x)=\cos x$;

9)• $f(x)=\operatorname{tg}^4 x$; 10) $f(x)=\operatorname{ctg}5x$; 11) $f(x)=\arcsin\sqrt{x}$;

12) $f(x)=\operatorname{arctg}x$; 13) $f(x)=\sqrt{5x+1}$; 14)• $f(x)=\sqrt[3]{x^2+3x-1}$;

15) $f(x)=\sin^2 x$; 16) $f(x)=\cos^2 x$; 17) $f(x)=\arcsin^3 x$;

18)• $f(x)=\operatorname{arctg}^3 x$; 19) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$; 20) $f(x)=\sin^4 5x$.

3. Для графіка функції f знайти кутовий коефіцієнт $k(\Delta x)$ січної, яка проходить через точки A і B, абсциси яких x_0 і $x_0+\Delta x$ відповідно, якщо:

1) $f(x)=x^2$; 2) $f(x)=x^3$; 3) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; 4)• $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

Обчислити значення $k(\Delta x)$ для $x_0=1$ і Δx, що дорівнює 1; 0,1; 0,01; 0,001.

4. 1) Матеріальна точка рухається за законом $s=t^2+5t+6$, де t — час, с; s — відстань, м. Знайти середню швидкість точки за проміжок часу від $t_0=2$ до $t_0+\Delta t=2+\Delta t$ і обчислити її значення для Δt, що дорівнює 1; 0,1; 0,01; 0,001. Яка швидкість точки у момент часу $t_0=2$?

2) Тіло рухається з швидкістю $v(t)=3t^2-5t$ м/с. Знайти середнє прискорення за проміжки часу від $t=3$ с до $t=7$ с і від $t=10$ с до $t=14$ с, а також миттєве прискорення у моменти часу $t=3$ с, $t=10$ с, $t=t_0$.

3) Маса тонкого стрижня AB, довжина якого 36 см, у будь-якій точці C, яка лежить на відстані x від точки A, визначається за формулою $m(x)=$ $=6x^2-\sqrt{x}$ (г). Знайти середню густину для частини стрижня, що лежить між точками $x=9$ см і $x=25$ см, і для всього стрижня AB та лінійну густину в точці $x_0\in[0;36]$, зокрема в точці $x_0=16$.

4) Колінчастий вал за час t обертається на кут $\varphi(t)=40+27t-t^3$ радіан. Визначити: а) середню кутову швидкість обертання вала за проміжок часу від t_0 до $t_0+\Delta t$, зокрема, якщо $t_0=2$ і Δt дорівнює 1; 0,1; 0,01; 0,00001; б) миттєву кутову швидкість у момент часу $t_0=2$; в) в який момент вал перестане обертатися?

5•. Виходячи з означення $f'(x_0)$, знайти похідні вказаних у завданні 2 функцій у точці, абсциса якої дорівнює x_0.

6. 1) Під якими кутами парабола $y=9-x^2$ перетинає вісь Ox?

2) Під яким кутом до осі Ox нахилена дотична до графіка функції $f(x)=x^3-3x$ у точці перетину її з віссю Oy?

3) Під яким кутом дотична до графіка функції $f(x)=\operatorname{ctg} x$, проведена в точці з абсцисою $\dfrac{\pi}{2}$, перетинає вісь Ox?

4)• Під якими кутами синусоїда перетинає вісь Ox?

5) Який кут утворюють з віссю Ox дотичні до графіка функції $f(x)=$ $=x^3-x^2-x+5$ у точках з абсцисами 0; 1; 2?

7. Визначити, чи існує похідна, ліва та права похідні функції f у точці $x_0 = 0$, якщо:

1) $f(x) = |x|$;

2) $f(x) = \left| x^3 \right|$;

3) $f(x) = \operatorname{sign} x$;

4) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \end{cases}$ 5) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 0, \\ ax + b, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$ 7) $f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{якщо } x \leq 0, \\ ax + b, & \text{якщо } x > 0, \end{cases}$

де φ має ліву похідну у точці $x_0 = 0$;

8)• $f(x) = [x]\sin \pi x$.

8. Записати рівняння дотичних до графіків функцій f у точках з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x) = x^2 + 4x - 2$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;

3) $f(x) = \operatorname{tg}^4 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; 4)• $f(x) = \arcsin\sqrt{x}$, $x_0 = \frac{1}{4}$;

5) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$; 6) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$;

7) $f(x) = a^x$, $x_0 = 0$; 8) $f(x) = \frac{8}{x}$, $x_0 = 2$;

9) $f(x) = \operatorname{ctg} 5x$, $x_0 = \frac{\pi}{20}$; 10) $f(x) = \operatorname{arctg}^3 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

11) $f(x) = \log_a x$, $x_0 = 1$; 12) $f(x) = \sqrt{5x+1}$, $x_0 = 3$;

13) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 1}$, $x_0 = 4$; 14) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;

15) $f(x) = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; 16) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $x_0 = 1$.

9. Нехай $f'(x_0) > 0$. Довести, що $\exists \delta > 0$: $f(x) > f(x_0)$, якщо $x \in (x_0;\ x_0 + \delta)$, і $f(x) < f(x_0)$, якщо $x \in (x_0 - \delta; x_0)$. Розглянути аналогічне твердження для випадку $f'(x_0) < 0$.

10. Нехай функція f неперервна на $[a;\ b]$, а точка $x_0 \in (a;\ b)$ така, що $f(x_0) = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ або $f(x_0) = \min\limits_{[a;b]} f(x)$, причому $\exists\, f'(x_0) \neq \infty$. Довести, що $f'(x_0) = 0$ (*теорема Ферма*).

11•. Нехай функція f має скінченну похідну на $[a;b]$ і $m = \inf\limits_{[a;b]} f'(x) < M = \sup\limits_{[a;b]} f'(x)$. Довести, що $\forall c \in (m; M)$ $\exists x^* \in (a;b)$: $f'(x^*) = c$ (*теорема Лебега*).

12. Нехай функція f неперервна в точці x_0 та має скінченну похідну в проколеному околі цієї точки. Довести, що коли існує $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$, то існує і $f'(x_0)$, причому $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

Зразки розв'язування задач

1. 4) Розглянемо функцію Діріхле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$$

і точку $x_0 = 0 \in \mathbf{Q}$. Тоді $x_0 + \frac{1}{n} \in \mathbf{Q}$, а тому $f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0) = 1 - 1 = 0$.

Отже, і $n\left(f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0)\right) = 0 \to 0, \quad n \to \infty$. Проте

$$\Delta f(x_0) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \Delta x \in \mathbf{Q}, \\ -1, & \text{якщо } \Delta x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Тому $\lim\limits_{\mathbf{Q} \ni \Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 0$, а $\lim\limits_{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \ni \Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \infty$, тобто не існує $f'(x_0)$. Отже, задане твердження неправильне.

2. 9), 14), 18) Див. розв'язання 5.9), 14), 18).

3. 4) Кутовий коефіцієнт січної графіка функції f, що проходить через точки $(x_0, f(x_0))$ і $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, дорівнює відношенню $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Приріст функції f у точці x_0

$$\Delta f(x_0) = -\frac{1}{(x_0 + \Delta x)^2} + \frac{1}{x_0^2} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{x_0^2 (x_0 + \Delta x)^2}.$$

Звідси

$$k(\Delta x) = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2x_0 + \Delta x}{x_0^2 (x_0 + \Delta x)^2}.$$

Якщо $x_0 = 1$, то $k(\Delta x) = \frac{2 + \Delta x}{(1 + \Delta x)^2}$.

За цією формулою для різних значень Δx наведемо результати розрахунків значення $k(\Delta x)$:

Δx	1	0,1	0,01	0,001
$k(\Delta x)$	0,75	1,73554	1,97039	1,99700

Звідси бачимо, що коли $\Delta x \to 0$, то $k(\Delta x) \to k_{д}(1) = 2$.

Отже, значення кутового коефіцієнта січної $k(\Delta x)$ спочатку знайдено для довільної точки x_0, а потім обчислено його значення для $x_0 = 1$. Величину $k(\Delta x)$ можна обчислити, виходячи із значення $x_0 = 1$. Оскільки

$$\Delta f(1) = f(1+\Delta x) - f(1) = -\frac{1}{(1+\Delta x)^2} + 1 = \frac{\Delta x(2+\Delta x)}{(1+\Delta x)^2},$$

то

$$k(\Delta x) = \frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \frac{2+\Delta x}{(1+\Delta x)^2}.$$

5. 9) Приріст функції f у точці x_0

$$\Delta f(x_0) = \mathrm{tg}^4(x_0+\Delta x) - \mathrm{tg}^4 x_0 = \left(\mathrm{tg}^3(x_0+\Delta x) + \mathrm{tg}^2(x_0+\Delta x)\,\mathrm{tg}\,x_0 + \right.$$

$$\left. + \mathrm{tg}(x_0+\Delta x)\,\mathrm{tg}^2 x_0 + \mathrm{tg}^3 x_0\right)\left(\mathrm{tg}(x_0+\Delta x) - \mathrm{tg}\,x_0\right) = \left(\mathrm{tg}^3(x_0+\Delta x) + \right.$$

$$\left. + \mathrm{tg}^2(x_0+\Delta x)\,\mathrm{tg}\,x_0 + \mathrm{tg}(x_0+\Delta x)\,\mathrm{tg}^2 x_0 + \mathrm{tg}^3 x_0\right)\frac{\sin\Delta x}{\cos(x_0+\Delta x)\cos x_0}.$$

Складаємо відношення

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{tg}^3(x_0+\Delta x) + \mathrm{tg}^2(x_0+\Delta x)\,\mathrm{tg}\,x_0 + \mathrm{tg}(x_0+\Delta x)\,\mathrm{tg}^2 x_0 + \mathrm{tg}^3 x_0}{\cos(x_0+\Delta x)\cos x_0} \cdot \frac{\sin\Delta x}{\Delta x}.$$

Отже,

$$\left(\mathrm{tg}^4 x\right)'\Big|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{4\,\mathrm{tg}^3 x_0}{\cos^2 x_0}.$$

14) Надамо аргументу x_0 приріст $\Delta x \neq 0$. Тоді функція f дістане приріст

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \sqrt[3]{(x_0+\Delta x)^2 + 3(x_0+\Delta x) - 1} - \sqrt[3]{x_0^2 + 3x_0 - 1} =$$

$$= \frac{(2x_0+3)\Delta x + \Delta x^2}{\sqrt[3]{\left((x_0+\Delta x)^2 + 3(x_0+\Delta x) - 1\right)^2} + \sqrt[3]{\left((x_0+\Delta x)^2 + 3(x_0+\Delta x) - 1\right)\left(x_0^2+3x_0-1\right)} + \sqrt[3]{\left(x_0^2+3x_0-1\right)^2}}$$

(тут скористалися формулою $(a-b) = \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)$). Тоді середня швидкість зміни функції f на проміжку з кінцями в точках x_0 і $x_0 + \Delta x$ обчислюється за формулою

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2x_0 + 3 + \Delta x}{\sqrt[3]{\left((x_0+\Delta x)^2 + 3(x_0+\Delta x) - 1\right)^2} + \sqrt[3]{\left((x_0+\Delta x)^2 + 3(x_0+\Delta x) - 1\right)\left(x_0^2+3x_0-1\right)} + \sqrt[3]{\left(x_0^2+3x_0-1\right)^2}}.$$

Звідси $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{2x_0+3}{3\sqrt[3]{\left(x_0^2+3x_0-1\right)^2}}$.

18) Якщо x_0 надати приріст $\Delta x\neq 0$, то функція f у точці x_0 дістане приріст

$$\Delta f(x_0)=\operatorname{arctg}^3(x_0+\Delta x)-\operatorname{arctg}^3 x_0=\left(\operatorname{arctg}\ (x_0+\Delta x)-\operatorname{arctg}\ x_0\right)\times$$
$$\times\left(\operatorname{arctg}^2(x_0+\Delta x)+\operatorname{arctg}(x_0+\Delta x)\operatorname{arctg}x_0+\operatorname{arctg}^2 x_0\right).$$

Нехай $A=\operatorname{arctg}(x_0+\Delta x)-\operatorname{arctg}x_0$. Тоді

$$\operatorname{tg}A=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x_0+\Delta x))-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x_0)}{1+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x_0+\Delta x))\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x_0)}=\frac{\Delta x}{1+x_0^2+x_0\Delta x}.$$

Звідси

$$A=\operatorname{arctg}\frac{\Delta x}{1+x_0^2+x_0\Delta x},$$

$$\Delta f(x_0)=\operatorname{arctg}\frac{\Delta x}{1+x_0^2+x_0\Delta x}\left(\operatorname{arctg}^2(x_0+\Delta x)+\operatorname{arctg}(x_0+\Delta x)\operatorname{arctg}x_0+\operatorname{arctg}^2 x_0\right).$$

Для середньої швидкості зміни функції $f(x)=\operatorname{arctg}^3 x$ на проміжку з кінцями в точках x_0 і $x_0+\Delta x$, або, що те саме, для кутового коефіцієнта січної до графіка функції *f*, що проходить через точки $\left(x_0, \operatorname{arctg}^3 x_0\right)$ і $\left(x_0+\Delta x, \operatorname{arctg}^3(x_0+\Delta x)\right)$, дістаємо

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\operatorname{arctg}\frac{\Delta x}{1+x_0^2+x_0\Delta x}\left(\operatorname{arctg}^2(x_0+\Delta x)+\operatorname{arctg}(x_0+\Delta x)\operatorname{arctg}x_0+\operatorname{arctg}^2 x_0\right).$$

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\operatorname{arctg}(x_0+\Delta x)=\operatorname{arctg}x_0$,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\operatorname{arctg}\frac{\Delta x}{1+x_0^2+x_0\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left(1+x_0^2+x_0\Delta x\right)}=\frac{1}{1+x_0^2}$$

(скористалися тим, що $\operatorname{arctg}\dfrac{\Delta x}{1+x_0^2+x_0\Delta x}\sim\dfrac{\Delta x}{1+x_0^2+x_0\Delta x}$, $\Delta x\to 0$), то

$$\left(\operatorname{arctg}^3 x\right)'\Big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\frac{3\operatorname{arctg}^2 x_0}{1+x_0^2}.$$

6. 4) Синусоїда перетинає вісь *Ox* у точках $x=\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$. Під кутом між графіком функції f і віссю *Ox* розуміють кут між дотичною до графіка цієї функції у точці перетину її з віссю *Ox* і самою віссю *Ox*, який відлічується від додатного напряму осі *Ox* проти годинникової стрілки. Оскільки $(\sin x)'=\cos x$, то

$$\operatorname{tg}\alpha=\cos 2\pi k=1,\ k\in\mathbf{Z}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}\ \text{для}\ x=2\pi k,\ k\in\mathbf{Z},$$

$$\operatorname{tg}\beta=\cos 2\pi(k+1/2)=-1,\ k\in\mathbf{Z}\Rightarrow\beta=\frac{3\pi}{4}\ \text{для}\ x=2\pi(k+1/2),\ k\in\mathbf{Z}.$$

Отже, синусоїда перетинає вісь абсцис у точках $x=2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$, під кутом 45°, а в точках $x=2\pi(k+1/2),\ k\in\mathbf{Z}$, під кутом 135°.

7. 8) Нехай $\Delta x > 0$, тоді $\Delta f(0) = f(\Delta x) - f(0) = [\Delta x]\sin\pi\,\Delta x = 0$, якщо $0 < \Delta x < 1$, то $\dfrac{\Delta f(0)}{\Delta x} = 0 \to 0(0 < \Delta x \to 0)$, тобто $f'_+(0) = 0$.

Якщо $\Delta x < 0$, то $\Delta f(0) = f(\Delta x) - f(0) = [\Delta x]\sin\pi\,\Delta x = -\sin\pi\Delta x$, якщо $-1 < \Delta x < 0$, то $\dfrac{\Delta f(0)}{\Delta x} = -\dfrac{\sin\pi\Delta x}{\pi\Delta x}\pi \to -\pi(0 > \Delta x \to 0)$, тобто $f'_-(0) = -\pi$. Оскільки $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, то $f'(0)$ не існує.

8. 4) Щоб записати рівняння дотичної до графіка функції f у точці $(x_0, f(x_0))$, треба знайти її кутовий коефіцієнт $k_д(x_0)$. Він дорівнює значенню похідної f' у точці x_0. Надамо $x = x_0$ приросту $\Delta x \neq 0$. Тоді функція f у точці x_0 дістане приріст

$$\Delta f(x_0) = \arcsin\sqrt{x_0 + \Delta x} - \arcsin\sqrt{x_0} = \arcsin\left(\sqrt{x_0 + \Delta x}\cdot\sqrt{1 - x_0} - \sqrt{x_0}\cdot\sqrt{1 - (x_0 + \Delta x)}\right) =$$

$$= \arcsin\left(\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right)\sqrt{1 - x_0} + \sqrt{x_0}\left(\sqrt{1 - x_0} - \sqrt{1 - (x_0 + \Delta x)}\right)\right) =$$

$$= \arcsin\left(\frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}\sqrt{1 - x_0} + \sqrt{x_0}\frac{\Delta x}{\sqrt{1 - x_0} + \sqrt{1 - (x_0 + \Delta x)}}\right)$$

(тут скористалися тотожністю $\sin(\arcsin\alpha - \arcsin\beta) = \alpha\sqrt{1 - \beta^2} - \beta\sqrt{1 - \alpha^2}$ і тотожними перетвореннями).

Оскільки нескінченно малий приріст функції $\Delta f(x_0)$ еквівалентний при $\Delta x \to 0$ нескінченно малій величині

$$\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta x\sqrt{1 - x_0}}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} + \frac{\Delta x\sqrt{x_0}}{\sqrt{1 - x_0} + \sqrt{1 - x_0 - \Delta x}},$$

то його можна записати так: $\Delta f(x_0) = \alpha(\Delta x)g(\Delta x)$, де $g(\Delta x) \to 1$, $\Delta x \to 0$. Отже,

$$\Delta f(x_0) = \left(\frac{\Delta x\sqrt{1 - x_0}}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} + \frac{\Delta x\sqrt{x_0}}{\sqrt{1 - x_0} + \sqrt{1 - x_0 - \Delta x}}\right)g(\Delta x).$$

Для кутового коефіцієнта січної, яка проходить через точки $(x_0, f(x_0))$ і $(x_0 + \Delta x,$ $f(x_0 + \Delta x))$ графіка функції f, дістаємо такий вираз:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \left(\frac{\sqrt{1 - x_0}}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} + \frac{\sqrt{x_0}}{\sqrt{1 - x_0} + \sqrt{1 - x_0 - \Delta x}}\right)g(\Delta x).$$

Звідси

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{1 - x_0}}{2\sqrt{x_0}} + \frac{\sqrt{x_0}}{2\sqrt{1 - x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}\sqrt{1 - x_0}}.$$

Отже, $k_д(x_0) = f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}\sqrt{1 - x_0}}$.

Зокрема, якщо $x_0 = \frac{1}{4}$, то $\arcsin\sqrt{\frac{1}{4}} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $k_д\left(\frac{1}{4}\right) = f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, а рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \arcsin\sqrt{x}$ у точці $\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$ має вигляд

$$y = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{\pi}{6}, \text{ або } y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\pi}{6}.$$

11. Нехай $c \in (m; M)$ — довільне фіксоване число. Розглянемо функцію $\varphi(x) = f(x) - cx \Rightarrow \varphi'(x) = f'(x) - c$ (показати це), $M_1 = \sup\varphi'(x) = M - c > 0$, $m_1 = \inf\varphi'(x) = m - c < 0$. За властивостями супремуму та інфімуму існують точки $x_1, x_2 \in [a; b]$: $m_1 \le \varphi'(x_1) < 0 < \varphi'(x_2) \le M$.

Зрозуміло, що $x_1 \ne x_2$. Припустимо, що $x_1 > x_2$. Оскільки за твердженням вправи 1.5) функція φ неперервна на $[x_2; x_1]$, то за другою теоремою Вейєрштрасса $\exists\, x^* \in [x_2; x_1]$: $\varphi(x^*) = \max\limits_{[x_2,\, x_1]} \varphi(x)$. За задачею 9 $x^* \ne x_1$ і $x^* \ne x_2$, тобто $x^* \in (x_2; x_1) \Rightarrow$ за задачею 10 $\varphi'(x^*) = 0$, тобто $f'(x^*) - c = 0 \Leftrightarrow f'(x^*) = c$.

Якщо $x_1 < x_2$, то за другою теоремою Вейєрштрасса $\exists\, x^* \in [x_1; x_2]$: $\varphi(x^*) = \min\limits_{[x_1,\, x_2]} \varphi(x)$ і тепер завершуємо міркування так, як і у випадку $x_1 > x_2$.

§ 5.2. Найпростіші властивості диференційовних функцій. Похідні основних елементарних функцій

Функцію f називають *диференційовною в точці* x, якщо $\exists f'(x) \ne \infty$.

Критерій диференційовності функції через її приріст записують у вигляді:

$$f \text{ — диференційовна в точці } x \Leftrightarrow \Delta f(x) = A(x)\Delta x + \alpha(x, \Delta x)\Delta x,$$

де $A(x)$ не залежить від Δx, а $\alpha(x, \Delta x) \to 0$, $\Delta x \to 0$.

Функцію f називають *диференційовною зліва* (*справа*) в точці x, якщо $\exists f'_-(x_0) \ne \infty$ $(\exists f'_+(x_0) \ne \infty)$.

Функцію f називають *диференційовною в інтервалі* $(a; b)$, якщо вона диференційовна у кожній точці цього інтервалу.

Властивості диференційовних функцій

1. *Зв'язок диференційовності з неперервністю*: якщо функція f диференційовна в точці x, то вона неперервна у цій точці (необхідна умова диференційовності функції). Проте не кожна неперервна в точці x функція є диференційовною.

2. *Диференційовність суми, різниці, добутку та частки*: якщо функції f і φ диференційовні в точці x, то $f \pm \varphi$, $f\varphi$ і $\frac{f}{\varphi}$ (якщо $\varphi(x) \ne 0$) також диференційовні у цій точці. При цьому

$$(f(x)\pm\varphi(x))' := (f\pm\varphi)'(x) = f'(x)\pm\varphi'(x),$$

$$(f(x)\varphi(x))' := (f\varphi)'(x) = f'(x)\varphi(x)+f(x)\varphi'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)' := \left(\frac{f}{\varphi}\right)'(x) = (f'(x)\varphi(x)-f(x)\varphi'(x))/\varphi^2(x).$$

3. *Диференційовність лінійної комбінації*: якщо функції f_k, $k=\overline{1,n}$, диференційовні в точці x, а c_k, $k=\overline{1,n}$ — деякі сталі, то функція $F(x)= =\sum\limits_{k=1}^{n} c_k f_k(x)$ диференційовна в цій точці. При цьому

$$F'(x)=\left(\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k'(x).$$

Зокрема, $(c_k f_k(x))' = c_k f_k'(x)$.

4. *Диференційовність складної функції*: нехай функція f диференційовна в точці u, а $u=\varphi(x)$ — диференційовна в точці x. Тоді складна функція $(f\circ\varphi)(x) =: f(\varphi(x))$ диференційовна в точці x і $(f\circ\varphi)'(x) = f'(u)\varphi'(x)$.

5. *Диференційовність оберненої функції*: нехай функція f строго монотонна і неперервна на проміжку $\langle a;b\rangle$ та диференційовна в точці $x\in(a;\,b)$, причому $f'(x)\neq 0$. Тоді обернена до f функція $f^{-1}(y)$ диференційовна в точці $y=f(x)$. При цьому $\left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$.

Таблиця основних похідних

1. $(C)'=0$, де C — довільна стала. **2.** $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

3. $\left(a^x\right)' = a^x\ln a$, зокрема $\left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x$.

4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, зокрема $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

5. $(\sin x)' = \cos x$. **6.** $(\cos x)' = -\sin x$.

7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. **8.** $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **10.** $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$. **12.** $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Для відшукання похідної степенево-показникової функції $F(x)=(u(x))^{v(x)}$, $u(x)>0$, її доцільно записати так:

$$F(x)=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}.$$

Функцію f називають *параметрично заданою* системою рівнянь

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad t\in\langle\alpha;\beta\rangle,$$

де φ зростає (спадає) і неперервна на $\langle\alpha;\beta\rangle$, якщо

$$f(x)=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right).$$

Нехай функцію f задано параметрично системою рівнянь

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad t\in(\alpha;\beta),$$

де φ і ψ — диференційовні функції в точці $t_0\in(\alpha;\beta)$, $\varphi'(t_0)\neq 0$ і $x_0=\varphi(t_0)$. Тоді функція f диференційовна в точці x_0 і

$$f'(x_0):=\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)'(x_0)=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) якщо функція f диференційовна в точці x, то вона має в цій точці похідну;

2) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

3) функція f диференційовна в точці x, якщо f диференційовна зліва і справа у цій точці;

4)• якщо функція f диференційовна в точці x_0, то вона неперервна в деякому околі цієї точки;

5) якщо в точці x диференційовна функція $f+\varphi$, або $f-\varphi$, або $f\varphi$, або $\frac{f}{\varphi}$, то в цій точці диференційовні функції f та φ;

6) якщо в точці x диференційовні функції $f+\varphi$ і $f-\varphi$ або $f\varphi$ і $\frac{f}{\varphi}$, то в цій точці диференційовні функції f та φ;

7) якщо функція $f(u)$ недиференційовна в точці u_0, а $u=\varphi(x)$ недиференційовна в точці x_0 і $u_0=\varphi(x_0)$, то складна функція $f(\varphi(x))$ недиференційовна в точці x_0;

8) якщо функція $|f|$ диференційовна в точці x_0, то функція f недиференційовна в цій точці;

9) якщо функції f і g диференційовні в інтервалі $(a; b)$ і $f > g$ $\forall x \in (a; b)$, то $f'(x) > g'(x)$ $\forall x \in (a; b)$;

10) якщо функція f диференційовна на відрізку $[0; 1]$, $f(0) = 0$, $|f'(x)| \le$ $\le M|f(x)|$ $\forall x \in [0; 1]$, то $f(x) \equiv 0$ $\forall x \in [0; 1]$?

2. Знайти похідні даних функцій (усно):

1) $y = 2x^3 + 3x^2 + x + \pi$; 2) $y = e^{-5x}$; 3) $y = 2^{3-3x}$; 4) $y = e^{-x^2}$;

5) $y = \cos(5 - 8x)$; 6) $y = \sin^2 x$; 7) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$;

8) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$; 9) $y = \sqrt{4x}$; 10) $y = \sqrt{6 - x}$; 11) $y = \sqrt{x^2 + 8}$;

12) $y = \sqrt{\ln x}$; 13) $y = \sqrt{\sin x}$; 14) $y = \sqrt{e^x}$; 15) $y = \ln(3x - 6)$;

16) $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$; 17) $y = \ln^2 x$; 18) $y = \operatorname{tg}^3 x$; 19) $y = \arccos\sqrt{x}$;

20) $y = \operatorname{arctg}^2 x$; 21) $y = \arcsin^3 x^2$; 22) $y = \dfrac{1}{x}$;

23) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$; 24) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 25) $y = \dfrac{2}{e^x}$; 26) $y = \dfrac{1}{\ln x}$.

3.• Довести, що коли функція f диференційовна і парна (непарна) на множині E, то f' непарна (парна) на E.

4. Нехай функція f диференційовна і періодична з періодом T на множині E. Довести, що функція f' періодична на E з періодом T.

5. Дослідити на диференційовність такі функції:

1) $y = |x|$; 2) $y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 0, \\ x^3, & \text{якщо } x \ge 0; \end{cases}$ 3) $y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \ge 0; \end{cases}$

4)• $y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 0, \\ \sin x, & \text{якщо } x \ge 0; \end{cases}$ 5) $y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \in \mathbf{Q}, \\ x^3, & \text{якщо } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}; \end{cases}$

6) $y = [x]\sin \pi x$; 7) $y = \sqrt{1 - \cos 2x}$; 8) $y = \arcsin(\sin x)$;

9) $y = |\ln x|$; 10) $y = \arccos\dfrac{1}{x}$; 11) $y = x|x|$; 12) $y = \dfrac{x}{|x|}$.

6. Знайти похідні даних функцій:

1) $y = ax^2 + bx + c$; 2) $y = x - 2\sqrt{x} + 5x\sqrt[3]{x}$; 3) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{4}{x}$;

4) $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$; 5) $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{1 - x^2 - 2x}$; 6) $y = x\sqrt{1 + x}$;

7) $y = \sqrt[m+n]{(1 - x)^m (x + 1)^n}$; 8) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

9) $y = \left(2 - x^2\right)\cos x + 2x\sin x$; 10)• $y = \sin\left(\cos^2 x\right)\cos\left(\sin^2 x\right)$;

11) а) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; б) $y=3x\cos^3 x-3\sin x+\sin^3 x$;

12) $y=\operatorname{tg}x-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$;

13) а) $y=e^{-x^2+2x-1}$; б) $y=2^{3\sin x-\sin^3 x}$; в) $y=\frac{e^{-x}\cdot 3^{2x}}{4^{3x}}$;

14) $y=e^x\left(x^2-3x+6\right)$;

15) а)• $y=e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$; б) $y=e^{\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x}\cdot\sin x$; в) $y=10^{x^2+\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt[3]{x}}+5^{10}$;

г) $y=2^{\sin^2\left(x^3-x\right)}+2\sin\frac{\pi}{3}$;

16) $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b$, $a>0$, $b>0$;

17) а) $y=\ln\sqrt{1+x}-\frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{2(1+x)}$; б) $y=\log_2\cos^3 x$;

в) $y=\operatorname{arcctg}\frac{\ln x}{2}$; 18) $y=\ln(\ln(\ln x))$;

19) а) $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; б) $\ln\sqrt{1+e^{2x}}+e^x\operatorname{arcctg}e^x$;

в) $y=\lg\sqrt{4x^2+8x+9}+\operatorname{arcctg}\sqrt[3]{4+x^2}$;

20) а) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$; б) $y=\ln\left(2x^2+\sqrt{4x^4+1}\right)$;

21) а) $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$; б) $y=\ln\left(\operatorname{ctg}x+\frac{1}{\sin x}\right)$;

в) $y=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\sqrt{x}+\ln\sin\sqrt{x}$; г) $y=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\ln\cos^2\frac{x}{2}$;

22) $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;

23) а) $y=x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))$; б) $y=\frac{\cos x}{1+\ln\cos x}$;

в) $y=\sqrt{x}-\operatorname{ctg}\sqrt{x}\cdot\ln\cos\sqrt{x}$;

24) $y=\arcsin\frac{x}{a}$, $a>0$;

25) а) $y=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{6}}$; б) $y=\sqrt{9x-x^2}+\arcsin\frac{\sqrt{x}}{3}$;

в) $y=x\operatorname{arctg}x+\sqrt{1-x^2}$; г) $y=\arcsin\sqrt{1-2^x}$;

26) $y=\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a}$; 27) $y=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{5}}{x}$; 28) $y=\arccos\frac{1}{x}$;

29) $y=\arccos(\sin x)$; 30) $y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$;

31) $y=\ln\frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}+\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}$; 32) $y=\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

33) а)• $y=\operatorname{arctg}e^x-\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$; б) $y=\operatorname{arcctg}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$;

в) $y=a^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}+\log_a\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$; г) $y=\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)^3$;

34) $y=x^x$; 35) $y=x^{\frac{1}{x}}$; 36) $y=\log_x 2$;

37) а) $y=\log_{x^3}4$; б) $y=(\sin x)^{\cos x}$; в) $y=(\ln x)^{x^2}$;

38) $y=\ln\left(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}\right)$; 39) $y=\log_x\left(x^4+4\right)$; 40)• $y=x^{x^x}$;

41) $y=\ln^2\sin x$, $y=\ln\sin^2 x$, $y=\ln\sin x^2$;

42) $y=\cos^3\sin^2 x$, $y=\cos^2\sin x^3$, $y=\cos\sin^3 x^2$;

43) $y=\cos\sin^3\cos^2\sin^3\cos x$; 44) $y=a^{x^x}$, $y=x^{a^x}$, $y=x^{x^a}$;

45) $y=\left(e^{e^e}\right)^x$; 46) $y=(x\operatorname{ctg}x)^3$; 47) $y=\ln\left(\ln^2\left(\ln^3\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)\right)$;

48) $y=(x+1)x(x-2)(x-5)$; 49) $y=\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4$; 50) $y=\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}$;

51) $y=\sqrt{\cos\sqrt{1+x^2}}$; 52) $y=\sqrt{x^2+1}-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$;

53) а) $y=\ln\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$; б) $y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)+\sin^2 x$;

54) $y=\operatorname{arctg}2^x+2^{\operatorname{arctg}x}$; 55) $y=\ln^3\arcsin\sqrt{ax}$;

56) $y=\sqrt[5]{4e^{\sqrt{x}}+3^{-x}+x+1}+\ln^6\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$; 57) $y=\sqrt[3]{(x+3)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2}$;

58) $y=\log_5(4+5x)+\sqrt{7^{2x}+x^2}$; 59) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\frac{5x-2}{x+2}+3}$;

60) $y=\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-3}-\left(\frac{1}{25}\right)^x}$; 61) $y=\lg\operatorname{tg}x^2-\lg\operatorname{ctg}x^2$; 62) $y=2^{\log_x\left(x^2-2x-3\right)}$;

63)• $y=\ln\left(\sqrt{x}+\ln\left(\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}\right)\right)$; 64) $y=\dfrac{x^3}{1+x^6}-\operatorname{arcctg} x^3$;

65) $y=2^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}+e^{-\cos x^2}$; 66) $y=\dfrac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}-\ln\sqrt{1-x^2}$;

67) $y=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$; 68) $y=\dfrac{\operatorname{arctg} x-\operatorname{arcctg} x}{\arcsin x}$;

69) а)• $y=\dfrac{e^{-x}\cos x^2}{\sin x}$; б) $y=\arccos\dfrac{4-x^2}{4+x^2}$; 70) $y=\ln^3\sin^4\left(\sqrt{10x+3}\right)$;

71) $y=10^{\operatorname{arcctg}^4\left(2+\sqrt{x}\right)}$; 72) $y=\ln\sqrt[5]{\dfrac{x^4+x^2+1}{x^4-x^2+1}}$; 73) $y=\log_3\log_5\log_7 e^{\sqrt{x}}$;

74) $y=a^{b^{\ln\sin\sqrt{x}}}$; 75) $y=2^{\frac{\sin x}{\ln^2 x}}$; 76) $y=\dfrac{\ln^2\sin x}{\ln^2\cos x}$;

77) $y=3x^3\arccos x-\left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2}$; 78) $y=\ln\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}+\operatorname{ctg} x\ln(1+\sin x)+x$;

79) а) $y=\dfrac{3x^2-1}{3x^3}+\ln\sqrt{1+x^2}-\operatorname{arcctg} x$; б) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$;

80) $y=\dfrac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}-3\arccos\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$; 81) $y=\ln\left(x\cos x\sqrt{1+x^2}\right)$;

82) $y=\dfrac{2\sin x}{\cos^4 x}+\dfrac{3\sin x}{\cos^2 x}-3\ln\dfrac{1+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$;

83) $y=x(\arccos x)^2-2x-2\sqrt{1-x^2}\arccos x$;

84) $y=2\ln\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arcctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$;

85) $y=2\operatorname{arcctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}-\ln\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

86) $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}+2\operatorname{arcctg}\sqrt{1+x}$; 87) $y=\ln\dfrac{(2x-6)^2}{\sqrt{x^2-6x+10}}+6\operatorname{arctg}(x-3)$;

88) $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{(x-2)^7(x-4)^9}}$; 89) $y=\sqrt[5]{x^4}\,\dfrac{x+3}{x^2+5}\sin^4 x\cos^3 2x$;

90) $y=\ln\sqrt[5]{\dfrac{\left(x^2+2\right)(x+3)^4}{(x-4)e^{\operatorname{arctg} x^2}}}$; 91) $y=\sqrt[3]{\dfrac{\left(x^2-3x+5\right)(x-\sin x)}{(x+3)^2 e^{\cos x}}}$;

92) $y=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x^3}$; 93)• $y=(\operatorname{arcctg} x)^{\sin x}$; 94) $y=(\cos x)^{x^2 \ln x}$;

95) $y=(\arcsin x)^{1/x}$; 96) $y=(\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arcctg} x}$;

97) $y=\left(\operatorname{arcctg} \sqrt{x}\right)^{\cos x}$; 98) $y=(\ln x)^{x^2} \cdot x^{-2\ln x}$;

99) $y=\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{2x-1}{3}}\right)^{x}$; 100) $y=(x+1)^{\log_x(x\sin x)}$.

7. Знайти похідну функції, вводячи проміжну змінну u:

1) $y=(\arcsin x)^2\left(\ln^2(\arcsin x)-\ln(\arcsin x)+\dfrac{1}{2}\right)$, якщо $u=\arcsin x$;

2) $y=\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{\sqrt[4]{1+x^2}+1}+2\operatorname{arcctg}\sqrt[4]{1+x^2}$, якщо $u=\sqrt[4]{1+x^2}$;

3) $y=\left(x\sin x\ln^2 x\right)^5$, якщо $u=x\sin x\ln^2 x$;

4) $y=\sqrt{\dfrac{1-\arccos x}{1+\arccos x}}$, якщо $u=\arccos x$;

5) $y=2x+2\sqrt{1-x^2}\arccos x-x(\arccos x)^2$, якщо $u=\arccos x$;

6) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-3}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$, якщо $u=\sqrt[5]{x^2+4}$.

8. Знайти значення похідних функції у даних точках, якщо вони там існують:

1) $y=\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$, $x=0,\ 1,\ \dfrac{\pi}{4},\ \sqrt{2}$;

2)• $y=\arcsin\sqrt{x^2-\dfrac{1}{2}}$, $x=1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

3) $y=2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\ln\sqrt{x^2+3}$, $x=3,\ 0,\ -1$;

4) $y=e^x\sin\sqrt{x^2+1}$, $x=0,\ 1,\ -1$;

5) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$, $x=0,\ \pm 1,\ \pm 2$;

6) $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, $x=0,\ \pm 1,\ \pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{3}$;

7) $y=(x+1)(x-3)^2(x-4)^3$, $x=-1,\ 3,\ 4$;

8) $y=x^2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $x=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi$;

9) $y=\cos 2x-2\sin x,\ x=0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \pi;$

10) $y=e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}},\ x=0,\ \pm 1,\ \pm 1{,}2,\ \pm\sqrt{2}.$

9. Переконатися, що дана функція $y=y(x)$ задовольняє вказане рівняння:

1) $y=(x+1)e^{-x},\ (x+1)y'=-xy;$ 2) $y=a+\cos x,\ y'\operatorname{ctg} x+y=a;$

3) $y=\sqrt{x},\ 2xy'-y=0;$ 4) $y=\frac{1}{1-x},\ y'-xy^2=y;$

5) $y=\frac{2}{e^{-x^2}-1},\ y'-xy^2=2xy;$ 6) $y=1-2x+e^x,\ y'-y=2x-3;$

7) $y=e^{\sin x},\ y'-y\cos x=0;$

8) $y=e^{-x}+\sin x+\cos x,\ y'+y-2\cos x=0;$

9) $y=\frac{1}{4}\ln^2 x,\ xy'-\sqrt{y}=0;$ 10) $y=x^3,\ y'-3\sqrt[3]{y^2}=0;$

11) $y=x^2-x,\ \left(x^2-y\right)y'=2y+x.$

10. Знайти похідні від y по x, а також вказати, де вони існують, якщо:

1) $x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ t\in[0;\ 2\pi;];$

2) $x=\cos^2 t,\ y=\sin^2 t,\ t\in[0;\ \pi];$

3)• $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ t\in[0;\ 2\pi];$

4) $x=\frac{a\sqrt{1-t^2}}{1+t^2},\ y=\frac{at\sqrt{1-t^2}}{1+t^2},\ t\in[-1;\ 1];$

5) $x=\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ y=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ t\in(-\infty;\ +\infty);$

6) $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ t\in[0;\ 2\pi],\ a>0;$

7) $x=\frac{a(1-t)}{(1+t)^2},\ y=\frac{at(1-t)}{(1+t)^2},\ a>0;$

8) $x=\frac{at}{(1+t)^3},\ y=\frac{at^2}{(1+t)^3},\ a>0;$

9) $x=\frac{at}{(1+t)^4},\ y=\frac{at^2}{(1+t)^4},\ a>0;$

10) $x=\frac{a\sqrt{t^2+1}}{(t+1)^2},\ y=\frac{at\sqrt{t^2+1}}{(t+1)^2},\ a>0;$

11) $x=\frac{3at}{1+t^3},\ y=\frac{3at^2}{1+t^3},\ a>0,\ t\in(-\infty;+\infty).$

11. Розв'язати задачі, використовуючи геометричний зміст похідної.

1) Записати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції y в точці з абсцисою x_0, якщо:

а) $y = x^3$, $x_0 = 2$; б) $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$; в) $y = x^4 - 3$, $x_0 = 1$;

г) $y = (x+1)\sqrt[3]{7-x}$, $x_0 = -1$; д) $y = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$; е) $y = \ln x$, $x_0 = e$;

є) $y = \frac{8}{4+x^2}$, $x_0 = 2$; ж) $y = 2 - \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;

з) $y = x \ln x$, $x_0 = e^2$; и) $y = \arcsin x$, $x_0 = \frac{1}{2}$;

і) $y = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$; ї) $y = 2^{x-1}$, $x_0 = 1$.

2) Знайти кут нахилу дотичної до графіка функції $y = 3x^2 - 6x + 6$ у точках $x = \frac{5}{6}$, $x = 1$, $x = \frac{7}{6}$.

3) В якій точці дотична до графіка функції $y = -2x^2 + 4x - 7$ утворює з віссю Ox кут 135°, 0°, 45°?

4) В яких точках дотичні до графіка функції $y = 9x - x^3/3$ паралельні прямій: а) $y = 5x - 1$; б) $y = -7x + 3$?

5) Знайти точки, в яких дотичні до графіків функцій $y = \frac{1}{3}x^3 + x - 7$ і $y = 2x^2 - 3x + 5$ паралельні.

6) Знайти спільну точку графіків функцій $y = 3x^2 - 9x + 5$ і $y = x^2 + 3x - 13$, в якій вони мають спільну дотичну.

7) Знайти кут, під яким графік функції $y = \ln x$ перетинає вісь Ox.

8) Під яким кутом графік функції $y = \ln x$ перетинає пряму $y = 1$?

9) Під яким кутом перетинаються графіки функцій $y = x^3 + x^2 - 3$ і $y = x^2 + 4x - 3$?

10) У рівнянні параболи $y = 2x^2 + bx + c$ коефіцієнти b і c визначити так, щоб вона дотикалася до прямої $y = 2x + 8$ у точці $x = 3$.

11) У рівнянні параболи $y = ax^2 + bx + c$ коефіцієнти a, b, c визначити так, щоб вона проходила через точку (2, 1), а в точці $x = 4$ дотикалася до прямої $y = 17x - 45$.

12) Знайти координати точки, що лежить на прямій $-4x - 3y = 25$ і найменше віддалена від початку координат.

13) Обчислити площу трикутника, обмеженого дотичними, проведеними до графіка функції $y = 5 + 2x - x^2$ у точках з абсцисами $x_1 = 1$ і $x_2 = 3$, і прямою, що сполучає точки дотику.

14)• Знайти площу трикутника, вершинами якого є вершина параболи $y = x^2 + 2x - 5$, точка дотику дотичної до параболи, яка паралельна прямій $y = 12x$, і точка перетину цієї дотичної з віссю абсцис.

15) До графіка функції $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}$ у двох його точках проведено дотичні, які перетинаються в точці A і перетинають вісь абсцис у точках B і C. Трикутник ABC рівнобедрений, його кут ABC дорівнює $2\pi/3$. Знайти площу цього трикутника.

16) До параболи $y = 3x^2 - 7x - 17$ провести дотичну, яка утворювала б з додатним напрямом осі Ox кут $3\pi/4$. Знайти ординату точки дотику.

17) У точках A і B параболи $y = x^2 - 3x + 1$ проведено дотичні, кутовий коефіцієнт однієї з них дорівнює 1. Парабола $y = 4x^2 + ax + 1$, $a > 0$, також дотикається до кожної з цих прямих. Знайти значення параметра a і відстань між точками A і B.

18) Прямі $y = -x$ і $y = 5x - 6$ дотикаються до параболи $y = x^2 + ax + b$. Знайти значення коефіцієнтів a і b, а також координати точок дотику.

19) На графіку функції $y = x^2 - 4x + 2$ знайти точки, дотичні в яких проходять через точку K (4, 1).

20) До графіка функції $y = \sin(x + \pi) + 1$ провести дотичну в точці з абсцисою $\pi/4$.

21)• На графіку функції $y = x^2 + 2$ знайти точку, яка розміщена найближче до точки A (9, –1), і обчислити відстань між цими точками.

22) В якій точці дотична до графіка функції $y = (x + 7)/(x - 2)$ утворює з віссю Ox кут 135°?

23) В яких точках дотична до графіка функції $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x - 4$ утворює з віссю абсцис кут 45°?

24) Знайти найменшу відстань від точок параболи $y = x^2 - 8x + 16$ до прямої $y = -2x + 1$.

25) При якому значенні a дотична до графіка функції $y = a - x^2$ відтинає від першої чверті рівнобедрений прямокутний трикутник, площа якого дорівнює 25/72?

26) Із точки M (1, 1) проведено дотичні до двох віток гіперболи $y = k/x$, $k < 0$, які дотикаються до цих віток у точках A і B, причому трикутник AMB є правильним. Знайти коефіцієнт k і площу трикутника AMB.

27)• Із яких точок площини Oxy графік параболи $y = x^2$ видно під прямим кутом?

28) Знайти площу трикутника, утвореного віссю абсцис і дотичними, які проведено до графіка функції $y = x^2 + 2x + 10$ із точки A (0, 6).

29) Знайти спільні точки графіка функції $y = 3x - x^3/9$ і прямої $9y - 15x + 16 = 0$ та визначити, в якій з них ця пряма є дотичною до графіка функції.

30) Знайти рівняння спільної дотичної до парабол $y = x^2 + 3x + 9$ і $y = x^2 + 5x - 2$.

31) Знайти рівняння спільних дотичних до графіків функцій $y = x^2 + 5x + 3$ і $y = -x^2 + 3x - 2$.

32) Знайти відстань між дотичними до графіка функції $y = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 15x + 3$, паралельними осі абсцис.

33) Знайти рівняння всіх спільних дотичних до графіків функцій $y = x^2 + x + 1$ і $y = \left(x^2 + 3\right)/2$.

34) Знайти всі дійсні значення параметра *a*, при яких графік функції $y = x^3 - 27x + a$ дотикається до осі абсцис.

35) Знайти рівняння дотичних до графіка функції $y = x^2 - 7x + 15$ у точці з ординатою $y_0 = 3$.

36) Для яких значень *p* пряма $y = px + 9$ є дотичною до графіка функції $y = 2x - x^2$.

37) Із точки *A* (1, 0) до графіка функції $y = x^3 - 3x + 2$ проведено дотичну. Знайти її рівняння.

38) До парабол $y = x^2 + 5x + 8$ і $y = x^2 + 7x + 12$ проведено спільну дотичну. Знайти абсцису середини відрізка, що сполучає точки дотику.

39) Знайти координати точки перетину двох взаємно перпендикулярних між собою дотичних до графіка функції $y = 3x^2 - 5x - 1$, якщо однією з них є пряма $y = x - 4$.

40) У точках з абсцисами $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ до графіка функції $y = \frac{1}{x^2}$ проведено дотичні. Обчислити кут між дотичними і знайти координати точки їхнього перетину.

41) Знайти рівняння дотичних до графіка функції $y = (x+4)/(x-2)$, які: а) паралельні прямій $y = -6x + 5$; б) перпендикулярні до прямої $y = \frac{1}{2}x + 5$.

42) Знайти відстань між прямою $y = \frac{1}{2}x + 1$ і паралельною їй дотичною до графіка функції $y = \ln x$.

43) Знайти найменшу відстань між точками *A* і *B*, якщо точка *A* лежить на графіку функції $y = e^x$, а *B* — на прямій $y = x - 1$.

44) При яких значеннях a графіки функцій $y = x^2 - 6ax$ і $y = -2x^2 - 3$ мають спільні точки, через які проходять їхні спільні дотичні. Записати рівняння цих дотичних.

45) Знайти рівняння дотичних до графіка функції $y = \dfrac{2x^3 + 3x}{x^2 + 1}$, паралельних асимптоті цього графіка.

46) Знайти кутові коефіцієнти дотичних до графіків функцій:

а) $x = t^2 - 3t + 5$, $y = t^2 + 2t - 6$ у точці $x = 3$, $y = 2$;

б) $x = t^3 - 2t^2 - 2t - 2$, $y = t^2 - 3t + 3$ у точці $x = 1$, $y = 3$;

в) $x = \dfrac{3t+1}{t^2+1}$, $y = \dfrac{2-t}{t^2+1}$, якщо $t = 0$, $t = 1$, $t = \infty$;

г) $x = 12\cos t$, $y = 6\sin t$, якщо $t = \dfrac{\pi}{6}$, $t = \dfrac{\pi}{4}$, $t = \dfrac{\pi}{3}$, $t = \dfrac{\pi}{2}$;

д) $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, якщо $t = 0$, $t = \dfrac{\pi}{4}$, $t = \dfrac{\pi}{2}$;

е)• $x = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$, $y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$.

47) На графіку функції $x = 2t^3 - 21t^2 + 60t - 50$, $y = t^2 - t + 1$ знайти точки, в яких дотичні паралельні: а) осі ординат; б) осі абсцис.

48) На графіку функції $x = t^3 - 2t^2 + 4$, $y = t^3 - 3t + 2$ знайти точки, в яких дотичні паралельні: а) осі абсцис; б) осі ординат.

49) Довести, що відрізок дотичної до астроїди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$, який міститься між осями координат, має довжину, що дорівнює a.

50) Записати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $x = a(1-t)/(1+t)^2$, $y = at(1-t)/(1+t)^2$, $a > 0$, якщо: а) $t = 0$; б) $t = 1$; в) $t = \infty$.

51) Знайти рівняння дотичних до графіка функції $x = t^4 - 2t^3 - t^2 + 8t - 12$, $y = t^4 + 2t^3 - t^2 - 8t - 12$ у точці $x = 0$, $y = 0$ і визначити, чи вони перпендикулярні між собою.

52) Знайти рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, якщо $t = 0$ і $t = \dfrac{\pi}{2}$.

53) Під якими кутами перетинаються графіки функцій:

а) $y = \ln x$ і вісь Ox; б) $y = x^2$ і $x = y^2$;

в) $y = \sin x$ і $y = \cos x$; г)• $y = \dfrac{1}{x}$ і $y = \sqrt{x}$; д) $y = x^2$ і $y = 5x - 4$;

е) $y = e^x$ і вісь Oy; є) $y = \sqrt[3]{4x}$ і $y = \sqrt[3]{3x-2}$;

ж) $y = \log_2(x+14)$ і $y = 6 - \log_2(x+2)$; з) $y = x^2$ і $y = \sqrt{2-x^2}$.

12. Розв'язати задачі, використовуючи механічний зміст похідної.

1) Знайти швидкість зміни функції $y = x^3 - 3x + 2\sqrt{x}$, якщо $x = 4$.

2) Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^3 - 2t^2 + 21$, де s — шлях, м; t — час, с. Знайти її швидкість і прискорення в момент часу $t = 3$ с.

3) Точка рухається за законом $s(t) = \frac{t}{\pi}\sin \pi t$. Знайти швидкість і прискорення в момент часу $t = 1$.

4) Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{7}{6}t^3 + 5t^2 - 6$, де s — шлях, м; t — час, с. В які моменти часу прискорення руху тіла дорівнює нулю?

5) Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 6 - 33t + 32t^2 - \frac{t^5}{20}$, де s — шлях, м; t — час, с. В який момент часу тіло має найбільшу швидкість? Знайти цю швидкість.

6) Рух двох тіл уздовж однієї прямої задано рівняннями $s_1(t) = 7t^2 + 5$, $s_2(t) = 6t^2 + 8t - 7$. Знайти швидкості руху тіл у ті моменти часу, коли тіла перебуватимуть в одній точці (t — час, с; s — шлях, м).

7) Прямолінійний рух двох тіл задано рівняннями $s_1(t) = t^3 - 4t^2 + 24t - 7$, $s_2(t) = \frac{2}{3}t^3 + 2t^2 - 8t - 3$. Знайти прискорення руху тіл у той момент, коли швидкості їхні рівні (t — час, с; s — шлях, м).

8) Дві точки рухаються по осі Ox. Координата x_1 першої точки задається формулою $x_1(t) = t^3 - 2t - 1$, координата x_2 другої точки — формулою $x_2(t) = t^3 - 3t + 4$ (t — час, с; s — шлях, м). Знайти швидкість руху точок у той момент, коли їхні координати рівні.

9) Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = -\frac{1}{6}t^3 + 7t^2 - 9$ (t — час, с; s — шлях, м). Визначити момент часу, коли прискорення руху тіла дорівнює нулю, та швидкість тіла в цей момент і пройдений шлях.

10)• Кинуте вертикально вгору тіло рухається за законом $h(t) = 10,8 + 36t - 6t^2$. Знайти швидкість тіла в момент його приземлення, вважаючи, що прискорення вільного падіння дорівнює 10 м/с^2.

11) Тіло рухається по кривій $y = \sqrt{x}$ так, що його абсциса зростає зі сталою швидкістю v. З якою швидкістю змінюється ордината?

12) Сторона квадрата (ребро куба) зростає рівномірно зі швидкістю 2 см/с. З якою швидкістю зростає площа квадрата (об'єм куба) в той момент, коли сторона (ребро куба) дорівнює 10 см?

13) Приставлена до вертикальної стіни драбина, довжина якої 5 м, падає, ковзаючи верхнім кінцем по стіні, а нижнім по підлозі. З якою швидкістю і прискоренням опускається верхній кінець драбини у той момент, коли нижній кінець, переміщуючись зі сталою швидкістю $\upsilon = 2$ м/с, перебуває на відстані 4 м від стіни.

14) Довжина неоднорідного тонкого стрижня $AB = 30$ см. Маса його частини AM зростає пропорційно до квадрата відстані точки M від кінця A і дорівнює 15 г при $AM = 3$ см. Знайти масу всього стрижня AB і лінійну густину ρ у будь-якій його точці. Чому дорівнює лінійна густина стрижня в кінцевих точках A і B?

13. Якщо на момент часу t_0 виробник виготовив $f(t_0)$ одиниць продукції, то похідну $f'(t_0)$ називають *продуктивністю праці* виробника в момент часу t_0 (*економічний зміст похідної*).

Еластичністю функції $y = y(x)$ називають границю відношення відносного приросту цієї функції до відносного приросту аргументу, якщо останній прямує до нуля, і позначають $E_x(y)$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = x \cdot \frac{y'}{y} = xT_y,$$

де $T_y = (\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$ — *темп зміни* функції, який дорівнює логарифмічній похідній даної функції.

Нехай обсяг продукції, виробленої бригадою робітників, описується функцією $y = -t^3 + 6t^2 + 120t + 40$ (одиниць), $1 \le t \le 8$, де t — робочий час, год. Визначити продуктивність праці $p(t)$, темп її зміни та еластичність через годину після початку роботи та за годину до її закінчення. Пояснити економічний зміст здобутих результатів.

14. Якщо функція $y = y(x)$ виражає залежність витрат (доходу) виробництва y від кількості випущеної продукції x, то $y'(x)$ — граничні (маргінальні) витрати (дохід) виробництва, які характеризують (наближено) додаткові витрати на виготовлення (прибуток від виготовлення) одиниці випущеної продукції.

1) Відомо, що роздрібна вартість одного виробу визначається функцією $S(x) = 90 - 0{,}2x$, де x — кількість виготовлених виробів. Дохід від виробництва x виробів (загальна вартість продукції), грн, становить $D(x) = x \cdot S(x)$.

Визначити маргінальний дохід від виробництва 200 виробів.

2) Нехай $V(x) = 250 + 12x - 0{,}2x^2$ виражає витрати підприємства на виробництво x одиниць продукції, грн.

Знайти маргінальні витрати виробництва та обчислити їхнє значення при випуску 300 одиниць продукції.

Зразки розв'язування задач

1. 4) Нехай

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\in\mathbf{Q},\\ x^2, & \text{якщо } x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}.\end{cases}$$

Ця функція розривна у довільній точці $x_0\neq 0$. Дійсно, якщо $0\neq x_0\in\mathbf{Q}$, то $f(x_0)=0$, а $f(x)=x^2\not\to f(x_0)$, якщо $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\ni x\to x_0$. Разом з тим

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\begin{cases}0, & \text{якщо } \Delta x\in\mathbf{Q},\\ \dfrac{\Delta x^2}{\Delta x}=\Delta x, & \text{якщо } \Delta x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q},\end{cases}\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=0,$$

тобто функція f диференційовна в точці $x_0=0$. Отже, задане твердження неправильне.

3. Припустимо, що функція f парна і диференційовна на множині E. Тоді

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\quad f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}\cdot(-1)=-\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=-f'(x)\quad \forall x\in E.$$

Отже, функція f' непарна на множині E. Міркування для непарної функції f провести самостійно.

5. 4) Якщо $x<0$, то $f(x)=x^2$ і $f'(x)=2x$. Якщо $x>0$, то $f(x)=\sin x$ і $f'(x)=\cos x$. Отже, функція f диференційовна на інтервалах $(-\infty;0)$ і $(0;+\infty)$. Нехай $x_0=0$. Тоді

$$\Delta f(0)=f(0+\Delta x)-f(0)=\begin{cases}\Delta x^2, & \text{якщо } \Delta x<0,\\ \sin\Delta x, & \text{якщо } \Delta x>0,\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\begin{cases}\Delta x, & \text{якщо } \Delta x<0,\\ \dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}, & \text{якщо } \Delta x>0,\end{cases}\Rightarrow\quad \begin{aligned}f'_-(0)&=\lim_{\Delta x\to 0_-}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=0,\\ f'_+(0)&=\lim_{\Delta x\to 0_+}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=1\end{aligned}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'_-(0)\neq f'_+(0),$$

а тому функція f недиференційовна в точці $x_0=0$.

6. 10) Задана функція є добутком двох складних функцій $u(x)=\sin\left(\cos^2 x\right)$ і $v(x)=\cos\left(\sin^2 x\right)$.

За формулою похідної від добутку

$$y'=\left(\sin\left(\cos^2 x\right)\right)'\cos\left(\sin^2 x\right)+\left(\cos\left(\sin^2 x\right)\right)'\sin\left(\cos^2 x\right). \tag{1}$$

Скористаємось тепер формулою похідної від складної функції:

$$\left(\sin\left(\cos^2 x\right)\right)'=\cos\left(\cos^2 x\right)\cdot\left(\cos^2 x\right)'=\cos\left(\cos^2 x\right)\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)=-\cos\left(\cos^2 x\right)\cdot\sin 2x$$

і

$$\left(\cos\left(\sin^2 x\right)\right)'=-\sin\left(\sin^2 x\right)\cdot\left(\sin^2 x\right)'=-\sin\left(\sin^2 x\right)\cdot 2\sin x\cdot\cos x=-\sin\left(\sin^2 x\right)\cdot\sin 2x.$$

Підставляючи здобуті вирази у формулу (1) та використовуючи рівність $\cos(\alpha-\beta)=$ $=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$, дістаємо

$$y'=-\cos\left(\cos^2 x\right)\cdot\sin 2x\cdot\cos\left(\sin^2 x\right)-\sin\left(\sin^2 x\right)\cdot\sin 2x\cdot\sin\left(\cos^2 x\right)=$$

$$=-\sin 2x\left(\cos\left(\cos^2 x\right)\cdot\cos\left(\sin^2 x\right)+\sin\left(\sin^2 x\right)\cdot\sin\left(\cos^2 x\right)\right)=$$

$$=-\sin 2x\cos\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=-\sin 2x\cdot\cos(\cos 2x).$$

15) а) За формулою похідної суми та правилом диференціювання складної функції

$$y'=\left(e^x\right)'+\left(e^{e^x}\right)'+\left(e^{e^{e^x}}\right)'=e^x+e^{e^x}\left(e^x\right)'+e^{e^{e^x}}\left(e^{e^x}\right)'=$$

$$=e^x+e^x\cdot e^{e^x}+e^x\cdot e^{e^x}\cdot e^{e^{e^x}}=e^x\left(1+e^{e^x}\left(1+e^{e^{e^x}}\right)\right).$$

33) $y'=\left(\operatorname{arctg}e^x\right)'-\left(\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}\right)'$. Обчислимо окремо похідні цих функцій. Маємо

$$\left(\operatorname{arctg}e^x\right)'=\frac{1}{1+e^{2x}}\left(e^x\right)'=\frac{e^x}{1+e^{2x}}.$$

Для обчислення похідної другого доданка скористаємось таким зауваженням: якщо під знаком логарифмічної функції, яку треба продиференціювати, міститься вираз, який можна логарифмувати (добуток, частка, степінь, корінь), то корисно спочатку виконати логарифмування. Отже,

$$\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}=\frac{1}{2}\left(\ln e^{2x}-\ln\left(e^{2x}+1\right)\right)=\frac{1}{2}\left(2x-\ln\left(e^{2x}+1\right)\right)=x-\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right).$$

Тому

$$\left(\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}\right)'=(x)'-\frac{1}{2}\left(\ln\left(e^{2x}+1\right)\right)'=1-\frac{1}{2}\frac{\left(e^{2x}+1\right)'}{e^{2x}+1}=$$

$$=1-\frac{e^{2x}\cdot 2}{2\left(e^{2x}+1\right)}=\frac{e^{2x}+1-e^{2x}}{e^{2x}+1}=\frac{1}{e^{2x}+1}$$

і

$$y'=\frac{e^x}{1+e^{2x}}-\frac{1}{e^{2x}+1}=\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}.$$

40) Дана функція є степенево-показниковою. Вкажемо кілька способів її диференціювання.

1-й спосіб. Скориставшись означенням степеня $a^b=e^{b\ln a}, a>0$, маємо $y=x^{x^x}=$ $=e^{x^x\cdot\ln x}=e^{\ln x\cdot e^{x\ln x}}$. Тому за формулою похідної від складної функції дістаємо

$$y'=e^{\ln x\cdot e^{x\ln x}}\cdot\left(\ln x\cdot e^{x\ln x}\right)'=x^{x^x}\left(\frac{1}{x}\cdot e^{x\ln x}+\ln x\cdot e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)'\right)=$$

$$=x^{x^x}\left(\frac{x^x}{x}+\ln x\cdot x^x\cdot\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)\right)=x^{x^x}\left(x^{x-1}+\ln x\cdot x^x(\ln x+1)\right)=$$

$$=x^{x^x}\left(x^{x-1}+\ln^2 x\cdot x^x+\ln x\cdot x^x\right)=x^{x^x}\cdot x^x\left(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x}\right).$$

2-й спосіб. Диференціювання степенево-показникової функції (як і багатьох інших) значно спрощується, якщо замість похідної самої функції знаходити похідну від натурального логарифма цієї функції (цю похідну називають *логарифмічною похідною*).

Прологарифмувавши функцію $y=u(x)^{v(x)}=x^{x^x}$ за основою e, дістаємо

$$\ln y = x^x \ln x,\ \ u(x)=x,\ \ v(x)=x^x.$$

Продиференціюємо тепер обидві частини останньої рівності за змінною x, не забуваючи при цьому, що y є складною функцією від x. Маємо

$$\frac{y'}{y}=\left(x^x\right)'\ln x + x^x(\ln x)'=\left(x^x\right)'\ln x + x^{x-1}. \qquad (2)$$

Аналогічно знаходимо похідну $\left(x^x\right)'$:

$$v(x)=x^x \Rightarrow \ln v = x\ln x \Rightarrow \frac{v'}{v}=\ln x + x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1 \Rightarrow \left(x^x\right)'=x^x(\ln x+1).$$

Підставивши це значення $\left(x^x\right)'$ у формулу (2), дістаємо

$$\frac{y'}{y}=x^x(\ln x+1)\ln x + x^{x-1} \Rightarrow y'=y\cdot x^x\left(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x}\right).$$

Після підстановки замість y його значення остаточно маємо

$$y'=x^{x^x}\cdot x^x\left(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x}\right).$$

3-й спосіб. Неважко помітити, що похідна степенево-показникової функції дорівнює сумі двох похідних, одну з яких обчислюють за формулою похідної показникової функції у припущенні, що основа $u(x)$ є сталою (вона дорівнює $u(x)^{v(x)}\cdot \ln u(x)\cdot v'(x)$), а другу — за формулою похідної степеневої функції у припущенні, що показник $v(x)$ сталий (вона дорівнює $v(x)\cdot u(x)^{v(x-1)}\cdot u'(x)$), тобто

$$y'=\left(u(x)^{v(x)}\right)'=u(x)^{v(x)}\ln u(x)\cdot v'(x)+v(x)\cdot u(x)^{v(x)-1}\cdot u'(x)=$$

$$=u(x)^{v(x)}\left(\ln u(x)\cdot v'(x)+\frac{v(x)}{u(x)}u'(x)\right).$$

Похідна функції $y=x^{x^x}$, де $u(x)=x,\ v(x)=x^x,\ u'(x)=1,\ v'(x)=(x^x)'=x^x(\ln x+1)$ ($v'(x)$ обчислюємо аналогічно),

$$y'=x^{x^x}\cdot x^x\left(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x}\right).$$

63) За формулою похідної складної функції

$$y'=\left(\ln\left(\sqrt{x}+\ln\left(\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}\right)\right)\right)'=\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\ln\left(\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}\right)\right)}\left(\sqrt{x}+\ln\left(\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}\right)\right)'=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\ln\left(\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}\right)\right)}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}\right)'\right)=\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\ln\left(\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}\right)\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)'\right)\right)=\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\ln\left(\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}\right)\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x}\right)\right)=\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\ln\left(\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}\right)\right)}\left(\frac{\sqrt{x}}{2x}+\frac{1}{\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{2x}\right)=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\ln\left(\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}\right)\right)}\cdot\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}\right)+\sqrt{x}+1}{2x\left(\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}\right)}=\frac{1+\sqrt{x}+x+\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}{2x\left(\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+\ln\left(\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}\right)\right)}.$$

69) а) Похідну цієї функції доцільно знаходити методом *логарифмічного диференціювання*. Суть цього методу полягає в тому, що при знаходженні похідної добутку кількох функцій або дробу, чисельник і знаменник якого містять добутки функцій, зручно обидві частини цього виразу спочатку прологарифмувати за основою e, а вже потім диференціювати. При цьому похідну від логарифма функції, як вже зазначалось, називають логарифмічною похідною.

Отже, маємо $\ln y=\ln e^{-x}+\ln\cos x^2-\ln\sin x=-x+\ln\cos x^2-\ln\sin x$. Звідси

$$\frac{y'}{y}=-1+\frac{1}{\cos x^2}\left(\cos x^2\right)'-\frac{1}{\sin x}(\sin x)'=-1+\frac{-\sin x^2\cdot 2x}{\cos x^2}-\frac{\cos x}{\sin x}=-1-2x\operatorname{tg}x^2-\operatorname{ctg}x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=-y\left(1+2x\operatorname{tg}x^2+\operatorname{ctg}x\right)\Rightarrow y'=-\frac{e^{-x}\cos x^2}{\sin x}\left(1+2x\operatorname{tg}x^2+\operatorname{ctg}x\right).$$

Зрозуміло, що похідну цієї функції можна знайти, скориставшись формулою похідної частки.

93) Функція визначена для всіх дійсних x і $\operatorname{arcctg}x>0\quad\forall x\in\mathbf{R}$, тому $y=(\operatorname{arcctg}x)^{\sin x}=$ $=e^{\sin x\,\ln\operatorname{arcctg}x}$. Звідси

$$y'=\left(e^{\sin x\ln\operatorname{arcctg}x}\right)'=e^{\sin x\ln\operatorname{arcctg}x}(\sin x\cdot\ln\operatorname{arcctg}x)'=$$

$$=e^{\sin x\ln\operatorname{arcctg}x}\left(\cos x\ln\operatorname{arcctg}x-\frac{\sin x}{\operatorname{arcctg}x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)=$$

$$=(\operatorname{arcctg}x)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln\operatorname{arcctg}x-\frac{\sin x}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arcctg}x}\right).$$

8. 2) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x^2-0{,}5}\right)^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-0{,}5}}\cdot 2x=\dfrac{x}{\sqrt{\frac{3}{2}-x^2}\sqrt{x^2-\frac{1}{2}}}$,

проте ця формула справедлива для $x\in\left(-\sqrt{\frac{3}{2}};\ -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{1}{2}};\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. Звідси $f'(1)=2$, $f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ — не існує, оскільки $\frac{1}{\sqrt{3}}$ не належить області визначення функції. У точці $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ застосовувати формулу для $f'(x)$ не можна, тому

$$\Delta f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\Delta x\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\arcsin\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\Delta x\right)^2-\frac{1}{2}}-\arcsin 0=\arcsin\sqrt{\sqrt{2}\Delta x+\Delta x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\Delta x}=\frac{\arcsin\sqrt{\sqrt{2}\Delta x+\Delta x^2}}{\Delta x}=\frac{\arcsin\sqrt{\sqrt{2}\Delta x+\Delta x^2}}{\sqrt{\sqrt{2}\Delta x+\Delta x^2}}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{2}\Delta x+\Delta x^2}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{\arcsin\sqrt{\sqrt{2}\Delta x+\Delta x^2}}{\sqrt{\sqrt{2}\Delta x+\Delta x^2}}\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\Delta x}+1}\to+\infty,\quad \Delta x\to 0+\Rightarrow f'_+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=+\infty .$$

Значення $f'_-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ не існує, оскільки f не визначена на інтервалі $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}};\ \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

10. 3) Використовуючи нерівність $\sin\alpha<\alpha\quad\forall\alpha>0$, неважко довести, що $\varphi(t)=$ $=a(t-\sin t)$ — неперервно зростаюча функція на відрізку $[0;2\pi]$. Крім того, $\varphi'(t)=$ $=a(1-\cos t)\neq 0$ на інтервалі $(0;\ 2\pi)$, а $\psi'(t)=a\sin t\quad\forall t\in(0;\ 2\pi)$. Тому для $\forall x\in$ $\in(0;\ 2\pi\alpha)$ існує

$$f'(x):=\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)'(x):=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)'=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2},$$

де $x=a(t-\sin t)$, $t\in(0;\ 2\pi)$.

11. 14) Знайдемо координати вершин трикутника. Оскільки $y=(x+1)^2-6$, то вершиною параболи є точка A (–1, –6). Координати точки дотику дотичної до параболи знаходимо з умови, що дотична паралельна прямій y = $12x$. Тому $y'=2x+2$ і $2x+2=12$, $x=5$ і $y(5)=30$. Отже, C (5, 30) — точка дотику. Рівняння дотичної до параболи, що проходить через точку C, має вигляд y = 12 (x — 5) + 30 = 12x — 30. Ця пряма перетинає вісь абсцис у точці B (5/2, 0).

Площу трикутника ABC обчислюємо за відомою формулою з аналітичної геометрії:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1 & -6 & 1\\ \frac{5}{2} & 0 & 1\\ 5 & 30 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(75-30+30+15)=45\ \text{кв. од.}$$

21) Нехай $B(x_0,y_0)$, де $y_0=x_0^2+2,\ x_0\neq 0,$ — шукана точка параболи. Проведемо через точку B нормаль до параболи, рівняння якої

$$y-\left(x_0^2+2\right)=-\frac{1}{2x_0}(x-x_0),$$

і вважатимемо, що вона проходить через точку A (9, –1). Тоді для відшукання абсциси x_0 точки B дістаємо рівняння

$$-1-\left(x_0^2+2\right)=-\frac{1}{2x_0}(9-x_0)\Leftrightarrow\left(2x_0^3+7x_0-9=0,\quad x_0\neq 0\right)\Leftrightarrow x_0=1.$$

Тоді $y_0=y(1)=3$. Отже, маємо B (1, 3), а відстань між точками A і B

$$d(AB)=\sqrt{(9-1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}\ \text{лін. од.}$$

27) Нехай $A(t,t^2)$ і $B(u,u^2)$ — точки дотику взаємно перпендикулярних дотичних до графіка параболи в точках A і B, рівняння яких $y=2t(x-t)+t^2$ і $y=2u(x-u)+u^2$.

Оскільки добуток кутових коефіцієнтів перпендикулярних прямих дорівнює –1, то $u = -\frac{1}{4t}$, а рівняння другої дотичної набирає вигляду

$$y = -\frac{1}{2t}\left(x + \frac{1}{4t}\right) + \frac{1}{16t^2}.$$

У точці перетину дотичних $M(x_0, y_0)$ маємо

$$2t(x_0 - t) + t^2 = -\frac{1}{2t}\left(x_0 + \frac{1}{4t}\right) + \frac{1}{16t^2}.$$

Звідси для координати x_0 дістаємо $x_0 = \frac{4t^2 - 1}{8t}$, а з рівнянь дотичних знаходимо $y_0 = -\frac{1}{4}$.

Отже, точки перетину взаємно перпендикулярних дотичних до графіка функції $y = x^2$ містяться на прямій $y = -\frac{1}{4}$, а це означає, що з будь-якої точки, що міститься на прямій $y = -\frac{1}{4}$, графік параболи $y = x^2$ видно під прямим кутом. Можна довести, що коли дві дотичні до параболи $y = x^2$ взаємно перпендикулярні, то відстань між точками дотику не менша за 1.

46) е) Функція $x(t)$ диференційовна і зростаюча в інтервалі $(-\infty; +\infty)$, причому

$$x'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{1+t^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2},$$

а функція $y(t)$ диференційовна для всіх $t \neq 0$ і

$$y'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{1+t^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1+t^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2t = \frac{t}{|t|\left(1+t^2\right)}.$$

Кутовий коефіцієнт k дотичної до графіка параметрично заданої функції y від x при будь-якому значенні параметра $t \neq 0$

$$k = y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{t}{|t|} = \begin{cases} -1, & \text{якщо } t < 0, \\ 1, & \text{якщо } t > 0. \end{cases}$$

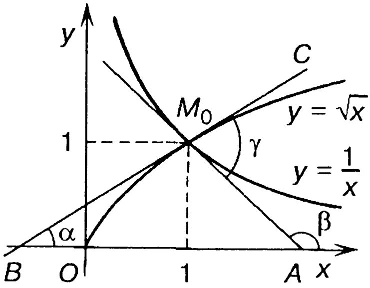


Рис. 8

53) г) Знайдемо точки перетину графіків цих функцій:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x}, \\ y = \sqrt{x}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{1}{x}, \\ y = \sqrt{x}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3} = 1, \\ y = \sqrt{x}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Під кутом γ між графіками двох функцій, що перетинаються, розуміють кут між дотичними до цих графіків у точці перетину їх. Нехай α і β — кути, які утворюють ці дотичні з віссю Ox (рис. 8).

Тоді $\beta = \alpha + \gamma \Rightarrow \gamma = \beta - \alpha$. З геометричного змісту похідної дістаємо

$$\operatorname{tg}\alpha = \left(\sqrt{x}\right)'\Big|_{x=1} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \left(\frac{1}{x}\right)'\Big|_{x=1} = -\frac{1}{1^2} = -1 \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4},$$

$$\gamma = \frac{3\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} - \operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{-1 - \frac{1}{2}}{1 - 1\cdot\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2\cdot\frac{1}{2}} = -3 \Leftrightarrow \gamma = \pi - \operatorname{arctg}3.$$

12. 10) Рух тіла вгору припиниться тоді, коли $v(t) = h'(t) = 36 - 12t = 0$, звідки $t = 3$ с. У цей момент часу воно перебуватиме на висоті $h(3) = 10{,}8 + 108 - 54 = 64{,}8$ м. Під дією сили тяжіння тіло падає на поверхню Землі за законом $s(t) = -\frac{gt^2}{2}$ (знак мінус указує на те, що напрям руху тіла обернений до попереднього). Момент приземлення тіла знайдемо з рівняння $-\frac{gt^2}{2} = -64{,}8 \Leftrightarrow t^2 = 12{,}96 \Rightarrow t = 3{,}6$. Оскільки тіло приземляється зі швидкістю $v(t) = s'(t) = -gt$, то в момент приземлення $v(3{,}6) = -3{,}6g = -36$ м/с. Знак мінус означає, що напрям швидкості приземлення є протилежним до напряму швидкості тіла під час руху вгору.

§ 5.3. Диференціал, його геометричний та механічний зміст

Диференціалом диференційовної в точці x_0 функції f називають вираз $df(x_0) := f'(x_0)\,\Delta x = f'(x_0)dx$, де $dx := \Delta x$. Оскільки для диференційовної в точці x_0 функції $\Delta f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha(x_0, \Delta x)\Delta x$, то $df(x_0)$ — це *лінійна* відносно Δx *частина приросту функції* f у точці x_0, а якщо $f'(x_0) \neq 0$, то $df(x_0)$ — *головна частина приросту функції* f у точці x_0.

Геометрично $df(x_0)$ є приростом ординати дотичної до графіка функції f у точці $(x_0, f(x_0))$, якщо незалежна змінна x дістає приріст Δx.

Механічний зміст диференціала полягає в тому, що $ds(t_0) = v(t_0)\Delta t$ — це шлях, який пройшла б матеріальна точка за час Δt, коли б рухалась рівномірно з постійною швидкістю $v(t_0) = s'(t_0)$.

Форма диференціала функції f у точці x_0 інваріантна: якщо f — диференційовна в точці x_0, то $df(x_0) = f'(x_0)dx$ і коли x — незалежна змінна, і коли $x = x(t)$ — диференційовна в точці t функція, для якої $x(t_0) = x_0$.

Основні властивості диференціала

1. $d(Cf)(x) = Cdf(x)$. **2.** $d(f \pm \varphi)\ (x) = df(x) \pm d\varphi(x)$.

3. $d(f\varphi)(x) = \varphi(x)df(x) + f(x)d\varphi(x)$.

4. $d\left(\dfrac{f}{\varphi}\right)(x) = \dfrac{\varphi(x)df(x) - f(x)d\varphi(x)}{\varphi^2(x)}$.

Ці властивості виконуються за умови диференційовності функцій f і φ у точці x, а для випадку 4 ще й за умови $\varphi(x) \neq 0$. Тому для обчислення малих приростів диференційовної у точці x функції f можна користуватися формулою

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{1}$$

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) якщо існує $f'(x_0)$, то існує і $df(x_0)$;

2) твердження, обернене до 1), є правильним;

3) якщо функція f диференційовна в точці x_0, то $\Delta f(x_0) - df(x_0) = o(df(x_0)),\ \Delta x \to 0$;

4) якщо графік функції f має в точці $(x_0, f(x_0))$ дотичну, то існує $df(x_0)$;

5)• якщо існує $df(\varphi(t_0))$ і $\varphi(t_0) = x_0$, то $df(\varphi(t_0)) = f'(x_0)d\varphi(t_0)$;

6) якщо існує $d(f + \varphi)(x)$, то $d(f + \varphi)(x) = df(x) + d\varphi(x)$;

7) якщо існує $d(f + \varphi)(x)$ і $d(f - \varphi)(x)$, то $d(f \pm \varphi)(x) = df(x) \pm d\varphi(x)$?

2. Для функції $y = x^3 - 2x^2 + 3$ знайти її приріст Δy і приріст ординати дотичної dy у точці з абсцисою $x_0 = 1$. Обчислити їхні значення, а також абсолютну $|\Delta y - dy|$ і відносну похибки, які виникають унаслідок заміни приросту функції відповідним приростом її дотичної, якщо Δx дорівнює 1; 0,1; 0,01.

3. Матеріальна точка рухається по прямій за законом $s = t^2 + 5t + 6$. Обчислити точне Δs і наближене ds значення шляху, який пройшла точка за час від t_0=2 до $t_0 + \Delta t$, якщо Δt дорівнює 1; 0,1; 0,01. Знайти абсолютну і відносну похибки, які виникають у разі заміни приросту функції її диференціалом.

4. Задано функцію $y = \sqrt{4x + 1}$. Знайти: а) значення похідної, якщо приросту аргументу Δx = 0,3 відповідає приріст функції Δy = 0,2; б) значення незалежної змінної, якщо Δx = 0,25 відповідає приріст функції Δy= 0,1; в) Δy і dy у точці з абсцисою x = 20 і обчислити їхні значення, якщо Δx = 0,9 і Δx = 0,09, а також абсолютні та відносні похибки.

5. Знайти диференціали функцій:

1) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$; 2) $y=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$; 3) $y=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$; 4) $y=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$;

5) $y=xe^x$; 6) $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; 7) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$; 8) $y=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$;

9) $y=\left(x^2+5x-2\right)\left(x^3+\sqrt{x}\right)$; 10) $y=\frac{x^4-x^2+1}{x^4+x^2+1}$; 11) $y=\frac{1}{a^2-x^2}$;

12) $y=\left(x^3-3x+1\right)^3$; 13) $y=\operatorname{ctg}^3 x$; 14) $y=2^{\ln\operatorname{tg}x}$; 15) $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)$;

16) $y=\frac{\sin x}{1+x^2}$; 17) $y=\sqrt{\arccos x}-\left(\operatorname{arcctg}\sqrt{x}\right)^2$; 18) $y=\frac{x^2+x\ln x}{1+x^2}$.

6. Знайти диференціали складних функцій, де $u=u(x)$, $v=v(x)$, $w=w(x)$ — диференційовні функції:

1) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{u^2+v^2+2w^2}}$; 2) $y=uvw$; 3) $y=\arcsin\frac{u}{v}$; 4) $y=\frac{u^2}{v^2}+e^w$;

5)• $y=\ln\sqrt{u^2+v^2+2w^2}$; 6) $y=2^{u^2-v^2}$; 7) $y=2\sin u^2-\cos\left(2v^3\right)+5w$;

8) $y=\lg\left(\frac{uv}{w}\right)$; 9) $y=\sin u\cos v+\ln\sin w$; 10) $y=\operatorname{arcctg}\frac{u+v}{w}$;

11) $y=\frac{\sin^2 u}{\sin v^2}+\operatorname{tg}w$; 12) $y=\sin\left(\cos^2 u\right)\cos\left(\sin^2 v\right)$.

7. Виразити диференціал складної функції через незалежну змінну і її диференціал:

1) $y=\sqrt[4]{x^2+3x}$, $x=t^3-3t^2+t+4$; 2) $y=\sin^2 x$, $x=\frac{1}{2}\left(t^4-t^2+1\right)$;

3) $y=\operatorname{arcctg}x$, $x=\operatorname{tg}t$; 4) $y=2^{\frac{1}{x}}$, $x=\ln\operatorname{ctg}t$;

5) $y=3^x$, $x=\frac{1}{2}\log_3\left(t^2+5t+3\right)$; 6) $y=e^x$, $x=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$.

8. Довести справедливість наближеної формули $(1+\Delta x)^n\approx 1+n\Delta x$, якщо $\Delta x\to 0$, і, користуючись нею, знайти наближене значення:

1) $\frac{1}{1,0025}$; 2) $\frac{1}{0,9937}$; 3) $\frac{16}{0,9975}$; 4) $\frac{24}{1,0035}$; 5) $\sqrt{9,032}$;

6) $\frac{1}{\sqrt{16,042}}$; 7) $\sqrt[3]{1,06}$; 8) $\frac{3}{\sqrt[3]{64,0125}}$; 9) $\sqrt[3]{125,1243}$; 10) $\sqrt[4]{80}$;

11) $\sqrt[4]{81,258}$; 12) $\dfrac{19}{\sqrt[4]{625,738}}$; 13) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{15,835}}$; 14) $\sqrt[4]{79,958}$;

15) $\sqrt[3]{3015}$; 16) $\dfrac{21}{\sqrt[5]{3242}}$; 17)• $\sqrt[7]{100}$.

9. Користуючись формулою (1), обчислити наближені значення функцій:

1) $\sin 45°28'$, $\sin 46°$, якщо $\sin 45° = \cos 45° \approx 0,7071$;

2) $\cos 60°36'$, $\cos 61°$, якщо $\cos 60° = 0,5$, $\sin 60° \approx 0,8660$;

3) $\cos 149°$, $\sin 151°$, якщо $\sin 30° = 0,5$, $\cos 60° = 0,5$;

4) $\operatorname{tg} 60°24'$, $\operatorname{tg} 61°$, якщо $\cos 60° = 0,5$, $\operatorname{tg} 60° \approx 1,7321$;

5)• $\operatorname{ctg} 45°44'$, $\operatorname{ctg} 46°$, якщо $\operatorname{ctg} 45° = 1$, $\sin 45° \approx 0,7071$;

6) $\operatorname{arctg} 0,5961$, $\operatorname{arctg} 0,5820$, якщо $\operatorname{arctg} 0,5774 \approx 0,5236$;

7) $\operatorname{arcctg} 1,6842$, якщо $\operatorname{arcctg} 1,7321 \approx 0,5236$;

8) $\arccos 0,7034$, $\arccos 0,7124$, якщо $\arccos 0,7071 \approx 0,7854$;

9) $\arcsin 0,8712$, $\arcsin 0,8638$, якщо $\arcsin 0,8680 \approx 1,0512$;

10) $\operatorname{arctg} 0,95$, якщо $\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4} = 0,785398$;

11) $\lg 101$; 12) $\ln 5,25$, якщо $\ln 5 \approx 1,6094$;

13) $f(x) = (x-5)^2 (x-6)^3 (x-7)$, якщо $x = 7,025$;

14) На скільки зменшиться значення величини 4^5, якщо: а) її основу зменшити на 0,0082; б) показник зменшити на ту саму величину.

10. Радіус кулі $R = 10$ дм, а висота кульового сегмента $h = 3$ дм. На скільки збільшиться об'єм цього сегмента, якщо його висоту збільшити на: а) 1 дм; б) 0,5 дм; в) 0,25 дм; г) 0,125 дм? Знайти диференціал об'єму сегмента й оцінити відносну похибку, %, від заміни приросту об'єму його диференціалом.

11. Радіус основи кругового конуса $R = 4$ м, а висота $H = 3$ м. Як зміниться площа його бічної поверхні, якщо: а) радіус основи збільшити на 0,25 м; б) висоту зменшити на 0,125 м? Дістати точний і наближений розв'язки й обчислити відносну похибку, %, яка виникає у разі заміни приросту площі бічної поверхні її диференціалом.

12. З'ясувати суть наближеної формули

$$\sqrt[n]{a^n + b} \approx a + \frac{b}{na^{n-1}}.$$

Зразки розв'язування задач

1. 5) Нехай

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x \notin \mathbf{Q}, \end{cases} \quad \text{а} \quad x = \varphi(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{якщо } t \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Тоді $f(\varphi(t)) = 1 \quad \forall t$, $df(\varphi(t)) = 0 \cdot dt \quad \forall t$. Разом з тим $\forall x$ не існує $f'(x)$, а $\forall t$ не існує $d(\varphi(t))$, тому задане твердження неправильне.

6. 5) Використовуючи інваріантність форми диференціала, маємо

$$d\ln\sqrt{u^2+v^2+2w^2}=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+2w^2}}d\sqrt{u^2+v^2+2w^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+2w^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2+2w^2}}d\left(u^2+v^2+2w^2\right)=$$

$$=\frac{du^2+dv^2+2dw^2}{2\left(u^2+v^2+2w^2\right)}=\frac{2udu+2vdv+4wdw}{2\left(u^2+v^2+2w^2\right)}=\frac{udu+vdv+2wdw}{u^2+v^2+2w^2}$$

за умови $u^2+v^2+2w^2>0$.

8. 17) Розглянемо $\sqrt[n]{A}$, де $A>0$. Підберемо $a>0$, так, щоб $A=a^n+A-a^n=$ $=a^n\left(1+\dfrac{A-a^n}{a^n}\right)$ і $\left|\dfrac{A-a^n}{a^n}\right|<1$. Тоді

$$\sqrt[n]{A}=\sqrt[n]{a^n\left(1+\frac{A-a^n}{a^n}\right)}=a\sqrt[n]{1+\frac{A-a^n}{a^n}}=a\sqrt[n]{1+\Delta x},$$

де $\Delta x=\dfrac{A-a^n}{a^n}$. Для $f(x)=\sqrt[n]{x}$ і $x_0=1$ маємо

$$f(x_0)=1,\ \ df(x_0)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\Delta x\Big|_{x=1}=\frac{\Delta x}{n}\Rightarrow f(1+\Delta x)\approx$$

$$\approx\sqrt[n]{1+\Delta x}=1+\frac{\Delta x}{n}\Rightarrow\sqrt[n]{A}\approx a\left(1+\frac{A-a^n}{a^n n}\right).$$

Це загальний підхід. У даному випадку маємо

$$\sqrt[7]{100}=\sqrt[7]{128-28}=\sqrt[7]{128\left(1-\frac{28}{128}\right)}=2\sqrt[7]{1-\frac{7}{32}}=2\left(1-\frac{7}{32\cdot7}\right)=2-\frac{1}{16}=1\frac{15}{16}.$$

Отже, $\sqrt[7]{100}\approx1\dfrac{15}{16}\approx1{,}9375$.

9. 5) Формула (1) для функції $f(x)=\operatorname{ctg}x$ має вигляд

$$\operatorname{ctg}(x_0+\Delta x)\approx\operatorname{ctg}x_0-\frac{\Delta x}{\sin^2x_0}. \tag{2}$$

Покладемо $x_0=\dfrac{\pi}{4}$, що відповідає 45°, причому $\operatorname{ctg}45^\circ=1$, а $\sin45^\circ=\dfrac{\sqrt2}{2}$. Приріст аргументу Δx, що дорівнює відповідно 44′ і 1°, подамо в радіанній мірі, взявши до уваги, що радіанна міра кута 1° становить $\dfrac{\pi}{180}\approx1{,}7453292\cdot10^{-2}$, а кута $1'-\dfrac{\pi}{180\cdot60}\approx2{,}908882\cdot10^{-4}$. Тоді маємо

$$\Delta x=2{,}908882\cdot10^{-4}\cdot44=1{,}2799081\cdot10^{-2},\ \ \Delta x=1{,}7453292\cdot10^{-2}.$$

Підставивши ці значення Δx у формулу (2), дістанемо

$$\operatorname{ctg}45^\circ44'=1-2\cdot1{,}2799081\cdot10^{-2}=0{,}9744018,$$

$$\operatorname{ctg}46^\circ=1-2\cdot1{,}7453292\cdot10^{-2}=0{,}9650934.$$

Для оцінки точності, з якою обчислено за формулою (2) значення функції, порівняємо їх з точнішими наближеними значеннями, які дістанемо за допомогою мікрокалькулятора «Електроніка МК-61». (Відомо, що максимальна відносна похибка обчислених на цьому мікрокалькуляторі значень тригонометричних, обернених тригонометричних і логарифмічних функцій становить $3\cdot10^{-7}$, тобто 6–7 десяткових знаків є точними). Оскільки $\operatorname{ctg} 45°44' = 0{,}97472394$, $\operatorname{ctg} 46° = 0{,}96568888$, то абсолютні похибки дорівнюють відповідно $3{,}2214\cdot10^{-4}$ і $5{,}9548\cdot10^{-4}$, а відносні $3{,}3049357\cdot10^{-4}$ і $6{,}1663752\cdot10^{-4}$. Отже, відносні похибки становлять відповідно 0,033 і 0,062%. З цих оцінок одночасно випливає, що за наближеною формулою (1) дістанемо тим точніші наближені значення функцій, чим меншим буде приріст аргументу Δx. Крім того, правильними є не більше ніж 4 десяткових знаки. Тому обчислені за формулою (1) значення всіх функцій у вправі 3.9 подаватимемо з 4 десятковими знаками. Отже, $\operatorname{ctg} 45°44' = 0{,}9744$, а $\operatorname{ctg} 46° = 0{,}9651$.

§ 5.4. Похідні і диференціали вищих порядків

Нехай функція f диференційовна в околі точки x_0. Тоді у цьому околі визначено функцію f' — похідну від функції f. Якщо функція f' у точці x_0 має похідну, то її називають *другою похідною* або *похідною другого порядку* функції f у точці x_0 і позначають $f''(x_0)$ або $\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$. Отже,

$$f''(x_0) := (f')'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}.$$

З механічної точки зору, друга похідна функції $s = s(t)$, що задає закон руху матеріальної точки, дорівнює прискоренню руху цієї точки в даний момент часу t.

Функцію f називають *двічі диференційовною* у точці x_0, якщо $f''(x_0) \neq \infty$. При цьому *другим диференціалом*, або *диференціалом другого порядку* функції f у точці x_0, називають вираз $d^2 f(x_0) = d(df)(x_0) = f''(x_0)\Delta x^2$, де Δx вважають фіксованим.

Для довільного $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, похідна n-го порядку (або n-та похідна) та диференціал n-го порядку (або n-й диференціал) функції f у точці x_0 визначаються відповідно рівностями:

$$f^{n}(x_0) := \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0) := \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x} =: \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$$

(за умови, що f є $n-1$ раз диференційовною в околі точки x_0),

$$d^n f(x_0) := d\left(d^{(n-1)} f\right)(x_0) = f^{(n)}(x_0)\Delta x^n,$$

де Δx — фіксоване (за умови, що функція f є n раз диференційовною в точці x_0, тобто $f^{(n)}(x_0) \neq \infty$).

Функцію f називають *нескінченно диференційовною* в точці x_0, якщо вона має в цій точці похідну $f^{(n)}(x_0)$ $\forall n \in \mathbf{N}$.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) якщо функція f двічі диференційовна в точці x_0, то вона диференційовна в околі цієї точки;

2) твердження, обернене до 1), є правильним;

3)• якщо існує $d^2 f(x_0)$, то f — двічі диференційовна в околі точки x_0;

4) твердження, обернене до 3), є правильним;

5) якщо функція f n раз диференційовна в точці x_0, то її похідна n-го порядку неперервна у цій точці;

6) якщо функція f нескінченно диференційовна в точці x_0, то вона має неперервну похідну будь-якого порядку в цій точці;

7) якщо функція f двічі диференційовна в точці x_0 і виконано всі умови твердження про диференційовність оберненої до f функції f^{-1}, то f^{-1} двічі диференційовна в точці $y_0 = f(x_0)$, причому $\left(f^{-1}\right)''(y_0) = -\dfrac{f''(x_0)}{(f'(x_0))^3}$?

2. Чи буде форма другого диференціала інваріантною, тобто $d^2 f(x) = f''(x)dx^2$, де $dx = \Delta x$, у випадку, коли x — незалежна змінна, або dx — диференціал функції x?

3. Знайти похідні другого порядку основних елементарних функцій.

4. Знайти похідні n-го порядку даних функцій:

1) $y = ax + b$; 2) $y = ax^2 + bx + c$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = x^\alpha$; 5) $y = a^x$; 6) $y = e^x$;

7) $y = \ln x$; 8) $y = \sin x$; 9) $y = \cos x$; 10) $y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, $a_m \neq 0$;

11) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; 12)• $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$; 13) $y = \ln\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$;

14) $y = \dfrac{1}{\sqrt{a - bx}}$, $a > 0$, $b > 0$; 15) $y = a^{kx+\alpha}$;

16) $y = x^n \ln x$; 17) $y = \sin(kx + \alpha)$; 18) $y = \cos(kx + \alpha)$;

19) $y = \dfrac{1}{a + kx}$; 20) $y = \sin^2(kx + \alpha)$; 21) $y = \cos^2(kx + \alpha)$;

22) $y=\sin^3(kx+\alpha)$; 23) $y=\cos^3(kx+\alpha)$;

24) $y=\sin(ax+b)\sin(cx+d)$; 25) $y=\sin(ax+b)\cos(cx+d)$;

26) $y=\cos(ax+b)\cos(cx+d)$; 27) $y=x\sin(ax+b)$; 28) $y=\ln\dfrac{x^2-16}{x^2-6x+9}$;

29) $y=x^5\ln x$; 30) $y=e^{kx}\sin(ax+b)$; 31) $y=e^{kx}\cos(ax+b)$.

5. Для даних функцій y знайти диференціали $d^n f$ вказаного порядку n:

1) $y=x^4$, $n=4$ і $n=5$; 2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $n=3$; 3) $y=\dfrac{x^3}{1-x}$, $n=4$;

4) $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, $n=20$; 5) $y=x\sin 2x$, $n=10$; 6) $y=e^x\ln x$, $n=4$;

7) $y=x\ln x$, $n=5$; 8) $y=\sin x\sin 2x\sin 3x$, $n=10$;

9) $y=\ln\dfrac{x^2-4}{x^2-6x+9}$, $n=10$; 10) $y=\dfrac{2+x}{2-x}$, $n=10$;

11) $y=\dfrac{3x+4}{x^2-16}$, $n=10$; 12) $y=\dfrac{x+3}{(x+1)^2(x-3)}$, $n=9$;

13) $y=e^{2x}\cos^2 x$, $n=8$; 14) $y=e^{2x}\sin^2 x$, $n=9$, $n=10$;

15) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$, $n=6$, $n=7$; 16) $y=\sin^2 x\sin 3x$, $n=4$, $n=6$;

17) $y=e^{ax}\cos^2(bx+c)$, $n=10$; 18) $y=e^{ax}\sin^2(bx+c)$, $n=12$.

6.• Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases} x^{2n}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x=0,\end{cases}$$

n раз диференційовна в точці $x=0$. Чи існує $f^{(n+1)}(0)$? Окремо розглянути випадок $n=1$.

7. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{якщо } x\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x=0,\end{cases}$$

нескінченно диференційовна в точці $x=0$.

8. Довести формулу Лейбніца:

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)},$$

де $u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$, $C_n^k=\dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Дістати з цієї формули відповідну формулу для $d^{(n)}(uv)$.

9. Знайти похідні другого порядку від параметрично заданих функцій:

1) $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^2$, $t \in (-\infty;\ +\infty)$;

2)• $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in [0;\ 2\pi]$;

3) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0;\ 2\pi]$;

4) $x = \mathrm{e}^t \cos t$, $y = \mathrm{e}^t \sin t$, $t \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$;

5) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0;\ 2\pi]$;

6) $x = \dfrac{3at}{1+t^2}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}$, $t \in (-\infty;\ +\infty)$;

7) $x = 2\ln \operatorname{ctg} t + 1$, $y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$, $t \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$;

8) $x = \dfrac{at^2}{1+t^2}$, $y = \dfrac{a\sqrt{3}\ t}{1+t^2}$, $t \in (-\infty;\ +\infty)$.

10. Від параметрично заданих функцій знайти y''_{x^2} і y'''_{x^3}:

1) $x = \dfrac{1}{\sin t}$, $y = \operatorname{ctg} t$, $t \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$;

2) $x = \operatorname{arctg} t$, $y = \ln\left(1 + t^2\right)$, $t \in (-\infty;\ +\infty)$;

3) $x = \mathrm{e}^{-t}$, $y = t^3$, $t \in (-\infty;\ +\infty)$;

4) $x = \cos t + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$, $t \in [0;\ 2\pi]$;

5) $x = \dfrac{1}{\cos t}$, $y = \operatorname{tg} t$, $t \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$;

6) $x = \mathrm{e}^{-\alpha t}$, $y = \mathrm{e}^{\alpha t}$, $t \in (-\infty;\ +\infty)$;

7) $x = \arcsin t$, $y = \sqrt{1 - t^2}$, $t \in (-1;\ 1)$;

8) $x = (1 + \ln\ t)/t^2$, $y = (3 + 2\ln t)/t$, $t \in (0;\ +\infty)$.

11. Переконатися, що дана функція $y = y(x)$ задовольняє задане рівняння:

1) $y = \mathrm{e}^{-2x}$, $y'' + y' - 2y = 0$; 2) $y = \cos 2x$, $y'' + 4y = 0$;

3) $y = \mathrm{e}^{2x}\sin x$, $y'' - 4y' + 5y = 0$; 4) $y = \dfrac{x-2}{x+3}$, $2(y')^2 = (y-1)y''$;

5) $y = A\sin(\omega t + \omega_0) + B\cos(\omega t + \omega_0)$, $y'' + \omega^2 y = 0$, A, B, ω, ω_0 — сталі;

6) $y = \sqrt{8x - 2x^2}$, $y^3 y'' + 16 = 0$;

7) $y = \left(C_1 + C_2 x + x^3\right)\mathrm{e}^x$, $y'' - 2y' + y = 6x\mathrm{e}^x$, C_1, C_2 — сталі;

8) $y=C_1x+C_2e^{-2x}$, $(2x+1)y''+4xy'-4y=0$, C_1, C_2 — сталі;

9) $y=C_1x+C_2e^{x}+C_3e^{-x}$, $xy'''-y''-xy'+y=0$, C_1, C_2, C_3 — сталі;

10) $x=\dfrac{1+t}{t^3}$, $y=\dfrac{3+4t}{2t^2}$, $x(y')^3=1+y'\left(y'=\dfrac{dy}{dx}\right)$;

11) $x=\ln t-\arccos t$, $y=t-\sqrt{1-t^2}$, $y=y'-\sqrt{1-(y')^2}\left(y'=\dfrac{dy}{dx}\right)$.

12. Нехай $f(z)=\sin z$, $z=e^x$ і $x=t^3-1$. Знайти $df(z)$, $df(z(x))$ і $df(z(x(t)))$.

13. Нехай функція f двічі диференційовна в точці x_0. Довести, що

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2!}f''(x_0)\Delta x^2.$$

14. Матеріальна точка рухається так, що її швидкість пропорційна кореню квадратному з пройденого шляху. Довести, що рух точки рівноприскорений.

15. Матеріальна точка рухається за законом $s=4+4t-t^2$. В який момент часу швидкість точки дорівнюватиме нулю? Яке прискорення у цей момент часу?

Зразки розв'язування задач

1. 3) Якщо існує $d^2f(x_0)$, то існує скінченна друга похідна $f''(x_0)$, а тому має існувати скінченна перша похідна $f'(x)$ у деякому околі точки x_0. Проте ця похідна може бути диференційовною функцією лише в точці x_0. Наприклад, якщо $f'(x)=(x-x_0)\,\varphi(x)$, де функція φ неперервна, проте скрізь недиференційовна, то $\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{(x-x_0)\varphi(x)-0}{x-x_0}=\varphi(x)\to$ $\to\varphi(x_0)$, $x\to x_0\Rightarrow f''(x_0)=\varphi(x_0)$, але не існує $f''(x)$ $\forall x\neq x_0$. Отже, задане твердження неправильне.

4. 12) Маємо

$$y=\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}.$$

Розглянемо функцію $\varphi(x)=(x-a)^{\alpha}$, для якої

$$\varphi'(x)=\alpha(x-a)^{\alpha-1},\quad \varphi''(x)=\alpha(\alpha-1)(x-\alpha)^{\alpha-2},\ \ldots,$$

$$\varphi^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-n+1)(x-a)^{\alpha-n}\Rightarrow\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d^n}{dx^n}\left((x-3)^{-1}\right)-$$

$$-\frac{d^n}{dx^n}\left((x-2)^{-1}\right)=(-1)(-2)\ \ldots\ (-n)(x-3)^{-1-n}-(-1)(-2)\ \ldots$$

$$\ldots\ (-n)(x-2)^{-1-n}=(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-3)^{n+1}}-\frac{1}{(x-2)^{n+1}}\right).$$

6. Нехай $x \neq 0$ — фіксована точка. Тоді $f(x) = x^{2n} \sin \frac{1}{x}$. Звідси

$$f'(x) = 2nx^{2n-1} \sin \frac{1}{x} + x^{2n} \cos \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -x^{2n-2} \cos \frac{1}{x} + 2nx^{2n-1} \sin \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = -(2n-2)x^{2n-3} \cos \frac{1}{x} + x^{2n-2} \sin \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2n(2n-1)x^{2n-2} \sin \frac{1}{x} +$$

$$+2nx^{2n-1} \cos \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \left(-x^{2n-4} + 2n(2n-1)x^{2n-2}\right) \sin \frac{1}{x} - (4n-2)x^{2n-3} \cos \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'''(x) = \left(-(2n-4)x^{2n-5} + 2n(2n-1)(2n-2)x^{2n-3}\right) \sin \frac{1}{x} +$$

$$+\left(-x^{2n-4} + 2n(2n-1)x^{2n-2}\right) \cos \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) - (4n-2)(2n-3)x^{2n-4} \cos \frac{1}{x} +$$

$$+(4n-2)x^{2n-3} \sin \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \left(x^{2n-6} - (2n(2n-1) + (4n-2)(2n-3)) \times\right.$$

$$\left.\times x^{2n-4}\right) \cos \frac{1}{x} + \left(-(6n-6)x^{2n-5} + 2n(2n-1)(2n-2)x^{2n-3}\right) \sin \frac{1}{x} =$$

$$= \left(x^{2n-6} + a_1^{(3)} x^{2n-4}\right) \cos \frac{1}{x} + \left(b_1^{(3)} x^{2n-5} + b_2^{(3)} x^{2n-3}\right) \sin \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(\mathrm{IV})}(x) = \left((2n-6)x^{2n-7} + a_1^{(3)}(2n-4)x^{2n-5}\right) \cos \frac{1}{x} -$$

$$-\left(x^{2n-6} + a_1^{(3)} x^{2n-4}\right) \sin \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \left(b_1^{(3)}(2n-5)x^{2n-6} +\right.$$

$$\left.+b_2^{(3)}(2n-3)x^{2n-4}\right) \sin \frac{1}{x} + \left(b_1^{(3)} x^{2n-5} + b_2^{(3)} x^{2n-3}\right) \cos \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \left(x^{2n-8} + b_1^{(4)} x^{2n-6} + b_2^{(4)} x^{2n-4}\right) \sin \frac{1}{x} + \left(a_1^{(4)} x^{2n-7} + a_2^{(4)} x^{2n-5}\right) \cos \frac{1}{x}.$$

Припустимо, що

$$f^{(2k)}(x) = \left(x^{2n-4k} + b_1^{(2k)} x^{2n-4k+2} + \ldots + b_k^{(2k)} x^{2n-2k}\right) \sin \frac{1}{x} +$$

$$+\left(a_1^{(2k)} x^{2n-4k+1} + a_2^{(2k)} x^{2n-4k+3} + \ldots + a_k^{(2k)} x^{2n-2k-1}\right) \cos \frac{1}{x},$$

а
$$f^{(2k-1)}(x) = \left(x^{2n-4k+2} + c_1^{(2k-1)} x^{2n-4k+4} + \ldots + c_{k-1}^{(2k-1)} x^{2n-2k}\right) \cos \frac{1}{x} +$$

$$+\left(d_1^{(2k-1)} x^{2n-4k+3} + d_2^{(2k-1)} x^{2n-4k+5} + \ldots + d_k^{(2k-1)} x^{2n-2k+1}\right) \sin \frac{1}{x}.$$

Тоді якщо $2k < n$, то

$$f^{(2k+1)}(x) = \left(\alpha_1 x^{2n-4k-1} + \alpha_2 x^{2n-4k+1} + \ldots + \alpha_{k+1} x^{2n-2k-1}\right) \sin \frac{1}{x} +$$

$$+\left(x^{2n-4k} + b_1^{(2k)} x^{2n-4k+2} + \ldots b_k^{(2k)} x^{2n-2k}\right) \cos \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) +$$

$$+\left(\beta_1 x^{2n-4k} + \beta_2 x^{2n-4k+2} + \ldots + \beta_k x^{2n-2k-2}\right) \cos \frac{1}{x} -$$

$$-\left(a_1^{(2k)}x^{2n-4k+1}+a_2^{(2k)}x^{2n-4k+3}+\ \dots\ +a_k^{(2k)}x^{2n-2k-1}\right)\sin\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=\left(x^{2n-4k-2}+c_1^{(2k+1)}x^{2n-4k}+\dots+c_k^{(2k+1)}x^{2n-2k-2}\right)\cos\frac{1}{x}+$$

$$+\left(d_1^{(2k+1)}x^{2n-4k-1}+d_2^{(2k+1)}x^{2n-4k+1}+\dots+d_{k+1}^{(2k+1)}x^{2n-2k-1}\right)\sin\frac{1}{x},$$

$$f^{(2k+2)}(x)=\left(\gamma_1x^{2n-4k-3}+\gamma_2x^{2n-4k-1}+\ \dots+\gamma_{k+1}x^{2n-2k-3}\right)\cos\frac{1}{x}-$$

$$-\left(x^{2n-4k-2}+c_1^{(2k+1)}x^{2n-4k}+\dots+c_k^{(2k+1)}x^{2n-2k-2}\right)\sin\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+$$

$$+\left(\delta_1x^{2n-4k-2}+\delta_2x^{2n-4k}+\ \dots+\delta_{k+1}x^{2n-2k-2}\right)\sin\frac{1}{x}+$$

$$+\left(d_1^{(2k+1)}x^{2n-4k-1}+d_2^{(2k+1)}x^{2n-4k+1}+\dots+d_{k+1}^{(2k+1)}x^{2n-2k-1}\right)\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=\left(x^{2n-4(k+1)}+b_1^{(2k+2)}x^{2n-4(k+1)+2}+\dots+b_{k+1}^{(2k+2)}x^{2n-2(k+1)}\right)\sin\frac{1}{x}+$$

$$+\left(a_1^{(2k+2)}x^{2n-4k-3}+a_2^{(2k+2)}x^{2n-4k-1}+\dots+a_{k+1}^{(2k+2)}x^{2n-2k-3}\right)\cos\frac{1}{x}.$$

Отже, якщо $k < n$, то похідна k-го порядку від функції f є сумою доданків, пропорційних до функцій $x^i\sin\frac{1}{x}$ та $x^j\cos\frac{1}{x}$, де $2\le i\in\mathbf{N}$ та $2\le j\in\mathbf{N}$. Якщо $k = n$, то серед цих доданків є по одному доданку, пропорційному до функцій $x\sin\frac{1}{x}$ і $\cos\frac{1}{x}$, якщо n — непарне, або $\sin\frac{1}{x}$ та $x\cos\frac{1}{x}$, якщо n — парне.

Кожна з функцій вигляду $x^i\sin\frac{1}{x}$ і $x^j\cos\frac{1}{x}$, де $i, j\ge 2$, диференційовна в точці $x = 0$ (їхні похідні дорівнюють нулю). Тому і функція f у точці $x = 0$ має похідні до n-го порядку включно, причому $f^{(k)}(0)=0,\ k\le n$. Проте похідної $f^{(n+1)}(0)$ не існує, оскільки в точці $x=0$ не існує $\lim\limits_{x\to0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f^{(n)}(x)}{x}$ внаслідок наявності в $f^{(n)}(x)$ доданків, пропорційних функціям $x\sin\frac{1}{x}$ та $\cos\frac{1}{x}$, якщо n — непарне, або функціям $\sin\frac{1}{x}$ і $x\cos\frac{1}{x}$, якщо n — парне. Тому $f^{(n)}(x)$ не є диференційовною в точці $x=0$.

9. 2) На кожному з інтервалів $(0;\pi)$ і $(\pi;2\pi)$ виконуються умови диференційовності параметрично заданої функції. Оскільки $x'=-a\sin t,\ y'=a\cos t,$ то

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\cos t}{-a\sin t}=-\operatorname{ctg} t,$$

де

$$t=\varphi^{-1}(x),\ \text{ а }\ x=\varphi(t)=a\cos t\Rightarrow t'(x)=\frac{1}{\varphi'(t)}=-\frac{1}{a\sin t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=(-\operatorname{ctg} t)_t'\cdot t'(x)=\frac{1}{\sin^2 t}\cdot\frac{-1}{a\sin t}=-\frac{1}{a\sin^3 t}.$$

§ 6.1. Теореми Ролля, Лагранжа і Коші

Теорема Ролля. *Нехай функція f неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна в інтервалі $(a; b)$ і $f(a)=f(b)$. Тоді $\exists\, c\in(a;\, b):\ f'(c)=0$.*

Теорема Лагранжа. *Нехай функція f неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна в інтервалі $(a; b)$. Тоді $\exists\, c\in (a; b)$: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ (формула скінченних приростів).*

Теорема Коші. *Нехай функції f і φ неперервні на відрізку $[a; b]$, диференційовні в інтервалі $(a; b)$ і $\varphi'(x)\neq 0\ \forall\, x \in (a; b)$. Тоді $\exists\, c \in (a; b)$:*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) точка c із теореми Ролля (Лагранжа, Коші) є єдиною в інтервалі $(a; b)$;

2) якщо функція f диференційовна в інтервалі $(a; b)$ і $f(a)=f(b)$, то $\exists\, c \in (a; b)$: $f'(c)=0$;

3)• якщо функція f диференційовна в інтервалі $(a; b)$, то $\forall x_1,\ x_2 \in (a; b)$ $\exists\theta\in[0;\, 1]:\ f(x_2)-f(x_1)=f'(x_1+\theta(x_2-x_1))(x_2-x_1)$;

4) теорема Лагранжа є наслідком теореми Ролля, який її узагальнює;

5) теореми Ролля, Лагранжа і Коші є рівносильними твердженнями в тому розумінні, що з правильності одного твердження випливає правильність двох інших?

2. У чому полягає геометричний зміст теорем Ролля, Лагранжа і Коші?

3. Показати, що теорема Ролля рівносильна теоремі Ферма: якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$ та диференційовна в інтервалі $(a; b)$ і якщо точка $x_0\in (a; b)$ така, що $f(x_0)=\max\limits_{[a,b]} f(x)$ або $f(x_0)=\min\limits_{[a,b]} f(x)$, то $f'(x_0)=0$.

4. Для функції $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ маємо $f(1)=f(-1)=0$, але $f'(x)\neq 0$ $\forall\, x\in[-1;\ 1]$. Чому до цієї функції не застосовна теорема Ролля?

5. Довести таке узагальнення теореми Ролля: нехай функція f диференційовна в інтервалі $(a; b)$ і $f(a+) = f(b-) \neq \infty$. Тоді $\exists c \in (a;\ b):\ f'(c) = 0$. У чому полягає узагальнення?

6. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Тоді за теоремою Лагранжа для кожного відрізка $[0;\ x_1]$ $\exists c \in (0; x_1):\ f(x_1) - f(0) = f'(c)(x_1 - 0)$, тобто

$$x_1^2 \sin\frac{1}{x_1} = x_1\left(2c\sin\frac{1}{c} - \cos\frac{1}{c}\right) \Rightarrow \cos\frac{1}{c} = 2c\sin\frac{1}{c} - x_1 \sin\frac{1}{x_1}.$$

Якщо $x_1 \to 0$, то і $c \to 0$, а тому

$$\cos\frac{1}{c} = 2c\sin\frac{1}{c} - x_1 \sin\frac{1}{x_1} \to 0,\ \ x_1 \to 0,$$

тобто $\cos\dfrac{1}{c} \to 0,\ c \to 0$. Проте відомо, що $\cos\dfrac{1}{x}$ не має границі при $x \to 0$. Як пояснити цей парадокс? Знайти усі можливі точки c з відрізку $\left[0;\ \dfrac{1}{\pi}\right]$, для яких $\cos\dfrac{1}{c} = 0$.

7. Які числа можуть бути точками c з теореми Ролля для функції $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$?

8. Чи можна вважати доведенням теореми Коші такі міркування: оскільки функції f і φ задовольняють умови теореми Лагранжа, то

$$\exists c \in (a;\ b):\ f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \ \text{ і}$$

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b-a) \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)(b-a)}{\varphi'(c)(b-a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}?$$

9. Чи можна теорему Ролля застосувати до функцій:

1) $y = \dfrac{2 - x^2}{x^4},\ \ x \in [-1;\ 1]$;

2) $y = \begin{cases} x+3, & \text{якщо } -3 \le x \le -1, \\ x^4, & \text{якщо } -1 < x \le 0; \end{cases}$ 3) $y = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } -1 \le x < 0, \\ e^x, & \text{якщо } 0 \le x \le 1; \end{cases}$;

4) $y = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{якщо } x \le 0, \\ 1 + x^2, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$ $x \in [a;\ b]$;

5) $y = \left(4^x + 2\right)(2 - x) - 6,\ \ x \in \left[0;\ \dfrac{1}{2}\right]$ і $x \in \left[\dfrac{1}{2};\ 1\right]$?

Довести, що остання функція, крім 0, 1/2 і 1, інших нулів не має.

10. Чи можна застосувати теорему Лагранжа до даних функцій, і якщо можна, то знайти відповідну точку c:

1) $y=4-x^2$, $x\in[-2;\ 1]$; 2) $y=\sqrt[5]{x^4(x-1)}$, $x\in\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$;

3)• $y=ax^2+bx+c$, $x\in[x_1;\ x_2]$;

4) $y=\begin{cases} x^2, & \text{якщо } 0\le x\le 1,\\ 4x-x^2-2, & \text{якщо } 1<x\le 2;\end{cases}$

5) $y=\begin{cases} \left(3-x^2\right)/2, & \text{якщо } 0\le x\le 1,\\ 1/x, & \text{якщо } 1<x\le 2;\end{cases}$

6) $y=\frac{1}{x}$, $x\in[a;\ b]$, де $ab<0$; 7) $y=\begin{cases} x, & \text{якщо } 0\le x<1,\\ 1/x, & \text{якщо } 1\le x\le 4;\end{cases}$

8) $y=2x^3-7x^2+2x+2$, $x\in[0;\ 1]$; 9) $y=x+\cos x$, $x\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

10) $y=\ln x$, $x\in\left[\mathrm{e};\ \mathrm{e}^2\right]$; 11) $y=\frac{x}{\ln x}$, $x\in\left[\mathrm{e};\ \mathrm{e}^2\right]$;

12) $y=2x^2-\ln x$, $x\in[1;\mathrm{e}]$; 13) $y=x-\mathrm{e}^x$, $x\in[0;\ 1]$;

14) $y=x\ln x$, $x\in\left[1;\ \mathrm{e}^2\right]$; 15) $y=3x+x^3$, $x\in[1;\ 2]$;

16) $y=0{,}1x+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, $x\in[0;2]$.

