Л. І. ДЮЖЕНКОВА, Т. В. КОЛЕСНИК,
М. Я. ЛЯЩЕНКО, Г. О. МИХАЛІН, М. І. ШКІЛЬ

Математичний АНАЛІЗ у ЗАДАЧАХ і ПРИКЛАДАХ

У двох частинах

Частина 2

Допущено Міністерством освіти і науки України

Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів

КИЇВ
«ВИЩА ШКОЛА»
2003

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
М34

Гриф надано Міністерством освіти і науки України (лист від 7 лютого 2001 р. № 14/18.2–112)

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. *І. О. Шевчук* (Київський національний університет імені Тараса Шевченка); канд. фіз.-мат. наук, проф. *І. І. Старун* (Ніжинський педагогічний університет) і канд. фіз.-мат. наук, доц. *В. Ф. Власенко* (Сумський педагогічний університет)

Редакція літератури з економіки і фундаментальних наук
Редактор *Л. І. Гринь*

Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2 ч.:
М34 Навч. посіб. / Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Лященко та ін. — К.: Вища шк., 2003. — Ч. 2. — 470 с.: іл.
ISBN 966–642–153–4 (ч. 2)
ISBN 966–642–035–X

Наведено основні відомості з теоретичного курсу математичного аналізу, а також вправи та зразки розв'язування деяких з них. Значна кількість вправ розкриває суть математичних понять і тверджень. Особливу увагу приділено вивченню елементарних функцій дійсної і комплексної змінної.

Для студентів вищих педагогічних навчальних закладів.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 966–642–153–4 (ч. 2)
ISBN 966–642–035–X

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник «Математичний аналіз у задачах і прикладах» складається з двох частин. У першій частині посібника здійснено оригінальний підбір матеріалу з курсу математичного аналізу функцій однієї змінної. Велику увагу приділено розгляду елементарних функцій дійсної і комплексної змінної.

Матеріал другої частини посібника охоплює розділи курсу математичного аналізу, які пов'язані з метричними просторами, функціями кількох змінних, інтегралом та мірою Лебега, аналітичними функціями.

Кожний параграф містить стислі теоретичні відомості, вправи та зразки розв'язування деяких з них (їх помічено знаком «•»). Наведений теоретичний матеріал цілком достатній для розв'язування будь-якого завдання з певної теми. У посібнику є значна кількість вправ, розв'язування яких сприятиме осмисленню суті математичних понять і тверджень.

Наведений матеріал дає змогу глибше зрозуміти основні математичні поняття, що вивчають у шкільному курсі математики, зокрема такі, як число, простір, відстань, функція, похідна, інтеграл, міра, логарифм, синус, косинус.

Посібником можна скористатися при викладанні алгебри і початків аналізу в школі, а також для поглиблення знань про дійсне число, нескінченний десятковий дріб, степінь з дійсним показником, функцію та її графік, похідну, інтеграл, довжину, площу, об'єм тощо.

Кількість наведених вправ достатня для роботи студентів на практичних заняттях і під час виконання самостійної роботи.

У посібнику подано зразки розв'язування як стандартних, так і нетривіальних задач. Найскладніші задачі помічено знаком «*». Їх можна використати при написанні курсових та дипломних робіт, а також при проведенні математичних олімпіад.

Для скорочення записів використовуються логічна символіка та деякі інші позначення, зокрема символи: $\forall$ (кожен, для будь-якого), $\exists$ (існує), $\Rightarrow$ (випливає, якщо ..., то), $\Leftrightarrow$ (тоді й тільки тоді), $\exists!$ (існує єдиний, знайдеться єдиний), : (таких, що; тих, кожен з яких), := (дорівнює за означенням, надається значення), $O_\varepsilon(x_0)$ (ε-окіл точки x_0), $O(x_0)$ (окіл точки x_0), $\overset{*}{O}_\varepsilon(x_0)$ (проколений ε-окіл точки x_0), $\overset{*}{O}(x_0)$ (проколений окіл точки x_0) та ін.

У символічному запису деяких тверджень використовуються круглі дужки для виділення логічно завершених частин твердження.

Структуру цього навчального посібника запропонував Г.О. Михалін.

Розділ 13 МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ

§ 13.1. Поняття метричного простору. Приклади метричних просторів

Числову координатну пряму називають *одновимірним простором* $\mathbf{R}^1$, площину Oxy — *двовимірним простором* $\mathbf{R}^2$, простір $Oxyz$ — *тривимірним простором* $\mathbf{R}^3$. Узагальненням цих понять є *n-вимірний простір* $\mathbf{R}^n = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_k \in \mathbf{R}, k \in \overline{1, n} \right\}$ з відстанню $\rho(x, y)$ між точками $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ і $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, що визначається за формулою

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} . \tag{1}$$

Ця відстань задовольняє такі умови:

1) $\rho(x, y) \geq 0 \ \ \forall\, x, y$ (*невід'ємність*);
2) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (*рівність нулю*);
3) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \ \ \forall\, x, y$ (*симетричність*);
4) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \ \ \forall\, x, y, z$ (*нерівність трикутника*).

Простір $\mathbf{R}^n$ є прикладом так званого *метричного простору*, під яким розуміють довільну множину $M \neq \varnothing$, між будь-якими елементами x і y якої визначено відстань $\rho(x, y)$, що задовольняє умови 1) — 4). Позначають метричний простір (M, ρ), а елементи множини M називають точками цього простору. Відстань $\rho(x, y)$ позначають також $\rho_M(x, y)$ і називають *метрикою множини M*. Властивості 1) — 4) називають *аксіомами метричного простору*.

Будь-яку множину $M \neq \varnothing$ можна зробити метричним простором (M, ρ), визначивши відстань $\rho(x, y)$, наприклад формулою

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x = y, \\ 1, \text{ якщо } x \neq y. \end{cases}$$

Такий метричний простір називають *простором ізольованих точок*.

До метричних просторів належать також:

а) простір $\mathbf{C}$ комплексних чисел з відстанню

$$\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}; \tag{2}$$

б) простір $C[a; b]$ функцій, неперервних на відрізку $[a; b]$, з відстанню

$$\rho(x, y) = \max_{[a; b]} |x(t) - y(t)| \quad \forall x = x(t), y = y(t) \in C[a; b]; \tag{3}$$

в) нескінченно вимірний евклідів простір l^2, елементами якого є всі послідовності (x_n) з дійсними членами, для яких ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ збіжні, з відстанню

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}, \quad x = (x_n), \quad y = (y_n) \in l^2; \tag{4}$$

г) простір m обмежених послідовностей (x_n), $x_n \in \mathbf{R}$, з відстанню

$$\rho(x, y) = \sup_{n \in \mathbf{N}} |x_n - y_n|, \quad x = (x_n), \quad y = (y_n). \tag{5}$$

Щоб перевірити, чи є множина M з даною відстанню $\rho(x, y)$ метричним простором, треба показати, що виконуються властивості 1) — 4) відстані. Для простору $\mathbf{R}^n$ це можна зробити за допомогою нерівностей Коші:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}, \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}. \tag{7}$$

Якщо (M, ρ) — метричний простір, а $M_1 \subset M$, то (M_1, ρ) також є метричним простором, який називають *підпростором* простору (M, ρ).

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) простір $\mathbf{R}^1$ — це множина $\mathbf{R}$ дійсних чисел, де якимось чином визначено відстань $\rho(x, y)$ $\forall x, y \in \mathbf{R}$;

2) простір $\mathbf{R}^2$ — це множина пар (x, y) : $x \in \mathbf{R}$ і $y \in \mathbf{R}$, де певним чином визначено відстань;

3) простір $\mathbf{R}^3$ — це множина трійок (x, y, z) дійсних чисел, для яких відстань визначено за формулою

$$\rho((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2};$$

4) будь-яка множина є метричним простором;

5) довільну множину можна зробити метричним простором;

6) існує множина, між елементами якої відстань можна визначити єдиним способом;

7) множину дійсних чисел можна зробити метричним простором, причому не єдиним способом;

2. Усно. Чи можна зробити:

1) множину **Q** раціональних чисел підпростором простору $\mathbf{R}^1$;

2) множину **R** дійсних чисел підпростором простору $\mathbf{R}^2$;

3) множину **R** підпростором простору **C**?

3. Довести, що коли (M, ρ) — метричний простір, то й (M_1, ρ) — метричний простір $\forall M_1 \subset M: M_1 \neq \varnothing$.

4. Нехай $M = \mathbf{R}$. Перевірити, чи є (M, ρ) метричним простором, якщо відстань $\rho(x, y)$ визначено так:

1) $\rho(x, y) = \sqrt{|x-y|}$; 2)• $\rho(x, y) = |\sin(x-y)|$; 3) $\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$;

4)• $\rho(x, y) = \ln(1 + |x-y|)$; 5) $\rho(x, y) = \left| x^2 - y^2 \right|$;

6)• $\rho(x, y) = (x-y)^2$; 7) $\rho(x, y) = |x-y|^3$; 8) $\rho(x, y) = x^3 - y^3$;

9) $\rho(x, y) = \left|x^3 - y^3\right|$; 10) $\rho(x, y) = \operatorname{arctg} |x-y|$.

5. Чи є метрикою на множині натуральних чисел функція:

1) $\rho(x, y) = \dfrac{|x-y|}{xy}$; 2) $\rho(x, y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x+y}, \text{ якщо } x \neq y, \\ 0, \text{ якщо } x = y? \end{cases}$

6. Нехай M — множина населених пунктів на правому березі Дніпра від Києва до Черкас. За відстань $\rho(x, y)$ між пунктами x і y вважатимемо час руху катера, який має власну швидкість 60 км/год. Чи є (M, ρ) метричним простором?

7. Визначити відстань на множині **N** натуральних чисел трьома різними способами. Аналогічне завдання виконати для множини **Z** цілих чисел.

8. З якої властивості квадратного тричлена випливає нерівність Коші (7)?

9. Які з даних функцій задають метрику на площині:

1)• $\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$;

2) $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + 2(x_2 - y_2)^2}$;

3) $\rho(x, y) = 4|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|^2$, де $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$?

10. Довести, що множина пар (x, y) дійсних чисел з відстанню $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ є метричним простором.

11. Сформулювати і довести твердження, аналогічне попередньому:

1) для множини трійок (x, y, z) дійсних чисел;

2) для множини наборів $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ n дійсних чисел.

12. Довести, що метричні простори $\mathbf{C}$ і $\mathbf{R}^2$ є ізометричними, тобто існує взаємно однозначне відображення $f: \mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{R}^2$, яке зберігає відстань між відповідними точками.

13. Чи є множина функцій, неперервних на відрізку $[a;\ b]$, метричним простором, якщо відстань визначається так:

1) $$\rho(x(t), y(t)) = \sup_{[a;b]} |x(t) - y(t)|; \tag{8}$$

2) $$\rho(x(t), y(t)) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\,dt; \tag{9}$$

3)• $$\rho(x(t), y(t)) = \sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2\,dt}. \tag{10}$$

14. Сформулювати і розв'язати задачу, аналогічну попередній, для функцій, інтегровних на відрізку $[a;\ b]$.

15. Нехай M — множина функцій, що мають на відрізку $[a;\ b]$ неперервну похідну, причому $x = y \Leftrightarrow x = x(t) = y(t) = y \quad \forall t \in [a;\ b]$, і нехай $\rho(x, y) = \max\limits_{[a;\,b]}(x'(t) - y'(t))$. Чи є (M, ρ) метричним простором?

16. Визначити відстань між точками $x(t)$ і $y(t)$ у метриці простору $C[a;\ b]$ (зробити геометричну ілюстрацію):

1)• $x(t) = t^2$, $y(t) = 4t - 2$, $[a;\ b] = [-1;\ 4]$;

2) $x(t) = t^2$, $y(t) = 2t^2 + 4$, $[a;\ b] = [0;\ 2]$;

3) $x(t) = |t|$, $y(t) = 3$, $[a;\ b] = [-1;\ 1]$;

4) $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$, $[a;\ b] = [0;\ \pi]$;

5) $x(t) = \ln t$, $y(t) = 1 - t$, $[a;\ b] = [1;\ \mathrm{e}]$.

17. Вказати функції $y = f_1(t)$ і $y = f_2(t)$ з простору $C[a;\ b]$ такі, що $f_1(t) - f_2(t) \neq \text{const}$ і відстань між ними дорівнює ρ, якщо:

1)• $[a;\ b] = [0;\ 2]$, $\rho = 1$; 2) $[a;\ b] = [-1;\ 1]$, $\rho = 2$;

3) $[a;\ b] = [-2;\ 4]$, $\rho = \frac{1}{2}$; 4) $[a;\ b] = [1;\ 3]$, $\rho = 3{,}5$.

18. Довести, що простори l^2 і m є метричними (див. формули (4) і (5)).

19. Перевірити, чи є задана послідовність $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots)$ точкою метричного простору l^2, якщо:

1)• $x = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$;

2) $x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3^2}}, \ldots, \frac{n}{\sqrt{3^n}}, \ldots\right)$;

3) $x=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1\cdot 2}},\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot 3}},\ldots,\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}},\ldots\right);$

4) $x=\left(\dfrac{1}{\sqrt{\ln 2}},\dfrac{1}{\sqrt{\ln 3}},\ldots,\dfrac{1}{\sqrt{\ln(n+1)}},\ldots\right);$

5) $x=\left(\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}},\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2^2}},\ldots,\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2^n}},\ldots\right).$

20. Визначити відстань між точками $x\in l^2$ і $y\in l^2$, якщо:

1) $x=(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, $\quad y=\left(1,\dfrac{1}{2},\ldots,\dfrac{1}{n},\ldots\right);$

2) $x=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\ldots,\dfrac{1}{n+1},\ldots\right)$, $\quad y=\left(1,\dfrac{1}{2},\ldots,\dfrac{1}{n},\ldots\right).$

21. Довести, що множина s усіх дійсних числових послідовностей $x=(x_n)$ є метричним простором, якщо покласти

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}\quad \forall x=(x_n)\in s,\quad y=(y_n)\in s.$$

22. Визначити відстань між послідовностями $x=(0, 1, 0, 1, \ldots)$ і $y=(1, 0, 1, 0, \ldots)$ з простору s, розглянутого у попередній вправі.

23. Розглянемо множину M усіх обмежених на множині $E\subset \mathbf{R}$ функцій. Довести дані твердження:

1) множина M утворює метричний простір, якщо відстань між її елементами $x(t)$ і $y(t)$ визначається за формулою $\rho(x,y)=\sup\limits_{E}|x(t)-y(t)|;$

2) існують функції $x(t)$ і $y(t)$ з множини M такі, що $|x(t)-y(t)|\neq \text{const}$, проте $\rho(x,y)=1;$

3) на множині M не можна ввести відстань за формулою

$$\rho(x,y)=\inf_{E}|x(t)-y(t)|.$$

24*. На множині функцій, які мають неперервні похідні до n-го порядку включно на відрізку $[a;b]$, введено відстань трьома способами:

1) $\rho_1(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}\max\limits_{[a;b]}\left|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)\right|;$

2) $\rho_2(x,y)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}\max\left|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)\right|;$

3) $\rho_3(x,y)=\max\limits_{t}\left(\max\limits_{k}\left|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)\right|\right).$

Перевірити виконання властивостей метрики.

25. Введемо позначення $\mathrm{ARG} = \{\mathrm{Arg}\, z: \ z \in \mathbf{C} \text{ і } z \neq 0\}$. Нехай $\arg z$ — головне значення $\mathrm{Arg}\, z$, тобто те значення, яке лежить у проміжку $(-\pi; \pi]$. Позначимо через $\arg^* z$ інше головне значення $\mathrm{Arg}\, z$, тобто те значення, яке лежить у проміжку $[0; 2\pi)$. Довести, що:

1) $\arg^* z = \arg z$, якщо $\mathrm{Im}\, z \geq 0$, і $\arg^* z = 2\pi + \arg z$, якщо $\mathrm{Im}\, z < 0$;

2) $\rho(\mathrm{Arg}\, z, \mathrm{Arg}\, w)$ задовольняє властивості 1) — 4) метрики, якщо

$$\rho(\mathrm{Arg}\, z, \mathrm{Arg}\, w) = \min\left\{|\arg z - \arg w|, \left|\arg^* z - \arg^* w\right|\right\},$$

тому $(\mathrm{ARG}, \rho(\mathrm{Arg}\, z, \mathrm{Arg}\, w))$ — метричний простір.

Зразки розв'язування задач

4. 2) Дана відстань не задає метрику на множині $\mathbf{R}$, оскільки не виконується аксіома 2) метрики. Справді,

$$|\sin(x - y)| = 0 \Leftrightarrow \sin(x - y) = 0 \Leftrightarrow x - y = \pi k \ (k \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow x = y + \pi k.$$

4) Оскільки $1 + |x - y| \geq 1 \ \forall x, y \in \mathbf{R}$, то $\ln(1 + |x - y|) \geq \ln 1 = 0$, тому ρ задовольняє властивість 1) метрики. Аналогічно показуємо, що ρ задовольняє властивості 2) і 3). Для доведення нерівності трикутника 4) візьмемо довільні точки $x, y, z \in \mathbf{R}$. Маємо

$$\rho(x, y) = \ln(1 + |x - y|) = \ln(1 + |(x - z) + (z - y)|) \leq \ln(1 + |x - z| + |z - y|),$$

а $\rho(x, z) + \rho(z, y) = \ln(1 + |x - z|) + \ln(1 + |z - y|) = \ln(1 + |x - z|)(1 + |z - y|) = \ln(1 + |x - z| + |z - y| + |x - z|\,|z - y|) \geq \ln(1 + |x - z| + |z - y|) \geq \rho(x, y)$.

Отже, (M, ρ) є метричним простором.

6) Неважко помітити, що відстань ρ задовольняє умови 1) — 3). Разом з тим для $x = 1$, $y = 3$ і $z = 2$ маємо $\rho(x, y) = (1-3)^2 = 4$, $\rho(x, z) = (1-2)^2 = 1$, $\rho(z, y) = 1$, тому $\rho(x, y) > \rho(x, z) + \rho(z, y)$, тобто не виконується умова 4). Отже, (M, ρ) не є метричним простором.

9. 1) Перевіримо виконання аксіом метрики для заданої функції ρ:

з властивостей модуля дістаємо, що $\rho(x, y) \geq 0$, тобто перша аксіома виконується;

якщо $x = y$, то $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, тобто $\rho(x, y) = 0$. Навпаки, якщо $\rho(x, y) = 0$, тобто $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0$, то $|x_1 - y_1| = 0$ і $|x_2 - y_2| = 0 \Rightarrow x_1 = y_1$ і $x_2 = y_2 \Rightarrow x = y$. Отже, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

$\rho(y, x) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = \rho(x, y)$, тобто виконується третя аксіома метрики;

$$\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + |x_2 - z_2 + z_2 - y_2| \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| = (|x_1 - z_1| + |x_2 - z_2|) + (|z_1 - y_1| + |z_2 - y_2|) = \rho(x, z) + \rho(z, y),$$

тобто виконується четверта аксіома метрики.

Оскільки всі аксіоми виконуються, то функція $\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ задає метрику на множині $\mathbf{R}^2$.

13. 3) Зрозуміло, що для будь-яких функцій $x = x(t)$ і $y = y(t)$, неперервних на відрізку $[a; b]$, існує відстань $\rho(x(t), y(t)) = \sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2\, dt}$, причому $\rho(x, y) \geq 0$ і $\rho(x, y) =$

$= \rho(y, x)$ $\forall x = x(t), y = y(t)$. Отже, $\rho(x, y)$ задовольняє властивості 1) і 3). Якщо $x(t) = y(t)$ $\forall t \in [a; b]$, то $\rho(x(t), y(t)) = 0$. Припустимо тепер, що $\rho(x(t), y(t)) = 0$ і покажемо, що $x(t) = y(t)$ $\forall t \in [a; b]$. Нехай ця умова не виконується, тобто існує точка $t_0 \in [a; b]$ така, що $x(t_0) \neq y(t_0)$. Тоді $\alpha = (x(t_0) - y(t_0))^2 > 0$. Оскільки функція $z(t) = (x(t) - y(t))^2$ неперервна в точці t_0, то існує такий окіл точки t_0, що значення $z(t) = (x(t) - y(t))^2$ досить близькі до $z(t_0) = \alpha$, а отже, $z(t) > \frac{\alpha}{2}$, якщо $t \in O(t_0) \cap [a; b]$. Припустимо тепер, що $O(t_0) \cap [a; b] = (a_1; b_1) \subset [a; b]$. Тоді за адитивною властивістю інтеграла маємо

$$\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt = \int_a^{a_1} (x(t) - y(t))^2 dt + \int_{a_1}^{b_1} (x(t) - y(t))^2 dt +$$

$$+ \int_{b_1}^{b} (x(t) - y(t))^2 dt \geq \int_{a_1}^{b_1} (x(t) - y(t))^2 dt \geq \alpha(b_1 - a_1) > 0,$$

що суперечить умові $\sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt} = 0$. Отже, $\rho(x(t), y(t))$ задовольняє також властивість 2).

Для доведення нерівності трикутника розглянемо (T)-розбиття відрізка $[a; b]$ точками t_k, $k \in \overline{0, n}$. Зафіксуємо точки $t_k^* \in [t_k; t_{k+1}]$ $\forall k \in \overline{0, n-1}$ і утворимо інтегральні суми для інтегралів $\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt$, $\int_a^b (x(t) - z(t))^2 dt$ і $\int_a^b (z(t) - y(t))^2 dt$. Враховуючи нерівність трикутника для простору $\mathbf{R}^n$, маємо

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \left(x(t_k^*) - y(t_k^*)\right)^2 \Delta t_k} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \left(x(t_k^*) - z(t_k^*)\right)^2 \Delta t_k} + \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \left(z(t_k^*) - y(t_k^*)\right)^2 \Delta t_k},$$

звідки при $\lambda(T) \to 0$ дістаємо нерівність трикутника для $\rho(x(t), y(t))$. Отже, множина функцій, неперервних на відрізку $[a; b]$, з відстанню

$$\rho(x(t), y(t)) = \sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt}$$

є метричним простором.

16. 1) Для відшукання відстані між заданими точками у просторі $C\,[a; b]$ скористаємося формулою (2), яка у даному випадку набирає вигляду

$$\rho(x, y) = \max_{[-1; 4]} \left| t^2 - 4t + 2 \right|.$$

Розглянемо два способи визначення відстані $\rho(x(t), y(t))$.

1-й спосіб. Нехай $\varphi(t) = t^2 - 4t + 2$. Знайдемо найбільше і найменше значення цієї функції на відрізку $[-1; 4]$. Для цього треба обчислити значення функції φ в її критичних точках з цього відрізка (якщо вони існують) та на кінцях відрізка. Маємо

$$\varphi'(t) = 2t - 4,\ 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2;\ \varphi(2) = -2,\ \varphi(-1) = 7,\ \varphi(4) = 2.$$

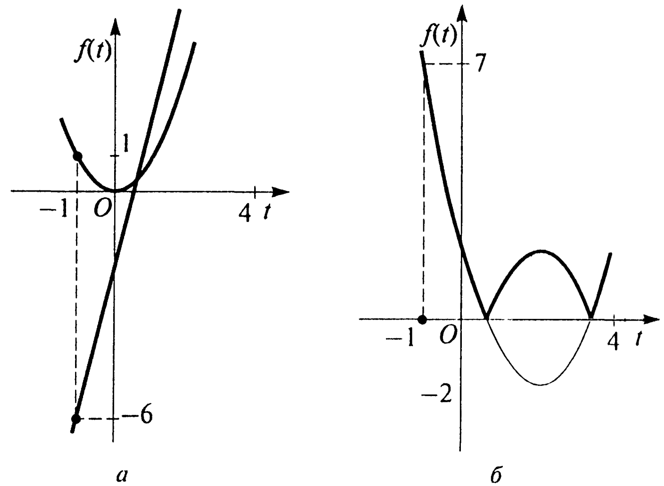


Рис. 1

Серед чисел $|\varphi(-1)|$, $|\varphi(2)|$ і $|\varphi(4)|$ виберемо найбільше, тобто $\max\{7, 2\} = 7$. Отже, $\rho\left(t^2, 4t-2\right) = 7$ (рис. 1, *а*).

2-й спосіб. Побудуємо графік функції $|\varphi(t)| = \left|t^2 - 4t + 2\right|$ на відрізку $[-1; 4]$ (рис. 1, *б*). Помічаємо, що найбільшого значення функція $|\varphi|$ набуває в точці $t = -1$, і воно дорівнює 7. Це і є відстань між функціями $x(t) = t^2$ і $y(t) = 4t - 2$ у просторі $C[-1; 4]$.

17. 1) Розглянемо функції $x(t) = t^2$ і $y(t) = 2t^2 + 4$, $t \in [0; 2]$ (див. вправу 16.2)). Неважко перевірити, що $\rho(x(t), y(t)) = \max\limits_{[0;2]}\left|t^2 - 2t^2 - 4\right| = 8$. Покладаючи тепер $f_1(t) = \frac{1}{8}x(t)$ і $f_2(t) = \frac{1}{8}y(t)$, дістаємо

$$\rho(f_1(t), f_2(t)) = \max_{[0;2]}\left|\frac{1}{8}x(t) - \frac{1}{8}y(t)\right| = \frac{1}{8}\cdot 8 = 1.$$

19. 1) Згідно з означенням простору l^2 (див. формулу (4)) треба перевірити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Оскільки цей ряд є збіжним, то задана точка $x = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$ належить простору l^2.

§ 13.2. Збіжні послідовності у метричному просторі

Послідовністю у метричному просторі (M, ρ) називають будь-яке відображення $f: \mathbf{N} \to M$ множини $\mathbf{N}$ натуральних чисел у множину M. При цьому послідовність позначають (f_n) або (x_n), де $f_n = f(n) = x_n$ — n-й член послідовності.

Послідовність (x_n) називають *збіжною* у метричному просторі (M, ρ), якщо $\exists x \in M : \rho(x_n, x) \to 0,\ n \to \infty$. При цьому x називають *границею послідовності* (x_n) у метричному просторі (M, ρ) і записують $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ або $x_n \to x$, $n \to \infty$, і кажуть, що (x_n) збігається до x у просторі (M, ρ).

Критерій збіжності у деяких метричних просторах. Послідовність (x_n) збіжна до x у просторі:

а) ізольованих точок тоді й тільки тоді, коли $\exists n_0 :\ x_n = x\ \forall n \ge n_0$, тобто (x_n) — стаціонарна послідовність;

б) $C\,[a; b]$ тоді й тільки тоді, коли $x_n = x_n(t) \rightrightarrows x(t) = x,\ n \to \infty$ (рівномірна збіжність на відрізку $[a; b]$);

в) $\mathbf{R}^m$ тоді й тільки тоді, коли $x_k^{(n)} \to x_k,\ n \to \infty,\ \forall k \in \overline{1, m}$, де $x_n = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\right)$, а $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ (покоординатна збіжність);

г) $\mathbf{C}$ комплексних чисел тоді й тільки тоді, коли $x_n = \operatorname{Re} z_n \to x = \operatorname{Re} z$, $n \to \infty$, і $y_n = \operatorname{Im} z_n \to y = \operatorname{Im} z,\ n \to \infty$.

Послідовність (x_n) називають *обмеженою* у метричному просторі (M, ρ), якщо $\forall x \in M\ \ \exists H > 0 :\ \rho(x_n, x) \le H\ \ \forall n \in \mathbf{N}$.

Основні властивості границь

1. *Єдиність границі*: кожна послідовність (x_n) має у просторі (M, ρ) не більше однієї границі.

2. *Границя підпослідовності*: якщо $x_n \to x,\ n \to \infty$, то $\forall (n_k) \uparrow \infty$, $n_k \in \mathbf{N},\ x_{n_k} \to x,\ k \to \infty$.

3. *Неперервність відстані*: якщо $x_n \to x$ і $y_n \to y,\ n \to \infty$, у метричному просторі (M, ρ), то $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y),\ n \to \infty$.

4. *Обмеженість збіжної послідовності*: якщо послідовність (x_n) збіжна у просторі (M, ρ), то вона й обмежена в ньому.

5. У просторі $\mathbf{C}$ комплексних чисел мають місце властивості про границю суми, різниці, добутку і частки, а також критерій Коші збіжності послідовності.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) $x_n \to x,\ n \to \infty$, у метричному просторі $(M, \rho) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon) :\ n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x_n, x) < \varepsilon$;

2) $x_n \to x,\ n \to \infty,$ у метричному просторі $(M, \rho) \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon):\ n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x_n, x) < \varepsilon$;

3) якщо послідовність (x_n) збіжна у просторі (M, ρ), то вона збіжна і в будь-якому підпросторі простору (M, ρ);

4) послідовність (x_n) обмежена в $(M, \rho) \Leftrightarrow\ \exists x \in M$ і $\exists H > 0:\ \rho(x_n, x) \leq H\ \ \forall n \in \mathbf{N}$.

2•. Чи існує метричний простір, в якому кожна послідовність є:

1) обмеженою; 2) збіжною?

3. Чи є в довільному метричному просторі кожна збіжна послідовність стаціонарною, і навпаки?

4. Сформулювати означення границі послідовності у метричному просторі мовою «ε-n_0» (див. вправу 1.2)) у випадку просторів $C[a; b]$, $\mathbf{R}^m$, $\mathbf{C}$.

Користуючись означенням границі послідовності у просторі $\mathbf{C}$, довести, що послідовність (z_n) має границею число a, якщо:

1) $z_n = \dfrac{2n+5i}{n+3},\ a = 2$; 2) $z_n = \dfrac{1+(3i)^n}{(3i)^n},\ a = 1$;

3) $z_n = \dfrac{3n^2+i}{in^2+1},\ a = -3i$; 4) $z_n = \dfrac{2}{n+i^n},\ a = 0$;

5) $z_n = \dfrac{4in+1}{5+3n},\ a = \dfrac{4}{3}i$; 6) $z_n = \dfrac{2n^3 - in^3 + n^2}{n^3+i},\ a = 2 - i$.

5. Частковою границею послідовності (x_n) у метричному просторі (M, ρ) називають такий елемент $x \in M$, для якого $\exists n_k \uparrow:\ x_{n_k} \to x,\ k \to \infty$. Чи можна стверджувати, що часткова границя послідовності (x_n) є границею цієї послідовності?

6. Для даних послідовностей з простору $\mathbf{C}$ знайти їхні часткові границі та перевірити збіжність і обмеженість цих послідовностей:

1) $z_n = (-1)^n + \dfrac{i}{n}$; 2) $z_n = i^n$; 3) $z_n = \dfrac{2+i}{n}$; 4)• $z_n = i^{2n}\dfrac{n+1}{n}$;

5) $z_n = i^n \dfrac{n^2+1}{n^2+2}$; 6) $z_n = n^2\left(1 - \cos\dfrac{1}{n}\right) + i\dfrac{(-1)^n}{n}$;

7) $z_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n + i\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$; 8) $z_n = n(\ln n - \ln(n+1)) + i\dfrac{n^2-1}{n^2+1}$;

9) $z_n = \left(1 + (-1)^n\right)^n + 2i$; 10) $z_n = n \arg\left(\cos\dfrac{1}{n} + i \sin\dfrac{1}{n}\right)$.

7. Перевірити, чи правильні дані твердження (виконати усно):

1) кожна послідовність у метричному просторі (M, ρ) має в ньому єдину границю;

2) послідовність (x_n) збіжна у просторі (M, ρ) тоді й тільки тоді, коли вона має в ньому єдину часткову границю;

3) якщо послідовність (x_n) обмежена у просторі (M, ρ), то вона є збіжною у цьому просторі;

4) якщо $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y), n \to \infty$, то $x_n \to x$ і $y_n \to y, n \to \infty$, у метричному просторі (M, ρ);

5) якщо у просторі **C** послідовності $\left(z_n^{(1)}\right)$ і $\left(z_n^{(2)}\right)$ такі, що послідовності $\left(z_n^{(1)} + z_n^{(2)}\right)$ і $\left(z_n^{(1)} z_n^{(2)}\right)$ є збіжними, то збіжними є послідовності $\left(z_n^{(1)}\right)$ і $\left(z_n^{(2)}\right)$.

8. З'ясувати, чи є збіжними дані послідовності у відповідних просторах:

1) $x_n = \left(\frac{1}{n^2}, (-1)^n\right), n \in \mathbf{N}$, в $\mathbf{R}^2$;

2)• $x_n = \left(\frac{3^n - 1}{3^n + 1}, \frac{\sqrt{1+n} - 1}{n}\right), n \in \mathbf{N}$, в $\mathbf{R}^2$;

3) $x_n = \left(\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n^2}, \sin\frac{1}{n}\right), n \in \mathbf{N}$, в $\mathbf{R}^3$;

4) $x_n = \left(\sin\frac{n\pi}{2}, n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \frac{\cos n}{n}\right), n \in \mathbf{N}$, в $\mathbf{R}^3$;

5) $x_n = t^n, n \in \mathbf{N}$, у просторі з метрикою $\rho(x(t), y(t)) = \int\limits_0^1 |x(t) - y(t)|\,dt$.

9. Чи є збіжними у просторі $C\,[0; 1]$ дані послідовності:

1) $x_n(t) = t^n$;

2) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$;

3)• $x_n(t) = t^n(1-t)$;

4) $x_n(t) = t^2 + \frac{t}{n}$;

5) $x_n(t) = \sin^{2n} \pi t$;

6) $x_n(t) = \cos^2 \pi n t$;

7) $x_n(t) = (1-t)^{2n}$;

8) $x_n(t) = \begin{cases} nt, & 0 \le t \le \frac{1}{n}, \\ 2 - nt, & \frac{1}{n} < t < \frac{2}{n}, \\ 0, & t \ge \frac{2}{n}? \end{cases}$

10. Довести, що коли $z = x + iy \in \mathbf{C}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x(\cos y + i\sin y).$$

11. Відомо, що $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ у просторі **C**. Знайти

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n}.$$

12. Кажуть, що послідовність (x_n) у метричному просторі (M, ρ) має нескінченну границю і записують $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, якщо $\exists x \in M: \ \rho(x_n, x) \to +\infty$, $n \to \infty$. При цьому ∞ називають нескінченно віддаленою точкою метричного простору. Чи може така послідовність бути обмеженою у просторі (M, ρ)?

13. Серед даних послідовностей знайти ті, що мають нескінченну границю у просторі **C**:

1) $z_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} + i\dfrac{n^2}{n+1}$; 2) $z_n = i\dfrac{3^n}{n\cdot 2^n}$;

3) $z_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - i\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$; 4) $z_n = \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^3} + i\ln\dfrac{n+1}{n}$;

5) $z_n = \dfrac{n^n}{n!} + \dfrac{i}{n}$; 6) $z_n = (1+i)^n$;

7) $z_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}{n} + in^2\dfrac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1+2+\ldots+n}$;

8) $z_n = \left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)n^3 + i^n$.

14. Нехай на множині M визначено дві метрики ρ_1 і ρ_2. Ці метрики називають еквівалентними, якщо $\rho_1(x_n, a) \to 0 \Leftrightarrow \rho_2(x_n, a) \to 0$, $n \to \infty$, $\forall x_n \in M$. Чи є еквівалентними метрики:

1) простору $\mathbf{R}^2$ і простору із вправи 10 § 13.1;
2) розглянуті у вправі 13 § 13.1;
3) введені у вправі 24 § 13.1?

15•. Чи є збіжність у просторах m і l^2 рівносильна покоординатній збіжності?

16. Якщо $z_n \to z_0 \neq 0$, $n \to \infty$, у просторі **C**, то $\operatorname{Arg} z_n \to \operatorname{Arg} z_0$ у просторі ARG (див. вправу 25 § 13.1). Чи правильне обернене твердження?

Зразки розв'язування задач

2. 1) Розглянемо простір (M, ρ) ізольованих точок (див. § 13.1). Для будь-якої послідовності (x_n) точок з цього простору маємо $\rho(x_n, a) \le 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$, де a — довільна фіксована точка цього простору. Отже, у даному просторі будь-яка послідовність є обмеженою.

2) Якщо простір складається лише з однієї точки, то в ньому кожна послідовність є збіжною.

6. 4) Враховуючи, що

$$i^{2n} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } n \text{ парне}, \\ -1, \text{ якщо } n \text{ непарне}, \end{cases} \quad \text{а} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

дістаємо дві часткові границі $c_1 = -1$ і $c_2 = 1$ для заданої послідовності. Це означає, що вона розбіжна. Оскільки $|z_n| = \left|i^{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| \le 2$, то задана послідовність є обмеженою.

8. 2) Спочатку дослідимо на збіжність числові послідовності, утворені з координат точок даної послідовності. Неважко помітити, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 1}{3^n + 1} = 1 \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+n} - 1}{n} = 0.$$

Оскільки збіжність у просторі $\mathbf{R}^2$ еквівалентна покоординатній збіжності, то задана послідовність збігається у просторі $\mathbf{R}^2$ до точки $x = (1, 0)$.

9. 3) Знайдемо спочатку границю послідовності $(x_n(t))$ на відрізку [0; 1]. Неважко переконатися, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = 0$. Отже, якщо послідовність збігається, то її гранична функція $x(t) = 0$. У просторі $C[0; 1]$ збіжність за метрикою означає, що $\rho(x_n, x) = \max\limits_{[0;1]}\left|t^n - t^{n+1}\right| \to 0,\ n \to \infty$. Позначимо $f(t) = t^n - t^{n+1}$ і знайдемо найбільше значення функції f на відрізку [0; 1]. Маємо $f'(t) = nt^{n-1} - (n+1)t^n$, $f'(t) = 0$, якщо $t = 0$ і $t = \frac{n}{n+1}$. Обидва ці значення належать відрізку [0; 1]. Далі знаходимо $f(0) = 0$ і $f\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} = \frac{1}{e}\cdot 0 = 0$, то це й означає, що задана послідовність є збіжною у просторі $C[0; 1]$.

15. Простори m і l^2 введено у § 13.1 (формули (5) і (4)). Нехай $x = (x_n) \in m$, $x^{(k)} = \left(x_n^{(k)}\right) \in m$, $k = 1, 2, \ldots$, і $x^{(k)} \to x$, $k \to \infty$, тобто послідовність $\left(x^{(k)}\right)$ є збіжною до x у просторі m. Це означає, що $\rho\left(x^{(k)}, x\right) = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\left|x_n^{(k)} - x_n\right| \to 0,\ k \to \infty, \Rightarrow \left|x_{n_0}^{(k)} - x_{n_0}\right| \to 0$, $k \to \infty$, тому $x_{n_0}^{(k)} \to x_{n_0}$, $k \to \infty$, $\forall n_0 \in \mathbf{N}$. Таким чином, покоординатна збіжність випливає зі збіжності у просторі m.

Розглянемо тепер послідовність $\left(x^{(k)}\right)$, де

$$x^{(1)} = (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots),$$
$$x^{(2)} = (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots),$$
$$x^{(3)} = (0, 0, 1, \ldots, 0, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

тобто $x^{(k)} = \left(x_n^{(k)}\right)$, де $x_n^{(k)} = 1$, якщо $n = k$, і $x_m^{(k)} = 0$, якщо $n \ne k$. Зрозуміло, що $x^{(k)} \in m \quad \forall k$ і $x_n^{(k)} \to 0$, $k \to \infty$, $\forall n \in \mathbf{N}$, тобто $\left(x^{(k)}\right)$ покоординатно збігається до

$x=(x_n)$, де $x_n=0$ $\forall n\in\mathbf{N}$. Якщо припустити, що $\left(x^{(k)}\right)$ є збіжною послідовністю у просторі m, то за доведеним вище $\rho\left(x^{(k)},x\right)\to 0,\ k\to\infty$, де $x=(x_n)$, а $x_n=0$ $\forall n\in\mathbf{N}$. Однак $\rho\left(x^{(k)},x\right)=\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\left|x_n^{(k)}-x_n\right|=1$ $\forall k$ і, отже, $\rho\left(x^{(k)},x\right)\not\to 0,\ k\to\infty$. Дістали суперечність, яка показує, що з покоординатної збіжності не випливає збіжність у просторі m.

Простір l^2 розглянути самостійно.

§ 13.3. Класифікація точок метричного простору стосовно даної множини

Кулею, або *відкритою кулею*, у метричному просторі (M,ρ) називають множину $S(a,r):=\{x\in M:\ \rho(a,x)<r\}$, де $a\in M$ (фіксована точка) — центр кулі і $r>0$ (фіксоване число) — радіус кулі. *Замкненою кулею* у просторі (M,ρ) називають множину $\overline{S}(a,r):=\{x\in M:$ $\rho(a,x)\le r\}$.

Околом, або ε-*околом*, точки a у метричному просторі (M,ρ) називають кулю з центром у точці a і радіусом ε. Позначатимемо ε-окіл точки a через $O_\varepsilon(a)$ або $O(a)$. *Проколеним* ε-*околом* точки a назвемо множину $O_\varepsilon^*(a):=O_\varepsilon(a)\setminus\{a\}$, яку позначатимемо також $O^*(a)$.

Нехай $a\in(M,\rho)$ і $E\subset(M,\rho)$. Тоді точку a називають:

1) *граничною точкою* множини E, якщо $O_\varepsilon^*(a)\cap E\ne\varnothing$ $\forall\varepsilon>0$;

2) *внутрішньою точкою* множини E, якщо $\exists\varepsilon>0:\ O_\varepsilon(a)\subset E$;

3) *зовнішньою точкою* множини E, якщо $\exists\varepsilon>0:\ O_\varepsilon(a)\cap E=\varnothing$;

4) *межовою точкою* множини E, якщо $O_\varepsilon(a)\cap E\ne\varnothing$ і $O_\varepsilon(a)\cap(M\setminus E)\ne$ $\ne\varnothing$ $\forall\varepsilon>0$;

5) *ізольованою точкою* множини E, якщо $\exists\varepsilon>0:\ O_\varepsilon(a)\cap E=\{a\}$;

6) *точкою дотику* множини E, якщо $a\in E\cup E'$.

Множину $E':=\{x:\ x$ — гранична точка множини $E\}$ називають *похідною множиною* множини E, $\overline{E}:=E'\cup E$ — *замиканням множини* E, $\partial E:=\{x:$ x — межова точка множини $E\}$ — *межею множини* E, $E^0:=\{x:x$ — внутрішня точка множини $E\}$ — *внутрішністю множини* E, а $M\setminus\overline{E}$ — *зовнішністю множини* E.

Критерій граничної точки. Точка $a\in(M,\rho)$ є граничною точкою множини $E\subset M$ тоді й тільки тоді, коли $\exists(x_n):\ x_n\in E,\ x_n\ne a\ \forall n$ і $x_n\to a,\ n\to\infty$.

Теореми (Больцано — Вейєрштрасса для простору $\mathbf{R}^n$).

1) *Якщо послідовність* (x_m) *обмежена в* $\mathbf{R}^n$, *то існує підпослідовність* (x_{m_k}), *збіжна в* $\mathbf{R}^n$.

2) *Якщо множина* E *нескінченна і обмежена в* $\mathbf{R}^n$, *то* $E' \neq \varnothing$.

Вправи

1. 1) Визначити геометричний зміст кулі, замкненої кулі, околу точки та проколеного околу точки у просторах $\mathbf{R}^n$, $n \in \overline{1,3}$, $\mathbf{C}$, $C[a;b]$ та у просторі ізольованих точок.

2) У метричному просторі $C[0;1]$ описати такі множини:

а) $S\left(x_1, \frac{1}{2}\right)$; б) $\overline{S}(x_2, 1)$; в) $S(x_3, 2)$; г)• $\overline{S}\left(x_4, \frac{1}{4}\right)$;

д) $\overline{S}\left(x_1, \frac{1}{2}\right) \cap \overline{S}\left(x_2, \frac{1}{2}\right)$, де $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = 0$, $x_4(t) = t - 1$.

3) Нехай $x_1(t) = t$, $x_2(t) = 1 - t$, $x_3(t) = \sin \pi t$, $x_4(t) = \sin \pi t + \cos \pi t$, $x_5(t) = 0$ — функції з простору $C[0;1]$. Які включення є правильними:

а) $x_1 \in \overline{S}\left(x_2, \frac{1}{2}\right)$; б) $x_2 \in S(x_5, 3)$; в) $x_3 \in S(x_4, 1)$;

г)• $x_1 \in \overline{S}\left(x_3, \frac{1}{2}\right)$; д) $x_2 \in S\left(x_1, \frac{1}{4}\right)$; е) $x_4 \in \overline{S}(x_5, 1)$?

2. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) у довільному метричному просторі будь-яка куля не може бути замкненою;

2)• куля більшого радіуса не може бути підмножиною кулі меншого радіуса у будь-якому просторі (M, ρ);

3) у просторі ізольованих точок куля може збігатися з усім простором;

4) у просторі $\mathbf{R}^n$ замкнена куля не може бути кулею;

5) проколений окіл точки не може бути порожньою множиною у будь-якому просторі (M, ρ)?

3. Навести приклади множин:

1) які мають граничні точки; 2) які не мають їх;

3) граничні точки яких належать цим множинам;

4) граничні точки яких не належать їм.

4. Для даної множини E з простору $\mathbf{R}^1$ знайти множини E', E^0, ∂E, $\overline{E}$, $\mathbf{R}^1 \setminus \overline{E}$ та множину її ізольованих точок:

1) $E = (a, b]$; 2) $E = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\}$; 3) $E = \mathbf{N}$;

4) $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{k+\frac{1}{n}\right\}$; 5) $E=\mathbf{Q}$; 6) $E=\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$.

5. Для множини E з простору $\mathbf{C}$ виконати ті самі завдання, що й у вправі 4:

1) $E=\{z\in\mathbf{C}:\ |z|\le 2\}$; 2) $E=\{z\in\mathbf{C}:\ |z+i|<1\}$;

3) $E=\{z\in\mathbf{C}:\ |z-1|+|z+1|=1\}$; 4) $E=\left\{z\in\mathbf{C}:\ \frac{|z|}{\operatorname{Re}z}<2\right\}$;

5) $E=\left\{z\in\mathbf{C}:\ \arg(z-z_0)<\frac{\pi}{4}\right\}$; 6) $E=\left\{z\in\mathbf{C}:\ \frac{\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z}{|z|^2}<\frac{1}{2}\right\}$.

6. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) $x_0\in E'\Leftrightarrow\ \exists\varepsilon>0:\ O_\varepsilon(x_0)\bigcap E$ — нескінченна множина;

2) $(A\bigcup B)'=A'\bigcup B'$; 3) $(A\bigcap B)'=A'\bigcap B'$;

4) $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$; 5) $\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$?

7. Вказати приклади метричних просторів, у яких:

1) кожна внутрішня точка множини E є граничною точкою E;

2) не кожна внутрішня точка множини E є граничною точкою E.

8. Чи правильні рівності:

1) $(A\bigcup B)^0=A^0\bigcup B^0$; 2)• $(A\bigcap B)^0=A^0\bigcap B^0$?

9. Чи правильні дані твердження:

1) зовнішність множини $E\subset(M,\rho)$ є порожньою тоді й тільки тоді, коли $E=M$;

2) зовнішня точка множини E не може бути граничною точкою E;

3) зовнішність множини $E\subset(M,\rho)$ дорівнює $M\setminus E$.

10. Довести, що кожна точка множини $E\subset(M,\rho)$ є або граничною точкою E, або ізольованою точкою E.

11. Довести, що коли $E\subset\mathbf{R}^n$ і кожна точка $\overline{E}$ ізольована, то $E=\partial E$.

12. Чи можна у попередньому твердженні замінити $\mathbf{R}^n$ на довільний простір (M,ρ)?

13. Чи може межа множини $E\subset(M,\rho)$ збігатися з M?

14. Довести, що $\partial E=E/E^0$.

15•. Вказати метричний простір, у якому будь-яка множина не має межі.

16. Чи існує метричний простір, у якому кожна нескінченна обмежена множина не має граничних точок?

17. Довести, що x_0 — точка дотику множини $E\subset(M,\rho)\Leftrightarrow\exists(x_n)$: $(x_n\in E$ і $x_n\to x_0,\ n\to\infty)$.

18. Довести, що у просторі ізольованих точок кожна послідовність обмежена. Які послідовності не мають у цьому просторі збіжних підпослідовностей?

Зразки розв'язування задач

1. 2), г) Згідно з означенням замкненої кулі у просторі $C[0;\,1]$ з центром у точці $x_4 = t-1$ і радіусом $\frac{1}{4}$ маємо

$$\bar{S}\left(t-1, \frac{1}{4}\right) = \left\{x(t) \in C[0;1] : \rho\left(t-1, x(t)\right) \le \frac{1}{4}\right\},$$

де $\rho\left(t-1, x(t)\right) = \max\limits_{[0;1]} |t-1, x(t)|$. Отже, заданою кулею є множина усіх неперервних функцій на відрізку $[0;\,1]$, для яких $\max\limits_{[0;1]} |t-1, x(t)| \le \frac{1}{4}$, тобто $t-1-\frac{1}{4} \le x(t) \le t-1+\frac{1}{4}$, $t \in [0;\,1]$. Останню нерівність задовольняють ті функції, графіки яких обмежені прямими $x(t) = t-\frac{5}{4}$ і $x(t) = t-\frac{3}{4}$, $0 \le t \le 1$. Користуючись геометричним змістом відстані, робимо висновок, що кулі $\bar{S}\left(x_4, \frac{1}{4}\right)$ належать ті функції $x(t) \in C[0;\,1]$, максимальна відстань ординат яких відносно ординати центра $x_4 = t-1$ не більша за $\frac{1}{4}$ (рис. 2).

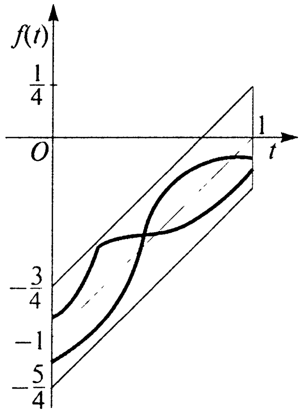


Рис. 2

3), г) Враховуючи попередні міркування, маємо

$$\bar{S}\left(x_3, \frac{1}{2}\right) = \bar{S}\left(\sin \pi t, \frac{1}{2}\right) = \left\{x(t) \in C[0;1] :\ \rho\left(\sin \pi t, x(t)\right) \le \frac{1}{2}\right\}.$$

Точка $x_1(t) = t \notin \bar{S}\left(\sin \pi t, \frac{1}{2}\right)$, оскільки $\rho\left(\sin \pi t, t\right) = 1 > \frac{1}{2}$. Отже, дане в умові задачі включення не є правильним.

2. 2) Розглянемо метричний простір (M, ρ), де $M = [0;\,1]$, а $\rho(x, y) = |x - y|$. Тоді $S\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) = [0;1)$, а $S\left(0, \frac{3}{4}\right) = \left[0, \frac{3}{4}\right) \subset S\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$. Отже, куля з більшим радіусом може бути підмножиною (власною) кулі з меншим радіусом.

Перевірити, чи можливо таке у просторі $\mathbf{R}^1$.

8. 2) Якщо $x \in (A \cap B)^0$, то $\exists\, O(x) \subset A \cap B \Rightarrow O(x) \subset A$ і $O(x) \subset B$, тобто $x \in A^0$ і $x \in B^0$. Тому $(A \cap B)^0 \subset A^0 \cap B^0$. Навпаки, якщо $x \in A^0 \cap B^0$, то $x \in A^0$ і $x \in B^0 \Rightarrow$ $\Rightarrow O_{r_1}(x_0) \subset A$ і $O_{r_2}(x_0) \subset B$. Позначимо $r = \min\{r_1, r_2\}$. Тоді $O_r(x_0) \subset A$ і $O_r(x_0) \subset B$, тому $O_r(x_0) \subset A \cap B$, тобто $x_0 \in (A \cap B)^0$. Отже, $A^0 \cap B^0 \subset (A \cap B)^0$ і $(A \cap B)^0 \subset A^0 \cap B^0$, тобто $(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$.

15. Нехай E — довільна множина з простору ізольованих точок. Тоді якщо $x_0 \in E$ і $0 < r < 1$, то $O_r(x_0) = \{x_0\} \subset E$, тому x_0 не може бути межовою точкою множини E. Якщо $x_0 \notin E$, то $O_r(x_0) = \{x_0\}$, тому $O_r(x_0) \cap E = \varnothing$ при $r < 1$. Отже, і в цьому випадку x_0 не може бути граничною точкою множини E. Тому $\partial E = \varnothing$ для будь-якої множини E з простору ізольованих точок.

§ 13.4. Відкриті, замкнені і досконалі множини у метричних просторах

Множину $A \subset (M, \rho)$ називають: а) *замкненою*, якщо $A' \subset A$; б) *відкритою*, якщо $A = A^0$; в) *досконалою*, якщо $A = A'$.

Критерій замкненості. Множина F є замкненою у метричному просторі (M, ρ) тоді й тільки тоді, коли для будь-якої послідовності (x_n) такої, що $x_n \in F$ $\forall n$ і (x_n) збіжна в (M, ρ), маємо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in F$.

Зв'язок між відкритими і замкненими множинами. Множина G є відкритою (замкненою) у метричному просторі (M, ρ) тоді й тільки тоді, коли $C_M\, G = F$ — замкнена (відкрита) в (M, ρ).

Зв'язок між досконалими і замкненими множинами. Множина P є досконалою у метричному просторі (M, ρ) тоді й тільки тоді, коли P замкнена і не має ізольованих точок.

Об'єднання і переріз замкнених та відкритих множин. Якщо F_k — замкнені множини $\forall k$, то $\bigcap\limits_k F_k$ і $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ $\forall n \in \mathbf{N}$ — замкнені, а $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ може не бути замкненою множиною. Якщо G_k — відкриті множини $\forall k$, то $\bigcup\limits_k G_k$ і $\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$ $\forall n$ — відкриті множини, а $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$ може не бути відкритою множиною.

Структура лінійних відкритих, замкнених і досконалих множин. Нехай A — лінійна множина, тобто лежить у просторі $\mathbf{R}^1$. Ця множина є:

а) відкритою тоді й тільки тоді, коли $A = \bigcup\limits_{k\in K} (\alpha_k; \beta_k)$, де $K = \mathbf{N}$ або $K = \{1, \ldots, n\}$, а інтервали $(\alpha_k; \beta_k)$ попарно не перетинаються (їх називають *складовими інтервалами* множини A);

б) замкненою тоді й тільки тоді, коли $A = [a; b] \setminus \bigcup\limits_{k\in K} (\alpha_k; \beta_k)$, де $a = \inf A$, $b = \sup A$, $K = \mathbf{N}$ або $K = \{1, \ldots, n\}$, а інтервали $(\alpha_k; \beta_k)$ попарно не перетинаються. Ці інтервали називають *суміжними*, або *доповняльними*, *інтервалами* множини A, а відрізок $[a; b]$ — *найменшим відрізком*, що містить множину A;

в) досконалою тоді й тільки тоді, коли виконуються умови пункту б), причому інтервали $(\alpha_k; \beta_k)$ не мають спільних скінченних кінців ні один з одним, ні з відрізком $[a; b]$.

Нехай відрізок $[0; 1]$ поділено на три рівні відрізки і вилучено серединний інтервал. Кожний з двох відрізків, що залишилися, знову поділено на три рівні відрізки і вилучено серединні інтервали і т.д. Об'єднання вилучених інтервалів позначають G_0 і називають *відкритою множиною Кантора*, а множину $P_0 = [0; 1] \setminus G_0$ — *досконалою множиною Кантора*.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) множина F замкнена, якщо кожна її точка є граничною для F;

2) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

3) F — замкнена множина тоді й тільки тоді, коли $F = \overline{F}$;

4) кожний метричний простір і порожня множина є замкненими множинами;

5) якщо множина не є замкненою, то вона нескінченна.

2. Замінити у вправі 1 слово «замкнена» спочатку на слово «відкрита», а потім на слово «досконала» і виконати відповідні завдання.

3. Визначити, чи є множини $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ і $\mathbf{R}$ замкненими, відкритими або досконалими у просторі $\mathbf{R}^1$.

4. Відомо, що множина F замкнена у деякому підпросторі простору (M, ρ). Чи є вона такою самою і в просторі (M, ρ)?

5. Сформулювати та розв'язати задачу, аналогічну попередній для відкритих та досконалих множин.

6. Для довільної множини $A \subset (M, \rho)$ визначити, чи є замкненими, відкритими або досконалими множини A', $\overline{A}$, A^0, ∂A, зовнішність множини A та множина ізольованих точок множини A.

7•. Вказати метричний простір, у якому кожна множина є одночасно і замкненою, і відкритою.

8. Довести, що у просторі $\mathbf{R}^1$ множина A одночасно замкнена і відкрита тоді й тільки тоді, коли $A = \mathbf{R}$ або $A = \varnothing$.

9. Нехай функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, а $c \in \mathbf{R}$ — довільне фіксоване число. Довести, що множина $E_c = \{x \in (a; b) :\ f(x) > c\}$ відкрита в $\mathbf{R}^1$, а множина $\overline{E}_c = \{x \in [a; b] :\ f(x) \le c\}$ — замкнена в $\mathbf{R}^1$.

10. Чи буде твердження 9 правильним, коли знак «>» замінити на «<», а «≥» — на «≤»?

11. Який вигляд матимуть множини E_c і $\overline{E}_c$ для кожної з основних елементарних функцій та кожного $c \in \mathbf{R}$?

12. Нехай функція f строго монотонна на проміжку $\langle a; b \rangle$. Довести, що f неперервна на $\langle a; b \rangle$ тоді й тільки тоді, коли множина значень f є замкненою в $\mathbf{R}^1$.

13. Чи є твердження 12 правильним для монотонних функцій?

14. Відомо, що множини P_k досконалі у просторі (M, ρ). Що можна сказати про множини:

1) $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \ \ \forall n \in \mathbf{N}$; 2) $\bigcap\limits_{k=1}^{n} P_k \ \ \forall n \in \mathbf{N}$; 3) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$; 4) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} P_k$?

15•. Назвемо нескінченним трійковим дробом ряд виду $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}$, де $a_k = 0, 1, 2$, причому множина $\{k \in \mathbf{N} : a_k \neq 2\}$ — нескінченна. Довести, що кожне число з проміжку $[0; 1)$ можна записати у вигляді нескінченного трійкового дробу, причому єдиним способом.

16. Довести, що досконала множина Кантора P_0 містить усі числа, нескінченні трійкові дроби яких не містять цифру 1.

17. Чи належать множині Кантора P_0 числа:

1) $\frac{1}{4}$; 2)• $\frac{1}{13}$; 3) $\frac{2}{5}$; 4) $\frac{3}{7}$?

18. Довести, що будь-який відрізок $[a; b]$ не можна подати у вигляді об'єднання двох замкнених непорожніх множин, які не перетинаються.

19•. Чи можна інтервал $(a; b)$ записати у вигляді об'єднання двох відкритих непорожніх множин, які не перетинаються?

20. Довести, що кожна дуга неперервної кривої є замкненою множиною у просторі $\mathbf{R}^2$. Чи обов'язково вона є досконалою множиною?

21. Чи є досконалою множиною:

1) криволінійна трапеція у просторі $\mathbf{R}^2$;

2) криволінійний сектор у просторі $\mathbf{R}^3$;

3) тіло обертання у просторі $\mathbf{R}^3$;

4) поверхня обертання у просторі $\mathbf{R}^3$?

22. Довести, що коли множина E відкрита у підпросторі (M_1, ρ) простору (M, ρ), то існує множина G, відкрита у (M, ρ), і така, що $E = G \cap M_1$. Чи правильне обернене твердження?

23. Визначити, чи є твердження 22 правильним, якщо в ньому слово «відкрита» замінити на слово:

1) «замкнена»; 2)• «досконала».

24*. Точку $x_0 \in E \subset (M, \rho)$ називають *точкою конденсації множини* E, якщо $\forall O(x_0)$ переріз $O(x_0) \cap E$ є незчисленною множиною.

Довести такі твердження:

1) якщо K_E — множина точок конденсації множини $E \subset \mathbf{R}^1$, то $E \setminus K_E$ — не більше, ніж зчисленна множина;

2) якщо множина $E \subset \mathbf{R}^1$ не має точок конденсації, то вона не більше, ніж зчисленна (теорема Ліндельофа);

3) якщо $E \subset \mathbf{R}^1$ — незчисленна множина, то вона має принаймні одну точку конденсації $x_0 \in E$;

4) якщо $E \subset \mathbf{R}^1$ — незчисленна множина, то й $E \cap K_E$ — незчисленна множина;

5) якщо $E \subset \mathbf{R}^1$ — незчисленна множина, то множина K_E — досконала;

6) якщо $E \subset \mathbf{R}^1$ — замкнена незчисленна множина, то $E = K_E \cup (E \setminus K_E)$, де K_E — досконала, а $E \setminus K_E$ — не більше, ніж зчисленна множина (теорема Кантора — Бендіксона);

7) кожна досконала непорожня множина у просторі $\mathbf{R}^1$ є континуальною множиною;

8) кожна замкнена множина у просторі $\mathbf{R}^1$ є або зчисленною, або континуальною множиною.

Зразки розв'язування задач

7. Розглянемо метричний простір (M, ρ) ізольованих точок і довільну множину $E \subset M$. Тоді достатньо малий окіл довільної точки $x_0 \in M$ може містити хіба що одну точку з E (саму точку x_0), тому проколений окіл точки x_0 є порожньою множиною. Отже, x_0 не може бути граничною точкою множини E, тобто $E' = \varnothing \Rightarrow E' \subset E \Rightarrow E$ — замкнена множина. Разом з тим $O_\varepsilon(x_0) = \{x_0\} \subset E$, якщо $0 < \varepsilon < 1$, а x_0 — довільна точка з E, тобто x_0 — внутрішня точка E, тому E — відкрита множина. Таким чином, у просторі ізольованих точок будь-яка множина є і замкненою, і відкритою одночасно.

15. Візьмемо довільне $x_0 \in [0;1) = \left[\alpha_0^{(1)}; \alpha_3^{(1)}\right)$ і поділимо цей проміжок на три рівні частини точками $\alpha_1^{(1)} = \frac{1}{3}$, $\alpha_2^{(1)} = \frac{2}{3}$. Тоді x_0 належатиме одному і тільки одному з проміжків $\left[\alpha_0^{(1)}; \alpha_1^{(1)}\right)$, $\left[\alpha_1^{(1)}; \alpha_2^{(1)}\right)$ і $\left[\alpha_2^{(1)}; \alpha_3^{(1)}\right)$, тобто $\exists!\ i \in \{0, 1, 2\}$ таке, що $x_0 \in \left[\alpha_i^{(1)}; \alpha_{i+1}^{(1)}\right] = \left[\alpha_0^{(2)}; \alpha_3^{(2)}\right]$. Покладемо $a_1 = i$. Тоді

$$\frac{a_1}{3} \le x_0 < \frac{a_1}{3} + \frac{1}{3}.$$

Припустимо, що числа a_k для $1 \le k \le n$ визначено так, що

$$\alpha_0^{(n+1)} := \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \le x_0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^n} =: \alpha_3^{(n+1)}.$$

Поділимо проміжок $\left[\alpha_0^{(n+1)}; \alpha_3^{(n+1)}\right)$ на три рівні частини точками $\alpha_1^{(n+1)}$ і $\alpha_2^{(n+1)}$. Тоді x_0 належатиме одному і тільки одному з проміжків $\left[\alpha_i^{(n+1)}; \alpha_{i+1}^{(n+1)}\right)$, $i = 0, 1, 2$, тобто $\exists!\ i \in \{0, 1, 2\}$ таке, що $x_0 \in \left[\alpha_i^{(n+1)}; \alpha_{i+1}^{(n+1)}\right)$. Покладемо $a_{n+1} = i$. Тоді

$$\alpha_0^{(n+2)} := \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{3^k} \le x_0 < \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^{n+1}} =: \alpha_3^{(n+2)}.$$

Згідно з принципом математичної індукції можна вважати, що всі коефіцієнти a_k визначено так, що $a_k \in \{0,\ 1,\ 2\}$ і

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \le x_0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^n} \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Звідси випливає, що $x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$. Залишилося показати, що множина $\{k \in \mathbf{N}:\ a_k \ne 2\}$ є нескінченною. Припустимо супротивне, тобто $\exists k_0:\ a_k = 2$, якщо $k \ge k_0$. Тоді згідно з побудовою чисел a_k маємо:

$$\sum_{k=1}^{k_0} \frac{a_k}{3^k} \le x_0 < \sum_{k=1}^{k_0} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^{k_0}}$$

і

$$\sum_{k=1}^{k_0} \frac{a_k}{3^k} + \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \le x_0 < \sum_{k=1}^{k_0} \frac{a_k}{3^k} + \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^n} \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Звідси випливає, що

$$x_0 - \sum_{k=1}^{k_0} \frac{a_k}{3^k} = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{2}{3^{k_0+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^{k_0}},$$

тобто $x_0 = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^{k_0}}$. Однак вище показано, що $x_0 < \sum_{k=1}^{k_0} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^{k_0}}$. Дістали суперечність, яка й доводить, що множина $\{k \in \mathbf{N} : a_k \ne 2\}$ є нескінченною. Отже, побудований ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ є нескінченним трійковим дробом, що дорівнює заданому числу x. Єдиність цього дробу для числа x пропонується довести самостійно.

17. 2) Оскільки

$$\frac{1}{13} = 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3^2} + 2 \cdot \frac{1}{3^3} + \left(\frac{1}{13} - \frac{2}{3^3} \right) = \frac{2}{27} + \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{13} = \frac{2}{27} + \frac{1}{27}\left(\frac{2}{27} + \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{13} \right) =$$

$$= \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^6} + \frac{2}{3^6} \cdot \frac{1}{13} = \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^6} + \frac{2}{3^6}\left(\frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^6} + \frac{2}{3^6} \cdot \frac{1}{13} \right) = \cdots,$$

то слід чекати, що

$$\frac{1}{13} = \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^6} + \cdots + \frac{2}{3^{3n}} + \cdots.$$

Це дійсно так, оскільки

$$\frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^6} + \cdots + \frac{2}{3^{3n}} + \cdots = \frac{2}{3^3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^3}} = \frac{2}{27} \cdot \frac{27}{26} = \frac{1}{13}.$$

Отже, $\frac{1}{13}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}$, де $a_{3n}=2$; $a_k=0$, якщо $k\neq 3n$. Звідси за вправою 16 маємо, що $\frac{1}{13}\in P_0$.

19. Нехай $(a;b)=G_1\bigcup G_2$, де G_1 і G_2 — відкриті непорожні множини і $G_1\bigcap G_2=\varnothing$. Тоді $G_1\neq(a;b)$ і, користуючись структурою відкритої множини, існує складовий інтервал $(\alpha;\ \beta)$ множини G_1, який цілком лежить в $(a;\ b)$, але $(\alpha;\beta)\neq(a;b)$. У цьому випадку або $\alpha\in(a;b)$, або $\beta\in(a;b)$. Якщо, наприклад, точка $\alpha\in(a;b)=G_1\bigcup G_2$, то $\alpha\in G_2$, оскільки $\alpha\notin G_1$ як кінець складового інтервалу множини G_1. Оскільки G_2 — відкрита множина і $\alpha\in G_2$, то $\exists\varepsilon>0:\ (\alpha-\varepsilon;\ \alpha+\varepsilon)\subset G_2$. Вважаючи, що $\varepsilon>0$ — досить мале, дістаємо, що $(\alpha;\ \alpha+\varepsilon)\subset(\alpha;\ \beta)$, тобто $G_1\bigcap G_2\supset(\alpha;\ \alpha+\varepsilon)$. Крім того, $G_1\bigcap G_2=\varnothing$. Отримали суперечність. Тому відповідь на поставлене запитання негативна.

23. 2) Нехай E — досконала множина у просторі (M_1,ρ). Тоді E — замкнена множина, яка не містить ізольованих точок у (M_1,ρ). Зрозуміло, що множина E не має ізольованих точок у $(M,\ \rho)$, але вона може мати граничні точки у $(M,\ \rho)$, які не належать простору (M_1,ρ). Тому утворимо множину $F=E\bigcup E_1'$, де E_1' — множина граничних точок множини E у $(M,\ \rho)$, які їй не належать. Множина F замкнена (див. вправу 6) і не має ізольованих точок, тому F — досконала множина. Крім того, $F\bigcap M_1=(E\bigcup E_1')\bigcap M_1=(E\bigcap M_1)\bigcup$ $\bigcup(E_1'\bigcap M)=E\bigcup\varnothing=E$. Отже, для досконалої множини E з підпростору (M_1,ρ) простору $(M,\ \rho)$ існує множина F, досконала у $(M,\ \rho)$ і така, що $E=F\bigcap M_1$. Неважко помітити, що обернене твердження неправильне, оскільки підпростір (M_1,ρ) може складатися лише з ізольованих точок, тому будь-який переріз $F\bigcap M$ не є досконалою множиною.

§ 13.5. Компактні і зв'язні множини у метричних просторах

Множину $K\subset(M,\ \rho)$ називають *компактною* (*обмежено компактною*) у метричному просторі $(M,\ \rho)$, якщо будь-яка (будь-яка обмежена) послідовність $(x_n):\ x_n\in K\ \ \forall n$ має збіжну підпослідовність $\left(x_{n_i}\right)$, для якої $\lim\limits_{i\to\infty}x_{n_i}\in K$.

Зрозуміло, що кожна компактна множина є обмежено компактною, але не навпаки.

Зв'язок компактності із замкненістю та обмеженістю:

1) якщо множина K обмежено компактна у метричному просторі $(M,\ \rho)$, то вона замкнена у $(M,\ \rho)$;

2) кожна компактна множина у $(M,\ \rho)$ є замкненою і обмеженою у $(M,\ \rho)$;

3) будь-яка замкнена підмножина компактної множини у $(M,\ \rho)$ є компактною у $(M,\ \rho)$;

4) якщо K — компактна множина, а F — замкнена у $(M,\ \rho)$, то $F\bigcap K$ — компактна множина у $(M,\ \rho)$.

Відкритим покриттям (або *покриттям*) множини $E \subset (M, \rho)$ називають таку систему відкритих множин $\{G_i\}$, для якої $E \subset \bigcup_i G_i$.

Якщо $\{G_i\}$ — відкрите покриття множини E, то систему $\left\{G_{i_k}\right\}_{k=1}^{n}$ називають *скінченним підпокриттям* покриття $\{G_i\}$, якщо $\left\{G_{i_k}\right\}_{k=1}^{n} \subset \{G_i\}$ і $E \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$.

Критерії компактності. Множина K компактна у метричному просторі (M, ρ) тоді й тільки тоді, коли виконується принаймні одна з умов:

а) $E' \cap K \neq \varnothing$ для кожної нескінченної множини $E \subset K$;

б) будь-яке відкрите покриття множини K містить скінченне підпокриття цієї множини.

Якщо $(M, \rho) = \mathbf{R}^n$ або $(M, \rho) = \mathbf{C}$, то множина K компактна у (M, ρ) тоді й тільки тоді, коли K замкнена і обмежена у (M, ρ).

Відстань $\rho(A, B)$ між множинами A і B з метричного простору (M, ρ) визначається рівністю $\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y) : x \in A \text{ і } y \in B\}$.

Взагалі $\rho(A, B)$ не обов'язково дорівнює $\rho\left(x^*, y^*\right)$, де $x^* \in A$, $y^* \in B$ — деякі фіксовані точки, але якщо A — компактна множина, а B — обмежено компактна, то існують точки $x^* \in A$, $y^* \in B$, для яких $\rho(A, B) = \rho\left(x^*, y^*\right)$. Якщо при цьому $A \cap B = \varnothing$, то $\rho(A, B) > 0$.

Діаметром множини $E \subset (M, \rho)$ називають число $\operatorname{diam} E = \sup\{\rho(x, y) : x \in E \text{ і } y \in E\}$.

Множини A і B називають *роз'єднаними* у метричному просторі (M, ρ), якщо вони непорожні і будь-яка з них не містить точок дотику іншої.

Множину $E \subset (M, \rho)$ називають *зв'язною*, якщо вона не є об'єднанням двох роз'єднаних множин. В іншому випадку E називають *незв'язною*.

Метричний простір (M, ρ) називають *зв'язним* (*незв'язним*), якщо множина M є зв'язною (незв'язною) у (M, ρ).

Кожну відкриту зв'язну множину $D \subset (M, \rho)$ називають *областю*, а об'єднання області з її межею — *замкненою областю*.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) якщо K — компактна множина у метричному просторі (M, ρ), то довільна послідовність (x_n): $x_n \in K \ \forall n$ має збіжну підпослідовність $\left(x_{n_k}\right)$;

2) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

3) кожна скінченна множина $K \subset (M, \rho)$ є компактною у (M, ρ);

4) множина K є компактною у (M, ρ) тоді й тільки тоді, коли K є компактною у будь-якому підпросторі (M_1, ρ), для якого $M_1 \supset K$;

5) якщо множина K обмежено компактна, то вона і компактна;

6) якщо $A \bigcap B = \varnothing$, то $\rho(A, B) > 0$;

7) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

8) множини A і B є роз'єднаними тоді й тільки тоді, коли $A \bigcap B = \varnothing$.

2•. Визначити, які множини є компактними у просторі ізольованих точок.

3. Навести приклад замкненої й обмеженої множини, яка не є компактною.

4. Чи є компактною множиною у просторі $\mathbf{R}^3$:

1) будь-яка неперервна крива; 2) криволінійна трапеція;

3) тіло і поверхня обертання?

5. Чи може компактна множина у просторі (M, ρ) бути відкритою у (M, ρ)?

6. Нехай A_i — компактні множини $\forall i$. Визначити, чи є компактними множинами:

1) $\bigcup\limits_i A_i$; 2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$; 3) $\bigcap\limits_i A_i$; 4) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

7. Довести, що у просторі $\mathbf{R}^1$ множина K компактна тоді й тільки тоді, коли $\forall \{(\alpha_k; \beta_k)\}: \ K \subset \bigcup\limits_k (\alpha_k; \beta_k) \ \exists \{(\alpha_{k_i}; \beta_{k_i})\}_{i=1}^{n} \subset \{(\alpha_k; \beta_k)\}$ і $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (\alpha_{k_i}; \beta_{k_i})$.

8. Які числові проміжки є компактними множинами у просторі $\mathbf{R}^1$?

9. Довести, що будь-який проміжок $\langle a; b \rangle$, де $a < b$, можна покрити нескінченною системою відрізків $\{[a_k; b_k]\}$, $k = 1, 2, \ldots$, з якої не можна виділити скінченне підпокриття проміжку $\langle a; b \rangle$.

10. Довести, що множина K квадратних тричленів $ax^2 + bx + c$, де $0 \le a$, $b, c \le 1$, є компактною у просторі $C\,[0; 1]$.

11•. Визначити, чи є замкнена куля з простору $C[a; b]$ компактною множиною у цьому просторі.

12. Нехай K_n — непорожні компактні множини у (M, ρ) $\forall n \in \mathbf{N}$ і $K_n \supset K_{n+1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Довести, що:

1) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \ne \varnothing$;

2) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ — одноточкова множина тоді й тільки тоді, коли $\operatorname{diam} K_n \to 0$, $n \to \infty$.

13. Множину $E \subset (M, \rho)$ називають *цілком обмеженою*, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists S \subset$ $\subset (M, \rho):$ S — скінченна множина і $\forall x \in E \ \exists y \in S: \ \rho(x, y) < \varepsilon$. Довести, що кожна цілком обмежена множина є обмеженою у просторі (M, ρ). Чи справедливе обернене твердження?

14. Довести, що кожна компактна множина є цілком обмеженою.

15. Довести, що $\rho(x, E) = 0 \Leftrightarrow x$ — точка дотику множини E.

16. Довести, що $\rho(A, B) = \rho(\overline{A}, B) = \rho(A, \overline{B}) = \rho(\overline{A}, \overline{B})$. Чи можна стверджувати, що $\rho(A, B) = \rho(A^0, B^0)$?

17•. Нехай F_1 і F_2 — замкнені множини з простору (M, ρ) і $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Довести, що існують відкриті множини $G_1 \supset F_1$ і $G_2 \supset F_2$ такі, що $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

18. Нехай F_1 і F_2 — замкнені множини з простору $\mathbf{R}^n$ або $\mathbf{C}$, причому F_1 — обмежена множина. Довести, що існують точки $x^* \in F_1$ і $y^* \in F_2$ такі, що $\rho(F_1, F_2) = \rho(x^*, y^*)$.

19. Довести, що множина E зв'язна у просторі (M, ρ) тоді й тільки тоді, коли немає відкритих у (M, ρ) множин G_1 і G_2 таких, що $E \subset G_1 \cup G_2$, $E \cap G_1 \neq \varnothing$, $E \cap G_2 \neq \varnothing$ і $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

20. Довести, що метричний простір (M, ρ) є зв'язним тоді й тільки тоді, коли M не має власної підмножини, яка є одночасно і замкненою, і відкритою у (M, ρ).

21. Сформулювати твердження, аналогічні твердженням 19 і 20, для незв'язних метричних просторів.

22. Визначити, чи може зв'язна множина мати ізольовані точки.

23. Визначити, чи є зв'язними дані множини:

1) $E = \langle a; b\rangle \subset \mathbf{R}^1$; 2) $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ x \in \mathbf{Q}$ або $y \in \mathbf{Q}\}$;

3) $E = \{(x, y) \subset \mathbf{R}^2 : \ x \notin \mathbf{Q}$ і $y \notin \mathbf{Q}\}$; 4) E — замкнений круг у $\mathbf{R}^2$.

24•. Довести, що множина $E \subset \mathbf{R}^1$ зв'язна тоді й тільки тоді, коли $E = \langle \alpha; \beta \rangle$.

Зразки розв'язування задач

2. Нехай K — довільна непорожня множина з простору ізольованих точок. Тоді для кожної точки $x \in K$ утворимо відкриту множину $G_x = S(x, 1/2) = \{x\}$. Сукупність $\{G_x\}$ цих множин утворює відкрите покриття множини K. Оскільки множини G_x попарно не перетинаються, то скінченне підпокриття цього покриття існує тоді й тільки тоді, коли K — скінченна множина. Отже, у просторі ізольованих точок компактними будуть тільки скінченні множини.

11. Зафіксуємо якусь замкнену кулю з простору $C\,[a; b]$: $\overline{S}(x_0, r) = \left\{ x(t) : \max\limits_{[a;b]} |x(t) - \right.$ $\left. - x_0(t)| \le r \right\}$, де $x_0 = x_0(t) \in C[a; b]$ і $r > 0$ — фіксовані. Для простоти міркувань вважатимемо, що $[a; b] = [-1; 1]$, $r = 1$ і $x_0(t) = 0$ $\forall t \in [a; b]$. Розглянемо послідовність $(x_n) = (x_n(t))$ таку, що

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & \text{якщо} \quad -1 \le t \le -\frac{1}{n}, \\ nx, & \text{якщо} \quad -\frac{1}{n} < t < \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{якщо} \quad \frac{1}{n} \le t \le 1. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $x_n = x_n(t) \in C[-1;1]$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Припустимо, що якась підпослідовність (x_{n_i}) цієї послідовності є збіжною до деякої функції $x(t)$ у просторі $C[-1; 1]$. Тоді за критерієм збіжності $x_{n_i}(t) \to x(t)$, $n_i \to \infty$, $\forall t \in [-1; 1]$ (збіжність поточкова). Однак якщо $t \in (0; 1]$, то $x_n(t) \to 1$, а якщо $t \in [-1; 0]$, то $x_n(t) \to -1$. Звідси випливає, що функція $x = x(t)$ не може бути неперервною у точці $t = 0$. Дістали суперечність, яка й доводить, що послідовність (x_n) не має жодної збіжної підпослідовності. Отже, будь-яка замкнена куля не є компактною множиною у просторі $C[a; b]$.

17. Нехай F_1 і F_2 — довільні фіксовані замкнені множини з простору (M, ρ) і $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Тоді якщо $x \in F_1$, то x не є точкою дотику множини F_2, тому $r_x = \rho(x, F_2) > 0$ $\forall x \in F_1$ (див. вправу 5). Аналогічно $r_y = \rho(y, F_1) > 0$ $\forall x \in F_2$. Позначимо $G_1 = \bigcup\limits_{x \in F_1} S\left(x, \frac{r_x}{2}\right)$ і $G_2 = \bigcup\limits_{y \in F_2} S\left(y, \frac{r_y}{2}\right)$. Зрозуміло, що ці множини відкриті, $G_1 \supset F_1$ і $G_2 \supset F_2$. Припустимо, що $\exists x_0 \in G_1 \cap G_2$. Тоді $\exists x^* \in F_1$ і $y^* \in F_2$: $x_0 \in S\left(x^*, \frac{r_{x^*}}{2}\right) \cap S\left(y^*, \frac{r_{y^*}}{2}\right) \Rightarrow \rho(x^*, y^*) \le$ $\le \rho(x^*, x_0) + \rho(y^*, x_0) < \frac{r_{x^*}}{2} + \frac{r_{y^*}}{2} < r$, де $r = \max\{r_{x^*}, r_{y^*}\}$. Крім того, $\rho(x^*, y^*) \ge$ $\ge \rho(x^*, F_2) = r_{x^*}$ і $\rho(x^*, y^*) = \rho(y^*, x^*) \ge \rho(y^*, F_1) = r_{y^*}$. Тому $\rho(x^*, y^*) \ge r$ і $\rho(x^*, y^*) < r$. Ця суперечність показує, що $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

24. Припустимо, що $E \ne \varnothing$ — зв'язна множина з простору $\mathbf{R}^1$, $\alpha = \inf E$ і $\beta = \sup E$. Тоді $E \subset \langle \alpha; \beta \rangle$, де α та β належать проміжку $\langle \alpha; \beta \rangle$ тоді й тільки тоді, коли вони належать E. Покажемо, що $\langle \alpha; \beta \rangle \subset E$, тобто $E = \langle \alpha; \beta \rangle$. Припустимо, що $\exists x^* \in (\alpha; \beta)$: $x^* \notin E$. Тоді $E \subset (-\infty; x^*) \cup (x^*; +\infty)$, $(-\infty; x^*) \cap E \ne \varnothing$ і $(x^*; +\infty) \cap E \ne \varnothing$, а це суперечить зв'язності множини E (див. вправу 19). Цим доведено необхідність.

Припустимо тепер, що $E = \langle \alpha; \beta \rangle$ і $E = A \cup B$, де A і B — непорожні множини, що не перетинаються. Можливі два випадки:

а) $\forall x_0 \in A$ $\exists O(x_0)$: $O(x_0) \cap B = \varnothing$;

б) $\exists x_0 \in A$: $\forall O(x_0)$ переріз $O(x_0) \cap B \ne \varnothing$.

У випадку б) точка x_0 є точкою дотику множини B. Покажемо, що у випадку а) множина B містить точку дотику множини A. Дійсно, якщо $x_0 \ne \alpha$ і $x_0 \ne \beta$, то x_0 —

внутрішня точка множини A. Тому $A\setminus\{\alpha, \beta\}$ — відкрита множина, а отже, має принаймні один складовий інтервал $(a; b) \subset \langle\alpha; \beta\rangle = A \cup B$, для якого або $a \in B$, або $b \in B$. Ця точка x_0 і є потрібною точкою дотику множини A, причому $x_0 \in B$.

Отже, множини A і B не роз'єднані, тому E — зв'язна множина.

§ 13.6. Повні метричні простори

Послідовність (x_n) називають *фундаментальною* у метричному просторі (M, ρ), якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0(\varepsilon): \ m \geq n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Зв'язок фундаментальності зі збіжністю та обмеженістю:

1) якщо (x_n) — збіжна послідовність у метричному просторі (M, ρ), то вона є фундаментальною у цьому просторі, але не навпаки;

2) якщо (x_n) — фундаментальна послідовність у (M, ρ), яка має збіжну підпослідовність $\left(x_{n_i}\right)$, то (x_n) збіжна у (M, ρ);

3) кожна фундаментальна послідовність є обмеженою.

Метричний простір (M, ρ) називають *повним*, якщо кожна його фундаментальна послідовність є збіжною у цьому просторі. В іншому випадку (M, ρ) називають *неповним метричним простором.*

Повними метричними просторами є такі: простір ізольованих точок, $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}$, $C[a; b]$, l^2 тощо. Простір $\mathbf{Q}$ раціональних чисел з метрикою $\rho(x, y) = |x - y|$ є неповним.

Метричні простори (M_1, ρ_1) і (M_2, ρ_2) називають *ізометричними*, якщо існує відображення $f: M_1 \leftrightarrow M_2$ і $\rho_1(x, y) = \rho_2(f(x), f(y)) \ \ \forall x, y \in M_1$.

Метричний простір $\left(M^*, \rho^*\right)$ називають *поповненням метричного простору* (M, ρ), якщо:

1) $\left(M^*, \rho^*\right)$ — повний метричний простір;

2) $\exists M_1 \subset M^*: \ \ \bar{M}_1 = M^*$;

3) метричні простори $\left(M_1, \rho^*\right)$ і (M, ρ) ізометричні.

Простір $\mathbf{R}^1$ є поповненням простору $\mathbf{Q}$ з метрикою $\rho(x, y) = |x - y|$.

Послідовності (x_n) і (y_n) називають *еквівалентними* у просторі (M, ρ) і пишуть $(x_n) \sim (y_n)$, якщо $\rho(x_n, y_n) \to 0, \ n \to \infty$.

Ідеальним елементом x^*, що відповідає послідовності (x_n), яка є фундаментальною у (M, ρ), називають множину $x^* = \{(y_n): \ y_n \in (M, \rho) \ \ \forall n$ і

$(y_n) \sim (x_n)\}$. Множину x^* називають також *класом*, що визначається послідовністю (x_n), і позначають $\mathrm{cl}(x_n)$.

Теореми (про поповнення метричного простору).

1) Якщо $M^* = \left\{x^* = \mathrm{cl}(x_n) : (x_n)\right.$ — *фундаментальна у метричному просторі* $\left.(M, \rho)\right\}$, *а* $\rho^*\left(x^*, y^*\right) := \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$, *де* $x^* = \mathrm{cl}(x_n)$ і $y^* = \mathrm{cl}(y_n) \in M^*$, то $\left(M^*, \rho^*\right)$ — *метричний простір.*

2) *Метричний простір* $\left(M^*, \rho^*\right)$, *побудований для будь-якого метричного простору* (M, ρ), *є поповненням простору* (M, ρ).

3) *Якщо* (M_1, ρ_1) *і* (M_2, ρ_2) — *два поповнення метричного простору* (M, ρ), *то вони ізометричні.*

4) *Кожний метричний простір має поповнення, причому єдине з точністю до ізометрії.*

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження (виконати усно):

1) якщо послідовність (x_n) не є фундаментальною у метричному просторі (M, ρ), то $\exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \;\; \exists m$ і $n \geq n_0 : \rho(x_m, x_n) \geq \varepsilon$;

2) кожна фундаментальна послідовність у (M, ρ) є збіжною у (M, ρ);

3) для того щоб послідовність була збіжною у повному метричному просторі, необхідно і достатньо, щоб вона була фундаментальною у цьому просторі;

4) якщо послідовність обмежена, то вона фундаментальна;

5) твердження, обернене до попереднього, є правильним.

2. Довести або спростувати такі твердження:

1) якщо $(x_n) \sim (y_n)$ і (x_n) — фундаментальна послідовність у (M, ρ), то і (y_n) фундаментальна у (M, ρ);

2) якщо (x_n) — послідовність раціональних наближень числа $\sqrt{2}$ з надлишком, то ця послідовність фундаментальна у просторі $\mathbf{Q}$ з метрикою $\rho(x, y) = |x - y|$;

3) якщо (x_n) — фундаментальна послідовність у просторі ізольованих точок, то вона стаціонарна у цьому просторі, тобто $\exists n_0 : x_n = x_{n_0} \;\; \forall n \geq n_0$;

4) якщо (M, ρ) — неповний метричний простір, то в ньому кожна фундаментальна послідовність не є збіжною.

3. Нехай (z_n) та (w_n) — фундаментальні послідовності у просторі $\mathbf{C}$ комплексних чисел. Чи є фундаментальними у цьому просторі послідовності:

1)• $(z_n + w_n)$; 2) $(z_n - w_n)$; 3) $(z_n \cdot w_n)$; 4) (z_n / w_n)?

4. На множині $\mathbf{N}$ натуральних чисел $\rho(m, n)$ визначено трьома способами:

1) $\rho(m, n) = |m - n|$; 2) $\rho(m, n) = \dfrac{|m-n|}{mn}$;

3) $\rho(m,n) = 1 + \dfrac{1}{m+n}$, якщо $m \neq n$ і $\rho(m, m) = 0$. Визначити, чи є $(\mathbf{N}, \rho)$ повним метричним простором?

5. Довести, що метричний простір (M, ρ) є повним тоді й тільки тоді, коли $\exists! x_0 \in \overline{S}_n \; (\forall n)$ для будь-якої послідовності $\left(\overline{S}_n = \overline{S}(a_n, r_n)\right)$ замкнених куль таких, що $\overline{S}_1 \supset \overline{S}_2 \supset \ldots \supset \overline{S}_n \supset \ldots$ і $r_n \to 0$, $n \to \infty$.

6•. Довести, що у повному метричному просторі кожна замкнена цілком обмежена множина є компактною (див. вправи 13 і 14 § 13.5).

7. Показати, що для метричного простору із вправи 4.3) для послідовності замкнених куль $\overline{S}_n = \overline{S}\left(n, 1 + \dfrac{1}{2n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, їх переріз $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{S}_n = \varnothing$.

8. Визначити, чи є замкнені кулі з попередньої вправи компактними множниками.

9. Довести, що простір l^2 (див. вправу 18 § 13.1) є повним метричним простором.

10. Довести, що простір $C\,[a; b]$ неперервних на відрізку $[a; b]$ функцій з метрикою $\rho(x(t), y(t)) = \int\limits_a^b |x(t) - y(t)|\,dt$ є неповним.

11. Нехай (M, ρ) — повний метричний простір, а F — замкнена множина цього простору. Довести, що підпростір (F, ρ) простору (M, ρ) також є повним.

12. Чи можна стверджувати, що:

1) кожний метричний простір (M, ρ) має повний підпростір;

2) кожний підпростір (F, ρ) повного метричного простору (M, ρ) також є повним?

13. Нехай $f \in C\,[a; b]$ — фіксована функція, а $F = \{x(t) \in C[a; b] : x(t) \geq f(t) \;\; \forall t \in [a; b]\}$. Довести, що F — замкнена множина у $C[a; b]$, а отже, підпростір (F, ρ) простору $C[a; b]$ є повним.

14. Нехай (A, ρ) і (B, ρ) — повні підпростори простору (M, ρ). Визначити повноту просторів:

1) $(A \cup B, \rho)$; 2) $(A \cap B, \rho)$; 3) $(A \backslash B, \rho)$.

15. Нехай підпростір (F, ρ) простору $C[a; b]$ визначено як у вправі 13, а $G = \{x(t) \in C\,[a; b],\; x(t) \leq g(t) \;\; \forall t \in [a; b]\}$, де $g \in C\,[a; b]$ — фіксована функція і така, що $f(t) \leq g(t) \;\; \forall t \in [a; b]$. Чи є простір $(F \cap G, \rho)$ повним? Яку умову задовольняють функції з цього простору?

16. Побудувати поповнення даного метричного простору:
1)• $(\mathbf{N}, \rho)$ із вправи 4.2);
2) $(\mathbf{Q}, \rho)$, де $\rho(x, y) = |x - y|$;
3) $CR[a; b]$ (див. вправу 10).

Зразки розв'язування задач

3. 1) Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне фіксоване число. Оскільки послідовності (z_n) і (w_n) фундаментальні у просторі **C** комплексних чисел, то $\exists n_1(\varepsilon)$: $m \ge n \ge n_1(\varepsilon) \Rightarrow |z_m - z_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ і $\exists n_2(\varepsilon)$: $m \ge n \ge n_2(\varepsilon) \Rightarrow |w_m - w_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Позначимо $n_0 = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$. Тоді якщо $m \ge n \le n_0$, то $|(z_m + w_m) - (z_n + w_n)| \le |z_m - z_n| + |w_m - w_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Отже, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon)$: $m \ge n \ge n_0(\varepsilon) \Rightarrow |(z_m + w_m) - (z_n + w_n)| < \varepsilon$. Це означає, що послідовність $(z_n + w_n)$ фундаментальна у просторі **C** комплексних чисел.

6. Нехай (M, ρ) — повний метричний простір, а множина F замкнена і цілком обмежена у ньому. Для доведення компактності множини F візьмемо довільну послідовність (x_n): $x_n \in F$ $\forall n$. Оскільки F — цілком обмежена множина, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists S_1 \subset (M, \rho)$: S_1 — скінченна множина і $\forall x \in F$ $\exists y \in S_1$: $\rho(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тому $\forall x_n$ $\exists y \in S_1$: $\rho(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Оскільки точок y скінченна кількість, то існує така точка $y = y_1$, у ε-околі якої лежить нескінченна кількість членів послідовності (x_n). Позначимо ці члени $x_{n_i}^{(1)}$, $i \in \mathbf{N}$. Припустимо, що вже визначено точку y_k і підпослідовність $\left(x_{n_i}^{(k)}\right)$ такі, що $\rho\left(x_{n_i}^{(k)}, y_k\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}$, $i \in \mathbf{N}$. Тоді для числа $\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ знайдемо скінченну множину $S_{k+1} \subset (M, \rho)$ таку, що

$$\forall x \in F \;\; \exists y \in S_{k+1}: \; \rho(x, y) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \Rightarrow \; \forall x_{n_i}^{(k)} \;\; \exists y: \; \rho\left(x_{n_i}^{(k)}, y\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Серед точок y виберемо таку точку $y = y_{k+1}$, для якої її $\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$-окіл містить нескінченну кількість членів послідовності $\left(x_{n_i}^{(k)}\right)$. Позначимо їх $\left(x_{n_i}^{(k+1)}\right)$. За принципом математичної індукції можна вважати, що $\forall k \in \mathbf{N}$ $\exists y_k \in (M, \rho)$ і $\left(x_{n_i}^{(k)}\right)$: $\rho\left(x_{n_i}^{(k)}, y_k\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}$, причому $\left(x_{n_i}^{(k)}\right)$ є підпослідовністю послідовності $\left(x_{n_i}^{(k-1)}\right)$, а $\left(x_{n_i}^{(0)}\right) := (x_n)$. Утворимо послідовність $z_k = x_{n_k}^{(k)}$, $k \in \mathbf{N}$. Зрозуміло, що (z_k) — підпослідовність послідовності (x_n), причому всі члени z_i, $i \ge k$, лежатимуть у $\frac{\varepsilon}{2^k}$-околі точки y_k, тому

$$m \ge n \ge k \Rightarrow \rho(z_m, z_n) \le \rho(z_m, y_k) + \rho(z_n, y_k) < \frac{\varepsilon}{2^k} + \frac{\varepsilon}{2^k} = \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} \to 0, \; k \to \infty,$$

тобто (z_k) — фундаментальна послідовність у (M, ρ). Оскільки (M, ρ) — повний метричний простір, то $\exists \lim\limits_{k\to\infty} z_k$, а за критерієм замкненості множини дістаємо, що $\lim\limits_{k\to\infty} z_k \in F$. Отже, будь-яка послідовність (x_n): $x_n \in F \ \ \forall n$ має збіжну підпослідовність (z_k): $\lim\limits_{k\to\infty} z_k \in \in F$. Це означає, що F — компактна множина у (M, ρ).

16. 1) Нехай (x_n) — довільна фіксована фундаментальна послідовність з простору $(\mathbf{N}, \rho)$. Тоді $\rho(x_m, x_n) = \left|\dfrac{1}{x_m} - \dfrac{1}{x_n}\right| \to 0$, якщо $m \to \infty$ і $n \to \infty$. Можливі два випадки:

а) $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ і $n_i \uparrow \infty$: $x_{n_i} \le n_0 \ \ \forall i \in \mathbf{N}$;

б) $\forall n_0 \in \mathbf{N} \ \ \exists k_0$: $n \ge k_0 \Rightarrow x_n > n_0$.

У випадку а) серед членів x_{n_i} $(i = 1, 2, \dots)$ є нескінченна кількість, що дорівнюють n_0. Нехай це будуть члени $x_{n_i}^{(1)}$ $(i = 1, 2, \dots)$. Тоді

$$\rho\left(x_n, x_{n_i}^{(1)}\right) = \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{n_0}\right| \to 0, \ n \ge n_i^{(1)} \to \infty \Leftrightarrow x_n \to n_0, n \to \infty,$$

тому $\rho\left(x_n, x_{n_i}^{(1)}\right) \to 0$, $n \ge n_i^{(1)} \to \infty$, якщо $x_n = n_0$ для всіх достатньо великих n. Отже, у випадку а) фундаментальна послідовність (x_n) має бути стаціонарною.

Якщо має місце випадок б), то послідовність (x_n) прямує до ∞ при $n \to \infty$, якщо її розглядати як послідовність з простору $\mathbf{R}^1$. Тому $\dfrac{1}{x_n} \to 0$, якщо $n \to \infty$. Це наводить на думку доповнити простір $(\mathbf{N}, \rho)$ елементом $x = 0$ і визначити $\rho(x, 0) := \dfrac{1}{x}$, якщо $x \ne 0$, і $\rho(0, 0) = 0$. Позначимо $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$. Тоді простір $(\mathbf{N}_0, \rho)$ буде повним, множина $\mathbf{N}$ має у цьому просторі єдину граничну точку $x = 0$, тобто $\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N}_0$, тому $(\mathbf{N}_0, \rho)$ — поповнення простору $(\mathbf{N}, \rho)$.

Розділ 14 ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ У МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРАХ

§ 14.1. Поняття оператора та функціонала. Функції кількох змінних

Відображення (функцію) f: $X \to Y$ називають *оператором*, якщо множини X і Y лежать у деяких метричних просторах: $X \subset (M_1, \rho_1)$, $Y \subset (M_2, \rho_2)$. При цьому, якщо $Y \subset \mathbf{R}^1$ або $Y \subset \mathbf{C}$, то функцію f: $X \to Y$ називають відповідно *дійсним* або *комплексним функціоналом*.

Дійсний функціонал f, визначений на множині $X \subset \mathbf{R}^n$, називають *функцією кількох змінних*, або *функцією n змінних*. Зокрема, якщо $n = 2$, то кажуть, що f — функція двох змінних і записують $z = f(x, y)$, $(x, y) \in X \subset \mathbf{R}^2$, $z \in \mathbf{R}$. При $n = 3$ кажуть, що f — функція трьох змінних і записують $u = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in X \subset \mathbf{R}^3$, $u \in \mathbf{R}$.

Комплексний функціонал f, визначений на множині $D \subset \mathbf{C}$, називають *функцією комплексної змінної* і записують $w = f(z)$, $z \in D$, $w \in \mathbf{C}$.

Функція комплексної змінної $w = f(z)$, $z \in D$, $w \in \mathbf{C}$, задана тоді й тільки тоді, коли задано дійсну та уявну частини цієї функції: $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ та $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$, $(x, y) \in D$, $u(x, y) \in \mathbf{R}$, $v(x, y) \in \mathbf{R}$. При цьому ототожнюють простори $\mathbf{R}^2$ і $\mathbf{C}$.

Графіком функції f двох змінних є множина $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in D(f), z = f(x, y)\}$, яка може бути деякою поверхнею у просторі $\mathbf{R}^3$. Уявлення про цю поверхню можуть дати так звані лінії рівня функції f, тобто множини $\{(x, y) \in D(f) : f(x, y) = c\}$, де c — фіксоване дійсне число. Отже, *лінія рівня* — це множина всіх точок з області визначення функції f, в яких функція f набуває фіксованого значення.

Аналогічно для функції f трьох змінних *поверхнею рівня* цієї функції називають множину всіх точок з області визначення, в яких функція f набуває фіксованого значення.

Оператор $f : \langle a; b\rangle \to \mathbf{R}^n$ називають *векторнозначною функцією дійсної змінної*. При цьому, якщо $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$, то $f_k : \langle a; b\rangle \to \mathbf{R}$ називають k-ю компонентою функції f $\forall k \in \overline{1, n}$.

Функціонал f: $\langle a; b\rangle \to \mathbf{C}$ називають *комплекснозначною функцією дійсної змінної*.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження (виконати усно):

1) кожне відображення є оператором;

2) кожний оператор є функцією;

3) інтегральний оператор $f(x(t)) = \int\limits_a^t x(\tau)d\tau = y(t)$ задає відображення $C[a;b]$ в $C[a;b]$;

4) кожний функціонал є оператором, і навпаки;

5) диференціальний оператор $f(x(t)) = x'(t)$ є функціоналом;

6) область визначення кожної функції кількох змінних є областю;

7) кожний функціонал є або функцією кількох змінних, або функцією комплексної змінної.

2. Показати, що відображення $f(x) = \int\limits_0^1 x(t+u)dt$, $0 \le u \le 1$, є оператором з $C[0; 2]$ в $C[0; 1]$.

3. Нехай $E \subset (M, \rho)$ і $f(x) = \rho(x, E)$ — відстань від точки x до множини E. Чи є f оператором, функціоналом? Знайти множину $\{x \in (M, \rho) : f(x) = 0\}$.

4. Знайти область визначення $D(f)$ даної функції f:

1) $f(x, y) = \sqrt{x-y}$; 2) $f(x, y) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{y}$;

3) $f(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$; 4) $f(x, y) = \ln\left(y^2 - 4x + 8\right)$;

5) $f(x, y) = \ln\left(x^2 - 5xy + 6y^2\right)$; 6) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{z}}$;

7) $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{2x}{x^2 + y^2} - 1}$; 8)• $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1}$;

9) $f(x, y) = \sqrt{y \sin x}$; 10) $f(x, y) = \arcsin\dfrac{y-1}{x}$;

11) $f(x, y) = \arccos\dfrac{x^2 + y^2}{2x}$; 12) $f(x, y, z) = \ln(xyz)$;

13) $f(x, y) = \sqrt{\left(1 - x^2 - y^2\right)\left(\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y\right)}$;

14) $f(x, y, z) = \arcsin\left(1 + \sin^2 \pi x + \cos^2 \pi y + \sin^2 \pi z\right)$.

5. Для функцій f з попередньої вправи виконати такі завдання:

1) зобразити графічно область визначення $D(f_{-})$;

2) вказати для множини $D(f)$ її граничні, внутрішні, межові, зовнішні та ізольовані точки;

3) визначити, замкненою, досконалою чи відкритою є множина $D(f)$.

6. Знайти лінії рівня даних функцій і зобразити їх:

1) $f(x, y) = \sqrt{x - y}$; 2) $f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$;

3) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$; 4) $f(x, y) = |x - y| - |x| + |y|$;

5) $f(x, y) = x - |y|$; 6) $f(x, y) = \max\{x, y\}$;

7) $f(x, y) = e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$; 8) $f(x, y) = \min\{|x|, |y|\}$.

7. Знайти поверхні рівня даних функцій:

1) $f(x, y, z) = x + y + 2z$; 2) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;

3) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$; 4) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

8. Навести приклади функцій двох змінних, для яких область визначення має такий вигляд:

1) $\mathbf{R}^2 \setminus \{(1; 1)\}$; 2) $\mathbf{R}^2 \setminus \left\{(x; y) \in \mathbf{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\right\}$;

3) $\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 1 \text{ і } x > 0\right\}$; 4) $\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ y = x^2\right\}$;

5) множини, обмеженої прямими $y = x$ та $y = 2x$;

6) $\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ y^2 < x \text{ або } x < 0\right\}$.

9. Для даної функції комплексної змінної виділити її дійсну та уявну частини:

1) $f(z) = z^2 - 2\overline{z}\,\mathrm{Re}\,z$; 2) $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$; 3) $f(z) = \exp z$;

4)• $f(z) = \sin z$; 5) $f(z) = \cos z$; 6) $f(z) = \mathrm{sh}\, z$;

7) $f(z) = \mathrm{ch}\, z$; 8) $f(z) = \mathrm{tg}\, z$; 9) $f(z) = \mathrm{ctg}\, z$;

10) $f(z) = \mathrm{th}\, z$; 11) $f(z) = \mathrm{cth}\, z$; 12) $f(z) = \arg z$;

13) $f(z) = \ln z$; 14) $f(z) = z^\alpha$ (головне значення).

10. Для основних елементарних функцій комплексної змінної знайти множини, на яких ці функції набувають:

1) дійсних значень;

2) уявних значень;

3) суто уявних значень.

11. Нехай $E = \left\{(\theta, r) \in \mathbf{R}^2 :\ \theta \in [0; 2\pi]\right\}, r \in [0; +\infty))\}$ і оператор $f :\ E \to \mathbf{R}^2$ задається рівністю $f(\theta, r) = (x, y)$, де $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Визначити, чи є f:

1) відображенням E на $\mathbf{R}^2$;

2) взаємно однозначним відображенням E на $\mathbf{R}^2$.

12. Нехай f — оператор, заданий у попередній вправі. Знайти образи даних множин:

1) променя $\Gamma = \{(\theta, r) :\ \theta = \theta_0, r \in [0; +\infty]\}$, де $\theta_0 \in [0; 2\pi]$ — фіксоване число;

2) відрізка $\{(\theta, r) :\ r = r_0, \theta \in [0; 2\pi]\}$, де $r_0 \in [0; +\infty)$ — фіксоване число;

3) замкненого прямокутника $\{(\theta, r): \ r \in [r_0; R], \theta \in [0; \theta_0]\}$;

4) прямокутника $\{(\theta, r): \ r \in [0; R], \theta \in [0; 2\pi]\}$;

13. Нехай $E = \left\{(\theta, r, z) \in \mathbf{R}^3 : \ \theta \in [0; 2\pi), r \in [0; +\infty), z \in -\infty; +\infty\right\}$ і оператор $f : E \to \mathbf{R}^3$ задається рівністю $f(\theta, r, z) = (x, y, z)$, де $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$. Визначити, чи є f:

1) відображенням E на $\mathbf{R}^3$;

2) взаємно однозначним відображенням E на $\mathbf{R}^3$.

14. Для відображення f, заданого у попередній вправі, знайти образи даних множин:

1) $\{(\theta, r, z): \ \theta = \theta_0, r \in [0; +\infty), z \in (-\infty; +\infty)\}$, де $\theta_0 \in [0; 2\pi)$ — фіксоване;

2) $\{(\theta, r, z), \theta \in [0; 2\pi), r = r_0, z \in (-\infty; +\infty)\}$, де $r_0 \in [0; +\infty)$ — фіксоване;

3) $\{(\theta, r, z), \theta \in [0; 2\pi], r \in [0; +\infty), z = z_0\}$, де $z_0 \in (-\infty; +\infty)$ — фіксоване.

15. Нехай $E = \left\{(\theta, r, \varphi) \in \mathbf{R}^3 : \ \theta \in [0; 2\pi), r \in [0; +\infty), \varphi \in [0; 2\pi]\right\}$ і оператор $f : \ E \to \mathbf{R}^3$ задається рівністю $f(\theta, r, \varphi) = (x, y, z)$, де $x = r\cos\theta\sin\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\varphi$. Визначити, чи є f:

1) відображенням E на $\mathbf{R}^3$;

2) взаємно однозначним відображенням E на $\mathbf{R}^3$.

16. Для відображення f, заданого у попередній вправі, знайти образи даних множин:

1) $\{(\theta, r, \varphi): \ \theta = \theta_0, r \in (0; +\infty), \varphi \in [0; \pi]\}$, де $\theta_0 \in [0; 2\pi)$ — фіксоване;

2) $\{(\theta, r, \varphi): \ \theta \in [0; 2\pi), r = r_0, \varphi \in [0; \pi]\}$, де $r_0 \in [0; +\infty)$ — фіксоване;

3) $\{(\theta, r, \varphi): \ \theta \in [0; 2\pi), r \in [0; +\infty), \varphi = \varphi_0\}$, де $\varphi_0 \in [0; \pi]$ — фіксоване.

17. Знайти образи прямих $x = x_0$ та $y = y_0$ при відображенні $f : \ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, що задається формулою $f(x, y) = (u, v)$, де $u = x^2 - y$, $v = 2xy$.

18. Встановити зв'язок між комплекснозначними та векторнозначними функціями дійсної змінної.

19. Зобразити на комплексній площині множину значень даної комплекснозначної функції:

1) $z = t + i(kt + b)$, $t \in (-\infty; +\infty)$, $k, b \in \mathbf{R}$ — фіксовані;

2) $z = kt + b + it$, $t \in (-\infty; +\infty)$, $k, b \in \mathbf{R}$ — фіксовані;

3) $z = t + i\left(at^2 + bt + c\right)$, $t \in (-\infty; +\infty)$, $a, b, c \in \mathbf{R}$ — фіксовані;

4)• $z = z_0 + r\exp it$, $t \in [0; 2\pi)$, $z_0 \in \mathbf{C}$ і $r > 0$ — фіксовані;

5) $z = t + \frac{i}{t}$, $t \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 6) $z = \exp 2it - 1$, $t \in [0; \pi]$;

7) $z=\begin{cases}\exp i\pi t, \ t\in[0;1],\\ t-2, \ t\in[1;3];\end{cases}$

8) $z=a\exp it+\dfrac{1}{a}\exp(-it), \ t\in[0;2\pi], a>0$ — фіксовані;

9) $z=i\sin t, t\in[0;2\pi]$; 10) $z=i\sin^2 t, t\in[0;2\pi]$.

20. Нехай відображення $f:\ \mathbf{C}\to\mathbf{R}^2$ задається формулою $f(z)=(x,y)$ $\forall z=$ $=x+iy\in\mathbf{C}$. Довести, що:

1) f є оператором;

2) $f:\ \mathbf{C}\to\mathbf{R}^2$;

3) f зберігає відстань, тобто $\rho_{\mathbf{C}}(z_1,z_2)=\rho_{\mathbf{R}^2}(f(z_1),f(z_2))$ $\forall z_1,z_2\in\mathbf{C}$.

Зразки розв'язування задач

4. 8) Оскільки областю визначення функції f є множина $D(f)=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}-1\ge 0\right\}$, то для її відшукання розв'язуємо нерівність

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}-1\ge 0\Leftrightarrow\left(2x>\sqrt{x^2+y^2}\ \text{і}\ (x,y)\ne(0;0)\right)\Leftrightarrow\left(4x^2\ge x^2+y^2,\ x\ge 0\right.$$
$$\left.\text{і}\ (x,y)\ne(0;0)\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}x\ge|y|,\ x\ge 0\ \text{і}\ (x,y)\ne(0;0)\right).$$

Отже, $D(f)=\left\{(x,y):\ |y|\le\sqrt{3}x,\ x>0\right\}$.

На площині Oxy ця множина має вигляд, зображений на рис. 3. Неважко помітити, що множиною граничних точок є $D'(f)=D(f)\cup\{(0;0)\}$, внутрішніх точок — $D^0(f)=\left\{(x,y):\ |y|\le\sqrt{3}x,\ x>0\right\}$, межових точок — $\partial D(f)=$ $=\left\{(x,y):\ |y|=\sqrt{3}x,\ x>0\right\}$. Ізольованих точок множина $D(f)$ не має.

Помічаємо, що множина $D(f)$ не є замкненою, а отже, і досконалою, оскільки точка $(0;0)\in D'(f)$, але $(0;0)\notin$ $\notin D(f)$. Множина $D(f)$ не є відкритою, оскільки точки $(x,y)\in D(f)$: $y=\sqrt{3}x$, $x>0$, не є внутрішніми для $D(f)$.

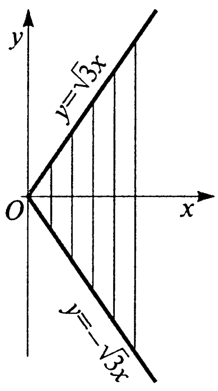


Рис. 3

9. 4) Якщо $z=x+iy$, то $f(z)=\sin(x+iy)=\sin x\cos iy+$ $+\cos x\sin iy$. За формулами Ейлера маємо

$$\cos iy=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}=\operatorname{ch}y,$$

$$\sin iy=\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}=i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=i\operatorname{sh}y.$$

Отже, $\sin z=\sin x\operatorname{ch}y+i\cos x\operatorname{sh}y$, звідки дістаємо, що $\operatorname{Re}\sin z=$ $=\sin x\operatorname{ch}y$, $\operatorname{Im}\sin z=\cos x\operatorname{sh}y$.

19. 4) Нехай $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$. Враховуючи, що $\exp it = \cos t + i\sin t$, дістаємо

$$z - z_0 = r\exp it \Leftrightarrow x - x_0 + i(y - y_0) = r(\cos t + i\sin t) \Leftrightarrow x - x_0 = r\cos t$$
$$\text{і } y - y_0 = r\sin t \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

тобто множина значень функції $z = z_0 + r\exp it$, $t \in [0; 2\pi]$, збігається з колом радіуса $r > 0$ з центром у точці z_0.

§ 14.2. Границя функції (оператора, функціонала). Властивості границі

Нехай функція f є визначеною на множині $E \subset (M, \rho)$ і набуває значення з метричного простору (M_1, ρ_1), $x_0 \in E'$ (x_0 — скінченна чи нескінченно віддалена точка метричного простору (M, ρ)), точка a є скінченною або нескінченно віддаленою точкою метричного простору (M_1, ρ_1)). Тоді a називають границею функції f у точці x і записують $\lim\limits_{E \ni x \to x_0} f(x) = a$ або $f(x) \to a$, $E \ni x \to x_0$, якщо

$$\forall\ O(a)\ \exists O^*(x_0):\ x \in O^*(x_0) \cap E \Rightarrow f(x) \in O(a).$$

Зокрема, якщо f — функціонал і $a = 0$, то f називають *нескінченно малою функцією*, коли $E \ni x \to x_0$.

Суть поняття границі функції f у точці x_0 полягає в тому, що $\lim\limits_{E \ni x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) \approx a$, коли $E \ni x \approx x_0$, але $x \neq x_0$.

Для випадку функції двох змінних $z = f(x, y)$, $(x, y) \in E \subset \mathbf{R}^2$, та скінченного числа $a \in \mathbf{R}$ означення границі функції f у скінченній точці $(x_0, y_0) \in E$ можна записати так:

$$\lim_{E \ni (x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0:\ \Big(0 < (x - x_0)^2 +$$
$$+ (y - y_0)^2 < \delta^2 \text{ і } (x, y) \in E \Rightarrow |f(x, y) - a| < \varepsilon\Big).$$

Для функції комплексної змінної $w = f(z)$, $z \in E \subset \mathbf{C}$, та скінченного числа $c \in \mathbf{C}$ це означення можна записати так:

$$\lim_{E \ni z \to z_0} f(z) = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0:\ (0 < |z - z_0| < \delta(\varepsilon)$$
$$\text{і } z \in E \Rightarrow |f(z) - c| < \varepsilon)$$

у випадку скінченної точки $z_0 \in E'$. Якщо $z_0 = \infty$, то

$$\lim_{E \ni z \to \infty} f(z) = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : (|z| > \delta(\varepsilon) \text{ і } z \in E \Rightarrow |f(z) - c| < \varepsilon).$$

Якщо $z_0 \in E'$ — скінченна точка, а $c = \infty$, то

$$\lim_{E \ni z \to z_0} f(z) = \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ (0 < |z - z_0| < \delta \ \text{і} \ z \in E \Rightarrow |f(z)| > \varepsilon).$$

Нарешті, для $z_0 = \infty$ і $c = \infty$ дістаємо таке означення:

$$\lim_{E \ni z \to \infty} f(z) = \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ (|z| > \delta(\varepsilon) \ \text{і} \ z \in E \Rightarrow |f(z)| > \varepsilon).$$

Якщо $O^*(x_0) \subset E$, то в означенні границі функції в точці x_0 позначення $x \in E$ опускають і записують $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \iff \forall O(a) \ \ \exists O^*(x_0)\colon x \in O^*(x_0) \Rightarrow f(x) \in O(a)$, або $f(x) \to a$, коли $x \to x_0$.

Функцію f називають *обмеженою* на множині $E \subset (M, \rho)$, якщо множина $f(E)$ обмежена у просторі (M_1, ρ_1).

Основні властивості границь

1. *Зв'язок границі функції з границею послідовності:* $\lim\limits_{E \ni x \to x_0} f(x) = a \iff \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$ для будь-якої послідовності (x_n): $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$ $\forall n$ і $x_n \to x_0$, $n \to \infty$.

2. *Єдиність границі*: кожна функція f у точці $x_0 \in E'$ може мати не більше ніж одну границю.

3. *Обмеженість функції, що має скінченну границю*: якщо $\exists \lim\limits_{E \ni x \to x_0} f(x) = a \neq \infty$, то функція f є обмеженою на множині $E \cap O(x_0)$ для деякого околу точки x_0.

4. *Неперервність відстані*: якщо $\lim\limits_{E \ni x \to x_0} f(x) = a \neq \infty$ і $\lim\limits_{E \ni x \to x_0} \varphi(x) = b \neq \infty$, де $E \subset (M, \rho)$, і $f(x)$, $\varphi(x) \in (M_1, \rho_1)$, то $\rho_1(f(x), \varphi(x)) \to \rho_1(a, b)$, коли $E \ni x \to x_0$. Зокрема, якщо f та φ — функціонали, то $|f(x) - \varphi(x)| \to |a - b|$, коли $E \ni x \to x_0$.

5. *Зв'язок границі функції f комплексної змінної з границями функцій* $\operatorname{Re} f$ *та* $\operatorname{Im} f$: нехай $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Якщо $z = x + iy \in E$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in E'$, $z_0 \neq \infty$, і $c = a + ib \neq \infty$, то

$$\lim_{E \ni z \to z_0} f(z) = c \iff \lim_{E \ni (x, y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = a \ \text{ і } \lim_{E \ni (x, y) \to (x_0, y_0)} v(x, y) = b.$$

Для функціоналів, зокрема для функцій кількох змінних та для функцій комплексної змінної, зберігаються властивості про границю суми, різниці, добутку та частки, про границю добутку обмеженої функції на нескінченно малу функцію. Для дійсних функціоналів, крім того, зберігаються властивості про перехід до границі у нерівностях та про границю проміжної змінної. Формулювання цих властивостей майже таке саме, як і для функцій однієї змінної.

Вправи

1. Визначити, чи правильні дані твердження:

1) якщо $\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)=a$, то $\exists O^*(x_0):\ x\in E\cap O^*(x_0)\Rightarrow f(x)=a$;

2) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

3)• $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ (0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$ і $0<|y-y_0|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow|f(x,y)-a|<\varepsilon)$;

4) кожна функція має в даній точці єдину границю;

5) якщо $\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)=a$, то $\lim\limits_{E_1\ni x\to x_0} f(x)=a\quad\forall E_1\subset E$;

6) функція f не має границі в точці $x_0\in E'\Leftrightarrow\exists(x_n'),(x_n''):\ x_n'$ і $x_n''\in E$, $x_n'\to x_0$ і $x_n''\to x_0$, якщо $n\to\infty$, але $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$;

7) якщо $\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=a$ для будь-якої послідовності $(x_n):\ x_n\in E\ \ \forall n$ і $x_n\to x_0$, якщо $n\to\infty$;

8) якщо f — функція комплексної змінної і $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, то

$$\lim_{z\to z_0}\operatorname{Re} f(z)=\infty \text{ або } \lim_{z\to z_0}\operatorname{Im} f(z)=\infty;$$

9)• функція $f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{x}$ має границю в точці $(0,2)$.

2. Користуючись поняттям границі функції в точці, знайти границю a даної функції в заданій точці, а потім мовою «$\varepsilon-\delta$» довести це:

1) $f(z)=2z+1-i,\ \ z_0=i$; 2)• $f(z)=\dfrac{z+i}{z^2+1},\ \ z_0=-i$;

3) $f(x,y)=3x-5y,\ (x_0,y_0)=(1,1)$;

4) $f(x,y)=x^2+y^2,\ (x_0,y_0)=(1,2)$;

5) $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & \text{якщо } y\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } y=0,\end{cases}\quad (x_0,y_0)=(0,0)$;

6) $f(x,y,z)=x^2-y^2+z,\ (x_0,y_0,z_0)=(1,1,0)$.

3•. Нехай $\lim\limits_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} f(x,\,y)=a$ і для кожного x, досить близького до x_0, існує скінченна границя $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,\,y)$. Довести, що існує так звана повторна границя $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,\,y)\right)=a$.

4. Сформулювати твердження, аналогічне попередньому, для повторної границі $\lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\,y)\right)$.

5. Для даної функції f та точки $(x_0,\,y_0)$ визначити, чи існують границя функції в точці та повторні границі:

1) $f(x,y)=\begin{cases}1, \text{ якщо } 0<y<x^2,\\ 0 \text{ в інших випадках,}\end{cases}$ $(x_0,\,y_0)=(0,0)$;

2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin x^2 y}{x^2}, & \text{якщо } x\neq 0,\\ a, & \text{якщо } x=0,\end{cases}$ $(x_0,y_0)=(0,\,a)$;

3) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2+x^4+y^4}{x^2+y^2}$, $(x_0,\,y_0)=(0,0)$;

4)• $f(x,\,1)=0$ і $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y-1}$, якщо $y\neq 1$, $(x_0,\,y_0)=(0,1)$;

5) $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & \text{якщо } x\neq 0 \text{ і } y\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x=0 \text{ або } y=0,\end{cases}$ $(x_0,\,y_0)=(0,0)$.

6. Нехай $E=\{(x,\,y):\ x=r\cos\varphi_0,\ y=r\sin\varphi_0\}$, де $\varphi_0\in\mathbf{R}$ — фіксоване, а $r\in[0;+\infty)$. Для даної функції f визначити, чи існує $\lim\limits_{E\ni(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x,\,y)$ та $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,\,y)$:

1) $f(x,y)=\begin{cases}1, \text{ якщо } 0<y<x^2,\\ 0 \text{ в інших точках;}\end{cases}$ 2) $f(x,\,y)=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$;

3) $f(x,\,y)=e^{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}\sin 2\left(x^2+y^2\right)$;

4) $f(x,\,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; 5) $f(x,\,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$.

7. Знайти дані границі:

1) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)}\dfrac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$; 2) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)}\dfrac{\sin\left(x^4y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$;

3) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$; 4) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{\ln\left(x+\mathrm{e}^y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

5) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \left(1+x^2y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$; 6) $\lim\limits_{y=x^2\to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y+x^2}$;

7) $\lim\limits_{E\ni(x,\,y)\to(1,\,1)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+2x-xy-2y}$, де $E=\left\{(x,\,y)\in\mathbf{R}^2 : x\neq y\right\}$;

8)• $\lim\limits_{(x,\,y)\to(2,\,0)} \dfrac{1-\cos(xy)}{|x-2|+|y|}$.

8. Визначити, в яких точках має границю дана функція комплексної змінної та знайти її:

1) $f(z)=\dfrac{z}{|z|}$; 2) $f(z)=\dfrac{z\cdot\operatorname{Im} z}{|z|}$; 3) $f(z)=\dfrac{\overline{z}\cdot\operatorname{Re} z}{|z|^2}$;

4) $f(z)=\dfrac{\operatorname{Im} z^2}{z}$; 5) $f(z)=\arg z$;

6) $f(z)=\begin{cases}\arg z, & \text{якщо}\ \operatorname{Im} z\geq 0,\\ 2\pi+\arg z, & \text{якщо}\ \operatorname{Im} z<0;\end{cases}$ 7) $f(z)=\dfrac{\exp z-1}{z}$;

8) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$; 9) $f(z)=\dfrac{\operatorname{tg} 2z}{\sin 3z}$;

10) $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^2-5z+4}$; 11) $f(z)=\ln z$.

Зразки розв'язування задач

1. 3) Якщо $\lim\limits_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} f(x,\,y)=a$, то $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ 0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x,\,y)-a|<\varepsilon$, коли a, x_0 та y_0 — скінченні. Візьмемо $\delta_1(\varepsilon)=\delta(\varepsilon)/2$. Тоді якщо $0<|x-x_0|<\delta_1(\varepsilon)$ і $0<|y-y_0|<\delta_1(\varepsilon)/2$, то $0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\dfrac{\delta^2}{4}+\dfrac{\delta^2}{4}<\delta^2$, тому $|f(x,\,y)-a|<\varepsilon$. Отже, необхідність твердження виконується.

Навпаки, якщо $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ \left(0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)\ \text{і}\ 0<|y-y_0|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow\right.$ $\left.\Rightarrow |f(x,y)-a|<\varepsilon\right)$, то в точках $(x,\,y)$: $x=x_0$, а $y\neq y_0$ або $x\neq x_0$, а $y=y_0$, для яких виконується нерівність $0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta$, функція $f(x,\,y)$ може набувати яких завгодно значень або може бути навіть невизначеною, тому для таких точок не можна стверджувати, що $|f(x,\,y)-a|<\varepsilon$. Таким чином, достатність твердження не виконується.

9) Дана функція не визначена у точках осі Oy, тому вона не визначена у проколеному околі точки $(0,\,2)$ і, отже, дана функція не має границі в точці $(0,\,2)$.

Якщо доозначити функцію f, поклавши $f(x, y) = 2$, коли $x = 0$, то дістанемо

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{xy} \cdot y \to 2, & \text{якщо}(x, y) \to (0,2) \quad \text{і} \quad x \neq 0, \\ 2 \to 2, & \text{якщо}(x, y) \to (0,2) \quad \text{і} \quad x = 0. \end{cases}$$

Тому $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 2)} f(x, y) = 2.$

2. 2) Оскільки $z \approx -i$, але $z \neq -i$, то $f(z) = \dfrac{z+i}{(z+i)(z-i)} = \dfrac{1}{z-i} \approx -\dfrac{1}{2i}$. Тепер покажемо, що $\lim\limits_{z\to -i} f(z) = -\dfrac{1}{2i}$, тобто $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta(\varepsilon) > 0 :\ 0< |z + i| < \delta \Rightarrow \left|f(z)+\dfrac{1}{2i}\right| < \varepsilon$. Для фіксованого $\varepsilon > 0$ маємо

$$\left|f(z)+\frac{1}{2i}\right| = \left|\frac{1}{z-i}+\frac{1}{2i}\right| = \frac{|z+i|}{2|z-i|} = \frac{|z+i|}{2|z+i-2i|} \leq \frac{|z+i|}{2(2-|z+i|)} < \frac{|z+i|}{2},$$

якщо $|z + i| \leq 1$.

Якщо вимагати, щоб $\dfrac{\delta}{2} \leq \varepsilon$, тобто визначити $\delta(\varepsilon) = \min\{2\varepsilon, 1\}$, то дістанемо, що з нерівності $0 < |z + i| < \delta(\varepsilon)$ випливає

$$\left|f(z)+\frac{1}{2i}\right| < \frac{|z+i|}{2} < \frac{\delta}{2} \leq \varepsilon,$$

а це й означає, що $\lim\limits_{z\to -i} \dfrac{z+i}{z^2+1} = -\dfrac{1}{2i}$.

3. Припустимо, що $\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = a \neq \infty$. Тоді

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists O(x_0, y_0):\ (x, y) \in O^*(x_0, y_0) \Rightarrow |f(x, y)-a| < \varepsilon.$$

Якщо в останній нерівності перейти до границі при $y \to y_0$, то дістанемо, що $\left|\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)-a\right| \leq \varepsilon$, коли $x \in O^*(x_0)$, тому

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x, y)\right) = a.$$

5. 4) Нехай $y = 1$. Тоді $\lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = 0$. Якщо $y \neq 1$, то $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{y-1} = 0$, оскільки множник $x \to 0$, а множник $\sin\dfrac{1}{y-1}$ обмежений. Отже, $\lim\limits_{y\to 1}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)\right) = 0$. Якщо $x = 0$, то $\lim\limits_{y\to 1} f(x, y) = 0$, а якщо $x \neq 0$, то $f(x, y) = x\sin\dfrac{1}{y-1}$ не має границі при $y \to 1$. Тому повторна границя $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 1} f(x, y)\right)$ не існує. Разом з тим $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 1)} f(x, y) = \lim\limits_{(x, y)\to(0, 1)} x\varphi(x, y) = 0$, оскільки множник $x \to 0$, а функція

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{y-1}, & \text{якщо} \quad y \neq 1, \\ 0, & \text{якщо} \quad y = 1, \end{cases}$$

є обмеженою.

7. 8) Оскільки

$$f(x, y)=\frac{1-\cos(xy)}{|x-2|+|y|}=\frac{2\sin^2\frac{xy}{2}}{x^2y^2/4}\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\frac{y}{|x-2|+|y|}\cdot y,$$

коли $y \neq 0$, то, враховуючи, що при $(x, y) \to (2, 0)$ перший множник прямує до 1, другий — до 2, третій — обмежений, а четвертий прямує до 0, маємо $f(x, y) \to 0$, коли $(x, y) \to$ $\to (2, 0)$ і $y \neq 0$. Якщо $y = 0$, то $f(x, y) = 0$ $\forall x \neq 2$. Отже, $\lim\limits_{(x, y)\to(2,0)} f(x, y) = 0$.

§ 14.3. Неперервність функції (оператора, функціонала). Найпростіші властивості неперервних функцій

Нехай функція f є визначеною на множині $E \subset (M, \rho)$ і набуває значення з метричного простору (M_1, ρ_1). Тоді функцію f називають *неперервною в точці* $x_0 \in E$, якщо $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta(\varepsilon) > 0:\ x \in O_\delta(x_0) \cap E \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(f(x_0))$.

Суть поняття неперервності функції f в точці $x_0 \in E$ полягає в тому, що $f(x) \approx f(x_0)$, якщо $E \ni x \approx x_0$.

Функцію f називають *неперервною на множині* E, якщо вона неперервна у кожній точці $x_0 \in E$.

Критерії неперервності

1. Якщо $x_0 \in E \cap E'$, то f — неперервна в точці $x_0 \in E \Leftrightarrow \lim\limits_{E \ni x \to x_0} f(x) =$ $= f(x_0)$ (мовою границь).

2. Функція f є неперервною в точці $x_0 \in E$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ для будь-якої послідовності (x_n): $x_n \in E$ $\forall n$ і $x_n \to x_0$, $n \to \infty$ (мовою послідовностей).

3. Нехай $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy \in E$ і $z_0 = x_0 + iy_0 \in E$. Тоді функція f є неперервною в точці z_0 тоді й тільки тоді, коли функції u та v є неперервними в точці (x_0, y_0) (функції f комплексної змінної).

4. Нехай маємо $f: (M, \rho) \to (M_1, \rho_1)$, тоді функція f є неперервною на M тоді й тільки тоді, коли для будь-якої відкритої множини $G \subset (M_1, \rho_1)$ множина $f^{-1}(G) = \{x \in M : f(x) \in G\}$ є відкритою у просторі (M, ρ) (мовою відкритих множин).

Найпростіші властивості неперервних функцій, які є операторами або функціоналами, аналогічні властивостям неперервних функцій дійсної змінної. Зокрема, має місце така теорема.

Теорема (про неперервність складної функції). *Якщо функція f неперервна в точці $x_0 \in E \subset (M, \rho)$, а функція φ неперервна в точці $t_0 \in T \subset \subset (M_2, \rho_2)$ і $\varphi(t_0) = x_0$, а $\varphi(t) \in E$, то складна функція $f \circ \varphi$ неперервна в точці $t_0 \in T$.*

Якщо розглядувані функції є функціоналами, то для них зберігаються властивості про неперервність суми, різниці, добутку та частки, а також властивість про неперервність модуля неперервної функції.

Неперервною кривою у просторі $\mathbf{R}^n$ називають множину Г значень векторнозначної функції дійсної змінної: $w = w(t)$, $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$, $w \in \mathbf{R}^n$. При цьому функцію $w = w(t)$, $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$, $w \in \mathbf{R}^n$, називають *параметричним рівнянням* кривої Г.

Зокрема, *неперервною кривою у просторі* $\mathbf{R}^2$ називають множину $\Gamma = \left\{ w = (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}^2 : t \in \langle \alpha; \beta \rangle \right\}$, де $x = x(t)$, $y = y(t)$ — неперервні на $\langle \alpha; \beta \rangle$. *Неперервною кривою у просторі* $\mathbf{C}$ називають множину $\Gamma = \{ z = z(t) \in \mathbf{C} : t \in \langle \alpha; \beta \rangle \}$, де $z = z(t)$ — неперервна функція на $\langle \alpha; \beta \rangle$.

Частину дуги AB кривої Г, що відповідає відрізку $[a; b] \subset \langle \alpha; \beta \rangle$, називають *неперервною дугою*, точка A при цьому відповідає параметру $t = a$ і називається *початковою точкою дуги*, а точка B — параметру $t = b$ і називається *кінцевою точкою дуги*. Якщо $A = B$, то дуга AB називається замкненою, або контуром.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) якщо функція f неперервна в точці $x_0 \in E$, то $\lim\limits_{E \ni x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;

2) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

3) нехай маємо $f: E \to (M_1, \rho_1)$ і E лежить у просторі ізольованих точок, тоді f є неперервною на E функцією;

4) якщо функція f неперервна в точці $x_0 \in E$, то вона обмежена на $E \cap O(x_0)$ для деякого $O(x_0)$;

5) якщо функція f неперервна на множині E, то вона обмежена на ній;

6) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

7) якщо функція f неперервна на відкритій (замкненій) множині E, то і $f(E)$ — відкрита (замкнена) множина.

2. Довести, що коли функція $f(x, y)$ неперервна на множині $P = \{(x, y)$: $x \in \langle \alpha; \beta \rangle, y \in \langle c; d \rangle\}$, то вона неперервна по кожній змінній x та y окремо, тобто $f(x, y_0)$ — неперервна на $\langle a; b \rangle$ $\forall y_0 \in \langle c; d \rangle$, а $f(x_0; y)$ — неперервна на $\langle c; d \rangle$ $\forall x_0 \in \langle a; b \rangle$.

3. Розглянемо функцію

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{якщо } (x, y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{якщо } (x, y)=(0,0).\end{cases}$$

Визначити, чи правильне твердження, обернене до твердження 2.

4. Показати, що функція

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2 y}{x^4+y^4}, & \text{якщо } (x, y)=(0,0),\\ 0, & \text{якщо } (x, y)\neq(0,0),\end{cases}$$

неперервна на кожній прямій. Чи є ця функція неперервною в $\mathbf{R}^2$?

5. Визначити, де є неперервною дана функція:

1) $f(x, y)=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$; 2) $f(x, y)=\dfrac{x+2y}{x-y^2}$;

3) $f(x, y)=\dfrac{x^2-y}{x^2+y^2-1}$; 4) $f(x, y)=\left[\sqrt{x^2+y^2}\right]$;

5) $f(x, y)=\dfrac{xy}{x^2-4y^2}$; 6) $f(x, y)=\dfrac{x^2-4y^2}{xy}$;

7) $f(x, y)=\sin\dfrac{1}{x-y}$; 8) $f(x, y)=\dfrac{1}{\sin(x+y)}$;

9) $f(x, y)=\cos\dfrac{1}{x^2-y^2-1}$; 10) $f(x, y)=\operatorname{tg} xy$;

11)• $f(x, y)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\notin\mathbf{Q},\\ y, & \text{якщо } x\in\mathbf{Q};\end{cases}$ 12) $f(x, y)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\neq y,\\ x, & \text{якщо } x=y.\end{cases}$

6. Визначити, чи можна дану функцію двох змінних доозначити в точці (0, 0) так, щоб вона стала неперервною в цій точці:

1) $f(x, y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$; 2) $f(x, y)=\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

3) $f(x, y)=\dfrac{x^3y^3}{x^4+y^4}$; 4) $f(x, y)=x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

5) $f(x, y)=\dfrac{x+y}{|x|+|y|}$; 6) $f(x, y)=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$;

7) $f(x, y)=\arcsin\dfrac{x}{y}$; 8) $f(x, y)=\operatorname{arctg}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.

7. Визначити, де є неперервною дана функція комплексної змінної:

1) $f(z)=\dfrac{z\cdot\operatorname{Re}z}{|z|}$; 2) $f(z)=\dfrac{z\cdot\operatorname{Im}z}{|z|^2}$; 3) $f(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{|z|}$;

4)• $f(z)=\dfrac{\overline{z}\cdot\operatorname{Re}z}{|z|^2}$; 5) $f(z)=\arg z$; 6) $f(z)=z\arg z$;

7) $f(z)=\exp z$; 8) $f(z)=\sin z$; 9) $f(z)=\cos z$;
10) $f(z)=\operatorname{tg} z$; 11) $f(z)=\operatorname{ch} z$; 12) $f(z)=\operatorname{ctg} z$;
13) $f(z)=\operatorname{sh} z$; 14) $f(z)=\operatorname{cth} z$; 15) $f(z)=\operatorname{th} z$;
16) $f(z)=z^{\alpha}$ — головне значення; 17) $f(z)=\ln z$;

18) $f(z)=a^z$ — головне значення.

8. Визначити, чи можна функції 1) — 6) із попередньої вправи доозначити в точці $z=0$ так, щоб вони стали неперервними в цій точці.

9. Записати рівняння даної кривої у параметричній формі для просторів $\mathbf{R}^2$ та $\mathbf{C}$:

1) пряма $ax+by+c=0,\ b\neq 0$; 2) коло $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$;

3) відрізок, що сполучає точки $A=(x_0,y_0)$ і $B=(x_1,y_1)$;

4) парабола $y=ax^2+bx+c$; 5) еліпс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

6) дуга кола $x^2+y^2=r^2$, що лежить у першій чверті;

7) гіпербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

10. Визначити, які неперервні криві з попереднього завдання є дугами, а які контурами.

11. Знайти множину значень даної функції та визначити, чи є вона компактною множиною:

1) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$; 2)• $f(x,y)=|x+y|-\sqrt{1-x^2-y^2}$;

3) $f(x,y)=\arcsin\dfrac{x}{y}$; 4) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

5) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

12. Чи є функціонал $f(x)=\int\limits_a^b x(t)\,dt\ \ \forall x(t)\in C[a;b]$ неперервним на $C[a;b]$?

13. Нехай оператор f визначено на $\mathbf{R}^1$ та набуває значення у просторі ізольованих точок. Визначити умови неперервності f на $\mathbf{R}^1$.

14. Нехай функціонал f визначено на просторі (M,ρ) ізольованих точок. Чи є f неперервним на M?

15. Кажуть, що функція $z = f(x, y)$ задовольняє в прямокутнику $P = \{(x, y): x \in [a; b], y \in [c; d]\}$ умову Ліпшиця за змінною y, якщо $\exists L > 0$: $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$ $\forall (x, y_1)$ та $(x, y_2) \in P$. Визначити, чи є f неперервною на P.

16. Показати, що відкрита у просторі $\mathbf{R}^n$ або $\mathbf{C}$ множина D є зв'язною у цьому просторі тоді й тільки тоді, коли для будь-яких точок A і B, що належать D, існує неперервна дуга $AB \subset D$.

17. Довести, що коли функція $z = f(x, y)$ неперервна на множині $P = \{(x, y): x \in \langle a; b\rangle, y \in \langle c; d\rangle\}$ за кожною змінною x та y окремо і монотонна за якоюсь змінною x або y, то ця функція неперервна на P (*теорема Юнга*).

18. Нехай відображення $f: \mathbf{C} \to \mathbf{R}^2$ задається формулою $f(z) = (x, y)$ $\forall z = x + iy \in \mathbf{C}$. Довести, що:

1) множина Γ є неперервною кривою в $\mathbf{C}$ тоді й тільки тоді, коли $f(\Gamma)$ — неперервна крива в $\mathbf{R}^2$;

2) множина D відкрита в $\mathbf{C}$ тоді й тільки тоді, коли $f(D)$ — відкрита в $\mathbf{R}^2$;

3) множина D є областю в $\mathbf{C}$ тоді й тільки тоді, коли $f(D)$ — область в $\mathbf{R}^2$.

Зразки розв'язування задач

3. Зафіксуємо довільне $y_0 \in \mathbf{R}$. Тоді якщо $y_0 = 0$, то $f(x, y_0) = f(x, 0) = 0$ $\forall x \in \mathbf{R}$, звідки функція $\varphi(x) = f(x, 0)$ — неперервна на $\mathbf{R}$. Якщо $y_0 \ne 0$, то $f(x, y_0) = \dfrac{xy_0}{x^2 + y_0^2}$ є неперервною за змінною x функцією як частка неперервних функцій, оскільки $x^2 + y_0^2 \ge y_0^2 > 0$. Отже, дана функція неперервна за змінною x. Аналогічно можна показати, що f неперервна за змінною y. Разом з тим, якщо $x_n = y_n \ne 0$, але $x_n \to 0$, $n \to \infty$, то $f(x_n, y_n) = \dfrac{x_n^2}{2x_n^2} = \dfrac{1}{2} \not\to f(0, 0) = 0$, $n \to \infty$. Тому функція f не є неперервною в точці (0, 0). Отже, твердження, обернене до твердження 2, неправильне.

5. 11) Розглянемо спочатку точку $(x_0, 0)$, що лежить на осі Ox. Якщо $(x_n, y_n) \to (x_0, 0)$, $n \to \infty$, то

$$f(x_n, y_n) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x_n \notin \mathbf{Q}, \\ y_n \to 0, & \text{якщо} \quad x_n \in \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Тому $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = 0 = f(x_0, 0)$, тобто функція f неперервна на осі Ox.

Якщо точка (x_0, y_0) не лежить на осі Ox, то $y_0 \ne 0$. Візьмемо точку $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ і таку, що $x_{2k} \in \mathbf{Q}$, а $x_{2k-1} \notin \mathbf{Q}$. Тоді $f(x_{2k}, y_{2k}) = y_{2k} \to y_0 \ne 0, k \to \infty$, а $f(x_{2k-1}, y_{2k-1}) = 0 \to 0$, $k \to \infty$. Отже, функція f не має границі в точці (x_0, y_0), якщо $y_0 \ne 0$, тому функція f не є неперервною в цих точках.

Отже, функція f неперервна на осі Ox і розривна в усіх інших точках площини Oxy.

7. 4) Оскільки $f(z)=\dfrac{(x-iy)x}{x^2+y^2}=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}-i\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, то

$$u(x,y)=\operatorname{Re}f(z)=\frac{x^2}{x^2+y^2},\quad v(x,y)=\operatorname{Im}f(z)=-\frac{xy}{x^2+y^2}.$$

За властивостями неперервних функцій функції u і v неперервні скрізь на площині Oxy, крім точки $(0, 0)$, в якій вони не визначені. Тому функція f неперервна на множині $D = \mathbf{C}\setminus\{0\}$. Оскільки $u(x, 0) = 1\ \ \forall x \neq 0$, а $u(0, y) = 0\ \ \forall y \neq 0$, то функція u не має границі в точці $(0, 0)$, тому функція f не має границі в точці $z = 0$, а отже, її не можна доозначити у цій точці так, щоб вона стала в ній неперервною.

11. 2) Областю визначення функції f є множина $D(f)=\left\{(x,y):1-x^2-y^2\ge 0\right\}= =\left\{(x,y):x^2+y^2\le 1\right\}$, тобто замкнений круг з центром у точці $(0, 0)$ і радіусом $r = 1$. Оскільки в точці $(0, 0)$ $|x + y| = 0$, і це найменше з можливих значень, а $\sqrt{1-x^2-y^2}=1$, і це найбільше з можливих значень, то $f(0,0)=\min\limits_{(x,y)\in D(f)}\left(|x+y|-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)=-1$. Довільну точку $(x, y) \in D(f)$ можна записати у вигляді $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, де $\rho \in [0; 1]$, а $\varphi \in [0; 2\pi]$, звідки

$$f(x,y)=\rho|\cos\varphi+\sin\varphi|-\sqrt{1-\rho^2}=\rho\left|\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)\right|-\sqrt{1-\rho^2}.$$

В останньому виразі зменшуване набуває найбільшого значення при $\rho = 1$ та $\varphi=\frac{\pi}{4}$, і це значення дорівнює $\sqrt{2}$. При цих самих ρ та φ $\sqrt{1-\rho^2}$ набуває найменшого значення, що дорівнює 0. Тому

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\max_{(x,y)\in D(f)}\left(|x+y|-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)=\sqrt{2}.$$

Оскільки, крім того, для $\varphi=\frac{\pi}{4}$ маємо $f\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{2},\rho\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\rho\sqrt{2}-\sqrt{1-\rho^2}=\varphi(\rho)$ — неперервна зростаюча функція на $[0; 1]$, то за теоремою Больцано — Коші множина значень цієї функції, а отже, і функції f збігається з відрізком $\left[-1;\sqrt{2}\right]$. Тому ця множина є компактною у просторі $\mathbf{R}^1$.

§ 14.4. Властивості функцій, неперервних на компактних та зв'язних множинах

Нехай функція f є неперервною на компактній множині $E \in (M, \rho)$, а множина її значень $f(E)\subset(M_1,\rho_1)$. Тоді правильні такі твердження.

1. *Компактність множини значень*: множина $f(E)$ є компактною у просторі (M_1,ρ_1).

2. *Замкненість та обмеженість множини значень*: множина $f(E)$ є замкненою та обмеженою у просторі (M_1,ρ_1).

3. *Найбільше та найменше значення f*: якщо f — дійсний функціонал, то існують $\max\limits_E f(x)$ і $\min\limits_E f(x)$.

4. *Неперервність оберненої функції*: якщо $f:\ E \leftrightarrow f(E)$, то обернена функція f^{-1} є неперервною на множині $f(E)$.

5. *Рівномірна неперервність*: функція f рівномірно неперервна на E, тобто $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ \rho(x_1,x_2)<\delta(\varepsilon)\Rightarrow\rho_1(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon\ \ \forall x_1,x_2\in E.$

Зокрема, кожна функція f кількох змінних, що є неперервною на замкненій обмеженій множині, є обмеженою і рівномірно неперервною на цій множині, набуває на ній найбільшого та найменшого значень.

Якщо f — функція комплексної змінної, що є неперервною на замкненій обмеженій множині, то вона обмежена та рівномірно неперервна на цій множині, а її модуль набуває на ній найбільшого та найменшого значень.

Якщо функція f неперервна на зв'язній множині $E\subset(M,\rho)$, то множина її значень $f(E)$ також є зв'язною у просторі (M_1,ρ_1). Зокрема, якщо f — дійсний функціонал, то він набуває усіх своїх проміжних значень, тобто $f(E)=\langle\alpha,\beta\rangle$, де $\alpha=\inf\limits_E f(x)$, $\beta=\sup\limits_E f(x)$. Наприклад, кожна функція кількох змінних, що є неперервною в області D, набуває в цій області усіх своїх проміжних значень.

Вправи

1. Визначити, чи правильні дані твердження (виконати усно):

1) якщо функція f неперервна на $E\subset(M,\rho)$ і $f(E)$ — компактна множина в просторі (M_1,ρ_1), то і E — компактна в просторі (M,ρ);

2) якщо $f:\ X\leftrightarrow Y$, f — неперервна функція на множині $X\subset(M,\rho)$, а Y — обмежена множина у просторі (M,ρ), то і X — обмежена у просторі (M,ρ);

3) якщо функція комплексної змінної неперервна на замкненій обмеженій множині, то вона має на цій множині найбільше та найменше значення;

4) якщо функція f рівномірно неперервна на E, то вона і неперервна на E;

5) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

6) якщо функція комплексної змінної рівномірно неперервна на E, то E — обмежена множина в $\mathbf{C}$;

7) функція $f(z)=2z+1$ рівномірно неперервна на $\mathbf{C}$.

2. Показати, що для неперервної в замкненій обмеженій області $\overline{D}$ функції f комплексної змінної існують $\max\limits_{\overline{D}}|f(z)|=M$ і $\min\limits_{\overline{D}}|f(z)|=m$, причому $\forall H\in[m;M]\ \exists z_0\in\overline{D}:\ |f(z_0)|=H$.

3. Визначити, чи є обмежсною дана функція f на вказаній множині E:

1) $f(x,y)=x^2+y^2-\sqrt{1-x^2-y^2}$, $E=D(f)$;

2)• $f(x, y) = (x+y)e^{xy}$, $E = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ 0 \le x+y \le 1\right\}$;

3) $f(z) = \sin z$, $E = \mathbf{C}$;

4) $f(z) = \cos z$, $E = \{z \in \mathbf{C} :\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 2\pi\}$;

5) $f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$, $E = D(f)$;

6) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\,dt$, $E = C\,[0;\,1]$;

7) f — будь-який оператор, значення якого належать до простору ізольованих точок, $E = D(f)$.

4. Визначити, чи набуває дана функція f найбільшого та найменшого значень на вказаній множині E:

1) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $E = D(f)$;

2) $f(x, y) = (x+y)e^{xy}$, $E = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x+y \le 1\right\}$;

3) $f(z) = i\sin z$, $E = \{z \in \mathbf{C} :\ \operatorname{Re} z = 0\}$;

4)• $f(z) = \cos z$, $E = \{z \in \mathbf{C} :\ \operatorname{Re} z = 0\}$;

5) $f(z) = \exp z$, $E = \{z \in \mathbf{C} :\ |z| = 1\}$;

6) $f(x) = \int\limits_a^b x(t)\,dt$, $E = \{x = x(t) \in C\,[a;\,b] :\ |x(t)| \le 1\ \ \forall t \in [a;\,b]\}$;

7) f — будь-який функціонал, що визначений у просторі ізольованих точок, E — компактна множина в цьому просторі ізольованих точок. Чи може множина $f(E)$ бути нескінченною?

5. Визначити, чи є дана функція f рівномірно неперервною на вказаній множині E:

1) $f(x, y) = \ln\left(1 - x^2 - y^2\right)$, $E = D(f)$;

2) $f(x, y) = \arcsin\left(x^2 + y^2\right)$, $E = D(f)$;

3) $f(x, y) = \dfrac{x+y}{xy}$, $E = D(f)$; 4) $f(x, y) = ax + by + c$, $E = \mathbf{R}^2$;

5) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $E = D(f)$; 6)• $f(x, y) = \arcsin\dfrac{x}{y}$, $E = D(f)$;

7) $f(x, y) = \arccos\dfrac{x}{y}$, $E = \{(x, y) \in D(f) :\ |y| \ge \delta > 0\}$;

8) $f(z) = \sin z$, $E = \mathbf{C}$; 9) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\,dt$, $E = C\,[0;\,1]$.

6. Довести, що коли функція $f(x, y)$ неперервна за змінною x і задовольняє в області D умову Ліпшиця за змінною y, то вона рівномірно неперервна в D.

7. Визначити, чи є зв'язною множина значень даної функції f на вказаній множині E:

1) $f(x, y)=\dfrac{1}{x-y}$, $E=D(f)$; 2)• $f(x, y)=\dfrac{y}{x-y}$, $E=D(f)$;

3) $f(x, y)=\dfrac{y}{|x|+|y|}$, $E=D(f)$; 4) $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$, $E=D(f)$;

5) $f(z)=\dfrac{1}{\operatorname{Re} z-\operatorname{Im} z}$, $E=\{z \in D(f): \operatorname{Re} z>0\}$;

6) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{|z|+1}, & \text{якщо } z \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } z=0,\end{cases}$ $E=\{z \in \mathbf{C}: |z|<1\}$.

8$^{\bullet}$. Показати, що функція f рівномірно неперервна на множині E тоді і тільки тоді, коли $\rho_1(f(x_n), f(y_n)) \to 0$, $n \to \infty$, для будь-яких послідовностей (x_n) та (y_n): x_n та $y_n \in E$ і $\rho(x_n, y_n) \to 0, n \to \infty$.

Зразки розв'язування задач

3. 2) Множина E, на якій функція f визначена та неперервна, є смугою, що обмежена прямими $y=-x$ та $y=1-x$, тому E — замкнена, але необмежена множина. Отже, скористатись твердженням про обмеженість множини значень неперервної функції не можна. Разом з тим, якщо розбити множину E на три частини

$$E_1=\{(x, y) \in E: x<0\}, \quad E_2=\{(x, y) \in E: x \geq 0 \text{ і } y \geq 0\} \text{ і } E_3=\{(x, y) \in E: y<0\},$$

то дістанемо, що на множинах E_1 і E_3

$$xy<0 \Rightarrow \mathrm{e}^{xy}<1 \Rightarrow 0 \leq f(x, y)=(x+y)\mathrm{e}^{xy}<1 \quad \forall (x, y) \in E_1 \cup E_3 .$$

Множина E_2 замкнена й обмежена у просторі $\mathbf{R}^2$, тому f обмежена на E_2. Отже, f обмежена на E_1, E_2 і E_3. Тому вона обмежена і на $E=E_1 \cup E_2 \cup E_3$.

4. 4) За умовою $z=iy \ \forall z \in E \Rightarrow f(z)=f(iy)=\cos iy=\frac{1}{2}(\exp(-y)+\exp(y))=$ $=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}\right) \ \forall z \in E \Rightarrow \min\limits_E f(z)=f(0)=1$, а $\max\limits_E f(z)$ не існує.

5. 6) Маємо $E=D(f)=\left\{(x, y):\left|\frac{x}{y}\right| \leq 1\right\}=\{(x, y):|y| \geq|x| \text{ і } y \neq 0\}$. Ця множина має вигляд, зображений на рис. 4.

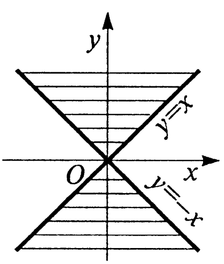


Рис. 4

Множина E не є компактною у просторі $\mathbf{R}^2$, тому не можна стверджувати рівномірну неперервність функції f на E (порівняйте із вправою 5.2)).

Суть поняття рівномірної неперервності функції f полягає в тому, що близькість точок (x', y') та (x'', y'') з множини E має гарантувати близькість значень функції в цих точках. Проте якщо взяти точки

$$(x_n', y_n')=\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \text{ та } (x_n'', y_n'')=\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right),$$

то

$$\rho((x'_n, y'_n), (x''_n, y''_n)) = \sqrt{(x'_n - x''_n)^2 + (y'_n - y''_n)^2} = \sqrt{\frac{4}{n^2}} = \frac{2}{n}\sqrt{2} \to 0,\ n \to \infty,$$

але

$$|f(x'_n, y'_n) - f(x''_n, y''_n)| = \left|\arcsin\frac{x'_n}{y'_n} - \arcsin\frac{x''_n}{y''_n}\right| = |\arcsin 1 - \arcsin(-1)| =$$

$$= \left|\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right| = \pi \not\to 0,\ n \to \infty.$$

Отже, точки (x'_n, y'_n) та (x''_n, y''_n) можуть бути як завгодно близькими одна до одної, але цього не можна сказати про значення функції f у цих точках. Таким чином, дана функція не є рівномірно неперервною на E.

7. 2) Оскільки $E = D(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ \ x \neq y\}$, то ця множина не є зв'язною, бо вона складається з двох півплощин, що визначаються прямою $y = x$. Тому не можна скористатися твердженням про зв'язність множини $f(E)$. Разом з тим $E = E_1 \cup E_2$, де $E_1 = \{(x, y) \in E :\ x > y\}$, а $E_2 = \{(x, y) \in E :\ x < y\}$, причому E_1 та E_2 — зв'язні множини. На прямій $x - y = 1$, яка лежить у множині E_1, функція f набуває значення $f(x, y) = y \in (-\infty; +\infty)$. Тому $f(E) = (-\infty, +\infty)$ і, отже, є зв'язною множиною.

8. Припустимо, що f рівномірно неперервна на множині E, а (x_n) та (y_n) — довільні фіксовані послідовності: $x_n, y_n \in E$ і $\rho(x_n, y_n) \to 0, n \to \infty$. Тоді $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\ \rho(x, y) < \delta(\varepsilon) \to \rho_1(f(x), f(y)) < \varepsilon\ \ \forall x, y \in E$. За означенням границі послідовності для числа $\delta(\varepsilon) > 0$ $\exists n_0(\varepsilon) : n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x_n, y_n) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \rho_1(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$. Отже, $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0(\varepsilon) :\ n > n_0(\varepsilon)\ \Rightarrow\ \rho_1(f(x_n),\ f(y_n)) < \varepsilon$, а це означає, що $\rho_1(f(x_n), f(y_n)) \to 0,\ n \to \infty$. Необхідність твердження доведено.

Припустимо, що $\rho_1(f(x_n), f(y_n)) \to 0,\ n \to \infty$, для будь-яких послідовностей (x_n) та (y_n): $x_n, y_n \in E$ і $\rho(x_n, y_n) \to 0,\ n \to \infty$, але функція f не є рівномірно неперервною на E. Тоді $\exists \varepsilon_0 > 0 :\ \forall \delta > 0\ \ \exists x,\ y \in E :\ \ \rho(x, y) < \delta$, але $\rho_1(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0$. Вважаючи $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, знайдемо точки x_n та $y_n \in E\ :\ \ \rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, але $\rho_1(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0\ \ \forall n \in \mathbf{N}$. Тоді $\rho(x_n, y_n) \to 0$, але $\rho_1(f(x_n), f(y_n)) \not\to 0,\ n \to \infty$, що неможливо за припущенням. Цим доведено достатність твердження.

§ 14.5. Теорема Банаха про нерухому точку стискуючого відображення

Відображення (оператор) $f\colon\ E \to (M, \rho)$, де $E \subset (M, \rho)$, називають *стискуючим*, якщо $\exists \alpha \in [0, 1) :\ \rho(f(x), f(y)) \leq \alpha\rho(x, y)\ \ \ \forall x,\ y \in E$.

Кожне стискуюче відображення $f\colon\ E \to (M, \rho)$ є неперервним на E.

Нерухомою точкою відображення $f\colon X \to X$ називають таку точку $x^* \in X$, для якої $f(x^*) = x^*$.

Нехай відображення $f: x \to x$ неперервне на x, x_0 — довільна точка з X і $x_n = f(x_{n-1})$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Якщо (x_n) — збіжна послідовність і $\lim_{n\to\infty} x_n \in X$, то $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$ є нерухомою точкою відображення f, а метод відшукання цієї точки за допомогою вказаної послідовності (x_n) називається *методом послідовних наближень*.

Теорема (Банаха про нерухому точку стискуючого відображення). *Нехай (M, ρ) — повний метричний простір, E — замкнена множина в (M, ρ) і $f: E \to E$ — стискуюче відображення. Тоді існує єдина точка $x^* \in E$: x^* — нерухома точка f, причому x^* може бути знайденою методом послідовних наближень.*

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) якщо відображення f неперервне на $D(f)$, то воно стискуюче;

2) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

3) якщо $f: E \to E$ — стискуюче відображення, то $\exists \alpha > 0: \rho(f(x), f(y)) \le \le \alpha\rho(x, y)$ $\forall x, y \in E$;

4) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

5) кожне відображення $f: X \to X$ має нерухому точку;

6) кожне стискуюче відображення має нерухому точку;

7) якщо відображення $f: X \to X$ має нерухому точку, то воно стискуюче;

8) кожна точка множини E може бути нерухомою точкою відображення $f: E \to E$.

2. Нехай відображення $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ задається рівністю $f(x) = y$, де $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$, а $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbf{R}^n$ і $y_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i + b_k$, причому числа a_{ki} і b_k $(1 \le i, k \le n)$ — задані. Показати, що коли $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ki}| = \alpha < 1$, то f — стискуюче відображення.

3. Визначити, чи є стискуючим дане відображення f:

1) $f(x) = \dfrac{1+\cos x}{10}, x \in \mathbf{R}$; 2) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}, x \in [0; 4]$;

3) $f(x) = \sqrt[3]{x+2}, x \in [1; 2]$; 4) $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x; x \in \mathbf{R}$;

5) $f(x, y) = (u, v) \in \mathbf{R}^2$, де $u = \dfrac{x^2+y}{20}+2$, $v = \dfrac{x+y^2}{20}+1$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$;

6) $f(x, y) = (u, v) \in \mathbf{R}^2$, де $u = \sqrt{x+2y} - 0{,}71$, $v = \sqrt{y-x} + 1$, $(x, y) \in D(u) \cap D(v)$;

7)• $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{якщо} \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad x = 0, \end{cases}$ $x \in [0; 1]$;

8) $f(x) = q \ln x$, $x \in [1; +\infty)$, де $q \in (0; 1)$ — фіксоване;

9) $f(x) = \dfrac{x^2}{2|x|}$, $x \in D(f)$.