11. Чи можна застосувати теорему Коші до даних функцій, і якщо можна, то знайти відповідну точку c:

1) $f(x)=x^2$, $\varphi(x)=x^3$, $x\in[-1;\ 1]$;

2) $f(x)=\sin x$, $\varphi(x)=1+\cos x$, $x\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $f(x)=x^3$, $\varphi(x)=x^2+1$, $x\in[1;\ 2]$;

4) $f(x)=\mathrm{e}^x$, $\varphi(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$, $x\in[-2;\ 2]$;

5) $f(x)=\sin x$, $\varphi(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $x\in[-8;\ 8]$.

12. За допомогою теореми Лагранжа довести дані нерівності:

1) $|\sin\alpha-\sin\beta|\le|\alpha-\beta|$ $\forall\alpha,\ \beta\in\mathbf{R}$; 2) $\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y\le x-y$ $\forall x>y$;

3) $|\ln u-\ln v|\le\frac{|u-v|}{a}$ $\forall u\ge a,\ v\ge a,\ a>0$;

4) $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ $\forall x>-1$; 5) $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$ $\forall a>b>0$;

6) $\arcsin x>x$, $0<x<1$; 7) $\operatorname{arctg}x<x$, $x>0$; 8) $\mathrm{e}^x>1+x$, $x>0$;

9) $e^{-x} > 1-x,\ x>0$; 10) $\dfrac{b-a}{\cos^2 a} \le \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \le \dfrac{b-a}{\cos^2 b},\ 0<a\le b<\dfrac{\pi}{2}$;

11) $na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a),\ a<b,\ n>1$;

12) $(1+x)^{\alpha} \ge 1+\alpha x,\ \alpha>1,\ x>-1$;

13) $(1+x)^{\alpha} \le 1+\alpha x,\ 0<\alpha<1,\ x>-1$.

13•. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\ \ldots\ +\dfrac{1}{2n}\right)=\ln 2$.

14. Нехай похідна функції f обмежена в інтервалі $(a;\ b)$. Довести, що функція f рівномірно неперервна на $(a;\ b)$.

15. Довести, що $f(x)=o(x),\ x\to+\infty$, якщо $f'(x)=o(1),\ x\to+\infty$.

16. Довести, що коли $f(x)=o(x),\ x\to+\infty$, і функція f диференційовна в інтервалі $(a;+\infty)$, то $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=0$. Зокрема, якщо $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=k$, то $k=0$.

17. Нехай функція f диференційовна в інтервалі $(-\infty;+\infty)$. Довести, що $f(x+h)-f(x)\equiv hf'(x) \Leftrightarrow f(x)=ax+b$, де a і b — деякі сталі.

18•. Нехай функція f двічі диференційовна в інтервалі $(-\infty;\ +\infty)$. Довести, що $f(x+h)-f(x)\equiv hf'\left(x+\dfrac{h}{2}\right) \Leftrightarrow f(x)=ax^2+bx+c$, де a, b і c — деякі сталі.

19. Довести, що $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$ $\forall x\ge 0$, де $\theta(x)\in\left[\dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{2}\right)$, причому $\lim\limits_{x\to 0+}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$, а $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

Зразки розв'язування задач

1. 3) Якщо функція f диференційовна на $(a;\ b)$, то $\forall x_1,\ x_2\in(a;\ b)$ можливі випадки: а) $x_1<x_2$; б) $x_1=x_2$; в) $x_2<x_1$. Якщо $x_1=x_2$, то за θ можна взяти будь-яке число з відрізка $[0;\ 1]$, оскільки $0=f(x_2)-f(x_1)=f'(x_1+\theta(x_2-x_1))(x_2-x_1)=0$. Нехай $x_1<x_2$. Тоді на відрізку $[x_1;x_2]$ виконуються всі умови теореми Лагранжа, за якою $\exists c\in(x_1;\ x_2):\ f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$. Оскільки $x_1<c<x_2$, то

$$0<\frac{c-x_1}{x_2-x_1}=\theta<1 \Rightarrow c=x_1+\theta(x_2-x_1)\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=$$

$$=f'(x_1+\theta(x_2-x_1))(x_2-x_1).$$

Нехай $x_2<x_1$. Тоді $\exists c\in(x_2;\ x_1):\ f(x_1)-f(x_2)=f'(c)(x_1-x_2)$. Оскільки $x_2<c<$ $<x_2$, то

$$0<\frac{x_1-c}{x_1-x_2}=\theta<1\Rightarrow c=x_1-\theta(x_1-x_2)=x_1+\theta(x_2-x_1)\Rightarrow f(x_1)-f(x_2)=$$

$$=f'(x_1+\theta(x_2-x_1))(x_1-x_2)\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=f'(x_1+\theta(x_2-x_1))(x_2-x_1).$$

Отже, задане твердження правильне.

10. 3) Оскільки $f'(x)=2ax+b \quad \forall x\in \mathbf{R}$, то функція f задовольняє всі умови теореми Лагранжа $\forall [x_1;\ x_2]\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$, де $c\in(x_1;\ x_2)$. Маємо

$$f(x_2)-f(x_1)=a\left(x_2^2-x_1^2\right)+b(x_2-x_1)=(x_2-x_1)(a(x_1+x_2)+b),$$

$$f'(c)=2ac+b\Rightarrow (x_2-x_1)(a(x_1+x_2)+b)=(2ac+b)(x_2-x_1)\Rightarrow c=(x_1+x_2)/2,$$

якщо $a\neq 0$. Якщо $a=0$, то формула Лагранжа для даної функції набуває вигляду $b(x_2-x_1)=$ $=b(x_2-x_1)$, тобто за c можна взяти будь-яку точку з відрізка $[\,x_1;\,x_2\,]$.

13. З нерівності 12.4), поклавши $x=\frac{1}{m}$, $m\in\mathbf{N}$, дістанемо

$$\frac{1}{m+1}<\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)<\frac{1}{m}\quad \forall m\in\mathbf{N}. \tag{1}$$

Замінивши m на $m-1$ у лівій частині цієї нерівності, матимемо

$$\frac{1}{m}<\ln\left(1+\frac{1}{m-1}\right)=\ln\frac{m}{m-1}.$$

З цієї нерівності і з правої частини нерівності (1) випливає, що

$$\ln\frac{m+1}{m}<\frac{1}{m}<\ln\frac{m}{m-1}.$$

Поклавши у цій нерівності послідовно $m=n,\ n+1,\ \ldots,\ 2n$ і додавши їх, приходимо до нерівності

$$\ln\frac{2n+1}{n}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}<\ln\frac{2n}{n-1}.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n}{n-1}=\ln 2,$$

то за теоремою про границю проміжної змінної дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ \ldots\ +\frac{1}{2n}\right)=\ln 2.$$

18. Продиференціювавши тотожність $f(x+h)-f(x)\equiv hf'\left(x+\frac{h}{2}\right)$ по змінній h, дістанемо $f'(x+h)\equiv f'\left(x+\frac{h}{2}\right)+hf''\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$. Поклавши у цій тотожності $x+\frac{h}{2}=x^*$, а $\frac{h}{2}=h^*$, знайдемо $f'(x^*+h^*)-f'(x^*)\equiv h^*f''(x^*)$, а за твердженням 17 маємо $f'(x^*)=a^*x^*+$ $+b^*\quad \forall x^*\in\mathbf{R}$, де a^* і b^* — деякі сталі. Отже, $f(x+h)-f(x)\equiv h\left(a^*\left(x+\frac{h}{2}\right)+b^*\right)$. Поклавши у цій тотожності $x=0$, дістанемо

$$f(h)-f(0)=\frac{a^*}{2}h^2+b^*h\quad \forall h\Rightarrow f(x)=ax^2+bx+c,$$

де

$$a=\frac{a^*}{2},\ b=b^*,\ c=f(0),\ x=h.$$

§ 6.2. Правила Лопіталя. Асимптоти

Якщо треба знайти границю частки $f(x)/\varphi(x)$, коли границі чисельника і знаменника дорівнюють нулю, чи показати, що вона не існує, то кажуть, що треба розкрити невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Аналогічно розуміють слова розкрити невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, 0^0 і ∞^0.

Правило Лопіталя (розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$). *Нехай:*

1) *функції* f *і* φ *диференційовні в інтервалі* $I=(a;b)$ *за винятком, можливо, точки* x_0, *яка є граничною для* I, $|x_0|\le+\infty$, $\varphi'(x)\ne 0$, $x\ne x_0$;

2) $\lim\limits_{I\ni x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{I\ni x\to x_0}\varphi(x)=a$, де $a=0$ або $a=\infty$;

3) *існує* $\lim\limits_{I\ni x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=b$, $|b|\le\infty$. *Тоді існує*

$$\lim_{I\ni x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{I\ni x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Розкриття невизначеностей інших типів можна звести до розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ за допомогою таких перетворень:

$$0\cdot\infty\Rightarrow f(x)\varphi(x)=\frac{f(x)}{\left(\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)}\Rightarrow\frac{0}{0};$$

$$\infty-\infty\Rightarrow f(x)-\varphi(x)=\frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\varphi(x)}}\Rightarrow\frac{0}{0};$$

$$1^{\infty}\Rightarrow(f(x))^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\ln f(x)}\Rightarrow 0\cdot\infty;$$

$$0^{0}\Rightarrow(f(x))^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\ln f(x)}\Rightarrow 0\cdot\infty;$$

$$\infty^{0}\Rightarrow(f(x))^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\ln f(x)}\Rightarrow 0\cdot\infty.$$

Пряму $y=kx+b$ називають *похилою асимптотою* або просто *асимптотою* кривої $y=f(x)$, якщо $f(x)-(kx+b)\to 0$ при $x\to+\infty$ або $x\to-\infty$.

Пряму $x = x_0$ називають *вертикальною асимптотою* кривої $y = f(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to x_{0+}} f(x) = \infty$ або $\lim\limits_{x\to x_{0-}} f(x) = \infty$.

Критерій похилої асимптоти. Пряма $y = kx + b$ буде похилою асимптотою кривої $y = f(x)$ тоді і тільки тоді, коли $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ і $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx)$ або $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ і $b = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - kx)$.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) якщо функції f і φ нескінченно малі в точці x_0 та існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує і границя $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$;

2)• для нескінченно малих у точці x_0 функцій f і φ твердження, обернене до 1), є правильним;

3) твердження 1) і 2) правильні для функцій f і φ, нескінченно великих у точці x_0;

4) твердження 1) і 2) правильні для довільних функцій f і φ, диференційовних в околі точки x_0.

2. Визначити, чи можна застосувати правило Лопіталя для відшукання заданих границь, і обчислити ці границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x}$;

3)• $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(a+x) - f(a-x)}{2x}$, де функція f диференційовна в точці a;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(a+x) - 2f(a) + f(a-x)}{x^2}$, де функція f двічі диференційовна в точці a;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(a+x)\sin\dfrac{1}{a+x} - (a-x)\sin\dfrac{1}{a-x}}{2x}$.

3. Знайти дані границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; 5)• $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\alpha} \ln x$, $\alpha > 0$;

7) $\lim\limits_{x\to 1-} \ln x \cdot \ln(1-x)$; 8) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x-a}$, $a>0$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}\right)$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x - x^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$; 11) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$; 14) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$; 15) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$; 16) $\lim\limits_{x\to\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-10^x\right)^{\operatorname{tg} x}$; 18) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x - \operatorname{cosec} x)$; 19) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\operatorname{ctg} x}$;

20) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\ln(1-x)}$; 21) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^x$; 22) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\ln\cos x}$;

23) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arcctg} x\right)^{\frac{1}{x}}$; 24) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\pi - \operatorname{arcctg} x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$;

25) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\ln\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$; 26) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

4. Порівняти порядок зростання степеневої і логарифмічної та степеневої і показникової функцій.

5. Знайти асимптоти даних кривих:

1) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} + 2x$; 2) $y = \dfrac{\ln x}{x}$; 3) $y = xe^{\frac{1}{x}}$; 4) $y = \dfrac{1}{x\ln x}$;

5) $y = \dfrac{1}{x^2-5x+6}$; 6) $y = 4x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{4}$; 7) $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$;

8) $y = ax - \arccos\dfrac{1}{x}$; 9) $y = 2x + 4\operatorname{arcctg} x$; 10) $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-4}$;

11) $y = \dfrac{x^2-3}{2x+5}$; 12) $y = \dfrac{9x}{x^2-5x+4}$; 13) $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$;

14) $y = \cos x + \dfrac{1}{\cos x}$; 15) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{x^2-1}$; 16) $y = \dfrac{\sqrt{4x^2+4x+2}}{x^2-1}$;

17) $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$; 18) $y = \operatorname{arctg}(x-1) - \operatorname{arctg}(x+1)$; 19) $y = \operatorname{arctg}\left(x^2-1\right)$;

20) $y=\dfrac{3x^2}{3x-1}$; 21) $y=\dfrac{x^2-x}{1-x^2}$; 22) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x-1}$; 23) $y=\dfrac{2x^2|x|+1}{x|x|}$;

24) $y=\dfrac{3x^2-10x+3}{x}$; 25) $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$, $x>0$; 26)• $y=\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-x}$.

Зразки розв'язування задач

1. 2) Розглянемо $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, $f(0)=0$ і $\varphi(x)=x$. Ці функції диференційовні в околі точки $x_0=0$, причому $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, $f'(0)=0$ і $\varphi'(x)=1$. Крім того, $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=x\sin\frac{1}{x}\to 0$, $x\to 0$, але $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ не має границі в точці $x_0=0$. Отже, задане твердження неправильне.

2. 3) Маємо розкрити невизначеність типу $\frac{0}{0}$. За правилом Лопіталя функція, що міститься в чисельнику, має бути диференційовною в деякому проколеному околі точки $x_0=0$, але в умові задачі не йдеться про це. Отже, правило Лопіталя застосувати не можна. Разом з тим

$$\frac{f(a+x)-f(a-x)}{2x}=\frac{f(a+x)-f(a)}{2x}+\frac{f(a)-f(a-x)}{2x}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{f(a+x)-f(a)}{x}+\frac{f(a-x)-f(a)}{-x}\right)\to\frac{1}{2}\left(f'(a)+f'(a)\right)=f'(a),\ x\to 0.$$

3. 5) Треба розкрити невизначеність типу $\frac{0}{0}$, де

$$f(x)=\arcsin 2x-2\arcsin x,\ \varphi(x)=x^3\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\varphi'(x)=3x^2\Rightarrow\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}.$$

При $x\to 0$ останній вираз також вимагає розкриття невизначеності типу $\frac{0}{0}$. Маємо

$$f_1'(x)=2\left(\frac{8x}{2}\left(1-4x^2\right)^{-\frac{3}{2}}-\frac{2x}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)=2x\left(\frac{4}{\left(1-4x^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$\varphi_1'(x)=6x\Rightarrow\frac{f_1'(x)}{\varphi_1'(x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{\left(1-4x^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\to 1,\ x\to 0.$$

Звідси за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f_1'(x)}{\varphi_1'(x)}=1$$

і за тим самим правилом

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}=1.$$

5. 26) Функція $y=\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-x}$ визначена на множині $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$. Оскільки знаменник дорівнює нулю у точках $x=0$ і $x=1$, то можливими вертикальними асимптотами є прямі $x=0$ і $x=1$. Проте за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{2x-1}=0.$$

Отже, пряма $x=1$ не є асимптотою кривої $y=\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-x}$.

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-x}=\infty$, то пряма $x=0$ є вертикальною асимптотою кривої.

Скористаємось критерієм похилої асимптоти:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2}=\frac{1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}{1-\dfrac{1}{x}}\to 1,\ x\to\infty\Rightarrow k=1;$$

$$f(x)-kx=\frac{x^3-3x+2}{x^2-x}-x=\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}=\frac{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}\to 1,$$

$x\to\infty\Rightarrow b=1\Rightarrow y=x+1$ — похила асимптота кривої.

§ 6.3. Умови сталості і монотонності функції. Критерії сталості та монотонності функції на проміжку

Нехай функція f неперервна на проміжку $\langle a;b\rangle$ і диференційовна в інтервалі $(a;\ b)$. Тоді:

1) $f(x)=\text{const}$ на $\langle a;b\rangle$ тоді й тільки тоді, коли $f'(x)=0\ \forall x\in(a;b)$;

2) f не спадає (не зростає) на $\langle a;b\rangle$ тоді й тільки тоді, коли $f'(x)\ge 0\,(f'(x)\le 0)$ на $(a;\ b)$;

3) f зростає (спадає) на $\langle a;b\rangle$ тоді й тільки тоді, коли $f'(x)\ge 0\,(f'(x)\le 0)$ на $\langle a;b\rangle$ та не існує $(\alpha;\beta)$: $(\alpha;\beta)\subset\{x:\ f'(x)=0\}$.

Проміжком монотонності функції f називають такий проміжок $\langle a;b\rangle$, на якому f монотонна, але не є монотонною на більш широкому проміжку $\langle c;d\rangle \supset \langle a;b\rangle$.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) якщо $f(x)=C \quad \forall x\in\langle a;b\rangle$, то $f'(x)=0 \ \forall x\in(a;b)$;

2) твердження, обернене до 1), є правильним;

3) якщо $f'(x)>0$ на $(a;b)$, то функція f зростає на $(a;b)$;

4) твердження, обернене до 3), є правильним;

5)• якщо $f'(x_0)>0$, то функція f зростає в деякому околі точки x_0;

6) твердження, обернене до 5), є правильним?

2. Знайти проміжки монотонності основних елементарних функцій.

3. Знайти проміжки монотонності даних функцій:

1) $y=ax^2+bx+c$; 2) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$; 3) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$; 4) $y=\dfrac{x^2}{2^x}$; 5) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$;

6) $y=x\ln x$; 7) $y=x-\sin x$; 8) $y=\operatorname{arctg}x-x$; 9) $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$;

10) $y=x\cos x-\sin x$; 11) $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$; 12)• $y=x+|\sin 2x|$;

13) $y=x^3-6x^2+1$; 14) $y=xe^{-2x}$; 15) $y=\dfrac{3x-1}{(x-5)^2}$; 16) $y=\dfrac{16-x^2}{x+5}$;

17) $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$; 18) $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$; 19) $y=\dfrac{x-3}{x^2+x-12}$; 20) $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}$;

21) $y=x^3-6x^2+15x-1$; 22) $y=3\sin x-4\cos x$; 23) $y=\cos 3x-3\cos x$;

24) $y=\sin x-3\sin\dfrac{x}{3}$; 25) $y=\dfrac{(x-2)^2}{(x+2)^3}$; 26) $y=\sqrt[3]{(x+3)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2}$;

27) $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$; 28) $y=\cos^2 x+\sin x+1$; 29) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x^2}$;

30) $y=\sin x\sin 2x$; 31) $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$; 32) $y=\sin x+\sin 2x$;

33) $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; 34) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$; 35) $y=\operatorname{arctg}x^2$; 36) $y=\operatorname{arcctg}x^2$;

37) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$; 38) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$; 39) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$;

40) $y=\arcsin\dfrac{\left|1-x^2\right|}{1+x^2}$; 41) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$; 42) $y=xe^{x-x^2}$;

43) при якому значенні параметра a функція:

а) $y=\sqrt{ax^3-12x^2+6x}$ зростає на інтервалі $(0;\ +\infty)$;

б) $y=(a-1)x^3-6x^2+6(a+1)x+7$ спадає на множині $\mathbf{R}$;

в) $y=(a-3)x^3+6\sqrt{7}x^2+12(a+3)x-4$ зростає на множині $\mathbf{R}$;

г) $y=(a-2)x^3-12x^2+6(a+5)x+3$ монотонна на інтервалі $(0;\ +\infty)$;

д) $y=(a-1)x^3+6x^2+3(a-4)x+2$ монотонна на інтервалі $(-\infty;\ 0)$.

4. Довести, що функція $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ спадає на відрізку $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, якщо вважати $f(0):=1$.

5. Довести дані нерівності:

1) $e^x>1+x\quad \forall x\neq 0$; 2) $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x\quad \forall x>0$;

3) $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x\quad \forall x>0$; 4) $\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x\quad \forall x\in\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$;

5) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}\quad \forall x>0$; 6) $(1+x)^\alpha\geq 1+\alpha x\quad \forall x>-1,\ \alpha>1$;

7)• $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{x-a}\quad \forall x>a>0,\ \forall n=2,\ 3,\ \ldots$;

8) $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x-1}\leq 1\quad \forall x\geq 1,\ n\in\mathbf{N}$;

9) $x^\alpha-\alpha x\leq 1-\alpha,\ x\geq 0,\ 0<\alpha<1$;

10) $x^\alpha-1\geq\alpha(x-1),\ x>0,\ \alpha>1$; 11) $\operatorname{tg}x>x+\dfrac{x^3}{3},\ 0<x<\dfrac{\pi}{2}$;

12) $x-\dfrac{x^3}{3}<\operatorname{arctg}x<x-\dfrac{x^3}{6}\quad \forall x\in(0;\ 1]$; 13) $e^{x-1}\geq x\quad \forall x\in\mathbf{R}$;

14) $e^x<1+x+\dfrac{x^2}{2}e^x\quad \forall x\geq 0$; 15) $e^{-x}<1-x+\dfrac{x^2}{2}\quad \forall x>0$;

16) $e^{-x}>1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}\quad \forall x>0$; 17) $\dfrac{\beta}{\alpha}>\dfrac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha},\ 0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$;

18) $e^x>1+\ln(1+x)\quad \forall x>0$; 19) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}>\dfrac{\alpha}{\beta},\ 0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$;

20) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}<\dfrac{\alpha}{\beta},\ 0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$; 21) $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}>\dfrac{\alpha}{\beta},\ 0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$;

22) $e^{\pi} > \pi^{e}$ $\left(\text{дослідити на монотонність функцію } y=\dfrac{\ln x}{x}\right)$;

23) $\sqrt[3]{4(a+b)} > \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, $a>0$, $b>0$;

24) $\left(\dfrac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} > \dfrac{a+b}{2}$, $a\ge 0$, $b\ge 0$, $p\ge 1$;

25) $\sqrt[5]{n+1}+\sqrt[5]{n-1} < 2\sqrt[5]{n}$ $\forall n\ge 1$; 26) $\lg(x+1) > \lg x + 3\cdot 10^{-x}$ $\forall x\ge 1$;

27) $(a+b)^4 \le 8\left(a^4+b^4\right)$, $a\in \mathbf{R}$, $b\in \mathbf{R}$;

28) $\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{a^3+b^3}{2} \le \dfrac{a^4+b^4}{2}$, $a\in \mathbf{R}$, $b\in \mathbf{R}$;

29) • $2\left(a^3+b^3\right)^2 \ge \left(a^2+b^2\right)^3$, $a>0$, $b>0$;

30) $\sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{\dfrac{a^2}{b}}+\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}$, $a>0$, $b>0$;

31) $a^4+b^4 \le \dfrac{a^6}{b^2}+\dfrac{b^6}{a^2}$, $a>0$, $b>0$;

32) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^8 \ge 64ab(a+b)^2$, $a>0$, $b>0$;

33) $a^3+b^3 \ge a^2b+ab^2$, $a>0$, $b>0$;

34) $\dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{a} \ge a^2+b^2$, $a>0$, $b>0$;

35) $\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3} \le \dfrac{1}{a^3}\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\dfrac{1}{b^3}\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $a>0$, $b>0$.

6. Довести дані тотожності та вказати область визначення їх:

1) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$; 2) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$; 3) $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

4) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{\pi}{4}$; 5) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x} = -\dfrac{3\pi}{4}$;

6) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$; 7)• $\operatorname{arctg} x = \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

8) $\operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$; 9) $2\operatorname{arctg} x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = -\pi$;

10) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$; 11) $\arccos x - \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \pi$;

12) $\arcsin x-2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=-\dfrac{\pi}{2}$; 13) $\operatorname{arctg} x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

14) $\operatorname{arctg} x=-\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; 15) $\arccos x=\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

16) $2\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}=\pi$; 17) $1+\sin x=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$;

18) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}-x\right)-\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$;

19) $2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=2\cos^2 x-1$;

20) $\dfrac{1}{2}\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$.

7. З'ясувати, чи існують проміжки, в яких дані функції є сталими, і знайти значення цих сталих:

1) $\cos(\pi+3x)\cos 2x-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-3x\right)\sin 2x-2\sin^2\dfrac{5}{2}x$;

2) $\sin^2 x-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$; 3) $\sin^6 x+\cos^6 x-\dfrac{3}{4}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)^2$;

4) $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x-\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$; 5) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)+\sin^2 x$;

6) $\operatorname{arctg} x-\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; 7) $\operatorname{arctg} x-\operatorname{arcctg}\dfrac{1-x}{1+x}$;

8) $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\arccos\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; 9) $\operatorname{arcctg} x-\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$;

10) $2\arccos x+\arccos\left(2x^2-1\right)$; 11) $\arccos x+\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

12) $2\operatorname{arcctg} x+\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

8. Нехай функція f неперервна на проміжку $[0;\ +\infty)$ і $f'(x)\ge\alpha>0$ на інтервалі $(a;\ +\infty)$, $\alpha>0$ — деяка стала. Довести, що коли $f(a)<0$, то $\exists!\, x^*\in\left(a;\ a-\dfrac{f(a)}{\alpha}\right)$: $f(x^*)=0$.

9. Нехай функція f визначена на множині $\mathbf{R}$ дійсних чисел і $|f(x)-f(y)|\le(x-y)^2\quad\forall x,\ y\in\mathbf{R}$. Довести, що $f(x)=c\quad\forall x\in\mathbf{R}$.

Зразки розв'язування задач

1. 5) Розглянемо функцію

$$f(x)=\begin{cases} x+x^2\sin\dfrac{2}{x}, & \text{якщо } x\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x=0, \end{cases}$$

для якої маємо

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+x\sin\frac{2}{x}\right)=1>0,$$

$$f'(x)=1+2x\sin\frac{2}{x}-2\cos\frac{2}{x}\quad \forall x\neq 0.$$

Таким чином, функція f диференційовна у деякому околі точки $x_0=0$, а отже, для її неспадання у деякому околі $O(0)$ цієї точки необхідно і достатньо, щоб $f'(x)\geq 0 \;\; \forall x\in O(0)$. Проте для $x=\dfrac{2}{\pi n}$ маємо

$$f'\left(\frac{2}{\pi n}\right)=1+\frac{4}{\pi n}\sin\pi n-2\cos\pi n=1-2(-1)^n=\begin{cases}-1, & n=2k,\\ \;\;3, & n=2k+1.\end{cases}$$

Отже, у будь-якому околі точки нуль є як точки x, для яких $f'(x)>0$, так і точки x^*, для яких $f'(x^*)<0$. Тому функція f не є монотонною у будь-якому околі точки $x_0=0$, і задане твердження неправильне.

3. 12) Нехай $2x\in(2\pi n;\ \pi+2\pi n)$, $n\in\mathbf{Z}$, тобто $x\in\left(\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$. Тоді

$$y=x+\sin 2x\Rightarrow y'=1+2\cos 2x>0,\ 2x\in(2\pi n;\ \pi+2\pi n),\ n\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow \cos 2x>-\frac{1}{2},$$

$$2x\in(2\pi n;\ \pi+2\pi n),\quad n\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow 2\pi n<2x<\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow x\in\left(\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right),\ n\in\mathbf{Z}.$$

Отже, інтервали $\left(\pi n;\ \dfrac{\pi}{3}+\pi n\right)$ є інтервалами зростання, а інтервали $\left(\dfrac{\pi}{3}+\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$ — інтервалами спадання функції, якщо її розглядати на інтервалах $\left(\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$.

Нехай тепер $2x\in(-\pi+2\pi n;\ 2\pi n)$, $n\in\mathbf{Z}$, тобто $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$.

Тоді

$$y=x-\sin 2x\Rightarrow y'=1-2\cos 2x>0,\ 2x\in(-\pi+2\pi n;\ 2\pi n), n\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow \cos 2x<\frac{1}{2},$$

$$2x\in(-\pi+2\pi n;\ 2\pi n),\quad n\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow 2x\in\left(-\pi+2\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right),\quad n\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+\pi n\right),\quad n\in\mathbf{Z}.$$

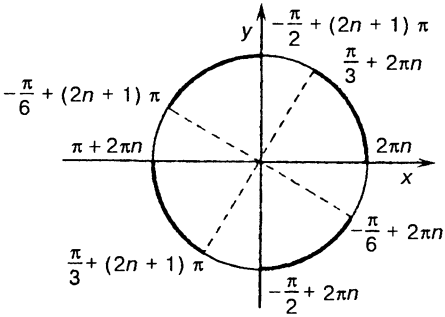


Рис. 9

Отже, інтервали $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$, є інтервалами зростання, а інтервали $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \pi n\right), n\in\mathbf{Z}$, — інтервалами спадання функції, якщо її розглядати на інтервалах $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. Зобразимо знайдені інтервали на числовому колі (рис. 9).

Тепер неважко помітити, що функція зростає в інтервалах $\left(\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}\right), n\in\mathbf{Z}$, і спадає в інтервалах $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{2}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in\mathbf{Z}$.

5. 7) Розглянемо функцію $f(x)=\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x-a}$, де $x\in[a;\ +\infty)$. Маємо

$$f'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}-\frac{1}{n}(x-a)^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}}-\frac{1}{(x-a)^{\frac{n-1}{n}}}\right)<0\quad\forall x>a.$$

Отже, функція f спадає на проміжку $[a;\ +\infty)$. Оскільки $f(a)=0$, то $f(x)<0\ \ \forall x>a$, тобто $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x-a}<0\ \ \forall x>a \Leftrightarrow \sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{x-a}$.

29) Поділимо обидві частини нерівності, наприклад, на b^6 і введемо позначення $x=\frac{a}{b}>0$. Тоді вихідна нерівність набере вигляду $2\left(x^3+1\right)^2\ge\left(x^2+1\right)^3$, $0<x<+\infty$. Дослідимо похідну диференційовної в інтервалі $(0;\ +\infty)$ функції $f(x)=2\left(x^3+1\right)^2-\left(x^2+1\right)^3$. Маємо $f'(x)=$ $=12x^2\left(x^3+1\right)-6x\left(x^2+1\right)^2=6x(x-1)\left(x^3+x^2-x+1\right)$; $x=1$ — критична точка функції f. Якщо $x\in(0;\ 1)$, то $f'(x)<0$ і функція f спадає, якщо $x\in(1;+\infty)$, то $f'(x)>0$ і функція f зростає. Отже, 1 — єдина точка мінімуму функції f в інтервалі $(0;\ +\infty)$. Тому для довільного $x>0$ маємо $f(x)\ge f(1)=0$, а отже, $2\left(x^3+1\right)^2\ge\left(x^2+1\right)^3$, причому рівність виконується тоді і тільки тоді, коли $x=1$. Оскільки $x=a/b$, то рівність у вихідній нерівності виконується при $a=b$.

6. 7) Розглянемо функцію

$$f(x)=\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2},$$

яка диференційовна на кожному з інтервалів $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$. Маємо

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{-2x\left(1+x^2\right)-2x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}=$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{\sqrt{4x^2}} \cdot \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1}{1+x^2}\left(1 - \frac{x}{|x|}\right) = 0 \Leftrightarrow x > 0 .$$

Отже, $f(x) = \text{const} \quad \forall x \in (0;\ +\infty) \Rightarrow f(x) = f(1) = \text{arctg}\,1 - \frac{1}{2}\arccos 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0 \quad \forall x \geq$ $\geq 0 \Rightarrow f(x) = 0 \ \ \forall x \geq 0 \Rightarrow \text{arctg}\, x = \frac{1}{2}\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} \quad \forall x \geq 0.$

§ 6.4. Екстремуми функції в точці і на проміжку

Кажуть, що функція f має в точці x_0 максимум (мінімум) і записують $f_{\max} = f(x_0)\left(f_{\min} = f(x_0)\right)$, якщо $\exists\ O(x_0):\ f(x) \leq f(x_0)\left(f(x) \geq f(x_0)\right)$ для усіх $x \in O(x_0)$. При цьому також кажуть, що функція f має в точці x_0 екстремум, а саму точку x_0 називають *точкою максимуму* (*мінімуму*) або *точкою екстремуму* функції f.

Необхідна умова екстремуму. Якщо x_0 — точка екстремуму функції f, то $f'(x_0) = 0$ або f — недиференційовна в точці x_0. Точку x_0 називають *критичною точкою* функції f, якщо $f'(x_0) = 0$, або f — недиференційовна в точці x_0.

Кажуть, що функція f змінює знак з + на – (з – на +) у точці x_0, якщо $\exists\delta > 0:\ f(x) > 0\left(f(x) < 0\right)$ для $x \in (x_0 - \delta;\ x_0)$ і $f(x) < 0\left(f(x) > 0\right)$ для $x \in (x_0;\ x_0 + \delta)$.

Перша достатня умова екстремуму. Нехай функція f диференційовна в проколеному околі точки x_0 та неперервна в точці x_0. Тоді:

1) якщо f' змінює знак з + на – у точці x_0, то x_0 — точка максимуму функції f;

2) якщо f' змінює знак з – на + у точці x_0, то x_0 — точка мінімуму функції f.

Друга достатня умова екстремуму. Нехай функція f двічі диференційовна в точці x_0 і $f'(x_0) = 0$. Тоді:

1) якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимуму функції f;

2) якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка мінімуму функції f.

Екстремум (максимум або мінімум) функції в точці характеризує поведінку функції в деякому околі точки x_0, тому його називають *локальним екстремумом* (*локальним максимумом* або *локальним мінімумом*) функції f.

Максимум та мінімум функції на проміжку називають *глобальним* або *абсолютним максимумом* та *мінімумом* функції f.

Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;\ b]$, то свої глобальні екстремуми ця функція має або в критичних точках, або на кінцях відрізка.

Для відшукання глобальних екстремумів функції f, неперервної на проміжку $\langle a;b\rangle$, можна скористатися таким алгоритмом:

1) знайти значення f у її критичних точках;

2) знайти $f(a)$ і $f(b)$ або $f(a+)$ і $f(b-)$;

3) порівнявши знайдені значення, зробити висновок про існування $\max\limits_{\langle a;b\rangle} f(x)$ і $\min\limits_{\langle a;b\rangle} f(x)$ та величину цих глобальних екстремумів функції f.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) кожна функція, неперервна на відрізку $[a; b]$, має точки локального екстремуму;

2) якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона має на ньому точки глобального екстремуму;

3) якщо $\exists\ \delta > 0:\ f$ зростає на відрізку $[x_0 - \delta;\ x_0]$ і спадає на відрізку $[x_0;\ x_0 + \delta]$, то x_0 — точка максимуму функції f;

4)• твердження, обернене до 3), є правильним;

5) якщо x_0 — точка екстремуму функції f, то $f'(x_0) = 0$;

6) якщо x_0 — точка екстремуму функції f, то x_0 — критична точка цієї функції;

7) твердження, обернене до 6), є правильним?

2. Знайти точки екстремуму основних елементарних функцій.

3. Дослідити на екстремум функції:

1) $y = ax^2 + bx + c$; 2) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; 3) $y = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$;

4) $y = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$; 5) $y = x^2 e^{-x}$; 6) $y = e^x + e^{-x}$; 7) $y = x\ln x$;

8) $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$; 9) $y = x + \sin x$; 10) $y = \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$;

11) $y = \sin x - x + \dfrac{x^3}{3}$; 12) $y = \dfrac{1}{1+\sin^2 x}$; 13) $y = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right)$;

14) $y = x - \arcsin x$; 15)• $y = |x| e^{-|x-1|}$; 16) $y = |x|\sqrt[3]{x-1}$;

17) $y = 4\sin\dfrac{x}{2} + \sin x$; 18) $y = \cos x + 4\sin\dfrac{x}{2}$; 19) $y = \cos x \sin^2 x$;

20) $y = \sin x \cos^2 x$; 21) $y = \sin^3 x - \cos^3 x$; 22) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;

23) $y = \cos 3x - 3\cos x$; 24) $y = \sin x \sin\dfrac{x}{2}$; 25) $y = \sin x - \dfrac{2}{\sin x}$;

26) $y = \cos x + \dfrac{1}{\cos x}$; 27) $y = \operatorname{tg} x - \sin x$; 28) $y = x^2 e^{-x^2}$; 29) $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$;

30) $y=\dfrac{5-x^2}{x+3}$; 31) $y=3^{3x}-15\cdot 3^{2x}+27\cdot 3^x$;

32) $y=2\ln(x-2)-x^2+4x+1$; 33) $y=\ln^3 x-18\ln^2 x+33\ln x$;

34) $y=\log_5^3 x-6\log_5^2 x-15\log_5 x$; 35) $y=\left|x^2-4x-12\right|$;

36) $y=x+2\,\mathrm{arcctg}\,x$; 37) $y=x-\mathrm{arctg}\,2x$; 38) $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-27}$;

39) $y=2x+4\,\mathrm{arcctg}\,x$; 40) $y=\mathrm{arctg}\,\left(x^2-1\right)$; 41) $y=2x+\arccos\dfrac{x}{2}$;

42) $y=x-\arcsin\dfrac{x}{2}$; 43) $y=\mathrm{arctg}\,(\cos x)$; 44) $y=\dfrac{3x^3-9}{(x-3)^3}$;

45) $y=\log_2 x+\log_x 2$; 46) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}-\dfrac{9}{8x}$.

4. Чи буде $x_0=0$ точкою екстремуму для даної функції:

1) $y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$, якщо $x\neq 0$, і $y(0)=0$;

2) $y=x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$, якщо $x\neq 0$, і $y(0)=0$;

3) $y=|x|\left(2+\cos\dfrac{1}{x}\right)$, якщо $x\neq 0$, і $y(0)=0$;

4) $y=x^n\varphi(x)$, де $n\in\mathbf{N}$, а φ — неперервна в точці $x_0=0$ і $\varphi(0)\neq 0$?

5. Дослідити на глобальний екстремум функції:

1) $y=2x^2-3x+1$, $x\in[-1;\ 2]$; 2) $y=x+2\sqrt{x}$, $x\in[0;\ 4]$;

3) $y=\left|x^2-3x+2\right|$, $x\in[-10;\ 10]$; 4) $y=x+\dfrac{1}{x}$, $x\in[0{,}01;\ 100]$;

5) $y=x+\dfrac{1}{x^2}$, $x\in(0;\ 4]$; 6) $y=x\mathrm{e}^{-0{,}01x}$, $x\in[0;\ +\infty)$;

7) $y=\ln x+x$, $x\in(0;\ 1]$; 8) $y=\mathrm{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$, $x\in[0;\ 1]$;

9) $y=[x]$ — ціла частина x, $x\in[-3;\ 4]$; 10) $y=x^x$, $x\in[0{,}1;\ +\infty)$;

11) $y=\sin 2x-x$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$; 12) $y=2\,\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}^2 x$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$;

13) $y=\max\{2|x|,\ |2-x|\}$, $x\in(-\infty;\ +\infty)$;

14) $y=\left|x^2-x-6\right|-x^3$, $x\in[-6;\ 6]$;

15) $y=\left|x^2+x\right|+\left|x^2-3x+2\right|,\ x\in\left[-\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right]$; 16) $y=4x+e^{-3x}$;

17) $y=\mathrm{tg}^2 x+16\cos^2 x$; 18) $y=1+4\sin x-2x,\ x\in[0;\ \pi]$;

19) $y=3^{x^2-4x-2},\ x\in[0;\ 3]$; 20) $y=\frac{|x-1|-1}{x^2-4},\ x\in[-1;\ 1]$;

21) $y=9^x-2\cdot 3^x-3$; 22) $y=2\left(\cos x-\cos^2 x\right),\ x\in[0;\ \pi]$;

23) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-6x+10}},\ x\in[3;\ +\infty)$;

24) $y=2x+3\sqrt[3]{x^2},\ x\in\left[-\frac{3}{2};\ 8\right]$; 25) $y=\sin 3x+\frac{4}{3}\cos 3x-x+2$;

26) $y=15-3\cos x+\cos 3x,\ x\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

27) $y=\mathrm{tg}\,x+\frac{3}{4}\mathrm{ctg}\,x,\ x\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$;

28) $y=-\frac{1}{5}\cos 5x+\cos x,\ x\in\left[\frac{\pi}{6};\ \pi\right]$; 29) $y=\frac{3^x+3^{-x}}{\ln 3},\ x\in[-2;\ 1]$;

30) $y=2\cdot 2^{3x}-15\cdot 2^{2x}+24\cdot 2^x,\ x\in[-2;\ 2]$;

31) $y=\frac{a+bx^4}{x^2},\ a>0,\ b>0$; 32) $y=x/\sqrt{x-3},\ x\in(4;\ 8)$;

33) $y=3\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x$; 34) $y=\frac{(x+4)^2}{x-3},\ x\in[-7;\ 1]$;

35) $y=\left|\left|x^2-4\right|-5\right|,\ x\in[-3{,}5;\ 3{,}5]$.

6. Довести нерівність:

1) $\left|3x-x^2\right|\le 10$, якщо $-2\le x\le 5$;

2) $2^{1-p}\le x^p+(1-x)^p\le 1$, якщо $x\in[0;\ 1],\ p>1$;

3) $2^{\frac{1-n}{n}}(x+a)\le\sqrt[n]{x^n+a^n}<x+a$, якщо $x>0,\ a>0,\ n\in\mathbf{N}$;

4) $|a\sin x+b\cos x|\le\sqrt{a^2+b^2}$; 5) $\frac{1}{3}\le\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\le 3$;

6) $\frac{7}{23}\le\frac{2x^2+x+1}{3x^2-x+2}\le 1$; 7) $\sqrt{x^2-\sqrt{2}x+1}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$;

8) $-\frac{2\sqrt{3}}{9}\le\sin^3 x-\sin x\le\frac{2\sqrt{3}}{9}$; 9) $1\le\sin^2 2x-2\sin^2 x+3\le\frac{13}{4}$;

10) $\frac{1}{2} \le \sin^4 x + \cos^4 x \le 1$; 11) $\frac{1}{2^{n-1}} \le \sin^{2n} x + \cos^{2n} x \le 1$;

12)• $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \ge 5\sqrt[5]{ab}$, $a > 0$, $b > 0$;

13)• $x \cdot 2^y + y \cdot 2^{-x} \ge x + y$, $x \ge 0$, $y \ge 0$;

14) $(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$, $0 < \alpha < 1$, $x > 0$; довести, що для довільних натуральних m і n, більших за 1, справедлива нерівність $\frac{1}{\sqrt[n]{1+m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{1+n}} > 1$;

15) $-\frac{1}{4} \le \frac{\cos 2x}{1 + 3\sin^2 x} \le 1$; 16) $\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}$, $a > b > 0$;

17) $a^4 + 2a^3 b + 3ab^3 + b^4 \ge 6a^2 b^2$, $a > 0$, $b > 0$.

7. Знайти критичні точки функції:

1) $y = (x-1)^2 (x-2)(x-3)^3$; 2) $y = x^3 \sqrt[3]{(x-1)^2}$;

3) $y = \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} - \frac{x-3}{2}$; 4) $y = \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{5-x}{2}$;

5) $y = \frac{x^2 + 8}{x+1}$; 6) $y = \sin 2x + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

7) $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x + \pi)$, $x \in [0;\ \pi]$; 8) $y = \left|x^2 + 2x - 15\right|$.

8. Знайти всі значення змінної x, при яких свого найменшого значення набуває функція (знайти це значення):

1) $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(3 - x - x^2\right)$; 2) $y = 2x\ln x - x\ln 49$;

3) $y = \pi\left(2 - \frac{1}{4}(\sin x + \cos x - 1)^2 - \cos x - \sin x\right)$, $x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

4) $y = 2\cos x + \frac{1}{2\cos x}$, $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$; 5) $y = \frac{x}{\ln^2 x}$, $x \in (1;\ +\infty)$;

6) $y = 5x + e^{-2x}$; 7) $y = \frac{4(2 - \cos x)}{\sin x}$, $x \in (0;\ \pi)$;

8) $y = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$; 9) $y = 9^x - 2 \cdot 3^x - 3$.

9.• Нехай $f^{(k)}(x_0) = 0$ для $1 \le k < n$, а $f^{(n)}(x_0) \ne 0$. Довести, що $f^{(n-2k+1)}(x)$ змінює знак у точці x_0 $\forall k:\ 2k - 1 < n$, а $f^{(n-2k)}(x)$ не змінює знака у точці x_0 $\forall k:\ 2k < n$. Вивести звідси достатню умову екстремуму функції через похідну n-го порядку.

10. Вказати найбільший і найменший члени послідовності

$$a_n = \frac{n-12}{2n^2 - n + 7}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

11. Шостий член арифметичної прогресії дорівнює 3, різниця прогресії $d \ge \frac{1}{2}$. При якому значенні d добуток першого, четвертого і п'ятого членів буде найбільшим?

12. Різниця двох чисел дорівнює найбільшому значенню функції $y = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$ на відрізку $[0;\ 2]$, а сума цих чисел у два рази більша за найменше значення тієї самої функції на зазначеному раніше відрізку. Знайти ці числа.

13. Знайти всі значення змінної x, при яких свого найбільшого значення набуває функція:

1) $y = 4 + \sin^2 2x - 2\sin^2 x$; 2) $y = \sin 6x - \sqrt{3}\cos 6x$;

3) $y = \arcsin\frac{\left|1 - x^2\right|}{1 + x^2}$; 4) $y = \arccos\frac{2|x|}{1 + x^2}$; 5) $y = xe^{2+x-x^2}$;

6) $y = \operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{2}\sin x\right)$; 7) $y = \arcsin\left(\sin^2 x\right)$; 8) $y = \arccos\left(\cos^2 x\right)$;

9) $y = \frac{x}{x^2 + 4}$; 10) $y = 8^x - 2^{x+1} - x\ln 2,\ x \in [-1;\ 1]$.

14. Довести, що найбільше значення функції $y = 4\cos^2 x - 6e^{\cos 2x} + 2$ є від'ємним.

15. Знайти різницю між найбільшим і найменшим значеннями функції:

1) $y = 3x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 15,\ x \in [-3;\ 1]$; 2) $y = 12\cos 2x - 5\sin 2x$;

3) $y = \sin^6 x + \cos^6 x$; 4) $y = 8\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 15\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$;

5) $y = 3\sin 4x - 4\cos 4x$.

16. Знайти площу трикутника, утвореного віссю ординат, дотичною до кривої $y = 3x\left(108 - x^2\right)$, проведеною у точці максимуму, і дотичною до цієї кривої, проведеною у точці з абсцисою $x = 4$.

17. Знайти многочлен найменшого степеня, для якого точки $x = 2$ і $x = 3$ є точками максимуму і мінімуму відповідно, а значення многочлена у цих точках дорівнює 29 і 28.

18.• Знайти многочлен найменшого степеня, для якого точки $x = 0$ і $x = 1$ є точками мінімуму і максимуму відповідно, причому значення многочлена у цих точках відповідно дорівнює 1 і 0.

19. Довести, що коли $x + y + z = \pi$, то справджуються нерівності:

1)• $\sin x + \sin y + \sin z \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x \sin y \sin z \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$;

3) $\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{y}{2} + \sin\frac{z}{2} \le \frac{3}{2}$; 4) $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2} \le \frac{1}{8}$;

5) $\cos x + \cos y + \cos z \le \frac{3}{2}$; 6) $\cos x \cos y \cos z \le \frac{1}{8}$;

7) $\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{y}{2} + \cos\frac{z}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$; 8) $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$;

9) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z \ge 3\sqrt{3}$; 10) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z \ge 3\sqrt{3}$;

11) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2} \le \frac{\sqrt{3}}{9}$; 12) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{y}{2} + \operatorname{tg}\frac{z}{2} \ge \sqrt{3}$;

13) $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{y}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{z}{2} \ge 1$; 14) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z \ge \sqrt{3}$;

15) $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \operatorname{ctg} z \le \frac{\sqrt{3}}{9}$.

20. Розв'язати задачі на відшукання найбільшого і найменшого значень.

1) Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 20. При якій основі його площа буде найбільшою?

2) У якій точці треба провести дотичну до графіка функції $y = \frac{2}{3}\sqrt{18 - x^2}$, $0 < x < 3\sqrt{2}$, щоб вона утворювала з координатними осями трикутник найменшої площі?

3) У першому квадранті площини лежить трикутник, утворений осями координат і прямою $y = (3 - a)x + a$, $a > 3$. З початку координат опущено висоту h цього трикутника. Довести, що $h = \frac{a}{\sqrt{a^2 - 6a + 10}}$, і знайти найбільше значення висоти h.

4) При якому значенні різниці арифметичної прогресії добуток $a_1 a_2$ буде найменшим, якщо відомо, що $a_7 = 9$?

5) Дотична до графіка функції $y = \sqrt[3]{x^2}$ така, що абсциса t точки дотику належить відрізку [0,5; 1]. При якому значенні t площа трикутника, обмеженого цією дотичною, віссю абсцис і вертикальною прямою $x = 2$, буде найменшою і чому дорівнює ця площа?

6) В одиничне коло вписано трикутник ABC такий, що $AB = AC$, $\angle A = 2\alpha$, AD — висота трикутника. Нехай $y(\alpha) = AB - AD$. Довести, що $y(\alpha) = 2(\cos\alpha - \cos^2\alpha)$, і знайти найбільше значення величини y.

7) Сторона AB прямокутника $ABCD$ лежить на осі ординат, вершини C і D лежать відповідно на параболі $y = -x^2 + 2x - 2$ і на прямій $y = 3 - 3x$, при-

чому абсциса вершини D належить відрізку $[0{,}12;\ 1{,}2]$. При якому значенні абсциси вершини D площа прямокутника $ABCD$ буде найменшою?

8) Знайти таке значення $x \in [1; 3]$, що точка $A\ (x, y)$, де $y = \sqrt{12 - 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3}$, віддалена на найбільшу відстань від початку координат.

9) Знайти найбільшу відстань від точки A (2, 0) до точки графіка функції $y = \sqrt{12 + 5x - 2x^2}$.

10) У якій точці кривої $y = 2x^4 + x$ треба провести дотичну, щоб вона перетинала прямі $x = 1$, $x = 3$ у точках, сума ординат яких найбільша?

11) Сторона AB прямокутника $ABCD$ лежить на осі ординат, а вершини C і D — відповідно на параболах $y = x^2 - 4x + 3$ і $y = -x^2 + 2x - 2$, причому абсциса x вершини D належить відрізку $\left[\frac{4}{5}; \frac{3}{2}\right]$. При якому значенні абсциси вершини D прямокутник $ABCD$ матиме найбільшу площу?

12) Сторона ромба $ABCD$ дорівнює 1, а $\angle B = 2\alpha$. Із вершини A опустили перпендикуляр AE на сторону CD. При якому значенні α площа трикутника ACE буде найбільшою?

13) У площині Oxy дано точки A (0, 3) і B (4, 5). На осі Ox знайти точку C $(x, 0)$ таку, щоб периметр трикутника ABC був найменшим.

14) До кривої $y = -x^3 + bx$ у точках з абсцисами $x_1 = 0$ і $x_2 = -\frac{3}{2}$ проведено дотичні. При якому значенні параметра b периметр трикутника, утвореного проведеними дотичними і віссю Oy, буде найменшим?

15) У координатній площині Oxy вершина A прямокутного трикутника ABC ($\angle ABC = 90^\circ$) має координати (–2, 0), вершина B лежить на відрізку [2; 3] осі Ox, а вершина C — на параболі $y = x^2 - 4x + 1$. Які координати повинна мати вершина C, щоб площа трикутника ABC була найбільшою?

16) Точка рухається по осі абсцис з початку координат вправо до точки A $(x, 0)$ зі швидкістю 1/3, а потім по прямій до точки B (2, 1) зі швидкістю 1/5. Позначимо через $t\ (x)$ час руху по всьому шляху OAB. При яких значеннях x час руху точки буде найменшим?

17) Закон руху тіла має вигляд $s(t) = 8 - 2t + 24t^2 - 0{,}5t^3$. В який момент часу тіло матиме найбільшу швидкість?

18) У момент часу $t = 0$ починають рухатися дві точки: одна по осі Ox за законом $x\ (t) = t - 2$, а друга по осі Oy за законом $y(t) = \sqrt{2t^4 - 4t^3 + t^2 + 4t}$. Знайти найбільшу і найменшу відстані між точками за час $t \in [0; 2]$.

19) Матеріальна точка M_1 рухається зі швидкістю 2 м/с уздовж осі Ox у від'ємному напрямі, а матеріальна точка M_2 рухається зі швидкістю 3 м/с уз-

довж прямої $y=\sqrt{3}x$ у напрямі вектора $(1;\ \sqrt{3})$. У початковий момент часу точка M_1 мала координати (5, 0), а точка M_2 — координати $\left(-\frac{3}{2};\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. У який момент часу відстань між точками буде найменшою?

20) Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t)=5+6t-\frac{1}{3}t^3$, де $s\ (t)$ — шлях, м; t — час, с. Знайти найбільше значення його швидкості.

21) Сторони трикутника лежать на осях координат і на дотичній до графіка функції $y=x^2+2x+1$ у точці, абсциса t якої задовольняє умову $-\frac{1}{2}\le t\le 0$. Знайти значення t, при якому площа трикутника буде найбільшою, і знайти цю площу.

22) Знайти таке значення $x\in[-1;2]$, щоб точка $A\ (x, y)$, де $y=$ $=\sqrt{4-2x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3}$, була віддалена на найменшу відстань від початку координат.

23) Криволінійна трапеція обмежена кривою $y=x^2+1,\ x\in[1;\ 3]$, і відрізками прямих $x=1$, $x=3$, $y=0$. В якій точці цієї кривої треба провести дотичну, яка відтинала б від криволінійної трапеції звичайну трапецію найбільшої площі?

24) На графіку функції $y=\sqrt{x},\ x\in[0;16]$, знайти таку точку C, для якої трикутник ABC мав би найбільшу площу, якщо A і B — точки графіка функції з абсцисами 0 і 16 відповідно.

25) У трикутнику ABC кут A прямий, $AB=AC=2$. Точка M лежить усередині трикутника, причому $AM=1$, $\angle MAC=\alpha$. Нехай $y=BM\cdot MC$. Довести, що $y=\sqrt{8u^2-20u+17}$, де $u=\sin\alpha+\cos\alpha$. Знайти найменше значення функції $y(\alpha)$.

26) Серед рівнобедрених трикутників з бічною стороною a вказати трикутник найбільшої площі.

27) Сторони трикутника лежать на осях координат і на дотичній до графіка функції $y=-x^2+6x-9$ у точці, абсциса якої $t\in[0;\ \frac{5}{2}]$. Знайти значення t, при якому площа трикутника буде найбільшою.

28) На координатній площині дано точки A (3, –4) і B (4, –2). Точка C лежить на колі $x^2+y^2=\frac{16}{5}$. Знайти координати точки C так, щоб площа трикутника ABC була найменшою.

29) Довести, що з усіх трикутників з даною основою a і висотою до цієї основи h рівнобедрений має найменший периметр. Знайти цей периметр.

30)• З усіх прямокутних трикутників з проведеною на гіпотенузу висотою h знайти той, у якого медіана, що ділить навпіл більший катет, має найменшу довжину.

31) Серед усіх рівнобедрених трапецій з площею S і гострим кутом α знайти ту, периметр якої найменший. Знайти її периметр.

32) Довести, що з усіх трикутників, вписаних у дане коло, найбільший периметр (і площу) має правильний.

33) Довести, що з усіх трикутників, описаних навколо даного круга, найменшу площу (і периметр) має правильний.

34) Довести, що серед трикутників даного периметра найбільшу площу має правильний.

35) Довести, що серед трикутників із даною максимальною стороною найбільшу площу (і периметр) має правильний.

36) У трикутнику ABC маємо $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$. Знайти, в якому відношенні точка D, що лежить на стороні BC, ділить відрізок BC, якщо відомо, що добуток відстаней від точки D до двох інших сторін трикутника є найбільшим.

37) Серед усіх трикутників з даним кутом α, вписаних у дане коло, знайти трикутник найбільшого периметра.

38) Серед усіх трикутників з даним кутом α, описаних навколо даного круга, знайти трикутник найменшого периметра.

39) Знайти висоту циліндра найбільшого об'єму, вписаного в сферу радіуса R.

40) У сферу вписано правильну чотирикутну піраміду; у піраміду вписано правильну чотирикутну призму, одна з основ якої лежить у площині основи піраміди, а вершини другої основи лежать на бічних ребрах піраміди. Висота призми дорівнює a, а ребро її основи дорівнює $2a$. При якій висоті піраміди радіус описаної навколо неї сфери буде найменшим? Знайти найменше значення радіуса.

41) У конус з основою радіуса R і осьовим перерізом, що є рівнобедреним прямокутним трикутником, вписано правильну чотирикутну призму найбільшого об'єму так, що одне її бічне ребро лежить на діаметрі основи, вершини протилежного ребра лежать на бічній поверхні конуса, а інші вершини рівновіддалені від основи конуса. Знайти об'єм призми.

42) Одна з основ правильної трикутної призми належить великому кругу сфери радіуса R, а вершини другої основи лежать на сфері. Визначити висоту призми, при якій сума довжин усіх її ребер буде найбільшою.

43) У півсферу радіуса R вписано циліндр так, що його висота паралельна осі півсфери. При якій висоті циліндра його об'єм буде найбільшим?

44) У сферу вписано правильну чотирикутну піраміду; у піраміду вписано циліндр, одна з основ якого лежить у площині основи піраміди, а коло другої основи дотикається до усіх бічних граней. Висота циліндра і радіус його основи дорівнюють a. При якій висоті піраміди об'єм кулі, обмеженої сферою, буде найменшим? Знайти значення цього об'єму.

45) Правильна трикутна піраміда, яку вписано у сферу радіуса R, перетинається площиною, яка проходить через медіани бічної грані й основи, що виходять з однієї вершини. При якій висоті піраміди площа перерізу піраміди цією площиною буде найбільшою?

46) Знайти найбільший об'єм правильної чотирикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює $9\sqrt{3}$ дм.

47) Знайти найменшу площу повної поверхні правильної чотирикутної призми, об'єм якої дорівнює 27 $см^3$.

48) Об'єм правильної трикутної призми дорівнює V. При якій стороні основи повна поверхня призми буде найменшою?

49) У сферу радіуса R см вписано циліндр найбільшого об'єму. Знайти об'єм цього циліндра.

50) Знайти найбільший об'єм конуса, периметр осьового перерізу якого дорівнює 20 дм.

51) Знайти найбільший об'єм циліндра, площа повної поверхні якого дорівнює 54π $см^2$, а радіус основи $r \in [2; 4]$.

52) Основою піраміди $SABC$ є прямокутний трикутник ABC, у якого $\angle ACB = 90°$, $CB = 3AC$. Висота піраміди SC, а ребро $SA = 4\sqrt{3}$. При якій висоті піраміди її об'єм буде найбільшим?

53) Знайти найбільший об'єм циліндра, який можна вписати в конус, радіус основи якого дорівнює R, а висота H.

54) З усіх конусів, описаних навколо кулі радіуса R, знайти той, що має найменший об'єм.

55) Циліндр об'єму 1 має радіус основи R. Другий циліндр має на 0,1 більший радіус і на 0,2 більшу висоту, ніж перший. При якому значенні R об'єм другого циліндра буде найменшим?

56) У прямий круговий конус вписано кулю об'єму V. Яке найменше значення може мати об'єм конуса?

57) З круга вирізано сектор з центральним кутом α, а з остачі круга згорнули воронку. При якому значенні α місткість воронки буде найбільшою?

58) Знайти квадрат відношення висоти конуса до діаметра основи, якщо конус при даному об'ємі має найменшу бічну поверхню.

59) Бічна сторона рівнобічної трапеції і менша основа рівні між собою і дорівнюють 20 см. Якою має бути більша основа, щоб площа трапеції була найбільшою?

60) Серед усіх правильних чотирикутних пірамід з площею бічної поверхні 16 $см^2$ знайти ту, у якої бічне ребро найменше. Обчислити сторону основи такої піраміди.

61) Знайти радіус основи R і висоту H циліндра, що має при даному об'ємі $V = 54\pi$ найменшу повну поверхню.

62) З усіх правильних семикутних призм, вписаних у циліндр даного об'єму V, знайти висоту тієї з них, у якої площа повної поверхні найменша.

63) У сферу радіуса R вписано правильну трикутну піраміду, в якої апофема дорівнює діаметру кола, описаного навколо основи. Між сферою і пірамідою розміщено правильну чотирикутну призму, одна з основ якої лежить у площині бічної грані піраміди, а вершини другої основи лежать на сфері. Який найбільший об'єм може мати призма?

64) Об'єм правильної чотирикутної піраміди дорівнює $\frac{1}{6\sqrt{2}}$. Нехай x — сторона основи і $x \in \left[\frac{1}{2};\ 2\right]$. Знайти найменше і найбільше значення квадрата апофеми цієї піраміди.

65) Із заготовки, що має форму кулі з діаметром 12, виточується прямий циліндр висоти h. При якому значенні h об'єм виточеного циліндра буде найбільшим?

66) Конус з кутом α між твірною і висотою вписано у сферу радіуса R так, що його вершина міститься у центрі сфери, а коло основи — на сфері. Усі вершини нижньої основи правильної трикутної призми (паралельної основі конуса) лежать на сфері, а інші її вершини лежать на бічній поверхні конуса. Якими мають бути висота і сторона основи призми, щоб площа її бічної поверхні була найбільшою? Знайти це значення площі.

67) Бічне ребро SA правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ дорівнює l і утворює з площиною основи кут α. У піраміду вписано правильну чотирикутну призму так, що всі вершини верхньої основи призми лежать на бічних ребрах піраміди, а всі вершини нижньої — на основі $ABCD$ піраміди. Знайти площу основи призми, площа повної поверхні якої має найбільше значення.

68) Переріз тунелю заданого периметра p має форму прямокутника з насадженим півкругом. При якому співвідношенні між сторонами цього прямокутника площа перерізу найбільша?

69) При якому співвідношенні між висотою і радіусом відкритого циліндричного бака заданого об'єму V на його виготовлення піде найменше матеріалу?

70)• На лузі біля річки треба обгородити прямокутної форми загін для скоту, який прилягає до прямолінійного берега річки. Завезено 100 м огорожі. Якими мають бути розміри відповідного прямокутника, щоб його площа була найбільшою?

71) Визначити розміри відкритого басейну з квадратним дном і об'ємом V, щоб на облицювання його стін і дна затратити якнайменше матеріалу.

72) На сторінці книги друкований текст займає a см^2. Поля зверху і знизу мають бути по b см, а справа і зліва — по d см. Обчислити найекономічніші розміри паперу.

73) З круга радіуса R вирізано сектор, з якого склеєно лійку у формі конуса. Який найбільший об'єм може мати утворена лійка?

74) Швидкість v зростання чисельності x деякої популяції описується функцією $v = 0{,}003x(200 - x)$. При якій чисельності популяції ця швидкість є найбільшою?

75) На якій висоті x треба розмістити ліхтар у центрі круглого майданчика радіуса r, щоб освітленість I його межі була якнайкращою, якщо відомо, що $I(x) = k\frac{x}{\sqrt{\left(x^2 + r^2\right)^3}}$, де k — коефіцієнт пропорційності.

76) Відвідувач музею розглядає картину, нижній край якої розміщено на висоті a см, а верхній — на b см вище рівня його очей. На якій відстані від стіни повинен стати спостерігач, щоб побачити картину під найбільшим кутом?

77) Є прямокутний лист жерсті розміром 50×80 см. У чотирьох його кутах вирізають однакові квадрати і роблять відкриту коробку, загинаючи краї під прямим кутом. Яка максимально можлива місткість такої коробки?

21. 1)• На малому підприємстві виготовляють продукцію одного виду. Витрати на виробництво x одиниць продукції, грн, виражаються функцією $V(x)=x^3-30x^2-160x+900$, а дохід від її реалізації (загальна вартість продукції), грн, $D(x)=80x-6x^2$.

Відомо, що $P(x) = D(x) - V(x)$, де $P(x)$ — прибуток від реалізації x одиниць продукції. Визначити, яку кількість продукції треба виготовити, щоб прибуток був максимальним.

2) Нехай функція $V(x) = 250 + 12x - 0{,}2x^2$ виражає витрати, грн, підприємства на виробництво x одиниць продукції. Визначити, чи зростатимуть витрати при збільшенні виробництва продукції: а) від 250 до 300 одиниць; б) від 300 до 350 одиниць? При якому значенні x витрати будуть максимальними?

Зразки розв'язування задач

1. 4) Розглянемо функцію $f(x)=1-x^2\sin^2\frac{1}{x}-x^2$, якщо $x\neq 0$, $f(0)=1$. Якщо x близьке до нуля, але $x\neq 0$, то $f(x)<1=f(0)$, отже, $x_0=0$ — точка максимуму функції f. Дослідимо функцію на монотонність. Маємо

$$f'(x)=-2x\sin^2\frac{1}{x}+\sin\frac{2}{x}-2x\ \ \forall x\neq 0\Rightarrow f'\left(\frac{4}{\pi(4n+1)}\right)=-\frac{8}{\pi(4n+1)}\sin^2\left(\pi n+\frac{\pi}{4}\right)+$$

$$+\sin\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{8}{\pi(4n+1)}=1-\frac{8}{\pi(4n+1)}\cdot\frac{1}{2}-\frac{8}{\pi(4n+1)}=1-\frac{12}{\pi(4n+1)}>0\ \ \forall n\in\mathbf{N},$$

$$f'\left(\frac{4}{\pi(4n+2)}\right)=-\frac{8}{\pi(4n+2)}\sin^2\left(\pi n+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\pi(2n+1)-$$

$$-\frac{8}{\pi(4n+2)}=-\frac{8}{\pi(2n+1)}<0\quad\forall n\in\mathbf{N}.$$

Таким чином, f' не зберігає знака у будь-якому інтервалі $(0;\ \delta)$, тобто f не є монотонною функцією на цьому інтервалі. Оскільки f — парна функція, то вона не може бути монотонною і на інтервалі $(-\delta;\ 0)$ $\forall\delta>0$. Отже, задане твердження неправильне.

3. 15) Щоб розкрити знаки модуля, розглянемо задану функцію на кожному з інтервалів $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ 1)$ і $(1;\ +\infty)$.

Нехай $x<0$, тоді $|x|=-x$, $|x-1|=1-x$, звідки $y=-xe^{x-1}$, $y'=-e^{x-1}-xe^{x-1}=$ $=-e^{x-1}(1+x)\Rightarrow x=-1$ — критична точка. Оскільки похідна в цій точці змінює знак з $+$ на $-$, то $y_{\max}=y(-1)=e^{-2}$.

Якщо $0<x<1$, то $|x|=x$, $|x-1|=1-x$, звідки $y=xe^{x-1}$, $y'=e^{x-1}(1+x)>0$. Отже, в точці $x=0$ похідна змінює знак з – на +, тому $y_{\min}=y(0)=0$.

Якщо $x > 1$, то $|x| = x$, $|x-1| = x-1$. Звідси $y = xe^{1-x}$, $y' = e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{1-x}(1-x) < 0$ $\forall x > 1$. У точці $x = 1$ функція $f'(x)$ змінює знак з + на –, тому $y_{\max} = y(1) = 1$. Отже, $y(-1) = y_{\max} = e^{-2}$, $y(1) = y_{\max} = 1$ і $y(0) = y_{\min} = 0$.

6. 12) Введемо нові додатні величини x і y, поклавши $a = x^{10}$ і $b = y^{15}$. Тоді задана нерівність набуде вигляду $2x^5 + 3y^5 \ge 5x^2y^3$, а після ділення обох частин нерівності на y^5 і введення позначення $t = \frac{x}{y} > 0$ — вигляду $2t^5 + 3 \ge 5t^2$.

Дослідимо на екстремум функцію $f(t) = 2t^5 + 3 - 5t^2$, визначену і диференційовну на інтервалі $(0; +\infty)$. Її похідна $f'(t) = 10t^4 - 10t$ дорівнює нулю, якщо $t = 0$ і $t = 1$. Єдиною критичною точкою є точка $t = 1 \in (0; +\infty)$. Якщо $t \in (0; 1)$, то $f'(t) < 0$ (функція f спадає), а якщо $t \in (1; +\infty)$, то $f'(t) > 0$ (функція f зростає). Це означає, що $t = 1$ — точка мінімуму функції f, причому $f(1) = 0$. Отже, для всіх $t > 0$ $f(t) \ge f(1) = 0$. Це доводить справедливість нерівності. Проте $t = \frac{x}{y}$, тому рівність виконується тоді, коли $x = y$, або $\sqrt[10]{a} = \sqrt[15]{b}$.

13) Безпосередня перевірка показує, що задана нерівність справджується, якщо $x = y = 0$, або $x = 0$ і $y > 0$, або $x > 0$ і $y = 0$. Тому припускатимемо, що $x \ge 0$ і $y > 0$. Розглянемо функцію від x (при фіксованому значенні параметра y) вигляду

$$\varphi(x) = x \cdot 2^y + y \cdot 2^{-x} - x - y,$$

яка визначена і диференційовна на проміжку $[0; +\infty)$, причому $\varphi(0) = 0$. Її похідна $\varphi'(x) = 2^y - y \cdot 2^{-x} \ln 2 - 1$. Якщо доведемо, що $\varphi'(x) > 0$ для всіх $x \ge 0$, то це означатиме, що $\varphi(x)$ зростає на проміжку $[0; +\infty)$ та $\varphi(x) \ge \varphi(0) = 0$, і нерівність буде доведено.

Оскільки $\varphi''(x) = y \cdot 2^{-x} \ln^2 2 > 0$ для всіх $x > 0$, то $\varphi'(x)$ — зростаюча функція від x. Залишається переконатись, що також $\varphi'(0) > 0$ для всіх $y \ge 0$. Для цього досить довести, що для всіх $y > 0$ зростаючою є функція $\psi(y) = \varphi'(0) = 2^y - y \ln 2 - 1$, яка визначена і диференційовна для всіх $y \ge 0$, причому $\psi(0) = 0$. Оскільки $\psi'(y) = 2^y \ln 2 - \ln 2 > 0$ для всіх $y > 0$, то $\psi(y) > \psi(0) = 0$ для всіх $y > 0$, тобто $\varphi'(0) > 0$ для всіх $y > 0$. Цим доведено вихідну нерівність.

9. Припустимо, що $f^{(n)}(x_0) > 0$. Оскільки

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x - x_0} > 0,$$

то для всіх $x \ne x_0$, достатньо близьких до x_0, матимемо

$$\frac{f^{(n-1)}(x)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow f^{(n-1)}(x) < 0$$

для $x < x_0$ та x, близьких до x_0, і $f^{(n-1)}(x) > 0$ для $x > x_0$ та x близьких до x_0. Отже, $f^{(n-1)}(x)$ змінює знак з – на + у точці x_0, звідки $\exists \delta > 0$: $f^{(n-1)}(x) < 0$ на $(x_0 - \delta; x_0)$ і

$f^{(n-1)}(x)>0$ на $(x_0; x_0+\delta)$. Тому $f^{(n-2)}(x)$ спадає на проміжку $(x_0-\delta; x_0)$ та зростає на проміжку $(x_0; x_0+\delta)$, а оскільки $f^{(n-2)}(x_0)=0$, то $f^{(n-2)}(x)>0$ на $(x_0-\delta;\ x_0)$ і $f^{(n-2)}(x)>0$ на $(x_0;\ x_0+\delta)$. Отже, за критерієм монотонності функція $f^{(n-3)}(x)$ зростає на інтервалі $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$, а оскільки $f^{(n-3)}(x_0)=0$, то $f^{(n-3)}(x)<0$ на $(x_0-\delta;\ x_0)$ і $f^{(n-3)}(x)>0$ на $(x_0;\ x_0+\delta)$. Отже, функція $f^{(n-2)}(x)$ не змінює знака у точці x_0, а $f^{(n-3)}(x)$ змінює знак з - на + у точці x_0.

Продовжуючи міркування, дістаємо, що $f^{(n-(2k-1))}(x)$ змінює знак з – на + у точці x_0 $\forall k:\ 2k-1<n$, а $f^{(n-2k)}(x)$ не змінює знака у точці x_0 $\forall k:\ 2k<n$. Зокрема, якщо $n = 2m,\ m\in \mathbf{N}$, то $f'(x)=f^{(2m-(2m-1))}(x)$ змінює знак з – на + у точці x_0, тобто $f_{\min} = f(x_0)$. Якщо $n = 2m - 1,\ m\in \mathbf{N}$, , то $f'(x)=f^{(2m-1-(2m-2))}(x)$ не змінює знака у точці x_0, тобто f — строго монотонна функція у деякому околі точки x_0, а тому не має екстремуму у цій точці. Аналогічні міркування для випадку $f^{(n)}(x_0)<0$ показують, що при $n = 2m,\ m\in \mathbf{N}$, точка x_0 є точкою максимуму функції f, а при $n = 2m - 1,\ m\in \mathbf{N}$, точка x_0 не є точкою екстремуму функції f. Отже, має місце така *достатня умова екстремуму:* нехай $f^{(k)}(x_0)=0$ для $1\le k<n$, а $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Тоді при $n = 2m$ точка x_0 є точкою екстремуму функції f, а саме: $f(x_0)=f_{\min}$, якщо $f^{(2m)}(x_0)>0$, і $f(x_0)=f_{\max}$, якщо $f^{(2m)}(x_0)<0$. Якщо $n = 2m - 1$, то x_0 не є точкою екстремуму функції f.

18. З ескізу графіка многочлена видно, що його похідна в інтервалі (0; 1) повинна мати принаймні ще два корені. Це означає, що степінь шуканого многочлена не менше 5. Отже, якщо $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+\mathrm{e}x+k$ — шуканий многочлен, то $f'(x)=5ax^4+4bx^3+3cx^2+2dx+\mathrm{e}$. Для відшукання шести невідомих коефіцієнтів многочлена умова задачі дає змогу скласти таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} f(0)=k=1, \\ f(1)=a+b+c+d+\mathrm{e}+k=0, \\ f'(0)=\mathrm{e}=0, \\ f'(1)=5a+4b+3c+2d+\mathrm{e}=0. \end{cases}$$

Це сумісна, але невизначена система лінійних рівнянь, з якої маємо $k = 1$, $\mathrm{e} = 0$. Чотири інших коефіцієнти многочлена визначають із такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} a+b+c+d=-1, \\ 5a+4b+3c+2d=0. \end{cases}$$

Звідси дістаємо $c = 2 - 3a - 2b$, $d = 2a + b - 3$.

Похідна f' після підстановки значень коефіцієнтів c, d, e і k набирає такого вигляду:

$$f'(x)=5ax^4+4bx^3+3(2-3a-2b)x^2+2(2a+b-3)x=$$
$$=x(x-1)\left(5ax^2+(5a+4b)x+6-4a-2b\right)=x(x-1)\varphi(x),$$

де добуток $x(x-1)$ додатний, якщо $x<0$ і $x>1$, і від'ємний, якщо $x\in(0;1)$.

За умовою $x = 0$ і $x = 1$ — відповідно точки мінімуму і максимуму многочлена. Тому його похідна f' при проходженні через ці точки має змінювати знак відповідно з – на + і з + на –. Це виконуватиметься, якщо функція $\varphi(x)$ у цих точках буде від'ємною. Отже, шукані коефіцієнти a і b мають задовольняти таку систему нерівностей:

$$\begin{cases} \varphi(0) = 6 - 4a - 2b < 0, \\ \varphi(1) = 6 + 6a + 2b < 0. \end{cases}$$

Крім того, многочлен f непарного степеня буде спадним при $x < 0$, якщо коефіцієнт $a < 0$. Ці вимоги задовольняють, наприклад, такі значення: $a = -8$, $b = 20$. Тоді $c = -14$, $d = 1$, а шуканий многочлен $f(x) = -8x^5 + 20x^4 - 14x^3 + x^2 + 1$.

Неважко переконатись, що, крім 0 і 1, похідна цього многочлена в інтервалі $(0;\ 1)$ має два корені: $x_1 = \dfrac{10 - \sqrt{35}}{20} \approx \dfrac{1}{5}$ і $x_2 = \dfrac{10 + \sqrt{35}}{20} \approx \dfrac{4}{5}$, з яких x_1 — точка максимуму, а x_2 — точка мінімуму.

19. 1) Задачі на доведення нерівностей тісно пов'язані із задачами на відшукання найбільшого і найменшого значень певних функцій. Розглянемо функцію $g(x, y, z) = \sin x + {}$ ${}+ \sin y + \sin z$, де $x + y + z = \pi$. Звідси $z = \pi - (x + y)$, $\sin z = \sin(\pi - (x + y)) = \sin(x + y)$ і

$$F(x,\ y) = g(x,\ y,\ \pi - (x + y)) = \sin x + \sin y + \sin(x + y).$$

Зафіксуємо параметр y і дослідимо на екстремум неперервну і диференційовну функцію $\varphi(x) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$. Її похідна

$$\varphi'(x) = \cos x + \cos(x + y) = 2\cos\left(x + \frac{y}{2}\right)\cos\frac{y}{2}.$$

Критичні точки функції φ: $\pm\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{y}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Умову задачі задовольняє лише одна критична точка: $x = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{y}{2}$. Неважко переконатися, що коли $x \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{y}{2}\right)$, то $\varphi'(x) > 0$ (функція φ зростає), а коли $x \in \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{y}{2};\ \pi\right)$, то $\varphi'(x) < 0$ (функція φ спадає). Це означає, що $x = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{y}{2}$ — точка максимуму функції φ, причому

$$\varphi_{\max} = \varphi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) = 2\cos\frac{y}{2} + \sin y.$$

Дослідимо тепер на екстремум функцію $\psi(y) = \varphi_{\max}{}^{\cdot} = 2\cos\dfrac{y}{2} + \sin y$. Її похідна

$$\psi'(y) = -\sin\frac{y}{2} + \cos y = 1 - 2\sin^2\frac{y}{2} - \sin\frac{y}{2} = -2\left(\sin\frac{y}{2} + 1\right)\left(\sin\frac{y}{2} - \frac{1}{2}\right).$$

Критичні точки функції ψ знаходимо з такої сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{y}{2} = -1, \\ \sin\dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \dfrac{y}{2} = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, & k \in \mathbf{Z} \\ \dfrac{y}{2} = (-1)^k \arcsin\dfrac{1}{2} + \pi k, & k \in \mathbf{Z}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y = -\pi + 4\pi k, & k \in \mathbf{Z}, \\ y = (-1)^k \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Умову задачі задовольняє лише одна критична точка: $y = \dfrac{\pi}{3}$. Оскільки $\psi'(y) > 0$, якщо $y \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{3}\right)$, і $\psi'(y) < 0$, якщо $y \in \left(\dfrac{\pi}{3};\ \pi\right)$, то $\dfrac{\pi}{3}$ — точка максимуму функції ψ, причому $\psi_{max} = \psi\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} + 2\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Оскільки $\frac{\pi}{3}$ — єдина точка максимуму на інтервалі $(0; \pi)$, то в ній функція ψ набуває найбільшого значення. Проте якщо $y = \frac{\pi}{3}$, то $x = \frac{\pi}{2} - \frac{y}{2} = \frac{\pi}{3}$ і $z = \pi - (x + y) = \frac{\pi}{3}$, тобто трикутник рівносторонній. Отже, з усіх трикутників рівносторонній має найбільшу суму синусів кутів.

20. 30) Нехай трикутник ABC — прямокутний, $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, $AC = b$, $BC = a$ — катети, причому $a > b$, AB — гіпотенуза, $CD = h$ — висота і $AM = m_a$ — медіана, яка ділить навпіл катет BC. Отже, $CM = MB = \frac{1}{2} BC$. Позначимо $\angle BAC = x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Тоді $AC = \frac{h}{\sin x}$, $BC = \frac{h}{\cos x}$, а $CM = \frac{h}{2\cos x}$. Із прямокутного трикутника AMC (для якого медіана AM є гіпотенузою) за теоремою Піфагора знаходимо медіану $AM = m_a$ як функцію незалежної змінної x:

$$m_a(x) = h\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{4\cos^2 x}}, \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Функція $m_a(x)$ набуває свого найменшого значення тоді, коли його набуває функція

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{4\cos^2 x}, \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Оскільки

$$f'(x) = -\frac{2\cos x}{\sin^3 x} + \frac{\sin x}{2\cos^3 x} = \frac{\left(\sin x - \sqrt{2}\cos x\right)\left(\sin x + \sqrt{2}\cos x\right)\left(\sin^2 x + 2\cos^2 x\right)}{2\sin^3 x\cos^3 x},$$

то, розв'язуючи рівняння $\sin x - \sqrt{2}\cos x = 0$, $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, знаходимо критичну точку $x = \operatorname{arctg}\sqrt{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Якщо $x \in \left(0; \operatorname{arctg}\sqrt{2}\right)$, то $f'(x) < 0$, і функція f спадає, а якщо $x \in \left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $f'(x) > 0$, і функція f зростає. Отже, $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ — точка мінімуму функції f (а отже, і функції m_a) на інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, причому $m_{a\,\min} = m_a\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right) = \frac{3}{2}h$.

Оскільки $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ — єдина точка мінімуму на інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то в ній функція m_a набуває найменшого значення.

Отже, з усіх прямокутних трикутників з проведеною до гіпотенузи висотою h найменшу довжину медіани, яка ділить навпіл більший катет, має той, у якого гострий кут, що лежить проти більшого катета, дорівнює $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. Неважко переконатись, що катети такого трикутника пов'язані між собою рівністю $a = \sqrt{2}b$.

70) Позначимо через x сторону прямокутника, перпендикулярну до берега річки, а іншу — через y. Тоді площа прямокутника $S = xy$. За умовою задачі довжина огорожі дорівнює 100 м. Тоді $y + 2x = 100$, звідки $y = 100 - 2x$ і $S = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$,

де $0 \le x \le 50$. Отже, треба знайти найбільше значення функції $S = 100x - 2x^2$ на відрізку [0; 50]. За правилом відшукання найбільшого і найменшого значень функції на відрізку маємо:

$$S' = 100 - 4x,\ 100 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 25;$$

$$S(25) = 2500 - 2 \cdot 625 = 1250,\ S(0) = S(50) = 0.$$

Помічаємо, що найбільшого значення функція набуває в стаціонарній точці $x = 25$. При цьому $y = 100 - 2 \cdot 25 = 50$.

Отже, загін для скоту матиме найбільшу площу, якщо сторона огорожі, що є паралельною берегу річки, вдвоє більша за іншу.

Цю задачу можна розв'язати дещо іншим способом, розглядаючи функцію S на інтервалі (0; 50), що більше відповідає змісту задачі. Оскільки функція неперервна на цьому інтервалі і має на ньому єдину критичну точку $x = 25$, в якій $S > 0$, а при $x \to 0$ і $x \to 50$ маємо $S \to 0$, то звідси випливає, що в точці $x = 25$ функція має максимум, отже, і найбільше значення на інтервалі (0; 50).

Нарешті, цю задачу можна розв'язати, використовуючи другу достатню умову існування екстремуму. Оскільки $S''(x) = S''(25) = -4 < 0$, то точка $x = 25$ є точкою глобального максимуму розглядуваної функції (бо вона єдина), тобто в цій точці функція набуває свого найбільшого значення.

21. 1) Враховуючи, що прибуток від реалізації x одиниць товару визначається як різниця між доходом і витратами, дістаємо $P(x) = D(x) - V(x) = -x^3 + 24x^2 + 240x - 900$.

Для визначення точки максимуму функції P скористаємось необхідною умовою існування екстремуму: $P' = 0$ або $D' - V' = 0$. Зауважимо, що остання умова має економічний зміст: для того щоб прибуток P був максимальним, потрібно, щоб граничний дохід D' дорівнював граничним витратам V', тобто $D' = V'$.

Оскільки $P'(x) = -3x^2 + 48x + 240$, то, розв'язавши рівняння $P'(x) = 0$, дістанемо дві стаціонарні точки $x_1 = -4$ і $x_2 = 20$. Перше значення не задовольняє умову задачі. Обчисливши значення другої похідної $P''(x) = -6x + 48$ в точці $x_2 = 20$, визначимо, що прибуток буде максимальним при $x = 20$ і дорівнюватиме $P_{max} = P(20) = 5500$ (грн).

§ 6.5. Опуклі функції та точки перегину

Функцію f називають *опуклою вниз* (*вгору*) на проміжку $\langle a;\ b\rangle$, якщо $\forall x_1, x_2 \in \langle a; b\rangle$: $x_1 < x_2$ графік функції f на відрізку $[x_1;\ x_2]$ лежить не вище (не нижче) хорди M_1M_2, де $M_1(x_1, f(x_1))$, $M_2(x_2, f(x_2))$, тобто

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

$$\left(f(x) \ge \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)\right).$$

Проміжком опуклості функції f називають такий проміжок $\langle a;\ b\rangle$, в якому функція f опукла вниз або вгору, але f не є опуклою вниз або вгору на ширшому проміжку $\langle c;\ d\rangle \supset \langle a;\ b\rangle$.

Точкою перегину функції f називають таку точку x_0, для якої $\exists\delta > 0$: на проміжках $[x_0 - \delta;\ x_0]$ і $[x_0;\ x_0 + \delta]$ функція f опукла в різних напрямах (зліва — вниз, а справа — вгору, або навпаки).

К р и т е р і ї   о п у к л о с т і

1. Якщо функція f неперервна на проміжку $\langle a;\ b\rangle$ та диференційовна на інтервалі $(a; b)$, то вона є опуклою вниз (вгору) на $\langle a;\ b\rangle$ тоді й тільки тоді, коли:

а) f' не зростає (не спадає) на $(a; b)$;

б) її графік лежить не нижче (не вище) будь-якої дотичної до цього графіка.

2. Якщо функція f неперервна на проміжку $\langle a;\ b\rangle$ та двічі диференційовна на інтервалі $(a; b)$, то вона є опуклою вниз (вгору) на $\langle a;\ b\rangle$ тоді й тільки тоді, коли $f''(x)\geq 0$ $\left(f''(x)\leq 0\right)$ на $(a; b)$.

Необхідна умова точки перегину. Якщо x_0 — точка перегину функції f і існує $f''(x_0)$, то $f''(x_0)=0$.

Достатня умова точки перегину. Якщо $f''(x_0)=0$ і $f''(x)$ змінює знак при переході аргументу через точку x_0, то x_0 — точка перегину функції f.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) кожна функція $y=f(x)$, $x\in \mathbf{R}$, $y\in \mathbf{R}$, опукла вгору або вниз на деякому проміжку $\langle a;\ b\rangle$;

2) якщо функція f опукла вгору на $\langle a;\ b\rangle$, то вона не може бути опуклою вниз на $\langle a; b\rangle$;

3)• якщо функція f опукла вгору або вниз на проміжку $\langle a;\ b\rangle$, то вона неперервна на інтервалі $(a; b)$;

4) кожна з основних елементарних функцій має скінченну кількість проміжків опуклості та точок перегину;

5) якщо $f''(x)$ неперервна в околі точки x_0 і $f''(x_0)\neq 0$, то функція f опукла вниз або вгору в деякому околі точки x_0;

6) якщо f опукла вниз на проміжках $[a; c]$ і $[c; b]$, то вона опукла вниз і на проміжку $[a; b]$.

2. Знайти проміжки опуклості та точки перегину основних елементарних функцій.

3. Знайти проміжки опуклості та точки перегину даних функцій:

1) $y=ax^2+bx+c$; 2) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$; 3) $y=6x^2-x^3$; 4) $y=\dfrac{a^2}{a^2+x^2}$;

5) $y=3x-x^{\frac{5}{3}}$; 6) $y=\mathrm{e}^{-x^2}$; 7) $y=x+\sin x$; 8) $y=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{2}x^2+\mathrm{e}^x$;

9) $y=x\operatorname{arctg}x$; 10) $y=x\ln x$; 11) $y=\mathrm{e}^{\cos x}$; 12) $y=2x^2+\ln x$;

13)• $y=x\sin(\ln x)$, $x>0$; 14) $y=x^x$; 15) $y=\sqrt[3]{(x+5)^2}-\sqrt[3]{(x-5)^2}$;

16) $y=4\sin\dfrac{x}{2}+\sin x$; 17) $y=\cos^3 x-\sin^3 x$; 18) $y=\cos x+4\sin\dfrac{x}{2}$;

19) $y=\cos x\sin^2 x$; 20) $y=\sin x\cos^2 x$; 21) $y=2^{\frac{1}{x}}$; 22) $y=\dfrac{x^3}{(x+2)^2}$;

23) $y=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+2}$; 24) $y=\dfrac{x^3-x}{(x-4)^3}$; 25) $y=\dfrac{x^4}{x^3+1}$; 26) $y=(2-x)\sqrt[3]{x}$;

27) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; 28) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$; 29) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{2x}{x^2-1}$;

30) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$; 31) $y=2x+4\operatorname{arcctg}x$; 32) $y=\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$;

33) $y=\dfrac{x}{x^2+9}$; 34) $y=\operatorname{arctg}\left(x^2-1\right)$.

4. Дослідити на опуклість параметрично задані функції:

1) $x=a\cos t,\ \ y=b\sin t,\ \ t\in[0;\ 2\pi],\ \ a>0,\ \ b>0$;

2)• $x=a\cos^3 t,\ \ y=a\sin^3 t,\ \ t\in[0;\ 2\pi],\ \ a>0$;

3) $x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t),\ \ t\in\mathbf{R},\ \ a>0$;

4) $x=\sin^2 t,\ \ y=\cos^2 t,\ \ t\in\mathbf{R}$;

5) $x=a\ \operatorname{ch} t,\ \ y=b\ \operatorname{sh} t,\ \ t\in\mathbf{R},\ \ a>0,\ \ b>0$.

5. 1)• Нехай $f''(x)>0\quad\forall x\in(a;b)$. Довести, що $\forall\ x_1,\ x_2\in(a;b):\ x_1<x_2$ має місце нерівність

$$f(x)<\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)\quad\forall x\in(x_1;\ x_2).$$

2) Сформулювати і довести відповідне твердження для випадку, якщо $f''(x)<0\quad\forall x\in(a;\ b)$.

6. Довести дані нерівності та визначити їхній геометричний зміст:

1) $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^{\alpha}\le\dfrac{1}{2}\left(x^{\alpha}+y^{\alpha}\right),\ x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \alpha\ge 1$; 2) $e^{\frac{x+y}{2}}\le\dfrac{e^x+e^y}{2}\quad\forall x,\ y$;

3) $(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}\le x\ln x+y\ln y\quad\forall x>0,\ \ y>0$;

4) $\operatorname{arctg}\dfrac{a+b}{2}>\dfrac{1}{2}(\operatorname{arctg}a+\operatorname{arctg}b),\ \ 0<a<b<+\infty$;

5) $\operatorname{arcctg}\dfrac{a+b}{2}<\dfrac{1}{2}(\operatorname{arcctg}a+\operatorname{arcctg}b),\ \ -\infty<a<b<0$;

6) $\lg\dfrac{a+b}{2}>\dfrac{1}{2}(\lg a+\lg b),\ \ 0<a<b<+\infty$;

7) $\arcsin\dfrac{a+b}{2}>\dfrac{1}{2}(\arcsin a+\arcsin b),\ \ -1<a<b<0$;

8) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 \le \frac{1}{2}\left(a^4+b^4\right)$; 9) $\sqrt{\frac{a+b}{2}} > \frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$, $0<a<b<+\infty$;

10) $\operatorname{ctg}\frac{a+b}{2} < \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b)$, $0<a<b<\frac{\pi}{2}$;

11) $\frac{1}{a+b}\ln\frac{a+b}{2} > \frac{1}{a}\ln a + \frac{1}{b}\ln b$, $0<a<b<e^{\frac{3}{2}}$;

12) при якому значенні a виконується нерівність

$$\log_a\left(\frac{c+d}{2}\right) < \frac{1}{2}\left(\log_a c + \log_a d\right),\ 0<c<d<+\infty .$$

7. Якій множині належать точки a і b, якщо:

1) $\sin\frac{a+b}{2} < \frac{1}{2}(\sin a + \sin b)$; 2) $\cos\frac{a+b}{2} < \frac{1}{2}(\cos a + \cos b)$;

3) $\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} > \frac{1}{2}(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)$; 4) $(a+b)\ln^2\frac{a+b}{2} < a\ln^2 a + b\ln^2 b$;

5) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \ge \frac{1}{2}\left(a^3+b^3\right)$; 6) $\operatorname{arctg}\frac{a+b}{2} < \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b)$;

7) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \frac{1}{2}\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)$; 8) $\dfrac{a+b}{\ln\frac{a+b}{2}} < \frac{a}{\ln a} + \frac{b}{\ln b}$.

8.• Якщо x_0 — точка перегину функції f, то точку $(x_0, f(x_0))$ називають точкою перегину графіка функції f або кривої $y=f(x)$. Довести, що усі точки перегину кривої $y=\frac{a^2}{a^2+x^2}(a+x)$ лежать на одній прямій.

9. При якому значенні параметра a точка $x=2$ є точкою перегину функції $y=4x^3+3ax^2+2$?

10. Які умови треба накласти на коефіцієнти a, b, c, d, m, щоб задана функція мала точки перегину:

1) $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+m$; 2) $y=a^x+bx^3+cx^2+dx+m$.

11. Нехай функції f і φ опуклі вниз відповідно на проміжках $\langle a;b\rangle$ і $\langle c;d\rangle$. Довести, що:

1) $f+\varphi$ опукла вниз на $\langle a;b\rangle$, якщо $\langle a;b\rangle=\langle c;d\rangle$;

2) $f\circ\varphi$ — опукла вниз на $\langle c;d\rangle$, якщо $\varphi(x)\in\langle a;b\rangle$ $\forall x\in\langle c;d\rangle$ і f зростаюча функція на $\langle a;b\rangle$.

12. Визначити, чи залишиться твердження 11 правильним, якщо в ньому кожне слово «вниз» замінити словом «вгору».

13. Нехай функція f опукла вниз на проміжку $\langle a;b\rangle$ і $f(x)\not\equiv \text{const}$ на $\langle a;b\rangle$. Довести, що f не має точок максимуму на інтервалі $(a;b)$.

14. Сформулювати і довести твердження, аналогічне до твердження 13, для функції опуклої вгору.

15. Нехай функція f опукла вниз або вгору на $\langle a;b\rangle$. Довести, що $\forall x\in(a;b)\ \ \exists f'_-(x)$ і $f'_+(x)$.

16. Нехай функція f опукла вниз на проміжку $\langle a;b\rangle$. Довести нерівність Єнсена:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}q_kx_k\right)\le\sum_{k=1}^{n}q_kf(x_k)\quad\forall x_k\in\langle a;\ b\rangle,\ k=\overline{1,\ n}\ \text{ і }\ \forall q_k>0:\ \sum_{k=1}^{n}q_k=1.$$

17.• Застосувавши нерівність Єнсена для функції $f(x)=x^{\alpha}$, де $x>0$, $\alpha>1$, довести нерівність Гельдера:

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\le\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\sum_{k=1}^{n}b^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Зразки розв'язування задач

1. 3) Зафіксуємо довільну точку $x_0\in(a;b)$ і припустимо, що функція f опукла вниз на $\langle a;b\rangle$. Тоді $\forall x\in(x_0;x^*)$, $\forall x^*>x_0$

$$f(x)\le\frac{x^*-x}{x^*-x_0}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x^*-x_0}f(x^*),$$

а $\forall x^{**}<x_0$, $\forall x>x_0$

$$f(x_0)\le\frac{x-x_0}{x-x^{**}}f(x^{**})+\frac{x_0-x^{**}}{x-x^{**}}f(x).$$

З цих нерівностей дістаємо

$$\left(f(x_0)-\frac{x-x_0}{x-x^{**}}f(x^{**})\right)\frac{x-x^{**}}{x_0-x^{**}}\le f(x)\le\frac{x^*-x}{x^*-x_0}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x^*-x_0}f(x^*)\quad\forall x\in(x_0;x^*),$$

звідки за теоремою про границю проміжної змінної маємо $\lim\limits_{x\to x_{0+}}f(x)=f(x_0)$. Аналогічно доводимо, що $\lim\limits_{x\to x_{0-}}f(x)=f(x_0)$, тобто функція f неперервна в точці x_0, а отже, і на інтервалі $(a;b)$.

3. 13) Знайдемо другу похідну функції y:

$$y'=\sin(\ln x)+x\cos(\ln x)\frac{1}{x}=\sin(\ln x)+\cos(\ln x);$$

$$y''=\cos(\ln x)\frac{1}{x}-\sin(\ln x)\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\ln x\right)-\sin(\ln x)\right)=$$

$$=\frac{2}{x}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\ln x\right)\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{x}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\ln x\right).$$

Отже,

$$y''>0\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\pi}{4}-\ln x\right)>0\Leftrightarrow 2\pi n<\frac{\pi}{4}-\ln x<\pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{3\pi}{4}-2\pi n<\ln x<\frac{\pi}{4}-2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow e^{-\frac{3\pi}{4}-2\pi n}<x<e^{\frac{\pi}{4}-2\pi n},\ \ n\in\mathbf{Z}.$$

Так само

$$y'' < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - 2\pi n < \ln x < \frac{5\pi}{4} - 2\pi n \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{4} - 2\pi n} < x < e^{\frac{5\pi}{4} - 2\pi n}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Звідси випливає, що в інтервалах $\left(e^{-\frac{3\pi}{4} - 2\pi n};\ e^{\frac{\pi}{4} - 2\pi n}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$, функція f опукла вниз, а в інтервалах $\left(e^{\frac{\pi}{4} - 2\pi n};\ e^{\frac{5\pi}{4} - 2\pi n}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$, функція f опукла вгору. Точками перегину функції f є точки

$$x_n = e^{\frac{\pi}{4} + \pi n}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

4. 2) Оскільки $\forall t \in [0; 2\pi]$ $\varphi'(t) = -3a\cos^2 t \sin t$, а $\psi'(t) = 3a\sin^2 t\cos t$, то $\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 0, \pi, 2\pi\right\}$. Умови диференційовності параметрично заданої функції виконано у кожному з інтервалів $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ і $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, а тому $y'(x) = -\operatorname{tg} t$, де $t = \varphi^{-1}(x)$ і лежить в одному з названих інтервалів. Звідси

$$y''(x) = -\frac{1}{\cos^2 t} \cdot t'(x) = -\frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{-3a\cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3a} \cdot \frac{1}{\cos^4 t} \cdot \frac{1}{\sin t}.$$

Оскільки параметр $a > 0$, матимемо:

а) $y''(x) < 0 \Leftrightarrow \sin t < 0 \Leftrightarrow t \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right) \Leftrightarrow x \in (-a;\ 0)$ або $x \in (0;\ a)$, звідки на кожному з цих інтервалів функція, яку задано параметрично системою $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [\pi;\ 2\pi]$ опукла вгору;

б) $y''(x) > 0 \Leftrightarrow \sin t > 0 \Leftrightarrow t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right) \Leftrightarrow x \in (a;\ 0)$ або $x \in (0;\ -a)$, звідки на кожному з цих проміжків функція, яку задано параметрично системою $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0; \pi]$, опукла вниз.

Таким чином, з двох функцій, які задано параметрично системою рівнянь, кожна має по два проміжки опуклості і не має точок перегину.

5. 1) За критерієм опуклості функція f опукла вниз на інтервалі $(a; b)$, тобто $\forall x_1, x_2 \in (a;\ b)$: $x_1 < x_2$ має місце нерівність

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \quad \forall x \in (x_1; x_2).$$

Припустимо, що $\exists\, x^* \in (x_1; x_2)$:

$$f(x^*) \le \frac{x_2 - x^*}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x^* - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \Leftrightarrow \frac{f(x^*) - f(x_1)}{x^* - x_1} =$$

$$= \frac{f(x_2) - f(x^*)}{x_2 - x^*} \Leftrightarrow \frac{f'(c_1)(x^* - x_1)}{x^* - x_1} = \frac{f'(c_2)(x_2 - x^*)}{x_2 - x^*},$$

де $c_1 \in (x_1; x^*)$, $c_2 \in (x^*; x_2)$, причому за теоремою Лагранжа точки c_1 і c_2 існують. Таким чином, $f'(c_1) = f'(c_2)$, де $c_1 < c_2$. Проте $f''(x) > 0$ $\forall x \in (a; b)$, тому $f'(x)$ зростає на $(a; b)$ і $f'(c_1) < f'(c_2)$, якщо $c_1 < c_2$. Прийшли до протиріччя, зумовленого неправильним припущенням. Отже,

$$f(x) < \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \quad \forall x \in (x_1; x_2).$$

8. Функція визначена і має неперервні похідні до другого порядку включно на множині $\mathbf{R}$:

$$y' = a^2\left(a^2 - 2ax - x^2\right)/\left(a^2 + x^2\right)^2,$$

$$y'' = 2a^2\left(x^3 + 3ax^2 - 3a^2x - a^3\right)/\left(a^2 + x^2\right)^3.$$

Критичними точками функції $y = a^2(a + x)/\left(a^2 + x^2\right)$ за другою похідною є $x_1 = a$, $x_2 = a\left(\sqrt{3} - 2\right)$ і $x_3 = -a\left(\sqrt{3} + 2\right)$. Вони розбивають множину $\mathbf{R}$ на чотири проміжки, у кожному з яких y'', як неперервна функція, зберігає знак. Залежно від знака параметра a точки x_i, i = 1, 2, 3, розміщуються на числовій прямій так: $a < a\left(\sqrt{3} - 2\right) < -a\left(\sqrt{3} + 2\right)$, якщо $a < 0$, і $-a\left(\sqrt{3} + 2\right) < a\left(\sqrt{3} - 2\right) < a$, якщо $a > 0$. Якщо y'' подати у вигляді

$$y'' = 2a^2(x - a)\left(x - a\left(\sqrt{3} - 2\right)\right)\left(x + a\left(\sqrt{3} + 2\right)\right)/\left(a^2 + x^2\right)^3,$$

то неважко переконатися, що:

1) коли $a < 0$, то $y'' < 0$ в інтервалах $(-\infty; a)$ і $\left(a\left(\sqrt{3} - 2\right);\ -a\left(\sqrt{3} + 2\right)\right)$ (функція опукла вгору) і $y'' > 0$ в інтервалах $\left(a; a\left(\sqrt{3} - 2\right)\right)$ і $\left(-a\left(\sqrt{3} + 2\right);\ +\infty\right)$ (функція опукла вниз);

2) коли $a > 0$, то $y'' < 0$ в інтервалах $\left(-\infty;\ -a\left(\sqrt{3} + 2\right)\right)$ і $\left(a\left(\sqrt{3} - 2\right);\ a\right)$ (функція опукла вгору) і $y'' > 0$ в інтервалах $\left(-a\left(\sqrt{3} + 2\right);\ a\left(\sqrt{3} - 2\right)\right)$ і $(a; +\infty)$ (функція опукла вниз).

Отже, в обох випадках при проходженні через критичні точки друга похідна змінює знак. При цьому $y(x_1) = a$, $y(x_2) = a\left(\sqrt{3} + 1\right)/4$ і $y(x_3) = -a\left(\sqrt{3} - 1\right)/4$. Це означає, що точки $A(a; a)$, $B\left(a\left(\sqrt{3} - 2\right);\ a\left(\sqrt{3} + 1\right)/4\right)$ і $C\left(-a\left(\sqrt{3} + 2\right);\ -a\left(\sqrt{3} - 1\right)/4\right)$ є точками перегину графіка заданої функції. Неважко переконатися, що визначник

$$\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ a\left(\sqrt{3} - 2\right) & a\left(\sqrt{3} + 1\right)/4 & 1 \\ -a\left(\sqrt{3} + 2\right) & -a\left(\sqrt{3} - 1\right)/4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

тобто виконується необхідна і достатня умова того, щоб точки A, B і C лежали на одній прямій.

17. Якщо в нерівності Єнсена покласти $f(x) = x^{\alpha}$, $x > 0$, $\alpha > 1$ (ця функція опукла вниз, оскільки $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha - 2} > 0$, коли $x > 0$), то матимемо

$$\left(\sum_{k=1}^{n} q_k x_k\right)^{\alpha} \le \sum_{k=1}^{n} q_k x_k^{\alpha} \quad \forall x_k > 0,\ q_k > 0:\ \sum_{k=1}^{n} q_k = 1.$$

Нехай $p_k > 0 \quad \forall k$. Позначимо $p_k \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right) = q_k$. Тоді $\sum_{k=1}^{n} q_k = 1$, а тому

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k} x_k\right)^{\alpha} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k} x_k^{\alpha} \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right)^{\alpha} \le \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^{\alpha} \quad \forall p_k > 0,\ x_k > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n}\left(p_k^{\frac{1}{\alpha}} x_k\right) p_k^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right) \le \left(\sum_{k=1}^{n}\left(p_k^{\frac{1}{\alpha}} x_k\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\sum_{k=1}^{n}\left(p_k^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}. \qquad (1)$$

Оскільки $a_k = p_k^{\frac{1}{\alpha}} x_k$ і $b_k = p_k^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \Leftrightarrow p_k = b_k^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ і $x_k = a_k / b_k^{\frac{1}{\alpha-1}}$, то нерівність Гельдера рівносильна нерівності (1).

§ 6.6. Повне дослідження функції та побудова її графіка

Повне дослідження функції та побудову її графіка можна здійснювати за схемою (алгоритмом):

1) знайти область визначення функції;

2) дослідити функцію на парність (непарність) та періодичність;

3) знайти проміжки неперервності, границі функції у межових точках області визначення та встановити характер точок розриву, якщо вони є;

4) знайти асимптоти графіка функції та зобразити їх;

5) знайти точки екстремуму та проміжки монотонності функції, зобразити точки кривої, що відповідають точкам екстремуму;

6) знайти точки перегину та проміжки опуклості функції, зобразити точки перегину графіка функції;

7) знайти і зобразити деякі точки графіка функції, наприклад точки перетину графіка з осями координат;

8) побудувати графік функції.

Вправи

1. Провести повне дослідження та побудувати графіки основних елементарних функцій.

2. Провести повне дослідження та побудувати графіки функцій:

1) а) $y = x(x+2)$, б) $y = x(2-x)$, в) $y = x^2 + 2x + 3$, г) $y = ax^2 + bx + c$,

д) $y = \left|x^2 + 2x\right|$, е) $y = \left|2x - x^2\right|$, є) $y = \left|2 + x - x^2\right|$, ж) $y = \left|ax^2 + bx + c\right|$;

2) а) $y=\frac{1}{2-x}$, б) $y=\frac{2x+1}{x}$, в) $y=\frac{x}{x-3}$, г) $y=\frac{3-2x}{2-x}$, д) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$;

3) а) $y=x(x-1)^2$, б) $y=(x+4)^2(x-5)$, в) $y=(x+2)^2(x-1)^3$;

4) а) $y=\frac{1}{1+x^2}$, б) $y=\frac{1}{(x+1)^3}$, в) $y=x+\frac{1}{x}$, г) $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$, д) $y=\frac{x^3}{3-x^2}$;

5) а) $y=1-\sqrt[3]{(x+4)^5}$, б) $y=x^2+\sqrt{x}$, в) $y=(x-3)\sqrt{x}$,

г) $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2-1}$;

6) а) $y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, б) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, в) $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}$, г) $y=\sqrt{\frac{x^3-2}{3x}}$;

7) а) $y=\frac{|x|}{x^2-1}$, б) $y=\frac{4|x|}{(x+1)^2}$, в) $y=\frac{|1+x|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$;

8) $y=\sqrt{x^2}\left(4-x^2\right)^2$;

9) а) $y=x\mathrm{e}^{-x}$, б) $y=x+\mathrm{e}^{-x}$, в) $y=\mathrm{e}^{-x^2}$, г) $y=2^{x(x-2)}$, д) $y=x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,

е) $y=\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x^2}}$, є) $y=\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}$;

10) а) $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$, б) $y=\frac{x^3}{\mathrm{e}^x}$, в) $y=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\mathrm{e}^x}$;

11) а) $y=x\ln x$, б)• $y=x^2\ln x$, в) $y=x\ln^2 x$, г) $y=\ln\left(x^2-1\right)$,

д) $y=x-\ln(x+1)$, е) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$;

12) а) $y=\frac{x}{\ln x}$, б) $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, в) $y=\frac{\ln x}{x}+x$;

13) а) $y=x+\sin x$, б) $y=x-\sin x$, в) $y=x\sin x$, г) $y=x\cos x$;

14) $y=\sin x+\sin 2x$; 15) $y=\sin^3 x+\cos^3 x$; 16) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$;

17) $y=\sin x\sin 3x$; 18) $y=2x-\operatorname{tg} x$; 19) $y=x+\operatorname{arctg} x$; 20) $y=x\operatorname{arctg} x$;

21) $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$; 22) $y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$; 23) $y=x^x$; 24) $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

25) $y=\frac{\sin x}{x}$; 26) $y=\sin\frac{1}{x}$; 27) $y=\frac{4x^3}{x^2-9}$; 28) $y=\frac{x^3-8}{(x-1)^3}$;

29) $y=\dfrac{x^3-10}{(x-4)^3}$;   30) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$;   31)• $y=\dfrac{x^3}{4-x^2}$;

32) $y=\cos 2x-2\sin x$;   33) $y=\sin x\sin\dfrac{x}{2}$;   34) $y=\sin^2 x+\cos x$;

35) $y=\cos x\cos 2x$;   36) $y=\cos 3x-3\cos x$;   37) $y=\operatorname{arctg} x^2$;

38) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x^2}$;   39) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;   40)• $y=\dfrac{\sin x}{\cos 2x}$;

41) $y=\dfrac{\cos 2x}{\cos x}$;   42) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$;   43) $y=(x-2)e^{-\frac{1}{x}}$;

44) $y=\cos^3 x-\sin^3 x$;   45)• $y=\arcsin\dfrac{|1-x^2|}{1+x^2}$;   46) $y=\arccos\dfrac{2|x|}{1+x^2}$;

47) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$;   48) $y=\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{1}{2}\sin x\right)$;   49) $y=\arcsin\left(\sin^2 x\right)$;

50) $y=\arccos\left(\cos^2 x\right)$;   51) $y=2\sin x-\cos 2x$;   52) $y=\dfrac{\cos^2 x}{2+\cos x}$.

3. Дослідити параметрично задані функції та побудувати їхні графіки (тобто побудувати параметрично задані криві):

1) $x=\dfrac{(t+1)^2}{4}$, $y=\dfrac{(t-1)^2}{4}$;   2) $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$;

3) $x=a\cos t$, $y=b\sin t$;   4) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$;

5) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$;   6) $x=t+e^{-t}$, $y=2t+e^{-2t}$.

4. Побудувати криві, що задані у полярній системі координат:

1) $r=a+b\cos\varphi$, $0<a\le b$;   2) $r=a\sin 3\varphi$, $a>0$;

3) $r=a\varphi$, $a>0$;   4) $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $a>0$;

5) $r=a(1+\cos\varphi)$, $a>0$;   6) $r=2a(2+\cos\varphi)$, $a>0$.

5. Знайти число дійсних коренів рівняння:

1) $x\ln x=a$; 2) $x^3\ln|x|=a$;   3) $x-\ln x=a$;   4) $x^5-80x=a$;   5) $e^x=ax^3$;

6) $x^3\ln^2 x=a$;   7) $2x^2-x^4+1=a$;   8) $x=a(\ln x-3)$;

9) $x^4-32x^2-26=a$;   10) $\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3=a$.

6. Фірма виготовляє деяку продукцію x. Провести повне дослідження та побудувати графік функції прибутку $P(x)=D(x)-V(x)$, якщо функція доходу $D(x)=80x-2x^2$, а функція витрат $V(x)=x^3-13x^2+111x-21$ (ум. од.). Користуючись цим графіком, пояснити з економічної точки зору здобуті результати та визначити проміжок рентабельності фірми (якщо $P(x)>0$).

Зразки розв'язування задач

2. 11) б) Застосуємо вказаний вище алгоритм для дослідження даної функції.

1) Областю визначення функції $y = x^2 \ln x$ є множина $D = (0; +\infty)$.

2) Функція ні парна, ні непарна; не є періодичною.

3) Функція неперервна в області свого визначення, тому не має точок розриву. Знайдемо граничні значення функції у межових точках області визначення: $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} x^2 \ln x = 0$ (тут скористались правилом Лопіталя) і $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \ln x = +\infty$.

4) Вертикальних асимптот немає, бо функція неперервна на множині $D(f) = (0; +\infty)$ і $\lim\limits_{x \to 0+} x^2 \ln x = 0$; похилі асимптоти також відсутні, бо $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$.

5) Похідна $y' = 2x \ln x + x$ визначена і неперервна в області визначення функції, тому її критичні точки знайдемо з умови $y' = 0$, тобто $2x \ln x + x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. В інтервалі $\left(0; \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ функція спадає, бо $y' < 0$, а в інтервалі $\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$ — зростає, бо $y' > 0$.

Точка $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ є точкою мінімуму даної функції, причому $y_{\min} = y\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2e}$.

6) $y'' = 2 \ln x + 3$, тому $y'' = 0$, якщо $x = \dfrac{1}{e\sqrt{e}}$. В інтервалі $\left(0; \dfrac{1}{e\sqrt{e}}\right)$ маємо $y''(x) < 0$, отже, функція опукла вгору, а в інтервалі $\left(\dfrac{1}{e\sqrt{e}}; +\infty\right)$ $y''(x) > 0$, тому функція опукла вниз. Точка $x_1 = \dfrac{1}{e\sqrt{e}}$ — точка перегину графіка функції і $y(x_1) = -\dfrac{3}{2}e^{-3}$.

7) Оскільки $y(1) = 0$, то графік функції перетинає вісь OX у точці $(1, 0)$. Допоміжні точки графіка: $\left(e,\ e^2\right)$ і $\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}, -\dfrac{1}{e^2}\right)$.

8) Враховуючи проведене дослідження, будуємо графік функції (зробіть це самостійно).

31) Область визначення функції $y = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$ — множина $D(y) = \mathbf{R} \setminus \{-2; 2\}$. Функція непарна, бо $D(y)$ є симетричною відносно точки $x = 0$ і $y(-x) = -y(x)$. Функція не є періодичною. Точка $x = 0$ є нулем функції: $y(0) = 0$.

Оскільки функція непарна, то її графік симетричний відносно початку координат, тому достатньо провести дослідження лише на проміжку $[0; +\infty)$.

У точці $x = 2$ функція має нескінченний розрив, тому пряма $x = 2$ є вертикальною асимптотою. Функція неперервна на проміжках $[0; 2)$ і $(2; +\infty)$. Знайдемо границі функції у межових точках області визначення для $x > 0$:

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 2+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Точка $x = 2$ розбиває проміжок $(0; +\infty)$ на два інтервали, у кожному з яких функція зберігає знак. Якщо $x \in (0; 2)$, то $y > 0$, а якщо $x \in (2; +\infty)$, то $y < 0$.

Знайдемо похилу асимптоту $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = -1;\ b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{4-x^2} = 0.$$

Отже, $y = -x$ є похилою асимптотою графіка функції.

Похідна $y' = \dfrac{x^2\left(12-x^2\right)}{\left(4-x^2\right)^2}$ неперервна в області визначення функції. Прирівнявши її до нуля, знайдемо критичні (стаціонарні) точки даної функції. Проміжку $[0;\ +\infty)$ належать дві критичні точки $x_1 = 0$ і $x_2 = 2\sqrt{3}$. Перша з них не може бути точкою екстремуму, бо функція непарна. Дослідимо поведінку функції у точці x_2.

Враховуючи точку розриву $x = 2$, розглянемо три інтервали $(0; 2)$, $\left(2; 2\sqrt{3}\right)$ і $\left(2\sqrt{3}; +\infty\right)$. На перших двох маємо $y' > 0$, тому функція зростає, а в інтервалі $\left(2\sqrt{3}; +\infty\right)$ маємо $y' < 0$, тобто функція спадає. Отже, точка $x_2 = 2\sqrt{3}$ є точкою максимуму функції, причому $y_{\max} = y\left(2\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3} \approx -5{,}1$.