4. Нехай $F: C[a; b] \to C[a; b]$, де $F(x) = x_0 + \int\limits_a^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$, $x = x(\tau) \in C[a; b]$, f — функція, визначена на множині $P = \{(x, y): a \le x \le b, -\infty < y < +\infty\}$, $\exists H > 0: |f(x, y') - f(x, y'')| \le H|y' - y''|$ $\forall (x, y'), (x, y'') \in P$. Показати, що F — стискуюче відображення, якщо $H(b - a) < 1$.

5. Нехай $F: C[a; b] \to C[a; b]$, де $F(x) = \varphi(t) + \lambda \int\limits_a^t K(t, \eta) x(\eta) d\eta$, $x = x(\eta) \in C[a; b]$, $\varphi(t) \in C[a; b]$, $\lambda \in \mathbf{R}$ і $K(x, y)$ — неперервна на множині $P = \left\{(x; y) \in \mathbf{R}^2: a \le x, y \le b\right\}$ функція. Показати, що F — стискуюче відображення, якщо $|\lambda| \max\limits_P |K(x, y)| (b - a) < 1$.

6. Перевірити, чи існують нерухомі точки даних відображень та знайти їх:

1) $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbf{R}$;

2) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$;

3) $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$;

4) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $x \in [1; 2]$;

5) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$, $x \in \left[2; \dfrac{5}{2}\right]$;

6) $f(x) = x - \operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{2}$, $x \in \mathbf{R}$;

7) $f(x(t)) = -x(t)$ $\forall x(t) \in C[0; 1]$;

8) $f(x(t)) = |x(t)|$ $\forall x(t) \in C[0; 1]$;

9)• $f(x(t)) = \int\limits_0^t x(\tau) d\tau + 1$ $\forall x \in C[0; 1]$, $t \in [0; 1]$;

10) $f(x, y) = (x + 1, y - 2)$ $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$.

7•. Нехай виконано умови теореми Банаха про нерухому точку стискуючого відображення $f: E \to E$, $E \ni x_0$ — довільна точка і $x_n = f(x_{n-1})$ $\forall n \in \mathbf{N}$, а x^* — нерухома точка відображення f. Показати, що абсолютна похибка наближення $x_n \approx x^*$, тобто відстань $\rho(x_n, x^*)$ має таку оцінку:

$$\rho(x_n, x^*) \le \frac{\alpha^n \rho(x_1, x_0)}{1 - \alpha}.$$

8. Визначити, чи можна застосовувати теорему Банаха до відображень із вправи 3.

9. Методом послідовних наближень розв'язати дане рівняння або систему рівнянь:

1) $10x = 1 + \cos x$; 2) $\dfrac{1}{x+2} = 1 - x$, $x \in [0; 4]$;

3) $x^3 - x - 2 = 0$; 4)• $x^2 = \sin x$; 5) $e^{-\frac{x}{2}} = x$;

6) $\ln^2 x + x - 2 = 0$, $x \in [1; 2]$; 7) $-\sin x + x = 0,25$;

8) $\begin{cases} x - 2 = \dfrac{x^2 + y}{20}, \\ y - 1 = \dfrac{x + y^2}{20}; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x + 0,71 = \sqrt{x + 2y}, \\ y - 1 = \sqrt{y - x}. \end{cases}$.

10. Нехай $f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ — диференційовна на $\mathbf{R}$ функція і $|f'(x)| \le K$ $\forall x \in \mathbf{R}$, де $K \in [0; 1)$ — задане число. Довести, що рівняння $x = f(x)$ має єдиний розв'язок.

11. Нехай $f: \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ — диференційовна на $\mathbf{R}$ функція і $|f'(x)| \ge K > 1$ $\forall x \in \mathbf{R}$. Довести, що рівняння $x = f(x)$ має єдиний розв'язок.

12. Якщо функція F диференційовна на відрізку $[a; b]$, причому $0 \le k_1 \le F'(x) \le k_2$ (або $k_1 \le F'(x) \le k_2 < 0$), $F(a)\,F(b) < 0$, то рівняння $F(x) = 0$ має єдиний розв'язок на відрізку $[a; b]$, який можна знайти методом послідовних наближень.

Довести це твердження і, користуючись ним, знайти розв'язки даних рівнянь на вказаних відрізках з точністю до $0{,}01$:

1)• $\sin x + e^x = 2$, $x \in [0; 1]$; 2) $(x-1)^2 = 2\sin x$, $x \in [0; 1]$;

3) $e^x - 2(1-x)^2 = 0$, $x \in [0{,}1; 0{,}5]$; 4) $\cos x - x^2 = 0$, $x \in [-1; 0]$;

5) $\cos x \operatorname{ch} x = 1$, $x \in [4; 5]$; 6) $\ln x = \operatorname{arctg} x$, $x \in [3; 4]$.

Зразки розв'язування задач

3. 7) Оскільки f — функція, неперервна на відрізку $[0; 1]$ та диференційовна на інтервалі $(0; 1)$, то за теоремою Лагранжа $f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$, де $c = x_1 + \theta(x_2 - x_1)$, $0 < \theta < 1$, $x_1, x_2 \in [0; 1]$. Тоді $|f(x_1) - f(x_2)| \le |f'(c)||x_1 - x_2|$. Звідси випливає, що коли $|f'(c)| \le \alpha$ $\forall c \in (0; 1)$ і $\alpha \in [0; 1)$, то відображення f є стискуючим. Тому оцінимо $f'(x)$, використовуючи розвинення в степеневі ряди $\sin x$ та $\cos x$:

$$|f'(x)| = \frac{|x\cos x - \sin x|}{x^2} = \frac{\left(x - \dfrac{x^3}{2!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots\right) - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots\right)}{x^2} =$$

$$= \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3!\,5} + \frac{x^5}{5!\,7} - \cdots < \frac{1}{3} \quad \forall x \in (0; 1).$$

Отже, $|f(x_1) - f(x_2)| \le \frac{1}{3}|x_1 - x_2|$ $\forall x_1, x_2 \in [0; 1]$, тому f — стискуюче відображення.

6. 9) Нерухомі точки даного відображення визначаються з умови

$$x(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau+1 \quad \forall t\in[0;\,1].$$

Диференціюючи цю рівність за змінною t, дістаємо

$$x'(t)=x(t),\ x(0)=1.$$

Неважко помітити, що розв'язком рівняння у класі диференційовних функцій є $x(t)=Ce^t$. Враховуючи умову $x(0)=1$, дістаємо, що $C=1$, а отже, нерухомою точкою даного відображення є функція $x(t)=e^t$, $t\in[0;\,1]$.

7. За теоремою Банаха нерухому точку x^* відображення f можна знайти методом послідовних наближень: $x^*=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, де $x_0\in E$ — довільна точка, а $x_n=f(x_{n-1})$ $\forall n\in\mathbf{N}$. Враховуючи, що f — стискуюче відображення, маємо

$$\rho(x_2,x_1)=\rho(f(x_1),f(x_0))\le\alpha\rho(x_1,x_0).$$

Припустимо, що $\rho(x_n,x_{n-1})\le\alpha^{n-1}\rho(x_1,x_0)$. Тоді

$$\rho(x_{n+1},x_n)=\rho(f(x_n),f(x_{n-1}))\le\alpha\rho(x_n,x_{n-1})\le\alpha^n\rho(x_1,x_0).$$

За принципом математичної індукції можна стверджувати, що

$$\rho(x_{n+1},x_n)\le\alpha^n\rho(x_1,x_0)\quad\forall n\in\mathbf{N}.$$

Враховуючи цей факт та нерівність трикутника, дістаємо

$$\rho\left(x_n,x^*\right)\le\rho(x_n,x_{n+1})+\rho\left(x_{n+1},x^*\right)\le\rho(x_n,x_{n+1})+\rho(x_{n+1},x_{n+2})+$$

$$+\rho(x_{n+1},x_{n+2})+\rho\left(x_{n+2},x^*\right)\le\sum_{k=n}^{m}\rho(x_k,x_{k+1})+\rho\left(x_{m+1},x^*\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \rho\left(x_n,x^*\right)\le\sum_{k=n}^{\infty}\rho(x_k,x_{k+1})\le\sum_{k=n}^{\infty}\alpha^k\rho(x_1,x_0)=\frac{\alpha^n\rho(x_1,x_0)}{1-\alpha}.$$

9. 4) З геометричних міркувань випливає, що рівняння $x^2=\sin x$ має два корені: $x_1=0$ та $x^*>0$. Зауважимо, що $x^2=\sin x\Leftrightarrow x=\frac{\sin x}{x}$, коли $x>0$. Отже, задача звелася до відшукання нерухомої точки відображення $f(x)=\frac{\sin x}{x}$. Оскільки

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots,$$

то

$$\varphi(x)=x-f(x)=x-1+\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!}+\cdots\quad\forall x>0,$$

звідки $\varphi(0)=-1<0$, а $\varphi(1)>0$. Отже, $x^*\in(0;1)$. Враховуючи, що $\sin x<x$ $\forall x>0$, дістаємо $f\colon\ [0;\,1]\to[0;\,1]$, причому (див. розв'язання вправи 3.7)), f — стискуюче відображення. Виконано усі умови теореми Банаха, за якою x^* можна знайти методом послідовних наближень: якщо $x_0 = 1$, $x_n = f(x_{n-1})$ $\forall n \in \mathbf{N}$, то $x_n \to x^*$. При розв'язуванні вправи 3.7) показано, що число α може дорівнювати $\frac{1}{3}$. Тому, скориставшись вправою 7, абсолютна похибка наближення $x_n \approx x^*$ має оцінку

$$\rho\left(x_n, x^*\right) \le \frac{\alpha^n \rho(x_1, x_0)}{1-\alpha} = \frac{|f(1)-1|}{\frac{2}{3}\cdot 3^n} = \frac{1-\sin 1}{2\cdot 3^{n-1}} \le \frac{1}{4\cdot 3^n}.$$

Знайдемо x^* з точністю до $0{,}01$. Тоді $\frac{1}{4\cdot 3^n} < 0{,}01 \Leftrightarrow n \ge 3$. Тому $x_0 = 1$, $x_1 = f(1) = \sin 1$,

$x_2 = f(x_1) = \dfrac{\sin(\sin 1)}{\sin 1}$, $x_3 = f(x_2) = \dfrac{\sin 1 \sin\left(\dfrac{\sin(\sin 1)}{\sin 1}\right)}{\sin(\sin 1)}$ з точністю до $0{,}01$.

12. 1) На кінцях відрізка функція набуває різних за знаком значень, тому за теоремою Больцано — Коші існує принаймні одна точка $c \in (a; b)$, в якій $f(c) = 0$. Оскільки похідна $F'(x)$ додатна (від'ємна) на відрізку $[a; b]$, тобто функція зростає (спадає) на цьому відрізку, то точка c єдина.

Побудуємо допоміжну функцію $f(x) = x - \lambda F(x)$, $\lambda = \text{const}$. Тоді рівняння $F(x) = 0$ зведеться до рівняння $f(x) = x$. Треба підібрати сталу λ так, щоб відображення f стало стискуючим. Для цього досить, щоб $|f'(x)| = |1 - \lambda F'(x)| \le \alpha < 1$, тобто $0 < \lambda F'(x) < 2$. Отже, стала λ повинна мати знак $F'(x)$ і задовольняти умову $|\lambda| < \dfrac{2}{\max\limits_{x\in[a;b]} |F'(x)|}$. У цьому випадку, користуючись теоремою Банаха про стискуюче відображення, розв'язок рівняння $f(x) = x$ можна знайти методом послідовних наближень за формулою $x_n = f(x_{n-1})$, взявши за x_0 довільну точку з відрізка $[a; b]$ (див. вправу 9.4)).

Розв'яжемо задану вправу 1). Позначимо $F(x) = \sin x + e^x - 2$. Маємо $F'(x) = \cos x + e^x > 0$ $\forall x \in [0; 1]$, тобто функція F є зростаючою на відрізку $[0; 1]$. Оскільки $F(0) = -1 < 0$, а $F(1) = \sin 1 + e^x - 2 > 0$, то задане рівняння має єдиний розв'язок на вказаному відрізку. Допоміжна функція матиме вигляд $f(x) = x - \lambda\left(\sin x + e^x - 2\right)$. Покладаючи $\lambda = 0{,}25$, дістаємо $0 < f'(x) < 0{,}5$, тобто можна скористатись теоремою Банаха. Нехай $x_0 = 0{,}4$. Тоді $x_1 = f(x_0) = 0{,}4 - 0{,}25\left(\sin 0{,}4 + e^{0{,}4} - 2\right)$. Для обчислення цього значення і наступних наближень зручно скористатись ЕОМ, склавши відповідні програми обчислень. Для того щоб не проводити оцінки похибки, обчислення можна проводити доти, доки три десяткових знаки після коми залишатимуться незмінними. Виконавши заокруглення, дістанемо $x \approx 0{,}45$.

Розділ 15 ЧАСТИННІ ПОХІДНІ І ПОВНІ ДИФЕРЕНЦІАЛИ

§ 15.1. Частинні похідні. Диференційовність функції кількох змінних

Нехай функція f кількох змінних визначена у точках $(x_0, y_0, ..., z_0) \in \mathbf{R}^n$ та $(x, y, ..., z) \in \mathbf{R}^n$. Тоді різниці $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, …, $\Delta z = z - z_0$ називають відповідно *приростами незалежних змінних* $x, y, \ldots, z$, а різницю

$$\Delta f(x_0, y_0, ..., z_0) = f(x, y, ..., z) - f(x_0, y_0, ..., z_0) =$$
$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, ..., z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, ..., z_0)$$

— *повним приростом* функції f у точці $(x_0, y_0, ..., z_0)$.

Якщо $\Delta y = 0, \ldots, \Delta z = 0$, то різницю

$$\Delta_x f(x_0, y_0, ..., z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0, ..., z_0) - f(x_0, y_0, ..., z_0)$$

називають *частинним приростом* функції f по змінній x у точці $(x_0, y_0, ..., z_0)$. Аналогічно визначаються частинні прирости функції f по змінних $y, \ldots, \ldots, z$: $\Delta_y f(x_0, y_0, ..., z_0), ..., \Delta_z f(x_0, y_0, ..., z_0)$.

Частинною похідною по змінній x функції f в точці $(x_0, y_0, ..., z_0)$ називають число

$$f_x'(x_0, y_0, \ldots, z_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0, \ldots, z_0)}{\Delta x} =: \frac{\partial f(x_0, y_0, \ldots, z_0)}{\partial x}.$$

Аналогічно визначаються частинні похідні функції f по змінних $y, \ldots, z$, які позначають

$$f_y'(x_0, y_0, \ldots, z_0) =: \frac{\partial f(x_0, y_0, \ldots, z_0)}{\partial y}, \cdots,$$

$$f_z'(x_0, y_0, \ldots, z_0) =: \frac{\partial f(x_0, y_0, \ldots, z_0)}{\partial z}.$$

Якщо частинні похідні розглядаються у будь-якій точці з області визначення функції, то їх позначають так:

$$f_x', f_y', \ldots, f_z' \text{ або } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Для відшукання частинної похідної функції f по певній змінній (наприклад, по x) треба продиференціювати цю функцію як функцію від однієї змінної, вважаючи інші змінні сталими. Звідси випливає, що геометричний та механічний змісти частинних похідних за формою такі самі, як і для функції однієї змінної: $f'_x(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ — кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $w = f(x, y_0, ..., z_0)$ у точці $M_0(x_0, y_0, ..., z_0, f(x_0, y_0, ..., z_0))$, а з механічної точки зору $f'_x(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ — швидкість зміни функції f у напрямі осі Ox.

Функцію f називають *диференційовною* в точці $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$, якщо вона визначена у деякому околі цієї точки і для будь-яких точок $(x, y, \ldots, z)$ з цього околу

$$\Delta f(x_0, y_0, ..., z_0) = A\Delta x + B\Delta y + ... + C\Delta z + \alpha\Delta x + \beta\Delta y + ... + \gamma\Delta z, \qquad (1)$$

де $A, B, ..., C$ не залежать від $\Delta x, \Delta y, \ldots, \Delta z,$ а $\alpha, \beta, ..., \gamma$ — нескінченно малі, якщо $(\Delta x, \Delta y, \ldots, \Delta z) \to (0, 0, \ldots, 0)$, тобто якщо $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0, \ldots,\ \Delta z \to 0$.

Необхідні умови диференційовності:

1) якщо функція f диференційовна у даній точці, то вона неперервна в цій точці;

2) якщо функція f диференційовна у точці $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$, то вона має в цій точці частинні похідні по кожній змінній, причому $A = f'_x(x_0, y_0, \ldots, z_0)$, $B = f'_y(x_0, y_0, \ldots, z_0), \ldots, C = f'_z(x_0, y_0, \ldots, z_0)$, де $A, B, ..., C$ — числа з формули (1).

Достатня умова диференційовності. Якщо функція $f(x, y, \ldots, z)$ має частинні похідні по кожній змінній $x, y, \ldots, z$ і ці частинні похідні неперервні в точці $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$, то f диференційовна в цій точці.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) кожний частинний приріст функції f у даній точці є деяким повним приростом цієї функції у тій самій точці;

2) повний приріст функції $f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) дорівнює сумі частинних приростів по змінних x та y в точці (x_0, y_0);

3) якщо існує $f'_x(x_0, y_0)$, то $f'_x(x_0, y_0) \approx \dfrac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$, коли $x \approx x_0$, але $x \neq x_0$;

4) рівність $z = f(x, y_0)$ можна розглядати як рівняння кривої, яку можна дістати, якщо поверхню $z = f(x, y)$ перетнути площиною $y = y_0$;

5) якщо функція $f(x, y)$ диференційовна в точці (x_0, y_0), то функції $f(x, y_0)$ та $f(x_0, y)$ диференційовні відповідно в точках x_0 та y_0;

6)• твердження, обернене до попереднього, є правильним;

7) якщо функція $f(x, y)$ диференційовна в точці (x_0, y_0), то

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \gamma\rho,$$

де $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, а $\gamma = \gamma(\rho) \to 0$, коли $\rho \to 0$.

2. Знайти частинні похідні даної функції двох або трьох змінних:

1) $z = x\sqrt{x+y} - y^2$; 2) $z = \dfrac{\sqrt[3]{xy - x^2 + 1}}{2x - 3y}$;

3) $z = 2^{x-y} + \cos(x + y^2)$; 4) $z = \sin(xy^2) + e^{2y-x^2}$;

5) $z = \operatorname{tg}\dfrac{x+y}{x-y}$; 6) $z = \operatorname{ctg}\left(3^{x^2-2y} - \dfrac{x^2}{y}\right)$;

7) $z = y\arcsin(x^2 - y)$; 8) $z = (u + v)\operatorname{arctg}(u - v)$;

9) $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; 10) $w = \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;

11) $w = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$; 12)• $w = x^{\frac{y}{z}}$; 13) $w = x^{y^z}$; 14) $w = x^{yz}$;

15) $z = \ln\operatorname{ctg}\dfrac{y}{x}$; 16) $z = \ln\left(xy^3 + yx^3 + \sqrt{1 + (xy^3 + yx^3)^2}\right)$;

17) $z = y^{y^x}$; 18) $z = y^{x^y}$; 19) $z = x^{y^y}$;

20) $z = (a + xy)^{\frac{x}{y}}$; 21) $z = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^2} - \arccos\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$;

22) $z = (2 + \log_x y)^5$; 23) $u = (\cos z)^{xy}$; 24) $z = \operatorname{arcctg}\sqrt{y^x}$;

25) $u = 2\sqrt{\dfrac{1 - \sqrt{xyz}}{1 + \sqrt{xyz}}}$; 26) $u = (x^2 + y^2 + z^2)\dfrac{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;

27) $u = \ln\left(x + (y^2 + z^2) + y(x^2 + z^2) + z(x^2 + y^2) + \right.$
$\left. + \sqrt{1 + \left(x(y^2 + z^2) + y(x^2 + z^2) + z(x^2 + y^2)\right)^2}\right)$;

28) $u=\operatorname{arcctg}\ (ax-by)^{z^2}$; 29) $u=(y+xz)^{xy}$;

30) $u=(ax+by+cz)^{ax+by+cz}$; 31) $u=xyze^{\cos\pi xyz}$;

32) $w=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\left(x^2y^2+z^2t^2-xyzt\right)+\ln\sin\left(x^2y^2+z^2t^2-xyzt\right)$;

33) $f(x,y)=\frac{\sin(x-3y)}{\sin(x+3y)}$. Обчислити $f'_x\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}\right)$ і $f'_y\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}\right)$;

34) $f(x,y)=\frac{x\sin y-y\sin x}{1+\cos x+\cos y}$. Обчислити $f'_x\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ і $f'_y\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$;

35) $f(x,y)=\sqrt[3]{ax^3-by^3}$. Обчислити $f'_x(b,a)$ і $f'_y(b,a)$;

36) $f(x,y)=x^2y^2\left(x^2-y^2\right)$. Обчислити $\frac{f'_x-f'_y}{f'_xf'_y}$ у точці (2, 1);

37) $u=\ln\left(2+x^2+y^3+z^4\right)$. Обчислити $u'^2_x+u'^2_y+u'^2_z$, якщо $x=y=z=1$;

38) $u=\sin^2x+\sin^2y+\sin^2z+\sqrt{\cos^2x+\cos^2y+\cos^2z}$. Обчислити u'_x, якщо $x=\frac{\pi}{6}$, $y=\frac{\pi}{2}$, $z=\frac{\pi}{2}$.

3. Знайти частинні похідні та з'ясувати їх геометричний і фізичний зміст:

1) об'єм кульового сектора $V=\frac{2}{3}\pi R^2H$, де R — радіус кулі, H — висота відповідного кульового сегмента;

2) об'єм кульового сегмента $V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)$, де R — радіус кулі, H — висота сегмента;

3) об'єм зрізаного конуса $V=\frac{\pi}{3}H\left(R^2+Rr+r^2\right)$, де H — висота, R і r — радіуси основ зрізаного конуса;

4) площа поверхні сферичного сегмента $S=2\pi RH$, де R — радіус сфери, H — висота сегмента.

4. Який кут утворює з додатним напрямом осі Ox дотична до плоскої лінії:

1) $\begin{cases}3z=x^3+y^3,\\ y=1\end{cases}$ у точках $A_1\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{8}\right)$, $A_2\left(1,1,\frac{2}{3}\right)$, $A_3(2,1,3)$ і $A_4\left(3,1,\frac{28}{3}\right)$;

2) $\begin{cases}z=\cos(2x+y),\\ y=\frac{\pi}{3}\end{cases}$ у точках $A_1\left(0,\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$, $A_2\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_3\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},-1\right)$ і $A_4\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},-\frac{1}{2}\right)$?

5. Який кут утворює з додатним напрямом осі Oy дотична до плоскої кривої:

1) $\begin{cases} z = \sin(x+y), \\ x = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$ у точках $A_1\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_2\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}, 1\right)$ і $A_3\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

2) $\begin{cases} 4z = x^4 + y^4, \\ x = 2 \end{cases}$ у точках $A_1\left(2, 1, \dfrac{17}{4}\right)$, $A_2(2, 2, 8)$ і $A_3(2, 4, 68)$?

6. Під яким кутом перетинаються плоскі лінії, які утворено перетином поверхонь $16z = 5x^2 + y^2$ і $16z = 3\left(x^2 + y^2\right)$ площиною $y = 4$?

7. Через точку $A(4, 2, 20)$ поверхні $4z = x^3 + 2y^3$ проведено площини, паралельні координатним площинам Oxz і Oyz. Знайти кути, які утворюють з осями координат дотичні до плоских ліній у точці їх перетину A.

8. Довести, що:

1) $z'_x - z'_y = \dfrac{y-x}{xy} z$, якщо $z = xy\ln(x+y)$;

2) $x^2 z'_x + xz'_y = (1+y)z$, якщо $z = \mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}$;

3) $xyz'_x + x^2 z'_y = 2yz$, якщо $z = x^2\cos\left(y^2 - x^2\right)$;

4) $\dfrac{\cos x}{\ln y} z'_x + y\sin x z'_y = z$, якщо $z = y^{\sin x}$;

5) $xu'_x + yu'_y + zu'_z = xy(1 + 2\ln z)u$, якщо $u = z^{xy}$;

6) $xz'_x + yz'_y = 0$, якщо $z = \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{y}$.

9. Нехай $x = a\rho\cos\theta$, $y = b\rho\sin\theta$. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}.$$

10. Нехай $x = ar\cos\varphi\sin\theta$, $y = br\sin\varphi\sin\theta$, $z = cr\cos\theta$. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}.$$

11. Показати, що функція

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } y = x^2 \neq 0, \\ 0 \text{ для інших точок } (x, y) \end{cases}$$

має частинні похідні $f'_x(0, 0)$ та $f'_y(0, 0)$, але не є неперервною в точці $(0, 0)$.

12. Розв'язати задачу, аналогічну задачі 11, для функції

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{якщо } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{якщо } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

13. Показати, що дана функція неперервна в точці (0, 0), має в ній частинні похідні f'_x та f'_y, але недиференційовна в цій точці:

1) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$;

2)• $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{якщо } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{якщо } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

3) $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$; 4) $f(x, y) = x + y - \sqrt[4]{|xy|}$;

5) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|x| y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{якщо } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{якщо } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

14. За допомогою означення довести диференційовність даної функції в області її визначення:

1) $z = x^2 - y^2$; 2) $u = xyz$;

3) $z = x - y + xy$; 4) $u = x^2 + yz - z^2$.

15. Показати, що дана функція диференційовна в точці (0, 0), але її частинні похідні навіть необмежені в будь-якому околі цієї точки:

1) $f(x, y) = \begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2 + y^2}, & \text{якщо } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{якщо } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

2)• $f(x, y) = \begin{cases} (x + y)^2 \sin\dfrac{1}{\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}}, & \text{якщо } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{якщо } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

16. Довести, що коли функція $f(x, y)$ має в околі точки (x_0, y_0) обмежені частинні похідні, то вона рівномірно неперервна в цьому околі.

17. Нехай функція $f(x, y)$ має в околі точки (x_0, y_0) частинну похідну $f'_x(x, y)$ та існує $\lim\limits_{x \to x_0} f'_x(x, y_0)$. Довести, що $\lim\limits_{x \to x_0} f'_x(x, y_0) = f'_x(x_0, y_0)$.

18. Визначити, чи є диференційовною в точці $(0, 0)$ функція

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{якщо } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{якщо } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Зразки розв'язування задач

1. 6) Розглянемо функцію $f(x, y) = 0$, якщо $x = 0$ або $y = 0$, і $f(x, y) = 1$ в інших точках (x, y). Тоді $f(0, y) = 0$ $\forall y \in \mathbf{R}$, тому функція $\varphi(y) = f(0, y)$ диференційовна в точці $(0, 0)$. Аналогічно доводимо, що функція $\psi(x) = f(x, 0)$ диференційовна в точці $(0, 0)$. Проте $f(x, y)$ розривна в точці $(0, 0)$, тому не є диференційовною в цій точці. Отже, дане твердження неправильне.

2. 12) Функція $w = x^{\frac{y}{z}}$ визначена на множині $D = \{(x, y, z) : x > 0 \text{ і } z \neq 0\}$. При відшуканні f'_x змінні y та z розглядаються як сталі. Тоді за правилами диференціювання дістаємо:

$$w'_x = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z} - 1}, \ (x, y, z) \in D,$$

$$w'_y = x^{\frac{y}{z}} \ln x \left(\frac{y}{z}\right)'_y = \frac{1}{z} x^{\frac{y}{z}} \ln x, \ (x, y, z) \in D,$$

$$w'_z = x^{\frac{y}{z}} \ln x \left(\frac{y}{z}\right)'_z = -\frac{y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \ln x, \ (x, y, z) \in D.$$

13. 2) Оскільки $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot y$, якщо $(x, y) \neq (0, 0)$, а $\left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| = \dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1$, то $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ за властивістю про границю добутку нескінченно малої на обмежену функцію. Отже, f неперервна в точці $(0, 0)$. Оскільки $f(x, 0) \equiv 0$ і $f(0, y) \equiv 0$, то $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$.

Припустимо, що функція f диференційовна в точці $(0, 0)$. Тоді за вправою 1.7)

$$\Delta f(0, 0) = f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y + \gamma\rho,$$

де $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, а $\gamma \to 0$, якщо $\rho \to 0$. Проте

$$\Delta f(0, 0) = \frac{\Delta x \, \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \gamma\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \Leftrightarrow \gamma = \frac{\Delta x \, \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Якщо в останній рівності покласти $\Delta x = \Delta y \neq 0$, то $\gamma = \frac{1}{2} \not\to 0$, коли $\rho \to 0$. Приходимо до протиріччя, обумовленого неправильним припущенням про диференційовність функції в точці $(0, 0)$.

15. 2) Оскільки

$$\Delta f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=(\Delta x+\Delta y)^2\sin\frac{1}{\sqrt{\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)^3}}=$$

$$=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+\sin\frac{1}{\sqrt{\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)^3}}(\Delta x+2\Delta y)\Delta x+\Delta y\sin\frac{1}{\sqrt{\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)^3}}\Delta y,$$

то для $A=B=0$

$$\alpha=(\Delta x+2\Delta y)\sin\frac{1}{\sqrt{\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)^3}},\quad \beta=\Delta y\sin\frac{1}{\sqrt{\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)^3}}$$

виконано всі умови означення диференційовної функції: α і $\beta\to 0$ як добуток нескінченно малої $(\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0)$ на обмежену. Отже, функція f диференційовна в точці (0, 0). Разом з тим, якщо $(x, y)\neq(0, 0)$, то

$$f'_x(x,y)=2(x+y)\sin\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}-3(x+y)^2\cos\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}\cdot\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}}}=$$

$$=2(x+y)\sin\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}-3\left(\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}+\frac{2x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cos\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}.$$

Якщо в останній рівності покласти $x=y=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt[3]{n\pi}}$, $n\in\mathbf{N}$, то дістанемо

$$f'_x\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[3]{\pi n}},\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[3]{\pi n}}\right)=-3\left(\frac{\sqrt[3]{(\pi n)^2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt[3]{(\pi n)^4}}{\sqrt{2}}\right)\cos\pi n\to\infty,\ n\to\infty.$$

Отже, f'_x необмежена в будь-якому околі точки $(0, 0)$. Міркування для f'_y аналогічні.

§ 15.2. Повний диференціал, інваріантність його форми та геометричний зміст

Повним диференціалом функції f, диференційовної в точці $M_0(x_0, y_0, ..., z_0)$, називають вираз

$$df(M_0)=f'_x(M_0)\Delta x+f'_y(M_0)\Delta y+\ldots+f'_z(M_0)\Delta z\,. \tag{1}$$

Оскільки для диференційовної в точці M_0 функції f $\Delta f(M_0)=df(M_0)+$ $+\alpha\Delta x+\beta\Delta y+...+\gamma\Delta z$, де $\alpha\to 0, \beta\to 0, \ldots, \gamma\to 0$, якщо $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0, \ldots, \Delta z\to$ $\to 0$, то $\Delta f(M_0)=f(M)-f(M_0)\approx df(M_0)\Rightarrow f(M)\approx f(M_0)+df(M_0)$.

Теорема (про інваріантність форми повного диференціала). *Нехай функція f диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0, ..., z_0)$, а $x, y, \ldots, z$ є* *диференційовними в точці* $P_0(u_0, v_0, ..., w_0)$ *функціями змінних* $u, v, \ldots, w$, *причому* $x(P_0) = x_0$, $y(P_0) = y_0$, …, $z(P_0) = z_0$. *Тоді функція* $\varphi(u, v, \ldots, w) = f(x(u, v, \ldots, w), y(u, v, \ldots, w), \ldots, z(u, v, \ldots, w))$ *диференційовна в точці* P_0 *і*

$$d\varphi(P_0) = f'_x(M_0)dx(P_0) + f'_y(M_0)dy(P_0) + \ldots + f'_z(M_0)dz(P_0). \qquad (2)$$

Якщо $x, y, \ldots, z$ — незалежні змінні, то $\varphi = f$, а її повний диференціал записується у тій самій формі (2). Тому цю форму повного диференціала називають *інваріантною*, тобто *незмінною*, тоді як форма (1) не є такою.

Із формули (2) випливає, зокрема, що частинні похідні складної функції $f(x(u, v, \ldots, w), y(u, v, \ldots, w), \ldots, z(u, v, \ldots, w)) = \varphi(u, v, \ldots, w)$ можна обчислювати за формулами

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w}.$$

Зокрема, якщо $x, y, \ldots, z$ є функціями однієї змінної t, то похідну складної функції $f(x(t), y(t), \ldots, z(t)) = \varphi(t)$ можна обчислити за формулою

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

і вираз у правій частині останньої рівності називають *повною похідною* складної функції $f(x(t), y(t), \ldots, z(t))$.

Площину $z - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0)$ називають *дотичною площиною* до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, якщо

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - A\Delta x - B\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0, \text{ коли } \Delta x \to 0 \text{ і } \Delta y \to 0,$$

де $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.

Критерій існування дотичної площини. Для того щоб не паралельна осі Oz площина $z - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0)$ була дотичною до поверхні $z = f(x, y)$ в точці $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, необхідно і достатньо, щоб f була диференційовною в точці (x_0, y_0), $A = f'_x(x_0, y_0)$ і $B = f'_y(x_0, y_0)$.

Отже, рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ в точці $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ має вигляд

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \qquad (3)$$

Оскільки у правій частині останнього рівняння стоїть повний диференціал функції f в точці (x_0, y_0), то він дорівнює приросту аплікати дотичної площини: $z - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0)$. У цьому полягає геометричний зміст повного диференціала.

Пряму, що проходить через точку $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ перпендикулярно до площини (3), називають *нормаллю* до поверхні $z = f(x, y)$ в точці $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Рівняння цієї нормалі має вигляд

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Вправи

1. Визначити, чи правильні дані твердження:

1) якщо функція f має частинні похідні в точці M_0, то вона має також повний диференціал у цій точці;

2) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

3) якщо функція f диференційовна в точці M_0, то $\Delta f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0)$;

4) якщо функції f і φ диференційовні в точці M_0, то в цій точці

$$d(f \pm \varphi) = df \pm d\varphi,\ d(f\varphi) = f\,d\varphi + \varphi\,df,$$

$$d\left(\frac{f}{\varphi}\right) = \frac{\varphi\,df - f\,d\varphi}{\varphi^2},\ \varphi \neq 0;$$

5) якщо функція f диференційовна в точці (x_0, y_0), а $y = y(x)$ — диференційовна в точці x_0 і $y(x_0) = y_0$, то функція $z = f(x, y(x))$ диференційовна в точці x_0 і $dz(x_0) = \left(f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)\,y'(x_0)\right)dx$;

6) якщо функція f диференційовна в точці (x, y), то

$$d(\sin f(x, y)) = \cos f(x, y)\,df(x, y);$$

7) поверхня $z = \sqrt{|xy|}$ має в точці $(0, 0, 0)$ дотичну площину.

2. Нехай функція f має в $\mathbf{R}^2$ неперервні частинні похідні. Довести, що $f(x, y) = ax + by + c \Leftrightarrow \Delta f(x, y) = df(x, y)\quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$.

3. Визначити, де дана функція диференційовна, і знайти її повний диференціал:

1) $z = x^2 \cos^2 y + y^2 \sin^2 x$; 2) $z = \frac{x}{y} e^{x+y}$; 3) $z = \ln \operatorname{tg} \frac{y}{x}$;

4) $u = x^{y^z}$; 5) $z = (\sin x)^{\cos y}$; 6)• $z = \arcsin\dfrac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

7) $z = \dfrac{e^x \ln y + e^y \ln x}{\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}}$; 8) $z = \sqrt{1 - \dfrac{(x+y)^2}{2^{xy}}}$;

9) $z = \ln\sqrt{x^2 + 3y^2}$; 10) $z = \operatorname{arcctg}\dfrac{x-y}{1+xy}$;

11) $u = \operatorname{arctg}(xyz)$; 12) $u = z^{xy}$;

13) $f(x, y) = \sqrt[3]{x}\,y^2$. Знайти $df(8, 2)$;

14) $f(x, y) = e^{-\frac{y}{x}+2x}$. Знайти $df(1, 2)$;

15) $f(x, y) = \arccos\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Знайти $df(2, 3)$ і $df(-4, 1)$;

16) $f(x, y) = \operatorname{arcctg}\sqrt{xy}$. Знайти $df(2, 2)$;

17) $u = \operatorname{ctg}\dfrac{x^2 z}{y}$; 18) $u = e^{-x\operatorname{ctg}\frac{y}{z}}$.

4. Знайти повні диференціали функцій із вправи 3), не обчислюючи їхніх частинних похідних.

5•. Знайти повний приріст і повний диференціал функції $z = x^2 y + 2y^2 + {}$ $+ x - y$ в точці (1, 2), якщо:

1) $\Delta x = \Delta y = 0{,}1$; 2) $\Delta x = \Delta y = 0{,}01$; 3) $\Delta x = \Delta y = 0{,}001$.

6. Обчислити значення повного диференціала функції:

1) $z = \sqrt{x + y^2 - 5}$, якщо $x = 5$, $y = 2$, $\Delta x = 0{,}04$, $\Delta y = 0{,}05$;

2) $z = xy + \sqrt{x^2 + y^2}$, якщо $x = 3$, $y = 4$, $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 0{,}3$;

3) $z = \left(x^2 + y^2\right)e^{xy}$, якщо $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}05$, $\Delta y = -0{,}04$;

4) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, якщо $x = 3$, $y = 4$, $\Delta x = 0{,}03$, $\Delta y = 0{,}04$;

5) $z = \ln\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1\right)$, якщо $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}05$, $\Delta y = -0{,}04$;

6) $z = x^y$, якщо $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0{,}06$, $\Delta y = 0{,}04$.

7. Сторони прямокутного паралелепіпеда $a = 25$ см, $b = 15$ см, $c = 10$ см. Як зміняться об’єм V і довжина діагоналі l паралелепіпеда, якщо сторону a зменшити на 0,3 см, а сторони b і c збільшити відповідно на 0,5 і 0,2 см.

Знайти наближені значення зміни об'єму dV і довжини діагоналі dl і порівняти їх з точними значеннями ΔV і Δl.

8. Період коливання маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, де l — довжина маятника, g — прискорення вільного падіння. Знайти похибку $\Delta T \approx dT$ при визначенні періоду T, якщо величини l і g виміряно з похибками Δl і Δg, а також переконатися, що гранична відносна похибка при визначенні періоду коливання маятника $\delta_T = \frac{1}{2}\left(\delta_l + \delta_g\right)$, де δ_l і δ_g — відповідно граничні відносні похибки виміру величин l і g. Обчислити δ_T, якщо $l = 120{,}0 \pm 0{,}005$ см, $g = 981{,}32 \pm 0{,}005$ см/с^2.

9. Центральний кут сектора $\alpha = 20°$ збільшено на $\Delta\alpha = 2°$. На скільки треба зменшити радіус сектора $R = 40$ см, щоб його площа не змінилася?

10. Радіус основи кругового конуса $R = 24{,}2 \pm 0{,}1$ см, твірна $l = 103{,}4 \pm 0{,}1$ см. Знайти об'єм конуса та його граничну абсолютну похибку.

11. Знайти граничну абсолютну похибку Δ_V та граничну відносну похибку δ_V об'єму кульового сектора, якщо радіус кулі $R = 75 \pm 0{,}2$ см, а радіус кола його основи $r = 60 \pm 0{,}3$ см.

12. Сторона прямокутного паралелепіпеда $x = 60$ см зростає зі швидкістю 2 см/с, сторона $y = 30$ см спадає зі швидкістю 4см/с, а сторона $z = 20$ см зростає зі швидкістю 5 см/с. З якою швидкістю змінюються об'єм і діагональ паралелепіпеда?

13•. Для обчислення об'єму V правильної чотирикутної піраміди було виміряно її висоту $h \approx 80$ см і сторону основи $a \approx 120$ см. З якою точністю треба виміряти h і a, щоб гранична абсолютна похибка об'єму піраміди V не перевищувала 4500 см^3?

14. Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено обчислити значення таких виразів:

1) $\sin 59° \operatorname{tg} 46°$; 2) $1{,}08^{0{,}96}$;

3) $2{,}001 \cdot 3{,}002^2 \cdot 4{,}003^3$; 4) $\dfrac{1{,}05^2}{\sqrt[3]{0{,}96/\sqrt[4]{1{,}08^3}}}$.

15. Нехай $F(u, v, w) = f(x, y, z)$, де $x^2 = vw$, $y^2 = uw$, $z^2 = uv$. Визначити, за яких умов

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w.$$

16. Продиференціювати дану складну функцію:

1) $u = x^3y^2z$, $x = t$, $y = t^2$, $z = \sin t$;

2)• $z = x^2 - y^2$, $x = u\cos v$, $y = u\sin v$;

3) $v = x^2 y - xy^2$, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$;

4) $z = x^y + y^x$, $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$;

5) $u = y^2 + \sqrt{xz} - \dfrac{1}{\sin z}$, $x = t + v$, $y = \dfrac{t}{v}$, $z = tv$;

6) $z = \ln(u + v)$, $u = xy^2 - yx^2$, $v = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$;

7) $z = x^2 \sin y - y^2 \cos x$, $x = \dfrac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$;

8) $z = \operatorname{tg}\left(4t - x + 2y^2\right)$, $x = \mathrm{e}^t \cos t$, $y = \mathrm{e}^t \sin t$;

9) $u = z^3 + y^4 + xz$, $y = \cos x$, $z = \sin x$;

10) $u = \mathrm{e}^{-ax}(y + z)$, $y = a\sin x$, $z = b\cos x$;

11) $z = \ln\sqrt{u^2 + v^2}$, $u = y\sin x$, $v = x\cos y$;

12) $w = \dfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \sqrt{u^2 + v^2}$, $u = x + \cos y$, $v = y + \sin x$;

13) $z = \ln \operatorname{tg}(txy)$, $x = t^2 - 1$, $y = t^2 + 1$;

14) $w = f\left(xy^2 z^3\right)$, $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = 2uv$.

17. Довести, що функція $z = xf\left(y^2 - x^2\right)$ задовольняє співвідношення

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial y} + xy\frac{\partial z}{\partial x} = yz.$$

18. Довести, що функція $z = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$, де $u = x + y$, $v = x - y$, задовольняє співвідношення

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x - y}{x^2 + y^2}.$$

19. Знайти вираз $\sec x\dfrac{\partial z}{\partial x} + \sec y\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = \sin y + f(\sin x - \sin y)$, а f — диференційовна функція.

20. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до даної поверхні в зазначеній точці:

1) $z = x^2 - y^2$, $M_0(2,\ 1,\ 3)$;

2)• $z = \sin\dfrac{y}{x}$, $M_0(1,\ \pi,\ 0)$;

3) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $M_0(1,\ 1,\ \pi/4)$;

4) $z = xy - x^2 + 8x - 16$, $M_0(2,\ 3,\ 2)$;

5) $z = \mathrm{e}^{x+2y+4}$, $M_0(2,\ -3,\ 1)$;

6) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x - y}{1 + x^2 y^2}$, $M_0(1,\ 1,\ 0)$;

7) $z = x + \arccos y$, $M_0(0,\ 0,\ \pi/2)$; 8) $z = \dfrac{x-y}{x+y}$, $M_0(2,\ -1,\ 3)$;

9) $z = \ln\dfrac{y}{x}$, $M_0(1,\ 1,\ 0)$; 10) $z = x^3 + y^3 - 6xy$, $M_0(1,\ 1,\ -4)$;

11) $z = 1\big/\sqrt{x^2+y^2}$, $M_0\left(1, 1, \sqrt{2}/2\right)$;

12) $z = \mathrm{e}^{\sin\frac{x}{y}}$, $M_0(0,\ 1,\ 1)$;

13) $z = \ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$, $M_0(\pi/2,\ 2,\ 0)$.

21. Довести, що дотична площина до поверхні $z = \dfrac{a^3}{xy}$ у довільній її точці утворює з координатними площинами тетраедр, об'єм якого $V = \dfrac{9}{2}a^3$.

Зразки розв'язування задач

3. 6) Відомо, що $\arcsin u$ диференційовна на інтервалі $(-1; 1)$, а $\sqrt{v}$ — на інтервалі $(0; +\infty)$. Отже, треба, щоб

$$0 < \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} < 1 \Leftrightarrow y \neq 0 \text{ і } x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow |y| < |x| \text{ і } y \neq 0.$$

Для таких точок (x, y) маємо

$$z'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{2x\left(x^2+y^2\right) - 2x\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{\sqrt{2}xy^2}{|y|\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2-y^2}},$$

$$z'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{-2y\left(x^2+y^2\right) - 2y\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}yx^2}{|y|\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Звідси випливає, що

$$dz = \frac{\sqrt{2}xy}{|y|\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2-y^2}}(ydx - xdy).$$

Зауважимо, що в точках $(x, y) \neq (0, 0)$, але таких, що $|x| = |y|$, дана функція визначена, але ці точки не є внутрішніми для області визначення функції. Тому в таких точках функція недиференційовна.

У точках $(x, 0)$, $x \neq 0$, функція визначена, ці точки внутрішні для області визначення, частинна похідна $z'_x(x,0) = 0$ і неперервна, але $z'_y(x,0)$ не існує. Тому функція f недиференційовна у цих точках.

4. б) Якщо $v=\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, то $z=\arcsin v \Rightarrow dz=\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}dv$. Нехай $v=\dfrac{\varphi}{\psi}$, де $\varphi=$ $=\sqrt{x^2-y^2}$, $\psi=\sqrt{x^2+y^2}$. Тоді $dv=\dfrac{\psi d\varphi-\varphi d\psi}{\psi^2}$, де $\varphi=\sqrt{t}$, $t=x^2-y^2$, $\psi=\sqrt{\theta}$, $\theta=$ $=x^2+y^2$, звідки

$$d\varphi=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{dx^2-dy^2}{2\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{xdx-ydy}{\sqrt{x^2-y^2}},\quad d\psi=\frac{1}{2\sqrt{\theta}}d\theta=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow dv=\frac{\sqrt{x^2+y^2}\dfrac{xdx-ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}-\sqrt{x^2-y^2}\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{\left(x^2+y^2\right)(xdx-ydy)-\left(x^2-y^2\right)(xdx+ydy)}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{2xy(ydx-xdy)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2-y^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow dz=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{2xy(ydx-xdy)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{\sqrt{2}xy(ydx-xdy)}{|y|\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2-y^2}}.$$

5. Оскільки $z'_x=2xy+1$, $z'_y=x^2+4y-1$, то $z'_x(1,2)=5$, $z'_y(1,2)=8$, а $z(1,2)=9$. Повний приріст і повний диференціал функції в точці $(1,2)$ обчислюватимемо за формулами:

$$\Delta z(1,\ 2)=z(1+\Delta x,2+\Delta y)-z(1,2)=(1+\Delta x)^2(2+\Delta y)+2(2+\Delta y)^2+1+\Delta x-2-\Delta y-9,$$

$$dz\ (1,2)=5\Delta x+8\Delta y.$$

Тоді різниця $\Delta z(1,2)-dz(1,2)=2\Delta x\Delta y+2\Delta x^2+\Delta x^2\Delta y+2\Delta y^2$ являє собою похибку, яка виникає від заміни повного приросту Δz функції її повним диференціалом dz. Маємо:

1) $\Delta z(1,2)=(1+0{,}1)^2(2+0{,}1)+2(2+0{,}1)^2+1+0{,}1-2-0{,}1-9=1{,}361$, $dz(1,2)=5\cdot0{,}1+$ $+8\cdot0{,}1=1{,}3$, $\Delta z(1,\ 2)-dz(1,\ 2)=0{,}061$;

2) $\Delta z(1,2)=(1+0{,}01)^2(2+0{,}01)+2(2+0{,}01)^2+1+0{,}01-2-0{,}01-9=0{,}130601$, $dz(1,2)=$ $=5\cdot0{,}01+8\cdot0{,}01=0{,}13$, $\Delta z(1,2)-dz(1,2)=0{,}00061$;

3) $\Delta z(1,2)=(1+0{,}001)^2(2+0{,}001)+2(2+0{,}001)^2+1+0{,}001-2-0{,}001-9=0{,}013006001$, $dz(1,2)=5\cdot0{,}001+8\cdot0{,}001=0{,}013$, $\Delta z(1,2)-dz(1,2)=0{,}000006001$.

Отже, зі зменшенням приростів незалежних змінних Δx і Δy похибка $\Delta z-dz$ також зменшується, тому наближена рівність $z(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx z(x,y)+dz(x,y)$ буде тим точнішою, чим меншими будуть прирости незалежних змінних.

13. Об'єм піраміди обчислюватимемо за формулою $V=\dfrac{1}{3}a^2h$. Звідси, покладаючи $\Delta V\approx dV$, дістаємо

$$dV=\frac{1}{3}\left(2ah\Delta a+a^2\Delta h\right),$$

$$|dV| = \frac{1}{3}\left|2ah\Delta a + a^2\Delta h\right| \le \frac{1}{3}\left(2ah|da| + a^2|dh|\right).$$

Підставляючи у цю формулу числові значення a і h, для обчислення граничних абсолютних похибок $\Delta_a = |da|$ і $\Delta_h = |dh|$ знаходимо

$$4500 = \frac{1}{3}\left(2\cdot 120\cdot 80\Delta_a + 120^2\Delta_h\right),\ 45 = 64\Delta_a + 48\Delta_h.$$

Це рівняння з двома невідомими має нескінченну множину розв'язків. Якщо a і h вимірювати з однаковою точністю, тобто $\Delta_a = \Delta_h$, то матимемо

$$\Delta_a = \Delta_h = \frac{45}{112} \approx 0{,}4 \text{ см}.$$

Отже, якщо a і h вимірювати з похибками, які не перевищують 0,4 см, то об'єм V піраміди буде обчислено з похибкою, яка не перевищує 4500 см^3.

16. 2) Функції $f(x,y) = x^2 - y^2$, $x(u, v) = u\cos v$, $y(u, v) = u\sin v$ диференційовні в області визначення, тому за теоремою про інваріантність форми повного диференціала маємо $dz = f'_x dx(u,v) + f'_y dy(u,v)$. Оскільки $f'_x = 2x$, $f'_y = -2y$, $dx(u, v) = \cos v\, du - u\sin v\, dv$, а $dy(u, v) = \sin v\, du + u\cos v\, dv$, то

$$dz = 2x(\cos v\, du - u\sin v\, dv) - 2y(\sin v\, du + u\cos v\, dv) =$$

$$= (2x\cos v - 2y\sin v)\, du + (-2xu\sin v - 2yu\cos v)\, dv =$$

$$= \left(2u\cos^2 v - 2u\sin^2 v\right)du - \left(2u^2\cos v\sin v + 2u^2\cos v\sin v\right)dv =$$

$$= 2u\cos 2v du - 2u^2\sin 2v dv.$$

Звідси випливає, що $\frac{\partial z}{\partial u} = 2u\cos 2v$, а $\frac{\partial z}{\partial v} = -2u^2\sin 2v$.

Це завдання можна виконати й іншим способом. Так, за формулами про частинні похідні складної функції маємо

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f'_x x'_u + f'_y y'_u = 2x\cos v - 2y\sin v = 2u\cos^2 v - 2u\sin^2 v = 2u\cos 2v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = f'_x x'_v + f'_y y'_v = 2x(-u\sin v) - 2y(u\cos v) = -2u^2\cos v\sin v -$$

$$-2u^2\cos v\sin v = -2u^2\sin 2v \ \Rightarrow\ dz(u, v) = z'_u du + z'_v dv = 2u\cos 2v du - 2u^2\sin 2v dv.$$

20. 2) Оскільки $z'_x = -\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}$, $z'_y = \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}$ – неперервні в точці $(1, \pi)$, то функція $z(x, y)$ диференційовна в точці $(1, \pi)$, тому в точці $(1, \pi, 0)$ існує дотична площина до поверхні $z = \sin\frac{y}{x}$, рівняння якої $z = z'_x(1,\pi)(x-1) + z'_y(1,\pi)(y-\pi)$. Проте за умовою $z'_x(1,\pi) = \pi$, а $z'_y(1,\pi) = -1$, тому рівняння дотичної площини набирає вигляду

$$z = \pi(x - 1) - y + \pi \ \Rightarrow\ z = \pi x - y.$$

Рівняння нормалі до поверхні $z = \sin\frac{y}{x}$ у точці $(1, \pi, 0)$ має вигляд

$$\frac{x-1}{\pi} = \frac{y-\pi}{-1} = \frac{z}{-1}.$$

§ 15.3. Похідна за напрямом, градієнт

Напрям у просторі $\mathbf{R}^n$ задається одиничним вектором $\vec{l} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \ldots + \cos\gamma\vec{k}$, де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, ..., $\cos\gamma$ — напрямні косинуси цього вектора.

Якщо функція кількох змінних $f(M) = f(x, y, \ldots, z)$ визначена в околі точки $M_0(x_0, y_0, \ldots, z_0)$, то *приростом* цієї *функції* в точці M_0 у напрямі вектора $\vec{l}$ називають число $\Delta_l f(M_0) = f(M) - f(M_0)$, де вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{l}$ колінеарні.

Приростом незалежної змінної у напрямі вектора $\vec{l}$ називають число

$$\Delta M = \begin{cases} \left|\overrightarrow{M_0M}\right|, & \text{якщо } \overrightarrow{M_0M} = a\vec{l} \text{ і } a > 0, \\ -\left|\overrightarrow{M_0M}\right|, & \text{якщо } \overrightarrow{M_0M} = a\vec{l} \text{ і } a < 0. \end{cases}$$

Похідною функції f у точці M_0 за напрямом $\vec{l}$ називають число

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} := \lim_{M \to M_0} \frac{\Delta_l f(M_0)}{\Delta M}.$$

Зокрема, якщо $\vec{l} = \vec{i}$, то $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}$, а якщо $\vec{l} = \vec{j}$, то $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}$.

Похідна за напрямом $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ — це швидкість зміни функції у напрямі вектора $\vec{l}$. У цьому полягає механічний зміст похідної за напрямом.

Якщо поверхню $z = f(x, y)$ перетнути площиною, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і паралельна осі Oz і вектору $\vec{l}$, то у перерізі дістають криву, кутовий коефіцієнт дотичної до якої у точці $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ дорівнює $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$. У цьому полягає геометричний зміст похідної за напрямом.

Зв'язок похідної за напрямом з частинними похідними. Якщо f диференційовна в точці M_0, то для будь-якого напряму $\vec{l} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \ldots + \cos\gamma\vec{k}$ існує похідна за напрямом $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ і справедлива рівність

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta + \ldots + f'_z(M_0)\cos\gamma = \operatorname{grad} f(M_0) \cdot \vec{l},$$

де $\operatorname{grad} f(M_0) = f'_x(M_0)\vec{i} + f'_y(M_0)\vec{j} + \ldots + f'_z(M_0)\vec{k}$ — градієнт функції f у точці M_0. Цей вектор задає напрям $\vec{l}$, похідна за яким у точці M_0 буде найбільшою. При цьому

$$\left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}\right)_{\max} = \sqrt{f_x'^2(M_0) + f_y'^2(M_0) + \ldots + f_z'^2(M_0)}.$$

Вправи

1. Визначити, чи правильні дані твердження:

1) частинний приріст $\Delta_x f(M_0)$ є приростом функції f в точці M_0 у напрямі вектора $\vec{i}$;

2) якщо існує $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ і E — пряма M_0M, що паралельна $\vec{l}$, то функція f, розглядувана на множині E, неперервна в точці M_0;

3)• якщо в точці M_0 існує $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ за будь-яким напрямом $\vec{l}$, то функція f, розглядувана в околі точки M_0, неперервна в цій точці;

4) якщо в точці M_0 існує $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ для якогось напряму $\vec{l}$, то в точці M_0 існує $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l_1}$ для будь-якого напряму $\vec{l}_1$;

5) функція $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ має в точці (0, 0) похідну за будь-яким напрямом;

6) якщо функція f має в точці M_0 похідну за будь-яким напрямом $\vec{l}$, то f диференційовна в точці M_0;

7) твердження, обернене до попереднього, є правильним.

2. Визначити, чи буде функція $z = x^2 y + 2y^2 - 5$ зростати у напрямі від точки (2, 1) до початку координат.

3. Знайти похідну функції в точці M_0 за напрямом $\vec{l}$:

1) $z = yx^2 - xy^2$, $M_0(3, 1)$, $\vec{l}$ утворює з додатним напрямом осі Ox кут $\alpha = 120°$;

2) $z = \operatorname{arctg} xy$, $M_0(2, 1)$, $\vec{l}$ збігається з напрямом бісектриси першого координатного кута;

3) $u = xyz$, $M_0(1, 1, 1)$, $\vec{l}$ співнапрямлений з вектором $\vec{l}_1 = \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + \vec{k}$;

4) $u = x^2 + y^2 - z^2$, $M_0(1, 1, 1)$, $\vec{l}$ протилежно напрямлений до вектора $\vec{l}_1 = 0 \cdot \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$;

5) $z = \dfrac{x + \sqrt{y}}{y}$, $M_0(2, 1)$, $\vec{l}_1$ такий, що $\max\limits_{l} \dfrac{\partial f(2,1)}{\partial l} = \dfrac{\partial f(2,1)}{\partial l_1}$;

6) $u = x^2 y + y^2 z + z^2 x$, $M_0(2, 1, 1)$, $\vec{l}$ утворює з координатними осями кути відповідно $60°, 45°, 60°$;

7) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$, $M_0(2, 1, 3)$, $\vec{l}$ утворює з координатними осями однакові кути;

8) $z = 2xy\mathrm{e}^{x+y^2-5}$, $M_0\left(2, \sqrt{3}\right)$, $\vec{l}$ збігається з напрямом зовнішньої нормалі до еліпса $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{6} = 1$ у точці M_0;

9) $z = -\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{y}$, $M_0(2, 1)$, $\vec{l}$ збігається з напрямом кубічної параболи $y = \dfrac{1}{8}x^3$ у точці M_0;

10) $z = \ln\left(x + y^2 + \mathrm{e}^{x+y-5}\right)$, $M_0(3, 2)$, $\vec{l}$ збігається з напрямом гіперболи $x^2 - y^2 = 5$ у точці M_0;

11) $u = \ln\left(3x + 2y^3 - z^3\right)$, $M_0(0, 2, 1)$, $\vec{l}$ збігається з напрямом еліпса $x = \cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 1$ у точці M_0;

12) $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2}$, $M_0(x, y, z)$ — довільна точка, $\vec{l}$ збігається з напрямом радіуса-вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ точки M_0.

4. Показати, що коли $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$, то $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial l} = \dfrac{\partial f(2/3, -4/3)}{\partial l} = 0$ для будь-якого напряму $\vec{l}$.

5. Знайти точки M, в яких $\dfrac{\partial f(M)}{\partial l} = 0$ для довільного напряму $\vec{l} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$, якщо:

1) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$;
2) $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$;
3) $f(x, y) = \left(4x - x^2\right)\left(6y - y^2\right)$;
4) $f(x, y) = xy(4 - x - y)$.

6. Для функцій із вправи 3 знайти градієнти.

7. Знайти кут між градієнтами функцій:

1) $z = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ у точках $(1, 1)$ і $(2, 3)$;

2) $u = x^3 + y^3 + z^3$ у точках $(0, 1, 0)$ і $(0, 0, 1)$;

3) $z = y\left(x^2+1\right)$ і $u = x^2y + x$ у точці $(1, 1)$;

4) $u = xy + yz + xz$ і $v = x^3 + yz^2 + 3xy - x + z$ у точці $(1, 1, 1)$.

8. Визначити напрям $\vec{l}$, що утворює з додатним напрямом осі Ox кут α, за яким функція z у точці M_0 має найбільшу, найменшу похідну (обчислити ці значення) або похідну, що дорівнює нулю, якщо:

1) $z = x^2 - xy + y^2$, $M_0(1, 1)$;

2)• $z = \frac{y}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, $M_0(1, 3)$; 3) $z = \mathrm{arctg}\frac{x}{y}$, $M_0(2, 1)$.

9. Нехай функція f диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0)$, а напрями $\vec{l}_1$ та $\vec{l}_2$ взаємно перпендикулярні. Довести, що

$$\left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial l_2}\right)^2 = \left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\right)^2.$$

10. Знайти точки, в яких градієнт функції дорівнює вектору $\vec{a}$, якщо:

1) $z = 4xy - 2x^2 - y^2 + 5$, $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$;

2) $z = \cos(x + y)$, $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$; 3) $z = \ln\left(x^2 + y\right)$, $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$.

11. Знайти точки, в яких модуль градієнта функції $u = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ дорівнює одиниці.

12. Знайти напрям і величину найбільшої зміни функції в точці M_0, якщо:

1) $z = ye^x + xe^y + 2x + 3y$, $M_0(0, 0)$; 2) $z = \frac{2xy-3}{x^2}$, $M_0(1, 1)$;

3) $u = x + \mathrm{tg}x + 2\sin y + z - \mathrm{ctg}z$, $M_0\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$.

13. Довести, що коли $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — диференційовна функція, а $u = u(\varphi)$ має похідну по φ, то

$$\mathrm{grad}\,u(\varphi) = \frac{du}{d\varphi}\mathrm{grad}\varphi.$$

14. Нехай $u = u(x, y, z)$ і $v = v(x, y, z)$ — диференційовні в точці $M(x, y, z)$ функції. Довести, що:

1) $\mathrm{grad}(\lambda u) = \lambda\mathrm{grad}u$, $\lambda = \mathrm{const}$; 2) $\mathrm{grad}(u \pm v) = \mathrm{grad}u \pm \mathrm{grad}v$;

3) $\mathrm{grad}(uv) = v\mathrm{grad}u + u\mathrm{grad}v$; 4) $\mathrm{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,\mathrm{grad}\,u - u\,\mathrm{grad}\,v}{v^2}$, $v \neq 0$.

15. Знайти градієнти функцій ($r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k$, $\vec a$ і $\vec b$ — сталі вектори):

1) $u=\vec r^{\,2}$; 2) $u=r$; 3) $u=1/r$; 4) $u=\ln r$;

5) $u=\cos r$; 6) $u=F\left(\vec r^{\,2}\right)$; 7) $u=(\vec a, \vec r)$; 8) $u=(\vec a, \vec r)\left(\vec b, \vec r\right)$.

16. Знайти похідну функції $u=u(x, y, z)$ за напрямом градієнта функції $v=v(x, y, z)$. За якої умови ця похідна дорівнює нулю?

Зразки розв'язування задач

1. 3) Розглянемо функцію

$$f(x, y)=\begin{cases}1, \text{ якщо } y=x^2, (x, y)\neq(0, 0),\\ 0 \text{ у інших точках } (x, y).\end{cases}$$

Ця функція на довільній прямій, що проходить через точку $(0, 0)$, набуває нульових значень, за винятком, можливо, лише однієї точки, яка лежить на параболі. Тому для довільного напряму $\vec l$ маємо $\Delta_l f(0, 0)=f(M)-f(0, 0)=0$, якщо точка M розміщена досить близько до точки $M_0(0, 0)$. Отже, $\dfrac{\Delta_l f(0,0)}{\Delta M}=0\to 0$, якщо $M\to(0, 0) \Rightarrow \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial l}=0$ для довільного напряму $\vec l$. Разом з тим функція f не є неперервною у точці $(0, 0)$, оскільки $\lim\limits_{E\ni(x, y)\to(0,0)} f(x, y)=1\neq f(0,0)$, де $E=\left\{(x, y)\neq(0,0): y=x^2\right\}$.

Отже, дане твердження неправильне.

8. 2) Обчислимо похідну функції в точці $M_0(1;\ 3)$ за напрямом вектора $\vec l$, який утворює кут α з додатним напрямом осі Ox. Маємо

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial l}=\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\sin\alpha=$$

$$=\left(-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)\Bigg|_{M_0}\cos\alpha+\frac{1}{x}\Bigg|_{M_0}\sin\alpha=-\frac{7}{2}\cos\alpha+\sin\alpha.$$

Для відшукання напряму $\vec l$, за яким функція набуває найбільшого і найменшого значень, дослідимо на екстремум визначену і диференційовну на множині $\mathbf{R}$ функцію

$$u(\alpha)=-\frac{7}{2}\cos\alpha+\sin\alpha .$$

Вона періодична з періодом 2π, тому достатньо дослідити її на проміжку завдовжки 2π, наприклад на проміжку $[0; 2\pi]$. Її похідна

$$u'(\alpha)=\frac{7}{2}\sin\alpha+\cos\alpha ,$$

а критичні точки

$$\alpha=-\operatorname{arctg}\frac{2}{7}+k\pi , k\in\mathbf{Z}.$$

Проміжку $[0; 2\pi]$ належать дві точки: $\alpha_1=\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{7}$ і $\alpha_2=2\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{7}$.

Дослідимо ці точки на екстремум за другою похідною:

$$u''(\alpha)=\frac{7}{2}\cos\alpha-\sin\alpha.$$

Оскільки

$$u''(\alpha_1)=\frac{7}{2}\cos\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{7}\right)-\sin\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{7}\right)=$$

$$=\frac{7}{2}\left(-\cos\operatorname{arctg}\frac{2}{7}\right)-\sin\operatorname{arctg}\frac{2}{7}=\frac{7}{2}\left(-\frac{7}{\sqrt{53}}\right)-\frac{2}{\sqrt{53}}<0,$$

то у точці $\alpha_1=\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{7}$ похідна $\frac{\partial z(M_0)}{\partial l}$ набуває максимуму, причому

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial l_1}=\left(\frac{\partial z(M_0)}{\partial l}\right)_{\max}=-\frac{7}{2}\cos\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{7}\right)+\sin\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{7}\right)=$$

$$=-\frac{7}{2}\left(-\frac{7}{\sqrt{53}}\right)+\frac{2}{\sqrt{53}}=\frac{\sqrt{53}}{2},$$

$$\vec{l}_1=-\frac{7}{\sqrt{53}}\vec{i}+\frac{2}{\sqrt{53}}\vec{j}=\frac{1}{\sqrt{53}}(-7\vec{i}+2\vec{j}).$$

Аналогічно

$$u''(\alpha_2)=\frac{7}{2}\cos\left(2\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{7}\right)-\sin\left(2\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{7}\right)=$$

$$=\frac{7}{2}\cos\operatorname{arctg}\frac{2}{7}+\sin\operatorname{arctg}\frac{2}{7}=\frac{49}{2\sqrt{53}}+\frac{2}{\sqrt{53}}=\frac{\sqrt{53}}{2}>0,$$

а це означає, що похідна $\frac{\partial z(M_0)}{\partial l}$ за напрямом $\vec{l}_2=\frac{1}{\sqrt{53}}(7\vec{i}+2\vec{j})$, який утворює з додатним напрямом осі Ox кут $\alpha_2=2\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{7}$, набуває мінімуму, причому

$$\left(\frac{\partial z(M_0)}{\partial l}\right)_{\min}=\frac{\partial z(M_0)}{\partial l_2}=-\frac{\sqrt{53}}{2}.$$

Оскільки на відрізку $[0;\,2\pi]$ $\alpha_1=\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{7}$ і $\alpha_2=2\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{7}$ — єдині точки відповідно максимуму і мінімуму, то функція $\frac{\partial z(M_0)}{\partial l}$ набуває у них відповідно найбільшого і найменшого значень.

Похідна $\frac{\partial z(M_0)}{\partial l}$ дорівнює нулю в точках, що є коренями рівняння $-\frac{7}{2}\cos\alpha+\sin\alpha=$ $=0$. На відрізку $[0;\,2\pi]$ це рівняння має два корені: $\alpha_3=\operatorname{arctg}\frac{7}{2}$ і $\alpha_4=\pi+\operatorname{arctg}\frac{7}{2}$. Отже, похідна $\frac{\partial z(M_0)}{\partial l}$ набуває значень, що дорівнюють нулю, за напрямом $\vec{l}_3=\frac{1}{\sqrt{53}}(2\vec{i}+7\vec{j})$, який утворює з додатним напрямом осі Ox кут $\alpha_3=\operatorname{arctg}\frac{7}{2}$, і напрямом $\vec{l}_4=$ $=-\frac{1}{\sqrt{53}}(2\vec{i}+7\vec{j})$, який утворює з додатним напрямом осі Ox кут $\alpha_4=\pi+\operatorname{arctg}\frac{7}{2}$.

§ 15.4. Частинні похідні і диференціали вищих порядків. Формула Тейлора для функції кількох змінних

Частинні похідні $f'_x, f'_y, \ldots, f'_z$ називають *частинними похідними першого порядку* функції f. Якщо вони самі мають частинні похідні, то останні називають *частинними похідними другого порядку* функції f і позначають

$$f''_{x^2} := \left(f'_x\right)'_x =: \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f''_{xy} := \left(f'_x\right)'_y =: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \ldots, \quad f''_{xz} := \left(f'_x\right)'_z =: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z},$$

$$f''_{yx} := \left(f'_y\right)'_x =: \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f''_{y^2} := \left(f'_y\right)'_y =: \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \ldots, \quad f''_{yz} := \left(f'_y\right)'_z =: \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z},$$

....

$$f''_{zx} := \left(f'_z\right)'_x =: \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \quad f''_{zy} := \left(f'_z\right)'_y =: \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \quad \ldots, \quad f''_{z^2} := \left(f'_z\right)'_z =: \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

При цьому частинні похідні $f''_{x^2}, f''_{y^2}, \ldots, f''_{z^2}$ називають чистими, а всі інші — мішаними частинними похідними другого порядку.

Так само визначають частинні похідні функції f третього, четвертого і, взагалі, n-го порядку:

$$f'''_{x^3} := \left(f''_{x^2}\right)'_x =: \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad f'''_{x^2 y} := \left(f''_{x^2}\right)'_y =: \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \quad f'''_{xyx} := \left(f''_{xy}\right)'_x =: \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}.$$

Теорема (про рівність мішаних похідних). *Якщо мішані частинні похідні f''_{xy} та f''_{yx} неперервні в точці M_0, то вони рівні в цій точці.*

Аналогічне твердження має місце для інших мішаних похідних:

$$f'''_{x^2 y} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx} =: f'''_{yx^2}, \quad f'''_{yzx} = f'''_{zxy} = f'''_{yxz} = f'''_{zyx} = f'''_{xzy} = f'''_{xyz}.$$

Іншими словами, якщо для відшукання мішаної частинної похідної функцію f треба продиференціювати по кожній змінній певну кількість разів, то порядок цього диференціювання не впливає на результат, якщо мішані похідні неперервні.

Якщо функція f диференційовна в області D, то її повний диференціал df називають *першим диференціалом*, або *диференціалом першого порядку*, функції f. Якщо $df = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + \ldots + f'_z \Delta z$, а Δx, Δy, …, Δz — фіксовані, то df може бути диференційовною в D, тому існує $d(df) =: d^2 f$ — *другий диференціал*, або *диференціал другого порядку*, функції f, при цьому функцію f називають *двічі диференційовною* в D. Взагалі, $d\left(d^{n-1} f\right) =: d^n f$ називають *n-м диференціалом*, або *диференціалом n-го порядку*, функції f.

Якщо функція f має неперервні частинні похідні n-го порядку, то для відшукання n-го диференціала функції f має місце символічна формула:

$$d^n f(M)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y+\ldots+\frac{\partial}{\partial z}\Delta z\right)^n f(M).$$

Зокрема, для функції двох змінних маємо

$$d^2 f(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x,y)=$$

$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Delta y^2\right)f(x,y)=$$

$$=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\Delta y^2=$$

$$=f''_{x^2}(x,\,y)\Delta x^2+2f''_{xy}(x,\,y)\Delta x\Delta y+f''_{y^2}(x,\,y)\Delta y^2.$$

Якщо функція f має в області D неперервні частинні похідні до $(n+1)$-го порядку, то для будь-яких точок M_0, $M\in D$: $M_0M\subset D$ має місце формула Тейлора:

$$f(M)-f(M_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{d^k f(M_0)}{k!}+\frac{d^{n+1}f(M_c)}{(n+1)!},$$

де $M_c\in M_0M$, тобто $M_c(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y,\ \ldots,\ z_0+\theta\Delta z)$, $0<\theta<1$.

Зокрема, при $n=0$ з формули Тейлора випливає формула Лагранжа: $f(M)=f(M_0)+df(M_c)$, яка є уточненням наближеної формули: $f(M)\approx$ $\approx f(M_0)+df(M_0)$.

З формули Лагранжа випливає, зокрема, що $f=\text{const}$ в області D тоді й тільки тоді, коли $f'_x=f'_y=\ldots=f'_z=0$ в області D.

Вправи

1. Визначити, чи правильні дані твердження:

1) якщо функція f має в околі точки M_0 частинні похідні першого порядку, то вона має в цій точці і частинні похідні другого порядку;

2) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

3)• функція $f(x,\,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{якщо } (x,\,y)\neq(0,\,0),\\ 0, & \text{якщо } (x,\,y)=(0,\,0),\end{cases}$ має $f''_{xy}(0,0)\neq\infty$;

4) якщо функція f диференційовна в околі точки M_0, то існує $d^2 f(M_0)$;

5) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

6) якщо функція f двічі диференційовна в точці M_0, то вона має в точці M_0 неперервні частинні похідні першого порядку;

7) якщо існують $f''_{xy}(M_0)$ і $f''_{yx}(M_0)$, то $f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0)$;

8) якщо в точці M_0 відомо значення функції f та її частинних похідних будь-якого порядку, які обмежені в околі точки M_0 числом $H > 0$, то за формулою Тейлора можна обчислити значення функції f у довільній точці околу точки M_0.

2. Знайти диференціали другого порядку даної функції:

1) $z = \mathrm{e}^{xy}$; 2) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$; 3) $z = \dfrac{t}{\alpha} + t\sin\alpha$;

4) $z = \left(\dfrac{y}{x}\right)^x$; 5) $u = xy + yz + zx$; 6) $u = \dfrac{z}{x^2 + y^2}$;

7) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; 8) $u = \arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;

9) $u = x^{y^z}$; 10) $u = \cos(xyz)$; 11) $z = \sin\left(x + 3y^2\right)$; 12) $z = y\ln(xy)$;

13) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{yz}{x^2}$; 14) $z = \ln\operatorname{ctg}\dfrac{x}{y}$; 15) $z = x^y y^x$; 16) $u = z^{xy}$.

3. Знайти диференціал порядку n від даної функції:

1) $n = 3$, $z = (x + y)^3$; 2) $n = 3$, $z = \cos\left(x^2 + y^2\right)$;

3) $n = 6$, $z = \sin x \operatorname{sh} y$; 4) $n = 6$, $u = \ln\left(x^x y^y z^z\right)$;

5) $n = m$, $z = \mathrm{e}^{\alpha x + by}$; 6) $n = 20$, $z = \ln(x + y)$;

7) $n = m$, $u = f(ax + by + cz)$; 8) $n = m$, $u = \ln(xyz)$;

9) $n = 5$, $z = \mathrm{e}^x \cos y$; 10) $n = 3$, $z = x^3 \cos y + y^3 \cos x$.

4. Оператор Δ називають оператором Лапласа, якщо

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Зокрема, якщо u — функція двох змінних x та y, то $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Знайти Δu для таких функцій:

1) $u = \cos x \operatorname{ch} y$; 2) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$;

3) $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$; 4) $u = 1\Big/\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$;

5) $u = f\left(x + y + z,\ x^2 + y^2 + z^2\right)$; 6) $u = f\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$.

5. Довести, що дана функція $u = u(x, t)$ задовольняє рівняння теплопровідності, тобто $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

1) $u = 2a^2 t + x^2$, де a — стала;

2) $u = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$, де a і b — сталі.

6. Перевірити, чи існують для даної функції f мішані частинні похідні $f''_{xy}(0,0)$ і $f''_{yx}(0,0)$ та чи рівні вони між собою:

1) $f(x, y) = \arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$;

2) $f(x, y) = \begin{cases} \arcsin\dfrac{y}{x}, & \text{якщо } |y| \le |x|, (x, y) \ne (0, 0), \\ 0 & \text{в інших точках } (x, y); \end{cases}$

3) $f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{якщо } (x, y) \ne (0, 0), \\ 0, & \text{якщо } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

4) $f(x, y) = \begin{cases} xy, & \text{якщо } |y| \le |x|, \\ -xy, & \text{якщо } |y| > |x|; \end{cases}$

5) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & \text{якщо } (x, y) \ne (0, 0), \\ 0, & \text{якщо } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

6) $f(x, y) = \begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2 + y^2}, & \text{якщо } (x, y) \ne (0,0), \\ 0, & \text{якщо } (x, y) = (0,0); \end{cases}$

7) $f(x, y) = \begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)^{y^2}, & \text{якщо } (x, y) \ne (0, 0), \\ 1, & \text{якщо } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

7•. Нехай функція $f(x, y)$ має в околі точки (x_0, y_0) частинні похідні f'_x, f'_y та f''_{xy}, причому існує $\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f''_{xy}(x, y) = A$. Довести, що існує $f''_{yx}(x_0, y_0)$ і $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0) = A$.

8. Знайти другий диференціал даної складної функції та визначити, чи інваріантна його форма:

1) $u = f(x+y)$; 2) $u = f(xyz)$; 3) $u = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$;

4)• $u = f\left(x^2+y^2+z^2\right)$; 5) $u = f(ax, by)$; 6) $u = f(x+y, z)$;

7) $u = f\left(t, t^2, t^3\right)$; 8) $u = f\left(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy\right)$; 9) $u = f\left(\frac{z}{x}, \frac{x}{y}\right)$;

10) $u = \frac{x}{y} f\left(\frac{y}{x}\right)$; 11) $u = f\left(xy, \frac{x}{y}, x+y\right)$; 12) $u = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$.

9. Для даної функції записати формулу Тейлора в околі вказаної точки:

1) $z = \sin x \sin y$, $M_0\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$; 2)• $z = \mathrm{e}^x \sin y$, $M_0\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

3) $z = \ln(x-2y)$, $M_0 \in D(z)$; 4) $z = \arccos\frac{x}{y}$, $M_0 \in D(z) \setminus \partial D(z)$;

5) $u = x^3+y^3+z^3-3xyz$, $M_0(1,1,1)$; 6) $u = \cos(x+y+z)$, $M_0(0,0,0)$;

7) $z = x^y$, $M_0(1,2)$; 8) $z = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}$, $M_0(0,0)$;

9) $z = \ln(1+x+y)$, $M_0(0,0)$; 10) $z = (1+x)^m(1+y)^n$, $M_0(0,0)$;

11) $z = \mathrm{e}^y \ln(1+x)$, $M_0(0,0)$.

10. За допомогою формули Тейлора для $n = 3$ обчислити наближено значення виразу:

1) $(1{,}14)^{1{,}89}$; 2)• $\mathrm{e}^{0{,}1}\sin 0{,}49\pi$;

3) $(1{,}135)^5(0{,}88)^4$; 4) $\mathrm{e}^{0{,}144}\ln(1{,}102)$.

11. Визначити, звідки випливають наближені рівності:

1) $\sqrt{1-x^2-y^2} \approx 1-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$; 2) $\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1-\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)$;

3) $\operatorname{arctg}\frac{1+x+y}{1-x+y} \approx \frac{\pi}{4}+x-xy$.

12. Довести, що вказані функції задовольняють дане рівняння:

1) $z = \varphi(ay+bx)\psi(ay-bx)$, $a^2\left(z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right) = b^2\left(z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)$;

2) $z = x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+y^{-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, $x^2 z''_{x^2}+2xyz''_{xy}+y^2 z''_{y^2}+xz'_x+yz'_y = n^2 z$;

3) $z = f(x+\varphi(y))$, $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

4) $z = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$, $z''_{x^2} - 2z''_{xy} + z''_{y^2} = 0$;

5) $z = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$, $z''_{t^2} = a^2 z''_{x^2}$.

Зразки розв'язування задач

1. 3) якщо $(x, y) \neq (0, 0)$, то

$$f'_x(x, y) = \frac{y\left(x^2+y^2\right) - 2x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2},\ f'_y(x, y) = \frac{x\left(x^2+y^2\right) - 2xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Ці формули не можна застосувати у точці (0, 0), тому в цій точці знайдемо частинні похідні за означенням. Маємо

$$\frac{\Delta_x f(0,0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \frac{0-0}{\Delta x} = 0 \Rightarrow f'_x(0,0) = 0,\ \Delta x \to 0.$$

Аналогічно дістаємо, що $f'_y(0,0) = 0$. Переконаємось, чи є $f''_{xy}(0,0)$. Маємо

$$\frac{\Delta_y f'_x(0,0)}{\Delta y} = \frac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0,0)}{\Delta y} = \frac{1/\Delta y}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y^2} \to \infty,\ \Delta y \to 0.$$

Отже, дане твердження неправильне.

7. За означенням частинних похідних

$$f''_{yx}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f'_y(x_0+\Delta x, y_0) - f'_y(x_0, y_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)}{\Delta y} - \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0} \frac{1}{\Delta x\Delta y}\left(\varphi(x_0+\Delta x, \Delta y) - \varphi(x_0, \Delta y)\right),$$

де $\varphi(x, \Delta y) = f(x, y_0+\Delta y) - f(x, y_0)$. Застосовуючи до цієї функції теорему Лагранжа, маємо $\varphi(x_0+\Delta x, \Delta y) - \varphi(x_0, \Delta y) = \varphi'_x(x_0+\theta_1\Delta x, \Delta y)\Delta x$, де $\varphi'_x(x, \Delta y) = f'_x(x, y_0+\Delta y) - f''_x(x, y_0)$ тому

$$\varphi(x_0+\Delta x, \Delta y) - \varphi(x_0, \Delta y) = \left(f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) - f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\right)\Delta x,$$

де $0 < \theta_1 < 1$. Ще раз застосовуючи теорему Лагранжа, дістаємо

$$\varphi(x_0+\Delta x, \Delta y) - \varphi(x_0, \Delta y) = f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y,$$

тому

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0} f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y),$$

якщо остання повторна границя існує. Оскільки за умовою задачі

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y) = A$$

та існує внутрішня границя повторної границі, то за відомим твердженням (див. вправу з § 14.2)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0} f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y) = A.$$

Отже, існує $f''_{yx}(x_0, y_0) = A$. Оскільки за теоремою Лагранжа

$$\frac{f'_x(x_0, y_0+\Delta y) - f'_x(x_0, y_0)}{\Delta y} = \frac{f''_{xy}(x_0, y_0+\theta\Delta y)\Delta y}{\Delta y} = f''_{xy}(x_0, y_0+\theta\Delta y), \ 0<\theta<1,$$

то існує

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f'_x(x_0, y_0+\Delta y) - f'_x(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} f''_{xy}(x_0, y_0+\theta\Delta y) = A.$$

Цим доведено, що $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0) = A$.

8. 4) Нехай $w = x^2 + y^2 + z^2$. Тоді

$$du = f'(w)dw = f'(w)(2x\Delta x + 2y\Delta y + 2z\Delta z) \Rightarrow d^2u = d\left(2f'(w)(x\Delta x + y\Delta y + z\Delta z)\right) =$$

$$= 2\left((x\Delta x + y\Delta y + z\Delta z)df'(w) + f'(w)d(x\Delta x + y\Delta y + z\Delta z)\right) =$$

$$= 2\left(2(x\Delta x + y\Delta y + z\Delta z)^2 f''(w) + f'(w)\left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right)\right) = f'(w)d^2w + f''(w)dw^2.$$

Якщо w — незалежна змінна, то $d^2u = f''(w)dw^2$, причому $dw := \Delta w$. Остання форма диференціала другого порядку збережеться тоді і тільки тоді, коли $f'(w)d^2w = 0 \Leftrightarrow f'(w) = 0$ або $d^2w = 0$. Оскільки $d^2w = 2\left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right) \neq 0$ незалежно від w, то $f'(w)d^2w = 0 \Leftrightarrow f'(w) = 0$.

Тільки у тих точках, де $f'(w) = 0$, форма повного диференціала другого порядку інваріантна.

9. 2) Оскільки $f(M_0) = e^0 \sin\frac{\pi}{2} = 1$,

$$df(M_0) = \left(e^x \sin y\Delta x + e^x \cos y\Delta y\right)\Big|_{\substack{x=0\\ y=\pi/2}} = \Delta x,$$

$$d^2f(M_0) = \left(e^x \sin y\Delta x^2 + 2e^x \cos y\Delta x\Delta y - e^x \sin y\Delta y^2\right)\Big|_{\substack{x=0\\ y=\pi/2}} = \Delta x^2 - \Delta y^2,$$

$$d^3f(M_0) = \left(e^x \sin y\Delta x^3 + 3e^x \cos y\Delta x^2\Delta y - 3e^x \sin y\Delta x\Delta y^2 -\right.$$

$$\left.-e^x \cos y\Delta y^3\right)\Big|_{\substack{x=0\\ y=\pi/2}} = \Delta x^3 - 3\Delta x\Delta y^2,$$

то, враховуючи, що $\Delta x = x - 0$, $\Delta y = y - \frac{\pi}{2}$, дістаємо

$$e^x \sin y = 1 + x + \frac{1}{2!}\left(x^2 - \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) + \frac{1}{3!}\left(x^3 - 3x\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) + \frac{d^4f(M_c)}{4!}.$$

Зокрема, якщо $x = 0{,}1$, а $y = 0{,}49\pi$, то маємо

$$e^{0,1}\sin 0{,}49\pi \approx 1 + 0{,}1 + \frac{1}{2}\left(0{,}01 - 0{,}0001\pi^2\right) + \frac{1}{3!}\left(0{,}001 - 0{,}3\cdot 0{,}0001\pi^2\right) \approx 1{,}1045.$$

§ 15.5. Неявні функції

Функцію $w=f(u)$, $u\in E$, називають *неявною функцією*, що визначається рівнянням

$$F(u,w)=0, \tag{1}$$

якщо $F(u,f(u))\equiv 0$ на E. При цьому можливі випадки:

1) $F(u,w)\in \mathbf{R}$, $u=x\in \mathbf{R}$ і $w=y\in \mathbf{R}$. Тоді $y=f(x)$ — неявна функція дійсної змінної, що визначається рівнянням $F(x,y)=0$;

2) $F(u,w)\in \mathbf{R}$, $u=(x,y)\in \mathbf{R}^2$ і $w=z\in \mathbf{R}$. Тоді $z=f(x,y)$ — неявна функція двох змінних, що визначається рівнянням $F(x,y,z)=0$;

3) $F(u,w)\in \mathbf{R}$, $u=(x,y,...,z)\in \mathbf{R}^n$ і $w\in \mathbf{R}$. Тоді $w=f(x,y,\dots,z)$ — неявна функція n змінних, що визначається рівнянням $F(x,y,\dots,z,w)=0$;

4) $F(u,w)=(F_1(u,w),F_2(u,w),...,F_n(u,w))\in \mathbf{R}^n$, $u=(x,y,...,z)\in \mathbf{R}^m$ і $w=(w_1,w_2,...,w_n)\in \mathbf{R}^n$. Тоді $w=f(x,y,...,z)=(f_1(x,y,..,z),f_2(x,y,...,z),...$ $...,f_n(x,y,...,z))$ — векторнозначна неявна функція m змінних, що визначається системою рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x,y,\dots,z,w_1,w_2,\dots,w_n)=0, \\ F_2(x,y,\dots,z,w_1,w_2,\dots,w_n)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x,y,\dots,z,w_1,w_2,\dots,w_n)=0. \end{cases} \tag{1'}$$

Для функції F в останньому випадку позначимо через

$$\frac{DF(M)}{Dw}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1(M)}{\partial w_1} & \frac{\partial F_1(M)}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial F_1(M)}{\partial w_n} \\ \frac{\partial F_2(M)}{\partial w_1} & \frac{\partial F_2(M)}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial F_2(M)}{\partial w_n} \\ \frac{\partial F_n(M)}{\partial w_1} & \frac{\partial F_n(M)}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial F_n(M)}{\partial w_n} \end{vmatrix} \tag{2}$$

визначник n-го порядку. Зокрема, якщо $n=1$, то $\frac{DF(M)}{Dw}:=\frac{\partial F(M)}{\partial w}$. Визначник Остроградського — Якобі, або якобіан, $\frac{DF(M)}{Dw}$ називають *неперервним* у точці M_0, якщо кожна функція $\frac{DF_k(M)}{Dw_i}$ неперервна у точці M_0.

Теорема (про існування, неперервність та диференційовність неявної функції). Нехай функція F задовольняє умови:

1) $F(u_0, w_0) = 0$; 2) $F(u, w)$ і $\dfrac{DF(u,w)}{Dw}$ неперервні в $O(u_0, w_0)$;

3) $\dfrac{DF(u_0, w_0)}{Dw} \neq 0$. Тоді у досить малому околі точки u_0 існує єдина неперервна функція $w = f(u)$, яка є неявною функцією, що визначається рівнянням (1). Якщо, крім того, функція F задовольняє умову 4) і диференційовна в точці (u_0, w_0), то неявна функція $w = f(u)$ диференційовна в точці u_0, і частинні похідні функції $w = f(u) = (w_1, w_2, ..., w_n)$ можна визначити із системи

$$\frac{\partial F_k}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial w_i} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0, \quad k \in \overline{1, n},$$

та аналогічних систем для змінних $y, \ldots, z$. Зокрема, якщо f — неявна функція дійсної змінної, то система набирає вигляду

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

а якщо f — неявна функція двох змінних, то

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow f'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow f'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

Вправи

1. Визначити, чи правильні дані твердження:

1) кожну явно задану функцію $y = f(x)$ можна вважати неявною функцією;

2) кожне рівняння (1) задає хоча б одну неявну функцію;

3) кожне рівняння (1) задає єдину неявну функцію;

4) рівняння $y^2 - y = 0$ задає нескінченну множину неявних функцій $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Зокрема, функція Діріхле входить до цієї множини;

5) рівняння $y^2 - x^2 = 0$ задає чотири неявні функції, що неперервні на $\mathbf{R}$;

6) рівняння $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ задає єдину неявну функцію $z = f(x, y)$, що неперервна в $\mathbf{R}^2$ і задовольняє умову $f(0, 1) = 1$;

7) система

$$\begin{cases} 8x^2 - z^3 - 3y^4 = 0, \\ x^3 + 5y - z^2 + 3 = 0 \end{cases}$$

задає єдину пару функцій $y = y(x)$ та $z = z(x)$, неперервних у достатньо малому околі точки $x_0 = 1$ і таких, що $y(1) = 0$, а $z(1) = 2$.

2. Дослідити, чи визначає рівняння $F(x, y) = 0$ в околі точки $M_0(x_0, y_0)$ єдину неперервну неявну функцію $y = f(x)$, якщо:

1) $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$, $x_0 = a\sqrt[3]{4}$, $y_0 = a\sqrt[3]{2}$;

2)• $F(x, y) = x\left(x^2 + y^2\right) - a\left(x^2 - y^2\right)$, $x_0 = y_0 = 0$;

3) $F(x, y) = xe^{2y} - y\ln x - 8$, (x_0, y_0): $F(x_0, y_0) = 0$ і $y_0 \neq \frac{1}{2}\ln\frac{\ln x_0}{2x_0}$;

4) $F(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, (x_0, y_0): $F(x_0, y_0) = 0$ і $y_0 \neq x_0$;

5) $F(x, y) = x^2 \ln y - y^2 \ln x$, (x_0, y_0): $F(x_0, y_0) = 0$ і $y_0^2 \neq \frac{x_0^2}{\ln x_0^2}$;

6) $F(x, y) = y - x + \operatorname{arcctg} y$, (x_0, y_0): $F(x_0, y_0) = 0$ і $y_0 \neq 0$;

7) $F(x, y) = x^3 + y^2 + a\cos y$, (x_0, y_0): $F(x_0, y_0) = 0$ і $2y_0 - a\sin y_0 \neq 0$.

3. Визначити, де неявні функції із завдання 2 мають похідні y' і y'', та знайти їх.

4. Показати, що дане рівняння в околі деякої точки визначає єдину неявну диференційовну функцію $z = f(x, y)$, та знайти вказані частинні похідні або повні диференціали:

1) $z^3 + 3x^2 z = 2xy$, z'_x, z'_y;

2) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$, z''_{x^2};

3) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, dz і $d^2 z$;

4)• $x + y + z = e^z$, dz і $d^2 z$;

5) $\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y} + 6$, dz і $d^2 z$;

6) $z = x - \operatorname{arcctg}\frac{y}{z - x}$, $d^2 z$;

7) $z^3 - xz + y = 0$, $d^2 z(3, -2)$, якщо $z(3, -2) = 2$;

8) $2x^2 + y^2 + z^2 + 4xz + z = 0$, $d^2 z(2, 0)$, якщо $z(2, 0) = -1$.

5. Нехай функція трьох змінних $F(x, y, z)$ в околі точки (x_0, y_0, z_0) задовольняє умови теореми існування та диференційовності неявної функції $z = f(x, y)$, що визначається рівнянням $F(x, y, z) = 0$. Довести, що графік цієї неявної функції має в точці (x_0, y_0, z_0) дотичну площину і нормаль, рівняння яких мають відповідно вигляд

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) +$$

$$+F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

$$\frac{x_0 - x}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

6. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до даної поверхні у даній точці:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $M_0 = (1, 1, 1)$; 2) $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$, $M_0 = (2, 2, 1)$;

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ така, що нормаль у цій точці утворює рівні кути з осями координат;

4) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ така, що дотична площина у цій точці паралельна площині $x + 4y + 6z = 0$;

5) $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$, $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ така, що дотична площина у цій точці перпендикулярна до площин $x - y - z = 2$ і $x - y - z/2 = 2$;

6)• $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ така, що дотична площина відтинає на координатних осях рівні відрізки.

7. Написати формулу Тейлора в околі точки (x_0, y_0) при $n = 1$ для неявної функції $z = z(x, y)$, що задається в околі точки (x_0, y_0, z_0) рівнянням:

1) $z^3 - 2xz + y = 0$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$;

2) $xz^5 + y^3 z - x^3 = 0$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$;

3) $x - yz + e^z = 0$, $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, 0)$;

4) $xy + xz + yz - 3 = 0$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$.

8. Знайти похідні першого і другого порядку в точці x_0 неявних функцій $y = y(x)$ та $z = z(x)$, що задаються системою:

1) $\begin{cases} 8x^2 - z^3 - 4y^4 = 0, \\ x^3 - z^2 + 5y = -3, \end{cases}$ причому $x_0 = 1$, $y(1) = 0$, $z(1) = 2$;

2)• $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^3 + y^3 - z^3 = 10, \end{cases}$ причому $x_0 = 1$, $y(1) = 1$, $z(1) = -2$;

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2}x^2, \\ x + y + z = 2, \end{cases}$ причому $x_0 = 2$, $y(2) = -1$, $z(2) = 1$;

4) $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$ причому $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y(x_0) = 0$, $z(x_0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;

5) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z + 1 = 0 \end{cases}$ у точці $(1, 1, 1)$;

6) $\begin{cases} 5x^2 + y^2 - 2z^2 = 1, \\ 4x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0 \end{cases}$ у точці $(1, -2, 2)$.

9. Знайти частинні похідні та повні диференціали першого та другого порядку у точці (x_0, y_0) неявних функцій $u = u(x, y)$ та $v = v\ (x, y)$, що задаються системою:

1) $\begin{cases} xu - yv = 0, \\ yu + xv = 1, \end{cases}$ $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $u(0, 1) = 1$, $v\ (0, 1) = 0$;

2) $\begin{cases} u + v = x + y, \\ \dfrac{\sin u}{\sin v} = \dfrac{x}{y}, \end{cases}$ $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $u(1,1) = \frac{\pi}{4}$, $v(1,1) = \frac{\pi}{4}$;

3) $\begin{cases} xu + yv = 4, \\ yu - v = 0, \end{cases}$ $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $u(1, -1) = 2$, $v\ (1, -1) = -2$;

4) $\begin{cases} x\mathrm{e}^{u+v} + 2uv = 1, \\ y\mathrm{e}^{u-v} - \dfrac{u}{1+v} = 2x, \end{cases}$ $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $u(1, 2) = 0$, $v\ (1, 2) = 0$.

10. В яких точках еліпсоїда $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{2} = 1$ нормаль до нього утворює рівні кути з осями координат?

11. Скласти рівняння дотичної площини до поверхні $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12}$, перпендикулярної до прямої $\frac{x+3}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}$.

12. До поверхні $x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 3z = 0$ провести дотичну площину, яка проходить через точку $M(0, 0, -2)$, паралельно прямій $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{2}$.

13. На поверхні $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 1 = 0$ знайти точки, в яких дотичні площини паралельні координатним площинам.

14. Показати, що дотичні площини до поверхні $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ відтинають на координатних осях відрізки, сума яких дорівнює a.

15. Переконатися, що неявно задана функція z від x і y задовольняє рівняння:

1) $\cos(5x - 3y + 8z) = 5x - 3y + 8z$, $z'_x + z'_y + \dfrac{1}{4} = 0$;

2) $x + az = \varphi(y + bz)$, $a = \text{const}$, $b = \text{const}$, $az'_x + bz'_y + 1 = 0$;

3) $\dfrac{z}{x} = \varphi\left(\dfrac{z}{y}\right)$, $xz'_x + yz'_y = z$;

4) $y = x\varphi(z) + \psi(z)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0.$

Зразки розв'язування задач

2. 2) Функція $F(x, y)$ неперервна в околі точки $(0, 0)$ разом із частинними похідними $F'_x = 3x^2 + y^2 - 2ax$ та $F'_y = 2xy + 2ay$. Оскільки $F'_y(0,0) = 0$, то застосовувати теорему про існування неявної функції не можна. Розглянемо рівняння

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow x^3 + xy^2 - ax^2 + ay^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-a) + y^2(x+a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{x^2(a-x)}{a+x} \Leftrightarrow y = \pm x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}},$$

якщо $a > 0$ і $x \in (-a; a)$. Якщо $a = 0$, то рівняння набуває вигляду $x\left(x^2 + y^2\right) = 0$, тому не має розв'язку відносно y. Отже, для будь-якого a рівняння $F(x, y) = 0$ або не задає неявної функції $y = f(x)$, або задає більше ніж одну таку функцію.

4. 4) Оскільки дане рівняння можна переписати у вигляді $x + y + z - e^z = 0$, то $F(x, y, z) =$ $= x + y + z - e^z$. Ця функція неперервна в $\mathbf{R}^3$ разом із частинними похідними $F'_x = 1$, $F'_y = 1$ і $F'_z = 1 - e^z$, причому $F'_z \neq 0$, якщо $z \neq 0$. Точки (x_0, y_0, z_0), в яких $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, існують. Наприклад, такою точкою є $(-1, e, 1)$. Отже, існують точки, в околі яких виконано всі умови теореми існування та диференційовності неявної функції $z = f(x, y)$. За цією теоремою

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{1}{1-e^z},\ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{1}{1-e^z} \Rightarrow dz = -\frac{1}{1-e^z}(dx+dy) \Rightarrow d^2z = d(dz) =$$

$$= d\left(-\frac{1}{1-e^z}(dx+dy)\right) = (dx+dy)\frac{d\left(1-e^z\right)}{\left(1-e^z\right)^2} = (dx+dy)\frac{-e^z dz}{\left(1-e^z\right)^2} = \frac{e^z}{\left(1-e^z\right)^3}(dx+dy)^2.$$

6. 6) Для даної поверхні $F(x, y, z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1$, тому $F'_x = \dfrac{2x}{a^2}$, $F'_y = \dfrac{2y}{b^2}$, $F'_z = \dfrac{2z}{c^2}$, і рівняння дотичної площини має вигляд

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0 \Rightarrow \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

Ця площина перетинає координатні осі у точках

$$x = \frac{a^2}{x_0},\quad y = \frac{b^2}{y_0},\quad z = \frac{c^2}{z_0}.$$

Припустимо, що $x_0>0,\ y_0>0,\ z_0>0$. За умовою відрізки, які площина відтинає на координатних осях, рівні між собою:

$$\frac{b^2}{y_0}=\frac{c^2}{z_0}=\frac{a^2}{x_0}.$$

Враховуючи цю рівність і той факт, що точка (x_0,y_0,z_0) лежить на даній поверхні, маємо

$$\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1,\\ y_0=\dfrac{b^2}{a^2}x_0,\\ z_0=\dfrac{c^2}{a^2}x_0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{b^2}{a^4}x_0^2+\dfrac{c^2}{a^4}x_0^2=1,\\ y_0=\dfrac{b^2}{a^2}x_0,\\ z_0=\dfrac{c^2}{a^2}x_0,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2=\dfrac{a^4}{a^2+b^2+c^2},\\ y_0=\dfrac{b^2}{a^2}x_0,\\ z_0=\dfrac{c^2}{a^2}x_0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\\ y_0=\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\\ z_0=\dfrac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.\end{cases}$$

Отже, рівняння дотичної площини має вигляд

$$x-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+y-\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+z-\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x+y+z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Рівняння нормалі можна подати формулою

$$\frac{x-\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}{1}=\frac{y-\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}{1}=\frac{z-\dfrac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}{1}.$$

8. 2) 1-й спосіб. Якщо вказані неявні функції існують, то вони перетворюють кожне рівняння системи у тотожність, тому

$$\begin{cases}1+y'(x)+z'(x)=0,\\ 3x^2+3y^2y'(x)-3z^2z'(x)=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z'(x)=-1-y'(x),\\ x^2+y^2y'(x)+z^2(1+y'(x))=0,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y'(x)\left(y^2+z^2\right)=-\left(x^2+z^2\right),\\ z'(x)=-1-y'(x),\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y'(x)=-\dfrac{x^2+z^2}{y^2+z^2},\\ z'(x)=\dfrac{x^2-y^2}{y^2+z^2}.\end{cases}$$

Звідси за правилами диференціювання маємо

$$y''(x)=-\frac{(2x+2zz'(x))\left(y^2+z^2\right)-\left(x^2+z^2\right)(2yy'(x)+2zz'(x))}{\left(y^2+z^2\right)^2}.$$

Таким чином,

$$y'(1)=-\frac{1+z^2(1)}{y^2(1)+z^2(1)}=-\frac{5}{5}=-1,\ z'(1)=\frac{1-y^2(1)}{y^2(1)+z^2(1)}=\frac{1-1}{5}=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y''(1)=-\frac{2\cdot5+2\cdot5}{5^2}=-\frac{4}{5}.$$

Так само знаходимо і $z''(1)$.

2-й спосіб. Продиференціюємо систему двічі:

$$\begin{cases}dx+dy+dz=0,\\ 3x^2dx+3y^2dy-3z^2dz=0,\end{cases}\qquad(1)$$

$$\begin{cases}d^2y+d^2z=0,\\ y^2d^2y-z^2d^2z+2xdx^2+2ydy^2-2zdz^2=0.\end{cases}\qquad(2)$$

Підставивши у систему (1) значення $x=1, y=1, z=-2$, дістанемо лінійну систему рівнянь відносно dy і dz:

$$\begin{cases}dy+dz=-dx,\\ dy-4dz=-dx.\end{cases}$$

Звідси $dy=-dx$, $dz=0$, а отже, $y'(1)=-1$, $z'(1)=0$. Підставивши тепер у систему (2) знайдені значення dy і dz, а також значення $x=1$, $y=1$, $z=-2$, маємо

$$\begin{cases}d^2y+d^2z=0,\\ d^2y-4d^2z=-4dx^2.\end{cases}$$

Звідси $d^2y=-d^2z$, $d^2z=\frac{4}{5}dx^2$, а отже, $y''(1)=-\frac{4}{5}$, $z''(1)=\frac{4}{5}$.

§ 15.6. Екстремуми функцій кількох змінних

Точку $M_0(x_0, y_0, ..., z_0)$ називають *точкою максимуму* (*мінімуму*) функції $f(M)=f(x, y, \dots, z)$, якщо $\exists O(M_0)$: $f(M)\le f(M_0)(f(M)\ge f(M_0))$ $\forall M\in$ $\in O(M_0)$. При цьому кажуть, що функція f має в точці M_0 *максимум* (*мінімум*) і записують $f_{\max}=f(M_0)(f_{\min}=f(M_0))$. Точку M_0 називають *точкою екстремуму* функції f, якщо вона є точкою максимуму або мінімуму функції f. При цьому кажуть, що функція f має в точці M_0 *екстремум.*

Необхідна умова екстремуму. Якщо M_0 — точка екстремуму функції f, то $f'_x(M_0)=f'_y(M_0)=\ldots=f'_z(M_0)=0$ або f — недиференційовна у цій точці.

Точку M_0 називають *стаціонарною точкою* функції f, якщо $f'_x(M_0)=$ $=f'_y(M_0)=\ldots=f'_z(M_0)=0$.

Достатні умови екстремуму. Нехай M_0 — стаціонарна точка функції f, яка має в $O(M_0)$ неперервні частинні похідні другого порядку. Тоді M_0 є точкою максимуму (мінімуму) функції f, якщо $d^2 f(M_0) < 0$ $\left(d^2 f(M_0) > 0\right)$ і $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \ldots + \Delta z^2 > 0$.

Зокрема, якщо $f(M) = f(x, y)$ — функція двох змінних, то M_0 є точкою екстремуму, коли $f''_{x^2}(M_0) f''_{y^2}(M_0) - \left(f''_{xy}(M_0)\right)^2 > 0$, а саме: M_0 — точка максимуму, якщо $f''_{x^2}(M_0) < 0$, і M_0 — точка мінімуму, якщо $f''_{x^2}(M_0) > 0$. Якщо $f''_{x^2}(M_0) f''_{y^2}(M_0) - \left(f''_{xy}(M_0)\right)^2 < 0$, то M_0 не є точкою екстремуму функції f.

Екстремум (максимум або мінімум) функції в точці називають *локальним екстремумом* (*максимумом* або *мінімумом*), оскільки він характеризує функцію у достатньо малому околі даної точки. Екстремум (максимум або мінімум) функції на множині називають *глобальним*, або *абсолютним*, *екстремумом* (*максимумом* або *мінімумом*). Для відшукання абсолютного екстремуму функції f на замкненій обмеженій області $\overline{D}$ іноді можна скористатись таким алгоритмом.

1. Знайти стаціонарні точки функції f в області D та обчислити значення функції у цих точках.
2. Знайти максимум та мінімум функції f на межі області D.
3. Серед усіх знайдених значень функції f вибрати найбільше та найменше.

Для відшукання екстремуму функції $f(M) = f(x, y, \ldots, z)$ n змінних за наявності умов $\varphi_i(M) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $m < n$, можна дослідити на екстремум так звану функцію Лагранжа

$$F(M) = f(M) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(M),$$

де λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ — сталі множники. Цей екстремум називають *умовним екстремумом* функції f.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) якщо функція f має в точці M_0 максимум, то $f(M) \le f(M_0)$ $\forall M \in D(f)$;

2) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

3) якщо M_0 — точка максимуму функції f, а M_1 — точка мінімуму цієї функції, то $f(M_0) \ge f(M_1)$;

4) якщо M_0 — точка екстремуму функції f, диференційовної в цій точці, то $df(M_0) = 0$;

5) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

6) якщо M_0 — точка максимуму двічі диференційовної функції f, то $d^2 f(M_0) < 0$;

7) точка (0, 0) є точкою максимуму функції $z = -x^4 - y^4$.

2. Дослідити на екстремум дану функцію:

1) $z = y^3 - x^2 - 27y + 3x + 16$; 2) $z = \sqrt{e^x}\left(x + xy + y^2\right)$;

3) $z = x^2 + y^2 - 5(x - y) + xy$; 4) $z = 2\ln x + 4\ln y + \ln(7 - x - y)$;

5) $z = \dfrac{3}{y} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{3}$, $x > 0$, $y > 0$; 6) $z = 2x^3 + xy^2 - 6x^2 - y^2$;

7) $z = 2y\sqrt{x} - 5y^2 - x + 24y - 30$; 8) $z = 2x^2 + 4xy + 2y^2 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{8}{y}$;

9) $z = 3x^2 + 6xy + 3y^2 - 6\ln x - 18\ln y$; 10) $z = x^2 y(a - x - y)$;

11) $z = x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1$; 12) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$;

13) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$; 14) $z = \sin(x + y)$;

15) $z = xy + \dfrac{a}{x} + \dfrac{1}{ay}$, $a > 0$; 16) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$;

17) $z = e^{-x^2 - y^2}\left(ax^2 + by^2\right)$; 18) $z = xy\ln\left(x^2 + y^2\right)$;

19) $z = \left(x - y^2\right)\left(2x - y^2\right)$; 20) $z = \left(1 + e^y\right)\cos x - ye^y$;

21) $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$; 22)• $u = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{4y} + \dfrac{2}{z}$;

23) $u = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 14x - 8y - 100$;

24) $u = x^3 - 2y^2 - z^2 - 3x + 8y + 2z - 9$;

25) $u = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2x - 2y - 4z + 6$.

3. Дослідити на екстремум дану неявну функцію двох змінних:

1) $\dfrac{x^3}{3} + 2y^2 - xz^2 + z = 0$; 2)• $z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$;

3) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$;

4) $e^z - xyz + x^2 y^2 = 0$; 5) $2x^2 + 2y^2 + 8xz + z^2 + z + 8 = 0$;

6) $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 6xy - 8xz - 8yz - 4 = 0$;

7) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 4xy - 4xz - 4yz - 20 = 0$.

4. Знайти абсолютні екстремуми функції на вказаній множині E:

1) $z = x - 2y - 3,\ E = \left\{(x,\ y): x \in [0;\ a],\ \ y \in [0;\ b],\ 0 \le \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \le 1\right\}$;

2) $z = x^2 - xy + y^2,\ E = \{(x,\ y): |x| + |y| \le 1\}$;

3) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2,\ \ E = \left\{(x,\ y,\ z): x^2 + y^2 + z^2 \le 100\right\}$;

4)• $u = x + y + z,\ \ E = \left\{(x,\ y,\ z): x^2 + y^2 \le z \le 1\right\}$;

5) $z = x^2 + y^2,\ \ E = \left\{(x,\ y): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1,\ a > b > 0\right\}$;

6) $z = \frac{xy}{2} - \frac{x^2 y}{6} - \frac{xy^2}{8},\ \ E = \left\{(x,\ y): x \ge 0,\ y \ge 0,\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \le 1\right\}$;

7) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y),\ \ E = \left\{(x,\ y): x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],\ y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right\}$;

8) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - xy,\ E = \{(x,\ y): x > 0,\ \ y > 0\}$;

9) $z = x^3 + y^3 - 2xy - x - y + 4,\ E = \{(x,\ y):\ x \in [-1;\ 3],\ \ y \in [0;\ 4]\}$;

10) $z = y^3 - x^2 + 6x - 12y - 20,\ E = \{(x, y):\ x \in [0; 6],\ y \in [-6; 0],\ y - x \ge -6\}$.

5. Знайти умовний екстремум даної функції:

1) $z = xy$, якщо $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,\ \ a > 0,\ \ b > 0$;

2) $z = \frac{1}{2}\left(x^n + y^n\right)$, якщо $x + y = a$. Дістати звідси нерівність $\frac{x^n + y^n}{2} \ge$ $\ge \left(\frac{x + y}{2}\right)^n$ $\ \forall n \in \mathbf{N},\ x \ge 0,\ \ y \ge 0$;

3) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, якщо $x + y = a,\ \ a > 0$;

4) $u = xyz,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ z \ge 0$, якщо $x + y + z = a$. Дістати звідси нерівність $\frac{x + y + z}{3} \ge \sqrt[3]{xyz}$;

5) $u = \sin x \sin y \sin z$, якщо $x + y + z = \frac{\pi}{2},\ \ x > 0,\ \ y > 0,\ \ z > 0$;

6) $z = x^\alpha y^\beta,\ \ x > 0,\ \ y > 0,\ \ \alpha > 0,\ \ \beta > 0$, якщо $x + y = A$. Дістати звідси нерівність $\sqrt{xy} \le \frac{x + y}{2}$;

7) $u = xy + yz$, якщо $x^2 + y^2 = 2,\ \ y + z = 2,\ \ x > 0,\ \ y > 0,\ \ z > 0$;

8) $z=\sin^2 x+\sin^2 y$, якщо $y-x=\dfrac{\pi}{4}$;

9)• $f(x_1, x_2, ..., x_n)=x_1x_2...x_n$, якщо $x_1+x_2+...+x_n=a$ і $x_i\ge 0\ \ \forall i\in\overline{1,n}$. Дістати звідси нерівність $\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\le\dfrac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$, де $x_i>0\ \ \forall i\in\overline{1,n}$;

10) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$, де $a_i\ge 0$, $x_i\ge 0$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $p>1$, якщо $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i=A$. Дістати звідси нерівність Гельдера $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i\le$ $\le\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

6. Довести, що сума кількох додатних чисел, що мають даний добуток, є найменшою тоді і тільки тоді, коли ці числа рівні між собою.

7. Знайти відстань між кривою і прямою:

1) $y=x^2$ і $x-y-8=0$;

2)• $y=x^2-4x+6$ і $x+y-2=0$;

3) $y=x-1-x^2$ і $2y+x-2=0$; 4) $y=-x^2+6x-10$ і $2x-3y-6=0$.

8. Знайти відстань від точки $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax+By+$ $+Cz+D=0$.

9. Знайти площу еліпса, утвореного в перерізі циліндра $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ площиною $Ax+By+Cz=0$.

10. Знайти зовнішні виміри котла циліндричної форми із заданою товщиною стінок d та об'ємом V так, щоб на його виготовлення пішло найменше матеріалу.

11. З усіх трикутників з одним і тим самим периметром $2p$ знайти той, у якого площа найбільша.

12. З усіх трикутників з однією і тією самою основою і одним і тим самим кутом α при вершині знайти той, у якого площа найбільша.

13. Усередині чотирикутника знайти точку, сума квадратів відстаней якої від його вершин є найменшою.

14. Між сторонами даного кута, що дорівнює α, провести пряму завдовжки l так, щоб трикутник, утворений нею і сторонами кута, мав найбільшу площу (знайти її).

15. З усіх прямокутних паралелепіпедів, повна поверхня яких дорівнює S, знайти той, у якого найбільший об'єм.

16. З усіх прямокутних паралелепіпедів, сума ребер яких дорівнює L, знайти той, у якого об'єм найбільший.

17. Визначити зовнішні розміри закритого ящика, що має форму прямокутного паралелепіпеда, товщина стінок якого дорівнює α, а об'єм V, так, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу.

18. Визначити зовнішні розміри відкритого (без кришки) ящика, що має форму прямокутного паралелепіпеда, товщина стінок якого дорівнює α, а об'єм V, так, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу.

19. З усіх кругових циліндрів з однією й тією самою поверхнею S знайти той, що має найбільший об'єм.

20. У прямий круговий конус з радіусом основи R і висотою H вписати паралелепіпед найбільшого об'єму.

21. З усіх прямих кругових конусів із заданою бічною поверхнею S знайти той, що має найбільший об'єм.

22. Півколо поділити на три дуги так, щоб сума синусів їх була найбільшою.

23. У коло радіуса R вписати трикутник так, щоб сума квадратів його сторін була найбільшою.

24. У коло радіуса R вписати чотирикутник, один з кутів якого дорівнює α, так, щоб його площа була найбільшою (знайти її).

25. У еліпс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$, вписати рівнобедрений трикутник найбільшої площі (знайти її) так, щоб його основа була паралельна більшій осі еліпса.

26. Знайти відстань від точки $(p, 4p)$ до параболи $y^2=2px$.

27. До еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$, провести нормаль так, щоб утворений нею з осями координат трикутник мав найбільшу площу.

28. До еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$, провести дотичну так, щоб її відрізок між осями координат був найменшим.

29. З усіх трикутників з однією й тією самою площею, що дорівнює S, знайти той, у якого найменший периметр.

30. З усіх еліпсів, сума осей яких дорівнює $2l$, знайти той, у якого площа найбільша.

31•. У рівнобедрений трикутник, основа якого a, а висота h, вписати параболу так, щоб його рівні сторони були дотичними до параболи, а його основа відтинала від параболи сегмент, що має найбільшу площу.

32. Знайти осі еліпса $5x^2-6xy+5y^2=8$, дослідивши на екстремум відстань довільної точки еліпса від його центра (початку координат).

33. З усіх вписаних у коло радіуса R трикутників знайти той, що має найбільшу площу.

34. З усіх вписаних у коло радіуса R чотирикутників знайти той, що має найбільшу площу.

35. З усіх трикутників з одним і тим самим периметром $2p$ знайти той, що має найбільшу площу.

36. Об'єм прямого кругового конуса дорівнює V. За яких розмірів конуса його бічна поверхня буде найменшою?

37. У сферу радіуса R вписати циліндр, що має найбільшу повну поверхню.

38. Знайти тіло найбільшого об'єму, утвореного обертанням навколо однієї зі своїх сторін трикутника, периметр якого дорівнює $2p$.

39. Хорда AB поділяє еліпс на два сегменти. У кожному з них знайти таку точку, яка утворювала б з хордою AB трикутник, що має найбільшу площу:

1) $x^2+4y^2=4,\quad A\left(-\sqrt{3},\frac{1}{2}\right),\quad B\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

2) $9x^2+16y^2=144,\quad A\left(-2\sqrt{3},\frac{3}{2}\right),\quad B\left(2,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$;

3) $16x^2+25y^2=400,\quad A\left(-4,\frac{12}{5}\right),\quad B\left(\frac{5}{2},2\sqrt{3}\right)$.

40. Знайти відстань між точкою A і кривою:

1) $A(5,1)$ і $y=3-x-x^2$;
2) $A(3,6)$ і $y=2\sqrt{x}$;
3) $A(4,1)$ і $y=x^3+1$;
4) $A(3,-3)$ і $y=\frac{4}{x}$;
5) $A(1,0)$ і $9x^2+16y^2=144$;
6) $A(-2,3)$ і $y=\ln x$.

41. У еліпсоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму, ребра якого паралельні його осям.

42. Навколо прямокутного паралелепіпеда зі сторонами $2a$, $2b$, $2c$ описати еліпсоїд найменшого об'єму.

43. З усіх прямокутних паралелепіпедів, об'єм яких дорівнює V, знайти той, площа поверхні якого найменша.

44. З усіх прямокутних трикутників, площа яких дорівнює S, знайти той, що має найменший периметр.

45. У півсферу радіуса R вписати прямокутний паралелепіпед так, щоб його об'єм був найбільшим.

46. На кривій $y=\frac{4}{x}$ знайти координати двох точок, рівновіддалених від точки $B(5,5)$.

47. Навколо еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$, описати трикутник з основою, паралельною більшій осі, щоб його площа була найменшою.

2. 22) Оскільки $u'_x = 1 - \frac{y^2}{4x^2}$, $u'_y = \frac{2y}{4x} - \frac{z^2}{4y^2}$, $u'_z = \frac{2z}{4y} - \frac{2}{z^2}$, то для відшукання стаціонарних точок функції u треба розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0, \\ \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{4y^2} = 0, \\ \frac{z}{2y} - \frac{2}{z^2} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0, \\ y = \pm 2x, \\ y = \frac{z^3}{4}, \\ \pm 1 = \frac{4}{z^4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm\sqrt{2}, \\ y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

Отже, функція u має дві стаціонарні точки: $M_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ і $M_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$.

Знайдемо $d^2u(M_0)$ і $d^2u(M_1)$. Маємо

$$u''_{x^2} = \frac{y^2}{2x^3},\quad u''_{xz} = 0,\quad u''_{xy} = -\frac{y}{2x^2},\quad u''_{y^2} = \frac{1}{2x} + \frac{z^2}{2y^3},$$

$$u''_{yz} = -\frac{z}{2y^2},\quad u''_{z^2} = \frac{1}{2y} + \frac{4}{z^3},$$

тому

$$d^2u(M_0) = \frac{8}{\sqrt{2}}\Delta x^2 - \frac{8}{\sqrt{2}}\Delta x\Delta y + \frac{6}{\sqrt{2}}\Delta y^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}\Delta y\Delta z + \frac{3}{\sqrt{2}}\Delta z^2 =$$

$$= \sqrt{2}\left(\left((2\Delta x)^2 - 2\cdot 2\Delta x\Delta y + \Delta y^2\right) + \Delta y^2 + \left(\Delta y^2 - 2\Delta y\Delta z + \Delta z^2\right) + \frac{1}{2}\Delta z^2\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left((2\Delta x - \Delta y)^2 + \Delta y^2 + (\Delta y - \Delta z)^2 + \frac{1}{2}\Delta z^2\right) > 0,$$

якщо $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 > 0$,

$$d^2u(M_1) = -d^2u(M_0) < 0,$$

якщо $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 > 0$. Отже,

$$u_{\min} = u(M_0) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2\cdot 4}{4\cdot 4\cdot\sqrt{2}} + \frac{2\cdot 2}{4\cdot\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + 1\right) = 2\sqrt{2},$$

$$u_{\max} = u(M_1) = -2\sqrt{2}.$$

3. 2) Оскільки $F(x, y, z) = z^2 + xyz - xy^2 - x^3$, то $F'_x = yz - y^2 - 3x^2$, $F'_y = xz - 2xy$, $F'_z = 2z + xy$, тому неявна функція $z = z(x, y)$, що задається рівнянням $F(x, y, z) = 0$, має частинні похідні

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{yz - y^2 - 3x^2}{2z + xy} \text{ і } z'_y = -\frac{xz - 2xy}{2z + xy},\ 2z + xy \neq 0.$$

Для відшукання стаціонарних точок розв'яжемо систему $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases}$ яка рівносильна системі

$$\begin{cases} yz - y^2 - 3x^2 = 0, \\ xz - 2xy = 0, \\ z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0, \\ 2z + xy \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2y, \\ y^2 = 3x^2, \\ 12x^2 + 2x^3 = 0, \\ 2z + xy \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6, \\ y = \pm 6\sqrt{3}, \\ z = \pm 12\sqrt{3}. \end{cases}$$

Отже, неявна функція $z = z(x, y)$ має дві стаціонарні точки: $M_0 = \left(-6, 6\sqrt{3}\right)$ та $M_1 = \left(-6, -6\sqrt{3}\right)$, причому $z(M_0) = 12\sqrt{3}$, а $z(M_1) = -12\sqrt{3}$. Неважко переконатися, що в досить малих околах точок $\left(-6, 6\sqrt{3}, 12\sqrt{3}\right)$ та $\left(-6, -6\sqrt{3}, -12\sqrt{3}\right)$ функція $F(x, y, z)$ задовольняє всі умови теореми про існування та диференційовність неявної функції. Тому неявна функція $z = z(x, y)$ диференційовна у досить малих околах точок M_0 та M_1. Знайдемо частинні похідні другого порядку цієї функції у стаціонарних точках:

$$z''_{x^2} = -\frac{(yz'_x - 6x)(2z + xy) - (2z'_x + y)\left(yz - y^2 - 3x^2\right)}{(2z + xy)^2} = \frac{6x(2z + xy) + y\left(yz - y^2 - 3x^2\right)}{(2z + xy)^2},$$

$$z''_{y^2} = -\frac{\left(xz'_y - 2x\right)\ (2z + xy) - \left(2z'_y + x\right)\ (xz - 2xy)}{(2z + xy)^2} = \frac{2x(2z + xy) + x^2(z - 2y)}{(2z + xy)^2},$$

$$z''_{xy} = -\frac{\left(z + yz'_y - 2y\right)\ (2z + xy) - \left(2z'_y + x\right)\ \left(yz - y^2 - 3x^2\right)}{(2z + xy)^2} =$$

$$= \frac{(-z + 2y)(2z + xy) + x\left(yz - y^2 - 3x^2\right)}{(2z + xy)^2}.$$

Звідси випливає, що

$$z''_{x^2}(M_0) = \sqrt{3}, \quad z''_{y^2}(M_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad z''_{xy}(M_0) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ z''_{x^2}(M_0) z''_{y^2}(M_0) - \left(z''_{xy}(M_0)\right)^2 > 0 \ \text{ і } \ z''_{x^2}(M_0) > 0 \ \Rightarrow \ z_{\min} = z(M_0) = 12\sqrt{3}.$$

Аналогічно дістаємо

$$z''_{x^2}(M_1) = -\sqrt{3}, \ z''_{y^2}(M_1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \ z''_{xy}(M_1) = 0 \ \Rightarrow \ z''_{x^2}(M_1) z''_{y^2}(M_1) - \left(z''_{xy}(M_1)\right)^2 > 0$$

$$\text{і } \ z''_{x^2}(M_1) < 0 \ \Rightarrow \ z_{\max} = z(M_1) = -12\sqrt{3}.$$

4. 4) Оскільки $u'_x = u'_y = u'_z = 1 \neq 0$, то функція u не має стаціонарних точок, тому набуває найбільшого та найменшого значень на межі множини E. Цю межу утворюють дві поверхні: бічна поверхня параболоїда $z = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$, та площина $z = 1$, де $x^2 + y^2 \le 1$. Нехай $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 1 \ \Rightarrow \ u(x, y, z) = x + y + x^2 + y^2 = \varphi(x, y)$, де $(x, y) \in E_1 = \left\{(x, y) : \ x^2 + y^2 \le 1\right\}$.

Дослідимо функцію φ на абсолютний екстремум на множині E_1. Маємо $\varphi'_x = 1 + 2x$, $\varphi'_y = 1 + 2y$, стаціонарна точка $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ і $\varphi\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$. Для дослідження функції φ на межі E_1, тобто на колі $x^2 + y^2 = 1$, покладемо $x = \cos t$, $y = \sin t$, де $t \in [0; 2\pi]$. Тоді

$$\varphi(x, y) = \cos t + \sin t + 1 = 1 + 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = 1 + \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_{x^2+y^2\le 1} \varphi(x, y) = 1 + \sqrt{2}, \quad \min_{x^2+y^2\le 1} \varphi(x, y) = 1 - \sqrt{2},$$

тому $\max\limits_{E_1} \varphi(x, y) = 1 + \sqrt{2}$, $\min\limits_{E_1} \varphi(x, y) = -\frac{1}{2}$.

Нехай $z = 1$, $x^2 + y^2 \le 1 \Rightarrow u(x, y, z) = x + y + 1 = \psi(x, y)$, де $(x, y) \in E_1 = \left\{(x, y):\ x^2 + y^2 \le 1\right\}$. Оскільки $\psi'_x = \psi'_y = 1$, то функція u набуває найбільшого та найменшого значень на межі E_1, тобто на колі $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$. Оскільки при цьому $\psi(x, y) = \cos t + \sin t + 1$, то нових абсолютних екстремумів немає. Отже,

$$\max_E u(x, y, z) = 1 + \sqrt{2}, \text{ а } \min_E u(x, y, z) = -\frac{1}{2}.$$

5. 9) Складемо функцію Лагранжа $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n + \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n - a)$, де $\lambda \ne 0$ — стала, і дослідимо її на екстремум. Знайдемо стаціонарні точки:

$$F'_{x_1} = x_2 \dots x_n + \lambda = 0,\ F'_{x_2} = x_1 x_3 \dots x_n + \lambda = 0,\ \dots,\ F'_{x_n} = x_1 \dots x_{n-1} + \lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{a}{n}, \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = a.$$

Оскільки

$$F''_{x_1^2} = F''_{x_2^2} = \dots = F''_{x_n^2} = 0, \text{ а } F''_{x_i x_k} = \frac{x_1 \dots x_{k-1} x_{k+1} \dots x_n}{x_i} = \left.\frac{x_1 \dots x_n}{x_i x_k}\right|_{x_j = \frac{a}{n} (1 \le j \le n)} = \frac{a^{n-2}}{n^{n-2}},$$

то

$$d^2 F\left(\frac{a}{n}, \frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n}\right) = \frac{a^{n-2}}{n^{n-2}}(\Delta x_1(\Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) + \Delta x_2(\Delta x_1 + \Delta x_3 + \dots + \Delta x_n) + \dots$$

$$\dots + \Delta x_n(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_{n-1})) = \frac{a^{n-2}}{n^{n-2}}\Big((\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n)^2 -$$

$$-\Delta x_1^2 - \Delta x_2^2 - \dots - \Delta x_n^2\Big) = \frac{a^{n-2}}{n^{n-2}}\Big(0^2 - \left(\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2\right)\Big) < 0,$$

якщо $\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2 \ne 0 \Rightarrow F_{\max} = F\left(\frac{a}{n}, \frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n}\right) = \frac{a^n}{n^n} = f_{\max}$, де $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$, а $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$.

Таким чином, $f_{\max} = \varphi_{\max}$, де $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = x_1 x_2 \dots x_{n-1}(a - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1})$. Оскільки $x_i \ge 0$ $\forall i \in \overline{1, n}$, то функція φ визначена на замкненій множині E, обмеженій гіперплощинами $x_i = 0$, $i \in \overline{1, n}$ і $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$.

Оскільки на межі множини E $\varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = 0$, а єдиною точкою екстремуму, що лежить в E, є точка $\left(\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n}\right)$, то $\max\limits_E \varphi = \varphi\left(\frac{a}{n}, \frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n}\right) = \frac{a^n}{n^n}$.

Для доведення нерівності

$$\sqrt{x_1 x_2 \dots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

позначимо $y_i = \dfrac{x_i}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$. Тоді $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$, тому за доведеним

$$y_1 y_2 \dots y_n \le \frac{1}{n^n} \Leftrightarrow \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^n} \le \frac{1}{n^n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

7. 2) Розв'яжемо задачу трьома способами. У перших двох способах розв'язування задач такого змісту використовується нормальне рівняння прямої. З аналітичної геометрії відомо, що для обчислення відстані від точки $M(x_1, y_1)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ досить координати цієї точки підставити у нормальне рівняння прямої $\dfrac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$ і підрахувати значення виразу

$$l(x_1, y_1) = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Нормувальний множник $\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ беруть зі знаком плюс (мінус), якщо точка M і вектор нормалі $\vec{n} = \{A, B\}$ до прямої лежать в одній півплощині (у різних півплощинах) відносно прямої $Ax + By + C = 0$.

У цій задачі парабола $y = x^2 - 4x + 6$ (а на ній лежить точка M) і вектор нормалі $\vec{n} = \{1, 1\}$ до прямої $x + y - 2 = 0$ лежать в одній півплощині, тому нормальне рівняння прямої набирає вигляду $\dfrac{x + y - 2}{\sqrt{2}} = 0$, а відстань точки $M(x, y)$ до цієї прямої обчислюється за формулою $l(x, y) = \dfrac{x + y - 2}{\sqrt{2}}$. Отже, враховуючи означення відстані між двома множинами, зведемо розв'язування задачі до відшукання мінімуму функції двох змінних $l(x, y) = \dfrac{x + y - 2}{\sqrt{2}}$ за умови, що рівняння зв'язку має вигляд $y - \left(x^2 - 4x + 6\right) = 0$.

1-й спосіб. Складемо функцію Лагранжа

$$F(x, y, \lambda) = \frac{x + y - 2}{\sqrt{2}} + \lambda\left(y - x^2 + 4x - 6\right).$$

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} F'_x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \lambda(-2x + 4) = 0, \\ F'_y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \lambda = 0, \\ y - x^2 + 4x - 6 = 0, \end{cases}$$

знаходимо єдину стаціонарну точку: $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{9}{4}$ при $\lambda=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Знаходимо другий диференціал функції Лагранжа у стаціонарній точці $M\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$. Оскільки $F''_{x^2}=-2\lambda$, $F''_{xy}=0$, $F''_{y^2}=0$, то $d^2F=-2\lambda dx^2$. У точці M значення $d^2F=\frac{2}{\sqrt{2}}dx^2$ більше нуля, а це означає, що в цій точці функція має мінімум, причому $l_{\min}=\frac{7}{4\sqrt{2}}$.

2-й спосіб. Оскільки рівняння зв'язку $y=x^2-4x+6$ змінну y явно виражає через змінну x, то, підставивши це значення y у вираз для функції l, дістанемо функцію однієї змінної x:

$$f(x)=l\left(x,x^2-4x+6\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^2-3x+4\right),$$

в якій умову $y=x^2-4x+6$ уже автоматично враховано. Дослідимо на екстремум функцію f. Маємо

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(2x-3),\ f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ 2x-3=0\ \Rightarrow\ x=\frac{3}{2}.$$

Оскільки $f''\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}>0$, то функція f у стаціонарній точці $x=\frac{3}{2}$ має мінімум, причому

$$f_{\min}=f\left(\frac{3}{2}\right)=l\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)=\frac{7}{4\sqrt{2}}.$$

3-й спосіб. Суть цього способу можна подати коротко у вигляді такого алгоритму.

1. На кривій знайти всі ті точки A_i, в яких дотичні до неї паралельні заданій прямій (ця задача розв'язна, якщо множина таких точок скінченна).

2. В усіх точках A_i кривої провести (побудувати) нормалі до неї.

3. Знайти координати точок B_i на прямій (точок перетину нормалей з прямою, їх також буде скінченна кількість, якщо скінченна кількість точок A_i).

4. Обчислити довжини всіх відрізків A_iB_i і вибрати найменшу з них.

Виконаємо обчислення за цим алгоритмом. У паралельних прямих кутові коефіцієнти рівні. Оскільки $k_{\text{д}}=y'(x)=2x-4$, а $k_{\text{пр}}=-1$, то з рівняння $2x-4=-1$ знаходимо абсцису єдиної точки дотику $x=\frac{3}{2}$. Тоді $y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$ і $A\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$. Кутовий коефіцієнт нормалі до кривої у точці A $k_{\text{н}}=-\frac{1}{k_{\text{д}}}=1$, а рівняння нормалі набирає вигляду $y-\frac{9}{4}=x-\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $y=x+\frac{3}{4}$. Координати точки B знаходимо, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases}y=x+\frac{3}{4},\\ y=-x+2,\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}x+\frac{3}{4}=-x+2,\\ y=-x+2,\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}2x=\frac{5}{4},\\ y=-x+2\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}x=\frac{5}{8},\\ y=\frac{11}{8}.\end{cases}$$

Отже, $B\left(\frac{5}{8},\frac{11}{8}\right)$, а $AB=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{8}\right)^2+\left(\frac{9}{4}-\frac{11}{8}\right)^2}=\frac{7}{4\sqrt{2}}$.

Оскільки лише в одній точці $A\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ існує дотична до кривої $y = x^2 - 4x + 6$, яка паралельна прямій $y = -x + 2$, то знайдене значення відрізка AB і буде найменшою відстанню між ними. Цей спосіб дає змогу знайти не тільки найменшу відстань між кривою і прямою, а й координати точки A на кривій і точки B на прямій.

Зазначимо, що перший спосіб доцільно використовувати тоді, коли рівняння зв'язку задає функцію неявно, і це рівняння важко або й неможливо розв'язати відносно однієї із змінних, а другий і третій — тоді, коли такий розв'язок існує.

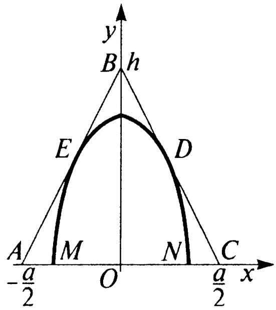


Рис. 5

31. Нехай ABC — рівнобедрений трикутник, $AB = BC$ — бічні сторони, $AC = a$ і $BO = h$ — відповідно його основа і висота. Введемо прямокутну систему координат Oxy (рис. 5). Координати вершин трикутника: $A\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, $B(0, h)$ і $C\left(\frac{a}{2}, 0\right)$. Сторона AB лежить на прямій $y_1 = \frac{2h}{a}x + h$, а BC — на $y_2 = -\frac{2h}{a}x + h$. У трикутник вписано параболу $MEDN$. Бічні сторони трикутника дотикаються до параболи у симетричних відносно осі Oy точках $E(-t, y_3(-t))$ і $D(t, y_3(t))$, де $y_3(-t)$ і $y_3(t)$ — значення ординат параболи $y_3(x) = -cx^2 + d$ у точках E і D, причому $y_3(-t) = y_3(t)$, $t \in \left(0; \frac{a}{2}\right)$.

Невідомі значення коефіцієнтів c і d параболи знайдемо, розв'язавши таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} y_3(t) = y_2(t), \\ y_3'(t) = y_2'(t), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -ct^2 + d = -\frac{2h}{a}t + h, \\ -2ct = -\frac{2h}{a}. \end{cases}$$

Маємо $c = \frac{h}{at}$, $d = -\frac{ht}{a} + h$, а отже, $y_3 = -\frac{h}{at}x^2 - \frac{ht}{a} + h$. Таким чином, коефіцієнти c і d параболи є функціями абсциси t точки дотику бічної сторони BC трикутника до параболи $y_3(x)$ у точці D. Ця парабола перетинає вісь Ox (а отже, й основу трикутника) у симетричних відносно осі Oy точках M і N, причому $M\left(-\sqrt{at - t^2}, 0\right)$, а $N\left(\sqrt{at - t^2}, 0\right)$. Тоді площа S параболічного сегмента $MEDN$ буде функцією змінної t і обчислюється за формулою

$$S(t) = 2\int_0^{\sqrt{at-t^2}} \left(-\frac{h}{at}x^2 - \frac{ht}{a} + h\right)dx = \frac{4h}{3a}(a - t)\sqrt{at - t^2}, \quad t \in \left(0; \frac{a}{2}\right).$$

Її похідна

$$S'(t) = \frac{2h(a-t)(a-4t)}{3a\sqrt{at - t^2}}, \quad t \in \left(0; \frac{a}{2}\right).$$

Розв'язавши рівняння $S'(t) = 0$, знаходимо єдину критичну точку $t = \frac{a}{4}$ функції S, яка належить інтервалу $\left(0; \frac{a}{2}\right)$. Оскільки $S''(t) = -\frac{h}{3a}\frac{a^3 + 3a^2t - 12at^2 + 8t^3}{\left(at - t^2\right)^{3/2}} \Rightarrow S''\left(\frac{a}{4}\right) =$

$= -\frac{8\sqrt{3}h}{3a} < 0$, то $t = \frac{a}{4}$ — точка максимуму функції S, причому $S_{\max} = S\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}ah$; $\frac{a}{4}$ — єдина точка максимуму функції S на $\left(0; \frac{a}{2}\right)$ і в ній функція S набуває найбільшого значення.

Якщо $t = \frac{a}{4}$, то координати точок дотику бічних сторін трикутника до параболи $E\left(-\frac{a}{4}, \frac{h}{2}\right)$ і $D\left(\frac{a}{4}, \frac{h}{2}\right)$, координати точок $M\left(-\frac{a\sqrt{3}}{4}, 0\right)$ і $N\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}, 0\right)$, а рівняння параболи набирає вигляду $y_3(x) = -\frac{4h}{a^2}x^2 + \frac{3}{4}h$. Отже, висота вписаного у рівнобедрений трикутник параболічного сегмента, що має найбільшу площу, дорівнює $3/4$ висоти трикутника, а його площа дорівнює $\sqrt{3}/2$ площі трикутника.

40. 1) Якщо $B(x, y)$ — довільна точка кривої $y = 3 - 2x - x^2$, то

$$AB = \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2} = d(x, y).$$

За означенням відстані від точки A до кривої Γ

$$\rho(A, \Gamma) = \inf_{B \in \Gamma} \rho(A, B) = \inf_{(x, y) \in \Gamma} \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2} =$$

$$= \min_{(x, y) \in \Gamma} \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2} = \min_{(x, y) \in \Gamma} d(x, y).$$

Замість функції d можна розглядати функції $u(x, y) = d^2(x, y)$, оскільки функції u і d, очевидно, набувають своїх екстремальних значень при одних і тих самих значеннях x і y. Отже, задача зводиться до дослідження на умовний екстремум функції $u(x, y) = (x-5)^2 + (y-1)^2$ за умови, що $y = 3 - 2x - x^2$ (рівняння зв'язку). Цю задачу можна розв'язувати трьома способами, зокрема дослідженням на екстремум функції Лагранжа, дослідженням на екстремум функції однієї змінної або побудовою нормалі до кривої, що проходить через задану точку A (див. задачу 7.2)).

1-й спосіб. Побудуємо функцію Лагранжа

$$F(x, y, \lambda) = (x-5)^2 + (y-1)^2 + \lambda\left(y - 3 + 2x + x^2\right)$$

і знайдемо систему рівнянь для визначення сталого множника λ і координат точки можливого екстремуму. Маємо

$$F'_x = 2(x-5) + \lambda(2+2x) = 0,\ F'_y = 2(y-1) + \lambda = 0,\ y = 3 - 2x - x^2.$$

З перших двох рівнянь знаходимо $x = \frac{5-\lambda}{1+\lambda}$, $y = \frac{2-\lambda}{2}$. Підставивши ці значення x і y у рівняння зв'язку, для визначення λ дістанемо кубічне рівняння вигляду $\lambda^3 + 8\lambda^2 + 13\lambda - 66 = 0$. Оскільки $\lambda^3 + 8\lambda^2 + 13\lambda - 66 = (\lambda - 2)\left(\lambda^2 + 10\lambda + 33\right)$ і $\lambda^2 + 10\lambda + 33 > 0$ для всіх дійсних значень λ, то $\lambda = 2$ — єдиний дійсний корінь цього рівняння, $x = 1$, $y = 0$. Отже, $B(1, 0)$ — єдина критична точка функції F.

Проте характер екстремуму в точці $B(1, 0)$ визначається знаком другого диференціала функції Лагранжа F. Оскільки $F''_{x^2}(x, y, \lambda) = 2 + 2\lambda$, $F''_{xy}(x, y, \lambda) = 0$, $F''_{y^2}(x, y, \lambda) = 2$, то

$d^2F(x, y, \lambda) = (2+2\lambda)dx^2 + 2dy^2$. У критичній точці B другий диференціал функції F задовольняє умову $d^2F(1,\ 0,\ 2) = 6dx^2 + 2dy^2 > 0$, тому функція u, а також і функція d в точці $B(1, 0)$ має мінімум, причому

$$d_{\min} = \sqrt{u_{\min}} = \sqrt{(1-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}.$$

2-й спосіб. Якщо у вираз функції u замість y підставити його значення з рівняння зв'язку, тобто $y = 3-2x-x^2$, то розв'язання задачі зведеться до дослідження на екстремум функції однієї змінної x вигляду

$$f(x) = u\left(x, 3-2x-x^2\right) = (x-5)^2 + \left(3-2x-x^2-1\right)^2.$$

Звідси маємо

$$f'(x) = 2(x-5) + 2\left(2-2x-x^2\right)(-2-2x) = 2x^3 + 6x^2 + x - 9,$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2 + x - 9 = (x-1)\left(2x^2 + 8x + 9\right) = 0 \Rightarrow x = 1$$

— єдина критична точка функції f. Оскільки $f''(x) = 6x^2 + 12x + 1$ і $f''(1) = 19 > 0$, то $x = 1$ — точка мінімуму функції f, причому $f_{\min} = f(1) = 17$. Тоді і

$$d_{\min} = d(1,0) = \sqrt{f_{\min}} = \sqrt{17}.$$

3-й спосіб. Довжина нормалі до параболи $y = 3-2x-x^2$, що проходить через задану точку $A(5,\ 1)$, визначає найменшу відстань між точкою A і параболою. Тому через довільну точку $B(t,\ y(t))$, де $y(t) = 3-2t-t^2$, проведемо нормаль до параболи. Оскільки $y'(t) = -2-2t$, то рівняння нормалі набирає вигляду

$$y - \left(3-2t-t^2\right) = \frac{1}{2+2t}(x-t).$$

Нормаль проходитиме через точку A, якщо її координати задовольняють це рівняння. Підставивши координати точки A у рівняння нормалі, дістанемо рівняння для визначення абсциси t точки B вигляду

$$2t^3 + 6t^2 + t - 9 = 0.$$

Неважко перевірити, що $t = 1$ — єдиний дійсний корінь цього рівняння, а $y(1) = 0$. Отже, найближчою до $A(5,\ 1)$ точкою параболи є точка $B(1, 0)$, а $AB = \sqrt{(1-5)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{17}$.

Розділ 16 ІНТЕГРАЛИ, ЗАЛЕЖНІ ВІД ПАРАМЕТРА

§ 16.1. Поняття інтеграла, залежного від параметра, та його властивості

Нехай функція f визначена на множині $E = \{(x, y) : x \in \langle A; B\rangle, y \in \langle c; d\rangle\}$, де $-\infty \le A < B \le +\infty$, $-\infty \le c < d \le +\infty$. Якщо $\forall y \in \langle c; d\rangle$ існує власний чи невласний інтеграл $\int_a^b f(x, y)dx$, де $\langle a; b\rangle \subset \langle A; B\rangle$, то його називають *інтегралом, залежним від параметра*.

Невласний інтеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ називають *рівномірно збіжним* на проміжку $\langle c; d\rangle$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b_0(\varepsilon) \in \langle a; b\rangle : \left|\int_{b_1}^{b} f(x, y)dx\right| < \varepsilon \ \ \forall b_1 \in (b_0(\varepsilon); b), \ \forall y \in \langle c; d\rangle.$$

Основні властивості інтегралів, залежних від параметра

1. *Неперервність.* Якщо функція f неперервна на множині E, то $\forall [a; b] \subset \langle A; B\rangle$ функція $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ неперервна на проміжку $\langle c; d\rangle$. Якщо $\langle a; b\rangle \ne [a; b]$ і невласний інтеграл $\int_a^b f(x, y)dx$ рівномірно збіжний на проміжку $\langle c; d\rangle$, то функція $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ також неперервна на проміжку $\langle c; d\rangle$.

2. *Диференційовність.* Якщо функції f і f'_y неперервні на множині E, то $\forall [a; b] \subset \langle A; B\rangle$ функція $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ диференційовна на інтервалі $(c; d)$ і

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\left(\int_a^b f(x, y)dx\right) = \int_a^b f'_y(x, y)dx \ \ (\textit{формула Лейбніца}).$$

Якщо $\langle a;\, b\rangle \neq [a;\, b]$ і невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x,\, y)\,dx$ збіжний на проміжку $\langle c;\, d\rangle$ до функції F, а невласний інтеграл $\int\limits_a^b f'_y(x,\, y)\,dx$ рівномірно збіжний на проміжку $\langle c;\, d\rangle$, то формула Лейбніца справджується і в цьому випадку.

3. *Інтегровність.* Якщо функція f неперервна на множині E і $\langle c;\, d\rangle = [c;\, d]$, то функція F інтегровна на відрізку $[c;\, d]$ і

$$\int\limits_c^d F(y)\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,\, y)\,dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,\, y)\,dy \right) dx \quad \forall \langle a;\, b\rangle \subset \langle A;\, B\rangle. \qquad (1)$$

Остання формула справджується і для нескінченного проміжку $\langle c;\, d\rangle$, якщо:

1) $f(x,\, y) \geq 0$ на множині E, внутрішні інтеграли у повторних інтегралах є неперервними функціями та існує хоча б один з повторних інтегралів;

2) інтеграли $\int\limits_a^b f(x,\, y)\,dx$ і $\int\limits_c^d f(x,\, y)\,dy$ рівномірно збіжні на будь-якому скінченному проміжку та існує хоча б один з повторних інтегралів формули (1).

Інтеграл більш загального виду

$$F(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,\, y)\,dx$$

також називають інтегралом, залежним від параметра, і він є неперервною функцією аргументу $y \in [c;\, d]$, якщо функція f неперервна на множині $E = \{(x,\, y):\ x \in [a;\, b],\ y \in [c;\, d]\}$, а функції α і β неперервні на відрізку $[c;\, d]$ і їхні значення містяться на відрізку $[a;\, b]$. Якщо функція f'_y також неперервна на множині E, а функції α і β мають неперервні похідні на інтервалі $(c;\, d)$, то має місце узагальнена формула Лейбніца:

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\left(\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,\, y)\,dx \right) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,\, y)\,dx + \beta'(y) f(\beta(y),\, y) - \alpha'(y) f(\alpha(y),\, y).$$

Вправи

1. Визначити, чи правильні дані твердження:

1) у кожному інтегралі, залежному від параметра, підінтегральна функція є функцією двох змінних, неперервною в своїй області визначення;

2) кожний інтеграл, залежний від параметра, є неперервною функцією в своїй області визначення;

3) функція $f(x, y)=\begin{cases} -\dfrac{y}{x^2+y^2}, (x, y) \neq (0,0), \\ 0, \ (x, y)=(0,0), \end{cases}$ неперервна на множині $E=\{(x, y): \ x \in [0; 1], \ y \in [0; 1]\}$;

4) для функції f, визначеної у твердженні 3), функція $F(y)=\int\limits_0^1 f(x, y)dx$ неперервна на відрізку $[0; 1]$;

5) якщо $F(y)=\int\limits_a^b f(x, y)dx$ — диференційовна функція на інтервалі $(c; d)$, то $\exists f'_y(x, y) \ \ \forall y \in (c; d)$;

6)• якщо функція f неперервна на інтервалі $(-\infty; +\infty)$, то функція $F(y)= =\int\limits_a^b f(x+y)dx$ диференційовна на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ і $F'(y)=f(b+y)-f(a+y)$;

7) якщо $\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x, y)dx\right)dy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x, y)dy\right)dx$, то функція f неперервна на множині $P=\{(x, y): \ x \in [a; b], \ y \in [c; d]\}$;

8) $\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 \operatorname{sign}(x-y)dx\right)dy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 \operatorname{sign}(x-y)dy\right)dx.$

2. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{-1-y}^{1+y}\dfrac{dx}{1+x^2+y^2}$; 2) $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_1^2 x^3\cos xy dx$;

3) $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^1\sqrt[3]{x^4+y^2}\,dx$; 4) $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{-1}^1\sqrt{x^2+y^2}\,dx$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1\dfrac{dx}{1+\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n}$.

3. Дослідити на неперервність даний інтеграл, залежний від параметра:

1) $F(y)=\int\limits_0^1 \operatorname{sign}(x-y)dx$; 2) $F(y)=\int\limits_{-1}^1\sqrt{x^2+y^2}\,dx$;

3) $F(y)=\int\limits_0^1\dfrac{yf(x)dx}{x^2+y^2}$, $f(x)\in C_{[0;1]}$, $f(x)>0 \ \ \forall x \in [0; 1]$;

4) $F(y)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-y)^2}dx$; 5)• $F(y)=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin\left(1-y^2\right)\,x}{x}dx$;

6) $F(y)=\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{y}{x}}{x^y}dx$, $y\in(0;1)$; 7) $F(y)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{xdx}{2+x^y}$, $y>2$;

8) $F(y)=y\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy^2}dx$; 9) $F(y)=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^y}dx$, $y>0$;

10) $F(y)=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^y}dx$, $y>0$.

4. Продиференціювати у даній точці y_0 інтеграл, залежний від параметра, і визначити, чи можна при цьому скористатися формулою Лейбніца:

1) $F(y)=\int\limits_y^{y^2}\mathrm{e}^{-yx^2}dx$, $y_0\in\mathbf{R}$; 2) $F(y)=\int\limits_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx$, $y_0=0$;

3)• $F(y)=\int\limits_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x}dx$, $y_0>0$; 4) $F(y)=\int\limits_0^1 x^{y-1}dx$, $y_0>0$;

5)• $F(y)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx$, $y_0\in\mathbf{R}$; 6) $F(y)=\int\limits_0^{\infty}\mathrm{e}^{-yx^2}dx$, $y_0>0$;

7) $F(y)=\int\limits_{y-1}^{y+1}\frac{\sin xy}{x}dx$, $y_0\in\mathbf{R}$; 8) $F(y)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+y^2}$, $y_0>0$;

9) $F(y)=\int\limits_0^y (x-y)\sin xy\,dx$; $y_0\in\mathbf{R}$; 10) $F(y)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos xy}{x}\mathrm{e}^{-kx}dx$, $y_0\in\mathbf{R}$;

11) $F(y)=\int\limits_{\sin y}^{\cos y}\mathrm{e}^{y\sqrt{1-x^2}}dx$, $y_0\in\mathbf{R}$.

5. Обчислити інтеграл на заданому проміжку від інтеграла, залежного від параметра, та визначити, чи можна при цьому змінювати порядок інтегрування:

1) $F(y)=\int\limits_a^b x^y dy$, $y\in[0;1]$, $0<a<b$; 2) $F(y)=\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-yx}dx$, $y\in(0;+\infty)$;

3) $F(y)=\int\limits_{y^2}^1 (x-2y)dx$, $y\in[0,1]$; 4) $F(y)=\int\limits_0^1\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx$, $y\in[0;1]$;

5) $F(y)=\int\limits_y^1 (x+y)dx$, $y\in[0;1]$; 6) $F(y)=\int\limits_1^{+\infty}\frac{y-x}{(x+y)^3}dx$, $y\in[0;1]$;

7)• $F(y)=\int\limits_a^b \frac{\sin yx}{y}dx$, $y\in(0;+\infty)$, $0<a<b$;

8) $F(x)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dy$, $x\in[0;+\infty)$. Дістати звідси справедливість рівності $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

6. Нехай $E(y)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-y^2\sin^2 x}\,dx$ і $F(y)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-y^2\sin^2 x}}$, $0<y<1$, — повні еліптичні інтеграли. Довести, що:

1) $E''(y)+\frac{1}{y}E'(y)+\frac{E(y)}{1-y^2}=0$; 2) $\int\limits_0^y F(t)t\,dt=E(y)-\left(1-y^2\right)F(y)$;

3) $\int\limits_0^y E(t)t\,dt=\frac{1}{3}\left(\left(1+y^2\right)E(y)-\left(1-y^2\right)F(y)\right)$.

7. Нехай $I_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi$ — функція Бесселя цілого індексу n. Довести, що:

1) $x^2I_n''(x)+xI_n'(x)+\left(x^2-n^2\right)I_n(x)=0$ $\forall n\in\mathbf{Z}$; 2) $\int\limits_0^y xI_0(x)dx=yI_1(y)$.

Зразки розв'язування задач

1. 6) Зафіксуємо довільне значення y і скористаємося означенням похідної:

$$\Delta F(y)=F(y+h)-F(y)=\int\limits_a^b f(x+y+h)dx-\int\limits_a^b f(x+y)dx=$$
$$=\int\limits_{a+y+h}^{b+y+h} f(t)dt-\int\limits_{a+y}^{b+y} f(t)dt=\int\limits_{b+y}^{b+y+h} f(t)dt-\int\limits_{a+y}^{a+y+h} f(t)dt=\left(f(b+y+\theta_1 h)-\right.$$
$$\left.-f(a+y+\theta_2 h)\right)h,\ 0<\theta_1,\ \theta_2<1.$$

У наведених викладках використано заміну змінної, адитивну властивість та теорему про середнє значення.

Отже,

$$\frac{\Delta F(y)}{h}=\frac{F(y+h)-F(y)}{h}=f(b+y+\theta_1 h)-f(a+y+\theta_2 h)\to$$
$$\to f(b+y)-f(a+y),\ h\to 0,$$

тобто функція F диференційовна в точці y і $F'(y)=f(b+y)-f(a+y)$. Одночасно також доведено, що твердження 5) неправильне.

3. 5) Маємо

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\sin\left(1-y^2\right)\ x}{x}dx=\int_{\left(1-y^2\right)\alpha}^{\left(1-y^2\right)\beta}\frac{\sin t}{t}dt\to\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt,$$

якщо $\beta\to+\infty$, $\alpha\to 0$ і $1-y^2>0$ (тут використано підстановку $\left(1-y^2\right)x=t$). Отже, $F(y)=$ $=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$, якщо $y\in(-1;\ 1)$.

Якщо $|y|>1$, то

$$F(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(1-y^2\right)\ x}{x}dx=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(y^2-1\right)\ x}{x}dx=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt.$$

Якщо $|y|=1$, то $F(y)=\int_0^{+\infty}\frac{0\cdot dx}{x}=0$. Звідси випливає, що точки $y=\pm 1$ є точками розриву функції F.

4. 3) Через те що

$$f(x,\ y)=\frac{1}{x}\ln(1+xy)=\ln(1+xy)^{\frac{1}{x}}=y\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}},$$

$$\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\to 1,\ \text{якщо}\ x\to 0,$$

то можна вважати $f(0,y)=y$. Тоді функція f буде неперервною на множині $E=\{(x,y):\ x\in$ $\in[0;\ +\infty),\ \ y\in(0;\ +\infty)\}$, причому функція $f'_y(x,y)=\frac{x}{(1+xy)x}=\frac{1}{1+xy}$ також неперервна на множині E. Тому можна скористатися узагальненою формулою Лейбніца

$$F'(y)=\int_0^y\frac{dx}{1+xy}+\frac{\ln\left(1+y^2\right)}{y}-0\cdot y=\frac{1}{y}\int_0^y\frac{d(xy+1)}{xy+1}+\frac{\ln\left(1+y^2\right)}{y}=$$

$$=\frac{1}{y}\ln(1+xy)\Big|_{x=0}^{x=y}+\frac{\ln\left(1+y^2\right)}{y}=\frac{2\ln\left(1+y^2\right)}{y},\ \text{якщо}\ y>0.$$

5) Якщо формально застосувати формулу Лейбніца, то дістанемо розбіжний інтеграл $\int_0^{+\infty}\cos xy dx$, тому безпосереднє використання цієї формули тут неможливе. Проте це ще не означає, що функція F недиференційовна.

Розглянемо більш загальний інтеграл

$$\Phi_k(y)=\int_0^{+\infty}e^{-kx}\frac{\sin xy}{x}dx,\ k\ge 0.$$

За формулою Лейбніца дістаємо

$$\Phi'_k(y)=\int_0^{+\infty}e^{-kx}\cos xy dx,\ \left|\int_a^{+\infty}e^{-kx}\cos xy dx\right|\le\int_a^{+\infty}e^{-kx}dx\to 0,\ k\to\infty,$$

тобто формула Лейбніца тут застосовна.

Через те що

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-kx}\cos xy dx=\frac{1}{y}e^{-kx}\sin xy\Big|_{x=0}^{x=+\infty}+\frac{k}{y}\int_0^{+\infty}e^{-kx}\sin xy dx=$$

$$=\frac{k}{y}\left(-\frac{1}{y}e^{-kx}\cos xy\Big|_{x=0}^{x=+\infty}-\frac{k}{y}\int_0^{+\infty}e^{-kx}\cos xy dx\right)=\frac{k}{y^2}-\frac{k^2}{y^2}I,$$

то $I=\frac{k}{y^2+k^2}$, тобто $\Phi_k'(y)=\frac{k}{y^2+k^2}$. Тоді

$$\Phi_k(y)=\Phi_k(0)+\int_0^y\frac{k}{t^2+k^2}dt=\operatorname{arctg}\frac{y}{k}\quad\forall k>0.$$

Далі зафіксуємо в інтегралі $\Phi_k(y)=\int_0^{+\infty}e^{-kx}\frac{\sin xy}{x}dx$ довільне y.

Тоді $\Phi_k(y)$ є неперервною функцією параметра $k\in(0;+\infty)$. Тому $\lim\limits_{k\to0+}\Phi_k(y)=\Phi_0(y)=$ $=F(y)$, але

$$\lim_{k\to0+}\Phi_k(y)=\lim_{k\to0+}\operatorname{arctg}\frac{y}{k}=\begin{cases}\frac{\pi}{2},\ y>0,\\ -\frac{\pi}{2},\ y<0,\\ 0,\ y=0.\end{cases}$$

Звідси випливає, що

$$F(y)=\begin{cases}\frac{\pi}{2},\ y>0,\\ 0,\ y=0,\\ -\frac{\pi}{2},\ y<0,\end{cases}$$

тобто $F(y)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}y$, тому $F'(y)=0\ \forall y\neq0$, а в точці $y=0$ функція F розривна і, отже, недиференційовна.