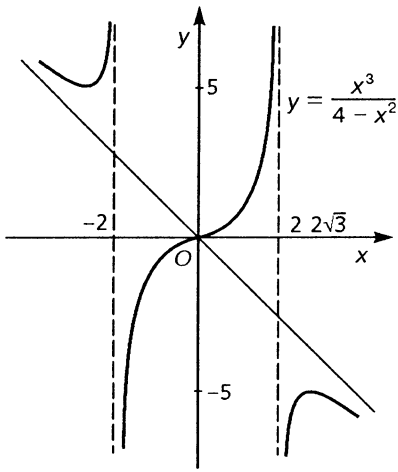


Рис. 10

Друга похідна $y'' = \dfrac{8x\left(x^2+12\right)}{\left(4-x^2\right)^3}$ також є неперервною в області визначення, причому $y'' = 0$ лише в одній точці $x_1 = 0$. Оскільки функція непарна, то точка $(0;\ 0)$ є точкою перегину графіка функції. В інтервалі $(0;\ 2)$ маємо $y'' > 0$, тому функція опукла вниз, а в інтервалі $(2; +\infty)$, навпаки, $y'' < 0$, тобто функція опукла вгору.

За результатами досліджень будуємо графік функції для $x \ge 0$, а потім симетрично відобразимо його відносно початку координат (рис. 10).

40) Функція $y = \dfrac{\sin x}{\cos 2x}$ визначена і неперервна на множині $D(y) = \mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2};\quad n \in \mathbf{Z}\right\}$ (у точках $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$, знаменник $\cos 2x$ дорівнює нулю), непарна, бо

$$y(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-2x)} = -\frac{\sin x}{\cos 2x} = -y(x)\quad \forall x \in D(y),$$

періодична з періодом 2π:

$$y(x+2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi)}{\cos 2(x+2\pi)} = \frac{\sin x}{\cos 2x} = y(x).$$

Оскільки функція непарна, то її графік симетричний відносно початку координат, і тому достатньо дослідити її на відрізку довжини π, наприклад на проміжку $[0;\ \pi]$. Вісь Ox графік функції перетинає в точках $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ (нулі чисельника $\sin x$), а вісь Oy — у точці нуль: $y(0) = 0$.

Знайдемо границі функції у точках розриву $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{3\pi}{4}$. Маємо

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\sin x}{\cos 2x}=+\infty,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}\frac{\sin x}{\cos 2x}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}-}\frac{\sin x}{\cos 2x}=-\infty,\quad \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}+}\frac{\sin x}{\cos 2x}=+\infty,$$

бо $\sin x>0$ на $(0;\ \pi)$, а $\cos 2x>0$ на $\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$ і $\left(\frac{3\pi}{4};\ \pi\right)$ і $\cos 2x<0$ на $\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right)$.

Отже, точки $x=\frac{\pi}{4}$ і $x=\frac{3\pi}{4}$ є точками розриву другого роду, а прямі $x=\frac{\pi}{4}$ і $x=\frac{3\pi}{4}$ — вертикальними асимптотами. Інших асимптот на відрізку $[0;\pi]$ графік функції не має. Функція додатна, якщо $x\in\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$ і $x\in\left(\frac{3\pi}{4};\ \pi\right)$, і від'ємна на інтервалі $\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right)$.

Дослідимо функцію на екстремум на відрізку $[0;\pi]$. Її похідна

$$y'=\frac{\cos x\left(1+2\sin^2 x\right)}{\cos^2 2x}$$

визначена і неперервна для всіх $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}$. Прирівнюючи похідну до нуля, знаходимо критичні точки: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$. Відрізку $[0;\ \pi]$ належить лише одна з них, а саме $\frac{\pi}{2}$. Критична точка $\frac{\pi}{2}$ і точки розриву $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{3\pi}{4}$ розбивають інтервал $(0;\ \pi)$ на чотири інтервали. У кожному з цих інтервалів похідна не дорівнює нулю і, як неперервна функція, зберігає знак. Знак похідної збігається зі знаком $\cos x$, оскільки $1+2\sin^2 x$ і $\cos^2 2x$ додатні у цих інтервалах. Маємо:

$\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$	$y'>0$	$y\nearrow$
$\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$	$y'>0$	$y\nearrow$

$x=\frac{\pi}{2}$ — точка максимуму, $y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$

$\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{4}\right)$	$y'<0$	$y\searrow$
$\left(\frac{3\pi}{4};\ \pi\right)$	$y'<0$	$y\searrow$

Оскільки функція непарна, то, по-перше, прямі $x=-\frac{\pi}{4}$ і $x=-\frac{3\pi}{4}$ — вертикальні асимптоти графіка функції, по-друге, функція спадає в інтервалах $\left(-\pi;-\frac{3\pi}{4}\right)$ і $\left(-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{2}\right)$ і зростає в інтервалах $\left(-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right)$ і $\left(-\frac{\pi}{4};0\right)$, по-третє, $x=-\frac{\pi}{2}$ є точкою мінімуму функції, причому $y_{\min}=y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$, і нарешті, $y<0$ в інтервалах $\left(-\pi;-\frac{3\pi}{4}\right)$ і $\left(-\frac{\pi}{4};\ 0\right)$ та $y>0$ в інтервалі $\left(-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right)$.

Отже, функція $y=\dfrac{\sin x}{\cos 2x}$ зростає на проміжках $\left(-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{4}+2\pi k\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ -\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\right)$ і $\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$, і спадає на проміжках $\left(-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k;\ -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$ і $\left(\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k;\ \dfrac{5\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$. Прямі $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$, — вертикальні асимптоти. Екстремуми: $y_{\min}=y\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)=1$, $y_{\max}=y\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)=-1$, $k\in\mathbf{Z}$.

Дослідимо тепер функцію на опуклість і точки перегину. Для цього знаходимо другу похідну $y''=-\dfrac{\sin x}{\cos^3 2x}\left(4\cos^4 x-12\cos^2 x-3\right)$. Оскільки $4\cos^4 x-12\cos^2 x-3=\left(2\cos^2 x-3\right)^2-12<0$, то критичними точками другої похідної є нулі функції $\sin x$, тобто точки $x=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Критичні точки за другою похідною і точки розриву функції розбивають відрізок $[-\pi;\ \pi]$ на п'ять інтервалів, у кожному з яких друга похідна не дорівнює нулю, і, як неперервна функція, зберігає знак. Тому маємо:

$\left(-\pi;\ -\dfrac{3\pi}{4}\right)$	$y''<0$	$y\cap$	
$\left(-\dfrac{3\pi}{4};\ -\dfrac{\pi}{4}\right)$	$y''>0$	$y\cup$	
$\left(-\dfrac{\pi}{4};\ 0\right)$	$y''<0$	$y\cap$	
			$x=0$ — точка перегину, $y(0)=0$
$\left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$	$y''>0$	$y\cup$	
$\left(\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{3\pi}{4}\right)$	$y''<0$	$y\cap$	
$\left(\dfrac{3\pi}{4};\ \pi\right)$	$y''>0$	$y\cup$	
			$x=\pi$ — точка перегину, $y(\pi)=0$
$\left(\pi;\ \dfrac{5\pi}{4}\right)$	$y''<0$	$y\cap$	

Отже, функція $y=\dfrac{\sin x}{\cos 2x}$ опукла вгору в інтервалах $\left(-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k;\ 2\pi k\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi k;\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$ і $\left(\pi+2\pi k;\ \dfrac{5\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$, і вниз в інтервалах $\left(-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k;\ -\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\right)$, $\left(2\pi k;\ \dfrac{\pi}{4}+2\pi k\right)$ і $\left(\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k;\ \pi+2\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$. Точками перегину є точки πk, $k\in\mathbf{Z}$, причому $y(\pi k)=0$, $k\in\mathbf{Z}$. Графік функції зображено на рис. 11.

45) Функція $y=\arcsin\dfrac{\left|1-x^2\right|}{1+x^2}$ визначена і неперервна при всіх дійсних x. Вона неперіодична і парна. Тому досить дослідити її на проміжку $[0;+\infty)$. Графік функції перетинає вісь Oy у точці $\dfrac{\pi}{2}$, бо $y(0)=\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}$. Оскільки $\dfrac{\left|1-x^2\right|}{1+x^2}\geq 0$ для всіх $x\in(-\infty;\ +\infty)$, то $y\geq 0$ для тих самих x. Проте $\left|1-x^2\right|=0$ лише у двох точках $x_1=-1$ і $x_2=1$, тому і функція

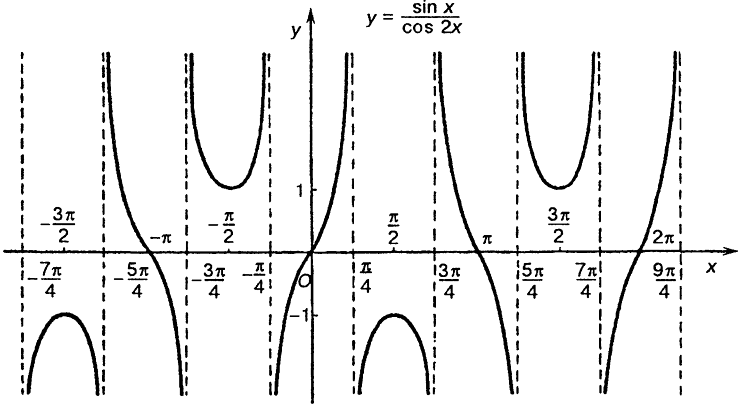


Рис. 11

$y = \arcsin\frac{|1-x^2|}{1+x^2}$ дорівнює нулю в цих точках. Отже, $y > 0$ для всіх $x \neq \pm 1$. Знайдемо границю функції при $x \to +\infty$. Маємо

$$\lim_{x\to+\infty} \arcsin\frac{x^2-1}{x^2+1} = \arcsin \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1} = \arcsin \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, пряма $y = \frac{\pi}{2}$ є горизонтальною асимптотою графіка функції при $x \to \pm\infty$ (функція парна). Інших асимптот графік функції не має.

Дослідимо функцію на монотонність і екстремум. Оскільки

$$y = \begin{cases} \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}, & \text{якщо } |x| \le 1, \\ \arcsin\frac{x^2-1}{1+x^2}, & \text{якщо } |x| > 1, \end{cases}$$

то

$$y' = \begin{cases} -\frac{2x}{|x|\left(1+x^2\right)}, & \text{якщо } |x| < 1, \\ \frac{2x}{|x|\left(1+x^2\right)}, & \text{якщо } |x| > 1. \end{cases}$$

Звідси випливає, що в точках $x = -1$, $x = 0$ і $x = 1$ похідної не існує, тому

$$y' = \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2}, & \text{якщо } 0 < x < 1, \quad y \searrow \\ \frac{2}{1+x^2}, & \text{якщо } 1 < x < +\infty. \quad y \nearrow \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x = 1 - \text{точка мінімуму} \\ y_{\min} = y(1) = 0 \end{array}$$

Враховуючи парність функції, дістаємо: функція спадає в інтервалах $(-\infty; -1)$ і $(0; 1)$ і зростає в інтервалах $(-1; 0)$ і $(1; +\infty)$; $y_{\min} = y(1) = y(-1) = 0$, $y_{\max} = y(0) = \frac{\pi}{2}$.

Друга похідна

$$y'' = \begin{cases} \dfrac{4x}{\left(1+x^2\right)^2}, & \text{якщо } x \in (0; 1), \\ -\dfrac{4x}{\left(1+x^2\right)^2}, & \text{якщо } x \in (1; +\infty). \end{cases}$$

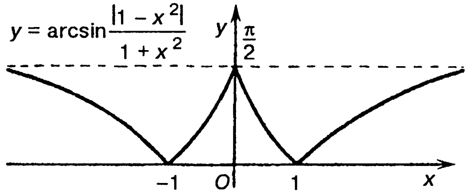


Рис. 12

Тобто в інтервалі (0; 1) функція опукла вниз $(y'' > 0)$, а в інтервалі $(1; +\infty)$ — вгору $(y'' < 0)$. Тоді і в інтервалах (–1; 0) і $(-\infty; -1)$ функція опукла відповідно вниз і вгору. Точок перегину немає. Тепер можна побудувати графік функції (рис. 12).

§ 6.7. Наближені методи обчислення коренів рівнянь

Нехай функція f неперервна разом з f' на відрізку $[a; b]$, $f(a)f(b) < 0$ і $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a; b]$. Тоді рівняння

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

має в інтервалі $(a; b)$ єдиний корінь c. Його можна обчислити із заздалегідь заданою точністю ε різними методами (вилки, хорд, дотичних, комбінованим методом дотичних і хорд, ітерацій тощо). Розглянемо три методи наближеного обчислення коренів рівняння (1) (хорд, дотичних і комбінований метод дотичних і хорд), припустивши додатково, що на $[a; b]$ існує і не дорівнює нулю f''.

Суть *методу хорд* розкривається таким алгоритмом:

1. Відокремити корені рівняння $f(x) = 0$, тобто відшукати проміжки $(a; b)$, у кожному з яких міститься один і лише один корінь рівняння, та задати точність ε, з якою їх треба підрахувати.

2. Обчислити значення $z = f(b)f''(b)$.

3. Перевірити виконання умови $z > 0$: якщо вона виконується, то перейти до п. 5, інакше до п. 4.

4. Покласти $u = b$, $v = a$, перейти до п. 6.

5. Покласти $u = a$, $v = b$.

6. Обчислити значення $h(u) = \dfrac{f(u)(v-u)}{f(v) - f(u)}$.

7. Обчислити значення $u = u - h(u)$.

8. Перевірити виконання умови $|h(u)| < \varepsilon$: якщо вона виконується, то перейти до п. 9, інакше до п. 6.

9. Процес обчислень припинити: u є наближеним значенням кореня c рівняння (1) з точністю до ε.

У цьому алгоритмі змінна v виконує роль нерухомого кінця відрізка $[a; b]$, а u — рухомого, яка в процесі обчислень наближається до кореня c

рівняння з недостачею, якщо умова $f(b)f''(b) > 0$ виконується, або з надлишком, якщо умова $f(b)f''(b) > 0$ не виконується.

Суть *методу дотичних* розкривається таким алгоритмом:

1. Задати точність ε, з якою треба обчислити ізольований на відрізку $[a; b]$ єдиний корінь рівняння (1).

2. Обчислити значення величини $z = f(b)f''(b)$.

3. Перевірити виконання умови $z > 0$: якщо вона виконується, то перейти до п. 5, інакше до п. 4.

4. Покласти $v = a$, перейти до п. 6.

5. Покласти $v = b$.

6. Обчислити значення $r(v) = \dfrac{f(v)}{f'(v)}$.

7. Обчислити значення $v = v - r(v)$.

8. Перевірити виконання умови $|r(v)| < \varepsilon$: якщо вона виконується, то перейти до п. 9, інакше до п. 6.

9. Процес обчислень припинити: v є наближеним значенням кореня c рівняння (1) з точністю до ε.

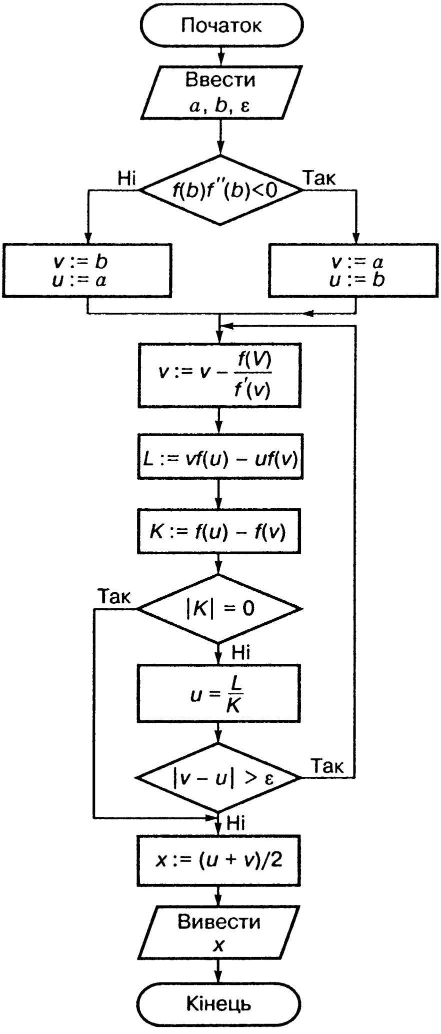


Рис. 13

У цьому алгоритмі змінна v в процесі обчислень наближається до кореня c рівняння (1) з надлишком (справа), якщо умова $f(b)f''(b) > 0$ виконується, або з недостачею, якщо умова $f(b)f''(b) > 0$ не виконується.

Суть *комбінованого методу дотичних і хорд* наближеного обчислення ізольованого кореня рівняння (1) розкривається алгоритмом, графічне зображення якого подано на рис. 13. У цьому алгоритмі змінні u і v дають наближення до кореня c рівняння (1) відповідно за методами хорд і дотичних (рис. 14), причому на кожному кроці спочатку застосовують метод дотичних, а потім хорд. Одночасне використання обох методів на кожному кроці дає змогу шуканий корінь рівняння (1) взяти у вилку і звужувати її до досягнення заздалегідь заданої точності ε. Послідовні двосторонні наближення до шуканого кореня рівняння (1) обчислюють до виконання умови $|u-v|<\varepsilon$. Якщо ця умова виконується, то за наближене значення кореня c беруть півсуму двосторонніх наближень.

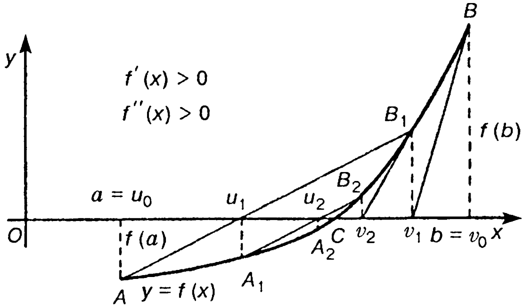


Рис. 14

Мовою BASIC програма набуває такого вигляду:

```
 10 PRINT «Розв'язання рівняння f (x) = 0 комбінованим методом»
 20 PRINT «дотичних і хорд»
 30 INPUT «Ввести лівий кінець відрізка ізоляції кореня A=» A
 40 INPUT «Ввести правий кінець відрізка ізоляції кореня B=» B
 50 INPUT «Ввести точність обчислення кореня EPS=» EPS
 60 X = B: GOSUB 220
 70 Z = F: X = B: GOSUB 240
 80 Z = Z*F2
 90 IF Z<0 THEN 110
100 U = A: V = B: GOTO 120
110 U = B: V = A
120 X = V: GOSUB 220
130 Y = F: X = V: GOSUB 230
140 D = Y/F1: V = V–D
150 X = U: GOSUB 220
160 P = F: M = V*P: X = V: COSUB 220
170 Q = F: N = U*Q: L = M–N: K = P–Q
180 IF ABS(K) = 0 THEN 210
190 U = L/K: R = V–U
200 IF ABS(R)>EPS THEN 120
210 X = (U+V)/2: PRINT «Корінь рівняння X=» X:  GOTO 30
220 F =                                          : RETURN
230 F1 =                                         : RETURN
240 F2 =                                         : RETURN: END
```

Для відокремлення коренів рівняння (1) доцільно побудувати ескіз графіка функції f, щоб наближено визначити точки перетину його з віссю Ox. Часто рівняння (1) замінюють рівносильним рівнянням $\varphi(x)=\psi(x)$, будують графіки функцій φ і ψ (вони здебільшого простіші за функцію f) і знаходять наближено абсциси точок перетину цих графіків. Іноді обмежуються знаходженням знаків функції f в окремих точках області її визначення, вибір яких обумовлено особливостями функції f.

Вправи

1. Методом хорд з точністю до 10^{-3} знайти наближені значення коренів рівнянь:

1) $x^3+2x-8=0$; 2) $x^3-9x+6=0$; 3) $x\lg x=1$;

4) $e^x=-x$; 5) $2\operatorname{tg}x=x,\ x\in[0;\ 2\pi]$; 6) $x^2=2\cos x$.

2. Методом дотичних з точністю до 10^{-3} обчислити наближені значення коренів рівнянь:

1) $x^3-8x+2=0$; 2) $x^3-12x+5=0$; 3) $\ln x=\operatorname{arctg}x$; 4) $x^4-2x-2=0$;

5) $0{,}538\sin x=x-1$; 6) $\cos x=\operatorname{tg}x$ (найменший додатний).

3. Методом дотичних з точністю до 10^{-6} обчислити наближені значення коренів рівнянь:

1) $2\sqrt{x}-3\cos\dfrac{\pi x}{2}=0$; 2) $\log_3\left(x^3-8\right)=4-x$.

4. Комбінованим методом дотичних і хорд з точністю до 10^{-6} обчислити наближені значення коренів рівнянь:

1) $x^3-7x+3=0$; 2) $x^4-x-1=0$; 3) $x-2\sin x=0$; 4) $\cos x=x^2$;

5) $x\lg x=2$; 6) $e^x+x+1=0$; 7) $\operatorname{tg}x=2x,\ x\in[0;2\pi]$;

8)• $\operatorname{ctg}x=\dfrac{2-x^2}{2x},\ x\in(0;2\pi)$; 9) $e^{-x}=\arccos x$;

10) $\operatorname{arctg}x-x^2+x+2=0$; 11) $\lg x=\dfrac{2}{x^2}$; 12) $\ln^2 x=4-x^2$;

13) $\operatorname{arcctg}x=e^x$; 14) $2\ln(x-2)-x^2+4x+1=0$; 15) $\ln x=\dfrac{1}{x}$;

16) $x^3+3x+5=0$; 17) $\ln(1+x)=\dfrac{2x}{1+x}$; 18) $\arcsin x+2x^2-2x-0{,}5=0$.

Зразки розв'язування задач

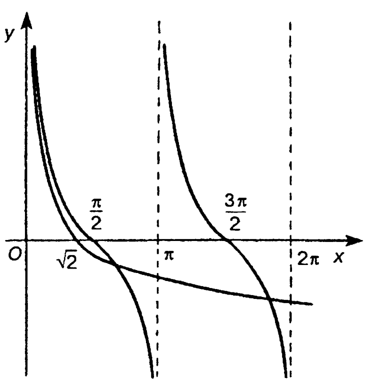


Рис. 15

4. 8) Побудувавши графіки функцій $\varphi(x)=\operatorname{ctg}x$ і $\psi(x)=\dfrac{2-x^2}{2x}$ (рис. 15), помічаємо, що задане рівняння на проміжку $(0;\ 2\pi)$ має два корені: один в інтервалі $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ і другий в інтервалі $\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$. Обчислюючи значення функції $f(x)=\operatorname{ctg}x+\dfrac{x^2-2}{2x}$ в окремих точках із зазначених інтервалів, їх можна звузити відповідно до інтервалів (2; 2,5) і (5,8; 6). Тоді для функції f і її похідних

$$f'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}\ \text{ і }\ f''(x)=2\left(\frac{\cos x}{\sin^3 x}-\frac{1}{x^3}\right)$$

маємо:

в інтервалі (2; 2,5) $f'(x)<0$, $f''(x)<0$ і $f(2,5)\approx -0,49<0$, тому $v=2,5$ і $u=2$;

в інтервалі (5,8; 6) $f'(x)<0$, $f''(x)<0$ і $f(6)\approx -0,603<0$, тому $v=6$ і $u=5,8$.

Що саме так програма визначила початкове наближення для методу дотичних і методу хорд, переконують результати обчислень (лівий стовпець — за методом дотичних, правий — за методом хорд):

$2,5>x>2$		$6>x>5,8$	
2,2708006	2,0604729	5,9508971	5,9359334
2,1257844	2,080237	5,9406997	5,9403653
2,0842945	2,0815705	5,9403702	5,9403698
2,0815866	2,0815758		
2,0815759	2,0815760		
$c=2,081576$		$c=5,940370$	

З точністю до 10^{-6} корені рівняння дорівнюють 2,081576 і 5,940370. Всі проміжні обчислення виконувалися з однією запасною цифрою, яку при округленні відкинуто.

§ 6.8. Формула Тейлора

Нехай функція f має в точці x_0 скінченну похідну n-го порядку. Тоді многочлен

$$P_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

називають *многочленом Тейлора* функції f в околі точки x_0 або многочленом Тейлора функції f за степенями $(x-x_0)$. При цьому рівність

$$f(x)=P_n(f,x)+R_n(f,x),$$

де $R_n(f,x):=f(x)-P_n(f,x)$, називають *формулою Тейлора* для функції f в околі точки x_0, а $R_n(f,x)$ називають *додатковим* (або *залишковим*) *членом формули Тейлора*.

Якщо $f^{(n)}(x_0)$ — скінченна похідна, то $R_n(f,x)=o\left((x-x_0)^n\right)$, $x\to x_0$, є *залишковим членом формули Тейлора в формі Пеано*, а сама формула Тейлора набирає вигляду

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right),\ \ x\to x_0.$$

Якщо існує похідна $f^{(n+1)}(x)$ $\forall x\in(x_0;\beta)$, а $f^{(n)}$ — неперервна на відрізку $[x_0;\beta]$, то $\exists\theta=\theta(x,n)\in(0;1)$ та $\theta_1=\theta_1(x,n)\in(0;1)$ такі, що

$$R_n(f,x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad\forall x\in[x_0;\beta]$$

— *залишковий член формули Тейлора в формі Лагранжа* і

$$R_n(f,x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta_1(x-x_0))}{n!}(1-\theta_1)^n(x-x_0)^{n+1}\quad \forall x\in[x_0;\beta]$$

— *залишковий член формули Тейлора в формі Коші.*

Ці твердження справджуються також і тоді, коли в них $(x_0;\beta)$ і $[x_0;\beta]$ замінити відповідно на $(\alpha;\ x_0)$ і $[\alpha;\ x_0]$.

Якщо у формулі Тейлора покласти $x_0=0$, то дістанемо *формулу Маклорена*:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\ldots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+R_n(f,x),$$

причому залишковий член набирає вигляду:

у формі Пеано

$$R_n(f,x)=o\left(x^n\right),$$

у формі Лагранжа

$$R_n(f,x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1},\quad 0<\theta<1,$$

у формі Коші

$$R_n(f,x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\theta_1 x)(1-\theta_1)^n x^{n+1},\ 0<\theta_1<1.$$

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) якщо функція f неперервна в околі точки x_0, то для неї можна записати формулу Тейлора за степенями $(x-x_0)$ при будь-якому $n\in\mathbf{N}$;

2) твердження, обернене до 1), є правильним;

3) формула Лагранжа є формулою Тейлора з додатковим членом у формі Лагранжа при $n=1$;

4) формула Тейлора з додатковим членом у формі Пеано дає змогу оцінити похибку наближення $f(x)\approx P_n(f,x)$;

5)• якщо $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M\quad \forall x\in[x_0;\ x_0+\beta]$, то абсолютна похибка наближення $f(x)\approx P_n(f,\ x)$ не перевищує $\dfrac{M\beta^{n+1}}{(n+1)!}\quad \forall x\in[x_0;\ x_0+\beta]$;

6) якщо f — многочлен, то він збігається з деяким своїм многочленом Тейлора;

7) якщо f збігається з будь-яким своїм многочленом Тейлора, то $f(x)\equiv$ $\equiv \text{const}$?

2. Записати формули Маклорена з додатковим членом у формі Пеано, Лагранжа і Коші за степенями x до члена з x^n для функцій:

1) $y=e^x$; 2) $y=\sin x$; 3)• $y=(1+x)^\alpha$;

4) $y=\cos x$; 5) $y=\ln(1+x)$; 6) $y=\operatorname{arctg} x$.

3. Оцінити абсолютну похибку наближених формул:

1) $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, $x \in [0; 1]$; 2) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$, $x \in [-0{,}5; 0{,}5]$;

3) $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$, $x \in [-0{,}1; 0{,}1]$; 4)• $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, $x \in [0; 1]$;

5) $\arcsin x \approx x + \frac{x^3}{6}$, $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

4. Записати формулу Тейлора для функції f за степенями $(x - x_0)$ до члена з $(x - x_0)^n$:

1) $y = x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 5x + 6$, $x_0 = 1$, $n \geq 4$; 2) $y = x^6$, $x_0 = -1$, $n \geq 6$;

3) $y = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x + 1$, $x_0 = 2$, $n \geq 5$; 4) $y = e^x$, $x_0 = a$, $n \in \mathbf{N}$;

5) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $n = 3$; 6)• $y = x^x - 1$, $x_0 = 1$, $n = 3$;

7) $y = (1+x)^x - 1$, $x_0 = 0$, $n = 2$; 8) $y = \cos^2 x + xe^{x^2}$, $x_0 = 0$, $n = 4$;

9) $y = x\sqrt{1+x} + \sin x \ln\left(1 + x^2\right)$, $x_0 = 0$, $n = 4$; 10) $y = \ln \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $n = 6$;

11) $y = \left(e^x - 1\right) / \left(e^x + 1\right)$, $x_0 = 0$, $n = 5$; 12) $y = \ln\left(1 + e^{-x}\right)$, $x_0 = 0$, $n = 4$.

5. Використовуючи формулу Маклорена з додатковим членом у формі Пеано, знайти границі:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right)$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$; 5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$;

6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$; 7)• $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^x - x}{(x-1)^2}$; 8) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 + x^2} \cos x}{\sin^4 x}$;

9) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$; 10) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{\ln\left(1 + x^2\right)}$; 11) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln\left(1 + x^2\right)}{\cos x - e^{-x^2}}$;

12) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$; 13) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x\left(e^x + 1\right)}$; 14) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$;

15) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(ax - 1)\left(e^{ax} - 1\right) + ax}{x\left(e^{ax} - 1\right)}$; 16) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^{\ln(1+x)} - 1}{\ln(1+x)}$.

6. Нехай $f(x) = 1 + kx + o(x)$, $x \to 0$. Довести, що $\lim\limits_{x \to 0} (f(x))^{\frac{1}{x}} = e^k$.

7. Нехай похідна $f^{(n+1)}$ неперервна на відрізку $[x_0;\ \beta]$. Тоді

$$f(x_0+\alpha)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\alpha+\frac{f''(x_0)}{2!}\alpha^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\alpha^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x_0+\theta\alpha)}{n!}\alpha^n,$$

де $0<\theta=\theta(n,\ \alpha)<1$. Довести, що $\lim\limits_{\alpha\to 0}\theta(n,\ \alpha)=\dfrac{1}{n+1}$.

8.• Нехай f — двічі диференційовна функція в інтервалі $(-\infty;+\infty)$ і $f(0)=f'(0)=0$. Довести, що $f(x)=0\ \ \forall x\in\mathbf{R}\Leftrightarrow f''(x)+f(x)=0\ \ \forall x\in\mathbf{R}$.

9. Використовуючи формулу Маклорена, довести такі нерівності:

1) $x-\dfrac{x^3}{3!}<\sin x<x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$; 2) $1-\dfrac{x^2}{2!}<\cos x<1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}$;

3) $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$, $x>0$;

4)• $1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{9}<\sqrt[3]{1+x}<1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{5}{81}x^3$, $x>0$;

5) $x-\dfrac{x^3}{3}<\operatorname{arctg}x<x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}$; 6) $1+\dfrac{x}{7}-\dfrac{3}{49}x^2<\sqrt[7]{1+x}<1+\dfrac{x}{7}$.

10. Скільки членів треба взяти у формулі Маклорена для заданої функції, щоб дістати многочлен, що наближає цю функцію на відрізку $[a;\ b]$ з точністю до заданого ε:

1) $y=e^x$, $x\in[-1;\ 1]$, $\varepsilon=0{,}005$ і $\varepsilon=0{,}00005$;

2) $y=\arcsin x$, $x\in[0;\ 1/2]$, $\varepsilon=0{,}005$;

3)• $y=\sin x$, $x\in[-1/2;\ 1/2]$, $\varepsilon=0{,}000005$;

4) $y=\cos x$, $x\in[-1;\ 1]$, $\varepsilon=0{,}00005$;

5) $y=\operatorname{arctg}x$, $x\in[-0{,}6;\ 0{,}6]$, $\varepsilon=0{,}005$;

6) $y=\sqrt[5]{1+x}$, $x\in[0;\ 1/2]$, $\varepsilon=0{,}0005$;

7) $y=\operatorname{tg}x$, $x\in[-1/2;\ 1/2]$, $\varepsilon=0{,}005$;

8) $y=\ln(1+x)$, $x\in[0;\ 1/2]$, $\varepsilon=0{,}0005$?

11. Для яких значень x дані наближені формули мають похибку, яка менша від даного ε:

1) $\sin x\approx x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$, $\varepsilon=0{,}00005$;

2) $\cos x\approx 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}$, $\varepsilon=0{,}00005$;

3) $\ln(1+x)\approx x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^6}{6}+\dfrac{x^7}{7}-\dfrac{x^8}{8}+\dfrac{x^9}{9}$, $\varepsilon=0{,}005$;

4) $\operatorname{arctg} x \approx x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$, $\varepsilon=0,0005$;

5) $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5}{128}x^4$, $\varepsilon=0,0005$;

6) $\arcsin x \approx x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5$, $\varepsilon=0,005$;

7) $\sqrt[7]{1+x} \approx 1+\frac{x}{7}-\frac{3}{49}x^2+\frac{13}{343}x^3-\frac{65}{2401}x^4$, $\varepsilon=0,00005$?

12. З точністю до заданого ε обчислити значення:

1) $\cos 12^\circ$, $\varepsilon=0,000005$; 2) $\sin 50^\circ$, $\varepsilon=0,000005$;

3) $\sqrt[4]{630}$, $\varepsilon=0,0000005$; 4) $\sqrt[3]{130}$, $\varepsilon=0,00005$;

5) $\sqrt[7]{131}$, $\varepsilon=0,00005$; 6)• $e^{-0,5}$, $\varepsilon=0,00005$;

7) $\ln 1,4$, $\varepsilon=0,000005$; 8) $\arcsin 0,4$, $\varepsilon=0,0005$;

9) $\operatorname{arctg} 0,6$, $\varepsilon=0,000005$; 10) $\sqrt[6]{735}$, $\varepsilon=0,000005$.

Зразки розв'язування задач

1. 5) Оскільки $f(x)=P_n(f,\ x)+R_n(f,x)$, то $|f(x)-P_n(f,\ x)|=|R_n(f,x)|$ $\forall x\in$ $\in[x_0;\,x_0+\beta]$. Запишемо $R_n(f,x)$ у формі Лагранжа:

$$R_n(f,\quad x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\Rightarrow|R_n(f,\quad x)|\le\frac{M\beta^{n+1}}{(n+1)!},$$

оскільки $|x-x_0|\le\beta$, а $\left|f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\right|\le M$ $\forall x\in[x_0;\ x_0+\beta]$. Отже,

$$|f(x)-P_n(f,\quad x)|\le\frac{M\beta^{n+1}}{(n+1)!}\quad\forall x\in[x_0;\ x_0+\beta].$$

2. 3) Знайдемо $f^{(k)}(x_0)$, де $x_0=0$, $f(x)=(1+x)^\alpha$. Маємо $f(0)=1$, $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},\ldots,$ $f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\,\cdots\,(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ $\forall k\in\mathbf{N}$, якщо $\alpha\notin\mathbf{N}$, а якщо $\alpha\in\mathbf{N}$, то $\forall k\le\alpha$. Якщо $\alpha\in\mathbf{N}$, то $f^{(k)}(x)\equiv 0$ $\forall k>\alpha$. Отже, $f^{(k)}(0)=$ $=\alpha(\alpha-1)\,\cdots\,(\alpha-k+1)$, звідки

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\,\cdots\,(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$$

— *формула Маклорена з додатковим членом у формі Пеано*;

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\,\cdots\,(\alpha-n+1)}{n!}x^n+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\,\cdots\,(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$$

— *формула Маклорена з додатковим членом у формі Лагранжа;*

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ \cdots\ +\frac{\alpha(\alpha-1)\ \cdots\ (\alpha-n+1)}{n!}x^n+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ \cdots\ (\alpha-n)}{n!}(1+\theta_1 x)^{\alpha-n-1}(1-\theta_1)^n x^{n+1}$$

— *формула Маклорена з додатковим членом у формі Коші.*

3. 4) За формулою Маклорена маємо

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+R_2(f,x),$$

де

$$|R_2(f,x)|=\left|\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(1+\theta x)^{\frac{1}{2}-3}\ x^3\right|\le\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{(1+\theta x)^{5/2}}\le\frac{1}{16},$$

оскільки $0<\theta<1$ і $0\le x\le 1$. Якщо записати $R_2(f,x)$ у формі Коші, то дістанемо

$$|R_2(f,x)|=\left|\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{2!}(1+\theta_1 x)^{\frac{1}{2}-3}\ (1-\theta_1)^2 x^3\right|\le\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{(1+\theta_1 x)^{5/2}}(1-\theta_1)^2\le\frac{3}{16},$$

тобто більш грубу оцінку.

4. 6) Оскільки $y(1)=0$,

$$y'=\left(x^x\right)'=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}(\ln x+1)_{|x=1}=1,$$

$$y''=e^{x\ln x}(\ln x+1)^2+e^{x\ln x}\frac{1}{x}\Big|_{x=1}=2,$$

$$y'''=e^{x\ln x}(\ln x+1)\left(\ln^2 x+2\ln x+1+\frac{1}{x}\right)+e^{x\ln x}\left(2\ln x\cdot\frac{1}{x}+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\Big|_{x=1}=3,$$

то

$$y=x^x-1=(x-1)+\frac{2}{2!}(x-1)^2+\frac{3}{3!}(x-1)^3+o\left((x-1)^3\right)=$$
$$=(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+o\left((x-1)^3\right).$$

5. 7) Скориставшись розв'язанням задачі 4. 6), маємо

$$\frac{x^x-x}{(x-1)^2}=\frac{x^x-1-(x-1)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+o\left((x-1)^3\right)-(x-1)}{(x-1)^2}=1+\frac{1}{2}(x-1)+o((x-1)),\quad x\to 1.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(x^x-x\right)}{(x-1)^2}=1.$

8. Оскільки $f''(x)=-f(x)$ $\forall x\in\mathbf{R}$, то $\forall x\in\mathbf{R}$ існує $f'''(x)=-f'(x)$, $f^{IV}(x)=$ $=-f''(x)=f(x)$ і взагалі $f^{(n)}(x)=-f^{(n-2)}(x)$ $\forall x\in\mathbf{R}$. Причому $f^{(n)}(0)=0$ $\forall n\in\mathbf{N}$ і

$\left|f^{(n)}(x)\right|=|f(x)|$ або $\left|f^{(n)}(x)\right|=|f'(x)|$ $\forall x\in\mathbf{R}$. Нехай $r>0$ — довільне фіксоване число. Тоді за формулою Тейлора маємо

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

де $0<\theta<1$, а $x\in(-r;\ r)$, звідки

$$f(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad\forall x\in(-r;\ r).$$

За умовою задачі функції f і f' неперервні на $[-r;r]$, а тому й обмежені, тобто $\exists\, H>0$: $|f(x)|\le H$ і $|f'(x)|\le H$ $\forall x\in(-r;\ r)$. Проте $\left|f^{(n)}(x)\right|=|f(x)|$ або $\left|f^{(n)}(x)\right|=|f'(x)|$, тому $\left|f^{(n)}(x)\right|\le H$ $\quad\forall x\in\mathbf{R}$. Звідси

$$|f(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{H|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0,\ n\to\infty,$$

$\forall x\in(-r;\ r)$. Отже, $f(x)=0$ на $(-r;\ r)$, тому $f(x)=0$ $\quad\forall x\in\mathbf{R}$, оскільки $r>0$ — довільне.

9. 4) За формулою Маклорена із залишковим членом $R_2(x)$ у формі Лагранжа маємо

$$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5}{81}\cdot\frac{x^3}{(1+\theta x)^{8/3}},\quad 0<\theta<1.$$

За тією самою формулою із залишковим членом $R_3(x)$ у формі Лагранжа дістаємо

$$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5}{81}x^3-\frac{10}{243}\cdot\frac{x^4}{(1+\theta x)^{11/3}},\quad 0<\theta<1.$$

Оскільки при $x>0$

$$\frac{5}{81}\cdot\frac{x^3}{(1+\theta x)^{8/3}}>0\ \text{ і }\ \frac{10}{243}\cdot\frac{x^4}{(1+\theta x)^{11/3}}>0,$$

то звідси випливає нерівність

$$1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}<\sqrt[3]{1+x}<1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5}{81}x^3.$$

10. 3) Наближення функції $\sin x$ її многочленом Маклорена оцінюється за допомогою залишкового члена формули Маклорена. Тому для визначення кількості членів многочлена Маклорена функції $\sin x$, який наближав би її на відрізку $[-1/2;1/2]$ із заздалегідь заданою точністю $\varepsilon=5\cdot10^{-6}$, треба знайти залишковий член формули Маклорена у формі Лагранжа, який задовольняв би нерівність

$$|R_{2n}(x)|<\varepsilon.$$

Формула Маклорена для функції $\sin x$ має вигляд

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ \cdots\ +(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n}(x),$$

де залишковий член

$$R_{2n}(x)=\frac{\sin\left(\theta x+\frac{\pi}{2}(2n+1)\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ 0<\theta<1.$$

Оскільки за умовою $|x| \le \frac{1}{2}$ і $\left|\sin\left(\theta x + \frac{\pi}{2}(2n+1)\right)\right| \le 1$, то

$$\left|R_{2n}(x)\right| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \le \frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)!}.$$

Якщо виконуватиметься нерівність $\frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)!} < \varepsilon$, то й подавно виконуватиметься нерівність $\left|R_{2n}(x)\right| < \varepsilon = 5\cdot 10^{-6}$. Для цього досить взяти $2n+1 \ge 7$, бо

$$\frac{|x|^5}{5!} \le \frac{1}{2^5 \cdot 5!} \approx 2{,}604\cdot 10^{-4} > 5\cdot 10^{-6},$$

$$\frac{|x|^7}{7!} \le \frac{1}{2^7 \cdot 7!} \approx 1{,}550\cdot 10^{-6} < 5\cdot 10^{-6}.$$

Оскільки наближені обчислення завжди виконуються з однією (іноді двома) запасною цифрою, то для обчислення наближеного значення функції $\sin x$ на відрізку $[-1/2;\ 1/2]$ з точністю до $\varepsilon = 5\cdot 10^{-6}$ у многочлені Маклорена функції $\sin x$ треба взяти 8 членів (перший, третій, п'ятий і сьомий члени дорівнюють нулю).

12. 6) Скористаємось формулою Маклорена із залишковим членом у формі Лагранжа для функції e^x, яка має вигляд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

де

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

З цієї формули при $x = -1/2$ дістаємо

$$e^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!\cdot 2^n} + R_n, \tag{1}$$

де

$$R_n = R_n\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^{n+1}\frac{e^{-\frac{\theta}{2}}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}}.$$

Для обчислення наближеного значення $e^{-0,5}$ з точністю до $\varepsilon = 5\cdot 10^{-5}$ визначимо спочатку, скільки доданків треба залишити у формулі (1). Для цього розв'яжемо нерівність

$$\left|R_n\right| < \frac{1}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}} < 5\cdot 10^{-5}.$$

Оскільки $\left|R_4\right| < \frac{1}{5!\cdot 2^5} \approx 2{,}6\cdot 10^{-4} > 5\cdot 10^{-5}$, а $\left|R_5\right| < \frac{1}{6!\cdot 2^6} \approx 2{,}17\cdot 10^{-5} < 5\cdot 10^{-5}$, то в формулі (1) треба залишити шість доданків, тобто

$$e^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{48} + \frac{1}{384} - \frac{1}{3840} + R_5,\quad \left|R_5\right| < 2{,}2\cdot 10^{-5}.$$

Обчислимо значення доданків цього виразу з п'ятьма правильними знаками. Матимемо:

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{lcl} 1 & = & 1{,}00000 \\ 1:8 & = & 0{,}12500 \\ 1:384 & = & 0{,}00260+\Delta_2 \\ \hline & & 1{,}12760+\Delta_2 \end{array} & \qquad \begin{array}{lcl} 1:2 & = & 0{,}50000 \\ 1:48 & = & 0{,}02083+\Delta_1 \\ 1:3840 & = & 0{,}00026+\Delta_3 \\ \hline & & 0{,}52109+\Delta_1+\Delta_3 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1{,}12760+\Delta_2 \\ -\ 0{,}52109+\Delta_1+\Delta_3 \\ \hline 0{,}60651-\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3 \end{array},$$

де $0<\Delta_i<0{,}5\cdot 10^{-5}$ $(i=1,\,2,\,3)$ — похибки округлення доданків до розряду 10^{-5}. Отже,

$$e^{-\frac{1}{2}}=0{,}60651-\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3+R_5.$$

Звідси

$$e^{-0{,}5}-0{,}6065=1\cdot 10^{-5}-\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3+R_5.$$

Для граничної абсолютної похибки цього наближення дістаємо

$$\left|e^{-0{,}5}-0{,}6065\right|\le 1\cdot 10^{-5}+\left|\Delta_1\right|+\left|\Delta_2\right|+\left|\Delta_3\right|+\left|R_5\right|\le$$

$$\le 1\cdot 10^{-5}+3\cdot 0{,}5\cdot 10^{-5}+2{,}2\cdot 10^{-5}=4{,}7\cdot 10^{-5}<5\cdot 10^{-5},$$

тобто гранична абсолютна похибка наближення не перевищує суми абсолютних похибок округлень проміжних результатів $\left(3\cdot 0{,}5\cdot 10^{-5}\right)$, кінцевого результату ($1\cdot 10^{-5}$) і оцінки залишкового члена $\left(2{,}2\cdot 10^{-5}\right)$.

Отже, з точністю до $0{,}5\cdot 10^{-4}$ маємо

$$\frac{1}{\sqrt{e}}\approx 0{,}6065$$

з чотирма правильними десятковими знаками. Для порівняння наводимо обчислене на мікрокалькуляторі наближене значення $e^{-0{,}5}$ з більшою кількістю правильних цифр: $e^{-0{,}5}\approx$ 0,60653064.

Розділ 7 ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ

§ 7.1. Показникова функція

Експонентою довільного комплексного (зокрема, *дійсного*) *числа* z називають число $\exp z$, яке визначають за допомогою рівності

$$\exp z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n .$$

Експоненціальною функцією комплексної (*дійсної*) *змінної* називають таке відображення $f: \mathbf{C}\to\mathbf{C}\,(f: \mathbf{R}\to\mathbf{R})$, для якого $f(z) = \exp z$, де $z\in\mathbf{C}\,(z\in\mathbf{R})$.

Основні властивості експоненціальної функції

1. *Область визначення*: $D(f)=\mathbf{C}$ або $D(f)=\mathbf{R}$.

2. *Теорема додавання*: $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1\cdot\exp z_2\ \ \forall z_1, z_2\in\mathbf{C}$.

3. *Значення в нулі та одиниці*: $\exp 0 = 1$, $\exp 1 =: \mathrm{e}$.

4. *Нульове значення*: $\exp z\neq 0\ \ \forall z\in\mathbf{C}$.

5. *Значення у протилежних точках*: $\exp z\cdot\exp(-z) = 1\ \ \forall z\in\mathbf{C}$.

6. *Теорема віднімання*: $\exp(z_1 - z_2) = \exp z_1/\exp z_2\ \ \forall z_1, z_2\in\mathbf{C}$.

7. *Оцінка значень* $\exp x$: $\exp x > 0\ \ \forall x\in\mathbf{R}$, $\exp x \geq 1 + x\ \ \forall x\in\mathbf{R}$, $\exp x\leq$ $\leq 1/(1-x)\ \ \forall x<1$.

8. *Граничні значення*: $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\exp x = 0$, $\lim\limits_{z\to z_0}\exp z = \exp z_0$ $\forall z_0\in\mathbf{C}$.

9. *Монотонність*: $\exp x$ зростає на множині $\mathbf{R}$.

10. *Неперервність*: $f(z) = \exp z$ неперервна в $D(f)$.

11. *Множина значень*: $\forall y>0\ \ \exists!\, x\in\mathbf{R}: \exp x = y$ і $\forall w\neq 0\ \ \exists z\in\mathbf{C}: \exp z = w$.

12. *Періодичність*: $\exp z$ — періодична функція на $\mathbf{C}$ з основним суто уявним періодом $T = 2\pi i$.

Показникова форма запису комплексного числа:

$$z = |z|\exp(i\arg z). \qquad (1)$$

Натуральним логарифмом дійсного числа $x > 0$ називають таке число $y\in\mathbf{R}$, для якого $\exp y = x$, і позначають $y = \ln x$. Отже, $y = \ln x,\ x>0 \Leftrightarrow x =$ $= \exp y,\ y\in\mathbf{R}$, тобто $\exp(\ln x) = x$ і $\ln(\exp y) = y\ \ \forall x>0,\ y\in\mathbf{R}$.

Степінь числа $a > 0$ *з дійсним показником* x можна визначити за допомогою рівності

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

Оскільки $\ln e = 1$, то $e^x = \exp x \quad \forall x \in \mathbf{R}$. Тому експоненціальну функцію дійсної змінної позначають також $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$.

Степінь числа $a > 0$ *з дійсним показником* x можна визначити іншими способами. Наприклад, за допомогою такого ланцюжка означень:

1) $a^n := \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ разів}} \quad \forall n \in \mathbf{N}$; 2) $a^0 := 1$, $a^{-n} := 1/a^n \quad \forall n \in \mathbf{N}$;

3) $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a} \quad \forall n \in \mathbf{N}$; 4) $a^{m/n} := \sqrt[n]{a^m} \quad \forall m \in \mathbf{Z}$ і $n \in \mathbf{N}$;

5) $a^x := \lim\limits_{\mathbf{Q} \ni r \to x} a^r \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

Комплексним натуральним логарифмом числа $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$, називають множину таких чисел $w \in \mathbf{C}$, для яких $\exp w = z$, і записують $w = \operatorname{Ln} z$. Отже, $w = \operatorname{Ln} z$, $z \neq 0$, якщо $z = \exp w$, $w \in \mathbf{C}$. При цьому

$$\operatorname{Ln} z := \ln|z| + i \arg z + i2\pi k, \tag{2}$$

де $k \in \mathbf{Z}$, $\ln|z|$ — натуральний логарифм числа $|z| > 0$. Число

$$\ln z := \ln|z| + i \arg z \tag{3}$$

називають *головним значенням комплексного натурального логарифма.*

Комплексний степінь числа $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$, з показником $z \in \mathbf{C}$ можна визначити за допомогою рівності

$$a^z := \exp(z \operatorname{Ln} a) = \exp(z \ln a) \cdot \exp(i \cdot 2\pi k z), \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{4}$$

Число $\exp(z \ln a)$ називають *головним значенням комплексного степеня* і також позначають a^z. Зокрема,

$$e^z := \exp(z \operatorname{Ln} e) = \exp z \cdot \exp(i \cdot 2\pi k z), \quad k \in \mathbf{Z}, \tag{5}$$

і $\exp z$ — головне значення $e^z \quad \forall z \in \mathbf{C}$, або $\exp z$ ототожнюють з e^z.

Показниковою функцією комплексної змінної називають таке відображення $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, для якого $f(z) = \exp(z \ln a) = a^z$, розуміючи під цим головне значення a^z, де $a \neq 0$ — фіксоване комплексне число. Вважають також, що $a \neq 1$, бо тоді $\exp \ln a \equiv 1$.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) якщо f — експоненціальна функція, то f є показниковою функцією;
2) твердження, обернене до 1), є правильним;
3) кожна показникова функція є зростаючою;

4) кожна показникова функція є неперервною на $\mathbf{R}$;
5) кожна показникова функція не є парною і не є періодичною;
6) кожна показникова функція є опуклою вниз на $\mathbf{R}$;
7) експоненціальна функція не має точок екстремуму;
8) для будь-якої показникової функції існує обернена до неї функція.

2•. Сформулювати і довести властивості показникової функції, аналогічні відповідним властивостям експоненціальної функції.

3•. Довести еквівалентність різних означень степеня числа $a > 0$ з дійсним показником x.

4. Довести, що:

1)• $\left(a^x\right)^y = a^{xy} \quad \forall a > 0$ і $\forall x, y \in \mathbf{R}$;

2) $a^x b^x = (ab)^x \quad \forall a > 0,\ b > 0$ і $\forall x \in \mathbf{R}$;

3) $a^x / b^x = (a/b)^x \quad \forall a > 0,\ b > 0$ і $\forall x \in \mathbf{R}$.

5. Нехай $x > 0$, $a > 0$ і $b > 0$. Довести, що $a^x < b^x \Leftrightarrow a > b$.

6. Сформулювати і довести твердження, аналогічне твердженню 5, якщо $x < 0$.

7*. Нехай f — неперервна функція на $\mathbf{R}$ і $f(x) \neq \text{const}$ (або f строго монотонна на $\mathbf{R}$). Довести, що $f(x+y) = f(x)f(y) \quad \forall x,\ y \in \mathbf{R}$ тоді й тільки тоді, коли f — показникова функція.

8. Нехай f — диференційовна на $\mathbf{R}$ функція. Довести, що:

1)• $f(x) = \mathrm{e}^x \quad \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow f'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$ і $f(0) = 1$;

2) $f(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow f'(x) = f(x)\ln a$ і $f(0) = 1$.

9. Для кожного $x \in \mathbf{R}$ введемо такі позначення:

$\operatorname{sh} x := \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ (*синус гіперболічний числа* x),

$\operatorname{ch} x := \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ (*косинус гіперболічний числа* x),

$\operatorname{th} x := \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ (*тангенс гіперболічний числа* x),

$\operatorname{cth} x := \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ (*котангенс гіперболічний числа* x).

Довести, що

1)• $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; 2) $\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y) = 2\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y$;

3) $\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y) = 2\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$;

4) $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$; 5) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$.

10. Для $\operatorname{sh} x$ знайти і вивести формули, аналогічні формулам 2)–5), а для $\operatorname{th} x$ і $\operatorname{cth} x$ — формулам 4) і 5) з попередньої вправи.

11. Відомо, що швидкість розпаду радіоактивного елемента, тобто швидкість зміни наявної кількості цього елемента, пропорційна його кількості, а через час t_0 ця кількість зменшується вдвоє. Знайти закон радіоактивного розпаду.

12. Відомо, що зростання популяції бактерій (тобто швидкість зміни наявної кількості їх) пропорційно початковій кількості бактерій, якщо їх не знищувати. Знайти закон зростання популяції бактерій.

13. Чи правильні дані твердження:

1)• якщо $z = x + iy \in \mathbf{C}$, то $\exp\ z = e^x\ (\cos y + i \sin y)$;

2) існує точка z, для якої $\exp(-z) = -\exp z$;

3) точка z з твердження 2) може бути дійсною;

4) рівняння $e^z = -1$ має розв'язки;

5) логарифми від'ємних чисел не існують;

6) якщо $\exp z \in \mathbf{R}$, то $z \in \mathbf{R}$;

7) твердження, обернене до 6), є правильним;

8) усі значення степеня i^i є дійсними числами?

14•. Довести формулу (1).

15. Записати у показниковій формі дані числа:

1) i; 2) -1; 3) $-2i$; 4) $1 - i\sqrt{3}$; 5) $\sqrt{3} - i$; 6) $\dfrac{1+i}{1-i}$.

16. Виділити дійсну та уявну частини $\exp z$ та знайти множину чисел z, для яких:

1) • $\exp z \in \mathbf{R}$; 2) $\exp z > 0$; 3) $\exp z < 0$; 4) $\exp z \notin \mathbf{R}$;

5) $\exp z$ — суто уявне число.

17. Знайти комплексні натуральні логарифми даних чисел та вказати головні значення цих логарифмів:

1) e; 2) $-$e; 3) 1; 4) -1; 5) i; 6) $-i$; 7) ie; 8) $1 + \sqrt{3}i$; 9) $-1 - i$; 10) e^i.

18. Знайти дані комплексні степені та вказати їхні головні значення:

1) 1^i; 2) e^{1-i}; 3)• $(1+i)^{1+i}$; 4) i^{1-i}; 5) $2^{\frac{1}{2}}$;

6) $\left(1 - \sqrt{3}i\right)^{\frac{1}{3}}$; 7) $(1+i)^{-1}$; 8) $e^{\sqrt{2}}$; 9) a^α, $a > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

19. Визначити зміст лівої та правої частин заданих рівностей і довести або спростувати їх:

1)• $\mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2 = \mathrm{Ln}(z_1 z_2)$; 2) $\mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2 = \mathrm{Ln}(z_1 / z_2)$;

3) $\mathrm{Ln}\, z + \mathrm{Ln}\, z = 2\mathrm{Ln}\, z$; 4) $\mathrm{Ln}\, z - \mathrm{Ln}\, z = 0$; 5) $a^{z_1 + z_2} = a^{z_1} a^{z_2}$;

6) $\left(a^{z_1}\right)^{z_2} = a^{z_1 z_2}$; 7) $a^z b^z = (ab)^z$; 8) $a^z / b^z = (a/b)^z$.

20. Визначити, чи правильні твердження попередньої вправи для головних значень логарифмів та степенів. Якщо твердження неправильне, то знайти умови, які треба накласти на z, z_1 і z_2, щоб твердження стало правильним.

21. Довести, що $\exp z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \cdots + \dfrac{z^n}{n!}\right)$ $\forall z \in \mathbf{C}$.

22•. Довести, що $|\exp z - 1| \le \exp|z| - 1 \le |z| \exp|z|$ $\forall z \in \mathbf{C}$.

23. Визначити, скільки різних значень має степінь a^{α}, якщо:

1) $\alpha \in \mathbf{N}$; 2) $\alpha = \frac{1}{n}$; 3) $\alpha = \frac{m}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{Z}$.

24. Визначити, за яких умов усі значення степеня a^{α} мають: 1) однаковий модуль; 2) однаковий аргумент.

Зразки розв'язування задач

2. Доведемо, наприклад, теорему додавання та властивість про монотонність показникової функції. Маємо

$$a^{x+y} = \exp((x+y)\ln a) = \exp(x\ln a + y\ln a) = \exp(x\ln a)\exp(y\ln a) = a^x a^y.$$

Отже, теорема додавання для показникової функції справедлива.

Характер монотонності показникової функції $f(x) = a^x = \exp(x \ln a)$ залежить від числа $b = \ln a$, для якого можливі три випадки:

1) $b = \ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1$; 2) $b = \ln a > 0 \Leftrightarrow a = \exp b > 1$;

3) $b = \ln a < 0 \Leftrightarrow 0 < a = \exp b < 1$.

Якщо $a = 1$, то $f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$, тобто f є сталою функцією, а тому і незростаючою і неспадною.

Нехай $a > 1$. Тоді $b = \ln a > 0$, і тому для $x_1 < x_2$ маємо $x_1 \ln a < x_2 \ln a$, тобто $a^{x_1} = \exp(x_1 \ln a) < \exp(x_2 \ln a) = a^{x_2}$, а отже, функція $f(x) = a^x$ є зростаючою при $a > 1$.

Нехай, нарешті, $0 < a < 1$. Тоді $b = \ln a < 0$, і для $x_1 < x_2$ маємо $x_1 \ln a > x_2 \ln a$, тобто $a^{x_1} = \exp(x_1 \ln a) > \exp(x_2 \ln a) = a^{x_2}$, що й означає, що функція $f(x) = a^x$ є спадною при $0 < a < 1$.

3. Нехай $a^x := \exp(x \ln a)$. Тоді за властивістю 10 існує $\lim\limits_{\mathbf{Q} \ni r \to x} a^r = a^x \ \forall x \in \mathbf{R}$. Отже, $\lim\limits_{\mathbf{Q} \ni r \to x} a^r = \exp(x \ln a)$, якщо визначено вказаним вище способом експоненту дійсного числа.

Припустимо тепер, що $a^x := \lim\limits_{\mathbf{Q} \ni r \to x} a^r$, де $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Тоді якщо вважати $\mathrm{e} := = \lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, то за другою важливою границею маємо $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$, і внаслідок неперервності функції $f(u) = u^{\alpha}$ в точці $u_0 = \mathrm{e}$ дістаємо

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty}\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = \mathrm{e}^x,$$

тобто з рівності $a^x := \lim\limits_{\mathbf{Q} \ni r \to x} a^r$ випливає рівність $\exp(x \ln a) = a^x$. Цим доведено еквівалентність означень

$$\exp x := \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad a^x := \exp(x \ln a) \quad \text{і} \quad a^x := \lim_{\mathbf{Q} \ni r \to x} a^r.$$

4. 1) За означенням степеня маємо

$$\left(a^x\right)^y = \exp\left(y \ln a^x\right) = \exp(y \ln(\exp(x \ln a))),$$

а за означенням натурального логарифма $\ln(\exp(x\ln a)) = x\ln a$. Тому $\left(a^x\right)^y = \exp(xy\ln a) =$

$= a^{xy}$. Отже, $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$ $\forall x,\ y\in \mathbf{R}$.

8. 1) Якщо $f(x)=e^x$, то $f'(x)=e^x$ і $f(0)=e^0=1$. Припустимо, що $f'(x)=f(x)$ і $f(0)=1$. Тоді функція $g(x)=f(x)e^{-x}$ є диференційовною на $\mathbf{R}$ і $g'(x)=f'(x)e^{-x}-$ $-f(x)e^{-x}=e^{-x}(f'(x)-f(x))=0$ $\forall x\in \mathbf{R}$, звідки випливає, що $g(x)=\mathrm{const}$ на $\mathbf{R}$, а враховуючи, що $g(0)=1$, дістаємо $g(x)=1$ $\forall x$, тобто $f(x)=e^x$ $\forall x\in \mathbf{R}$.

Зауваження. Проведені міркування показують, що експоненціальну функцію можна означити як функцію, яка диференційовна на $\mathbf{R}$ і задовольняє умови $f'(x)=f(x)$ $\forall\, x\in \mathbf{R}$ і $f(0)=1$.

9. 1) За означенням маємо

$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{4}=1 \quad \forall x\in \mathbf{R}.$$

13. 1) Оскільки $z=x+iy$, то $w_n=\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\left(1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right)^n$ і

$$|w_n|=\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}=\left(\left(1+\frac{2xn+x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{x^2+2xn+y^2}}\right)^{\frac{x^2+2xn+y^2}{2n}}\to e^x,\quad n\to\infty.$$

Враховуючи, що $1+\frac{x}{n}>0$ для досить великих n, маємо

$$\mathrm{Arg}(w_n)^{\frac{1}{n}}=\mathrm{arctg}\frac{y/n}{1+x/n},$$

звідки

$$\mathrm{Arg}\,w_n=n\ \mathrm{Arg}(w_n)^{\frac{1}{n}}=n\ \mathrm{arctg}\frac{y/n}{1+x/n}=\frac{\mathrm{arctg}\dfrac{y/n}{1+x/n}}{\dfrac{y/n}{1+x/n}}\ \frac{y}{1+x/n}\to y,\quad n\to\infty.$$

Таким чином,

$$w_n=|w_n|(\cos\mathrm{Arg}\,w_n+i\sin\mathrm{Arg}\,w_n)\to e^x(\cos y+i\sin y),\quad n\to\infty.$$

Крім того, $w_n\to\exp z$, $n\to\infty$, тобто $\exp z=e^x(\cos y+i\sin y)$.

Отже, задане твердження правильне.

14. Згідно з твердженням 13. 1) маємо $\exp(iy)=\cos y+i\sin y$ $\forall y\in \mathbf{R}$. Скориставшись цією рівністю і тригонометричною формою запису комплексного числа, дістанемо

$$z=|z|(\cos\arg z+i\sin\arg z)=|z|\exp(i\ \arg z),$$

що й доводить справедливість формули (1).

16. 1) Оскільки $\exp z=e^x(\cos y+i\sin y)$, то $\mathrm{Re}\ \exp z=e^x\cos y$, а

$$\mathrm{Im}\exp z=e^x\sin y\Rightarrow\left(\exp z\in \mathbf{R}\Leftrightarrow \mathrm{Im}\exp z=0\Leftrightarrow e^x\sin y=0\Leftrightarrow y=\pi k,\ k\in \mathbf{Z}\ \text{ і }\ \forall x\in \mathbf{R}\right).$$

Отже, $\exp z$ набуває дійсних значень на прямих $y = \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$, і тільки на них. Зокрема, $\exp z \in \mathbf{R}$, якщо $y = 0$, тобто $z = x \in \mathbf{R}$.

18. 3) За означенням $(1+i)^{1+i} = \exp((1+i)\operatorname{Ln}(1+i))$. Знайдемо за формулою (2) $\operatorname{Ln}(1+i) = \ln|1+i| + i\arg(1+i) + 2\pi k i,\ k \in \mathbf{Z}$. Оскільки $|1+i| = \sqrt{2}$, а $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$, то

$$\operatorname{Ln}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) \Rightarrow (1+i)^{1+i} = \exp\left((1+i)\left(\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right)\right) =$$

$$= \exp\left(\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} - 2\pi k + i\left(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right) = \exp\left(\ln\sqrt{2}\right)\exp\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\exp\left(i\ln\sqrt{2}\right)\times$$

$$\times\exp i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}\left(\cos\ln\sqrt{2} + i\sin\ln\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= (1+i)e^{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}\left(\cos\ln\sqrt{2} + i\sin\ln\sqrt{2}\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Головне значення цього степеня дістаємо при $k = 0$:

$$(1+i)^{1+i} = (1+i)e^{-\frac{\pi}{4}}\left(\cos\ln\sqrt{2} + i\sin\ln\sqrt{2}\right).$$

19. 1) Оскільки для будь-яких числових множин A і B за означенням $A + B = \{w = u + v : u \in A, v \in B\}$, то $\operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 = \{w = w_1 + w_2 :\ w_1 \in \operatorname{Ln} z_1,\ w_2 \in \operatorname{Ln} z_2$, тобто $w_1 = \ln|z_1| + i(\arg z_1 + 2\pi k)$, а $w_2 = \ln|z_2| + i(\arg z_2 + 2\pi m)\} = \{w = \ln|z_1| + \ln|z_2| + i(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2)\} = \{w = \ln|z_1 z_2| + i\operatorname{Arg} z_1 z_2\} = \{w = \ln|z_1 z_2| + i\ (\arg z_1 z_2 + 2\pi n)\} = \operatorname{Ln} z_1 z_2$.

Отже, задане твердження правильне. Разом з тим для головних значень комплексного аргументу воно неправильне. Дійсно, якщо $z_1 = z_2 = -1$, то $\ln z_1 = \ln z_2 = \ln|-1| + i\arg(-1) = i\pi \Leftrightarrow \Leftrightarrow \ln z_1 + \ln z_2 = 2\pi i$, а $\ln(z_1 z_2) = \ln 1 = \ln|1| + i\arg 1 = 0$, тобто, взагалі кажучи, $\ln(z_1 z_2) \neq \neq \ln z_1 + \ln z_2$.

22. Якщо позначити $|z| = \alpha$, то права частина заданої нерівності набирає вигляд $e^{\alpha} - 1 \leq \leq \alpha e^{\alpha} \Leftrightarrow e^{\alpha}(1-\alpha) \leq 1$. Якщо $\alpha \geq 1$, то остання нерівність правильна. Якщо $\alpha < 1$, то ця нерівність рівносильна нерівності $e^{\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha}$ і також правильна за властивістю 7. Отже, праву частину нерівності доведено.

Згідно із вправою 21 маємо

$$|\exp z - 1| = \left|\lim_{n\to\infty}\left(z + z^2/2! + \cdots + z^n/n!\right)\right| = \lim_{n\to\infty}\left|z + z^2/2! + \cdots + z^n/n!\right| \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\left(|z| + |z|^2/2! + \cdots + |z|^n/n!\right) = \exp|z| - 1,$$

тобто правильна і ліва частина заданої нерівності.

§ 7.2. Логарифмічна функція

Логарифмом числа $b > 0$ за основою $a > 0,\ a \neq 1$, називають таке число $c \in \mathbf{R}$, для якого $a^c = b$. При цьому записують $\log_a b = c$. Отже, $c = \log_a b \Leftrightarrow \Leftrightarrow a^c = b \Leftrightarrow a^{\log_a b} = b \Leftrightarrow \log_a a^c = c$.

Зокрема, при $a = \mathrm{e}$ маємо $\log_a b =: \ln b$ — *натуральний логарифм числа* $b > 0$. При $a = 10$ маємо $\log_{10} b =: \lg b$ — *десятковий логарифм числа* $b > 0$.

За властивостями показникової функції маємо $\forall b > 0\ \exists!\ c \in \mathbf{R}:\ a^c = b$, якщо $a > 0$, $a \neq 1$. Тому існує функція f^{-1}, обернена до $f(x) = a^x$, $x \in \mathbf{R}$, якщо $a > 0$, $a \neq 1$. Цю функцію називають *логарифмічною функцією дійсної змінної* і позначають

$$y = \log_a x, \quad x \in (0; +\infty).$$

Основні властивості логарифмічної функції (для випадку натуральних логарифмів)

1. *Область визначення*: $D(f) = (0;\ +\infty)$.

2. *Множина значень*: $E(f) = \mathbf{R}$.

3. *Монотонність*: $y = \ln x$ зростає на $(0; +\infty)$.

4. *Неперервність*: $f(x) = \ln x$ неперервна на $(0; +\infty)$.

5. *Теорема додавання*: $\ln x_1 + \ln x_2 = \ln x_1 x_2 \ \ \forall x_1,\ x_2 > 0$.

6. *Теорема віднімання*: $\ln x_1 - \ln x_2 = \ln \dfrac{x_1}{x_2} \ \ \forall x_1,\ x_2 > 0$.

7. *Нульове та одиничне значення*: $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$.

8. *Граничне значення*: $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} \ln x = \ln x_0 \ \forall x_0 > 0$.

Логарифмічною функцією комплексної змінної $z \neq 0$ називають таке відображення $f:\ \mathbf{C}\setminus\{0\} \to \mathbf{C}$, для якого $f(z) = \dfrac{\ln z}{\ln a} =: \log_a z$, $z \neq 0$, де $a \neq 0$, $a \neq 1$ — фіксоване комплексне число. При цьому $\log_a z$ називають *логарифмом комплексного числа* z за основою a. Зокрема, при $a = \mathrm{e}$ маємо логарифмічну функцію комплексної змінної $f(z) = \ln z$, $z \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$, $f(z) \in \mathbf{C}$.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) $\log_a b$ існує для всіх $a > 0$, $b > 0$;

2) $\ln b$ існує для всіх $b > 0$;

3) кожна показникова функція має обернену;

4) графіки функцій $y = a^x$ і $y = \log_a x$ симетричні відносно прямої $y = x$;

5) кожна (залежно від основи) логарифмічна функція не є парною, є непарною, не є періодичною;

6) кожна логарифмічна функція опукла вниз;

7) кожна логарифмічна функція зростає на проміжку $(0;\ +\infty)$;

8) графік логарифмічної функції має асимптоти?

2. Сформулювати та довести властивості функції $f(x) = \log_a x$, аналогічні властивостям функції $f(x) = \ln x$.

3. Довести, що:

1) $\ln a^x = x \ln a$; 2) $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$; 3) $\log_a b^x = x \log_a b$;

4) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, зокрема $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, та визначити умови, які накладаються на числа a, b і c.

4. Довести, що

1)• $\log_a b^{\frac{m}{n}} = \dfrac{m}{n} \log_a b \quad \forall m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}$;

2) $\log_{a^{\frac{m}{n}}} b = \dfrac{n}{m} \log_a b \quad \forall m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N},\ m \neq 0.$

5. Що більше (відповісти усно): а) $\log_a b$ чи $\log_{a^2} b$; б) $\log_a b$ чи $\log_c b$, $a < c$?

6. За допомогою нерівності Єнсена (див. вправу 16 § 6.5) довести, що

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k \ln x_k \right) / \sum_{k=1}^{n} p_k \leq \ln \left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k / \sum_{k=1}^{n} p_k \right) \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

де $x_k > 0$, $p_k > 0$ $\forall k$, та дістати звідси нерівність

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k^{p_k} \right)^{1/ \sum_{k=1}^{n} p_k} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k \right) / \sum_{k=1}^{n} p_k .$$

7*. Нехай f — неперервна функція на проміжку $(0;\ +\infty)$ і $f(x) \neq \text{const}$ (або строго монотонна на $(0; +\infty)$). Довести, що $f(x) + f(y) = f(xy)$ $\forall x > 0$, $y > 0$ тоді й тільки тоді, коли f — логарифмічна функція.

8. Нехай f — диференційовна функція на інтервалі $(0;\ +\infty)$. Довести, що:

1) • $f(x) = \ln x \ \ \forall x > 0 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \ \ \forall x > 0$ і $f(1) = 0$;

2) $f(x) = \log_a x \ \ \forall x > 0 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$ і $f(1) = 0$.

9•. Показати, що функція синус гіперболічний має обернену функцію та визначити її.

10. Розв'язати питання про існування та властивості функцій, обернених до функцій $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$.

11*. Взявши за означення $\ln x$ твердження 8. 1), довести основні властивості натурального логарифма. Показати, як можна визначити показникову функцію через логарифмічну.

12. Довести, що $\ln(i \cdot i) = \ln i + \ln i$, проте $\ln(-i)(-i) \neq \ln(-i) + \ln(-i)$.

13. Чи правильні дані твердження:

1)• $f(z) = \ln z$ — функція, обернена до експоненціальної функції комплексної змінної;

2) множиною значень функції $f(z) = \ln z$ є вся комплексна площина;

3) $f(z) = \ln z$ — неперервна функція в своїй області визначення;

4) для $f(z)=\ln z$ справедливі теореми додавання та віднімання;

5) $\lim\limits_{z\to\infty}\ln z=\lim\limits_{z\to 0}\ln z=\infty$;

6) $\lim\limits_{z\to z_0}\ln z=\ln z_0\ \ \forall z_0\in\mathbf{C}:\ \operatorname{Re} z_0>0$ або $\operatorname{Im} z_0\neq 0$;

7) якщо $a\neq 0$ і $\operatorname{Im}(z\ln a)\in(-\pi;\ \pi]$, то $\ln a^z=z\ln a$, розуміючи під a^z її головне значення?

14. Виділити $\operatorname{Re}\ln z$ та $\operatorname{Im}\ln z$ і знайти множину чисел z, для яких:

1) • $\ln z\in\mathbf{R}$; 2) $\ln z>0$; 3) $\ln z<0$; 4) $\ln z\notin\mathbf{R}$;

5) $\ln z$ — суто уявне число.

15. Визначити, чи мають розв'язки дані рівняння, і якщо мають, то знайти їх:

1) $\exp z=-1$; 2) • $\exp(iz)=a+\sqrt{a^2-1}$, де $a\in\mathbf{R}$ і $|a|\le 1$;

3) $\ln z=\pi i$; 4) $\ln z=2\pi i$; 5) $i^z=1$; 6) $i^z=i$;

7) $a^x=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1,\ x\in\mathbf{R}$; 8) $\left(\frac{1}{16}\right)^x=\log_{\frac{1}{16}} x,\ x\in\mathbf{R}$.

16. Довести, що $f(z)=\ln z$ — неперервна функція на множині $E=\{z\in\mathbf{C}:\ \operatorname{Re} z>0$ або $\operatorname{Im} z\neq 0\}$.

17. Довести, що коли $\arg z_1+\arg z_2\in(-\pi;\pi]$, то $\ln z_1+\ln z_2=\ln z_1z_2$, а коли $\arg z_1-\arg z_2\in(-\pi;\pi]$, то $\ln z_1-\ln z_2=\ln\frac{z_1}{z_2}$.

Зразки розв'язування задач

4. 1) Нехай

$$y=\log_a b^{m/n}\Leftrightarrow b^{m/n}=a^y\Leftrightarrow b=\left(a^y\right)^{n/m}\Leftrightarrow b=a^{yn/m}\Leftrightarrow\frac{yn}{m}=\log_a b\Leftrightarrow y=\frac{m}{n}\log_a b,$$

тобто

$$\log_a b^{\frac{m}{n}}=\frac{m}{n}\log_a b,$$

якщо $m\neq 0$. Якщо $m=0$, то

$$b^{m/n}=1\Leftrightarrow\log_a b^{m/n}=\log_a 1=0=\frac{0}{n}\log_a b,$$

тобто задана рівність правильна $\forall n\in\mathbf{N},\ m\in\mathbf{Z}$.

8. 1) Якщо $f(x)=\ln x$, то $f'(x)=\frac{1}{x}\ \forall x>0$ і $f(1)=0$. Нехай тепер f — довільна фіксована функція, для якої $f'(x)=\frac{1}{x}$ і $f(1)=0$. Тоді рівність $g(x)=f(x)-\ln x$ визначає диференційовну функцію на $(0;\ +\infty)$, для якої $g(1)=0$ і $g'(x)=1/x-1/x=0$, звідки $g(x)=c\ \ \forall x>0$, а оскільки $g(1)=0$, то $g(x)=0\ \ \forall x>0$, тобто $f(x)=\ln x\ \ \forall x>0$.

9. За означенням $\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ — неперервна функція на $\mathbf{R}$ і

$$(\operatorname{sh} x)'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}>0\quad\forall x\in\mathbf{R},$$

тобто функція є зростаючою на $\mathbf{R}$, а тому існує функція, обернена до $y=\operatorname{sh} x$.

Дістанемо її:

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \Leftrightarrow \left(e^x\right)^2 - 2e^x y - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1},$$

а оскільки $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$, то

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) \quad \forall y \in \mathbf{R}$$

— обернена функція до $y = \operatorname{sh} x$, множиною значень якої є множина $\mathbf{R}$. Замінимо x на y та y на x і дістанемо $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, $x \in \mathbf{R}$, функцію, обернену до $y = \operatorname{sh} x$, $x \in \mathbf{R}$.

13. 1) Якщо $w = \ln z$ і $z \neq 0$ — довільне фіксоване комплексне число, то $w = \ln|z| + i \arg z$, звідки $\operatorname{Re} w = \ln|z| \in (-\infty; +\infty)$, а $\operatorname{Im} w = \arg z \in (-\pi; \pi]$, причому $z = \exp w$. Отже, $w = \ln z$ — функція, обернена до експоненціальної, якщо остання розглядається на множині значень функції $\ln z$, тобто на множині

$$E(\ln z) = \{w \in \mathbf{C}: \operatorname{Re} w \in (-\infty; +\infty), \operatorname{Im} w \in (-\pi; \pi]\}.$$

Тому задане твердження неправильне.

14. 1) Оскільки $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, то $\ln z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \arg z = 0$, тобто $z = x > 0$.

15. 2) За означенням комплексного натурального логарифма маємо

$$\exp iz = a + \sqrt{a^2 - 1} \Leftrightarrow iz = \operatorname{Ln}\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right) = \ln\left|a + \sqrt{a^2 - 1}\right| +$$

$$+ i\left(\arg\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right) + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Оскільки $-1 \le a \le 1$, то $\left|a + \sqrt{a^2 - 1}\right| = \left|a + i\sqrt{1 - a^2}\right| = 1$, і тому $z = \arg\left(a + i\sqrt{a^2 - 1}\right) + 2\pi k$.

Якщо $1 \ge a > 0$, то $\arg\left(a + i\sqrt{1 - a^2}\right) = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1 - a^2}}{a} = \arccos a = \arcsin \sqrt{1 - a^2}$. Якщо $-1 \le a \le 0$, то $\arg\left(a + i\sqrt{1 - a^2}\right) = \arccos a$. Отже, розв'язки заданого рівняння мають вигляд $z = \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

§ 7.3. Степенева функція

Для довільного фіксованого показника $\alpha \in \mathbf{R}$ *дійсний степінь числа* $x > 0$ визначається рівністю

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) = e^{\alpha \ln x}. \tag{1}$$

Якщо $\alpha = \dfrac{m}{2k + 1}$, $m \neq 0$, $k \in \mathbf{Z}$, то дійсний степінь числа $x < 0$ визначається так:

$$x^\alpha := (-1)^m |x|^\alpha. \tag{2}$$

Для $\alpha > 0$ вважають $0^\alpha := 0$, а $x^0 := 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

Степеневою функцією дійсної змінної називають таке відображення $f: D(f) \to \mathbf{R}$, для якого $f(x) = x^\alpha \quad \forall x \in D(f)$, де $\alpha \in \mathbf{R}$ — фіксоване, а $D(f) = \left\{x \in \mathbf{R}: x^\alpha \in \mathbf{R}\right\}$.

Основні властивості степеневої функції дійсної змінної

1. *Область визначення* $(n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z})$:

Показник	$\alpha = \frac{k}{2n-1} \geq 0$	$\alpha = \frac{k}{2n-1} < 0$	$\alpha = \frac{2k-1}{2n} > 0$ або $0 < \alpha \notin \mathbf{Q}$	$\alpha = \frac{2k-1}{2n} < 0$ або $0 > \alpha \notin \mathbf{Q}$
$D(f)$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$

2. *Неперервність*: f — неперервна в $D(f)$.

3. *Монотонність* $(n \in \mathbf{N},\ k \in \mathbf{Z})$:

Показник	Проміжки монотонності		
	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
$\alpha > 0\ (\alpha < 0)$	?	Зростає (спадає)	?
$\alpha = \frac{2k}{2n-1} > 0$	Спадає	Зростає	Немонотонна
$\alpha = \frac{2k-1}{2n-1} > 0$	Зростає	Зростає	Зростає
$\alpha = \frac{2k}{2n-1} < 0$	Зростає	Спадає	Немонотонна
$\alpha = \frac{2k-1}{2n-1} < 0$	Спадає	Спадає	Немонотонна

4. *Множина значень* $(n \in \mathbf{N},\ k \in \mathbf{Z})$:

Показник	$\alpha = \frac{2k-1}{2n-1} > 0$	$\alpha = \frac{2k-1}{2n-1} < 0$	$\alpha = \frac{2k-1}{2n} > 0$, або $\alpha = \frac{2k}{2n-1} > 0$, або $0 < \alpha \notin \mathbf{Q}$	$\alpha = \frac{2k-1}{2n} < 0$, або $\alpha = \frac{2k}{2n-1} < 0$, або $0 > \alpha \notin \mathbf{Q}$
$E(f)$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$

5. *Граничні значення* $\left(\lim\limits_{x \to x_0} x^{\alpha},\ n \in \mathbf{N},\ k \in \mathbf{Z}\right)$:

Точка x_0	$+\infty$	$-\infty$	$0+$	$0-$
Показник	$\alpha > 0$	$\alpha = \frac{k}{2n-1} > 0$	$\alpha > 0$	$\alpha = \frac{k}{2n-1} > 0$
Границя	$+\infty$	$+\infty(-1)^k$	0	0
Показник	$\alpha < 0$	$\alpha = \frac{k}{2n-1} < 0$	$\alpha < 0$	$\alpha = \frac{k}{2n-1} < 0$
Границя	0	0	$+\infty$	$+\infty(-1)^k$
Показник	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$
Границя	1	1	1	1

6. *Значення від добутку*: $(xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha}\ \forall x,\ y \in D(f)$.

7. *Нульове та одиничне значення*: якщо $f(x) = 0$, то $x = 0$; $f(x) = 1$, якщо $x = 1$.

Степеневою функцією комплексної змінної називають таке відображення $f:\ \mathbf{C}\setminus\{0\} \to \mathbf{C}$, для якого $f(z) = \exp(\alpha \ln z) =: z^{\alpha}\quad \forall z \neq 0$, де $\alpha \in \mathbf{C}$ — фіксований показник степеня.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) якщо $f(x) = x^{\alpha}$, то $f(x) = e^{\alpha \ln x}\quad \forall x \in D(f)$;

2) твердження, обернене до 1), є правильним;

3) степінь x^{α} визначений $\forall x \in \mathbf{R}$ і $\forall \alpha \in \mathbf{R}$;

4) якщо $\alpha \in \mathbf{Z}$, то степінь x^{α} визначений $\forall x \neq 0$;

5) твердження, обернене до 4), є правильним;

6) кожна степенева функція не є парною; є непарною; є парною; не є періодичною;

7) на кожному проміжку $\langle a; b\rangle \subset D(f)$ будь-яка степенева функція опукла вниз або вгору?

2. Довести, що $x^m - y^m = (x-y)\left(x^{m-1} + x^{m-2}y + \cdots + xy^{m-2} + y^{m-1}\right)$.

3. Довести, що коли $0 \le \alpha < 1$, то: 1) $(1+x)^{\alpha} \le 1 + \alpha x,\ \ x > -1$;

2)• $\dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \ge 1 + \dfrac{1}{2^{\alpha}} + \dfrac{1}{3^{\alpha}} + \cdots + \dfrac{1}{n^{\alpha}} \ge n^{1-\alpha}\quad \forall n \in \mathbf{N}$.

4. Визначити, коли графік степеневої функції має асимптоти та знайти їх.

5*. Нехай f — неперервна функція на проміжку $(0; +\infty)$ і $f(x) \neq \text{const}$. Довести, що

$$f(xy) = f(x) f(y)\quad \forall x > 0,\ \ y > 0$$

тоді й тільки тоді, коли f — степенева функція.

6. Розв'язати питання про функцію, обернену до степеневої.

7•. Нехай f — диференційовна функція в інтервалі $(0; +\infty)$. Довести, що $f(x) = x^{\alpha}\quad \forall x > 0$ тоді й тільки тоді, коли

$$f'(x) = \frac{\alpha f(x)}{x}\quad \forall x > 0\quad \text{і}\quad f(1) = 1.$$

8. Знайти дані суми:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1}$;   2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1}$.

9. Чи правильні дані твердження, коли $z \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$:

1) якщо $\alpha > 0$, то $\lim\limits_{z\to 0} z^{\alpha} = 0$;   2) $z^n = \exp(n \ln z)\quad \forall n \in \mathbf{N}$, де $z^n := \prod\limits_{k=1}^{n} z$;

3) якщо $z^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z}{n} + i\sin\frac{\arg z}{n}\right)$, то $z^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{\ln z}{n}\right)$;

4) $f(z) = z^{\alpha}$ — неперервна функція на $D(f)$:

5) $(z_1 z_2)^{\alpha} = z_1^{\alpha} z_2^{\alpha}$ $\forall\alpha$, якщо $z_1 \neq 0$ і $z_2 \neq 0$;

6) якщо $\mathrm{Im}(\alpha \ln z) \in (-\pi; \pi]$, то $\ln z^{\alpha} = \alpha \ln z$, зокрема, для $\alpha \in \mathbf{R}$ і $\alpha \arg z \in \in (-\pi; \pi]$ ця рівність правильна?

10. Нехай $\alpha \in \mathbf{R}$. Знайти множину чисел $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, для яких:

1) $z^{\alpha} \in \mathbf{R}$; 2) $z^{\alpha} > 0$; 3) $z^{\alpha} < 0$; 4)• $z^{\alpha} \notin \mathbf{R}$; 5) z^{α}— суто уявне число.

11. Визначити, чи мають розв'язки дані рівняння на множині **C**, і якщо мають, то знайти їх:

1)• $z^{i} = 1$; 2) $z^{2} = i$; 3) $z^{\frac{1}{2}} = 1$; 4) $z^{-i} = -1$; 5) $z^{2i} = -1$; 6) $z^{-\frac{1}{3}} = i$.

Зразки розв'язування задач

3. 2) Права частина даної нерівності доводиться тривіально, бо

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{n^{\alpha}} + \frac{1}{n^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{\alpha}} = \frac{n}{n^{\alpha}} = n^{1-\alpha}.$$

Для доведення лівої частини нерівності скористаємось методом математичної індукції. Для $n = 1$ дістаємо правильну нерівність $\frac{1}{1-\alpha} \geq 1$. Припустимо, що ця нерівність правильна для $n = m$, тобто

$$\frac{m^{1-\alpha}}{1-\alpha} \geq 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{m^{\alpha}},$$

і доведемо її правильність для $n = m + 1$.

Маємо

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{m^{\alpha}} + \frac{1}{(m+1)^{\alpha}} \leq \frac{m^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{(m+1)^{\alpha}} \leq \frac{(m+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^{1-\alpha}(m+1)^{\alpha} + 1 - \alpha \leq m + 1 \Leftrightarrow \left(\frac{m+1}{m}\right)^{\alpha} m + 1 \leq m + 1 + \alpha \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\alpha} \leq 1 + \frac{\alpha}{m}.$$

Остання нерівність правильна внаслідок нерівності 1) даної вправи. Тому, згідно з принципом математичної індукції, дістаємо, що ліва частина нерівності 2) правильна $\forall n \in \mathbf{N}$.

7. Якщо $f(x) = x^{\alpha}$ $\forall x > 0$, то $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} = \frac{\alpha f(x)}{x}$ $\forall x > 0$ і $f(1) = 1$. Припустимо, що $f'(x) = \frac{\alpha f(x)}{x}$ $\forall x > 0$ і $f(1) = 1$. Розглянемо функцію $g(x) = f(x)x^{-\alpha}$. Тоді

$$g'(x) = f'(x)x^{-\alpha} - \alpha x^{-\alpha-1} f(x) = x^{-\alpha}\left(f'(x) - \frac{\alpha f(x)}{x}\right) = 0 \quad \forall x > 0,$$

тому $g(x) = \mathrm{const}$ на $(0; +\infty)$. Оскільки $g(1) = f(1) \cdot 1^{-\alpha} = 1$, то $g(x) = f(x) \cdot x^{-\alpha} = 1$ $\forall x > 0$, а отже, $f(x) = x^{\alpha}$ $\forall x > 0$.

10. 4) Оскільки

$$z^{\alpha}=\exp(\alpha\ln z)=\exp(\alpha\ln|z|+i\alpha\arg z)=e^{\alpha\ln|z|}(\cos(\alpha\arg z)+i\sin(\alpha\arg z)),$$

то

$$\operatorname{Re} z^{\alpha}=|z|^{\alpha}\cos(\alpha\arg z), \text{ а } \operatorname{Im} z^{\alpha}=|z|^{\alpha}\sin(\alpha\arg z).$$

Отже, $z^{\alpha}\notin \mathbf{R}$ тоді й тільки тоді, коли $\sin(\alpha\arg z)\neq 0$, тобто коли $\alpha\arg z\neq\pi k \quad \forall k\in\mathbf{Z}$.

11. 1) За означенням маємо

$$z^{i}=\exp(i\ln z)=\exp(i\ln|z|-\arg z)=\exp(i\ln|z|)\cdot e^{-\arg z}=e^{-\arg z}(\cos\ln|z|+i\sin\ln|z|).$$

Тому $z^{i}=1$ тоді й тільки тоді, коли

$$e^{-\arg z}\cos\ln|z|=1 \text{ і } e^{-\arg z}\sin\ln|z|=0,$$

тобто $\ln|z|=\pi k$. Звідси $|z|=e^{\pi k}$, $k\in\mathbf{Z}$, і $e^{-\arg z}(-1)^{k}=1\Leftrightarrow k=2m$, $m\in\mathbf{Z}$, $\arg z=0$ і $|z|=e^{\pi k}\Leftrightarrow z>0$ і $z=e^{2\pi m}$, $m\in\mathbf{Z}$. Отже, $z^{i}=1\Leftrightarrow z=e^{2\pi m}$, $m\in\mathbf{Z}$.

§ 7.4. Тригонометричні та гіперболічні функції

Нехай радіус-вектор точки M, що лежить на одиничному колі, утворює з додатним напрямом осі Ox кут α радіан, де $\alpha\in\mathbf{R}$. Тоді:

косинусом числа α називають абсцису точки M і позначають $\cos\alpha$. *Функцію* f, що визначається рівністю $f(x)=\cos x$, називають *косинусом*;

синусом числа α називають ординату точки M і позначають $\sin\alpha$. *Функцію* f, що визначається рівністю $f(x)=\sin x$, називають *синусом*;

тангенсом числа α називають відношення $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=:\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos\alpha\neq 0$. *Функцію* f, визначену рівністю $f(x)=\operatorname{tg}x$, називають *тангенсом*;

котангенсом числа α називають відношення $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=:\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\sin\alpha\neq 0$. *Функцію* f, визначену рівністю $f(x)=\operatorname{ctg}x$, називають *котангенсом*.

Кожну з цих функцій називають *тригонометричною*.

Основні властивості тригонометричних функцій

1. *Область визначення*: $D(\sin)=D(\cos)=\mathbf{R}$, $D(\operatorname{tg})=\mathbf{R}\setminus\left\{x:\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$, $D(\operatorname{ctg})=\mathbf{R}\setminus\{x:\ x=\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

2. *Парність*: косинус — парна функція, а синус, тангенс і котангенс — непарні функції.

3. *Періодичність*: тригонометричні функції періодичні з основним періодом $T=2\pi$ для косинуса і синуса і $T=\pi$ для тангенса і котангенса.

4. *Неперервність*: тригонометричні функції неперервні в $D(f)$.

5. *Граничні значення*: якщо $x_0=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $x_1=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, то $\operatorname{tg}(x_0\pm)=\mp\infty$, а $\operatorname{ctg}(x_1\pm)=\pm\infty$.

6. *Значення в деяких точках та формули зведення* $(k \in \mathbf{Z})$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}+2\pi k \pm x_0$	$\pi+2\pi k \pm x_0$	$\frac{3\pi}{2}+2\pi k \pm x_0$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos x_0$	$\mp\sin x_0$	$-\cos x_0$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\mp\sin x_0$	$-\cos x_0$	$\pm\sin x_0$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$\mp\operatorname{ctg} x_0$	$\pm\operatorname{tg} x_0$	$\mp\operatorname{ctg} x_0$
$\operatorname{ctg} x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\mp\operatorname{tg} x_0$	$\pm\operatorname{ctg} x_0$	$\mp\operatorname{tg} x_0$

7. *Теореми додавання та віднімання*:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \quad \operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}.$$

8. *Значення від подвійного аргументу*:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}, \quad \operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}.$$

9. *Співвідношення між різними тригонометричними функціями*:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x},$$

$$\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

10. *Монотонність*: синус і тангенс зростають на інтервалах $\left(-\frac{\pi}{2}+Tk;\ \frac{\pi}{2}+Tk\right)$ $\forall k \in \mathbf{Z}$, а косинус і котангенс спадають на інтервалах $(Tk; \pi + Tk)$ $\forall k \in \mathbf{Z}$, синус спадає на $\left(\frac{\pi}{2}+Tk;\ \frac{3\pi}{2}+Tk\right)$ $\forall k \in \mathbf{Z}$, а косинус зростає на $(\pi + Tk;\ 2\pi + Tk)$ $\forall k \in \mathbf{Z}$, де T — найменший додатний період відповідної функції.

11. *Множина значень*: $E(\sin) = E(\cos) = [-1; 1]$, $E(\operatorname{tg}) = E(\operatorname{ctg}) = \mathbf{R}$.

12. *Опуклість і точки перегину* $(k \in \mathbf{Z})$:

f	Опукла вгору	Опукла вниз	Точки перегину
$\sin x$	$(2\pi k; \pi + 2\pi k)$	$(-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$	$x = \pi k$
$\cos x$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$
$\operatorname{tg} x$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$	$\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$	$x = \pi k$
$\operatorname{ctg} x$	$\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right)$	$\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

Оскільки $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$, то

$$\cos x = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}, \tag{1}$$

$$\sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}. \tag{2}$$

Ці рівності дають можливість ввести такі означення тригонометричних функцій комплексної змінної:

$$f(z) = \sin z := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \quad \forall z \in \mathbf{C},$$

$$f(z) = \cos z := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \quad \forall z \in \mathbf{C},$$

$$\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z := \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Для цих функцій зберігаються властивості 2—9, а властивість 11 набирає вигляду

$$E(\sin) = E(\cos) = \mathbf{C}, \; E(\operatorname{tg}) = E(\operatorname{ctg}) = \mathbf{C} \setminus \{\pm i\}.$$

Гіперболічні функції косинус, синус, тангенс і котангенс комплексної змінної визначаються відповідно рівностями:

$$\operatorname{ch} z := \frac{\exp z + \exp(-z)}{2}, \quad \operatorname{sh} z := \frac{\exp z - \exp(-z)}{2},$$

$$\operatorname{th} z := \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z := \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) будь-яка тригонометрична функція монотонна на кожному інтервалі $\left(\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{2}(k+1)\right)$, $k \in \mathbf{Z}$;

2) будь-яка тригонометрична функція зберігає знак на кожному інтервалі $\left(\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{2}(k+1)\right)$, $k \in \mathbf{Z}$;

3) кожна тригонометрична функція має границю у будь-якій точці $x_0 \in \mathbf{R}$;

4) кожна тригонометрична функція не має границі в точках $x_0 = -\infty$ і $x_1 = +\infty$;

5) теореми додавання та віднімання мають місце для будь-яких x, $y \in D(f)$, де f — будь-яка тригонометрична функція;

6) кожна тригонометрична функція не має оберненої функції;

7) будь-яка тригонометрична функція, розглядувана на довільному проміжку монотонності, має обернену функцію?

2. Довести, що:

1) $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$; 2) $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$;

3) $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$; 4) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\sin\frac{\alpha + \beta}{2}$;

5) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$; 6) $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

7) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$; 8) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$;

9) $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$;

10) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$;

11) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$.

3. Визначити, які тригонометричні функції мають асимптоти та знайти їх.

4•. Довести, що $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin x_k \ge \left|\sin \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right|$, де $x_k \in [0; \pi]$ $\forall k = \overline{1, n}$.

5. Знайти дані суми:

1) $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$; 2) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$;

3) $\sin x + 2\sin 2x + \ldots + n\sin nx$; 4) $\cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx$;

5) $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x$;

6) $\sin x + 3\sin 3x + \ldots + (2n-1)\sin(2n-1)x$.

6. Довести, що коли $x \ne 0$ і $\cos\frac{x}{2^k} \ne 0$ $\forall k \in \mathbf{N}$, то й $\sin\frac{x}{2^k} \ne 0$ $\forall k \in \mathbf{N}$.

7. Знайти значення:

1)• добутку $\prod\limits_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k}$; 2) суми $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}$, коли $x \in (-\pi; \pi)$.

8. Довести, що $\forall x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\begin{cases}0, & \text{коли } \exists k_0: \ \cos\frac{x}{2^{k_0}}=0,\\ \frac{\sin x}{x}, & \text{коли } \cos\frac{x}{2^k}\neq 0,\ k\in\mathbf{N}.\end{cases}$$

9. Визначити множину часткових границь кожної тригонометричної функції у нескінченно віддалених точках.

10*. Нехай f — неперервна функція в інтервалі $(-\infty;\ +\infty)$, $f(x)\neq \text{const}$ і $f(x)\leq 1 \quad \forall x\in\mathbf{R}$. Довести, що

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) \quad \forall x,\ y\in\mathbf{R}$$

тоді й тільки тоді, коли $f(x)=\cos ax$, де $a\neq 0$ — деяка стала.

11. Нехай f — двічі диференційовна функція в інтервалі $(-\infty;+\infty)$. Довести, що:

1)• $f''(x)+f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbf{R}$ і $f(0)=1,\ \ f'(0)=0 \Leftrightarrow f(x)=\cos x$;

2) $f''(x)+f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbf{R}$ і $f(0)=0,\ \ f'(0)=1 \Leftrightarrow f(x)=\sin x$.

12. Чи правильні дані твердження:

1)• якщо $z=x+iy$, то $\operatorname{Re}\cos z=\cos x \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im}\cos z=-\sin x \operatorname{sh} y$, $\operatorname{Re}\sin z = \sin x \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im}\sin z=\cos x \operatorname{sh} y$;

2) $\cos z=1,\ z\in\mathbf{C}\Leftrightarrow z=2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$; 3) $\sin z=0,\ z\in\mathbf{C}\Leftrightarrow z=\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$;

4) $|\cos z|\leq 1 \quad \forall z\in\mathbf{C}$; 5) $\sin z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow z\in\mathbf{R}$;

6) $\sin(z+T)=\sin z \quad \forall z\in\mathbf{C}\Leftrightarrow T=2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$;

7) рівняння $\sin z=2$ не має коренів;

8) $\cos iz=\operatorname{ch} z$, $\sin iz=i\operatorname{sh} z$, $\operatorname{tg} iz=i\operatorname{th} z$, $\operatorname{ctg} iz=-i\operatorname{cth} z$?

13. Визначити $\operatorname{Re} f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$ і $|f(z)|$, якщо:

1) $f(z)=\operatorname{tg} z$; 2) $f(z)=\operatorname{ctg} z$; 3) $f(z)=\operatorname{sh} z$;

4) $f(z)=\operatorname{ch} z$; 5) $f(z)=\operatorname{th} z$; 6) $f(z)=\operatorname{cth} z$.

14•. Визначити множини, на яких тригонометричні та гіперболічні функції набувають значень: а) дійсних; б) уявних; в) суто уявних.

15. Нехай $z=x+iy$. Довести, що:

1) $\operatorname{sh}|y|\leq|\sin z|\leq\operatorname{ch}|y|$; 2) $\operatorname{sh}|y|\leq|\cos z|\leq\operatorname{ch}|y|$;

3) $\dfrac{2e^{2y}}{1+e^{2y}}\leq|\operatorname{tg} z+i|\leq\dfrac{2e^{2y}}{1-e^{2y}} \quad \forall y<0$;

4) $\dfrac{2e^{-2y}}{1+e^{-2y}}\leq|\operatorname{tg} z-i|\leq\dfrac{2e^{-2y}}{1-e^{-2y}} \quad \forall y>0$;

5) $\sin z\to\infty,\ \ y\to\pm\infty$ і $\cos z\to\infty,\ \ y\to\pm\infty$.

16. Розв'язати дані рівняння:

1) $\sin z = \frac{4i}{3}$; 2) $\sin z = \frac{5}{3}$; 3)• $\cos z = \frac{3i}{4}$; 4) $\cos z = \frac{3+i}{4}$;

5) $\operatorname{tg} z = \frac{5i}{3}$; 6) $\operatorname{ctg} z = -\frac{3i}{5}$; 7) $\operatorname{sh} z = \frac{i}{2}$; 8) $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}$.

Зразки розв'язування задач

4. При $n = 1$ нерівність набирає вигляду $|\sin x_1| \le \sin x_1$ і є правильною, оскільки для $x_1 \in [0; \pi]$ маємо $|\sin x_1| = \sin x_1$.

Припустимо, що задана нерівність правильна для $n = m$, тобто $\left|\sin \sum\limits_{k=1}^{m} x_k\right| \le \sum\limits_{k=1}^{m} \sin x_k$, і розглянемо випадок $n = m+1$. Маємо

$$\left|\sin \sum_{k=1}^{m+1} x_k\right| \le \left|\sin \sum_{k=1}^{m} x_k\right| + |\sin x_{m+1}| \le \sum_{k=1}^{m} \sin x_k + \sin x_{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} \sin x_k .$$

Внаслідок принципу математичної індукції задана нерівність правильна для всіх $n \in \mathbf{N}$.

7. 1) Якщо $\cos\frac{x}{2^k} = 0$ при деякому $k \le n$, то $\prod\limits_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = 0$. Якщо $x = 0$, то $\cos\frac{x}{2^k} = 1$, $k \in \mathbf{N}$, тобто $\prod\limits_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = 1$. Припустимо, що $x \ne 0$ і $\cos\frac{x}{2^k} \ne 0 \quad \forall k \in \mathbf{N}$. Тоді згідно із вправою 6 маємо $\sin\frac{x}{2^n} \ne 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$ і

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{2\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}}{2\sin\frac{x}{2^n}} \prod_{k=1}^{n-1} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{2\sin\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^{n-1}}}{2^2\sin\frac{x}{2^n}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n-2} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{2\sin\frac{x}{2^{n-2}}\cos\frac{x}{2^{n-2}}}{2^3\sin\frac{x}{2^n}} \prod_{k=1}^{n-3} \cos\frac{x}{2^k} = \cdots = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} .$$

Отже,

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \exists\, k \le n: \ \cos\frac{x}{2^k} = 0, \\ 1, & \text{якщо } x = 0, \\ \dfrac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}, & \text{якщо } \cos\frac{x}{2^k} \ne 0, \ k \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

11. 1) Якщо $f(x) = \cos x$, то $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$ і $f''(x) + f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$, $f(0) = 1$ і $f'(0) = 0$.

Припустимо тепер, що $f''(x) + f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$, $f(0) = 1$ і $f'(0) = 0$. Треба довести, що $f(x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbf{R}$. Розглянемо функцію $\varphi(x) = f(x) - \cos x$, $x \in \mathbf{R}$. Тоді $\varphi'(x) = f'(x) +$

$+\sin x$, $\varphi''(x)=f''(x)+\cos x=-f(x)+\cos x=-(f(x)-\cos x)=-\varphi(x)$ і $\varphi''(x)+\varphi(x)=$ $=0\ \ \forall x\in\mathbf{R}$, $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$. Отже, згідно з твердженням задачі 8 § 6.8 маємо $\varphi(x)\equiv 0$, тобто $f(x)=\cos x\ \ \forall x\in\mathbf{R}$.

12. 1) Якщо $z=x+iy$, то згідно з формулами (1) і (2) дістаємо

$$\cos z=\cos(x+iy)=\frac{1}{2}\left(\exp i(x+iy)+\exp(-i(x+iy))\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{-y}(\cos x+i\sin x)+e^{y}(\cos x-i\sin x)\right)=\cos x\ \mathrm{ch}\,y-i\sin x\ \mathrm{sh}\,y,$$

звідки $\operatorname{Re}\cos z=\cos x\ \mathrm{ch}\,y$, $\operatorname{Im}\cos z=-\sin x\ \mathrm{sh}\,y$.

Аналогічні міркування проводимо і для $\sin z$. Отже, задане твердження правильне.

14. Розглянемо функцію $f(z)=\cos z$. Оскільки $\operatorname{Re}f(z)=\cos x\ \mathrm{ch}\,y$, $\operatorname{Im}f(z)=-\sin x\ \mathrm{sh}\,y$, то $f(z)\in\mathbf{R}$ тоді й тільки тоді, коли $\sin x\ \mathrm{sh}\,y=0$, а це рівносильне тому, що $\sin x=0$ або $\mathrm{sh}\,y=\dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}=0$, тобто $x=\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$, або $y=0$. Отже:

а) $\{z:\ \cos z\in\mathbf{R}\}=\{z=x+iy:\ x=\pi k$ або $y=0\}$;

б) $\{z:\ \cos z\notin\mathbf{R}\}=\mathbf{C}\setminus\{z:\ \cos z\in\mathbf{R}\}=\mathbf{C}\setminus\{z=x+iy:\ x=\pi k$ або $y=0\}=\{z=x+iy:\ x\neq\pi k$ і $y\neq 0\}$;

в) значення $\cos z$ є суто уявним, якщо воно є уявним і, крім того, $\operatorname{Re}\cos z=0$, тобто $\cos x\ \mathrm{ch}\,y=0$, звідки $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$, і $y\neq 0$.

16. 3) $\cos z=\dfrac{3i}{4}\Leftrightarrow\operatorname{Re}\cos z=0$ і $\operatorname{Im}\cos z=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow\cos x\ \mathrm{ch}\,y=0$ і $\sin x\ \mathrm{sh}\,y=-\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow x=$ $=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$, і

$$(-1)^k\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=-\frac{3}{4}\Leftrightarrow 2\left(e^{y}\right)^2(-1)^k+3e^{y}-2(-1)^k=0\Leftrightarrow e^{y}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4(-1)^k}=\frac{-3\pm 5}{4(-1)^k},$$

або

$$e^{y}=\begin{cases}2, & k=2m-1,\\ \dfrac{1}{2}, & k=2m,\end{cases}\Leftrightarrow y=\begin{cases}\ln 2, & k=2m-1,\\ -\ln 2, & k=2m,\end{cases}=(-1)^{k+1}\ln 2,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Отже, $\cos z=\dfrac{3i}{4}\Leftrightarrow z=\dfrac{\pi}{2}+\pi k+i(-1)^{k+1}\ln 2,\ k\in\mathbf{Z}$.

§ 7.5. Обернені тригонометричні та обернені гіперболічні функції

Арксинусом числа $x\in[-1;1]$ називають таке число $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, для якого $\sin y=x$, і записують $y=\arcsin x$. *Функцію* $f:\ [-1;1]\leftrightarrow\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, яка визначається рівністю $f(x)=\arcsin x$, називають *арксинусом*.

Арккосинусом числа $x \in [-1;\ 1]$ називають таке число $y \in [0; \pi]$, для якого $\cos y = x$, і записують $y = \arccos x$. *Функцію* $f:\ [-1; 1] \leftrightarrow [0; \pi]$, яка визначається рівністю $f(x) = \arccos x$, називають *арккосинусом.*

Арктангенсом числа $x \in \mathbf{R}$ називають таке число $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, для якого $\operatorname{tg} y = x$, і записують $y = \operatorname{arctg} x$. *Функцію* $f:\ \mathbf{R} \leftrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, яка визначається рівністю $f(x) = \operatorname{arctg} x$, називають *арктангенсом.*

Арккотангенсом числа $x \in \mathbf{R}$ називають таке число $y \in (0; \pi)$, для якого $\operatorname{ctg} y = x$, і записують $y = \operatorname{arcctg} x$. *Функцію* $f:\ \mathbf{R} \leftrightarrow (0; \pi)$, яка визначається рівністю $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, називають *арккотангенсом.*

Основні властивості обернених тригонометричних функцій

1. *Область визначення*: D (arcsin) = D (arccos) = $[-1; 1]$, D (arctg) = = D (arcctg) = $\mathbf{R}$.

2. *Монотонність*: арксинус і арктангенс зростають, а арккосинус і арккотангенс спадають у своїй області визначення.

3. *Неперервність*: обернені тригонометричні функції неперервні в $D(f)$.

4. *Множина значень*: E (arcsin) = $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, E (arccos) = $[0; \pi]$, E (arctg) = = $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, E (arcctg) = $(0; \pi)$.

5. *Опуклість і точки перегину*:

f	Опукла вгору	Опукла вниз	Точка перегину
$\arcsin x$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$x = 0$
$\arccos x$	$(0; 1)$	$(-1; 0)$	$x = 0$
$\operatorname{arctg} x$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$	$x = 0$
$\operatorname{arcctg} x$	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$x = 0$

Арксинусом, арккосинусом, арктангенсом і арккотангенсом комплексного числа z називають множину таких чисел $w \in \mathbf{C}$, для яких відповідно $\sin w =$ $= z$, $\cos w = z$, $\operatorname{tg} w = z$ і $\operatorname{ctg} w = z$. При цьому відповідно записують: $w =$ $= \operatorname{Arcsin} z$, $w = \operatorname{Arccos} z$, $w = \operatorname{Arctg} z$ і $w = \operatorname{Arcctg} z$.

Гіперболічним арксинусом, арккосинусом, арктангенсом і арккотангенсом комплексного числа z називають множину таких чисел $w \in \mathbf{C}$, для яких відповідно $\operatorname{sh} w = z$, $\operatorname{ch} w = z$, $\operatorname{th} w = z$ і $\operatorname{cth} w = z$. При цьому відповідно записують $w = \operatorname{Arsh} z$, $w = \operatorname{Arch} z$, $w = \operatorname{Arth} z$ і $w = \operatorname{Arcth} z$.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) арксинус – це функція, обернена до синуса;
2) арккосинус числа x – це таке число y, для якого $\cos y = x$;
3) $y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x$;
4) якщо $y = \operatorname{arcctg} x$, то $\operatorname{ctg} y = x$;
5) твердження, обернене до 4), є правильним;
6) кожна з обернених тригонометричних функцій є парною або непарною;
7) кожна з обернених тригонометричних функцій не має точок екстремуму?

2•. Показати, що функції синус і тангенс, розглядувані на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, мають обернені функції. Визначити, як ці обернені функції пов'язані з $\arcsin x$ та $\operatorname{arctg} x$.

3. Сформулювати та розв'язати задачу, аналогічну до задачі 2, для функцій косинус і котангенс.

4. Визначити, які обернені тригонометричні функції мають асимптоти, та знайти їх.

5•. Визначити функцію $y = f(x)$, задану параметрично системою $x = \operatorname{arctg} t$, $y = \operatorname{arcctg} t$, $t \in \mathbf{R}$.

6. Побудувати графіки даних функцій:

1) $y = \sin(\arcsin x)$; 2) $y = \arcsin(\sin x)$; 3) $y = \cos(\arccos x)$;

4)• $y = \arccos(\cos x)$; 5) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$; 6) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$;

7) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$; 8) $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$;

9) $y = \arcsin x + \arcsin\sqrt{1-x^2}$; 10) $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

7. Довести, що для $x,\ y \in [-1;\ 1]$:

1) $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$, якщо $xy \le 0$;

2) $\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}\right)$, якщо $x + y \ge 0$;

3)• $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$, якщо $xy < 1$;

4) $\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{x+y}{1-xy} + \operatorname{sign} x\pi$, якщо $xy > 1$.

8. Довести, що обернені тригонометричні функції рівномірно неперервні у своїй області визначення.

9. Чи правильні дані твердження:

1) множини $\operatorname{Arcsin} z$ і $\operatorname{Arccos} z$ зчисленні $\forall z \in \mathbf{C}$;
2) твердження 1) правильне для $\operatorname{Arctg} z$ і $\operatorname{Arcctg} z$;
3) $\operatorname{Arch} z = i \operatorname{Arccos} z$, а $\operatorname{Arsh} z = i \operatorname{Arcsin}(-iz)$;
4) $\arccos z$ є одним із значень $\operatorname{Arccos} z$, якщо $z = x \in [-1; 1]$;
5) якщо $z = x \in \mathbf{R}$, то $\operatorname{Arctg} z \cap \mathbf{R} = \{\operatorname{arctg} x\}$?

10. Визначити, для яких z виконуються дані рівності:

1) $\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$; 2) $\operatorname{Arcsin} z = -\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$;

3)• $\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$; 4) $\operatorname{Arcctg} z = \frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{z+i}{z-i}$;

5) $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$; 6) $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)$;

7) $\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}$; 8) $\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}$.

11. Визначити, чи мають дані рівняння дійсні корені:

1) $\sin z = 2$; 2) $\operatorname{sh} z = 2$; 3)• $\operatorname{tg} z = i$; 4) $\operatorname{cth} z = -1$.

12. Нехай $z = x \in \mathbf{R}$. Знайти $\operatorname{Re} w(x)$ і $\operatorname{Im} w(x)$, якщо:

1) $w(x) = \operatorname{Arccos} x$; 2) $w(x) = \operatorname{Arcsin} x$; 3)• $w(x) = \operatorname{Arctg} x$;

4) $w(x) = \operatorname{Arcctg} x$; 5) $w(x) = \operatorname{Arsh} x$; 6) $w(x) = \operatorname{Arch} x$;

7) $w(x) = \operatorname{Arcth} x$; 8) $w(x) = \operatorname{Arth} x$.

Зразки розв'язування задач

2. Розглянемо функцію $f(x) = \sin x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, де $k \in \mathbf{Z}$ – фіксоване. На цьому проміжку синус є строго монотонною і неперервною функцією. Отже, виконано всі умови теореми про існування, неперервність і монотонність оберненої функції, за якою існує функція, обернена до заданої, тобто рівняння $\sin x = y$ має єдиний розв'язок відносно $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ $\forall k \in \mathbf{Z}$. Знайдемо цей розв'язок:

$$\begin{cases}-\frac{\pi}{2}+\pi k < x < \frac{\pi}{2}+\pi k, \\ \sin x = y,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{\pi}{2} < x-\pi k < \frac{\pi}{2}, \\ \sin x = y,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{\pi}{2} < x-\pi k < \frac{\pi}{2}, \\ \sin((x-\pi k)+\pi k) = y,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(-1)^k \sin(x-\pi k) = y, \\ -\frac{\pi}{2} < x-\pi k < \frac{\pi}{2},\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x-\pi k = \arcsin(-1)^k\ y, \\ -\frac{\pi}{2} < x-\pi k < \frac{\pi}{2},\end{cases} \Leftrightarrow\ x = \pi k + (-1)^k \arcsin y,$$

де $k \in \mathbf{Z}$. Зокрема, якщо $k = 1$, то $x = \pi - \arcsin y$, а якщо $k = 2$, то $x = 2\pi + \arcsin y$. Міркування для інших випадків аналогічні.

5. Оскільки $x = \operatorname{arctg} t$, то $t = \operatorname{tg} x$, де $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Отже, $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} x)$, де $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Проте $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, причому $0 < \frac{\pi}{2}-x < \pi$, тому $y = \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$, $y \in (0;\pi)$, тобто $\operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, де y і $\frac{\pi}{2}-x \in (0;\pi)$, а отже, $y = \frac{\pi}{2}-x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Це і є шукана функція.

6. 4) Оскільки задана функція є 2π-періодичною, то досить побудувати її графік на відрізку $[0;\,2\pi]$. Якщо $x \in [0;\,\pi]$, то маємо $\cos y = \cos x$, де $x,\ y \in [0;\,\pi]$, тобто $y = x$, $x \in [0;\,\pi]$. Якщо $x \in [\pi;\,2\pi]$, то $x - \pi \in [0;\,\pi]$ і $2\pi - x \in [0;\,\pi]$, і тоді $\cos x = \cos(2\pi - x)$. Отже, $\cos y = \cos(2\pi - x) = \cos(\arccos(\cos(2\pi - x)))$, де y і $2\pi - x \in [0;\,\pi]$, тобто $y = 2\pi - x$, $x \in [\pi;\,2\pi]$. Таким чином, $y = \arccos(\cos x)$, $x \in [0;\,2\pi]$, тоді й тільки тоді, коли

$$y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in [0;\,\pi], \\ 2\pi - x, & \text{якщо } x \in [\pi;\,2\pi]. \end{cases}$$

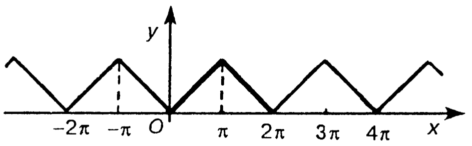


Рис. 16

Тепер легко побудувати графік заданої функції, враховуючи її 2π-періодичність (рис. 16).

7. 3) Для $xy < 1$ можливі випадки:

а) принаймні один із співмножників дорівнює нулю, наприклад $x = 0$;

б) принаймні один із співмножників, наприклад x, є додатним, тоді $y < \dfrac{1}{x}$;

в) обидва співмножники від'ємні.

Якщо має місце випадок а), то задана рівність набирає вигляду $\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} y$ і, отже, є правильною рівністю.

У випадку б) маємо $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} y < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, тобто ліва та права частини заданої рівності лежать в інтервалі $\left(-\dfrac{\pi}{2};\,\dfrac{\pi}{2}\right)$, а тому

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) =$$

$$= \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}\right) \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)} = \frac{x+y}{1-xy} \Leftrightarrow \frac{x+y}{1-xy} = \frac{x+y}{1-xy}.$$

Отже, задана рівність правильна і для випадку б).

Нарешті, якщо $x < 0$ і $y < 0$, то $-x > 0$ і $-y > 0$. Враховуючи тепер, що $\operatorname{arctg}\,(-x) + \operatorname{arctg}\,(-y) = \operatorname{arctg}\dfrac{(-x)+(-y)}{1-(-x)(-y)}$, дістаємо $-\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = -\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$, тобто $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$ (тут спрацювала властивість непарності функції арктангенса). З урахуванням випадку б) дістаємо, що задана рівність є правильною і для випадку в).

10. 3) За означенням маємо

$$w = \operatorname{Arctg} z \Leftrightarrow z = \operatorname{tg} w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{\exp(iw) - \exp(-iw)}{i(\exp(iw) + \exp(-iw))} = \frac{\exp(2iw) - 1}{i(\exp(2iw) + 1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - iz)\exp(2iw) = 1 + iz \Leftrightarrow \exp(2iw) = \frac{1+iz}{1-iz} \Leftrightarrow 2iw = \operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}.$$

Отже, $\operatorname{Arctg} z = \dfrac{1}{2i}\operatorname{Ln}\dfrac{1+iz}{1-iz}$. Ця рівність справедлива тоді й тільки тоді, коли $1 + iz \neq 0$ і $1 - iz \neq 0$, тобто $z \neq \pm i$.

11. 3) Оскільки $\operatorname{tg} z = a \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{2i}\operatorname{Ln}\dfrac{1+ia}{1-ia}$, то $a \neq \pm i$. Тому рівняння $\operatorname{tg} z = i$ не має розв'язків.

12. 3) Якщо $z = x \in \mathbf{R}$, то

$$w = \operatorname{Arctg} x = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+ix}{1-ix} = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1-x^2+i\cdot 2x}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\ln \sqrt{\frac{\left(1-x^2\right)^2+4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}} + i\left(\arg\left(\frac{1-x^2}{1+x^2} + i\frac{2x}{1+x^2} \right) + 2\pi k \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\arg\left(\frac{1-x^2}{1+x^2} + i\frac{2x}{1+x^2} \right) + \pi k, \ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Нехай

$$1-x^2 > 0 \Rightarrow \arg\left(\frac{1-x^2}{1+x^2} + i\frac{2x}{1+x^2} \right) = \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} = 2\operatorname{arctg} x,$$

оскільки

$$\left(\operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} - 2\operatorname{arctg} x \right)' = \frac{1}{1+\frac{4x^2}{\left(1-x^2\right)^2}} \cdot 2\frac{1-x^2+2x^2}{\left(1-x^2\right)^2} -$$

$$-2\cdot\frac{1}{1+x^2} = 0 \quad \forall x: \ \ |x| < 1 \Rightarrow w = \operatorname{arctg} x + \pi k, \ \ k \in \mathbf{Z}, \ \ 1-x^2 > 0.$$

Якщо $x = \pm 1$, то $w = \frac{1}{2}\arg(\pm i) + \pi k = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k = \operatorname{arctg} x + \pi k$.

Якщо $1-x^2 < 0$ і $x \geq 0$, то $x > 1$ і

$$w = \frac{1}{2} \arg\left(\frac{1-x^2}{1+x^2} + i\frac{2x}{1+x^2} \right) + \pi k = \frac{1}{2}\left(\pi + \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} \right) + \pi k = \operatorname{arctg} x + \pi k$$

(згідно із вправою 7.4).

Якщо $1-x^2 < 0$ і $x < 0$, то, враховуючи результат вправи 7.4), дістаємо

$$w = \frac{1}{2} \arg\left(\frac{1-x^2}{1+x^2} + i\frac{2x}{1+x^2} \right) = \frac{1}{2}\left(-\pi + \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} \right) = \operatorname{arctg} x + \pi k.$$

Отже, $\forall x \in \mathbf{R}$ маємо $\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Тому $\operatorname{Re} w(x) = \operatorname{arctg} x + \pi k$ і $\operatorname{Im} w(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

Розділ 8 НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

§ 8.1. Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла

Функцію F називають *первісною* для функції f на проміжку $\langle a; b\rangle$, якщо $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle a; b\rangle$.

Якщо F — деяка первісна для функції f на проміжку $\langle a; b\rangle$, то множина всіх первісних заданої функції у цьому проміжку має вигляд $\{F(x) + C,\ C \in \mathbf{R}\}$. Цю множину називають *невизначеним інтегралом* функції f на проміжку $\langle a; b\rangle$ і записують

$$\int f(x)dx = F(x) + C,\ C \in \mathbf{R},\ x \in \langle a; b\rangle.$$

Символ $\int$ називають *знаком невизначеного інтеграла*, $f(x)$ — *підінтегральною функцією*, $f(x)\ dx$ — *підінтегральним виразом*, x — *змінною інтегрування*.

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1.$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1.$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
5. $\int \cos x\ dx = \sin x + C.$
6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
8. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + C,\ a \neq 0.$
9. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C,\ a>0.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C,\ a \neq 0.$

Рівності 1—11 правильні у довільному проміжку, який належить області визначення підінтегральної функції. Рівності 8, 10 слід розуміти як рівність множин.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) якщо F — первісна для деякої функції f на проміжку $\langle a; b\rangle$, то F — неперервна на цьому проміжку;

2) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

3) кожна функція f, яка визначена на проміжку $\langle a; b\rangle$, має первісну на ньому;

4)• якщо функція f має первісну на проміжку $\langle a; b\rangle$, то вона не має точок розриву першого роду на цьому проміжку;

5) якщо функція f має на проміжку $\langle a; b\rangle$ обмежену первісну F, то і інші її первісні обмежені на цьому проміжку;

6) якщо функція f обмежена на проміжку $\langle a; b\rangle$, то її первісна F також обмежена на цьому проміжку?

2. Виконати наведені завдання усно.

1) Чи є F первісною для функції f на вказаних проміжках:

а) $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x,\ f(x) = (x+1)^2,\ (0; 5),\ [-3; +\infty]$;

б) $F(x) = \frac{1}{x-2},\ f(x) = -\frac{1}{(x-2)^2},\ (-\infty; 1),\ [1; 3)$;

в) $F(t) = \ln\left(1-t^2\right),\ f(t) = -\frac{2t}{1-t^2},\ (-1; 1),\ \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$;

г) $F(u) = 2e^{\sqrt{u}},\ f(u) = \frac{e^{\sqrt{u}}}{\sqrt{u}},\ (0; +\infty),\ [0; +\infty)$?

2) Знайти первісну для функції $f(x) = \cos x$, яка в точці $x = \pi$ набуває значення, що дорівнює 5.

3) Відомо, що дві первісні для функції $f(x) = e^x$ в точці $x = 12$ відрізняються на 3. На скільки відрізняються ці самі первісні у точці $x = 120$?

4) Графік якої первісної для функції $f(x) = \frac{1}{x}$ проходить через точку (1, 2)?

3. Прискорення при прямолінійному русі точки змінюється за законом $a = 1{,}5\,t$, де a — прискорення, м/с^2; t — час, с. Відомо, що за першу секунду точка пройшла шлях 6 м із швидкістю 3,75 м/с. Знайти закон зміни швидкості та закон руху точки. Побудувати графіки цих залежностей.

4. Швидкість охолодження води у відкритому резервуарі змінюється за законом $f(t) = 0{,}03\,e^{-0{,}01t}$, де t — час, с. Знайти температуру води в момент часу $t = 100$ с, якщо у початковий момент часу $t = 0$ вона дорівнювала 360 К.

5. Довести, що коли F — первісна для функції f на проміжку $\langle a; b\rangle$, то функція $\frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)$, $\alpha \neq 0$, є первісною для функції $f(\alpha x+\beta)$ на деякому проміжку $\langle a_1; b_1\rangle$. Знайти цей проміжок.

6. Користуючись таблицею основних інтегралів за задачею 5, знайти дані інтеграли та вказати відповідні проміжки:

1) $\int (x+2)^2(x-3)dx$; 2) $\int \frac{(2x-3)^4}{x}dx$; 3) $\int \frac{x^3+5x^2-2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+1}{x\sqrt{x}}dx$;

4) $\int \sqrt[3]{2-5x}dx$; 5) $\int (ax+b)^{\alpha}dx$; 6) $\int \frac{dx}{ax+b}$; 7) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{ax+b}}$;

9) $\int \frac{dx}{ax^2+b}$, $ab \neq 0$; 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}}$; 11)• $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$;

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$; 13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}$; 14) $\int \frac{2\sqrt{x^2-1}+5\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$;

15) $\int \frac{dx}{(1-2x)^5}$; 16) $\int \cos \pi x dx$; 17) $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$; 18) $\int \mathrm{tg}^2 3x dx$;

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$; 20) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}}$; 21) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

22) $\int x\sqrt{1-2x}dx$; 23) $\int \frac{dx}{(x^2+3)(x^2+5)}$; 24) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

7. Довести, що:

1)• $\int \mathrm{sh}\, x dx = \mathrm{ch}\, x + C$; 2) $\int \mathrm{ch}\, x dx = \mathrm{sh}\, x + C$;

3) $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C$; 4) $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C$.

8. Нехай функція неперервна на проміжку $\langle a; b\rangle$ і $x_0 \in \langle a; b\rangle$. Довести, що функція f має на цьому проміжку первісну, значення якої в точці x_0 дорівнює 0.

9*. Довести, що функція

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

має первісну на довільному проміжку, який не містить точки $x = 0$, і не має первісної на довільному проміжку, що містить цю точку.

10*. Нехай f має первісну на проміжку $\langle a;b\rangle$, причому $A=\inf\limits_{\langle a;b\rangle} f(x)$ і $B=\sup\limits_{\langle a;b\rangle} f(x)$. Довести, що довільний проміжок $\langle A_1;B_1\rangle\subset\langle A;B\rangle$ є підмножиною множини значень функції f на проміжку $\langle a;b\rangle$.

11. Нехай F — первісна для функції f на проміжку $\langle a;b\rangle$. Якщо функція f обмежена і проміжок $\langle a;b\rangle$ скінченний, то F також обмежена на цьому проміжку. Довести це.

Зразки розв'язування задач

1. 4) Якщо функція f має первісну на проміжку $\langle a;b\rangle$, то $\exists F(x)\colon F'(x)=f(x)$ $\forall x\in\langle a;\ b\rangle$, тобто f є похідною функції F на проміжку $\langle a;\ b\rangle$. За наслідком з теореми Лагранжа f не може мати точок розриву першого роду. Отже, це твердження правильне.

6. 11) Нехай $a\neq 0$. Тоді

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right).$$

Якщо $4ac-b^2=0$, то матимемо

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{dx}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=-\frac{1}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)}+C,$$

де $x\in\left(-\frac{b}{2a};\ +\infty\right)$ або $x\in\left(-\infty;\ -\frac{b}{2a}\right)$.

Якщо $4ac-b^2>0$, то $\frac{4ac-b^2}{4a^2}>0$, тому

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{dx}{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2\right)}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C,\ x\in(-\infty;+\infty).$$

Якщо $4ac-b^2<0$, то $\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0$, тому

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{dx}{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right)}=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-4ac}-2ax-b}{\sqrt{b^2-4ac}+2ax+b}\right|+C,$$

$x\in(-\infty;\ x_1)$, або $x\in(x_1;\ x_2)$, або $x\in(x_2;\ +\infty)$, де x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена ax^2+bx+c.

Випадок $a = 0$ пропонуємо розглянути самостійно.

7. 1) Оскільки $(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \operatorname{sh} x,\ x \in (-\infty;\ +\infty)$, то $\operatorname{ch} x$ є первісною для функції $\operatorname{sh} x$ на проміжку $(-\infty;\ +\infty)$, а тому $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$.

§ 8.2. Основні методи інтегрування

1. Метод розкладання. Якщо функції f і φ мають первісні на проміжку $\langle a;\ b\rangle$, то функція $\alpha f + \beta\varphi$, α, $\beta \in \mathbf{R}$, також має первісну на цьому проміжку і

$$\int (\alpha f(x) + \beta\varphi(x))\, dx = \alpha\int f(x)\, dx + \beta\int \varphi(x)\, dx,\ \ \alpha^2 + \beta^2 > 0.$$

2. Метод підстановки (заміни змінної). Нехай $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на проміжку $\langle a;\ b\rangle$, а функція $x = \varphi(t)$ диференційовна на проміжку $\langle \alpha;\ \beta\rangle$ і $\varphi(t) \in \langle a;\ b\rangle$ $\ \forall t \in \langle \alpha;\ \beta\rangle$. Тоді функція $F(\varphi(t))$ є первісною для функції $f(\varphi(t))\ \varphi'(t)$ і має місце рівність

$$\int f(\varphi(t))\ \varphi'(t)\ dt = \int f(\varphi(t))\ d\varphi(t) = \int f(x)\ dx\Big|_{x=\varphi(t)}.$$

3. Метод інтегрування частинами. Нехай функції u і v диференційовні на проміжку $\langle a;\ b\rangle$ і існує первісна функції $u'v$ на цьому проміжку. Тоді функція $v'u$ також має первісну на проміжку $\langle a;\ b\rangle$ і виконується рівність

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

У випадку практичного застосування цієї формули заданою вважається її ліва частина, тобто $\int u\,dv$, і обчислення цього інтеграла зводиться до відшукання диференціала du функції u та функції v за відомим її диференціалом dv. Функція v визначається неоднозначно, з точністю до довільної сталої C, тому вибирають ту функцію, яка має найпростіший вигляд (як правило, покладають $C = 0$).

Корисно знати деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати за допомогою методу інтегрування частинами.

1. Інтеграли виду

$$\int P(x)\ e^{\alpha x}dx,\ \int P(x)\sin\beta x dx,\ \int P(x)\cos\beta x dx,$$

де $P(x)$ — многочлен n-го степеня від x, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ — дійсні числа. У цих інтегралах за u слід взяти множник $P(x)$. Після застосування n разів формули інтегрування частинами ці інтеграли зводяться відповідно до інтегралів

$$\int e^{\alpha x}dx,\ \int \sin\beta x dx,\ \int \cos\beta x dx.$$

2. Інтеграли виду

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx,\ \int e^{\alpha x}\sin\beta x dx,$$

$\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ — дійсні числа. Після двократного застосування формули інтегрування частинами у правій частині дістанемо заданий інтеграл. Це дає змогу знайти шуканий інтеграл як розв'язок лінійного алгебраїчного рівняння.

3. Інтеграли виду

$$\int P(x)\ln x dx,\quad \int P(x)\arcsin x dx,\quad \int P(x)\operatorname{arctg} x dx,$$

$$\int P(x)\arccos x dx,\quad \int P(x)\operatorname{arcctg} x dx,$$

де $P(x)$ — многочлен n-го степеня від x. За u в цих інтегралах беруть множники $\ln x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arccos x$ і $\operatorname{arcctg} x$.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) якщо функція f має первісну на проміжку $\langle a; b\rangle$, то $\forall\alpha\in\mathbf{R}$ функція αf також має первісну на цьому проміжку;

2) якщо $\exists\,\alpha\in\mathbf{R}$: αf має первісну на проміжку $\langle a; b\rangle$, то функція f має первісну на цьому проміжку;

3) якщо кожна з функцій f і φ має первісну на проміжку $\langle a; b\rangle$, то функція $f+\varphi$ також має первісну на цьому проміжку;

4) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

5) якщо функції $f\pm\varphi$ мають первісні на проміжку $\langle a; b\rangle$, то і функції f та φ мають первісні на цьому проміжку;

6)• якщо функція $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ має первісну на проміжку $\langle\alpha; \beta\rangle$ і $x=\varphi(t)\in\langle a; b\rangle$ $\forall t\in\langle\alpha; \beta\rangle$, то функція f має первісну на проміжку $\langle a; b\rangle$;

7) якщо виконано умови методу інтегрування частинами, то $\int udv+\int vdu=uv$;

8) всі первісні для функції $f(x)=\sqrt{x^4-x^2}$ визначаються формулою $\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}+C$?

2. Виконати вказані завдання усно.

1) Знайти інтеграли:

а) $\int\sin 5xdx$; б) $\int\sin 5xd(5x)$; в) $\int\sin 5xd(\sin 5x)$;

г) $\int\frac{dx}{1+4x^2}$; д) $\int\frac{d\left(1+4x^2\right)}{1+4x^2}$; е) $\int\frac{xdx}{1+4x^2}$; є) $\int\frac{dx}{\cos^2 2x}$;

ж) $\int\frac{d(\cos 2x)}{\cos^2 2x}$; з) $\int\frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$; и) $\int\operatorname{tg} xdx$; і) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) Треба знайти інтеграл $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$ для $-2\le x\le 2$. Чи застосовна для цього підстановка:

а) $x=\sin t$, $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$; б) $x=2\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$; в) $x=2\sin t$, $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$;

г) $x=2\cos t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$; д) $x=2\cos t$, $\pi\le t\le 2\pi$?

3) При обчисленні інтеграла $I=\int \sin x\cos x dx$ один студент дістав результат $I=\frac{1}{2}\sin^2 x+C$, другий — $I=-\frac{1}{2}\cos^2 x+C$, а третій — $I=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$. Хто з них має рацію?

4) Інтеграли $\int\frac{\sin x}{x}\,dx$ і $\int\frac{\cos x}{x}\,dx$ не обчислюються в скінченному вигляді. Показати, що внаслідок цього не обчислюються в скінченному вигляді і інтеграли $\int\frac{\sin x}{x^2}\,dx$, $\int\frac{\cos x}{x^2}\,dx$.

5) Знайти сім'ю кривих, кутовий коефіцієнт дотичної до яких у кожній точці дорівнює $2e^{2x}$.

6) Швидкість тіла, що рухається прямолінійно, змінюється за законом $v=3t^2+2$. Знайти закон руху тіла $s(t)$, якщо $s(0)=0$.

3. Знайти дані інтеграли, скориставшись методом розкладання:

1) $\int(x+1)(x-5)dx$; 2) $\int\left(3x^2+1\right)^2dx$; 3) $\int(2x+1)(x-3)(x+2)dx$;

4) $\int\left(a_0+a_1x+\dots+a_nx^n\right)dx$; 5) $\int\left(a+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{\sqrt{x}}+\frac{a^3}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$;

6) $\int\left(\frac{1+x}{x}\right)^3dx$; 7) $\int\left(\sqrt{x}-\frac{3}{x}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right)^2dx$;

8) $\int\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}+x\sqrt[3]{x}+\frac{5}{4-x^2}\right)dx$; 9) $\int\left(3^x-5^x\right)^2dx$;

10) $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$; 11) $\int\left(e^x-e^{-x}\right)^3dx$;

12) $\int\frac{e^{3x}-1}{1-e^x}dx$; 13) $\int\frac{x^4dx}{x-1}$; 14) $\int\sin^2 xdx$;

15) $\int\cos^2 xdx$; 16) $\int\sin^4 xdx$; 17) $\int\cos^4 xdx$;

18) $\int\cos 3x\cos 2xdx$; 19) $\int(2\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x)^2dx$; 20) $\int\frac{1+\sin^2 x}{1-\cos 2x}dx$;

21) $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx$; 22) $\int\frac{2x+1}{x^2+9}dx$; 23) $\int\frac{(1+x)^2}{x\left(1+x^2\right)}dx$; 24) $\int\frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx$;

25) $\int\frac{dx}{x^4+16x^2}$; 26)• $\int x\sqrt{a-bx}dx$; 27) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}$;

28) $\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$; 29) $\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}$, $a^2\ne b^2$.

4. Знайти дані інтеграли, скориставшись методом введення функції під знак диференціала:

1) $\int \frac{\ln^3 x}{x}\, dx$; 2) $\int \cos^7 x \sin x dx$; 3) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx$; 4) $\int \sqrt[7]{(5-2x)^3}dx$;

5) $\int \cos(ax+b)dx$; 6) $\int \frac{A}{(x+a)^n}$, $n \in \mathbf{N}$; 7) $\int \frac{\operatorname{arctg}\ x}{1+x^2}dx$; 8) $\int \frac{(\sin x + \cos x)dx}{\sqrt[5]{(\sin x - \cos x)^2}}$;

9) $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{1-9^x}}$; 10) $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$; 11) $\int \frac{\sin 2x dx}{1+\cos^2 x}$; 12) $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$;

13) $\int \sin^2(ax+b)dx$; 14)• $\int x(1-x)^{20}dx$; 15) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; 16) $\int \cos^{2n+1} x\sqrt{\sin x}dx$;

17) $\int x^2 \sqrt[5]{1+x^3}dx$; 18) $\int \frac{xdx}{x^4+1}$; 19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(4+x)}$; 20) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

21) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos 2x}}$; 22) $\int \frac{dx}{\sin x}$; 23) $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$; 24) $\int \frac{\cos x dx}{a^2+\sin^2 x}$;

25) $\int \frac{2^x \cdot 3^x dx}{9^x - 4^x}$; 26) $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$; 27) $\int x^3 \sqrt[3]{1+x^2}dx$.

5. Знайти дані інтеграли, скориставшись методом підстановки:

1) $\int x(x+2)^{100}dx$; 2) $\int x\sqrt{a-x}dx$; 3) $\int \frac{x^2 dx}{(1-x)^{25}}$; 4) $\int \frac{dx}{1+e^x}$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$;

6) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{9-\cos^2 x}}$; 7) $\int \sqrt{e^x - 1}dx$; 8) $\int \sqrt[5]{1+2\sin x}\cos x dx$; 9) $\int x^3\left(a-bx^2\right)^{10}dx$;

10) $\int x^3\sqrt{a-bx}dx$; 11) $\int x^5\left(a-bx^2\right)^{\frac{3}{2}}dx$; 12) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$; 13) $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}$;

14)• $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; 15) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx$; 16) $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x \cos x}dx$; 17) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x}dx$;

18) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 19) $\int \frac{\sin x \cos^3 x dx}{1+\cos^2 x}$; 20) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx$; 21) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

22) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$; 23) $\int \frac{dx}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$; 24) $\int \frac{dx}{\left(x^2-a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$; 25) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$;

26) $\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{5}{2}}}$; 27) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; 28) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$; 29) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$;

30) $\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx$; 31) $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{1+e^x}}$; 32) $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

6. Знайти дані інтеграли, скориставшись методом інтегрування частинами:

1) $\int x\sin 2xdx$; 2) $\int(2x-1)e^{-x}dx$; 3) $\int x\cos\alpha xdx$; 4) $\int xe^{ax}dx$; 5) $\int x^2e^{bx}dx$;

6) $\int x^2\sin\beta xdx$; 7) $\int\left(x^2+3x-2\right)\cos xdx$; 8) $\int x^{\alpha}\ln xdx$; 9)• $\int\frac{\ln^2 x}{x^2}dx$;

10) $\int x\operatorname{arctg}xdx$; 11) $\int\operatorname{arctg}xdx$; 12) $\int\arccos xdx$; 13) $\int e^{-x}\cos xdx$;

14) $\int e^{ax}\sin bxdx$; 15) $\int e^{2x}\sin^2 xdx$; 16) $\int x\sec^2 xdx$; 17) $\int\ln\left(x^2+1\right)dx$;

18) $\int\ln^2 xdx$; 19) $\int\cos(\ln x)dx$; 20) $\int\frac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}dx$; 21) $\int\sin\sqrt{x}dx$;

22) $\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)^2}$; 23) $\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx$; 24) $\int\sqrt{9-x^2}dx$; 25) $\int\ln\left(\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}\right)dx$;

26) $\int\sin x\ln\operatorname{tg}xdx$; 27) $\int(\arcsin x)^2dx$; 28) $\int x\sin\sqrt{x}dx$.

7. Знайти дані інтеграли (різні приклади):

1) $\int\left(e^{ax}-\sin bx\right)^2dx$; 2) $\int\frac{15^x dx}{25^x-9^x}$; 3) $\int\frac{dx}{x^2+4x+1}$; 4) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$;

5) $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{x^{10}+5}}$; 6) $\int x^2\arccos xdx$; 7) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-1}}$; 8) $\int\frac{xdx}{x^2+6x+2}$;

9) $\int\operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$; 10) $\int\frac{x^3dx}{x^8-4}$; 11) $\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$; 12) $\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^4}}$;

13) $\int\frac{e^{2x}dx}{e^x-1}$; 14) $\int\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}dx$; 15) $\int\frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}}$; 16) $\int\sin x\ln\cos xdx$;

17) $\int\frac{\sin 2xdx}{3+2\sin^2 x}$; 18) $\int\sqrt{x}\ln xdx$; 19) $\int\frac{\sin 2xdx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}$;

20) $\int\frac{x^3+1}{x-1}dx$; 21) $\int\ln x^n dx$; 22) $\int\frac{dx}{x^4-81}$;

23) $\int\frac{\sin x\cos xdx}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}$; 24) $\int\frac{dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$; 25) $\int x\operatorname{tg}^2 xdx$;

26) $\int\frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)\sqrt{a^2+x^2}}$; 27)• $\int\frac{x^2\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$.

8. Знайти рівняння кривої, яка проходить через початок координат і в якої сума довжин дотичної та піддотичної у довільній точці дорівнює добутку координат точки дотику.

9. 1) Швидкість точки, що рухається прямолінійно, змінюється за законом $v = t^2 - 5t + 4$, де v — швидкість, м/с; t — час, с. У момент часу $t = 2$ с точка мала координату $x = -\frac{1}{3}$. Знайти координату точки в момент: а) $t = 3$ с; б) якщо точка змінює напрям руху; в) якщо прискорення дорівнює 0.

2) Знайти закон руху тіла з масою 10 кг під дією сталої сили F = 6Н, якщо в момент часу $t = 0$ тіло перебуває у спокої в початку координат.

10. Маргінальний дохід малого підприємства визначається функцією $f(x) = 20 - 0{,}04x$. Відомо, що дохід від виробництва 200 одиниць продукції становить 1600 грн. Визначити функцію $D(x) = \int f(x)dx$ доходу цього підприємства. Яким буде дохід від виробництва 100 одиниць продукції?

11•. За законом Ньютона швидкість охолодження тіла в повітрі пропорційна різниці температур тіла T та повітря A. Нехай протягом досліду температура повітря $A = 20$ °C і, крім того, дано, що протягом 20 хв тіло охолоджується від 100 до 60 °C. Знайти час, за який температура тіла знизиться до 30 °C.

12. Відомо, що $f'\left(\sin^2 x\right) = \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x$. Знайти $f(x)$ при $0 < x < 1$.

13. Методом інтегрування частинами вивести рекурентні формули для знаходження інтегралів $\forall n \in \mathbf{N}$:

1) $I_n = \int \ln^n x dx$; 2)• $I_n = \int x^\alpha \ln^n x dx$ $(\alpha \neq -1)$; 3) $I_n = \int e^{ax} \sin^n x dx$.

14. Знайти дані інтеграли:

1) $\int \ln^4 x dx$; 2) $\int \sqrt[3]{x} \ln^2 x dx$; 3) $\int e^{2x} \sin^5 x dx$.

15. Довести формули:

1) $$\int P_n(x) e^{ax} dx = \frac{1}{a}\left(P_n(x) - \frac{P_n'(x)}{a} + \dots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^n} \right) e^{ax} + C;$$

2)• $$\int P_n(x) \sin ax dx = -\frac{1}{a}\left(P_n(x) - \frac{P_n''(x)}{a^2} + \frac{P_n^{(4)}(x)}{a^4} - \dots \right) \cos ax + \frac{1}{a}\left(\frac{P_n'(x)}{a} - \frac{P_n'''(x)}{a^3} + \frac{P_n^{(5)}(x)}{a^5} - \dots \right) \sin ax + C;$$

3) $$\int P_n(x) \cos ax dx = \frac{1}{a}\left(P_n(x) - \frac{P_n''(x)}{a^2} + \frac{P_n^{(4)}(x)}{a^4} - \dots \right) \sin ax + \frac{1}{a}\left(\frac{P_n'(x)}{a} - \frac{P_n'''(x)}{a^3} + \frac{P_n^{(5)}(x)}{a^5} - \dots \right) \cos ax + C,$$

де $P_n(x)$ — многочлен n-го степеня від x, $a \neq 0$.

16. Знайти дані інтеграли:

1) $\int x^4 e^{-x} dx$; 2) $\int x^5 \sin 5x dx$; 3) $\int \left(x^2 + 1\right)^2 \cos x dx$.

Зразки розв'язування задач

1. 6) Розглянемо функцію

$$f(x)=\operatorname{sign}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

на проміжку $\langle a;b\rangle=[-2;2]$. Покладемо $x=t^2+1=\varphi(t)$, $t\in[-1;1]$. Тоді $\varphi(t)\in[-2;2]$ $\forall t\in[-1;1]$, $\varphi'(t)=2t$ і $\operatorname{sign}(\varphi(t))\varphi'(t)=2t$, бо $\varphi(t)>0$, $t\in[-1;1]$. Отже, функція $f(\varphi(t))\varphi'(t)=2t$ має первісну на проміжку $\langle\alpha;\beta\rangle=[-1;1]$ і $\varphi(t)\in\langle a;b\rangle=[-2;2]$ $\forall t\in\langle\alpha;\beta\rangle$. Проте функція $f(x)=\operatorname{sign}x$ не має первісної на проміжку $\langle a;b\rangle=[-2;2]$ (див. задачу 9 § 8.1). Тому задане твердження неправильне.

3. 26) Знайдемо інтеграл $I=\int x\sqrt{a-bx}dx$. Якщо $a=0$, $b>0$, то

$$I=\int x\sqrt{-bx}dx=-\sqrt{b}\int(-x)^{\frac{3}{2}}dx=-\frac{2}{5}\sqrt{-bx}x^2+C,\ x\in(-\infty;\ 0].$$

Якщо $a=0$, $b<0$, то

$$I=\int x\sqrt{-b}\sqrt{x}dx=\sqrt{-b}\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{5}\sqrt{-bx}x^2+C,\ x\in[0;+\infty).$$

Якщо $a=0$, $b=0$, то

$$I=\int 0dx=C,\quad x\in(-\infty;+\infty).$$

Якщо $a\neq 0$, то при $b=0$ матимемо

$$I=\int x\sqrt{a}dx=\frac{1}{2}\sqrt{a}x^2+C,\ x\in(-\infty;+\infty),$$

а при $b\neq 0$

$$I=\int x\sqrt{a-bx}dx=\int\frac{1}{b}(bx-a+a)\sqrt{a-bx}dx=-\frac{1}{b}\int(a-bx)^{\frac{3}{2}}dx+\frac{a}{b}\int(a-bx)^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\frac{2}{5b^2}(a-bx)^2\sqrt{a-bx}-\frac{2a}{b^2}|a-bx|\sqrt{a-bx}+C,$$

причому $x\in\left(-\infty;\ \frac{a}{b}\right]$, якщо $b>0$, і $x\in\left[\frac{a}{b};\ +\infty\right)$, якщо $b<0$.

4. 14) Інтеграл $I=\int x(1-x)^{20}dx$ обчислюється методом розкладання, якщо виконати піднесення до степеня за формулою бінома Ньютона. Однак у цьому випадку краще скористатися методом підстановки, який часто застосовують у формі введення функції під знак диференціала.

Дійсно, оскільки $x\equiv(x-1)+1$, то

$$I=\int((x-1)+1)(1-x)^{20}dx=\int(1-x)^{21}d(1-x)-\int(1-x)^{20}d(1-x)=$$

$$=\frac{(1-x)^{22}}{22}-\frac{(1-x)^{21}}{21}+C,\quad x\in(-\infty;+\infty).$$

5. 14) Через те що $\frac{dx}{x}=d(\ln x)$, то

$$\int\frac{\ln xdx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int\frac{\ln xd(\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}}=\int\frac{(t^2-1)2tdt}{t}=\quad\left|\begin{array}{l}\sqrt{1+\ln x}=t,\\ \ln x=t^2-1,\\ d(\ln x)=2tdt\end{array}\right|$$

$$=2\int\left(t^2-1\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_{t=\sqrt{1+\ln x}}=2\left(\frac{(1+\ln x)\sqrt{1+\ln x}}{3}-\sqrt{1+\ln x}\right)+C,\quad x\in\left(\frac{1}{e};\ +\infty\right).$$

6. 9) Маємо

$$\int\frac{\ln^2 x}{x^2}dx=\qquad\left|\begin{array}{l}u=\ln^2 x,\ du=\dfrac{2\ln x}{x}dx,\\ dv=\dfrac{dx}{x^2},\ \ v=-\dfrac{1}{x}\end{array}\right|$$

$$=-\frac{1}{x}\ln^2 x+2\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\qquad\left|\begin{array}{l}u=\ln x,\ du=\dfrac{dx}{x},\\ dv=\dfrac{dx}{x^2},\ \ v=-\dfrac{1}{x}\end{array}\right|$$

$$=-\frac{1}{x}\ln^2 x+2\left(-\frac{1}{x}\ln x+\int\frac{dx}{x^2}\right)=-\frac{1}{x}\ln^2 x-\frac{2}{x}\ln x-\frac{2}{x}+C,\ \ x\in(0;\ \ +\infty).$$

7. 27) Маємо

$$I=\int\frac{x^2\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx=\int\frac{\left(\left(x^2+1\right)-1\right)\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\,dx=\int\operatorname{arctg}x\,dx-\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx.$$

Знайдемо окремо кожний з цих інтегралів

$$\int\operatorname{arctg}x\,dx=\qquad\left|\begin{array}{l}u=\operatorname{arctg}x,\ du=\dfrac{dx}{1+x^2},\\ dv=dx,\ \ v=x\end{array}\right|$$

$$=x\operatorname{arctg}x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C,$$

$$\int\frac{\operatorname{arctg}\ x}{1+x^2}dx=\int\operatorname{arctg}x\,d\left(\operatorname{arctg}x\right)=\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}+C.$$

Отже, остаточно

$$I=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C.$$

11. Нехай температуру тіла в будь-який момент часу t визначає функція $T=T(t)$, тоді швидкість охолодження тіла дорівнює $\dfrac{dT}{dt}$.

За умовою задачі $\dfrac{dT}{dt}=k(T-A)$, де k — поки що невідомий коефіцієнт пропорційності. Звідси

$$\frac{1}{T-A}\cdot\frac{dT}{dt}=k,\ \text{ або }\ \frac{d(\ln(T-A))}{dt}=k.$$

Далі дістаємо $\ln(T-A)=\int kdt=kt+C,\ T-A=e^{kt+C}$, або $T(t)=A+e^{kt+C}$.

Функція $T(t)$ містить дві невідомі сталі k і C. Для визначення їх скористаємось умовами із задачі, а саме $T(0)=100,\ T(20)=60$.

Отже,

$$\begin{cases}100=20+e^{C},\\ 60=20+e^{20k+C}.\end{cases}$$

Звідси $C = \ln 80$, $k = \frac{1}{20}\ln\frac{1}{2}$; $T(t) = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$. При $T = 30$ маємо $10 = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$, отже, $\frac{t}{20} = 3$, $t = 60$, тобто температура тіла знизиться на 30 °C через 60 хв.

13. 2) Застосуємо метод інтегрування частинами. Матимемо

$$I_n = \int x^\alpha \ln^n x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln^n x, \ du = \dfrac{n\ln^{n-1} x}{x} dx, \\ dv = x^\alpha dx, \ v = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^n x - \int \frac{x^{\alpha+1} n \ln^{n-1} x}{(\alpha+1)x} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^n x - \frac{n}{\alpha+1}\int x^\alpha \ln^{n-1} x dx, \ \alpha \neq -1.$$

Отже,

$$I_n = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^n x - \frac{n}{\alpha+1} I_{n-1}, \quad n \geq 2,$$

де $I_1 = \int x^\alpha \ln x dx$ (див. вправу 6.8) § 8.2).

15. 2) Інтегруючи послідовно частинами, дістаємо

$$I = \int P_n(x)\sin ax dx = \left| \begin{matrix} u = P_n(x), \ du = P_n'(x) dx, \\ dv = \sin ax dx, \ v = -\dfrac{1}{a}\cos ax \end{matrix} \right|$$

$$= -\frac{1}{a}P_n(x)\cos ax + \frac{1}{a}\int P_n'(x)\cos ax dx = \left| \begin{matrix} u = P_n'(x), \ du = P_n''(x) dx, \\ dv = \cos ax dx, \ v = \dfrac{1}{a}\sin ax \end{matrix} \right|$$

$$= -\frac{1}{a}P_n(x)\cos ax + \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}P_n'(x)\sin ax - \frac{1}{a}\int P_n''(x)\sin ax dx\right) =$$

$$\left| \begin{matrix} u = P_n''(x), \ du = P_n'''(x) dx, \\ dv = \sin ax dx, \ v = -\dfrac{1}{a}\cos ax \end{matrix} \right|$$

$$= -\frac{1}{a}\left(P_n(x) - \frac{P_n''(x)}{a^2}\right)\cos ax + \frac{1}{a}\left(\frac{P_n'(x)}{a}\sin ax - \frac{1}{a^2}\int P_n'''(x)\cos ax dx\right) = \cdots =$$

$$= -\frac{1}{a}\left(P_n(x) - \frac{P_n''(x)}{a^2} + \frac{P_n^{(4)}(x)}{a^4} - \cdots\right)\cos ax + \frac{1}{a}\left(\frac{P_n'(x)}{a} - \frac{P_n'''(x)}{a^3} + \frac{P_n^{(5)}(x)}{a^5} - \cdots\right)\sin ax + C.$$

§ 8.3. Інтегрування раціональних функцій

До найпростіших раціональних функцій належать:

1) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ ($n \in \mathbf{N}$, a_i, $i = \overline{0, n}$, — задані дійсні числа) — ціла раціональна функція або многочлен;

2) $f(x) = \dfrac{A}{(x-a)^n}$, $n \in \mathbf{N}$, A, a — задані дійсні числа;

3) $f(x) = \dfrac{Ax + B}{\left(x^2 + px + q\right)^n}$ $n \in \mathbf{N}$, A, B, p, q — задані дійсні числа, $p^2 - 4q < 0$.

Раціональні функції 2), 3) називають ще елементарними раціональними дробами. Інтеграли від них визначають через елементарні функції або говорять, що вони беруться у скінченному вигляді.

Функцію $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, де P і Q — многочлени, називають *дробово-раціональною* або *раціональним дробом*. Якщо степінь многочлена P менший за степінь многочлена Q, то раціональний дріб називають правильним, в іншому разі — неправильним.

Якщо раціональний дріб неправильний, то діленням многочлена P на Q його можна подати у вигляді суми цілої раціональної функції (ціла частина) та правильного раціонального дробу, тобто

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=T(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},$$

де многочлен T — частка, а многочлен R — остача від ділення.

Правильний нескоротний раціональний дріб можна подати, і притому єдиним способом, у вигляді суми скінченного числа елементарних раціональних дробів. На цьому ґрунтується метод інтегрування раціональних функцій.

Алгоритм інтегрування раціональної функції

1. Якщо дріб $\frac{P}{Q}$ неправильний, то треба поділити многочлен P на многочлен Q і виділити його цілу частину T та правильний нескоротний раціональний дріб $\frac{R}{Q}$.

2. Розкласти многочлен Q на лінійні множники, які відповідають його дійсним кореням, та квадратні множники, які відповідають його комплексним кореням.

3. Подати дріб $\frac{R}{Q}$ через суму елементарних раціональних дробів. Для цього:

а) кожному множнику вигляду $(x-a)^p$ поставити у відповідність суму з p доданків:

$$\frac{A_1}{(x-a)^p}+\frac{A_2}{(x-a)^{p-1}}+\cdots+\frac{A_p}{x-a},$$

де A_i, $i=\overline{1,\ p}$, — дійсні числа, які називають невизначеними коефіцієнтами;

б) для кожного множника вигляду $\left(x^2+px+q\right)^l$, $p^2-4q<0$, скласти суму з l доданків:

$$\frac{B_1x+C_1}{\left(x^2+px+q\right)^l}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+px+q\right)^{l-1}}+\cdots+\frac{B_lx+C_l}{x^2+px+q},$$

де B_i, C_i, $i=\overline{1,\ l}$, — невизначені коефіцієнти.

4. Здобуту суму елементарних дробів звести до спільного знаменника і прирівняти чисельник до многочлена R.

5. Знайти невизначені коефіцієнти із умови рівності двох многочленів. Цей метод відшукання невідомих коефіцієнтів називають методом невизначених коефіцієнтів.

6. Знайти $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ як суму інтегралів від многочлена T та елементарних раціональних дробів.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) довільна дробово-лінійна функція є елементарним раціональним дробом;

2) кожний елементарний раціональний дріб є правильним раціональним дробом;

3) кожна раціональна функція є сумою кількох елементарних раціональних дробів;

4) деякий правильний нескоротний раціональний дріб може бути сумою якихось двох елементарних дробів і сумою якихось трьох елементарних дробів;

5) якщо f — раціональна функція, то її первісна є раціональною функцією;

6) довільний правильний раціональний дріб інтегрується в скінченному вигляді;

7) будь-яка раціональна функція інтегрується в елементарних функціях?

2. Виконати вказані завдання усно.

1) Знайти інтеграли:

а) $\int (x+1)^3 dx$; б) $\int \frac{(1-x)^2}{x}dx$; в) $\int \frac{dx}{x+1}$; г) $\int \frac{dx}{(x-3)^5}$; д) $\int (1-x)^{15} dx$;

е) $\int \frac{dx}{x^2+4}$; є) $\int \frac{dx}{x^2-9}$; ж) $\int \frac{dx}{1-x^2}$; з) $\int \frac{xdx}{x+5}$; и) $\int \frac{dx}{x(x-2)}$;

і) $\int \frac{dx}{(x-1)(x-3)}$; ї) $\int \frac{dx}{1-2x+x^2}$; й) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$; к) $\int \frac{x^2dx}{x^2+4}$;

л) $\int \frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4}$; м) $\int \frac{x+1}{x^2-16}dx$; н) $\int \frac{xdx}{1+x^4}$; о) $\int \frac{x^2+2}{x^2-1}dx$.

2) За допомогою яких елементарних раціональних дробів можна зобразити правильний нескоротний раціональний дріб (P_n — многочлен n-го степеня від x):

а) $\frac{P_1(x)}{x^2+4x+3}$; б) $\frac{P_2(x)}{x^4+x^3}$; в) $\frac{P_3(x)}{(x-1)^4}$; г) $\frac{P_5(x)}{\left(x^2-1\right)^3}$; д) $\frac{P_4(x)}{\left(x^2-5x+6\right)^3}$;

е) $\frac{P_5(x)}{\left(x^3-1\right)^3}$; є) $\frac{P_2(x)}{x^4-16}$; ж) $\frac{P_1(x)}{\left(x^2+2x+5\right)^2}$; з) $\frac{P_2(x)}{x^4+1}$.

3) Знайти рівняння кривої, що проходить через точку (0, 1), якщо кутовий коефіцієнт дотичної до неї в точці з абсцисою x дорівнює $2x + 4$.

4) Швидкість зміни фізичної величини відбувається за законом $v = 1 - 2t$, де v — швидкість, м/с; t — час, с. За яким законом змінюється величина, якщо у початковий момент часу $t = 0$ значення величини дорівнювало 5? Через який час значення величини буде найбільшим?

3. Вивести рекурентну формулу для обчислення інтеграла $I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n}$, $n \geq 2$, та скористатися нею при обчисленні інтеграла $I_3 = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^3}$.

4. Знайти дані інтеграли:

1) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$; 2) $\int \frac{dx}{(ax+b)^n}$, $n \in \mathbf{N}$, a, $b \in \mathbf{R}$; 3) $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2 (x+4)^2}$;

4) $\int \frac{\left(x^2+1\right)dx}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$; 5) $\int \frac{x^3+1}{x^3 - x^2} dx$; 6) $\int \frac{\left(x^3+1\right)dx}{x^3 - 5x^2 + 6x}$;

7) $\int \frac{(x+4)dx}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$; 8) $\int \frac{dx}{x^3+1}$; 9) $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$;

10) $\int \frac{dx}{\left(x^2 - 4x + 4\right)\left(x^2 - 4x + 5\right)}$; 11) $\int \frac{xdx}{x^3 - 1}$; 12) $\int \frac{dx}{x^3 + x}$;

13) $\int \frac{2x^5 - 2x + 1}{1 - x^4} dx$; 14) $\int \frac{x^2 dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$; 15) $\int \frac{x^4 dx}{x^4 - 2x^2 + 1}$; 16) $\int \frac{x^6 dx}{\left(x^2 - 1\right)^2}$;

17)• $\int \frac{x^{10} + x^9 - x^8 + x^7 - 2x^6 + 1}{x^4 + x^3 - x^2 + x - 2} dx$; 18) $\int \frac{x^5 + x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$;

19) $\int \frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x-1)\left(x^3 - 1\right)} dx$; 20) $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2 (x+2)}$; 21) $\int \frac{(x+1)dx}{x^4 + 4x^2 + 4}$;

22) $\int \frac{(2x+3)dx}{\left(x^2 + 2x + 5\right)^2}$; 23) $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$; 24) $\int \frac{1 - x^4}{1 + x^4} dx$; 25) $\int \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 + 1}$.

5. Знайти дані інтеграли, попередньо спростивши їх за допомогою відповідної підстановки:

1) $\int \frac{x^2 dx}{8x^6 - 1}$; 2) $\int \frac{x^4 dx}{x^{25} + 1}$; 3) $\int \frac{dx}{x\left(x^5 + 2\right)}$; 4) $\int \frac{x^2 + x}{x^6 + 1} dx$; 5) $\int \frac{2x^3 + 3x}{x^4 + x^2 + 1} dx$;

6) $\int \frac{x^9 dx}{x^5 + 3}$; 7) $\int \frac{x^5 dx}{x^4 + 4}$; 8) $\int \frac{x^3 dx}{\left(x^2+1\right)^2}$; 9) $\int \frac{x^2 dx}{\left(x^6 + 9\right)^2}$; 10) $\int \frac{dx}{x\left(3 + x^6\right)^2}$;

11) $\int \frac{x^{n-1}dx}{x^{2n}-a^2}$; 12) $\int \frac{x^{n-1}dx}{x^{2n}+4}$; 13)• $\int \frac{dx}{x\left(x^n+a\right)}$; 14) $\int \frac{x^{2n-1}dx}{x^n+a}$;

15) $\int \frac{x^{n-1}dx}{x^{2n}+a^2}$; 16) $\int \frac{x^{2n-1}dx}{\left(ax^n+b\right)^2}$; 17) $\int \frac{x^{n-1}dx}{\left(x^{2n}+a^2\right)^2}$;

18) $\int \frac{\left(x^n+1\right)dx}{x\left(x^{2n}+a^2\right)}$; 19) $\int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$, $m,\ n \in \mathbf{N}$;

20) $\int \frac{P_n(x)dx}{(x-a)^{n+1}}$, де P_n — многочлен n-го степеня від x.

6. Визначити, коли первісна для функції f буде раціональною функцією:

1)• $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x^2(x-1)^2}$, $a,\ b,\ c \in \mathbf{R}$;

2) $f(x)=\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}$, де P_n — многочлен n-го степеня від x.

7. Матеріальна точка сповільнює свій рух під дією сили опору середовища, пропорційної до квадрата швидкості. Знайти залежність швидкості від часу, якщо $v(0)=0{,}5$ м/с, $v(1)=0{,}25$ м/с. Якою буде швидкість точки через 3 с після початку сповільнення руху? У який момент часу швидкість дорівнюватиме 0,1 м/с?

8. Знайти криву, що проходить через точку (4, 5), якщо в довільній її точці відрізок нормалі, вміщений між осями координат, ділиться навпіл.

Зразки розв'язування задач

4. 17) Знайдемо інтеграл $I=\int \frac{x^{10}+x^9-x^8+x^7-2x^6+1}{x^4+x^3-x^2+x-2}dx$, застосувавши заданий вище алгоритм.

1. Підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом, тому поділимо чисельник на знаменник і дістанемо

$$\frac{x^{10}+x^9-x^8+x^7-2x^6+1}{x^4+x^3-x^2+x-2}=x^6+\frac{1}{x^4+x^3-x^2+x-2}.$$

2. Розкладемо знаменник правильного раціонального дробу на множники:

$$x^4+x^3-x^2+x-2=(x-1)(x+2)\left(x^2+1\right)$$

3. Для множників $x-1,\ x+2,\ x^2+1$ запишемо відповідно доданки $\frac{A_1}{x-1}, \frac{B_1}{x+2}, \frac{C_1x+C_2}{x^2+1}$.

Отже, дістанемо таке задання здобутого правильного раціонального дробу через елементарні раціональні дроби:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)\left(x^2+1\right)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{B_1}{x+2}+\frac{C_1x+C_2}{x^2+1}.$$

4. Зведемо праву частину останньої рівності до спільного знаменника:

$$\frac{A_1}{x-1}+\frac{B_1}{x+2}+\frac{C_1x+C_2}{x^2+1}=\frac{A_1(x+2)\left(x^2+1\right)+B_1(x-1)\left(x^2+1\right)+C_1x(x-1)(x+2)+C_2(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)\left(x^2+1\right)}.$$

5. Невизначені коефіцієнти знайдемо з умови рівності чисельників дробів, тобто

$$1 \equiv A_1(x+2)\left(x^2+1\right)+B_1(x-1)\left(x^2+1\right)+C_1x(x-1)(x+2)+C_2(x-1)(x+2).$$

Два многочлени тотожно рівні тоді й тільки тоді, коли вони при однакових значеннях x приймають рівні значення. Надаватимемо x таких значень, при яких праву частину тотожності підрахувати досить просто.

Дістанемо

$$\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \\ x=0 \\ x=-1 \end{array}\left\{\begin{array}{l} -15B_1=1, \\ 6A_1=1, \\ 2A_1-B_1-2C_2=1, \\ 2A_1-4B_1+2C_1-2C_2=1, \end{array}\right.$$

звідки $B_1=-\frac{1}{15}$, $A_1=\frac{1}{6}$, $C_2=-\frac{3}{10}$, $C_1=-\frac{1}{10}$.

Отже,

$$\frac{x^{10}+x^9-x^8+x^7-2x^6+1}{x^4+x^3-x^2+x-2}=x^6+\frac{1}{6(x-1)}-\frac{1}{15(x+2)}-\frac{x+3}{10\left(x^2+1\right)}.$$

6. Знайдемо заданий інтеграл

$$I=\int\left(x^6+\frac{1}{6(x-1)}-\frac{1}{15(x+2)}-\frac{x+3}{10\left(x^2+1\right)}\right)dx=\frac{x^7}{7}+\frac{1}{6}\ln|x-1|-\frac{1}{15}\ln|x+2|-$$

$$-\frac{1}{20}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}-\frac{3}{10}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x^7}{7}+\frac{1}{6}\ln|x-1|-\frac{1}{15}\ln|x+2|-\frac{1}{20}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{3}{10}\operatorname{arctg}x+C.$$

5. 13) Маємо

$$I=\int\frac{dx}{x\left(x^n+a\right)}=\int\frac{x^{n-1}dx}{x^n\left(x^n+a\right)}= \quad \left|\begin{array}{l} x^n=y,\ nx^{n-1}dx=dy, \\ x^{n-1}dx=\frac{1}{n}dy \end{array}\right|$$

$$=\frac{1}{n}\int\frac{dy}{y(y+a)}=\frac{1}{n}\int\frac{d\left(y+\frac{a}{2}\right)}{\left(y+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{1}{na}\ln\left|\frac{y}{y+a}\right|+C=\frac{1}{na}\ln\left|\frac{x^n}{x^n+a}\right|+C.$$

6. 1) Виразимо функцію $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2(x-1)^2}$ через елементарні раціональні дроби:

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^2(x-1)^2}=\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{B_1}{(x-1)^2}+\frac{B_2}{x-1}.$$

Тоді

$$\int\frac{ax^2+bx+c}{x^2(x-1)^2}dx=A_1\int\frac{dx}{x^2}+A_2\int\frac{dx}{x}+B_1\int\frac{dx}{(x-1)^2}+B_2\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=-\frac{A_1}{x}+A_2\ln|x|-\frac{B_1}{x-1}+B_2\ln|x-1|+C.$$

Останній вираз буде раціональною функцією тоді й тільки тоді, коли $A_2=0$ і $B_2=0$.

Виразимо невідомі A_2 і B_2 через коефіцієнти квадратного тричлена ax^2+bx+c. Для цього скористаємось методом невизначених коефіцієнтів. Дістанемо

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^2(x-1)^2}=\frac{A_1(x-1)^2+A_2x(x-1)^2+B_1x^2+B_2x^2(x-1)}{x^2(x-1)^2},$$

звідки

$$ax^2+bx+c\equiv A_1(x-1)^2+A_2x(x-1)^2+B_1x^2+B_2x^2(x-1).$$

Многочлени тотожно рівні тоді й тільки тоді, коли рівні їхні коефіцієнти при відповідних степенях x.

Маємо

$$\begin{array}{l} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array}\begin{cases} A_2+B_2=0, \\ A_1-2A_2+B_1-B_2=a, \\ -2A_1+A_2=b, \\ A_1=c, \end{cases}$$

звідки $A_1=c,\ A_2=b+2c,\ B_2=-b-2c,\ B_1=a+b+c.$

Отже, $A_2=B_2=0\Leftrightarrow b+2c=0$ і $-b-2c=0$, тобто коли $b=-2c$. Таким чином, первісна функції $\frac{ax^2+bx+c}{x^2(x-1)^2}$ є раціональною функцією тоді й тільки тоді, коли $b=-2c$.

§ 8.4. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Вираз $R(x,u_1,u_2,\ldots,u_n)$ називають *раціональною функцією* змінних x, $u_1,u_2,\ldots,u_n$, якщо над цими змінними та дійсними числами виконується скінченна кількість лише арифметичних операцій.

Вкажемо деякі типи інтегралів від ірраціональних функцій, які за допомогою певної підстановки можна звести до інтегралів від раціональної функції і, отже, проінтегрувати в елементарних функціях.

1. Інтеграли виду

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right)dx,$$

де m_i, $n_i>1$, $i=\overline{1,\ p}$, — натуральні числа, a, b, c, d — дані дійсні числа, причому $ad-bc\neq 0$, бо інакше відношення $\frac{ax+b}{cx+d}$ не залежатиме від x.

Підстановка: $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, де k — спільний знаменник дробів $\frac{m_i}{n_i}$, $i=\overline{1,\ p}$.

2. Інтеграли виду

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,\ a\neq 0.$$

Підстановки Ейлера:

1) $a>0$: $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x\pm t$ (знаки можна брати у будь-якій комбінації);

2) $c>0$: $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm xt$;

3) $a<0,\ c\le 0,\ b^2-4ac>0$: $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$, α — корінь квадратного тричлена ax^2+bx+c.

3. Інтеграли виду

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx,\ m,\ n,\ p\in\mathbf{Q}.$$

Вираз $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx,\ a\ne 0,\ b\ne 0,$ називають диференціальним біномом або біномним диференціалом.

Інтеграл від диференціального бінома обчислюється в скінченному вигляді тільки в таких трьох випадках:

1) $p\in \mathrm{Z}$. Підстановка: $x=t^k$, k — спільний знаменник чисел m і n;

2) $\dfrac{m+1}{n}\in \mathrm{Z}$. Підстановка: $a+bx^n=t^k$, k — знаменник числа p;

3) $\dfrac{m+1}{n}+p\in \mathbf{Z}$. Підстановка: $ax^{-n}+b=t^k$, k — знаменник числа p.

Якщо жодна з цих умов не виконується, то диференціальний біном не інтегрується в елементарних функціях (теорема Чебишова).

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) якщо $f(x)=R(x,\ u_1(x),\ u_2(x))$ — раціональна функція змінних x, u_1, u_2, то f — раціональна функція змінної x;

2) якщо $ad-bc=0$ і $f(x)=R\left(x,\ \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\ \ldots,\ \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right)$ — раціональна функція змінних x та $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_i}{n_i}}$, $i=\overline{1,\ p}$, то f — раціональна функція змінної x;

3) якщо не виконано жодної з умов, пов'язаних з підстановками Ейлера, то або функція $f(x)=R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ є раціональною функцією змінної x, або f не визначена (як функція дійсної змінної) на довільному проміжку $\langle a;b\rangle$;

4) інтеграл $\int\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$ не обчислюється у скінченному вигляді;

5) будь-яка ірраціональна функція інтегрується в елементарних функціях?

2. Виконати вказані завдання усно.

1) Раціональною функцією від яких змінних є ірраціональна функція:

а) $\frac{2x+1}{\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt[4]{x^3}}$; в) $\frac{x^2+7x}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$;

г) $\frac{4}{x^2+2}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$; д) $\frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$; е) $\frac{x+5}{\sqrt{x^2-2x-1}}$?

2) Знайти інтеграли від ірраціональних функцій:

а) $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x}}$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; г) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}$; д) $\int\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$;

е) $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$; є) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$; ж) $\int\frac{(x-8)dx}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$.

3) Для функції f знайти первісну, графік якої проходить через задану точку:

а) $f(x)=\sqrt{x}$, $(0,\ 1)$; б) $f(x)=2x+\frac{1}{\sqrt{x}}$, $(0,\ 0)$;

в) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, $(3,\ 3)$; г) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, $(\pi,\ 0)$.

4) Турбіна компресора обертається з кутовим прискоренням, яке змінюється за законом $\varepsilon=3\sqrt{t}$, де ε — кутове прискорення, рад/с^2; t — час, с. Визначити, на скільки збільшиться кутова швидкість турбіни за перші 4 с після запуску?

3. Знайти інтеграли від ірраціональних функцій (тип 1):

1) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}}$; 3) $\frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2\sqrt{x}}$; 4) $\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$;

5) $\int\frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$; 6) $\int\frac{\sqrt[4]{x-3}dx}{\sqrt{x-3}+\sqrt[3]{x-3}}$; 7) $\int\frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}dx}{(2x-3)^{\frac{1}{3}}+1}$;

8) $\int(x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$; 9) $\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{(x+1)}$; 10) $\int\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^3}}dx$; 11) $\int x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx$;

12) $\int\sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{(x-1)^2}}dx$; 13) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$; 14)• $\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$;

15) $\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$; 16) $\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$, $a>0$;

17) $\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$, $a\neq b$; 18) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

4. Знайти інтеграли за допомогою підстановок Ейлера:

1) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$; 2) $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}$; 3) $\int\frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$;

4) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$; 5) $\int\frac{(x-1)dx}{\left(x^2+2x\right)\sqrt{x^2+2x}}$; 6) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$;

7) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$; 8)• $\int\sqrt{x^6-x^4}\,dx$; 9) $\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$;

10) $\int\frac{\left(x^2+4x\right)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; 11) $\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$; 12) $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$;

13) $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(2x-x^2\right)^3}}$; 14) $\int\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{15}dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

5. Знайти інтеграли від диференціальних біномів:

1) $\int\frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}$; 2) $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 3) $\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$; 4) $\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

5) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^5}}$; 6) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^2}}$; 7) $\int\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4dx$; 8) $\int\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$;

9) $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$; 10) $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$; 11)• $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{x^{15}+x^{14}}}$; 12) $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

13) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$; 14) $\int\frac{dx}{x^3\sqrt[3]{1+x^5}}$; 15) $\int\frac{\sqrt[3]{(1+2x^3)^2}}{x^6}dx$; 16) $\int\sqrt[3]{x}\sqrt[7]{1+x\sqrt[3]{x}}\,dx$.

6. Знайти дані інтеграли (різні приклади):

1) $\int\frac{(2+\sqrt[3]{x})dx}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}$; 3) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}$;

4) $\int\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x^3}}dx$; 5) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$; 6) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x^2}$;

7) $\int\frac{(3x+2)dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}$; 8) $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{(x+1)^2}}$; 9) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$;

10)• $\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx$; 11) $\int\sqrt{1-x-x^2}\,dx$; 12) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$;

13) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$; 14) $\int \sqrt[3]{x-x^3}\,dx$; 15) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}$; 16) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$;

17) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$; 18) $\int \frac{(x-1)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$; 19) $\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$.

7. Визначити, коли інтеграл $\int \sqrt{1+x^m}\,dx$, де $m \in \mathbf{Q}$, обчислюється у скінченному вигляді?

8. Нехай $f(x) = R(x,\ \sqrt{ax+b},\ \sqrt{cx+d})$ — раціональна функція змінних x, $\sqrt{ax+b}$ та $\sqrt{cx+d}$. Довести, що інтеграл $\int f(x)dx$ обчислюється у скінченному вигляді.

9•. Довести, що інтеграл $\int R(x,\ (x-a)^{\frac{p}{l}}(x-b)^{\frac{q}{l}})\,dx$, де R — раціональна функція змінних x і $(x-a)^{\frac{p}{l}}(x-b)^{\frac{q}{l}}$, $p, q, l \in \mathbf{Z}$, є елементарною функцією, якщо $p + q = kl$, $k \in \mathbf{Z}$.

10. Тіло масою 4 кг здійснює прямолінійний рух із стану спокою під дією змінної сили відповідно до закону $F = \frac{2}{\sqrt{t+1}}$, де F — сила, Н; t — час, с. Через 3 с після початку руху сила припиняє дію і тіло рухається рівномірно із швидкістю, яку набуло до цього моменту. Знайти залежність швидкості руху від часу. Побудувати графік цієї залежності.

Зразки розв'язування задач

3. 14) Знайдемо інтеграл $I = \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$. Маємо

$$I = \int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1} = t^2,\ \ x = \frac{1+t^2}{t^2-1}, \\ dx = \frac{-4tdt}{(t^2-1)^2} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{(t-1)(-4t)}{(t+1)(t^2-1)^2}dt = -4\int \frac{tdt}{(t-1)(t+1)^3}.$$

Дістали інтеграл від раціональної функції за змінною t. Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні раціональні дроби:

$$\frac{t}{(t-1)(t+1)^3} = \frac{A_1}{t-1} + \frac{A_2}{(t+1)^3} + \frac{A_3}{(t+1)^2} + \frac{A_4}{t+1} =$$

$$= \frac{A_1(t+1)^3 + A_2(t-1) + A_3(t-1)(t+1) + A_4(t-1)(t+1)^2}{(t-1)(t+1)^3}.$$

Із рівності дробів з однаковими знаменниками дістаємо

$$t \equiv A_1(t+1)^3 + A_2(t-1) + A_3(t-1)(t+1) + A_4(t-1)(t+1)^2.$$

Невизначені коефіцієнти знайдемо з умови рівності значень многочленів при однакових значеннях t:

$$\begin{array}{ll} t=1 & \\ t=-1 & \\ t=0 & \\ t=-2 & \end{array}\begin{cases} 1=8A_1, \\ -1=-2A_2, \\ 0=A_1-A_2-A_3-A_4, \\ -2=-A_1-3A_2+3A_3-3A_4, \end{cases}$$

звідки $A_1=\frac{1}{8}$, $A_2=\frac{1}{2}$, $A_3=-\frac{1}{4}$, $A_4=-\frac{1}{8}$.

Отже,

$$I=-4\left(\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t+1)^3}-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(t+1)^2}-\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t+1}\right)=-4\left(\frac{1}{8}\ln|t-1|-\frac{1}{4(t+1)^2}+\frac{1}{4(t+1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{8}\ln|t+1|\right)+C=\frac{1}{2}\ln\frac{\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right|}{\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right|}+\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}+\frac{x-1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}+C,\ x\in[1;\ +\infty).$$

Зауважимо, що стандартний метод обчислення інтегралів не завжди є найкращим. Так, заданий інтеграл можна знайти більш раціональним методом:

$$I=\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}dx=$$

$$=\int\frac{x+1-2\sqrt{x^2-1}+x-1}{x+1-x+1}dx=\int(x-\sqrt{x^2-1})dx=\frac{x^2}{2}-\int\sqrt{x^2-1}dx.$$

Останній інтеграл знайдемо інтегруванням частинами:

$$\int\sqrt{x^2-1}dx=\left|\begin{array}{l} u=\sqrt{x^2-1},\quad du=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}, \\ dv=dx,\quad v=x \end{array}\right|$$

$$=x\sqrt{x^2-1}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}=x\sqrt{x^2-1}-\int\sqrt{x^2-1}dx+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=x\sqrt{x^2-1}-\int\sqrt{x^2-1}dx+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|.$$

Розв'язуючи задане рівняння відносно інтеграла $\int\sqrt{x^2-1}dx$, матимемо

$$\int\sqrt{x^2-1}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C.$$

І остаточно

$$I=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C.$$

Пропонуємо самостійно переконатися у рівносильності результатів, здобутих першим і другим способами.

4. 8) Для відшукання заданого інтеграла застосуємо першу підстановку Ейлера:

$$I=\int\sqrt{x^6-x^4}\,dx=\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx= \left|\begin{array}{l}\sqrt{x^2-1}=x+t, \quad x=-\dfrac{1+t^2}{2t},\\ dx=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t^2}-1\right)dt\end{array}\right|$$

$$=-\int\left(\frac{1+t^2}{2t}\right)^2\left(t-\frac{1+t^2}{2t}\right)\frac{t^2-1}{2t^2}dt=-\int\frac{(t^4-1)^2}{16t^5}dt=-\frac{1}{16}\int\left(t^3-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^5}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{16}\left(\frac{t^4}{4}-2\ln|t|-\frac{1}{4t^4}\right)+C=-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)^4-2\ln\left|\sqrt{x^2-1}-x\right|-\frac{1}{4(\sqrt{x^2-1}-x)^4}\right)+C.$$

Розглянутий інтеграл можна було б обчислити і за допомогою третьої підстановки Ейлера. Тоді

$$I=\int\sqrt{x^6-x^4}\,dx=\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx= \left|\begin{array}{l}\sqrt{x^2-1}=(x-1)t, \quad x=\dfrac{t+1}{t-1},\\ dx=-\dfrac{2dt}{(t-1)^2}\end{array}\right|$$

$$=-\int\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2\left(\frac{t+1}{t-1}-1\right)t\frac{2dt}{(t-1)^2}=-4\int\frac{(t+1)^2t\,dt}{(t-1)^5}.$$

У цьому разі дістали більш складну раціональну функцію під знаком інтеграла, ніж при застосуванні першої підстановки Ейлера, так що більш раціональним є перший спосіб обчислення цього інтеграла.

5. 11)

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt[5]{x^{15}+x^{14}}}=\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{x}}}=\int x^{-3}(1+x^{-1})^{-\frac{1}{5}}dx.$$

Під інтегралом стоїть диференціальний біном, причому $m=-3$, $n=-1$, $p=-\frac{1}{5}$. Маємо $\frac{m+1}{n}=2\in\mathbf{Z}$, а тому можлива підстановка $1+\frac{1}{x}=t^5$, звідки $x=\frac{1}{t^5-1}$, $dx=\frac{-5t^4dt}{(t^5-1)^2}$. Тоді

$$I=-5\int\frac{t^4(t^5-1)^3dt}{(t^5-1)^2t}=-5\int t^3(t^5-1)dt=-5\left(\frac{t^9}{9}-\frac{t^4}{4}\right)+C=$$

$$=-5\left(\frac{1}{9}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{9}{5}}-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}}\right)+C.$$

6. 10) До інтеграла $\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx$ можливе застосування підстановок Ейлера. Однак слід пам'ятати, що досить часто використання підстановок Ейлера призводить до складних раціональних функцій. Тому на практиці при обчисленні деяких інтегралів цього типу користуються простішими методами

Проілюструємо це на розглядуваному прикладі. Маємо

$$\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx=\int\sqrt{(x+1)^2+4}\,d(x+1)= \left|\begin{array}{l}u=\sqrt{(x+1)^2+4}, \quad du=\dfrac{(x+1)dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}},\\ dv=d(x+1), \quad v=x+1\end{array}\right|$$

$$= (x+1)\sqrt{(x+1)^2+4} - \int \frac{(x+1)^2 dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = (x+1)\sqrt{x^2+2x+5} -$$

$$-\int \frac{(((x+1)^2+4)-4)}{\sqrt{(x+1)^2+4}} dx = (x+1)\sqrt{x^2+2x+5} - \int \sqrt{x^2+2x+5}dx -$$

$$-4\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = (x+1)\sqrt{x^2+2x+5} - \int \sqrt{x^2+2x+5}dx - 4\ln\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+5}\right|.$$

Звідси

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5} - 2\ln\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C.$$

Пропонуємо самостійно переконатися у перевагах цього методу перед використанням підстановок Ейлера.

9. Нехай $I = \int R(x,(x-a)^{\frac{p}{l}}(x-b)^{\frac{q}{l}})dx$. Покладемо $\frac{x-a}{x-b} = t^l$, тоді $x = \frac{bt^l - a}{t^l - 1}$, $dx = \frac{l(a-b)t}{(t^l-1)^2}dt$, $x-b = \frac{b-a}{t^l-1}$. Якщо $\frac{p+q}{l} = k$ — ціле число, то

$$R(x,(x-a)^{\frac{p}{l}}(x-b)^{\frac{q}{l}})dx = R\left(x, \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\frac{p}{l}}(x-b)^{\frac{p+q}{l}}\right)dx =$$

$$= R\left(\frac{bt^l-a}{t^l-1}, t^p\left(\frac{b-a}{t^l-1}\right)^{\frac{p+q}{l}}\right)\frac{l(a-b)t^{l-1}}{(t^l-1)^2}dt = R_1(t)dt,$$

де $R_1(t)$ — раціональна функція від t, а тому інтеграл $I = \int R_1(t)dt$ виражається через елементарні функції.

§ 8.5. Інтегрування деяких трансцендентних функцій

У наведеній таблиці вказано методи обчислення інтеграла $\int f(x)dx$, де f — деяка трансцендентна функція:

$f(x)$	Додаткові умови	Метод інтегрування
$R(\sin x, \cos x)$	–	Універсальна підстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$
$R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$	–	Підстановка $\operatorname{th}\frac{x}{2} = t$
$R(\sin x, \cos x)$ $R(\sin x)\cos^{2n-1}x$	$R(\sin x, -\cos x) =$ $= -R(\sin x, \cos x)$	Підстановка $\sin x = t$

$f(x)$	Додаткові умови	Метод інтегрування
$R(\sin x, \cos x)$ $R(\cos x)\sin^{2n-1}x$	$R(-\sin x, \cos x) =$ $= -R(\sin x, \cos x)$	Підстановка $\cos x = t$
$R(\sin x, \cos x)$ $R(\operatorname{tg} x)$	$R(-\sin x, -\cos x) =$ $= R(\sin x, \cos x)$	Підстановка $\operatorname{tg} x = t$
$R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$ $R(\operatorname{ch} x)\operatorname{sh}^{2n-1}x$	$R(-\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) =$ $= -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$	Підстановка $\operatorname{ch} x = t$
$R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$ $R(\operatorname{sh} x)\operatorname{ch}^{2n-1}x$	$R(\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) =$ $= -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$	Підстановка $\operatorname{sh} x = t$
$R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$ $R(\operatorname{th} x)$	$R(-\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) =$ $= R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$	Підстановка $\operatorname{th} x = t$
$\cos \alpha x \cos \beta x$ $\sin \alpha x \sin \beta x$ $\cos \alpha x \sin \beta x$	–	Перетворення добутку в суму
$\sin^{\alpha} x \cos^{\beta} x, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{Q}$	–	Підстановка $\sin x = t \, (\cos x = t)$
$R(e^x)$	–	Підстановка $e^x = t$
$P_n(x)\varphi(x)$, де P_n – многочлен n-го степеня, $\varphi(x)$ – показникова, логарифмічна, тригонометрична або обернена тригонометрична функція	–	Інтегрування частинами
$e^{ax}\cos bx \qquad e^{ax}\sin bx$	–	Інтегрування частинами

Вправи

1. Знайти дані інтеграли:

1) $\int \cos^5 x dx$; 2) $\int \sin^5 x dx$; 3) $\int \sin 3x \sin x dx$; 4) $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$;

5) $\int \cos^2 ax \cos^2 bx dx$; 6) $\int \cos^6 x dx$; 7) $\int \sin^6 x dx$; 8) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$; 9) $\int \frac{dx}{\cos x}$;

10) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$; 11) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$; 12) $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$;

13) $\int \operatorname{tg}^7 x dx$; 14) $\int \operatorname{ctg}^6 x dx$; 15) $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^3 dx$; 16) $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x}$;

17) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$; 18) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$; 19) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$; 20) $\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$;

21) $\int \frac{\sin^3 x dx}{2 + \cos x}$; 22) $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^2 x - 3}$; 23) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$; 24) $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$;

25) $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$;   26)• $\int \frac{dx}{1 + a\cos x}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

2. Вивести рекурентні формули для обчислення інтегралів:

1)• $I_n = \int \sin^n x dx$;   2) $K_n = \int \cos^n x dx$, $n \geq 3$.

Скористатися цими формулами при обчисленні інтегралів $I_6 = \int \sin^6 x dx$ та $K_8 = \int \cos^8 x dx$.

3. Знайти інтеграл $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx$ за допомогою підстановки: а) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$; б) $\operatorname{tg} x = t$. Порівняти складність обчислень.

4. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} dx$;   2) $\int \frac{dx}{4 + 3\operatorname{tg} x}$;

3)• $\int \frac{\sin x dx}{\sin x - 3\cos x}$;   4) $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx$.

5. Довести, що коли $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$, а $K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$, $n > 2$, то

$$I_n = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}, \quad K_n = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} K_{n-2}.$$

Знайти інтеграли $I_5 = \int \frac{dx}{\sin^5 x}$, $K_7 = \int \frac{dx}{\cos^7 x}$.

6. Нехай $f(x) = R\left(e^{\frac{m_1}{n_1}x}, e^{\frac{m_2}{n_2}x}, \ldots, e^{\frac{m_k}{n_k}x} \right)$ — раціональна функція змінних $e^{\frac{m_i}{n_i}x}$, $i = \overline{1,k}$, де $m_i \in \mathbf{Z}$, $n_i \in \mathbf{N}$. Довести, що інтеграл $\int f(x) dx$ обчислюється у скінченному вигляді. Вказати, за допомогою якої підстановки цей інтеграл можна звести до інтеграла від раціональної функції.

7. Знайти дані інтеграли:

1) $\int \frac{e^{3x} dx}{1 + e^{2x}}$;   2) $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$;   3) $\int \frac{dx}{(1 + e^x)^2}$;   4) $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}$;

5) $\int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}}$;   6) $\int \frac{2e^{2x} - e^x - 3}{e^{2x} - 2e^x - 3} dx$;   7) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$;   8) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}}$;

9) $\int \frac{e^x dx}{(1 + e^{2x})^2}$;   10) $\int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx$;   11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x} + \sqrt{1 - e^x}}$;

12) $\int \sqrt{\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^{x}-1}\,dx$; 13) $\int \ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})dx$; 14) $\int \frac{\ln(x-1)dx}{(x+1)^3}$;

15) $\int \mathrm{e}^{-x}\arcsin \mathrm{e}^{x}dx$; 16) $\int (2x+1)\mathrm{e}^{\operatorname{arctg} x}dx$; 17) $\int \frac{x\mathrm{e}^{x}dx}{(x+1)^2}$;

18) $\int \mathrm{e}^{2x}\sin \mathrm{e}^{x}dx$; 19) $\int \sqrt{2^{x}-1}\,dx$; 20) $\int \mathrm{e}^{-x}\ln(\mathrm{e}^{x}+1)dx$.

8•. Знайти $f(x)$, якщо $f(0)=0$, а

$$f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1,\\ x, & 1<x<+\infty.\end{cases}$$

9. Посудина, об'єм якої 30 л, наповнюється повітрям (80 % азоту та 20 % кисню). За 1 с в неї надходить 0,2 л азоту, який безперервно перемішується з наявним у посудині повітрям. З посудини витікає така сама кількість суміші. Через скільки часу у посудині буде 90 % азоту?

10. Знайти інтеграли (різні приклади):

1) $\int \frac{x^2dx}{(x-a)(x-b)(x-c)}$; 2) $\int \frac{dx}{x^5+2x^3+3x^2}$; 3) $\int \frac{x^9dx}{(x^2-1)^3}$;

4) $\int \frac{x^2(1-x^2)dx}{(1+x^2)^3}$; 5) $\int \frac{dx}{x(x^6+1)^2}$; 6) $\int \frac{(x^8-1)dx}{x(x^8+1)}$; 7) $\int \frac{xdx}{x^8-1}$; 8) $\int \frac{\mathrm{e}^{8x}dx}{4-\mathrm{e}^{2x}}$;

9) $\int \frac{\mathrm{e}^{2x}dx}{(2+\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})^2}$; 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}+\sqrt{x^5}}$; 11) $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x+\sqrt[3]{x^4}}dx$;

12) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$; 13) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$; 14) $\int \frac{(x-5)dx}{\sqrt{x^2+10x}}$;

15) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$; 16) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$; 17) $\int \sqrt{1-4x-x^2}\,dx$;

18) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}$; 19) $\int \frac{x^3dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$; 20) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$; 21) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx$;

22)• $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$; 23) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$; 24) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$;

25) $\int \frac{(3x+2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}$; 26) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$; 27) $\int \sin^3 x\cos^5 x\,dx$;

28) $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx$; 29) $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$; 30) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^4 x}$;

31) $\int \frac{dx}{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)\cos x}$; 32) $\int \frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}dx$; 33) $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}$;

34) $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x + 2\sin 2x}$; 35) $\int \frac{dx}{3 - 2\sin x + \cos x}$; 36) $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$;

37) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$; 38) $\int \operatorname{tg}^n x dx$; 39) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}dx$; 40) $\int x^2 \arccos x dx$;

41) $\int \sqrt{x} \ln x dx$; 42) $\int e^{\arcsin x} dx$; 43) $\int x^2 \ln\frac{1+x}{1-x} dx$; 44) $\int \frac{xe^x dx}{\sqrt{1+e^x}}$;

45) $\int x(x^2+1)e^{-x^2} dx$; 46) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})dx$; 47) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$;

48) $\int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$; 49) $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx$; 50) $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

Зразки розв'язування задач

1. 26) Для обчислення цього інтеграла застосуємо універсальну тригонометричну підстановку. Матимемо

$$I = \int \frac{dx}{1 + a\cos x} = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, & x = 2\operatorname{arctg} t, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right|$$

$$= 2\int \frac{dt}{a + 1 + (1-a)t^2} = \frac{2}{1-a}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{1+a}{1-a}}.$$

Розглянемо два випадки:

1) $0 < a < 1$. Тоді

$$I = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\, t + C = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C;$$

2) $a > 1$. Тоді

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \ln\left| \frac{t - \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}}{t + \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \ln\left| \frac{\sqrt{a-1}\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sqrt{a+1}} \right| + C.$$

2. 1) Скористаємось методом інтегрування частинами:

$$I_n = \int \sin^n x dx = -\int \sin^{n-1} x d(\cos x) = \left| \begin{array}{ll} u = \sin^{n-1} x, & du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx, \\ dv = d(\cos x), & v = \cos x \end{array} \right|$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int (1 - \sin^2 x)\sin^{n-2} x dx =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\left(\int \sin^{n-2} x dx - \int \sin^n x dx\right).$$

Отже, для обчислення інтеграла I_n дістали рівняння

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

звідки

$$I_n = \int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \ n > 2.$$

Користуючись цією формулою, знайдемо інтеграл $I_6 = \int \sin^6 x dx$. Маємо

$$I_6 = \int \sin^6 x dx = -\frac{1}{6}\cos x \sin^5 x + \frac{5}{6} I_4;$$

$$I_4 = \int \sin^4 x dx = -\frac{1}{4}\cos x \sin^3 x + \frac{3}{4} I_2;$$

$$I_2 = \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x) dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C.$$

І остаточно

$$I_6 = \int \sin^6 x dx = -\frac{1}{6}\cos x \sin^5 x - \frac{5}{24}\cos x \sin^3 x + \frac{5}{16}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C.$$

4. 3)

$$I = \int \frac{\sin x dx}{\sin x - 3\cos x} = \int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\operatorname{tg} x - 3} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t, \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{t dt}{(1+t^2)(t-3)}.$$

Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні раціональні дроби:

$$\frac{t}{(1+t^2)(t-3)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C}{t-3} = \frac{(At+B)(t-3)+C(1+t^2)}{(1+t^2)(t-3)}.$$

Звідси $t \equiv (At+B)(t-3)+C(1+t^2)$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t, дістаємо систему

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ -3A + B = 1, \\ -3B + C = 0, \end{cases}$$

з якої $A = -\frac{3}{10}$, $B = \frac{1}{10}$, $C = \frac{3}{10}$. Тоді

$$I = \int \left(\frac{-\frac{3}{10}t + \frac{1}{10}}{1+t^2} + \frac{\frac{3}{10}}{t-3} \right) dt = -\frac{3}{10}\int \frac{t dt}{1+t^2} + \frac{1}{10}\int \frac{dt}{1+t^2} + \frac{3}{10}\int \frac{dt}{t-3} = -\frac{3}{20}\ln(1+t^2) +$$

$$+ \frac{1}{10}\operatorname{arctg} t + \frac{3}{10}\ln|t-3| + C = -\frac{3}{20}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x) + \frac{1}{10}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + \frac{3}{10}\ln|\operatorname{tg} x - 3| + C =$$

$$= \frac{1}{10}x + \frac{3}{10}\ln|\sin x - 3\cos x| + C.$$

8. За умовою $f(0) = 0$,

$$f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le 1, \\ x, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Покладемо $t = \ln x$, тоді

$$f'(t) = \begin{cases} 1, & -\infty < t \le 0, \\ e^t, & 0 < t < +\infty, \end{cases}$$

звідки

$$f(t) = \begin{cases} t + C_1, & -\infty < t \le 0, \\ e^t + C_2, & 0 < t < +\infty. \end{cases}$$

З умови неперервності функції $f(t)$ в точці $t=0$ випливає, що $C_1 = 1 + C_2$. Отже,

$$f(t)=\begin{cases} x+C_1, & -\infty < x \le 0, \\ e^x + C_1 - 1, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

За умовою $f(0)=0$, тому $C_1=0$, і остаточно

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\infty < x \le 0, \\ e^x - 1, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

10. 22) Для обчислення заданого інтеграла зручно використати тригонометричну підстановку:

$$I=\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \left| \begin{aligned} & x = a\operatorname{tg} t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, \\ & dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt \end{aligned} \right|$$

$$=\int \frac{a\,dt}{a\operatorname{tg} t \cos^2 t\sqrt{a^2+a^2\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{a}\int \frac{\sin t\,dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\cos t)}{\cos^2 t - 1} = \frac{1}{2a}\ln\frac{1-\cos t}{1+\cos t} + C,\ a>0.$$

Оскільки $\operatorname{tg} t = \dfrac{x}{a}$, то $\cos t = \dfrac{1}{\sec t} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$. Тоді

$$\frac{1-\cos t}{1+\cos t} = \frac{1-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}}{1+\dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{\sqrt{a^2+x^2}+a} = \frac{\left(\sqrt{a^2+x^2}-a\right)^2}{x^2}.$$

Отже, остаточно маємо

$$I = \frac{1}{2a}\ln\frac{\left(\sqrt{a^2+x^2}-a\right)^2}{x^2} + C = \frac{1}{a}\ln\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{|x|} + C.$$

Розділ 9 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

§ 9.1. Поняття визначеного інтеграла

(T)-розбиттям відрізка $[a; b]$, $b > a$, називають множину його точок $\{x_k \in [a; b]: \ 0 \le k \le n\}$, де $a = x_0 < x_1 < ... < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = b$. Число $\lambda(T) = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta x_k$, де $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, називають *дрібністю розбиття* (T) відрізка $[a; b]$.

Якщо задано функцію $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, $y \in \mathbf{R}$, (T)-розбиття відрізка $[a; b]$ і точки $c_k \in [x_k; x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, то суму $S(T) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k$ називають *інтегральною сумою* (Рімана), яка відповідає функції f, (T)-розбиттю відрізка $[a; b]$ та вибору точок $c_k \in [x_k; x_{k+1}]$.

Число I називають *границею інтегральної суми* $S(T)$ при $\lambda(T) \to 0$ і записують $I = \lim\limits_{\lambda(T) \to 0} S(T)$ або $S(T) \to I(\lambda(T) \to 0)$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta(\varepsilon) > 0 : \ \lambda(T) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |S(T) - I| < \varepsilon$.

Число I називають також *визначеним інтегралом* або *інтегралом Рімана* функції f на відрізку $[a; b]$ і позначають $I = \int\limits_a^b f(x)dx$, де $\int$ — знак інтеграла, x — змінна інтегрування, $f(x)$ — підінтегральна функція, $f(x)dx$ — підінтегральний вираз, числа a і b — нижня та верхня межі інтегрування. Саму функцію f при цьому називають *інтегровною за Ріманом* або просто *інтегровною* на відрізку $[a; b]$.

Таким чином, за означенням

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k ,$$

якщо границя справа існує.

Необхідна умова інтегровності функції за Ріманом: якщо функція f інтегровна за Ріманом на відрізку $[a; b]$, то f обмежена на цьому відрізку.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) якщо $\{x_k: \ 0 \le k \le n\}$ — (T)-розбиття відрізка $[a; b]$, то $x_k = a + \frac{k}{n}(b - a)$ $\forall k = \overline{0, n}$;

2) твердження, обернене до 1), є правильним;

3) якщо $\lambda(T)$ — дрібність (T)-розбиття відрізка $[a; b]$ точками x_k, $k = \overline{0,n}$, то $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k < \lambda(T) \quad \forall k = \overline{0, n-1}$;

4) якщо $S(T) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k$ або $S(T) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\Delta x_k$, то $S(T)$ — інтегральна сума;

5) твердження, обернене до 4), є правильним;

6) існує функція f, для якої значення її інтегральної суми не залежить від (T)-розбиття відрізка $[a; b]$ точками $x_k, k = \overline{0,n}$, та способу вибору точок $c_k \in [x_k; x_{k+1}]$;

7) границя інтегральної суми не залежить ні від розбиття (T), ні від способу вибору точок c_k;

8) якщо функція f інтегровна за Ріманом на відрізку $[a; b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \approx$ $\approx \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k$, причому абсолютна похибка цього наближення може стати як завгодно малою, якщо взяти розбиття (T) досить дрібним;

9)• якщо функція f обмежена на відрізку $[a; b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку?

2. Виконати вказані завдання усно.

1) Довести, що функція $f(x) = C$, C — const, інтегровна на довільному відрізку $[a; b]$. Чому дорівнює $\int\limits_a^b Cdx$?

2) Нехай $f(x) = x^3$, $x \in [0; 4]$ і $\{0, 2, 4\}$ — (T)-розбиття відрізка $[0; 4]$. Знайти значення інтегральної суми для функції f, якщо: а) $c_k = x_k$; б) $c_k =$ $= x_{k+1}$; в) $c_k = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$, $k = 0,1$.

3) Нехай функція f визначена на відрізку $[0; 1]$ і $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n-1} <$ $< x_{2n} = 1$. Чи є інтегральними для f при деякому розбитті відрізка $[0; 1]$ такі суми:

а) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k)$; б) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1})(x_{2k+2} - x_{2k})$?

3. Нехай функція f визначена на відрізку $[a; b]$ і

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k),\ \sigma_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}),$$

де $x_0 = a$, $x_1 = a + \dfrac{b-a}{n}, \ldots, x_{n-1} = a + \dfrac{n-1}{n}(b-a)$, $x_n = b$. Якщо існує число S таке, що $S_n \le S \le \sigma_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$, то послідовності (S_n) та (σ_n) збіжні і мають границею число S. Довести це.

4. Побудувати інтегральну суму для функції f, що відповідає (T)-розбиттю даного відрізка $[a;\ b]$ на n рівних частин та вказаному способу вибору точок c_k. Знайти границю інтегральної суми при $\lambda(T)\to 0$:

1) $f(x)=1+x$, $[-1;\ 4]$, $c_k=\frac{1}{2}(x_k+x_{k+1})$; 2) $f(x)=Cx$, C — const, $[a;\ b]$, $c_k=x_k$;

3) $f(x)=Cx^2$, $[a;\ b]$, $c_k=x_{k+1}$; 4) $f(x)=C^x$, $[a;\ b]$, $c_k=x_k$;

5) $f(x)=\sqrt{x}$, $[0;\ 1]$, $c_k=x_{k+1}$; 6)• $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $[a;\ b]$, $a>0$, $c_k=\sqrt{x_k x_{k+1}}$;

7) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x\in[a;\ b]\cap\mathbf{Q},\\ 0, & \text{якщо } x\notin\mathbf{Q},\end{cases}$ $c_k\in\mathbf{Q}\cap[x_k;\ x_{k+1}]$;

8) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x\in[a;b]\cap\mathbf{Q},\\ 0, & \text{якщо } x\notin\mathbf{Q},\end{cases}$ $c_k\in[x_k;\ x_{k+1}]\setminus\mathbf{Q}$.

5. Записати дані суми у вигляді інтегральних сум:

1) $S_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}$; 2)• $S_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k-\ln n$;

3) $S_n=n\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}$; 4) $S_n=\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$;

5) $S_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$; 6) $S_n=n\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}$;

7) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^p}{n^{p+1}}$; 8) $S_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\cos^2\frac{\pi k}{4n}}$;

9) $S_n=a\sum\limits_{k=0}^{n-1}(aq^k)^m(q^{k+1}-q^k)$, $q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, $0<a<b$.

6. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{1-x}, & \text{якщо } 0<x<1,\\ 0, & \text{якщо } x=0,\\ -1, & \text{якщо } x=1,\end{cases}$$

інтегровна на відрізку $[0;\ 1]$.

7*. Функцію f називають ступінчастою на відрізку $[a;\ b]$, якщо існують точки $a=a_0<a_1<\ldots<a_m=b$ такі, що $f(x)=c_k$ $\forall x\in(a_k;\ a_{k+1})$, $k=\overline{0,m-1}$, а значення $f(a_k)$ довільні $\forall k=\overline{0,m}$. Довести, що кожна ступінчаста функція f інтегровна на відрізку $[a;\ b]$ і

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{m-1}c_k(a_{k+1}-a_k).$$

8*. Нехай функція f зростає на відрізку $[a;\, b]$, а $S_1(T) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k$, $S_2(T) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\Delta x_k$ і $S(T) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k$ — інтегральні суми цієї функції. Довести, що $0 \le S(T) - S_1(T) \le S_2(T) - S_1(T) \le \lambda(T)(f(b) - f(a))$, де $\lambda(T)$ — дрібність (T)-розбиття відрізка $[a;\, b]$.

9*. Нехай функція f обмежена на відрізку $[a;\, b]$, $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$, $k = \overline{0,n}$, і $f_n(x) = \sup\limits_{[x_k;\, x_{k+1}]} f(x)$, якщо $x \in [x_k;\, x_{k+1}]$, а $f_n(b) = f(b)$. Довести, що:

1) коли існує $\int\limits_a^b f(x)dx = A$, то існуватиме $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = A$;

2) твердження, обернене до 1), неправильне;

3)• $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$ існує для довільної функції f, обмеженої на $[a;\, b]$.

10*. Сформулювати та розв'язати задачу, аналогічну задачі 9, поклавши $f_n(x) = \inf\limits_{[x_k;\, x_{k+1}]} f(x)$, якщо $x \in [x_k;\, x_{k+1}]$.

11*. Якщо існує розбиття (T) відрізка $[a;\, b]$, при якому множина всіх інтегральних сум функції f, визначеної на цьому відрізку, обмежена, то і сама функція f обмежена на відрізку $[a;\, b]$. Довести це.

12. Показати, що з інтегровності функції $|f|$ на відрізку $[a;\, b]$ не випливає інтегровність функції f на цьому відрізку.

13. Нехай функція f неперервна та невід'ємна на відрізку $[a;\, b]$ і $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$. Довести, що $f(x) = 0 \;\; \forall x \in [a;\, b]$.

Зразки розв'язування задач

1. 9) Розглянемо функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \mathbf{Q}, \\ -1, & \text{якщо } x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$$

яка обмежена на довільному відрізку $[a;\, b]$, $b > a$. Для будь-якого розбиття (T) відрізка $[a;\, b]$ точками x_k, $k = \overline{0,n}$, матимемо

$$S(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a, & \text{якщо } c_k \in \mathbf{Q} \;\; \forall k, \\ -\sum\limits_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = a - b, & \text{якщо } c_k \notin \mathbf{Q} \;\; \forall k. \end{cases}$$

Розбиття (T) може бути як завгодно дрібним, тобто $\lambda(T)$ — як завгодно мале, а інтегральні суми можуть при цьому відрізнятися одна від одної досить сильно, тобто вони не можуть бути як завгодно близькими до якогось фіксованого числа. Отже, функція f неінтегровна на відрізку $[a; b]$ і задане твердження неправильне.

4. 6) Відрізок $[a; b]$ розбивається на n рівних частин, тому $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$, $k=\overline{0,n-1}$, і $x_0 = a$, $x_1 = a+\frac{b-a}{n},\ldots,x_n = b$. Покладемо $c_k = \sqrt{x_k x_{k+1}}$. Тоді $x_k = \sqrt{x_k x_k} < \sqrt{x_k x_{k+1}} = c_k < \sqrt{x_{k+1}x_{k+1}} = x_{k+1}$, $k=\overline{0,n-1}$, оскільки $a > 0$. Отже, $c_k \in [x_k; x_{k+1}]$, а $f(c_k) = \frac{1}{c_k^2} = \frac{1}{x_k x_{k+1}} = \left(\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}\right)\frac{1}{\Delta x_k}$, $k=\overline{0,n-1}$. Тоді

$$S(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}\right) = \frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+$$

$$+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}-\frac{1}{b},$$

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} S(T) = \frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

5. 2) Перетворимо S_n:

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln k - n\ln n\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln k - \ln n) = \frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\ldots+\ln\frac{n}{n}\right).$$

Якщо $\frac{1}{n} = \Delta x_k$, $k=\overline{0,n-1}$, $c_0 = x_1 = \frac{1}{n}$, $c_1 = x_2 = \frac{2}{n},\ldots,c_{n-1} = x_n = \frac{n}{n} = 1$, $f(x) = \ln x$, $x > 0$ і $f(0) = 0$, то

$$S_n = S(T) = \sum_{k=0}^{n-1}\ln(c_k)\Delta x_k.$$

9. 3) Позначимо через (T_n) розбиття відрізка $[a; b]$ точками $x_k = a+\frac{k}{n}(b-a)$, $k=\overline{0,n}$, а через $(T_n^{(1)})$ — розбиття, яке утворюється з (T_n) додаванням до точок x_k, $k=\overline{0,n}$, однієї нової точки $x^{(1)}$. Припустимо, що $x^{(1)} \in (x_{k_0}; x_{k_0+1})$. Оскільки $f(x)$ — ступінчаста функція на відрізку $[a; b]$, то $\int_a^b f_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k$, де $M_k = \sup_{[x_k;x_{k+1}]} f(x)$ (див. вправу 7). Нехай

$$S^*(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k,$$

$$S^*(T_n^{(1)}) = \sum_{k=0}^{k_0-1} M_k\Delta x_k + \sup_{[x_{k_0};x^{(1)}]} f(x)(x^{(1)}-x_{k_0}) + \sup_{[x^{(1)};x_{k_0+1}]} f(x)(x_{k_0+1}-x^{(1)}) +$$

$$+\sum_{k=k_0+1}^{n} M_k\Delta x_k.$$

Зрозуміло, що $S^*(T_n) - 2M\frac{b-a}{n} \le S^*(T_n^{(1)}) \le S^*(T_n)$, оскільки

$$\sup_{[x_{k_0};\, x^{(1)}]} f(x) \le M_{k_0} \quad \text{і} \quad \sup_{[x^{(1)};\, x_{k_0+1}]} f(x) \le M_{k_0}.$$

Скориставшись методом математичної індукції, неважко показати, що $S^*(T_n)-$
$-2M\frac{b-a}{n}m \le S^*(T_n^{(m)}) \le S^*(T_n)$ для розбиття $(T_n^{(m)})$, яке утворюється з розбиття (T_n) додаванням m нових точок.

Введемо позначення $I = \inf\limits_{n\in \mathbf{N}} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \inf\limits_{n\in \mathbf{N}} S^*(T_n)$. Число I скінченне, оскільки f — обмежена на відрізку $[a; b]$, і тому $S^*(T_n) \ge \alpha(b-a)$ $\forall n$, де $\alpha \le f(x)$ $\forall x \in [a; b]$.

Покажемо, що $\int\limits_a^b f_n(x)dx \to I$, $n \to \infty$. Маємо $I \le \int\limits_a^b f_n(x)dx$ $\forall n$, і якщо $\varepsilon > 0$ — фіксоване, то $\exists n_0 :$ $\int\limits_a^b f_n(x)dx = S^*(T_{n_0}) < I + \frac{\varepsilon}{2}$.

Виберемо $n_1 > n_0$ так, щоб $2M\left(\frac{n_0-1}{b-a}\right)\frac{M}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, якщо $n > n_1$. Нехай $n > n_0$, а розбиття $\left(T_n^{(n_0-1)}\right)$ утворюється з розбиття (T_n) додаванням тих точок розбиття $\left(T_{n_0}\right)$, яких немає в (T_n). Таких точок не більше ніж n_0-1. Позначимо їх через $x^{(i)}$, $i=\overline{1, n_0-1}$. За доведеним

$$S^*(T_n) - 2M\lambda(T_n)(n_0-1) \le S^*(T_n^{(n_0-1)}) \le S^*(T_{n_0}) < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

звідки $S^*(T_n) < I + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{b-a}{n}2M(n_0-1) < I + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$, якщо $n > n_1$. Отже, $\forall\varepsilon > 0$ $\exists n_1(\varepsilon) :$ $n > n_1(\varepsilon) \Rightarrow I \le S^*(T_n) < I + \varepsilon$, тобто

$$I = \lim_{n\to\infty} S^*(T_n).$$

§ 9.2. Суми Дарбу та їхні властивості. Критерії та достатні умови інтегровності функції за Ріманом

Нижньою (*верхньою*) *сумою Дарбу* функції f, обмеженої на відрізку $[a; b]$, називають суму

$$S_*(T) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \left(S^*(T) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \right),$$

де (T)-розбиття відрізка $[a; b]$ задане точками x_k, $k = \overline{0, n}$, а

$$m_k = \inf_{[x_k;\, x_{k+1}]} f(x) \quad \left(M_k = \sup_{[x_k;\, x_{k+1}]} f(x) \right), \; k = \overline{0, n-1}.$$

Основні властивості сум Дарбу

1. *Зв'язок з інтегральними сумами*: виконується нерівність

$$S_*(T) \le \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k \le S^*(T)$$

для довільних розбиття (T) та способу вибору точок c_k.

2. *Монотонність*: якщо $(T^{(m)}) = (T) \bigcup \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}\}$, то

$$S_*(T) \le S_*(T^{(m)}) \le S^*(T^{(m)}) \le S^*(T).$$

При цьому $S_*(T^{(m)}) \le S_*(T) + 2M\lambda(T)m$, а $S^*(T^{(m)}) \ge S^*(T) - 2M\lambda(T)m$, де $\lambda(T)$ — дрібність розбиття (T).

3. Будь-яка нижня сума Дарбу не перевищує будь-якої верхньої суми Дарбу, тобто $S_*(T) \le S^*(T')$ для довільних (T)- і (T')-розбиттів відрізка $[a; b]$.

4. *Нижній та верхній інтеграли Дарбу*: існують $\sup\limits_{(T)} S_*(T) = I_*$ — нижній інтеграл Дарбу функції f на відрізку $[a; b]$ та $\inf\limits_{(T)} S^*(T) = I^*$ — верхній інтеграл Дарбу функції f на відрізку $[a; b]$, причому $S_*(T) \le I_* \le I^* \le S^*(T) \quad \forall (T)$.

5. *Теорема Дарбу*: виконується рівність

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} S_*(T) = I_* \text{ і } \lim_{\lambda(T)\to 0} S^*(T) = I^*.$$

Критерії інтегровності функції за Ріманом

Функція f інтегровна за Ріманом на відрізку $[a; b]$ тоді й тільки тоді, коли вона обмежена на $[a; b]$ і виконується хоча б одна з умов:

1) $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S^*(T) = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S_*(T)$; 2) $I_* = I^*$;

3) $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k = 0$, де $\omega_k(f) = \sup\limits_{[x_k; x_{k+1}]} f(x) - \inf\limits_{[x_k; x_{k+1}]} f(x)$ — коливання функції f на відрізку $[x_k; x_{k+1}]$.

Достатні умови інтегровності функції за Ріманом

Функція f інтегровна за Ріманом на відрізку $[a; b]$, якщо виконується хоча б одна з умов:

1) f є неперервною на відрізку $[a; b]$;

2) f є обмеженою на відрізку $[a; b]$ та має на ньому скінченну множину точок розриву;

3) f є монотонною на відрізку $[a; b]$;

4) f є обмеженою на відрізку $[a; b]$ та має на $[a; b]$ не більше ніж зчисленну множину точок розриву.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) кожна сума Дарбу функції f на відрізку $[a; b]$ є її інтегральною сумою на цьому відрізку;

2) існує функція f, для якої кожна її сума Дарбу не є інтегральною сумою;

3)• якщо існують розбиття (T) і (T') відрізка $[a; b]$, для яких $S_*(T) = S^*(T')$, то $f(x) = \text{const}$ на $[a; b]$;

4) якщо $f(x) \neq \text{const}$ і обмежена на відрізку $[a; b]$, то $S_*(T) < S^*(T)$ та $I_* < I^*$;

5) якщо функція f інтегровна на відрізку $[a; b]$, то вона або неперервна на $[a; b]$, або монотонна на $[a; b]$, або обмежена на $[a; b]$ і має не більше ніж зчисленну множину точок розриву на $[a; b]$;

6) твердження, обернене до 5), є правильним;

7) якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, то $\forall (T)$-розбиття цього відрізка існує інтегральна сума, яка дорівнює $\int\limits_a^b f(x)dx$;

8) якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, а $S_*(T)$ і $S^*(T)$ — її суми Дарбу, то $\forall \alpha \in \mathbf{R}: \; S_*(T) \le \alpha \le S^*(T)$ існує інтегральна сума $S(T) = \alpha$;

9) будь-яка функція обмеженої варіації, визначена на відрізку $[a; b]$, інтегровна на ньому?

2. Виконати вказані завдання усно.

1) Знайти суми Дарбу функції $f(x) = x^2$ для розбиттів $\{0, 2, 4\}$ та $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ відрізка $[0; 4]$. Чи є вони інтегральними сумами цієї функції?

2) Знайти суми Дарбу функції Діріхле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$$

що відповідають довільному розбиттю відрізка $[0; 1]$. Чи є вони інтегральними сумами цієї функції?

3) Нехай $f(x) = x, \; x \in [0; 6]$. Знайти суми Дарбу та яку-небудь інтегральну суму заданої функції для розбиття $\{0, 2, 4, 6\}$. Порівняти здобуті результати.

4) Чи інтегровна функція f на вказаних відрізках:

а) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $[2; 5]$, $[-1; 1]$; б) $f(x) = \operatorname{ctg} x \operatorname{tg} x$, $\left[\dfrac{\pi}{6}; \; \dfrac{\pi}{4}\right]$, $[-1; 1]$;

в) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, $[-3; -2]$, $[-1; 0]$, $[-1; 1]$?

3. Знайти верхні та нижні суми Дарбу для даної функції f, які відповідають розбиттю вказаного відрізка на n рівних частин:

1) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $[0; 2]$, $n = 5, 10$; 2)• $f(x) = \sin x$, $[0; \pi]$, $n = 6$;

3) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $[0; 1]$, $n = 10$.

4. З'ясувати, чи буде інтегровною функція f на вказаному відрізку:

1)• $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign}\left(\sin \dfrac{\pi}{x}\right), & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$ $[0; 1]$;

2) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \notin \mathbf{Q}, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{якщо } x = \dfrac{m}{n} \text{ − нескоротний дріб,} \end{cases}$ $[a; b]$;

3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right], & \text{якщо } x\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x=0,\end{cases}$ $[0;\ 1]$;

4) f — довільна елементарна функція, $[a;\ b]\subset D(f)$?

5. Нехай функція f інтегровна на відрізку $[a;\ b]$, а $\varphi(x)=f(x)\ \ \forall x\in[a;\ b]$. Довести, що функція φ інтегровна на $[a;\ b]$.

6•. Нехай функція f обмежена на відрізку $[a;\ b]$ та інтегровна на $[a;\ c]\ \ \forall c\in(a;\ b)$. Довести, що функція f інтегровна на $[a;\ b]$.

7. Чи залишиться твердження 6 правильним, якщо в ньому відрізок $[a;\ c]$ замінити на $[c;\ b]$?

8*. Довести, що $\omega([a;\ b];f)\le\omega([a;\ c];f)+\omega([c;\ b];f)\quad\forall c\in(a;\ b)$, де $\omega([\alpha;\ \beta];f)=\sup\limits_{[\alpha;\ \beta]}f(x)-\inf\limits_{[\alpha;\ \beta]}f(x)$.

9*. Нехай для обмеженої функції f, $x\in[a;\ b]$, існують розбиття (T_n), $n\in\mathbf{N}$, відрізка $[a;\ b]$ такі, що $\lambda(T_n)\to 0$, $n\to\infty$. Довести, що:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}S(T_n)=I\Leftrightarrow\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}S(T)=I$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(S^*(T_n)-S_*(T_n)\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\left(S^*(T)-S_*(T)\right)=0.$

10*. Нехай функція f інтегровна на відрізку $[a;\ b]$, а функція φ відрізняється від f тільки значеннями на скінченній множині E. Довести, що $\int\limits_a^b\varphi(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx$. Чи залишиться твердження правильним, якщо E — зчисленна множина?

Зразки розв'язування задач

1. 3) Припустимо, що $S_*(T)=S^*(T')$. Якщо $(T)=(T')=\{x_k:\ \ k=\overline{0,\ n}\}$, то $\sum\limits_{k=0}^{n-1}m_k\Delta x_k=\sum\limits_{k=0}^{n-1}M_k\Delta x_k$ і $M_k=m_k$, $k=\overline{0,n-1}$. Отже, $f(x)=f(x_k)=f(x_{k+1})\ \ \forall x\in(x_k;\ x_{k+1})$, тому $f(x_0)=f(a)=f(x)\ \ \forall x\in[a;x_1]$, $f(x_1)=f(a)=f(x)\ \ \forall x\in[x_1;x_2]$, …, $f(x_{n-1})=f(a)=f(x)\ \ \forall x\in[x_{n-1};b]$, тобто $f(x)=f(a)\ \ \forall x\in[a;\ b]$.

Якщо $(T)\neq(T')$, то утворимо розбиття $(T'')=(T)\bigcup(T')$. Тоді за властивістю 2 про монотонність сум Дарбу матимемо $S^*(T'')\le S^*(T')=S_*(T)\le S_*(T'')$, тобто $S^*(T'')\le S_*(T'')$. Однак $S^*(T'')\ge S_*(T'')$, тому $S_*(T'')=S^*(T'')$, і тоді за доведеним вище $f(x)=f(a)\ \ \forall x\in[a;b]$.

3. 2) Розіб'ємо відрізок $[0;\ \pi]$ на 6 рівних частин точками: $x_0=0$, $x_1=\dfrac{\pi}{6}$, $x_2=\dfrac{\pi}{3}$, $x_3=\dfrac{\pi}{2}$, $x_4=\dfrac{2\pi}{3}$, $x_5=\dfrac{5\pi}{6}$, $x_6=\pi$.

На відрізку $\left[0;\ \dfrac{\pi}{6}\right]$ функція $\sin x$ монотонно зростає, і тому $m_0=0$, $M_0=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$.

Аналогічно маємо:

$$m_1 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ M_1 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ на } \left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right];$$

$$m_2 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ M_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \text{ на } \left[\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right];$$

$$m_3 = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ M_3 = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \text{ на } \left[\frac{\pi}{2};\ \frac{2\pi}{3}\right];$$

$$m_4 = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2},\ M_4 = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ на } \left[\frac{2\pi}{3};\ \frac{5\pi}{6}\right];$$

$$m_5 = \sin\pi = 0,\ M_5 = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ на } \left[\frac{5\pi}{6};\ \pi\right].$$

Отже, для розглядуваного (T)-розбиття відрізка $[0; \pi]$ дістаємо

$$S_* = \frac{\pi}{6}\sum_{k=0}^{5} m_k = \frac{\pi}{6}(1+\sqrt{3}),\ S^* = \frac{\pi}{6}\sum_{k=0}^{5} M_k = \frac{\pi}{6}(3+\sqrt{3}).$$

Зауважимо, що

$$\int_0^\pi \sin x dx = 2 \text{ і } S_* < \int_0^\pi \sin x dx < S^*.$$

4. 1) Якщо $\sin\frac{\pi}{x} > 0$, то $2\pi n < \frac{\pi}{x} < \pi + 2\pi n$ або $2n < \frac{1}{x} < 1 + 2n$, $n \in \mathbf{Z}$, і тоді для $x \in (0; 1]$ дістаємо $\sin\frac{\pi}{x} > 0$, якщо $\frac{1}{2n+1} < x < \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbf{N}$, а $\sin\frac{\pi}{x} < 0$, якщо $\frac{1}{2n+2} < x < \frac{1}{2n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Таким чином, $f(x) = \operatorname{sign}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right) = 1$, якщо $\frac{1}{2n+1} < x < \frac{1}{2n}$, $n = 1, 2, \ldots, f(x) = -1$, якщо $\frac{1}{2n+2} < x < \frac{1}{2n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, і $f(x) = 0$, якщо $x = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Точками розриву функції f є точки $x = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, які утворюють зчисленну множину. Оскільки функція f обмежена на відрізку $[0; 1]$, то за достатньою умовою вона інтегровна на цьому відрізку.

6. Нехай $|f(x)| < M \quad \forall x \in [a; b]$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і візьмемо $c \in (a; b)$ таким, щоб $b - c = \frac{\varepsilon}{4M}$. Для розбиття ($T$) відрізка $[a; b]$ маємо

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{m-1} \omega_k(f)\Delta x_k + \omega_m(f)\Delta x_m + \sum_{k=m+1}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k,$$

де m – такий номер, для якого $x_m \le c < x_{m+1}$. Отже,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k = \left(\sum_{k=0}^{m-1} \omega_k(f)\Delta x_k + \omega([x_m;\ c];\ f)(c - x_m)\right) +$$

$$+\omega_m(f)\Delta x_m - \omega([x_m;\ c];\ f)(c - x_m) + \sum_{k=m+1}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k.$$

Оскільки функція f інтегровна на відрізку $[a; c]$, то перший доданок правої частини прямує до нуля при $\lambda(T) \to 0$. Другий і третій доданки не перевищують числа $2M\lambda(T)$, яке також прямує до нуля при $\lambda(T) \to 0$. Нарешті, останній доданок $\sum_{k=m+1}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k \le$

$\leq 2M(b-c) < \frac{\varepsilon}{4M} 2M = \frac{\varepsilon}{2}$, а це означає , що суму $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k$ можна зробити меншою за будь-яке наперед задане число $\varepsilon > 0$, якщо взяти $\lambda(T)$ досить малим, звідки і випливає інтегровність функції f на відрізку $[a; b]$.

§ 9.3. Основні властивості визначених інтегралів

Для інтегровних на відрізку $[a; b]$ функцій f і φ мають місце такі властивості.

1. *Лінійність інтеграла*:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta\varphi(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b \varphi(x)dx$$

для довільних чисел α і β.

2. $\int_a^b Cdx = C(b-a) \quad \forall C \in \mathbf{R}$. Зокрема, $\int_a^b 0dx = 0$.

3. Якщо $f(x) \geq 0,\ x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

4. *Інтегрування нерівності*: якщо $f(x) \geq \varphi(x),\ x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq$ $\geq \int_a^b \varphi(x)dx$. Зокрема, якщо $m \leq f(x) \leq M,\ x \in [a; b]$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq$ $\leq M(b-a)$.

5. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

6. *Адитивність інтеграла*:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx \quad \forall \alpha, \beta, c \in [a; b].$$

При цьому за означенням $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$ та $\int_\beta^\alpha f(x)dx = -\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

7. *Нерівність Коші — Буняковського*:

$$\left(\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b \varphi^2(x)dx.$$

8. *Теорема про середнє значення*: якщо $m = \inf\limits_{[a;\,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a;\,b]} f(x)$, то

$$\exists c \in [m;\ M]:\ \int_a^b f(x)dx = c(b-a).$$

Зокрема, якщо функція f неперервна на відрізку $[a;\ b]$, то

$$\exists x^* \in [a;\ b]: \int_a^b f(x)dx = f(x^*)(b-a).$$

Число $f(x^*) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ називають *середнім значенням функції* f на відрізку $[a;\ b]$.

9. *Узагальнена теорема про середнє значення*: якщо $m = \inf\limits_{[a;\,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a;\,b]} f(x)$, а $\varphi(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a;\ b]$ або $\varphi(x) \le 0 \quad \forall x \in [a;\ b]$, то

$$\exists c \in [m;\ M]:\ \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = c\int_a^b \varphi(x)dx.$$

Зокрема, якщо функція f неперервна на відрізку $[a;\ b]$, то

$$\exists x^* \in [a;\ b]:\ \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(x^*)\int_a^b \varphi(x)dx.$$

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) якщо функції $f \pm \varphi$ інтегровні на відрізку $[a;\ b]$, то кожна з функцій f і φ інтегровна на цьому відрізку;

2) якщо функція $Cf(x)$, $C \ne 0$, інтегровна на відрізку $[a;\ b]$, то

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx;$$

3) якщо функції f_k інтегровні на відрізку $[a;\ b]$, $\alpha_k \in \mathbf{R} \quad \forall k = \overline{1,n}$, то

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_a^b f_k(x)dx;$$

4) якщо кожна з функцій f та φ інтегровна на відрізку $[a;\ b]$, то функція $f\varphi$ інтегровна на цьому відрізку;

5) твердження, обернене до 4), є правильним;

6)• якщо функції f і φ інтегровні на відрізку [a; b] та $\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^c \varphi(x)dx$ $\forall c \in (a;\ b)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b \varphi(x)dx;$$

7) твердження, обернене до 6), є правильним;

8) якщо функція f інтегровна на відрізку [a; b], то

$$\exists x^* \in [a;\ b]:\ \int\limits_a^b f(x)dx = f(x^*)(b-a);$$

9) якщо існує інтеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$, то існуватиме й інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$?

2. Виконати вказані завдання усно.

1) Чи правильна рівність $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}$?

2) Не обчислюючи інтеграла, визначити його знак:

а) $\int\limits_1^2 (x^2+3)dx$; б) $\int\limits_1^3 (1-x^2)dx$; в) $\int\limits_{-1}^1 (1-x^2)dx$;

г) $\int\limits_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin x dx$; д) $\int\limits_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \cos x dx$; е) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg} x dx$.

3) Не обчислюючи інтегралів, довести, що:

а) $\frac{2}{3} \le \int\limits_1^3 \frac{dx}{x} \le 2$; б) $\int\limits_0^1 \sqrt{x}dx > \int\limits_0^1 x^3 dx$; в) $\int\limits_0^{\pi} \sin t dt > \int\limits_0^3 \sin t dt$.

4) Чи може сума двох неінтегровних на відрізку функцій бути інтегровною функцією на цьому відрізку?

5) Що можна сказати про суму і добуток інтегровної та неінтегровної на заданому відрізку функцій?

3. Оцінити дані інтеграли:

1) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x}dx$; 2) $\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{4+x^2}$; 3) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x}dx$;

4)• $\int\limits_{1/2}^3 \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$; 5) $\int\limits_0^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln x}{1+x}dx$; 6) $\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \mathrm{arctg}\, x dx$.

4•. Нехай функції f і φ неперервні та $f(x) \not\equiv \varphi(x)$ на відрізку $[a; b]$. Довести, що $\int\limits_a^b f(x)dx > \int\limits_a^b \varphi(x)dx$, якщо $f(x) \ge \varphi(x)$ $\forall x \in [a; b]$.

5. Не обчислюючи інтегралів, визначити, який з них більший:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx$, $\int\limits_0^{\pi/2} x dx$, $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{2x}{\pi} dx$; 2) $\int\limits_0^1 e^x dx$, $\int\limits_0^1 (1+x) dx$; 3) $\int\limits_0^1 2^{-x} dx$, $\int\limits_0^1 3^{-x} dx$;

4) $\int\limits_{-1}^0 2^{-x} dx$, $\int\limits_{-1}^0 3^{-x} dx$; 5)• $\int\limits_3^4 \ln x dx$, $\int\limits_3^4 \ln^2 x dx$; 6) $\int\limits_0^1 \sin^2 x dx$, $\int\limits_0^1 \sin^3 x dx$;

7) $\int\limits_0^1 e^{-x} dx$, $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$; 8) $\int\limits_0^1 \arcsin x dx$, $\int\limits_0^1 \sqrt{\arcsin x} dx$.