Зокрема, дістанемо значення невласного інтеграла

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=F(1)=\frac{\pi}{2}.$$

5. 7) Проінтегруємо функцію F поки що формально і поміняємо порядок інтегрування:

$$\int_0^{+\infty}F(y)dy=\int_0^{+\infty}\left(\int_a^b\frac{\sin yx}{y}dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin yx}{y}dy\right)dx.$$

Маємо $\int_0^{+\infty}\frac{\sin yx}{y}dy=\frac{\pi}{2}$, $0<a\le x\le b$ (див. вправу 4.5)). Останній невласний інтеграл рівномірно збіжний, оскільки

$$\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{\sin yx}{y}dy=\int_{\alpha x}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt \quad \text{і} \quad \int_{\beta}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\to 0,\ \beta\to\infty.$$

Отже, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon):\ \beta>\delta(\varepsilon)\Rightarrow\left|\int_{\beta}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\right|<\varepsilon$, тому, вважаючи $\alpha a>\delta(\varepsilon)$, дістанемо $\alpha x>\delta(\varepsilon)\ \ \forall x\in[a;b]$ і $\left|\int_{\alpha x}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\right|<\varepsilon\ \ \forall x\in[a;b]$, якщо $\alpha>\frac{\delta(\varepsilon)}{a}$.

Таким чином, для інтеграла $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin yx}{y}dy$ виконано всі умови його інтегровності, тому

$$\int_a^b\frac{\pi}{2}dx=\int_a^b\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin yx}{y}dy\right)dx=\int_0^{+\infty}F(y)dy=\frac{\pi}{2}(b-a).$$

Звідси, зокрема, дістанемо формулу

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_a^b\frac{\sin yx}{y}dx\right)dy=\int_0^{+\infty}\frac{\cos ay-\cos by}{y^2}dy=\frac{\pi}{2}(b-a).$$

§ 16.2. Ейлерові інтеграли

Інтеграл $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,\ \ x>0,\ \ y>0$, називають *ейлеровим інтегралом першого роду*, або *бета-функцією*.

Інтеграл $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t},\ x>0$, називають *ейлеровим інтегралом другого роду*, або *гамма-функцією*.

Основні властивості бета- та гамма-функцій

1. $B(x, y) = B(y, x)$.

2. а) $B(x,y)=\frac{x-y}{x+y-1}B(x-1,y)=\frac{y-1}{x+y-1}B(x,y-1)$, зокрема

$$B(a,n)=B(n,a)=\frac{(n-1)!}{a(a+1)\ldots(a+n-1)},$$

$$B(m,n)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}\ \ \forall m,n\in\mathbf{N};$$

б) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, зокрема $\Gamma(1+n)=n!,\ n\in\mathbf{N}$.

3. $B(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ (*співвідношення Ейлера*).

4. $B(x,1-x)=\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}$ $\forall x\in(0;\,1)$ (формула доповнення).

Зокрема, $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=\pi$.

5. $\Gamma^{(n)}(x)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)^n\,\mathrm{e}^{-t}dt$ $\forall x>0,\ \forall n\in\mathbf{N}$.

6. $R_0=\int\limits_0^1\ln\Gamma(x)dx=\ln\sqrt{2\pi},\ R_a=\int\limits_a^{a+1}\ln\Gamma(x)dx=a(\ln a-1)+\ln\sqrt{2\pi}$ $\forall a>0$ (інтеграли Раабе).

7. $\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$ (*формула Лежандра*).

8. $(\ln\Gamma(x))'=\int\limits_0^1\dfrac{1-t^{x-1}}{1-t}dt-C$, де $C=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{1}{k}-\ln n\right)\approx 0{,}577$ — стала Ейлера.

9. $\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=\dfrac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{nx-\frac{1}{2}}}\Gamma(nx)$ (*формула Гаусса*).

10. $\ln\Gamma(x)=\ln\sqrt{2\pi}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x-x+\dfrac{\theta}{12x}$, $0<\theta<1$, $\forall x>0$ (*формула Стірлінга*).

Вправи

1. Визначити, чи правильні дані твердження:

1) бета- та гамма-функції неперервні в своїй області визначення;

2) бета-функція диференційовна в своїй області визначення;

3) $B(a,1)=B(1,a)=\dfrac{1}{a}$ $\forall a>0$;

4) $\Gamma(x)=\int\limits_0^1\left(\ln\dfrac{1}{t}\right)^{x-1}dt$ $\forall x>0$;

5)• $\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to\infty}n^{x-1}\int\limits_0^1\left(1-t^{\frac{1}{n}}\right)^{x-1}dt=\lim\limits_{n\to\infty}n^x\int\limits_0^1 y^{n-1}(1-y)^{x-1}dy=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}n^x\dfrac{(n-1)!}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}$;

6) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$;

7) гамма-функція має абсолютний мінімум у точці $x_0 \in (1, 2)$.

2. Побудувати графік гамма-функції.

3. Довести, що гамма-функція логарифмічно опукла, тобто

$$\Gamma(x)\Gamma''(x) - (\Gamma'(x))^2 \geq 0 \quad \forall x > 0.$$

4. Нехай функція f визначена і має неперервну похідну на інтервалі $(0; +\infty)$. Довести, що $f(x) = \Gamma(x)$ $\forall x > 0$ тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

1) $f(x) \neq 0$ $\forall x > 0$; 2) $f(x+1) = xf(x)$ $\forall x > 0$;

3) $f(x) f\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} f(2x)$.

5. Обчислити дані інтеграли за допомогою ейлерових інтегралів:

1) $\int\limits_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx$; 2)• $\int\limits_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, $a > 0$;

3) $\int\limits_0^1 x^{p-1} \left(1 - x^m\right)^{q-1} dx$, $p, q, m > 0$;

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{x-1} t \cos^{y-1} t dt$, $x, y > 0$; 5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{x-1} t dt$, $x > 0$;

6) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{x-1} t dt$, $x > 0$; 7) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^x t\, dt$, $|x| < 1$; 8) $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{dt}{\sqrt{3 - \cos t}}$;

9) $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{\sin^{n-1} \varphi d\varphi}{(1 - k \sin \varphi)^n}$, $0 < k < 1, n > 0$; 10)• $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx$;

11) $\int\limits_0^1 \dfrac{x^{a-1} - x^{-a}}{1 - x} dx$, $0 < a < 1$; 12) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{m-1}}{1 + x^n} dx$, $n > m > 0$;

13) $\int\limits_0^1 \dfrac{x^{a-1}}{(1+x)^2} dx$, $0 < a < 2$; 14) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^a \ln x}{1 + x^2} dx$, $|a| < 1$.

6. Довести, що $\dfrac{\Gamma(x)}{t^x} = \int\limits_0^{+\infty} y^{x-1} \mathrm{e}^{-ty} dy$, $x > 0$, $t > 0$.

7. Обчислити дані інтеграли за допомогою формули із вправи 6:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos bt}{t^x} dt$, $x \in (0; 1)$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin bt}{t^x} dt$, $x \in (0; 2)$.

8. Довести, що

1) $C+\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{x+n}\right)\quad \forall x>0;$

2) $\left(\ln\Gamma(x)\right)''=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(x+n)^2}\quad \forall x>0;$

3) $\ln\Gamma(x)+C(x-1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x-1}{n+1}-\ln\dfrac{x+n}{n+1}\right)\quad \forall x>0;$

4) $\ln\dfrac{1}{\Gamma(x+1)}=Cx+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)-\dfrac{x}{n}\right)\quad \forall x>-1.$

9. Знайти довжину дуги кривої $\rho^n=a^n\cos n\theta,\ a>0,\ n\in\mathbf{N}.$

10. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $|x|^n+|y|^n=a^n,\ n>0,\ a>0.$

11. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $x^n+y^n+z^n=a^n, x>0, y>0, z>0,\ n>0.$

12. Показати, що з формули Стірлінга для гамма-функції випливає формула Стірлінга для $n!$:

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\theta}{12n}},\ 0<\theta<1,\ \forall n\in\mathbf{N}.$$

13. Обчислити за допомогою формули Стірлінга:

1) $\lg 100!$; 2) $(2n-1)!!=1\cdot3\ldots(2n-1)$; 3) $1999!!$;

4) $(2n)!!=2\cdot4\ldots2n$; 5) $\dfrac{99!!}{100!!}$; 6) $\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)^{50}dx$;

7) $\int\limits_0^{2\pi}\sin^{200}x\,dx$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n!}{\ln n^n}$.

Зразки розв'язування задач

1. 5) Оскільки $\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$, то, поклавши в цьому інтегралі $t=\ln\dfrac{1}{y}$, дістанемо $dt=-\dfrac{dy}{y},\ \mathrm{e}^{-t}=y$. Крім того, $t=0\Leftrightarrow y=1,\ t\to+\infty\Leftrightarrow y\to0$, тому

$$\Gamma(x)=-\int\limits_1^0\left(\ln\frac{1}{y}\right)^{x-1}y\frac{dy}{y}=\int\limits_0^1\left(\ln\frac{1}{y}\right)^{x-1}dy.$$

Враховуючи, що $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{z^x-1}{x}=\ln z$, маємо $\ln\dfrac{1}{z}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-z^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)$, причому послідовність $\left(n\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)\right)$ зростаюча, тому $n\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)\rightrightarrows \ln\dfrac{1}{z}$ на інтервалі (0; 1).

Із властивості неперервності інтеграла, залежного від параметра, випливає

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} n\left(1-y^{\frac{1}{n}}\right)^{x-1}dy=\lim_{n\to\infty} n^{x-1}\int\limits_0^1\left(1-y^{\frac{1}{n}}\right)^{x-1}dy,$$

і першу формулу доведено. Якщо в цій формулі покласти $y=t^n$, то матимемо

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty} n^{x-1}\int\limits_0^1(1-t)^{x-1}nt^{n-1}dt=\lim_{n\to\infty} n^x\int\limits_0^1 t^{n-1}(1-t)^{x-1}dt,$$

і цим доведено другу формулу.

Із означення та властивості 2 бета-функції маємо

$$\int\limits_0^1 t^{n-1}(1-t)^{x-1}dt=B(n,x)=\frac{(n-1)!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)},$$

тому

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty} n^x\frac{(n-1)!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}.$$

Отже, розглядуване твердження правильне.

5. 2) Маємо

$$\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a\int\limits_0^a x^2\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{a^4}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=$$

$$=\frac{a^4}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{3}{2}-1}(1-t)^{\frac{3}{2}-1}dt=\frac{a^4}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{a^4}{2}\cdot\frac{\frac{3}{2}-1}{3-1}B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\frac{a^4}{8}\cdot\frac{\frac{3}{2}-1}{2-1}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{a^4\pi}{16}$$

(тут використано підстановку $\dfrac{x}{a}=t^{\frac{1}{2}}$).

5. 10) Користуючись властивостями бета-функції, матимемо

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}\,dx}{(1+x)^2}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{5}{4}-1}}{(1+x)^{\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)}}dx=B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\frac{5}{4}-1}{2-1}B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}B\left(\frac{3}{4},1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Розділ 17 КРИВОЛІНІЙНІ ТА КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

§ 17.1. Криволінійні інтеграли першого роду

Нехай функція f визначена на простій гладкій дузі AB, рівняння якої має вигляд $x = x(l)$, $y = y(l)$, $l \in [0; L]$, причому за параметр l взято довжину дуги AC, де C — довільна точка дуги AB, тоді $L = l\,(AB)$.

Розглянемо (T)-розбиття відрізка $[0; L]$:

$$0 = l_0 < l_1 < \ldots < l_k < l_{k+1} < \ldots < l_n = L.$$

Складемо суму

$$S(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x(\tau_k), y(\tau_k)\right)\ \Delta l_k, \tag{1}$$

де $\Delta l_k = l_{k+1} - l_k$, $\tau_k \in [l_k; l_{k+1}]$, $k \in \overline{0, n-1}$, яку називають *інтегральною сумою* для функції f по дузі AB.

Якщо при $\lambda(T) = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta l_k \to 0$ інтегральна сума (1) має скінченну границю, то цю границю називають *криволінійним інтегралом першого роду* від функції f по дузі AB і позначають $\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl.$

Таким чином,

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x(\tau_k), y(\tau_k)\right)\Delta l_k. \tag{2}$$

Якщо $\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl$ існує, то функцію f називають інтегровною на дузі AB.

Сума $S(T)$ є інтегральною сумою для функції $f(x(l), y(l))$ однієї змінної l на відрізку $[0; L]$. Тому якщо існує визначений інтеграл $\int\limits_0^L f\left(x(l), y(l)\right)dl$, то існуватиме і криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl$, причому

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl = \int\limits_0^L f\left(x(l), y(l)\right)dl. \tag{3}$$

Рівність (3) справджується, зокрема, для функції $f(x(l), y(l))$, неперервної на відрізку $[0; L]$. Криволінійний інтеграл першого роду існує і тоді, коли функція f, розглядувана як функція двох змінних x і y, неперервна в деякій області, якій належить дуга AB.

Якщо гладку дугу AB задано у вигляді $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, де $t \in [a; b]$ — довільний параметр, $A = (\varphi(a); \psi(a))$, $B = (\varphi(b); \psi(b))$, то

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl = \int\limits_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt.$$

Зокрема, якщо дугу AB задано в декартових координатах рівнянням $y = \varphi(x)$, $x \in [a; b]$, або ж $x = \psi(y)$, $y \in [c; d]$, то відповідно матимемо

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl = \int\limits_a^b f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + \varphi'^2(x)}\,dx,$$

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl = \int\limits_a^b f(\psi(y), y)\sqrt{1 + \psi'^2(y)}\,dy.$$

Якщо $f(x, y) = 1$, то $\int\limits_{AB} dl = l(AB)$.

Дугу інтегрування AB часто позначають однією буквою, наприклад Г.

Якщо $f(x, y) = \mu(x, y)$ є густиною розподілу маси вздовж матеріальної дуги AB, то масу m, моменти інерції I_x, I_y, статичні моменти M_x, M_y відносно координатних осей та центр мас (x_c, y_c) матеріальної дуги AB обчислюють за формулами:

$$m = \int\limits_{AB} \mu(x, y)\,dl;$$

$$I_x = \int\limits_{AB} y^2\mu(x, y)\,dl, \quad I_y = \int\limits_{AB} x^2\mu(x, y)\,dl;$$

$$M_x = \int\limits_{AB} y\mu(x, y)\,dl, \quad M_y = \int\limits_{AB} x\mu(x, y)\,dl;$$

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

Якщо кусково-гладка дуга AB складається із скінченної кількості простих гладких дуг $A_k A_{k+1}$, $k \in \overline{0,\ n-1}$, то покладають

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{A_k A_{k+1}} f(x, y)\,dl.$$

При цьому вважають, що

$$f(A_k)=\begin{cases} f_k^*, & A_k \in A_{k-1}A_k, \\ f_k^{**}, & A_k \in A_k A_{k+1}, \end{cases}$$

причому задані числа f_k^* і f_k^{**} різні.

Поняття криволінійного інтеграла першого роду від неперервної функції $f(x, y, z)$ вздовж просторової гладкої дуги AB вводиться аналогічно. Якщо дугу AB задано рівнянням $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a; b]$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

Криволінійні інтеграли першого роду для просторових дуг застосовують при обчисленні маси, моментів інерції, статичних моментів відносно координатних площин та координат центра мас просторової матеріальної дуги.

Вправи

1. Чи правильні дані твердження:

1) кожний криволінійний інтеграл першого роду є деяким визначеним інтегралом;

2) кожний визначений інтеграл є деяким криволінійним інтегралом першого роду;

3) якщо $x = x(l)$, $y = y(l)$, $l \in [0; L]$ — рівняння дуги AB, то $x = x(L-l) = x_1(l)$, $y = y(L-l) = y_1(l)$, $l \in [0; L]$, — рівняння дуги BA;

4) $\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{BA} f(x,y)dl$, тобто криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напряму дуги;

5) криволінійний інтеграл першого роду має властивості, аналогічні властивостям визначеного інтеграла. Назвіть ці властивості;

6) якщо точки l_k, $k \in \overline{0, n}$, утворюють (T)-розбиття відрізка $[0; L]$ і $A_k = (x(l_k), y(l_k))$, $k \in \overline{0, n}$, то $\int\limits_{AB} f(x,y)dl \approx \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(A_k)\Delta l_k$, де $\Delta l_k = l_{k+1} - l_k$, причому похибку останнього наближення можна зробити як завгодно малою, якщо $\lambda(T) = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta l_k$ як завгодно мале.

2. Нехай криву задано параметричним рівнянням $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$. Записати формули для обчислення маси, статичних моментів відносно координатних осей та координат центра мас цієї кривої.

3. Записати формулу для обчислення $\int\limits_{AB} f(x,y)dl$, якщо дугу AB задано неявно рівнянням $F(x, y) = 0$ та у полярних координатах. Який вигляд у цих випадках матимуть формули для обчислення маси, статичних моментів відносно координатних осей та координат центра мас кривої?

4. Обчислити дані криволінійні інтеграли першого роду:

1) $\int\limits_{AB} \frac{dl}{x+y}$, AB — відрізок прямої $y = x + 2$, що сполучає точки $A(2, 4)$ і $B(1, 3)$;

2) $\int\limits_{AB} (x-y)dl$, AB — відрізок прямої від точки $A(0, 0)$ до точки $B(4, 3)$;

3) $\int\limits_{\Gamma} (y-x)dl$, Γ — дуга кубічної параболи $y = x^3$ від точки $(1, 1)$ до точки $(2, 8)$;

4) $\int\limits_{\Gamma} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, Γ — відрізок прямої $2y - x + 4 = 0$ від точки $A(0, -2)$ до точки $B(4, 0)$;

5) $\int\limits_{\Gamma} ydl$, $\Gamma = \{(x, y): \ y = \sin x, \ 0 \le x \le \pi\}$;

6) $\int\limits_{\Gamma} (x+y)dl$, Γ – контур трикутника ABC з вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ і $C(0, 0)$;

7) $\int\limits_{\Gamma} xydl$, Γ — контур прямокутника, обмеженого прямими $x \pm y = 1$, $x \pm y = -1$;

8) $\int\limits_{\Gamma} ydl$, Γ — дуга параболи $y^2 = 2x$ від точки $A(2, -2)$ до точки $B(8, 4)$;

9) $\int\limits_{\Gamma} x^2 dl$, Γ — верхня половина кола $x^2 + y^2 = 4$;

10) $\int\limits_{\Gamma} x^2 ydl$, Γ — чверть еліпса $x^2 + 4y^2 = 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$;

11) $\int\limits_{\Gamma} y^2 dl$, $\Gamma = \left\{(x, y): \ y = \max\left(2\sqrt{x}, 2x\right), \ 0 \le x \le 2\right\}$;

12) $\int\limits_{\Gamma} (x+y)dl$, $\Gamma = \left\{ (x, y): \ x = a\cos t, \ y = a\sin t, \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right\}$;

13) $\int\limits_{\Gamma} \left(x^2+y^2\right)^n dl$, $\Gamma = \{(x, y): \ x = a\cos t, \ y = a\sin t, \ 0 \le t \le 2\pi\}$;

14) $\int\limits_{\Gamma} \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) dl$, $\Gamma = \left\{(x, y): x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\right\}$ (*астроїда*);

15) $\int\limits_{\Gamma} y^2 dl$, $\Gamma = \{(x, y): \ x = a(t - \sin t), \ y = a(1 - \cos t), \ 0 \le t \le 2\pi\}$ (*арка циклоїди*);

16) $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2}\, dl$, $\Gamma = \{(x, y):\ x = a(\cos t + t\sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t),\ 0 \le t \le$ $\le 2\pi\}$ (дуга розгортки кола);

17) $\int\limits_{\Gamma} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, dl$, Γ — контур криволінійного сектора, обмеженого кривими $\rho = a,\ \theta = 0,\ \theta = \dfrac{\pi}{4}$ (ρ і θ — полярні координати);

18) $\int\limits_{\Gamma} \left(x^2 + y^2\right) dl$, Γ — дуга логарифмічної спіралі $\rho = ae^{3\theta}$ від точки
a
$A(a, 0)$ до точки $O(0, 0)$;

19)• $\int\limits_{\Gamma} x\, dl$, Γ — частина логарифмічної спіралі $\rho = ae^{k\theta}$, $k > 0$, яка міститься всередині кола $\rho = a$;

20) $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2}\, dl$, Γ — коло $x^2 + y^2 = ax$;

21) $\int\limits_{\Gamma} x\, dl$, Γ — верхня половина кривої $\rho = 1 + \cos\theta,\ 0 \le \theta \le \pi$;

22) $\int\limits_{AB} \dfrac{y\, dl}{x + 3z}$, AB — дуга кривої $x = t,\ y = \dfrac{t^2}{\sqrt{2}},\ z = \dfrac{t^3}{3}$ від точки $A(0, 0, 0)$ до точки $B\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$;

23) $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{dl}{x^2 + y^2 + z^2}$, Γ — перший виток гвинтової лінії $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,\ z = 4t$;

24) $\int\limits_{AB} (x + y)\, dl$, AB — менша частина кола $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ y = x \end{cases}$ між точками $A(0, 0, 2)$ і $B\left(1, 1, \sqrt{2}\right)$;

25) $\int\limits_{\Gamma} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dl$, $\Gamma = \{(x, y, z):\ x = 3(t\cos t - \sin t),\ y = 3(t\sin t + \cos t),\ z = 2t^2,\ 0 \le t \le 2\pi\}$;

26) $\int\limits_{\Gamma} x^2\, dl$, Γ — коло $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$

5. Обчислити довжини даних дуг:

1) $ay^2 = x^3,\ 0 \le x \le 5a$; 2) $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),\ 0 \le x \le x_0$;

3) $e^{2y}\left(e^{2x}-1\right)=e^{2x}+1,\ 1\le x\le 2$;

4)• $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ t\in[0;2\pi]$ (*астроїда*);

5) $x=2a\cos t-a\cos 2t,\ y=2a\sin t-a\sin 2t$ (*кардіоїда*);

6) $\rho=a\sin^3\dfrac{\theta}{3},\ \theta\in[0;3\pi]$; 7) $x=3t,\ y=3t^2,\ z=2t^3$ від точки $O(0,0,0)$ до точки $A(3,3,2)$;

8) $x=e^{-t}\cos t,\ \ y=e^{-t}\sin t,\ \ z=e^{-t},\ 0<t<+\infty$.

6. Знайти масу, розподілену вздовж даної кривої з густиною μ:

1) $y=\dfrac{x^2}{2},\ x\in[1;2],\ \mu(x,y)=\dfrac{y}{x}$;

2) $y=\ln x,\ \ x\in\left[\sqrt{3};\ 2\sqrt{2}\right],\ \mu(x,y)=x^2$;

3) периметра трикутника з вершинами у точках $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(0,4)$, $\mu(x,y)=\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}$;

4) $x^2=2y,\ x\in[1;2],\ \mu(x,y)=\dfrac{y}{x}$;

5) $x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ t\in[0;2\pi],\ \mu(x,y)=|y|$;

6) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ \mu(x,y)=xy$;

7) $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a},\ x\in[0;a],\ \mu(x,y)=\dfrac{k}{y},\ k>0$;

8) $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ t\in[0;2\pi],\ \mu(x,y)=k|xy|,\ k>0$;

9) $\rho=a(1+\cos\theta),\ \theta\in[0;2\pi],\ \mu(\rho,\theta)=k\sqrt{\rho},\ k>0$;

10) $\rho^2=a^2\cos 2\theta,\ \ \theta\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right],\ \mu(\rho,\theta)=k\rho,\ k>0$;

11)• $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),\ x\in(-\infty;+\infty),\ a>0,\ \mu(x,y)=\dfrac{1}{y^2}$;

12) $x^2+y^2=r^2, y\ge 0,\ \mu(x,y)=\beta y^3,\ \beta>0$;

13) $x=t,\ y=\dfrac{t^2}{2},\ z=\dfrac{t^3}{3},\ 0\le t\le 1,\ \mu(x,y,z)=\sqrt{2y}$;

14) $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t,\ t\in[0;2\pi],\ \mu(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

7. Знайти статичні моменти відносно координатних осей даних однорідних кривих:

1) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},\ x\ge 0,\ y\ge 0$; 2) $x^2+y^2=r^2,\ y\ge 0$;

3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ a>b$; 4) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

8. Знайти моменти інерції даних однорідних дуг L:

1) $L = \{(x, y) : x + 2y = 3,\ 1 \le x \le 2\}$ відносно осі Ox;

2) $L = \{(x, y) :\ y^2 = x\ ,\ 1 \le x \le 2\}$ відносно осі Ox;

3) $L = \{(x, y) :\ x^2 = y + 1\ ,\ 0 \le x \le 1\}$ відносно осей Ox та Oy;

4) $L = \left\{(x, y) : x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right\}$ відносно осі Ox;

5) $L = \left\{(x, y) : \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ 0 \le x \le a\right\}$ відносно осі Ox;

6) $L = \left\{(x, y) : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$ відносно осей Ox та Oy.

9. Знайти координати центра мас даних кривих (у прикладах 1) – 13) криву вважати однорідною):

1) $x^2 + y^2 = r^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0$;

2) $y = \operatorname{ch} x,\ 0 \le x \le \ln 2$;

3) $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),\ -a \le x \le a$;

4) $y^2 = ax^3 - x^4$;

5) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$;

6) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ x \ge 0,\ y \ge 0$;

7) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\ ,\ y \ge 0$;

8) $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ 0 \le t \le \frac{2}{3}\pi$;

9) $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le \pi$;

10) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$;

11) $\rho = a(1 + \cos\theta),\ 0 \le \theta \le \pi$;

12) $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = mt,\ 0 \le t \le 2\pi$ (*гвинтова лінія*);

13) контури сферичного трикутника $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$;

14) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ 0 \le x \le a,\ \mu(x, y) = kx,\ k > 0$;

15)• $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \le t \le \pi,\ \mu(x, y, z) = kz,\ k > 0$.

10•. Вивести формулу для обчислення площі циліндричної поверхні, твірні якої паралельні осі Oz і яка знизу обмежена площиною $z = 0$, зверху — поверхнею $z = f(x, y)$, а напрямною є задана гладка дуга L.

11. Застосувати формулу, виведену у прикладі 10, для обчислення площ циліндричних поверхонь, якщо:

1) $z = \sqrt{2x - 4x^2}\ ,\ L = \{(x, y) :\ y^2 = 2x\ \}$;

2) $z = \frac{xy}{2a},\ L = \{(x, y) :\ x^2 + y^2 = r^2\ \}$;

3) $z = 2 - \sqrt{x},\ L = \left\{(x, y) :\ y^2 = \frac{4}{9}(x - 1)^3\right\}$;

4) $z = a + \dfrac{x^2}{a}$, $L = \{(x, y):\ x^2 + y^2 = a^2\}$.

12.* Знайти проекції на осі координат сили, з якою матеріальне однорідне півколо $x^2 + y^2 = r^2$, $y \ge 0$, масою M притягує матеріальну точку $O(0,\ 0)$ масою m.

13.* Знайти силу, з якою маса M, розподілена рівномірно по колу $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, притягує масу m, розміщену в точці $A(0,\ 0,\ b)$.

14.* Знайти силу струму I у нескінченному прямолінійному провіднику, що діє на точкову магнітну масу m, розміщену на відстані a від провідника.

Зразки розв'язування задач

4. 19) Частина логарифмічної спіралі $\rho = ae^{k\theta}$, що міститься всередині кола $\rho = a$, визначається нерівністю $ae^{k\theta} \le a$, або $e^{k\theta} \le 1$, $\theta \le 0$, і не є дугою. Тому позначимо через AB — дугу кривої Γ, що відповідає відрізку $[\alpha;\ 0]$, тоді матимемо $A\left(\alpha,\ ae^{k\alpha}\right)$, $B(0,\ a)$ і вважатимемо, що $\int\limits_{\Gamma} x\,dl = \lim\limits_{\alpha \to -\infty} \int\limits_{AB} x\,dl$.

Оскільки $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, то $x = ae^{k\theta}\cos\theta$, $y = ae^{k\theta}\sin\theta$, $x' = ake^{k\theta}\cos\theta - ae^{k\theta}\sin\theta$, $y' = ake^{k\theta}\sin\theta + ae^{k\theta}\cos\theta$, $x'^2 + y'^2 = a^2e^{2k\theta}\left(1 + k^2\right)$ і

$$\int\limits_{AB} x\,dl = a^2\sqrt{k^2+1}\int\limits_{\alpha}^{0} \cos\theta e^{2k\theta}d\theta.$$

Отже,

$$\int\limits_{\Gamma} x\,dl = \lim_{\alpha \to -\infty} a^2\sqrt{k^2+1}\int\limits_{\alpha}^{0}\cos\theta e^{2k\theta}d\theta = a^2\sqrt{k^2+1}\int\limits_{-\infty}^{0}\cos\theta e^{2k\theta}d\theta =$$

$$= a^2\sqrt{k^2+1}\left(\frac{1}{2k}\cos\theta e^{2k\theta}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2k}\int\limits_{-\infty}^{0}\sin\theta e^{2k\theta}d\theta\right) =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{k^2+1}}{2k} + \frac{a^2\sqrt{k^2+1}}{2k}\left(\frac{1}{2k}\sin\theta e^{2k\theta}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2k}\int\limits_{-\infty}^{0}\cos\theta e^{2k\theta}d\theta\right),$$

звідки

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\cos\theta e^{2k\theta}d\theta = \frac{1}{2k\left(1 + \dfrac{1}{4k^2}\right)} = \frac{2k}{4k^2+1}.$$

Таким чином, $\int\limits_{\Gamma} x\,dl = \dfrac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{4k^2+1}$.

5. 4) Скористаємося формулою $L=\int\limits_{\Gamma}dl$. Оскільки $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $t\in[0;\,2\pi]$, то $x'=-3a\cos^2 t\sin t$, $y'=3a\sin^2 t\cos t$ і $dl=\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=\frac{3}{2}a\left|\sin 2t\right|dt$.

Враховуючи симетрію кривої відносно осей координат, маємо

$$L=4\int\limits_0^{\pi/2}\frac{3}{2}a\sin 2t\,dt=-6a\frac{\cos 2t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a.$$

6. 11) Через те що крива $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $x\in[-\infty;\,+\infty]$ (ланцюгова лінія), не є дугою, позначимо через AB дугу цієї кривої, що відповідає відрізку $[-\alpha;\,\alpha]$. Отже, рівняння дуги AB має вигляд

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),\ x\in[-\alpha;\,\alpha].$$

Масу, розподілену вздовж дуги AB, визначимо за формулою

$$m(\alpha)=\int\limits_{AB}\mu(x,y)\,dl=\int\limits_{AB}\frac{dl}{y^2}=\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}}{\frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}dx=$$

$$=\frac{2}{a^2}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\sqrt{4+e^{\frac{2x}{a}}+e^{-\frac{2x}{a}}-2}}{\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}dx=\frac{2}{a^2}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\frac{dx}{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}=$$

$$=\frac{2}{a}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\frac{d\left(e^{\frac{x}{a}}\right)}{1+\left(e^{\frac{x}{a}}\right)^2}=\frac{2}{a}\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{a}}\Bigg|_{-\alpha}^{\alpha}=\frac{2}{a}\left(\operatorname{arctg} e^{\frac{\alpha}{a}}-\operatorname{arctg} e^{-\frac{\alpha}{a}}\right).$$

Шукану масу, розподілену вздовж усієї ланцюгової лінії, знайдемо із співвідношення

$$m=\lim_{\alpha\to+\infty}m(\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{2}{a}\left(\operatorname{arctg} e^{\frac{\alpha}{a}}-\operatorname{arctg} e^{-\frac{\alpha}{a}}\right)=\frac{\pi}{a}.$$

9. 15) Координати центра мас просторової дуги AB визначають за формулами

$$x_c=\frac{\int\limits_{AB}x\mu(x,y,z)\,dl}{m},\quad y_c=\frac{\int\limits_{AB}y\mu(x,y,z)\,dl}{m},\quad z_c=\frac{\int\limits_{AB}z\mu(x,y,z)\,dl}{m},$$

де $m=\int\limits_{AB}\mu(x,y,z)\,dl$.

Знайдемо необхідні величини:

$$x' = -a\sin t,\ y' = a\cos t,\ z' = b,\quad dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,dt.$$

Маємо

$$\int\limits_{AB} x\mu(x, y, z)dl = \int\limits_0^{\pi} a\cos t\cdot kbt\sqrt{a^2+b^2}\,dt =$$

$$= akb\sqrt{a^2+b^2}\,(t\sin t + \cos t)\Big|_0^{\pi} = -2abk\sqrt{a^2+b^2}\,,$$

$$\int\limits_{AB} \mu(x, y, z)dl = \int\limits_0^{\pi} kbt\sqrt{a^2+b^2}\,dt = kb\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{bk\pi^2}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,,$$

$$\int\limits_{AB} y\mu(x, y, z)dl = \int\limits_0^{\pi} a\sin t\cdot kbt\sqrt{a^2+b^2}\,dt =$$

$$= abk\sqrt{a^2+b^2}\,(\sin t - t\cos t)\Big|_0^{\pi} = abk\pi\sqrt{a^2+b^2}\,,$$

$$\int\limits_{AB} z\mu(x, y, z)dl = \int\limits_0^{\pi} btkbt\sqrt{a^2+b^2}\,dt = \frac{kb^2\pi^3}{3}\sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Таким чином, $x_c = -\dfrac{4a}{\pi^2},\ y_c = \dfrac{2a}{\pi},\ z_c = \dfrac{2}{3}b\pi.$

10. Розіб'ємо дугу AB точками M_k, $k \in \overline{0, n}$, так, щоб $M_0 = A$, $M_n = B$ і $l_k =$ $=$ довж. $M_0M_k > l_{k-1} =$ довж. M_0M_{k-1}. Точкам $M_k \in AB$ на поверхні $z = f(x, y)$ відповідатимуть точки $P_k = (M_k,\ f(M_k))$, $k \in \overline{0, n}$.

Якщо $\lambda(T) = \max\limits_{0\le k\le n-1} \Delta l_k$ досить мале, то криволінійний чотирикутник $M_kP_kP_{k+1}M_{k+1}$ можна вважати прямокутником, тому його площа наближено дорівнюватиме $f(M_k)\Delta l_k$. Тоді шукана площа циліндричної поверхні визначатиметься наближено за формулою $S(T) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(M_k)\Delta l_k$. Отже, точне значення площі можна визначити із співвідношення

$$S = \lim_{\lambda(T)\to 0} S(T) = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\Delta l_k = \int\limits_{AB} f(x, y)dl.$$

Таким чином,

$$S = \int\limits_{AB} f(x,y)dl.$$

§ 17.2. Криволінійні інтеграли другого роду

Нехай функції P та Q є визначеними на простій дузі

$$AB = \{(x, y):\ x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [\alpha; \beta],$$
$$A = A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)),\ B = B(\varphi(\beta),\ \psi(\beta))\}.$$

Розглянемо (T)-розбиття відрізка $[\alpha; \beta]$, $(T) = \left\{t_k, k \in \overline{0, n}\right\}$. При цьому дуга AB розіб'ється на n частин точками $A = M_0, M_1, ..., M_k, M_{k+1}, ..., M_n = B$. Нехай (x_k, y_k) — координати точки M_k, $x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $\lambda(T) = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta t_k$, $\tau_k \in [t_k; t_{k+1}]$, $M_k^*(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \in M_k M_{k+1}$.

Складемо інтегральні суми

$$S_x(T) = \sum_{k=0}^{n-1} P\left(M_k^*\right)\Delta x_k,\quad S_y(T) = \sum_{k=0}^{n-1} Q\left(M_k^*\right)\Delta y_k.$$

Якщо існує $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S_x(T)$, то цю границю називають *криволінійним інтегралом другого роду* від функції P по дузі AB за абсцисою і позначають $\int\limits_{AB} P(x, y)dx$.

Таким чином,

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} P\left(M_k^*\right)\Delta x_k.$$

Якщо існує $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S_y(T)$, то цю границю називають *криволінійним інтегралом другого роду* від функції Q по дузі AB за ординатою і позначають $\int\limits_{AB} Q(x, y)dy$.

Таким чином,

$$\int\limits_{AB} Q(x, y)dy = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} Q\left(M_k^*\right)\Delta y_k.$$

Загальний криволінійний інтеграл другого роду позначають $\int\limits_{AB} P(x, y)dx + {}$ $+Q(x, y)dy$. При цьому

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{AB} P(x, y)dx + \int\limits_{AB} Q(x, y)dy.$$

Обчислення криволінійних інтегралів другого роду зводять до обчислення визначених інтегралів.

Нехай функції P і Q неперервні на простій дузі AB. Якщо функція φ' неперервна на відрізку $[\alpha; \beta]$, то існує інтеграл $\int\limits_{AB} P(x, y)dx$ і виконується рівність

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt.$$

Якщо функція ψ' неперервна на відрізку $[\alpha; \beta]$, то існує $\int\limits_{AB} Q(x, y)dy$ і виконується рівність

$$\int\limits_{AB} Q(x, y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)dt.$$

Якщо функції φ' і ψ' неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$, то існує інтеграл $\int\limits_{AB} P(x, y)dx+$ $+Q(x, y)dy$ і виконується рівність

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t))dt.$$

Властивості криволінійного інтеграла другого роду

1. $\int\limits_{AB} 0dx = \int\limits_{AB} 0dy = 0.$

2. $\int\limits_{AB} 1dx = x_B - x_A$, $\int\limits_{AB} 1dy = y_B - y_A$.

3. Якщо $\cup AB = AB \parallel Ox$, то $\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = 0$, а якщо $\cup AB = AB \parallel Oy$, то $\int\limits_{AB} P(x, y)dx = 0.$

4. *Лінійність*: $\int\limits_{AB} (aP(x, y) + bQ(x, y))dx = a\int\limits_{AB} P(x, y)dx + b\int\limits_{AB} Q(x, y)dx$ $\forall a,\ b \in \mathbf{R}$ (за умови існування інтегралів у правій частині цієї рівності).

Цю властивість мають також і криволінійні інтеграли за ординатою.

5. *Адитивність*: $\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{AC} P(x, y)dx + Q(x, y)dy +$ $+\int\limits_{CB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ $\forall C \in AB$ (за умови існування інтегралів в обох частинах цієї рівності).

6. $\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = -\int\limits_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$

Зауважимо, що додатним напрямом замкненої дуги вважають той, при русі вздовж якого область, обмежена дугою, залишається зліва.

7. Якщо функції P і Q неперервні на кусково-гладкій дузі AB, то

$$\left|\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy\right| \leq M \cdot L,$$

де $M = \max_{AB} \sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)}$, L — довжина дуги AB.

8. Якщо функції P, Q, P'_y та Q'_x неперервні в замкненій області $\overline{D}$, яка обмежена кусково-гладким контуром Γ_D, то $\exists\left(x^*, y^*\right) \in D$:

$$\int_{\Gamma_D} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \operatorname{mes} D\left(Q'_x\left(x^*, y^*\right) - P'_y\left(x^*, y^*\right)\right).$$

Зокрема,

$$\operatorname{mes} D = \int_{\Gamma_D} xdy = -\int_{\Gamma_D} ydx = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_D} xdy - ydx$$

(за цією формулою можна обчислити площу фігури D).

9. *Незалежність інтеграла від форми дуги*: нехай функції P, Q, P'_y та Q'_x неперервні в області D, яка містить кусково-гладку дугу AB. Для того щоб криволінійний інтеграл $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не залежав від форми дуги AB, необхідно і достатньо виконання хоча б однієї з таких умов:

1) $\int_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ для будь-якого кусково-гладкого контуру $\Gamma \subset D$;

2) існує диференційовна в області D функція u, для якої $du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, причому

$$\int_{AB} P(x, y) + Q(x, y)dy = u(B) - u(A).$$

У випадку однозв'язної області D замість умови 1) або 2) можна взяти таку:

3) $P'_y(x, y) = Q'_x(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Для криволінійних інтегралів, які не залежать від форми дуги AB, використовують позначення

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

де (x_0, y_0) — координати точки A, (x_1, y_1) — координати точки B.

Функцію u з умови 2) можна знайти за формулою

$$u(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy + C,$$

де C — довільна стала, а інтеграл береться по довільній дузі $\Gamma \subset D$, яка сполучає фіксовану точку (x_0, y_0) з біжучою точкою (x, y). За дугу Γ для простоти беруть ламану з двох відрізків, паралельних осям координат.

Поняття криволінійного інтеграла другого роду

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

для просторової дуги

$$AB = \{(x, y, z): \ x = x(t), \ y = y(t), \ z = z(t), t \in [\alpha; \beta],$$
$$A = A(x(\alpha), \ y(\alpha), z(\alpha)), \ B = B(x(\beta), \ y(\beta), z(\beta))\}$$

вводиться аналогічно.

Якщо функції P, Q, R неперервні на дузі AB, а функції x', y', z' неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$, то

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z) + Q(x, y, z) + R(x, y, z)dz =$$
$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t)z(t))y'(t) +$$
$$+ R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\big)dt.$$

Криволінійні інтеграли другого роду застосовують для обчислення роботи змінної сили вздовж криволінійного шляху. Робота сили $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки одиничної маси з точки A в точку B вздовж дуги AB обчислюється за формулою

$$W = \int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Аналогічна формула має місце для обчислення роботи сили при переміщенні матеріальної точки вздовж просторової кривої.

Вправи

1. Визначити, чи правильні дані твердження:

1) якщо існує $\int\limits_{AB} f(x, y)dx$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0: \ \lambda(T) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=0}^{n-1} f\left(M_k^*\right)\Delta x_k - \int\limits_{AB} f(x, y)dx \right| < \varepsilon;$$

2) $\int\limits_{AB} f(x, y)dx \approx \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(M_k^*\right)\Delta x_k;$

3) кожний визначений інтеграл є деяким криволінійним інтегралом другого роду;

4) якщо функція F неперервна на дузі AB, що задана явно рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, то

$$\int\limits_{AB} F(x, y)dx = \int\limits_a^b F(x, f(x))dx;$$

5) інтеграл $\int\limits_{AB} Cdx$, C — стала, існує для довільної неперервної дуги AB;

6) якщо функції f_k, $k \in \overline{1, n}$, неперервні на гладкій дузі AB, то

$$\int\limits_{AB} \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x, y)dx = \sum_{k=1}^{n} a_k \int\limits_{AB} f_k(x, y)dx \quad \forall a_k \in \mathbf{R};$$

7) у твердженні 6) замість суми $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k f_k(x, y)$ можна взяти збіжний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x, y)$;

8) $\int\limits_{AB} f(x,y)dx \neq 0 \Leftrightarrow \int\limits_{AB} f(x,y)dx \neq \int\limits_{BA} f(x,y)dx;$

9) якщо $P'_y \equiv Q'_x$ в області D, то $\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = 0$ для будь-якого кусково-гладкого контуру $\Gamma \subset D$;

10)• $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$ для довільного контуру $\Gamma \subset \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. Обчислити дані криволінійні інтеграли другого роду:

1) $\int\limits_{\Gamma} \left(x^2 - y^2\right)dy$, $\Gamma = \{(x, y): \ y = x^2, \ 0 \le x \le 2\}$;

2) $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, $\Gamma = \{(x, y): \ y = x, \ 1 \le x \le 2\}$;

3) $\int\limits_{\Gamma} x^2dx + y^2dy$, $\Gamma = \{(x, y): \ y = e^x, \ 0 \le x \le 1$;

4) $\int\limits_{AB} y^2dx + 2xydy$ від точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$ вздовж кривих: а) $y = x$; б) $y = x^2$; в) $y = \sqrt{x}$;

5) $\int\limits_{AB} y^2dx-2xydy$ від точки $A(0,\ 0)$ до точки $B(1,\ 1)$ вздовж кривих а) — в), заданих у прикладі 4);

6) $\int\limits_{\Gamma} 2xdy-3ydx$, Г — контур трикутника з вершинами $A(1,\ 2)$, $B(3,\ 1)$, $C(2,\ 5)$ з напрямом обходу проти годинникової стрілки;

7) $\int\limits_{\Gamma} ydx+2xdy$, Г — контур ромба зі сторонами $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=\pm1$, $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=\pm1$ (напрям обходу проти годинникової стрілки);

8)• $\int\limits_{\Gamma} xydx-y^2dy$, Г — замкнений контур, утворений кривими $y=x^2$, $y=4$, $x=0$;

9) $\int\limits_{\Gamma} 4x\sin^2 ydx+y\cos^2 2xdy$, Г — відрізок прямої від точки $(0,\ 0)$ до точки $(3,\ 6)$;

10) $\int\limits_{\Gamma} x^3y^3dx+(x-y)^2\,dy$, Г — ламана ABC з вершинами у точках $A(2,\ 1)$, $B(0,\ 3)$, $C(-2,\ 1)$;

11) $\int\limits_{\Gamma} \frac{x}{x^2+y^2}dx-\frac{y}{x^2+y^2}dy$, $\Gamma=\{(x,\ y):\ x^2+y^2=r^2\}$;

12) $\int\limits_{\Gamma} \left(x^2-y^2\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy$, $\Gamma=\left\{(x,\ y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$;

13) $\int\limits_{\Gamma} xdy-ydx$, $\Gamma=\{(x,\ y):\ x=a\cos^3 t,\ \ y=a\sin^3 t,\ 0\le t\le 2\pi\}$;

14) $\int\limits_{\Gamma} (x+y)dx$, $\Gamma=\{(x,y):\ x=2a\cos t-a\cos 2t,\ y=2a\sin t-a\sin 2t,\ 0\le t\le\pi\}$;

15) $\int\limits_{\Gamma} xdy-ydx$, $\Gamma=\left\{(x,\ y):x=\frac{3at}{1+t^3},\ y=\frac{3at^2}{1+t^3},\ t\in[0;+\infty)\right\}$;

16) $\int\limits_{\Gamma} xdy-ydx$, $\Gamma=\{(x,\ y):\ x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi\}$;

17) $\int\limits_{\Gamma} \left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy$, $\Gamma=\{(x,\ y):\ y=1-|1-x|,\ 0\le x\le 2\}$;

18) $\int\limits_{\Gamma} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, Г — контур квадрата з вершинами у точках $A(1,\ 0)$, $B(0,\ 1)$, $C(-1,\ 0)$, $D(0,\ -1)$;

19) $\int\limits_{\Gamma}(y+x)dx-(x-y)dy$, Г — петля кривої $\rho = a\cos 3\theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$, $a>0$, що перетинає полярну вісь, з додатним напрямом обходу;

20) $\int\limits_{\Gamma} xy^2dx+\left(y^2-x^2\right)dy$, Г — додатно зорієнтована крива $\rho = a(1 + \cos\theta)$, $\theta \in [0; 2\pi]$;

21) $\int\limits_{\Gamma}\frac{xy(ydx-xdy)}{x^2+y^2}$ вздовж правої пелюстки лемніскати $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ у додатному напрямі;

22) $\int\limits_{AB} xy^2dx+yz^2dy-zx^2dz$, $A(3, -6, 0)$, $B(-2, 4, 5)$:

а) по прямолінійному відрізку AB; б) по меншій дузі AB кола $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=45; \\ 2x+y=0; \end{cases}$

23) $\int\limits_{\Gamma}\left(y^2-z^2\right)dx+2yzdy-x^2dz$, $\Gamma = \{(x, y, z): \ x=t, \ y=t^2, \ z=t^3, \ 0 \le t \le 1\}$;

24) $\int\limits_{\Gamma} xydx+yzdy+zxdz$, $\Gamma = \left\{(x, y, z): x=\cos t, \ y=\sin t, \ z=1, 0\le t\le \frac{\pi}{2}\right\}$;

25) $\int\limits_{\Gamma} yzdx+xzdy+xydz$, $\Gamma = \{(x, y, z): \ x=a\cos t, \ y=a\sin t, \ z=kt, \ 0\le t\le 2\pi\}$.

3. Показати, що даний інтеграл не залежить від форми дуги, що сполучає задані точки, та обчислити його:

1) $\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy+ydx$; 2) $\int\limits_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dx+(x-y)dy$; 3) $\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx-xdy}{x^2}$;

4)• $\int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 5) $\int\limits_{(-1,-2)}^{(1,0)} (2x-y)dx+(3y-x)dy$;

6) $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} x\left(1+6y^2\right)dx+y\left(1+6x^2\right)dy$;

7) $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} \left(x^4+4xy^3\right)dx+\left(6x^2y^2-5y^4\right)dy$;

8) $\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$.

4. Визначити, чи є даний вираз повним диференціалом деякої функції двох змінних, якщо так, то знайти цю функцію:

1) $\left(x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(x^2-2xy-y^2\right)dy$;

2) $\left(x^2-2xy^2+3\right)dx+\left(y^2-2x^2y+3\right)dy$;

3) $\frac{y}{x^2}dx+\frac{dy}{x}$; 4)• $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy$;

5) $\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}-\frac{x}{x^2+y^2}\right)dx+2xydy$;

6) $(y+\ln(x+1))dx+\left(x+1-e^y\right)dy$;

7) $\left(e^{x+y}+\cos(x-y)\right)dx+\left(e^{x+y}-\cos(x-y)+2\right)dy$;

8) $(\arcsin x-x\ln y)dx-\left(\arcsin y+\frac{x^2}{2y}\right)dy$;

9) $(\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}y)\,dx+(x\operatorname{sh}y+1)\,dy$;

10) $\varphi(x)dx+\psi(y)dy$, φ і ψ — неперервні функції.

5. Оцінити модуль інтеграла $I_R=\int\limits_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\,dx-x\,dy}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}$ і показати, що $\lim\limits_{R\to+\infty}I_R=0$.

6. Знайти площу фігури, обмеженої даними кривими:

1) $y=x^2$, $x=y^2$, $8xy=1$ (фігура примикає до початку координат);

2) контуром чотирикутника з вершинами $A(6, 1)$, $B(4, 5)$, $C(1, 6)$, $D(-1, 1)$;

3) $x=a\cos t$, $y=b\sin t$; 4) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$;

5) $x=2\cos t-\cos 2t$, $y=2\sin t-\sin 2t$, $t\in[0; 2\pi]$;

6)• $x^3+y^3-3axy=0$, $a>0$ (*петля декартового листа*);

7) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$ (*лемніската*);

8) $(x+y)^5=x^2y^2$; 9) $(x+y)^3=xy$;

10) $x=a(2\cos t+\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$, $t\in[0; 2\pi]$.

7. Знайти роботу сили $\vec F(x,y)$ з переміщення одиничної маси вздовж даної кривої Γ:

1) $\vec F(x,y)=2xy\vec i+x^2\vec j$, Γ — крива, що сполучає точки $(1, 1)$ та $(2, 5)$;

2) $\vec F(x,y)=(x+y)\vec i-x\vec j$, Γ — коло $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $t\in[0; 2\pi]$;

3) $\vec F(x,y)=y\vec i-x\vec j$, Γ — верхня половина еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ від точки $A(a, 0)$ до точки $B(-a, 0)$;

4) $\vec{F}(x, y) = xy\vec{i} + (x+y)\vec{j}$, Г — крива від точки $(0, 0)$ до точки $(1, 1)$: а) пряма $y = x$; б) парабола $y = x^2$;

5) $\vec{F}(x, y) = (x-y)\vec{i} + (2x+y)\vec{j}$, Г — контур трикутника з вершинами $A(1, 1)$, $B(3, 3)$, $C(3, -1)$;

6) $\vec{F}(x, y) = (x-y)\vec{i} + x\vec{j}$, Г — контур квадрата, обмеженого прямими $x = \pm a$, $y = \pm a$.

8.* Точка масою m переміщується в силовому полі по дузі AB кривої $f(x, y) = 0$. Знайти роботу поля, якщо в кожній його точці (x, y) сила, що діє на одиницю маси, спрямована до початку координат і за модулем дорівнює відстані точки від початку координат.

9.* Визначити, яка кількість рідини Q протікає при усталеному русі за одиницю часу через замкнений контур Г, розміщений у площині Oxy, якщо швидкість руху рідини дорівнює $\vec{q}$.

Зразки розв'язування задач

1. 10) Обчислимо даний інтеграл, наприклад вздовж кола $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$. Матимемо $dx = -\sin t\, dt$, $dy = \cos t\, dt$, тоді

$$\int_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 2\pi \neq 0.$$

Отже, розглядуване твердження неправильне.

2. 8) Застосуємо адитивну властивість криволінійного інтеграла. Обчислимо заданий інтеграл по кожній з кривих OA, AB та BO (рис. 6):

$$\int_{OA} xydx - y^2dy = \int_0^2 \left(x^3 - 2x^5\right)dx = -\frac{52}{3},$$

$$\int_{AB} xydx - y^2dy = \int_2^0 4xdx = -8, \quad \int_{BO} xydx - y^2dy = -\int_4^0 y^2dy = \frac{64}{3}.$$

Додавши одержані результати, остаточно дістанемо

$$\int_\Gamma xydx - y^2dy = -4.$$

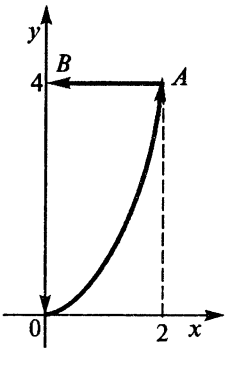


Рис. 6

3. 4) У цьому випадку

$$P(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad Q(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

тоді

$$P'_y = -\frac{1}{2}x\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y = -\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$Q'_x = -\frac{1}{2}y\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Отже, $P'_y = Q'_x$ в області $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, однак ця область не є однозв'язною. Тому заданий інтеграл не залежатиме від форми дуги $AB \subset D_1$ для довільної однозв'язної області $D_1 \subset \subset D$.

Нехай Γ — коло $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in [0; 2\pi]$, тоді

$$\int_\Gamma \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi} \frac{r^2(-\cos t \sin t + \sin t \cos t)}{r} dt = \int_0^{2\pi} 0 dt = 0.$$

Візьмемо тепер довільний кусково-гладкий контур $L \subset D$. Якщо точка (0, 0) лежить у зовнішній частині контуру L, то існує однозв'язна область $D_1 \subset D$ така, що $L \subset D_1$, і за доведеним вище

$$\int_L \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Якщо ж точка (0, 0) лежить у внутрішній частині контуру L, то можна вказати коло Γ_r, яке також лежатиме у внутрішній частині контуру L і, скориставшись адитивною властивістю криволінійного інтеграла, можна показати, що $\int_L = \int_{\Gamma_r}$.

Дійсно, якщо $L_1 = \cup AMBB_1M_1A_1A$, $L_2 = \cup AA_1C_1B_1BCA$ (рис. 7), то $\int_{L_1} = 0$ і $\int_{L_2} = 0$, оскільки точка (0, 0) лежить у зовнішній частині цих контурів. Тому

$$0 = \int_{L_1} + \int_{L_2} = \int_{AMB} + \int_{BB_1} + \int_{B_1M_1A_1} + \int_{A_1A} + \int_{AA_1} + \int_{A_1C_1B_1} +$$

$$+ \int_{B_1B} + \int_{BCA} = \left(\int_{AMB} + \int_{BCA} \right) + \left(\int_{BB_1} + \int_{B_1B} \right) + \left(\int_{B_1M_1A_1} + \int_{A_1C_1B_1} \right) + \left(\int_{A_1A} + \int_{AA_1} \right) = \int_L - \int_{\Gamma_r},$$

тобто

$$\int_L - \int_{\Gamma_r} = 0.$$

Таким чином, $\int_\Gamma \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ для довільного кусково-гладкого контуру $\Gamma \subset D$, тому заданий інтеграл не залежатиме від форми дуги $AB \subset D$, якщо вона, сполучаючи точки (1, 0) і (6, 8), не проходитиме через точку (0, 0).

Для обчислення цього інтеграла досить скористатися тим, що $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, тоді

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{6^2+8^2} - \sqrt{1^2+0^2} = 9.$$

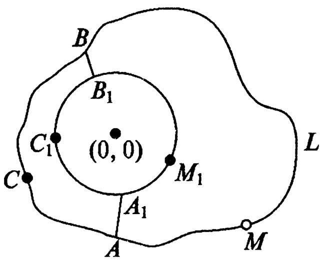


Рис. 7

4. 4) У цьому випадку $P(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $Q(x,y) = = \frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}$, $P'_y = -\frac{1}{y^2} \equiv Q'_x$, $y \neq 0$. Оскільки функції P, Q,

P'_y і Q'_x неперервні в будь-якій області $D \subset \mathbf{R}^2$, яка не містить координатних осей, то в цій області існує диференційовна функція u, для якої заданий вираз є повним диференціалом. Цю функцію можна знайти за формулою

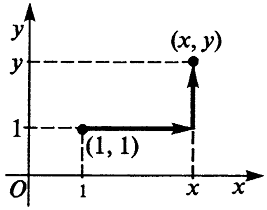


Рис. 8

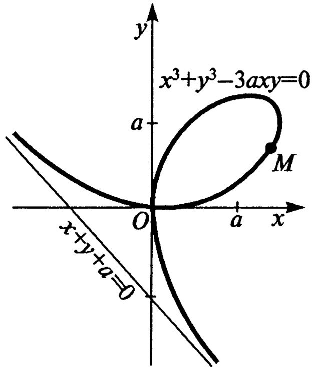


Рис. 9

$$u(x,y)=\int\limits_{(1,1)}^{(x,y)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy+C,$$

де значення криволінійного інтеграла не залежить від форми шляху інтегрування, який сполучає точки $(1, 1)$ та (x, y). Якщо вибрати шлях інтегрування, вказаний на рис. 8, то дістанемо

$$u(x,y)=\int\limits_1^x\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\int\limits_1^y\left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=\ln x+2\ln y+\frac{x}{y}-1+C\,.$$

6. б) Запишемо рівняння заданої кривої у параметричному вигляді. Покладемо $y = xt$, тоді $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$. Геометрично параметр $t=\dfrac{y}{x}$ є кутовим коефіцієнтом полярного радіуса OM (рис. 9). Точка $M(x, y)$ опише всю петлю кривої, якщо t змінюватиметься від 0 до $+\infty$.

Отже, дістаємо

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}xdy-ydx=\frac{9a^2}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{\left(1+t^3\right)^2}=$$

$$=\frac{3a^2}{2}\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\left(1+t^3\right)^{-2}d\left(1+t^3\right)=-\frac{3a^2}{2}\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1+t^3}\Bigg|_0^b=\frac{3}{2}a^2\ \text{(кв. од.)}.$$

§ 17.3. Кратні інтеграли по *n*-вимірному прямокутнику

Множину $\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n:\ a_k\le x_k\le b_k,\ k\in\overline{1,\ n}\}$ називають *n*-вимірним (елементарним) прямокутником $\overline{P}$ у просторі $\mathbf{R}^n$.

Зокрема, у просторі $\mathbf{R}^1$: $\overline{P}=\{x : a\le x\le b\}$ — відрізок $[a;\ b]$; у просторі $\mathbf{R}^2$: $\overline{P}=\{(x,y):\ a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ — прямокутник, сторони якого паралельні координатним осям; у просторі $\mathbf{R}^3$: $\overline{P}=\{(x,y,z):\ a_1\le x\le b_1,\ a_2\le y\le b_2,\ a_3\le z\le b_3\}$ — прямокутний паралелепіпед, ребра якого паралельні координатним осям.

Якщо $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ і $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$, то за аналогією з одновимірним випадком n-вимірний прямокутник $\overline{P}$ позначають також через $[a;b]$ або $\overline{P}=\left\{x\in\mathbf{R}^n:\ a\le x\le b\right\}$. Через P позначають вираз $\overline{P}\setminus\partial\overline{P}$.

Мірою n-вимірного прямокутника $\overline{P}=[a;b]\subset\mathbf{R}^n$, $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$, називають число $\operatorname{mes}\overline{P}=\prod\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)$. Множину $\{\overline{P}_k\}_{k=1}^{m}$, для якої $\overline{P}=\bigcup\limits_{k=1}^{m}\overline{P}_k$ і $P_k\cap P_i=\varnothing$, $k\ne i$, називають *(T)-розбиттям* n-вимірного прямокутника $\overline{P}$ на n-вимірні прямокутники $\overline{P}_k$, при цьому $\operatorname{mes}\overline{P}=\sum\limits_{k=1}^{m}\operatorname{mes}\overline{P}_k$.

Нехай $\lambda(T)=\max\limits_{1\le k\le n}d(\overline{P}_k)$, де $d(\overline{P}_k)$ — діаметр прямокутника P_k.

Число $S(T)=\sum\limits_{k=1}^{m}f(M_k)\operatorname{mes}\overline{P}_k$ називають *інтегральною сумою* функції f, $x\in\overline{P}$, що відповідає заданому (T)-розбиттю прямокутника $\overline{P}$ на прямокутники $\overline{P}_k$, $k\in\overline{1,\ m}$, та заданому вибору точок $M_k\in\overline{P}_k$, $k\in\overline{1,\ m}$.

Границю інтегральної суми при $\lambda(T)\to 0$ вводять так само, як і для функції однієї змінної:

$$I=\lim_{\lambda(T)\to 0}S(T)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ \lambda(T)<\delta(\varepsilon)\Rightarrow|S(T)-I|<\varepsilon.$$

Інтегралом Рімана функції f по n-вимірному прямокутнику $\overline{P}\subset\mathbf{R}^n$ називають число

$$\int\limits_{\overline{P}}f(x)dx:=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{m}f(M_k)\operatorname{mes}\overline{P}_k=:\iint\limits_{\overline{P}}\ldots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n.$$

Зокрема, при $n=2$ дістанемо подвійний інтеграл:

$$\iint\limits_{\overline{P}}f(x,y)dxdy:=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{m}f(x_k,y_k)\Delta S_k,$$

а при $n=3$ — потрійний інтеграл:

$$\iiint\limits_{\overline{P}}f(x,y,z)dxdydz:=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{m}f(x_k,y_k,z_k)\Delta v_k.$$

Інтеграли від функції багатьох змінних по n-вимірному прямокутнику $\overline{P} \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, називають *кратними інтегралами* (*подвійний*, *потрійний*, тощо відповідно до розмірності $\mathbf{R}^n$), саму ж функцію називають *інтегровною* (за Ріманом) на $\overline{P}$.

Теорія кратних інтегралів аналогічна теорії визначених інтегралів.

Якщо функція f інтегровна на n-вимірному прямокутнику $\overline{P}$ і $\operatorname{mes}\overline{P} > 0$, то вона обмежена на цьому прямокутнику (необхідна умова інтегровності функції).

Нижньою та *верхньою сумами Дарбу* функції f, обмеженої на $\overline{P}$, що відповідають (T)-розбиттю $\overline{P}$ на $\overline{P}_k$, $k = \overline{1, m}$, називають відповідно суми

$$\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^{m} \inf_{\overline{P}_k} f(x) \operatorname{mes}\overline{P}_k, \quad \overline{S}(T) = \sum_{k=1}^{m} \sup_{\overline{P}_k} f(x) \operatorname{mes}\overline{P}_k.$$

Властивості сум Дарбу для функцій багатьох змінних аналогічні властивостям цих сум для функцій однієї змінної. З ними, зокрема, пов'язаний *критерій інтегровності функції*: *функція* f *інтегровна на n-вимірному прямокутнику* $\overline{P}$, *де* $\operatorname{mes}\overline{P} > 0$ *тоді і тільки тоді, коли вона обмежена на цьому прямокутнику і*

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \left(\overline{S}(T) - \underline{S}(T)\right) = 0, \ \textit{або} \quad \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{m} \omega_k(f) \operatorname{mes}\overline{P}_k = 0,$$

де $\omega_k(f) = \sup\limits_{\overline{P}_k} f(x) - \inf\limits_{\overline{P}_k} f(x)$ — коливання функції f на $\overline{P}_k$.

Якщо функція f неперервна на n-вимірному прямокутнику $\overline{P}$, то вона інтегровна на ньому, тому кратний інтеграл можна обчислити за допомогою повторних інтегралів:

$$\iint\limits_{\overline{P}} \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\ldots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n \right) \ldots \right) dx_2 \right) dx_1,$$

причому порядок обчислення визначених інтегралів вздовж відрізків $[a_k; b_k]$, $k \in \overline{1, n}$, може бути довільним.

Зокрема,

$$\iint\limits_{\overline{P}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy,$$

$$\iiint\limits_{\overline{P}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{a_1}^{b_1}\left(\int\limits_{a_2}^{b_2}\left(\int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx =$$

$$= \int\limits_{a_2}^{b_2}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}\left(\int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right)dx\right)dy \quad \text{і т.д.}$$

Дужки у повторних інтегралах можна опускати.

Властивості кратних інтегралів по n-вимірному прямокутнику такі самі, як і для визначених інтегралів.

Вправи

1. Визначити, чи правильні такі твердження:

1) кожний відрізок у просторі $\mathbf{R}^1$ є n-вимірним прямокутником у цьому просторі;

2) якщо $\overline{P}$ — n-вимірний прямокутник у просторі $\mathbf{R}^2$, то він є замкненим прямокутником у цьому просторі;

3) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

4) якщо $\overline{P}_k$, $k \in \overline{1,\ n}$, — n-вимірні прямокутники, то $\overline{P} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{P}_k$ — n-вимірний прямокутник;

5) переріз та різниця n-вимірних прямокутників є n-вимірні прямокутники;

6) якщо $\overline{P}$ та $\overline{P}_k$, $k \in \overline{1,\ n}$, — n-вимірні прямокутники і $\overline{P} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{P}_k$, то $\{P_k\}_{k=1}^{n}$ — (T)-розбиття прямокутника $\overline{P}$ на $\overline{P}_k$;

7) якщо функція f інтегровна на n-вимірному прямокутнику $\overline{P}$, то $\int\limits_{\overline{P}} f(x)dx \approx \sum\limits_{k=1}^{n} f(M_k)\operatorname{mes} P_k$ і абсолютну похибку цієї наближеної рівності можна зробити як завгодно малою, якщо вибрати (T)-розбиття $\overline{P}$ на $\overline{P}_k$, $k \in \overline{1,\ n}$, досить малим;

8) існує функція f, для якої її інтегральна сума не залежить від (T)-розбиття $\overline{P}$ на $\overline{P}_k$ та від вибору точок $M_k \in \overline{P}_k$, $k \in \overline{1,\ n}$;

9) якщо функція f інтегровна на $\overline{P}$, то вона обмежена на $\overline{P}$;

10) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

11) функція f інтегровна на $\overline{P}$ тоді і тільки тоді, коли $|f|$ інтегровна на $\overline{P}$;

12) якщо функції f і φ неперервні на $\overline{P}$ і $f(x) > \varphi(x)$, $x \in \overline{P}$, то

$$\int\limits_{\overline{P}} f(x)dx > \int\limits_{\overline{P}} \varphi(x)dx;$$

13) якщо функція f інтегровна на $\overline{P}$ і $(T)=\{P_k\}_{k=1}^{n}$ — розбиття $\overline{P}$ на $\overline{P}_k$, $k\in\overline{1,\ n}$, то функція f інтегровна на $\overline{P}_k$ $\forall k$ і

$$\int\limits_{\overline{P}} f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\overline{P}_k} f(x)dx.$$

2. Довести, що функція

$$f(x,y)=\begin{cases}1, \text{ якщо } x\in Q \text{ або } y\in Q,\\ 0, \text{ якщо } x\notin Q \text{ або } y\notin Q,\end{cases}$$

неінтегровна за Ріманом на довільному n-вимірному прямокутнику $\overline{P}$, $\text{mes}P>0$.

3. Скласти інтегральну суму для подвійного інтеграла при заданих умовах:

1) $\iint\limits_{\overline{P}} xy\,dxdy$, $\overline{P}=\{(x,y):\ 0\le x,y\le 1\}$.

Область інтегрування розбити на квадрати $\overline{P}_k$, $k\in\overline{1,\ n-1}$, прямими $x=\frac{i}{n}$, $y=\frac{j}{n}$, $i,j\in\overline{1,\ n-1}$, і за точки $M_k\in\overline{P}_k$, $k\in\overline{1,\ n-1}$, взяти праві вершини цих квадратів;

2) $\iint\limits_{\overline{P}} x^2y^3dxdy$, $\overline{P}=\{(x,y):\ 0\le x,y\le 1\}$. Прямокутник $\overline{P}$ розбити прямими $x=\frac{1}{2}$ і $y=\frac{1}{2}$ на чотири прямокутники $\overline{P}_k$, $k\in\overline{1,\ 4}$, за точки $M_k\in\overline{P}_k$, $k\in\overline{1,\ 4}$, вибрати центри цих прямокутників.

4. Скласти суми Дарбу та знайти їхні границі для даної функції f та вказаного розбиття прямокутника $\overline{P}$:

1) $f(x,y)=xy$, $\overline{P}=\{(x,y):\ 1\le x\le 2,\ 1\le y\le 3\}$, (T)-розбиття утворено прямими $x=1+\frac{i}{n}$, $y=1+\frac{2j}{n}$, $i,j\in\overline{1,\ n-1}$;

2) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}, \text{ якщо } x=\frac{m_x}{n_x},\ y=\frac{m_y}{n_y} \text{ – нескоротні дроби},\\ 0, \text{ якщо } x\notin Q \text{ або } y\notin Q,\end{cases}$

$\overline{P}=\{(x,y):\ 0\le x,y\le 1\}$, (T)-розбиття довільне;

3) $f(x,y)=x^2+y^2$, $\overline{P}=\{(x,y):\ 1\le x\le 2,\ 1\le y\le 3\}$, (T)-розбиття утворено прямими $x=1+\frac{i}{n}$, $y=1+\frac{2j}{n}$, $i,j\in\overline{1,\ n-1}$;

4) $f(x,y)=[x+y]$ (ціла частина $x+y$), $\overline{P}=\{(x,y):\ 0\le x,y\le 2\}$, (T)-розбиття довільне;

5)• $f(x,y)=\begin{cases} 1, \text{ якщо } x=\dfrac{m_x}{n_x},\ y=\dfrac{m_y}{n_y} \text{ – нескоротні дроби і } n_x=n_y, \\ 0 \text{ в інших точках } (x,y), \end{cases}$

$\overline{P}=\{(x,y):\ 0\le x,y\le 1\}$, ($T$)-розбиття довільне.

5. Нехай функція f інтегровна на прямокутнику $\overline{P}=[(a;b);(c;d)]=$ $=\{(x,y):\ a\le x\le y,\ c\le y\le d\}$ і $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=f(x,y)\ \forall(x,y)\in\overline{P}.$

Довести, що

$$\iint\limits_{\overline{P}} f(x,y)dxdy=\Phi(b,d)-\Phi(b,c)-\Phi(a,d)+\Phi(a,c)$$

(формула Ньютона — Лейбніца для подвійного інтеграла).

6. Якщо функція f інтегровна на $[a;\,b]\subset\mathbf{R}^1$, а функція g інтегровна на $[c;\,d]\subset\mathbf{R}^1$, то функція fg інтегровна на прямокутнику $\overline{P}=[(a;b);\ (c;d)]$ і

$$\iint\limits_{\overline{P}} f(x)g(y)dxdy=\int\limits_a^b f(x)dx\int\limits_c^d g(y)dy.$$

Довести це.

7. Описати область інтегрування для даних повторних інтегралів та обчислити їх:

1) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2\left(x^2+y\right)dy$; 2) $\int\limits_1^3 dy\int\limits_2^5\dfrac{dx}{(x+2y)^2}$;

3) $\int\limits_1^2 dx\int\limits_{-1}^1\left(3x^2+xy^3-5y\right)dy$; 4) $\int\limits_1^2 dy\int\limits_3^4\dfrac{dx}{(x+y)^2}$;

5) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^a r^2\sin^2\varphi\, dr$; 6) $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^b xy\, dy$;

7)• $\int\limits_0^1 dx\int\limits_2^5 dy\int\limits_2^4\dfrac{dz}{1-x-y}$; 8) $\int\limits_0^c dz\int\limits_0^b dy\int\limits_0^a (x+y+z)dx$.

8. Якщо додатна функція f неперервна на відрізку $[a;\,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx\int\limits_a^b\frac{dx}{f(x)}\ge(b-a)^2.$$

Довести це.

9. Обчислити $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_m^n f(x,y,z)dz$, якщо функція $f(x,y,z) = F'''_{xyz}(x,y,z)$ неперервна на $\overline{P} = \{(x,y,z): a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ m \le z \le n\}$.

10. Якщо функція f неперервна на прямокутнику $\overline{P}$ і $\int\limits_{\overline{P}^*} f(x)dx = 0$ для довільного прямокутника $\overline{P}^* \subset \overline{P}$, то $f \equiv 0$ на $\overline{P}$. Довести це.

11. Обчислити дані кратні інтеграли:

1) $\iint\limits_{\overline{P}} \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, $\overline{P} = \{(x,y):\ 3 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 2\}$;

2) $\iint\limits_{\overline{P}} \left(x^2 + xy - y^2\right)dxdy$, $\overline{P} = \{(x,y):\ 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$;

3) $\iint\limits_{\overline{P}} \frac{dxdy}{(x+y+1)^3}$, $\overline{P} = \{(x,y):\ 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$;

4) $\iint\limits_{\overline{P}} x\sin(x+y)dxdy$, $\overline{P} = \left\{(x,y):\ 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$;

5) $\iiint\limits_{\overline{P}} (x-2y)dxdydz$, $\overline{P} = \{(x,y,z):\ 1 \le x,y,z \le 2\}$;

6)• $\iiint\limits_{\overline{P}} e^{x+y+z}dxdydz$, $\overline{P} = \{(x,y,z): 0 \le x \le 1,\ 2 \le y \le 3,\ 0 \le z \le 2\}$;

7) $\iiint\limits_{\overline{P}} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dxdydz$, $\overline{P} = \{(x,y,z): 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c\}$;

8) $\iint\limits_{\overline{P}}\ldots\int \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2\right)dx_1 dx_2 \ldots dx_m$, $\overline{P} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m):\ 0 \le x_k \le 1,$ $k \in \overline{1,\ m}\}$.

Зразки розв'язування задач

4. 5) Якщо дроби $\frac{m_x}{n_x}$ і $\frac{m_y}{n_y}$ нескоротні, то дроби

$$\frac{m_x^*}{n_x^*} = \frac{m_x l n_x n_y^2 - 1}{n_x l n_x n_y^2} \quad \text{та} \quad \frac{m_y^*}{n_y^*} = \frac{m_y l n_x^2 n_y - 1}{n_y l n_x^2 n_y},$$

де l і n_x, n_y — взаємно прості, також нескоротні. При цьому $n_x^* = n_y^*$. Якщо l досить велике, то дроби $\frac{m_x^*}{n_x^*}$ та $\frac{m_y^*}{n_y^*}$ як завгодно близькі до $\frac{m_x}{n_x}$ та $\frac{m_y}{n_y}$ відповідно. Звідси випливає, що у довільному околі точки $\left(x_0, y_0\right)$, де $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, містяться точки виду $\left(\dfrac{m_x}{n_x}, \dfrac{m_y}{n_y}\right)$. Тому для довільного розбиття T прямокутника $\overline{P}$ на $\overline{P_k}$, для якого $\operatorname{mes} P_k > 0$, у кожному прямокутнику $\overline{P_k}$, $k \in \overline{1, n}$, знайдуться точки M_k^* виду $\left(\dfrac{m_x}{n_x}, \dfrac{m_y}{n_y}\right)$ і точки M_k^{**} з ірраціональними координатами. Тоді

$$\overline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} f\left(M_k^*\right) \operatorname{mes} P_k = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{mes} P_k = \operatorname{mes} P = 1,$$

$$\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} f\left(M_k^{**}\right) \operatorname{mes} P_k = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \operatorname{mes} P_k = 0$$

і

$$\overline{S}(T) \to 1 \ \left(\lambda(T) \to 0\right), \text{ а } \ \underline{S}(T) \to 0 \ \left(\lambda(T) \to 0\right).$$

Отже, задана функція не інтегровна на прямокутнику $\overline{P}$.

Разом з тим, якщо $y \in [0; 1]$ фіксоване, то $f(x, y) = 0$, коли $y \notin Q$, а якщо $y = \dfrac{m_y}{n_y} \in Q$, то $f(x, y) \neq 0$ тільки тоді, коли $x = \dfrac{m_x}{n_y}$, де $0 \le m_x \le n_y$, тобто $f(x, y) \neq 0$ лише для скінченної кількості точок x. Отже, $\int\limits_0^1 f(x, y)\,dx = 0 \ \ \forall y \in [0; 1]$, звідки

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f(x, y)\,dx = 0.$$

Так само можна показати, що $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x, y)\,dy = 0$.

Таким чином, існування та рівність між собою повторних інтегралів ще не гарантують існування подвійного інтеграла.

7. 7) Областю інтегрування є прямокутний паралелепіпед, обмежений площинами $x = 0$, $x = 1$, $y = 2$, $y = 5$, $z = 2$, $z = 4$.

Інтегруючи спочатку по змінній z, потім по y і по x, дістаємо

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_2^5 dy \int\limits_2^4 \frac{dz}{1 - x - y} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_2^5 \frac{dy}{1 - x - y} \cdot z \Bigg|_{z=2}^{z=4} =$$

$$= -2 \int\limits_0^1 \ln\left|1 - x - y\right| \Bigg|_{y=2}^{y=5} dx = -2 \int\limits_0^1 \left(\ln(x + 4) - \ln(x + 1)\right) dx.$$

Інтегруючи частинами, остаточно матимемо

$$I=-2\left(x\ln(x+4)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{xdx}{x+4}-x\ln(x+1)\Big|_0^1+\int_0^1\frac{xdx}{x+1}\right)=$$

$$=-2(5\ln5-4\ln4-1-\ln4+1)=10\ln\frac{4}{5}.$$

11. б) Зведемо заданий потрійний інтеграл до повторного. Оскільки підінтегральна функція неперервна у паралелепіпеді $\overline{P}$, то порядок інтегрування по змінних x, y і z може бути довільним.

Дістаємо

$$\iiint\limits_{\overline{P}} e^{x+y+z}dxdydz=\int_0^1 e^x dx\int_2^3 e^y dy\int_0^2 e^z dz=e^2(e-1)^3(e+1).$$

§ 17.4. Міра Жордана у просторі $\mathbf{R}^n$. Кратні інтеграли по вимірній множині

Нехай E — обмежена множина простору $\mathbf{R}^n$, а $\overline{P}$ — n-вимірний (елементарний) прямокутник, що містить цю множину. Розглянемо (T)-розбиття прямокутника $\overline{P}$ на n-вимірні прямокутники $\overline{P}_k$, $k\in\overline{1,\ m}$. Нехай $\underline{S}(T)=\sum\limits_{k=1}^{m}\operatorname{mes}\overline{P}_k$, де $\overline{P}_k\subset E$, а $\overline{S}(T)=\sum\limits_{k=1}^{m}\operatorname{mes}\overline{P}_k$, де $\overline{P}_k\cap E\neq\varnothing$. Якщо ввести до розгляду характеристичну функцію множини E

$$f_E(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x\in E,\\ 0, & \text{якщо } x\notin E,\end{cases}$$

то дістанемо, що $\underline{S}(T)=\sum\limits_{k=1}^{m}\inf\limits_{\overline{P}_k}f_E(x)\operatorname{mes}\overline{P}_k$ — *нижня сума Дарбу*, а $\overline{S}(T)=$ $=\sum\limits_{k=1}^{m}\sup\limits_{\overline{P}_k}f_E(x)\operatorname{mes}\overline{P}_k$ — *верхня сума Дарбу* функції $f_E(x)$.

Множину $E\subset\mathbf{R}^n$ називають *вимірною за Жорданом*, якщо характеристична функція цієї множини інтегровна за Ріманом на n-вимірному прямокутнику $\overline{P}\supset E$. Число $\operatorname{mes}E=\int\limits_{\overline{P}}f_E(x)dx$ називають *мірою Жордана* множини E.

Зокрема, якщо $E\subset\overline{P}\subset\mathbf{R}^2$, то $\operatorname{mes}E=\iint\limits_{\overline{P}}f_E(x,y)dxdy$ і E називають *квадровною множиною*, а якщо $E\subset\overline{P}\subset\mathbf{R}^3$, то $\operatorname{mes}E=\iiint\limits_{\overline{P}}f_E(x,y,z)dx\,dy\,dz$ і E називають *кубовною множиною*.

Основні властивості міри Жордана

1. Якщо множина E вимірна за Жорданом, то $\operatorname{mes} E \geq 0$.

2. Якщо множини E_1 і E_2 вимірні за Жорданом, а $E_1 \subset E_2$, то $\operatorname{mes} E_1 \leq$ $\leq \operatorname{mes} E_2$.

3. Множини $E \subset \overline{P}$ і $CE = \overline{P} \setminus E$ одночасно вимірні або невимірні, при цьому $\operatorname{mes} E + \operatorname{mes} CE = \operatorname{mes} \overline{P}$.

4. Якщо множини E_1 і E_2 вимірні, то вимірними є також і множини $E_1 \bigcup E_2$, $E_1 \bigcap E_2$ і $E_1 \setminus E_2$, при цьому $mE_1 \bigcup E_2 = mE_1 + mE_2$, якщо $E_1 \bigcap E_2 = \varnothing$ і $mE_1 \setminus E_2 = mE_1 - mE_2$, якщо $E_2 \subset E_1$.

5. Якщо E_k, $k \in \overline{1,\ n}$, — вимірні множини, то й $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ — вимірна множина, при цьому $m \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{mes} E_k$, якщо внутрішності множин E_k, $k \in \overline{1,\ n}$, попарно не перетинаються.

6. Множина $E \subset \mathbf{R}^n$ вимірна за Жорданом тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{mes} \partial E =$ $= 0$ (*критерій вимірності множини*).

7. $\operatorname{mes} E = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists P_k\ \forall k \in \overline{1,\ m}$ — n-вимірні прямокутники: $\bigcup\limits_{k=1}^{m} P_k \supset E$ і $\sum\limits_{k=1}^{m} \operatorname{mes} P_k < \varepsilon$ (*критерій множини нульової міри Жордана*).

8. Множина $E \subset \mathbf{R}^2$ квадровна, якщо її межа ∂E складається зі скінченної кількості неперервних дуг, рівняння яких мають вигляд $y = f(x)$, $x \in [a;\ b]$ або $x = \varphi(y)$, $y \in [c;\ d]$ (*достатня умова квадровності множини*).

9. Множина $E \subset \mathbf{R}^3$ кубовна, якщо її межа ∂E складається зі скінченної кількості неперервних поверхонь, рівняння яких мають вигляд $z = f(x,\ y)$ або $x = \varphi(y,\ z)$, або $y = \psi(x,\ z)$ (*достатня умова кубовності множини*).

Нехай функція f визначена на вимірній за Жорданом множині $E \subset \overline{P} \subset \mathbf{R}^n$, де $\overline{P}$ — n-вимірний прямокутник. Тоді якщо $\operatorname{mes} E = 0$, то функцію f вважають *інтегровною за Ріманом на множині* E, а її *інтегралом Рімана* (*кратним інтегралом*) вважають число нуль: $\int\limits_E f(x)dx = 0$.

Якщо ж $\operatorname{mes} E > 0$, то функцію f називають *інтегровною за Ріманом на множині* E за умови, що функція

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), \text{ якщо } x \in E, \\ 0, \text{ якщо } x \notin E, \end{cases}$$

інтегровна на n-вимірному прямокутнику $\overline{P}$, а число

$$\int\limits_E f(x)dx = \iint\limits_E \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 dx_2 \ldots dx_n := \int\limits_{\overline{P}} f_1(x)dx$$

називають *інтегралом Рімана* (*кратним інтегралом*) функції f по множині E.

Зокрема, якщо E — квадровна множина, то дістаємо $\iint\limits_E f(x,y)\,dxdy$ — подвійний інтеграл функції $f(x, y)$ по множині $E \subset \mathbf{R}^2$, а якщо E — кубовна множина, то маємо $\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dxdydz$ — потрійний інтеграл функції f по множині $E \subset \mathbf{R}^3$.

Якщо функція f неперервна на замкненій вимірній множині $E \subset \mathbf{R}^n$, то вона інтегровна на цій множині (достатня умова інтегровності функції).

Властивості інтеграла по вимірній множині подібні до властивостей інтеграла по n-вимірному прямокутнику.

Обчислення кратних інтегралів. Нехай задано узагальнене циліндричне тіло простору $\mathbf{R}^m$: $E = \{u = (x, y) : x \in E_1,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$, де E_1 — замкнена вимірна множина простору $\mathbf{R}^{m-1}$, а α і β — неперервні функції на множині E_1. Якщо функція f неперервна на узагальненому циліндричному тілі E, то

$$\int\limits_E f(u)\,du = \int\limits_{E_1}\left(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Якщо $E = \{u = (x, y) \in \mathbf{R}^n : x \in [a; b] \subset \mathbf{R}^1, y \in E_1(x) \subset \mathbf{R}^{n-1}\}$, $E_1(x)$ — замкнена вимірна множина $\forall x \in [a; b]$, то

$$\int\limits_E f(u)\,du = \int\limits_a^b\left(\int\limits_{E_1(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Звідси, як окремі випадки, дістають формули для обчислення подвійних і потрійних інтегралів.

1. Якщо $E = \{(x, y) : x \in [a; b] = E_1,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\} \subset \mathbf{R}^2$, то

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b\left(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\right)dx = \int\limits_a^b dx\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy.$$

2. Якщо $E = \{(x, y) : y \in [c; d] = E_1,\ \alpha(y) \le x \le \beta(y)\} \subset \mathbf{R}^2$, то $\iint\limits_E f(x,y)\,dxdy =$

$$= \int\limits_c^d\left(\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\right)dy = \int\limits_c^d dy\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx.$$

3. Якщо $E = \{(x, y, z) : (x, y) \in E_1 \subset \mathbf{R}^2,\ \alpha(x, y) \le z \le \beta(x, y)\}$, то

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{E_1}\left(\int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dxdy.$$

4. Якщо $E = \{(x, y, z): x \in [a; b], (y, z) \in E_1(x) \subset \mathbf{R}^2\}$, де E_1 — замкнена квадровна множина, то

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b \left(\iint\limits_{E_1(x)} f(x,y,z)\,dydz \right) dx = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{E_1(x)} f(x,y,z)\,dydz.$$

Якщо при цьому $E_1 = \{(x, y): a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ або $E_1 = \{(x, y): c \le \le y \le d,\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$, де φ і ψ — неперервні функції на відповідних відрізках, то мають місце формули, які зводять обчислення потрійного інтеграла до повторного:

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \left(\int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx \right) dy =$$

$$= \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} dx \int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Формула Гріна. Нехай функції P, Q, P'_y і Q'_x неперервні у замкненій однозв'язній області $\overline{D}$, яка обмежена простим кусково-гладким контуром $\Gamma = \partial\overline{D}$, тоді має місце *формула Гріна*

$$\int\limits_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{\overline{D}} \left(Q'_x(x,y) - P'_y(x,y) \right) dxdy.$$

Вправи

1. Визначити, чи правильні дані твердження:

1) міра множини E залежить від n-вимірного прямокутника $\overline{P} \supset E$;

2) Якщо $E \subset \mathbf{R}^n$, то існує $\operatorname{mes} E$ і $\operatorname{mes} E \ge 0$;

3) множина $E = \{(x, y): x \in \mathbf{Q}$ або $y \in \mathbf{Q}\} \cap \overline{P}$ квадровна для довільного прямокутника $\overline{P} \subset \mathbf{R}^2$;

4) множина E із завдання 3) кубовна;

5) якщо множина $E_1 \cup E_2$ вимірна за Жорданом, то множини E_1 і E_2 також вимірні за Жорданом;

6)• якщо множини E_k, $k = 1, 2, \ldots$, вимірні за Жорданом, то $\operatorname{mes}\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{mes} E_k$;

7) якщо множини E_1 і E_2 вимірні за Жорданом, то $\operatorname{mes} E_1 \bigcup E_2 = \operatorname{mes} E_1 + \operatorname{mes} E_2 - \operatorname{mes} E_1 \bigcap E_2$;

8) якщо множина E вимірна за Жорданом, то $\int\limits_E dx = \operatorname{mes} E$;

9) якщо функція f інтегровна на множині E і $f(x) > C$ на цій множині, то $\int\limits_E f(x)dx > C \cdot \operatorname{mes} E$;

10) кожна функція f, визначена на множині E, міра Жордана якої дорівнює нулю, інтегровна на множині E і $\int\limits_E f(x)dx = 0$.

2. Довести, що:

1) коли $E_1 = \{(x, y) : x \in [a; b],\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$ і функції f_1 та f_2 неперервні на відрізку $[a; b]$, то

$$\operatorname{mes} E_1 = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx;$$

2) коли $E_2 = \{(x, y) : y \in [c; d],\ \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)\}$ і функції φ_1 та φ_2 неперервні на відрізку $[c; d]$, то

$$\operatorname{mes} E_2 = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))dy.$$

3. Довести, що:

1) коли $E_3 = \{(x, y, z) : (x, y) \in E_1,\ \psi_1(x, y) \le z \le \psi_2(x, y)\}$, $E_1 = \{(x, y) : x \in [a; b],\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$ і функції ψ_1 та ψ_2 неперервні на множині E_1, то

$$\operatorname{mes} E_3 = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} (\psi_2(x, y) - \psi_1(x, y))dy;$$

2) коли $E_4 = \{(x, y, z) : (x, y) \in E_2,\ \psi_1(x, y) \le z \le \psi_2(x, y)\}$, $E_2 = \{(x, y) : y \in [c; d],\ \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)\}$ і функції ψ_1 та ψ_2 неперервні на множині E_2, то

$$\operatorname{mes} E_4 = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} (\psi_2(x, y) - \psi_1(x, y))dx.$$

4•. Якщо функція f неперервна на замкненій вимірній та зв'язній множині E, то $\exists x^* \in E: \int\limits_E f(x)dx = f(x^*)\operatorname{mes} E$ (*теорема про середнє значення*). Довести це.

5. Чи правильні такі рівності:

1) $\int\limits_0^a dx \int\limits_1^x dy \int\limits_0^y f(z)dz = \frac{1}{2}\int\limits_0^a (a-z)f(z)dz$;

2) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x+y} f(z)\,dz = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (2-z^2)f(z)\,dz + \frac{1}{2}\int\limits_1^2 (2-z)^2 f(z)\,dz$?

6. Нехай функції f і φ неперервні у замкненій квадровній області $\overline{D} \subset \mathbf{R}^n$, причому $f(x) \ge \varphi(x)$, $x \in \overline{D}$, і $f(x_0) > \varphi(x_0)$ у деякій точці $x_0 \in \overline{D}$. Довести, що

$$\int\limits_{\overline{D}} f(x)dx > \int\limits_{\overline{D}} \varphi(x)dx.$$

7. Оцінити дані кратні інтеграли:

1) $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} (4+\cos xy)dxdy$;

2) $\iint\limits_{|x|+|y|\le 10} \frac{dxdy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$;

3) $\iint\limits_{x^2+y^2-2x\le 0} (x^2-y^2)dxdy$;

4)• $\iint\limits_{x^2+y^2\le 9} \sin\frac{x^2-y+1}{x^2+y^2+1}\,dx\,dy$;

5) $\iint\limits_{|x|+|y|\le 3} \frac{dxdy}{9+\sin^2 x+\sin^2(x+y)}$;

6) $\iiint\limits_{\substack{1\le x\le 3\\ 1\le y\le 3\\ 1\le z\le 3}} (x+y+z)dxdydz$;

7) $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 3} (x+y-z+10)dxdydz$.

8. Знайти область інтегрування та обчислити дані повторні інтеграли:

1) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x^2} (2x-y)dy$;

2) $\int\limits_0^a dy \int\limits_{y-a}^{2y} xydx$;

3) $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{x^3}^{x} (x-y)dy$;

4) $\int\limits_0^{2\pi} dy \int\limits_0^{2+\sin y} \frac{x}{2}dx$;

5)• $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy$;

6) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^3dr$;

7) $\int\limits_{-2}^{2} ydy \int\limits_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}} xdx$;

8) $\int\limits_0^2 xdx \int\limits_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} ydy + \int\limits_0^8 xdx \int\limits_{x-4}^{\sqrt{2x}} ydy$;

9) $\int\limits_0^{\frac{1}{\pi}} y^2dy\int\limits_0^{\pi} \cos xydx + \int\limits_{\frac{1}{\pi}}^{2} y^2dy\int\limits_0^{\frac{1}{y}} \cos xydx$;

10) $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{\frac{2}{3}y} (x+y)dx + \int\limits_3^4 dy \int\limits_{1-\sqrt{4-y}}^{1+\sqrt{4-y}} (x+y)dx$.

9. Змінити порядок інтегрування у даних повторних інтегралах:

1) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,y)dy$;

2) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy$;

3) $\int\limits_{-1}^5 dy \int\limits_{y+1}^{\sqrt{6y+6}} f(x,y)dx$;

4) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x}{2}+1}^{7-x} f(x,y)dy$;

5) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x,y)dx$;

6) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{0} f(x,y)dy$;

7) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$;

8)• $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$;

9) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{4-2y^2}^{4-y^2} f(x,y)dx$;

10) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{e^{-x}}^{e^x} f(x,y)dy$;

11) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{\ln y}^{y} f(x,y)dx$;

12) $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy$;

13) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x,y)dx$;

14) $\int\limits_3^7 dy\int\limits_{\frac{9}{y}}^{3} f(x,y)dx + \int\limits_7^9 dy \int\limits_{\frac{9}{y}}^{10-y} f(x,y)dx$.

10. Записати подвійний інтеграл $\iint\limits_E f(x,y)dxdy$ у вигляді повторного двома способами з різним порядком інтегрування, якщо:

1) $E = \left\{(x,y):\ \frac{1}{4}\left(y^2-4\right) \le x \le 2-y,\ -6 \le y \le 2\right\}$;

2) $E=\left\{(x,y):\ 0\le x\le 3,\ \frac{x}{3}\le y\le 2x\right\}$;

3) $E=\left\{(x,y):\ 1\le x\le 2,\ \frac{1}{x}\le y\le x\right\}$;

4) $E=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ \ x^4\le y\le x^2\}$;

5) $E=\left\{(x,y):\ \frac{y^2}{2c^2}\le x\le\sqrt{3-\frac{y^2}{c^2}},\ 0\le y\le\sqrt{2}c\right\}$;

6) $E=\left\{(x,y):\ -\sqrt{1-y^2}\le x\le 1-y,\ 0\le y\le 1\right\}$;

7) E обмежена кривими $x^2+y^2=2a^2,\ \ x^2=ay,\ a>0,\ y>0$;

8) E обмежена кривими $y^2=ax,\ \ x^2+y^2=2ax,\ y=0,\ a>0,\ y>0$;

9) E обмежена кривими $x^2+y^2=ax,\ x^2+y^2=2ax,\ y=0,\ a>0,\ y>0$;

10) E — паралелограм із сторонами $y=x,\ y=x-3,\ y=2,\ y=4$;

11)• E обмежена кривими $y=\mathrm{e}^x,\ y=\mathrm{e}^{-x},\ y=\frac{1}{\mathrm{e}}$;

12) E — трикутник з вершинами $O(0,0),\ A(1,1),\ B(1,-1)$;

13) $E=\{(x,y):\ \ x^2+y^2\ge 2x+2y-1,\ 0\le x,\ y\le 1\}$;

14) $E=\{(x,y):\ \ y^2\le x+2,\ y\ge x\}$.

11. Обчислити дані подвійні інтеграли по множині E, обмеженій указаними кривими:

1) $\iint\limits_E\left(x^2+y^2\right)dxdy,\ y=0,\ x=y,\ x=1$;

2)• $\iint\limits_E \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}dxdy,\ x=y^2,\ x=0,\ y=1$;

3) $\iint\limits_E\left(x^2+y^2\right)dxdy,\ y=x,\ x+y=2a,\ x=0,\ a>0$;

4) $\iint\limits_E\frac{x^2}{y^2}dxdy,\ y=x,\ y=\frac{1}{x},\ x=2$;

5) $\iint\limits_E \mathrm{e}^x dxdy,\ x=0,\ \cancel{y=1},\ y=2,\ x=\ln y$;

6) $\iint\limits_E xydxdy,\ x+y=2,\ \ x^2+y^2=2y,\ x>0$;

7) $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} x^2dxdy$; 8) $\iint\limits_E(x-y)dxdy,\ y=0,\ x=y,\ x+y=2$;

9) $\iint\limits_E xydxdy,\ \ y^2=2x,\ x=2$;

10) $\iint\limits_E x\,dx\,dy$, E — трикутник з вершинами $A(2, 3)$, $B(7, 2)$, $C(4, 5)$;

11) $\iint\limits_E \sqrt{a^2+x^2}\,dx\,dy$, $y^2-x^2=a^2$, $x=a$, $x=0$, $y=0$, $y>0$, $a>0$;

12) $\iint\limits_E \mathrm{e}^{x+y}\,dx\,dy$, $y=\mathrm{e}^x$, $x=0$, $y=2$;

13) $\iint\limits_E x^2y\,dx\,dy$, $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $x=0$, $y=0$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$;

14) $\iint\limits_E x\,dx\,dy$, $y=0$, $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$;

15) $\iint\limits_E y\,dx\,dy$, $x=0$, $y=0$, $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

12. Звести потрійний інтеграл $\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ до повторного по змінних x, y, z будь-якими трьома з шести можливих способів, якщо множина E обмежена даними поверхнями:

1) $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1-x$, $z=0$, $x+y+z=1$;

2) $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=1$ $(x,\ y\ge 0)$;

3) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=x$, $z=y$;

4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

5)• $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=x^2+y^2$;

6) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$;

7) $x=\pm 1$, $y=0$, $y=4-x$, $z=0$, $x+y+z=4$;

8) $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=16$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$;

9) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=R$, $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $z=x^2+y^2$;

10) E — чотирикутна піраміда з вершинами $(-2, 0, 0)$, $(0, -2, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 4)$.

13. Обчислити дані потрійні інтеграли по множині E, обмеженій указаними поверхнями:

1) $\iiint\limits_E \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$;

2) $\iiint\limits_E x\,dx\,dy\,dz$, $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=3$;

3) $\iiint\limits_E x\,dx\,dy\,dz$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y+z=3$;

4) $\iiint\limits_E (x+yz)\,dx\,dy\,dz$, $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=2,\ y=4,\ x+y+z=8$;

5)• $\iiint\limits_E ze^{x+y}\,dx\,dy\,dz$, $x=2,\ x=3,\ y^2+z^2=1,\ z=0\ (z>0)$;

6) $\iiint\limits_E xy\sqrt{z}\,dx\,dy\,dz$, $z=0,\ z=y,\ y=x^2,\ y=1$;

7) $\iiint\limits_E xyz\,dx\,dy\,dz$, $y=x^2,\ x=y^2,\ z=xy,\ z=0$;

8) $\iiint\limits_E y\,dx\,dy\,dz$, $x^2+y^2=z,\ x=0,\ y=0,\ z=3$;

9) $\iiint\limits_E \left(x^2+y^2+z^2\right)dx\,dy\,dz$, $3\left(x^2+y^2\right)+z^2=3a^2$;

10) $\iiint\limits_E y\,dx\,dy\,dz$, $y^2=x^2+z^2,\ y=h,\ h>0$;

11) $\iiint\limits_E \left(x^2+y^2\right)dx\,dy\,dz$, $2z=x^2+y^2,\ z=0,\ z=2$;

12) $\iiint\limits_E xyz\,dx\,dy\,dz$, $x^2+y^2+z^2=a\sqrt{3}x,\ x^2+y^2+z^2=ay,\ z\ge 0$;

13) $\iiint\limits_E \left(x^2+y^2+z^2\right)dx\,dy\,dz$, $x^2+y^2+z^2=R^2,\ y^2+z^2=x^2,\ x\ge 0$;

14) $\iiint\limits_E z\,dx\,dy\,dz$, $z^2=\dfrac{h^2}{R^2}\left(x^2+y^2\right),\ 0\le z\le h$;

15) $\iiint\limits_E z^2\,dx\,dy\,dz$, $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x^2+y^2+z^2=2Rz$.

14. Обчислити дані криволінійні інтеграли за допомогою формули Гріна:

1) $\int\limits_\Gamma xy^2dy-x^2dx$, Г — коло $x^2+y^2=a^2$;

2) $\int\limits_\Gamma (x+y)dx-(x-y)dy$, Г — еліпс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

3) $\int\limits_\Gamma 2\left(x^2+y^2\right)dx+(x+y)^2\,dy$, Г — контур трикутника з вершинами $(1,1),\ (2,2),\ (1,3)$;

4) $\int\limits_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\left(xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy$, Г — контур прямокутника $1\le x\le 4,\ 0\le y\le 2$;

5)• $\int\limits_\Gamma \dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$, Г — простий кусково-гладкий контур, що не проходить через початок координат;

6) $\int\limits_{\Gamma} \frac{x\,dy + y\,dx}{x^2+y^2}$, Γ — коло $(x-1)^2+(y-1)^2=1$;

7) $\int\limits_{\Gamma} (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, Γ — коло $x^2+y^2=ax$.

15. Обчислити даний n-кратний інтеграл:

1) $\iint\limits_{E}\ldots\int dx_1dx_2\ldots dx_n$, $\quad E=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n):\ x_k\ge 0,\ k\in\overline{1,\ n},\ x_1+x_2+\ldots$ $\ldots+x_n\le 1\}$;

2) $\iint\limits_{E}\ldots\int x_1dx_1dx_2\ldots dx_n$, $\quad E=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n):\ x_k\ge 0,\ k\in\overline{1,\ n},\ x_1+x_2+\ldots$ $\ldots+x_n\le 1\}$;

3) $\iint\limits_{|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|\le a}\ldots\int dx_1dx_2\ldots dx_n$;

4) $\iint\limits_{E}\ldots\int\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)dx_1dx_2\ldots dx_n$, $\quad E=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n):\ 0\le x_k\le 1,$ $k\in\overline{1,\ n}\}$;

5) $\iint\limits_{E}\ldots\int\sqrt{x_1+x_2+\ldots+x_n}\,dx_1dx_2\ldots dx_n$, $\quad E=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n):\ x_1+x_2+\ldots$ $\ldots+x_n\le 1,\ x_k\ge 0,\ k\in\overline{1,\ n}\}$.

16. Якщо функція $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $n\ge 2$, неперервна на множині $E=$ $=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n):\ 0\le x_k\le x,\ k\in\overline{1,\ n}\}$, то

$$\int\limits_0^x dx_1\int\limits_0^{x_1}dx_2\ldots\int\limits_0^{x_{n-1}}f\,dx_n=\int\limits_0^x dx_n\int\limits_{x_n}^x dx_{n-1}\ldots\int\limits_{x_2}^x f\,dx_1.$$

Довести це.

17. Якщо f — неперервна функція, то

$$\int\limits_0^1 dt_1\int\limits_0^{t_1}dt_2\ldots\int\limits_0^{t_{n-1}}f(t_1)f(t_2)\ldots f(t_n)dt_n=\frac{1}{n!}\left(\int\limits_0^1 f(\tau)d\tau\right)^n.$$

Довести це.

Зразки розв'язування задач

1. 6) Відомо, що множина $E=\mathbf{Q}\cap[0;1]$ зчисленна, тому $E=\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x_k\}$ і $\operatorname{mes}E_k=0$ $\forall k=1,2,\ldots$. Разом з тим множина E не є вимірною за Жорданом, оскільки її характеристична функція є функцією Діріхле, яка неінтегровна за Ріманом на довільному відрізку $[a;b]$. Отже, розглядуване твердження неправильне.

4. За умовою існують $m = \min\limits_E f(x)$ та $M = \max\limits_E f(x)$. Тоді

$$m \operatorname{mes} E \le \int\limits_E f(x)dx \le M \operatorname{mes} E.$$

Якщо $\operatorname{mes} E = 0$, то за точку x^* можна взяти довільну точку множини E. Якщо $\operatorname{mes} E > 0$, то

$$m \le \frac{1}{\operatorname{mes} E}\int\limits_E f(x)dx \le M.$$

Відомо, що функція, неперервна на зв'язній множині E, набуває усіх проміжних значень на цій множині, тому $\exists x^* \in E$: $f\left(x^*\right) = \frac{1}{\operatorname{mes} E}\int\limits_E f(x)dx$, і це значення називають середнім значенням функції f на множині E. Звідси випливає, що

$$\int\limits_E f(x)dx = f\left(x^*\right)\operatorname{mes} E.$$

7. 4) За теоремою про середнє значення (див. задачу 4) маємо

$$I = \iint\limits_E \sin\frac{x^2 - y + 1}{x^2 + y^2 + 1}dxdy = \sin\frac{x^{*2} - y^* + 1}{x^{*2} + y^{*2} + 1}\operatorname{mes} E\,,\ \ (x^*, y^*) \in E = \{(x, y):\ \ x^2 + y^2 \le 9\}.$$

Оскільки $\operatorname{mes} E = 9\pi$ та $|\sin t| \le 1\ \ \forall t$, остаточно дістаємо

$$-9\pi \le I \le 9\pi.$$

8. 5) У заданому повторному інтегралі областю інтегрування є $E = \left\{(x, y):\ \frac{1}{x} \le y \le x,\ 1 \le x \le 2\right\}$ (рис. 10).

Спочатку інтегруємо по змінній y, а потім по змінній x. Дістаємо

$$\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy = \int\limits_1^2 x^2\left(-\frac{1}{y}\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}\right)dx = \int\limits_1^2 x^2\left(x - \frac{1}{x}\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{9}{4}.$$

9. 8) Область інтегрування у цьому випадку обмежена лініями $x = 0$, $x = 1$, $y = x$, $y = \sqrt{2 - x^2}$ (рис. 11). Зовнішній інтеграл у повторному слід взяти по змінній y, тому, проектуючи цю область на вісь Oy, дістаємо відрізок $\left[0;\ \sqrt{2}\,\right]$. Однак цей відрізок треба розбити на два, оскільки на відрізку $[0;\ 1]$ змінна x змінюється від 0 до y, а на відрізку $\left[1;\ \sqrt{2}\,\right]$ — від 0 до $\sqrt{2 - x^2}$. Отже, маємо суму двох повторних інтегралів:

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dy\int\limits_0^y f(x, y)dx +$$

$$+ \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy\int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y)dx.$$

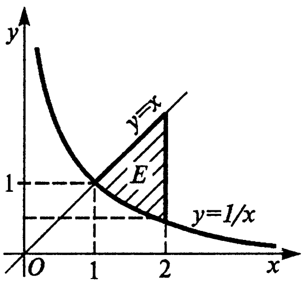


Рис. 10

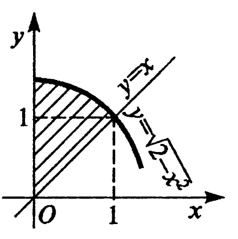


Рис. 11

10. 11) Зобразимо область інтегрування E (рис. 12). Маємо

$$E=\left\{(x,y):\ x\in[-1;\ 0],\ \frac{1}{\mathrm{e}}\le y\le \mathrm{e}^{x}\right\}\cup\left\{(x,y):\ x\in[0;\ 1],\ \frac{1}{\mathrm{e}}\le y\le \mathrm{e}^{-x}\right\}.$$

Тому, враховуючи адитивну властивість інтеграла, дістаємо

$$\iint\limits_E f(x,y)dxdy=\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^x} f(x,y)dy+\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^{-x}} f(x,y)dy.$$

Крім того, $E=\left\{(x,y):\ y\in\left[\frac{1}{\mathrm{e}};\ 1\right],\ \ln y\le x\le \ln\frac{1}{y}\right\}$. Тому

$$\iint\limits_E f(x,y)dxdy=\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}dy\int\limits_{\ln y}^{\ln\frac{1}{y}} f(x,y)dx.$$

11. 2) У цьому випадку $E=\left\{(x,y):\ y\in[0;\ 1],\ 0\le x\le y^2\right\}$. Отже,

$$\iint\limits_E \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}dx=\int\limits_0^1 y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\Bigg|_{x=0}^{x=y^2}dy=\int\limits_0^1\left(y\mathrm{e}^y-y\right)dy=y\mathrm{e}^y\Big|_0^1-\int\limits_0^1\mathrm{e}^y dy-\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1=$$

$$=\mathrm{e}-\mathrm{e}^y\Big|_0^1-\frac{1}{2}=\mathrm{e}-\mathrm{e}+1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

12. 5) Область інтегрування E зображено на рис. 13. Через те що проекцією області E на площину Oxy є квадрат $P=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$, то

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz==\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz.$$

Якщо спроектувати область E на площину Oxz, то матимемо

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz=$$

$$=\int\limits_0^1 dz\int\limits_{\sqrt{z}}^1 dx\int\limits_0^1 f(x,y,z)dy+$$

$$+\int\limits_0^1 dz\int\limits_0^{\sqrt{z}} dx\int\limits_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)dy+$$

$$+\int\limits_1^2 dz\int\limits_{\sqrt{z-1}}^1 dx\int\limits_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)dy.$$

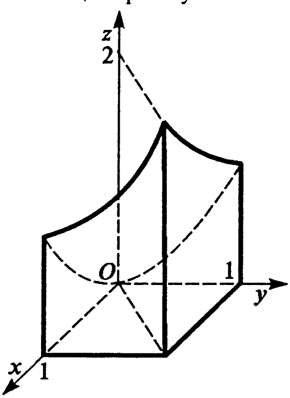


Рис. 13

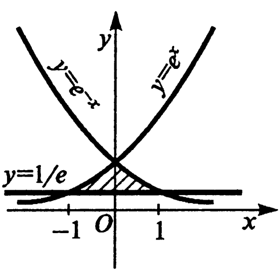


Рис. 12

13. 5) Маємо (рис. 14)

$$\iiint\limits_E z\mathrm{e}^{x+y}dxdydz = \iint\limits_{\substack{2\le x\le 3\\ -1\le y\le 1}} \mathrm{e}^{x+y}dxdy \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} zdz =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_2^3 \mathrm{e}^x dx \int\limits_{-1}^1 \mathrm{e}^y\left(1-y^2\right)dy = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^3-\mathrm{e}^2\right)\int\limits_{-1}^1 \mathrm{e}^y\left(1-y^2\right)dy .$$

Інтеграл $\int\limits_{-1}^1 \mathrm{e}^y\left(1-y^2\right)dy$ обчислимо частинами:

$$\left|\begin{matrix} u = 1-y^2,\ du = -2ydy, \\ dv = \mathrm{e}^y dy,\ v = \mathrm{e}^y \end{matrix}\right|$$

$$\int\limits_{-1}^1 \mathrm{e}^y\left(1-y^2\right)dy = \left(1-y^2\right)\mathrm{e}^y\Big|_{-1}^1 + 2\int\limits_{-1}^1 y\mathrm{e}^y dy = 2\int\limits_{-1}^1 y\mathrm{e}^y dy = 2\left(y\mathrm{e}^y\Big|_{-1}^1 - \int\limits_{-1}^1 \mathrm{e}^y dy \right) = \frac{4}{\mathrm{e}}.$$

Остаточно дістаємо

$$\iiint\limits_E z\mathrm{e}^{x+y}dxdydz = 2\mathrm{e}(\mathrm{e}-1).$$

14. 5) Через те що $P(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, то

$$P'_y = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\quad Q'_x = \frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Отже, $P'_y \equiv Q'_x$ в області $D = \mathbf{R}^2\setminus\{(0;0)\}$. Якщо контур Γ такий, що точка $(0, 0)$ лежить у його зовнішній частині, то за формулою Гріна маємо $\int\limits_\Gamma \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 0$.

Нехай точка (0, 0) лежить у внутрішній частині контуру Γ (рис. 15). Тоді знайдеться коло $\Gamma^* = \{(x, y):\ x^2 + y^2 = r^2\}$ досить малого радіуса $r > 0$, яке також лежатиме у внутрішній

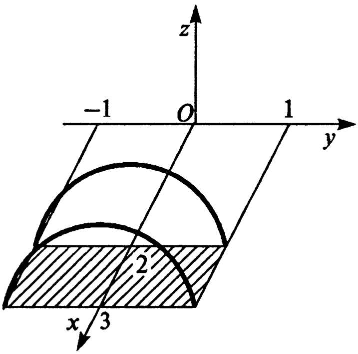


Рис. 14

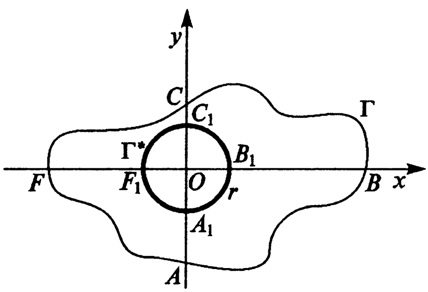


Рис. 15

частині контуру Г. Розглянемо два контури $L_1 = ABCC_1B_1A_1A$ та $L_2 = AA_1F_1C_1CFA$. За доведеним вище заданий інтеграл за кожним з цих контурів дорівнює нулю, тобто $\int\limits_{L_1} + \int\limits_{L_2} = 0$.

Використовуючи адитивну властивість криволінійного інтеграла, дістаємо

$$0 = \int\limits_{L_1} + \int\limits_{L_2} = \int\limits_{ABC} + \int\limits_{CC_1} + \int\limits_{C_1B_1A_1} + \int\limits_{A_1A} + \int\limits_{AA_1} + \int\limits_{A_1F_1C_1} + \int\limits_{C_1C} + \int\limits_{CFA} =$$

$$= \int\limits_{ABCFA} + \int\limits_{C_1B_1A_1F_1C_1} = \int\limits_{\Gamma} - \int\limits_{\Gamma^*},$$

звідки $\int\limits_{\Gamma} = \int\limits_{\Gamma^*}$.

Отже, для обчислення заданого інтеграла вздовж контуру Г досить обчислити його вздовж кола Γ^*. Для цього запишемо параметричне рівняння цього кола: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in [0; 2\pi]$, тоді $x' = -r\sin t$, $y' = r\cos t$ і

$$\int\limits_{\Gamma^*} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t}{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t} dt = 2\pi,$$

тому

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$

§ 17.5. Заміна змінних у кратних інтегралах

Нехай функції

$$x = x(u, v, \ldots, w), \; y = y(u, v, \ldots, w), \; z = z(u, v, \ldots, w) \tag{1}$$

неперервні разом із своїми частинними похідними у замкненій області $\overline{D} \subset \mathbf{R}^n$ і здійснюють взаємно однозначне відображення області $\overline{D}$ на область $\overline{D}^*$. Якщо якобіан перетворення (1)

$$I(u, v, \ldots, w) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & \cdots & z'_u \\ x'_v & y'_v & \cdots & z'_v \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x'_w & y'_w & \cdots & z'_w \end{vmatrix} \neq 0$$

в області D, то замкнена вимірна множина $E \subset D$ з кусково-гладкою межею ∂E відображається перетворенням (1) у замкнену вимірну множину $E^* \subset D^*$ і для довільної функції f, неперервної на множині E^*, має місце формула

$$\iint\limits_{E^*}\ldots\int f(x, y, \ldots, z)\,dxdy\ldots dz = \iint\limits_{E}\ldots\int f(x(u, v, \ldots, w), \ldots, z(u, v, \ldots, w))\times$$

$$\times |I(u, v, \ldots, w)|\,dudv\ldots dw. \tag{2}$$

Останнє твердження залишається правильним, якщо умова $I \neq 0$ та умова взаємної однозначності порушуються на множині з нульовою мірою Жордана.

Окремі випадки формули (2):

1) подвійний інтеграл у полярних координатах (ρ, θ), $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$:

$$\iint\limits_{E^*} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{E} f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\rho\, d\rho d\theta;$$

2) потрійний інтеграл у циліндричних координатах (ρ, θ, z), $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$:

$$\iiint\limits_{E^*} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{E} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\, d\rho d\theta dz;$$

3) потрійний інтеграл у сферичних координатах (ρ, θ, φ), $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$:

$$\iiint\limits_{E^*} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{E} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\, d\rho d\theta d\varphi.$$

Вправи

1. Визначити, чи правильні дані твердження:

1) формули переходу до полярних координат $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ задають взаємно однозначне відображення множини $E = \{(\rho, \theta):\ \rho \in [0; +\infty),\ \theta \in [0; 2\pi]\}$ на простір $\mathbf{R}^2$;

2) якщо у твердженні 1) відрізок $[0; 2\pi]$ замінити на піввідрізок $[0; 2\pi)$, то воно буде правильним;

3) перетворення $x + y = u$, $y = v$ взаємно однозначно відображає $\mathbf{R}^2$ на $\mathbf{R}^2$;

4) перетворення попередньої задачі відображає трикутник $T = \{(x, y):\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x\}$ у квадрат $K = \{(u, v):\ 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1\}$;

5) формули переходу до узагальнених полярних координат $x = a\rho\cos\theta$, $y = b\rho\sin\theta$ задають взаємно однозначне відображення прямокутника $P = \{(\theta; \rho):\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le 1\}$ на еліпс $E = \left\{(x,y):\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$;

6)• подвійний інтеграл $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} f(x+y)\,dxdy$ можна звести до однократного за допомогою заміни змінних $x + y = u$, $x - y = v$;

7) потрійний інтеграл $\iiint\limits_{E} f\left(x^2 + y^2\right)dxdydz$, де множина E обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$, можна звести до однократного, якщо перейти до циліндричних координат.

2. Записати подвійний інтеграл $\iint\limits_E f(x,y)dxdy$ у полярних координатах у вигляді повторного інтеграла, якщо множина E визначається даними умовами:

1) $E=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\le r^2\right\}$; 2) $E=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 2y\}$;

3) $E=\left\{(x,y):\ r^2\le x^2+y^2\le R^2\right\}$;

4) $E=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\le 4x,\ y\ge x\right\}$;

5) E обмежена кривою $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$, $x\ge 0$;

6) $E=\{(x,y):\ x\ge y,\ x+y\le 2a,\ y\ge 0\}$;

7) E — трикутник із сторонами, розміщеними на прямих $x=0$, $y=0$, $y=1-x$;

8) $E=(x,y):\ y^2\le 2px+p^2,\ y\ge x\}$;

9)• $\iint\limits_E f\left(\dfrac{y}{x}\right)dxdy=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}f\left(\dfrac{y}{x}\right)dy$;

10) $E=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\ge 2a^2,\ \ x^2+y^2\le 2ax\right\}$;

11) E — квадрат з вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

3. Обчислити дані подвійні інтеграли за допомогою переходу до полярних координат:

1) $\iint\limits_E\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $E=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\le r^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}$;

2) $\iint\limits_E\ln\left(x^2+y^2\right)dxdy$, $E=\left\{(x,y):\ \mathrm{e}^2\le x^2+y^2\le \mathrm{e}^4\right\}$;

3) $\iint\limits_E\left(x^2+y^2\right)dxdy$, $E=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\le 2ax\right\}$;

4) $\iint\limits_E\dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, $E=\left\{(x,y):\ \dfrac{\pi^2}{9}\le x^2+y^2\le\pi^2\right\}$;

5)• $\iint\limits_E\left(x^2+y\right)dxdy$, $E=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\le 6x,\ y\ge 0\right\}$;

6) $\iint\limits_E\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $E=\left\{(x,y):\ 2x\le x^2+y^2\le 4x\right\}$;

7) $\iint\limits_E\sqrt{r^2-x^2-y^2}\,dxdy$, $E=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\le r^2,\ \ x\le y\le\sqrt{3}\,x\right\}$;

8) $\iint\limits_E\left(x^2+y^2\right)dxdy$, $E=\left\{(x,y):\ ax\le x^2+y^2\le 2ax,\ y\ge 0\right\}$;

9) $\iint\limits_E dxdy$, E обмежена кривими $x^2 = ay$, $x^2 + y^2 = 2a^2$, $y = 0$ $(x > 0,\ a > 0)$;

10) $\iint\limits_E \dfrac{dxdy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$, $E = \left\{(x, y):\ 4x \le x^2 + y^2 \le 8x,\ x \le y \le 2x\right\}$;

11) $\iint\limits_E x\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$, E обмежена однією пелюсткою лемніскати $\left(x^2 + +y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$, $x \ge 0$;

12) $\iint\limits_E dxdy$, E обмежена лемніскатою $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2xy$.

4. Обчислити даний подвійний інтеграл за допомогою вказаної заміни змінних:

1) $\iint\limits_E dxdy$, $E = \{(x, y):\ 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 2x\}$ $(x = u(1 - v),\ y = uv)$;

2) $\iint\limits_E (2x - y)dxdy$, E — паралелограм, обмежений прямими $x + y = 1, x + y = 2$, $2x - y = 1$, $2x - y = 3$ $(x + y = u,\ 2x - y = v)$;

3) $\iint\limits_E (x + y)^3 (x - y)^2\, dxdy$, E — квадрат, обмежений прямими $x + y = 1$, $x - y = 1$, $x + y = 3$, $x - y = -1$ $(x + y = u,\ x - y = v)$;

4) $\iint\limits_E xydxdy$, E обмежена кривими $xy = 1$, $x + y = \dfrac{5}{2}$ $(x + y = u,\ xy = v)$;

5)• $\iint\limits_E \sqrt{xy}\,dxdy$, E обмежена кривими $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = p$, $xy = q$, $0 < a < b$, $0 < p < q$ $(y^2 = ux,\ xy = v)$;

6) $\iint\limits_E \mathrm{e}^{k(x+y)^2} dxdy$, $E = \{(x, y):\ x + y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ $(x = u - uv,\ y = uv)$;

7) $\iint\limits_E dxdy$, E обмежена кривими $y^2 = 2x$, $y^2 = 3x$, $xy = 1$, $xy = 2$ $\left(xy = u,\ \dfrac{y^2}{x} = v\right)$;

8) $\iint\limits_E dxdy$, E обмежена кривими $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 3x$ $\left(x = \sqrt{\dfrac{u}{v}},\ y = \sqrt{uv}\right)$;

9) $\iint\limits_E x^2 y dx dy$, E обмежена кривими $xy = p$, $xy = q$ $(0 < p < q)$, $y = ax$, $y = bx$ $(0 < a < b)$ і розміщена у першому квадранті $\left(x = \sqrt{\frac{v}{u}},\ y = \sqrt{uv}\right)$.

5. Обчислити даний потрійний інтеграл, перейшовши до циліндричних або сферичних координат:

1) $\iiint\limits_E x^2 dx dy dz$, $E = \left\{(x, y, z):\ x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\right\}$;

2) $\iiint\limits_E \left(x^2 + y + z^2\right)^2 dx dy dz$, $E = \left\{(x, y, z):\ x^2 + z^2 \le 1,\ 0 \le y \le 1\right\}$;

3)• $\iiint\limits_E z\sqrt{x^2 + y^2}\, dx dy dz$, $E = \left\{(x, y, z):\ 0 \le y \le \sqrt{2x - x^2},\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le z \le h\right\}$;

4) $\iiint\limits_E \left(x^2 + y^2\right) dx dy dz$, E обмежена поверхнями $z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$, $z = 2$;

5) $\iiint\limits_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx dy dz$, $E = \left\{(x, y, z):\ x^2 + y^2 + z^2 \le x\right\}$;

6) $\iiint\limits_E dx dy dz$, E обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = 3z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;

7) $\iiint\limits_E \left(x^2 + y^2\right) dx dy dz$, $E = \left\{(x, y, z):\ r^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ z \ge 0\right\}$;

8) $\iiint\limits_E \left(x^2 + y^2\right) dx dy dz$, E обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$, $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$;

9) $\iiint\limits_E z\sqrt{x^2 + y^2}\, dx dy dz$, E обмежена поверхнями $y = 0$, $z = 0$, $z = a$, $x^2 + y^2 = 2x$;

10) $\iiint\limits_E \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $E = \left\{(x, y, z):\ a^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4a^2\right\}$;

11) $\iiint\limits_E z dx dy dz$, E обмежена поверхнями $z^2 = \frac{h^2}{R^2}\left(x^2 + y^2\right)$, $z = h$;

12) $\iiint\limits_E dx dy dz$, E обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, $z = 0$;

13) $\iiint\limits_E xyz dx dy dz$, $E = \left\{(x, y, z):\ x^2 + y^2 + z^2 \le r\sqrt{3}x,\ x^2 + y^2 + z^2 \le ry,\ z \ge 0\right\}$;

14) $\iiint\limits_E z^2 dx dy dz$, $E = \left\{(x, y, z):\ x^2 + y^2 + z^2 \ge r^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 2rz\right\}$.

Зразки розв'язування задач

1. 6) Якщо $u = x + y$, $v = x - y$, то $x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \frac{1}{2}(u-v)$, тому це перетворення задає взаємно однозначне відображення $\mathbf{R}^2$ на $\mathbf{R}^2$. Якобіан перетворення має вигляд

$$I(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

тому формула заміни змінних у заданому подвійному інтегралі набирає вигляду

$$\iint\limits_{E^*} f(x+y)\,dxdy = \iint\limits_{E} f(u)\cdot\frac{1}{2}dudv,$$

де $E^* = \{(x, y) : |x| + |y| \le 1\}$, а множина E є образом E^* при заданому перетворенні. Оскільки множина E^* обмежена прямими $x + y = 1$, $x + y = -1$, $x - y = 1$, $x - y = -1$ (рис. 16), то E буде обмежена прямими $u = 1$, $u = -1$, $v = 1$, $v = -1$ (рис. 17).

Отже,

$$\iint\limits_{E^*} f(x+y)\,dxdy = \iint\limits_{E} f(u)\cdot\frac{1}{2}dudv = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_{-1}^{1} f(u)dv = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(u)v\Big|_{-1}^{1} du = \int\limits_{-1}^{1} f(u)du,$$

і це твердження правильне.

2. 9) Через те що

$$\iint\limits_{E} f\left(\frac{y}{x}\right)dxdy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} f\left(\frac{y}{x}\right)dy,$$

то $E = \left\{(x, y):\ x \in \left[\frac{1}{2};\ 1\right],\ -\sqrt{x-x^2} \le y \le \sqrt{x-x^2}\right\}$.

Звідси випливає, що множина E обмежена лініями $x^2 + y^2 = x$, $x = \frac{1}{2}$ $\left(x \ge \frac{1}{2}\right)$ (рис. 18).

Якщо перейти до полярних координат $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, то півколо $x^2 + y^2 = x$, $x \ge \frac{1}{2}$, перейде у криву $\rho^2 = \rho\cos\theta$, або $\rho = \cos\theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$, а відрізок $x = \frac{1}{2}$, $y \in \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$, перейде у криву $\rho\cos\theta = \frac{1}{2}$, або $\rho = \frac{1}{2\cos\theta}$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$. Тому образом множини E є множина E^*, обмежена кривими $\rho = \cos\theta$, $\rho = \frac{1}{2\cos\theta}$, $\theta = -\frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ (рис. 19).

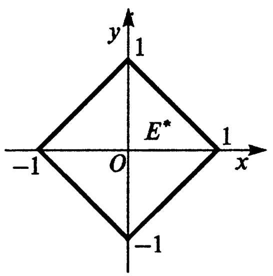


Рис. 16

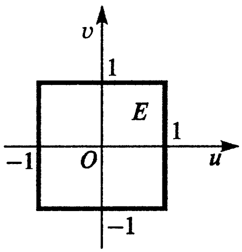


Рис. 17

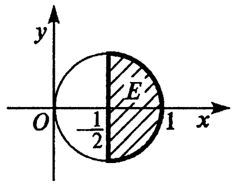


Рис. 18

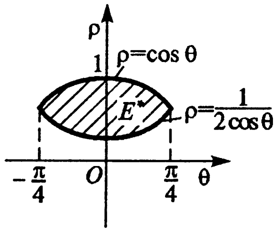


Рис. 19

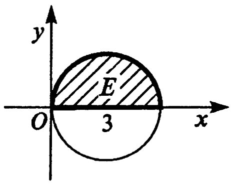


Рис. 20

Отже,

$$\iint\limits_E f\left(\frac{y}{x}\right)dxdy = \iint\limits_{E^*} f(\operatorname{tg}\theta)\rho d\rho d\theta =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int\limits_{\frac{1}{2\cos\theta}}^{\cos\theta} f(\operatorname{tg}\theta)\rho d\rho =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(\operatorname{tg}\theta)\left(\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{\frac{1}{2\cos\theta}}^{\cos\theta}\right)d\theta =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} f(\operatorname{tg}\theta)\left(\cos^2\theta - \frac{1}{4\cos^2\theta}\right)d\theta.$$

3. 5) Областю інтегрування у цьому випадку є множина $E = \{(x, y)\colon\ (x-3)^2 + y^2 \le 9, y \ge 0\}$ (рис. 20). Перейдемо до полярної системи координат $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, тоді рівняння заданого кола матиме вигляд $\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta - 6\rho\cos\theta = 0$, або $\rho = 6\cos\theta$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Отже,

$$\iint\limits_E \left(x^2 + y\right)dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{6\cos\theta} \left(\rho^2\cos^2\theta + \rho\sin\theta\right)\rho d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\rho^4}{4}\cos^2\theta + \frac{\rho^3}{3}\sin\theta\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=6\cos\theta} d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{6^4\cos^6\theta}{4} + \frac{6^3}{3}\cos^3\theta\sin\theta)d\theta = 324\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta + 36\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin\theta d\theta =$$

$$= 324\cdot\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2} - 36\cdot\frac{1}{4}\cos^4\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{405}{8}\pi + 9.$$

Зауважимо, що інтеграл від парного степеня косинуса обчислено за відомою формулою

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta d\theta = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

4. 5) Якщо $y^2 = ux$, $xy = v$, то

$$x = \frac{v^{\frac{2}{3}}}{u^{\frac{1}{3}}},\quad y = u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}},\quad x'_u = -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{2}{3}},\quad x'_v = \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}},\quad y'_u = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}},\quad y'_v = \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}}.$$

Знайдемо якобіан заданого перетворення

$$I(u,v) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3u},$$

тобто $|I(u,v)| = \frac{1}{3u}$, якщо $u > 0$.

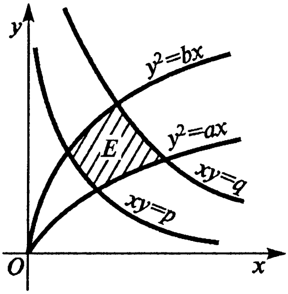


Рис. 21

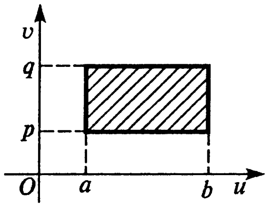


Рис. 22

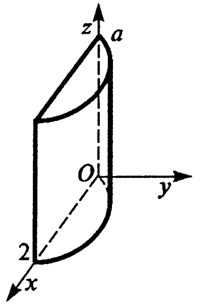


Рис. 23

Образом заданої множини E (рис. 21) є прямокутник P, обмежений прямими $u=a$, $u=b$, $v=p$, $v=q$ (рис. 22).

Скориставшись формулою заміни змінних для подвійного інтеграла, дістанемо

$$\iint\limits_E \sqrt{xy}dxdy = \frac{1}{3}\iint\limits_P \frac{\sqrt{v}}{u}dudv = \frac{1}{3}\int\limits_a^b \frac{du}{u}\int\limits_p^q \sqrt{v}dv =$$

$$= \frac{1}{3}\ln u\Big|_a^b \frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}}\Big|_p^q = \frac{2}{9}\left(q^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right)\ln\frac{b}{a}.$$

5. 3) Область інтегрування E зображено на рис. 23. У цьому випадку зручно перейти до циліндричних координат: $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $z=z$. Тоді рівняння поверхні $y=\sqrt{2x-x^2}$ матиме вигляд $\rho=2\cos\theta$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

Скориставшись формулою переходу до циліндричних координат у потрійному інтегралі, дістанемо

$$\iiint\limits_E \sqrt{x^2+y^2}\,z\,dxdydz = \iiint\limits_{E^*} \rho^2 z\,d\rho d\theta dz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{2\cos\theta} \rho^2 d\rho \int\limits_0^a z\,dz = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{2\cos\theta} \rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{4}{3}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,d\theta = \frac{4}{3}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2\theta\right)d(\sin\theta) = \frac{8}{9}a^2.$$

§ 17.6. Застосування кратних інтегралів у геометрії

Якщо E_1 — замкнена вимірна множина простору $\mathbf{R}^n$, а функція f неперервна на цій множині, то множину $E=\{(x,y):\ x\in E_1,\ 0\le y\le f(x)\}\subset\mathbf{R}^{n+1}$ називають *узагальненим циліндричним тілом* простору $\mathbf{R}^{n+1}$, а число $V(E) = \int\limits_E f(x)dx$ — його *об'ємом* (*геометричний зміст кратного інтеграла*).

Зокрема, якщо $E = \{(x, y, z) : (x, y) \in E_1, 0 \le z \le f(x, y)\} \subset \mathbf{R}^3$, де E_1 — замкнена квадровна множина, а функція f неперервна на ній, то

$$V(E) = \iint\limits_{E_1} f(x, y)\, dxdy$$

— *об'єм циліндричного тіла E (геометричний зміст подвійного інтеграла).*

Із властивості кратного інтеграла

$$\int\limits_E 1 \cdot dx = \operatorname{mes} E$$

— *міра Жордана множини E,* випливають формули:

1) $S(E) = \iint\limits_E dxdy$ — площа квадровної фігури E;

2) $V(E) = \iiint\limits_E dxdydz$ — об'єм кубовної фігури E.

Площу поверхні $z = f(x, y)$, $(x, y) \in E$, де E — замкнена квадровна область, а функція f має в цій області неперервні частинні похідні f'_x і f'_y, обчислюють за формулою

$$P = \iint\limits_E \sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)}\, dxdy.$$

Вправи

1. Визначити, чи правильні дані твердження:

1) формула для обчислення площі криволінійної трапеції випливає з формули $\iint\limits_E dxdy = \operatorname{mes} E$;

2) формула для обчислення площі криволінійного сектора випливає з формули $\iint\limits_E dxdy = \operatorname{mes} E$;

3)• формула для обчислення об'єму тіла обертання випливає з формули $\iiint\limits_E dxdydz = V(E)$;

4) площу довільної поверхні можна визначити як границю площі многогранної поверхні, що вписана у задану, якщо $\lambda(T) = \max\limits_{0 \le k \le n} d_k \to 0$, де d_k — діаметр k-ї грані многогранної поверхні.

2. Знайти площу фігури, обмеженої даними кривими:

1) $y = x^2 - 1$, $y = 2$; 2) $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = e^x$;

3) $y = \frac{1}{x}$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 3$; 4) $x = 4y - y^2$, $x + y = 6$;

5) $x^2+y^2=-2y,\ y+1=0,\ y+x=0;$ 6) $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy;$

7)• $\rho=a(1+\cos\theta),\ \rho=a\cos\theta,\ a>0;$ 8) $x^3+y^3=axy;$

9) $\rho=1,\ \rho=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta,\ \rho\ge 1;$ 10) $y^2=4(1-x),\ x^2+y^2=4, x\ge 1;$

11) $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right),\ \ x^2+y^2=2ax,\ a>0;$

12) $y=\frac{8a^2}{x^2+4a^2},\ x=2y,\ x=0,\ a>0;$

13) $x^2+y^2=2ax,\ \ x^2+y^2=2bx,\ y=x,\ y=0,\ 0<a<b;$

14) $y^2=ax,\ \ y^2=bx,\ \ my^2=x^3,\ ny^2=x^3,\ 0<a<b,\ 0<m<n;$

15) $y^2=px,\ \ y^2=qx,\ y=ax,\ y=bx,\ 0<p<q,\ 0<a<b;$

16) $\left(x^2+y^2-ax\right)^2=a^2\left(x^2+y^2\right),\ \ x^2+y^2=a\sqrt{3}y,\ a>0.$

3. Вивести формулу для обчислення $\iint\limits_E f(x,y)\,dxdy$ в узагальнених полярних координатах $x=a\rho\cos^\alpha\theta,\ y=b\rho\sin^\alpha\theta$, де $a>0,\ b>0,\ \alpha>0$ — фіксовані сталі, і, зокрема, формулу для обчислення площі плоскої фігури.

4. Знайти площу фігури, обмеженої даними кривими, перейшовши до узагальнених полярних координат:

1) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2};$ 2) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=x^2+y^2;$

3) $\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2};$ 4) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2},\ x>0,\ y>0,\ h>0,\ k>0;$

5) $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1,\ x=0, y=0;$ 6) $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^{12}=\frac{xy}{c^2};$

7) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{x^2}{h^2},\ y>0,\ a>0,\ b>0;$ 8) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{xy}{c^2}.$

5. Знайти об'єм тіла, обмеженого даними поверхнями:

1) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

2) $x^2+y^2=2ax,\ \ x^2+y^2=z^2,\ z=0;$

3) $x^2+y^2-2x-2y+1=0,\ xy=z,\ z=0;$

4) $y^2=2z,\ 2x+3y-12=0,\ x=0,\ z=0;$

5)• $x^2+y^2=4x,\ z=x,\ z=2x;$ 6) $y^2=9-z, y=x^2,\ x=0,\ z=0;$

7) $z = x^2 + y^2, \quad y^2 = 4x, \; x = 1, \; z = 0;$ 8) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$

9) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz;$

10) $z = x^2 + y^2, \; xy = a^2, \; 2y = x, \; 2x = y;$

11) $x^2 + y^2 = 4z^2, \; z = 0, \quad x^2 + y^2 = 2x;$

12) $z = x^2 + y^2, \; x = x^2 + y^2, \; 2x = x^2 + y^2, \; z = 0;$

13) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z, \quad x^2 + y^2 = z;$

14) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2};$

15) $z = x^2 + y^2, \quad z^2 = xy, \; x > 0, \; y > 0;$

16) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \; \left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right);$

17) $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3 = a^3 xyz;$ 18) $z = \mathrm{e}^{-x^2 - y^2}, \; z = 0;$

19) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h}, \; z > 0;$

20) $z^2 = xy, \; xy = 1, \; xy = 4, \quad y^2 = x, \quad y^2 = 3x, \; z = 0;$

21) $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = a^2\left(x^2 + y^2\right);$ 22) $\left(x^2 + y^2\right)^2 + z^4 = a^3 z.$

6•. Вивести формулу для обчислення $\iiint\limits_E f(x, y, z)\, dxdydz$ в узагальнених сферичних координатах $x = a\rho\cos^\alpha\theta\cos^\beta\varphi, \; y = b\rho\sin^\alpha\theta\cos^\beta\varphi, \; z = c\rho\sin^\beta\varphi$, де $a > 0, \; b > 0, \; c > 0, \; \alpha > 0, \; \beta > 0$ — сталі, і, зокрема, дістати формулу для обчислення об'єму тіла.

7. Знайти об'єм тіла, обмеженого даними поверхнями, використавши узагальнені полярні або узагальнені сферичні координати:

1) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x}{h};$ 2) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{xyz}{h^3};$

3)• $\frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1, \; \frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{(z-2)^2}{4} = 1;$

4) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = \frac{z}{k};$ 5) $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}, \; x > 0, \; y > 0, \; z > 0;$

6) $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$ 7) $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1, \; x > 0, \; y > 0, \; z > 0;$

8) $\sqrt[3]{\frac{x}{a}} + \sqrt[3]{\frac{y}{b}} + \sqrt[3]{\frac{z}{c}} = 1, \; x > 0, \; y > 0, \; z > 0.$

8. Знайти площу поверхні P, яка визначається даними умовами:

1) P — частина поверхні конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, яка вирізається циліндром $x^2 - 2ax + y^2 = 0$;

2) P — частина площини $x + y + z = 2a$, яка вирізається циліндром $x^2 + y^2 = a^2$ і міститься в першому октанті;

3) P — частина поверхні меншого сферичного сегмента (радіус сфери дорівнює r, радіус основи сегмента — a);

4) P — частина поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, яка вирізається циліндром $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$;

5)• P — частина поверхні параболоїда $x^2 + y^2 = 2z$, яка вирізається циліндром $x^2 + y^2 = 1$;

6) P — частина поверхні параболоїда $y^2 + z^2 = 2ax$, що міститься між циліндром $y^2 = ax$ та площиною $x = a$;

7) P — частина поверхні циліндра $z^2 = 4x$, що лежить у першому октанті і вирізається циліндром $y^2 = 4x$ та площиною $x = 1$;

8) P — частина поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, яка вирізається циліндром $\left(x^2 + y^2\right)^2 = R^2\left(x^2 - y^2\right)$;

9) P — частина поверхні конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, що міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = 2x$;

10) P — частина поверхні циліндра $x^2 = 2z$, яка відтинається площинами $x = 2y$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$;

11) P — частина циліндрів $x^2 + y^2 = \pm ax$, розміщених всередині сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

12) P — частина конуса $y^2 + z^2 = x^2$, яка вирізається поверхнею $x^2 = ay$;

13) P — частина поверхні $x^2 + y^2 = 2az$, що міститься всередині циліндра $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$;

14) P — частина поверхні $az = xy$, що міститься всередині циліндра $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2xy$;

15) P — частина поверхні $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$, що міститься всередині циліндра $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2xy$;

16) P — поверхня $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=a^2\left(x^2+y^2\right)$.

9. Знайти об'єм та площу поверхні тіла, що визначається даними умовами:

1) $x^2+y^2+z^2\le 4a^2,\ \ x^2+y^2\le 2ax$ (*тіло Вівіані*);

2) $x^2+z^2\le a^2,\ \ z^2+y^2\le a^2$; 3) $0\le z\le a\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ \ x^2+y^2\le R^2,\ x\ge 0$;

4) $x^2+y^2\le 2ax,\ \ x^2\ge y^2+z^2$; 5) $x^2+y^2\le z^2,\ \ az\le 2a^2-x^2-y^2$.

10. Знайти міру даного тіла E з простору $\mathbf{R}^n$:

1) $E=\left\{\left(x_1x_2,\ldots,x_n\right):\ x_k\ge 0,\ k\in\overline{1,\ n},\ x_1+x_2+\ldots+x_n\le 1\right\}$ (*n-вимірний симплекс*);

2) E обмежене площинами $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n=\pm h_i,\ \ i\in\overline{1,\ n}$, $\Delta=$ $=\det\left\|a_{ki}\right\|_{n,\,n}\ne 0$ (*n-вимірний паралелепіпед*);

3) $E=\left\{\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right):\ x_k\ge 0,\ \dfrac{x_1}{a_1}+\dfrac{x_2}{a_2}+\ldots+\dfrac{x_n}{a_n}\le 1,\ a_k>0,\ k\in\overline{1,\ n}\right\}$ (*n-вимірна піраміда*);

4)
$$E=\left\{\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right):\ x_k\ge 0,\ \frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}\le\frac{x_n^2}{a_n^2}\le 1,\ a_k>0,\ k\in\overline{1,\ n}\right\}$$
(*n-вимірний конус*);

5) $E=\left\{\left(x_1,x_2,\ldots,x_5\right):\ x_1^2+x_2^2+\ldots+x_5^2\le R^2\right\}$ (*п'ятивимірна куля*).

Зразки розв'язування задач

1. 3) Нехай E — тіло, яке утворюється обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції $D=\{(x,y):\ x\in[a;b],\ 0\le y\le f(x)\}$, де функція f неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді E — кубовне тіло (покажіть це) і $V(E)=\iiint\limits_E dxdydz$.

Для кожного $x_0\in[a;b]$ площина $x=x_0$ перетинає тіло обертання E по кругу $E_1\left(x_0\right)=$ $=\left\{\left(x_0,y,z\right):\ y^2+z^2\le f^2\left(x_0\right)\right\}$. Тому $\iint\limits_{E_1(x)}dydz=\operatorname{mes}E_1(x)=\pi f^2(x)$, звідки

$$\iiint\limits_E dxdydz=\int\limits_a^b dx\iint\limits_{E_1(x)}dydz=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

Отже, розглядуване твердження правильне.

2. 7) Фігуру, площу якої треба обчислити, зображено на рис. 24. Враховуючи симетрію цієї фігури, матимемо

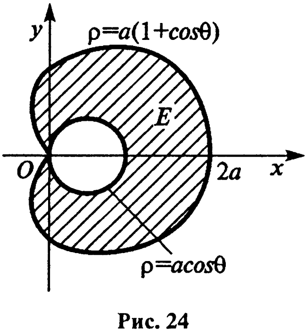


Рис. 24

$$S=2\iint\limits_E\rho\,d\rho d\theta=2\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_{a\cos\theta}^{a(1+\cos\theta)}\rho\,d\rho+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int\limits_0^{a(1+\cos\theta)}\rho\,d\rho\right)=$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \Big|_{a\cos\theta}^{a(1+\cos\theta)} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \rho^2 \Big|_0^{a(1+\cos\theta)} d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos\theta)d\theta +$$

$$+a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right)d\theta = a^2(\theta+2\sin\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+ a^2\left(\frac{3\theta}{2}+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{5}{4}\pi a^2 \quad (\text{кв. од.}).$$

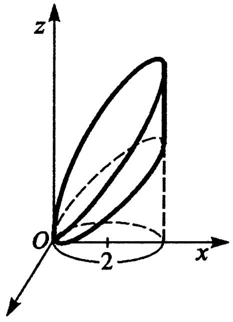


Рис. 25

5. 5) У цьому випадку треба обчислити об'єм тіла E, зображеного на рис. 25. Враховуючи симетрію тіла відносно площини Oxz, дістаємо

$$V(E) = 2\iiint_E dxdydz = 2 \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 4x \\ y\ge 0}} dxdy \int_x^{2x} dz = 2 \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 4x \\ y\ge 0}} xdxdy.$$

При обчисленні одержаного подвійного інтеграла зручно перейти до полярних координат $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$. Рівняння кола $x^2+y^2=4x$ у полярних координатах матиме вигляд $\rho = 4\cos\theta$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

Тоді

$$V(E) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{4\cos\theta} \rho^2\cos\theta d\rho = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \int_0^{4\cos\theta} \rho^2 d\rho =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{4\cos\theta} d\theta = \frac{128}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = \frac{128}{3}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = 8\pi \quad (\text{куб. од.}).$$

6. Для одержання необхідної формули обчислимо якобіан заданого перетворення

$$I(\rho,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_\rho & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a\cos^\alpha\theta\cos^\beta\varphi & -a\rho\alpha\cos^{\alpha-1}\theta\sin\theta\cos^\beta\varphi & -a\rho\beta\cos^\alpha\theta\cos^{\beta-1}\varphi\sin\varphi \\ b\sin^\alpha\theta\cos^\beta\varphi & b\rho\alpha\sin^{\alpha-1}\theta\cos\theta\cos^\beta\varphi & -b\rho\beta\sin^\alpha\theta\cos^{\beta-1}\varphi\sin\varphi \\ c\sin^\beta\varphi & 0 & c\rho\beta\sin^{\beta-1}\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2\alpha\beta abc\cos^{\alpha-1}\theta\cos^{2\beta-2}\varphi\sin^{\alpha-1}\theta\sin^{\beta-1}\varphi\left(\sin\varphi\begin{vmatrix} -\sin\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix} +\right.$$

$$\left.+\cos\varphi\begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{vmatrix}\right) = \rho^2\alpha\beta abc\cos^{\alpha-1}\theta\sin^{\alpha-1}\theta\cos^{2\beta-1}\varphi\sin^{\beta-1}\varphi.$$

Отже, шукана формула переходу у потрійному інтегралі до узагальнених сферичних координат має вигляд

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dxdydz = \alpha\beta abc\iiint_{E^*} f\left(a\rho\cos^\alpha\theta\cos^\beta\varphi,\ b\rho\sin^\alpha\theta\cos^\beta\varphi,\ c\rho\sin^\beta\varphi\right)\rho^2\times$$

$$\times\cos^{\alpha-1}\theta\sin^{\alpha-1}\theta\cos^{2\beta-1}\varphi\sin^{\beta-1}\varphi\,d\rho d\theta d\varphi.$$

Зокрема, дістаємо формулу для обчислення об'єму тіла

$$V(E) = \alpha\beta abc\iiint_{E^*}\rho^2\cos^{\alpha-1}\theta\sin^{\alpha-1}\theta\cos^{2\beta-1}\varphi\sin^{\beta-1}\varphi\,d\rho d\theta d\varphi.$$

7. 3) Лінія перетину заданих поверхонь знаходиться у площині $z=1$ і проектується на площину Oxy у вигляді кривої $\frac{x^2}{9}+y^2=\frac{3}{4}$. Тому тіло, об'єм якого треба знайти, визначається умовою

$$E=\left\{(x,y,z):\ \frac{x^2}{9}+y^2\le\frac{3}{4},\ 2-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-y^2}\le z\le 2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-y^2}\right\}.$$

Тоді

$$V(E)=\iiint_E dxdydz=\iint_{E_1}dxdy\int_{2-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-y^2}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-y^2}}dz=\iint_{E_1}\left(4\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-y^2}-2\right)dxdy,$$

де $E_1=\left\{(x,y):\ \frac{x^2}{9}+y^2\le\frac{3}{4}\right\}$.

При обчисленні останнього інтеграла перейдемо до узагальнених полярних координат: $x=3\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$.

Якобіан цього перетворення має вигляд

$$I(\rho,\theta)=\begin{vmatrix}x'_\rho & x'_\theta\\ y'_\rho & y'_\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3\cos\theta & -3\rho\sin\theta\\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{vmatrix}=3\rho.$$

Тому $V(E)=\iint_{E_1^*}\left(4\sqrt{1-\rho^2}-2\right)3\rho d\rho d\theta$, де $E_1^*=\left\{(\rho,\theta):\theta\in[0;\ 2\pi],\ 0\le\rho\le\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Отже,

$$V(E)=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(4\sqrt{1-\rho^2}-2\right)\rho d\rho=6\pi\left(-2\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\rho^2\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=$$

$$=6\pi\left(-\frac{1}{6}+\frac{4}{3}-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{2}\pi\ \text{(куб. од.)}.$$

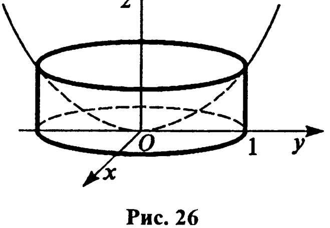


Рис. 26

8. 5) Маємо $z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$, $z'_x=x$, $z'_y=y$. Проекцією заданої поверхні на площину Oxy є круг $x^2+y^2\le1$ (рис. 26). Враховуючи симетрію поверхні відносно координатних площин Oxz і Oyz, дістаємо $P=4\iint_E\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$, де $E=\{(x,y):\ x^2+y^2\le1,\ x\ge0,\ y\ge0\}$.

Ввівши до розгляду полярні координати $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, матимемо

$$P=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^1 d\theta=$$

$$=\frac{4\left(2\sqrt{2}-1\right)}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{4\left(2\sqrt{2}-1\right)}{3}\theta\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\left(2\sqrt{2}-1\right)}{3}\pi \text{ (кв. од.).}$$

§ 17.7. Застосування кратних інтегралів у фізиці

Нехай $\mu(x)=\mu(x_1, x_2, ..., x_n)$ — густина розподілу маси на множині $E\subset\mathbf{R}^n$.

1. Маса, розподілена на множині E,

$$m=\int_E\mu(x)dx.$$

Окремі випадки:

а) маса матеріальної пластинки E

$$m=\iint_E\mu(x, y)dxdy;$$

б) маса матеріального тіла E

$$m=\iiint_E\mu(x, y, z)dxdydz.$$

2. Статичні моменти $M_k, k\in\overline{1, n}$, маси відносно підпросторів $E_k=$ $=\left\{x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in E:\ x_k=0, k\in\overline{1, n}\right\}$ та координати центра маси $\overline{x}_k, k\in\overline{1, n}$,

$$M_k=\int_E\mu(x)x_k dx=\iint_E\ldots\int\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n)x_k dx_1 dx_2\ldots dx_n;$$

$$\overline{x}_k=\frac{M_k}{m}.$$

Окремі випадки:

а) статичні моменти M_x і M_y відносно координатних осей та центр маси $(\overline{x}, \overline{y})$ матеріальної пластинки E

$$M_x=\iint_E\mu(x, y)ydxdy,\quad M_y=\iint_E\mu(x, y)xdxdy;$$

$$\overline{x}=\frac{M_x}{m}, \overline{y}=\frac{M_y}{m};$$

б) статичні моменти M_{yz}, M_{xz} і M_{xy} відносно координатних площин Oyz, Oxz і Oxy та центр маси $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ матеріального тіла E

$$M_{yz} = \iiint_E x\mu(x, y, z)\,dxdydz, M_{xz} = \iiint_E y\mu(x, y, z)\,dxdydz;$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\mu(x, y, z)\,dxdydz;$$

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \overline{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

3. Моменти інерції I_k, $k \in \overline{1, n}$, маси відносно підпросторів $E_k = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E:\ x_k = 0,\ k \in \overline{1, n}\}$ та момент інерції I_0 відносно початку координат

$$I_k = \int_E \mu(x) x_k^2 dx = \iint_E \ldots \int \mu(x_1, x_2, \ldots, x_n) x_k^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n;$$

$$I_0 = \sum_{k=1}^{n} I_k = \iint_E \ldots \int \mu(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sum_{k=1}^{n} x_k^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Окремі випадки:

а) моменти інерції I_x і I_y відносно координатних осей та момент інерції I_0 відносно початку координат матеріальної пластинки E

$$I_x = \iint_E \mu(x, y) y^2 dxdy, I_y = \iint_E \mu(x, y) x^2 dxdy,$$

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_E \mu(x, y)\left(x^2 + y^2\right) dxdy;$$

б) моменти інерції I_{yz}, I_{xz} і I_{xy} відносно координатних площин Oyz, Oxz і Oxy моменти інерції I_x, I_y і I_z відносно координатних осей та момент інерції I_0 відносно початку координат матеріального тіла E

$$I_{yz} = \iiint_E x^2 \mu(x, y, z)\,dxdydz, I_{xz} = \iiint_E y^2 \mu(x, y, z)\,dxdydz, I_{xy} =$$

$$= \iiint_E z^2 \mu(x, y, z)\,dxdydz;$$

$$I_x = I_{xz} + I_{xy}, I_y = I_{xy} + I_{yz}, I_z = I_{yz} + I_{xz};$$

$$I_0 = I_{yz} + I_{xz} + I_{xy} = \iiint_E \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \mu(x, y, z)\,dxdydz.$$

4. Ньютонів потенціал поля тяжіння матеріального тіла E у точці (x_0, y_0, z_0)

$$u(x_0, y_0, z_0) = \gamma \iiint_E \frac{\mu(x, y, z)dxdydz}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}},$$

де γ — гравітаційна стала.

5. $\bar{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ — сила притягання матеріальної точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ масою m_0 матеріальним тілом E

$$F_x = \gamma m_0 \iiint_E \frac{\mu(x, y, z)(x-x_0)dxdydz}{\sqrt{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^3}};$$

$$F_y = \gamma m_0 \iiint_E \frac{\mu(x, y, z)(y-y_0)dxdydz}{\sqrt{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^3}};$$

$$F_z = \gamma m_0 \iiint_E \frac{\mu(x, y, z)(z-z_0)dxdydz}{\sqrt{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^3}},$$

де γ — гравітаційна стала.

Вправи

1. Визначити, чи правильні дані твердження:

1) маса плоскої матеріальної фігури прямо пропорційна площі цієї фігури;

2) якщо однорідна пластинка симетрична відносно прямої $y = x$, то її статичні моменти рівні між собою;

3) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

4) центр мас матеріальної кулі збігається з її центром.

2. Знайти масу матеріальної пластинки E, обмеженої даними кривими, з густиною розподілу маси $\mu(x, y)$:

1) $x^2 + y^2 = r^2$, $\mu(x,y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$, $k > 0$;

2)• $ay = x^2$, $x + y = 2a$, $a > 0$, $\mu(x, y) = 1$;

3) $x^2 + y^2 = 6y$, $x - y = 0$, $x - 2y = 0$, $x = 0$, $\mu(x, y) = 1$;

4) $y = x^2$, $x + y = 2$, $y = 0$, $\mu(x, y) = 1$;

5) $x = y$, $x - 3y = 1$, $y = 1$, $y = 3$, $\mu(x, y) = y$;

6) $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 4y$, $xy \geq 0$, $\mu(x, y) = x$;

7) $y^2 = x + 4$, $y^2 = 4 - x$, $y = 0$, $y \geq 0$, $\mu(x, y) = y$;

8) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$, $\mu(x, y) = 4x^2+9y^2$;

9) $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$, $x=0$, $y=0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $\mu(x, y)=x+y$;

10) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$, $x \geq 0$, $\mu(x, y)=x^2$.

3. Знайти масу матеріального тіла E, обмеженого даними поверхнями, з густиною розподілу маси $\mu(x, y, z)$:

1) $x=0, y=0$, $z=0$, $x=a$, $y=b$, $z=c$, $a, b, c>0$, $\mu(x, y, z)=x+y+z$;

2) $x=0, z=0$, $y=1$, $y=3$, $x+2z=3$, $\mu(x, y, z)=1$;

3) $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z=0$, $\mu(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $k>0$;

4)• $x^2+y^2+z^2=R^2$, $\mu(x, y, z)=2\left(R-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$;

5) $x^2=2y$, $y+z=1$, $2y+z=2$, $\mu(x, y, z)=y$;

6) $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z=R-h$, $\mu(x, y, z)=k(z-R+h)$, $k>0$;

7) $x^2+y^2=R^2$, $x^2+y^2=r^2$, $z=0$, $Hy+2Rz=HR$, $r<R$, $\mu(x, y, z)=1$;

8) $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $\mu(x, y, z)=kz$, $k>0$;

9) $x^2+y^2=2z$, $x^2+y^2+z^2=3$, $\mu(x, y, z)=1$.

4. Знайти координати центра мас однорідної матеріальної пластинки E, що визначається даними умовами:

1) E обмежена кривими $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$;

2) E обмежена кривими $y=x^2$, $y=2x^2$, $x=1$, $x=2$;

3) E — рівносторонній трикутник, сторона якого дорівнює a, висота лежить на осі Ox, а вершина збігається з початком координат;

4)• E обмежена кривими $y^2=4x+4$, $y^2=-2x+4$;

5) E — круговий сектор радіуса R з кутом 2α при вершині, бісектриса кута якого лежить на осі Ox;

6) E — півсегмент параболи $y^2=ax$, що відтинається прямими $x=a$, $y=0$, $y>0$;

7) E обмежена кривими $y=x^2$, $x^2=y$;

8) E обмежена кривими $y=\sqrt{2x-x^2}$, $y=0$;

9) E обмежена однією аркою циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ та віссю Ox;

10) E обмежена кардіоїдою $\rho=a(1+\cos\theta)$;

11) E обмежена петлею кривої $\rho^2=a^2\cos 2\theta$.

5. Знайти координати центра мас однорідного матеріального тіла E, що визначається даними умовами:

1) E — піраміда, обмежена площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$;

2) E — призматичне тіло, обмежене площинами $x = 0$, $z = 0$, $y = 1$, $y = 3$, $x + 2z = 3$;

3) E міститься між сферою радіуса a та конічною поверхнею з кутом при вершині 2α, якщо вісь конуса лежить на осі Oz, а вершина збігається з центром сфери і міститься у точці $(0, 0, 0)$;

4) E обмежене сферою радіуса a з центром у точці $(0, 0, 0)$ та двома площинами, що проходять через центр сфери та утворюють кут $60°$ (лінію перетину площин прийняти за вісь Oz);

5) E — циліндричний брус, обмежений поверхнями $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = x^2 + y^2$;

6) E обмежене поверхнями $z = \frac{y^2}{2}$, $2x + 3y - 12 = 0$, $x = 0$, $z = 0$;

7) E обмежене поверхнями $z = x^2 + y^2$, $y^2 = 4x$, $x = 1$, $z = 0$;

8) E обмежене поверхнями $x^2 + y^2 = 4z^2$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$;

9) E обмежене поверхнями $z^2 = xy$, $x = 5$, $y = 5$, $z = 0$;

10) E обмежене поверхнями $x^2 = 2pz$, $y^2 = 2px$, $x = \frac{p}{2}$, $z = 0$;

6. Знайти статичні моменти фігури E:

1) відносно катета a, якщо E — прямокутний трикутник з катетами $OA = a$, $OB = b$, а густина в довільній точці дорівнює відстані точки від катета OA;

2) відносно сторін a і b, якщо E — однорідний прямокутник;

3) відносно діаметра, якщо E — однорідний півкруг радіуса r;

4) відносно дотичної, якщо E — однорідний круг радіуса r;

5) відносно площини Oxy, якщо E — однорідне тіло, обмежене площинами $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

6) відносно площини, що проходить через вершину конуса E (радіус основи r, висота h), паралельно основі.