6. Довести нерівності:

1) $\frac{\pi}{16} \le \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^2 x} \le \frac{\pi}{10}$; 2) $1 < \int\limits_0^1 e^{x^2} dx < e$;

3) $0 < \int\limits_0^1 x(1-x^2)dx \le \frac{4}{27}$; 4) $\frac{\pi}{2} \le \int\limits_0^{\pi/2} e^{\sin^2 x} dx \le \frac{e\pi}{2}$;

5)• $\frac{1}{10\sqrt{2}} \le \int\limits_0^1 \frac{x^9 dx}{\sqrt{1+x}} \le \frac{1}{10}$, враховуючи, що $\int\limits_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$ $\forall m \ne -1$;

6) $0 < \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx < 1$; 7) $\frac{1}{k+1} < \int\limits_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k}$ $\forall k \in \mathbf{N}$;

8) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \int\limits_1^n \frac{dx}{x} < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$ $\forall n > 1,\ n \in \mathbf{N}$.

7. Довести дані рівності:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} = 0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx = 0$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0$ $\forall p > 0$.

8. Оцінити дані інтеграли, користуючись нерівністю Коші — Буняковського:

1) $\int\limits_0^{\pi} x\sqrt{\sin x} dx$; 2) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+x^3} dx$; 3)• $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4} dx$;

4) $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{(1+x^2)\sin x} dx$; 5) $\int\limits_0^{\pi} x^2\sqrt{\sin x} dx$; 6) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^3} dx$.

9*. Нехай функція f інтегровна на відрізку $[A;\, B]$ і $[a;\, b] \subset (A;\, B)$. Довести, що $\int\limits_a^b |f(x+h) - f(x)|\,dx \to 0,\ \ h \to 0$ (властивість інтегральної неперервності функції f).

10*. Знайти найменше значення добутку $\int\limits_a^b f(x)dx \int\limits_a^b \frac{dx}{f(x)}$ на множині функцій f, неперервних і додатних на відрізку $[a;\, b]$. Вказати функцію f, для якої це найменше значення досягається.

11. Нехай $f_0(x)$ — неперервна функція та $f_n(x) = \sin(f_{n-1}(x))\ \ \forall n > 0$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx$.

Зразки розв'язування задач

1. 6) За адитивною властивістю та властивістю лінійності інтеграла маємо

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \int\limits_a^c \varphi(x)dx + \int\limits_c^b \varphi(x)dx +$$

$$+\int\limits_c^b f(x)dx - \int\limits_c^b \varphi(x)dx = \int\limits_a^b \varphi(x)dx + \int\limits_c^b (f(x) - \varphi(x))dx. \qquad (1)$$

Оскільки функція $f - \varphi$ інтегровна на відрізку $[a;\, b]$, то вона обмежена на ньому, тобто $\exists H > 0:\ |f(x) - \varphi(x)| \le H\ \ \forall x \in [a;\, b]$, і тоді $\left|\int\limits_c^b (f(x) - \varphi(x))dx\right| \le \int\limits_c^b |f(x) - \varphi(x)|dx \le H(b - c)$ (чому?). Отже,

$$\int\limits_c^b (f(x) - \varphi(x))dx \to 0,\ \ c \to b - 0.$$

Якщо тепер у рівності (1) спрямувати c до b, то дістанемо необхідну рівність. Отже, задане твердження правильне.

3. 4) Для оцінки заданого інтеграла скористаємось властивістю 4. Знайдемо найбільше та найменше значення підінтегральної функції $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$ на відрізку $\left[\frac{1}{2};\ 3\right]$. Відомо, що ці значення функція може набувати або в точках екстремуму, або на кінцях відрізка. Знайдемо похідну функції: $f'(x) = \frac{2x - 2x^3}{(x^2+1)^3}$. Отже, $f'(x) = 0$, якщо $2x - 2x^3 = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Серед цих значень лише $x_2 = 1 \in \left[\frac{1}{2};\ 3\right]$. Точок, в яких похідна не існує, немає. Обчислимо значення функції f у точці $x_2 = 1$ та на кінцях відрізка $\left[\frac{1}{2};\ 3\right]$. Дістанемо

$$f(1) = \frac{1}{4},\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{25},\quad f(3) = \frac{3}{100}.$$

Таким чином,

$$M=\max_{\left[\frac{1}{2};\,3\right]} f(x)=\frac{1}{4},\quad m=\min_{\left[\frac{1}{2};\,3\right]} f(x)=\frac{3}{100}.$$

Оскільки $b-a=2{,}5$, то за властивістю 4 маємо оцінку

$$0{,}075\le\int_{1/2}^{3}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}\le 0{,}625.$$

4. За умовою $f(x)\not\equiv\varphi(x)$ на відрізку $[a;b]$, тому існує точка $x_0\in(a;b)$, для якої $f(x_0)\ne$ $\ne\varphi(x_0)$, але тоді $f(x_0)>\varphi(x_0)$, оскільки $f(x)\ge\varphi(x)\quad\forall x\in(a;b)$.

Нехай $\psi(x)=f(x)-\varphi(x)$, тоді $\psi(x)\ge 0\quad\forall x\in[a;b]$, $\psi(x_0)>0$ і функція ψ неперервна на відрізку $[a;b]$. За означенням неперервної функції $\exists\ O(x_0)=(\alpha;\beta)\subset[a;b]:\ \psi(x)\ge$ $\ge\frac{1}{2}\psi(x_0)>0\quad\forall x\in[\alpha;\beta]$.

Враховуючи адитивну властивість інтеграла, маємо

$$\int_a^b\psi(x)\,dx=\left(\int_a^\alpha+\int_\alpha^\beta+\int_\beta^b\right)\psi(x)dx\ge\int_\alpha^\beta\psi(x)dx\ge\psi(x_0)(\beta-\alpha)>0.$$

І нарешті, оскільки

$$\int_a^b\psi(x)dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b\varphi(x)dx>0,$$

то дістаємо шукану нерівність

$$\int_a^b f(x)dx>\int_a^b\varphi(x)dx.$$

5. 5) Через те що $\ln x\ge\ln 3>\ln e=1$, $x\in[3;4]$, маємо $\ln^2x>\ln x\quad\forall x\in[3;4]$, і тоді $\int_3^4\ln x dx<\int_3^4\ln^2 x dx$ (див. вправу 4).

6. 5) Підінтегральну функцію подамо як добуток: $\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}=\varphi(x)f(x)$, де $\varphi(x)=x^9$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $x\in[0;1]$. Очевидно, що $m=\inf\limits_{[0;1]}f(x)=\frac{1}{\sqrt2}$, $M=\sup\limits_{[0;1]}f(x)=1$. Отже, за узагальненою теоремою про середнє значення дістаємо

$$I=\int_0^1\frac{x^9dx}{\sqrt{1+x}}=c\int_0^1x^9dx=\frac{c}{10},$$

причому $\frac{1}{\sqrt2}\le c\le 1$, тому $\frac{1}{10\sqrt2}\le I\le\frac{1}{10}$.

8. 3) Нехай $f(x)=1$, $\varphi(x)=\sqrt{1+x^4}$. Тоді за нерівністю Коші — Буняковського дістанемо

$$\left(\int_0^1\sqrt{1+x^4}dx\right)^2\le\int_0^1dx\int_0^1(\sqrt{1+x^4})^2dx=\int_0^1(1+x^4)dx=\frac{6}{5}.$$

Отже, $\int_0^1\sqrt{1+x^4}dx\le\sqrt{\frac{6}{5}}$.

§ 9.4. Інтеграл із змінною верхньою межею інтегрування. Формула Ньютона—Лейбніца

Нехай функція f інтегровна на довільному відрізку $[a; b] \subset \langle \alpha; \beta \rangle$, c — довільна фіксована точка з проміжку $\langle \alpha; \beta \rangle$. Тоді за адитивною властивістю $\forall x \in \langle \alpha; \beta \rangle \ \exists \Phi(x) = \int\limits_c^x f(t)\,dt$ — інтеграл із змінною верхньою межею інтегрування.

Мають місце властивості

1. *Неперервність функції* $\Phi(x)$: функція $\Phi(x)$ неперервна на проміжку $\langle \alpha; \beta \rangle$.

2. *Диференційовність функції* $\Phi(x)$: функція $\Phi(x)$ диференційовна у кожній точці $x_0 \in \langle \alpha; \beta \rangle$, в якій функція f неперервна, причому $\Phi'(x_0) = \dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_c^x f(t)dt \right)\Bigg|_{x=x_0} = f(x_0)$.

3. *Існування первісної неперервної функції*: якщо функція f неперервна на проміжку $\langle \alpha; \beta \rangle$, то функція Φ є первісною для f на цьому проміжку.

4. *Формула Ньютона — Лейбніца*: якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, а F — одна з її первісних на цьому відрізку, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b .$$

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, то $\forall x \in [a; b] \ \exists \Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$;

2) твердження, обернене до 1), є правильним;

3) якщо функція f невід'ємна та інтегровна на відрізку $[a; b]$, то функція $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ монотонна на цьому відрізку;

4) твердження 3), якщо в ньому слово «монотонна» замінити на «диференційовна», є правильним;

5) якщо функція f монотонна на проміжку $\langle \alpha; \beta \rangle$, то вона має первісну на ньому;

6) якщо функція f неперервна на проміжку $\langle\alpha;\,\beta\rangle$, $c\in\langle\alpha;\,\beta\rangle$ і $\Phi(x)=$ $=\int\limits_x^c f(t)dt$, то $\Phi'(x)=-f(x)\ \ \forall x\in\langle\alpha;\,\beta\rangle$.

2. Виконати вказані завдання усно.

1) Обчислити дані інтеграли:

а) $\int\limits_2^3 (x+1)dx$; б) $\int\limits_0^\pi \sin x dx$; в) $\int\limits_0^1 (2^x-\cos 2x)dx$; г) $\int\limits_{1/e}^{e} \frac{dx}{x}$; д) $\int\limits_0^1 t\sqrt{t}dt$;

е) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; є) $\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 x}dx$; ж) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{x^3+x^2}dx$; з) $\int\limits_1^2 x\mathrm{e}^{x^2}dx$.

2) Автомобіль рухається із швидкістю $v(t)=13t+20$ (км/год). Знайти шлях, який пройшов автомобіль за перші 10 год.

3) Знайти таку первісну для функції $y=f(x)$, яка при $x=x_0$ набуває значення $y=y_0$.

4) При якому значенні c виконується рівність:

а) $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x dx=\mathrm{e}^c$; б) $\int\limits_0^2 (3x^2-2x)dx=2(3c^2-2c)$;

в) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}=\frac{\pi}{4\cos^2 c}$; г) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x}=\frac{\mathrm{e}-1}{c}$?

5) Чи є помилка при обчисленні інтеграла:

а) $\int\limits_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx=\int\limits_0^\pi \cos x dx=\sin x\Big|_0^\pi=0$; б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-2$?

6) Дотична до графіка функції $y=f(x)$ в точці з абсцисою $x=a$ утворює з віссю Ox кут $\frac{\pi}{3}$ і в точці з абсцисою $x=b$ — кут $\frac{\pi}{4}$. Обчислити інтеграли $\int\limits_a^b f''(x)dx$ і $\int\limits_a^b f'(x)f''(x)dx$ (f'' вважається неперервною).

7) Довести тотожність:

а) $\frac{1}{\ln 2}\int\limits_e^{2e} \frac{dx}{x}=\frac{\cos 6°\cos 3°-\sin 6°\sin 3°}{\sin 441°}$; б) $\int\limits_2^3 \frac{x^2-4x}{x-4}dx=3^{\log_3 5-\log_3 2}$;

в) $\int\limits_1^8 \frac{dx}{3\sqrt[3]{x}}=2^{\log_8 \frac{27}{8}}$; г) $\frac{1}{\ln 2}\int\limits_4^6 \frac{dx}{x-2}=\frac{\cos 7°\cos 3°-\cos 87°\sin 367°}{\sin 440°}$.

8) Розв'язати рівняння або нерівність:

а) $\int\limits_1^3 \sqrt{x-|x-1|}dx=\lg(x-1)$; б) $\operatorname{tg} x+2\operatorname{ctg} x=\int\limits_1^{16} \frac{dx}{2\sqrt{x}}$;

в) $\sin x < \int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2}$; г) $2^x > \int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$; д) $\log_3 x < \int\limits_0^{\pi/4} \sin\frac{x}{2}dx$.

3. 1) М'яч кинуто з висоти 2 м вертикально вгору з початковою швидкістю 15 м/с. На яку найбільшу висоту він підніметься?

2) Знайти шлях, який подолає автобус за час від початку гальмування до повної зупинки, якщо при гальмуванні його швидкість змінювалась за законом $v(t) = 20 - 4t$, де v — швидкість, м/с; t — час, с.

4. 1) Якщо $p = p(t)$ — продуктивність праці в момент часу t, то обсяг N випущеної продукції за проміжок часу $[t_1;\ t_2]$ $N = \int\limits_{t_1}^{t_2} p(t)dt$ (економічний зміст інтеграла).

Визначити, яку кількість продукції виготовлено за 8 год, якщо продуктивність праці протягом робочого дня визначається функцією $p(t) = -3t^2 + 10t +$ $+ 75$ (t — час, год).

2) Нехай f — функція витрат (доходу, прибутку), яка залежить від кількості x виробленої продукції (або від часу t виробництва), а f' — функція маргінальних (граничних) витрат (доходу, прибутку).

Тоді зміни вказаних величин при зростанні виробництва продукції від a одиниць до b обчислюють за формулою $\int\limits_a^b f'(x)dx$ (або $\int\limits_0^T f'(t)dt$ за час T виробництва продукції).

а) Нехай функція маргінальних витрат виробництва за певний час має вигляд $V'(x) = 50 - 0{,}02x$. Визначити зростання витрат виробництва, грн, при збільшенні випуску продукції від 100 до 120 одиниць.

б) Швидкості зміни витрат V' та доходу D' підприємства після початку його діяльності визначаються відповідно функціями $V'(t) = 1 + 3\sqrt[3]{t^2}$ і $D'(t) =$ $= 15 - \sqrt[3]{t^2}$, де V і D вимірюються у млн грн, а час t — у роках.

Визначити, як довго підприємство буде прибутковим (коли $V' = D'$), та знайти загальний прибуток $P = D - V$ за цей час.

в) Відомо, що швидкість зміни прибутку підприємства, млн грн, після початку його діяльності виражається функцією $f(t) = 6 - 2\sqrt{t}$. Визначити, як довго підприємство буде прибутковим, і знайти загальний прибуток за цей час.

3) Нехай функція $y = f(x)$ описує залежність долі y доходів населення (або загального прибуткового податку) від долі x усього населення. Її графік називають кривою Лоренца, а число

$$k = 2\int\limits_0^1 (x - f(x))dx$$

— коефіцієнтом Лоренца або коефіцієнтом Джіні. Він характеризує ступінь нерівномірності розподілу доходів (або розподілу податку) населення.

Обчислити коефіцієнт k, зобразити графік кривої Лоренца та пояснити, що означає коефіцієнт Лоренца з геометричної точки зору, якщо криву Лоренца задано рівнянням:

а) $y = 0{,}9x^2 + 0{,}06x$; б) $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$.

5. Залежність сили струму в колі від часу визначається формулою $I(t) = 0{,}5\sin\frac{\pi t}{2}$, де I — сила струму, А; t — час, с. Знайти середнє значення сили струму за проміжок часу [0; 2].

6•. Нехай F — первісна для функції f на відрізку $[a; b]$, а f інтегровна на цьому відрізку. Довести, що $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Чим відрізняється це твердження від властивості 4 (формула Ньютона — Лейбніца)?

7. Для заданої функції f знайти первісну функцію $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$:

1) $f(x) = x^2 - 2x + 5$; 2)• $f(x) = \frac{|\cos x|}{\cos x}$; 3) $f(x) = \cos^2 x$;

4) $f(x) = |x|$; 5) $f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; 6) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1, \\ 2 - x, & x > 1. \end{cases}$

8. Знайти похідні:

1) $\frac{d}{dx}\int\limits_a^x \sin t^2 dt$; 2) $\frac{d}{dx}\int\limits_x^a \sin t^2 dt$; 3) $\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \sin t^2 dt$; 4)• $\frac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^{x^3} \sin t^2 dt$;

5) $\frac{d}{da}\int\limits_a^b \sqrt{1+t^2}\,dt$; 6) $\frac{d}{dx}\int\limits_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{t^2} dt$; 7) $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$; 8) $\frac{d}{dx}\int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt$;

9) $\frac{d}{dt}\int\limits_{2t}^{3t^2} 2^x \cos(\sin x)dx$; 10) $\frac{d}{du}\int\limits_{\sin u}^{\cos u} e^t \sin^3(2t+5)dt$.

9. Нехай $f(t)$ неперервна функція, а функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ диференційовні. Довести, що

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

10. Знайти дані границі: (правило Лопіталя)

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x \cos t^2 dt}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\,dt}{x^3}$; 3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\int\limits_0^x \operatorname{arctg}^2 t\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} t}\,dt}{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin t}\,dt}$; 5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(\int\limits_0^{x} e^{t^2}dt\right)^2}{\int\limits_0^{x} e^{2t^2}dt}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x\sin x}\int\limits_0^{2x^2}(1+\sin 3t)^{\frac{1}{t}}dt$.

11. Чи можна застосувати формулу Ньютона — Лейбніца до обчислення даних виразів:

1) $\int\limits_{-1}^{8}\sqrt[3]{x}dx$; 2) $\int\limits_{a}^{b}x^{\alpha}dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\pi}\sin xdx$; 4) $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\cos xdx$; 5) $\int\limits_{0}^{1}e^{x}dx$; 6) $\int\limits_{a}^{b}a^{x}dx$;

7) $\int\limits_{1}^{2}\dfrac{dx}{x}$; 8)• $\int\limits_{a}^{b}\dfrac{dx}{x}$; 9) $\int\limits_{0}^{2}|1-x|dx$; 10) $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$; 11) $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right)dx$;

12) $\int\limits_{0}^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$; 13) $\int\limits_{a}^{b}\dfrac{dx}{\cos(x-a)\cos(x-b)}$, $0<b-a<\dfrac{\pi}{2}$?

12. Обчислити дані інтеграли:

1) $\int\limits_{1}^{2}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos^5 x\sin 2xdx$; 3) $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{x^2dx}{1+x^6}$; 4) $\int\limits_{1}^{\sqrt{e}}\dfrac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$;

5) $\int\limits_{1}^{e}\dfrac{\sin(\ln x)}{x}dx$; 6) $\int\limits_{1}^{2}\dfrac{e^{x}dx}{e^{x}-1}$; 7) $\int\limits_{2}^{3}\dfrac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$; 8) $\int\limits_{0}^{2a}|a-x|dx$; 9) $\int\limits_{a}^{b}\dfrac{|x|}{x}dx$;

10) $\int\limits_{0}^{\pi/4}\dfrac{x^2dx}{x^2+1}$; 11) $\int\limits_{0}^{3}\dfrac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{5x+1}}$; 12) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx$.

13. Знайти границю послідовності (S_n):

1) $S_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dots+\dfrac{n-1}{n^2}$;

2) $S_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dots+\dfrac{1}{n+n}$;

3)• $S_n=\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\dots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$;

4) $S_n=\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\dots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right)$;

5) $S_n=\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\dots+\sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right)$;

6) $S_n=\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$;

7) $S_n = n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$; 8) $S_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

14. Знайти середнє значення функції f на вказаних проміжках:

1) $f(x) = x^2 + 2x - 5$, $[0;\ 1]$; 2) $f(x) = \frac{1}{(11+5x)^3}$, $[-2;\ -1]$;

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$, $[0;\ 16]$; 4)• $f(x) = \sin^2 x$, $[0;\ \pi]$;

5) $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$, $[0;\ 1]$; 6) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$, $[1;\ e^3]$;

7) $f(x) = \cos^5 x \sin 2x$, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; 8) $f(x) = \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}$, $\left[\frac{1}{\pi};\ \frac{2}{\pi}\right]$.

15. Провести дослідження та побудувати графіки даних функцій:

1) $f(x) = \int_0^1 t|t-x|\,dt$; 2) $f(x) = \int_0^\pi \frac{\sin^2 t\,dt}{1+2x\cos t + x^2}$;

3) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, $x \in [-1;\ 1]$; 4) $f(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^4}\,dt$;

5) $f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt$; 6) $f(x) = \int_1^x e^{-\frac{t^2}{2}}(1-t^2)\,dt$.

16. Розв'язати рівняння або нерівність:

1) $3^{x-\log_3 2} - 9^x = -\frac{1}{2}\int_0^2 |1-x|\,dx$; 2) $\int_0^x \cos 2t\,dt - \int_0^x \sin 2t\,dt + 1 = 0$;

3) $\log_{1-2x}(x^2-3x+5) = \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; 4) $x^{1-\lg x} = \frac{d}{dx}\left(\int_2^{e^x} \frac{\ln t}{t}\,dt\right)\Bigg|_{x=0{,}01}$;

5) $\frac{3}{|4-x|} = x\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t e^{u^2}\,du}{t}$; 6) $1-\frac{2}{x+2} < \int_3^x \frac{dt}{(t-2)^2}$;

7) $\frac{x^2+x+3}{\lg(x-4)} < \left(\int_\pi^{2\pi} \sin x^3\,dx\right)'_x$; 8) $\log_3^2 x + 3\log_3 x < -\frac{4}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$;

9) $\sin x + \cos 2x > \int_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx$; 10) $\frac{2\cdot 3^{3x^2}}{\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin 2x\,dx} > \frac{5^{3x^2}}{\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx}$.

17. Нехай функція f неперервна та додатна на інтервалі $(-\infty; +\infty)$. Довести, що функція $\varphi(x) = \dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ зростає на цьому інтервалі. Що треба розуміти під $\varphi(0)$?

18*. Нехай функція φ інтегровна на відрізку $[a; b]$. Довести, що правильні наведені формули Бонне:

1)• якщо функція f не зростає та невід'ємна на відрізку $[a; b]$, то $\exists c \in [a; b]$: $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(a)\int_a^c \varphi(x)dx$;

2) якщо функція f не спадає та невід'ємна на відрізку $[a; b]$, то $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(b)\int_c^b \varphi(x)dx$;

3) якщо функція f монотонна на відрізку $[a; b]$, то $\exists c \in [a; b]$: $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(a)\int_a^c \varphi(x)dx + f(b)\int_c^b \varphi(x)dx$.

Зразки розв'язування задач

6. Розглянемо довільне розбиття (T) відрізка $[a; b]$ точками x_k, $k = \overline{0,n}$. Через те що F — первісна для функції f на відрізку $[a; b]$, то функція F диференційовна на цьому відрізку, і тому за теоремою Лагранжа $\exists c_k \in [x_k; x_{k+1}]$:

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(c_k)(x_{k+1} - x_k) = f(c_k)\Delta x_k.$$

Тоді

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1}(F(x_{k+1}) - F(x_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k,$$

звідки

$$F(b) - F(a) = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx.$$

7. 2) Оскільки $\cos x > 0$, якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$, то $f(x) = 1$, якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ і $f(x) = -1$, якщо $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3}{2}\pi + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. Вважатимемо, що $f\left(\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=0 \quad \forall n \in \mathbf{Z}$, тоді функція f інтегровна на довільному відрізку $[a;\, b] \subset \mathbf{R}$ і $\forall x \in \mathbf{R} \quad \exists F(x)=\int\limits_0^x f(t)dt$. Якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, то $F(x)=\int\limits_0^x 1dt = x$. Якщо $x \in \left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3}{2}\pi\right]$, то

$$F(x)=\int\limits_0^x f(t)dt=\int\limits_0^{\pi/2} 1dt+\int\limits_{\pi/2}^x(-1)dt=\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\pi-x.$$

Якщо $x \in \left(\frac{3}{2}\pi;\ \frac{5}{2}\pi\right]$, то

$$F(x)=\int\limits_0^x f(t)dt=\int\limits_0^{\frac{3}{2}\pi} f(t)dt+\int\limits_{\frac{3}{2}\pi}^x f(t)dt=-\frac{\pi}{2}+\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)=x-2\pi.$$

Продовжуючи міркування, можна показати, що графік функції F матиме вигляд, зображений на рис. 17.

8. 4) За адитивною властивістю інтеграла маємо

$$f(x)=\int\limits_{x^2}^{x^3}\sin t^2dt=\int\limits_0^{x^3}\sin t^2dt-\int\limits_0^{x^2}\sin t^2dt=F_1(u)-F_2(v),$$

де $u = x^3$ та $v = x^2$.

Тоді

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{x^2}^{x^3}\sin t^2dt\right)=F_1'(u)u'(x)-F_2'(v)\,v'(x)=$$

$$=\sin x^6\cdot 3x^2-\sin x^4\cdot 2x=x(3x\sin x^6-2\sin x^4).$$

11. 8) Для підінтегральної функції $f(x)=\frac{1}{x}$ формула Ньютона — Лейбніца застосовна тільки тоді, коли $x_0 = 0 \notin [a;\, b]$. Для таких відрізків дістаємо: якщо $a > 0$, то $\int\limits_a^b \frac{dx}{x}=\ln x\Big|_a^b = \ln b-\ln a=\ln\frac{b}{a}$, а якщо $b < 0$, то $\int\limits_a^b\frac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_a^b=\ln\frac{|b|}{|a|}=\ln\frac{b}{a}$. Отже, якщо $x_0 = 0 \notin [a;\, b]$, то $\int\limits_a^b\frac{dx}{x}=\ln\frac{b}{a}$.

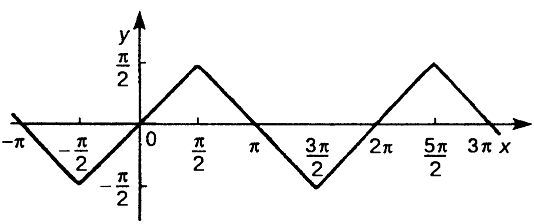


Рис. 17

13. 3) За умовою

$$S_n=\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\dots+\frac{1}{1+1^2}\right).$$

Числа, які стоять у дужках, можна розглядати як значення функції $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ у точках $x_1=\frac{1}{n},\ \cdots,x_{n-1}=\frac{n-1}{n},\ x_n=1$, що ділять відрізок [0; 1] на n рівних частин завдовжки $\frac{1}{n}$, тому S_n є інтегральною сумою цієї функції на відрізку [0; 1]. Через те що функція f інтегровна на відрізку [0; 1], то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}.$$

До обчислення останнього інтеграла застосуємо формулу Ньютона — Лейбніца:

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

Отже, остаточно

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

14. 4) Відомо, що середнім значенням функції f на відрізку $[a;\ b]$ називають число $f(x^*)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,\quad x^*\in[a;\ b].$

Для даного випадку

$$f(x^*)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2\pi}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{2}.$$

18. 1) Розглянемо (T)-розбиття відрізка $[a;\ b]$ точками $x_k,\ k=\overline{0,n}$. Тоді

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\varphi(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi(x)dx+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x)-f(x_k))\varphi(x)dx=\sigma(T)+\rho(T).$$

Розглянемо кожний доданок окремо. Якщо $|\varphi(x)|\le H\quad \forall x\in[a;\ b]$, то за критерієм інтегровності

$$|\rho(T)|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x)-f(x_k))\varphi(x)dx\right|\le H\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(f)\Delta x_k\to 0,\ \lambda(T)\to 0.$$

Тому

$$\sigma(T)\to\int_a^b f(x)\varphi(x)dx,\ \lambda(T)\to 0.$$

Нехай $\Phi(x)=\int_a^x\varphi(t)dt$. Тоді $\Phi(x_0)=\Phi(a)=0$ і

$$\sigma(T)=\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(\Phi(x_{k+1})-\Phi(x_k))=f(x_0)(\Phi(x_1)-\Phi(x_0))+f(x_1)(\Phi(x_2)-\Phi(x_1))+$$

$$+f(x_2)(\Phi(x_3)-\Phi(x_2))+\ldots+f(x_{n-1})(\Phi(x_n)-\Phi(x_{n-1}))=\Phi(x_1)(f(x_0)-f(x_1))+$$
$$+\Phi(x_2)(f(x_1)-f(x_2))+\ldots+\Phi(x_{n-1})(f(x_{n-2})-f(x_{n-1}))+\Phi(x_n)f(x_{n-1})=$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\Phi(x_k)(f(x_{k-1})-f(x_k))+\Phi(b)f(x_{n-1}).$$

Оскільки функція Ф неперервна на відрізку $[a;\ b]$ (чому?), то $\exists m=\min\limits_{[a;\ b]}\Phi(x)$ і $\exists M=$ $=\max\limits_{[a;\ b]}\Phi(x)$, і тоді

$$m\sum_{k=1}^{n-1}(f(x_{k-1})-f(x_k)+f(x_{n-1}))\le\sigma(T)\le M\sum_{k=1}^{n-1}(f(x_{k-1})-f(x_k)+f(x_{n-1})),$$

але

$$\sum_{k=1}^{n-1}(f(x_{k-1})-f(x_k)+f(x_{n-1}))=f(x_0)-f(x_1)+f(x_1)-f(x_2)+\ldots+$$
$$+f(x_{n-2})-f(x_{n-1})+f(x_{n-1})=f(x_0)=f(a).$$

Отже, $mf(a)\le\sigma(T)\le Mf(a)$.

Якщо $\lambda(T)\to 0$, то матимемо $mf(a)\le\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx\le Mf(a)$. Якщо $f(a)=0$, то за умовою $f(x)=0\ \ \forall x\in[a;\ b]$ і доводжувана формула правильна для $\forall c\in[a;\ b]$. Якщо $f(a)>0$, то

$$m\le\frac{1}{f(a)}\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx\le M$$

і

$$\exists c\in[a;\ b]:\ \Phi(c)=\frac{1}{f(a)}\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx,$$

звідки і випливає шукана формула.

§ 9.5. Інтегрування частинами та за допомогою заміни змінної

Формула інтегрування частинами. Якщо функції u та v мають на відрізку $[a;\ b]$ неперервні похідні, то виконується формула

$$\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu.$$

Формула заміни змінної. Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;\ b]$, а функція $\varphi'(t)$ неперервна на відрізку $[\alpha;\ \beta]$, причому $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ і $a\le$ $\le\varphi(t)\le b\ \ \forall t\in[\alpha;\ \beta]$, то виконується формула

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Вправи

1. Виконати вказані завдання усно.

1) Знайти помилку у міркуваннях:

а) $\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x=\cos t, \quad dx=-\sin t dt, \\ x\in[-1;\ 1]\Rightarrow t\in[\pi;\ 2\pi] \end{array} \right|$

$$= -\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin^2 t dt = -\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = -\frac{1}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\pi}^{2\pi} = -\frac{\pi}{2};$$

б) $\int\limits_{-2}^{3}x^2 dx = \left| \begin{array}{l} x^2=t, \quad x=\sqrt{t}, \quad dx=\dfrac{dt}{2\sqrt{t}}, \\ x\in[-2;\ 3]\Rightarrow t\in[4;\ 9] \end{array} \right|$

$$= \int\limits_{4}^{9} t\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{4}^{9} = \frac{19}{3}.$$

2) Довести, що одна з первісних парної функції є функцією непарною, а будь-яка первісна непарної функції є функцією парною.

3) Нехай функція f інтегровна на відрізку $[-a;\ a]$. Довести, що:

а) $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$, якщо функція f парна;

б) $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, якщо функція f непарна.

4) Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{-1}^{1}(x^2+1)^2 dx$; б) $\int\limits_{-5}^{5}\frac{x^2\sin 2x}{x^4+1}dx$; в) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos mx dx$; г) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin mx dx$;

д) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx$; е) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx$; є) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx dx$.

2•. Довести формулу інтегрування частинами за умови, що функції u і v мають на відрізку $[a;\ b]$ похідні, які інтегровні на цьому відрізку.

3•. Довести формулу заміни змінної за умови, що функція f інтегровна на відрізку $[a;\ b]$, φ' — неперервна на відрізку $[\alpha;\ \beta]$ і зберігає знак на відрізку $[a;\ b]$, а $\varphi([\alpha;\ \beta]) = [a;\ b]$.

4. Обчислити дані інтеграли за допомогою формули інтегрування частинами:

1) $\int\limits_{0}^{1} xe^x dx$; 2) $\int\limits_{-1}^{1} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\pi} x^2\sin nx dx$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\int\limits_{1}^{2} x\ln x dx$;

5) $\int\limits_{0}^{\pi} x^3\sin x dx$; 6)• $\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln x}{x^5}dx$; 7) $\int\limits_{-a}^{a}\frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$; 8) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{x dx}{\sin^2 x}$; 9) $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$;

10) $\int\limits_0^{1/2} \arcsin x dx$; 11) $\int\limits_1^{e} (1+\ln x)^2 dx$; 12) $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x dx$; 13) $\int\limits_0^{1} e^{-x}\sin \pi x dx$;

14) $\int\limits_0^{1} \arccos x dx$; 15) $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} dx$; 16) $\int\limits_{1/e}^{e} |\ln x| dx$; 17) $\int\limits_0^{1} x f''(x) dx$.

5. Чи можна дані інтеграли обчислити за допомогою вказаної заміни змінної:

1)• $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^2} dx,\ \sqrt[3]{x^2}=t$; 2) $\int\limits_0^{2} \sqrt[3]{1-x^2} dx,\ x=\cos t$; 3) $\int\limits_0^{1} \sqrt{1+x^2} dx,\ x=\frac{1}{\cos t}$;

4) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{4-3\cos x},\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$; 5) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x},\ \operatorname{tg} x=t$; 6) $\int\limits_0^{3} x\sqrt[3]{1-x^2} dx,\ x=\sin t$?

6. Обчислити дані інтеграли за допомогою формули заміни змінної:

1) $\int\limits_1^{4} \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}}$; 2) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$; 3) $\int\limits_1^{6} \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$; 4) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$;

5)• $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$; 6) $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; 7) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$; 8) $\int\limits_0^{3} x^2\sqrt{9-x^2} dx$;

9) $\int\limits_0^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2} dx$; 10) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos t dt}{6-5\sin t+\sin^2 t}$; 11) $\int\limits_{-2}^{2} \ln(u+\sqrt{u^2+1}) du$;

12) $\int\limits_{-1}^{1} t^4 \arcsin^5 t dt$; 13) $\int\limits_0^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$; 14) $\int\limits_0^{1} \operatorname{arctg}\sqrt{x} dx$;

15) $\int\limits_0^{3} \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$; 16) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{(e^x+1)\cos x}$; 17) $\int\limits_0^{1} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$.

7. Нехай функція f неперервна і періодична на $\mathbf{R}$ з періодом T. Довести, що:

1) $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^{T} f(x)dx$;

2) якщо $F(x)=\int\limits_0^{x} f(t)dt$, то $F(x+T)=F(x)+F(T)$.

8. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{\pi}^{\frac{5\pi}{3}} \sin 3x dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{6\pi}{5}} \sin^4 x\cos^4 x dx$; 3) $\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{8\pi}{3}} \frac{dx}{5-3\cos x}$.

9. Нехай функція f неперервна на проміжку $[0; +\infty)$ і $f(x) \to a, x \to +\infty$. Знайти:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x f(t)dt$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_0^1 f(nx)dx$.

10. Покладемо за означенням $\ln x = \int\limits_1^x \frac{dt}{t}$.

1) Довести основні властивості функції $f(x) = \ln x$ за схемою повного дослідження функції, а також теореми додавання і віднімання: $\ln xy = \ln x + \ln y$ і $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$.

2) Виходячи з того, що $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ $\forall a > 0,\ a \neq 1$, довести основні властивості функції $f(x) = \log_a x$.

11. Означити експоненціальну функцію e^x як функцію, обернену до $f(x) = \ln x = \int\limits_1^x \frac{dt}{t}$, і довести її основні властивості.

12. Означити показникову функцію a^x як обернену до логарифмічної $f(x) = \log_a x$ і довести її основні властивості.

13. Знайти формули для обчислення інтегралів $\forall n \in \mathbf{N}$:

1)• $\int\limits_0^a (a^2 - x^2)^n dx$; 2) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx$; 3) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x dx$;

4) $\int\limits_0^{\pi} x \sin^n x dx$; 5) $\int\limits_0^1 x^m \ln^n x dx$, $m > 0$.

14. Довести, що:

1) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin mx}{\sin x} dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m - \text{парне}, \\ \pi, & \text{якщо } m - \text{непарне}; \end{cases}$

2) $\int\limits_0^1 \arccos^n x dx = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)\int\limits_0^1 \arccos^{n-2} x dx$, $n > 1$.

Зразки розв'язування задач

2. Нехай $F(x) = u(x)v(x)$. Тоді $F'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ — інтегровна функція на відрізку $[a; b]$ (чому?) і F — первісна для F' на цьому відрізку. Отже, маємо

$$\int\limits_a^b F'(x)dx = F(x)\Big|_a^b = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Проте

$$\int_a^b F'(x)dx = \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

і остаточно

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

3. Припустимо, що $\varphi'(t) > 0$ на відрізку $[\alpha; \beta]$. Тоді функція φ зростає на цьому відрізку і $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Нехай (T) — довільне розбиття відрізка $[\alpha; \beta]$ точками t_k, $k = \overline{1, n}$, і $\xi_k \in [t_k; t_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$. Тоді $S(T) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\xi_k))\varphi'(\xi_k)\Delta t_k$ — інтегральна сума для функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, де $t \in [\alpha; \beta]$. Позначимо $x_k = \varphi(t_k)$, $k = \overline{0, n}$. Ці точки утворюють (T_1)-розбиття відрізка $[a; b]$, причому $\varphi(\xi_k) = c_k \in [x_k;\ x_{k+1}]$, і $\lambda_1(T_1) = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta x_k \to 0$, якщо $\lambda(T) = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta t_k \to 0$, внаслідок неперервності та зростання функції φ на відрізку $[\alpha; \beta]$. Сума $S_1(T_1) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k$ є інтегральною сумою для функції $f(x)$, $x \in [a; b]$. Оскільки за теоремою Лагранжа $\Delta x_k = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(\tau_k)\Delta t_k$, то $S_1(T_1) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\xi_k))\varphi'(\tau_k)\Delta t_k =$

$= S(T) + \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(c_k)(\varphi'(\tau_k) - \varphi'(\xi_k))\Delta t_k.$

Таким чином, залишається показати, що

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(\varphi'(\tau_k) - \varphi'(\xi_k))\Delta t_k \to 0, \ \lambda(T) \to 0,$$

тоді існуватиме $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(T) = \lim\limits_{\lambda_1(T_1)\to 0} S_1(T_1)$ і матимемо необхідну рівність.

Через те що функція f обмежена на відрізку $[a; b]$, то $\exists H > 0: \ |f(x)| \le H \quad \forall x \in [a; b]$. Функція φ' неперервна і, отже, рівномірно неперервна на відрізку $[\alpha; \beta]$, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0: \ |\tau_k - \xi_k| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |\varphi'(\tau_k) - \varphi'(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{H(\beta - \alpha)}.$$

Візьмемо $\lambda(T) < \delta(\varepsilon)$, тоді $|\tau_k - \xi_k| \le \lambda(T) < \delta(\varepsilon)$ і

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(\varphi'(\tau_k) - \varphi'(\xi_k))\Delta t_k\right| \le H\frac{\varepsilon}{H(\beta - \alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta t_k = \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}(\beta - \alpha) = \varepsilon,$$

що і вимагалося довести.

4. б) Маємо

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^5}dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = \dfrac{dx}{x^5}, & v = -\dfrac{1}{4x^4} \end{matrix} \right|$$

$$= -\frac{1}{4x^4}\ln x\Big|_1^e + \frac{1}{4}\int_1^e \frac{dx}{x^5} = -\frac{1}{4e^4} - \frac{1}{16x^4}\Bigg|_1^e = \frac{1}{16}\left(1 - \frac{5}{e^4}\right).$$

5. 1) Оскільки $x=\sqrt{t^3}$, то $x \geq 0$, і, отже, не існує відрізка $[\alpha;\ \beta]$, для якого $x=\sqrt{\alpha^3}=-1$ і $x=\sqrt{\beta^3}=1$. Це означає, що зазначену заміну змінної використати для обчислення заданого інтеграла не можна.

6. 5) Маємо

$$I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx= \left| \begin{array}{l} x=\operatorname{tg} t, \quad dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t} \\ t\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{4}\right] \Rightarrow x\in[0;\ 1] \end{array} \right|$$

$$=\int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1+\operatorname{tg} t)\sec^2 t}{\sec^2 t}dt=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\operatorname{tg} t)dt=\int_0^{\pi/4}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg} t\right)dt=$$

$$=\int_0^{\pi/4}\ln\frac{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos t}dt=\int_0^{\pi/4}\ln\sqrt{2}dt+\int_0^{\pi/4}\ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt-\int_0^{\pi/4}\ln\cos t dt=\ln\sqrt{2}t\Big|_0^{\pi/4}+$$

$$+\int_0^{\pi/4}\ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt-\int_0^{\pi/4}\ln\cos t dt=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\pi/4}\ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt-\int_0^{\pi/4}\ln\cos t dt.$$

Покажемо, що $\int_0^{\pi/4}\ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt=\int_0^{\pi/4}\ln\cos t dt$. Дійсно,

$$\int_0^{\pi/4}\ln\cos t dt= \left| \begin{array}{l} t=\dfrac{\pi}{4}-z, \quad dt=-dz, \\ t=0 \Rightarrow z=\dfrac{\pi}{4}, \quad t=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow z=0 \end{array} \right|$$

$$=-\int_{\pi/4}^{0}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-z\right)dz=\int_0^{\pi/4}\ln\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-z\right)\right)dz=\int_0^{\pi/4}\ln\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)dz.$$

І остаточно $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

Цей приклад цікавий ще й тим, що невизначений інтеграл $\int\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ не береться в скінченному вигляді.

13. 1) Виведемо рекурентну формулу для обчислення заданого інтеграла. Дістанемо

$$I_n=\int_0^a (a^2-x^2)^n dx=\int_0^a (a^2-x^2)^{n-1}(a^2-x^2)dx=a^2 I_{n-1}-\int_0^a x^2(a^2-x^2)^{n-1}dx=$$

$$\left| \begin{array}{l} u=x, \quad du=dx, \\ dv=(a^2-x^2)^{n-1}xdx, \quad v=-\dfrac{1}{2n}(a^2-x^2)^n \end{array} \right|$$

$$=a^2 I_{n-1}+\frac{1}{2n}x(a^2-x^2)^n\Big|_0^a-\frac{1}{2n}\int_0^a (a^2-x^2)^n dx=a^2 I_{n-1}-\frac{1}{2n}I_n.$$

Звідси $I_n = \frac{2na^2}{2n+1} I_{n-1}$, $n \in \mathbf{N}$. Оскільки $I_0 = \int\limits_0^a dx = a$, то

$$I_n = a^{2n+1} \frac{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 6\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\ldots 5\cdot 3} = a^{2n+1} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

де

$$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n, \quad (2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1).$$

§ 9.6. Невласні інтеграли

Нехай функція f визначена на відрізку $[a; b]$ за винятком, можливо, скінченної множини точок $\{x_k\}$ цього відрізка. Тоді якщо f необмежена на відрізку $[a; b]$, але інтегровна на кожному відрізку $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$, який не містить точок x_k, то вираз $\int\limits_a^b f(x)dx$ називають *невласним інтегралом* від необмеженої функції.

Якщо функція f необмежена на відрізку $[a; b]$, але інтегровна на відрізку $[a; \beta]$ $\forall \beta \in (a; b)$ ($[\alpha; b]$ $\forall \alpha \in (a; b)$) та існує $\lim\limits_{\beta \to b-} \int\limits_a^\beta f(x)dx = I$ ($\lim\limits_{\alpha \to a+} \int\limits_\alpha^b f(x)dx = I$), то число I називають *значенням невласного інтеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$ і записують $\int\limits_a^b f(x)dx = I$. Якщо при цьому $I \neq \infty$, то говорять також, що невласний інтеграл *збіжний*. Якщо $I = \infty$ або зазначена границя не існує, то невласний інтеграл називають *розбіжним*.

Якщо функція f необмежена на проміжках $(a; \alpha)$ і $(\beta; b)$ $\forall \alpha, \beta \in (a; b)$, але інтегровна на кожному відрізку $[\alpha; \beta] \subset (a; b)$, то невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ називають збіжним, якщо збіжний кожний з невласних інтегралів $\int\limits_a^c f(x)dx$ і $\int\limits_c^b f(x)dx$ при деякому $c \in [a; b]$, і при цьому значення невласного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ визначається рівністю

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Якщо функція f необмежена в околі точок x_k, $k = \overline{1, n}$, де $a < x_1 < x_2 < \ldots$ $\ldots < x_n = b$, але інтегровна на кожному відрізку $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$, в якому немає точок x_k, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називають збіжним, якщо збіжний кожний з невласних інтегралів $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$, $k=\overline{0,\ n}$, де $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$. При цьому значення невласного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ визначається рівністю

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx.$$

Число

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \sum_{k=0}^{n} \int_{x_k+\varepsilon}^{x_{k+1}-\varepsilon} f(x)dx$$

називають *головним значенням невласного інтеграла* $\int_a^b f(x)dx$ і записують

$$\text{v. p.} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \sum_{k=0}^{n} \int_{x_k+\varepsilon}^{x_{k+1}-\varepsilon} f(x)dx.$$

Якщо невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збіжний, то функцію f називають невласно інтегровною на відрізку $[a;\ b]$.

Нехай функція f визначена на нескінченному проміжку E ($E = (-\infty;\ b]$ або $E = [a;\ +\infty)$, або $E = (-\infty;\ +\infty)$) за винятком, можливо, скінченної множини точок x_k, $k=\overline{1,\ n}$. Тоді якщо функція f інтегровна або невласно інтегровна на кожному відрізку $[\alpha;\ \beta] \subset E$, то вирази $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$, $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають *невласними інтегралами на нескінченних проміжках*.

Якщо існує $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = I$ ($\lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx = I$), то число I називають значенням невласного інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ($\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$) і записують $\int_a^{+\infty} f(x)dx = I$ ($\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = I$). У такому разі ці невласні інтеграли називають *збіжними*. Якщо вказані границі не існують, то невласні інтеграли називають *розбіжними*.

Невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають збіжним, якщо збіжний кожний з невласних інтегралів $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ та $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$ при деякому $c \in (-\infty; +\infty)$ і значення невласного інтеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ визначається рівністю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

Число $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx$ називають *головним значенням невласного інтеграла* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Вираз $\int_{a}^{b} f(x)dx$ називають невласним інтегралом функції f на проміжку $\langle a;\ b\rangle$, якщо він є або невласним інтегралом від необмеженої функції, або невласним інтегралом на нескінченному проміжку.

Ознака порівняння збіжності невласних інтегралів. *Нехай* $0 \le f(x) \le \le \varphi(x)\quad \forall x \in (a;\ b)$. *Тоді*:

1) *якщо невласний інтеграл* $\int_{a}^{b} \varphi(x)dx$ *збіжний, то збіжним є і невласний інтеграл* $\int_{a}^{b} f(x)dx$;

2) *якщо невласний інтеграл* $\int_{a}^{b} f(x)dx$ *розбіжний, то розбіжним є також і невласний інтеграл* $\int_{a}^{b} \varphi(x)dx$.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) якщо невласний інтеграл збіжний, то він має значення;

2) твердження, обернене до 1), є правильним;

3) якщо $\int_{a}^{b} f(x)dx$ — невласний інтеграл функції f на проміжку $\langle a;\ b\rangle$, то f є необмеженою на цьому проміжку;

4) твердження, обернене до 3), є правильним;

5)• якщо невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збіжний, то збіжним є також і невласний інтеграл $\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx \quad \forall b > a$;

6) твердження, обернене до 5), є правильним;

7) головне значення невласного інтеграла є його значенням;

8) якщо функція невласно інтегровна на відрізку $[a;\ b]$, то вона необмежена на цьому відрізку;

9) твердження, обернене до 8), є правильним?

2. Визначити, які з наведених виразів є невласними інтегралами від необмежених функцій, і дослідити їх на збіжність:

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 2) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 3) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^3}$; 4) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^3}$; 5) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; 6) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

7)• $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\ln x}$; 8) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$; 9) $\int\limits_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$; 10) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln^3 3}$; 11) $\int\limits_0^{\sqrt{2/\pi}} \frac{1}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}dx$;

12) $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$; 13) $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}}$; 14) $\int\limits_0^{1/2} \frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}}$; 15) $\int\limits_0^e \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

3. Дослідити на збіжність дані невласні інтеграли та знайти їхні значення у випадку збіжності:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx$; 3) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; 4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2}$; 5)• $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$;

6) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2 x}}$; 7) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; 8) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx$; 9) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$;

10) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$; 11) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sin xdx$; 12) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bxdx$;

13) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx$; 14) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$; 15) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

4. Дослідити на збіжність дані невласні інтеграли за ознакою порівняння:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$; 2) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln x}$; 3) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$; 4) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; 5) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$;

6) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$; 7)• $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}dx$; 8) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$; 9) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$;

10) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{1+x^n}$; 11) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sin^2 x}$; 12) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx$; 13) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$;

14) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$; 15) $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln^p x}$; 16) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx$.

5. Знайти головні значення даних невласних інтегралів:

1) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x}$; 2) $\int\limits_a^b \frac{dx}{x-c}$, $a<c<b$; 3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$;

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$; 5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2-2x+5}$; 6) $\int\limits_{0,5}^{2} \frac{dx}{x\ln x}$; 7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x)dx}{1+x^2}$;

8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx$; 9) $\int\limits_0^{\pi} x \operatorname{tg} x\, dx$; 10) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\alpha-\sin x}$, $0<\alpha<1$.

6. Встановити, які властивості інтегралів Рімана правильні для збіжних невласних інтегралів. Чи можна до таких інтегралів застосовувати формули інтегрування частинами, заміни змінної та формулу Ньютона — Лейбніца?

7. Знайти формули для обчислення даних інтегралів $\forall n \in \mathbf{N}$:

1)• $I_n = \int\limits_0^1 x^m \ln^n x dx$, $m>-1$; 2) $I_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$;

3) $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x \cos 2nx dx$.

8. При яких значеннях параметра p даний невласний інтеграл збіжний:

1) $\int\limits_a^{+\infty} e^{-px}dx$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{b} e^{px}dx$; 3) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^p}dx$; 4) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^p x}$;

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(1-\cos x)\sin x}{x^p}dx$; 6)• $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{p-1}dt$?

9. Знайти границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^{2n}}dx$; 2) $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\int\limits_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t}dt}{\ln\frac{1}{x}}$.

10*. Нехай функція f інтегровна або невласно інтегровна на відрізку $[0; b]$ $\forall b > 0$ і $f(x) \to A$, $x \to +\infty$, де A — скінченне число, або $A = +\infty$, або $A = -\infty$. Довести, що

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \to A\,,\ x \to +\infty.$$

11*. Довести, що невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збіжний тоді й тільки тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta(\varepsilon) > a:\ b_2 > b_1 > \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon\,.$$

12*. Нехай функція φ інтегровна на відрізку $[a; b]$, $b > a$, а функція f монотонна на проміжку $[a; +\infty)$. Довести, що невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$ збігається, якщо $\left|\int_a^b \varphi(x)dx\right| \le H$ $\forall b > a$ та $f(x) \to 0$, $x \to +\infty$ (*ознака Діріхле*), або невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ збіжний та $|f(x)| \le H$ $\forall x \ge a$ (*ознака Абеля*).

13*. Нехай невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ абсолютно збіжний, тобто збіжним є невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$. Довести, що невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збіжний. Чи правильне обернене твердження?

14. Дослідити на абсолютну збіжність дані невласні інтеграли:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$; 2) $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$; 3) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos\sqrt[4]{x}dx}{3 + x\sqrt[3]{x}}$; 4) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$;
5) $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$; 6) $\int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)dx$; 7) $\int_0^{+\infty} x^p \sin x^q dx$, $q \ne 0$.

15*. Нехай функція f монотонна на проміжку $[a; +\infty)$ і невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збіжний. Довести, що:

1) функція $xf(x)$ обмежена на проміжку $[a; +\infty)$;
2) $xf(x) \to 0$, $x \to +\infty$.

Зразки розв'язування задач

1. 5) Якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збіжний, то існує $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_a^B f(x)dx \neq \infty$, і тоді існуватиме

$$\lim_{B\to+\infty}\left(\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_b^B f(x)dx\right)=\int\limits_a^b f(x)dx+\lim_{B\to+\infty}\int\limits_b^B f(x)dx\neq\infty \quad \forall b>a.$$

Звідси випливає існування $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_b^B f(x)dx \neq \infty$ і збіжність невласного інтеграла $\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx$. Отже, розглядуване твердження правильне.

2. 7) Підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ необмежена на інтервалі $(0; 1)$ та не визначена в точках 0 і 1. Отже, вираз $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{x\ln x}$ — невласний інтеграл.

Розглянемо два невласних інтеграли $\int\limits_0^c\dfrac{dx}{x\ln x}$ та $\int\limits_c^1\dfrac{dx}{x\ln x}$, де $c\in(0; 1)$ — фіксована точка.

Оскільки

$$\int\limits_\alpha^c\frac{dx}{x\ln x}=\int\limits_\alpha^c\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln\left|\ln x\right|\Big|_\alpha^c=\ln\left|\ln c\right|-\ln\left|\ln\alpha\right|\to-\infty,\ \alpha\to0+,$$

то невласний інтеграл $\int\limits_0^c\dfrac{dx}{x\ln x}$, а разом з ним і невласний інтеграл $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{x\ln x}$ розбіжні.

3. 5) Заданий інтеграл є невласним інтегралом з нескінченними межами інтегрування. Дослідимо його на збіжність.

Маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}xdx}{1+x^2}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\operatorname{arctg}xdx}{1+x^2}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}xdx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0\operatorname{arctg}xd(\operatorname{arctg}x)+$$

$$+\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\operatorname{arctg}xd(\operatorname{arctg}x)=\frac{1}{2}(\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}^2a+\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}^2b)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}.$$

Отже, заданий інтеграл збіжний і значення його дорівнює $\dfrac{\pi^2}{4}$.

4. 7) Через те що функція $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x^\alpha}$ не визначена в точці 0, то слід розглянути два інтеграли $\int\limits_0^c\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x^\alpha}dx$ та $\int\limits_c^{+\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x^\alpha}dx$, де $c>0$ — фіксована точка.

Оскільки $0<\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}\to1,\ x\to0$, то матимемо

$$\frac{1}{2x^{\alpha-1}}\le\frac{\operatorname{arctg}x}{x^\alpha}=\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-1}}\le\frac{2}{x^{\alpha-1}},$$

і тоді невласні інтеграли $\int\limits_0^c\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x^\alpha}dx$ і $\int\limits_0^c\dfrac{dx}{x^{\alpha-1}}$ одночасно збіжні або розбіжні, якщо число c досить близьке до нуля.

Маємо

$$\int_0^c \frac{dx}{x^{\alpha-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^c \frac{dx}{x^{\alpha-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha}\Bigg|_\varepsilon^c = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{c^{2-\alpha}}{2-\alpha}-\frac{\varepsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right)=\frac{c^{2-\alpha}}{2-\alpha},\ \alpha<2.$$

Якщо $\alpha = 2$, то $\int_0^c \frac{dx}{x^{\alpha-1}} = \int_0^c \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\ln\frac{c}{\varepsilon} = +\infty$. І нарешті, якщо $\alpha > 2$, то $\int_0^c \frac{dx}{x^{\alpha-1}} =$ $= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{c^{2-\alpha}}{2-\alpha}-\frac{\varepsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right) = +\infty.$

Отже, невласний інтеграл $\int_0^c \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}dx$ збіжний, якщо $\alpha<2$.

Із нерівності $\operatorname{arctg} c \le \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$ $\forall x \ge c$ випливає, що $\frac{c}{x^\alpha} \le \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} \le \frac{\pi}{2x^\alpha}$.

Аналогічно попередньому можна показати, що невласний інтеграл $\int_c^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ збіжний при $\alpha>1$. При тій самій умові збігатиметься і невласний інтеграл $\int_c^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}dx$.

Тоді заданий невласний інтеграл

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}dx = \int_0^c\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}dx + \int_c^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}dx$$

збіжний, якщо $1<\alpha<2$.

7. 1) Скориставшись вправою 6, при $m>-1$ матимемо

$$I_n = \int_0^1 x^m \ln^n x dx = \left|\begin{matrix} u=\ln^n x, & du = n\ln^{n-1}x\dfrac{dx}{x}, \\ dv = x^m dx, & v=\dfrac{x^{m+1}}{m+1} \end{matrix}\right|$$

$$=\frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x\Big|_0^1 - \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m\ln^{n-1}x dx = -\frac{n}{m+1}I_{n-1},\ n\in\mathbf{N}.$$

Отже,

$$I_n = -\frac{n}{m+1}I_{n-1} = \frac{n(n-1)}{(m+1)^2}I_{n-2} = \ldots = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^n}I_0.$$

Через те що $I_0 = \int_0^1 x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{m+1}$, то остаточно дістанемо

$$I_n = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}},\ n\in\mathbf{N}.$$

8. 6) Маємо

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{p-1}dt = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{p-1}dt + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{p-1}dt = I_1+I_2.$$

Інтеграл I_1 при $p \geq 1$ власний, а при $0 \leq p < 1$ підінтегральна функція $e^{-t}t^{p-1}$ не визначена в точці 0. Крім того,

$$\frac{1}{et^{1-p}} < e^{-t}t^{p-1} = \frac{1}{e^t t^{1-p}} < \frac{1}{t^{1-p}}, \ t \in (0;\ 1].$$

Тому невласні інтеграли I_1 та $\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^{1-p}}$ одночасно збіжні або розбіжні. Враховуючи те, що інтеграл I_1 збіжний при $1 - p < 1$ та розбіжний при $1 - p \geq 1$, дістаємо, що інтеграл I_1 збігатиметься тоді й тільки тоді, коли $p > 0$.

Розглянемо далі інтеграл $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} e^{-t}t^{p-1}dt$. Оскільки $e^{-t}t^{p+1} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \forall p \in \mathbf{R}$, то $\exists t_p > 0\colon\ e^{-t}t^{p+1} < 1 \quad \forall t \in [t_p;\ +\infty)$, звідки випливає, що $e^{-t}t^{p-1} < \frac{1}{t^2} \quad \forall t \in \left[t_p;\ +\infty\right]$.

Звідси та із збіжності інтеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ за ознакою порівняння випливає збіжність невласного інтеграла I_2.

Отже, заданий інтеграл $\Gamma(p)$ збіжний при $p > 0$ та розбіжний при $p \leq 0$.

§ 9.7. Інтеграл Стілтьєса

Нехай функція f обмежена на відрізку $[a;\ b]$, а функція α неспадна на цьому відрізку. Для фіксованого розбиття (T) відрізка $[a;\ b]$ точками x_k, $k = \overline{0,\ n}$, введемо позначення

$$m_k = \inf_{[x_k;\, x_{k+1}]} f(x),\ \ M_k = \sup_{[x_k;\, x_{k+1}]} f(x),\ \ \Delta\alpha_k = \alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k),$$

$$k = \overline{0,\ n-1}.$$

Суми $S_*(T) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k \Delta\alpha_k$ і $S^*(T) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k \Delta\alpha_k$ називають відповідно *нижньою* та *верхньою сумами Дарбу — Стілтьєса*.

Суму $S(T) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta\alpha_k$, де $c_k \in \left[x_k;\ x_{k+1}\right]$, $k = \overline{0,\ n-1}$, називають *інтегральною сумою Стілтьєса*. Названі суми мають такі самі властивості, як і відповідні суми Дарбу та інтегральні суми Рімана. Зокрема, існують $I_* = = \sup\limits_{(T)} S_*(T) = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k \Delta\alpha_k$ — *нижній інтеграл Дарбу — Стілтьєса* та $I^* = \inf\limits_{(T)} S^*(T) = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k \Delta\alpha_k$ — *верхній інтеграл Дарбу — Стілтьєса* функції f за мірою або за функцією α на відрізку $[a;\ b]$.

Якщо існує границя $I = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta\alpha_k$, то її називають *інтегралом Стілтьєса* функції f за мірою або за функцією α на відрізку $[a;\, b]$ і позначають $I = \int\limits_a^b f(x)d\alpha$, а саму функцію f називають *S-інтегровною* за мірою або за функцією α на відрізку $[a;\, b]$. Цей інтеграл перетворюється в інтеграл Рімана при $\alpha(x) = x \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

Критерій S-інтегровності функції f за неспадною мірою α. Обмежена на відрізку $[a;\, b]$ функція f є S-інтегровною за неспадною мірою α на цьому відрізку тоді й тільки тоді, коли виконується хоча б одна з умов:

1) $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} (S^*(T) - S_*(T)) = 0$; 2) $I^* = I_*$;

3) $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta\alpha_k = 0$, де $\omega_k(f) = \sup\limits_{[x_k;\, x_{k+1}]} f(x) - \inf\limits_{[x_k;\, x_{k+1}]} f(x)$ — коливання функції f на відрізку $[x_k;\, x_{k+1}]$.

Достатні умови S-інтегровності функції f за неспадною мірою α. Функція f є S-інтегровною за неспадною мірою α на відрізку $[a;\, b]$, якщо виконується хоча б одна з умов:

1) функція f неперервна на відрізку $[a;\, b]$;

2) функція f монотонна на відрізку $[a;\, b]$, а α неперервна на цьому відрізку .

Властивості інтеграла Стілтьєса нагадують властивості інтеграла Рімана з очевидними змінами, що стосуються міри α.

Так, теореми про середнє значення набувають вигляду $\int\limits_a^b f(x)d\alpha = c(\alpha(b) - \alpha(a))$ та $\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)d\alpha = c\int\limits_a^b \varphi(x)d\alpha$, де f і φ є S-інтегровними за мірою α, а c — деяка точка відрізка $[\inf\limits_{[a;\, b]} f(x);\ \sup\limits_{[a;\, b]} f(x)]$. Зокрема, якщо функція f неперервна на відрізку $[a;\, b]$, то $\exists x^* \in [a;\, b] : \ c = f(x^*)$.

Якщо α є функцією обмеженої варіації на відрізку $[a;\, b]$, то існують неспадні на відрізку $[a;\, b]$ функції α_1 і α_2, для яких $\alpha(x) = \alpha_1(x) - \alpha_2(x)$. Тому обмежену функцію f називають S-інтегровною за мірою α на відрізку $[a;\, b]$, якщо f є S-інтегровною за мірами α_1 і α_2. При цьому число $\int\limits_a^b f(x)d\alpha = \int\limits_a^b f(x)d\alpha_1 - \int\limits_a^b f(x)d\alpha_2$ називають *інтегралом Стілтьєса* функції f за мірою α.

Обчислення інтеграла Стілтьєса за допомогою інтеграла Рімана. Якщо функції f і α' інтегровні за Ріманом на відрізку $[a;\, b]$, то справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)d\alpha = \int\limits_a^b f(x)\alpha'(x)dx.$$

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) кожна сума Дарбу є сумою Дарбу — Стілтьєса;

2) якщо функція f є S-інтегровною за неспадними мірами α_1 і α_2, то вона S-інтегровна за функцією $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ на відрізку $[a; b]$, і

$$\int_a^b f(x)d(\alpha_1+\alpha_2) = \int_a^b f(x)d\alpha_1 + \int_a^b f(x)d\alpha_2;$$

3) твердження, обернене до 2), є правильним;

4) якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, а α є функцією обмеженої варіації на цьому відрізку, то f є S-інтегровною за мірою α на відрізку $[a; b]$;

5)• якщо функція α — неспадна, а функція f має з функцією α хоча б одну спільну точку розриву $x^* \in (a; b)$, то f не є S-інтегровною за мірою α на відрізку $[a; b]$;

6) якщо функція f обмежена на відрізку $[a; b]$ і має на ньому скінченну множину точок розриву, то f є S-інтегровною: а) за довільною неспадною мірою α; б) за довільною неспадною неперервною мірою α;

7) якщо функція f є S-інтегровною за функцією α, де α — функція обмеженої варіації на відрізку $[a; b]$ і $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2$ ($\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — неспадні функції на цьому відрізку), то

$$\int_a^b f(x)d\alpha_1 - \int_a^b f(x)d\alpha_2 = \int_a^b f(x)d\beta_1 - \int_a^b f(x)d\beta_2?$$

2. Визначити, чи існують інтеграли Стілтьєса функцій f за мірами α на заданих відрізках і якщо існують, то обчислити ці інтеграли:

1) $f(x) = x^3$, $\alpha(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in [0; 1]$;

2) $f(x) = E(x) = [x]$, $\alpha(x) = x^2$, $x \in [-1; 1]$;

3) $f(x) = x^3$, $\alpha(x) = [x]$, $x \in [0; 5]$;

4) $f(x) = \operatorname{sign} x$, $\alpha(x) = [x]$, $x \in [-1; 1]$;

5) $f(x) = e^{-x}$, $\alpha(x) = [x]$, $x \in [0; 1]$;

6) $f(x) = x$, $\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = -1, \\ 1, & \text{якщо } -1 < x < 2, \\ -1, & \text{якщо } 2 \le x \le 3, \end{cases}$ $x \in [-1; 3]$;

7) $f(x) = x^4$, $\alpha(x) = \ln x$, $x \in [1; 5]$;

8)• функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, $\alpha(x) = c_k$, якщо $a_k \le x \le a_{k+1}$, $k = \overline{0, n_0 - 1}$, де $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n_0} = b$ — фіксовані точки;

9) $f(x) = \sin x$, $\alpha(x) = x^2$, $x \in [-\pi; \pi]$.

3. Нехай функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, а $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\alpha(x) < +\infty$ — варіація функції α на цьому відрізку. Довести, що $\left|\int_a^b f(x)d\alpha\right| \le M \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\alpha(x)$, де $M = \max\limits_{[a;\, b]}|f(x)|$.

4•. Нехай функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, а α_n — функції обмеженої варіації на цьому відрізку, причому $\bigvee_a^b \alpha_n(x) \le H \quad \forall n$. Довести, що $\int_a^b f(x)d\alpha_n \to$ $\to \int_a^b f(x)d\alpha$, $n \to \infty$, якщо $\alpha_n(x) \to \alpha(x)$, $n \to \infty$.

5. Нехай функція f є S-інтегровною за мірою α на відрізку $[a; b]$ та існує $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)d\alpha$. Вираз $\int_a^{+\infty} f(x)d\alpha = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)d\alpha$ називають інтегралом Стілтьєса функції f за мірою α на проміжку $[a; +\infty)$. Знайти $\int_0^{+\infty} f(x)d\alpha$, якщо:

1) $f(x) = x^k$, $\alpha(x) = 1 - e^{-x}$; 2) $f(x) = e^{-x}$, $\alpha(x) = [x]$;

3) $f(x) = 10^{-\sqrt{x}}$, $\alpha(x) = E(\sqrt{x})$.

6*. Нехай функція f є S-інтегровною за мірою α на відрізку $[a; b]$ $\forall b > 0$, а $F(x) = \int_a^x f(t)d\alpha \quad \forall x > a$. Довести, що функція F неперервна у кожній точці $x_0 > a$, в якій неперервна функція α.

Зразки розв'язування задач

1. 5) Припустимо, що $x^* \in (a; b)$ — спільна точка розриву функцій f і α. Оскільки функція α неспадна на відрізку $[a; b]$, то $0 < \alpha(x^*+) - \alpha(x^*-) \le \alpha(x'') - \alpha(x') \quad \forall x', x'' \in [a; b] : x' < x^*$, $x'' > x^*$. Розглянемо довільне розбиття (T) відрізка $[a; b]$ точками x_k, $k = \overline{0, n}$, але таке, щоб точка x^* не була точкою (T)-розбиття. Нехай $x^* \in (x_{k_0}; x_{k_0+1})$. Тоді

$$\omega_{k_0}(f) = \sup_{[x_{k_0}; x_{k_0+1}]} f(x) - \inf_{[x_{k_0}; x_{k_0+1}]} f(x) \ge \varepsilon_0 > 0,$$

де $\varepsilon_0 > 0$ — деяке фіксоване число. Із того, що

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta\alpha_k \ge \omega_{k_0}\Delta\alpha_{k_0} \ge \varepsilon_0(\alpha(x_{k_0+1}) - \alpha(x_{k_0})) \ge \varepsilon_0(\alpha(x^*+) - \alpha(x^*-)) > 0,$$

тобто

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta\alpha_k \not\to 0, \lambda(T) \to 0,$$

випливає, що функція f не є S-інтегровною за мірою α. Отже, розглядуване твердження правильне.

2. 8) Зрозуміло, що $\bigvee_a^b \alpha(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} |c_{k+1} - c_k|$, де $c_{n_0} = f(b)$.

Звідси випливає, що α — функція обмеженої варіації, а функція f є S-інтегровною за мірою α (див твердження 1.4)). Отже, маємо право вибрати розбиття (T) відрізка $[a; b]$

точками x_k, $k=\overline{0,\ n}$, так, щоб точки a_k, $k=\overline{0,\ n_0}$, не були точками цього розбиття, а точки $x_k^*\in[x_k;\ x_{k+1}]$ можемо вибрати так, щоб $x_{\upsilon_k}^*=a_k$, якщо $a_k\in[x_{\upsilon_k};\ x_{\upsilon_{k+1}}]$.

Тоді

$$S(T)=\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*)(\alpha(x_{k+1})-\alpha(x_k))=\sum_{k=1}^{n_0} f(a_k)(c_k-c_{k-1})\underset{\lambda(T)\to 0}{\longrightarrow}\sum_{k=1}^{n_0} f(a_k)(c_k-c_{k-1}).$$

І остаточно

$$\int_a^b f(x)d\alpha=\sum_{k=1}^{n_0} f(a_k)(c_k-c_{k-1}).$$

4. Для довільного розбиття (T) відрізка [a; b] точками x_k, $k=\overline{0,\ m}$, маємо

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left|\alpha_n(x_{k+1})-\alpha_n(x_k)\right|\le \mathop{\mathrm{V}}_a^b \alpha_n(x)\le H.$$

При $n\to\infty$ дістанемо

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left|\alpha(x_{k+1})-\alpha(x_k)\right|\le H \quad \text{і} \quad \mathop{\mathrm{V}}_a^b \alpha(x)\le H,$$

тобто α — функція обмеженої варіації на відрізку [a; b].

Таким чином, інтеграл $\int_a^b f(x)d\alpha$ існує, причому

$$\int_a^b f(x)d\alpha=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{m-1} f(c_k)(\alpha(x_{k+1})-\alpha(x_k)),$$

а

$$\int_a^b f(x)d\alpha_n=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{m-1} f(c_k)(\alpha_n(x_{k+1})-\alpha_n(x_k)).$$

Враховуючи це та обмеженість функції f на відрізку [a; b], матимемо

$$\left|\int_a^b f(x)d\alpha_n-\int_a^b f(x)d\alpha\right|\le\left|\int_a^b f(x)d\alpha_n-\sum_{k=0}^{m-1} f(c_k)(\alpha_n(x_{k+1})-\alpha_n(x_k))\right|+$$

$$+\left|\sum_{k=0}^{m-1} f(c_k)((\alpha_n(x_{k+1})-\alpha(x_{k+1}))-(\alpha_n(x_k)-\alpha(x_k)))\right|+$$

$$+\left|\sum_{k=0}^{m-1} f(c_k)(\alpha(x_{k+1})-\alpha(x_k))-\int_a^b f(x)d\alpha\right|.$$

Якщо (T)-розбиття фіксоване і досить дрібне, то перший та третій доданки правої частини як завгодно малі, а другий доданок при такому фіксованому розбитті (T) стає як завгодно малим при досить великому m.

Отже,

$$\left|\int_a^b f(x)d\alpha_n-\int_a^b f(x)d\alpha\right|\to 0,\ n\to\infty,$$

тобто

$$\int_a^b f(x)d\alpha_n\to\int_a^b f(x)d\alpha,\ n\to\infty.$$

Розділ 10 ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

§ 10.1. Обчислення площ плоских фігур

Плоскою фігурою називають будь-яку множину точок даної площини. *Многокутною фігурою* називають будь-яку плоску фігуру, яка є об'єднанням скінченної кількості трикутників. Площу многокутної фігури M позначають через $S(M)$. Порожню множину M вважають трикутником з площею $S(M)=0$. Плоску фігуру називають обмеженою, якщо вона є частиною деякої многокутної фігури.

Нехай задано плоску обмежену фігуру E та $|E|_* = \{S(\underline{M}):\ \underline{M} \subset E$ і $\underline{M}$ — многокутна фігура$\}$, а $|E|^* = \{S(\overline{M}):\ \overline{M} \supset E$ і $\overline{M}$ — многокутна фігура$\}$. Тоді існує $\sup|E|_* = S_*(E)$ — внутрішня площа фігури E і $\inf|E|^* = S^*(E)$ — зовнішня площа фігури E. Плоску фігуру E називають *квадровною* або *вимірною*, якщо $S_*(E)=S^*(E)$, а число $S(E)=S_*(E)=S^*(E)$ називають її площею.

Критерій квадровності. Плоска фігура E є квадровною тоді й тільки тоді, коли існують послідовності многокутних фігур $(\underline{M}_n)$ і $(\overline{M}_n)$, що $\underline{M}_n \subset E \subset \overline{M}_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S(\underline{M}_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(\overline{M}_n) = S(E)$ — площа фігури E.

Площиною Oxy називають площину, на якій задано декартову прямокутну систему координат.

Нехай квадровна фігура E проекціюється на вісь Ox у відрізок $[a;b]$, а кожна пряма $x=c$, перпендикулярна до Ox, у перерізі з фігурою E дає відрізок завдовжки $l(c)=l(x)$, де $l(x)$ — неперервна функція на $[a;b]$. Тоді $S(E)=\int\limits_a^b l(x)dx$.

Узагальненою криволінійною трапецією називають фігуру E площини Oxy:

$$E=\{(x,y):\ x\in[a;b],\ f_1(x)\le y\le f_2(x)\ \ \forall x\in[a;b]\},$$

де функції f_1 і f_2 неперервні на $[a;b]$ і $f_1(x)\le f_2(x)$ $\forall x\in[a;b]$ (рис. 18). Якщо $f_1(x)\equiv 0$ на відрізку $[a;b]$, то узагальнену криволінійну трапецію

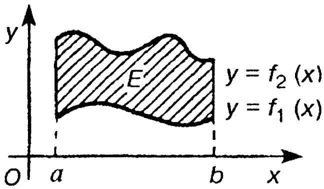


Рис. 18

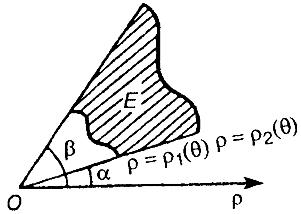


Рис. 19

називають *криволінійною трапецією.* Узагальнена криволінійна трапеція є квадровною фігурою, площа якої

$$S(E)=\int\limits_a^b (f_2(x)-f_1(x))\,dx.$$

Якщо на площині вибрано полярну систему координат, то *узагальненим криволінійним сектором* називають плоску фігуру $E=\{(\theta,\rho):\ \theta\in[\alpha;\beta],\ \rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta)\ \ \forall\theta\in[\alpha;\beta]\}$. де функції ρ_1 і ρ_2 неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$ і $\rho_1(\theta)\le\rho_2(\theta)\ \ \forall\theta\in[\alpha;\beta]$ (рис. 19).

Якщо $\rho_1(\theta)\equiv 0$ на відрізку $[\alpha;\beta]$, то узагальнений криволінійний сектор називають *криволінійним сектором.*

Узагальнений криволінійний сектор — квадровна фігура, площа якої

$$S(E)=\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \left(\rho_2^2(\theta)-\rho_1^2(\theta)\right)d\theta.$$

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) кожна многокутна фігура є плоскою фігурою;

2) об'єднання, переріз та різниця многокутних фігур — многокутні фігури;

3) кожна обмежена плоска фігура E має зовнішню $S^*(E)$ та внутрішню $S_*(E)$ площі, причому $S^*(E)\ge S_*(E)$;

4)● якщо $E=\{(x;y):\ x\in\mathbf{Q}\cap[0;1],\ y\in\mathbf{Q}\cap[0;1]\}$, то $S^*(E)>S_*(E)$;

5) кожна узагальнена криволінійна трапеція є квадровною фігурою;

6) кожна квадровна фігура є узагальненою криволінійною трапецією;

7) площина є квадровною фігурою;

8) пряма є квадровною фігурою;

9) криволінійна трапеція може бути криволінійним сектором?

2. Виконати вказані завдання усно.

1) Обчислити інтеграл, скориставшись його геометричним змістом:

а) $\int\limits_0^1 (1-x)\,dx$; б) $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\,dx$; в) $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$; г) $\int\limits_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

2) Охарактеризувати фігуру, площа якої дорівнює:

а) $\int\limits_0^4 \sqrt{x}\,dx$; б) $\int\limits_0^3 \left(2-\sqrt{x}\right)dx$; в) $\int\limits_{-1}^1 x^2 dx$; г) $\int\limits_{-1}^1 \left(1-x^2\right)\,dx$; д) $\int\limits_{-1}^2 |x|\,dx$.

3. Знайти зовнішню та внутрішню площі даних фігур:

1) E — фіксований многокутник;

2) $E=\left\{(x,\,y):\ x=\frac{1}{n}\,(n\in\mathbf{N}),\ \ y\in[0;1]\right\}$;

3) $E=\{(x,\,y):\ \ x\in[0;1]\setminus\mathbf{Q},\ \ y\in[0;\,1]\setminus\mathbf{Q}\ \}$;

4) $E=\{(x,\ y):\ y=f\,(x),\ \ x\in\ [a;\,b]\}$, де f — неперервна функція на відрізку $[a;\ b]$;

5) $E=\left\{(x,\ y):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$, $a,\,b>0$;

6) $E=\{\ (x,\,y):\ x\in[a;\,b]$ і $y\in[0;1]$, якщо $x\in\mathbf{Q}$, та $y\in[-1;\,0]$, якщо $x\notin\mathbf{Q}\}$.

4. Знайти площу узагальнених криволінійних трапецій, які обмежені заданими кривими:

1) $y^2=9x,\ y=3x$; 2) $y=4-x^2,\ y=0$; 3) $y=\sin x,\ \ y=x,\ \ x=\frac{\pi}{2}$;

4) $y=x^3,\ \ y=2x,\ \ y=x$; 5) $y=\frac{x^2}{3},\ \ y=-\frac{2}{3}x^2+4$;

6) $y=\sqrt{x-2},\ \ y=\sqrt{4-x},\ \ y=0$; 7) $y=\operatorname{tg}x,\ \ x=\frac{\pi}{3},\ \ y=0$;

8) $y=\ln x,\ \ x=\mathrm{e},\ \ y=0$; 9) $y=\arcsin x,\ \ x=\frac{1}{2},\ \ y=0$;

10) $y=\operatorname{tg}x,\ \ y=\frac{2}{3}\cos x$; $x=1$ 11) $y=x^2-2x+4,\ \ x=1,\ \ y-4=x$;

12) $y=\mathrm{e}^{2x},\ \ y=2^{-x},\ \ x=1$; 13) $y=1-\sin x,\ \ y=x+1,\ \ x=\frac{\pi}{2}$;

14) $y=4x-x^2,\ \ y=|x-2|+4,\ \ x=0$; 15) $y=2^{x+1}+2,\ \ y=4-x,\ \ x=4$;

16)• $|y|=|\lg x|,\ \ y=0,\ \ x=\frac{1}{10},\ \ x=10$;

17) $y=|x-2|+|x+1|,\ \ y=2x-x^2,\ \ x=0,\ \ x=2$;

18) $y=\left|1-2\sin^2\frac{3x}{2}\right|,\ \ y=1+\frac{12}{\pi}x,\ \ x=\frac{\pi}{2}$;

19) $y=\left|x^2-4x+3\right|,\ \ x=2,\ \ y=x+3$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $y=\frac{1}{x}$, дотичною до неї в точці (1, 1), прямою $x=3$ та віссю абсцис.

6. У якому відношенні парабола $y^2 = 2x$ ділить площу круга $x^2 + y^2 \le 8$?

7. При якому значенні параметра p пряма $x = p$ поділить площу фігури, обмеженої лініями $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, навпіл?

8. При якому значенні параметра p площа фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + p^2x + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, буде найменшою?

9. Серпоподібна опора, у якої верхній та нижній контури є параболи (рис. 20), виготовлена з 10-міліметрового плоского сталевого листа. Знайти масу цієї опори за формулою $m = \rho S d$, де $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3 — густина сталі, S — площа перерізу опори, d — її товщина.

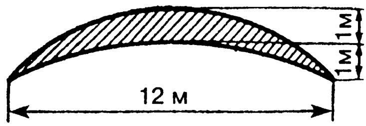


Рис. 20

10. Виразити координати точки $M\,(x, y)$ кола $x^2 + y^2 = 1$ як функції площі кругового сектора OMM', обмеженого дугою MM' кола та променями OM і OM', де O — початок координат, а $M'(x, -y)$.

11•. Сформулювати та розв'язати задачу 10, розглянувши замість кола $x^2 + y^2 = 1$ гіперболу $x^2 - y^2 = 1$.

12. Знайти площі узагальнених криволінійних секторів, що обмежені заданими кривими:

1) $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ (лемніската); 2) $\rho = a\ (1 + \cos\theta)$ (кардіоїда);

3) $\rho = a \sin 3\theta$ (трилисник); 4) $\rho = 3 + 2\cos\theta$;

5)• $\rho = 2\sqrt{3}\, a \cos\theta$, $\rho = 2a \sin\theta$; 6) $\rho = \dfrac{4}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)}$, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$;

7) $\rho = a\cos\theta$, $\rho = 2a\cos\theta$; 8) $\rho = \sin^2 \dfrac{\theta}{2}$ (справа від променя $\theta = \dfrac{\pi}{2}$);

9) $\rho = 2\cos\theta$, $\rho = 1$ (поза кругом $\rho = 1$); 10) $\rho^2 + \theta^2 = 1$;

11) $\rho = a\theta$, $\theta \in [0;\ 2\pi]$; 12) $\rho = 2 - \cos\theta$, $\rho = \cos\theta$;

13) $\rho = a\cos\theta$, $\rho = a(\cos\theta + \sin\theta)$;

14) $\theta = \rho \operatorname{arctg} \rho$, $\theta \in \left[0; \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\right]$; 15) $\theta = 4\rho - \rho^3$, $\theta = 0$.

13. Нехай у формулі площі криволінійної трапеції $S = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ функцію f задано параметрично рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, де $t \in [\alpha; \beta]$. Знайти умови, при яких $S = \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt$.

14. Знайти площу фігури, обмеженої параметрично заданою кривою:

1) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$, $y = 0$;

2)• $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$; 3) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$;

4) $x = \frac{t}{3}\left(3 - t^3\right)$, $y = t^2$; 5) $x = a\sin t$, $y = b\sin 2t$;

6) $x = \frac{t}{3}(6 - t)$, $y = \frac{t^2}{8}(6 - t)$;

7) $x = a(1 + \cos t)\cos t$, $y = a(1 + \cos t)\sin t$;

8) $x = a\cos t$, $y = b\sin^3 t$; 9) $x = a\cos t$, $y = b\sin t\cos^2 t$.

15. Знайти площі необмежених криволінійних трапецій, які утворюються графіками функцій (вважати, що площа дорівнює відповідному невласному інтегралу):

1) $y = \mathrm{e}^{-x}$, $x \in [0; +\infty]$; 2) $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$, $x \in (-\infty; +\infty)$;

3) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, $x \in [-1; 2]$; $x \neq 1$; • 4) $y = \ln x$, $x \in (0; 1]$;

5) $y = x\mathrm{e}^x$, $x \in (-\infty; 0]$; 6) $y = \frac{1}{x^2}$, $x \in (-\infty; -1]$; 7) $y = x\ln^2 x$, $x \in (0; 1]$.

16. Знайти площу фігури, обмеженої даною кривою та її асимптотою:

а)• $y = \frac{1}{1 + x^2}$ (локон Ан'єзі); б) $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ (цисоїда);

в) $xy^2 = 8 - 4x$; г) $\left(1 - x^2\right)y^2 = x^2$, $x > 0$;

д) $x = \cos 2t$, $y = \cos 2t\,\mathrm{tg}\,t$, $t \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

17. Довести, що площа фігури, вміщеної між кривою $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, віссю абсцис, віссю ординат та асимптотою $x = 1$, скінченна і дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

18. Довести, що площа фігури, вміщеної між кривою $y = \frac{1}{x^2}$, віссю абсцис та прямими $x = \pm 1$, нескінченна.

Зразки розв'язування задач

1. 4) Якщо $\underline{M}$ — многокутна фігура, відмінна від порожньої множини, то в $\underline{M}$ обов'язково є точки, для яких або $x \notin \mathbf{Q}$, або $y \notin \mathbf{Q}$. Тому $\underline{M} \subset E$ тоді й тільки тоді, коли $\underline{M}$ — порожня множина, звідки $S(\underline{M}) = 0$, але тоді $A = \{S(\underline{M}) : \underline{M} \subset E$ і $\underline{M}$ — многокутна фігура $\} = \{0\}$ і $S_*(E) = \sup A = 0$.

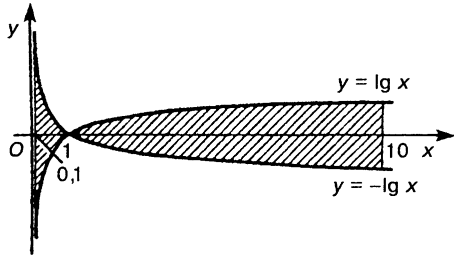


Рис. 21

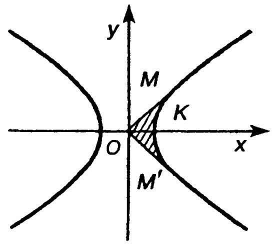


Рис. 22

Якщо многокутна фігура $\overline{M} \supset E$, то $\overline{M} \supset \mathrm{K} = \{(x, y): \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1\} \supset E$, звідки $S(\overline{M}) \ge 1 \ \ \forall \overline{M} \supset E$, $S^*(E) = \inf\{S(\overline{M}): \ \overline{M} \supset E$ і $\overline{M}$ — многокутна фігура$\} = 1$. Отже, $S^*(1) = 1 > 0 = S_*(E)$, тобто це твердження правильне.

4. 16) На рис. 21 зображено фігуру, площу якої треба обчислити. З міркувань симетрії достатньо обчислити площу фігури, розміщеної над віссю Ox. Маємо

$$S_1 = \int\limits_{1/10}^{10} f(x)\,dx, \ \text{ де } f(x) = \begin{cases} -\lg x, & \text{якщо } \frac{1}{10} \le x \le 1, \\ \lg x, & \text{якщо } 1 \le x \le 10. \end{cases}$$

Отже,

$$S_1 = \int\limits_{1/10}^{1} -\lg x dx + \int\limits_{1}^{10} \lg x dx = -\left(x \lg x \Big|_{\frac{1}{10}}^{1} - \int\limits_{1/10}^{1} \lg e \frac{1}{x} x dx \right) + \left(x \lg x \Big|_{1}^{10} - \int\limits_{1}^{10} x \frac{1}{x} \lg e dx \right) =$$

$$= -\left(\frac{1}{10} - \frac{9}{10} \lg e \right) + 10 - 9 \lg e = 9{,}9 - 8{,}1 \lg e.$$

Шукана площа $S = 2S_1 = 19{,}8 - 16{,}2 \lg e$ (кв. од.).

11. Розглянемо гіперболічний сектор (рис. 22). Вважатимемо точку $M\left(x^*, \ y^*\right)$ фіксованою. Тоді рівняння прямої OM матиме вигляд $y = \frac{y^*}{x^*} x$ або $x = \frac{x^*}{y^*} y, y \in \left[0; y^*\right]$. Оскільки рівняння дуги MK має вигляд $x = \sqrt{1 + y^2}, \ \ y \in \left[0; y^*\right]$, то площа фігури OKM визначатиметься за формулою

$$S_1 = \int\limits_0^{y^*} \left(\sqrt{1 + y^2} - \frac{x^*}{y^*} y \right) dy.$$

Через те що

$$\int\limits_0^{y^*} \sqrt{1 + y^2} dy = y\sqrt{1 + y^2} \Big|_0^{y^*} - \int\limits_0^{y^*} \frac{y^2 dx}{\sqrt{1 + y^2}} = y^* \sqrt{1 + y^{*2}} - \int\limits_0^{y^*} \sqrt{1 + y^2} dy + \int\limits_0^{y^*} \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = y^* \sqrt{1 + y^{*2}} -$$

$$- \int\limits_0^{y^*} \sqrt{1 + y^2} dy + \ln\left(y + \sqrt{1 + y^2} \right) \Big|_0^{y^*} = y^* \sqrt{1 + y^{*2}} + \ln\left(y^* + \sqrt{1 + y^{*2}} \right) - \int\limits_0^{y^*} \sqrt{1 + y^2} dy,$$

то

$$\int_0^{y^*} \sqrt{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\left(y^*\sqrt{1+y^{*2}} + \ln\left(y^* + \sqrt{1+y^{*2}} \right)\right),$$

і

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(y^*\sqrt{1+y^{*2}} + \ln\left(y^* + \sqrt{1+y^{*2}} \right)\right) - \frac{1}{2}x^* y^* = \frac{1}{2}\ln\left(y^* + \sqrt{1+y^{*2}} \right).$$

Тоді $S = 2S_1 = \ln\left(y^* + \sqrt{1+y^{*2}} \right)$, звідки $y^* + \sqrt{1+y^{*2}} = e^S$ і $\dfrac{-1}{y^* - \sqrt{1+y^{*2}}} = e^S$ та $y^* + \sqrt{1+y^{*2}} = e^S$ і $y^* - \sqrt{1+y^{*2}} = -e^{-S}$. Отже, $y^* = \dfrac{e^S - e^{-S}}{2}$, $x^* = \sqrt{1+y^{*2}} =$ $= \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{2S} - 2 + e^{-2S} \right)} = \dfrac{e^S + e^{-S}}{2}$.

Таким чином, довільна точка $M\,(x, y)$ на гіперболі $x^2 - y^2 = 1$ має координати

$$x = \frac{e^S + e^{-S}}{2} = \operatorname{ch} S \text{ — косинус гіперболічний } S,$$

$$y = \frac{e^S - e^{-S}}{2} = \operatorname{sh} S \text{ — синус гіперболічний } S.$$

12. 5) Знайдемо координати точки A перетину заданих кіл. Маємо $2\sqrt{3}a\cos\theta = 2a\sin\theta$, $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, отже, $A\left(a\sqrt{3},\ \dfrac{\pi}{3} \right)$. Шукану площу заштриховано на рис. 23. Вона дорівнює сумі площ криволінійних секторів OmA і OnA.

Дуга OmA описується кінцем полярного радіуса ρ більшого кола при зміні полярного кута θ від $\dfrac{\pi}{3}$ до $\dfrac{\pi}{2}$, тому

$$S_{OmA} = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \rho^2 d\theta = 6a^2 \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = 3a^2 \int_{\pi/3}^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta =$$

$$= 3a^2 \left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta \right)\Bigg|_{\pi/3}^{\pi/2} = 3a^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

Дуга OnA описується кінцем полярного радіуса ρ меншого кола при зміні полярного кута θ від 0 до $\dfrac{\pi}{3}$, отже,

$$S_{OnA} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \rho^2 d\theta = 2a^2 \int_0^{\pi/3} \sin^2\theta d\theta = a^2 \int_0^{\pi/3} (1 - \cos 2\theta)\, d\theta = a^2 \left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta \right)\Bigg|_0^{\pi/3} = a^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

І остаточно

$$S = S_{OmA} + S_{OnA} = a^2 \left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} \right) \text{ (кв.од.).}$$

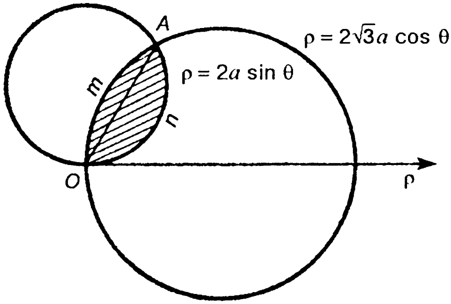


Рис. 23

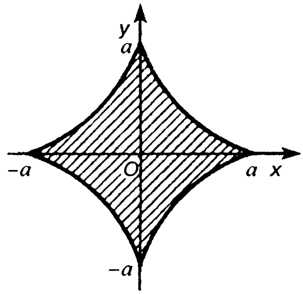


Рис. 24

14. 2) Внаслідок симетрії фігури (рис. 24) маємо

$$S = 4\int\limits_{\pi/2}^{0} a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt = 12a^2\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^4 t\cos^2 tdt =$$

$$= 12a^2\left(\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^4 tdt - \int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^6 tdt\right) = 12a^2\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{8}\pi a^2 (\text{кв. од.}).$$

При обчисленні інтегралів використано результат задачі 13. 2) § 9.5.

16. а) Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2} = 0$, то асимптотою заданої кривої є вісь абсцис. Внаслідок симетрії фігури відносно осі Oy (рис. 25) дістанемо

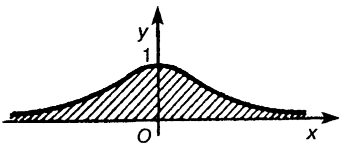


Рис. 25

$$S = 2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{a\to+\infty}\int\limits_{0}^{a}\frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{a\to+\infty}\operatorname{arctg} x\Big|_{0}^{a} = \pi \text{ (кв. од.)}.$$

§ 10.2. Обчислення об'ємів просторових фігур

Просторовою фігурою називають будь-яку множину точок тривимірного простору. *Многогранною фігурою* називають будь-яку просторову фігуру, яка є об'єднанням скінченної кількості пірамід. Об'єм многогранної фігури M позначатимемо через $V(M)$. Порожню множину M вважають пірамідою з об'ємом $V(M) = 0$. Просторову фігуру називають *обмеженою*, якщо вона міститься в деякій многогранній фігурі.

Нехай задано просторову обмежену фігуру E та $|E|_* = \{V(\underline{M}):\ \underline{M}\subset E,$ $\underline{M}$ — многогранна фігура$\}$, а $|E|^* = \{V(\overline{M}):\ \overline{M}\supset E,\ \overline{M}$ — многогранна фігура$\}$. Тоді існує $\sup|E|_* = V_*(E)$ — внутрішній об'єм фігури E і $\inf|E|^* = V^*(E)$ — зовнішній об'єм фігури E.

Просторову фігуру E називають *кубовною*, якщо $V_*(E) = V^*(E) = V(E)$. Число $V(E)$ називають *об'ємом фігури* E.

Критерій кубовності. Просторова фігура E кубовна тоді й тільки тоді, коли існують послідовності многогранних фігур $(\underline{M}_n)$ і $(\overline{M}_n)$ такі, що $\underline{M}_n \subset E \subset \overline{M}_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} V(\underline{M}_n) = \lim\limits_{n\to\infty} V(\overline{M}_n) = V(E)$ — об'єм фігури E.

Критерій залишається справедливим і для випадку кубовних фігур $\underline{M}_n$ та $\overline{M}_n$.

Нехай кубовна фігура E проекціюється на вісь Ox у відрізок $[a;\ b]$, а кожна площина $x = c$, перпендикулярна до осі Ox, у перерізі з фігурою E дає квадровну фігуру, площа якої $S(c) = S(x)$, де $S(x)$ — неперервна функція на відрізку $[a;\ b]$. Тоді

$$V(E) = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Тілом обертання називають просторову фігуру, яку можна дістати обертанням деякої криволінійної трапеції навколо осі Ox. Кожне тіло обертання є кубовною фігурою. Об'єм тіла, яке дістаємо при обертанні криволінійної трапеції, обмеженої прямими $x = a$, $x = b$, кривою $y = f(x)$ та віссю Ox, обчислюють за формулою

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) кожна плоска обмежена фігура E є кубовною фігурою, об'єм якої $V(E) = 0$;

2) довільна пряма є кубовною фігурою;

3) площина є кубовною фігурою;

4) об'єднання, переріз та різниця многогранних фігур — многогранні фігури;

5) кожна обмежена просторова фігура E має зовнішній $V^*(E)$ та внутрішній $V_*(E)$ об'єми, причому $V^*(E) \geq V_*(E)$;

6) якщо E — тіло обертання, то E — кубовна фігура;

7) твердження, обернене до 6), є правильним;

8) якщо для двох кубовних фігур E_1 і E_2 довільні перерізи площиною, перпендикулярною до осі Ox, мають однакову площу, то $V(E_1) = V(E_2)$;

9) твердження, обернене до 8), є правильним?

2. Виконати вказані завдання усно.

1) Охарактеризувати тіло, об'єм якого обчислюється за формулою:

а) $\pi\int\limits_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx$; б) $\pi a^2\int\limits_{-b}^{b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy$; в) $\pi b^2\int\limits_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$;

г) $\pi\int\limits_{0}^{4}xdx$; д) $\pi\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2 xdx$; е) $\pi\int\limits_{0}^{1}\left(x-x^4\right)dx$.

2) Знайти об'єм купола обсерваторії, що має форму параболоїда обертання, висота якого $h=5$ м.

3. Знайти зовнішній та внутрішній об'єм даних фігур:

1) E — фіксований многогранник;

2) E — довільна обмежена плоска фігура;

3) $E=\{(x,\ y,\ z):\ x\in[0;\ 1]\cap\mathbf{Q},\ y\in[0;\ 1]\cap\mathbf{Q},\ z\in[0;\ 1]\cap\mathbf{Q}\}$;

4) $E=\left\{(x,\ y,\ z):\ x=\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}),\ y\in[0;\ 1],\ z\in[0;\ 1]\right\}$;

5) $E=\left\{(x,\ y,\ z):\ x^2+y^2+z^2=1\right\}$;

6)• $E=\{(x,\ y,\ z):\ z\in[0;\ 1],\ x,\ y\in[0;\ 1]$, якщо $z\in\mathbf{Q}$, та $x,\ y\in[-1;\ 0]$, якщо $z\notin\mathbf{Q}\}$.

4. Знайти об'єм кубовної фігури E, основа якої E_1 лежить у площині Oxy, а перерізом фігури E площиною, перпендикулярною до осі Ox, є фігура E_x:

1) $E_1=\{(x,\ y):\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$, E_x — квадрат;

2) $E_1=\{(x,\ y):\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$, E_x — півкруг;

3) $E_1=\left\{(x,\ y):\ x^2+y^2\le 1\right\}$, E_x — квадрат.

5. Довести, що об'єм параболоїда обертання, який має з даним циліндром спільну основу та висоту, дорівнює половині об'єму циліндра.

6. Знайти об'єм зрізаної піраміди з висотою h та площами основ S і s.

7•. Знайти об'єм зрізаного конуса з висотою h, основами якого є еліпси з півосями A, B та a, b.

8. Якщо кубовну фігуру E перетнути площиною, перпендикулярною до осі Ox, то переріз матиме площу $S(x)=Ax^2+Bx+C\quad \forall x\in[a;\ b]$, де A, B, C — сталі. Довести, що $V(E)=\frac{H}{6}\left(S(a)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)+S(b)\right)$, де $H=b-a$ (формула Сімпсона).

9. Знайти об'єм тіла, яке утворюється при обертанні навколо осі Ox фігури, обмеженої заданими лініями:

1) $y=1-x^2,\ y=0,\ x=0$; 2) $x=1-y^2,\ y=0,\ x=0$;

3) $y=b\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3},\ y=0,\ x=a$ (нейлоїд); 4) $y=2x-x^2,\ y=0$;

5) $y=\sin x,\ y=0,\ x\in[0;\pi]$; 6) $y=\frac{4}{x},\ y=0,\ x=1,\ x=4$;

7)•. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $x\in[-b;b]$ (катеноїд); 8) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$;

9) $y^2=4x$, $y=x$; 10) $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2-x}$, $y=0$;

11) $y=2^x$, $y=4^x$, $x=1$; 12) $y=2^{-|x-1|}+1$, $x=1$, $y=x+\frac{3}{2}$;

13) $y=x^2-2x+4$, $y=4+x$; 14) $y=\operatorname{tg}x$, $y=\operatorname{ctg}x$, $x=\frac{\pi}{6}$;

15) $x^2+y^2=16$, $x=1$, $x=3$, $y=0$;

16) $x^2+(y-b)^2=a^2$, $b\ge a$ (тор);

17) $y=x^2+1$, $x=0$, та дотичною до неї у точці (1, 2).

10. Довести, що об'єм посудини, яка утворюється при обертанні кривої $y=r+b\sin\frac{2\pi}{h}x$, $0\le x\le h$, навколо осі Ox, дорівнює $\pi r^2h+\frac{1}{2}\pi b^2h$.

11. Із нахиленої циліндричної цистерни радіусом a та висотою h виливається через край рідина. Довести, що в той момент, коли оголиться половина дна, об'єм залишеної рідини дорівнюватиме $\frac{2}{3}a^2h$.

12. Нехай криволінійна трапеція, що визначається кривою $y=f(x)$, $x\in[a;b]$, обертається навколо осі Oy. Довести, що об'єм тіла обертання, яке при цьому утворюється, можна обчислити за формулою $V=2\pi\int\limits_a^b xf(x)dx$.

13•. Нехай криволінійний сектор, що визначається кривою $\rho=\rho(\theta)$, $\theta\in[\alpha;\beta]$, де $0\le\alpha<\beta\le\pi$, обертається навколо полярної осі. Довести, що об'єм тіла обертання, що при цьому утворюється, можна обчислити за формулою $V=\frac{2}{3}\pi\int\limits_\alpha^\beta \rho^3(\theta)\sin\theta d\theta$.

14. Знайти об'єм тіла, яке утворюється при обертанні фігури, обмеженої даними кривими:

1) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in[0;2\pi]$: а) навколо осі Ox; б) навколо осі Oy; в) навколо прямої $y=2a$;

2)• $\rho=a(1+\cos\theta)$, $\theta\in[0;2\pi]$, навколо полярної осі;

3) $\rho=a\theta$, $\theta\in[0;\pi]$, навколо полярної осі;

4) $\rho=a\sqrt{2\sin2\theta}$, $\rho=a$, навколо полярної осі;

5) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$: а) навколо осі Ox; б) навколо осі Oy.

15. Знайти об'єм тіла, що утворюється при обертанні фігури, обмеженої даною кривою (вважати, що об'єм дорівнює відповідному невласному інтегралу):

1) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, навколо її асимптоти;

2) $y = e^{-x}$, $y = 0$, $0 \le x < +\infty$: а) навколо осі Ox; б)• навколо осі Oy;

3) $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$ (цисоїда), навколо її асимптоти $x = 2a$, $a > 0$;

4) $y = 2\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$, $x \ge 1$, навколо осі Ox;

5) $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $y = 0$, навколо осі Ox.

Зразки розв'язування задач

3. 6) Якщо многогранна фігура відмінна від порожньої множини та плоскої фігури, то вона містить точки (x, y, z), в одних з яких $z \in \mathbf{Q}$, а в інших $z \notin \mathbf{Q}$. Така многогранна фігура не може міститися в E. Тому $|E|_* = \{V(\underline{M}) : \underline{M} \subset E,\ \underline{M}$ — многогранна фігура$\} = \{0\}$. Отже, $\sup|E|_* = 0 = V_*(E)$ — внутрішній об'єм E.

Якщо многогранна фігура $\overline{M} \supset E$, то вона містить у собі два куби: $K_1 = \{(x, y, z) : 0 \le x,\ y,\ z \le 1\}$ і $K_2 = \{(x, y, z) : -1 \le x,\ y \le 0,\ 0 \le z \le 1\}$. Таким чином, $V(\overline{M}) \ge V(K_1) + V(K_2)$, $V^*(E) = 2$.

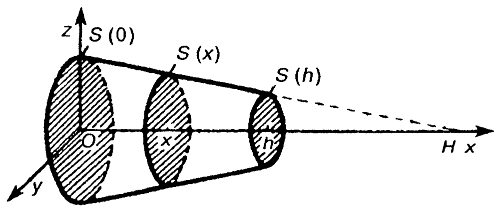


Рис. 26

7. Нехай нижня основа зрізаного конуса лежить у площині Ozy (рис. 26). Тоді, враховуючи властивість площ паралельних перерізів конуса, матимемо

$$\frac{S(h)}{S(0)} = \frac{(H-h)^2}{H^2}, \quad S(h) = \pi ab, \quad S(0) = \pi AB,$$

звідки

$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{AB}} = \frac{H-h}{H}, \quad H = \frac{h\sqrt{AB}}{\sqrt{AB}-\sqrt{ab}}.$$

Аналогічно

$$\frac{S(x)}{S(0)} = \frac{(H-x)^2}{H^2}, \quad S(x) = \frac{\pi AB}{H^2}(H-x)^2.$$

Тоді

$$V = \int_0^h \frac{\pi AB}{H^2}(H-x)^2\,dx = -\frac{\pi AB}{3H^2}(H-x)^3\Big|_0^h = \frac{\pi AB}{3H^2}\left(H^3 - (H-h)^3\right).$$

Оскільки

$$H-h=\frac{h\sqrt{AB}}{\sqrt{AB}-\sqrt{ab}}-h=\frac{h\sqrt{ab}}{\sqrt{AB}-\sqrt{ab}},$$

то

$$V=\frac{\pi AB\left(\sqrt{AB}-\sqrt{ab}\right)^2h^3}{3h^2AB}\left(\frac{\left(\sqrt{AB}\right)^3}{\left(\sqrt{AB}-\sqrt{ab}\right)^3}-\frac{\left(\sqrt{ab}\right)^3}{\left(\sqrt{AB}-\sqrt{ab}\right)^3}\right)=$$

$$=\frac{\pi h}{3}\left(AB+\sqrt{ABab}+ab\right).$$

Враховуючи, що $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}$, остаточно дістанемо

$$V=\frac{\pi h}{3}(AB+Ab+ab)=\frac{\pi h}{3}(AB+Ba+ab).$$

9. 7) Шукане тіло обертання зображено на рис. 27. Унаслідок симетрії фігури маємо

$$V=2\pi\int_0^b y^2dx=\frac{\pi a^2}{2}\int_0^b\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2dx=\frac{\pi a^2}{2}\int_0^b\left(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)dx=$$

$$=\frac{\pi a^2}{2}\left(\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right)\Bigg|_0^b=\frac{\pi a^3}{4}\left(e^{\frac{2b}{a}}-e^{-\frac{2b}{a}}\right)+\pi a^2b \text{ (куб. од.)}.$$

13. Для простоти вважатимемо, що сектор має вигляд, зображений на рис. 28. Тоді задане тіло обертання є різницею тіл обертання, що відповідають криволінійним трапеціям $OABD$ та OBD, причому першу з них розглядатимемо як об'єднання OAC і $CABD$.

Таким чином, $V=V_1+V_2-V_3$, де

$$V_1=\frac{\pi}{3}\rho^2(\beta)\sin^2\beta\rho(\beta)\cos\beta=\frac{\pi}{3}\rho^3(\beta)\sin^2\beta\cos\beta,$$

$$V_3=\frac{\pi}{3}\rho^2(\alpha)\sin^2\alpha\rho(\alpha)\cos\alpha=\frac{\pi}{3}\rho^3(\alpha)\sin^2\alpha\cos\alpha,$$

$$V_2=\pi\int_{\rho(\beta)\cos\beta}^{\rho(\alpha)\sin\alpha}y^2(x)\,dx= \quad \left|\begin{array}{l}x=\rho(\theta)\cos\theta,\ y=\rho(\theta)\sin\theta,\\ dx=(\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta)d\theta\end{array}\right|$$

$$=\pi\int_\beta^\alpha\rho^2(\theta)\sin^2\theta d(\rho(\theta)\cos\theta)=\pi\int_\beta^\alpha\rho^2(\theta)\left(1-\cos^2\theta\right)d(\rho(\theta)\cos\theta)=$$

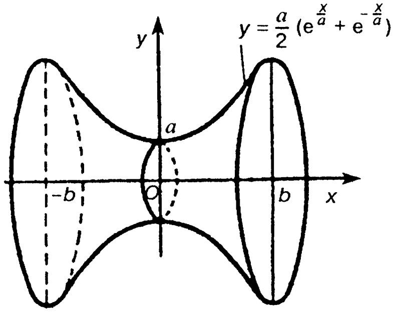


Рис. 27

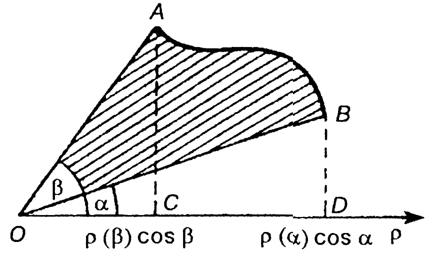


Рис. 28

$$=\pi\int_{\beta}^{\alpha}\rho^2(\theta)\cos\theta d\rho-\pi\int_{\beta}^{\alpha}\rho^3(\theta)\sin\theta d\theta-\pi\int_{\beta}^{\alpha}(\rho(\theta)\cos\theta)^2 d(\rho(\theta)\cos\theta)=$$

$$=\pi\left(\cos\theta\frac{\rho^3(\theta)}{3}\Bigg|_{\beta}^{\alpha}+\frac{1}{3}\int_{\beta}^{\alpha}\frac{1}{3}\rho^3(\theta)\sin\theta d\theta\right)+\pi\int_{\alpha}^{\beta}\rho^3(\theta)\sin\theta d\theta-$$

$$-\frac{\pi}{3}\rho^3(\theta)\cos^3\theta\Bigg|_{\beta}^{\alpha}=\frac{\pi}{3}\left(\rho^3(\alpha)\cos\alpha-\rho^3(\beta)\cos\beta\right)+\frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^3(\theta)\sin\theta d\theta-$$

$$-\frac{\pi}{3}\left(\rho^3(\alpha)\cos^3\alpha-\rho^3(\beta)\cos^3\beta\right)=\frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^3(\theta)\sin\theta d\theta+\frac{\pi}{3}\left(\rho^3(\alpha)\cos\alpha-\right.$$

$$\left.-\rho^3(\beta)\cos\beta\right)-\frac{\pi}{3}\left(\rho^3(\alpha)\cos\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)-\rho^3(\beta)\cos\beta\left(1-\sin^2\beta\right)\right)=$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^3(\theta)\sin\theta d\theta+\frac{\pi}{3}\left(\rho^3(\alpha)\cos\alpha\sin^2\alpha-\rho^3(\beta)\cos\beta\sin^2\beta\right).$$

І остаточно

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^3(\theta)\sin\theta d\theta \quad \text{(куб. од.)}.$$

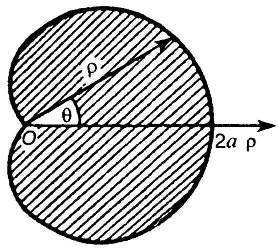


Рис. 29

14. 2) Скористаємось формулою із задачі 13. Полярна вісь ділить плоску фігуру $0\le\rho\le a(1+\cos\theta), 0\le\theta\le 2\pi$ (рис. 29) на дві рівні частини, тому інтегруємо від 0 до π:

$$V=\frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3\sin\theta d\theta=\frac{2\pi a^3}{3}\int_{\pi}^{0}(1+\cos\theta)^3 d(1+\cos\theta)=$$

$$=\frac{\pi a^3}{6}(1+\cos\theta)^4\Bigg|_{\pi}^{0}=\frac{8}{3}\pi a^3 \quad \text{(куб. од.)}.$$

15. 2), б) Скористаємось формулою, аналогічною формулі із задачі 12 (спробуйте вивести її самостійно).

Дістанемо

$$V=2\pi\int_0^{+\infty}xydx=2\pi\lim_{a\to+\infty}\int_0^a xe^{-x}dx= \quad \left|\begin{matrix} u=x, & du=dx \\ dv=e^{-x}dx, & v=-e^{-x}\end{matrix}\right|$$

$$=2\pi\lim_{a\to+\infty}\left(-xe^{-x}+e^{-x}\right)\Bigg|_0^a=2\pi\lim_{a\to+\infty}\left(-ae^{-a}+e^{-a}-1\right)=2\pi \text{ (куб. од.)}.$$

§10.3. Обчислення довжини дуги кривої

Неперервною плоскою кривою називають множину $\Gamma=\{(x,y): x=\varphi(t), y=\psi(t), t\in\langle\alpha;\beta\rangle\}$, де φ і ψ — неперервні функції на проміжку $\langle\alpha;\beta\rangle$. При цьому кажуть, що неперервну криву Γ задано параметричним рівнянням

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad t\in\langle\alpha;\beta\rangle,$$

яке можна записати в комплексній формі

$$z=\varphi(t)+i\psi(t),\ \ t\in\langle\alpha;\beta\rangle.$$

Якщо $x=\varphi(t)\equiv t$, то параметричне рівняння кривої **Γ** рівносильне її явному рівнянню $y=\psi(x),\ \ x\in\langle\alpha;\beta\rangle$.

Частину неперервної кривої **Γ**, яка відповідає відрізку $[a;b]\subset\langle\alpha;\beta\rangle$, називають *дугою кривої* або просто *дугою*. Точки $A(\varphi(a),\psi(a))$ і $B(\varphi(b),\psi(b))$ називають відповідно *початковою* та *кінцевою точками дуги*, саму дугу позначають $\cup AB$, а рівняння її має вигляд

$$x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\ \ t\in[a;b], \tag{1}$$

або у комплексній формі

$$z=\varphi(t)+i\psi(t),\ \ t\in[a;b].$$

Дугу AB, задану рівнянням (1), називають *кривою Жордана* або простою *дугою*, якщо $\forall t_1,\ t_2\in[a;b]$ рівність $(\varphi(t_1),\psi(t_1))=(\varphi(t_2),\psi(t_2))$ можлива лише тоді, коли $t_1=a$, а $t_2=b$. В останньому випадку дугу AB називають *замкненою дугою (кривою)* або *контуром*.

Неперервну криву називають *гладкою*, якщо функції φ і ψ мають похідні φ' і ψ', неперервні на проміжку $\langle\alpha;\beta\rangle$, причому $\varphi'^2+\psi'^2>0$. Якщо неперервну криву дістають із скінченного числа гладких кривих, то її називають *кусково-гладкою*.

Нехай просту дугу AB задано рівнянням (1). Для довільного (T)-розбиття відрізка $[a;b]$ точками t_k, $k=\overline{0,n}$, введемо позначення $M_k(\varphi(t_k),\ \psi(t_k))$, $\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$, $\lambda(T)=\max\limits_{0\le k\le n-1}\Delta t_k$.

Довжиною дуги AB називають число $l(\cup AB)=\sup\limits_{(T)} l(T)$, де $l(T)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}M_kM_{k+1}$ — довжина ламаної з вершинами у точках M_k заданої дуги AB (рис. 30). Якщо $l(\cup AB)<\infty$, то дугу AB називають *спрямлюваною*.

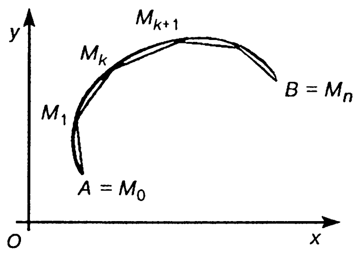


Рис. 30

Якщо функції φ і ψ з рівняння (1) дуги AB мають на відрізку $[a;b]$ неперервні похідні, то AB — *спрямлювана дуга* і

$$l(\cup AB)=\int\limits_a^b\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

Зокрема, якщо дугу AB задано явним рівнянням $y=f(x)$, $x\in[a;b]$, та f' неперервна на відрізку $[a;b]$, то

$$l(\cup AB)=\int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Якщо дугу AB задано рівнянням у полярних координатах $\rho=\rho(\theta)$, $\theta\in[\alpha;\beta]$, і похідна ρ' є неперервною на відрізку $[\alpha;\ \beta]$, то

$$l(\cup AB)=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta.$$

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) кожна дуга — неперервна крива;

2) кожна неперервна крива — дуга;

3) кожне явне рівняння неперервної кривої $\mathbf{\Gamma}$ або рівняння у полярних координатах можна перетворити у параметричне рівняння цієї кривої;

4) якщо різним значенням параметра відповідають різні точки дуги кривої $\mathbf{\Gamma}$, то ця дуга проста;

5) твердження, обернене до 4), є правильним;

6) пряма — спрямлювана крива;

7) коло — проста крива;

8)• якщо на простій дузі AB зафіксовано точку C, то дуга AB буде спрямлюваною тоді й тільки тоді, коли спрямлювані дуги AC і CB;

9) графік неперервної й ніде не диференційовної на відрізку $[a;b]$ функції є неспрямлюваною кривою;

10) $l(\cup AB)$ — довжина простої дуги AB тоді й тільки тоді, коли $l(\cup AB)=\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} l(T)$, де $l(T)$ — довжина ламаної, а $\lambda(T)$ — дрібність роз-

$\lambda(T)\to 0$

биття (T) ;

11) існує диференційовна на відрізку $[a;\ b]$ функція f, яка немонотонна на кожному інтервалі цього відрізка, і її графік є спрямлюваною кривою?