7. Обчислити моменти інерції однорідної фігури E:

1) відносно початку координат, якщо E обмежена прямими $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $x = 0$, $y = 0$;

2) відносно осі Ox, якщо E обмежена кривими $y^2 = 4x$, $x + y = 3$, $y = 0$;

3) відносно осі Ox, якщо E обмежена кривими $y = 4 - x^2$, $y = 0$;

4) відносно осей Ox, Oy та початку координат, якщо E обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

5) відносно координатних осей Ox та Oy, якщо E — однорідний круговий сектор радіуса a з кутом α при вершині. Сектор розміщений у першому квадранті, вершина його збігається з початком координат, а одна із сторін лежить на осі Ox;

6)• відносно осі Ox, якщо E обмежена кардіоїдою $\rho = a(1+\cos\theta)$;

7) відносно полюса, якщо E обмежена колом $\rho = 2a\cos\theta$;

8) відносно полюса, якщо E обмежена лемніскатою $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$;

9) відносно осі Oy, якщо E обмежена колом $x^2-2ax+y^2-2bx=a^2-b^2$;

10) відносно прямої $y+a=0$, якщо E обмежена кривими $y^2=ax$, $x=a$;

11) відносно осей Oz та Oy, якщо E — прямий круговий конус з радіусом основи r та висотою h (основа конуса міститься у площині Oxy);

12) відносно координатних осей та початку координат, якщо E — піраміда, обмежена площинами $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

13) відносно ребра куба $E=\{(x,y,z):\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le a,\ 0\le z\le a\}$;

14) відносно осі Oz, якщо E обмежена поверхнями $z=0$, $y=\pm a$, $z=\frac{h}{a^2}\left(y^2-x^2\right)$.

8. Об'єм прямого циліндра (або призми), зрізаного довільною площиною, дорівнює добутку площі основи на висоту, проведену з центра мас основи. Довести це.

9. Пластинку у формі трикутника занурено вертикально у воду так, що її основа лежить на поверхні води. Основа пластинки a, висота h. Обчислити тиск води на кожну із сторін пластинки.

10. Якщо у площині, де розміщено однорідну пластинку E масою m, взяти дві паралельні осі Ox та Ox' на відстані a одна від одної, причому перша з них проходить через центр мас пластинки, то моменти інерції пластинки E відносно цих осей пов'язані співвідношенням $I_{x'}=I_x+ma^2$. Довести це.

11. Знайти ньютонів потенціал матеріального тіла E у точці M:

1) E — верхня половина однорідної кулі $x^2+y^2+z^2=a^2$, $M(0,0,z)$;

2) E — куля радіуса a, $\mu(x,y,z)=f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ — густина у кожній точці кулі, $M(x,y,z)$;

3) E — однорідний конус з радіусом основи r та висотою h, $M(x,y,z)$;

4) E — сферичний шар $a^2\le x^2+y^2+z^2\le b^2$, $\mu(x,y,z)=f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$, $M(x,y,z)$;

5) E — однорідне тіло, обмежене еліпсоїдом $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, $b>a$, $M(x, y, z)$ — його центр.

12. Знайти силу, з якою однорідний конус з радіусом основи R та висотою H притягує матеріальну точку одиничної маси, розміщену в його вершині.

13. На пластинці, обмеженій кривими $x=1$, $y=0$, $y=2\sqrt{x}$, розподілено електричний заряд з поверхневою густиною $\mu(x, y)=7x+y$. Обчислити повний заряд пластинки.

14. Знайти силу, з якою однорідний циліндр з густиною μ притягується до центра своєї основи, якщо радіус основи циліндра дорівнює R, а висота H.

Зразки розв'язування задач

2. 2) Маса даної однорідної пластинки визначається за формулою $m=\iint\limits_E dxdy$, де область E зображено на рис. 27.

Отже, маємо

$$m=\int\limits_{-2a}^{a}dx\int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}dy=\int\limits_{-2a}^{a}\left(2a-x-\frac{x^2}{a}\right)dx=\left(2ax-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_{-2a}^{a}=\frac{9}{2}a^2.$$

3. 4) За відомою формулою

$$m=8\iiint\limits_E 2\left(R-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dxdydz,$$

де $E=\left\{(x, y, z):\ x^2+y^2+z^2\le R^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\right\}$.

При обчисленні цього потрійного інтеграла зручно скористатися сферичними координатами $x=\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z=\rho\cos\theta$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\rho\le R$.

Тоді

$$m=8\cdot 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{R}\rho^2(R-\rho)d\rho=$$

$$=16\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\rho^3R}{3}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^{R}=$$

$$=16\frac{\pi}{2}\left(\frac{R^4}{3}-\frac{R^4}{4}\right)=\frac{2}{3}\pi R^4.$$

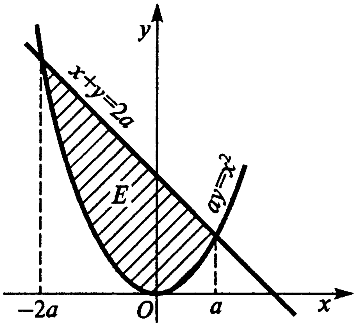


Рис. 27

4. 4) Треба знайти координати центра мас фігури, зображеної на рис. 28. Оскільки маємо однорідну матеріальну пластинку, симетричну відносно осі Ox, то $\overline{y}=0$,

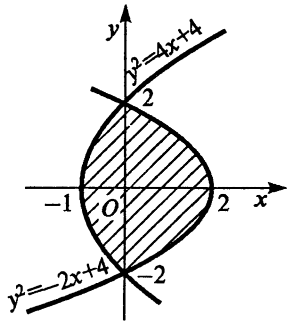


Рис. 28

$$\overline{x}=\frac{\iint\limits_E xdxdy}{\iint\limits_E dxdy},$$

де $E=\left\{(x,y):\ -2\le y\le 2,\ \frac{1}{4}\left(y^2-4\right)\le x\le\frac{1}{2}\left(4-y^2\right)\right\}$.

Обчислимо інтеграли, які входять до складу цієї формули:

$$\iint\limits_E dxdy=\int\limits_{-2}^{2}dy\int\limits_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)}dx=\int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{4-y^2}{2}-\frac{y^2-4}{4}\right)dy=$$

$$=\int\limits_{-2}^{2}\left(3-\frac{3}{4}y^2\right)dy=\left(3y-\frac{1}{4}y^3\right)\Bigg|_{-2}^{2}=8,$$

$$\iint\limits_E xdxdy=\int\limits_{-2}^{2}dy\int\limits_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)}xdx=\int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{1}{4}\left(4-y^2\right)^2-\frac{1}{16}\left(y^2-4\right)^2\right)dy=$$

$$=\int\limits_{-2}^{2}\left(3-\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{16}y^4\right)dy=\left(3y-\frac{y^3}{2}+\frac{3y^5}{80}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\frac{16}{5}.$$

Отже, центр мас даної матеріальної пластинки міститься у точці $\left(\frac{2}{5},0\right)$.

7. б) Момент інерції однорідної матеріальної фігури відносно осі Ox обчислюють за формулою

$$I_x=\iint\limits_E y^2dxdy,$$

де $E=\{(\rho,\theta):\ 0\le\rho\le a(1+\cos\theta),\ 0\le\theta\le 2\pi\}$.

Перейдемо до полярних координат $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$. Тоді

$$I_x=\iint\limits_E\rho^3\sin^2\theta\, d\rho\, d\theta=\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta\int\limits_0^{a(1+\cos\theta)}\rho^3d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\theta\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Bigg|_0^{a(1+\cos\theta)}d\theta=\frac{1}{4}a^4\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\theta(1+\cos\theta)^4d\theta=$$

$$=\frac{1}{4}a^4\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\theta\left(1+4\cos\theta+6\cos^2\theta+4\cos^3\theta+\cos^4\theta\right)d\theta=\frac{21}{32}\pi a^4.$$

§ 17.8. Невласні кратні інтеграли

Інтеграли по вимірній множині. Нехай функція f визначена у замкненій вимірній області $E\subset\mathbf{R}^n$, $n\ge 2$, за винятком точок, що утворюють множину E_0, яку можна покрити скінченною кількістю куль, суму мір яких можна зробити як завгодно малою:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists S_k,\ k\in\overline{1,m(\varepsilon)}:\ \bigcup_{k=1}^{m(\varepsilon)} S_k\supset E_0\wedge\sum_{k=1}^{m(\varepsilon)}\operatorname{mes}E_k<\varepsilon .$$

Якщо функція f інтегровна на множині $E_\varepsilon=E\setminus\bigcup_{k=1}^{m(\varepsilon)}S_k\ \ \forall\varepsilon>0$, то вираз

$$\int_E f(x)dx=\iint_E\ldots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n$$

називають *невласним кратним інтегралом* функції f по замкненій вимірній області E.

Невласний кратний інтеграл функції f по вимірній області E називають *збіжним*, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{E_\varepsilon}|f(x)|dx .$$

При цьому існуватиме також скінченна границя

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{E_\varepsilon}f(x)dx ,$$

яку називають *значенням невласного інтеграла* і записують

$$\int_E f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{E_\varepsilon}f(x)dx ,$$

а функцію f називають *невласно інтегровною* на замкненій вимірній області E.

Зауважимо, що інтегровну в області E функцію f називають також *власно інтегровною*.

Інтеграли по необмеженій області. Нехай замкнена область $E\subset\mathbf{R}^n$ необмежена, але така, що переріз $K_r\cap E=E_r$, де $K_r\subset\mathbf{R}^n$ — замкнена куля з радіусом r і з центром у початку координат, є вимірною множиною $\forall r>0$. Тоді якщо функція f власно або невласно інтегровна на множині $E_r\ \ \forall r>0$, то вираз

$$\int_E f(x)dx=\iint_E\ldots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n$$

називають *невласним кратним інтегралом* функції f по необмеженій області E.

Невласний кратний інтеграл функції f по необмеженій області E називають *збіжним*, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{r\to\infty}\int_{E_r}|f(x)|dx.$$

При цьому існуватиме також скінченна границя

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{E_r} f(x)dx,$$

яку називають *значенням невласного інтеграла*, а функцію f називають *невласно інтегровною* по необмеженій області E і записують

$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{r\to\infty} \int\limits_{E_r} f(x)dx.$$

Кулі в наведених означеннях можна вибирати сферичними:

$$S_\alpha = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n):\ \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \le \alpha^2 \right\}$$

або прямокутними:

$$S_\alpha = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n):\ |x_k| \le \alpha\ \ \forall k \in \overline{1, n} \right\}.$$

Із розглянутих означень, як окремі випадки при $n = 1, 2$, дістають означення невласних подвійних та потрійних інтегралів.

Невласні кратні інтеграли від неперервної функції f можна обчислювати зведенням до повторних інтегралів за умови, що повторний інтеграл від функції $|f|$ існує.

Наприклад, якщо $E = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ a \le x < +\infty,\ b \le y < +\infty\right\}$ та існує повторний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_b^{+\infty} |f(x, y)| dy$, то

$$\iint\limits_E f(x, y)dxdy = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_b^{+\infty} f(x, y)dy.$$

Заміну змінних у збіжних невласних кратних інтегралах від неперервних функцій виконують так само, як і у власних інтегралах. Так, при обчисленні подвійних збіжних невласних інтегралів використовують перехід до полярної системи координат, а у збіжних потрійних невласних інтегралах можна переходити до циліндричних або сферичних координат.

Вправи

1. Визначити, чи правильні дані твердження:

1) невласний подвійний інтеграл збіжний тоді і тільки тоді, коли він абсолютно збіжний;

2) якщо $E = \mathbf{R}^2$ і невласний інтеграл $\iint\limits_E f(x, y)dxdy$ збіжний, то

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S_n} f(x, y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{K_n} f(x, y)\,dxdy,$$

де $S_n = \left\{(x, y):\ x^2 + y^2 \le r_n^2\right\}$, $K_n = \left\{(x, y):\ |x| \le a_n, |y| \le a_n\right\}$, $r_n \to \infty$, $a_n \to \infty$, якщо $n \to \infty$;

3) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

4) якщо збігаються повторні інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dy$ і $\int\limits_a^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$, то збігатиметься і невласний подвійний інтеграл $\iint\limits_E f(x, y)\,dxdy$, де $E = \{(x, y):\ x \ge a,\ y \ge a\}$;

5)• невласний подвійний інтеграл $\iint\limits_E \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\,dxdy$, де $E = \{(x, y):\ x \ge 1,\ y \ge 1\}$, та невласні повторні інтеграли $\int\limits_1^{+\infty} dx \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\,dy$ і $\int\limits_1^{+\infty} dy \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\,dx$ є збіжними;

6) твердження, обернене до твердження 4), є правильним.

2. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{K_n} \sin\left(x^2 + y^2\right)dxdy = \pi$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{S_n} \sin\left(x^2 + y^2\right)dxdy = 0$, де $K_n = \{(x, y):\ |x| \le n, |y| \le n\}$, а $S_n = \left\{(x, y):\ x^2 + y^2 \le 2\pi n\right\}$. Чи буде збіжним невласний інтеграл $\iint\limits_E \sin\left(x^2 + y^2\right)dxdy$, де $E = \mathbf{R}^2$?

3. Дослідити на збіжність даний невласний інтеграл по необмеженій області E:

1) $\iint\limits_E \sin\left(x^2 + y^2\right)dxdy$, $E = \{(x, y):\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$;

2) $\iint\limits_E \frac{dxdy}{\left(x^2 + y^2\right)^{\alpha}}$, $E = \left\{(x, y):\ x^2 + y^2 \ge 1\right\}$;

3)• $\iint\limits_E \frac{dxdy}{\left(1 + x^{\alpha}\right)\left(1 + y^{\beta}\right)}$, $E = \{(x, y):\ x \in [0; +\infty),\ y \in [0; +\infty)\}$;

4) $\iint\limits_E \frac{dxdy}{\left(1+x^2+y^2\right)^\alpha}$, $E=\{(x, y)\colon\ x\in(-\infty; +\infty),\ y\in[0; 1]\}$;

5) $\iint\limits_E \frac{dxdy}{\left(1+x^2+y^2\right)^\alpha}$, $E=\left\{(x, y)\colon\ x^2+y^2\ge 1\right\}$;

6) $\iint\limits_E \frac{dxdy}{|x|^p+|y|^q}$, $p>0$, $q>0$, $E=\{(x, y)\colon\ |x|+|y|\ge 1\}$;

7) $\iint\limits_E \frac{y}{x}dxdy$, $E=\{(x, y)\colon\ x\ge 1,\ -1\le y\le 1\}$;

8) $\iint\limits_E \frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dxdy$, $E=\{(x, y)\colon\ x+y\ge 1\}$;

9) $\iiint\limits_E \mathrm{e}^{x+y+z}dxdydz$, $E=\{(x, y, z)\colon\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$;

10) $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^\alpha}$, $E=\left\{(x, y, z)\colon\ x^2+y^2+z^2\ge 1\right\}$;

11) $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$, $p>0$, $q>0$, $r>0$, $E=\{(x, y, z)\colon\ |x|+|y|+|z|\ge 1\}$;

12) $\iiint\limits_E \mathrm{e}^{(x+y+z)}dxdydz$, $E=\{(x, y, z)\colon\ x\le 0,\ y\le 0,\ z\le 0\}$.

4. Дослідити на збіжність даний невласний інтеграл по вимірній множині:

1) $\iint\limits_E \frac{dxdy}{x^2+y^2}$, $E=\left\{(x, y)\colon\ |y|\le x^2,\ x^2+y^2\le 1\right\}$;

2) $\iint\limits_E \frac{dxdy}{|x-y|^\alpha}$, $E=\{(x, y)\colon\ x\ge 0,\ y\le a\}$;

3) $\iint\limits_E \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $E=\left\{(x, y)\colon\ x^2+y^2\le 1\right\}$;

4)• $\iint\limits_E \frac{dxdy}{\left(x^2+y^2\right)^\alpha}$, $\alpha>0$, $E=\left\{(x, y)\colon\ x^2+y^2\le 1\right\}$;

5) $\iint\limits_E \frac{dxdy}{(x-y)^\alpha}$, $\alpha>0$, $E=\{(x, y)\colon\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$;

6) $\iint\limits_E \frac{dxdy}{|x|^p+|y|^q}$, $p>0$, $q>0$, $E=\{(x, y)\colon\ |x|+|y|\le 1\}$;

7) $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^\alpha}$, $\alpha>0$, $E=\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$;

8) $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{(xyz)^\alpha}$, $\alpha>0$, $E=\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$;

9) $\iiint\limits_E \frac{(x+y-z)dxdydz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^p}$, $E=\{(x,y,z):\ |x|+|y|+|z|<1\}$.

5. Обчислити дані невласні інтеграли:

1) $\iint\limits_E \frac{dxdy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$, $E=\{(x,y):\ 0\le x\le +\infty,\ 0\le y<+\infty\}$;

2) $\iint\limits_E \frac{dxdy}{(x+y)^\alpha}$, $E=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ x+y\ge 1\}$;

3) $\iint\limits_E xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}dxdy$, $E=\{(x,y):\ 0\le x<+\infty,\ 0\le y<+\infty\}$;

4) $\iint\limits_E \frac{dxdy}{x^4+y^2}$, $E=\left\{(x,y):\ x\ge 1,\ \ y\ge x^2\right\}$;

5) $\iint\limits_E \frac{dxdy}{x^5y^3}$, $E=\{(x,y):\ x\ge 1,\ xy\ge 1\}$;

6) $\iint\limits_E \frac{dxdy}{\left(x^2+y^2\right)^3}$, $E=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\ge 1\right\}$;

7) $\iint\limits_E \frac{dxdy}{\sqrt[3]{1-x^2-y^2}}$, $E=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\le 1\right\}$;

8) $\iint\limits_E \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, $E=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\le 1\right\}$;

9) $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$, $E=\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\ge 1\right\}$;

10) $\iiint\limits_E \mathrm{e}^{-x-y-z}dxdydz$, $E=\{(x,y,z):\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$;

11) $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{x^p y^q z^r}$, $E=\{(x,y,z):\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1\}$;

12) $\iiint\limits_E \mathrm{e}^{-x^2-y^2-z^2}dxdydz$, $E=\mathbf{R}^2$;

13)• $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{\left(1-x^2-y^2-z^2\right)^{\alpha}}$, $\alpha<1$, $E=\left\{(x, y, z):\ x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$;

14) $\iiint\limits_E \frac{(x-y)dxdydz}{z^3}$, $E=\{(x, y, z):\ x>1,\ y>1,\ z>1\}$.

6. Нехай $f(x, y)=2^n$, якщо $x=\frac{2m-1}{2^n}$, $0<y\le\frac{1}{2^n}$ $\forall n\in\mathbf{N}$ і $m\in\overline{1, 2^{n-1}}$, та $f(x, y)=0$ в інших точках (x, y). Показати, що невласний інтеграл $\iint\limits_E f(x, y)dxdy$, $E=\{(x,\ y):\ 0\le x,\ \ y\le 1\}$, збіжний, повторний інтеграл $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 f(x, y)dx=0$, а повторний інтеграл $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 f(x, y)dy$ не існує.

7. Знайти площу фігури, обмеженої параболами $y^2=2p\left(x-\frac{p}{2}\right)$, $y^2=2q\left(x-\frac{q}{2}\right)$, $0<p<q$, і віссю абсцис.

Зразки розв'язування задач

1. 5) Нехай $E_n=\{(x, y):\ 1\le x\le n,\ 1\le y\le n\}$. Тоді

$$\iint\limits_{E_n}\frac{\left|x^2-y^2\right|}{\left(x^2+y^2\right)^2}dxdy=\int\limits_1^n dy\int\limits_1^n\frac{\left|x^2-y^2\right|}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx=\int\limits_1^n dy\left(\int\limits_1^y\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_y^n\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx\right)=\int\limits_1^n\left(\left.\frac{x}{x^2+y^2}\right|_1^y-\left.\frac{x}{x^2+y^2}\right|_y^n\right)dy=$$

$$=\int\limits_1^n\left(\frac{2y}{2y^2}-\frac{1}{1+y^2}-\frac{n}{n^2+y^2}\right)dy=\ln y\Big|_1^n-\operatorname{arctg}y\Big|_1^n-\operatorname{arctg}\frac{y}{n}\Big|_1^n\to+\infty,\ n\to\infty.$$

Отже, даний невласний інтеграл розбіжний.
Розглянемо невласні повторні інтеграли:

$$\int\limits_1^{+\infty}dx\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy=\int\limits_1^{+\infty}\left.\frac{y}{x^2+y^2}\right|_1^{+\infty}dx=-\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=-\operatorname{arctg}x\Big|_1^{+\infty}=-\frac{3}{4}\pi,$$

$$\int\limits_1^{+\infty}dy\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx=\int\limits_1^{+\infty}\left.\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right|_1^{+\infty}dy=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}=\operatorname{arctg}y\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4},$$

тобто обидва повторні інтеграли збіжні. Дане твердження неправильне.

3. 3) Нехай $E_n = \{(x, y)\colon\ 0 \le x,\ y \le n\}$. Тоді

$$I_n = \iint\limits_{E_n} \frac{dxdy}{\left(1+x^\alpha\right)\left(1+y^\beta\right)} = \int_0^n \frac{dx}{1+x^\alpha} \int_0^n \frac{dy}{1+y^\beta}.$$

Якщо $n \ge 2$, то

$$\int_0^n \frac{dx}{1+x^\alpha} \ge \int_0^1 \frac{dx}{1+x^\alpha} \ge \frac{1}{2},\quad \alpha \ge 0,$$

$$\int_0^n \frac{dx}{1+x^\alpha} \ge \int_1^n \frac{dx}{1+x^\alpha} \ge \frac{n-1}{2} \ge \frac{1}{2},\quad \alpha < 0.$$

Тому якщо $\beta \le 1$, то $\forall \alpha \in \mathbf{R}$

$$I_n \ge \frac{1}{2}\int_1^n \frac{dy}{1+y} = \frac{1}{2}\left(\ln(n+1) - \ln 2\right) \to +\infty,\quad n \to \infty.$$

Так само можна показати, що $I_n \to +\infty$, коли $\alpha \le 1$, а β — довільне.

Нехай $\alpha > 1$ і $\beta > 1$, тоді

$$\int_0^n \frac{dx}{1+x^\alpha} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^\alpha} + \int_1^n \frac{dx}{1+x^\alpha} \le \int_0^1 \frac{dx}{1+x^\alpha} + \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^\alpha} + \left.\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right|_1^n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^\alpha} + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \le$$

$$\le \int_0^1 \frac{dx}{1+x^\alpha} + \frac{1}{\alpha-1} = H_\alpha < +\infty.$$

Аналогічно $\displaystyle\int_0^n \frac{dy}{1+y^\beta} \le H_\beta < +\infty$. Отже, $I_n \le H_\alpha H_\beta < +\infty$. Оскільки послідовність (I_n) монотонна (чому?), то вона збіжна. Таким чином, заданий невласний інтеграл збіжний.

4. 4) Підінтегральна функція $f(x, y) = \dfrac{1}{\left(x^2+y^2\right)^\alpha}$, $\alpha > 0$, додатна і визначена в області E, крім точки $(0, 0)$. Тому

$$I = \iint\limits_E \frac{dxdy}{\left(x^2+y^2\right)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{E_\varepsilon} \frac{dxdy}{\left(x^2+y^2\right)^\alpha},$$

де $E_\varepsilon = E \setminus \left\{(x, y)\colon\ x^2+y^2 \le \varepsilon^2,\ 0 < \varepsilon < 1\right\}$.

Перейдемо до полярної системи координат $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $\varepsilon \le \rho \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$. При $\alpha \ne 0$ маємо

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_\varepsilon^1 \rho^{1-2\alpha} d\rho = 2\pi \lim_{\varepsilon \to 0} \left.\frac{\rho^{2(1-\alpha)}}{2(1-\alpha)}\right|_\varepsilon^1 = \pi \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1-\varepsilon^{2(1-\alpha)}}{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{1-\alpha}, & \alpha < 1, \\ +\infty, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Якщо $\alpha = 1$, то

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_\varepsilon^1 \frac{d\rho}{\rho} = 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\rho\Big|_\varepsilon^1 = +\infty .$$

Таким чином, заданий невласний інтеграл збіжний при $\alpha < 1$ і значення його дорівнює $\frac{\pi}{1-\alpha}$.

5. 13) Скористаємось сферичними координатами $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$, $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Тоді

$$I = \iiint\limits_E \frac{dxdydz}{\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^\alpha} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^1 \rho^2\left(1-\rho^2\right)^{-\alpha} d\rho = 4\pi\int_0^1 \rho^2\left(1-\rho^2\right)^{-\alpha} d\rho .$$

Застосуємо підстановку $\rho^2 = t, d\rho = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$, тоді

$$I = 2\pi\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\alpha} dt = 2\pi\int_0^1 t^{\frac{3}{2}-1}(1-t)^{(1-\alpha)-1} dt = 2\pi B\left(\frac{3}{2}, 1-\alpha\right),$$

де $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$, $x > 0$, $y > 0$, — *бета-функція.*

Розділ 18 ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

§ 18.1. Поверхневі інтеграли першого та другого роду

Множину $S = \{(x, y, z)\colon\ x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in \overline{D}\}$, де функції x, y, z неперервні разом із частинними похідними першого порядку у замкненій квадровній області $\overline{D}$ та $A^2 + B^2 + C^2 > 0$,

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix},\quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix},\quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix},$$

називають *гладкою поверхнею.*

Вектор

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}\vec{k}$$

називають *вектором нормалі*, що задає верхню (зовнішню) сторону поверхні (S^+), а вектор $-\vec{n}$ задає нижню (внутрішню) сторону цієї поверхні (S^-), а саму поверхню S вважають *двосторонньою поверхнею.*

Довжину і напрямні косинуси вектора нормалі $\vec{n}$ обчислюють за формулами

$$|\vec{n}| = \sqrt{EG - F^2},$$

$$\cos\alpha = \cos\left(\widehat{\vec{n},\ \vec{i}}\right) = \frac{A}{\sqrt{EG - F^2}},\qquad \cos\beta = \cos\left(\widehat{\vec{n},\ \vec{j}}\right) = \frac{B}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$\cos\gamma = \cos\left(\widehat{\vec{n},\ \vec{k}}\right) = \frac{C}{\sqrt{EG - F^2}},$$

де $E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2,\ \ G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2,\ \ F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$.

Поверхневі інтеграли першого роду. Якщо функція f неперервна на гладкій поверхні S, то *поверхневим інтегралом першого роду* функції f по поверхні S називають число $\iint\limits_S f(x, y, z)\,dS$, яке визначається рівністю

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,dS = \iint\limits_D f\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Зокрема, якщо поверхню S задано явним рівнянням $z = z(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$, то

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{\overline{D}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\,dxdy.$$

Аналогічні формули можна дістати, якщо поверхню S задано рівнянням $x = x(y, z)$, $(y,z) \in \overline{D}$ або $y = y(x, z)$, $(x,z) \in \overline{D}$.

Поверхневі інтеграли другого роду. Якщо на двосторонній гладкій поверхні S задано неперервні функції P, Q і R, то *поверхневим інтегралом другого роду* по верхній (зовнішній) стороні поверхні S^+ називають число $\iint\limits_{S^+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$, яке визначається рівністю

$$\iint\limits_{S^+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint\limits_S \left(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right)dS$$

(у правій частині міститься поверхневий інтеграл першого роду). Зміна орієнтації поверхні приводить до зміни знака поверхневого інтеграла другого роду на протилежний.

Нехай поверхню S задано явним рівнянням $z = z(x, y)$, $(x,y) \in \overline{D}$, тоді $x = u$, $y = v$, $z = z(u, v)$, $E = 1 + z_x'^2$, $G = 1 + z_y'^2$, $F = z_x' z_y'$,

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}, \quad \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & z_x' \\ 0 & 1 & z_y' \end{vmatrix} = -z_x'\vec{i} - z_y'\vec{j} + \vec{k}.$$

І в цьому випадку

$$\iint\limits_{S^+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint\limits_S \left(-P(x,y,z)z_x' - Q(x,y,z)z_y' + R(x,y,z)\right)\frac{dS}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} =$$
$$= \iint\limits_{\overline{D}} \Big(-P(x,y,z(x,y))z_x' - Q(x,y,z(x,y))z_y' + R(x,y,z(x,y))\Big)dxdy.$$

Аналогічні формули дістають, якщо поверхню S задано рівнянням $x = x(y, z)$, $(y,z) \in \overline{D}$ або $y = y(x, z)$, $(x,z) \in \overline{D}$.

Якщо кусково-гладка поверхня S складається зі скінченної кількості гладких поверхонь S_k, $k \in \overline{1,\ n}$, то за означенням покладають, що

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{S_k} f(x,y,z)\,dS_k.$$

Аналогічне твердження має місце і для поверхневого інтеграла другого роду.

Застосування поверхневих інтегралів

1. $P=\iint\limits_S dS$ — площа поверхні S.

Нехай S — матеріальна поверхня з поверхневою густиною $\mu(x, y, z)$ в довільній її точці $A(x, y, z)$. Тоді мають місце такі формули:

2. $m=\iint\limits_S \mu(x,y,z)dS$ — маса поверхні.

3. $M_{xy}=\iint\limits_S z\mu(x,y,z)dS$, $M_{xz}=\iint\limits_S y\mu(x,y,z)dS$, $M_{yz}=\iint\limits_S x\mu(x,y,z)dS$ — статичні моменти поверхні відносно координатних площин Oxy, Oxz, Oyz.

4. $\overline{x}=\dfrac{M_{yz}}{m}$, $\overline{y}=\dfrac{M_{xz}}{m}$, $\overline{z}=\dfrac{M_{xy}}{m}$, — координати центра мас поверхні.

5. $I_x=\iint\limits_S \left(y^2+z^2\right)\mu(x,y,z)dS$ — момент інерції поверхні відносно осі Ox.

6. $I_{yz}=\iint\limits_S x^2\mu(x,y,z)dS$ — момент інерції поверхні відносно площини Oyz.

7. $I_0=\iint\limits_S \left(x^2+y^2+z^2\right)\mu(x,y,z)dS$ — момент інерції поверхні відносно початку координат.

8. $\vec{F}=\{F_x,F_y,F_z\}$ — сила притягання матеріальної точки $M_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$ масою m_0 матеріальною поверхнею S:

$$F_x=\gamma m_0\iint\limits_S \frac{(x-x_0)\mu(x,y,z)dS}{\sqrt{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right)^3}},$$

$$F_y=\gamma m_0\iint\limits_S \frac{(y-y_0)\mu(x,y,z)dS}{\sqrt{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right)^3}},$$

$$F_z=\gamma m_0\iint\limits_S \frac{(z-z_0)\mu(x,y,z)dS}{\sqrt{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right)^3}}$$

(γ — гравітаційна стала).

Вправи

1. Визначити, чи правильні дані твердження:

1) якщо поверхню S задано явним рівнянням $z=z(x, y)$, $(x,y)\in\overline{D}$ і функції z'_x та z'_y неперервні в області $\overline{D}$, то S — гладка поверхня;

2) вектор нормалі $\vec{n}$ є векторним добутком векторів $\vec{r}_u = x'_u\vec{i} + y'_u\vec{j} + z'_u\vec{k}$ і $\vec{r}_v = x'_v\vec{i} + y'_v\vec{j} + z'_v\vec{k}$;

3) вектори $\vec{r}_u$ і $\vec{r}_v$ з попереднього завдання неколінеарні і лежать у площині, дотичній до поверхні S;

4) поверхневий інтеграл першого роду залежить від орієнтації поверхні S;

5) $\iint\limits_{S^+} R(x,y,z)dxdy$ є поверхневим інтегралом другого роду;

6) $\iint\limits_{S^+} R(x,y,z)dxdy = -\iint\limits_{S^-} R(x,y,z)dxdy$;

7)• $\iint\limits_{S^+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{\bar{D}} (\vec{F},\vec{n})dxdy$.

2. Обчислити дані поверхневі інтеграли першого роду:

1) $\iint\limits_{S} \frac{dS}{(1+x+z)^2}$, S — частина площини $x + y + z = 1$, розміщена у першому октанті;

2) $\iint\limits_{S} (x^2 + y^2)dS$, S — частина конічної поверхні $z^2 = x^2 + y^2$ між площинами $z = 0$, $z = 1$;

3) $\iint\limits_{S} xyzdS$, S — частина поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2$ між площинами $z = 0$, $z = 1$;

4) $\iint\limits_{S} (x^2 + y^2)dS$, S — поверхня сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

5) $\iint\limits_{S} \sqrt{x^2 + y^2}dS$, S — бічна поверхня конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$, $0 \le z \le b$;

6) $\iint\limits_{S} (x + y + z)dS$, S — частина поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$;

7)• $\iint\limits_{S} (y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2)dS$, S — частина поверхні конуса $z^2 = k^2(x^2 + y^2)$, для якої $z \ge 0$, $x^2 + y^2 \le 2ax$;

8) $\iint\limits_{S} zdS$, S — частина поверхні гіперболічного параболоїда $z = xy$, яка вирізається циліндром $x^2 + y^2 = 4$;

9) $\iint\limits_S ydS$, S — частина поверхні циліндра $x = 2y^2 + 1$, $y > 0$, що вирізається поверхнями $x = y^2 + z^2$, $x = 2$, $x = 3$;

10) $\iint\limits_S \left(x^2 + y^2\right)dS$, S — частина поверхні $x^2 + y^2 = z^2$, $z \le 1$;

11) $\iint\limits_S zdS$, S — частина поверхні гелікоїда $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$, $0 \le u \le a$, $0 \le v \le 2\pi$;

12) $\iint\limits_S (xy + yz + zx)dS$, S — частина конічної поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, що вирізається циліндром $x^2 + y^2 = 2ax$.

3. Обчислити дані поверхневі інтеграли другого роду

1) $\iint\limits_S zdxdy$, S — зовнішня поверхня еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

2) $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, S — зовнішня поверхня півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$;

3) $\iint\limits_S yzdydz + xzdxdz + xydxdy$, S — зовнішня поверхня тетраедра, обмеженого площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$;

4)• $\iint\limits_S dxdy$, S — внутрішня поверхня конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 1$;

5) $\iint\limits_S \frac{dxdy}{z}$, S — зовнішня поверхня сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

6) $\iint\limits_S x^2dydz$, S — зовнішня поверхня частини параболоїда $z = \frac{H}{R^2}\left(x^2 + y^2\right)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \le H$;

7) $\iint\limits_S ydxdz$, S — зовнішня поверхня частини параболоїда $z = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 2$;

8) $\iint\limits_S (y - z)dydz + (z - x)dxdz + (x - y)dxdy$, S — внутрішня поверхня частини конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le h$;

9) $\iint\limits_S \left(\frac{\cos\alpha}{x} + \frac{\cos\beta}{y} + \frac{\cos\gamma}{z}\right)dS$, S — зовнішня поверхня еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

4. Знайти площу даної поверхні:

1) $2x + 2y + z = 8a$, $a > 0$, вміщеної всередині циліндра $x^2 + y^2 = R^2$;

2) циліндра $x^2 + y^2 = R^2$, вміщеного між площинами $z = 0$ та $y + z = 0$;

3) циліндра $y^2 + z^2 = R^2$, що міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = R^2$;

4) параболоїда $x^2 + y^2 = 6z$, що міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = 27$;

5) сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, вміщеної всередині параболоїда $x^2 + y^2 = 2az$, $a > 0$;

6)• конуса $z^2 = 2xy$, розміщеного у першому октанті між площинами $x = 2$, $y = 4$.

5. Знайти масу матеріальної поверхні із заданою поверхневою густиною μ:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, $\mu(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

2) $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$, густина μ у кожній точці пропорційна її відстані від осі конуса;

3) $2az = x^2 - y^2$, що вирізається циліндром $x^2 + y^2 = a^2$, $\mu(x, y, z) = k|z|$, $k > 0$;

4) $|x| \le a$, $|y| \le a$, $|z| \le a$, $\mu(x, y, z) = k\sqrt[3]{|xyz|}$, $k > 0$;

5) $2z = x^2 + y^2$, $z \le 1$, $\mu(x, y, z) = z$;

6) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$, $\mu(x, y, z) = \frac{z}{a}$.

6. Знайти координати центра мас даної матеріальної поверхні:

1) однорідної півсфери з радіусом R;

2)• однорідної частини площини $z = x$, обмеженої площинами $x + y = 1$, $y = 0$, $x = 0$;

3) однорідної частини поверхні $4 - 2z = x^2 + y^2$, $z \ge 0$;

4) однорідної поверхні $z = x^2 + y^2$, обмеженої площиною $z = 1$;

5) конічної поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$, якщо густина у кожній точці пропорційна її відстані від осі конуса;

6) однорідної частини поверхні конуса $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2$, $0 \le z \le H$;

7) однорідного сегмента поверхні сфери з радіусом R, що відтинається площиною $z = H$, $H > 0$;

8) однорідної частини поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, обмеженої поверхнями $x^2 + y^2 = Rx$, $z = 0$.

7. Знайти моменти інерції даної однорідної матеріальної поверхні:

1) півсфери $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\ge 0$, відносно осі Oz та площини основи;

2) параболоїда $x^2+y^2=2z$, $0\le z\le 1$, відносно осі Oz;

3) сегмента сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$, $H\le z\le R$, відносно осі Oz;

4) параболоїда $x^2+y^2=2cz$, $0\le z\le c$, відносно осі Oz;

5) конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le a$, відносно осі Oz;

6) конуса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=0$, $0\le z\le b$, відносно прямої $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-b}{0}$;

7) куба з центром у початку координат і ребром $2a$ відносно початку координат;

8) циліндра $x^2+y^2=R^2$, $0\le z\le H$, відносно початку координат;

9) частини циліндра $x^2+y^2=ax$, що міститься всередині сфери x^2+y^2+ $+z^2=a^2$, відносно площини Oxz;

10) частини сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\ge 0$, що міститься всередині циліндра $x^2+y^2=ax$, відносно площини Oyz.

8. Довести, що $\iint\limits_S \cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{k}}\right)dS=0$ для довільної замкненої поверхні S.

9•. На поверхні конуса з вершиною у початку координат та віссю, розміщеною на осі аплікат, розподілено електричні заряди з поверхневою густиною, пропорційною аплікаті точки. Визначити сумарний заряд всієї поверхні конуса, якщо радіус його основи дорівнює a, а висота h.

10*. Заряд q рівномірно розподілений по сфері радіуса R. Знайти напруженість електричного поля сфери у точці, яка міститься на відстані r, $r\ne R$, від її центра.

11*. З якою силою однорідна матеріальна поверхня $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $z=\rho$, $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le b\le\ \rho\le a$, притягує матеріальну точку масою m, вміщену у початку координат?

12*. Довести формулу Пуассона

$$\iint\limits_S f(ax+by+cz)dS=2\pi\int\limits_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)du,$$

де S — поверхня сфери $x^2+y^2+z^2=1$.

Зразки розв'язування задач

1. 7) Через те що $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$, а $\vec{n}=|\vec{n}|\left(\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}+\cos\gamma\cdot\vec{k}\right)$, де $|\vec{n}|=$ $=\sqrt{EG-F^2}$, то

$$\vec{F}\cdot\vec{n}=\sqrt{EG-F^2}\,(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma),$$

звідки

$$\iint\limits_{\bar D} \vec F \vec n dxdy = \iint\limits_{\bar D} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\sqrt{EG - F^2}\,dxdy$$

за умови, що $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$.

Проте за цієї самої умови

$$\iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS =$$

$$= \iint\limits_{\bar D} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\sqrt{EG - F^2}\,dxdy,$$

тому розглядуване твердження правильне.

2. 7) Маємо

$$z = k\sqrt{x^2 + y^2}, \quad z'_x = \frac{kx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{ky}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \frac{k^2\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2}} = \sqrt{1 + k^2}.$$

Отже,

$$I = \iint\limits_{S} \left(y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2\right) dS = \iint\limits_{\bar D} \left(k^2\left(x^2 + y^2\right)^2 + x^2 y^2\right)\sqrt{1 + k^2}\,dxdy,$$

де $\bar D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \le 2ax\right\}$.

Перейдемо до полярних координат $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Тоді область $\bar D$, обмежена колом $x^2 + y^2 = 2ax$ або $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, перейде в область $\bar D^*$, обмежену кривими $\rho = 2a\cos\theta$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\rho = 0$. Тому

$$I = \sqrt{1 + k^2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_{0}^{2a\cos\theta} \left(k^2\rho^4 + \rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta\right)\rho d\rho =$$

$$= \frac{32}{3}\sqrt{1 + k^2}\,a^6 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(k^2\cos^6\theta + \left(1 - \cos^2\theta\right)\cos^8\theta\right) d\theta =$$

$$= \frac{32}{3} a^6 \sqrt{1 + k^2}\left(2k^2 \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\pi}{2} + 2\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\pi}{2} - 2\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\cdot\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi a^6}{24}\sqrt{1 + k^2}\left(80k^2 + 7\right).$$

3. 4) Проекцією заданої частини поверхні конуса на площину Oxy є круг $\bar D = \left\{(x, y) :\ x^2 + y^2 \le 1\right\}$, тоді

$$I = \iint\limits_{S} dxdy = -\iint\limits_{\bar D} dxdy = -\operatorname{mes}\bar D = -\pi.$$

4. 6) Маємо

$$z = \sqrt{2xy}, \quad z'_x = \sqrt{\frac{y}{2x}}, \quad z'_y = \sqrt{\frac{x}{2y}}, \quad \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + \frac{y}{2x} + \frac{x}{2y}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right).$$

Отже,

$$P = \iint\limits_S dS = \iint\limits_{\overline{D}} \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dxdy = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint\limits_{\overline{D}} \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) dxdy,$$

$\overline{D} = \{(x, y):\ 0 \le x \le 2,\quad 0 \le y \le 4\}$ — проекція поверхні S на площину Oxy (рис. 29).

Обчислюючи подвійний інтеграл, дістаємо

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 dx \int_0^4 \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 \left(2\sqrt{xy} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{y^3}{x}}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=4} dx =$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^2 \left(\sqrt{x} + \frac{4}{3\sqrt{x}}\right) dx = 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{3}x^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^2 = 16 \text{ (кв. од.)}.$$

6. 2) Для відшукання координат центра мас даної однорідної матеріальної поверхні скористаємось формулами

$$\overline{x} = \frac{\iint\limits_S x dS}{\iint\limits_S dS}, \quad \overline{y} = \frac{\iint\limits_S y dS}{\iint\limits_S dS}, \quad \overline{z} = \frac{\iint\limits_S z dS}{\iint\limits_S dS}.$$

Маємо

$$z = x,\ z'_x = 1, \quad z'_y = 0, \quad \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{2}.$$

Обчислимо необхідні інтеграли:

$$\iint\limits_S dS = \iint\limits_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x}} \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dxdy = \sqrt{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\iint\limits_S x dS = \sqrt{2}\int_0^1 x dx \int_0^{1-x} dy = \sqrt{2}\int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{\sqrt{2}}{6},$$

$$\iint\limits_S y dS = \sqrt{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} y dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 (1-x)^2\,dx = \frac{1}{3\sqrt{2}},$$

$$\iint\limits_S z dS = \iint\limits_S x dS = \sqrt{\frac{2}{6}}.$$

Таким чином, $\overline{x} = \frac{1}{3}, \quad \overline{y} = \frac{1}{3}, \quad \overline{z} = \frac{1}{3}.$

9. Сумарний заряд основи конуса визначається добутком її площі на густину точкового заряду, тобто $E_{\text{осн}} = \pi a^2 \cdot kh = k\pi a^2 h$, де k — коефіцієнт пропорційності.

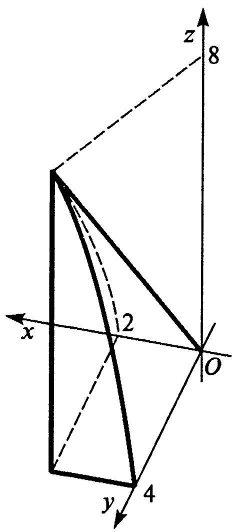


Рис. 29

Заряд бічної поверхні конуса визначається інтегралом

$$E_{\text{біч}} = \iint_S \mu(x, y, z)dS = \iint_S kzdS.$$

Рівняння поверхні конуса $z^2 = \frac{h^2}{a^2}\left(x^2 + y^2\right)$, $0 \le z \le h$, звідки

$$zdz = \frac{h^2}{a^2}(xdx + ydy) \text{ і } z'_x = \frac{h^2}{a^2}\cdot\frac{x}{z}, \quad z'_y = \frac{h^2}{a^2}\cdot\frac{y}{z}.$$

Отже,

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \frac{h^4}{a^4}\cdot\frac{x^2 + y^2}{z^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a},$$

тому

$$E_{\text{біч}} = \frac{kh}{a} \iint\limits_{x^2 + y^2 \le a^2} \sqrt{x^2 + y^2}\,\frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} dxdy.$$

Перейшовши до полярних координат $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, матимемо

$$E_{\text{біч}} = \frac{kh\sqrt{a^2 + h^2}}{a^2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^2 d\rho = \frac{2}{3}k\pi ah\sqrt{a^2 + h^2}.$$

І остаточно весь заряд

$$E = E_{\text{осн}} + E_{\text{біч}} = \frac{k\pi ah}{3}\left(3a + 2\sqrt{a^2 + h^2}\right).$$

§ 18.2. Основні інтегральні формули

Формула Стокса. Нехай кусково-гладка двостороння поверхня S обмежена простим кусково-гладким контуром Γ. Якщо вибрано певну орієнтацію поверхні, то додатним напрямом обходу контуру Γ вважають той, при русі вздовж якого вибрана сторона поверхні залишається зліва. Цей напрям обходу контуру позначають через Γ^+ і кажуть, що він узгоджений з орієнтацією поверхні S. Якщо функції P, Q і R неперервні на поверхні S разом зі своїми частинними похідними першого порядку, то має місце формула

$$\int_{\Gamma^+} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

або

$$\int_{\Gamma^+} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$

$$= \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)dS.$$

Цю формулу називають *формулою Стокса.* Вона пов'язує криволінійний інтеграл другого роду вздовж замкненого контуру Γ^+ з поверхневим інтегралом другого роду по поверхні S, обмеженій контуром Γ^+.

Формула Стокса залишається справедливою і у тому випадку, коли поверхня S є плоскою областю, паралельною одній з координатних площин. Для такої поверхні формула Стокса переходить у формулу Гріна. Наприклад, якщо поверхня S паралельна площині Oxy, то вектор нормалі $\vec{n} = \{0, 0, 1\}$, $\int\limits_{\Gamma^+} R(x, y, z)dz = 0$ і з формули Стокса дістаємо формулу Гріна

$$\int\limits_{\Gamma^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Зауважимо, що останній доданок у правій частині формули Стокса є правою частиною формули Гріна. Два перших доданки можна дістати з нього циклічною перестановкою змінних x, y, z і функцій P, Q, R:

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ \nearrow & & \searrow \\ z & \longleftarrow & y \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & P & \\ \nearrow & & \searrow \\ R & \longleftarrow & Q. \end{array}$$

Формула Остроградського — Гаусса. Нехай функції P, Q і R неперервні разом із частинними похідними першого порядку у замкненій області $\overline{G}$, що обмежена кусково-гладкою двосторонньою поверхнею S. Тоді має місце формула

$$\iiint\limits_{\overline{G}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz =$$
$$= \iint\limits_{S} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy,$$

або

$$\iiint\limits_{\overline{G}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz =$$
$$= \iint\limits_{S} (P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma)dS,$$

де поверхневий інтеграл береться по зовнішній стороні поверхні.

Цю формулу називають *формулою Остроградського — Гаусса.* Якщо функції P, Q, R такі, що $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1$, то інтеграл у лівій частині цієї формули дорівнює об'єму області $\overline{G}$, тобто $V(\overline{G})=\iiint\limits_{\overline{G}} dxdydz$, і дістаємо формулу для обчислення об'єму області $\overline{G}$ через інтеграл по її поверхні S:

$$V(\overline{G})=\iint\limits_{S} P(x, y, z)dydz+Q(x, y, z)dxdz+R(x, y, z)dxdy.$$

Зокрема, якщо покласти $P(x, y, z) = x$, $Q(x, y, z) = y$, $R(x, y, z) = z$, то матимемо формулу

$$V(\overline{G})=\frac{1}{3}\iint\limits_{S} xdydz+ydxdz+zdxdy.$$

Вправи

1. Обчислити дані криволінійні інтеграли за допомогою формули Стокса:

1) $\int\limits_{\Gamma}(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz$, Γ — коло $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=0; \end{cases}$

2) $\int\limits_{\Gamma} x^2y^3dx+dy+zdz$, Γ — коло $\begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ z=0; \end{cases}$

3) $\int\limits_{\Gamma} ydx+z^2dy+x^2dz$, Γ — коло $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ z=\sqrt{3}; \end{cases}$

4)• $\int\limits_{\Gamma}\left(y^2+z^2\right)dx+\left(x^2+z^2\right)dy+\left(x^2+y^2\right)dz$, Γ — лінія перетину поверхонь $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $x^2+y^2=2rx$, $0<r<R$, $z\geq 0$;

5) $\int\limits_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, Γ — еліпс $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+z=1; \end{cases}$

6) $\int\limits_{\Gamma}\left(y^2-z^2\right)dx+\left(z^2-x^2\right)dy+\left(x^2-y^2\right)dz$, Γ — межа перерізу куба $K=\{(x, y, z)\colon\ 0\leq x\leq a,\ 0\leq y\leq a,\ 0\leq z\leq a\}$ площиною $x+y+z=\frac{3}{2}a$;

7) $\int\limits_{\Gamma}\left(y^2-z^2\right)dx+\left(z^2-x^2\right)dy+\left(x^2-y^2\right)dz$, Γ — контур, що охоплює частину сфери $x^2+y^2+z^2=1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$;

8) $\int\limits_{OA} yzdx+3xzdy+2xydz$, OA — крива $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t^2$, $0\leq t\leq 2\pi$, $O(0, 0, 0)$, $A(2\pi, 0, 4\pi^2)$.

2. Якщо функції P, Q і R неперервні в поверхнево-однозв'язній[1] області $G \subset \mathbf{R}^3$ разом із частинними похідними першого порядку, то

$$\int_\Gamma P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0$$

для довільного простого кусково-гладкого контуру $\Gamma \subset G$ тоді і тільки тоді, коли $Q'_x \equiv P'_y$, $R'_y \equiv Q'_z$, $P'_z \equiv R'_x$ усюди в області G. Довести це.

3. Використати задачу 2 для встановлення необхідних і достатніх умов незалежності криволінійного інтеграла $\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ від форми дуги AB.

4. Обчислити дані поверхневі інтеграли за допомогою формули Остроградського — Гаусса:

1) $\int\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS$, S — поверхня еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

2) $\iint\limits_S \left(x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma\right)dS$, S — поверхня сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

3) $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, S — поверхня конуса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$, $0 \le z \le b$;

4) $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, S — поверхня циліндра $x^2 + y^2 = a^2$, $-H \le z \le H$;

5) $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dxdz + z^2dxdy$ — внутрішня поверхня частини параболоїда $z = x^2 + y^2$, що відтинається площиною $2x - z = 0$;

6) $\iint\limits_S yzdydz + xzdxdz + xydxdy$, S — межа тіла $x^2 + y^2 \le a^2$, $0 \le z \le h$;

7) $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, S — частина поверхні $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 1$;

8) $\iint\limits_S ydydz + zdxdz + xdxdy$, S — поверхня піраміди, обмежена площинами $x + y + z = a, a > 0, x = 0, y = 0, z = 0$;

9) $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$, S — поверхня сфери $x^2 + y^2 + z^2 = x$;

---

[1] Область $G \subset \mathbf{R}^3$ називають поверхнево-однозв'язною, якщо для довільного кусково-гладкого контуру $\Gamma \subset G$ існує кусково-гладка проста поверхня $S \subset G$, обмежена контуром Γ.

10)• $\iint\limits_S \frac{xdydz + ydxdz + zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, S — зовнішня поверхня довільної сфери, що лежить в області $\mathbf{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$;

11) $\iint\limits_S \left(\left(z^n-y^n\right)\cos\alpha+\left(x^n-z^n\right)\cos\beta+\left(y^n-x^n\right)\cos\gamma\right)dS$, S — верхня половина поверхні сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$.

5. За допомогою поверхневого інтеграла знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $x^2+y^2=8,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ x+y+z=4;$

2) $x^2+4y^2=1-z,\ \ z=0;$ 3) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1,\ \ y=z,\ \ z=0;$

4) $y=x^2,\ \ y=1,\ \ x+y+z=4,\ \ z=0;$

5) $x^2+y^2+z^2=4,\ \ 3z=x^2+y^2;$

6) $x^2+y^2=4-z,\ \ 2z=2+x^2+y^2.$

6. Довести тотожності:

1) $\iint\limits_D\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)dxdy=\int\limits_\Gamma\frac{\partial u}{\partial n}dl$, Γ — контур, що охоплює область D, $\frac{\partial u}{\partial n}$ — похідна за напрямом зовнішньої нормалі;

2)• $\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint\limits_G\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+u\Delta u\right)dxdydz$, де $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+$ $+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$;

3) $\iint\limits_S\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=\iiint\limits_G(u\Delta v-v\Delta u)dxdydz$ (друга формула Гріна), де S — гладка поверхня, що охоплює просту замкнену область G, а функції u і v мають неперервні частинні похідні другого порядку в області G.

Зразки розв'язування задач

1. 4) Через те що $P(x,y,z)=y^2+z^2$, $Q(x,y,z)=x^2+z^2$, $R(x,y,z)=x^2+y^2$, то

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial P}{\partial z}=2z,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=2z,\quad \frac{\partial R}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial R}{\partial y}=2y,$$

тоді за формулою Стокса

$$I=\int_{\Gamma^+}\left(y^2+z^2\right)dx+\left(x^2+z^2\right)dy+\left(x^2+y^2\right)dz=$$
$$=\iint_S 2((y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma)dS,$$

де S — частина поверхні сфери $x^2+y^2+z^2=2Rx$, що проектується на площину Oxy у круг $\bar{D}$: $x^2+y^2\le 2rx$. Центр сфери міститься у точці $(R, 0, 0)$, тому $\cos\alpha=\frac{x-R}{R}$, $\cos\beta=\frac{y}{R}$, $\cos\gamma=\frac{z}{R}$, а $(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma=z-y$. Крім того,

$$z=\sqrt{2Rx-x^2-y^2},\quad z'_x=\frac{R-x}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}},\quad z'_y=\frac{-y}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}.$$

Отже,

$$I=2\iint_S(z-y)dS=2\iint_{\bar{D}}\left(\sqrt{2Rx-x^2-y^2}-y\right)\sqrt{1+\frac{(R-x)^2}{2Rx-x^2-y^2}+\frac{y^2}{2Rx-x^2-y^2}}dxdy=$$
$$=2\iint_{\bar{D}}\left(R-\frac{yR}{2Rx-x^2-y^2}\right)dxdy.$$

Далі

$$\iint_{\bar{D}}dxdy=\operatorname{mes}\bar{D}=\pi r^2,\ \text{а}\ \iint_{\bar{D}}\frac{ydxdy}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}=0,$$

оскільки підінтегральна функція непарна відносно змінної y, а область $\bar{D}$ симетрична відносно осі Ox.

Таким чином, остаточно дістаємо $I=2\pi Rr^2$.

4. 10) Припустимо, що точка (0, 0, 0) лежить зовні сфери S. Тоді, скориставшись формулою Остроградського — Гаусса, маємо

$$P=\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},\quad Q=\frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},\quad R=\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$P'_x=\frac{y^2+z^2-2x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}},\quad Q'_y=\frac{x^2+z^2-2y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}},\quad R'_z=\frac{x^2+y^2-2z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}},$$

$$P'_x+Q'_y+R'_z=\frac{2\left(x^2+y^2+z^2\right)-2\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}\equiv 0$$

в області $\mathbf{R}^3\setminus\{(0, 0, 0)\}$. Отже, в цьому випадку

$$\iint_S\frac{xdydz+ydxdz+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\iiint_G 0\cdot dxdydz=0,$$

де G — замкнена куля, обмежена сферою S.

Якщо точка (0, 0, 0) лежить всередині сфери S, то можна вважати, що ця точка є центром сфери (покажіть це). Нехай a — радіус сфери, тоді напрямні косинуси вектора нормалі до зовнішньої поверхні сфери S обчислюються за формулами

$$\cos\alpha = \frac{x}{a}, \quad \cos\beta = \frac{y}{a}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{a}.$$

Тому

$$\iint\limits_S \frac{xdydz + ydxdz + zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \iint\limits_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} dS =$$

$$= \iint\limits_S \frac{dS}{a^2} = \frac{1}{a^2}\iint\limits_S dS = \frac{1}{a^2}\cdot 4\pi a^2 = 4\pi.$$

6. 2) Для доведення даної тотожності досить скористатися формулою Остроградського — Гаусса

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Покладемо $P = u\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $Q = u\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $R = u\dfrac{\partial u}{\partial z}$, де функція u неперервна і має неперервні частинні похідні до другого порядку включно в області G, обмеженій поверхнею S. Тоді

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\iint\limits_S u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS =$$

$$= \iiint\limits_G \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\right)dxdydz,$$

або

$$\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS = \iiint\limits_G \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + u\,\Delta u\right)dxdydz.$$

Розділ 19 ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ

§ 19.1. Основні характеристики векторного поля

Якщо кожній точці $M \in G \subset \mathbf{R}^3$ відповідає деякий вектор $\vec{u}(M)$, то в області G задано векторне поле. Приклади векторних полів: електричне поле системи електричних зарядів, яке характеризується у кожній точці вектором напруженості $\vec{E}$; магнітне поле, створюване електричним струмом, яке характеризується у кожній точці вектором магнітної індукції $\vec{H}$; поле тяжіння, створюване системою мас, яке характеризується у кожній точці вектором сили тяжіння $\vec{F}$, що діє в цій точці на одиничну масу; поле швидкостей у потоці рідини, в якому кожній точці відповідає вектор швидкості $\vec{v}$.

Нехай задано векторне поле

$$\vec{u}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

де P, Q і R — скалярні функції, які є проекціями векторного поля на координатні осі.

Геометричною характеристикою векторного поля $\vec{u}$ є *векторні лінії* — криві, у кожній точці яких напрям векторного поля збігається з напрямом дотичної до кривої. Векторні лінії є інтегральними кривими системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{Q(x,y,z)}.$$

Векторні лінії поля тяжіння, електричного і магнітного полів називають *силовими лініями*, а векторного поля швидкостей — *лініями течії.*

Поверхневий інтеграл

$$\Pi = \iint\limits_S \left(P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma\right)dS = \iint\limits_S (\vec{u}, \vec{n})\,dS$$

називають *потоком векторного поля* $\vec{u}$ через поверхню S у напрямі нормалі $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. Якщо змінити орієнтацію поверхні, то вектор $\vec{n}$ змінить напрям на протилежний, і, отже, поверхневий інтеграл (потік) змінить знак. Якщо $\vec{u}$ — швидкість рухомої рідини, то потік Π являтиме собою кількість (об'єм) рідини, яка протікає через поверхню S за одиницю часу у заданому напрямі. Цю величину у гідродинаміці називають *потоком рідини* через поверхню S, чим і зумовлено назву цієї величини векторного поля. У випадку замкненої поверхні S додатний потік через неї означає, що з тієї частини простору, яка обмежена поверхнею S, витікає більше рідини, ніж втікає в неї. У цьому випадку говорять, що всередині S є джерела, які виділяють рідину. Якщо ж потік від'ємний, то всередину поверхні S втікає більше рідини, ніж витікає з неї, тобто всередині S є стоки, які поглинають рідину. Сказане може слугувати гідродинамічною інтерпретацією поверхневого інтеграла другого роду.

Продуктивність векторного поля у кожній його точці M характеризує *дивергенція* цього поля:

$$\operatorname{div}\vec{u}(M)=\lim_{V\to M}\frac{\iint\limits_S(\vec{u},\vec{n})\,dS}{V},$$

де V — об'єм області, обмеженої поверхнею S.

Точки векторного поля, в яких дивергенція додатна, називають *джерелами*, а точки, в яких дивергенція від'ємна, — *стоками* цього поля.

Виходячи з означення, можна вивести формулу для обчислення дивергенції векторного поля $\vec{u}$ у довільній його точці:

$$\operatorname{div}\vec{u}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Ця формула дає змогу записати формулу Остроградського — Гаусса у векторній формі:

$$\iint\limits_S(\vec{u},\vec{n})\,dS=\iiint\limits_{\overline{G}}\operatorname{div}\vec{u}\;dxdydz.$$

Фізичний зміст формули Остроградського — Гаусса: потік векторного поля $\vec{u}$ через замкнену поверхню S у напрямі нормалі $\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ дорівнює потрійному інтегралу від дивергенції цього поля через область G, обмежену цією поверхнею.

Циркуляцією векторного поля $\vec{u}$ по замкненому контуру Γ називають криволінійний інтеграл

$$L=\int\limits_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\int\limits_\Gamma\vec{u}\,\overrightarrow{dl},$$

де $\overrightarrow{dl}=\vec{i}dx+\vec{j}dy+\vec{k}dz.$

Якщо $\vec{u}$ — силове поле, то циркуляція цього поля по замкненому контуру Γ дорівнює роботі з переміщення точки у векторному полі $\vec{u}$ вздовж контуру Γ.

Густиною циркуляції векторного поля $\vec{u}$ у точці M_0 називають величину

$$\delta(M_0)=\lim_{L\to M_0}\frac{\int\limits_{\Gamma}\vec{u}\,\overrightarrow{dl}}{\sigma},$$

де σ — площа поверхні, обмежена контуром Γ.

Якщо припустити, що функції P, Q і R неперервні і мають неперервні частинні похідні першого порядку в деякому околі точки M_0, то густина циркуляції в цій точці по довільній гладкій поверхні S у напрямі нормалі $\vec{n}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ визначатиметься формулою

$$\delta(M_0)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma$$

(значення частинних похідних беруться у точці M_0). Таким чином, густина циркуляції $\delta(M_0)$ визначається вектором нормалі $\vec{n}$ і вектором

$$\operatorname{rot}\vec{u}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k},$$

який залежить тільки від заданого векторного поля $\vec{u}$ і називається *ротором* (*вихором*) цього поля. Отже,

$$\delta(M_0)=(\operatorname{rot}\vec{u},\vec{n})=\operatorname{rot}_n\vec{u}=|\operatorname{rot}\vec{u}|\cos\left(\widehat{\operatorname{rot}\vec{u},\vec{n}}\right).$$

Звідси випливає, що $\operatorname{rot}\vec{u}$ — це вектор, у напрямі якого густина циркуляції у заданій точці є найбільшою.

Введені поняття дають змогу записати формулу Стокса у векторній формі

$$\int\limits_{\Gamma}\vec{u}\,\overrightarrow{dl}=\iint\limits_{S}\operatorname{rot}_n\vec{u}\,dS,$$

тобто циркуляція векторного поля $\vec{u}$ по замкненому контуру Γ дорівнює потоку ротора цього поля через поверхню S, яка обмежена контуром Γ.

Властивості дивергенції і ротора векторного поля

1. Якщо $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$, де a, b і c — сталі, то $\operatorname{div}\vec{u}=0$, $\operatorname{rot}\vec{u}=0$, тобто дивергенція і ротор сталого вектора дорівнюють нулю.

2. Якщо $\vec{w}=a\vec{u}(x,y,z)+b\vec{v}(x,y,z)$, де $\vec{u}$ і $\vec{v}$ — векторні поля, а a і b — сталі, то

$$\operatorname{div}\vec{w}=a\operatorname{div}\vec{u}+b\operatorname{div}\vec{v},\quad \operatorname{rot}\vec{w}=a\operatorname{rot}\vec{u}+b\operatorname{rot}\vec{v}.$$

3. Якщо f — скалярна функція, то

$$\operatorname{div}(f\vec{u})=(\operatorname{grad}f,\vec{u})+f\operatorname{div}\vec{u},\quad \operatorname{rot}(f\vec{u})=[\operatorname{grad}f,\vec{u}]+f\operatorname{rot}\vec{u}.$$

4. Якщо $\vec{u}$ і $\vec{v}$ — векторні поля, то

$$\operatorname{div}[\vec{u}, \vec{v}] = (\vec{v}, \operatorname{rot}\vec{u}) - (\vec{u}, \operatorname{rot}\vec{v}),$$

де $[\vec{u}, \vec{v}]$ — векторний добуток векторів $\vec{u}$ і $\vec{v}$.

Якщо ввести до розгляду векторний оператор «набла» або оператор Гамільтона

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\},$$

то

$$\operatorname{div}\vec{u} = (\nabla\vec{u}), \quad \operatorname{rot}\vec{u} = [\nabla\vec{u}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Вправи

1. Знайти векторні лінії даного векторного поля:

1) $\vec{u} = -a^2 y\vec{i} + b^2 x\vec{j}$, a, b — const;

2) $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, a, b, c — const; 3) $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}$;

4) $\vec{E} = \dfrac{q\vec{r}}{r^3}$ (кулонівське поле точкового заряду q, вміщеного у початку координат), r — відстань точки від заряду;

5) $\vec{F} = -\dfrac{\gamma m\vec{r}}{r^3}$ (поле тяжіння, створене матеріальною точкою масою m, вміщеною у початку координат, γ — гравітаційна стала), $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;

6) $\vec{u} = [\vec{c}, \vec{r}]$, $\vec{c}$ — сталий вектор, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;

7)• $\vec{u} = \operatorname{grad} v$, $v = xyz$;

8) $\vec{H} = \dfrac{2I}{x^2 + y^2}\left(-y\vec{i} + x\vec{j}\right)$ (магнітне поле напруженості нескінченного прямолінійного струму I, що проходить у напрямі осі Oz).

2. Знайти дивергенцію даного векторного поля (у задачах 7) — 15) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = |\vec{r}|$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — сталі вектори):

1) $\vec{u} = \left(x^2 + y^2\right)\vec{i} + \left(y^2 + z^2\right)\vec{j} + \left(z^2 + x^2\right)\vec{k}$;

2) $\vec{u} = (x - y)(y - z)\vec{i} + (y - z)(z - x)\vec{j} + (z - x)(x - y)\vec{k}$ у точці $P(1, 2, 3)$;

3) $\vec{u} = \varphi\vec{a}$, $\varphi = xy^2z^3$, $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$; 4) $\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi$, $\varphi = e^{x+y+z}$;

5) $\vec{u} = x^2 y\vec{i} + xy^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ у точці $P(1, 2, -1)$;

6) $\vec{H} = \dfrac{2I}{x^2 + y^2}\left(-y\vec{i} + x\vec{j}\right)$; 7) $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{r}$; 8)• $\vec{u} = f(r)\vec{r}$;

9) $\vec{u} = [\vec{v}, \vec{r}]$, $\vec{v} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$; 10) $\vec{u} = r^2\vec{c}$; 11) $\vec{u} = f(r)\vec{c}$;

12) $\vec{u} = \left(\vec{b}(\vec{r}, \vec{a})\right)$; 13) $\vec{u} = (\vec{r}(\vec{r}, \vec{a}))$; 14) $\vec{u} = r[\vec{c}, \vec{r}]$; 15) $\vec{u} = \left[\vec{a}\left[\vec{r}, \vec{b}\right]\right]$.

3. Знайти вихор даного векторного поля (у задачах 9) — 15) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{c}$ — сталий вектор):

1) $\vec{u} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$; 2) $\vec{u} = \dfrac{y}{x}\vec{i} + \dfrac{z}{y}\vec{j} + \dfrac{x}{z}\vec{k}$ у точці $A(-1, -1, -1)$;

3) $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, a, b, c — сталі;

4) $\vec{u} = yz^2\vec{j} + x\vec{k}$ у точці $M(1, 1, 2)$;

5) $\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi$; 6) $\vec{H} = \dfrac{2I}{x^2 + y^2}\left(-y\vec{i} + x\vec{j}\right)$;

7) $\vec{u} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$;

8) $\vec{u} = \operatorname{rot}\vec{a}$, $\vec{a} = yz^2\vec{i} + x^2z\vec{j} + xy^2\vec{k}$;

9) $\vec{u} = f(r)\vec{r}$; 10)• $\vec{u} = \dfrac{1}{r}\left(y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}\right)$; 11) $\vec{u} = r\vec{r}$;

12) $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{r}$; 13) $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$; 14) $\vec{u} = (\vec{r}, \vec{c})$; 15) $\vec{u} = [\vec{c} \cdot f(r)\vec{r}]$.

4. Обчислити потік даного векторного поля через поверхню S (у задачах 13) — 19) скористатись формулою Остроградського — Гаусса):

1) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$:

а) S — зовнішня поверхня прямого конуса з радіусом основи R та висотою H, вершина якого збігається з початком координат;

б) S — зовнішня поверхня прямого кругового циліндра з радіусом основи R та висотою H, центр нижньої основи якого лежить у початку координат;

в) S — зовнішня поверхня сфери з радіусом R та центром у початку координат;

2) $\vec{u} = xy\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x+2z)\vec{k}$, S — зовнішня частина площини $2x + y + z = 2$, яка міститься у першому октанті;

3) $\vec{E} = \dfrac{q\vec{r}}{r^3}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$:

а) S — поверхня сфери з центром у точці розміщення заряду q і радіусом R;

б) S — поверхня сфери, яка не містить заряду q;

в) S — довільна замкнена поверхня;

4) $\vec{u} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$, S — зовнішня поверхня конуса $x^2 + y^2 \le \dfrac{R^2}{h^2}z^2$, $0 \le z \le h$;

5) $\vec{u} = \operatorname{rot}\vec{v}$, S — довільна замкнена поверхня;

6) $\vec{u} = (x-2z)\vec{i} + (3z-4x)\vec{j} + (5x+y)\vec{k}$, S — зовнішня поверхня піраміди з вершинами $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $O(0, 0, 0)$;

7) $\vec{u} = x^2\vec{i} + x\vec{j} + xz\vec{k}$, S — зовнішня поверхня частини параболоїда $y = x^2 + z^2$, $0 \le y \le 1$, розміщена у першому октанті;

8) $\vec{u} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z\vec{k}$, S — зовнішня поверхня тіла $\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2} \le z \le H$;

9) $\vec{u} = 2x\vec{i} - y\vec{j}$, S — частина зовнішньої поверхні циліндра $x^2 + y^2 = R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $0 \le z \le H$;

10) $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$, S — зовнішня поверхня куба $|x| \le a$, $|y| \le a$, $|z| \le a$;

11) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, S — зовнішня поверхня еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$;

12)• $\vec{u} = x^2\vec{i} - y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, S — зовнішня поверхня тіла $x^2 + y^2 + z^2 \le 3R^2$, $0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$;

13) $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, S — зовнішня поверхня сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

14) $\vec{u} = 2x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$, S — поверхня частини параболоїда $y^2 + z^2 = Rx$, що відтинається площиною $x = R$, у напрямі від'ємної осі Ox;

15) $\vec{u} = (x+z)\vec{i} + (z+y)\vec{k}$, S — зовнішня сторона замкненої поверхні $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$, $z = y$ $(z \ge 0)$;

16) $\vec{u} = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k}$, S — зовнішня поверхня сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

17) $\vec{u} = x^2\vec{i} + x\vec{j} + xz\vec{k}$, S — зовнішня сторона замкненої поверхні $y = x^2 + z^2$, $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ $(x \ge 0)$;

18) $\vec{u} = x^2\vec{i} + z^2\vec{j}$, S — зовнішня сторона замкненої поверхні $z^2 = 1 - x - y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(z \ge 0)$.

19) $\vec{u} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$, S — зовнішня поверхня піраміди з вершинами $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 2)$.

5. Знайти циркуляцію даного векторного поля вздовж указаної кривої у додатному напрямі (у задачах 14) — 17) скористатися формулою Стокса):

1) $\vec{u} = -y\vec{i} + x\vec{j} + 5\vec{k}$, Γ — коло $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$;

2) $\vec{u} = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$:

а) якщо Γ — круг, який містить початок координат;

б) якщо Γ — круг, який не містить початку координат;

3) $\vec{u} = y\vec{i} - x\vec{j}$, Γ — замкнена крива, обмежена лініями $x = r\cos^3 t$, $y = r\sin^3 t$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;

4) $\vec{u} = y^2\vec{i}$, Γ — замкнена крива, обмежена лініями $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $x = 0$;

5) $\vec{H} = 2I\dfrac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$, якщо Γ — коло $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, і якщо Γ — замкнена проста крива, яка не охоплює провідника;

6) $\vec{u} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, Γ — коло $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z + y + z = 0$;

7)• $\vec{v} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$ (векторне поле лінійних швидкостей при обертанні твердого тіла навколо осі Oz з кутовою швидкістю ω):

а) Γ — коло $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$;

б) Γ — коло $x^2 + z^2 = a^2$, $y = b$;

8) $\vec{u} = y\vec{i}$, Γ — коло $x = b\cos t$, $y = b + b\sin t$;

9) $\vec{u} = y\vec{i} - 2z\vec{j} + x\vec{k}$, Γ — еліпс $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$, $y = x$;

10) $\vec{u} = y^2z^2\vec{i} + x^2z^2\vec{j} + x^2y^2\vec{k}$, Γ — замкнена крива $x = a\cos t$, $y = a\cos 2t$, $z = a\cos 3t$;

11) $\vec{u} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, Γ — замкнена крива перетину параболоїда $x^2 + z^2 = 1 - y$ з координатними площинами;

12) $\vec{u} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, Γ — замкнений контур $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(x \geq 0,$ $y \geq 0,$ $z \geq 0)$;

13) $\vec{u} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$, Γ — замкнений контур $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = z^2$ $(z > 0)$;

14) $\vec{u} = y\vec{i} - x\vec{j}$, Γ — замкнена крива $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$, $z = 0$ $(x \geq 0,$ $y \geq 0)$;

15) $\vec{u} = (x - 2z)\vec{i} + (x + 3y + z)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$, Γ — контур трикутника з вершинами $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$;

16) $\vec{u} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, Γ — лінія перетину поверхні $z = 2\left(1 - x^2 - y^2\right)$ з площиною $z = 0$;

17) $\vec{u} = (y - x)\vec{i} + (z - y)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$, Γ — дуга гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \dfrac{b}{2\pi}t$ від точки $M(a, 0, 0)$ до точки $N(a, 0, b)$ і прямолінійного відрізка NM.

6*. Якщо $\vec{v}(x, y, z, t)$ — нестаціонарне поле швидкостей потоку рідини, то $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\dfrac{\vec{v}}{2}\right)^2 + [\operatorname{rot}\vec{v}, \vec{v}]$. Довести це.

7*. Якщо $\vec{v}(x, y, z, t)$ — нестаціонарне поле швидкостей течії рідини з густиною ρ, то $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{v} = 0$ (рівняння нерозривності). Довести це.

8. Яка кількість рідини витікає з об'єму V за одиницю часу, якщо в усталеному потоці нестискуваної ідеальної рідини швидкість $\vec{v}$ руху довільної частинки задовольняє умову:

а) $|\vec{v}| = |\vec{r}|$, б) $|\vec{v}| = \dfrac{1}{r^2}$, де $\vec{r}$ — радіус-вектор рухомої точки?

9*. Довести, що вихор поля лінійних швидкостей у потоці рідини, яка обертається як тверде тіло навколо деякої осі, має напрям осі обертання і за величиною дорівнює подвоєній кутовій швидкості обертання.

10*. Довести, що циркуляція напруженості магнітного поля $\vec{H}$ електричного струму у замкненому контурі дорівнює алгебраїчній сумі струмів, що пронизують площу, обмежену контуром, помножену на $\dfrac{4\pi}{C}$, де C — швидкість світла у пустоті.

Зразки розв'язування задач

1. 7) Для векторного поля $\vec{u} = \operatorname{grad} xyz = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$ рівняння, що визначають векторні лінії, мають вигляд

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}, \text{ або } xdx = ydy \text{ та } ydy = zdz,$$

звідки

$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C_1, \quad \frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{2} + C_2.$$

Ці рівняння визначають дві сім'ї гіперболічних циліндрів із твірними, паралельними відповідно осям Oz і Ox (при $C_1 = C_2 = 0$ маємо дві пари площин $x = \pm y$ і $y = \pm z$). Довільна векторна лінія заданого векторного поля є лінією перетину двох поверхонь, які одержують із знайдених рівнянь за певних значень C_1 і C_2. Наприклад, якщо $C_1 = C_2 = 0$, то лінією перетину площин $x = y$ та $y = z$ є пряма, що проходить через початок координат: $x = y = z$.

2. 8) Тут зручно скористатися однією із властивостей дивергенції:

$$\operatorname{div}(f(r)\vec{r}) = f(r)\operatorname{div}\vec{r} + \vec{r}\operatorname{grad} f(r).$$

Маємо

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}, \quad \operatorname{grad} f(r) = f'(r)\operatorname{grad} r = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}, \quad \operatorname{div}\vec{r} = 3.$$

Остаточно

$$\operatorname{div}(f(r)\vec{r}) = 3f(r) + \vec{r}f'(r)\frac{\vec{r}}{r} = 3f(r) + f'(r)\frac{r^2}{r} = 3f(r) + rf'(r).$$

3. 10) Маємо $\vec{u} = \frac{1}{r}\cdot\vec{a}$, де $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$. Скористаємось властивістю ротора векторного поля:

$$\operatorname{rot}\vec{u} = \operatorname{rot}\left(\frac{1}{r}\vec{a}\right) = \frac{1}{r}\operatorname{rot}\vec{a} + \left[\operatorname{grad}\frac{1}{r}, \vec{a}\right].$$

Обчислимо необхідні величини

$$\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\operatorname{grad} r = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3},$$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k},$$

тоді

$$\operatorname{rot}\vec{u} = -\frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{r} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{x}{r^3} & -\frac{y}{r^3} & -\frac{z}{r^3} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\frac{1}{r}\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right) -$$

$$-\frac{1}{r^3}\left(\left(xy - z^2\right)\vec{i} + \left(zy - x^2\right)\vec{j} + \left(xz - y^2\right)\vec{k}\right) =$$

$$= -\frac{1}{r^3}\left(\left(x^2 + y^2 + xy\right)\vec{i} + \left(y^2 + z^2 + zy\right)\vec{j} + \left(x^2 + z^2 + xz\right)\vec{k}\right).$$

4. 12) Маємо

$$\Pi = \iint\limits_S \left(x^2\cos\alpha - y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma\right)dS = \iint\limits_S x^2\cos\alpha\, dS - \iint\limits_S y^2\cos\beta\, dS + \iint\limits_S z^2\cos\gamma\, dS.$$

Дана поверхня S зверху обмежена сегментом сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 3R^2$, з боків — частиною поверхні гіперболоїда $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$, знизу — кругом $x^2 + y^2 \le R^2$, $z = 0$ (рис. 30). Унаслідок симетрії поверхні S відносно площин Oyz і Oxz дістаємо

$$\iint\limits_S x^2\cos\alpha\, dS = \iint\limits_S y^2\cos\beta\, dS = 0.$$

На площину Oxy сферичний сегмент проектується в круг $x^2 + y^2 \le 2R^2$, частина поверхні гіперболоїда — у кільце $R^2 \le x^2 + y^2 \le 2R^2$, а нижньою основою є круг $x^2 + y^2 \le R^2$. Проте для сегмента сфери $\cos\gamma > 0$, для гіперболоїда $\cos\gamma < 0$, на нижній основі $z = 0$.

Тому

$$\Pi = \iint\limits_S z^2\cos\gamma dS = \iint\limits_{x^2+y^2\le 2R^2}\left(3R^2 - x^2 - y^2\right)dxdy -$$

$$- \iint\limits_{R^2\le x^2+y^2\le 2R^2}\left(x^2 + y^2 - R^2\right)dxdy.$$

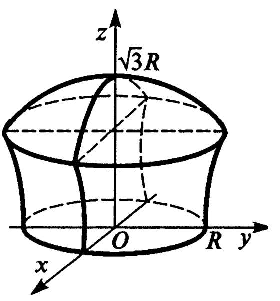


Рис. 30

Для обчислення подвійних інтегралів перейдемо до полярних координат $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Дістанемо

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R\sqrt{2}} \left(3R^2 - \rho^2\right)\rho d\rho - \int_0^{2\pi} d\theta \int_R^{R\sqrt{2}} \left(\rho^2 - R^2\right)\rho d\rho = 4\pi R^4 - \frac{\pi R^4}{2} = \frac{7}{2}\pi R^4.$$

5. 7), а) Запишемо рівняння кола у параметричному вигляді $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = 0$. Тоді

$$L = \int_\Gamma \vec{v}\,\overline{dl} = \int_\Gamma (-\omega y dx + \omega x dy) = \int_0^{2\pi} \left(\omega a^2 \sin^2 t + \omega a^2 \cos^2 t\right) dt = 2\omega\pi a^2 = 2\omega S,$$

де S — площа круга.