2. Користуючись означенням довжини дуги, довести, що проста дуга AB спрямлювана, якщо функції φ і ψ з рівняння (1) дуги AB мають на відрізку $[a;\ b]$ неперервні похідні. При цьому

$$\sqrt{m_{\varphi'}+m_{\psi'}}\,(b-a)\le l(\cup AB)\le\sqrt{M_{\varphi'}+M_{\psi'}}\,(b-a),$$

де

$$m_{\varphi'}=\min_{[a;b]}\varphi'^2(x),\quad m_{\psi'}=\min_{[a;b]}\psi'^2(x),$$

$$M_{\varphi'}=\max_{[a;b]}\varphi'^2(x),\quad M_{\psi'}=\max_{[a;b]}\psi'^2(x).$$

3•. Нехай виконано умови задачі 2, t — довільна фіксована точка з відрізка $[a; b]$, а $C(\varphi(t), \psi(t))$. Довести, що $l(\cup AC)=l(t)$, $l(t)$ — диференційовна функція на відрізку $[a; b]$ і $dl(t)=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \quad \forall t\in[a; b]$.

4. Визначити, чи будуть дані неперервні криві простими дугами:

1) $x=t,\ \ y=0,\ \ t\in[a;b]$; 2) $x=2\cos t,\ \ y=0,\ \ t\in[0;3\pi]$;

3) $x=0,\ \ y=2\cos 3t,\ \ t\in\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$; 4) $x=0,\ \ y=2\cos 3t,\ \ t\in[0;2\pi]$;

5) $x=\cos t,\ \ y=\sin t,\ \ t\in[0;2\pi]$; 6) $x=\cos t,\ \ y=\sin t,\ \ t\in[0;3\pi]$;

7) $y=\sqrt{1-x^2}$; 8) $x=\sin 3t\cos t,\ \ y=\sin 3t\sin t,\ \ t\in[0;2\pi]$.

5. Знайти довжину даної дуги кривої:

1) дуги, що відтинається від кривої $y=\dfrac{x^2}{2}-1$ віссю Ox;

2) дуги, що відтинається від кривої $y^2=x^3$ прямою $x=\dfrac{4}{3}$;

3) $y=\arcsin e^{-x},\ \ x\in[0;1]$; 4) $y=\ln\sin x,\ \ x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{3}\right]$;

5) $y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$; 6) $y=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{x}\sqrt{\cos t}\,dt$;

7) $\rho=a\cos^3\dfrac{\theta}{3}$; 8)• $x=a\cos^3 t,\ \ y=a\sin^3 t$ (астроїда);

9) $x=R(\cos t+t\sin t),\ \ y=R(\sin t-t\cos t),\ \ t\in[0;\pi]$;

10) $\rho=a(1+\cos\theta)$ (кардіоїда);

11) $x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t),\ \ t\in[0;8\pi]$;

12) $r=a\theta,\ \ \theta\in[0;2\pi]$ (спіраль Архімеда);

13) $\rho=a\sin^3\dfrac{\theta}{3}$; 14) $\theta=\sqrt{\rho},\ \ 0\le\rho\le 5$.

6. При яких значеннях показника α, $\alpha\ne 0$, довжина дуги кривої $y=ax^\alpha$ визначається через елементарні функції?

7. Знайти периметр фігури, обмеженої кривими:

1) $x^2=(y+1)^3,\ \ y=4$; 2)• $y^3=x^2,\ \ y=\sqrt{2-x^2}$; 3) $y^2=2\rho x,\ \ 2x=p$.

8. Довести, що довжина еліпса $x=a\cos t,\ \ y=b\sin t$ дорівнює довжині синусоїди $y=c\sin\dfrac{x}{b},\ \ 0\le x\le\dfrac{2\pi}{b},\ \ c=\sqrt{a^2-b^2}$.

9. Знайти довжину тієї частини логарифмічної спіралі $\rho=e^{a\theta}$, яка вміщена всередині кола $\rho=1$ (задача Торрічеллі).

10. Парабола $4ay = x^2$ «котиться» вздовж осі Ox. Довести, що фокус параболи описує ланцюгову лінію.

11. Якщо кардіоїда $\rho = a(1-\sin\theta)$ «котиться» по циклоїді $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, то її вістря описує пряму лінію. Довести це.

Зразки розв'язування задач

1.8) Нехай дуга AB спрямлювана і задана рівнянням $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in[a;b]$. Зафіксуємо на дузі AB точку C, якій відповідає параметр $t_0^*\in[a;b]$, $C\left(\varphi\left(t_0^*\right),\ \psi\left(t_0^*\right)\right)$. Тоді будь-яке ($T$)-розбиття відрізка $[a;c]$ точками t_k, $k=\overline{0,\,n}$, задає (T')-розбиття відрізка $[a;b]$, причому

$$l_{\cup AC}(T)=\sum_{k=0}^{n-1}M_kM_{k+1}\le l_{\cup AB}(T')\le l(\cup AB)<+\infty,$$

тобто AC — спрямлювана дуга. Так само доводиться спрямлюваність дуги CB.

Припустимо тепер, що дуги AC і CB спрямлювані. Розглянемо довільне (T)-розбиття відрізка $[a;\ b]$ точками t_k, $k=\overline{0,n}$. Нехай $C\left(\varphi\left(t^*\right),\ \psi\left(t^*\right)\right)$ і $t^*\in\left[t_{k^*};\ t_{k^*+1}\right]$.
Тоді

$$l_{\cup AB}(T)=\sum_{k=0}^{n-1}M_kM_{k+1}=\sum_{k=0}^{k^*-1}M_kM_{k+1}+M_{k^*}M_{k^*+1}+\sum_{k=k^*+1}^{n-1}M_kM_{k+1}\le$$

$$\le\left(\sum_{k=0}^{k^*-1}M_kM_{k+1}+M_{k^*}C)+(CM_{k^*+1}+\sum_{k=k^*+1}^{n-1}M_kM_{k+1}\right)=l_{\cup AC}(T')+$$

$$+l_{\cup CB}(T'')\le l(\cup AC)+l(\cup CB),$$

тобто AB — спрямлювана дуга, і $l(\cup AB)\le l(\cup AC)+l(\cup CB)$.

Крім того, розбиття (T') і (T'') відрізків $\left[a;\ t^*\right]$ і $\left[t^*;\ b\right]$ можна вибрати так, щоб $l_{\cup AC}(T')>l(\cup AC)-\frac{\varepsilon}{2}$, а $l_{\cup CB}(T'')>l(\cup CB)-\frac{\varepsilon}{2}$. Тоді ці два розбиття визначатимуть (T)-розбиття відрізка $[a;b]$, для якого

$$l(\cup AC)+l(\cup CB)-\varepsilon<l_{\cup AC}(T')+l_{\cup CB}(T'')=l(T)<l(\cup AB),$$

звідки $l(\cup AC)+l(\cup CB)\le l(\cup AB)$ і $l(\cup AB)\le l(\cup AC)+l(\cup CB)$, тобто $l(\cup AC)+$ $+l(\cup CB)=l(\cup AB)$. Отже, розглядуване твердження правильне. Його називають адитивною властивістю спрямлюваної дуги.

3. Нехай $t_0\in[a;\ b]$ — довільна фіксована точка, якій на дузі AB відповідає точка M_0. Зафіксуємо $\Delta t\ne 0$, $t_0+\Delta t\in[a;\ b]$. Припустимо, що $\Delta t>0$ і параметру $t_0+\Delta t$ на дузі AB відповідає точка M. Тоді

$$l(\cup M_0M)=l(\cup AM)-l(\cup AM_0)=l(t_0+\Delta t)-l(t_0).$$

Враховуючи твердження задачі 2 та другу теорему Вейєрштрасса, маємо

$$\sqrt{\varphi'^2\left(t_0^*\right)+\psi'^2\left(t_1^*\right)}\,\Delta t \le l(\cup M_0M) = l(t_0+\Delta t)-l(t_0) \le \sqrt{\varphi'^2\left(t_0^{**}\right)+\psi'^2\left(t_1^{**}\right)}\,\Delta t,$$

де

$$\varphi'^2\left(t_0^*\right) = \min_{[t_0;\, t_0+\Delta t]} \varphi'^2(t), \quad \psi'^2\left(t_1^*\right) = \min_{[t_0;\, t_0+\Delta t]} \psi'^2(t),$$

$$\varphi'^2\left(t_0^{**}\right) = \max_{[t_0;\, t_0+\Delta t]} \varphi'^2(t), \quad \psi'^2\left(t_1^{**}\right) = \max_{[t_0;\, t_0+\Delta t]} \psi'^2(t).$$

Якщо $\Delta t \to 0$, то через неперервність $\varphi'^2\left(t_0^*\right)$ і $\varphi'^2\left(t_0^{**}\right)$ прямують до $\varphi'^2(t)$, а $\psi'^2\left(t_1^*\right)$ і $\psi'^2\left(t_1^{**}\right)$ прямують до $\psi'^2(t)$, і за властивістю границі проміжної змінної дістаємо

$$\frac{l(t_0+\Delta t)-l(t_0)}{\Delta t} \to \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}, \ \Delta t \to 0,$$

тобто

$$l'(t) = \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}, \ \text{і} \ dl(t) = \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

5. 8) Криву задано параметричним рівнянням. Знайдемо похідні: $x_t' = -3a\cos^2 t\sin t$, $y_t' = 3a\sin^2 t\cos t$. Тоді $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t} = \frac{3}{2}a|\sin 2t|$. Враховуючи симетрію кривої (рис. 31), дістаємо

$$l = 4\cdot\frac{3}{2}a\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt = 6a.$$

7. 2) Фігуру, периметр якої треба обчислити, зображено на рис. 32. Враховуючи симетрію, маємо

$$l = 2\left(l(\cup OA) + l(\cup AC)\right).$$

Для відшукання довжини дуг OA і AC скористаємось формулами

$$l(\cup OA) = \int_0^1 \sqrt{1+x_y'^2}\,dy, \ l(\cup AC) = \int_0^1 \sqrt{1+y_x'^2}\,dx.$$

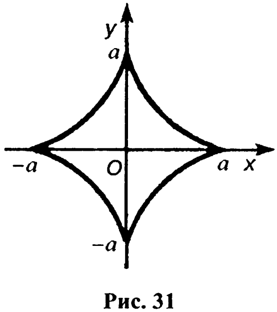


Рис. 31

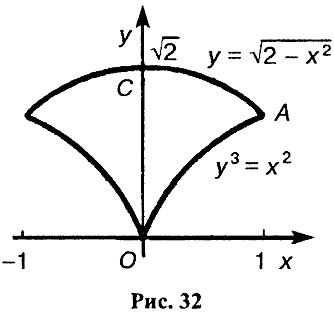


Рис. 32

Знайдемо необхідні похідні і підставимо в ці формули. Дістанемо

$$l(\cup OA)=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}y}\,dy=\frac{4}{9}\int_0^1\left(1+\frac{9}{4}y\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+\frac{9}{4}y\right)=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}y\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8}-1\right),$$

$$l(\cup AC)=\int_0^1\sqrt{1+\frac{x^2}{2-x^2}}\,dx=\sqrt{2}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}=\sqrt{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^1=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Тоді

$$l=2\left(\frac{13\sqrt{13}-8}{27}+\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right).$$

§ 10.4. Обчислення площі поверхні

Поверхнею обертання називають просторову фігуру, яка утворюється обертанням навколо заданої прямої деякої спрямлюваної простої дуги.

Нехай спрямлювану дугу AB розбито точками $M_k(x_k, y_k)$, $k=\overline{0,n}$, на дуги M_kM_{k+1}, $k=\overline{0,n-1}$, $\Delta l_k=l(\cup M_kM_{k+1})$, $\lambda(T)=\max\limits_{0\le k\le n-1}\Delta l_k$ (рис. 33).

Площею поверхні, яка утворюється при обертанні дуги AB навколо осі Ox, називають скінченну границю

$$P=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\pi(y_k+y_{k+1})M_kM_{k+1}.$$

Якщо рівняння дуги AB має вигляд $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in[a;b]$, де функції φ' і ψ' неперервні на відрізку $[a;b]$, то відповідна площа поверхні обертання існує і обчислюється за формулою

$$P=2\pi\int_a^b|\psi(t)|\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

Зокрема, якщо дугу AB задано явним рівнянням $y=f(x)$, $x\in[a;b]$, де функція f' неперервна на відрізку $[a;b]$, то

$$P=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Якщо дугу AB задано у полярних координатах рівнянням $\rho=\rho(\theta)$, $\theta\in[a;b]$, де функція ρ' неперервна на відрізку $[a;b]$, то

$$P=2\pi\int_a^b|\rho(\theta)\sin\theta|\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta.$$

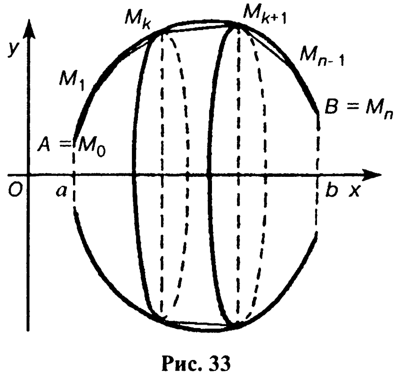


Рис. 33

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) довільна сфера є поверхнею обертання;

2) бічні поверхні конуса, зрізаного конуса та циліндра є поверхнями обертання;

3) повна поверхня конуса є поверхнею обертання;

4) за означенням площа поверхні обертання є границею деякої інтегральної суми;

5) якщо дуга AB гладка, то площа відповідної поверхні обертання дорівнює границі деякої інтегральної суми?

2•. Вивести формули для обчислення площі поверхні, яка утворюється при обертанні дуги AB навколо осі Oy.

3. Обчислити площу поверхні, що утворюється при обертанні дуги кривої навколо вказаної осі:

1) $y = x^3,\ x \in [0;1],\ Ox$; 2) $y^2 = 4ax,\ x \in [0;3a],\ Ox$;

3) $y = 2x,\ x \in [0;2],\ Ox,\ Oy$; 4) $9y^2 = x(3-x)^2,\ x \in [0;3],\ Ox$;

5) $y = x\sqrt{\dfrac{x}{a}},\ x \in [0;a],\ Ox$; 6) $y = a\cos\dfrac{\pi x}{2b},\ |x| \le b,\ Ox$;

7) $y = \operatorname{tg} x,\ x \in \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right],\ Ox$; 8)• $y^2 + 4x = 2\ln y,\ y \in [1;2],\ Oy$;

9) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1-\cos t),\ t \in [0;2\pi]$: а) Oy; б) Ox;

в) осі симетрії кривої; г) дотичної до кривої, яка паралельна осі Ox і проходить через вершину кривої;

10) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ Ox$; 11) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b,\ Ox,\ Oy$;

12) $\rho = a(1+\cos\theta),\ Ox$; 13) $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$: а) Oy; б) Ox; в) прямої $y = x$;

14) $\rho = 2r\sin\theta,\ Ox$.

4. Тіло утворено обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена параболою $ay = a^2 - x^2,\ a > 0$, і віссю Ox. Знайти відношення площі поверхні цього тіла до площі поверхні рівновеликої кулі.

5. Знайти площу тієї частини поверхні циліндра $x^2 + y^2 = rx$, яка міститься всередині сфери $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

6. Осі двох кругових циліндрів з однаковими основами перетинаються під прямим кутом. Обчислити площу поверхні тіла, що становить спільну частину обох циліндрів.

7. Крива $y = \cos x,\ x \in [-\pi;\pi]$, обертається навколо прямої $y = c$. При якому значенні c площа поверхні обертання буде найменшою? Знайти цю найменшу площу.

8. Куб обертається навколо своєї діагоналі. Знайти площу поверхні, яку описують усі ребра куба.

9. Знайти площу поверхні, утвореної при обертанні навколо осі абсцис дуги кривої:

1)• $y = e^{-x}$, $x \in [0; +\infty)$; 2) $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$ (трактриса).

Зразки розв'язування задач

2. Якщо обертати дугу AB: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a; b]$, не навколо осі Ox, а навколо осі Oy, то доведеться у відповідних виразах поміняти місцями символи φ і ψ. Формули для обчислення площі поверхні у цьому випадку матимуть вигляд:

$$P = 2\pi\int_a^b |\varphi(t)| \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt \text{ — для параметрично заданої дуги;}$$

$$P = 2\pi\int_a^b |x| \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \text{ — для явно заданої дуги;}$$

$$P = 2\pi\int_a^b |\rho(\theta)\cos\theta| \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\, d\theta \text{ — для дуги, заданої у полярних координатах.}$$

3. 8) Через те що $x = \frac{1}{2}\ln y - \frac{y^2}{4}$, $y \in [1; 2]$, то покладемо $y = t$, $x = \frac{1}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}$, $t \in [1; 2]$, і скористаємось першою з формул, виведених у задачі **2**. Маємо

$$P = 2\pi\int_1^2 |\varphi(t)| \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt, \quad \varphi(t) = \frac{1}{2}\ln t - \frac{t^2}{4},$$

$$\psi(t) = t, \ \varphi'(t) = \frac{1}{2t} - \frac{t}{2}, \quad \psi'(t) = 1, \ t \in [1; 2].$$

Тоді

$$P = 2\pi\int_1^2 \left|\frac{1}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}\right| \sqrt{\frac{1}{4t^2} - \frac{1}{2} + \frac{t^2}{4} + 1}dt = 2\pi\int_1^2 \left|\frac{1}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}\right| \sqrt{\left(\frac{1}{2t} + \frac{t}{2}\right)^2} dt = 2\pi\int_1^2 \left|\frac{1}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}\right| \left(\frac{1}{2t} + \frac{t}{2}\right) dt.$$

Оскільки $\varphi'(t) = \frac{1}{2t} - \frac{t}{2} < 0$ на інтервалі $(1; 2)$, то функція φ спадна на відрізку $[1; 2]$, тому $\varphi(t) < \varphi(1) < 0$ $\forall t \in [1; 2]$ і $|\varphi(t)| = -\varphi(t)$.

Отже,

$$P = 2\pi\int_1^2 \left(\frac{t^2}{4} - \frac{1}{2}\ln t\right)\left(\frac{1}{2t} + \frac{t}{2}\right) dt = \frac{\pi}{2}\int_1^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{t^3}{2} - \frac{\ln t}{t} - t\ln t\right) dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{8}\right)\Bigg|_1^2 - \int_1^2 \ln t d(\ln t) - \int_1^2 t\ln t dt\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{21}{8} - \frac{\ln^2 t}{2}\Bigg|_1^2 - \frac{t^2}{2}\ln t\Bigg|_1^2 + \int_1^2 \frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{t} dt\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{21}{8} - \frac{\ln^2 2}{2} - 2\ln 2 + \frac{t^2}{4}\Bigg|_1^2\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{27}{8} - \frac{\ln^2 2}{2} - 2\ln 2\right) \text{ (кв. од.).}$$

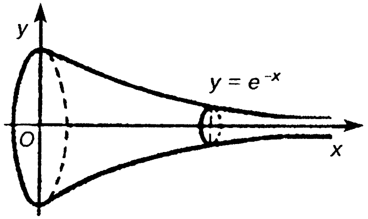


Рис. 34

9. 1) Для відшукання площі нескінченної вправо поверхні (рис. 34) доведеться скористатися формулою

$$S = 2\pi\int_0^{+\infty} |f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

Підставимо сюди значення функції $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ та її похідної $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$. Дістанемо

$$S = 2\pi\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x}}dx = \left|\begin{array}{l} \mathrm{e}^{-x} = t,\ dt = -\mathrm{e}^{-x}dx, \\ x = 0 \Rightarrow t = 1,\ x \to +\infty \Rightarrow t \to 0 \end{array}\right|$$

$$= 2\pi\int_0^1 \sqrt{1+t^2}dt = \pi\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) \text{ (кв. од.)}.$$

§ 10.5. Застосування визначеного інтеграла у фізиці

Наведемо загальну схему застосування визначеного інтеграла для обчислення деякої величини Q, пов'язаної з відрізком $[a; b]$:

1) провести (T)-розбиття відрізка $[a; b]$ точками x_k, $k = \overline{0, n}$;

2) для кожного відрізка $[x_k,\ x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, знайти ΔQ_k величини Q, яка припадає на частину цього відрізка;

3) подати величину ΔQ_k у вигляді $\Delta Q_k \approx q_k \Delta x_k$, де $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, q_k — значення деякої відомої функції q у точці $c_k \in [x_k;\ x_{k+1}]$;

4) обчислити $Q = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} q(c_k)\Delta x_k = \int\limits_a^b q(x)dx$, де $\lambda(T) = \max\limits_{0\le k\le n-1} \Delta x_k$.

Нехай кожна точка M спрямлюваної дуги AB має координати $x = x(l)$, $y = y(l)$, де $l = l(\cup AM)$ — довжина дуги AM, $l \in [0; L]$, $L = l(\cup AB)$. Припустимо, що вздовж дуги AB розподілено масу так, що густина розподілу стала і дорівнює 1. У такому разі дугу AB називають *однорідною матеріальною дугою*.

Використовуючи загальну схему і той факт, що статичний момент матеріальної точки відносно заданої прямої дорівнює ml, де m — маса точки, а l — відстань точки від прямої, дістаємо

$M_x = \int\limits_0^L |y(l)|dl$ — статичний момент матеріальної дуги кривої відносно осі Ox;

$M_y = \int\limits_0^L |x(l)|\, dl$ — статичний момент матеріальної дуги кривої відносно осі Oy.

Якщо дугу AB задано параметричним рівнянням $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a;\, b]$, то ці формули матимуть вигляд

$$M_x = \int\limits_a^b |\psi(t)| \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt, \quad M_y = \int\limits_a^b |\varphi(t)| \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

Центром мас матеріальної дуги кривої AB називають точку (x_c, y_c) таку, що коли масу дуги помістити в неї, то матимемо матеріальну точку, статичні моменти якої відносно осей Ox і Oy дорівнюватимуть відповідним статичним моментам цієї дуги. Координати центра мас матеріальної дуги кривої AB обчислюють за формулами

$$x_c = \frac{M_y}{L}, \quad y_c = \frac{M_x}{L},$$

де L — довжина дуги AB.

Нехай криволінійна трапеція визначається функцією $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, і по ній розподілено масу із сталою густиною, яка дорівнює 1. Таку криволінійну трапецію називають *однорідною матеріальною пластиною.*

Використовуючи загальну схему, можна вивести формули для статичних моментів пластини відносно координатних осей:

$$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b f^2(x)\, dx \text{ — відносно осі } Ox;$$

$$M_y = \int\limits_a^b x f(x)\, dx \text{ — відносно осі } Oy.$$

Центром мас матеріальної фігури називають точку (x_c, y_c) таку, що коли масу фігури помістити в неї, то матимемо матеріальну точку, статичні моменти якої відносно осей Ox і Oy дорівнюватимуть відповідним статичним моментам цієї фігури.

Координати центра мас матеріальної фігури обчислюють за формулами

$$x_c = \frac{M_y}{S},$$

$$y_c = \frac{M_x}{S},$$

де S — площа фігури.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) статичний момент системи, яка складається з n матеріальних точок з масами m_k, $k=\overline{1,n}$, відносно заданої прямої, дорівнює $\sum_{k=1}^{n} m_k l_k$, де l_k — відстань k-ї точки від прямої;

2) центр мас однорідної матеріальної фігури, що має центр симетрії, збігається з цим центром симетрії;

3) центр мас однорідної матеріальної дуги AB міститься в точці (x_c, y_c):

$$x_c = \frac{1}{L}\int_a^b \varphi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt, \quad y_c = \frac{1}{L}\int_a^b \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt,$$

де $L = l(\cup AB)$ — довжина дуги AB;

4) центр мас однорідної матеріальної пластини має координати (x_c, y_c):

$$x_C = \frac{1}{S}\int_a^b x f(x)dx, \quad y_C = \frac{1}{S}\int_a^b f^2(x)dx,$$

де S — площа пластини?

2. Довести, що площа поверхні, утвореної при обертанні однорідної матеріальної дуги навколо прямої, яка її не перетинає, дорівнює добутку довжини цієї дуги на довжину кола, що описує при цьому обертанні центр мас дуги *(перша теорема Гульдіна)*.

3. Довести, що об'єм тіла, утвореного при обертанні однорідної матеріальної пластини навколо прямої, яка її не перетинає, дорівнює добутку площі пластини на довжину кола, що описує при цьому обертанні центр мас пластини *(друга теорема Гульдіна)*.

4. Знайти статичні моменти даних однорідних матеріальних дуг:

1) $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $t \in [0; \pi]$, відносно координатних осей;

2) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, відносно координатних осей;

3) $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $x \in [0; a]$, відносно осі Ox;

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y > 0$, відносно осі Ox;

5) $y^2 = 2x$, $y > 0$, $x \in [0; 2]$, відносно координатних осей;

6) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $a > 0$, $b > 0$, $x \in [0; a]$, відносно координатних осей;

7) $y = \cos x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, відносно осі Ox;

8) $y^2 = 2px$, $x \in \left[0; \frac{p}{2}\right]$, відносно прямої $x = \frac{p}{2}$.

5. Знайти координати центра мас даних однорідних матеріальних дуг:

1)• $x = R\cos t,\ \ y = R\sin t,\ \ t \in [0;\ \pi]$;

2) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ \ x \in [0;\ a]$;

3) $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),\ \ x \in [-a;\ a]$;

4) $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t),\ \ t \in [0;\ 2\pi]$;

5) $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y,\ \ y \in [1;\ 2]$;

6) $\rho = a(1 + \cos\theta),\ \ \theta \in [0;\ \pi]$; 7) $\rho = ae^{\theta},\ \ \theta \in \left[\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$;

8) дуги кола радіуса r , що стягує кут 2α.

6. Знайти статичні моменти однорідних матеріальних пластин, обмежених даними кривими:

1) $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t),\ \ t \in [0;\ 2\pi],\ \ y = 0$, відносно осі Ox;

2) $x + y = 1,\ \ x = 0,\ \ y = 0$, відносно координатних осей;

3) $y = \dfrac{2}{1 + x^2},\ \ y = x^2$, відносно осі Ox;

4) $y^2 = 2px,\ \ y = 0,\ \ x = 1$, відносно координатних осей;

5) сторонами трикутника з основою a та висотою h, відносно основи.

7. Знайти координати центра мас однорідних матеріальних пластин, обмежених даними кривими:

1) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ \ x = 0,\ \ y = 0$; 2) $x^2 + 4y - 16 = 0,\ \ y = 0$;

3) $y = \dfrac{2}{\pi}x,\ \ y = \sin x,\ \ x \geq 0$; 4)• $y = \cos x,\ \ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right],\ \ y = 0$;

5) $x^2 + 4y^2 = 4,\ \ x^2 + y^2 = 4,\ \ x > 0,\ \ y > 0$; 6) $ax = y^2,\ \ ay = x^2,\ \ a > 0$;

7) $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t),\ \ t \in [0;\ 2\pi],\ \ y = 0$;

8) $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\ \ t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right],\ \ x = 0,\ \ y = 0$;

9) $\rho = a(1 + \cos\theta)$; 10) $\rho = a\theta,\ \ \theta \in [0;\ \pi]$.

8. Обчислити об'єм та площу поверхні тора, утвореного при обертанні круга $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$: а) навколо осі Ox; б) навколо осі Oy.

9. Квадрат із стороною a обертається навколо прямої, що проходить через одну з його вершин і утворює кут φ з його діагоналлю, $\dfrac{\pi}{4} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$. Знайти об'єм тіла обертання та площу його поверхні.

10. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні півкруга радіуса r навколо дотичної, паралельної діаметру.

11. Довести, що центр мас трикутника міститься на одній третій висоти від його основи.

12. Швидкість нагрівання тіла змінюється за законом $v = 0,03t + 0,1$, де t — час, с; v — швидкість, К/с. На скільки градусів нагрівається тіло протягом першої хвилини?

13•. Знайти роботу, яку слід затратити на викачування води з посудини, що має форму кругового півциліндра завдовжки a та радіусом r.

14. Матеріальна точка рухається по прямій під дією сили, пропорційної до відстані точки від початку руху. Визначити роботу цієї сили по перенесенню точки на відстань 15 м від початку руху, якщо на відстані 3 м сила дорівнює 1 Н.

15. Електричний заряд q_1, вміщений у початку координат, відштовхує заряд q_2 із точки $(a, 0)$ в точку $(b, 0)$. Знайти роботу сили відштовхування F.

16. Яку роботу треба затратити для зупинки залізної кулі радіуса R, яка обертається з кутовою швидкістю ω навколо свого діаметра?

17•. Водопровідна труба має діаметр 6 см. Один кінець її з'єднаний із баком, в якому рівень води на 100 см вищий за верхній край труби, а другий закритий заслінкою. Знайти повний тиск на заслінку.

18. Знайти тиск на пластинку, що має форму рівнобічної трапеції з основами a і b та висотою h, яку занурено у рідину на глибину c.

19. Знайти тиск на півкруг радіуса r, занурений у рідину так, що діаметр лежить на поверхні рідини. Питома вага рідини γ.

20•. З якою силою однорідний стрижень $0 \le x \le l$ з лінійною густиною δ притягує матеріальну точку $P(a)$, $a > l$, з масою m?

21. Однорідне тіло у формі прямого кругового циліндра з висотою h і радіусом основи R обертається навколо своєї осі із сталою кутовою швидкістю ω. Знайти кінетичну енергію тіла, якщо густина матеріалу, з якого воно виготовлено, дорівнює ρ.

22. Яку роботу треба затратити на перенесення тіла з масою m у нескінченність з поверхні Землі?

23. Визначити роботу, яку треба затратити, щоб електричний заряд $e_2 = 1$ наблизити до заряду e_1 з нескінченності на відстань, що дорівнює 1.

Зразки розв'язування задач

5. 1) Розв'яжемо задачу двома способами.

1. Оскільки $\varphi(t) = R\cos t$, $\psi(t) = R\sin t$, $t \in [0; \pi]$, то $\varphi'(t) = -R\sin t$, $\psi'(t) = R\cos t$, $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} = R$.

Знайдемо статичні моменти кривої відносно координатних осей (вправа 4.1)):

$$M_x = \int_0^\pi R^2 \sin t dt = -R^2 \cos t \Big|_0^\pi = 2R^2,\quad M_y = \int_0^\pi R^2 \cos t dt = 0.$$

Через те що $L = \pi R$, то дістаємо координати центра мас заданої дуги:

$$x_c = 0,\quad y_c = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}.$$

2. Задана дуга є півколом, розміщеним над віссю Ox і має віссю симетрії вісь Oy. Отже, $x_c = 0$ і $M_y = 0$. За першою теоремою Гульдіна маємо $P = L \cdot 2\pi y_c$, де $L = \pi R$ — довжина дуги, P — площа поверхні, утворена обертанням півкола навколо осі Ox, тобто $P = 4\pi R^2$.

Тому

$$y_c = \frac{P}{2\pi L} = \frac{4\pi R^2}{2\pi^2 R} = \frac{2R}{\pi}.$$

7. 4) З міркувань симетрії маємо $x_c = 0$, а тому $M_y = 0$. Знайдемо ординату центра мас:

$$y_c = \frac{1}{S}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx,\ S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2,$$

отже,

$$y_c = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

13. Об'єм ΔV_k елементарного шару води завдовжки a, завширшки $m \approx 2\sqrt{r^2 - c_k^2}$, $c_k \in [x_k; x_{k+1}]$, та заввишки Δx_k, що припадає на відрізок $[x_k; x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, наближено дорівнює (рис. 35)

$$\Delta V_k = am\Delta x_k \approx 2a\sqrt{r^2 - c_k^2}\,\Delta x_k,\ \Delta x_k = x_{k+1} - x_k.$$

Робота, яку треба затратити на підняття цього шару на висоту c_k, наближено дорівнює

$$\Delta A_k \approx 2\gamma a c_k \sqrt{r^2 - c_k^2}\,\Delta x_k,$$

де γ — маса одиниці об'єму води.

Тоді шукана робота A визначиться так:

$$A = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta A_k,\ \lambda(T) = \max_{0 \le k \le n-1} \Delta x_k,$$

тобто

$$A = 2a\gamma\int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = -a\gamma\frac{2}{3}\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^r = \frac{2}{3}\gamma a r^3.$$

17. Заслінка є кругом, радіус якого 3 см. Розіб'ємо площу цього круга на елементарні смужки, паралельні поверхні води (рис. 36). Площа однієї такої смужки, яка розміщена на відстані c_k, $c_k \in [x_k; x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, від центра і припадає на відрізок $[x_k; x_{k+1}]$, наближено дорівнює

$$\Delta S_k \approx 2\sqrt{9 - c_k^2}\,\Delta x_k,\ \Delta x_k = x_{k+1} - x_k.$$

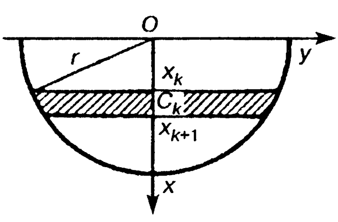


Рис. 35

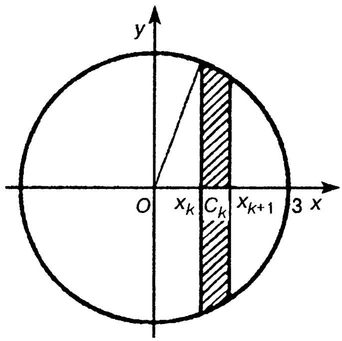


Рис. 36

Тиск на цей елемент

$$\Delta P_k \approx 2\gamma(103-c_k)\sqrt{9-c_k^2}\Delta x_k,$$

де γ — маса одиниці об'єму води.

Тоді шуканий тиск на всю заслінку

$$P = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta P_k, \ \lambda(T) = \max_{0\le k\le n-1} \Delta x_k,$$

тобто

$$P = 2\gamma\int_{-3}^{3}(103-x)\sqrt{9-x^2}dx = 2\gamma\left(103\left(\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{3}\left(9-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right|_{-3}^{3} = 927\gamma\pi \quad (\text{г}).$$

20. Відповідно до закону Ньютона ділянка стрижня $[x_k; x_{k+1}]$, $k=\overline{0, n-1}$ з масою $\delta\Delta x_k$, $\Delta x_k = x_{k+1}-x_k$, притягує матеріальну точку P з силою

$$\Delta F_k \approx -k\frac{m\delta\Delta x_k}{(a-c_k)^2},$$

де k — коефіцієнт пропорційності (гравітаційна стала), $c_k \in [x_k; x_{k+1}]$. Тоді шукана сила F визначиться за формулою

$$F = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta F_k, \ \lambda(T) = \max_{0\le k\le n-1} \Delta x_k,$$

тобто

$$F = -km\delta\int_0^l \frac{dx}{(a-x)^2} = -\left.\frac{km\delta}{a-x}\right|_0^l = \frac{km\delta}{a} - \frac{km\delta}{a-l} = -\frac{km\delta l}{a(a-l)}.$$

§ 10.6. Наближені методи обчислення визначених інтегралів

Формула Ньютона — Лейбніца досить зручна для обчислення визначених інтегралів. Однак на практиці цю формулу не завжди можна застосувати, бо є функції, для яких первісна не є елементарною функцією. Іноді первісна має досить складний і незручний для обчислень вигляд, навіть якщо вона є елементарною. Крім того, при розв'язуванні задач підінтегральну функцію часто задають не аналітично, а у вигляді таблиці або графіка. В усіх таких випадках застосовують наближені методи інтегрування функцій. Відповідні наближені формули називають *квадратурними*.

Розглянемо найпростіші з таких формул, виведення яких ґрунтується на означенні визначеного інтеграла.

Відомо, що

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k,$$

де

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k,\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$
$$c_k \in [x_k; x_{k+1}],\ \ \lambda(T) = \max_{0 \le k \le n-1} \Delta x_k.$$

Якщо відрізок $[a; b]$ розбити на досить велике число елементарних відрізків малої довжини, то відповідна інтегральна сума мало відрізнятиметься від значення інтеграла, тобто має місце наближена формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k. \qquad (1)$$

Якщо відрізок $[a; b]$ поділено на n рівних частин, то $\Delta x_k = \dfrac{b-a}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$, і формула (1) матиме вигляд

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k). \qquad (2)$$

Величину $\Delta = \left| \int_a^b f(x)dx - \dfrac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \right|$ називають *похибкою квадратурної формули* (2).

Нехай функція f неперервна на відрізку $[a;b]$. Залежно від способу апроксимації функції f на кожному з елементарних відрізків $[x_k;\ x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, дістають різні наближені формули інтегрування (див. табл. на с. 350). У наведених оцінках похідні відповідного порядку неперервні на відрізку $[a; b]$.

Якщо функція f невід'ємна на відрізку $[a; b]$, то наведені наближені формули мають досить просте геометричне тлумачення. Так, у формулах (3) — (5) площа криволінійної трапеції, яка визначається інтегралом $\int_a^b f(x)\,dx$, замінюється сумою площ n прямокутників відповідно із сторонами $h, f(x_k)$; $h, f(x_{k+1})$; $h, f\left(\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$, де $h = \dfrac{b-a}{n}$, тобто на кожному елементарному відрізку $[x_k; x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, функція f замінюється на сталу функцію (рис. 37—39).

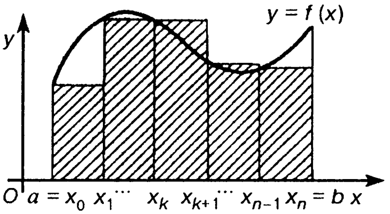


Рис. 37

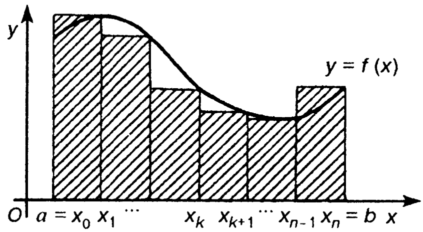


Рис. 38

$f(c_k), k=\overline{0,n-1}$	Квадратурна формула	Похибка квадратурної формули
$f(x_k)$	$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{b-a}{n}\left(f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right)$ (3) (формула лівих прямокутників)	$\Delta \le \frac{(b-a)^2}{2n} \times \max\limits_{[a;b]}\lvert f'(x)\rvert$
$f(x_{k+1})$	$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) = \frac{b-a}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right)$ (4) (формула правих прямокутників)	$\Delta \le \frac{(b-a)^2}{2n} \times \max\limits_{[a;b]}\lvert f'(x)\rvert$
$f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$	$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) = \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)$ (5) (формула середніх прямокутників)	$\Delta \le \frac{(b-a)^3}{24n^2} \times \max\limits_{[a;b]}\lvert f''(x)\rvert$
$\frac{1}{2}\left(f(x_k)+f(x_{k+1})\right)$	$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(f(x_k)+f(x_{k+1})\right) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})\right)$ (6) (формула трапецій)	$\Delta \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \times \max\limits_{[a;b]}\lvert f''(x)\rvert$
$\frac{1}{3}\left(f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})\right)$	$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})\right) = \frac{b-a}{6n}\left(f(a)+f(b)+2\sum\limits_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})+4\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1})\right)$ (7) (формула Сімпсона)	$\Delta \le \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \times \max\limits_{[a;b]}\lvert f^{(4)}(x)\rvert$

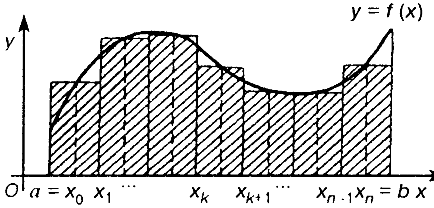


Рис. 39

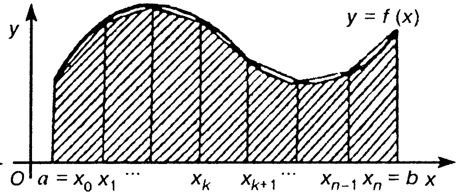


Рис. 40

У формулі (6) площа криволінійної трапеції замінюється сумою площ n трапецій з основами $f\left(x_k\right)$, $f\left(x_{k+1}\right)$ та висотою $h=\dfrac{b-a}{n}$. У цьому випадку графік функції f замінюється на ламану, ланка якої на кожному елементарному відрізку $\left[x_k, x_{k+1}\right]$, $k=\overline{0, n-1}$, є прямолінійним відрізком (рис. 40).

І нарешті, у формулі (7) відрізок $[a; b]$ розбито на $2n$ рівних частин із кроком $h=\dfrac{b-a}{2n}$, а на кожному елементарному відрізку $\left[x_{2k}; x_{2k+2}\right]$, $k=\overline{0, n-1}$, функцію f замінено квадратною параболою, яка проходить через точки з абсцисами $x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+2}$ (рис. 41).

Наведемо структурні схеми алгоритмів наближеного обчислення визначених інтегралів (рис. 42—45).

Наведені структурні схеми алгоритмів передбачають заданим число n (кількість відрізків, на які поділено даний відрізок $[a;b]$). Для обчислення визначеного інтеграла з наперед заданою точністю $\varepsilon>0$ користуються оцінками похибок, вказаними у таблиці для кожної квадратурної формули. Вони дають змогу для заданої точності $\varepsilon>0$ визначити число n. Однак використання цих формул досить обмежене через труднощі, пов'язані з оцінкою похідної відповідного порядку. Тому на практиці часто користуються так званим методом подвійного прорахунку, за яким даний інтеграл обчислюють за відповідною квадратурною формулою двічі: з кроком h і з кроком $\dfrac{h}{2}$. Якщо I_1 і I_2 — значення інтеграла, обчислені відповідно із кроками h і $\dfrac{h}{2}$, то точність $\varepsilon>0$ забезпечують відповідно до нерівностей:

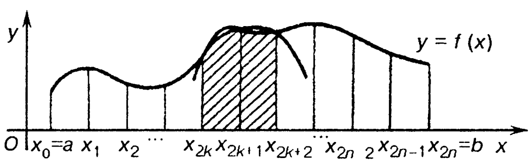


Рис. 41

1) $\Delta=\left|I_2-I_1\right| \leq \varepsilon$ – для формул лівих і правих прямокутників;

2) $\Delta=\dfrac{1}{3}\left|I_2-I_1\right| \leq \varepsilon$ — для формули середніх прямокутників та формули трапецій;

3) $\Delta = \frac{1}{15}\left| I_2 - I_1 \right| \le \varepsilon$ — для формули Сімпсона.

Наближене значення інтеграла уточнюють за екстраполяційною формулою Річардсона

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_2 + \Delta.$$

Для прикладу наведемо структурну схему алгоритму обчислення визначеного інтеграла методом середніх прямокутників із заданою точністю $\varepsilon > 0$ (рис. 46).

За формулою лівих прямокутників

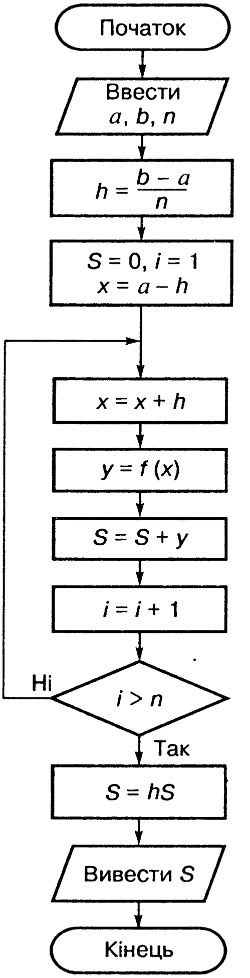


Рис. 42

За формулою середніх прямокутників

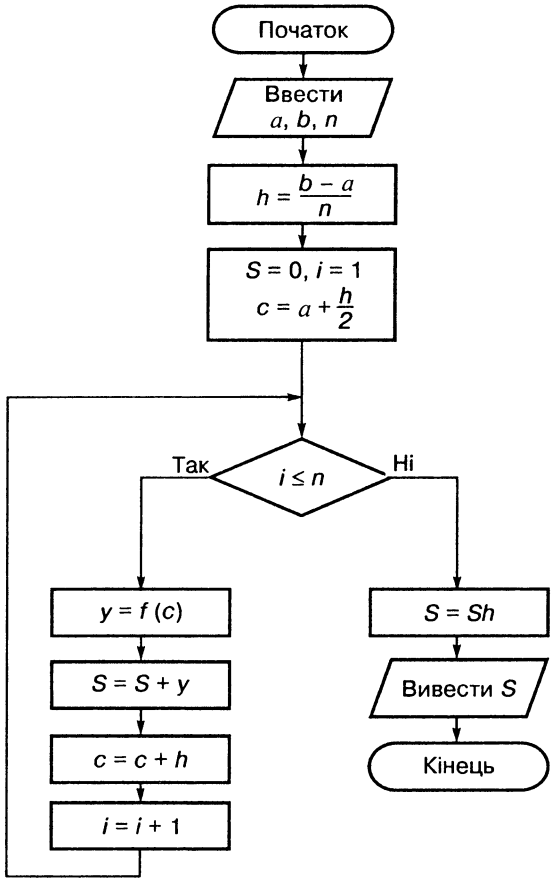


Рис. 43

Вправи

1. Обчислити наближено дані інтеграли за формулами середніх прямокутників, трапецій і Сімпсона, розбивши відрізок інтегрування на n рівних частин:

1) $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx, \quad n = 6;$ 2) $\int\limits_1^5 \frac{dx}{1+x^4}, \quad n = 8;$ 3) $\int\limits_0^{2\pi} x \sin x dx, \quad n = 12;$

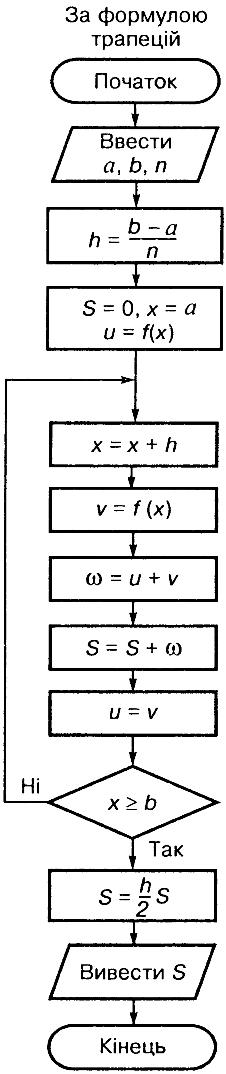


Рис. 44

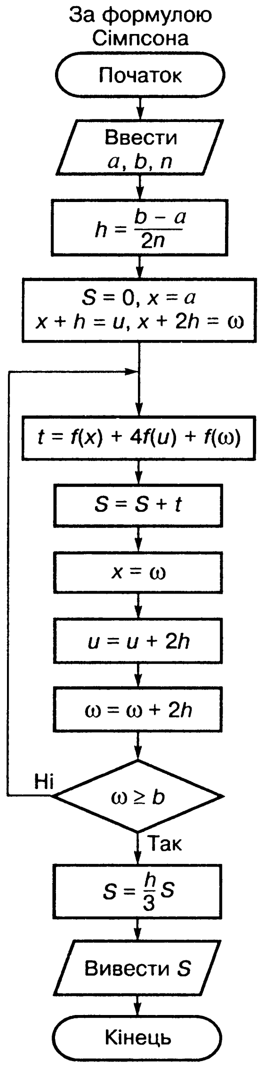
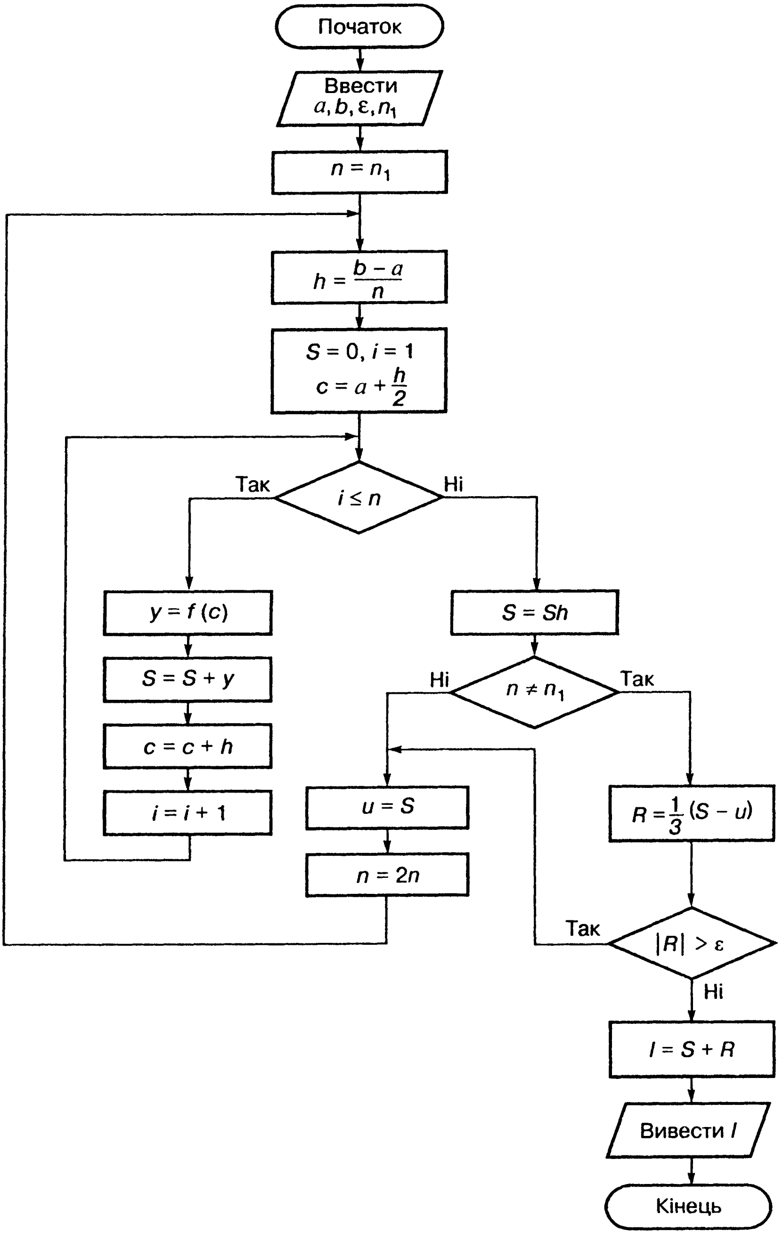


Рис. 45



Початок
Ввести a, b, ε, n_1
$n = n_1$
$h = \frac{b-a}{n}$
$S = 0,\ i = 1$
$c = a + \frac{h}{2}$
Так
$i \le n$
Ні
$y = f(c)$
$S = S + y$
$c = c + h$
$i = i + 1$
$S = Sh$
Ні
$n \ne n_1$
Так
$u = S$
$n = 2n$
$R = \frac{1}{3}(S - u)$
Так
$|R| > \varepsilon$
Ні
$I = S + R$
Вивести I
Кінець

Рис. 46

4) $\int_0^2 e^{x^2} dx$, $n = 10$; 5)• $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, $n = 10$; 6) $\int_0^2 \sqrt{8x^4+1}dx$, $n = 10$;

7) $\int_1^9 \sqrt{6x-5}dx$, $n = 8$; 8) $\int_0^\pi \sqrt{3+\cos x}dx$, $n = 6$.

2. Для даного інтеграла оцінити похибку вказаної квадратурної формули із кроком h:

формула середніх прямокутників

1) $\int_1^5 \frac{dx}{1+x^4}$, $h = 0{,}5$; 2)• $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx$, $h = \frac{1}{6}$;

формула трапецій

3) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$, $h = \frac{1}{3}$; 4) $\int_2^5 \ln^2 x dx$, $h = 0{,}5$;

формула Сімпсона

5) $\int_2^5 \frac{dx}{\ln x}$, $h = 0{,}5$; 6) $\int_0^{\pi/3} \sqrt{\cos x}dx$, $h = 0{,}1$.

3. Знайти крок h, при якому похибка при наближеному обчисленні інтеграла за вказаною квадратурною формулою не перевищуватиме ε:

формула середніх прямокутників

1) $\int_0^3 \ln\left(1+x^2\right)dx$, $\varepsilon = 0{,}001$;

формула трапецій

2) $\int_0^3 \frac{dx}{x+2}$, $\varepsilon = 0{,}1$; 3) $\int_0^{0{,}5} \arcsin x dx$, $\varepsilon = 0{,}0001$;

формула Сімпсона

4)• $\int_0^1 e^{-x}dx$, $\varepsilon = 0{,}01$; 5) $\int_0^{\pi/2} \cos\frac{x}{2}dx$, $\varepsilon = 0{,}001$.

4. Обчислити інтеграл за вказаною квадратурною формулою із заданою точністю $\varepsilon > 0$:

формула середніх прямокутників

1) $\int_1^2 x^3 dx$, $\varepsilon = 0{,}01$; 2) $\int_0^1 \frac{e^{-x}dx}{1+x}$, $\varepsilon = 0{,}01$;

формула трапецій

3)• $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, $\varepsilon = 0{,}01$; 4) $\int_0^{1{,}2} \sin x dx$, $\varepsilon = 0{,}01$;

формула Сімпсона

5) $\int\limits_1^3 \sqrt{x}dx, \quad \varepsilon = 0,001$; 6) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \varepsilon = 0,0001$.

5. Користуючись подвійним прорахунком, оцінити похибку результату обчислення інтеграла із заданим кроком h:

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}, \quad h = 0,1;\ 0,2$ (за формулами лівих, правих та середніх прямокутників);

2)• $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}dx, \quad h = \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$ (за формулою Сімпсона);

3) $\int\limits_0^{1,6} e^{-x^2}dx, \quad h = 0,8;\ 0,4;\ 0,2$ (за формулою середніх прямокутників).

6. Знайти довжину еліпса з півосями $a = 10,\ b = 6$ з точністю $\varepsilon = 0,005$.

7. Обчислити об'єм тіла, яке утворюється при обертанні навколо осі Ox плоскої фігури, обмеженої кривими $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = 0$, $x = \pm 2$ з точністю $\varepsilon = 0,01$.

8. Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,03$ площу поверхні еліпсоїда, який утворюється при обертанні навколо осі Ox еліпса $x^2 + 4y^2 = 4$.

9. Виходячи із даної рівності, обчислити значення вказаних величин з точністю ε:

1) $\ln 2 = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}, \quad \varepsilon = 10^{-4}$; 2) $\pi = 4\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \quad \varepsilon = 10^{-3}$.

10. Довести, що формула Сімпсона є точною для довільного многочлена не вище третього степеня.

Зразки розв'язування задач

1. 5) За формулою середніх прямокутників

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10}\big(f(0,05) + f(0,15) + f(0,25) + f(0,35) + f(0,45) +$$
$$+ f(0,55) + f(0,65) + f(0,75) + f(0,85) + f(0,95)\big) =$$
$$= \frac{1}{10}(0,9975 + 0,9980 + 0,9412 + 0,8909 + 0,8316 + 0,7678 + 0,7030 +$$
$$+ 0,6400 + 0,5806 + 0,5256) = 0,7856.$$

За формулою трапецій

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10}\left(\frac{f(0) + f(1)}{2} + f(0,1) + f(0,2) + f(0,3) + \right.$$
$$\left. + f(0,4) + f(0,5) + f(0,6) + f(0,7) + f(0,8) + f(0,9)\right) = 0,7850.$$

За формулою Сімпсона

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{30}\big(f(0)+f(1)+2\big(f(0{,}2)+f(0{,}4)+f(0{,}6)+$$

$$+f(0{,}8)\big)+4\big(f(0{,}1)+f(0{,}3)+f(0{,}5)+f(0{,}7)+f(0{,}9)\big)\big)=0{,}7854.$$

Зауважимо, що точне значення цього інтеграла $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854$.

2. 2) Маємо $f(x)=\sqrt{1+x^4}$, $f''(x)=\dfrac{6x^2-2x^6}{\left(1+x^4\right)^{\frac{3}{2}}}$. Отже, $\max\limits_{[0;1]}\left|f''(x)\right|=2$. Використовуючи похибку для формул середніх прямокутників, дістаємо

$$\Delta \le \frac{(b-a)^3}{24n^2}\cdot\max_{[0,1]}\left|f''(x)\right|=\frac{2}{36\cdot 24}\le 0{,}0023.$$

3. 4) Маємо $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$, $f^{(4)}(x)=4\mathrm{e}^{-x^2}\left(4x^4-12x^2+3\right)$. Оскільки $\mathrm{e}^{-x^2}\le 1, \left|4x^4-12x^2+\right.$ $\left.+3\right|\le 5 \quad \forall x\in[0;\ 1]$, то $\left|f^{(4)}(x)\right|\le 20 \quad \forall x\in[0;\ 1]$. Враховуючи, що в формулі Сімпсона $h=\dfrac{b-a}{2n}$, з похибки цієї квадратурної формули дістаємо $\Delta\le\dfrac{h^4}{180}\cdot 20<\ 0{,}01$, звідки $h=\dfrac{1}{2}$.

4. 3) Для визначення кроку $h=\dfrac{b-a}{n}$ у квадратурній формулі трапецій оцінимо $\left|f''(x)\right|$.

Маємо $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$, $f''(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\left(4x^2-2\right)$ і $\left|f''(x)\right|\le 2$, $x\in[0;\ 1]$, бо $\mathrm{e}^{-x^2}\le 1$, а $\left|4x^2-2\right|\le 2 \quad \forall x\in[0;\ 1]$.

Використаємо формулу для похибки методу трапецій. Дістанемо $\Delta\le\dfrac{h^2}{12}\cdot 2\le 0{,}01$, отже, $h=\dfrac{1}{5}$, $n=5$.

Тоді за формулою трапецій маємо

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}dx \approx \frac{1}{5}\left(\frac{f(0)+f(1)}{2}+f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)\right)\approx$$

$$\approx\frac{1}{5}(0{,}500+0{,}184+0{,}961+0{,}852+0{,}698+0{,}527)=0{,}746\approx 0{,}75.$$

5. 2) Обчислення заданого інтеграла за формулою Сімпсона із кроком $h=\dfrac{1}{6}$ дає результат $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+x^4}\,dx\approx 1{,}0894286=I_1$, а з кроком $h=\dfrac{1}{12}$ маємо $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+x^4}\,dx\approx 1{,}0894293=I_2$.

Отже, похибка обчислень $\Delta=\dfrac{1}{15}\left|I_2-I_1\right|\approx 4{,}7\cdot 10^{-8}$, і за формулою Річардсона матимемо

$$\int_0^1\sqrt{1+x^4}\,dx\approx 1{,}0894293+4{,}7\cdot 10^{-8}\approx 1{,}089429.$$

Розділ 11 ЧИСЛОВІ РЯДИ

§ 11.1. Поняття ряду та його суми. Геометрична прогресія та гармонічний ряд

Числовим рядом називають вираз

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n , \tag{1}$$

де $c_n, n \in \mathbf{N}$, — дані дійсні або комплексні числа, які називають *членами ряду*, c_n називають *загальним* або *n-м членом ряду*.

Суми $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k, n \in \mathbf{N}$, називають *частковими сумами ряду* (1). Якщо існує границя $\lim_{n \to \infty} S_n = S$, то її називають *сумою ряду* (1) і записують $S = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Числовий ряд, який має скінченну суму, називають *збіжним*, в іншому разі ряд називають *розбіжним*.

Геометричною прогресією або *геометричним рядом* називають ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, де $a \neq 0$, q — дані числа, їх називають відповідно *першим членом* та *знаменником прогресії*. Геометрична прогресія збіжна тоді й тільки тоді, коли $|q| < 1$ і її сума $S = \frac{a}{1-q}$.

Гармонічним рядом називають ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Гармонічний ряд розбіжний, і його сума $S = +\infty$.

Критерій Коші збіжності ряду. Числовий ряд (1) збіжний тоді й тільки тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon): \left| a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} \right| < \varepsilon \ \ \forall \, p \in \mathbf{N} \quad \text{і} \quad n \geq n_0(\varepsilon).$$

Необхідна умова збіжності ряду. Якщо ряд (1) збіжний, то

$$\lim_{n \to \infty} c_n = 0.$$

Якщо $c_n = a_n + ib_n$, де $a_n = \operatorname{Re} c_n$, $b_n = \operatorname{Im} c_n$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = S = A + iB \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B.$$

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) щоб задати числовий ряд, достатньо задати його загальний член;

2) числовий ряд цілком визначається своїми частковими сумами;

3) будь-який ряд має часткові суми;

4) будь-який ряд має суму;

5) якщо ряд збіжний, то він має суму;

6) твердження, обернене до 5), є правильним;

7) будь-яка геометрична прогресія має суму;

8) числовий ряд (1) збіжний, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$;

9)• якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\left(c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+p}\right) = 0 \quad \forall\, p \in \mathbf{N}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ є збіжним?

2. Виконати вказані завдання усно.

1) Назвати кілька членів числового ряду, якщо задано його n-й член:

а) $c_n = \dfrac{2n}{n^2+3}$; б) $c_n = \dfrac{1}{n!}$; в) $c_n = \dfrac{1}{n+3^n}$; г) $c_n = \dfrac{1}{n} + i\sin\dfrac{1}{n}$.

2) Який можливий загальний член даного числового ряду:

а) $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \ldots$; б) $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \ldots$;

в) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10} + \ldots$; г) $\cos\alpha + \dfrac{\cos 2\alpha}{8} + \dfrac{\cos 3\alpha}{27} + \ldots$;

д) $\dfrac{1}{2\cdot 2} - \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 8} - \ldots$; е) $(1+i) + \left(2 + \dfrac{i}{2}\right) + \left(3 + \dfrac{i}{3}\right) + \ldots$?

3) Пояснити, чому даний ряд розбіжний:

а) $3 - 3 + 3 - 3 + \ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$; г) $\sin 1 + \sin 2 + \sin 3 + \ldots$.

4) Чи збіжний даний ряд:

а) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \ldots$; б) $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$; в) $1 + \mathrm{e} + \mathrm{e}^2 + \ldots$;

г) $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^2} - \ldots$; д) $1 + \ln 2 + \ln^2 2 + \ldots$?

5) При яких значеннях x даний вираз є збіжним числовим рядом:

а) $1+x+x^2+\ldots$; б) $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots$; в) $\ln x+\ln^2 x+\ldots$;

г) $e+e^{2x}+e^{3x}+\ldots$; д) $1+\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{\ln^2 x}+\ldots$; е) $1+\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{2x}}+\ldots$?

3. За даною частковою сумою скласти числовий ряд та дослідити його на збіжність:

1) $S_n=\frac{n+1}{n}$; 2) $S_n=\begin{cases}1, & \text{якщо } n=2k,\\ 0, & \text{якщо } n=2k-1;\end{cases}$ 3) $S_n=\operatorname{arctg} n$;

4) $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$; 5) $S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; 6)• $S_n=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$;

7) $S_n=\frac{2+5^n}{5^n}$; 8) $S_n=\sin\frac{1}{2^n}$; 9) $S_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3(3n+1)}$.

4. Користуючись означенням суми ряду, знайти суму даного ряду:

1) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$; 3) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; 5)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$;

6) $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7\cdot 9}+\ldots$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{(2n+1)n}{(n+1)(2n-1)}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n!}{720}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{2^{n+1}}\cos\frac{3}{2^{n+1}}$.

5. Визначити, для яких значень x збігається даний ряд, та знайти його суму:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{\frac{n}{x}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{a+x}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{b^{n-1}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{[x]}\right)^n$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x-[x])^n$.

6. Нехай ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ збіжні і $a_n\le c_n\le b_n$, $n\in\mathbf{N}$. Довести, що і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ збіжний. Чи правильне обернене твердження?

7. За критерієм Коші дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}, \alpha\in\mathbf{R}$; 2) $\frac{\sin x}{7}+\frac{\sin 2x}{7^2}+\frac{\sin 3x}{7^3}+\ldots$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$;

4) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\ldots$; 5)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}, \alpha>0$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

8. Дослідити на збіжність ряди з комплексними членами:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+i\frac{(-1)^n}{n}$; 2) $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{4}i\right)+\left(\frac{1}{125}-\frac{1}{8}i\right)+\ldots$;

3)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{i}{3^{n-1}}$; 4) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}i\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{5}i\right)+\ldots$;

5) $\left(1+\frac{i}{2}\right)+\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{i}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{i}{2^3}\right)+\ldots$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}+\frac{i}{n}$.

9. У рівносторонній трикутник із стороною a вписано трикутник, вершинами якого є середини сторін заданого трикутника. У вписаний трикутник цим самим способом вписано знову трикутник і т.д. Знайти суми числових рядів, членами яких є периметри та площі утворених трикутників.

10. У круг радіуса r вписано квадрат, у квадрат вписано круг і т.д. Знайти суми числових рядів, членами яких є площі кругів і квадратів.

11. Дослідити на збіжність ряд:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, де $a_1=1$, $a_{n+1}=\cos a_n$, $n\geq 1$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\sum\limits_{p=1}^{n-1}\left(\frac{p}{n}\right)^n\right)$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$.

12. Довести розбіжність гармонічного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, користуючись критерієм Коші.

Зразки розв'язування задач

1. 9) Розглянемо, наприклад, гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Цей ряд розбіжний, і для нього

$$\lim_{n\to\infty}\left(c_{n+1}+c_{n+2}+\ldots+c_{n+p}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)=0\quad\forall\, p\in\mathbf{N}.$$

Отже, розглядуване твердження неправильне.

3. 6) Через те що $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ і $S_{n-1}=\sum\limits_{k=1}^{n-1}a_k$, то $S_n-S_{n-1}=a_n$, $n>1$, і $S_1=a_1$. Таким чином,

$$a_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{2},\ \ a_n=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}-\operatorname{arctg}\frac{n-1}{n},\quad n>1.$$

Звідси

$$\operatorname{tg}a_n=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}\right)-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{n-1}{n}\right)}{1+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{n-1}{n}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}}{1+\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}}=\frac{1}{2n^2},\ \ a_n=\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}.$$

Отже, шуканий ряд має вигляд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$. Із того, що $S_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$, маємо $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1} = \frac{\pi}{4}$, тобто маємо $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} = \frac{\pi}{4}$.

4. 5) Знайдемо часткову суму заданого ряду:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right) = \left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1\right)+\left(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+$$

$$+\left(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2}\right)+\left(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)+$$

$$+\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) = 1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} = 1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \to$$

$$\to 1-\sqrt{2},\ n\to\infty.$$

Отже, заданий ряд збіжний і його сума $S = 1-\sqrt{2}$, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) = 1-\sqrt{2}.$$

7. 5) Маємо

$$\left|c_{n+1}+c_{n+2}+\ldots+c_{n+p}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^\alpha}+\frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)^\alpha}+\ldots+\frac{(-1)^{n+p}}{(n+p)^\alpha}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{(n+1)^\alpha}-\frac{1}{(n+2)^\alpha}+\ldots+\frac{(-1)^{p-1}}{(n+p)^\alpha}\right| = A_p^n.$$

Якщо $p = 2m$, то

$$A_p^n = \left|\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha}-\frac{1}{(n+2)^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{(n+3)^\alpha}-\frac{1}{(n+4)^\alpha}\right)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{(n+2m-1)^\alpha}-\frac{1}{(n+2m)^\alpha}\right)\right| = \frac{1}{(n+1)^\alpha}-\left(\frac{1}{(n+2)^\alpha}-\frac{1}{(n+3)^\alpha}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{(n+4)^\alpha}-\frac{1}{(n+5)^\alpha}\right)-\ldots-\left(\frac{1}{(n+2m-2)^\alpha}-\frac{1}{(n+2m-1)^\alpha}\right)-\frac{1}{(n+2m)^\alpha} < \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

Якщо $p = 2m+1$, то

$$A_p^n = A_{2m}^n + \frac{1}{(n+2m+1)^\alpha} < \frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+1)^\alpha},$$

тобто

$$A_n^p < \frac{2}{(n+1)^\alpha} \quad \forall p\in \mathbf{N},\ n\in \mathbf{N}.$$

Таким чином,

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon):\ n>n_0(\varepsilon) \Rightarrow \frac{2}{(n+1)^\alpha} < \varepsilon \Rightarrow \left|c_{n+1}+c_{n+2}+\ldots+c_{n+p}\right| < \varepsilon \quad \forall\ p\in \mathbf{N}.$$

Отже, за критерієм Коші заданий ряд збіжний.

8. 3) Числові ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$ є геометричними прогресіями із знаменниками, що дорівнюють відповідно $\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{3}$, отже, ці ряди збіжні. Тому збіжним є і заданий ряд з комплексними членами. Його сума $S = S_1 + iS_2$, де

$$S_1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2, \quad \text{а} \quad S_2 = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

§ 11.2. Основні властивості рядів

Наведемо основні властивості числових рядів.

1. *Лінійність*. Якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A \neq \infty$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B \neq \infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$, α, β — довільні дійсні або комплексні числа.

2. *Збіжність ряду та його залишку*. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ та будь-який його залишок $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} c_k$ одночасно збіжні або розбіжні. При цьому, якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = S$, а $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} c_k = R_n$, то $S = S_n + R_n$.

3. *Сполучна*. Якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = S$, то $\left(c_1 + \ldots + c_{n_1}\right) + \left(c_{n_1+1} + \ldots + c_{n_2}\right) + \ldots$ $\ldots + \left(c_{n_{k-1}+1} + \ldots + c_{n_k}\right) + \ldots = S \quad \forall\, n_k \in \mathbf{N},\ n_{k+1} > n_k$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ називають абсолютно збіжним, якщо збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$.

4. *Зв'язок абсолютної збіжності із збіжністю ряду*. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ абсолютно збіжний, то він є збіжним і $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\right| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$.

Умовно збіжним рядом називають збіжний ряд, який не є абсолютно збіжним.

5. *Переставна*. На абсолютну збіжність ряду не впливає будь-яка перестановка місцями його членів, при цьому і сума ряду не змінюється.

Умовно збіжні ряди цієї властивості не мають. Більше того, якщо ряд з дійсними членами умовно збіжний, то можна так переставити його члени місцями, що утворений ряд матиме сумою довільне число $-\infty \le S^* \le +\infty$ або взагалі не матиме суми.

Добутком за Коші рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ називають ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, де $c_n = a_1 b_n + {}$ $+ a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1$, $n \in \mathbf{N}$.

6. *Абсолютна збіжність добутку рядів*. Добуток за Коші двох абсолютно збіжних рядів є абсолютно збіжним рядом і сума його дорівнює добутку сум заданих рядів.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжні, то і сума цих рядів $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ є збіжним рядом;

2) твердження, обернене до 1), є правильним;

3) ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$, $\alpha \in \mathbf{R}$, є одночасно збіжними (розбіжними);

4) якщо з даного ряду вилучити будь-яку скінченну кількість його членів, то на збіжність (розбіжність) ряду це не вплине;

5) ряди $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ та $\left(c_1 + \ldots + c_{n_1}\right) + \left(c_{n_1+1} + \ldots + c_{n_2}\right) + \ldots + \left(c_{n_{k-1}+1} + \ldots + c_{n_k}\right) + \ldots$ є одночасно збіжними (розбіжними);

6) твердження 5) правильне, якщо $c_n \ge 0 \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$;

7) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ збіжний, то $\left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$;

8) перестановка місцями членів ряду не впливає на його збіжність (розбіжність);

9) сума двох розбіжних (збіжного та розбіжного) рядів є розбіжним рядом;

10)• добуток за Коші двох збіжних рядів є збіжним рядом?

2. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, $c_n = a_n + ib_n$, $n \in \mathbf{N}$, абсолютно збігається до числа $S = A + iB$ тоді й тільки тоді, коли ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно збіжні відповідно до чисел A і B.

3•. Довести, що коли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ збігається і $b_n \to 0$, $n \to \infty$, то збіжним є і ряд $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots + a_n + b_n + \ldots$, причому він збігається до тієї самої суми.

4. Знайти суми даних рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$;

3)• $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{2\pi n}{3}}{2^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{5^{n-1}}+\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$; 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{\left[\frac{n}{2}\right]}y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$, $|xy|<1$.

5. Нехай $a_n\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}$, та

$$a_n^-=\begin{cases}0, & \text{якщо } a_n\ge 0,\\ a_n, & \text{якщо } a_n<0,\end{cases}\quad \text{і}\quad a_n^+=\begin{cases}a_n, & \text{якщо } a_n\ge 0,\\ 0, & \text{якщо } a_n<0.\end{cases}$$

Довести, що:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ абсолютно збіжний тоді й тільки тоді, коли ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$ збіжні, причому $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$;

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ умовно збіжний тоді й тільки тоді, коли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ збіжний, а ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$ розбіжні.

6. Показати, що

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots\right).$$

7. Чи залишиться твердження 6 правильним, якщо знаменник кожного члену ряду лівої і правої частин рівності піднести до квадрата?

8. Показати, що ряд

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\ldots$$

збіжний, а ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}+\ldots$$

розбіжний.

9. Дослідити на збіжність добуток за Коші даних рядів:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$, $p>1$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$; 4) $\left(1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)\left(1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\beta}}$, $\alpha>0$, $\beta>0$.

10•. Нехай $\alpha_{mn}\to 0$, $m\to\infty$, $n=0,1,2,\ldots$, і $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\alpha_{mn}|\le H$ $\forall\, m=0,1,2,\ldots$.

Якщо $S_n\to 0$, $n\to\infty$, то і $t_m=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_{mn}S_n\to 0$, $m\to\infty$. Довести це.

11. Нехай $x_n\to 0$, $y_n\to 0$, $n\to\infty$, причому $\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k|\le H$ $\forall\, n$. Довести, що $z_n=x_1y_n+x_2y_{n-1}+\ldots+x_ny_1\to 0$, $n\to\infty$.

12. Члени ряду $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ переставити так, щоб:

1) сума ряду збільшилась удвічі;
2) ряд став розбіжним.

13. Відомо, що $\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$. Знайти суми рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$.

Зразки розв'язування задач

1. 10) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ є збіжним (див. задачу 7.5) § 11.1). Знайдемо добуток за Коші цього ряду самого на себе. Матимемо

$$c=a_1a_n+a_2a_{n-1}+\ldots+a_{n-1}a_2+a_na_1=\frac{(-1)^{n+3}}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^{n+3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n-1}}+$$

$$+\frac{(-1)^{n+3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{n-2}}+\ldots+\frac{(-1)^{n+3}}{\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{2}}+\frac{(-1)^{n+3}}{\sqrt{n}}.$$

Звідси $|c_n|>n\frac{1}{n}=1$, оскільки кожний доданок у c_n більший за $\frac{1}{n}$. Тому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ розбіжний, бо для нього не виконується необхідна умова збіжності. Отже, розглядуване твердження неправильне. Зауважимо, що водночас розв'язано також і задачу 9.3) цього параграфа.

3. Знайдемо часткові суми ряду

$$a_1+b_1+a_2+b_2+\ldots+a_n+b_n+\ldots. \tag{1}$$

Якщо $n=2k$ — парне, то

$$S_{2k}=a_1+b_1+a_2+b_2+\ldots+a_k+b_k=\sum_{i=1}^{k}(a_i+b_i)\to\sum_{i=1}^{\infty}(a_i+b_i),\ k\to\infty.$$

Якщо $n=2k-1$ — непарне, то

$$S_n=a_1+b_1+a_2+b_2+\ldots+a_k=S_{2k}-b_k\to\sum_{i=1}^{\infty}(a_i+b_i),\ k\to\infty,$$

оскільки $b_k\to 0,\quad k\to\infty$.

Отже, ряд (1) збіжний і його сума дорівнює сумі ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$.

4. 3) Маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2\pi n}{3}}{2^n}=1-\frac{\frac{1}{2}}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{\frac{1}{2}}{2^4}-\frac{\frac{1}{2}}{2^5}+\ldots+\frac{1}{2^{3n}}-\frac{\frac{1}{2}}{2^{3n+1}}-\frac{\frac{1}{2}}{2^{3n+2}}+\ldots=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{3n}}+\ldots\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{3n+1}}+\ldots\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\ldots+\frac{1}{2^{3n+2}}+\ldots\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2^3}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^3}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{8}{7}-\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{7}-\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{7}=\frac{5}{7}.$$

При проведенні викладок використано властивість лінійності та твердження вправи 3.

10. Нехай $\varepsilon>0$ — довільне фіксоване число. Тоді відповідно до умови задачі $\exists n_0(\varepsilon):\ n>n_0(\varepsilon)\Rightarrow|S_n|<\frac{\varepsilon}{2H}$.

Крім того, за умовою ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_{mn}S_n$ абсолютно збіжний до числа t_m, тому

$$|t_m|=\left|\sum_{n=0}^{n_0(\varepsilon)}\alpha_{mn}S_n+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\alpha_{mn}S_n\right|\le\left|\sum_{n=0}^{n_0(\varepsilon)}\alpha_{mn}S_n\right|+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|\alpha_{mn}||S_n|<$$

$$<\left|\sum_{n=0}^{n_0(\varepsilon)}\alpha_{mn}S_n\right|+\frac{\varepsilon}{2H}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|\alpha_{mn}|\le\left|\sum_{n=0}^{n_0(\varepsilon)}\alpha_{mn}S_n\right|+\frac{\varepsilon H}{2H}=\left|\sum_{n=0}^{n_0(\varepsilon)}\alpha_{mn}S_n\right|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Через те що за умовою $\alpha_{mn}\to 0,\ m\to\infty,\ \forall n$, то $\sum\limits_{n=0}^{n_0(\varepsilon)}\alpha_{mn}S_n\to 0,\ m\to\infty$.

Отже,

$$\exists m_0(\varepsilon):\ m>m_0(\varepsilon)\Rightarrow\left|\sum_{n=0}^{n_0(\varepsilon)}\alpha_{mn}S_n\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

тому

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists m_0(\varepsilon):\ m>m_0(\varepsilon)\Rightarrow|t_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

тобто $\lim\limits_{m\to\infty}t_m=0$.

§ 11.3. Ознаки збіжності додатних рядів

Числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *додатним*, якщо $a_n \ge 0,\ n \in \mathbf{N}$.

Критерій збіжності додатного ряду. Додатний ряд збіжний тоді й тільки тоді, коли послідовність його часткових сум обмежена зверху.

Ознаки порівняння. Нехай задано додатні ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Тоді:

1) ці ряди одночасно збіжні (розбіжні), якщо $\exists \alpha > \beta > 0$ і $\exists\ k_0 : \beta \le \dfrac{a_n}{b_n} \le \alpha \quad \forall n \ge k_0$;

2) якщо $\exists\ \alpha > 0$ і $\exists\ k_0 : a_n \le \alpha b_n \quad \forall\ n \ge k_0$, то із збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а з розбіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$;

3) якщо $\exists k_0 : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{b_{n+1}}{b_n} \quad \forall n \ge k_0$, то із збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а з розбіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ознака Д'Аламбера. Якщо $\exists\ k_0$ і $0 < q < 1 : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1 \quad \forall\ n \ge k_0$, то додатний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний; якщо $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \quad \forall\ n \ge k_0$, то $a_n \not\to 0,\ n \to \infty$, і, отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний.

Ознака Коші. Якщо $\exists\ k_0$ і $0 < q < 1 : \sqrt[n]{a_n} \le q < 1 \quad \forall\ n \ge k_0$, то додатний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний. Якщо $\sqrt[n]{a_n} \ge 1 \quad \forall n \ge k_0$, то $a_n \not\to 0,\ n \to \infty$, і, отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний.

На практиці для відшукання числа q, про яке йдеться в останніх двох ознаках, часто буває корисним знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$, де $\alpha_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ в ознаці Д'Аламбера і $\alpha_n = \sqrt[n]{a_n}$ в ознаці Коші.

Інтегральна ознака Коші. Якщо $f(x) \geq 0$ і f — незростаюча функція на проміжку $[x_0;\ +\infty]$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ і невласний інтеграл $\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ одночасно збіжні (розбіжні).

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) якщо ряд збіжний, то послідовність його часткових сум обмежена;

2) твердження, обернене до 1), є правильним;

3) якщо додатні ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{b_n}$ розбіжні, то розбіжний і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n+b_n}$;

4) існує збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ такий, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ розбіжний;

5) якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ довільні і $a_n \leq b_n \quad \forall\, n$, то із збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

6) якщо $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \quad \forall\, n$, то додатний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний;

7) якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ збіжний і $0 < \alpha_n \to 0,\ \ n \to \infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha_n+1}}$ розбіжний;

8)• якщо $\exists\, k_0$ і $0 < q < 1:\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \forall n \geq k_0$, то $\exists\ k_1$ і $0 < q_1 < 1:\ \sqrt[n]{a_n} \leq q_1 \quad \forall n \geq k_1$, інакше кажучи, якщо ряд збіжний за ознакою Д'Аламбера, то він збіжний і за ознакою Коші;

9) існує додатний розбіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \to 0,\ \ n \to \infty$, такий, що всі ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha},\ \alpha > 1,\ \alpha \in \mathbf{R}$, розбіжні;

10) якщо виконано умови інтегральної ознаки Коші, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ збіжний тоді й тільки тоді, коли збігатиметься невласний інтеграл $\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$;

11) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+a_{n+1}}{na_n}$ розбіжний для довільної додатної послідовності (a_n)?

2. Довести збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, якщо:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно збіжний;

2) послідовність (na_n) обмежена;

3) послідовність (na_n) нескінченно мала.

3. Нехай ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ збіжні. Довести, що при цьому збіжними є також і ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$.

4•. Послідовність (na_n) нескінченно мала, якщо послідовність (a_n) монотонна, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний. Довести це.

5. Дослідити дані ряди на збіжність за ознаками порівняння:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)5^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n+1}$;

9) $\frac{2+1}{5+1} + \frac{2^2+1}{5^2+1} + \frac{2^3+1}{5^3+1} + \ldots$; 10) $\frac{1}{2\cdot 1-1} + \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2-1} + \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3-1} + \ldots$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{2}{n}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$; 13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^2}}$;

14) • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right)$; 15) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} + \ldots$;

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$; 17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$; 18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}$.

6. Дослідити дані ряди на збіжність за ознакою Д'Аламбера:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$; 4) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)}$; 6)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n)!!}$; 7) $1+\frac{1\cdot4}{3!!}+\frac{1\cdot4\cdot7}{5!!}+\ldots$;

8) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+3\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}+\ldots$; 9) $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{3^{n^2}}$; 11) $\sin\frac{\pi}{2}+4\sin\frac{\pi}{4}+9\sin\frac{\pi}{8}+\ldots$;

12) $3\cos\frac{\pi}{2}+9\cos\frac{\pi}{6}+27\cos\frac{\pi}{24}+\ldots$; 13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{n!}\operatorname{arctg}\frac{1}{3^n}$.

7. Дослідити дані ряди на збіжність за ознакою Коші:

1) $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$; 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an}{n+2}\right)^n$, $a>0$; 5)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{2^n}$; 6) $2+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ldots$;

7) $\arccos 1+\arccos^2\frac{1}{2}+\arccos^3\frac{1}{3}+\ \ldots$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n+1}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$;

10) $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots$.

8. Дослідити дані ряди на збіжність за інтегральною ознакою Коші:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^4 n}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$; 3)• $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n}{n^4-4}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$;

5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$; 6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n}$; 7) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n\ln^q\ln n}$;

8) $\left(\frac{1+1}{1+2^2}\right)^2+\left(\frac{1+2}{1+2^2}\right)^2+\left(\frac{1+3}{1+3^2}\right)^2+\ldots$.

9. Дослідити дані ряди на збіжність (різні приклади):

1) $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\ldots$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2n^3+1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+5}{1+2n}\right)^n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^{n+1}}{n^n}$; 6) $\frac{1}{5}\cos\frac{\pi}{3}+\frac{1}{25}\cos\frac{\pi}{4}+\ldots$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^6+15}}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{(2n+1)!!}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+\sqrt[3]{n}}$; 10) $\frac{\ln 2}{4}+\frac{\ln 3}{9}+\frac{\ln 4}{16}+\ldots$;

11) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$; 13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!}{n^n}$; 14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}$;

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)$; 16) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{11\cdot 11}+\ldots$;

17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 9\ldots n^2}{(4n-3)!!}$; 18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$; 19) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$; 20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$;

21) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n}}$; 22) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt[k]{n}}$; 23) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n=\begin{cases}1, & n=1,2,\\ \sqrt{n}\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}, & n\geq 3.\end{cases}$

10. Нехай $a_n>0$ і $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q<1$ $\forall n\geq n_0$. Довести, що $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k\leq$ $\leq a_{n_0}\frac{q^{n-n_0+1}}{1-q}$ $\forall n\geq n_0$.

11. Скільки членів ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{((2n)!!)^2}{(4n)!!}$ достатньо взяти, щоб $|S_n-S|<\varepsilon=$ $=10^{-6}$, де S_n — часткова сума, а S — сума заданого ряду?

12. Якщо $\exists\, k_0$ і $\exists\, q>1$: $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geq q>1$ $\forall n\geq k_0$, то додатний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ збіжний. Якщо $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leq 1$, то цей ряд розбіжний. Довести це (ознака Раабе).

13. Нехай $c_n>0$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}=+\infty$, $a_n>0$ $\forall n$ та $k_n=c_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}$ $\forall n$. Якщо $\exists\delta>0$ і $\exists\, k_0$: $k_n\geq\delta$ $\forall\, n\geq k_0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ збіжний. Якщо ж $k_n\leq 0$ $\forall\, n\geq k_0$, то цей ряд розбіжний. Довести це (ознака Куммера).

14. Дослідити на збіжність дані ряди за ознакою Раабе або Куммера:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}$, $a>0$;

3)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$, $a>0$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+p}}$.

15. Вивести ознаки Д'Аламбера та Раабе з ознаки Куммера.

16. Довести рівності:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0;$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!}{a^n}=0,\ a>1;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(2n)!}=0;$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0.$

17. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, якщо:

1) $a_n=\displaystyle\int_0^{1/n}\frac{\sqrt{x}dx}{x^2+1};$ 2) $a_n=\displaystyle\int_0^{1/n}\frac{\sin^3 xdx}{1+x^4};$

3) $a_n=\displaystyle\int_0^{1/n}\frac{\sqrt[3]{x}dx}{1+x^4};$ 4) $a_n=\displaystyle\int_{\pi n}^{\pi+\pi n}\frac{\cos^2 x}{x}dx.$

18. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x_n^2}$, де x_n — додатні корені рівняння $x=\operatorname{tg}x$, взяті у порядку їхнього зростання.

19. Чи збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{u_n}$, де $u_1=1,\ u_2=2,\ u_n=u_{n-2}+u_{n-1},\ n\ge 3$?

***20**. З гармонічного ряду вилучено всі члени, у знаменниках яких є цифра 3. Довести, що здобутий ряд збіжний і його сума менша за 25.

Зразки розв'язування задач

1. 8) Якщо $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\le q<1\quad\forall n\ge k_0$, то $a_n\le qa_{n-1}\le q^2a_{n-2}\le\ldots\le q^{n-k_0}a_{k_0}\quad\forall n\ge k_0$. Звідси

$$\sqrt[n]{a_n}\le\sqrt[n]{q^{n-k_0}a_{k_0}}=q\left(\frac{a_{k_0}}{q}\right)^{\frac{1}{n}}\to q<1,\ n\to\infty,$$

отже,

$$\forall q_1\in(q;1)\ \ \exists k_1:\ n\ge k_1\Rightarrow q\left(\frac{a_{k_0}}{q}\right)^{\frac{1}{n}}<q_1,$$

тому $\sqrt[n]{a_n}<q_1<1\quad\forall n\ge k_1$.

4. Із збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ випливає, що $a_n\to 0,\ n\to\infty$. До того ж послідовність (a_n) монотонна, тому $a_n\ge 0\ \ \forall n$ або $a_n\le 0\ \ \forall n$.

Нехай $a_n \geq 0 \ \forall n$. За критерієм Коші $\alpha_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n} \to 0, \ n \to \infty$. Крім того, $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n} \geq n a_{2n}$. Отже, $2n a_{2n} \leq 2\alpha_n \to 0, \ n \to \infty$.

Аналогічно можна показати, що $(2n-1)\, a_{2n-1} \to 0, \ n \to \infty$ (зробіть це самостійно). Остаточно $n a_n \to 0, \ n \to \infty$.

5. 14) Маємо

$$a_n = \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{n}\left(1 - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right).$$

Оскільки послідовність $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \text{e}, \ n \to \infty$, і зростаюча, то $a_n \geq 0 \ \ \forall n$. Крім того, за правилами Лопіталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Тому

$$\frac{a_n}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{1 - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{\dfrac{1}{n}} \to \frac{1}{2}, \quad n \to \infty,$$

і за ознакою порівняння заданий ряд збіжний.

Звідси можна дістати корисний наслідок. Нехай

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\ldots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1) \to c, \quad n \to \infty,$$

звідки

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n+1) + c + \varepsilon_n,$$

де $\varepsilon_n \to 0, \ \ n \to \infty$.

6. 6) Оскільки

$$a_n = \frac{n^3}{(2n)!!} = \frac{n^3}{2\cdot 4 \ldots 2n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{(2n+2)!!} = \frac{(n+1)^3}{2\cdot 4\ldots 2n(2n+2)},$$

то

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3 (2n)!!}{(2n+2)!!\, n^3} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{2n+2} \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{2n+2} = 0 < 1,$$

тому заданий ряд збіжний.

7. 5) Маємо

$$a_n = \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} = \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{\text{e}}{2} > 1.$$

Отже, заданий ряд розбіжний.

8. 3) Функція $f(x)=\dfrac{x}{x^4-4}$ додатна та спадна на проміжку $[3;+\infty]$. Дослідимо на збіжність невласний інтеграл:

$$\int\limits_3^{+\infty}\frac{xdx}{x^4-4}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_3^b\frac{xdx}{x^4-4}=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int\limits_3^b\frac{d\left(x^2\right)}{\left(x^2\right)^2-4}=\frac{1}{8}\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{x^2-2}{x^2+2}\Bigg|_3^b=$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\frac{b^2-2}{b^2+2}-\ln\frac{7}{11}\right)=\frac{1}{8}\left(\ln\lim_{b\to+\infty}\frac{b^2-2}{b^2+2}-\ln\frac{7}{11}\right)=-\frac{1}{8}\ln\frac{7}{11}.$$

Отже, розглядуваний невласний інтеграл збіжний, тому і заданий ряд збіжний.

14. 3) Загальний член ряду $b_n=\dfrac{a^n n!}{n^n}$. Тоді

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}a^n n!}=\frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\quad \text{і}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a}{\mathrm{e}}.$$

Тому якщо $a>\mathrm{e}$, то $\dfrac{a}{\mathrm{e}}>1$, і за ознакою Д'Аламбера заданий ряд розбіжний. Якщо $a<\mathrm{e}$, то $\dfrac{a}{\mathrm{e}}<1$, і за ознакою Д'Аламбера ряд збіжний. Якщо $a=\mathrm{e}$, то ознака Д'Аламбера відповіді про збіжність або розбіжність ряду не дає. Застосуємо ознаку Раабе.

Розглянемо

$$R_n=n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\mathrm{e}}-1\right).$$

За правилами Лопіталя

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{1/x}-\mathrm{e}}{x\mathrm{e}}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}}{x\mathrm{e}}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\left(-\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{x(1+x)}\right)}{\mathrm{e}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\ln(1+x)-\frac{1+x}{1+x}}{2x+3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{1+x}}{2+6x}=-\frac{1}{2},$$

тобто $R_n\to-\dfrac{1}{2}$, $n\to\infty$, а отже, для досить великих n маємо $R_n<1$, тому за ознакою Раабе заданий ряд у розглядуваному випадку розбіжний.

Таким чином, заданий ряд збіжний при $a<\mathrm{e}$ і розбіжний при $a\ge\mathrm{e}$.

§ 11.4. Ряди з довільними членами

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ з довільними дійсними або комплексними членами можна дослідити на абсолютну збіжність, застосувавши до ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\,c_n\,|$ одну з ознак збіжності додатних числових рядів.

Знакозмінний ряд виду

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n,$$

$$\text{де } a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} \tag{1}$$

називають *знакопочережним рядом.*

Теорема Лейбніца (достатня умова збіжності ряду (1). *Якщо в ряді* (1) $a_{n+1} \le a_n$, $n \in \mathbf{N}$, *та* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то цей ряд збіжний і сума його* S *задовольняє нерівність* $0 < S < a_1$, *а* $S - S_n = (-1)^n a_{n+1} \cdot \theta_n$, *де* $0 < \theta_n \le 1$.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|} < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ абсолютно збіжний;

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ абсолютно збіжний, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1$;

3) якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ не є абсолютно збіжним;

4) якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ умовно збіжний;

5) якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ розбіжний;

6) знакопочережним рядом є будь-який ряд виду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$;

7) загальний член знакопочережного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ дорівнює a_n;

8) знакопочережний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ збіжний, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

9) твердження, обернене до 8), є правильним?

2. Визначити, яким є даний ряд (абсолютно збіжним, умовно збіжним чи розбіжним; чи можна до нього застосувати ознаку Лейбніца?):

1) $\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{2\cdot 5^2} + \dfrac{1}{3\cdot 5^3} - \ldots$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$; 3) $1 - \dfrac{2^5}{2} + \dfrac{3^5}{6} - \ldots$;

4) $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{36} - \ldots$; 5) $\dfrac{\sin\alpha}{3} + \dfrac{\sin 2\alpha}{3^2} + \dfrac{\sin 3\alpha}{3^3} + \ldots$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$;

7)• $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)!!}{2\cdot5\cdot8\ldots(3n-1)}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$; 11) $\sin 1-\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{3}-\ldots$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+\ln n}$;

13) $1{,}1-1{,}02+1{,}003-1{,}0004+\ldots$; 14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2+n+1}$;

15) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\ln n}$; 16) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{3^{2n-1}}+\ldots$;

17) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\ldots$;

18) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\frac{1}{n}$; 19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}}$; 20) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

3. Визначити, скільки треба взяти членів даного ряду, щоб обчислити його суму з точністю до ε:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$, $\varepsilon=10^{-3}$; 2)• $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, $\varepsilon=10^{-4}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$, $\varepsilon=10^{-2}$; 4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)(n+2)}$, $\varepsilon=10^{-2}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{(4n+1)5^n}$, $\varepsilon=10^{-3}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot2^n}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n>0$, $n\in\mathbf{N}$, збіжний. Довести, що тоді збігатиметься і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

5•. Довести, що $\sum_{k=1}^{m}a_kb_k=a_mb_m-\sum_{k=1}^{m-1}(a_{k+1}-a_k)B_k$, де $B_k=\sum_{i=1}^{k}b_i$, $1\le k\le m$ (перетворення Абеля).

6•. Нехай $\left|\sum_{k=1}^{n}b_k\right|\le H$ $\forall n$, а послідовність (a_n) монотонна і $a_n\to0$, $n\to\infty$. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ збіжний (ознака Діріхле).

7*. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний, а послідовність (a_n) монотонна і обмежена. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ збіжний (ознака Абеля).

8. Довести ознаку Лейбніца як наслідок ознаки Діріхле.

9•. Нехай $a_{n+1} < a_n \to 0$, $n \to \infty$. Довести, що ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ $\forall x$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ $\forall x \in \mathbf{R}:$ $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, збіжні. Коли ці ряди будуть абсолютно збіжними?

10. Дослідити на збіжність та абсолютну збіжність дані ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2\cdot 2^n}{3^n+1};\quad 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)};\quad 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^4 n}{n};\quad 4)\bullet\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln\ln n};$$

$$5)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^{\alpha}};\quad 6)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{n}x}{n^{\alpha}},\ x>0;\quad 7)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin^{2n}x}{n}.$$

11. Дослідити на збіжність та абсолютну збіжність дані ряди з комплексними членами:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}+i\frac{(-1)^n}{n^{\beta}};\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{3^n+n}+i\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2};$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}-i\left(1-\cos\frac{2}{n}\right);\qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}+i\sin\frac{1}{n};$$

$$5)\ \frac{1+i}{2}+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2+\left(\frac{1+i}{2}\right)^3+\ldots;\qquad 6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n i(\sin n+\cos n)}{n^2}.$$

12. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ збіжний і $\alpha \le \arg z_n \le \beta$, причому $\beta-\alpha<\pi$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ абсолютно збіжний.

Зразки розв'язування задач

2. 7) Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}=-1-\frac{0}{2}+\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{3}-\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}+\ldots.$$

Відкинувши перші два члени ряду, дістанемо знакопочережний ряд, для якого $a_n=\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$, $n=3, 4, \ldots$, і $a_n \to 0$, $n\to\infty$.

Крім того,

$$a_n - a_{n+1} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} - \frac{\cos\frac{\pi}{n+1}}{n+1} = \frac{n\left(\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi}{n+1}\right) + \cos\frac{\pi}{n}}{n\ (n\ +\ 1)} =$$

$$= \frac{-2n\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)\sin\frac{\pi}{2n(n+1)} + \cos\frac{\pi}{n}}{n(n+1)}.$$

Перший доданок у чисельнику останнього дробу прямує до нуля, а другий до одиниці, якщо $n \to \infty$ (переконайтеся в цьому самостійно). Тому $\exists\ n_0 :\ n > n_0 \Rightarrow a_n - a_{n+1} > 0$. Отже, виконано умови ознаки Лейбніца, за якою заданий ряд збіжний.

Через те що $a_n = \dfrac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} \geq \dfrac{1}{2n}$, $n \geq 3$, то за ознакою порівняння заданий ряд не є абсолютно збіжним. І остаточно, заданий ряд умовно збіжний.

3. 2) Оскільки $a_n = \dfrac{1}{n^2} > \dfrac{1}{(n+1)^2} = a_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$ та $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, то умови ознаки Лейбніца виконано. Отже, заданий ряд збіжний і $S - S_n = (-1)^n \theta_n a_{n+1}$, $0 \leq \theta_n \leq 1$, де S — сума, а S_n — n–та часткова сума цього ряду, тобто $\left|S - S_n\right| \leq a_{n+1} =$ $= \dfrac{1}{(n+1)^2} \leq 10^{-4}$, $n+1 \geq 10^2$, звідки $n \geq 99$. Отже, для обчислення суми заданого ряду з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ досить взяти 99 перших його членів.

5. Оскільки $B_k = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i$, то $b_1 = B_1$ і $b_k = B_k - B_{k-1}$, $k \geq 2$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k = a_1 B_1 + \sum_{k=2}^{m} a_k \left(B_k - B_{k-1}\right) = a_1 B_1 + a_2 B_2 - a_2 B_1 + a_3 B_3 -$$

$$-a_3 B_2 + \ldots + a_{m-1} B_{m-1} + a_{m-1} B_{m-2} + a_m B_m - a_m B_{m-1} = \left(a_1 - a_2\right) B_1 +$$

$$+\left(a_2 - a_3\right) B_2 + \ldots + \left(a_{m-1} - a_m\right) B_{m-1} + a_m B_m = a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} \left(a_{k+1} - a_k\right) B_k.$$

6. За критерієм Коші ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ збіжний тоді й тільки тоді, коли $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n_0(\varepsilon)$: $n > n_0(\varepsilon)$ $\forall\, p \in \mathbf{N} \Rightarrow \left|a_{n+1} b_{n+1} + \ldots + a_{n+p} b_{n+p}\right| < \varepsilon$.

Розглянемо суму $a_{n+1} b_{n+1} + \ldots + a_{n+p} b_{n+p} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k}$. Застосувавши перетворення Абеля, дістанемо

$$\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k} = a_{n+p} \sum_{k=1}^{p} b_{n+k} - \sum_{k=1}^{p-1} \left(a_{n+k+1} - a_{n+k}\right) \sum_{i=1}^{k} b_{n+i}.$$

Оскільки

$$\left|\sum_{i=1}^{k} b_{n+i}\right| = \left|b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+k}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n+k} b_i - \sum_{i=1}^{n} b_i\right| \le 2H \quad \forall k \in \mathbf{N},$$

то

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k}\right| \le 2H\left(\left|a_{n+p}\right| + \sum_{k=1}^{p}\left|a_{n+k+1} - a_{n+k}\right|\right).$$

Припустимо, що послідовність (a_n) неспадна. Тоді $a_n \le 0 \quad \forall n$, оскільки за умовою $a_n \to 0,\ n \to \infty$, і

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left|a_{n+k+1} - a_{n+k}\right| = \sum_{k=1}^{p-1}\left(a_{n+k+1} - a_{n+k}\right) = a_{n+2} - a_{n+1} + a_{n+3} - a_{n+2} + \ldots +$$
$$+ a_{n+p} - a_{n+p-1} = a_{n+p} - a_{n+1},$$

то

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k}\right| \le 2H\left|a_{n+1}\right| \to 0,\ n \to \infty,$$

незалежно від $p \in \mathbf{N}$. Отже, умови критерію Коші виконуються і тому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ збіжний.

Міркування для випадку незростаючої послідовності (a_n) аналогічні.

9. Нехай $c_n = a_n \cos nx + i a_n \sin nx = a_n(\cos nx + i \sin nx) = a_n e^{inx} = a_n\left(e^{ix}\right)^n = a_n z^n$, де $z = e^{ix}$, причому $|z| = 1$ і $z \ne 1 \Leftrightarrow x \ne 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Застосуємо до ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ознаку Діріхле. Маємо $a_{n+1} \le a_n \to 0,\ n \to \infty$, а $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z^k\right| = \left|\dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| \le \dfrac{2}{|1 - z|} < +\infty$, якщо $x \ne 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + i a_n \sin nx)$ збіжний $\forall x \ne 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Тоді за властивістю збіжності ряду з комплексними членами ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ збіжні $\forall x \ne 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. Якщо $x = 2\pi k$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, тому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ збіжний $\forall x \in \mathbf{R}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ збігатиметься $\forall x \in \mathbf{R}$ тоді й тільки тоді, коли збіжним буде ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Оскільки $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|a_n z^n\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \ge 0,\ n \in \mathbf{N}$, за умовою), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ абсолютно збіжний тоді й тільки тоді, коли збігатиметься ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Тому (див. задачу 2

§ 11.2) ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ абсолютно збіжні $\forall\, x \in \mathbf{R}$, якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний. Якщо останній ряд розбіжний, то $\forall\, x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$, ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ умовно збіжні (довести це).

10. 4) Оскільки $\dfrac{1}{\ln\ln(n+1)} \leq \dfrac{1}{\ln\ln n} \to 0,\ n \to \infty$, то (див. задачу 9) ряди $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{\sin n}{\ln\ln n}$ і $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{\cos n}{\ln\ln n}$ збіжні. Враховуючи, що $\sin\left(n + \dfrac{1}{n}\right) = \sin n \cos\dfrac{1}{n} + \cos n \sin\dfrac{1}{n}$, розглянемо ряди $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{\sin n}{\ln\ln n} \cos\dfrac{1}{n}$ і $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{\cos n}{\ln\ln n} \sin\dfrac{1}{n}$.

За ознакою Абеля ці ряди збіжні, оскільки послідовності $\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)$ і $\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)$ монотонні й обмежені. Звідси за властивістю лінійності збіжним є ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\ln\ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln\ln n} \cos\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\ln\ln n} \sin\frac{1}{n}.$$

Розділ 12 ФУНКЦІОНАЛЬНІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ. РЯДИ ФУР'Є

§ 12.1. Функціональні послідовності та ряди

Функціональною послідовністю називають відображення Φ множини $\mathbf{N}$ натуральних чисел на деяку множину функцій дійсної або комплексної змінної, визначених на множині E. При цьому $\Phi(n) = f_n(x)$ — *n-й або загальний член функціональної послідовності,* яку позначають $(f_n(x))$ або $\{f_n(x)\}$.

Функціональну послідовність $(f_n(x))$ називають *збіжною в точці* $x_0 \in E$, якщо числова послідовність $(f_n(x_0))$ є збіжною, і *збіжною на множині* E, якщо вона збіжна $\forall\, x \in E$, тобто $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \neq \infty$ $\forall\, x \in E$, або $|f_n(x) - f(x)| \to 0,\ n \to \infty,\ \ \forall\, x \in E$.

Функціональну послідовність $(f_n(x))$ називають *рівномірно збіжною на* E до функції f і записують $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \overset{p}{=} f(x)$ на E або $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty$, на E, якщо

$$\sup_E \left| f_n(x) - f(x) \right| \to 0, \quad n \to \infty. \qquad (1)$$

Функціональним рядом називають вираз

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad (2)$$

де $(f_n(x))$ — задана функціональна послідовність, $x \in E$. При цьому $f_n(x)$ називають *n-м* або *загальним членом функціонального ряду.*

Функціональний ряд (2) називають *збіжним (абсолютно збіжним) у точці* $x_0 \in E$, якщо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ є збіжним (абсолютно збіжним), і *збіжним (абсолютно збіжним) на множині* E, якщо він є збіжним (абсолютно збіжним) $\forall\, x \in E$. При цьому сума ряду (2) є функцією змінної x: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = F(x)$, $x \in E$, і кажуть, що F розвивається в ряд (2) на множині E.

Множину всіх точок x, при яких ряд (2) збігається (абсолютно збігається), називають *множиною* або *областю збіжності (абсолютної збіжності)* цього ряду.

Функціональний ряд (2) називають *рівномірно збіжним на* E до суми F і записують $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{p}{=} F(x)$, якщо $\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \rightrightarrows F(x)$, $n \to \infty$, на E.

Критерій Коші рівномірної збіжності. Функціональний ряд (2) рівномірно збігається на E тоді й тільки тоді, коли $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0(\varepsilon)$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall\, x \in E, \quad \forall\, n > n_0(\varepsilon) \quad \text{і} \quad p \in \mathbf{N}.$$

Ознака Веєрштрасса абсолютної та рівномірної збіжності. Функціональний ряд (2) збігається на множині E абсолютно і рівномірно, якщо існує додатний збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ такий, що $|f_n(x)| \le a_n \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$ і $\forall\, x \in E$. При цьому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ називають *мажорантним*.

Властивості рівномірно збіжних рядів. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{p}{=} F(x)$ на множині E. Тоді:

1) якщо $\lim\limits_{E \ni x \to x_0} f_n(x) \ne \infty \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$, то $\lim\limits_{E \ni x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$;

2) якщо $\forall\, n \in \mathbf{N}$ функції f_n неперервні в точці $x_0 \in E$ (на множині E), то й функція F є неперервною у цій точці (на множині E);

3) якщо $\forall\, n \in \mathbf{N}$ функції f_n інтегровні на $[a; b]$, то

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx; \tag{3}$$

4) якщо $\forall n$ функції f_n' неперервні на $E = \langle a; b \rangle$, причому $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \overset{p}{=} \varphi(x)$ на E і $\exists x \in E$: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = F(x) \ne \infty$ (замість умови $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{p}{=} F(x)$ на E), то останній ряд збігається до $F(x)$ на E і $F'(x) = \varphi(x)$, тобто

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad \forall\, x \in \langle a; b \rangle. \tag{4}$$

Вправи

1. Чи правильні дані твердження (усно):

1) кожна числова послідовність є функціональною;

2) рівність $f_n(x)=\dfrac{1}{[x]-n}$, $n=1, 2, \ldots$, задає деяку функціональну послідовність $(f_n(x))$, де $x\in E=[1;+\infty)$;

3) послідовність $(f_n(x))$ збігається у точці x_0, якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$;

4) якщо послідовність $(f_n(x))$ рівномірно збігається на множині E, то вона є збіжною на E;

5) твердження, обернене до 4), є правильним;

6) функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ є абсолютно збіжним на E тоді й тільки тоді, коли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ є збіжним на E;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\overset{p}{=}F(x)$ на E, якщо $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)$:

$$n>n_0(\varepsilon)\Rightarrow\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)-F(x)\right|<\varepsilon\quad\forall x\in E;$$

8)• якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\overset{p}{=}F(x)$ на E, то $f_n(x)\rightrightarrows 0$, $n\to\infty$, на E;

9) твердження, обернене до 8), є правильним?

2. Дати відповідь на поставлені запитання:

1) Чи може сума функціонального ряду з неперервними членами бути розривною функцією?

2) Чи можна стверджувати, що ряд є рівномірно збіжним на E, якщо його члени і сума ряду є неперервними на E?

3) Чи може функціональний ряд на відрізку:

а) збігатися рівномірно і не збігатися абсолютно;

б) збігатися абсолютно і не збігатися рівномірно?

Розглянути приклади: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$, $x\in[a;b]$ $\forall[a;b]$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x(1-x)^n$, $x\in[0;\ 1]$.

3. Дослідити, чи є рівномірно збіжною на множині E функціональна послідовність $(f_n(x))$, якщо:

1) $f_n(x)=x^n$, $E=[0;1]$; 2)• $f_n(x)=x^n(1-x)$, $E=[0;1]$;

3) $f_n(x)=x^n-x^{2n}$, $E=[0;1]$; 4) $f_n(x)=\dfrac{1}{n^2+x^2}$, $E=\mathbf{R}$;

5) $f_n(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$, $E=[0;1]$; 6) $f_n(x)=\sin^{2n}x$, $E=\left[0;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$;

7) $f_n(x)=\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}$, $E=[0;+\infty)$; 8) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}$, $E=\mathbf{R}$.

4. Визначити множину E збіжності та множину E_p рівномірної збіжності функціональної послідовності $(f_n(x))$, якщо:

1) $f_n(x)=xe^{-nx}$; 2) $f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}$; 3) $f_n(x)=\sqrt[n]{\sin x}$;

4)• $f_n(x)=\sin^n x$; 5) $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$; 6) $f_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

5. Знайти множину E збіжності та суму F ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{2^n}$; 2)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^n x}{n}$; 5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin^n x}{n(n-1)}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\cos nx}{n(n+1)}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-nx}}{n}$; 8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{e^{-nx}}{n(n-1)}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\operatorname{tg}^n x}{n(n+1)}$.

6. Визначити множину E збіжності та множину E_1 абсолютної збіжності рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{x^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1-x^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^n x}{n}$; 8)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\sin^n x}{n^2}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}8^n x^{3n}\sin\dfrac{2x}{\sqrt{n}}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\operatorname{tg}^n x}{n}$; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^{\alpha}}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^{\alpha}}$;

13) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\sin\dfrac{1}{3^n x}$; 14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{9^n}\operatorname{tg}\dfrac{3x}{n^2}$; 15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+x^{2n}}$;

16) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x^3}{1+x^3}\right)^n$; 17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^n(x-4)}$; 18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$.

7. Дослідити, чи є рівномірно збіжними на множині E дані функціональні ряди:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{5^n}$, $E=[-1;1]$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^3}$, $E=[-1;1]$; 3)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n!x}{n^2}$, $E=\mathbf{R}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$, $E=[0;1]$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2+x^2}$, $E=\mathbf{R}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^2}{n^3+x^3}$, $E=[0;a]$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^2e^{-n^2x^2}$, $E=\mathbf{R}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)$, $E=\left[\frac{1}{2};2\right]$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^3}$, $E=[-4;-2]$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{x}{n^2}$, $E=\mathbf{R}$.

8. Дослідити, де є рівномірно збіжними дані функціональні ряди (чи можна до них застосувати ознаку Вейєрштрасса?):

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^\alpha}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x+n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\left(1+x^2\right)^n}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\left(1-x^2\right)^{n-1}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$; 11) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$; 12)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$.

9. 1) Показати, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x(1-x)^n$ збігається нерівномірно на відрізку $[0;\ 1]$ і рівномірно на відрізку $[0,5;\ 1]$. Для яких n залишок $|r_n(x)|<0,01$ $\forall\ x\in[0,5;\ 1]$?

2) Показати, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ рівномірно збігається на відрізку $[0;1]$. Для яких n залишок $|r_n(x)|<0,1$ $\forall\, x\in[0;\ 1]$?

3) Показати, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ збігається рівномірно до функції $f(x)=\frac{1}{x}$ на інтервалі $(0;+\infty)$. Для яких n залишок ряду $|r_n(x)|<0,1$ $\forall\ x\in(0;1)$?

4) Навести приклад нерівномірно збіжного на відрізку $[a;b]$ ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$, де $\varphi_n(x)$ — всюди розривні на $[a;b]$ функції, а сума ряду неперервна на $[a;b]$.

10. Вказати множину, де є неперервними дані функції:

1) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x+(-1)^n n}{x^2+n^2}$; 2) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$;

3) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x}\right)$;

4)• $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^{n}$;

5) $f(x)=(1-x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(nx^{n}-(n-1)x^{n-1}\right)$;

6) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2}\left(1-x^{2}\right)^{n-1}$.

11. Визначити, чи можна дані ряди інтегрувати почленно на вказаних відрізках, і якщо можна, то знайти інтеграл від суми ряду:

1)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n},\ x\in\left[0;\ \frac{1}{3}\right]$;   2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n},\ x\in[0;\ q],\ 0<q<1$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(nxe^{-nx^{2}}-(n-1)xe^{-(n-1)x^{2}}\right),\ x\in[0;\ 1]$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)\left(n(n+1)x^{n-1}-(n-1)nx^{n-2}\right),\ x\in[0;\ 1]$.

12. Визначити, чи можна дані ряди почленно диференціювати, і якщо можна, то знайти суми даного та продиференційованого рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n},\ x\in(-1;\ 1)$;   2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx},\ x\in(0;\ 1)$;

3)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2^{n}\pi x}{2^{n}},\ x\in\mathbf{R}$;   4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+x^{2^{n-1}}\right),\ x\in(0;\ 1)$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\cos\frac{x}{2^{n}},\ x\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$;   6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{n}},\ x\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

13. Нехай $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}b_{k}(x)\right|\le H\quad\forall x\in E,\ \forall n\in\mathbf{N}$ і $a_{n}(x)\rightrightarrows 0,\ n\to\infty$, на множині E. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n}(x)b_{n}(x)$ рівномірно збігається на E (*ознака Діріхле*). Використовуючи цю ознаку, довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ рівномірно збігається на будь-якому відрізку $[a;b]$, який не містить точок виду $x=2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$.

14. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_{n}(x)$ рівномірно збігається на множині E, $(a_{n}(x))$ — монотонна послідовність $\forall x\in E$ і $|a_{n}(x)|\le H\quad\forall n\in\mathbf{N},\ \forall x\in E$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n}(x)b_{n}(x)$ рівномірно збігається на E (*ознака Абеля*).

Використовуючи цю ознаку, довести рівномірну збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

на відрізку $[0; 1]$.

15. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x \to 0+} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n^x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 1-} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x^n - x^{n-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2}$; 4) $\lim\limits_{x \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(\frac{x}{x+2}\right)^n$.

Зразки розв'язування задач

1.8) Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне фіксоване число. Тоді за критерієм Коші $\exists\, n_0(\varepsilon):\ n > n_0(\varepsilon)$, $p \in N \Rightarrow \left|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)\right| < \varepsilon \ \ \forall x \in E$. Тому $\sup\limits_{E}\left|f_{n+1}(x) - 0\right| \le \varepsilon \ \ \forall n \ge n_0$, тобто $\sup\limits_{E}\left|f_{n+1}(x) - 0\right| \to 0$, $n \to \infty$, або $f_{n+1}(x) \rightrightarrows 0$, $n \to \infty$, на E. Отже, задане твердження правильне.

3. 2) Очевидно, $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$, $x \in [0; 1]$. Обчислимо $\sup\limits_{[0,1]}\left|f_n(x) - f(x)\right| = \max\limits_{[0,1]}\left(x^n - x^{n+1}\right)$ (внаслідок неперервності функцій f_n). Знайдемо найбільше значення функції f_n на відрізку $[0; 1]$. Маємо $f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n-(n+1)x)$; $f_n'(x) = 0$, якщо $x = 0$ або $x = \frac{n}{n+1}$. Оскільки $f_n(0) = f_n(1) = 0$, то

$$\max_{[0;1]} f_n(x) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Далі маємо

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{[0;1]}\left|f_n(x) - f(x)\right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = 0.$$

Отже, згідно з означенням рівномірної збіжності функціональної послідовності дістаємо, що $f_n(x) \rightrightarrows 0$ на $[0; 1]$.

4. 4) Якщо $|\sin x| < 1$, то $\sin^n x \to 0$, $n \to \infty$. Якщо $\sin x = 1$, то $\sin^n x = 1 \to 1$, $n \to \infty$, а якщо $\sin x = -1$, то послідовність $\left(\sin^n x\right) = \left((-1)^n\right)$ розбіжна. Отже, послідовність $\left(\sin^n x\right)$ збігається $\forall x \in \mathbf{R}:\ x \ne -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$, причому на кожному інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$

$$\sin^n x \to f(x) = \begin{cases} 0, & x \ne \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} \quad n \to \infty.$$

Оскільки $f_n(x)=\sin^n x$ неперервні на цьому інтервалі, а $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ розривна у точках $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, то задана послідовність не є рівномірно збіжною на будь-якому проміжку, який містить точки виду $\frac{\pi}{2}+2\pi k$. Якщо $[a;b]\subset\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$ і $\frac{\pi}{2}+2\pi k\notin[a;b]$, то $\max\limits_{[a;b]}|\sin x|=q<1\Rightarrow \sup\limits_{[a;b]}\left|\sin^n x-0\right|\le q^n\to 0,\quad n\to\infty\Rightarrow \sin^n x\rightrightarrows 0$ на $[a;b]$.

5. 2) При $x=0$ всі члени ряду дорівнюють нулю. Тому в цій точці ряд є збіжним і його сума $F(0)=0$. Якщо $x\ne 0$, то маємо геометричний ряд, у якого $q=\frac{1}{1+x^2}<1$, і тому він також є збіжним, причому його сума в цих точках

$$F(x)=\frac{x}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\frac{1+x^2}{x}.$$

Отже, множиною збіжності ряду є множина $\mathbf{R}$, а сума

$$F(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \frac{1+x^2}{x}, & x\ne 0.\end{cases}$$

6. 8) Зафіксуємо довільне $x\in\mathbf{R}$ і розглянемо додатний числовий ряд із загальним членом $a_n=\left|\frac{2^n\sin^n x}{n^2}\right|=\frac{2^n}{n^2}|\sin x|^n$. Застосуємо до нього ознаку Коші: $\sqrt[n]{a_n}=2|\sin x|\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}\to$ $\to 2|\sin x|$, $n\to\infty$. Звідси дістаємо, що коли $2|\sin x|<1$, тобто $-\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ є збіжним, а заданий функціональний ряд є абсолютно збіжним. Якщо $2|\sin x|>1$, тобто $\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, то $a_n\not\to 0$, а отже, заданий ряд є розбіжним. Нарешті, якщо $2|\sin x|=1$, то або $\sin x=\frac{1}{2}$, або $\sin x=-\frac{1}{2}$, і тому заданий функціональний ряд матиме вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ або $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ і є збіжним. Таким чином, заданий функціональний ряд є абсолютно збіжним $\forall\, x\in\left[-\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \frac{\pi}{6}+\pi k\right]$, $k\in\mathbf{Z}$, і розбіжним для всіх інших $x\in\mathbf{R}$.

7. 3) Застосуємо ознаку Вейєрштраса. Оскільки $\forall\, x\in\mathbf{R}$ маємо $\left|\frac{\sin n!x}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$, а числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ є збіжним, то заданий ряд рівномірно збігається на $E=\mathbf{R}$.

8. 12) Оскільки $\left|2^n\sin\frac{1}{3^n x}\right|\le\frac{2^n}{3^n|x|}=\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{1}{|x|}$, то за ознакою порівняння заданий ряд є абсолютно збіжним $\forall\, x\in\mathbf{R}:\ x\ne 0$. Разом з тим $\sup\limits_{\mathbf{R}\setminus\{0\}}\left|2^n\sin\frac{1}{3^n x}\right|=2^n\not\to 0$, $n\to\infty$. Тому згідно з вправою 1.8) заданий функціональний ряд не є рівномірно збіжним на $E=\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

Якщо взяти $E_1 = \{x : |x| \ge a > 0\} = (-\infty; -a) \cup [a; +\infty)$, то $\left|2^n \sin\frac{1}{3^n x}\right| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{|a|} \quad \forall x \in E_1$, і за ознакою Вейєрштрасса заданий функціональний ряд є рівномірно збіжним на E_1.

10. 4) Зафіксуємо x і розглянемо додатний ряд із загальним членом $a_n = \left|x + \frac{1}{n}\right|^n$. За ознакою Коші матимемо $\sqrt[n]{a_n} = \left|x + \frac{1}{n}\right| \to |x|$, $n \to \infty$. Тому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний при $|x| < 1$ і $a_n \not\to 0$ при $|x| > 1$, отже, заданий функціональний ряд розбігається при $|x| > 1$. У випадку, коли $|x| = 1$,

$$a_n = |x| \left|\left(1 + \frac{1/x}{n}\right)^n\right| \to |x| e^{\frac{1}{x}} \ne 0, \ n \to \infty.$$

Тому заданий функціональний ряд абсолютно збіжний, якщо $|x| < 1$, і розбіжний для інших x.

Зафіксуємо x_0, $|x_0| < 1$. Тоді $\exists q : |x_0| < q < 1$ і при $|x| < q$ дістанемо

$$a_n = \left|\left(x + \frac{1}{n}\right)^n\right| \le \left(q + \frac{1}{n}\right)^n = q^n \left(1 + \frac{1/q}{n}\right)^n \le H(q) q^n,$$

оскільки $\left(1 + \frac{1/q}{n}\right)^n \to e^{\frac{1}{q}}$, $n \to \infty$. Отже, $\left|\left(x + \frac{1}{n}\right)^n\right| \le Hq^n \quad \forall x : |x| < q$, а тому за ознакою Вейєрштрасса заданий функціональний ряд рівномірно збігається на $E_1 = \{x : |x| < q\}$. За відомою властивістю сума функціонального ряду неперервна на E_1, а тому неперервна і в точці $x_0 \in E_1$. Оскільки x_0 — довільна точка з множини $E = \{x : |x| < 1\}$, то сума цього ряду є неперервною функцією на E.

11. 1) Оскільки $\left|x^n\right| \le \frac{1}{3^n} \quad \forall x \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$, то за ознакою Вейєрштрасса даний ряд є рівномірно збіжним на заданому відрізку. Крім того, члени ряду $f_n(x) = x^n$ є неперервними функціями. Отже, згідно з властивістю 4) даний ряд можна інтегрувати на вказаному проміжку.

Інтеграл знайдіть самостійно.

12. 3) Даний ряд збігається рівномірно на всій числовій прямій, оскільки для нього існує мажорантний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Кожний член ряду $f_n(x) = \frac{\sin 2^n \pi x}{2^n}$ є диференційовною функцією на $\mathbf{R}$, причому $f_n'(x) = \pi \cos 2^n \pi x$ є неперервною функцією $\forall n \in \mathbf{N}$. Однак ряд із похідних $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \pi \cos 2^n \pi x$ розбігається у кожній точці, оскільки в жодній точці не виконується необхідна умова збіжності $\left(\lim\limits_{n \to \infty} \pi \cos 2^n \pi x \ne 0\right)$.

Отже, заданий ряд не можна почленно диференціювати.

§ 12.2. Степеневі ряди. Теореми Коші — Адамара і Абеля

Степеневим рядом називають функціональний ряд вигляду

$$a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{1}$$

де a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, — задані дійсні або комплексні числа (*коефіцієнти степеневого ряду*), z_0 — фіксоване, а z — довільне число (дійсне або комплексне).

Теорема Коші — Адамара. *Степеневий ряд* (1) *абсолютно збігається у точці* z_0 *і для* z *таких, що* $|z - z_0| < 1/\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$, *та розбігається для* z *таких, що* $|z - z_0| > 1/\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Число

$$R = 1/\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \tag{2}$$

називають *радіусом збіжності* степеневого ряду (1), круг $K = \{z : |z - z_0| < R\} \bigcup \{z_0\}$ — *кругом збіжності* цього ряду, а якщо (1) — степеневий ряд з дійсними членами, то інтервал $(z_0 - R;\ z_0 + R)$ називають *інтервалом збіжності* ряду (1).

Радіус збіжності R можна дістати також за однією з формул

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{3}$$

або

$$R = 1/\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \tag{4}$$

якщо ці границі існують (скінченні або нескінченні).

Взагалі *кругом (інтервалом) збіжності степеневого ряду* (1) називають круг (інтервал) з центром у точці z_0 і радіусом R, $0 \le R \le +\infty$, всередині якого ряд (1) збігається, а поза ним — розбігається.

Іноді краще знаходити круг (інтервал) збіжності, безпосередньо застосовуючи ознаки Д'Аламбера або Коші до ряду, утвореного з модулів членів ряду (1).

Теорема Абеля. *Якщо степеневий ряд* (1) *збігається у точці* $z_1 \ne z_0$, *то він абсолютно збігається* $\forall z : |z - z_0| < |z_1 - z_0|$. *Якщо ряд* (1) *розбігається у точці* z_1, *то він розбігається* $\forall z : |z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

Теорема про похідні суми степеневого ряду. *Сума* $f(z)$ *ряду* (1), *радіус збіжності якого* $R > 0$, *має в інтервалі (крузі) збіжності цього ряду похідну будь-якого порядку, причому*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k}. \tag{5}$$

Всередині інтервалу збіжності ряд (1) можна почленно інтегрувати, тобто

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (x_0 - R;\ \ x_0 + R). \tag{6}$$

Степеневі ряди (5) і (6) мають той самий радіус збіжності, що й ряд (1).

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) кожний степеневий ряд є функціональним рядом;

2) кожний функціональний ряд є степеневим рядом;

3) інтервал (круг) збіжності степеневого ряду — це будь-який інтервал (круг), в якому степеневий ряд збігається абсолютно;

4) кожний степеневий ряд має інтервал (круг) збіжності, який може вироджуватися у точку або у числову пряму (комплексну площину);

5) кожний степеневий ряд має додатний радіус збіжності;

6) якщо степеневий ряд збігається у точці z_1, то вона лежить у крузі збіжності цього ряду;

7) у межових точках інтервалу (круга) збіжності степеневий ряд може абсолютно збігатися або умовно збігатися, або розбігатися;

8)• якщо степеневий ряд абсолютно збігається в деякій межовій точці інтервалу (круга) збіжності, то він абсолютно збігається в інших межових точках цього інтервалу (круга) збіжності?

2. 1) Відомо, що степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається в точці $x = 2$ і розбігається в точці $x = 4$. Що можна сказати про поведінку цього ряду в точках 1, 3 і 5?

2) Відомо, що степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n$ збігається в точці $z = 2i$ і розбігається в точці $z = -i$. Що можна сказати про поведінку цього ряду в точках $\frac{1}{2}+i$, 2 і $3i$?

3) Відомо, що степеневий ряд і ряд, утворений з нього почленним диференціюванням, мають однакові радіуси збіжності. Чи можна стверджувати, що й проміжки збіжності цих рядів є однаковими?

3. Визначити радіус збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 1$, і довести, що ряд абсолютно збігається на межі круга збіжності.

4. Довести, що степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ є рівномірно збіжним у крузі $K_1 = \{z : |z - z_0| < R_1\}$, якщо $0 < R_1 < R$, де R — радіус збіжності цього ряду. Чи обов'язково степеневий ряд рівномірно збігається у крузі збіжності?

5. Знайти радіус, інтервал та область збіжності даного степеневого ряду, дослідивши його поведінку на кінцях інтервалу збіжності:

1)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt{n}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}x^n$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{\alpha}}$; 7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(n^2+3n+1\right)x^n$;

8)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nx)^n$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n(x+1)^n$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n(x-3)^n}{(3n+1)^5}$;

11)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}x^n$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^n}}{n!}x^n$; 13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$; 14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\,\mathrm{e}^{-n^2}x^n$;

15) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n$, $a>0$; 16)• $\sum\limits_{n=0}^{\infty}4^n(x+1)^n$; 17) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3n+1}{5n^2+2}(x-1)^n$;

18)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x-2)^n$; 19) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n+1}(x+2)^n$;

20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+c}$, $c>0$; 21) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$; 22) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x+1)^n}{n\ln^2(n+1)}$;

23) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{\ln n}(x-1)^n$; 24)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^n}{n\cdot 9^n}$;

25) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+1)^{2n}}{n\cdot 4^n}$; 26) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{3n}}{n^3}$; 27) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n(x+1)^{2n}$;

28) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n^2}x^{n^2}$; 29) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n x^{n^2}$; 30)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{c^{n^2}}x^{2n}$, $c>0$.

6. Знайти радіус та круг збіжності даного степеневого ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3z^n$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{2^n}$; 3)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{n^2}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1-i)^n}{n!}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!(z-i)^n$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2^n+i\,3^n\right)(z-2i)^n$; 7)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{3n}}{8^n}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}i\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^2}z^n$; 9)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^{n^2}}{n^3\cdot 4^n}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!(z+i)^{n^2}$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1+i)^{n^2}}{n!}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+n^n\cdot i\right)(z-i)^{n^n}$.

7. Нехай радіус збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ дорівнює R. Знайти радіуси збіжності даних рядів:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} z^{n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, a_n z^{n-1}$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^m z^n,\ m \in \mathbf{N}$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^{mn},\ m \in \mathbf{N}$.

8. Нехай радіуси збіжності степеневих рядів $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ і $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ дорівнюють відповідно R_1 і R_2. Яку умову задовольнятиме радіус збіжності R ряду:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$.

9. Знайти суми даних степеневих рядів:

1)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n}$;

6)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^{n-1}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^n$; 8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3) x^n$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n \cdot n}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{3n}}{2n \cdot 3^n}$; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{4^n (2n-1)}$;

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$; 13) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$; 14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n-1)\cdot 9^n}$;

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$; 16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$; 17) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n + (-1)^n}{n(n-1)} x^n$;

18) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+2} \right) x^{n+2}$; 19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n-1)n}$;

20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$; 21) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(2n+1) x^{n+2}$; 22)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n^2 + 7n + 4\right) x^n$;

23) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(2n^2 - 2n + 1\right) x^n$; 24) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(n^2 - 2n - 2\right) x^{n+2}$; 25) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!(n+2)}$;

26) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n n (z+i)^n$; 27) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 (z+i)^n$;

28) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^n} (z + (1-i))^{2n}$; 29) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n n (z-1+i)^{2n-i}$.

10. Розглядаючи геометричний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$, де $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $0 < r < 1$, знайти суми рядів:

1) $1 + r\cos\alpha + r^2\cos 2\alpha + \ldots + r^n \cos n\alpha + \ldots$;

2) $r\sin\alpha + r^2 \sin 2\alpha + \ldots + r^n \sin n\alpha + \ldots$.

11. Довести, що коли (a_n) — монотонна послідовність і $0 < a_n \to 0$, $n \to \infty$, то радіус збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ не менший за 1.

12. Нехай $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ $\forall z \in K = \{z : \ |z - z_0| > R\}$ і степеневий ряд збігається у точці z_1 такій, що $|z - z_0| = R$. Довести, що $f(z) \to f(z_1)$, якщо $z \to z_1$ уздовж радіуса, що сполучає точки z_1 і z_0 (*друга теорема Абеля*). Зокрема, якщо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ збігається, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{7}$$

13. Користуючись результатом вправи 9.2) і формулою (7), знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

14•. Користуючись результатом вправи 9.19) і формулою (7), знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$.

15. Нехай $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = B$ і $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = C$, де $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots$ $\ldots + a_n b_0$, $n = 0, 1, \ldots$, тобто $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ — добуток за Коші рядів $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$. Довести, що $C = AB$.

16. Показати, що сума, різниця і добуток двох степеневих рядів з центром інтервалу збіжності в точці x_0 є степеневими рядами з центрами інтервалів збіжності у тій самій точці x_0.

17. Піднести до квадрата ряд $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$.

18. Піднести до куба ряд $1 + x + x^2 + \ldots$.

Зразки розв'язування задач

1. 8) Припустимо, що степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ абсолютно збігається у точці z_1 такій, що $|z_1 - z_0| = R$, де R — радіус збіжності даного степеневого ряду. Тоді ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n||z_1 - z_0|^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n$ є збіжним. Для будь-якої іншої точки z_2 такої, що $|z_2 - z_0| = R$, маємо $\left|a_n (z_2 - z_0)^n\right| = |a_n| R^n$, і тому заданий степеневий ряд абсолютно збігається у точці z_2. Отже, розглянуте твердження правильне.

5. 1) За формулою (4) знаходимо

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1/n}} = 1.$$

Оскільки $x_0 = 0$, то інтервалом збіжності є $(-1;\ 1)$. Перевіримо поведінку ряду в кінцях інтервалу збіжності. Якщо $x = -1$, то дістаємо знакопочережний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, який збігається за ознакою Лейбніца. У точці $x = 1$ маємо гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який розбігається. Отже, проміжком збіжності заданого ряду є піввідрізок $[-1;\ 1)$.

8) Для визначення радіуса збіжності R зручно скористатись формулою (4), за якою

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Отже, ряд збігається лише в одній точці $x = 0$.

11) Ряд збігається $\forall x \in \mathbf{R}$, оскільки за формулою (3) маємо

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\cdot 3^n}{n!\cdot 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3} = +\infty.$$

16) Даний ряд є геометричним, у якого $q = 4\,(x+1)$. Він збігається, якщо $4|x+1| < 1$, і розбігається, якщо $4|x+1| \ge 1$. Отже, проміжок збіжності цього ряду визначається нерівністю $|x+1| < \frac{1}{4}$, тобто є інтервал $(-5/4;\ -3/4)$, а радіус збіжності $R = 1/4$.

18) Знаходимо радіус збіжності R за формулою (3). Маємо

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)^{n+1}}{n^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

Тоді інтервалом збіжності є $(2 - \mathrm{e};\ 2 + \mathrm{e})$. З'ясуємо поведінку ряду на кінцях здобутого проміжку. Якщо $x = 2 - \mathrm{e}$, то дістанемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n} \mathrm{e}^n.$$

Цей ряд є знакопочережним. Оскільки $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1$, тобто $|a_{n+1}| > |a_n| \ \ \forall n \in \mathbf{N}$, то члени останнього ряду, взяті за модулем, монотонно зростають, а отже, не виконується необхідна умова збіжності ряду $\left(\lim\limits_{n \to \infty} a_n \neq 0\right)$. Аналогічно переконуємось у тому, що заданий ряд є розбіжним і в точці $x = 2 + e$. Отже, проміжком збіжності ряду є інтервал $(2 - e;\ 2 + e)$.

24) 1-й спосіб. У даному випадку коефіцієнти при непарних степенях x дорівнюють нулю. Скористаємось безпосередньо ознакою Д'Аламбера для знаходження інтервалу збіжності. Маємо для $x \neq -2$

$$\lim_{n \to \infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot 9^n (x+2)^{2n+2}}{(n+1)\cdot 9^{n+1}(x+2)^{2n}} = \frac{1}{9}(x+2)^2.$$

Якщо $\frac{1}{9}(x+2)^2 < 1$, то ряд збігається, а якщо $\frac{1}{9}(x+2)^2 > 1$, то розбігається. Розв'язуючи вказані нерівності і враховуючи, що в точці $x_0 = -2$ ряд є збіжним, дістаємо інтервал збіжності $(-5;\ 1)$, симетричний відносно точки $x = -2$, а отже, радіус збіжності $R = 3$.

У кінцях інтервалу, тобто в точках $x = -5$ і $x = 1$, дістаємо знакопочережний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, який збігається за ознакою Лейбніца. Отже, заданий ряд збігається на відрізку $[-5;\ 1]$.

2-й спосіб. Оскільки $a_0 = 0$, $a_{2n} = \frac{1}{n \cdot 9^n}$ і $a_{2n-1} = 0$, $n \in \mathbf{N}$, то

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{n \cdot 9^n}} = \frac{1}{3}.$$

Тоді за формулою (2) дістаємо $R = 3$, а отже, інтервал збіжності $(x_0 - R;\ x_0 + R) = (-5;\ 1)$. Поведінку ряду на кінцях інтервалу досліджено вище.

30) Коефіцієнти даного степеневого ряду визначаються рівностями $a_0 = 0$, $a_{2n} = \frac{(2n)!}{c^{n^2}}$ і $a_{2n-1} = 0$, $n \in \mathbf{N}$. Оскільки за формулою (2) $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$, то

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \sqrt[2n]{\frac{(2n)!}{c^{n^2}}} = \frac{1}{c^{n/2}} \sqrt[2n]{1 \cdot 2 \ldots n(n+1) \ldots 2n} \geq \frac{1}{c^{n/2}} \sqrt[2n]{(n+1)^n} = \frac{\sqrt{n+1}}{c^{n/2}}.$$

Отже, $\sqrt[2n]{|a_{2n}|} \geq \frac{\sqrt{n+1}}{c^{n/2}} \to +\infty$, якщо $0 < c \leq 1$. Тому $R = 0$, якщо $0 < c \leq 1$, і степеневий ряд збігається тільки у точці $x = 0$.

Нехай тепер $c > 1$. Тоді

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \sqrt[2n]{\frac{(2n)!}{c^{n^2}}} \leq \frac{\sqrt[2n]{(2n)^{2n}}}{c^{\frac{n}{2}}} = \frac{2n}{c^{\frac{n}{2}}} \to 0,\ \ n \to \infty.$$

Отже, $R=+\infty$ і степеневий ряд абсолютно збігається на інтервалі $(-\infty;\ +\infty)$. Цей інтервал і є інтервалом збіжності заданого степеневого ряду для $c>1$.

6. 3) За формулою (4) маємо

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

Тоді круг збіжності $K=\{z:\ |z+i|<1\}$.

7) Введемо позначення $\dfrac{z^3}{8}=t$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{3n}}{8^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z^3}{8}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}t^n.$$

Останній ряд збігається, якщо $|t|<1$, і розбігається, якщо $|t|>1$. Отже, заданий ряд є збіжним, якщо $\dfrac{1}{8}\left|z^3\right|<1$, тобто для $|z|<\sqrt[3]{8}=2$.

Таким чином, круг $K=\{z:\ |z|<2\}$ є кругом збіжності, звідки знаходимо радіус збіжності $R=2$.

9) Для визначення круга збіжності у цьому випадку зручно скористатись ознакою Д'Аламбера. Маємо для $z\neq-2$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z+2)^{2n+2}\,n^3\cdot4^n}{(z+2)^{2n}\ (n+1)^3\cdot4^{n+1}}\right|=$$

$$=\frac{|z+2|^2}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3}=\frac{|z+2|^2}{4}.$$

Звідси дістаємо, що ряд збігається в крузі $|z+2|<2$ (враховано, що в точці $z_0=-2$, тобто у центрі круга, ряд є збіжним), радіус якого $R=2$, і розбігається зовні цього круга. Далі, на межі круга, тобто в точках кола $|z+2|=2$, маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z+2|^{2n}}{n^3\cdot4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}<+\infty,$$

а це означає, що ряд абсолютно збігається у замкненому крузі $|z+2|\leq2$, причому згідно з теоремою Вейєрштрасса збіжність у ньому є рівномірною.

9. 1) Скористаємось рівністю

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ |x|<1$$

(сума членів геометричної прогресії із знаменником x). Інтегруючи степеневий ряд почленно на відрізку $[0;\ x]\subset(-1;\ 1)$, дістаємо

$$\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-t)\Big|_0^x=-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots,\ |x|<1.$$

Отже,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),\ |x|<1.$$

6) Двічі диференціюючи рівність

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1},\ |x|<1,$$

дістаємо послідовно

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ \ldots\ +nx^{n-1}+\ \ldots=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1},\ |x|<1,$$

$$\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)'=\frac{2}{(1-x)^3}=2+3\cdot 2x+\ \ldots\ +n(n-1)x^{n-2}+\ \ldots=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2},\ |x|<1.$$

Отже, сума заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3},\ |x|<1.$$

22) Знайдемо радіус збіжності цього ряду за формулою (3):

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+7n+4}{(n+1)^2+7(n+1)+4}=1.$$

Отже, ряд збігається всередині інтервалу $(-1;\ 1)$. Запишемо цей ряд у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+7n+4\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n+6\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+4\sum_{n=1}^{\infty}x^n=S_1+S_2+S_3\,.$$

Здобуті ряди також є збіжними, якщо $|x|<1$.

Користуючись результатами вправи 9.6), маємо

$$S_1=x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=\frac{2x}{(1-x)^3},$$

$$S_2=6x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{6x}{(1-x)^2},$$

$$S_3=4x\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{4x}{1-x}.$$

Отже, остаточно дістаємо при $x\in(-1;\ 1)$

$$S=\frac{2x}{(1-x)^3}+\frac{6x}{(1-x)^2}+\frac{4x}{1-x}=\frac{2x\left(2x^2-7x+6\right)}{(1-x)^3}.$$

14. Скористаємось розвиненням

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}=2x\operatorname{arctg}x-\ln\left(1+x^2\right)$$

(див. вправу 9. 19)) і формулою (7), дістанемо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}=\lim_{x\to 1-}\left(2x\operatorname{arctg}x-\ln\left(1+x^2\right)\right)=2\cdot\frac{\pi}{4}-\ln 2=\frac{\pi}{2}-\ln 2.$$

§ 12.3. Ряд Тейлора. Розвинення функцій у степеневі ряди

Якщо функція f має у точці z_0 похідні будь-якого порядку, то *рядом Тейлора функції f за степенями* $(z-z_0)$ називають степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n. \tag{1}$$

Якщо степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ збігається до функції f у деякому околі точки z_0, то цей ряд є рядом Тейлора для функції f за степенями $(z-z_0)$ і його називають ще *розвиненням функції f у степеневий ряд* в околі точки z_0 (або за степенями $(z-z_0)$).

У цьому випадку кажуть, що функція f розвивається у степеневий ряд в околі точки z_0.

Критерій розвинення функції у степеневий ряд. Функція f дійсної змінної розвивається у степеневий ряд в околі точки x_0 тоді й тільки тоді, коли функція f у цьому околі має похідні всіх порядків і

$$\lim_{n\to\infty} r_n(f,\, x,\, x_0)=0 \quad \forall x\in O(x_0), \tag{2}$$

де $r_n(f,\, x,\, x_0)$ — залишковий член формули Тейлора для функції f.

У цьому випадку записують

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\ \ x\in O(x_0). \tag{3}$$

Достатня умова розвинення функції в ряд Тейлора. Рівність (3) виконується, якщо існує таке число $M>0$, що

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M \quad \forall x\in O(x_0), \quad \forall n\in \mathbf{N}. \tag{4}$$

Якщо $x_0=0$, то ряд Тейлора називають ще *рядом Маклорена* і тоді

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{5}$$

Основні розвинення

$$e^x=\exp x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ \ x\in \mathbf{R}; \tag{6}$$

$$\exp z =: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbf{C}; \tag{7}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbf{R}; \tag{8}$$

$$\sin z =: \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbf{C}; \tag{9}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbf{R}; \tag{10}$$

$$\cos z =: \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbf{C}; \tag{11}$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad |x|<1 \ \ (\textit{біноміальний ряд}); \tag{12}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z|<1 \ \ (\textit{геометричний ряд}); \tag{13}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1; 1]; \tag{14}$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1; 1]. \tag{15}$$

На практиці, розвиваючи функції в ряди Тейлора, не завжди користуються означенням ряду Тейлора, а здебільшого застосовують інші способи. Потім, скориставшись теоремою про єдиність розвинення функції в степеневий ряд, приходять до висновку, що здобутий степеневий ряд і є рядом Тейлора для заданої функції. При цьому зручно використовувати такі результати:

а) основні розвинення;

б) теореми про диференціювання та інтегрування степеневих рядів;

в) теореми про суму, різницю і добуток степеневих рядів.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) для кожної функції f можна скласти її ряд Тейлора;

2)• для функції

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } \ x = 0, \end{cases}$$

існує ряд Тейлора за степенями x;

3) якщо функція f має в околі точки x_0 похідні будь-якого порядку, то $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ у цьому околі.

4) твердження, обернене до 3), є правильним;

5) якщо $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = f(x)$ і $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = f(x)$, коли $x\in O(x_0)$, то $a_n=b_n$, $n=0,1,2,\ldots$;

6) якщо $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x_k-x_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x_k-x_0)^n$, коли $x_k\neq x_0$, $k\in\mathbf{N}$, і $x_k\to x_0$, $k\to\infty$, то $a_n=b_n$, $n=0,1,2,\ldots$?

2. Відповісти на поставлені запитання усно.

1) Чи можна розвинути в ряд (5) функції x^{α} та $\ln x$?

2) Чи можна функцію $y=\frac{1}{x+2}$ розвинути в ряд за степенями $x+2$, $x+3$, $x-1$?

3) Чи можна функцію $\ln(1+x)$ розвинути в ряд за степенями $x+1$?

4) Чи можна, користуючись біноміальним рядом, обчислювати $\sqrt{2{,}03}$ так:

$$\sqrt{2{,}03}=\sqrt{1+1{,}03}=1+\frac{1}{2}\cdot 1{,}03+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot 1{,}03^2+\ldots\ ?$$

3. Користуючись розвиненнями $\sin x$ і $\cos x$ у степеневі ряди, довести основну тригонометричну тотожність $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

4. Показати, що для малих у порівнянні з a значень x ланцюгову лінію $y=\frac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right)$ можна замінити параболою.

5•. Для яких x многочлен $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{120}$ дає значення функції $\sin x$ з точністю до 10^{-4}?

6. Для яких $x>0$ вказані нижче наближені формули дають похибку, що не перевищує ε:

1) $\sin x\approx x$, $\varepsilon=0{,}01$; 2) $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$, $\varepsilon=0{,}01$;

3) $\ln(1+x)\approx x-\frac{x^3}{2}$, $\varepsilon=0{,}001$; 4) $\operatorname{arctg} x\approx x-\frac{x^3}{3}$, $\varepsilon=0{,}001$?

7. Розвинути в ряд за степенями x такі функції:

1) $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$; 2) $f(x)=x^2\mathrm{e}^x$; 3) $f(x)=\mathrm{e}^{-(x-a)^2}$; 4)• $f(x)=\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2$;

5) $f(x)=\sin 5x$; 6) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$; 7) $f(x)=x\cos x$; 8)• $f(x)=\sin^2 x$;

9) $f(x)=\cos^2 x$; 10) $f(x)=\sin 3x\cos 3x$; 11) $f(x)=\sin^2 x+\mathrm{e}^{-x^2}$;

12) $f(x)=\sin^3 x$; 13)• $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\sin x$; 14)• $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$;

15) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{16-2x}}$; 16)• $f(x)=\dfrac{x^2}{(1+x)^2}$; 17) $f(x)=\dfrac{3x}{(1+x)^3}$;

18)• $f(x)=\dfrac{4-3x}{x^2-3x+2}$; 19) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{(x+3)(x-5)^2}$;

20)• $f(x)=\ln(3-6x)$; 21) $f(x)=\arcsin x$; 22)• $f(x)=\ln\left(x^2-4x+3\right)$;

23) $f(x)=\ln\left(x^2+3x+2\right)$; 24)• $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

25) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; 26) $f(x)=\dfrac{1}{x^3+x^2+x+1}$;

27)• $f(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt$; 28) $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$; 29) $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}dt$;

30) $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\sqrt[3]{1+t^3}-1}{t^2}dt$; 31) $f(x)=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

8. Розвинути в ряд за степенями $x-x_0$ такі функції:

1)• $f(x)=\sin x,\ x_0=\dfrac{\pi}{2}$; 2) $f(x)=\cos x,\ x_0=\pi$;

3) $f(x)=\mathrm{e}^x,\ x_0=1$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x_0=1$;

5) $f(x)=\dfrac{1}{1+x},\ x_0=1$; 6) $f(x)=\ln x,\ x_0=1$;

7) $f(x)=b^x,\ x_0=a$; 8) $f(x)=\lg x,\ x_0=a$.

9. Знайти суми даних числових рядів:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$; 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}$; 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n-3}$.

10. Знайти розвинення даних функцій комплексної змінної в околі точки z_0:

1) $f(z)=\exp 2z,\ z_0=0$; 2) $f(z)=\cos\dfrac{z}{2},\ z_0=0$;

3) $f(z)=\sin 3z,\ z_0=0$; 4) $f(z)=\exp z,\ z_0=a$;

5) $f(z)=\cos z,\ z_0=a$; 6) $f(z)=\sin z,\ z_0=a$;

7) $f(z)=\operatorname{ch} z,\ z_0=0;$ 8) $f(z)=\operatorname{sh} z,\ z_0=0;$

9) $f(z)=\operatorname{sh} z,\ z_0=a;$ 10) $f(z)=\dfrac{1}{z^2-z-2},\ z_0=0;$

11) $f(z)=\dfrac{2z-5}{z^2-5z+6},\ z_0=0;$ 12) $f(z)=\dfrac{1}{1+z},\ z_0=a.$

11. Розв'язати рівняння та нерівності:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n x^n}{n!}=2;$ 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=\sqrt{2};$

3) $2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2x)^{2n}}{(2n)!}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=$

$$=2\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right);$$

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2x)^n}{n!}-3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}+2\le 0;$ 5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\dfrac{1}{2}-n+1\right)x^n>\dfrac{4}{5}.$

12. Нехай $f^{(n)}(x)\ge 0,\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ x\in[-1;\ 1]$. Довести, що

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\ x\in(-1;\ 1).$$

Зразки розв'язування задач

1. 2) Нехай $x\ne 0$. Тоді

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^3}},\quad f''(x)=-\frac{6}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}}+\frac{4}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{x^2}}P_2\left(\frac{1}{x}\right),$$

де $P_2\left(\frac{1}{x}\right)$ — многочлен відносно $\frac{1}{x}$. Припустимо, що $f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$, де $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ — деякий многочлен відносно $\frac{1}{x}$. Тоді

$$f^{(n+1)}(x)=P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}+P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{2}{x^3}=e^{-\frac{1}{x^2}}P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right),$$

а тому $P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)=P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)+P_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2}{x^3}$ — многочлен відносно $\frac{1}{x}$. Отже, $f^{(n)}(x)=$ $=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$, $n\in\mathbf{N}$, $x\ne 0$. Звідси за правилами Лопіталя дістаємо, що $f^{(n)}(x)\to 0$, $x\to 0$, тобто $\exists\, f^{(n)}(0)=0\ \ \forall\, n\in\mathbf{N}$. Тому для функції f існує ряд Тейлора за степенями x:

$$0+0\cdot x+\frac{0}{2!}x^2+\ldots+\frac{0}{n!}x^n+\ldots.$$

Отже, задане твердження правильне.

5. За формулою (8)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots .$$

Цей ряд є знакопочережним для будь-якого фіксованого $x \in \mathbf{R}$. Тому

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

з абсолютною похибкою

$$\Delta = \left| \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| < \frac{|x|^7}{7!}.$$

Розв'язуючи нерівність $\frac{|x|^7}{7!} < 10^{-4}$, дістаємо, що функцію $\sin x$ можна замінити заданим многочленом $\forall x: |x| < 0{,}9067$.

При цьому абсолютна похибка є меншою за 10^{-4}.

7. 4) Піднесемо заданий вираз до квадрата і скористаємось розвиненнями в ряди функцій e^x і e^{2x} (формула (6)). Оскільки відповідні ряди збігаються $\forall x \in \mathbf{R}$, то, виконавши почленне додавання, дістанемо шукане розвинення:

$$\left(e^x - 1\right)^2 = e^{2x} - 2e^x + 1 = \left(1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \dots + \frac{2^n x^n}{n!} + \dots\right) -$$

$$-2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \quad\right) + 1 = x^2 - x^3 - \dots - \frac{2^n - 2}{n!} x^n - \dots, \quad x \in \mathbf{R}.$$

8) Оскільки $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, то достатньо розвинути в ряд функцію $\cos 2x$. Скористаємось розвиненням $\cos x$ (формула (10)), в якому замінимо x на $2x$.
Отже, маємо

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2^2}{2} x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^4}{24} x^4 + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \dots =$$

$$= x^2 - \frac{2^3}{4!} x^4 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in \mathbf{R}.$$

13) Ряд для e^{-x} дістанемо з ряду для функції e^x (формула (6)) заміною x на $-x$. Він є абсолютно збіжним $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Ряд для $\sin x$ (формула (8)) також є абсолютно збіжним $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Перемножаючи абсолютно збіжні ряди для e^{-x} і $\sin x$, дістанемо розвинення в ряд для функції $e^{-x} \sin x$, причому цей ряд також абсолютно збігається на всій числовій прямій. Отже, маємо

$$e^{-x} \sin x = \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots\right) \times$$

$$\times \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) = x - x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{30} x^5 + \frac{1}{90} x^6 + \dots .$$

14) Задану функцію можна розглядати як суму геометричного ряду (див. формулу (13)), знаменник якого $q=-x^2$, а перший член $a=x^2$. Тому для $\left|x^2\right|<1$, тобто для $x\in(-1;1)$ маємо

$$\frac{x^2}{1+x^2}=x^2\left(1-x^2+x^4-...\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+2}.$$

16) Запишемо задану функцію у вигляді $f(x)=x^2(1+x)^{-2}$. Скористаємось тепер біноміальним рядом (12) для розвинення в ряд функції $(1+x)^{-2}$ і здобутий ряд помножимо на x^2. Дістанемо

$$\frac{x^2}{(1+x)^2}=x^2-2x^3+3x^4-4x^5+...+(-1)^{n-1}nx^{n+1}+..., \quad |x|<1.$$

18) У даному випадку можна уникнути обчислення похідних та їхніх значень у точці $x=0$ (що привело б до складних обчислень), розкладаючи заданий дріб на елементарні та використовуючи формулу суми членів спадної геометричної прогресії.

Оскільки коренями знаменника є числа 1 і 2, то

$$\frac{4-3x}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}.$$

Звідси $A=-1$, $B=-2$. Тоді

$$\frac{4-3x}{x^2-3x+2}=-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-2}.$$

Користуючись формулою (13), дістаємо

$$-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+..., \quad |x|<1,$$

$$-\frac{2}{x-2}=\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+...+\frac{x^n}{2^n}+..., \quad |x|<2.$$

При $|x|<1$ обидва допоміжних ряди збігаються, тому їх можна почленно додати. Тоді для $|x|<1$ дістанемо

$$\frac{4-3x}{x^2-3x+2}=2+\left(1+\frac{1}{2}\right)x+\left(1+\frac{1}{2^2}\right)x^2+...+\left(1+\frac{1}{2^n}\right)x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)x^n.$$

20) Виконаємо такі перетворення:

$$\ln(3-6x)=\ln(3(1-2x))=\ln 3+\ln(1-2x).$$

Покладемо $t=-2x$ і скористаємось розвиненням (14) стосовно функції $\ln(1+t)$, $|t|<1$. Тоді для $2|x|<1$, тобто для $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, дістаємо

$$\ln(3-6x)=\ln 3-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n.$$

22) У цьому випадку зручно спочатку обчислити похідну заданої функції, а потім скористатись способом, розглянутим при розв'язуванні вправи 18). Маємо

$$f'(x)=\frac{2x-4}{x^2-4x+3}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3};$$

$$\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{1-x}=-\left(1+x+x^2+\ldots\right),\ |x|<1;$$

$$\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}+\ldots\right),\ |x|<3;$$

$$f'(x)=-\left(\left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3^2}\right)x+\left(1+\frac{1}{3^3}\right)x^2+\ldots\right),\ |x|<1.$$

Інтегруючи останню рівність на проміжку $[0;x]$, $|x|<1$, і враховуючи, що $f(0)=\ln 3$, остаточно дістаємо

$$\ln\left(x^2-4x+3\right)=\ln 3-\left(1+\frac{1}{3}\right)x-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3^2}\right)x^2-\ldots=\ln 3-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{n\cdot 3^n}x^n,\quad |x|<1.$$

24) 1-й спосіб. Оскільки $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, якщо $r_n(f,x,x_0)\to 0$, $n\to\infty$, $\forall x\in O(x_0)$, то знайдемо $f^{(n)}(x_0)$:

$$f^{(0)}(x)=f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\quad \forall x\in(-1;\ 1),\ f(0)=0;$$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}(\ln(1+x)-\ln(1-x))\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x-1}\right),\ f'(0)=1;$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}\right),\ f''(0)=0;$$

$$f'''(x)=\frac{1\cdot 2}{2}\left(\frac{1}{(x+1)^3}-\frac{1}{(x-1)^3}\right),\ f'''(0)=1\cdot 2;$$

$$f^{IV}(x)=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{2}\left(-\frac{1}{(x+1)^4}+\frac{1}{(x-1)^4}\right),\ f^{IV}(0)=0.$$

Припустимо, що

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{1}{(x+1)^n}-\frac{1}{(x-1)^n}\right),$$

тобто

$$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2}\left(1-(-1)^n\right).$$

Тоді

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{2}\left(-\frac{n}{(x+1)^{n+1}}+\frac{n}{(x-1)^{n+1}}\right)=$$

$$=(-1)^n\,\frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right),$$

і тому

$$f^{(n+1)}(0)=(-1)^n\,\frac{n!}{2}\left(1-(-1)^{n+1}\right).$$

За принципом математичної індукції

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{1}{(x+1)^n}-\frac{1}{(x-1)^n}\right)\quad \forall x:\ |x|<1 \quad \text{і} \quad \forall n\in \mathbf{N}.$$

Звідси дістаємо, що

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{2}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0, & \text{якщо } n=2k,\\ (n-1)!, & \text{якщо } n=2k+1.\end{cases}$$

Таким чином, ряд Тейлора для функції $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ в околі точки $x_0=0$ має вигляд

$$x+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Оцінимо залишковий член формули Тейлора у формі Коші. Оскільки

$$\left|f^{(n)}(x)\right|=\frac{(n-1)!}{2}\left|\frac{1}{(x+1)^n}-\frac{1}{(x-1)^n}\right|\le (n-1)!\frac{1}{(1-x)^n}\quad \forall x\in[0;\ 1),$$

то

$$\left|r_n(f,x,x_0)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}\right|\le\frac{(1-\theta)^n}{(1-\theta x)^{n+1}}x^{n+1}\le$$

$$\le\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right)^n\frac{x^{n+1}}{1-x}\le\frac{x^{n+1}}{1-x}\to 0,\ n\to\infty,\quad \forall x\in[0;\ 1),\ 0<\theta<1.$$

Аналогічно показуємо, що $r_n(f,x,x_0)\to 0,\ n\to\infty,\ \ \forall x\in(-1;\ 0)$.

Отже, за критерієм розвинення функції в степеневий ряд матимемо

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=x+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\ldots,\ \ x\in(-1;\ 1).$$

2-й спосіб. Оскільки

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\ \ x\in(-1;1),$$

то

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots,\ \ x\in(-1;\ 1).$$

За властивістю лінійності рядів

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}(x+x)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{3}\right)+\ldots=x+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\ldots,\ \ x\in(-1;1).$$

3-й спосіб. Якщо $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, то

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+\ldots+x^{2k}+\ldots,\ \ x\in(-1;\ 1).$$

Оскільки цей степеневий ряд збігається рівномірно на довільному відрізку $[a;b]\subset(-1;1)$, то його можна почленно інтегрувати:

$$\int_0^x f'(t)dt=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x t^{2k}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1},\ \ x\in(-1;\ 1).$$

Звідси маємо

$$f(x)-f(0)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=f(x),\ \ x\in(-1;\ 1),$$

оскільки $f(0)=0$.

27) Обчислити даний інтеграл у скінченному вигляді не можна, оскільки $\int e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ не виражається через елементарні функції. Тому знаходять наближене значення цього інтеграла, розвиваючи функцію f у степеневий ряд. Спочатку розвинемо в ряд підінтегральну функцію, скориставшись розвиненням (6) стосовно функції $e^{-\frac{t^2}{2}}$. Маємо

$$e^{-\frac{t^2}{2}}=1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{2^2\cdot 2!}-\frac{t^6}{2^3\cdot 3!}+\cdots.$$

Заданий ряд збігається рівномірно на будь-якому відрізку $[0;x]$, і тому, інтегруючи цей ряд, дістаємо $f(x)=x-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{2^2\cdot 5\cdot 2!}-\cdots$.

8. 1) Обчислимо значення заданої функції та її похідних у точці $x_0=\frac{\pi}{2}$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1;\ f'(x)=\cos x,\ \ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;\ f''(x)=-\sin x,\ \ f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1;$$

$$f'''(x)=-\cos x,\ \ f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;\ f^{IV}(x)=\sin x,\quad f^{IV}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ \ldots.$$

Оскільки виконується оцінка (4) $\forall x\in\mathbf{R}\left(\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right|\le 1\right)$, то для всіх $x\in\mathbf{R}$ за формулою (1) дістаємо

$$\sin x=1-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}+\cdots.$$

У справедливості останньої рівності можна переконатись й іншим способом, а саме, досліджуючи залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа

$$r_n(x)=\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left((n+2)\frac{\pi}{2}+\theta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right),\ \ 0<\theta<1.$$

Маємо $\left|r_{n(x)}\right|\le\frac{\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^{n+1}}{(n+1)!}$. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^{n+1}}{(n+1)!}$, який збігається $\forall x\in\mathbf{R}$ (за ознакою Д'Аламбера), а отже, $r_n(x)\to 0,\ \ n\to\infty$.

Знайдене розвинення можна дістати за допомогою відомих розвинень:

$$\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!}\quad.$$

§ 12.4. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

Розвинення функцій у ряди Тейлора дає змогу у багатьох випадках обчислювати з великою точністю значення цих функцій, визначені інтеграли, границі тощо. У таких обчисленнях зберігають n перших членів ряду, а решту відкидають. Для оцінки похибки знайденого наближеного значення треба оцінити суму відкинутих членів, тобто залишок ряду $r_n(x)$. Доцільно оцінку здійснювати так: якщо ряд знакосталий, то його залишок порівнюють з геометричним рядом, члени якого утворюють спадну геометричну прогресію, а якщо ряд знакопочережний і його члени задовольняють умови теореми Лейбніца, то використовують оцінку $|r_n(x)|<|a_{n+1}|$, де a_{n+1} — перший з відкинутих членів ряду.

Для наближених обчислень за допомогою рядів використовуватимемо розвинення елементарних функцій, які розглянуто у §12.3.

1. Обчислення значень функцій. Якщо функція f розвивається у степеневий ряд в околі точки x_0, то для обчислення значень функції в цьому околі можна використати це розвинення:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x\in O(x_0). \tag{1}$$

Зокрема, для $f(x)=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, x\in \mathbf{R}$, матимемо $e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+\dots$, і за цією формулою можна обчислити число e з будь-якою точністю.

Для обчислення $\sqrt[n]{A}$, де A>0, знайдемо $a>0$ таке, що $\left|\frac{A-a^n}{a^n}\right|<1$. Тоді

$$\sqrt[n]{A}=\sqrt[n]{a^n+A-a^n}=a\sqrt[n]{1+\frac{A-a^n}{a^n}}.$$

Покладаючи $x=\frac{A-a^n}{a^n}$, дістаємо

$$\sqrt[n]{A}=a(1+x)^{\frac{n}{2}}=a\left(1+\frac{n}{2}x+\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2!}x^2+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{n}{2}-k+1\right)}{k!}x^k+\ldots\right), \tag{2}$$

і за цією формулою можна обчислити $\sqrt[n]{A}$ з будь-якою точністю.

2. Обчислення інтегралів. Якщо має місце формула (1) і $[a;b]\subset O(x_0)$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_a^b (x-x_0)^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n+1}\left((b-x_0)^{n+1}-(a-x_0)^{n+1}\right),\quad (3)$$

де $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, і за цією формулою можна обчислити інтеграл з будь-якою точністю.

3. Обчислення границь. Користуючись відповідними розвиненнями у степеневі ряди, можна обчислювати границі, пов'язані з розкриттям невизначеностей виду $\dfrac{0}{0}$.

4. Обчислення сум числових рядів. Користуючись відомими розвиненнями у степеневі ряди, суму числового ряду в деяких випадках можна виразити у вигляді значення функції у певній точці.

Вправи

1. Використовуючи розв'язок задачі 7.24) § 12.3, довести, що

$$\ln(n+1)=\ln n+2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\dots+\frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k+1}}\right)\ \forall n\in\mathbf{N}.$$

2. Обчислити з точністю до 10^{-3} дані значення:

1) $\sin 18^\circ$; 2) $\cos\dfrac{3}{2}$; 3) $\sin 7^\circ$; 4) $\cos 12^\circ$; 5) $\sin 0{,}5$; 6) $\cos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; 7) $\sin 1$;

8) $\mathrm{ch}\,1$; 9) $\mathrm{tg}\,9^\circ$; 10) $\mathrm{ctg}\,15^\circ$; 11) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$; 12) e^2; 13) $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$; 14) $\ln 2$;

15) $\ln 3$; 16) $\lg \mathrm{e}$; 17) $\lg 4$; 18) $\ln\dfrac{6}{5}$; 19) $\lg\dfrac{6}{5}$; 20) $\ln 0{,}8$;

21) $\sqrt{17}$; 22) $\sqrt[3]{24}$; 23) $\sqrt[3]{1{,}2}$; 24) $\sqrt[3]{503}$; 25) $\sqrt[4]{84}$; 26) $\sqrt[5]{36}$; 27) $\sqrt[8]{254}$;

28) $\sqrt[10]{1032}$; 29) $\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{3}$; 30) $\mathrm{arctg}\,\dfrac{\pi}{5}$; 31) $\arcsin\dfrac{1}{4}$; 32) $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Обчислити з точністю до ε дані значення:

1)• $\sin 3^\circ$, $\varepsilon=10^{-6}$; 2) $\cos 0{,}5$, $\varepsilon=10^{-6}$; 3)• $\ln 0{,}96$, $\varepsilon=10^{-4}$;

4) $\ln 1{,}04$, $\varepsilon=10^{-6}$; 5)• $\sqrt[4]{1{,}08}$, $\varepsilon=10^{-4}$; 6) $\sqrt[3]{1{,}06}$, $\varepsilon=10^{-5}$.

4. Дістати формулу для обчислення $\sqrt[k]{\mathrm{e}}$, $2\le k\in\mathbf{N}$, з точністю до $\varepsilon=10^{-m}$, $1\le m\in\mathbf{N}$, і, користуючись нею, обчислити з точністю до 10^{-4}:

1) $\sqrt{\mathrm{e}}$; 2)• $\sqrt[3]{\mathrm{e}}$; 3) $\sqrt[5]{\mathrm{e}}$.

5. З якою граничною абсолютною похибкою можна обчислити

$$\sqrt[4]{90}=(81+9)^{\frac{1}{4}}=3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{4}},$$

взявши три члени біноміального ряду?

6. Знайти граничну абсолютну похибку наближеної рівності:

1) $\sqrt{a^2+x}\approx a+\dfrac{x}{2a}-\dfrac{x^2}{8a^3}$ при обчисленні $\sqrt{12}$ і $\sqrt{10}$;

2) $\sqrt[3]{a^3+x}\approx a+\dfrac{x}{3a^2}$ при обчисленні $\sqrt[3]{30}$ і $\sqrt[3]{67}$.

7. Користуючись рівністю $\dfrac{\pi}{6}=\arcsin\dfrac{1}{2}$, обчислити число π за допомогою ряду для функції $\arcsin x$ з точністю до 10^{-4}.

8. Користуючись рівністю $\dfrac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$, обчислити число π за допомогою розвинення функції $\operatorname{arctg} x$ з точністю до 10^{-3}.

9. Скільки членів ряду $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots$ треба взяти, щоб обчислити число e з точністю до 10^{-4}?

10. Скільки треба взяти членів ряду в розвиненні функції $\sin x$, щоб обчислити $\sin 12^\circ$ з точністю до 10^{-5}?

11. Для яких x многочлен $1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$ дає значення функції $\cos x$ з точністю до 10^{-4}?

12. Обчислити з точністю до 10^{-3} такі інтеграли:

1) $\displaystyle\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx$; 2) $\displaystyle\int_0^1 \sin\sqrt{x}\,dx$; 3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x}dx$; 4) $\displaystyle\int_0^1 \cos x^2 dx$;

5) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x\,dx$; 6) $\displaystyle\int_0^{0,1} \frac{e^x-1}{x}dx$; 7) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x}e^x dx$; 8) $\displaystyle\int_0^{0,3} \ln(1+x)dx$;

9) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; 10) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x^2 dx$; 11) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$;

12) $\displaystyle\int_0^{0,6} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$; 13) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$; 14) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x}dx$; 15) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$;

16) $\int\limits_0^1 \ln x \ln(1-x)dx$; 17) $\int\limits_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$; 18) $\int\limits_0^1 x^x dx$.

13. Обчислити значення інтегрального синуса $\mathrm{Si}\, x = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ з точністю до 10^{-4}, якщо: 1) $x=1$; 2) $x=1/2$; 3) $x=0{,}2$.

14. Обчислити значення функції Лапласа (інтеграл імовірностей) $\Phi(x)=\int\limits_0^x e^{\frac{t^2}{2}}dt$ у точці $x=1/2$ з точністю до 10^{-3}.

15. Обчислити наближене значення даного інтеграла, взявши n перших членів розвинення в ряд підінтегральної функції, та оцінити абсолютну похибку обчислень:

1)• $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx$, $n=3$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{e^x-1}{x}dx$, $n=6$;

3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$, $n=4$; 4) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos x}{x}$, $n=3$.

16. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $y=\frac{1}{1+x^4}$, осями координат і прямою $x=1/2$, з точністю до 10^{-4}, розвиваючи відповідну підінтегральну функцію у степеневий ряд.

17. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $y=e^{-x^2}$, віссю Ox і прямими $x=-1$ та $x=1$, з точністю до 10^{-3}.

18. Фігура, обмежена кривою $y=\operatorname{arctg} x$, віссю Ox і прямою $x=0{,}5$, обертається навколо осі Ox. Визначити об'єм тіла обертання з точністю до 10^{-3}.

19. Знайти з точністю до 0,01 довжину даної дуги кривої:

1)• $y=\sin x$, $x\in[0;\pi]$; 2) $x^2+4y^2=1$.

20. Натягнений між точками A і B дріт нагадує форму дуги параболи $y=ax^2$. Обчислити наближено з точністю до 0,01 довжину цього дроту, якщо AB = 12 м, а провисання h = 0,5 м.

21. Обчислити наближено з точністю до 0,01 площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги гіперболи $y=1/x$ між точками з абсцисами $x=0{,}5$ і $x=1{,}5$.

22. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1-x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+1-e^{3x}}{\cos 2x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

23. Довести вказані рівності:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}=e^{-1}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{n!}=e^3$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}(2n+1)!}=\sin\dfrac{1}{2}$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}=\ln 2$;

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{\pi}{6}$; 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}=\dfrac{1}{2}\ln 2$;

7) $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{x^x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^n}$; 8) $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}\sin x\,dx=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}$.

24. Обчислити суми рядів, не вдаючись до часткових сум:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2^{2n}(2n)!}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3^n\cdot n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{3}}{(2n-1)3^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!(2n+1)}$.

Зразки розв'язування задач

3. 1) Переведемо градусну міру кута у радіанну:

$$3^\circ=\frac{\pi}{180}\cdot 3=\frac{\pi}{60}.$$

Скористаємось розвиненням у ряд функції $y=\sin x$, в якому замість x візьмемо число $\frac{\pi}{60}$. Дістаємо числовий ряд

$$\sin\frac{\pi}{60}=\frac{\pi}{60}-\frac{\pi^3}{3!\cdot 60^3}+\frac{\pi^5}{5!\cdot 60^5}-\cdots.$$

Даний ряд є знакопочережним. Він задовольняє ознаку Лейбніца, причому абсолютна величина третього члена менша від заданої точності:

$$\frac{\pi^5}{5!\cdot 60^3}<10^{-6}.$$

Тому для обчислення із заданою точністю беремо два члени ряду. В результаті дістаємо

$$\sin 3^\circ\approx 0{,}0523599-0{,}0000239=0{,}052336.$$

3) За формулою (14) §12.3 при $x = -0,04$ дістаємо

$$\ln 0,96 = \ln(1-0,04) = -0,04 - 0,04^2/2 - 0,04^3/3 - 0,04^4/4 - \cdots =$$
$$= -\left(0,04 + 0,04^2/2 + 0,04^3/3 + 0,04^4/4 + \cdots\right).$$

Для визначення кількості членів, які треба взяти для обчислення $\ln 0,96$ із заданою точністю, розглянемо залишок додатного ряду, записаного у дужках. Маємо

$$r_n = \frac{0,04^{n+1}}{n+1} + \frac{0,04^{n+2}}{n+2} + \cdots < \frac{0,04^{n+1}}{n+1} + \frac{0,04^{n+2}}{n+1} + \cdots =$$
$$= \frac{0,04^{n+1}}{n+1}\left(1 + 0,04 + 0,04^2 + \cdots\right) = \frac{0,04^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{1-0,04}.$$

Тут зменшено знаменники дробів заміною виразів $n+2$, $n+3, \ldots,$ на $n+1$ і використано формулу суми членів спадної геометричної прогресії. Розв'язуючи нерівність

$$\frac{0,04^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{0,96} < 10^{-6},$$

знаходимо, що вона виконується при $n \geq 4$. Отже, треба взяти чотири доданки у розвиненні (14) для обчислення $\ln 0,96$ з точністю до 10^{-6}. Остаточно дістаємо

$$\ln 0,96 = -0,04 - 0,0008 - 0,0000213 - 0,00000064 \approx -0,040822.$$

5) Скористаємось розвиненням у степеневий ряд функції $(1+x)^{\alpha}$ при $x = 0,08$ і $\alpha = 1/4$ (див. формулу (12) § 12.3). Маємо

$$\sqrt[4]{1,08} = (1+0,08)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4} \cdot 0,08 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right) \cdot 0,08^2 +$$
$$+ \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right)\left(\frac{1}{4} - 2\right) \cdot 0,08^3 + \cdots = 1 + 0,02 - 0,006 + 0,000028 - \cdots.$$

Дістали знакопочережний ряд (починаючи з другого члена). Оскільки четвертий доданок, взятий за модулем, менше 0,0001, то, відкидаючи його і всі наступні члени ряду, маємо

$$\sqrt[4]{1,08} \approx 1 + 0,02 - 0,0006 = 1,0194.$$

4. 2) Користуючись розвиненням e^x за формулою (6) § 12.3, дістаємо при $x = 1/k$:

$$\sqrt[k]{e} = 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{2!k^2} + \frac{1}{3!k^3} + \cdots. \tag{4}$$

Визначимо, скільки членів ряду треба взяти, щоб похибка не перевищувала 10^{-m}. Запишемо залишок ряду (4):

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!k^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)!k^{n+2}} + \cdots = \frac{1}{n!k^n}\left(\frac{1}{(n+1)k} + \frac{1}{(n+1)(n+2)k^2} +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)k^3} + \cdots\right).$$

Замінимо вирази $n+2,\ n+3,\dots,$ на $n+1$ у знаменниках дробів, записаних у дужках, і скористаємось формулою суми членів спадної геометричної прогресії (при $k>1/(n+1)$), у якій $q=1/(n+1)k$). Дістанемо нерівність

$$r_n<\frac{1}{n!k^n}\left(\frac{1}{(n+1)k}+\frac{1}{(n+1)^2k^2}+\frac{1}{(n+1)^3k^3}+\cdots\right)=\frac{1}{n!k^n}\cdot\frac{\frac{1}{(n+1)k}}{1-\frac{1}{(n+1)k}}=\frac{1}{n!k^n(kn+k-1)},$$

з якої підбором визначаємо, при якому значенні n справедлива оцінка $r_n<10^{-m}$.

Поклавши $k=3$ і $m=4$, з нерівності

$$\frac{1}{n!\cdot 3^n(3n+2)}<10^{-4}$$

знаходимо $n=4$, оскільки

$$r_n<\frac{1}{4!\cdot 3^4\cdot 14}<10^{-4}.$$

Отже, в розвиненні (4) треба взяти чотири доданки після одиниці. Дістаємо

$$\sqrt[3]{e}\approx 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2!\cdot 3^2}+\frac{1}{3!\cdot 3^3}+\frac{1}{4!\cdot 3^4}\approx 1{,}3956.$$

15. 1) У даному випадку первісна від $\sin x^2$ не є елементарною функцією, і тому не можна скористатись формулою Ньютона — Лейбніца. Для обчислення цього інтеграла розвинемо підінтегральну функцію в ряд, замінивши в розвиненні $\sin x$ (див. формулу (4) § 12.3) x на x^2. Дістанемо ряд

$$\sin x^2=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\cdots,$$

який збігається на всій числовій прямій. Інтегруючи обидві частини останньої рівності в межах від 0 до 1, дістанемо

$$\int_0^1\sin x^2dx=\int_0^1\left(x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\cdots\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\frac{x^{11}}{5!\cdot 11}-\frac{x^{15}}{7!\cdot 15}+\cdots\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{3!\cdot 7}+\frac{1}{5!\cdot 11}-\frac{1}{7!\cdot 15}+\cdots.$$

Останній ряд є знакопочережним і задовольняє умови теореми Лейбніца, тому взявши перші три члени ряду, допустимо абсолютну похибку меншу ніж $\frac{1}{7!\cdot 15}=\frac{1}{75600}<0{,}0001$. Отже, виконуючи обчислення з точністю до 0,0001, маємо

$$\int_0^1\sin x^2dx\approx\frac{1}{3}-\frac{1}{3!\cdot 7}+\frac{1}{5!\cdot 11}\approx 0{,}33333-0{,}02384+0{,}00075\approx 0{,}3102.$$

19. 1) За відомою формулою $L=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$, де $f(x)=\sin x$, $[a;b]=[0;\pi]$. Враховуючи симетрічність дуги відносно прямої $x=\frac{\pi}{2}$, маємо $L=2\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\cos^2x}\,dx$. Оскільки за формулою (12) § 12.3

$$\sqrt{1+y}=1+\frac{1}{2}y+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^2+\cdots+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}y^n+\cdots=$$

$$=1+\frac{y}{2}-\frac{1}{2^2\cdot 2!}y^2+\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}y^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 4!}y^4+$$

$$+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n\cdot n!}y^n+\cdots=1+\frac{y}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}y^{n+1}$$

і

$$\left|(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}y^{n+1}\right|\le\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n(2n+2)}|y|^{n+1}\le\frac{1}{2n+1}$$

при $|y|\le 1$, то такий степеневий ряд рівномірно збігається на відрізку $[0;1]$. Звідси дістаємо

$$\sqrt{1+\cos^2 x}=1+\frac{\cos^2 x}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}\cos^{2n+2}x,$$

причому останній функціональний ряд рівномірно збігається на $\left[0;\,\frac{\pi}{2}\right]$. Тому цей ряд можна почленно інтегрувати:

$$L=2\int_0^{\pi/2}\left(1+\frac{\cos^2 x}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cos^{2n+2}x\right)dx=$$

$$=2\left(\int_0^{\pi/2}dx+\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{2}dx-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+2}xdx\right)=$$

$$=\pi+\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Тут використано вправу 13.3) § 9.5, згідно з якою $\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}xdx=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$. Враховуючи тепер, що $\frac{\pi}{2}<\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n}$, маємо оцінку модуля загального члена останнього ряду:

$$2\frac{((2n+1)!!)^2\frac{\pi}{2}}{((2n+2)!!)^2(2n+1)}<\frac{2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{(2n+1)(n+1)}\le\frac{1}{100}.$$

Остання нерівність виконується при $n\ge 7$. Отже,

$$L\approx\frac{5\pi}{4}-\pi\left(\frac{3}{2^2\cdot 4^2}-\frac{3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}-\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot 10^2}+\right.$$

$$+\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9^2\cdot 11}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot 10^2\cdot 12^2}-\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9^2\cdot 11^2\cdot 13}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot 10^2\cdot 12^2\cdot 14^2}+$$

$$\left.+\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9^2\cdot 11^2\cdot 13^2\cdot 15}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot 10^2\cdot 12^2\cdot 14^2\cdot 16^2}\right)\approx 3{,}82.$$

22. 1) Використовуючи розвинення функцій $\cos x$ і e^x за степенями x, дістаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)}{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)-1-x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\ldots}{\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{3\cdot 4}+\frac{x^4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}-\ldots\right)}{\frac{x^2}{2}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3\cdot 4}+\ldots\right)}=1.$$

При переході до границі в останній рівності скористалися тим, що сума ряду, записаного в дужках у чисельнику, є неперервною функцією в точці $x=0$ і при $x\to 0$ прямує до числа 1. Аналогічно в знаменнику маємо

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\ldots\right)=1.$$

§ 12.5. Ряди Фур'є

Тригонометричним рядом називають функціональний ряд виду

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx, \tag{1}$$

де a_0, a_n, b_n, $n\in\mathbf{N}$, — задані дійсні числа, які називають *коефіцієнтами* цього ряду.

Теорема (про коефіцієнти рівномірно збіжного тригонометричного ряду). *Якщо тригонометричний ряд* (1) *рівномірно збігається до функції* f *на відрізку* $[-\pi;\pi]$, *то*

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\quad n\in\mathbf{N}. \tag{2}$$

Коефіцієнтами Фур'є функції f, інтегровної на відрізку $[-\pi;\pi]$, називають коефіцієнти a_n і b_n, обчислені за формулами (2). У такому разі ряд (1) називають *рядом Фур'є функції* f і записують

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Теорема (про суму ряду Фур'є). *Якщо ряд Фур'є 2π-періодичної функції f збіжний у точці x_0 до суми S і*

$$f(x_0)=\frac{1}{2}(f(x_0+)+f(x_0-)),$$

то $S=f(x_0)$.

Достатні умови збіжності та рівномірної збіжності ряду Фур'є. *Нехай функція f є 2π-періодичною і $f(x)=\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-))$ $\forall x\in[-\infty;+\infty]$. Тоді ряд Фур'є цієї функції збігається на множині $E\subset[-\pi;\pi]$ до функції f, якщо виконується хоча б одна з умов:*

1) $\forall x_0\in E$ $\exists f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0+}\dfrac{f(x)-f(x_0+)}{x-x_0}\neq\infty$, $\exists f'_-(x_0)=$
$=\lim\limits_{x\to x_0-}\dfrac{f(x)-f(x_0-)}{x-x_0}\neq\infty$, *зокрема функція f диференційовна на множині E;*

2) $\forall x_0\in E$ $\exists h>0$, $H>0$, $\alpha\in(0;1]$: $\left|f(x_0\pm t)-f(x_0\pm)\right|\leq Ht^{\alpha}$, $t\in[0;h]$:

3) $\forall x_0\in E$ $\exists h>0$: f — *функція обмеженої варіації на відрізку* $[x_0-h;$ $x_0+h]$.

Якщо, крім того, $E=[-\pi;\pi]$, функція f неперервна на множині E і в умові 1) f'_+ і *f'_- обмежені на цій множині, а в умові 2) числа h, H* і *α не залежать від x_0, то виконання хоча б однієї з умов 1) — 3) забезпечує рівномірну збіжність ряду Фур'є до функції f на інтервалі $(-\infty;+\infty)$.*

Теорема (рівність Парсеваля). *Нехай функція f є 2π-періодичною та інтегровною на відрізку $[-\pi;\pi]$, а (1) є рядом Фур'є цієї функції. Тоді*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right).$$

Теорема (про почленне інтегрування ряду Фур'є). *Нехай 2π-періодична функція f інтегровна на відрізку $[-\pi;\pi]$, а (1) є рядом Фур'є цієї функції. Тоді* $\forall[a;b]\subset[-\pi;\pi]$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)dx.$$

Зокрема, якщо $F(x)=\int\limits_0^x\left(f(t)-\dfrac{a_0}{2}\right)dt$, *то*

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx\right),\quad x\in[-\pi;\pi],$$

і останній ряд є рядом Фур'є функції F.

Якщо функція f є $2l$-періодичною, то функція $\varphi(y)=f\left(\frac{ly}{\pi}\right)$ буде 2π-періодичною. Застосувавши до функції φ наведені вище теоретичні відомості, можна дістати розвинення функції f в *узагальнений ряд Фур'є*:

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

де

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{x}xdx,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,\quad n\in\mathbf{N}.$$

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) кожний тригонометричний ряд є функціональним рядом;

2) кожний функціональний ряд є рядом тригонометричним;

3) якщо тригонометричний ряд (1) є рівномірно збіжним до функції f на відрізку $[-\pi;\pi]$, то (1) є рядом Фур'є функції f;

4) якщо тригонометричний ряд (1) збігається до функції f на інтервалі $(-\infty;+\infty)$, то f є 2π-періодичною функцією;

5) якщо функція f інтегровна на відрізку $[-\pi;\pi]$ і непарна, то її коефіцієнти Фур'є $a_n=0\ \ \forall\ n$, а $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx,\ \ n\in\mathbf{N}.$

6) твердження 5) правильне і для парної на відрізку $[-\pi;\pi]$ функції f;

7)• якщо (1) є рядом Фур'є функції f, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ збіжний;

8)• кожний збіжний тригонометричний ряд (1) є рядом Фур'є функції f, до якої він збігається;

9) якщо (1) є рядом Фур'є функції f, то $a_n^2+b_n^2\to 0,\ n\to\infty$?

2. Для даної функції f знайти її ряд Фур'є та вказати, де він збігається до f:

1) $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=0}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$ (тригонометричний многочлен);

2) $f(x)=\sin^4 x$; 3) $f(x)=x$; 4) $f(x)=x^2$; 5) $f(x)=x^3$;

6) $f(x)=x^4$; 7) $f(x)=|x|$; 8) $f(x)=\begin{cases}ax, & \text{якщо } x<0,\\ bx, & \text{якщо } x\ge 0,\end{cases}$ a,b — сталі;

9)• $f(x)=\operatorname{sign} x$; 10) $f(x)=\cos ax$; 11) $f(x)=\sin ax$;

12) $f(x)=\operatorname{sign}\cos x$; 13) $f(x)=\arcsin(\sin x)$;

14) $f(x)=\arcsin(\cos x)$; 15) $f(x)=|\sin x|$; 16) $f(x)=|\cos x|$;

17) $f(x)=x+\operatorname{sign} x$; 18) $f(x)=\mathrm{e}^{ax}$, $a\neq 0$.

3. Знайти суми даних числових рядів, використавши необхідні для цього ряди Фур'є:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; 6)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{1+n^2}$.

4. Для даної функції f знайти її узагальнений ряд Фур'є, який збігався б до неї на вказаному проміжку:

1) $f(x)=x$, $x\in(-l;\ l)$; 2) $f(x)=|x|$, $x\in(-1;\ 1)$;

3) $f(x)=\mathrm{e}^x$, $x\in(-2;\ 2)$; 4) $f(x)=x(\pi-x)$, $x\in(0;\ \pi)$;

5) $f(x)=x^2$, $x\in(0;\ 2\pi)$; 6) $f(x)=\begin{cases}0, & -1<x<0,\\ x, & 0\le x<1;\end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1<x<2,\\ 3-x, & 2\le x\le 3;\end{cases}$

8)• $f(x)=x\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$, $x\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, і ряд Фур'є має вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\times$ $\times\cos(2n-1)x$;

9) $f(x)=x\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$, $x\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, і ряд Фур'є має вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}\times$ $\times\sin(2n-1)x$.

5. Розвинути в ряд Фур'є дані функції:

1) $f(x)=x$, $x\in(0;\ \pi)$, за синусами і за косинусами;

2) $f(x)=\dfrac{\pi-2x}{4}$, $x\in(0;\ \pi)$, за синусами і за косинусами;

3) $f(x)=x^2$, $x\in(0;\ \pi)$, за синусами;

4) $f(x)=\sin x$, $x\in(0;\ \pi)$, за косинусами;

5) $f(x)=2x$, $x\in(0;\ 1)$, за синусами;

6) $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\le 1,\\ 2-x, & 1<x<2,\end{cases}$ за синусами і за косинусами.

6. Довести, що неперервна функція $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{2\pi n}{T}x+b_n\sin\dfrac{2\pi n}{T}x\right)$ має хоча б один дійсний корінь на кожному відрізку $[a;\ a+T]$, де a — довільне дійсне число.

7. Записати рівність Парсеваля для функції

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le\alpha,\\ 0, & \alpha<|x|\le\pi,\end{cases}$$

і знайти суми рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$.

8. Як пов'язані між собою коефіцієнти Фур'є a_n, b_n і α_n, β_n неперервних функцій f і φ, якщо:

1) $\varphi(x)=f(-x)$; 2) $f(-x)=-\varphi(x)$;

3) $\varphi(x)=f(x+h)$, де h — стала, а f є 2π-періодичною;

4)• $\varphi(x)=\frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} f(u)du$, де h — стала, а f є 2π-періодичною.

9. Якщо функція f є абсолютно інтегровною на відрізку $[-\pi;\pi]$, то:

1) $f(x+\pi)=f(x)\Rightarrow a_{2n-1}=b_{2n-1}=0,\quad n\in\mathbf{N}$;

2) $f(x+\pi)=-f(x)\Rightarrow a_0=0,\ a_{2n}=b_{2n}=0,\quad n\in\mathbf{N}$.

Довести це.

Зразки розв'язування задач

1. 7), 8) Якщо ряд (1) є рядом Фур'є функції f, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ збіжний (теорема про почленне інтегрування ряду Фур'є). Отже, твердження 7) правильне.

Розглянемо тригонометричний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln(n+1)}$. Цей ряд збіжний $\forall\ x\in(-\infty;+\infty)$ до деякої функції f (див. задачу 9 § 11.4). Разом з тим цей ряд не буде рядом Фур'є ні для функції f, ні для будь-якої іншої, оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}$ розбіжний (твердження 7)). Отже, твердження 8) неправильне.

2. 9) Через те що

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x>0,\\ 0, & \text{якщо } x=0,\\ -1 & \text{якщо } x<0,\end{cases}$$

то функція f інтегровна на відрізку $[-\pi;\pi]$ і можна знайти її коефіцієнти Фур'є. Маємо

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0,\ \text{оскільки функція } f \text{ непарна на відрізку } [-\pi;\pi];$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=0,\ \text{оскільки функція } f(x)\cos nx \text{ непарна на відрізку } [-\pi;\pi];$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin nx dx=$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi n}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & \text{якщо } n = 2k-1, \\ 0, & \text{якщо } n = 2k, \end{cases} \quad k \in \mathbf{N}.$$

Отже,

$$\operatorname{sign} x \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin(2k-1)x.$$

Покладемо $\varphi(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in (-\pi; \pi)$, $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi) = 0$ і $\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x)$ $\forall x \in (-\infty; +\infty)$. У такому разі кажуть, що задану функцію $f(x) = \operatorname{sign} x$ продовжили періодично з періодом $T = 2\pi$ на всю числову пряму. Для функції φ виконуються достатні умови збіжності ряду Фур'є. Тому

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin(2k-1)x \quad \forall\, x \in (-\infty; +\infty).$$

Через те що $\varphi(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in (-\pi; \pi)$, то

$$\operatorname{sign} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin(2k-1)x, \quad x \in (-\pi; \pi).$$

Зокрема, при $x = \frac{\pi}{2}$ матимемо

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{2k-1} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1},$$

тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4} \text{ (див. задачу 3.5)).}$$

4. 8) Оскільки ряд Фур'є заданої функції має вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos(2n-1)x$, то $a_{2n} = 0$ $\forall n$ і цю функцію можна вважати парною на інтервалі $(-\infty; +\infty)$. Тому знайдемо $f(-x) = f(x)$ $\forall x$ і цим самим визначимо функцію на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Перш ніж визначити функцію на проміжках $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ і $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, звернемо увагу на те, що $a_{2k} = 0$ $\forall k = 1, 2, \ldots$. Отже,

$$0 = a_{2k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos 2kx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos 2kx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x) \cos 2kx dx \right).$$

Розглянемо $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} f(x) \cos 2kx dx$ і зведемо його до інтеграла на проміжку $[0; \frac{\pi}{2}]$ підстановкою $x = -y + \pi$.

Дістанемо $dx=-dy$, $\quad x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow y=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi\Rightarrow y=0$ і

$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\cos 2kx dx=-\int_{\pi/2}^{0} f(-y+\pi)\cos 2k(-y+\pi)dy=$$

$$=\int_{0}^{\pi/2} f(\pi-y)\cos(-2ky+2k\pi)dy=\int_{0}^{\pi/2} f(\pi-x)\cos 2kx dx.$$

Отже,

$$a_{2k}=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\cos 2kx dx+\int_0^{\pi/2} f(\pi-x)\cos 2kx dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(f(\pi-x)+f(x)\right)\cos 2kx dx=0,$$

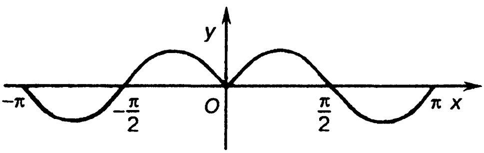


Рис. 47

якщо $\quad f(\pi-x)=-f(x)$, $\ x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Ця рівність визначає функцію на проміжку $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$, а тому і на відрізку $[-\pi;\pi]$, оскільки $f(-x)=f(x)\quad\forall\ x$.

На відрізку $[-\pi;\ \pi]$ графік функції має вигляд, зображений на рис. 47. Якщо продовжити функцію f на всю числову пряму з періодом $T=2\pi$, то матимемо функцію, для якої виконано всі умови рівномірної збіжності її ряду Фур'є. Тому

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}\cos(2k-1)x=x\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\ x\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right],$$

де

$$a_{2k-1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(2k-1)x dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\cos(2k-1)x dx+\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\cos(2k-1)x dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\cos(2k-1)x dx-\int_{\pi/2}^{0} f(\pi-y)\cos(2k-1)(\pi-y)dy\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\cos(2k-1)x dx-\int_0^{\pi/2} f(\pi-x)\cos(2k-1)x dx\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}x-x^2\right)\cos(2k-1)x dx=\left|\begin{array}{l} u=\frac{\pi}{2}x-x^2,\ du=\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)dx, \\ dv=\cos(2k-1)x dx,\ v=\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\end{array}\right|$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{2}x-x^2\right)\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\pi/2}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{2k-1}\sin(2k-1)x dx\right)=$$

$$\left| \begin{array}{c} u = \frac{\pi}{2} - 2x,\ du = -2dx, \\ dv = \sin(2k-1)x dx,\ v = -\frac{\cos(2k-1)x}{2k-1} \end{array} \right|$$

$$= -\frac{4}{\pi(2k-1)}\left(-\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\frac{\cos(2k-1)x}{2k-1} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos(2k-1)x}{2k-1} dx \right) =$$

$$= -\frac{4}{\pi(2k-1)}\left(\frac{\pi}{2(2k-1)} - \frac{2\sin(2k-1)x}{(2k-1)^2} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = -\frac{2}{(2k-1)^2} + \frac{(-1)^{k-1} \cdot 8}{\pi(2k-1)^3}.$$

І остаточно

$$x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k-1} \cdot 8}{\pi(2k-1)^3} - \frac{2}{(2k-1)^2} \right)\cos(2k-1)x,\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

8. 4) Нехай $a_n(f)$ і $b_n(f)$ — коефіцієнти Фур'є функції f, а $\alpha_n(\varphi)$ і $\beta_n(\varphi)$ — функції φ. Тоді оскільки

$$\varphi(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(u)du = \frac{1}{2h}\left(\int_0^{x+h} f(u)du - \int_0^{x-h} f(u)du \right),$$

то

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2h}(f(x+h) - f(x-h)) \quad \forall x \in (-\infty;\ +\infty).$$

За теоремою про почленне інтегрування ряду Фур'є дістанемо

$$\varphi(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \frac{a_0(f)}{2}dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)dt =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2h}\left(\frac{a_n(f)}{n}\sin nt - \frac{b_n(f)}{n}\cos nt \right)\Big|_{x-h}^{x+h} =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2h}\left(\frac{a_n(f)}{n}(\sin n(x+h) - \sin n(x-h)) - \right.$$

$$\left. - \frac{b_n(f)}{n}(\cos n(x+h) - \cos n(x-h)) \right) = \frac{a_0(f)}{2} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n(f)}{2nh} \cdot 2\sin nh \cos nx + \frac{b_n(f)}{2nh} \cdot 2\sin nh \sin nx \right) =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n(f)}{nh}\sin nh \cos nx + \frac{b_n(f)}{nh}\sin nh \sin nx \right).$$

Отже,

$$\alpha_0(\varphi) = a_0(f), \quad \alpha_n(\varphi) = \frac{a_n(f)\sin nh}{nh}, \quad \beta_n(\varphi) = \frac{b_n(f)\sin nh}{nh}.$$

ВІДПОВІДІ

§ 1.1.

2. 3) $A=\{1,2\}$; 7) $A=\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$. **6.** 2^n. **7.** 1) Ні; 3) ні. **13.** 1) $\{n\in\mathbf{Z}:\ n=2k$ або $n=3k,\ k\in\mathbf{Z}\}$: 3)$\{n\in\mathbf{Z}:\ (\exists\, k\in\mathbf{Z}:\ n=2k$ і $\forall\, m\in\mathbf{Z}\ \ n\neq 3m)\}$. **14.** 1) Так. **16.** 1) $A\setminus B$; 3) $A\bigcup B$. 5) $A\bigcap B$. **18.** $X\bigcup Y$. **20.** 1) $(0;\ 1)$; 4) $[0;1/2)\bigcup(1/2;2/3)\bigcup\{1\}$. **21.** 1) $A\bigcup B=(0;4]$, $A\bigcap B=[1;\ 3)$, $A\setminus B=(0;\ 1)$; 3) $A\bigcup B=(-\infty;\ 2)\bigcup(3;4)$, $A\bigcap B=(-2;\ 1]$, $A\setminus B=\varnothing$; 5) $A\bigcup B=$ $=\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right)$, $A\bigcap B=\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$, $A\setminus B=\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$. **22.** 3) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n=(0;\ 1]$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}X_n=\varnothing$; 5) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n=(0;\ 1)$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}X_n=(0;\ 1/2)$; 7) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n=$ $=\{1/k:k\in\mathbf{N}\}$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}X_n=\varnothing$; 9) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n=(1;\ +\infty)$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}X_n=\varnothing$. **24.** $A\times B=\{(a,\ b),\ (a,\ c),$ $(b,\ b),\ (b,\ c)\}$, $B\times A=\{(b,\ a),\ (b,\ b),\ (c,\ a),\ (c,\ b)\}$, $A\times B=B\times A\Leftrightarrow a=c$. **25.** 1) Якщо $A=B$; 3) якщо $B\subset A$.

§ 1.2

10. Правильними є твердження 2) і 3). **11.** 1) Так; 2) –5) ні; 6) так. **12.** Якщо $a=a_na_{n-1}\ldots a_0,\ a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-m}\ldots$ і $b=b_nb_{n-1}\ldots b_0,\ b_{-1}b_{-2}\ldots b_{-m}\ldots$ — додатні числа, то $a<b\Leftrightarrow\exists\ k_0:\ a_{-k}=b_{-k}$, якщо $k<k_0$ і $a_{-k_0}<b_{-k_0}$; $a>b\Leftrightarrow b<a$ і $a=b\Leftrightarrow a_{-k}=$ $=b_{-k}\ \ \forall k$. **15.** 1) $x_0^-=1$, $x_0^+=2$, $x_1^-=1{,}7$, $x_1^+=1{,}8$, $x_2^-=1{,}73$, $x_2^+=1{,}74$, $x_3^-=1{,}732$, $x_3^+=1{,}733$; 3) $x_0^-=3$, $x_0^+=4$, $x_1^-=3{,}1$, $x_1^+=3{,}2$, $x_1^-=3{,}14$, $x_2^+=3{,}15$, $x_3^-=3{,}141$, $x_3^+=3{,}142$. **22.** 2) $x=\frac{r^3-3}{1-2r}$, де $r\in\mathbf{Q}$ і $r\neq\frac{1}{2}$. **23.** Правильними є твердження 1), 2) і 5). **25.** Множини B і D.

§ 1.3

5. 1) $O_\alpha(x_0)\bigcup O_\beta(x_0)=O_r(x_0)$, де $r=\max\{\alpha,\ \beta\}$, а $O_\alpha(x_0)\bigcap O_\beta(x_0)=O_r(x_0)$, де $r=\min\{\alpha,\ \beta\}$; 3) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}O_{r_n}(x_0)$ і $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}O_{r_n}(x_0)$ можуть не бути околами точки x_0. **8.** 2) Так. **9.** 3) $x\in(-\infty;\ -2)\bigcup[2;\ +\infty)$; 4) $x\in(-\infty;\ 1]\bigcup[2;\ +\infty)$; 6) $x\in(-\infty;\ 1]\bigcup[3;\ +\infty)$; 8) $x\in$ $\in\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left[\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right]$. 9) $|x|\geq\sqrt[3]{3}$. **10.** 1) Так; 3) так. **11.** 1) $(-2;\ 4)$; 3) $|x|\geq 2$; 4) $|x|\geq 2$;

6) $\left\{\frac{\pi}{4}+2\pi k:\ k\in\mathbf{Z}\right\}$; 8) $|x|<2$; 11) $(-2;\ 0)$; 15) $\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi k:\ k\in\mathbf{Z}\right\}$; 17) $x\neq\frac{\pi k}{2}$, де $k\in\mathbf{Z}$; 19) $(-\infty;\ -1)\cup(0;\ 2)\cup[3;\ +\infty)$; 21) $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+\pi k\right)$; 23) $\{3/4\}$; 26) $(-7/5;\ 5)$; 27) $(3/2;\ 5/2)$.

§ 1.4

8. Правильними є твердження 2), 4) і 5). **11.** 1) $\inf E=0$, $\sup E=1$, $\min E$ і $\max E$ не існують; 3) $\min E=\inf E=0$, $\max E=\sup E=1$; 5) $\inf E=2$, $\sup E=3$, $\max E$ і $\min E$ не існують; 7) $\inf\ E=-\infty$, $\sup\ E=2$, $\max E$ і $\min E$ не існують; 9) $\inf E=0$, $\sup E=\max E=1$, $\min E$ не існує; 11) $\inf E=-\infty$, $\sup E=+\infty$, $\min E$ і $\max E$ не існують; 13) $\inf E=\min E=0$, $\sup E=\max E=8/9$. **12.** Правильним є твердження 1).

§ 1.5

7. 1) $\operatorname{Re}z=-6$, $\operatorname{Im}z=5$; 5) $\operatorname{Re}z=18$, $\operatorname{Im}z=27$. **8.** 2) $(x,\ y)=(-2,\ 2)$, $(x,\ y)=(-2,\ -2)$. **9.** 1) $|i|=1$, $\arg i=\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Arg}i=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; 3) $|-1|=1$, $\arg\ (-1)=\pi$, $\operatorname{Arg}(-1)==\pi+2\pi k$, $-1=\cos\pi+i\sin\pi$; 5) $\left|i^{23}\right|=1$, $\arg i^{23}=-\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Arg}i^{23}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $i^{23}=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)++i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; 9) $|-1-i|=\sqrt{2}$, $\arg(-1-i)=-\frac{3\pi}{4}$, $\operatorname{Arg}(-1-i)=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $-1-i=\sqrt{2}\times\times\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$; 11) $\frac{1+i}{1-i}=i$ (див. 1)); 13) $\left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$, $\arg\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{2\pi}{3}$, $\operatorname{Arg}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$. **15.** 1), б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$; 2), а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\ i$. **16.** 1) $z_k=\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\ \sin\ \frac{-\frac{\pi}{4}\ +\ 2\pi k}{3}\right)$, $k=0,\ 1,\ 2$; 5) $z_0=\sqrt{2}$, $z_1=-\sqrt{2}$. **17.** 1) $z_k=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2}+\ i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2}\right)$, $k=0,\ 1$; 3) $z_k=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}++i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}$, $k=0,\ 1,\ 2$; 5) $z_k=\cos\frac{\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi k}{3}$, $k=\overline{0,5}$; 7) $z=-1$; 9) $z_1=0$; $z_2=1$; 11) $z=2$; 13) $z_1=0$; $z_2=-1-i$.

§ 2.1

2. 4), а) $f(i)=0=f(-i)$, $f(1+i)=3/2+i(1/2)$; в) $f(i)=-2i=f(1+i)$, $f(-i)=2i$; д) $f(i)=1=f(-i)$, $f(1+i)=\sqrt{2}+1$. **3.** 3) $f(1/2)=0$, $f(-5/3)=-1$, $f(10,\ 7)=10$, $f(-\pi)=-4$; 5) $f(-1)=1$, $f(2)=4$. **4.** 2), б) $f(x)=x^2-2$; в) $f(x)=\cos x$; г) $f(x)=a^x$; 3), а) $f(x)=\lg x$; б) $f(x)=\operatorname{tg}x$; в) $f(x)=x^n$. **6.** 3) $[-1;\ 1]$; 4) $(-\infty;\ 1]\cup\cup[1;\ +\infty)$; 6) $[-1;\ 1]$; 8) $(-\infty;\ -1]\cup[2;\ +\infty)$; 10) $(-\infty;\ 0)$; 12) $(-\infty;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$; 14) $(-\infty;\ +\infty)$; 16) $(8;\ +\infty)$; 18) $(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; 20) $(-\infty;\ -1)\cup(0;\ +\infty)$; 22) $(-2;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$;

24) $[-1;\ 0)\cup(0;\ 1)$; 28) $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{Z}}[2\pi n;\pi+2\pi n]$; 30) $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\left[4\pi^2n^2;\ (n+2\pi n)^2\right]$; 32) $(3;\ 4]\cup(3-2\pi;\ 3-\pi)$; 34) $[0;\ 4]$; 42) $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{Z}}\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right]$; 43), а) $[-1;\ 1]$; б) $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{Z}}[2\pi n;\ \pi+2\pi n]$: в) $[-a;\ 1-a]$. **7.** 1) $[0;\ 4]$; 3) $[-1;\ 1]$; 5) $(-\infty;\ +\infty)$; 7) $\mathbf{Z}$; 9) $[0;\ +\infty)$; 11) $(0;\ 1]$. **8.** 3) $[-1/3;0]$; 6) $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{Z}}\left[\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$. **9.** $x\in\{1,\ -1,\ 2,\ -3\}$. **11.** $S=\dfrac{px(p-x)}{2p-x}$, $0<x<p$. **12.** 2) 10,5 с; 69,3 с. **14.** Відображеннями **R** на **R** є відображення: 2) при $a=0$ і $b\neq 0$, 8) і 9) при $a=0$. **16.** 2) При $a=0$ і $b\neq 0$ маємо $f:\mathbf{R}\leftrightarrow\mathbf{R}$; 4) $f:\mathbf{R}\leftrightarrow(0;\ +\infty)$; 7) $f:\ (-\infty;\ +\infty)\leftrightarrow\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$; 9) $f:\ R\leftrightarrow(-\infty;\ 0)\cup[2a;\ +\infty)$. **18.** $f(x)=c+\dfrac{d-c}{b-a}(x-a)$, $x\in[a;\ b]$. **19.** 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) так. **24.** 1) 5; 2) $[6;\ +\infty]$; 3) $(-2;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ +\infty)$. **25.** 3) Так; 4) ні; 6) ні; 7) ні; 9) так; **26.** 1) Має, якщо $a\neq 0$, $f^{-1}(y)=(y-b)/a$; 3) $f^{-1}(y)=(1/2)\ \sqrt[3]{y}$; 5) не має; 7) $f^{-1}(y)=(1/2)\ \left(10^{-y}-10^{y}\right)$; 9) $f^{-1}(y)==\lg\left(\sqrt{1+y^2}+y\right)$; 11) $f^{-1}(y)=y-n$, $y\in[2n;\ 2n+1)$, $n\in Z$.

§ 2.2

8. 1) $\varnothing$; 2) $(1;\ +\infty)$; 3) $[-4;\ 4]$. **10.** 1) $x\in\{-2;\ 3\}$; 3) $(-\infty;\ -1)\cup[2;\ +\infty)$. **11.** 1) $x_1==1/10$, $x_2=10$; 3) $[0;\ +\infty)$; 5) $[1/10;\ 2)\cup\left[10^3;\ +\infty\right)$; 7) $x\in\left\{-\frac{2\pi}{3}-2\pi n:\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\right\}\cup\cup\left\{\frac{2\pi}{3}-2\pi n:\ n=1,\ 2,\ \ldots\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{3}+2\pi n:\ n=1,\ 2,\ \ldots\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$; 9) $x\in\bigcup\limits_{n\in\mathbf{Z}}\left(\left(\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)\right)$.

§ 2.3

6. 1) Не існує; 3) 2. **9.** 1) Спадає на $(-\infty;\ 0]$ і зростає на $[0;+\infty)$; 5) зростає на $[0;+\infty)$; 7) зростає на $(-\infty;+\infty)$; 9) зростає на $[-1;1]$; 11) не спадає на $(-\infty;+\infty)$. **10.** 1) Парна; 3) парна; 5) парна; 7) ні парна, ні непарна; 9) ні парна, ні непарна; 11) ні парна, ні непарна; 13) непарна; 15) парна; 17) непарна; 19) непарна; 21) ні парна, ні непарна; 23) парна; 25) парна; 27) ні парна, ні непарна; 29) парна; 31) непарна; 33) ні парна, ні непарна; **15.** 1) $\varphi(x)==\cos x$ парна на $[-\pi;\ \pi]$ і $\varphi(x)=f(x)$ на $[0;\ \pi]$, непарне продовження неможливе; 3) $\varphi(x)=\begin{cases}x^3+x^2-3\sin x, & \text{якщо } x\geq 0,\\ x^3-x^2-3\sin x, & \text{якщо } x<0.\end{cases}$ **18.** 1) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 5) $\frac{\pi}{4}$; 7) $\frac{1}{2}$; 9) π; 11) π; 13) $\frac{\pi}{4}$; 15) π; 17) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$; 19) неперіодична; 21) 2π; 23) 1. **19.** 1) $f(x)=\operatorname{tg}\frac{\pi x}{3}$; 3) $f(x)=\sin 4x$. **20.** а) Функція Діріхле: $D(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x\in Q,\\ 0, & \text{якщо } x\notin Q.\end{cases}$ **22.** 2) $T=\dfrac{\text{НСК}(q_1,\ q_2,\ldots,q_k)}{\text{НСД}(p_1,p_2,\ \ldots,\ p_n)}T_0$, де $T_0=2\pi$ для синуса і $T_0=\pi$ для тангенса. **23.** 1) 2π; 2) неперіодична; 3) $\dfrac{2\pi}{\text{НДС}(\alpha,\ \beta)}$; 5) 12π; 7) 6π; **28.** Ні. Вказівка. Розгляньте, наприклад, функцію Діріхле.

§ 2.4

1. $|f(a)-f(b)|$. **3.** $\sigma(T_1)\geq\sigma(T)$. **5.** 1) 2; 2) 2; 3) 4; 4) π; 6) 21; 7) ∞. **9.** Ні. Вказівка. Розгляньте функцію $f(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x\in Q,\\ -1, & \text{якщо } x\notin Q,\end{cases}$ $x\in[0;1]$. **11.** 3) Вказівка. Скористайтесь задачею 11. 1), враховуючи, що $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}+\cos y$, де $y=2x\in[0;\ 2\pi]$.

§ 2.5

4. 1) Так; 2) — 4) ні.

§ 2.6

3. 3) $\mu(A)=a$; 5) $\mu(A)=a$. **5.** $Q\subset A$, $Q\neq A$, але $\mu(Q)=\mu(A)=a$. **7.** 2) Так.

§ 2.7

2. 1) $\mu(A)=c$; 3) $\mu(E)=c$; 5) $\mu(A)=c$; 7) $\mu\ \ (A)\leq a$. **5.** Вказівка. Розгляньте множину $\mathbf{R}_+=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[n-1;n)$ та відображення $f:\ A\leftrightarrow\mathbf{R}$, де A — континуальна множина. **7.** $\mu(A)=$ $=a$. **8.** Континуальна. **12.** 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) так; 5) так. **13.** 2) — 4) Континуальна; 5) 2^c.

§ 3.1

3. 1) $a_n=2R\sin\dfrac{\pi}{n}$; 3) $a_n=1$. **4.** 1) $\dfrac{n}{n+4}$; 3) $n\cdot 2^n$; 5) $\dfrac{3^n}{n+1}$; 7) $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$; 9) $\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}$. **9.** 1) Збіжна до 0; 3) збіжна до $\dfrac{1}{2+\pi}$; 5) збіжна до $\dfrac{1}{2}$; 7) розбіжна; 9) збіжна до 0; 11) збіжна до 1. **17.** 1) 1; 5) –5/4. **18.** Послідовність (z_n) може розбігатися. **23.** 3) 1/2; 6) 10; 7) –1/2; 9) 1; 11) 6; 13) 8; 15) 4/3; 17) 0; 25) $-\infty$; 29) 3/4; 31) 1/4; 33) 1; 35) –1; 39) 1; 41) $+\infty$; 43) 2. **24.** 1) $z_n\approx 0$; 3) $z_n\approx -1+3i$; 5) $z_n\approx 0$.

§ 3.2

2. 1) Зростає; 3) не є квазімонотонною; 5) зростає; 7) спадає, якщо $0<a<2$, і квазіспадає, якщо $a\geq 2$; 13) квазіспадає; 15) не є квазімонотонною. **3.** 1) Збіжна до 1; 3) розбіжна; 5) збіжна до e; 7) збіжна до 0; 13) збіжна до 0; 15) розбіжна. **5.** 3) $\overset{0}{1}$. **12.** 1) e^{15}; 3) e^{-2}; 5) e^{9}.

§ 3.3

2. 1) $[0;\ 1]$; 3) $+\infty$; 7) $(-\infty;\ x_0]$; 9) $\{z:\ |z-c|\leq r\}$; 11) $\{z:\ a\leq\operatorname{Re}z\leq b\}$. **6.** 1) Так, 3; 3) так, 1; 5) ні; 7) так, 1; 9) так, $+\infty$, $-\infty$, ∞. **12.** 1) Нескінченно мала в точці $x_0=-1$ і нескінченно велика в точці $x_0=1$; 5) нескінченно мала в точці $x_0=0$ і нескінченно велика в точці $x_0=\infty$.

§ 3.4

5. 3) 4; 5) –3/2; 7) 4/3; 11) 1/56; 13) $-\sqrt{3}$; 15) 0; 17) m/n; 18) $1/n$. Вказівка. Скористайтеся формулою $a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1}\right)$. **6.** 3) 1/27; 5) 1/2; 9) 0; 11) $1/\cos^2 a$; 13) $2/\pi$; 15) $\sqrt{2}$; 17) –3; 21) $1/\sqrt{e}$; 23) ln 2; 27) 1/ln 7. **7.** 1) 1/3; 3) 2; 7) $(3/2)^{30}$; 11) 1/2; 13) 0; 15) 0; 17) $\pi/3$; 19) $-\pi/2$; 21) 1; 23) $1/e^5$. **8.** 1) $f(1-)=1$,

$f(1+)=5$; 3) $f(0+)=f(0-)=5$; 5) $f(-2-)=3$, $f(-2+)=-2$; 7) $f(0+)=f(0-)=$ $=b/a$; 9) $f(4+)=+\infty$, $f(4-)=-\infty$; 11) $f(1+)=+\infty$, $f(1-)=-\infty$. **9.** $a=1$, $b=1/2$. **10.** 1) 1/2; 5) $1/\sqrt{2}$. **16.** 1) Так; 3) так; 5) так. **19.** 1) 3/5; 3) 7/6; 5) 1/2; 7) 1/8; 9) 1/2. **21.** $(AkT/h\nu)d\nu$. **22.** $L_0/2$.

§ 3.5

3. 1) $\{1/2+i,\ 1/2-i\}$; 3) **N**; 5) $\{-\infty,\ +\infty\}$; 7) $\{0,\ +\infty\}$; 9) $\{1\}$. **4.** 1) Для комплексної послідовності поняття $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} z_n$ та $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} z_n$ не визначаються; 3) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=+\infty$; 5) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=-\infty$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=+\infty$; 7) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=+\infty$; 9) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=1$. **5.** 1) $\underline{\lim\limits_{x\to\infty}} f(x)=\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} f(x)=0$, $\underline{\lim\limits_{x\to 0}} f(x)=-\frac{\pi}{2}-1$, $\overline{\lim\limits_{x\to 0}} f(x)=\frac{\pi}{2}+1$; 5) $\underline{\lim\limits_{x\to\pi/4}} f(x)=$ $=\overline{\lim\limits_{x\to\pi/4}} f(x)=e$, $\underline{\lim\limits_{x\to 0+}} f(x)=\overline{\lim\limits_{x\to 0+}} f(x)=1$. **19.** Вказівка. Скористайтеся теоремою Штольца. 1) 0; 2) 0; 3) $\frac{1}{p+1}$; 4) $\frac{2^p}{p+1}$.

§ 4.1

2. $\delta(\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{40}$. **3.** $\delta(\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{1200}$. **4.** 1) Ні; 3) ні. **8.** 1), 5), 9) Неперервна на **R**; 7) неперервна на $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$; 11) неперервна на $\mathbf{R}\backslash\{\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\}$; 13) неперервна на $\mathbf{R}\backslash\{\pm1,\ \pm2,\ ,..\}$; 15) неперервна на $\mathbf{R}\backslash\{0\}$. **9.** 1), 3), 5) Неперервна на **R**; 7) розривна у кожній точці інтервалу (0; 1). **10.** Так. **11.** 1) Неперервна на **C**; 4) неперервна на $\mathbf{C}\backslash\{z=x:\ x\le 0\}$; 5) неперервна на $\mathbf{C}\backslash\{0\}$.

§ 4.2

4. 1) Неперервна на **R**; 5) неперервна на $\mathbf{R}\backslash\{-2\}$, $x_0=-2$ — точка розриву першого роду; 7) неперервна на $\mathbf{R}\backslash\{-1\}$, $x_0=-1$ — точка розриву другого роду; 9) неперервна на $\mathbf{R}\backslash\{-2\}$, $x_0=-2$ — точка розриву другого роду; 11) неперервна на $\mathbf{R}\backslash\{-3\}$, $x_0=-3$ — точка розриву першого роду; 13) неперервна на $\mathbf{R}\backslash\{\pi/2+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\}$, точки $\pi/2+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, — усувні точки розриву. **6.** 1) $f(0)=-2/5$; 3) $f(0)=2$; 5) $f(0)=$ $=2/3$. **7.** 1) Якщо $f(0)=0$, то f неперервна в нулі; 3) функція не визначена у будь-якому проколеному околі точки $x_0=0$; 5) розрив і зліва, і справа другого роду; 7) якщо $f(0)=1$, то f неперервна в точці $x_0=0$ зліва, а якщо $f(0)=1/2$, — справа, отже, зробити функцію неперервною не можна; 9) якщо $f(0)=e$, то f неперервна в нулі.

§ 4.3

3. Так. **7.** 1) Обмежена, набуває найбільшого і найменшого значень; 2) обмежена, набуває найбільшого і найменшого значень; 3) необмежена, набуває найбільшого значення. **11.** 1) — 8), 10), 11) Так; 9) ні. **13.** Ні. **15.** Не існує. **17.** 1) $x\in(-\infty;-3)\cup(-1;1)\cup(1;2)\cup$ $\cup(3;+\infty)$; 2) $x\in[-3;1)\cup(3/2;5)$; 3) $x\in\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right)$; 5) $x>1$, якщо $a>1$, і $\varnothing$, якщо $0<a<1$. **22.** Ні, оскільки ця функція може бути розривною в точці $x=c$. **24.** 1) $f^{-1}(y)=\frac{cy-a}{b-dy}$; 3) $f^{-1}(y)=\begin{cases} y, & y\in\mathbf{Q},\\ -y, & y\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\end{cases}$; 5) $f^{-1}(y)=\pi+\operatorname{arctg} y$, $y\in\mathbf{R}$; 7) $f^{-1}(y)=$

$= \begin{cases} \sqrt{y-1}, & y>1, \\ 0, & y=0, \\ -\sqrt{y-1}, & y<-1. \end{cases}$ **25.** Може. Див. вправу **24.** 7). **27.** 66,6 см. Вказівка. Покласти $h=10x,\ 6\le x\le 7$. **28.** 1,54.

§ 5.1

2. 1) $k\Delta x$; 3) $-\dfrac{k\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}$; 5) $a^{x_0}\left(a^{\Delta x}-1\right)$; 7) $2\cos\left(x_0+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$; 9) $\dfrac{\sin\Delta x}{\cos x_0\cos(x_0+\Delta x)}\times$ $\times\left(\operatorname{tg}^3(x_0+\Delta x)+\operatorname{tg}^2(x_0+\Delta x)\operatorname{tg}x_0+\operatorname{tg}(x_0+\Delta x)\operatorname{tg}^2x_0+\operatorname{tg}^3x_0\right)$; 11) $\dfrac{\Delta x\sqrt{1-x_0}}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}+$ $+\dfrac{\Delta x\sqrt{x_0}}{\sqrt{1-x_0}+\sqrt{1-x_0-\Delta x}}$; 13) $\dfrac{5\Delta x}{\sqrt{5(x_0+\Delta x)+1}+\sqrt{5x_0+1}}$; 15) $2\cos\left(x_0+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}(\sin(x_0+$ $\Delta x)+\sin x_0)$; 17) $\arcsin\left(\dfrac{2x_0^2\Delta x+x_0\Delta x^2}{\sqrt{1-x_0^2}+\sqrt{1-(x_0+\Delta x)^2}}+\Delta x\sqrt{1-x_0^2}\right)\left(\arcsin^2(x_0+\Delta x)+\arcsin(x_0+\right.$ $\left.+\Delta x)\arcsin x_0+\arcsin^2x_0\right)$; 19) $\dfrac{\left(-x_0^2+1\right)\Delta x-x_0\Delta x^2}{(x_0+1)\left((x_0+\Delta x)^2+1\right)}$. **3.** 1) $k(\Delta x)=2x_0+\Delta x$; 3; 2,1; 2,01; 2,001; 3) $k(\Delta x)=-\dfrac{1}{x_0(x_0+\Delta x)}$; –0,5; –0,(90); –0,(9900); –0,(999000). **4.** 1) $v_c(t_0)=2t_0+5+$ $+\Delta t,\ \ v_c(t_0=2)=9+\Delta t$; 10; 9,1; 9,01; 9,001; $v'(t_0)=2t_0+5,\ \ v'(2)=9$ (м/с); 3) $203\frac{7}{8}$; $215\frac{5}{6}$; $\rho(x_0)=12x_0-\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$; $191\frac{7}{8}$. **5.** 1) k; 3) $-\dfrac{k}{x_0^2}$; 5) $a^{x_0}\ln a$; 7) $\cos x_0$; 11) $\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-x_0^2}}$; 13) $\dfrac{5}{2\sqrt{5x_0+1}}$; 15) $2\sin x_0\cos x_0=\sin 2x_0$; 17) $\dfrac{3\arcsin^2x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}$; 19) $\dfrac{1-x_0^2}{\left(x_0^2+1\right)^2}$. **6.** 1) $\alpha=\operatorname{arctg}2\sqrt3$ в точці $x=-\sqrt3$, $\beta=\pi-\operatorname{arctg}2\sqrt3$ в точці $x=\sqrt3$; 3) $\dfrac{3\pi}{4}$; 5) $\dfrac{3\pi}{4}$, 0, arctg 7. **7.** 1) $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1, f'(0)$ не існує; 3) $f'_-(0)$, $f'_+(0)$ і $f'(0)$ не існують; 5) $f'_-(0)=f'_+(0)=f'(0)=0$; 7) $f'_+(0)$ не існує, $f'_-(0)=\varphi'_-(0)$; $f'(0)$ існує, якщо $a=\varphi'(0)$, $b=\varphi(0)$. **8.** 1) $y=$ $=6x-3$; 3) $y=8x+1-2\pi$; 5) $y=x-1$; 7) $y=x\ln a+1$; 9) $y=-10x+1+\dfrac{\pi}{2}$; 11) $y=\dfrac{1}{\ln a}(x-1)$; 13) $27y=11x+37$; 15) $y=x+1/2-\pi/4$.

§ 5.2

5. 1) $y'=-1$, якщо $x<0$, $y'=1$, якщо $x>0$, у точці $x=0$ недиференційовна; 3) $y'=2x$, якщо $x<0$, $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, якщо $x>0$, у точці $x=0$ недиференційовна; 5) розривна в кожній точці $x\ne0$, у точці $x=0$ диференційовна; 7) у точках $x=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, функція недиференційовна, причому $y'_-(\pi k)=-\sqrt2$, а $y'_+(\pi k)=\sqrt2$; $y'=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt2|\sin x|}$, якщо $x\ne\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$; 9) недиференційовна в точці $x=1$: $y'_-(1)=-1$, $y'_+(1)=1$, $y'=-1/x$, якщо $0<x<1$, $y'=1/x$, якщо

$1<x<+\infty$; 11) $y'=2|x|$. **6.** 1) $2ax+b$; 3) $-\frac{1}{\sqrt{x^3}}+\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}-\frac{4}{x^2}$; 5) $\frac{(b-2a)x^2+2(a+c)x+b+2c}{\left(1-x^2-2x\right)^2}$;

7) $\frac{(n-m)-(n+m)x}{(n+m)^{n+m}\sqrt{(1-x)^n(1+x)^m}}$; 9) $x^2\sin x$; 11) а) $2/\sin^2 x$; б) $-9x\sin x\cos^2 x$; 13) а) $(2-2x)\times$ $\times e^{-x^2+2x-1}$; б) $3\cdot 2^{3\sin x-\sin^3 x}\cdot\cos^3 x\cdot\ln 2$; в) $\frac{e^{-x}\cdot 3^{2x}}{4^{3x}}\ln\frac{9}{64e}$; 15) б) $-\cos x\,\mathrm{ctg}^2 x\cdot e^{\frac{1}{2}\mathrm{ctg}^2 x}$;

в) $e^{\sqrt[3]{x}}10^{x^2+\sqrt{x}}\left(\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\ln 10+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$; г) $2^{\sin^2\left(x^3-x\right)}\sin 2\left(x^3-x\right)\cdot\left(3x^2-1\right)\ln 2$;

17) а) $1/\left(\left(1+x^2\right)(1+x)^2\right)(x>-1)$; б) $-\frac{3}{\ln 2}\mathrm{tg}\,x$; в) $-\frac{2}{x\left(4+x^2\right)}$; 19) а) $1/\left(3x^2-2\right)$, $|x|>\sqrt{\frac{2}{3}}$;

б) $e^x\mathrm{arcctg}\,e^x$; в) $\frac{4x+4}{\left(4x^2+8x+9\right)\ln 10}-\frac{2x}{3\sqrt[3]{\left(4+x^2\right)^2}\left(1+\sqrt[3]{\left(4+x^2\right)^2}\right)}$; 21) а) $\sqrt{x^2-a^2}$; б) $-\frac{1}{\sin x}$;

в) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{ctg}^3\sqrt{x}$; г) $\mathrm{tg}^3\frac{x}{2}$; 23) а) $2\sin(\ln x)$, $x>0$; б) $-\frac{\sin x\ln\cos x}{(1+\ln\cos x)^2}$; в) $\frac{\ln\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\sin^2\sqrt{x}}$;

25) а) $1/\sqrt{5+2x-x^2}$, $|1-x|<\sqrt{6}$; б) $\frac{5-x}{\sqrt{9x-x^2}}$; в) $\mathrm{arctg}\,x+\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 27) $1/\left(x^2+5\right)$, $x\neq 0$; 29) $y'=-1$, якщо $\cos x>0\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in\mathbf{Z}\right)$, $y'=1$, якщо $\cos x<0$ $\left(x\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in\mathbf{Z}\right)$, у точках $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$, функція недиференційовна, хоч і неперервна; 31) $\left(a^2+b^2\right)/\left((x+a)\left(x^2+b^2\right)\right)$, $x>-a$; 33) а) $\left(e^x-1\right)/\left(e^{2x}+1\right)$;

б) $-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$; в) $a^{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}\cdot\frac{\ln a}{2\sqrt{x}(1+x)}+\frac{1}{2\ln a\cdot\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)}$; г) $-\frac{3\cos^2 x}{(1+\sin x)^3}$; 35) $e^{1/x-2}(1-$ $-\ln x)$; 37) а) $-\frac{\ln 4}{3x\ln^2 x}$; б) $(\sin x)^{1+\cos x}\left(\mathrm{ctg}^2 x-\ln\sin x\right)$; в) $(\ln x)^{x^2}(2x\ln|\ln x|+x/\ln x)$;

39) $\frac{4x^4\ln x-\left(x^4+4\right)\ln\left(x^4+4\right)}{x\left(x^4+4\right)\ln^2 x}$, $x>0$, $x\neq 1$; 41) $2\mathrm{ctg}\,x\ln\sin x$, $2\mathrm{ctg}\,x$, $2x\,\mathrm{ctg}^2 x$; 43) $-\sin\sin^3\times$ $\times\cos^2\sin^3\cos x\cdot 3\sin^2\cos^2\sin^3\cos x\cdot\cos\cos^2\sin^3\cos x\cdot 2\cos\sin^3\cos x\left(-\sin\sin^3\cos x\right)\cdot 3\sin^2\times$ $\times\cos x\cos\cos\cos x(-\sin x)$; 45) $e^e\left(e^{e^e}\right)^x$; 47) $\frac{6}{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}\ln\mathrm{tg}\sqrt{x}\ln\left(\ln^3\mathrm{tg}\sqrt{x}\right)}$; 49) $\left(1+x^{-\frac{1}{4}}\right)^3$;

51) $-\frac{x\sin\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{\cos\sqrt{1+x^2}}\cdot\sqrt{\left(1+x^2\right)}}$; 53) а) $\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{\left(x-2x^3\right)\sqrt{1-x^2}}$; б) $\frac{2}{\cos^3 x}+\sin 2x$; 55) $\frac{3}{2}\times$ $\times\frac{\ln^2\arcsin\sqrt{ax}}{\arcsin\sqrt{ax}\cdot\sqrt{1-ax}}\cdot\sqrt{\frac{a}{x}}$; 57) $\frac{3\left(\sqrt[3]{x-3}-\sqrt[3]{x+3}\right)}{2\sqrt[3]{x^2-9}}$, у точках $x=\pm 3$ функція недиференці-

йовна, хоч і неперервна; 59) $-\dfrac{6}{\ln 2(x+2)(5x-2)\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{5x-2}{x+2}+3}}$; 61) $\dfrac{8x}{\ln 10\cdot\sin\left(2x^2\right)}$;

63) $\dfrac{1+\sqrt{x}+x+\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}{2x\left(\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+\ln\left(\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}\right)\right)}$; 65) $\dfrac{2^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}\ln 2}{\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^2}+2x\sin x^2 e^{-\cos x^2}$; 67) $\arccos x$;

69) а) $-e^{-x}\sin^{-2}x\left(\cos x^2(\sin x+\cos x)\ +\ 2x\sin x\sin x^2\right)$; б) $\dfrac{4x}{|x|\left(4+x^2\right)}$;

71) $-\dfrac{2\cdot 10^{\operatorname{arcctg}^4\left(2+\sqrt{x}\right)}\ln 10\ \operatorname{arcctg}^3\left(2+\sqrt{x}\right)}{\left(5+4\sqrt{x}+x\right)\sqrt{x}}$; 73) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\log_7 e^{\sqrt{x}}\log_5\log_7 e^{\sqrt{x}}\ln 3\ln 5\ln 7}$;

75) $2^{\frac{\sin x}{\ln^2 x}}\ln 2\dfrac{x\cos x\ln x-2\sin x}{x\ln^3 x}$; 77) $9x^2\arccos x$; 79) а) $\dfrac{1+x^5}{x^4\left(1+x^2\right)}$; б) $\dfrac{x}{2\sqrt{1+x^2}}$;

81) $1/x\ +\ x/\left(1+x^2\right)\ -\ \operatorname{tg}x$; 83) $(\arccos x)^2$; 85) $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; 87) $\dfrac{x^2-7}{x^3-9x^2+28x-30}$;

89) $y\left(\dfrac{4}{5x}+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2x}{x^2+5}+4\operatorname{ctg}x-6\operatorname{tg}2x\right)$; 91) $\dfrac{y}{3}\left(\dfrac{2x-3}{x^2-3x+5}+\dfrac{1-\cos x}{x-\sin x}-\dfrac{2}{x+3}+\sin x\right)$;

93) $y\left(\cos x\operatorname{arcctg}x\ -\ \dfrac{\sin x}{\left(1\ +\ x^2\right)\operatorname{arcctg}x}\right)$; 95) $\dfrac{(\ln x)^{x^2-1}}{x^{2\ln x+1}}\left(2x^2\ln x\ln(\ln x)\ +\ x^2\ -\ 4\ln^2 x\right)$;

97) $-\left(\operatorname{arcctg}\sqrt{x}\right)^{\cos x}\left(\sin x\ln\left(\operatorname{arcctg}\sqrt{x}\right)\ +\ \dfrac{\cos x}{2\sqrt{x}(1\ +\ x)\operatorname{arcctg}\sqrt{x}}\right)$; 99) $\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{2x-1}{3}}\right)^x\times$ $\times\left(\ln\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{2x\ -\ 1}{3}}\ +\ \dfrac{\sqrt{3}x}{2(x\ +\ 1)\sqrt{2x\ -1}}\right)$. **7.** 1) $\dfrac{2\arcsin x\ln^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; 3) $5\left(x\sin x\ln^2 x\right)^4\times$ $\times\left(\sin x\ln^2 x+x\cos x\ln^2 x+2\sin x\ln x\right)$; 5) $-(\arccos x)^2$. **8.** 1) $y'=\sin x$, $1+\cos x\neq 0$; 0, $\sin 1$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\sqrt{2}$; 3) $\dfrac{6+x}{x^2+3}$, $3/4$, 2, $5/4$; 5) $2/\left(1+x^2\right)$, 2, $y'(-1)$ і $y'(1)$ не існують, $y'(-2)=$ $=y'(2)=\dfrac{2}{5}$; 7) $y(1/(x+1)+2/(x-3)+3/(x-4))$, -2000, 0, 0; 9) $-2\cos x(1+2\sin x)$, -2, $-\left(2+\sqrt{2}\right)$, 0, 2. **10.** 1) $-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg}t$, $t\neq\pi k$, $k=0,1,2$; 5) -1, $t\neq 0$; 7) $\dfrac{1-3t}{t-3}$, $t\neq 3$; 9) $\dfrac{2t(1-t)}{1-3t}$, $t\neq\dfrac{1}{3}$, $t\neq -1$; 11) $\dfrac{2t-t^4}{1-2t^3}$, $t\neq -1$, $t\neq\sqrt[3]{0{,}5}$. **11.** 1), а) $y=12x-16$, $12y+x-98=0$; б) $y+x+$ $+2=0$, $y=x$; в) $y=4x-6$, $4y+x+7=0$; г) $y=2x+2$, $2y+x+1=0$; д) $6y+3\sqrt{3}x-3-\pi\sqrt{3}=$ $=0$, $6\sqrt{3}y-12x+4\pi-3\sqrt{3}=0$; е) $ey-x=0$, $y=-ex+e^2+1$; є) $2y+x-4=0$, $y-2x+3=0$; ж) $4y+x-4=0$, $y=4x-1$; з) $y=3x-e^2$, $3y+x=9e^2$; и) $6y-4\sqrt{3}x=\pi-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $4y+2\sqrt{3}x=$

$=\dfrac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$; і) $4y-2x=\pi-2$, $4y+8x=\pi+8$; ї) $y-x\ln 2=1-\ln 2$; $y\ln 2+x=1+\ln 2$; 3) (5/4, $-41/8$), $(1,-5)$, $(3/4,-41/8)$; 5) дотичні паралельні в точках $A(2,-7/3)$ і $B(-2,-35/3)$ кубічної параболи та в точці $C(2,7)$ параболи; 7) 45°; 9) arctg 8 у точці $(-2,-7)$, arctg 2 у точці $(0,-3)$, arctg 8/241 у точці $(2,9)$; 11) $a=3$, $b=-7$, $c=3$; 13) 2; 15) $3\sqrt{3}$ кв. од.; 17) $a=1$, $AB=40\sqrt{2}$; 19) (5, 7), (3, –1); 23) (2, 8/3), (3, 7/2); 25) $a=7/12$; 29) спільні точки A (–2, –46/9) і B (4, 44/9), пряма дотикається до графіка функції у точці A; 31) $y=x-1$, $y=7x+2$; 33) $y=x+1$, $y=-3x-3$; 35) $y=-x+6$, $y=x-1$; 37) $y=0$, $4y+9x=9$; 39) (5/6, –19/6); 41), а) $y=-6x+1$, $y=-6x+25$; б) $2y+3x+4=0$, $2y+3x-14=0$; 43) $\sqrt{2}$; 45) $y=2x+\sqrt{2}/4$, $y=2x-\sqrt{2}/4$; 47), а) (2, 3), $(-5, 21)$; б) (–25, 3/4); 51) $y=\dfrac{11}{3}x$, $y=\dfrac{3}{11}x$; 53), а) $\pi/4$; б) $\pi/2$, arctg $\dfrac{3}{4}$; в) arctg $2\sqrt{2}$; д) arctg $\dfrac{3}{11}$, arctg $\dfrac{3}{41}$; е) $\pi/4$; є) arctg $\dfrac{1}{3}$; ж) arctg 3.

12. 1) 45,5; 3) –1, –2; 5) 4 с, 159 м/с; 7) $a_1(4)=16$ м/с², $a_2(4)=20$ м/с², $a_1(8)=40$ м/с², $a_2(8)=36$ м/с²; 9) 14 с, $v(14)=98$ м/с, $s(14)=905\frac{2}{3}$ м; 11) $\dfrac{v}{2\sqrt{x}}$; 13) $-\dfrac{8}{3}\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$, $\dfrac{100}{27}\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}\approx 3{,}7\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$; 14) 1600 г, $\rho=\dfrac{10x}{3}$ г/см, $\rho(A)=0$, $\rho(B)=100$ г/см.

§ 5.3

2. $\Delta y(1)=-\Delta x+\Delta x^2+\Delta x^3$, $dy(1)=-\Delta x$; а) 1; –1; 2; 2; б) –0,089; –0,1; 0,011; ≈0,1236; в) –0,009899; –0,01; +0,000101; 0,01020305 (близько 1 %). **3.** $\Delta s(2)=9\Delta t+\Delta t^2$, $ds(2)=9\Delta t$; 10 і 9; 0,91 і 0,9; 0,0901 і 0,09. Абсолютна похибка відповідно дорівнює 1; 0,01; 0,0001. Відносна похибка, %, відповідно дорівнює 10; 1; 0,1. **4.** а) 2/3; б) 6; в) $\Delta y(20)=\dfrac{4\Delta x}{9+\sqrt{81+4\Delta x}}$, $dy(20)=\dfrac{2}{9}\Delta x$; 0,19782582; 0,2; 0,019977826; 0,02. Абсолютні похибки: 0,00217418; 0,000022174. Відносні похибки, %, ≈1; ≈0,11. **5.** 1) $-\dfrac{dx}{2x\sqrt{x}}$; 3) $\dfrac{dx}{x^2-a^2}$, $|x|\neq|a|$; 5) $(1+x)e^x dx$; 7) $-\dfrac{dx}{1+x^2}$; 9) $\left(5x^4+15x^3-6x^2+(2x+5)\sqrt{x}+\dfrac{x^2+5x-2}{2\sqrt{x}}\right)dx$, $x>0$; 11) $\dfrac{2x\,dx}{\left(a^2-x^2\right)^2}$, $|x|\neq|a|$; 13) $-\dfrac{3\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x}dx$, $x\neq\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; 15) $-\dfrac{dx}{2\sin\frac{x}{2}}$, $x\neq 2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; 17) $\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{\left(1-x^2\right)\arccos x}}+\dfrac{\operatorname{arcctg}\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\right)dx$, $0<x<1$. **6.** 1) $-\dfrac{2}{3}\dfrac{udu+vdv+2wdw}{\left(u^2+v^2+2w^2\right)^{4/3}}$; 3) $\dfrac{vdu-udv}{|v|\sqrt{v^2-u^2}}$, $|u|\neq|v|$, $v\neq 0$; 7) $4u\cos u^2du+6v^2\sin\left(2v^3\right)dv+5dw$; 9) $\cos u\cos v\,du-\sin u\sin v\,dv+\operatorname{ctg} w\,dw$; 11) $\dfrac{\sin 2u\,du-2v\sin^2 u\operatorname{ctg} v^2dv}{\sin v^2}+\sec^2 w\,dw$;

7. 1) $\dfrac{\left(2t^3-6t^2+2t+11\right)\left(3t^2-6t+1\right)dt}{4\sqrt[4]{\left(\left(t^3-3t^2+t+4\right)\left(t^3-2t^2+t+7\right)\right)^3}}$; 3) $-dt$; 5) $\dfrac{(2t+5)dt}{2\sqrt{t^2+5t+3}}$. **8.** 1) 0,9975; 3) 16,04; 5) 3,0053334; 7) 1,02; 9) 5,0016575; 11) 3,0023889; 13) 2,5064452; 15) 4,9648. **9.** 1) 0,7129; 0,7194; 3) –0,8573; 0,4849; 7) 0,5356; 9) 1,0576; 1,0417; 11) 2,00434; 13) 0,1. **10.** $\Delta V(R=10,h=3)=\pi\left(51\Delta h+7\Delta h^2-\Delta h^3/3\right)$, $dV(R=10,h=3)=51\pi\Delta h$; а) $\Delta V=\dfrac{173}{3}\pi$, $dV=51\pi$; б) $\Delta V=\dfrac{653}{24}\pi$, $dV=25{,}5\pi$; в) $\Delta V=\dfrac{2531}{192}\pi$, $dV=12{,}75\pi$; г) $\Delta V=\dfrac{9959}{1536}\pi$, $dV=6{,}375\pi$. Відносні похибки: а) ≈11,5 %; б) ≈6,3 %; в) ≈3,3 %; г) ≈1,1 %. **11.** а) Збільшиться на $2{,}109193\pi$ м^2, $dS=2{,}05\pi$ м^2, відносна похибка ≈2,8 %; б) зменшиться на $0{,}2959\pi$ м^2, $dS=-0{,}3\pi$ м^2, відносна похибка ≈1,4 %.

§ 5.4

4. 1) $0,\ n\ge 2$; 3) $(-1)^{n-1}\dfrac{(2n-1)!!}{2^n(2n-1)}x^{-\frac{2n+1}{2}}$; 5) $a^x(\ln a)^n$; 7) $(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$; 9) $\cos\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$; 11) $(-1)^{n-1}n!c^{n-1}(ad-bc)/(cx+d)^{n+1}$; 13) $(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\dfrac{1}{(x-1)^n}+\dfrac{1}{(x+1)^n}-\dfrac{1}{(x-3)^n}-\dfrac{1}{(x-2)^n}\right)$; 15) $k^n a^{kx+\alpha}(\ln a)^n$; 17) $k^n\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$; 19) $(-1)^n\dfrac{bk^n n!}{(a+kx)^{n+1}}$; 21) $2^{n-1}k^n\times\cos\left(2kx+2\alpha+n\dfrac{\pi}{2}\right)$; 23) $\dfrac{3}{4}k^n\cos\left(kx+\alpha+n\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{1}{4}\cdot 3^n k^n\cdot\cos\left(3kx+3\alpha+n\dfrac{\pi}{2}\right)$; 25) $\dfrac{(a+c)^n}{2}\times\sin\left((a+c)x+b+d+n\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{(a-c)^n}{2}\sin\left((a-c)x+b-d+n\dfrac{\pi}{2}\right)$; 27) $a^n x\sin\left(ax+b+n\dfrac{\pi}{2}\right)-na^{n-1}\cos\left(ax+b+n\dfrac{\pi}{2}\right)$; 29) $(-1)^n\dfrac{120(n-6)!}{x^{n-5}}$, $n\ge 6$; 31) $e^{kx}\left(k^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\cos(bx+c+n\varphi)$, $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{k^2+b^2}}$, $\cos\varphi=\dfrac{k}{\sqrt{k^2+b^2}}$. **5.** 1) $d^4y=4!dx^4$, $d^5y=0$; 3) $\dfrac{12\left(2-x-x^2\right)}{(1-x)^5}dx^4$, $x\ne 1$; 5) $1024(5\cos 2x-x\sin 2x)dx^{10}$; 7) $-\dfrac{6}{x^4}dx^5$, $x>0$; 9) $-9!\left(\dfrac{1}{(x-2)^{10}}+\dfrac{1}{(x+2)^{10}}-\dfrac{2}{(x-3)^{10}}\right)dx^{10}$; 11) $10!\left(\dfrac{2}{(x-4)^{11}}+\dfrac{1}{(x+4)^{11}}\right)dx^{10}$; 13) $128e^{2x}(1+16\cos 2x)dx^8$; 15) $d^6y=-1024\cos 4x dx^6$, $d^7y=4096\sin 4x dx^7$; 17) $\dfrac{1}{2}e^{ax}\left(a^{10}+\left(a^2+4b^2\right)^5\cos(2bx+2c+10\varphi)\right)dx^{10}$, $\sin\varphi=\dfrac{2b}{\sqrt{a^2+4b^2}}$, $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+4b^2}}$. **9.** 1) $\dfrac{1}{4(1-t)^3}$; 3) $-\dfrac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}$; 5) $\dfrac{1}{3\sin^3 t\cos^2 t}$; 7) $\dfrac{1}{2\sin 2t}$. **10.** 1) $y''_{x^2}=-\mathrm{tg}^3 t$, $y'''_{x^3}=3\mathrm{tg}^4 t\sec t$; 3) $y''_{x^2}=3e^{2t}\left(t^2+2t\right)$, $y'''_{x^3}=-6e^{3t}\left(t^2+3t+1\right)$; 5) $y''_{x^2}=-\mathrm{ctg}^3 t$, $y'''_{x^3}=3\mathrm{ctg}^4 t\ \mathrm{cosec}\, t$; 7) $y''_{x^2}=-\sqrt{1-t^2}$, $y'''_{x^3}=t$. **12.** $df(z)=f'(z)dz=\cos z dz$, $df(z(x))=$

$= f'(z(x)) \cdot z'(x)dx = \cos e^x \cdot e^x dx$, $\quad df(z(x(t))) = f'(z(x(t)))\cdot z'(x(t))x'(t)dt = \cos e^{t^3-1} \times$ $\times e^{t^3-1} \cdot 3t^2 dt$. **15.** $t = 2$; $a = -2$.

§ 6.1

4. $f'(0)$ не існує. **6.** Якщо $x_1 \to 0$, то c також прямує до нуля, але набуває не всіх проміжних значень з інтервалу $(0;\ x_1)$, а лише таку її послідовність, для якої $\cos\frac{1}{c} \to 0$, наприклад $c = \dfrac{2}{\pi(2k+1)}$, $k \in \mathbf{N}$. **7.** У кожному з інтервалів $(1;\ 2)$ і $(2;3)$ є по одному кореню похідної $f'(x)$. **9.** 1) Ні, оскільки f розривна в точці $x = 0$; 3) ні, оскільки $f(-1) = 0 \neq e =$ $= f(1)$; 5) так, нулі похідної $c_1 \approx 0{,}23037$, $c_2 \approx 0{,}807944$. **10.** 1) Так, $c = 0{,}5$; 5) так, $c = 0{,}5$ або $c = \sqrt{2}$; 7) ні, оскільки $f'(1)$ не існує; 9) так, $c = \arcsin\frac{2}{\pi} \approx 0{,}690$; 11) так, $c \approx 4{,}152$; 13) так, $c = \ln(e-1) \approx 0{,}541$; 15) так, $c = \sqrt{7/3} \approx 1{,}528$. **11.** 1) Не можна, оскільки $\varphi'(0) = 0$; 3) можна, $c = \dfrac{2+\sqrt{14}}{5} \approx 1{,}148$; 5) не можна, оскільки $\varphi'(0) = \infty$.

§ 6.2

2. 1) 1; 5) $\sin\frac{1}{a}$. **3.** 1) 0; 3) -1; 7) 0; 9) 0; 11) 0; 13) 1; 15) 1; 17) 1; 19) 1; 21) 1; 23) $e^{-\frac{2}{\pi}}$; 25) 1. **5.** 1) $y = 2x+1$; 3) $x = 0$, $y = x+1$; 5) $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$; 7) $y = 1$; 9) $y = 2x$, $y =$ $= 2x + 4\pi$; 11) $x = -5/2$, $y = \frac{1}{2}(x-5)$; 13) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 15) $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$; 17) $x = -1$, $x = 1$, $y = -x$; 19) $y = \frac{\pi}{2}$; 21) $x = -1$; $y = -1$; 23) $y = 2x$.

§ 6.3

3.3) Спадає на $(-\infty; -1)$ і $(1; +\infty)$, зростає на $(-1; 1)$; 5) зростає на $(0;\ 1)$, спадає на $(1; +\infty)$; 7) зростає на $(-\infty; +\infty)$; 9) зростає на $(-\infty; -1)$ від e до ∞ і на $(0; +\infty)$ від 1 до e; 11) спадає від e до 1 на $(-\infty; -1)$ і від ∞ до e на $(0; +\infty)$; 13) зростає на $(-\infty; 0)$ і $(4; +\infty)$, спадає на $(0;\ 4)$; 15) спадає на $\left(-\infty; -\frac{13}{3}\right)$ і $(5; +\infty)$, зростає на $\left(-\frac{13}{3}; 5\right)$; 17) спадає на $(0;\ 1)$ і $\left(1; \sqrt{e}\right)$, зростає на $\left(\sqrt{e}; +\infty\right)$; $\sqrt{e} \approx 1{,}649$; 19) спадає на $(-\infty; -4)$ і $(-4; +\infty)$; $x = 3$ — точка усувного розриву; 21) зростає на $(-\infty; +\infty)$; 23) зростає на $\left(-\pi + 2\pi k; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ 2\pi k\right)$ і $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)$, спадає на $\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k;\ -\frac{\pi}{4} + \right.$ $\left. + 2\pi k\right)$, $\left(2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$ і $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; 25) спадає на $(-\infty; -2)$, $(-2;\ 2)$ і $(10;$ $+\infty)$, зростає на $(2;\ 10)$; 27) зростає на $(-\infty;\ 0)$ і $\left(\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$, спадає на $\left(0; \sqrt[3]{2}\right)$, $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}260$; 29) спадає на $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$ і зростає на $(0;\ 1)$, $(1; +\infty)$; 31) спадає на $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\right.$ $\left.\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k; \frac{7\pi}{4} + 2\pi k\right)$ і зростає на $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right)$.

$k \in \mathbf{Z}$; 33) спадає на $(-\infty; 0)$ і зростає на $(0; +\infty)$; 35) спадає на $(-\infty; 0)$ і зростає на $(0; +\infty)$; 37) спадає на $(-1; 0)$ і зростає на $(0; 1)$; 39) зростає на $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ і $(1; +\infty)$; 41) спадає на $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ і $(1; +\infty)$; 43), а) $a > 8$; б) $a \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right]$; в) $a \in [4; +\infty)$; г) $a \in (-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$; д) $a \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$. **6.** 1) $x \in [-1; 1]$; 3) $x \in (0; +\infty)$; 5) $x \in (-\infty; -1)$; 9) $x \in (-\infty; -1]$; 11) $x \in [-1; 0)$; 13) $x \in \mathbf{R}$; 15) $x \in (-1; 1)$; 17) $x \in \mathbf{R}$; 19) $x \neq \frac{\pi}{4} - \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. **7.** 1) -1 на $(-\infty; +\infty)$; 3) $1/4$ на $\mathbf{R}$; 5) $3/4$ на $\mathbf{R}$; 7) $-\pi/4$ на $(-1; +\infty)$ і $-5\pi/4$ на $(-\infty; -1)$; 9) $\pi/4$ на $(-1; -\infty)$ і $5\pi/4$ на $(-\infty; -1)$; 11) π на $[-1; 0]$.

§ 6.4

3. 3) $y_{\max} = y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{4} \approx 0{,}529$, $y_{\min} = y(1) = 0$; 5) $y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\max} = y(2) = 4e^{-2} \approx 0{,}541$; 7) $y_{\min} = y(1/e) = -1/e$; 9) екстремуму немає; 11) екстремуму немає; 13) $y_{\max} = y(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \approx 0{,}439$; 17) $y_{\max} = y\left(2\arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2} + 4\pi k\right) \approx 4{,}404$, $y_{\min} = y\left(-2\arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2} + 4\pi k\right) \approx -4{,}404$, $k \in \mathbf{Z}$; $2\arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 2{,}392$; 19) $y_{\max} = y\left(-\frac{1}{2} \times \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi k\right) = y\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi k\right) \approx 0{,}385$, $y_{\min} = y(2\pi k) = 0$, $y_{\min} = y\left(\pi - \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi k\right) = y\left(-\pi + \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi k\right) \approx -0{,}385$, $y_{\max} = y(\pi + 2\pi k) = 0$, $k \in \mathbf{Z}$; $\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 0{,}955$; 21) $y_{\min} = y\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = y(2\pi k) = -1$, $y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = y(\pi + 2\pi k) = 1$, $k \in \mathbf{Z}$; 23) $y_{\min} = y(-\pi + 2\pi k) = 2$, $y_{\max} = y\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) = y\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) = 2\sqrt{2}$, $y_{\min} = y\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) = y\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) = -2\sqrt{2}$, $y_{\max} = y(2\pi k) = -2$, $k \in \mathbf{Z}$; 25) $y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = -1$, $y_{\min} = y\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 1$, $k \in \mathbf{Z}$; 27) екстремуму немає; 29) $y_{\max} = y\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -2{,}598$, $y_{\min} = y\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 31) $y_{\max} = y(0) = 13$, $y_{\min} = y(2) = -243$; 33) $y_{\max} = y(e) = 16$, $y_{\min} = y\left(e^{11}\right) = -484$; 35) $y_{\min} = y(-2) = y(6) = 0$, $y_{\max} = y(2) = 16$; 37) $y_{\max} = y(-1) = \operatorname{arctg} 2 - 1 \approx 0{,}107$, $y_{\min} = y(1) = 1 - \operatorname{arctg} 2 \approx -0{,}107$; 39) $y_{\max} = y(-1) = 3\pi - 2$, $y_{\min} = y(1) = \pi + 2$; 41) $y_{\min} = y\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}\right) \approx -0{,}984$, $y_{\max} = y\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right) \approx 4{,}126$; 43) $y_{\max} = y(2\pi k) = \frac{\pi}{4}$, $y_{\min} = y(\pi + 2\pi k) = -\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$; 45) $y_{\max} = y(1/2) = -2$, $y_{\min} = y(2) = 2$.

4. 1) Так; 3) $y_{\min} = y(0) = 0$. **5.** 1) $\max\limits_{[-1;\, 2]} y = y(-1) = 6$, $\min\limits_{[-1;\, 2]} y = y(3/4) = -1/8$; 3) $\min\limits_{[-10;\, 10]} y = y(1) = y(2) = 0$, $\max\limits_{[-10;\, 10]} y = y(-10) = 132$; 5) $\min\limits_{(0;\, 4]} y = y\left(\sqrt[3]{2}\right) = 3/\sqrt[3]{4} \approx 1{,}890$, max немає;

7) $\max\limits_{(0;1]} y = y(1) = 1$, min немає; 9) $\max\limits_{[-3,\,4]} y = y(4) = 4$, $\min\limits_{[-3,\,4]} y = y(-3) = -3$; 11) $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right]} y = y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right]} y = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$; 13) $\min\limits_{\mathbf{R}} y = y\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$, max немає 15) $\min\limits_{\left[-\frac{3}{2};\,\frac{5}{2}\right]} y = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$, $\max\limits_{\left[-\frac{3}{2};\,\frac{5}{2}\right]} y = y\left(-\frac{3}{2}\right) = y\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{19}{2}$; 17) $\min\limits_{D(y)} y = y\left(\frac{\pi}{3} + \pi k\right) = y\left(\frac{2\pi}{3} + \pi k\right) = 7$, max немає, $k \in \mathbf{Z}$; 19) $\max\limits_{[0;\,3]} y = y(0) = \frac{1}{9}$, $\min\limits_{[0;\,3]} y = y(2) = \frac{1}{729}$; 21) $\min\limits_{\mathbf{R}} y = y(0) = -4$, max немає; 23) $\max\limits_{[3;\,+\infty]} y = y(10/3) = \sqrt{10}$, min немає; 25) не має ні max, ні min; 27) $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y = y\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{7}\right) \approx 1{,}732$, $\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{7} \approx 0{,}714$, max немає; 29) $\max\limits_{[-2;1]} y = y(-2) = \frac{82}{9\ln 3}$, $\min\limits_{[-2;1]} y = y(0) = \frac{2}{\ln 3}$; 31) $\min\limits_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} y = y\left(-\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\right) = y\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\right) = 2a\sqrt{\frac{b}{a}}$, max немає; 33) $\max\limits_{\mathbf{R}} y = y\left(-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{2}(2k-1)\right) \approx 4{,}236$, $\min\limits_{\mathbf{R}} y = y\left(-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \pi k\right) \approx -0{,}236$, $k \in \mathbf{Z}$, $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 \approx -0{,}554$; 35) $\min\limits_{[-3{,}5;\,3{,}5]} y = y(-3) = y(3) = 0$, $\max\limits_{[-3{,}5;\,3{,}5]} y = y(-2) = y(2) = 5$. **7.** 1) 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{3}$, 3; 3) $4\pi k$, $\frac{4\pi}{3} + 4\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 5) –4; –1; 2; 7) $\{0; \pi/6; 5\pi/6; \pi\}$. **8.** 1) $y_{\min} = y(-1/2) \approx 1{,}700$; 3) $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi\left(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 5) $\min\limits_{(1;+\infty)} y = y\left(e^2\right) = \frac{e^2}{4}$; 7) $\min\limits_{(0;\pi)} y = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\sqrt{3}$; 9) –4.

10. $a_{\min} = a_1 = -11/8$, $a_{\max} = a_{24} \approx 0{,}0105727$. **11.** $d = 2{,}4$. **12.** $a = 7/6, b = -1/2$. **13.** 1) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 3) 0; 5) 1; 7) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 9) 2. **15.** 1) 67; 3) 0,75; 5) 10. **16.** 2310,4. **17.** $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$. **20.** 1) 20/3; 3) $\sqrt{10}$; 5) $S_{\min} = S\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{48}{25}\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$; 7) $S_{\min} = S(1{,}2) = 0{,}528$; 9) $\sqrt{65}/2$; 11) 4/5; 13) $C(3/2; 0)$; 15) $C\ (7/8; -26/9)$; 17) $t = 16$; 19) $t = 59/38$ с; 21) $S_{\max} = S(-1{,}3) = 8/27$; 23) у точці з координатами (2; 5); 25) $3\sqrt{2}/2$; 27) $t = 1$; 29) $P_{\min} = a + \sqrt{4h^2 + a^2}$; 31) $P_{\min} = 4\sqrt{S/\sin\alpha}$; 37) рівнобедрений; 39) $H = 2R/\sqrt{3}$; 41) $\frac{4}{27}R^3$; 43) $H = R\sqrt{3}/3$; 45) $\left(\sqrt{33} - 3\right)R/2$; 47) 54 см^2; 49) $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^3$ см^3; 51) $V_{\max} = V(3) = 54\pi$ см^3; 53) $\frac{\pi}{27}HR^2$; 55) $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$; 57) $2\pi\sqrt{2/3}$; 59) 40 см; 61) $R = 3$, $H = 6$; 63) $25R^3/27$; 65) $4\sqrt{3}$; 67) $S_{\text{основи}} = x_0^2$, $x_0 = \frac{l\sin\alpha}{\sqrt{2}\ \operatorname{tg}\alpha - 1}$; 69) $h = r$; 71) $a = \sqrt[3]{2V}$, $h = \frac{a}{2}$; 73) $V_{\max} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}R^3$; 75) $x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$; 77) $V_{\max} = 18$ дм^3.

§ 6.5

3. 3) Опукла вниз на $(-\infty;\ 2)$ і вгору на $(2;\ +\infty)$, точка перегину $(2,\ 16)$; 5) опукла вниз на $(-\infty;\ 0)$ і вгору на $(0;\ +\infty)$, точка перегину $(0,\ 0)$; 7) опукла вниз на $(-\pi+2\pi k;\ 2\pi k)$ і вгору на $(2\pi k;\ \pi+2\pi k)$, $k\in\mathbf{Z}$, точки перегину: $(\pi k,\ \pi k)$, $k\in\mathbf{Z}$; 9) опукла вниз на $(-\infty;\ +\infty)$; 11) опукла вгору на $\left(-\arccos\frac{\sqrt5-1}{2}+2\pi k;\ \arccos\frac{\sqrt5-1}{2}+2\pi k\right)$ і вниз на $\left(\arccos\frac{\sqrt5-1}{2}+\right.$ $\left.+2\pi k;\ 2\pi-\arccos\frac{\sqrt5-1}{2}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$, точки перегину: $\left(\pm\arccos\frac{\sqrt5-1}{2}+2\pi k,\ e^{\frac{\sqrt5-1}{2}}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$; $\arccos\frac{\sqrt5-1}{2}\approx0{,}905$, $e^{\frac{\sqrt5-1}{2}}\approx1{,}855$; 15) опукла вгору на $(-\infty;\ -5)$ і $(-5;\ 0)$ і вниз на $(0;\ 5)$ і $(5;\ +\infty)$, точка перегину $(0,\ 0)$; 17) опукла вгору на $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{2}+\frac12\arcsin\frac23+2\pi k\right)$, $\left(-\frac12\arcsin\frac23+2\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi k\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}+\frac12\arcsin\frac23+2\pi k;\ \pi-\frac12\arcsin\frac23+2\pi k\right)$ і вниз на $\left(-\frac{\pi}{2}+\right.$ $\left.+\frac12\arcsin\frac23+2\pi k;\ -\frac12\arcsin\frac23+2\pi k\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\frac12\arcsin\frac23+2\pi k\right)$, $\left(\pi-\frac12\arcsin\frac23+2\pi k;\right.$ $\left.\frac{5\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\right)$, точки перегину: $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ 0\right)$, $\left(-\frac12\arcsin\frac23+2\pi k;\ 0{,}861\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}+\frac12\arcsin\frac23+\right.$ $\left.+2\pi k,\ 0{,}861\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}+\frac12\arcsin\frac23+2\pi k,\ -0{,}861\right)$, $\left(\pi-\frac12\arcsin\frac23+2\pi k,\ -0{,}861\right)$, $k\in\mathbf{Z}$, $\frac12\arcsin\frac23\approx0{,}365$; 19) опукла вниз на $\left(-\pi+\frac12\arccos\frac59+2\pi k;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $\left(-\frac12\arccos\frac59+\right.$ $\left.+2\pi k;\ \frac12\arccos\frac59+2\pi k\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \pi-\frac12\arccos\frac59+2\pi k\right)$ і вгору на $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ -\frac12\arccos\frac59+2\pi k\right)$, $\left(\frac12\arccos\frac59+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $\left(\pi-\frac12\arccos\frac59+2\pi k;\ \pi+\frac12\arccos\frac59+2\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$, точки перегину: $\left(\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ 0\right)$, $\left(\pm\frac12\arccos\frac59+2\pi k,\ 0{,}196\right)$, $\left(-\pi+\frac12\arccos\frac59+2\pi k,\ -0{,}196\right)$, $\left(\pi-\frac12\arccos\frac59+2\pi k,\right.$ $\left.-0{,}196\right)$, $k\in\mathbf{Z}$; 21) опукла вгору на $\left(-\infty;\ -\frac{\ln2}{2}\right)$ і вниз на $\left(-\frac{\ln2}{2};\ 0\right)$, $(0;\ +\infty)$, точка перегину $\left(-\frac{\ln2}{2},\ 2^{-\frac{2}{\ln2}}\right)$; 23) опукла вниз на $(-\infty;\ -2)$, $(-1;\ 0)$ і вгору на $(-2;\ -1)$, $(0;\ +\infty)$, точки перегину: $\left(-2,\ -\left(1+\sqrt[3]{2}\right)\right)$, $(-1;\ 0)$, $\left(0;\ \sqrt[3]{2}\right)$; 25) опукла вгору на $(-\infty;\ -1)$, $\left(\sqrt[3]{2};\ +\infty\right)$ і вниз на $\left(-1;\ \sqrt[3]{2}\right)$, точка перегину $\left(\sqrt[3]{2},\ \frac{2\sqrt[3]{2}}{3}\right)$; 27) опукла вниз на $(-1;\ 0)$ і вгору на $(0;\ 1)$; 29) опукла вниз на $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 0)$ і вгору на $(0;\ 1)$, $(1;\ +\infty)$, точка перегину $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$; 31) опукла вгору на $(-\infty;\ 0)$ і вниз на $(0;\ +\infty)$, точка перегину $(0,\ 2\pi)$; 33) опукла вгору на $\left(-\infty;\ -3\sqrt3\right)$, $\left(0;\ 3\sqrt3\right)$ і вниз на $\left(-3\sqrt3;\ 0\right)$, $\left(3\sqrt3;\ +\infty\right)$, точки перегину: $\left(-3\sqrt3,\ -\frac{\sqrt3}{12}\right)$, $(0,\ 0)$, $\left(3\sqrt3,\ \frac{\sqrt3}{12}\right)$. **4.** 1) Опукла вгору, якщо $t \in (0; \pi)$, і вниз, якщо $t \in (\pi; 2\pi)$; 3) опукла вгору для всіх $t \neq 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$; 5) опукла вниз, якщо $t \in (-\infty; 0)$, і вгору, якщо $t \in (0; +\infty)$. **7.** 1) $(-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$; 3) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; 5) $(-\infty; 0)$; 7) $(0; +\infty)$. **9.** $a = -8$. **10.** 1) $3b^2 - 8ac > 0$.

§ 6.6

2.3) в) $D(y) = \mathbf{R}$, функція неперіодична, ні парна, ні непарна, нулі функції: $x = -2$ і $x = 1$; $y < 0$ на $(-\infty; -2)$ і $(-2; 1)$, $y > 0$ на $(1; +\infty)$; $y \to -\infty$, $x \to -\infty$ і $y \to +\infty$, $x \to +\infty$; зростає на $(-\infty; -2]$ і $[-0{,}8; +\infty)$ і спадає на $[-2; -0{,}8]$; $y_{\max} = y(-2) = 0$, $y_{\min} = y(-0{,}8) \approx -8{,}998$; опукла вгору на $\left(-\infty; -\left(7+\sqrt{39}\right)/10\right)$ і $\left(\left(-7+\sqrt{39}\right)/10; 1\right)$ і вниз на $\left(-\left(7+\sqrt{39}\right)/10; \left(-7+\sqrt{39}\right)/10\right)$ і $(1; +\infty)$; точки перегину: $\left(-\left(7+\sqrt{39}\right)/10; \approx -5{,}7\right)$, $\left(\left(-7+\sqrt{39}\right)/10; \approx -4{,}2\right)$ і $(1; 0)$; асимптот немає; 5) г) $D(y) = \mathbf{R}$; функція парна, неперіодична, неперервна; $y > 0$ на $(-\infty; +\infty)$; $y \to 0$, $x \to \pm\infty$; зростає на $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ і $\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ і спадає на $\left(-\sqrt{2}/2; 0\right)$ і $\left(\sqrt{2}/2; +\infty\right)$; $y_{\min} = y(0) = 1$, $y_{\max} = y\left(-\sqrt{2}/2\right) = y\left(\sqrt{2}/2\right) \approx 1{,}59$; опукла вниз на $(-\infty; -1)$ і $(1; +\infty)$ і вгору на $(-1; 0)$ і $(0; 1)$; точки перегину: $(-1, 1)$ і $(1, 1)$; горизонтальна асимптота $y = 0$; 7) в) $D(y) = (0; +\infty)$; функція неперервна, $y > 0$ на $(0; +\infty)$; $y \to +\infty$, $x \to +\infty$ і $y \to +\infty$, $x \to 0+$; спадає на $(0; 1/2]$ і зростає на $[1/2; +\infty)$; $y_{\min} = y(1/2) = 1{,}5\sqrt{3} \approx 2{,}60$; опукла вниз на $(0; +\infty)$; 9) є) $D(y) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$; функція неперервна, якщо $x \neq -1$; $y > 0$, якщо $x > -1$, і $y < 0$, якщо $x < -1$; $y \to +\infty$, $x \to -1+$, $y \to -\infty$, $x \to -1-$; вертикальна асимптота $x = -1$; $y \to +\infty$, $x \to +\infty$, $y \to 0$, $x \to -\infty$; горизонтальна асимптота $y = 0$, $x \to -\infty$; спадає на $(-\infty; -1)$ і $(-1; 0]$ і зростає на $[0; +\infty)$; $y_{\min} = y(0) = 1$; опукла вгору на $(-\infty; -1)$ і вниз на $(-1; +\infty)$; точок перегину і похилих асимптот немає; 11) а) $D(y) = (0; +\infty)$; функція неперервна, $y < 0$, якщо $x \in (0; 1)$, і $y > 0$, якщо $x \in (1; +\infty)$, $y(1) = 0$; $y \to 0$, $x \to 0+$, $y \to +\infty$, $x \to +\infty$; асимптот немає; спадає на $(0; 1/e)$ і зростає на $(1/e; +\infty)$; $y_{\min} = y(1/e) = -1/e$; опукла вниз на $(0; +\infty)$; точок перегину немає; 13) е) $D(y) = \mathbf{R}$; функція непарна і неперервна, $y < 0$, якщо $x \in (-\infty; 0)$, і $y > 0$, якщо $x \in (0; +\infty)$; $y(0) = 0$; зростає на $(-\infty; +\infty)$; точок екстремуму немає; опукла вниз на $(-\infty; 0)$ і вгору на $(0; +\infty)$; точка перегину $(0, 0)$; асимптот немає; 15) $D(y) = \mathbf{R}$; функція неперервна, ні парна, ні непарна, періодична з періодом 2π; $y > 0$, якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, і $y < 0$, якщо $x \in \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{7\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $y\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k\right) = 0$, $k \in \mathbf{Z}$; спадає на $\left(2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, і зростає на $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $\left(\pi + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; $y_{\max} = y(2\pi k) = 1$; $y_{\min} = y\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) = \sqrt{2}/2$; $y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 1$; $y_{\min} = y(\pi + 2\pi k) = -1$; $y_{\max} = y\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right) = -\sqrt{2}/2$; $y_{\min} = y\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) =$

$= -1$, $k \in \mathbf{Z}$; опукла вгору на $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k; \operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{5}}{2}+2\pi k\right)$, $\left(\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$, $\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{5}}{2}+2\pi k; \pi+\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2}+2\pi k\right)$ і вниз на $\left(\operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{5}}{2}+2\pi k; \operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2}+2\pi k\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k; \pi+\operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{5}}{2}+2\pi k\right)$, $\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2}+2\pi k; \frac{7\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $\operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx \approx 0,36$, $\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 1,21$; точки перегину: $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ 0\right)$, $\left(\operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{5}}{2}+2\pi k,\ 0,86\right)$, $\left(\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2}+2\pi k, 0,86\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k, 0\right)$, $\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{5}}{2}+2\pi k,\ -0,86\right)$, $\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2}+ +2\pi k, -0,86\right)$, $\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi k, 0\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; асимптот немає; 17) $D(y) = \mathbf{R}$; функція неперервна, парна, періодична з періодом π; $y > 0$ на $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k; \pi k\right)$ і $\left(\pi k; \frac{\pi}{3}+\pi k\right)$ і $y < 0$ на $\left(\frac{\pi}{3}+\pi k; \frac{2\pi}{3}+\pi k\right)$, $y\left(\frac{\pi k}{3}\right) = 0$, $k \in \mathbf{Z}$; зростає на $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k, -\frac{1}{2}\arccos 0,25+\pi k\right)$ і $\left(\pi k; \frac{1}{2}\arccos 0,25+\pi k\right)$, спадає на $\left(-\frac{1}{2}\arccos 0,25+\pi k; \pi k\right)$ і $\left(\frac{1}{2}\arccos 0,25+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; $y_{\min} = y\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k\right) = -1$; $y_{\max} = y\left(-\frac{1}{2}\arccos 0,25+\pi k\right) = 0,5625$; $y_{\min} = y(0) = 0$; $y_{\max} = y\left(\frac{1}{2}\arccos 0,25+\pi k\right) = = 0,5625$, $k \in \mathbf{Z}$; $\pm 0,5\arccos 0,25 \approx \pm 0,659$; опукла вниз на $\left(-\frac{1}{2}\arccos\frac{1+\sqrt{129}}{16}+\pi k; \frac{1}{2}\arccos\frac{1+\sqrt{129}}{16}+\pi k\right)$ і $\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{129}}{16}+\pi k,\ \pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{129}}{16}+\pi k\right)$ і вгору на $\left(-\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{129}}{16}+\pi k, -\frac{1}{2}\arccos\frac{1+\sqrt{129}}{16}+\pi k\right)$ і $\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1+\sqrt{129}}{16}+\pi k, \frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{129}}{16}+ +\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1+\sqrt{129}}{16} \approx \pm 0,344$, $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{129}}{16} \approx \pm 1,137$; точки перегину: $\left(\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{129}}{16}+\pi k, -0,2428\right)$, $\left(\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1+\sqrt{129}}{16}+\pi k, 0,2896\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; 19) $D(y) = = \mathbf{R}$; функція непарна і неперервна, $y < 0$ на $(-\infty; 0)$ і $y > 0$ на $(0; +\infty)$; $y(0) = 0$; $y \to -\infty$, $x \to -\infty$ і $y \to +\infty$, $x \to +\infty$; точок екстремуму немає: зростає на $\mathbf{R}$; опукла вгору на $(0; +\infty)$ і вниз на $(-\infty; 0)$; точка перегину $(0, 0)$; асимптоти $y = x+\frac{\pi}{2}$, якщо $x \to +\infty$, і $y = x-\frac{\pi}{2}$, якщо $x \to -\infty$; 21) $D(y) = \mathbf{R}$; функція непарна і неперервна, $y < 0$ на $(-\infty; 0)$ і $y > 0$ на $(0; +\infty)$; $y(0) = 0$; $y \to 0$, $x \to \pm\infty$, горизонтальна асимптота $y = 0$; спадає на $(-\infty; -1)$ і $(1; +\infty)$ і зростає на $(-1; 1)$; $y_{\max} = y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y_{\min} = y(-1) = -\frac{\pi}{2}$; опукла вгору на $(-\infty; -1)$ і $(0; 1)$ і вниз на $(-1; 0)$ і $(1; +\infty)$; точка перегину $(0, 0)$; вертикальних і похилих асимптот немає; 23) $D(y) = (0; +\infty)$; функція неперервна і неперіодична; $y > 0$ на $(0; +\infty)$; $y \to 1$, $x \to 0+$,

$y \to +\infty$, $x \to +\infty$; спадає на (0; 1/e) і зростає на (1/e; +∞); $\frac{1}{e} \approx 0{,}368$; $y_{\min} = y(1/e) = (1/e)^{1/e} \approx 0{,}692$; опукла вниз на (0; +∞); точок перегину і асимптот немає; 25) $D(y) = \mathbf{R}\backslash\{0\}$; функція парна і неперервна, $y \to 1$, $x \to 0$; точка усувного розриву $x = 0$; $y \to 0$, $x \to \pm\infty$; горизонтальна асимптота $y = 0$; точки екстремуму задовольняють рівняння $\operatorname{tg} x = x$; точки перегину: $x = \pi k, k \neq 0, k \in \mathbf{Z}$; 27) $D(y) = \mathbf{R}\backslash(-3; 3)$; функція непарна, неперіодична, $y > 0$ на (–3; 0) і (3; +∞) і $y < 0$ на (–∞; –3) і (0; 3); $y(0) = 0$; $y \to +\infty$, $x \to +\infty$, $y \to -\infty$, $x \to -\infty$; $y \to -\infty$, $x \to -3-$, $y \to +\infty$, $x \to -3+$, $y \to +\infty$, $x \to 3+$, $y \to -\infty$, $x \to 3-$; вертикальні асимптоти $x = -3$ і $x = 3$; точки $x = -3$ і $x = 3$ — точки розриву другого роду; зростає на $\left(-\infty; -3\sqrt{3}\right)$ і $\left(3\sqrt{3}; +\infty\right)$ і спадає на $\left(-3\sqrt{3}; -3\right)$, (–3; 3), $\left(3; 3\sqrt{3}\right)$; $y_{\max} = y\left(-3\sqrt{3}\right) \approx -31{,}2$, $y_{\min} = y\left(3\sqrt{3}\right) = 18\sqrt{3} \approx 31{,}2$; опукла вгору на (–∞; –3) і (0; 3) і вниз на (–3; 0) і (3; +∞); точка перегину (0; 0); асимптота $y = 4x$; 29) $D(y) = \mathbf{R}\backslash\{4\}$; функція ні парна, ні непарна; $y\left(\sqrt[3]{10}\right) = 0$; $\sqrt[3]{10} \approx 2{,}15$; $y > 0$ на $\left(-\infty; \sqrt[3]{10}\right)$ і $(4; +\infty)$ і $y < 0$ на $\left(\sqrt[3]{10}; 4\right)$; $y \to 1$, $x \to \pm\infty$, $y \to +\infty$, $x \to 4+$, $y \to -\infty$, $x \to 4-$; горизонтальна асимптота $y = 1$, вертикальна асимптота $x = 4$; зростає на $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}; \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ і спадає на $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}; 4\right)$ і (4; +∞); $y_{\max} = y\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \approx 0{,}43$, $y_{\min} = y\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \approx 0{,}08$, $\sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1{,}58$; опукла вгору на (–∞; –5) і (1; 4) і вниз на (–5; 1) і (4; +∞); точки перегину: (–5, 5/27) і (1, 1/3); похилих асимптот немає; 33) $D(y) = \mathbf{R}$; функція неперервна, парна, періодична з періодом 4π; $y > 0$ на $(-\pi + 4\pi k; 4\pi k)$ і $(4\pi k; \pi + 4\pi k)$ і $y < 0$ на $(-2\pi + 4\pi k; -\pi + 4\pi k)$, і $(\pi + 4\pi k; 2\pi + 4\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$; $y(\pi k) = 0$, $k \in \mathbf{Z}$; зростає на $(\arccos(-1/3) - 2\pi + 4\pi k); -\arccos\ (-1/3) + 4\pi k)$, $(4\pi k; \arccos\ (-1/3) + 4\pi k)$ і $(2\pi - \arccos(-1/3) + 4\pi k; 2\pi + 4\pi k)$ і спадає на $(-2\pi + 4\pi k; \arccos(-1/3) - 2\pi + 4\pi k)$, $(-\arccos(-1/3) + 4\pi k; 4\pi k)$ і $(\arccos(-1/3) + 4\pi k; 2\pi - \arccos(-1/3) + 4\pi k)$; $y_{\max} = y(-2\pi + 4\pi k) = 0$, $y_{\min} = y(4\pi k) = 0$, $y_{\min} = y(\arccos\ (-1/3) - 2\pi + 4\pi k) = y(2\pi - \arccos\ (-1/3) + 4\pi k) = -0{,}770$, $y_{\max} = y \times (-\arccos\ (-1/3) + 4\pi k) = y(\arccos\ (-1/3) + 4\pi k) = 0{,}770$, $\arccos\ (-1/3) \approx 1{,}91$; опукла вниз на $(\arccos\ (5/9) - 2\pi + 4\pi k; -\pi + 4\pi k)$, $(-\arccos\ (5/9) + 4\pi k;\ \arccos\ (5/9) + 4\pi k)$ і $(\pi + 4\pi k; (2\pi - \arccos(5/9) + 4\pi k)$ і вгору на $(-\pi + 4\pi k; -\arccos(5/9) + 4\pi k)$, $(\arccos(5/9) + 4\pi k; \pi + 4\pi k)$ і $(2\pi - \arccos(5/9) + 4\pi k; 2\pi + \arccos(5/9) + 4\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$; $\arccos(5/9) \approx 0{,}982$; точки перегину: $\left(\arccos 5/9 - 2\pi + 4\pi k, -4\sqrt{7}/27\right)$, $(\pm\pi + 4\pi k, 0)$, $\left(\pm\arccos 5/9 + 4\pi k, 4\sqrt{7}/27\right)$, $\left(2\pi - \arccos 5/9 + 4\pi k, -4\sqrt{7}/27\right)$, $4\sqrt{7}/27 \approx 0{,}392$; 35) $D(y) = \mathbf{R}$; неперервна, парна, періодична з періодом 2π; $y > 0$ на $\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$ і $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)$ і $y < 0$ на $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ і $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; $y\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) = y\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = y\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) = y\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) = y\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = y\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) = 0$; зростає на $\Big(-\pi + 2\pi k;$

$-\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+2\pi k\Bigg)$, $\left(-\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}+2\pi k; 2\pi k\right)$ і $\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}+2\pi k; \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+2\pi k\right)$ і спадає на $\left(-\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+2\pi k; -\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}+2\pi k\right)$, $\left(2\pi k; \arccos\frac{1}{\sqrt{6}}+2\pi k\right)$ і $\Bigg(\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+$ $+2\pi k; \pi+2\pi k\Bigg)$, $k\in\mathbf{Z}$, $\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}\approx 1{,}150$, $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\approx 1{,}991$; $y_{\min}=y(-\pi+2\pi k)=-1$, $y_{\min}=$ $=y\left(-\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}+2\pi k\right)=y\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}+2\pi k\right)=-\frac{2}{3\sqrt{6}}\approx -0{,}272$, $y_{\max}=y\Bigg(-\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+$ $+2\pi k\Bigg)=y\left(\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+2\pi k\right)=\frac{2}{3\sqrt{6}}\approx 0{,}272$, $y_{\max}=y(2\pi k)=1$; опукла вгору на $\left(-\arccos\left(-\sqrt{\frac{13}{18}}\right)+2\pi k; -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $\left(-\arccos\sqrt{\frac{13}{18}}+2\pi k; \arccos\sqrt{\frac{13}{18}}+2\pi k\right)$ і $\Bigg(\frac{\pi}{2}+2\pi k;$ $\arccos\left(-\sqrt{\frac{13}{18}}\right)+2\pi k\Bigg)$ і вниз на $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; -\arccos\left(\sqrt{\frac{13}{18}}\right)+2\pi k\right)$, $\Bigg(\arccos\sqrt{\frac{13}{18}}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+$ $+2\pi k\Bigg)$ і $\left(\arccos\left(-\sqrt{\frac{13}{18}}\right)+2\pi k;\ 2\pi-\arccos\left(-\sqrt{\frac{13}{18}}\right)+2\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$; $\arccos\sqrt{\frac{13}{18}}\approx 0{,}555$, $\arccos\left(-\sqrt{\frac{13}{19}}\right)\approx 2{,}586$; точки перегину: $\left(-\arccos\left(-\sqrt{\frac{13}{19}}\right)+2\pi k,\ -0{,}378\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k, 0\right)$, $\left(-\arccos\sqrt{\frac{13}{18}}+2\pi k, 0{,}378\right)$, $\left(\arccos\sqrt{\frac{13}{18}}+2\pi k, 0{,}378\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, 0\right)$, $\Bigg(\arccos\left(-\sqrt{\frac{13}{18}}\right)+2\pi k,$ $-0{,}378\Bigg)$, $k\in\mathbf{Z}$; 37) $D(y)=\mathbf{R}$; функція неперервна, парна; $y>0$ на $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$; $y(0)=0$; $y\to\frac{\pi}{2}$, $x\to\pm\infty$, горизонтальна асимптота $y=\frac{\pi}{2}$; спадає на $(-\infty; 0)$ і зростає на $(0; +\infty)$; $y_{\min}=y(0)=0$; опукла вгору на $\left(-\infty; -1/\sqrt[4]{3}\right)$ і $\left(1/\sqrt[4]{3}; +\infty\right)$ і вниз на $\left(-1/\sqrt[4]{3}; 1/\sqrt[4]{3}\right)$; $1/\sqrt[4]{3}\approx 0{,}760$; точки перегину: $\left(-1/\sqrt[4]{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ і $\left(1/\sqrt[4]{3}, \frac{\pi}{6}\right)$; 39) $D(y)=\mathbf{R}$; функція неперервна, парна; $y<0$ на $(-\infty; -1)$ і $(1; +\infty)$ і $y>0$ на $(-1; 1)$; $y(-1)=y(1)=0$; $y\to-\frac{\pi}{4}$, $x\to\pm\infty$; горизонтальна асимптота $y=-\frac{\pi}{4}$; зростає на $(-\infty; 0)$ і спадає на $(0; +\infty)$; $y_{\max}=y(0)=\frac{\pi}{4}$; опукла вниз на $\left(-\infty; -\sqrt[4]{3}\right)$ і $\left(\sqrt[4]{3}; +\infty\right)$ і вгору на $\left(-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}\right)$; $\sqrt[4]{3}\approx 1{,}316$; точки перегину: $\left(-\sqrt[4]{3}, -0{,}262\right)$ і $\left(\sqrt[4]{3}, -0{,}262\right)$; 41) $D(y)=\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbf{Z}\right\}$; функція парна, періодична з періодом 2π; $y>0$ на $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k; -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi k\right)$ і $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$ і $y<0$ на $\left(-\frac{5\pi}{4}+2\pi k;\ -\frac{3\pi}{4}+3\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)$ і $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$; $y\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\right)=0$, $k\in\mathbf{Z}$; $y\to+\infty$, $x\to\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)-$, $y\to-\infty$, $x\to\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)+$, $y\to-\infty$,

$x \to \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)-$, $y \to +\infty$, $x \to \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)+$; вертикальні асимптоти $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; зростає на $\left(-\pi+2\pi k; -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ і $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; 2\pi k\right)$ і спадає на $\left(2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ і $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \pi+ +2\pi k\right)$; $y_{\max}=y(2\pi k)=1$, $y_{\min}=y(\pi+2\pi k)=-1$, $k \in \mathbf{Z}$; опукла вгору на $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+ +2\pi k\right)$ і вниз на $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; точок перегину і асимптот немає; 43) $D(y) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$; функція неперервна в $D(y)$, ні парна, ні непарна; $y<0$ на $(-\infty; 0)$ і $(0; 2)$ і $y>0$ на $(2; +\infty)$; $y(2)=0$; $y \to -\infty$, $x \to -\infty$, $y \to +\infty$, $x \to +\infty$, $y \to -\infty$, $x \to 0-$, $y \to 0$, $x \to 0+$; вертикальна асимптота $x=0$ при $x \to 0-$, $x=0$ — точка розриву другого роду; зростає на $(-\infty; -2)$ і $(1; +\infty)$ і спадає на $(-2; 0)$ і $(0; 1)$; $y_{\max}=y(-2)=-4\sqrt{e} \approx -6{,}595$, $y_{\min} = y(1)=-1/e \approx -0{,}368$; опукла вгору на $(-\infty; 0)$ і $(0; 2/5)$ і вниз на $(2/5; +\infty)$; точка перегину $(0{,}4, \approx -0{,}13)$; похила асимптота $y=x-3$ при $x \to \pm\infty$; 47) $D(y) = \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\}$; функція неперервна, ні парна, ні непарна; $y>0$ на $\mathbf{R} \setminus \{-1; 1\}$; $y \to \frac{\pi}{2}$, $x \to \pm\infty$; горизонтальна асимптота $y=\frac{\pi}{2}$; $y \to \pi$, $x \to 1+$ і $x \to -1+$, $y \to 0$, $x \to -1-$ і $x \to 1-$; $x=-1$ і $x=1$ — точки розриву першого роду; спадає на $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ і $(1; +\infty)$; точок екстремуму немає; опукла вгору на $(-\infty; -1)$ і $(-1; 0)$ і вниз на $(0; 1)$ і $(1; +\infty)$; точка перегину $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; 49) $D(y) = \mathbf{R}$; функція парна, неперервна, періодична з періодом π; $y>0$ на $\mathbf{R} \setminus \{\pi k,\ k \in \mathbf{Z}\}$; $y(\pi k)=0$; недиференційовна в точках $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; зростає на $\left(\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ і спадає на $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; $y_{\min}=y(\pi k)=0$, $y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$; опукла вниз на $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k: \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; точок перегину немає; 51) $D(y) = \mathbf{R}$; функція неперервна, ні парна, ні непарна, періодична з періодом 2π; $y>0$ на $\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}+2\pi k; \pi-\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}+2\pi k\right)$ і $y<0$ на $\left(-\pi-\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}+ +2\pi k; \arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; $y\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}+2\pi k\right)=y\left(\pi-\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}+2\pi k\right)=0$, $k \in \mathbf{Z}$; $\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0{,}375$; зростає на $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ і $\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$ і спадає на $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; -\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$ і $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{7\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $y_{\min}=y\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)=y\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right)=-1{,}5$, $y_{\max}=y\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=-1$, $y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=3$, $k \in \mathbf{Z}$; опукла вгору на $\left(\arcsin\frac{\sqrt{33}+1}{8}- -\pi+2\pi k; -\arcsin\frac{\sqrt{33}+1}{8}+2\pi k\right)$ і $\left(\arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}+2\pi k; \pi-\arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}+2\pi k\right)$ і вниз на $\left(-\arcsin\frac{\sqrt{33}+1}{8}+2\pi k;\ \arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}+2\pi k\right)$ і $\left(\pi-\arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}+2\pi k;\ \pi+\arcsin\frac{\sqrt{33}+1}{8}+\right.$

$+2\pi k\Big)$, $k\in\mathbf{Z}$; точки перегину: $\left(\arcsin\frac{\sqrt{33}+1}{8}-\pi+2\pi k,\ -1,265\right)$, $\left(-\arcsin\frac{\sqrt{33}+1}{8}+2\pi k,\right.$ $\left.-1,265\right)$, $\left(\arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}+2\pi k, 0,890\right)$, $\left(\pi-\arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}+2\pi k, 2,172\right)$, $k\in\mathbf{Z}$, $\arcsin\frac{\sqrt{33}+1}{8}\approx$ $\approx 1,003$, $\arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}\approx 0,635$. **3.** 1) Функції x і y визначені, неперервні і невід'ємні при $t\in(-\infty;+\infty)$; $x\to+\infty$, $t\to\pm\infty$; $y\to+\infty$, $t\to\pm\infty$; $x_{\min}=x(t=-1)=0$, $y_{\min}=y(t=1)=0$; $y(x)$ зростає, якщо $t>1$ і $t<-1$, і спадає, якщо $t\in(-1;1)$; $y(x)$ опукла вгору, якщо $t<-1$, і опукла вниз, якщо $t>-1$; точок перегину і асимптот немає; 3) функції x і y визначені і неперервні на $(-\infty;+\infty)$, періодичні з періодом 2π; графік функції симетричний відносно осей координат; точки перетину з осями координат: $(0, b)$, якщо $t=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $(0,-b)$, якщо $t=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$, $(a,0)$, якщо $t=2\pi k$, і $(-a,0)$, якщо $t=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; екстремуми: $x_{\min}=$ $=x(\pi+2\pi k)=-a$, $x_{\max}=x(2\pi k)=a$, $y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=b$, $y_{\min}=y\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)=-b$, $k\in\mathbf{Z}$; опукла вгору, якщо $t\in(2\pi k;\ \pi+2\pi k)$, і вниз, якщо $t\in(\pi+2\pi k;\ 2\pi+2\pi k)$, $k\in\mathbf{Z}$; точок перегину і асимптот немає; 5) функції x і y визначені і неперервні на $(-\infty;+\infty)$; точки перетину з осями координат: $(2a\pi k, 0)$, $k\in\mathbf{Z}$; $y(t)\ge 0$ для всіх $t\in(-\infty;+\infty)$; екстремуми: $y_{\min}=y(2\pi k)=0$, $y_{\max}=y(\pi+2\pi k)=2a$, $k\in\mathbf{Z}$; опукла вгору, якщо $t\in(2\pi k;\ 2\pi+2\pi k)$, $k\in\mathbf{Z}$; точок перегину і асимптот немає; **4.** 1) Область існування функції: $r\ge 0$, $|\varphi|\le\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$; крива замкнена і симетрична відносно полярної осі; $r_{\max}=$ $=r(0)=a+b$, $r_{\min}=r\left(\pm\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)\right)=0$, крива називається завиткою; 3) зі збільшенням кута зростає довжина полярного радіуса, зокрема, з кожним збільшенням кута на 2π довжина полярного радіуса збільшується на $2\pi a$; ця крива називається спіраллю Архімеда; 5) функція періодична з періодом 2π; крива замкнена і симетрична відносно полярної осі; $r_{\max}=r(0)=2a$, $r_{\min}=r(\pi)=0$; крива називається кардіоїдою. **5.** 1) При $a=-1/e$ і $a\ge 0$ — один корінь, при $-1/e<a<0$ — два корені, при $a<-1/e$ — коренів немає; 3) при $a>1$ — два корені, при $a=1$ — один корінь, при $a<1$ — коренів немає; 5) при $a<0$ і $a=e^3/27$ — один корінь, при $a>e^3/27$ — два корені, при $0<a<$ $<e^3/27$ — коренів немає; 7) при $a<1$ і $a=2$ — два корені, при $a=1$ — три корені, при $a>2$ — коренів немає, при $1<a<2$ — чотири корені; 9) при $a<-282$ — коренів немає, при $a=-282$ і $a>-26$ — два корені, при $-282<a<-26$ — чотири корені. **6.** $H_{\max}=P(5)\approx 16$, $(3;7)$ — інтервал рентабельності.

§ 6.7

1. 1) 1,670; 3) 2,506; 5) 4,275. **2.** 1) –2,946; 0,252; 2,694; 3) 3,693; 5) 1,538. **3.** 1) 0,641430. **4.** 1) –2,838469; 0,440808; 2, 397662; 3) 0; ±1,895494; 5) 3,597285; 7) 4,604217; 9) 0,921935; 11) 2,332077; 13) 0,268715; 15) 1,763223; 17) 3,921554.

§ 6.8

3. 1) Менше $\frac{3}{(n+1)!}$; 3) менше $\frac{2}{15}(0,1)^5<3\cdot 10^{-6}$; 5) менше $\frac{7}{108\sqrt{3}}$. **4.** 1) $f(x)=1+$ $+11(x-1)^2+7(x-1)^3+(x-1)^4$; 3) $f(x)=1+20(x-2)+37(x-2)^2+25(x-2)^3+8(x-2)^4+$

$+ (x-2)^5$; 5) $\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{16\sqrt{(1+\theta(x-1))^5}}$, $0 < \theta < 1$; 7) $(1+x)^x - 1 = x^2 + {}$ $+ o(x^2)$; 9) $y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{7}{8}x^3 + \frac{x^4}{16} + o(x^4)$; 11) $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{x}{2} - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{1920}x^5 + o(x^5)$. **5.** 1) $-1/12$; 3) 1; 5) 0,5; 9) 1; 11) 2; 13) 1/4; 15) a. **10.** 1) 6 і 9; 5) 8; 7) 6. **11.** 1) $|x| < 0{,}821$; 3) $|x| < 0{,}741$; 5) $|x| < 0{,}449$; 7) $|x| < 0{,}299$. **12.** 1) 0,97815; 3) 5,009970; 5) 2,0066; 7) 0,33647; 9) 0,54042.

§ 7.1

11. $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{t_0}}$, де m_0 — початкова наявна кількість радіоактивного елемента. **12.** $x = x_0 e^{kt}$, де x_0 — початкова кількість бактерій. **15.** 1) $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$; 3) $2\exp\left(-\frac{\pi}{2}i\right)$; 5) $2\exp\left(-\frac{\pi}{3}i\right)$. **16.** 3) $z = x + (2k+1)\pi i$, $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$; 5) $z = x + \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)i$, $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$. **17.** 1) $\operatorname{Ln} e = 1 + 2\pi k i$; 2) $\operatorname{Ln}(-e) = 1 + \pi i + 2\pi k i$; 4) $\operatorname{Ln}(-1) = \pi i + 2\pi k i$; 6) $\operatorname{Ln}(-i) = -\frac{\pi}{2}i + 2\pi k i$; 7) $\operatorname{Ln}(ie) = 1 + \frac{\pi}{2}i + 2\pi k i$; 9) $\operatorname{Ln}(-1-i) = \ln\sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}i + 2\pi k i$, $k \in \mathbf{Z}$. **18.** 1) $1^i = \exp 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 5) $2^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{2}$, де $\sqrt{2}$ — арифметичний корінь; 7) $(1+i)^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$; 9) $a^\alpha = \exp\alpha(\ln a + 2\pi k i)$.

§ 7.2

14. 3) $z = x \in (0; 1)$; 5) $\{z : |z| = 1, z \neq 1\}$. **15.** 1) $z = (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbf{Z}$; 3) $z = -1$; 5) $z = 2m\pi i / \left(\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i\right)$, m, $k \in \mathbf{Z}$.

§ 7.3

8. 1) $\frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}$. В к а з і в к а. Скористайтеся рівністю $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} x^k\right)'$.

10. 1) Під z^α розуміємо головне значення цього степеня. Тоді $z^\alpha \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \alpha \arg z = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 3) $z^\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha \arg z = \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$; 5) z^α — суто уявне $\Leftrightarrow$ $\alpha \arg z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

11. 3) $z = 1$; 5) $z = e^{(2k+1)\frac{\pi}{2}}$.

§ 7.4

5. 1) Домноживши і поділивши на $2\sin\frac{x}{2}$, дістанемо, що сума дорівнює $\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$, якщо $x \neq 2\pi k$, і $n + \frac{1}{2}$, якщо $x = 2\pi k$. 3) продиференціювавши суму з 1), дістанемо, що задана сума дорівнює $\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin^2\frac{x}{2}}$, якщо $x \neq 2\pi k$, і 0, якщо

$x = 2\pi k$; 5) домноживши і поділивши на $2\sin x$, дістанемо суму $\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$, якщо $x \neq \pi k$, і суму $(-1)^n \cdot n$, якщо $x = \pi k$. **6.** Припустивши супротивне, покажемо, що $\sin x = 0$, і тому $\exists\ k:\ \cos\dfrac{x}{2^k} = 0$. **7.** 2) $-\operatorname{ctg} x + \dfrac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2^n}$, якщо $x \neq 0$, і 0, якщо $x = 0$. **9.** $[-1;\ 1]$ для синуса та косинуса і $(-\infty;\ +\infty)$ для тангенса і котангенса. **13.** 1) Скориставшись твердженням 12.8), дістанемо формули

$$\operatorname{ch} 2y = \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y = 1 + 2\operatorname{sh}^2 y = 2\operatorname{ch}^2 y - 1,\ \ \operatorname{sh} 2y = 2\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y,$$

і тоді

$$\operatorname{Re}\operatorname{tg} z = \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y} = \frac{\sin x\cos x}{\operatorname{ch}^2 x - \sin^2 x} = \frac{\sin 2x}{\cos^2 x + \operatorname{ch} 2y},$$

$$\operatorname{Im}\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sh} y\operatorname{ch} y}{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y} = \frac{\operatorname{sh} y\operatorname{ch} y}{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x} = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos^2 2x + \operatorname{ch} 2y},$$

$$|\operatorname{tg} z| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}};$$

3) $\operatorname{Re}\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x\cos y$, $\operatorname{Im}\operatorname{sh} z = \operatorname{ch} x\sin y$, $|\operatorname{sh} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y}$; 5) див. 12.8) та 13.1). **15.** 1) Вказівка. Скористайтеся тим, що $\operatorname{sh} y \le \operatorname{ch} y$, якщо $y \ge 0$; 3) Вказівка. Скористайтеся 13.1). **16.** 1) $z = \pi k + i(-1)^k \ln 3,\ k \in \mathbf{Z}$; 5) $z = \dfrac{\pi}{2} + \pi k + i\ln 2,\ k \in \mathbf{Z}$; 7) $z = i\left((-1)^k\dfrac{\pi}{6} + \pi k\right),\ k \in \mathbf{Z}$.

§ 7.5

4. Асимптоти арктангенса $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$, а арккотангенса — $y = 0$ і $y = \pi$. **10.** 1) $z \in \mathbf{C}$; 4) $z \in \mathbf{C}\setminus\{\pm i\}$; 5) $z \in \mathbf{C}$; 7) $z \in \mathbf{C}\setminus\{\pm i\}$. **11.** 1) Ні; 2) $z = \ln(2+\sqrt{5})$; 4) ні. **12.** 1) $\operatorname{Re}\operatorname{Arccos} x = \begin{cases} 2\pi k, & |x| > 1, \\ \pm\arccos x + 2\pi k, & |x| \le 1,\ k \in \mathbf{Z}; \end{cases}$ $\operatorname{Im}\operatorname{Arccos} x = \begin{cases} 0, & |x| \le 1, \\ -\ln|x + \sqrt{x^2-1}|, & |x| > 1; \end{cases}$ 5) $\operatorname{Re}\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $\operatorname{Im}\operatorname{Arsh} x = 2\pi k$; 7) $\operatorname{Re}\operatorname{Arcth} x = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$, $\operatorname{Im}\operatorname{Arcth} x = \begin{cases} 2\pi k, & |x| > 1, \\ \pi(2k+1), & |x| < 1. \end{cases}$

§ 8.1

3. $v = 0{,}75t^2 + 3,\ s = 0{,}25t^3 + 3t + 2{,}75$. **4.** $-\dfrac{3}{e} + 363$. **6.** 1) $\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 12x + C$, $x \in (-\infty; +\infty)$; 3) $\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \dfrac{10}{3}x\sqrt{x} - 2\ln x + \dfrac{18}{\sqrt[6]{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + C$, $x \in (0;\ +\infty)$; 5) $\dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{a(\alpha+1)} + C$, $\alpha \neq -1$, $x \in (-\infty; +\infty)$; $\dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + C$, $\alpha = -1$; $x \in (-\dfrac{b}{a}; +\infty)$; 7) $\dfrac{2}{a}\sqrt{ax+b} + C$, $a^2 + b^2 > 0$, $x \in (-\dfrac{b}{a}; +\infty)$; 9) $\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{a}{b}}x + C$, $ab > 0$, $x \in (-\infty; +\infty)$ $\dfrac{\operatorname{sign} a}{2\sqrt{-ab}}\ln\dfrac{\sqrt{|b|} + x\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|} - x\sqrt{|a|}} + C$, $ab < 0$,

$x\in\left(-\infty;\ -\sqrt{-\frac{b}{a}}\right)$ або $x\in\left(-\sqrt{-\frac{b}{a}};\ \sqrt{-\frac{b}{a}}\right)$, або $x\in\left(\sqrt{\frac{-b}{a}};\ +\infty\right)$; 13) $\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+$ $+\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2}$, $x\in[2;+\infty)$; 15) $\frac{1}{8(1-2x)^4}$, $x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ або $x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; 17) $-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}5x$, $x\in\left(\frac{k\pi}{5};\frac{(k+1)\pi}{5}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$; 19) $\arcsin\frac{x-a}{a}$, $x\in(0;2a)$, якщо $a>0$, $x\in(2a;0)$, якщо $a<0$; 21) $\operatorname{arctg}e^x+C$, $x\in(-\infty;+\infty)$; 23) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+C$, $x\in(-\infty;+\infty)$.

§ 8.2

3. 1) $\frac{x^3}{3}-2x^2-5x+C$; 3) $\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{13x^2}{2}-6x+C$; 5) $ax+a\ln|x|+2a^2\sqrt{x}+\frac{3}{2}a^3\sqrt[3]{x^2}+C$; 7) $\frac{x^2}{2}-\frac{9}{x}+\frac{3}{20}x\sqrt[3]{x^2}-12\sqrt{x}+\frac{6}{11}x\sqrt[6]{x^5}-9\sqrt[3]{x}+C$; 9) $\frac{9^x}{\ln 9}-2\frac{15^x}{\ln 15}+\frac{25^x}{\ln 25}+C$; 11) $\frac{1}{3}e^{3x}-$ $-3e^x-3e^{-x}+\frac{1}{3}e^{-3x}+C$; 13) $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C$; 15) $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$; 17) $\frac{1}{8}\Big(3x+$ $+2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\Big)+C$; 19) $4\operatorname{tg}x-9\operatorname{ctg}x-x+C$; 21) $x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$; 23) $\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+C$; 25) $-\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+C$; 27) $\frac{1}{3a}\left((x+a)\sqrt{x+a}-(x-a)\sqrt{x-a}\right)+C$; 29) $\frac{1}{a^2-b^2}\Big(\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}-$ $-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big)+C$; **4.** 1) $\frac{1}{4}\ln^4 x+C$; 3) $-e^{\frac{1}{x}}+C$; 5) $\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$, $a\neq 0$; 7) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C$; 9) $\frac{1}{\ln 3}\arcsin 3^x+C$; 11) $-\ln\left(1+\cos^2 x\right)+C$; 13) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4a}\sin 2(ax+b)+C$, $a\neq 0$; 15) $-\ln\Big|\frac{1}{x}+$ $+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\Big|+C$; 17) $\frac{5}{18}\left(1+x^3\right)\sqrt[5]{1+x^3}+C$; 19) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{2}+C$; 21) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}\right|+C$; 23) $\frac{1}{4}\ln^2\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$; 25) $\frac{1}{2\ln\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C$; 27) $\frac{3}{14}\left(1+x^2\right)^2\sqrt[3]{1+x^2}-\frac{3}{8}\left(1+x^2\right)\sqrt[3]{1+x^2}+C$.

5. 1) $\frac{(x+2)^{102}}{102}-\frac{2(x+2)^{101}}{101}+C$; 3) $-\frac{1}{24(1-x)^{24}}+\frac{2}{23(1-x)^{23}}-\frac{1}{22(1-x)^{22}}+C$; 5) $x-2\ln\Big(1+$ $+\sqrt{1+e^x}\Big)+C$; 7) $2\sqrt{e^x-1}-2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C$; 9) $-\frac{1}{2b^2}\left(\frac{a\left(a-bx^2\right)^{11}}{11}-\frac{\left(a-bx^2\right)^{12}}{12}\right)+C$; 11) $-\frac{1}{b^3}\left(a-bx^2\right)^2\sqrt{a-bx^2}\left(\frac{a^2}{5}-\frac{2}{7}a\left(a-bx^2\right)+\frac{1}{9}\left(a-bx^2\right)^2\right)+C$; 13) $-x-2e^{-\frac{x}{2}}+2\ln\left(1+e^{\frac{x}{2}}\right)+$ $+C$; 15) $\arcsin^2\sqrt{x}+C$; 17) $2\sqrt{1+\ln x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1}\right|+C$; 19) $-\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 x\right)+\frac{1}{2}\ln\Big(1+$ $+\cos^2 x\Big)+C$; 21) $\frac{a^2}{x}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$; 23) $\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)+C$; 25) $\frac{1}{2}\Big(x\sqrt{a^2+x^2}-$

$-a^2\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|\Big)+C$; 27) $\ln\dfrac{|x|}{1+\sqrt{1+x^2}}+C$; 29) $-\sqrt{a^2-x^2}+a\arcsin\dfrac{x}{a}+C$; 31) $\dfrac{4}{21}\Big(3e^x+$ $+4\Big)\sqrt[4]{\left(e^x+1\right)^3}+C$; **6.** 1) $-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$; 3) $\dfrac{1}{\alpha}x\sin\alpha x+\dfrac{1}{\alpha^2}\cos\alpha x+C$; 5) $\frac{1}{b}x^2e^{bx}-$ $-\dfrac{2e^{bx}}{b^2}\left(x-\dfrac{1}{b}\right)+C$; 7) $\left(x^2+3x-4\right)\sin x+(2x+3)\cos x+C$; 11) $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$; 13) $\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C$; 15) $\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{8}e^{2x}(\sin 2x+\cos 2x)+C$; 17) $x\ln\left(x^2+1\right)-2x+$ $+2\operatorname{arctg}x+C$; 19) $\frac{x}{2}(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+C$; 21) $2\left(\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right)+C$; 23) $\frac{1}{2}\times$ $\times\left(x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|\right)+C$; 25) $x\ln\left(\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}\right)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$; 27) $x\arcsin^2x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$. **7.** 1) $\dfrac{1}{2a}e^{2ax}-\dfrac{2}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)+$ $+\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{2b}\sin 2bx\right)+C$; 3) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}\right|+C$; 5) $\frac{1}{5}\ln\left|x^5+\sqrt{x^{10}+5}\right|+C$; 7) $\ln\Big|x-1+$ $+\sqrt{x^2-2x-1}\Big|+C$; 9) $x\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$; 11) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$; 13) $e^x+\ln\left|e^x-1\right|+C$; 15) $2\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{a}}+C$; 17) $\frac{1}{2}\ln\left(3+2\sin^2x\right)+C$; 19) $-\arcsin\dfrac{\cos^2x}{\sqrt{3}}+C$; 21) $nx(\ln x-1)+C$; 23) $\dfrac{1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}+C$, $a^2\neq b^2$; 25) $x\operatorname{tg}x-\dfrac{x^2}{2}+\ln|\cos x|+$ $+C$. **8.** $y=\pm\ln\left|x^2-1\right|$. **9.** 1) а) $-2{,}5$; б) $\frac{5}{6}$, $-\frac{11}{3}$; в) $-\frac{17}{12}$; 2) $x=0{,}3t^2$. **12.** $f(x)=-x^2-$ $-\ln(1-x)+C$. **13.** 1) $I_n=x\ln^nx-nI_{n-1}$, $n\geq 2$; 3) $I_n=\dfrac{e^{ax}\sin^{n-1}x}{a^2+n^2}(a\sin x-n\cos x)+$ $+\dfrac{n(n-1)}{a^2+n^2}I_{n-2}$, $n\geq 3$. **14.** 1) $\left(\ln^4x-4\ln^3x+12\ln^2x-24\ln x+24\right)x+C$; 2) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\Big(\ln^2x-\frac{3}{2}\ln x+$ $+\frac{9}{8}\Big)+C$; 3) $\dfrac{e^{2x}}{29}\left((2\sin x-5\cos x)\sin^4x+\frac{5}{2}(2-\sin 2x-\cos 2x)\right)+C$. **16.** 1) $-\Big(x^4+4x^3+12x^2+$ $+24x+24\Big)e^{-x}+C$; 2) $-\left(\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{4x^3}{25}+\dfrac{24x}{625}\right)\cos 5x+\left(\dfrac{x^4}{5}-\dfrac{12x^2}{125}+\dfrac{24}{3125}\right)\sin 5x+C$; 3) $\Big(21-10x^2+$ $+x^4\Big)\sin x-\left(20x-4x^3\right)\cos x+C$.

§ 8.3

3. $I_n=\dfrac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+\dfrac{2n-3}{a^2(2n-2)}I_{n-1}$, $n\geq 2$; $I_3=\dfrac{x}{4a^2\left(x^2+a^2\right)^2}+\dfrac{3x}{8a^4\left(x^2+a^2\right)}+$ $+\dfrac{3}{8a^5}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C$. **4.** 1) $\ln|(x-2)(x+5)|+C$; 3) $2\ln\left|\dfrac{x+4}{x+2}\right|-\dfrac{5x+12}{x^2+6x+8}+C$; 5) $x+\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{(x-1)^2}{|x|}+$

$+C$; 7) $\frac{1}{2}\ln\frac{\left|(x+1)^3(x+3)\right|}{(x+2)^4}+C$; 9) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$; 11) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+$
$+C$; 13) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-x^2+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$; 15) $\frac{2x^3-3x}{2\left(x^2-1\right)}+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$; 19) $2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+$
$+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$; 21) $\frac{x-2}{4\left(x^2+2\right)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$; 23) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\operatorname{arctg}\big(\sqrt{2}x+$
$+1\big)+\operatorname{arctg}\big(\sqrt{2}x-1\big)\Big)+C$; 25) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+C$. **5.** 1) $\frac{1}{12\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2\sqrt{2}x^3-1}{2\sqrt{2}x^3+1}\right|+$
$+C$; 3) $0{,}1\ln\left|\frac{x^5}{x^5+2}\right|+C$; 5) $\frac{1}{2}\ln\left(x^4+x^2+1\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}+C$; 7) $\frac{1}{2}\left(x^2-2\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}\right)+C$;
9) $\frac{1}{54}\left(\frac{x^3}{x^6+9}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{3}\right)+C$; 11) $\frac{1}{2na}\ln\left|\frac{x^n-a}{x^n+a}\right|+C$; 15) $\frac{1}{na}\operatorname{arctg}\frac{x^n}{a}+C$; 17) $\frac{1}{2na^2}\Big(\frac{x^n}{x^{2n}+a^2}+$
$+\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x^n}{a}\Big)+C$; 19) $\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}\int\frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m}dt$, $t=\frac{x+a}{x+b}$. **6.** 2) $P_n^{(n)}(a)=0$. **7.** 0,125 м/с; 4 с. **8.** $y^2-x^2=9$.

§ 8.4

3. 1) $\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3}-\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right|\right)+C$; 3) $\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+4\ln\left(1+\sqrt[4]{x}\right)+C$; 5) $\frac{3}{4}\ln\frac{x\sqrt[3]{x}}{\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^2\left(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}\right)^3}-$
$-\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}+C$; 7) $3\Big(\frac{1}{7}(2x-3)^{\frac{7}{6}}-\frac{1}{5}(2x-3)^{\frac{5}{6}}+\frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{1}{2}}-(2x-3)^{\frac{1}{6}}+\operatorname{arctg}(2x-$
$-3)^{\frac{1}{6}}\Big)+C$; 9) $-\frac{1}{2}\ln\frac{(1-t)^2}{1+t+t^2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$, $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$; 11) $\frac{1}{2}(x-2a)\sqrt{a^2-x^2}-\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+$
$+C$; 13) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}+C$; 15) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$; 17) $\frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}+C$. **4.** 1) $2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}+x\right|-$
$-\frac{3}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right|+\frac{3}{2\left(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right)}+C$; 3) $-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|+C$;
5) $\frac{1+2x}{\sqrt{x^2+2x}}+C$; 7) $\frac{2x-3}{4}\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{2}+x+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C$; 9) $-\frac{1}{6(t+1)^2}-\frac{5}{18(t+1)}-$
$-\frac{17}{108}\ln|t+1|+\frac{3}{4}\ln|t-1|-\frac{16}{27}\ln|t-2|+C$, $t=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$; 11) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}+C$; 13) $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}+$
$+C$. **5.** 1) $3\left(\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}\right)+C$; 3) $-\frac{1}{10x^{10}}\sqrt{\left(1+x^4\right)^5}+\frac{1}{3x^6}\sqrt{\left(1+x^4\right)^3}-\frac{1}{2x^2}\sqrt{1+x^4}+C$;

5) $-\dfrac{2+3x^3}{2x^3\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}}+C$; 7) $-0{,}1\sqrt{\left(\dfrac{1+x^4}{x^4}\right)^5}+\dfrac{1}{3}\sqrt{\left(\dfrac{1+x^4}{x^4}\right)^3}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+x^4}{x^4}}+C$; 9) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}\left(2x^2-1\right)}{3x^3}+C$;

13) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{t+1}{t-1}\right|-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} t+C,\ t=\sqrt[4]{\dfrac{1}{x^4}+1}$; 15) $-\dfrac{\sqrt[3]{\left(2x^3+1\right)^5}}{5x^5}+C$. **6.** 1) $\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}-$

$-6\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^6}+3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$; 3) $\dfrac{2}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}-\dfrac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+C$; 5) $6\Bigg(\dfrac{1}{9}\sqrt{(x+1)^3}+$

$+\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(x+1)^4}+\dfrac{1}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}+\dfrac{1}{6}(x+1)+\dfrac{1}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+\dfrac{1}{4}\sqrt[3]{(x+1)^2}\Bigg)+C$; 7) $\dfrac{3}{2}\sqrt{2x^2+8x+1}-$

$-\dfrac{6}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\dfrac{1}{2}}\right|+C$; 9) $\dfrac{1}{2x}\left(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}\right)+\dfrac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\dfrac{1}{2}\arcsin x+C$;

11) $\dfrac{1}{4}(1-2x)\sqrt{1-x+x^2}+\dfrac{3}{8}\ln\left|\dfrac{1}{2}-x+\sqrt{1-x+x^2}\right|+C$; 13) $-\ln\left|\dfrac{2-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C$;

15) $\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}+C$; 17) $-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{2+\sqrt{-x^2+2x+3}}{2(x-1)}\right|+C$. Вказівка. Застосуйте підстановку $x-1=\dfrac{1}{t}$; 19) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{x\sqrt{2}}{x^2+1}+C$. Вказівка. Застосуйте підстановку $t=x+\dfrac{1}{x}$. **7.** $m=0,\ m=\dfrac{2}{k},\ k=\pm1,\ \pm2,\ \ldots$ **10.** $v(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{t+1}-1\right), & 0\le t\le 3,\\ \dfrac{1}{2}, & t>3.\end{cases}$

§ 8.5

1. 1) $\sin x-\dfrac{2}{3}\sin^3 x+\dfrac{1}{5}\sin^5 x+C$; 3) $\dfrac{1}{4}\sin 2x-\dfrac{1}{8}\sin 4x+C$; 5) $\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{8a}\sin 2ax+\dfrac{1}{8b}\sin 2bx+$ $+\dfrac{1}{16(a-b)}\sin 2(a-b)x+\dfrac{1}{16(a+b)}\sin 2(a+b)x+C$; 7) $\dfrac{5}{16}x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{3}{64}\sin 4x+\dfrac{1}{48}\sin^3 2x+$ $+C$; 9) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$; 11) $\dfrac{1}{16}x-\dfrac{1}{64}\sin 4x+\dfrac{1}{48}\sin^3 2x+C$; 13) $\dfrac{\operatorname{tg}^6 x}{6}-\dfrac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+$ $+C$; 15) $\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x\right)+2\ln|\operatorname{tg} x|+C$; 17) $\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{3\sin^3 x}+C$; 19) $-\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C$;

21) $\dfrac{1}{2}\cos^2 x-2\cos x+3\ln|\cos x+2|+C$; 23) $\operatorname{tg} x-\dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-2\operatorname{ctg} x+C$; 25) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x+\varphi}{2}\right|+$ $+C,\ \varphi=\arcsin\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **2.** 2) $K_n=\dfrac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x+\dfrac{n-1}{n}K_{n-2},\ n\ge 3,\ K_8=\dfrac{1}{8}\sin x\cos^7 x+\dfrac{7}{48}\times$ $\times\sin x\cos^5 x+\dfrac{35}{192}\sin x\cos^3 x+\dfrac{35}{128}\sin x\cos x+\dfrac{35}{128}x+C$. **3.** $\dfrac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}x+\dfrac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}\ln|a\sin x+$

$+b\cos x|+C$. **4. 1)** $-\frac{x}{5}-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|+C$. **5.** $I_5=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$; $K_7=\frac{\sin x}{6\cos^6 x}+\frac{5\sin x}{24\cos^4 x}+\frac{5\sin x}{16\cos^2 x}+\frac{5}{16}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$; **7.** 1) $e^x-\operatorname{arctg}e^x+C$; 3) $x+\frac{1}{1+e^x}-\ln\left(1+e^x\right)+C$; 5) $x+\frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}}+C$; 7) $-2\arcsin e^{-\frac{x}{2}}+C$; 9) $\frac{e^x}{2\left(1+e^{2x}\right)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}e^x+C$;

11) $-\frac{1}{2}e^{-x}\left(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}\right)+\frac{1}{4}\ln\frac{\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)\left(1-\sqrt{1-e^x}\right)}{\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)\left(1+\sqrt{1-e^x}\right)}+C$; 13) $x\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)-\frac{1}{2}(x-\arcsin x)+C$; 15) $x-e^{-x}\arcsin e^x-\ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right)+C$; 17) $\frac{e^x}{1+x}+C$; 19) $\frac{2}{\ln 2}\left(\sqrt{2^x-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{2^x-1}\right)+C$. **9.** $150\ln 2$ c. **10.** 1) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}\ln|x-a|+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}\ln|x-b|+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\ln|x-c|+C$; 3) $\frac{1}{4}\left(x^2-1\right)^2+2\left(x^2-1\right)+3\ln\left|x^2-1\right|-\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{4\left(x^2-1\right)^2}+C$;

5) $\frac{1}{6}\ln\frac{x^6}{x^6+1}+\frac{1}{6\left(x^6+1\right)}+C$; 7) $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x^2+C$; 9) $\ln\left(e^x+1\right)+\frac{18e^{2x}+27e^x+11}{6\left(e^x+1\right)^3}+C$;

11) $6\sqrt[6]{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$; 13) $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C$; 15) $\frac{3}{2\left(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right)}+\frac{1}{2}\ln\frac{\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)^4}{\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right|^3}+C$; 17) $\frac{1}{2}\left((x+2)\sqrt{1-4x-x^2}+5\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)+C$; 19) $\frac{2a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$; 21) $a\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+\sqrt{a^2-x^2}+C$; 23) $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C$;

25) $3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}\right|+C$; 27) $\frac{1}{8}\cos^8 x-\frac{1}{6}\cos^6 x+C$;

29) $-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$; 31) $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$; 33) $\frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}}+\frac{3}{5}\cos x\sqrt[3]{\cos^2 x}+C$;

35) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)+C$; 37) $\ln|\operatorname{tg}x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C$; 39) $x\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}-\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C$; 41) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x-\frac{4}{9}x\sqrt{x}+C$; 43) $\frac{x^3}{3}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{x^2}{3}+\frac{1}{3}\ln\left|1-x^2\right|+C$; 45) $-\left(1+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x^2}+C$; 47) $-\frac{\arcsin x}{x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$; 49) $-(x+\operatorname{ctg}x\ln(e\sin x))+C$.

§ 9.1

4. 1) $\frac{25}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)$, 12,5; 3) $\frac{c(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}\right)^2$, $\frac{c}{3}\left(b^3-a^3\right)$; 5) $\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k+1}$, $\frac{2}{3}$; 7) $b-a, b-a$. **5.** 1) $\sum_{k=0}^{n-1} e^{c_k}\Delta x_k, c_k=\frac{k+1}{n}, \Delta x_k=\frac{1}{n}$; 3) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+c_k^2}\Delta x_k, c_k=\frac{k+1}{n}, \Delta x_k=\frac{1}{n}$; 5) $\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+c_k}\Delta x_k$, $c_k=\frac{k+1}{n}$, $\Delta x_k=\frac{1}{n}$; 7) $\sum_{k=0}^{n-1}c_k^p\Delta x_k$, $c_k=\frac{k+1}{n}$, $\Delta x_k=\frac{1}{n}$; 9) $\sum_{k=0}^{n-1}c_k^m\Delta x_k$, $c_k=$ $=x_k=aq^k$, $\Delta x_k=a\left(q^{k+1}-q^k\right)$. **6.** Вказівка. Переконайтеся, що функція f неперервна на інтервалі (0; 1), у точці $x = 0$ неперервна справа, а в точці $x = 1$ неперервна зліва. **11.** Вказівка. Доведіть обмеженість функції f на кожному з елементарних відрізків (T)-розбиття. **12.** Вказівка. Розгляньте, наприклад, функцію $f(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x \text{ раціональне},\\ -1, & \text{якщо } x \text{ ірраціональне}.\end{cases}$

§ 9.2

3. 1) 1,265, 0,945; 1,187, 1,026; 3) 0,778, 0,715. **4.** 1)–4) Так. **7.** Так.

§ 9.3

3. 1) $\frac{\pi}{4}\le I\le\frac{\pi\sqrt{6}}{8}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{8}\le I\le\frac{\sqrt{2}}{6}$; 5) $0\le I\le e^2-1$. **5.** 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2x}{\pi}dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx$; 3) перший; 7) другий. **8.** 1) $I\le\frac{2\pi^3}{3}$; 5) $I\le\frac{2\pi^5}{5}$. **10.** $(b-a)^2$; $f(x)=C-\text{const}\ \ x\in[a;b]$. **11.** 0.

§ 9.4

3. 1) ≈ 13,25 м; 2) 50 м. **5.** $\frac{1}{\pi}A$. **7.** 1) $\frac{x^3}{3}-x^2+5x$; 3) $\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x$; 5) $-\ln\cos x$. **8.** 1) $\sin x^2$; 3) 0; 5) $-\sqrt{1+a^2}$; 7) $\frac{\sin 2x}{x}$; 9) $6t2^{3t^2}\cos\left(\sin 3t^2\right)-2^{2t+1}\cos(\sin 2t)$. **10.** 1) 1; 3) $\frac{\pi^2}{4}$; 5) 0. **11.** 1) $\frac{45}{4}$; 3) 2; 5) $e-1$; 7) $\ln 2$; 9) 1; 11) ні; 13) $\frac{2\ln\cos(a-b)}{\sin(a-b)}$. **12.** 1) $e-\sqrt{e}$; 3) $\frac{\pi}{12}$; 5) $1-\cos 1$; 7) $\frac{\pi}{2}$; 9) $|b|-|a|$; 11) $\frac{14}{15}$. **13.** 1) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$; 7) $\frac{1}{2}$. **14.** 1) $-\frac{11}{3}$; 3) $\frac{3}{4}$; 5) $\frac{1}{4}$; 7) $\frac{4}{7\pi}$. **16.** 1) 0; 3) –1; 5) 1; 3; $2+\sqrt{7}$; 7) (4; 5); 9) $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6};\pi\right)$.

§ 9.5

4. 1) 1; 3) $-\frac{\pi^2}{4}$, якщо n парне, і $\frac{\pi^2}{n}-\frac{4}{n^3}$, якщо n непарне; 5) $\pi^3-6\pi$; 7) $a^2\left(\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$; 9) $2\left(\frac{2\pi}{3}-\ln\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}\right)$; 11) $2e-1$; 13) $\frac{\pi}{1+\pi^2}\left(1+\frac{1}{e}\right)$; 15) $\frac{\pi^2}{4}$; 17) $f'(1)-f(1)+f(0)$. **5.** 3) Ні; 5) ні. **6.** 1) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{2}{3}\left(3+\ln\frac{2}{5}\right)$; 7) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; 9) $\frac{\pi a^4}{16}$; 11) 0; 13) $\pi\sqrt{2}-4$; 15) $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$; 17) $\frac{\pi^2}{4}$. **8.** 1) 0;

2) $\frac{3\pi}{128}$; 3) 0. **9.** 1) a; 2) a. **13.** 3) $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$, якщо n непарне, і $I_n = \frac{(n-1)!!\pi}{2\cdot n!!}$, якщо n парне; 5) $I_n = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$.

§ 9.6

2. 1) $\frac{3}{2}$; 3) розбіжний; 5) 1; 9) $\frac{\pi}{3}$; 11) розбіжний; 13) розбіжний; 15) -1. **3.** 1) $\frac{1}{4}$; 3) розбіжний; 7) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; 9) розбіжний; 11) $\frac{1}{2}$; 13) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$; 15) $\frac{\pi}{2}$. **4.** 1) Збіжний; 3) збіжний; 5) збіжний; 9) розбіжний; 11) розбіжний; 13) збіжний; 15) збіжний, якщо $p < 1$, і розбіжний, якщо $p \ge 1$. **5.** 1) 0; 3) 0; 5) π; 7) π; 9) $-\pi\ln 2$. **7.** 2) $I_n = n!$; 3) $I_n = (-1)^{n-1}\frac{\pi}{4n}$.
8. 1) Збіжний, якщо $p > 0$, і розбіжний, якщо $p \le 0$; 3) збіжний, якщо $p < 3$, і розбіжний, якщо $p \ge 3$; 5) $0 < p < 4$. **9.** 1) 2; 2) 1. **14.** 1) Умовно збіжний; 3) абсолютно збіжний; 5) умовно збіжний; 7) абсолютно збіжний, якщо $-1 < \frac{p+1}{q} < 0$, і умовно збіжний, якщо $0 \le \frac{p+1}{q} < 1$.

§ 9.7

2. 1) $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$; 3) 225; 5) $\frac{1}{e-1}$; 7) 156; 9) 8π. **5.** 1) $k!$; 3) $\frac{1}{9}$.

§ 10.1

3. 1) $S^*(E) = S_*(E) = S(E)$ — площа многокутника; 3) $S^*(E) = 1$; $S_*(E) = 0$; 5) $S^*(E) = S_*(E) = 0$. **4.** 1) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\pi^2}{8}-1$; 5) $\frac{32}{3}$; 7) $\ln 2$; 9) $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$; 11) $\frac{7}{6}$; 13) $\frac{\pi^2}{8}+1$; 15) $30\log_2 e$; 17) $\frac{14}{3}$; 19) 6. **5.** $\ln 3 - \frac{1}{2}$. **6.** $(9\pi-2):(3\pi-2)$. **7.** $\frac{4}{3}$. **8.** 0. **9.** ≈624 кг. **10.** $x = \operatorname{ch} S$, $y = \operatorname{sh} S$. **12.** 1) a^2; 3) $\frac{\pi a^2}{4}$; 7) $\frac{3\pi a^2}{2}$; 9) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; 11) $\frac{4\pi^3 a^2}{3}$; 13) $\frac{a^2(\pi-1)}{4}$; 15) $\frac{64}{15}$.
14. 1) $3\pi a^2$; 3) πab; 5) $\frac{8}{3}ab$; 7) $\frac{3\pi a^2}{2}$; 9) $\frac{\pi ab}{4}$. **15.** 1) 1; 3) $3\left(\sqrt[3]{2}+1\right)$; 5) 1; 7) $\frac{1}{4}$.
16. б) $3\pi a^2$; в) 4π; г) 2; д) $2+\frac{\pi}{2}$.

§ 10.2

3. 1) $V^*(E) = V_*(E) = V(E)$ — об'єм многогранника; 3) $V^*(E) = 1$, $V^*(E) = 0$; 5) $V^*(E) = V_*(E) = 0$. **4.** 1) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{16}{3}$. **6.** $\frac{h}{3}\left(S+\sqrt{Ss}+s\right)$. **9.** 1) $\frac{\pi}{5}$; 3) $\frac{3\pi ab^2}{7}$; 5) $\frac{\pi^2}{2}$; 9) $\frac{32\pi}{3}$; 11) $\frac{9\pi}{4\ln 2}$; 13) $41{,}4\pi$; 15) $\frac{70\pi}{3}$; 17) $\frac{8\pi}{15}$. **14.** 1), а) $5\pi^2 a^3$; б) 0; в) $7\pi^2 a^3$; 3) $\frac{2}{3}\pi^2 a^3\left(\pi^2-6\right)$; 5), а) $\frac{\pi a^3}{4}\left(\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{2}{3}\right)$; б) $\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$. **15.** 1) $\frac{\pi^2}{2}$; 3) $2\pi^2 a^3$; 5) π^2. Вказівка. Скористайтеся тим, що $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ (інтеграл Діріхле).

§ 10.3

4. 1), 3), 5), 7) Так. **5.** 1) $\sqrt{6}\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; 3) $\ln\left(e+\sqrt{e^2-1}\right)$; 5) 2; 7) $\frac{3\pi a}{2}$; 9) $\frac{R\pi^2}{2}$; 11) $32a$; 13) $\frac{3\pi a}{2}$. **6.** $\frac{2p+1}{2p}$ або $\frac{2p}{2p-1}$, $p\in\mathbf{Z}$. **7.** 1) $10\left(\frac{67}{27}+\sqrt{5}\right)$; 3) $p\left(2+\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$; **9.** $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$.

§ 10.4

3. 1) $\frac{\pi\left(10\sqrt{10}-1\right)}{27}$; 3) $8\sqrt{5}\pi, 4\sqrt{5}\pi$; 5) $\frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13}+2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$; 7) $\pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)\times\right.$ $\left.\times\left(\sqrt{5}-1\right)\right)$; 9), а) $16\pi^2a^2$; б) $\frac{64\pi a^2}{3}$; в) $8\pi\left(\pi-\frac{4}{3}\right)a^2$; г) $\frac{32\pi a^2}{3}$; 11) $2\pi\left(b^2+\frac{1}{e}ab\arcsin e\right)$, $2\pi\left(a^2+\frac{b^2}{2e}\ln\frac{1+e}{1-e}\right)$, $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$; 13), а) $2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$; б) $2\sqrt{2}\pi a^2$; в) $4\pi a^2$.
4. $\frac{5\left(14\sqrt{5}+17\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)}{128\sqrt[3]{10}}$; **5.** $4r^2$. **6.** $16r^2$, де r — радіус основи циліндрів. **7.** 0; $4\pi\left(\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$.
8. $\frac{\pi a^2}{12}\left(4\sqrt{3}+8\sqrt{6}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$. **9.** 2) $4\pi a^2$.

§ 10.5

4. 3) $M_x=\frac{a^2}{8}\left(e^2-\frac{1}{e^2}+4\right)$; 5) $M_x=\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)$, $M_y=\frac{9\sqrt{5}}{8}+\frac{1}{16}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$; 7) $M_x=\sqrt{2}+$ $+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **5.** 3) $\left(0;\ \frac{a(2+\operatorname{sh}2)}{4\operatorname{sh}1}\right)$; 5) $\left(\frac{\frac{27}{8}-3\ln 2}{3+2\ln 2};\ \frac{20}{3(3+2\ln 2)}\right)$; 7) $\left(\frac{-0{,}2\left(2e^{2\pi}-e^{\pi}\right)}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}},\right.$ $\left.\frac{0{,}2a\left(e^{2\pi}-2e^{\pi}\right)}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}\right)$. **6.** 1) $\frac{5\pi a^3}{2}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\frac{4}{5}$; 5) $\frac{ah^2}{6}$. **7.** 1) $\left(\frac{a}{5};\ \frac{a}{5}\right)$; 3) $\left(\frac{\pi}{6(4-\pi)};\ \frac{12-\pi^2}{12-3\pi}\right)$; 5) $\left(\frac{8}{3\pi};\ \frac{4}{\pi}\right)$; 7) $\left(\pi a;\ \frac{5}{6}a\right)$; 9) $\rho_0=\frac{5}{6}a$, $\theta_0=0$. **8.** а) $2\pi^2br^2$, $4\pi^2br$; б) $2\pi^2ar^2$, $4\pi^2ar$.
9. $\sqrt{2}\pi a^3\sin\varphi$, $4\sqrt{2}\pi a^2\sin\varphi$. **10.** $\frac{\pi r^3}{3}(3\pi-4)$. **12.** 60 К. **14.** 37,5 Дж. **15.** $q_1q_2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$. **16.** $\frac{4}{15}\pi\gamma\omega^2R^5$, де γ — густина заліза. **18.** $\frac{1}{2}(a+b)\,ch+\frac{h^2}{6}(a+2b)$. **19.** $\frac{2}{3}\gamma r^3$. **21.** $\frac{1}{4}\pi\rho h\omega^2R^4$. **22.** mgR, де R — радіус Землі. В к а з і в к а. Закон притягання тіла Землею визначається формулою $f=\frac{mgR^2}{r^2}$, де m — маса тіла, r — віддаль від тіла до центра Землі, R — радіус Землі.
23. e_1. В к а з і в к а. Електричні заряди взаємодіють із силою $F=\frac{e_1e_2}{r^2}$, де e_1 і e_2 — величини зарядів, r — віддаль між ними.

§ 10.6

1. 1) 0,9464, 0,9454, 0,9461; 3) –6,3555, –6,1390, –6,2859; 7) 34,8183, 37,8183, 37,9655. **2.** 1) $\Delta < 1{,}9\cdot 10^{-2}$; 3) $\Delta < 1{,}61\cdot 10^{-5}$; 5) $\Delta < 3{,}26\cdot 10^{-5}$. **3.** 1) $\frac{1}{50}$; 3) $\frac{1}{18}$; 5) $\frac{\pi}{4}$. **4.** 1) 3,746; 5) 2,796. **5.** 1) 0,0268, 0,0232, 0,0003; 3) 0,0014, 0,0004. **6.** 50,81. **7.** 4,734. **8.** 21,477. **9.** 1) 0,6931; 2) 3,141.

§ 11.1

3. 1) $2-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\ \cdots\ -\frac{1}{n(n-1)}-\ \cdots,\ S=1$; 3) $\operatorname{arctg} 1+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\ \cdots+\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2-n+1},\ S=\frac{\pi}{2}$; 5) $1^2+2^2+\cdots+n^2+\cdots,\ S=+\infty$; 7) $\frac{7}{5}-8\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{5^n},\ S=1$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)},\ S=\frac{1}{3}$. **4.** 1) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{4}$; 7) $\frac{\pi}{4}$; 9) $\sin\frac{\pi}{720}+\sin\frac{\pi}{360}+\ \cdots\ +\sin\frac{\pi}{6}$. **5.** 1) $a>1\Rightarrow x\in(-\infty;0)$, $a<1\Rightarrow x\in(0;+\infty)$; 3) $x\in\varnothing$; 5) $x<0,\ x\notin\mathbf{Z}$. **7.** 1) Збіжний, якщо $\alpha>1$, і розбіжний, якщо $\alpha\le 1$; 3) збіжний $\forall x$. **8.** 1), 5) Збіжний. **9.** $6a$, $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. **10.** $2\pi r^2$, $4r^2$. **11.** 1) Розбіжний; 3) збіжний, якщо $x=\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$, і розбіжний, якщо $x\ne\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$.

§ 11.2

4. 1) $\frac{3}{4}$; 5) $\frac{5}{4}$. **7.** Ні. **8.** Вказівка. Доведіть, що підпослідовність (S_{3m}) послідовності часткових сум ряду розбіжна. **9.** 1) Збіжний; 3) розбіжний; 5) збіжний, якщо $\alpha+\beta>1$, і розбіжний, якщо $\alpha+\beta<1$. **13.** $\frac{\pi^2}{6}$, $\frac{\pi^2}{24}$.

§ 11.3

3. 1) Вказівка. Скористайтеся нерівністю $|a_nb_n|\le\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$. **5.** 1) Розбіжний; 3) збіжний; 5) збіжний; 7) збіжний; 9) збіжний; 11) розбіжний; 13) розбіжний; 15) розбіжний; 17) збіжний; **6.** 1) Збіжний; 3) розбіжний; 5) розбіжний; 7) розбіжний; 9) збіжний; 11) збіжний; 13) збіжний. **7.** 1) Збіжний; 3) збіжний; 7) розбіжний; 9) збіжний. **8.** 1) Збіжний; 5) збіжний; 7) збіжний, якщо $p>1$, q — довільне та при $p=1$, $q>1$. **9.** 1) Збіжний; 3) розбіжний; 5) збіжний; 7) збіжний; 9) розбіжний; 11) розбіжний; 13) розбіжний; 15) збіжний; 17) розбіжний; 19) розбіжний; 21) розбіжний; 23) розбіжний. **11.** 13. **14.** 1) Розбіжний; 5) збіжний, якщо $p>\frac{3}{2}$. **16.** Вказівка. Доведіть збіжність ряду, n-й член якого стоїть під знаком границі. **17.** 1) Збіжний; 3) збіжний. **18.** Збіжний. **19.** Збіжний.

§ 11.4

2. 1) Абсолютно збіжний; 3) абсолютно збіжний; 5) абсолютно збіжний $\forall\alpha$; 9) абсолютно збіжний; 11) умовно збіжний; 13) розбіжний; 15) умовно збіжний; 17) розбіжний; 19) абсолютно збіжний, якщо $|a|>1$, умовно збіжний, якщо $|a|=1$, і розбіжний, якщо $|a|<1$. **3.** 1) 6; 3) 4; 5) 3. **10.** 1) Абсолютно збіжний; 3) розбіжний; 5) абсолютно збіжний, якщо $\alpha>1$, умовно збіжний, якщо $0<\alpha\le 1$; 7) абсолютно збіжний, якщо $x\ne\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, умовно збіжний, якщо $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$. **11.** 1) Абсолютно збіжний, якщо $\alpha,\beta>1$, умовно збіжний, якщо $0<\alpha$, $\beta \le 1$ та якщо $\alpha > 1$ (або $\beta > 1$), а $0<\beta\le 1$ або $0<\alpha\le 1$; 3) абсолютно збіжний; 5) абсолютно збіжний.

§ 12.1

3. 3), 5) Ні; 7) так. **4.** 1) $E=[0;+\infty)=E_1$; 3) $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{Z}}[2\pi n;(2n+1)\pi]$, $E_1=E\setminus\bigcup\limits_{n\in\mathbf{Z}}O_\delta^*\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$ $\forall\delta>0$; 5) $E=[-1;1]=E_1$; **5.** 1) $E=(-1;3)$, $F(x)=(x-1)/(3-x)$; 3) $E=(0;+\infty)$, $F(x)=$ $=\left(e^x-1\right)^{-1}$; 5) $E=\mathbf{R}$, $F(x)=(1-\sin x)\ln(1-\sin x)+\sin x$; 7) $E=(0;+\infty)$, $F(x)=-\ln\left(1-e^{-x}\right)$. **6.** 1) $E=\{x\in\mathbf{R}:|x|>1\}=E_1$; 3) $E=[-1;+\infty)$, $E_1=[-1;+\infty)$; 5) $E=\mathbf{R}\setminus\{-1;1\}=E_1$; 7) $E=$ $=[1/e;e)$; $E_1=(1/e;e)$; 9) $E=[-1/2;1/2)$, $E_1=(-1/2;1/2)$; 11) $E=E_1=\mathbf{R}$, якщо $\alpha>1$ і $E=\mathbf{R}$ та $E_1=\varnothing$, якщо $0<\alpha<1$; 13) $E=E_1=\mathbf{R}\setminus\{0\}$; 15) $E=E_1=\{x\in\mathbf{R}:|x|>1\}$; 17) $E=$ $=E_1=(4;4+1/e)$. **7.** 1), 5), 9). Так; 7) ні. **8.** 1), 3) $[-q;q]$ $\forall q\in[0;1)$, так; 5) $[-1;1]$, так; 7) $[0;+\infty)$, 9) $\left[\sqrt{1-q};\ \sqrt{1+q}\right]\cup\left[-\sqrt{1+q};\ -\sqrt{1-q}\right]$ $\forall q\in(0;\ 1)$, так; 11) $(-\infty;+\infty)$, ні. **9.** 1) $n\ge 7$. **10.** 1) $(-\infty;+\infty)$; 3) $[0;+\infty)$; 5) $[-1;1]$. **11.** 1) Так, $\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{3}$; 3) ні. **12.** 1) Так, $\frac{x}{1-x}$, $\frac{x}{(1-x)^2}$; 3) так, $\ln\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1-x}$; 5) так, $\ln\frac{\sin x}{x}$, $\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}$.

§ 12.2

3. $R=1$. **5.** 3) 1, $(-1;1)$, $[-1;1]$; 5) 1, $(-1;1)$, $(-1;1]$; 7) 1, (-11); 9) 0, $\{-1\}$, $\{-1\}$; 13) $+\infty$, $(-\infty;+\infty)$, $(-\infty;+\infty)$; 15) $+\infty$, $(-\infty;+\infty)$, $(-\infty;+\infty)$; 17) ; 1), $(-1;1$, $(0;2)$, $[0;2)$; 19) 1/3, $(-7/3;-5/3)$, $[-7/3;-5/3)$; 21) 4, $(-4;4)$, $(-4;4)$; 23) 1, $(0;2)$, $(0;2)$; 25) 2, $(-3;1)$, $[-3;1]$; 27) 0, $\{-1\}$, $\{-1\}$; 29) 1, $(-1;1)$, $(-1;1)$. **6.** 1) 1, $|z|<1$; 5) 0, $\{i\}$; 9) e^2, $|z|<e^2$; 11) 1, $|z-1+i)<1$. **7.** 1) R; 3) R^m. **8.** 1) $R\ge\min\{R_1,R_2\}$. **9.** 3) $1/(1-x)^2$; 5) $2x^2/\left(1-x^2\right)^2$; 7) $2x/(1-x)^3$; 9) $\ln\frac{2}{2-x}$; 11) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$; 13) $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$; 15) $x+(1-x)\ln(1-x)$; 17) $(x-1)\ln(1+x)-x(1+\ln(1-$ $-x))$; 19) $2x\operatorname{arctg}x-\ln\left(1+x^2\right)$; 21) $\left(3x^3+x^4\right)/(1-x)^3$; 23) $\left(5x^2-2x+1\right)/(1-x)^3$; 25) $\frac{1}{x^2}\times$ $\times\left(xe^x-e^x-\frac{x^2}{2}+1\right)$; 27) $(z+i)(z+i-1)/(1+z+i)^3$; 29) $2(z-1+i)/\left(1-2(z-1+i)^2\right)$. **10.** 1) $(1-r\cos\alpha)/\left(1-2r\cos\alpha+r^2\right)$. **13.** $\ln 2$. **14** $\pi/2-\ln 2$. **17.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}x^n$. **18.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(n+1)x^n$.

§ 12.3

6. 1) $x<0{,}39$; 3) $x<\sqrt[3]{0{,}003}$. **7.** 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n!}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-x^2\right)^n}{n!}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2ax)^n}{n!}e^{-a^2}=$ $=e^{-a^2}\left(1+2ax+\left(2a^2-1\right)x^2+\cdots\right)$; 5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$; 7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$; 9) $\frac{1}{2}+$

$+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$; 11) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n!}-\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}\right)x^{2n}$; 15) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 5\ \ldots\ (4n-3)}{32^n n!}x^n$;

17) $\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^{n+1}$; 19) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8(n+1)}{5^{n+2}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n$; 21) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$;

23) $\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$; 25) $x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$; 29) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$;

31) $C+x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(4n+1)}x^{4n+1}$. **8.** 3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e(x-1)^n}{n!}$; 5) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}$; 7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b\ln^n b}{n!}(x-a)^n$.

9. 1) $1-\ln 2$; 3) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\ln 2$. **10.** 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n z^n}{n!}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}z^{2n+1}}{(2n+1)!}$; 5) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\cos a}{(2n)!}(z-a)^{2n}-\right.$

$\left.-\frac{\sin a}{(2n+1)!}(z-a)^{2n+1}\right)$; 7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$; 9) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sh} a}{(2n)!}(z-a)^{2n}+\frac{\operatorname{ch} a}{(2n+1)!}(z-a)^{2n+1}\right)$;

11) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n$. **11.** 1) $x=0$; 3) $x\in\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi k:\ k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\{2\pi k:\ k\in\mathbf{Z}\}$; 5) $x\in$ $\in\left(-\frac{9}{25};\ 1\right\}$.

§ 12.4

2. 1) 0,309; 5) 0,479; 7) 0,841; 9) 0,158; 11) 0,368; 13) 0,607; 15) 1,099; 17) 0,434; 19) 0,079; 21) 4,123; 23) 1,063; 25) 3,03; 27) 1,998; 29) 0,322; 31) 0,253. **4.** 1) 1,6487; 3) 1,2214. **5.** 0,003. **6.** 1) 0,01; 0,0003. **7.** 3,1416. **8.** 3,142. **9.** 7. **10.** 2. **11.** $|x|<0{,}6448$. **12.** 1) 1,605; 3) 1,057; 5) 0,608; 7) 0,026; 9) 0,497. 11) 0,488; 13) 0,337; 15) 0,119; 17) 8,041. **13.** 1) 0,9461; 3) 0,1996. **14.** 0,520. **15.** 3) 0,92. **16.** 0,4938. **17.** 1,494. **18.** 0,119. **19.** 2) 4,84. **20.** 12,06. **21.** 13,82. **22.** 3) 2. **24.** 1) e^{-1}; 3) sin 1; 5) $\pi/6$.

§ 12.5

2. 1) Збігається з f, $(-\infty;+\infty)$; 3) $-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}$, $(-\pi;\pi)$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx$, $(-\pi;\pi)$; 7) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$, $[-\pi;\pi]$; 11) $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{n^2-a^2}$, $a\notin\mathbf{Z}$, $(-\infty;+\infty)$;

13) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(2n+1)x}{(2n+1)}$, $(-\infty;+\infty)$; 15) $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$, $(-\infty;+\infty)$; 17) $\frac{2}{\pi}\times$ $\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}(1+\pi)}{n}\sin nx$, $(-\pi;\pi)$. **3.** 1) $\frac{\pi^2}{12}$; 3) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{\pi}{4}$; 6) $-\frac{1}{2}+\frac{\pi\operatorname{ch}(\pi-1)}{2\operatorname{sh}\pi}$. *Вказівка.* Скористайтеся рядом Фур'є для функції $f(x)=\frac{\pi\left(e^x+e^{-x}\right)}{2\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}$ на відрізку $[-\pi;\pi]$. **4.** 1) $\frac{2l}{\pi}\times$

$\times\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin\frac{\pi n}{l}x}{n}$; 3) $\dfrac{e^4-1}{2e^2}\left(\dfrac{1}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4+n^2\pi^2}\left(2\cos\dfrac{\pi n}{2}x-\pi n\sin\dfrac{\pi n}{2}x\right)\right)$; 5) $\dfrac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}-$ $-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$; 7) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin^2\dfrac{\pi n}{3}\cos\dfrac{2\pi n}{3}x$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2(-1)^n}{(2n-1)^2}+\dfrac{8}{\pi(2n-1)^3}\right)\sin(2n-1)x$.

5. 1) $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}$, $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$; 3) $\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{\pi^2}{n}+\dfrac{2}{n^3}\left((-1)^n-1\right)\right)\sin nx$; 5) $\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin n\pi x}{n}$. **7.** $\dfrac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$, $\dfrac{1}{6}\left(\pi^2-3\pi\alpha+3\alpha^2\right)$. **8.** 1) $\alpha_n=a_n, \beta_n=-b_n$; 3) $\alpha_0=a_0$, $\alpha_n=a_n\cos nh+b_n\sin nh$, $\beta_n=b_n\cos nh-a_n\sin nh$.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Дюженкова Любов Іванівна
Колесник Тамара Всеволодівна
Лященко Микола Якович
Михалін Геннадій Олександрович
Шкіль Микола Іванович

Математичний АНАЛІЗ у ЗАДАЧАХ і ПРИКЛАДАХ

У двох частинах

Частина 1

Оправа і титул художника *В. С. Жиборовського*
Художній редактор *Г. С. Муратова*
Технічний редактор *А. І. Омоховська*
Коректори: *Р. Б. Попович, Л. М. Байбородіна*
Комп'ютерна верстка *С. В. Дьогтєвої*

Свідоцтво про внесення до Держ. реєстру від 04.12.2000
серія ДК № 268

Підп. до друку 30.05.2002. Формат 60 × 84/16. Папір офс. № 1.
Гарнітура Times. Офс. друк. Ум. друк. арк. 26,97.
Обл.-вид. арк. 34,70. Тираж 3000 пр. Вид. № 10300.
Зам. № 2-269

Видавництво «Вища школа», 01054, Київ-54, вул. Гоголівська, 7г

Надруковано з плівок, виготовлених у видавництві
«Вища школа», у ВАТ «Білоцерківська книжкова фабрика»,
09117, Біла Церква, вул. Л. Курбаса, 4

Навчальне видання

Дюженкова Любов Іванівна
Колесник Тамара Всеволодівна
Лященко Микола Якович
Михалін Геннадій Олександрович
Шкіль Микола Іванович

Математичний АНАЛІЗ у ЗАДАЧАХ і ПРИКЛАДАХ

У двох частинах

Частина 1

Оправа і титул художника *В. С. Жиборовського*
Художній редактор *Г. С. Муратова*
Технічний редактор *А. І. Омоховська*
Коректори: *Р. Б. Попович, Л. М. Байбородіна*
Комп'ютерна верстка *С. В. Дьогтєвої*

Свідоцтво про внесення до Держ. реєстру від 04.12.2000
серія ДК № 268

Підп. до друку 30.05.2002. Формат $60 \times 84/_{16}$. Папір офс. № 1.
Гарнітура Times. Офс. друк. Ум. друк. арк. 26,97.
Обл.-вид. арк. 34,70. Тираж 3000 пр. Вид. № 10300.
Зам. № 2-269

Видавництво «Вища школа», 01054, Київ-54, вул. Гоголівська, 7г
Надруковано з плівок, виготовлених у видавництві
«Вища школа», у ВАТ «Білоцерківська книжкова фабрика»,
09117, Біла Церква, вул. Л. Курбаса, 4