Зауважимо, що циркуляція даного векторного поля зберігає своє значення, якщо взяти довільне коло у площині Oxy.

б) Параметричне рівняння кола, яке лежить у площині $y = b$, запишемо у вигляді $x = a\cos t,\ y = b,\ z = a\sin t$. Тоді

$$L = \int_\Gamma \vec{v}\,\overline{dl} = \int_\Gamma (-\omega y dx + \omega x dy) = \int_0^{2\pi} \omega ab \sin t dt = 0.$$

§ 19.2. Спеціальні види векторних полів

Нехай задано векторне поле

$$\vec{u}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Векторне поле $\vec{u}$ називають *потенціальним* в області $G \subset \mathbf{R}^3$, якщо його можна подати в цій області як градієнт деякого скалярного поля φ: $\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi$.

Функцію φ називають *скалярним потенціалом* векторного поля $\vec{u}$ і визначають із рівностей

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = P(x, y, z), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = R(x, y, z).$$

Поверхні рівня потенціалу φ називають *еквіпотенціальними поверхнями*.

Векторне поле $\vec{u}$ називають *соленоїдним* в області $G \subset \mathbf{R}^3$, якщо в цій області $\operatorname{div}\vec{u} = 0$.

Оскільки $\operatorname{div}\vec{u}$ характеризує густину джерел поля $\vec{u}$, то в тій області, де поле $\vec{u}$ соленоїдне, немає джерел цього поля.

Векторне поле $\vec{u}$ називають безвихровим в області $G \subset \mathbf{R}^3$, якщо в цій області $\operatorname{rot}\vec{u} = 0$.

Якщо векторне поле $\vec{u}$ можна подати як ротор деякого векторного поля $\vec{v}$, тобто $\vec{u} = \operatorname{rot}\vec{v}$, то вектор-функцію $\vec{v}$ називають *векторним потенціалом* поля $\vec{u}$.

Рівняння Максвелла. Це фундаментальні рівняння класичної електродинаміки, які описують електромагнітні явища у довільному середовищі. Вони пов'язують величини, що характеризують електромагнітне поле: напруженість електричного поля $\vec{E}$, електричну індукцію $\vec{D}$, напруженість магнітного поля $\vec{H}$ і магнітну індукцію $\vec{B}$ із джерелами поля, тобто з розподілом у просторі електричних зарядів і струмів.

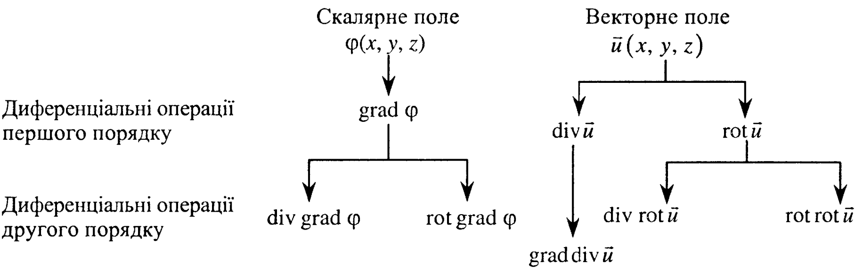
1. $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{\gamma} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$. Це рівняння узагальнює закон Біо — Савара і виражає той факт, що магнітне поле породжується струмами провідності з густиною $\vec{\gamma}$ та струмами зміщення $\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$.

2. $\operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. Це рівняння виражає закон електромагнітної індукції Фарадея і показує, що одним із джерел електричного поля є магнітне поле, яке змінюється з часом.

3. $\operatorname{div}\vec{B} = 0$. Це рівняння виражає факт відсутності магнітних зарядів (соленоїдність магнітного поля).

4. $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$. Це рівняння виражає закон Кулона і показує, що другим джерелом електричного поля є електричні заряди з густиною ρ.

Нижче подано процедуру утворення диференціальних операцій другого порядку для скалярних і векторних полів.



Операцію div grad називають *оператором Лапласа* і позначають Δ, тобто $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi$.

За допомогою оператора Гамільтона оператор Лапласа записують у вигляді $\Delta\varphi = (\nabla(\nabla\varphi)) = \nabla^2\varphi$. Враховуючи, що

$$\nabla^2 = \left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

дістаємо

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Функцію φ, яка задовольняє в деякій області рівняння Лапласа $\Delta\varphi = 0$, називають *гармонічною* в цій області.

Вправи

1. Визначити, чи правильні дані твердження:

1) якщо $\operatorname{rot}\vec{u}=0$ в області G, то векторне поле $\vec{u}$ є потенціальним у цій області;

2) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

3) якщо циркуляція векторного поля $\vec{u}$ вздовж довільного замкненого контуру Γ області G дорівнює нулю, то векторне поле $\vec{u}$ є потенціальним в області G;

4) якщо $\operatorname{div}\vec{u}=0$ в області G, то потік векторного поля $\vec{u}$ через замкнену поверхню, яка міститься в області G, дорівнює нулю;

5) якщо в однозв'язній області G векторне поле $\vec{u}$ задовольняє умови $\operatorname{rot}\vec{u}=0$ і $\operatorname{div}\vec{u}=0$, то поле $\vec{u}$ є потенціальним і його потенціал є гармонічною функцією в області G;

6) твердження 5) не застосовне до векторного поля $\vec{u}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}\vec{i}+$ $+\dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$ в області $0<x^2+y^2\le 1$;

7) векторне поле $\vec{u}$, для якого $\operatorname{div}\vec{u}\ne 0$, має векторний потенціал;

8) у соленоїдному векторному полі потік через замкнену поверхню, що не містить всередині особливих точок, дорівнює нулю.

2. Довести, що дане векторне поле є потенціальним і знайти його потенціал (у задачах 7) — 11) $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $r=|\vec{r}|$):

1) $\vec{u}=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$;   2) $\vec{u}=x^3\vec{i}-y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$;

3) $\vec{H}=\dfrac{2I\left(-y\vec{i}+x\vec{j}\right)}{x^2+y^2}$;

4) $\vec{u}=yz(2x+y+z)\vec{i}+xz(x+2y+z)\vec{j}+xy(x+y+2z)\vec{k}$;

5) $\vec{u}=\left(\dfrac{3x^2y^2}{z}-2x^3\right)\vec{i}+\left(\dfrac{2x^3y}{z}+3y^3\right)\vec{j}+\left(z^3-\dfrac{x^3y^2}{z^2}\right)\vec{k}$;

6) $\vec{u}=\left(3x^2y^2z+y^2z^3\right)\vec{i}+\left(2x^3yz+2xyz^3\right)\vec{j}+\left(x^3y^2+3xy^2z^2\right)\vec{k}$;

7) $\vec{u}=\vec{r}$;   8) $\vec{u}=\dfrac{4\vec{r}}{r^6}$;   9)• $\vec{u}=\dfrac{\vec{r}}{r^3}$;

10) $\vec{u}=f(r)\vec{r}$;   11) $\vec{E}=\dfrac{q\vec{r}}{r^3}$;   12) $\vec{u}=\operatorname{grad}\sqrt{x}\sqrt[3]{y}\sqrt[4]{z}$.

3. З'ясувати, які з даних векторних полів є соленоїдними (у задачах 8) — 10) $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $r=|\vec{r}|$):

1) $\vec{u}=yz\left(4x\vec{i}-y\vec{j}-z\vec{k}\right)$;   2) $\vec{u}=\dfrac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt[3]{(x+y+z)^2}}$;

3) $\vec{u} = e^{xy}\left(-x\vec{i} + y\vec{j} + xy\vec{k}\right)$; 4) $\vec{u} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} - \left(x^2 + y^2\right)z\vec{k}$;

5)• $\vec{u} = \operatorname{rot}\vec{v}$; 6) $\vec{H} = \dfrac{2I\left(-y\vec{i} + x\vec{j}\right)}{x^2 + y^2}$; 7) $\vec{u} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$;

8) $\vec{E} = \dfrac{q\vec{r}}{r^3}$; 9) $\vec{F} = -\gamma m\dfrac{\vec{r}}{r^3}$; 10) $\vec{u} = f(r)\vec{r}$.

4. З'ясувати, які з даних векторних полів є безвихровими:

1) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; 2) $\vec{u} = 2xy\vec{i} + \left(x^2 + 1\right)\vec{j}$;

3) $\vec{u} = \vec{i}\cos\bar{y} + \vec{j}x\sin y$; 4) $\vec{u} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$;

5) $\vec{u} = \left(x^2 + y^2\right)\vec{i} + \left(y^2 + z^2\right)\vec{j} + \left(x^2 + z^2\right)\vec{k}$;

6) $\vec{u} = \dfrac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{x + y + z}$; 7) $\vec{u} = \dfrac{y}{z}\vec{i} + \dfrac{z}{x}\vec{j} + \dfrac{x}{y}\vec{k}$;

8)• $\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi$.

5. З'ясувати, які з даних функцій є гармонічними:

1) $\varphi(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; 2) $\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - x$;

3) $\varphi(x, y) = Ax + By + C$, A, B, C — сталі;

4) $\varphi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$; 5) $\varphi(x, y) = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

6) $\varphi(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;

7) $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$, A, B, C, D — сталі.

6. Знайти формули для обчислення:

1) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)$; 2) $\Delta(uv)$; 3) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}$;

4) $\operatorname{div}\operatorname{grad}(uv)$; 5) $\operatorname{grad}\operatorname{div}(u\vec{c})$;

6) $\operatorname{grad}\operatorname{div}(u, \vec{a})$; 7) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}(u, \vec{c})$, якщо u, v — скалярні поля, $\vec{a}$ — змінний вектор, $\vec{c}$ — сталий вектор.

7. Довести, що для гармонічних в області G функцій u і w мають місце формули:

1) $\displaystyle\iint_S u\frac{\partial w}{\partial n}dS = \iiint_G (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} w)dv$ (*перша формула Гріна*);

2) $\displaystyle\iint_S \left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS = 0$ (*друга формула Гріна*);

3) $\displaystyle\iint_S \frac{\partial(uw)}{\partial n}dS = 2\iiint_G (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} w)dv$ (*третя формула Гріна*) (S — поверхня, що є межею області G).

8. Для векторного поля $\vec{a}=\{P(x, y), Q(x, y)\}$, заданого у плоскій області D, обмеженій кусково-гладкою кривою Г, має місце формула $\iint\limits_D \operatorname{div}\vec{a}\,dS = \int\limits_{\Gamma}(\vec{a},\vec{n})dl$, де $\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\vec{n}$ — зовнішня нормаль до кривої Г. Довести це. Яка формула випливає з даної, якщо $Q = Q(x), P = 0$, $D = \{(x, y)\colon\ 0 \le x \le l,\ 0 \le y \le l\}$?

9*. Гармонічна неперервна в даній області функція $u(x, y, z)$ не може мати екстремумів всередині області і досягає їх лише на її межі (теорема про максимум і мінімум). Довести це.

10*. Довести, що скрізь у неперервному потенціальному векторному полі векторні лінії не можуть бути замкненими.

11*. Нехай $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ — потенціальні векторні поля відповідно з потенціалами φ_1 і φ_2. Довести, що потенціалом векторного поля $\vec{a}_1+\vec{a}_2$ є функція $\varphi_1+\varphi_2$.

Зразки розв'язування задач

2. 9) Дане векторне поле потенціальне, оскільки

$$\operatorname{rot}\vec{u}=\operatorname{rot}\left(\frac{1}{r^3}\vec{r}\right)=\frac{1}{r^3}\operatorname{rot}\vec{r}+\left[\operatorname{grad}\frac{1}{r^3},\vec{r}\right]=\left[-\frac{3}{r^5}\vec{r},\vec{r}\right]=0,$$

$$\operatorname{rot}\vec{r}=\operatorname{rot}\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)=0 \quad \text{і} \quad \operatorname{grad}\frac{1}{r^3}=-\frac{3}{r^5}\vec{r}.$$

При відшуканні потенціалу φ цього поля виходимо з того, що $\varphi'_x=u_x$, $\varphi'_y=u_y$, $\varphi'_z=u_z$, тобто $d\varphi=\vec{u}d\vec{r}$, $d\vec{r}=\vec{i}dx+\vec{j}dy+\vec{k}dz$. Тоді

$$\varphi(x,y,z)=\int\limits_{M_0}^{M}\vec{u}d\vec{r}=\int\limits_{M_0}^{M}\frac{\vec{r}d\vec{r}}{r^3},$$

де $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — фіксована точка, а $M(x, y, z)$ — біжуча точка.

Оскільки $\vec{r}^2=r^2$, то $\vec{r}d\vec{r}=rdr$, тоді

$$\varphi(x,y,z)=\int\limits_{M_0}^{M}\frac{rdr}{r^3}=\int\limits_{M_0}^{M}\frac{dr}{r^2}=-\frac{1}{r}\Big|_{M_0}^{M}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}.$$

3. 5) Дане векторне поле соленоїдне, оскільки

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\equiv 0$$

для довільного векторного поля $\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}$, складовими його є функції v_x, v_y, x_z, що мають неперервні частинні похідні другого порядку.

4. 8) Дане векторне поле безвихрове через те, що

$$\operatorname{rot}\vec{u} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right) \equiv 0$$

для довільної функції φ, яка має неперервні частинні похідні другого порядку.

Розділ 20 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

§ 20.1. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь. Існування та єдиність розв'язку рівняння першого порядку. Наближені методи інтегрування диференціальних рівнянь

Диференціальним рівнянням називають таке рівняння, в якому невідома функція знаходиться під знаком похідної або диференціала. Якщо ця функція є функцією однієї змінної, то диференціальне рівняння називають *звичайним*, а в іншому випадку — *диференціальним рівнянням з частинними похідними.*

Порядком диференціального рівняння називають найвищий порядок похідної або диференціала, що входить у дане рівняння.

Звичайне диференціальне рівняння n-го порядку в загальному вигляді записують так:

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)=0$$

або

$$y^{(n)}=f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

Перше з цих рівнянь називають *не розв'язаним*, а друге — *розв'язаним відносно n-ї похідної.*

Зокрема, при $n=1$ дістаємо відповідно

$$F(x, y, y')=0 \tag{1}$$

або

$$y'=f(x, y). \tag{2}$$

Якщо рівняння (1) можна записати у вигляді (2), то говорять, що воно *розв'язне відносно похідної*. Аналогічне поняття вводиться і для рівняння n-го порядку.

Розв'язком диференціального рівняння називають таку функцію, яка перетворює його в тотожність. Зокрема, розв'язком рівняння (1) є така функція $y=\varphi(x)$, $x\in(a;b)$, що $F(x,\varphi(x), \varphi'(x))\equiv 0$ на інтервалі $(a;b)$.

Інтегральна крива диференціального рівняння — це графік деякого розв'язку цього рівняння.

Розв'язати диференціальне рівняння — означає знайти всі його розв'язки.

Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку — це задача відшукання розв'язку цього рівняння, який задовольняє *початкову умову*

$$y(x_0) = y_0, \tag{3}$$

тобто задача відшукання такої інтегральної кривої заданого рівняння, яка проходить через точку (x_0, y_0).

Частинним розв'язком рівняння (1) називається такий його розв'язок, який задовольняє початкову умову (3) і в достатньо малому околі точки x_0 є єдиним розв'язком цього рівняння.

Загальним розв'язком рівняння (1) називається сукупність усіх частинних розв'язків цього рівняння.

Якщо загальний розв'язок рівняння (1) можна записати у вигляді $F(x, y, C) = 0$, то останній вираз називають *загальним інтегралом* цього рівняння. Іноді загальний розв'язок (загальний інтеграл) можна записати у вигляді $y = \varphi(x, C)$, де C — довільна стала, що набуває значень з певної множини $E \subset \mathbf{R}$.

Справедливі такі теореми існування та єдиності розв'язку рівняння (2).

Теорема 1 (Коші — Пеано). *Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в області $D \subset \mathbf{R}^2$, то через кожну точку цієї області проходить принаймні одна інтегральна крива рівняння* (2).

Теорема 2 (Пікара). *Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в замкненому прямокутнику $\overline{P} = \{(x, y) : |x - x_0| \le a, \ |y - y_0| \le b\}$ і задовольняє в ньому умову Ліпшиця за змінною y, тобто існує $L > 0$:*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_1) \ i \ (x, y_2) \in \overline{P}.$$

Тоді, якщо $M = \max\limits_{\overline{P}} |f(x, y)|$ і $h = \min\left\{\frac{1}{L}, a, \frac{b}{M}\right\}$, то існує єдина функція $y = \varphi(x)$, $x \in (x_0 - h; \ x_0 + h)$, яка є розв'язком рівняння (2) *і задовольняє початкову умову* (3).

Цю функцію можна знайти *методом послідовних наближень*:

$$y_0(x) = y_0, \ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt, \ n \in \mathbf{N}, \tag{4}$$

і $y_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$, $n \to \infty$, на інтервалі $(x_0 - h; \ x_0 + h)$. При цьому $y_n = y_n(x)$ називають *n-м наближенням* існуючого розв'язку.

Теорема 3 (Коші). *Якщо функція f неперервна в області D і має похідну f'_y, обмежену в достатньо малому околі будь-якої точки з D, то через кожну точку області D проходить єдина інтегральна крива рівняння* (2).

Полем напрямів рівняння (2), записаного у вигляді

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{5}$$

називають область D, у кожній точці (x, y) якої побудовано одиничний вектор, що утворює з віссю Ox кут α такий, що $\operatorname{tg}\alpha = f(x, y) = \dfrac{-P(x, y)}{Q(x, y)}$ при $Q(x, y) \neq 0$, або з віссю Oy кут β такий, що $\operatorname{tg}\beta = g(x, y) = \dfrac{-Q(x, y)}{P(x, y)}$ при $P(x, y) \neq 0$.

Якщо в точці $(x, y) \in D$ маємо $P(x, y) = 0$ і $Q(x, y) = 0$, то цю точку називають *особливою точкою* рівняння (5) або рівняння $y' = -\dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, або рівняння $x' = -\dfrac{Q(x, y)}{P(x, y)}$.

Кожний вектор поля напрямів рівняння (2) дотикається до інтегральної кривої цього рівняння, тому його можна вважати деяким наближенням цієї інтегральної кривої. Отже, якщо побудовано поле напрямів диференціального рівняння, то можна наближено знайти інтегральні криві цього рівняння.

Для побудови поля напрямів можна використовувати *ізокліни*, тобто такі криві $\Gamma \subset D$, в кожній точці яких поле має однаковий напрям. Отже, Γ — ізокліна поля напрямів рівняння (2), якщо $\Gamma = \{(x, y) \subset D:\ f(x, y) = k\}$, де k — фіксована стала.

За допомогою поля напрямів можна побудувати *ламану Ейлера* для рівняння (2), де $x \in [a; b]$, $y \in [c; d]$, з початковою умовою (3). Це така ламана $M_0 M_1 M_2 \ldots M_n$, де $M_k = (x_k, y_k)$, $x_k = x_0 + kh$ і

$$y_k = y_{k-1} + h f\left(x_{k-1},\ y_{k-1}\right), \quad h = \frac{b - x_0}{n}, \quad k \in \overline{1,\ n}. \tag{6}$$

Якщо n досить велике, то ламана Ейлера може давати досить точне наближення інтегральної кривої, яка проходить через точку (x_0, y_0).

Якщо в рівнянні (2) функція f в деякому околі точки (x_0, y_0) має неперервні частинні похідні будь-якого порядку, то розв'язок цього рівняння можна шукати у вигляді степеневого ряду

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \tag{7}$$

який збігається в деякому околі точки x_0. Коефіцієнти ряду можна знаходити по-різному залежно від вигляду функції f.

Якщо функція f є лінійною відносно шуканої функції $y = y(x)$, то коефіцієнти c_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, зручно знаходити за допомогою підстановки в рівняння (2) рядів $y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ і $y' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k c_k (x - x_0)^{k-1}$ та прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях різниці $x - x_0$ в обох частинах одержаної рівності. При цьому коефіцієнт c_0 залишається довільним і відіграє роль довільної сталої. Якщо вказано початкову умову (3), то, підставляючи її в одержаний розв'язок, знаходять коефіцієнт c_0, а отже, і розв'язок відповідної задачі Коші.

Щоб знайти розв'язок задачі Коші (2), (3) треба в рівності (7) визначити значення похідних $y^{(k)}(x_0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. При цьому враховують, що $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, а наступні похідні $y^{(k)}(x_0)$, $k = 2, 3, \ldots$, знаходять послідовним диференціюванням рівняння (2) і підстановкою в результат диференціювання замість $x, y, y', \ldots$ значень x_0, y_0, y_0' і всіх знайдених наступних похідних.

Якщо вдається знайти всі коефіцієнти ряду (7), то цей ряд визначає точний розв'язок рівняння (2) на всьому проміжку своєї збіжності, а часткова сума ряду дає наближений розв'язок.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження (виконати усно):

1) диференціальне рівняння $y' = xy' + y$ є звичайним диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної;

2) рівняння $xy'^2 + xy = 0$ є звичайним диференціальним рівнянням другого порядку, не розв'язаним відносно похідної;

3) рівняння $z''_{x^2} + z''_{y^2} = 0$ є звичайним диференціальним рівнянням другого порядку;

4) функція $z = x - y$ є розв'язком рівняння із вправи 3), причому єдиним;

5) якщо через кожну точку області D проходить інтегральна крива диференціального рівняння (2), то функція f неперервна в D;

6) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

7) якщо функція f неперервна в області D разом з f'_y, то через кожну точку цієї області проходить єдина інтегральна крива рівняння $y' = f(x, y)$.

2. Обґрунтувати або спростувати такі твердження:

1) функція $y = 3x^2$ є розв'язком диференціального рівняння $xy' - 2y = 0$, що задовольняє початкову умову $y(1) = 3$;

2)• через кожну точку області $D = \mathbf{R}^2$ проходить єдина інтегральна крива диференціального рівняння $y' = \operatorname{sign} y$;

3) через кожну точку осі Ox проходить безліч інтегральних кривих рівняння $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$;

4) якщо через кожну точку (x_0, y_0) області D проходить єдина інтегральна крива рівняння (2), то в достатньо малому околі цієї точки функція f задовольняє умови теореми Пікара;

5) існує диференціальне рівняння, всі вектори поля напрямів якого рівні між собою;

6) кожний вектор поля напрямів дотикається лише до однієї інтегральної кривої відповідного диференціального рівняння;

7) вектори поля напрямів рівняння $y' = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ в точках (3, 1) і (2, 4) утворюють один з одним кут α такий, що $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{35}{13}$;

8) існує диференціальне рівняння, для якого сім'я ізоклін збігається із сім'єю інтегральних кривих.

3. Дати характеристику даного рівняння за такою схемою:
а) звичайне чи з частинними похідними; б) порядок рівняння;
в) розв'язане чи нерозв'язне відносно старшої похідної.
Перевірити, чи є задана функція розв'язком відповідного рівняння:

1) $yy' = x, \quad y = x$;
2) $y' - 3y = 0, \quad y = 5e^{3x}$;
3) $xy' + y = \cos x, \quad y = \dfrac{\sin x}{x}$;
4) $y'' = 2y' - y, \quad y = e^x$;
5) $y'' - \dfrac{2}{x}y' + \dfrac{2}{x^2}y = 0, \quad y = 2x + 3x^2$;
6) $a^2yy' + b^2x = 0, \quad \begin{cases} x = a\sin t, \\ y = b\cos t; \end{cases}$
7) $(1 + xy)y' + y^2 = 0, \quad \begin{cases} x = te^t, \\ y = e^{-t}; \end{cases}$
8)• $2xyy' - y^2 + x^2 = 0, \quad x^2 + y^2 = 2x$;
9) $\left(1 + x^2\right)y^2y' = x\left(1 + y^3\right), \quad \left(1 + y^3\right)^2 = \left(1 + x^2\right)^3$;
10) $y' = y + e^{x + x^2}, \quad y = e^x \int\limits_0^x e^{t^2}\,dt$;
11) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;
12) $z''_{xy} = z, \quad z = e^{x + y}$;
13) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z = f(x; y)$, де f — диференційовна функція на інтервалі $(-\infty, +\infty)$;

14)• $xy' - y = xf(x)$, $y = x\int\limits_a^x \frac{f(t)}{t}dt$, $x \in (a; +\infty)$, $a > 0$, де f — неперервна функція на інтервалі $(a; +\infty)$;

15) $y' = y + e^x f(x)$, $y = e^x \int\limits_0^x f(t)\, dt$, де f — неперервна функція на інтервалі $(-\infty; +\infty)$.

4. Користуючись теоремами існування і єдиності, виділити області, в яких дані рівняння мають єдиний розв'язок:

1) $y' = x^2 + y$; 2) $y' = \frac{y}{x}$; 3) $y' = y + \sqrt[3]{y^2}$;

4) $y' = \sqrt{y - x}$; 5) $y' = \sqrt{x^2 - y} + \sin x$.

5. Скласти диференціальне рівняння за даним його загальним розв'язком. Знайти той розв'язок, який задовольняє задану початкову умову, та побудувати графік відповідної інтегральної кривої:

1) $y = Cx^2$, $y(2) = 3$; 2) $y = Ce^x$, $y(0) = 1$;

3) $y = e^{2x}(C + x)$, $y(0) = 0$; 4) $x^2 + 2y^2 = C^2$, $y(-1) = 5$;

5) $y = \sin(x + C)$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; 6) $y = C\sin x + \cos x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

6. Скласти диференціальне рівняння даної сім'ї кривих:

1) прямих $y = Cx$; 2) парабол $y = ax^2$; 3) парабол $y^2 = ax$;

4) парабол $y = x^2 + Cx$; 5) кіл $x^2 + Cy^2 = 2y$;

6) кіл $x^2 + y^2 = 2Cx$; 7) гіпербол $y = \frac{C}{x}$;

8) гіпербол $x^2 - y^2 = Cx$; 9) ланцюгових ліній $y = C\operatorname{ch}x$;

10) $y = \sin Cx$; 11) $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$; 12) $y = (C_1 + C_2x)e^x$;

13) $y = C_1\cos x + C_2\sin x$; 14) $y = A\sin(x + \varphi)$;

15) $\frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{4} = 1$; 16) $\ln\frac{x}{y} = 1 + Cy$; 17) $y = ax^2 + bx + C$.

7. Скласти рівняння сім'ї даних кривих і знайти диференціальне рівняння цієї сім'ї:

1) парабол, що проходять через точки $A(0, 0)$ і $B(0, 2)$, з віссю симетрії, паралельною осі Ox;

2)• парабол, що проходять через точку $M(0, 1)$ і дотикаються до осі Ox;

3) кіл, які дотикаються до осі Ox, а їхні центри лежать на прямій $y = x$.

8. Знайти особливі точки даних диференціальних рівнянь:

1) $(x + y)dx + y^2dy = 0$; 2) $(x - 2y)dy = (x + 3y - 5)dx$;

3) $\left(x^2+y^2+xy-19\right)dy=\left(x^2+y^2+2x+2y-23\right)dx$;

4) $y'=\dfrac{x^2+y^2-13}{xy-6}$; 5) $y'=\dfrac{x^3+y^3-28}{x+y-4}$; 6) $y'=\dfrac{x^4+y^4-97}{x+y-5}$;

7) $y'=\dfrac{x+y-5}{x^2-xy+y^2-7}$; 8) $y'=\dfrac{x+y+\sqrt{xy}-14}{x^2+y^2+xy-84}$.

9. Визначити, чи є інтегральна крива даного диференціального рівняння, яка проходить через точку (x_0, y_0), опуклою вниз в достатньо малому околі точки x_0:

1) $y'=xy+\mathrm{e}^x$, $(x_0, y_0)=(0,1)$;

2)• $y'=y\sin x+y^2$, $(x_0, y_0)=\left(\dfrac{\pi}{2}, 2\right)$;

3) $y'=y\cos(x-1)+\ln x$, $(x_0, y_0)=(1,3)$;

4) $y'=x^2y+\mathrm{e}^{2x}$, $(x_0, y_0)=(0,1)$.

10. Для даного диференціального рівняння із заданою початковою умовою вказати проміжок, на якому можна шукати послідовні наближення розв'язку відповідної задачі Коші, та знайти його n-е наближення:

1) $y'=y^2+2x-1$, $y(0)=1$, $n=2$;

2)• $y'=y$, $y(0)=1$, $n\in\mathbf{N}$; 3) $y'=x-y^2$, $y(0)=0$, $n=3$;

4)• $y'=x^2+y^2$, $y(0)=0$, $n=3$; 5) $y'=xy$, $y(0)=1$, $n=3$;

6) $y'=x^2+xy+y^2$, $y(0)=1$, $n=2$; 7) $y'=xy^2-1$, $y(0)=0$, $n=3$.

11. За допомогою ізоклін побудувати поле напрямів даного диференціального рівняння та зобразити наближено деякі його інтегральні криві:

1) $y'=x$; 2)• $y'=x-1$; 3) $y'=x+y$;

4) $y'=y-x$; 5) $\left(2x^2-y\right)dx+dy=0$;

6) $y'=x^2+y^2$; 7) $\left(y-x^2\right)dx-dy=0$;

8) $y'=1+y^2$; 9) $y'=y-x$;

10) $y'=\dfrac{y}{2x}$; 11) $yy'+x=0$.

12. Для даного диференціального рівняння побудувати ламану Ейлера із заданою кількістю n її ланок:

1) $y'=y+1$, $y(0)=0$, $x\in[0;\ 1]$, $n=10$;

2)• $y'=x+y$, $y(1)=1$, $x\in[1;\ 1{,}5]$, $n=5$;

3) $y'=2x-y$, $y(0)=0$, $x\in[0;\ 1]$, $n=10$;

4) $y' = \frac{y}{x}$; $y(1) = 1$, $x \in [1;\ 4]$, $n = 6$;

5) $y' = 1 + xy^2$; $y(0) = 0$, $x \in [0;\ 2]$, $n = 10$.

13. Розв'язати вказану задачу Коші:

1) $y' + x^3 = 1$, $y(0) = -2$; 2) $y' = \operatorname{tg} x$, $y(0) = 1$;

3) $y' - \ln^2 x = 0$, $y(\mathrm{e}) = 2$; 4) $y' = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}$, $y(1) = 0$.

14. Для даного диференціального рівняння написати рівняння, якому задовольняють: а) всі точки екстремуму; б) всі точки перегину його інтегральних кривих:

1)• $y' = x + y$; 2) $y' = 2x - y$; 3) $y' = x^2 - y$;

4) $y' = x^2 + y^2$; 5) $y' = y + x^3$; 6) $y' = \sin(x + y)$.

15. Знайти криві, для яких кутовий коефіцієнт дотичної в кожній точці будь-якої з них дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

16. Визначити криву, яка проходить через точку $A(0, 1)$, а кутовий коефіцієнт дотичної в кожній її точці дорівнює $2\sin^2 x$.

17. Визначити закон руху тіла, якщо воно рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 10t - t^2$ і $s(3) = 2$.

18. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 6t^2 + 2t$. Визначити шлях, пройдений тілом за час з моменту $t = 1$ до $t = 4$.

19. Скласти диференціальне рівняння сім'ї кривих, у яких:

1) кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці дорівнює ординаті цієї точки, збільшеній на 2;

2) відрізок будь-якої нормалі, розміщеної між осями координат, ділиться навпіл у точці дотику.

20. Довести, що крива, в якої кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці пропорційний абсцисі точки дотику, є парабола $y = \frac{a}{2}x^2 + C$, де a — коефіцієнт пропорційності.

21. Проінтегрувати за допомогою рядів такі диференціальні рівняння:

1) $y' = 2x - y$, $y(0) = 2$; 2)• $y' = 3y + x^2$, $y(0) = 5$;

3) $y' + 2xy = 0$, $y(0) = 1$; 4) $(1 + x)y' - ny = 0$;

5) $y' = 6xy - 6x^2 + 1$, $y(0) = 1$; 6) $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 2$.

22. Знайти три перших, відмінних від нуля, члени розвинення в степеневий ряд розв'язку даної задачі Коші:

1) $y' = x - 2y$, $y(0) = 0$; 2)• $y' = xy^2 + 1$, $y(1) = 0$;

3) $y' = x^2 y + y^3$, $y(0) = 1$; 4) $y' = x + 2y^2$, $y(0) = 0$;

5) $y' = y^2 + x$, $y(0) = 1$; 6) $y' = x^2 + y^2 - \mathrm{e}^x$, $y(0) = 0$.

Зразки розв'язування задач

2. 2) Зафіксуємо довільну точку $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Тоді можливі такі випадки: $y_0 > 0$, $y_0 < 0$ і $y_0 = 0$. Розглянемо їх.

Нехай $y_0 > 0$. Тоді в достатньо малому околі точки (x_0, y_0) буде $y > 0$ і рівняння має вигляд $y' = 1$, звідки $y = x + C$, $x > -C$, $y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow y = x + (y_0 - x_0)$, $x > -y_0 + x_0$.

Аналогічно показуємо, що коли $y_0 < 0$, то єдина інтегральна крива даного диференціального рівняння, яка проходить через точку (x_0, y_0), має вигляд $y = -x + (x_0 + y_0)$, $x > x_0 + y_0$.

Нарешті, якщо $y_0 = 0$, то інтегральною кривою даного рівняння є вісь Ox: $y = 0$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Якщо припустити, що крім осі Ox існує інша інтегральна крива даного диференціального рівняння, яка проходить через точку $(x_0, 0)$, то на ній має бути точка (x^*, y^*), для якої $y^* \neq 0$, наприклад $y^* > 0$, $x^* > x_0$. Проте тоді, як показано вище, ця інтегральна крива повинна містити частину прямої $y = x + (y^* - x^*)$, $x^* - y^* < x < +\infty$. Тому $x_0 \le x^* - y^*$. Якщо припустити, що на розглядуваній інтегральній кривій усі інші точки мають вигляд $(x, 0)$, то рівняння цієї кривої $y = \varphi(x)$ буде недиференційовною функцією в точці $x^* - y^*$.

Якщо припустити, що існує $x^{**} < x^* - y^*$, для якої точка (x^{**}, y^{**}) лежить на інтегральній кривій і $y^{**} \neq 0$, то, повторюючи наведені вище міркування, дістаємо, що рівняння інтегральної кривої $y = \varphi(x)$ не є неперервною функцією в точці $x^* - y^*$, що неможливо. Отже, вісь Ox — єдина інтегральна крива, що проходить через будь-яку точку $(x_0, 0)$. Тому дане твердження правильне.

3. 8) Рівняння $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$ є звичайним диференціальним рівнянням першого порядку, не розв'язаним відносно похідної. Перевіримо, чи задовольняє дане рівняння функція $y = y(x)$, яку задано неявно рівнянням $x^2 + y^2 = 2x$. Користуючись правилом диференціювання неявно заданої функції, дістаємо

$$2x + 2yy' = 2 \Rightarrow x + yy' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1-x}{y}.$$

Підставляючи значення y' і $y^2 = 2x - x^2$ у ліву частину заданого диференціального рівняння, маємо

$$2xy\frac{1-x}{y} - \left(2x - x^2\right) + x^2 = 2x - 2x^2 - 2x + x^2 + x^2 \equiv 0.$$

Отже, задана функція є розв'язком даного диференціального рівняння. Зауважимо, що рівняння $x^2 + y^2 = 2x$ задає дві функції: $y = \sqrt{2x - x^2}$ і $y = -\sqrt{2x - x^2}$. Очевидно, що вони задовольняють дане диференціальне рівняння.

14) Дане рівняння є звичайним диференціальним рівнянням першого порядку, не розв'язаним відносно похідної. Оскільки

$$y' = \int_a^x \frac{f(t)}{t}dt + x\frac{f(x)}{x} \quad \forall x > a,$$

то

$$xy' - y \equiv x\int_a^x \frac{f(t)}{t}dt + xf(x) - x\int_a^x \frac{f(t)}{t}dt \equiv xf(x),$$

тобто задана функція є розв'язком даного диференціального рівняння.

7. 2) Рівняння параболи, що дотикається до осі Ox, має вигляд $y = k(x-a)^2$. Враховуючи умову $y(0)=1$, дістаємо $k = \frac{1}{a^2} > 0$. Отже, рівняння сім'ї парабол, що задовольняють умову задачі, є $y = \frac{1}{C^2}(x-C)^2$, де $C \neq 0$ — довільна стала. Диференціюючи це рівняння, маємо $y' = \frac{2}{C^2}(x-C)$. Виключаючи параметр C з одержаних рівнянь, дістаємо диференціальне рівняння даної сім'ї парабол:

$$y' = \frac{2\left(y+\sqrt{y}\right)}{x}.$$

9. 2) Маємо рівняння вигляду $y' = f(x,y)$, де функція $f(x,y) = y\sin x + y^2$ задовольняє умови теореми Коші на множині $D = \mathbf{R}^2$. Тому через точку $\left(\frac{\pi}{2},\ 2\right)$ проходить єдина інтегральна крива даного диференціального рівняння. Позначимо її $y = \varphi(x)$. Тоді

$$y' = \varphi'(x) = \varphi(x)\sin x + \varphi^2(x), \quad \varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2} + \varphi^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2+4=6,$$

$$\varphi''(x) = \varphi'(x)\sin x + \varphi(x)\cos x + 2\varphi(x)\varphi'(x), \quad \varphi''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6 + 2\cdot 2\cdot 6 = 30.$$

Функція $\varphi''(x)$ неперервна в околі точки $\frac{\pi}{2}$. Якщо цей окіл достатньо малий, то $\varphi''(x) \approx 30$, тому $\varphi''(x) > 0$ в деякому околі точки $\frac{\pi}{2}$. Звідси випливає, що інтегральна крива даного диференціального рівняння є опуклою вниз у достатньо малому околі точки $\frac{\pi}{2}$.

10. 2) Дане рівняння має вигляд рівняння (2), де $f(x,y) = y$. Оскільки $f'_y = 1$, то шуканий розв'язок існує. Він єдиний і його можна знайти методом послідовних наближень, які збігаються до шуканого розв'язку при всіх значеннях незалежної змінної x. За формулою (4) дістаємо

$$y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = 1 + \int_0^x 1\cdot dt = 1 + x,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2!}\right)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

Очевидно,

$$y_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!},$$

тому $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x.$

Гранична функція $y=\mathrm{e}^x$ і є шуканим розв'язком, який визначений при всіх значеннях x.

4) Дане рівняння має вигляд $y'=f(x,y)$, де функції $f(x,y)=x^2+y^2$ і $f_y'=2y$ неперервні в $\mathbf{R}^2$. Покажемо, що в будь-якому елементарному прямокутнику $\overline{P}=\{(x,y):\ |x|\le a,\ |y|\le b\}$ виконуються всі умови теореми Пікара. Константу L знайдемо, скориставшись теоремою про скінченні прирости:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=|f_y'(c)|\ |y_1-y_2|,\quad y_1<c<y_2.$$

Оскільки $\max\limits_{\overline{P}} |f_y'(x,y)|=2b$, то можна покласти $L=2b$. Далі маємо $M=\max\limits_{\overline{P}} |f(x,y)|=\max\limits_{\overline{P}} \left(x^2+y^2\right)=a^2+b^2$. При фіксованому $a>0$ функція $\psi(b)=\frac{b}{a^2+b^2}$ набуває найбільшого значення в точці $b=a$, яке дорівнює $\frac{1}{2a}$. Враховуючи це, дістаємо $L=2a$, $M=\frac{1}{2a}$ і $h=\min\left\{\frac{1}{2a},\ a\right\}$. Очевидно, що найбільше значення h знайдемо з умови

$$\min\left\{\frac{1}{2a},a\right\}=a \iff a>0 \text{ і } a\le\frac{1}{2a} \iff a>0 \text{ і } 2a^2-1\le 0 \iff a\in\left(0;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Таким чином, $\max\limits_{a>0}\min\left\{\frac{1}{2a},\ a\right\}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ і за h можна взяти будь-яке число з проміжку $\left(0;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Для такого h в інтервалі $(-h;\ h)$ існує єдина функція $y=\varphi(x)$, яка є розв'язком даного диференціального рівняння із заданою початковою умовою. Цей розв'язок можна знайти методом послідовних наближень:

$$y_0(x)=y_0=0,\quad y_1(x)=\int_0^x f(t,y_0(t))\ dt=\int_0^x t^2dt=\frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x)=\int_0^x f(t,\ y_1(t))\,dt=\int_0^x\left(t^2+\frac{t^6}{9}\right)\ dt=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63},$$

$$y_3(x)=\int_0^x f(t,\ y_2(t))\ dt=\int_0^x\left(t^2+\frac{t^6}{9}+\frac{2t^{10}}{189}+\frac{t^{14}}{63^2}\right)\ dt=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{189\cdot 11}+\frac{x^{15}}{63^2\cdot 15}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{2079}+\frac{x^{15}}{59535}.$$

11. 2) Покладаючи $k = y'$, дістаємо рівняння сім'ї ізоклін $k = x-1$. Якщо $k=0$, то маємо, з одного боку, рівняння ізокліни $x=1$, а з іншого — геометричний зміст похідної $\operatorname{tg}\alpha = 0$. Звідси $\alpha = \operatorname{arctg} 0 = 0$, тобто дотичні до інтегральних кривих, які проходять через точки ізокліни $x=1$, мають кут нахилу $\alpha = 0$. Аналогічно при $k=-1$ і $k=1$ дістаємо відповідно ізокліни $x=0$ і $x=2$, для яких $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ і $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Далі помічаємо, що справа від прямої $x=1$ похідна y' додатна, а зліва — від'ємна. Тому на прямій $x=1$, де $y'=0$, знаходиться мінімум кожної інтегральної кривої. Оскільки для заданого рівняння $y''=1>0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$, то всі інтегральні криві опуклі вниз.

Нарешті, права частина заданого рівняння $f(x,y) = x-1$ задовольняє в $\mathbf{R}^2$ умови теореми Коші про єдиність розв'язку, тому через кожну точку площини Oxy проходить єдина інтегральна крива.

Враховуючи сказане вище, будуємо наближено сім'ю інтегральних кривих даного рівняння (рис. 31), які нагадують параболи. Це не випадково, оскільки загальним розв'язком даного диференціального рівняння є сім'я парабол $y = \frac{x^2}{2} - x + C$, в чому неважко переконатися.

12. 2) Розіб'ємо відрізок [1; 1,5] на п'ять рівних частин. Тоді довжина кожного утвореного відрізка $h = \frac{b-x_0}{n} = 0{,}1$, точки x_k, $k \in \overline{0,5}$, є такими: $x_0 = 1$; $x_1 = 1{,}1$; $x_2 = 1{,}2$; $x_3 = 1{,}3$; $x_4 = 1{,}4$; $x_5 = 1{,}5$. За формулою (6) з точністю до 0,01 обчислюємо відповідні значення y_k, $k \in \overline{1,\ 5}$: $y_1 = 1 + 0{,}1 \cdot 2 = 1{,}20$; $y_2 = 1{,}43$; $y_3 = 1{,}69$; $y_4 = 1{,}99$; $y_5 = 2{,}33$. Побудувавши на площині точки (x_0, y_0), $(x_1, y_1), \ldots$, (x_5, y_5) і сполучивши їх відрізками прямої, дістанемо ламану Ейлера, яка є наближеним зображенням шуканої інтегральної кривої, що проходить через початкову точку (1,1) (рис. 32).

14. 1) Дане рівняння має вигляд $y' = f(x, y)$, де $f(x, y) = x + y$. Тоді:

а) інтегральні криві цього рівняння можуть мати екстремум у точках, де $y'=0$, тобто $f(x,y)=0$, причому максимум, якщо $y'' = f'_x < 0$, і мінімум — якщо $f'_x > 0$. Для заданого рівняння маємо $x+y=0$, якщо $y=-x$. Оскільки $y'' = f'_x = 1 > 0$, то робимо висновок, що інтегральні криві даного рівняння мають мінімум у точках прямої $y=-x$;

б) точки перегину знаходимо з рівняння $y''=0$. Враховуючи правило диференціювання складної функції двох змінних, дістаємо

$$y'' = (f(x, y))'_x = f'_x + f'_y \cdot y' = f'_x + f(x,y) f'_y = 1 + (x+y).$$

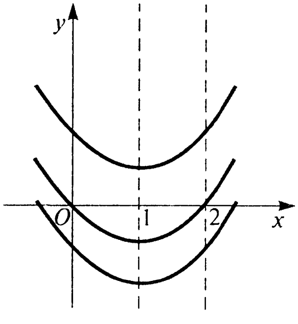


Рис. 31

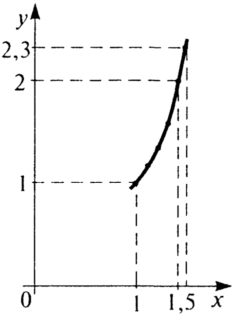


Рис. 32

Маємо $y''=0$, якщо $1+(x+y)=0$, тобто $y=-x-1$. Ця пряма є одночасно й ізокліною, й інтегральною кривою, у чому неважко переконатися. Оскільки інтегральні криві не перетинають прямої $y=-x-1$ (внаслідок єдиності розв'язку), то вона не може бути геометричним місцем точок перегину. Отже, інтегральні криві даного диференціального рівняння не мають точок перегину.

21. 2) Нехай $y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots$. Тоді $y'=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ldots$. Підставляючи в задане рівняння значення y і y', дістаємо

$$c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ldots=3c_0+3c_1x+3c_2x^2+\ldots+x^2.$$

З початкової умови одразу знаходимо $c_0=5$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах останньої рівності, маємо $c_1=3c_0=15$, $3c_1=2c_2 \Leftrightarrow 45=$ $=2c_2 \Rightarrow c_2=\frac{45}{2}$. Аналогічно знаходимо $c_3=\frac{137}{6}$. Шуканий наближений розв'язок має вигляд

$$y(x)=5+15x+\frac{45}{2}x^2+\frac{137}{6}x^3.$$

22. 2) У даному випадку розв'язок шукатимемо у вигляді степеневого ряду $y=$ $=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-1)^k$. Проте підстановка в задане диференціальне рівняння шуканого розв'язку приведе до складних рівнянь для визначення коефіцієнтів c_1, c_2, ..., c_n, ... Тому продиференціюємо задане рівняння кілька разів підряд. Дістанемо

$$\begin{aligned}
&y''=y^2+2xyy',\\
&y'''=4yy'+2xy'^2+2xyy'',\\
&y^{IV}=6y'^2+6yy''+6xy'y''+2xyy''',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .
\end{aligned}$$

Покладаючи $x=1$ у заданій рівності та в усіх утворених і враховуючи початкову умову, послідовно знаходимо

$$y'(1)=1,\quad y''(1)=0,\quad y'''(1)=2,\quad y^{IV}(1)=6,\ \ldots .$$

Оскільки $c_k=\frac{y^{(k)}(1)}{k!}$, $k=0,\ 1,\ \ldots$, то $c_0=y(1)=0$, $c_1=y'(1)=1$, $c_2=\frac{1}{2}y''(1)=0$, $c_3=\frac{1}{3!}y'''(1)=\frac{1}{3}$, $c_4=\frac{1}{4!}y^{IV}(1)=\frac{1}{4}$, ...

Підставляючи знайдені коефіцієнти в ряд (7), дістаємо

$$y=(x-1)+\frac{1}{3}(x-1)^3+\frac{1}{4}(x-1)^4+\ldots,$$

тобто наближений розв'язок даної задачі Коші має вигляд

$$y=(x-1)+\frac{(x-1)^3}{3}+\frac{(x-1)^4}{4}.$$

§ 20.2. Найпростіші типи диференціальних рівнянь першого порядку

Нехай маємо рівняння першого порядку, розв'язане відносно похідної:

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Якщо рівняння (1) можна записати у вигляді

$$y' = \varphi(x)\psi(y) \tag{2}$$

або

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)dx + \varphi_2(x)\psi_2(y)dy = 0, \tag{2'}$$

де функції φ, φ_1 і φ_2 неперервні на проміжку $\langle a; b \rangle$, а функції ψ, ψ_1 і ψ_2 — на проміжку $\langle c; d \rangle$, то його називають *рівнянням з відокремлюваними змінними.*

Якщо $\psi(y) \neq 0$ на інтервалі $(c; d)$, то для будь-якої точки (x_0, y_0), де $x_0 \in (a; b)$, $y_0 \in (c; d)$, існує єдиний розв'язок рівняння (2), що задовольняє умову $y(x_0) = y_0$. Цей розв'язок можна дістати із загального інтеграла даного рівняння:

$$\int_{y_1}^{y} \frac{dy}{\psi(y)} = \int_{x_1}^{x} \varphi(x)dx + C,$$

де $y_1 \in (c; d)$ і $x_1 \in (a; b)$ — фіксовані числа.

Замість останньої рівності можна розглядати таку:

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx + C.$$

Рівняння (1) називають *однорідним*, якщо воно має вигляд

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3}$$

або

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{3'}$$

де

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y) \text{ і } Q(tx, ty) = t^n Q(x, y) \quad \forall t \neq 0, \ n \in \mathbf{N}_0.$$

Рівняння (3) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки

$$u = \frac{y}{x}, \ x \neq 0.$$

Якщо на інтервалі $(a;b)$ функція $\psi(u)=\varphi(u)-u$ неперервна і $\psi(u)\neq 0$, то через кожну точку області $G=\{(x,y):\ -\infty<x<0,\quad bx<y<ax\}\cup$ $\cup\{(x,y):\ 0<x<\infty,\quad ax<y<bx\}$ проходить лише одна інтегральна крива даного однорідного рівняння. Рівняння цієї кривої можна знайти із загального інтеграла

$$\int_{u_1}^{u}\frac{dt}{\varphi(t)-t}=\ln|x|+C,$$

де u_1 — фіксована, а $u=\dfrac{y}{x}$ — біжуча точки з інтервалу $(a;b)$. Умова $\psi(u)=0$ може дати додаткові розв'язки.

Рівняння вигляду

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{4}$$

зводиться до:

а) однорідного, якщо $a_1b_2-b_1a_2\neq 0$, за допомогою підстановки $x=x^*+\alpha$, де α і β визначаються з умови

$$\begin{cases}a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0,\\ a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0;\end{cases}$$

б) рівняння з відокремлюваними змінними, якщо $a_1b_2=b_1a_2$, за допомогою заміни змінних $z=a_1x+b_1y$.

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння вигляду

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{5}$$

де p і q — неперервні функції на інтервалі $(a;b)$. Якщо при цьому $q(x)\equiv 0$, то рівняння (5) називають *лінійним однорідним рівнянням першого порядку,* або *лінійним рівнянням без правої частини.*

Через кожну точку області $D=\{(x,y):\ a<x<b,\ -\infty<y<\infty\}$ проходить єдина інтегральна крива рівняння (5).

Для розв'язування рівняння (5) можна скористатись таким алгоритмом:

1) ввести підстановку $y=u(x)v(x)$, де u і v — нові невідомі функції;

2) знайти $y'=u'v+uv'$ і підставити значення y і y' у дане рівняння:

$$u'v+uv'+p(x)uv=q(x)\Leftrightarrow u'v+u\left(v'+p(x)v\right)=q(x);$$

3) вважати, що функція v є розв'язком рівняння

$$v' + p(x)v = 0 \Leftrightarrow v = e^{-\int p(x)dx};$$

4) знайти функцію u з рівняння $u'v = q(x) \Leftrightarrow u = \int q(x)\, e^{-\int p(x)dx} dx;$

5) записати загальний розв'язок:

$$y = u(x)v(x) = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)\; e^{\int p(x)dx} dx.$$

Рівнянням Бернуллі називають диференціальне рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \tag{6}$$

де p і q — неперервні функції на інтервалі $(a;b)$, а $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$ і $\alpha \neq 1$. Рівняння (6) можна розв'язувати за тим самим алгоритмом, що й лінійне, тобто за допомогою підстановки $y = u(x)v(x)$.

Якщо рівняння (1) записано у вигляді $(3')$ і ліва частина останнього рівняння є повним диференціалом деякої функції $u = u(x, y)$ в деякій області D, то рівняння $(3')$ називають *рівнянням у повних диференціалах*. Для однозв'язної області D дане рівняння є рівнянням у повних диференціалах тоді й тільки тоді, коли функції P, Q, P'_y і Q'_x неперервні в D і

$$P'_y(x, y) = Q'_x(x, y) \quad \forall (x, y) \in D. \tag{7}$$

За умови $P^2(x, y) + Q^2(x, y) > 0$ через кожну точку $(x_0, y_0) \in D$ проходить єдина інтегральна крива даного рівняння, яку можна знайти із загального інтеграла, що має вигляд

$$\int\limits_{x_1}^{x} P(t, y_1)dt + \int\limits_{y_1}^{y} Q(x, t)dt = C, \tag{8}$$

де (x_1, y_1) — фіксована точка, а (x, y) — біжуча точка з області D. Функцію $\mu = \mu(x, y)$ називають *інтегрувальним множником* для рівняння $(3')$, якщо рівняння

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

є диференціальним рівнянням у повних диференціалах.

Якщо функція $\varphi = \dfrac{P'_y - Q'_x}{Q}$ залежить лише від x, то

$$\mu(x) = e^{\int \varphi(x)dx} \tag{9}$$

є інтегрувальним множником (залежним лише від x) для рівняння $(3')$.

Якщо $\psi = \dfrac{Q'_x - P'_y}{P}$ залежить лише від y, то функція

$$\mu(y) = e^{\int \psi(y)dy} \tag{10}$$

є інтегрувальним множником (залежним лише від y) для рівняння $(3')$.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) кожне диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними має єдиний розв'язок задачі Коші;

2) рівняння з відокремлюваними змінними може бути однорідним диференціальним рівнянням першого порядку;

3) лінійне рівняння (4) є рівнянням з відокремлюваними змінними тоді й тільки тоді, коли $q(x) \equiv 0$ або $p(x) = kq(x)$ для деякого $k \in \mathbf{R}$;

4)• якщо $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ — два різні розв'язки лінійного рівняння першого порядку, то $y = y_1(x) + C(y_2(x) - y_1(x))$ — загальний розв'язок цього рівняння;

5) якщо $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ і $y = y_3(x)$ — три різні розв'язки лінійного диференціального рівняння першого порядку, то в деякому інтервалі $(a; b)$ маємо $\dfrac{y_3(x) - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)} \equiv \text{const}$;

6) рівняння у повних диференціалах може бути одночасно і рівнянням з відокремлюваними змінними, і однорідним, і лінійним;

7) кожне рівняння з відокремлюваними змінними можна звести до рівняння у повних диференціалах;

8) якщо для рівняння Бернуллі (6) взяти $\mu(x) = e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}$, то рівняння $\left(q(x) - p(x)y^{1-\alpha}\right)\mu(x)dx - y^{\alpha}\mu(x)dy = 0$ є диференціальним рівнянням у повних диференціалах;

9) кожне лінійне диференціальне рівняння першого порядку можна звести до рівняння у повних диференціалах.

2. Розв'язати дані рівняння з відокремлюваними змінними. Якщо вказано початкову умову, то знайти розв'язок, що задовольняє її:

1) $y' = e^{ax+by}$; 2) $x^2 y dx + x^3 dy = 0$; 3) $\sqrt{xy}dx + x^2 y dy = 0$;

4) $\left(y - x^2 y\right)dy = \left(x - xy^2\right)dx$; 5) $y' = (2y+1)\operatorname{ctg} x$;

6) $xy\left(1 + x^2\right)y' = 1 + y^2$; 7) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$;

8) $y' = e^{x+y}\sin x$; 9) $y = xy' + a\left(1 + x^2 y'\right)$;

10) $e^y dy - 2x dx = 2x e^y dx - x^2 e^y dy$; 11) $(1+e^x) y y' = e^x$, $y(0)=1$;

12)• $y' \sin x = y \ln y$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$;

13) $dx - 2y(1+x)^{\frac{3}{2}} dy = (1+y^2)^{\frac{1}{2}} (1+x)^{\frac{3}{2}} dy - y^2 dx$;

14) $y' \operatorname{tg} x = y+1$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$;

15) $\sin y \cos x \, dy = \cos y \sin x \, dx$, $y(0)=\frac{\pi}{4}$;

16) $y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2}$; 17) $xy' = y \ln y$; 18) $y' = \frac{y \ln y}{x}$.

Визначити, чим відрізняються розв'язки рівняння 17) від 18).

3. Розв'язати дані інтегральні рівняння:

1) $y = \int\limits_1^x e^{-y} dt$; 2) $y = \int\limits_0^x y \, dt$; 3) $y = 2 + \int\limits_2^x \frac{dt}{y}$;

4) $y = 2\int\limits_0^x \sqrt{y} dt$; 5) $x\int\limits_0^x y \, dt = (x+1)\int\limits_0^x ty dt$; 6)• $\int\limits_0^x ty \, dt = x^2 + y$.

4. Розв'язати дані однорідні рівняння. Якщо вказано початкову умову, то знайти розв'язок, що задовольняє її:

1) $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$; 2) $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$; 3) $xdy - ydx = ydy$;

4) $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$, $y(1)=0$; 5) $(-x+y)dx + (x+y)dy = 0$;

6) $xy' \cos\frac{y}{x} = y \cos\frac{y}{x} - x$; 7) $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx = \left(\frac{x}{y}-1\right)e^{\frac{x}{y}} dy$, $y(0)=2$;

8) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $y(1)=1$; 9) $(x^3 + xy^2)dx + (y^3 + x^2 y)dy = 0$;

10)• $xydy - y^2 dx = (x+y)^2 e^{-\frac{y}{x}} dx$, $y(1)=0$;

11) $xy' = x \sin\frac{y}{x} + y$, $y(1)=\frac{\pi}{2}$; 12) $\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)dx = xdy$;

13) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$; 14) $ydx + 2\sqrt{xy}dy = xdy$;

15) $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$; 16) $x\frac{dy}{dx} + y \ln x = y(1+\ln y)$.

5. Розв'язати рівняння, які зводяться до однорідних або до рівнянь з відокремлюваними змінними:

1) $y' = \dfrac{2x+y-1}{4x+2y+5}$; 2) $y' = \dfrac{x+2y+1}{2x-3}$;

3) $(x+y-2)dx+(y-x+3)dy=0$;

4) $(5x-7y+1)y'+x+y-1=0$;

5) $(x-2y+3)y'=1-y-2x$; 6) $(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0$;

7) $(2+x-y)dx+(y-x+3)dy=0$;

8)• $(x+y+1)dx=(1-2x-2y)dy$; 9) $y' = e^{-\frac{y}{x+1}} + \dfrac{y}{x+1}$;

10)• $y' = 2\left(\dfrac{x+2}{x+y-1}\right)^2$; 11) $y'=\cos(x-y)$; 12) $y'=ax+by+c$;

13) $y'=(ax+by+c)^2$; 14) $y'(ax+by+c)^{\alpha}=ax+by+c_1$.

6. Розв'язати дані лінійні рівняння. Якщо вказано початкову умову, то знайти той розв'язок, що задовольняє її:

1) $y'+y=x$; 2) $y'-y=e^x$; 3) $y'x^2-xy=1$;

4) $y'+2xy=2xe^{-x^2}$; 5) $y'+y\cos x=\sin x\cos x$, $y(0)=1$;

6) $(x^2+1)y'+4xy=3$; 7) $xy'+2y=x^2$; 8) $(x^2+y)dx=xdy$;

9) $(1+y^2)dx+xydy=\sqrt{1+y^2}\sin ydy$;

10) $y'\cos x-y\sin x=1$, $y(0)=1$;

11) $(x^2+x)y'=y+x^2+x$; $y(0)=1$;

12) $(1+y^2)dx+xdy=\operatorname{arctg} ydy$; 13)• $dx+(x+y^2)dy=0$;

14) $(x-2xy+y^2)y'+y^2=0$; 15) $y'(x\cos y+\sin 2y)=1$;

16) $y'(2y\ln y+y-x)=y$; 17) $(x-2xy-y^2)y'+y^2=0$.

7. Розв'язати рівняння Бернуллі:

1) $y'+2xy=2x^3y^3$; 2) $y'+y=x\sqrt{y}$; 3) $dy=(xy^3-xy)dx$;

4) $xy'+y=y^2\ln x$; 5) $y\ln xdx=2ydx+xdy$;

6) $y-y'\cos x=y^2\cos x(1-\sin x)$; 7) $xdy+2ydx=x^5y^2dx$;

8)• $(1-x^2)y'=yx+axy^2$; 9) $2y(x^2-1)y'=x^3+xy^2-x$.

8. Перевірити, чи є дане диференціальне рівняння рівнянням у повних диференціалах, і розв'язати його. Якщо вказано початкову умову, то знайти розв'язок, що задовольняє її:

1) $(x+y)dx+(x-y)dy=0$; 2) $(x-y)dx+(x+y)dy=0$;

3)• $\left(x^3+3xy^2\right)dx+\left(y^3+3x^2y\right)dy=0;$

4) $x\left(2x^2+y^2\right)+y\left(x^2+2y^2\right)y'=0;$

5) $\left(1+x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx+\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)ydy=0;$

6) $3x^2e^ydx+\left(x^3e^y-1\right)dy=0;$ 7) $ydy=(xdy+ydx)\sqrt{1+y^2};$

8) $\dfrac{xdx+(2x+y)dy}{(x+y)^2}=0;$ 9) $yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy=0;$

10) $xy'\cos y+\sin y=0;$ 11) $\left(xe^y+e^x\right)y'+e^y+ye^x=0;$

12) $\dfrac{xdy}{x^2+y^2}=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx,\quad y(1)=1;$

13) $2x\cos^2ydx+\left(2y-x^2\sin 2y\right)dy=0,\quad y(0)=0;$

14) $\dfrac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}=0\quad y(1)=0;$

15) $(2xy+\arcsin x)dx+\left(\operatorname{arctg} y+x^2+1\right)dy=0.$

9. Нехай функція $\mu(xy)$ така, що функція

$$\frac{\mu'(xy)}{\mu(xy)}=\frac{Q'_x-P'_y}{xP-yQ}=\psi(xy)$$

залежить лише від xy. Показати, що функція $\mu=\mu(xy)$ є інтегрувальним множником диференціального рівняння $(3')$.

10. Розв’язати дані рівняння за допомогою інтегрувального множника:

1) $xdy=\left(y-xy^2\right)dx;$ 2) $ydx=\left(x+y^2\right)dy;$

3) $\left(x^2+y^2\right)dx-2xydy=0;$ 4) $2xydx=\left(3x^2-y^2\right)dy;$

5) $\left(xy-x^2\right)y'=2x^2+3xy-y_2;$ 6)• $(\ln y+2x-1)y'=2y;$

7) $xy^2dx+\left(x^2y-x\right)dy=0;$ 8) $y'\left(x^2y-3x\right)=y+xy^2;$

9) $x(3y+2x)y'+3(x+y)^2=0;$

10) $\left(x^2+y^2\right)y'+\left(2xy+x^2y+\dfrac{y^3}{3}\right)=0;$ 11) $y'=\dfrac{-\left(y^4-5y\right)}{7xy^3+y-5x};$

12) $y'=\dfrac{3x^2\cos y-\sin y}{x}\cos y;$ 13) $\left(x^2+y^2\sqrt{y^2+1}\right)dy+2xy\ln ydx=0.$

11. Визначити тип даного диференціального рівняння і розв'язати його:

1) $y' = \dfrac{y^2}{2xy+3}$; 2) $y' = \dfrac{y\sin x + 1}{\cos x}$; 3) $y^2 - 1 + (2xy + 3y)y' = 0$;

4) $y^2 + y^2 y' = xyy'$; 5) $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{ydx - xdy}{x^2}$;

6) $y' = \dfrac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$; 7) $xy' + y - \mathrm{e}^x = 0$;

8) $\left(1 + y^2\right)dx = \left(\sqrt{1 + y^2}\sin y - xy\right)dy$;

9) $y^2 dx - (2xy + 3)dy = 0$; 10) $3dy = \left(1 - 3y^2\right)y\sin x dx$;

11) $(x + \ln y) = \left(1 + \dfrac{x}{y} + \sin y\right)y'$; 12) $\dfrac{xy' - y}{x} = \mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$;

13) $(\ln x - x\ln y)dx = \dfrac{x^2}{2y}dy$; 14) $dy - y^2 dx = 2xy\mathrm{e}^x dx$;

15) $\left(\dfrac{x}{y} + 2y\cos 5x\right)y' = 5y^2\sin 5x - \ln y,\ \ y(0) = \mathrm{e}.$

12. Диференціальне рівняння $y' = ky,\ \ k \neq 0,$ називають *рівнянням показникового росту*. Визначити, які з поданих нижче рівнянь є рівняннями показникового росту:

1) $y' = 3y$; 2) $y' = y^2$; 3) $y' = -5y$;

4) $y' = xy$; 5) $y' = \dfrac{y}{2}$; 6) $y' = y - x$.

13. Показати, що розв'язком рівняння $y' = k\dfrac{y}{x};\ \ k \neq 0,$ є функції $y = Cx^k$ і лише вони $(C = \mathrm{const})$.

14. Температура повітря T залежно від висоти H змінюється за законом $\dfrac{dT}{dH} = -kT_0$, де T_0 — температура повітря на поверхні Землі; k — стала. Визначити температуру повітря на висоті H.

15. Для розрахунків процесів випаровування застосовують рівняння Клапейрона — Клаузіуса $L = RT\dfrac{d(\ln p)}{dT}$, де L — теплота випаровування; p — тиск; R — газова стала; T — температура. Визначити залежність $p(T)$.

16. Швидкість реакції розчину цукру описується рівнянням $x'(t) = k(x_0 - x)$, де x_0 — кількість молів цукру до початку реакції; x — кількість молів, які вступили в реакцію за час t від початку реакції; k — коефіцієнт пропорційності. Визначити $t(x)$ за умови $t(0) = 0$.

17. Рівняння теплового стану електродвигуна має вигляд $adT = bdt - cTdT$, де a — повна теплоємність двигуна; b — витрати енергії на нагрівання; c — питома теплота двигуна; T — різниця температур двигуна і навколишнього середовища; t — час. Знайти $T(t)$, якщо $T(0)=0$.

18. Довести, що крива $y = y(x)$ є параболою $y = Cx^2$ тоді й тільки тоді, коли вона має таку властивість: якщо через будь-яку точку кривої провести прямі, паралельні осям координат, до перетину з ними, то крива поділить утворений прямокутник на дві фігури, площі яких відносяться як 1 : 2, рахуючи від осі Ox.

Зразки розв'язування задач

1. 4) Якщо функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ — різні розв'язки рівняння (5), то $y_i'(x)+p(x)y_i \equiv \equiv q(x)$, $i=1,\ 2$, і існує точка $x_0 \in (a;\ b)$ така, що $y_1(x_0) \neq y_2(x_0)$. Тоді $(C(y_1(x)- -y_2(x)))' + p(x)(C(y_1(x)-y_2(x))) \equiv 0$, тобто функція $C(y_1(x)-y_2(x))$ є розв'язком рівняння $y'+p(x)y=0$ для будь-якої сталої C. Звідси випливає, що $y_1'(x)+p(x)y_1(x)+ +(C(y_1(x)-y_2(x)))' + p(x)(C(y_1(x)-y_2(x))) \equiv q(x) \Leftrightarrow (y_1(x)+C(y_1(x)-y_2(x)))' + +p(x)(y_1(x)+C(y_1(x)-y_2(x))) \equiv q(x)$.

Отже, функція $y_1(x)+C(y_1(x)-y_2(x))$ є розв'язком рівняння (5) при довільному значенні сталої C.

Візьмемо тепер довільну функцію $y_3(x)$, яка є розв'язком рівняння (5). Тоді вона буде єдиною функцією, що задовольняє початкову умову $y_3(x_0)=y_0$ для фіксованого $x_0 \in (a;\ b)$. Разом з тим існує число $C \in \mathbf{R}$ таке, що $y_1(x_0)+C(y_1(x_0)-y_2(x_0)) = y_0$, звідки

$$C = \frac{y_0 - y_1(x_0)}{y_1(x_0)-y_2(x_0)}.$$

При цьому значенні C функція $y = y_1(x)+C(y_1(x)-y_2(x))$ є розв'язком рівняння (5), який задовольняє початкову умову $y(x_0)=y_0$. Оскільки така функція єдина, то $y_3(x) = y_1(x)+C(y_1(x)-y_2(x))$. Отже, рівність $y = y_1(x)+C(y_1(x)-y_2(x))$ задає будь-який розв'язок лінійного рівняння (5), тобто є його загальним розв'язком.

2. 12) Вважаючи $y>0$, $y \neq 1$, $\sin x \neq 0$, запишемо дане рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx}\sin x = y\ln y.$$

Звідси дістаємо

$$\frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{\sin x} \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y\ln y} = \int\frac{dx}{\sin x} \Leftrightarrow \int\frac{d(\ln y)}{\ln y} = \int d\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|\ln y| = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + \ln|C| \Leftrightarrow \ln y = C\ \mathrm{tg}\frac{x}{2} \Leftrightarrow y = e^{C\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}.$$

Розв'язуючи дане рівняння, виконали ділення обох його частин на вираз $y\ln y\sin x$, що могло призвести до втрати розв'язків $y=0$, $y=1$, $x=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Пряма $y=1$ є інтегральною кривою, але вона міститься серед функцій $y=\mathrm{e}^{C\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$, якщо покласти $C=0$. Пряма $y=0$ не є інтегральною кривою, оскільки за умовою $y>0$. Нарешті, прямі $x=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, не є інтегральними кривими даного рівняння.

Знайдемо розв'язок, що задовольняє початкову умову $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. Маємо $1=\mathrm{e}^{C\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}$, $1=\mathrm{e}^{C}$, $C=0$. Отже, шуканий розв'язок $y=1$.

3. 6) Зауважимо, що $y(x)$ є розв'язком даного рівняння тоді й тільки тоді, коли $\int\limits_0^x ty(t)dt\equiv x^2+y(x)$ і $y(0)=0$. Звідси

$$\left(\int\limits_0^x ty(t)dt\right)'\equiv\left(x^2+y\right)' \text{ і } y(0)=0 \Leftrightarrow xy(x)\equiv 2x+y'(x) \text{ і } y(0)=0,$$

тобто $y(x)$ — розв'язок диференціального рівняння $xy=2x+y'$ з початковою умовою $y(0)=0$. Помічаємо, що рівняння $y'=x(y-2)$ є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його: якщо $y\neq 2$, то:

$$\frac{dy}{dx}=x(y-2) \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y-2}=\int xdx \Leftrightarrow \ln|y-2|=\frac{x^2}{2}+C.$$

За умовою $y(0)=0$, тому $\ln 2=C$ і $\ln|y-2|=\frac{x^2}{2}+\ln 2 \Leftrightarrow |y-2|=2\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$. Якщо припустити, що $y>2$, то $y=2+2\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ і $y(0)=2$, що суперечить початковій умові $y(0)=0$. Тому $y<2$ і $y=2-2\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ — шуканий розв'язок.

4. 10) Перепишемо рівняння у вигляді $xydy=\left(y^2+(x+y)^2\mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}\right)dx$

або

$$y'=\frac{y}{x}+\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{y}{x}},\quad x\neq 0 \text{ і } y\neq 0.$$

Маємо $f(x,y)=\frac{y}{x}+\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, тобто дане рівняння є однорідним (див. формулу (3)). Покладемо $\frac{y}{x}=u\neq 0$. Тоді $y=ux$, $y'=u+xu'$, і дане рівняння набирає вигляду

$$u+xu'=u+\left(\frac{1}{u}+2+u\right)\mathrm{e}^{-u} \text{ або } xu'=\left(\frac{u+1}{u}\right)^2\mathrm{e}^{-u}.$$

Звідси дістаємо (якщо $u\neq -1$, тобто $x+y\neq 0$)

$$\int\frac{u\mathrm{e}^u}{(u+1)^2}du=\int\frac{dx}{x}.$$

Обчислимо окремо обидва інтеграли. Маємо

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+\ln|C|,$$

$$\int\frac{u\mathrm{e}^u du}{(u+1)^2}=\int\frac{((u+1)-1)\mathrm{e}^u}{(u+1)^2}du=\int\frac{\mathrm{e}^u du}{u+1}-\int\frac{\mathrm{e}^u du}{(u+1)^2}=$$
$$=\int\frac{\mathrm{e}^u du}{u+1}-\left(\mathrm{e}^u\left(-\frac{1}{u+1}\right)+\int\frac{\mathrm{e}^u du}{u+1}\right)=\frac{\mathrm{e}^u}{u+1}+C.$$

Отже,

$$\int\frac{u\mathrm{e}^u}{(u+1)^2}du=\int\frac{dx}{x}\ \Leftrightarrow\ \frac{\mathrm{e}^u}{u+1}=\ln|x|+\ln|C|\ \Leftrightarrow\ \frac{x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}}{y+x}=\ln|Cx|\ \Leftrightarrow\ x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}=(x+y)\ln|Cx|.$$

За умовою $x\neq 0$, тому при діленні на x не втрачено розв'язку. Функція $y=0$ не є розв'язком даного рівняння (в цьому переконуємося підстановкою функції $y=0$ в дане рівняння), тому при діленні на y не втрачено інтегральної кривої. Розв'язуючи рівняння, виконаємо також ділення на $(u+1)^2$, що може призвести до втрати інтегральної кривої $y=-x$, але ця функція також не є розв'язком рівняння. Отже, $x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}=(x+y)\ln|Cx|$ — загальний інтеграл даного диференціального рівняння.

Знайдемо тепер ту інтегральну криву, яка проходить через точку $(1,0)$. Маємо $1=\ln|C|\ \Leftrightarrow\ |C|=\mathrm{e}$, тому шукана інтегральна крива задається рівнянням

$$x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}=(x+y)(1+\ln|x|).$$

5. 8) У даному випадку маємо рівняння вигляду (4), в якому $a_1b_2=a_2b_1$. Застосуємо підстановку $x+y=z$, $dy=dz-dx$. Тоді задане рівняння набере вигляду $(2-z)dx=(1-2z)dz$, тобто стане рівнянням з відокремлюваними змінними. Переписавши його у вигляді $dx=\frac{2z-1}{z-2}dz$ і проінтегрувавши останню рівність, дістанемо $x-2z-3\ln|z-2|=C$. Повертаючись до змінних x і y, дістаємо загальний інтеграл даного рівняння $x+2y+3\ln|x+y-2|=C$.

Неважко переконатися, що інших розв'язків дане рівняння не має.

5. 10. Дане рівняння зводиться до однорідного. Покладемо $x=x^*+\alpha$, $y=y^*+\beta$. Тоді $\frac{dy^*}{dx^*}=\frac{dy}{dx}$, і дане рівняння набирає вигляду

$$(y^*)'=2\left(\frac{y^*+\beta+2}{x^*+y^*+\alpha+\beta-1}\right)^2.$$

Виберемо α і β так, щоб $\beta+2=0$ і $\alpha+\beta-1=0$. Тоді $\beta=-2$, а $\alpha=3$, і рівняння

$$(y^*)'=2\left(\frac{y^*}{x^*+y^*}\right)^2$$

є однорідним. Скористаємось підстановкою $y^* = x^* u$, $(y^*)' = x^* u' + u$. Тоді маємо

$$x^* u' + u = 2\left(\frac{u}{u+1}\right)^2 \Leftrightarrow x^* \frac{du}{dx^*} = \frac{2u^2 - u^3 - 2u^2 - u}{u^2 + 2u + 1},$$

$$\int \frac{u^2 + 2u + 1}{u\left(u^2 + 1\right)} du + \int \frac{dx^*}{x^*} = 0, \quad \int \left(\frac{1}{u} + \frac{2}{u^2 + 1}\right) du = \ln|x^*|,$$

$$\ln|u| + 2\operatorname{arctg} u = \ln|x^*| + \ln|C|, \quad u e^{2\operatorname{arctg} u} = Cx^*,$$

$$y^* e^{2\operatorname{arctg}\frac{y^*}{x^*}} = C(x^*)^2, \quad (y+2) e^{2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{y-3}} = C(x-3)^2.$$

Пропонуємо перевірити, чи не втрачено при розв'язуванні інтегральні криві.

6. 13) Дане рівняння не є лінійним відносно функції $y = y(x)$. Однак воно стає лінійним, якщо розглядати x як функцію від y:

$$\frac{dx}{dy} + x = -y^2.$$

Загальний розв'язок цього рівняння знаходимо у вигляді $x = u(y)v(y)$. Тоді $x'(y) = u'v + uv'$. Підставляючи x і x' у дане рівняння, дістаємо $u'v + u(v' + v) = -y^2$. Функцію $v = v(y)$ знаходимо з рівняння $v' + v = 0$. Візьмемо довільний частинний розв'язок цього рівняння, наприклад $v = e^{-y}$. Тоді

$$u' e^{-y} = -y^2 \Rightarrow du = -y^2 e^y dy \Rightarrow u = -\int y^2 e^y dy = -y^2 e^y + 2y e^y - 2e^y + C.$$

Отже, загальним розв'язком даного рівняння є

$$x = uv = 2y - y^2 - 2 + Ce^{-y}.$$

7. 8) Оскільки прямі $x = \pm 1$ не є інтегральними кривими даного рівняння, то його можна записати у вигляді

$$y' - \frac{x}{1-x^2} y = \frac{ax}{1-x^2} y^2.$$

Нехай $y = uv$, тоді $y' = u'v + uv'$ і рівняння набирає вигляду

$$u'v + uv' - \frac{x}{1-x^2} uv = \frac{ax}{1-x^2} u^2 v^2 \Leftrightarrow u'v + u\left(v' - \frac{x}{1-x^2} v\right) = \frac{ax}{1-x^2} u^2 v^2.$$

Виберемо v так, щоб $v' - \frac{x}{1-x^2} v = 0$. Тоді $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{x dx}{x^2 - 1}$ і $\ln|v| = -\frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 1\right|$, тобто можна взяти $v = \frac{1}{\sqrt{\left|x^2 - 1\right|}}$. Якщо $a = 0$, то вважатимемо $y = v + C$, тобто $y = \frac{1}{\sqrt{\left|x^2 - 1\right|}} + C$.

Якщо $a \neq 0$, маємо

$$u'v = \frac{ax}{1-x^2} u^2 v^2 \Leftrightarrow u' \frac{1}{\sqrt{\left(x^2 - 1\right)}} = \frac{ax}{1-x^2} \frac{u^2}{\left|1-x^2\right|}.$$

Розглянемо випадок, коли $|x|<1$. Тоді

$$\int\frac{du}{u^2}=-\frac{a}{2}\int\frac{d\left(1-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\Leftrightarrow -\frac{1}{u}=-a\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C\Rightarrow u=\frac{\sqrt{1-x^2}}{a+C\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{a+C\sqrt{1-x^2}}.$$

Випадок $|x|>1$ розглянути самостійно.

8. 3) Перевіримо, що дане рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Маємо

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3+3xy^2\right)=6xy;\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(y^3+3x^2y\right)=6xy.$$

Отже, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ в області $D=\mathbf{R}^2$, тобто виконується умова (7). Тоді існує така функція $u=u(x,y)$, що $du=\left(x^3+3xy^2\right)dx+\left(y^3+3x^2y\right)dy$. Залишається знайти загальний інтеграл рівняння $du=0$.

1-й спосіб. Покладаючи у формулі (8) $x_1=y_1=0$, дістаємо

$$\int_0^x t^3dt+\int_0^y\left(t^3+3x^2t\right)dt=C\Leftrightarrow \left.\frac{t^4}{4}\right|_0^x+\left.\left(\frac{t^4}{4}+\frac{3}{2}x^2t^2\right)\right|_0^y=C\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{4}+\frac{y^4}{4}+\frac{3}{2}x^2y^2=C.$$

2-й спосіб. Загальний інтеграл даного рівняння має вигляд $u(x,y)=C$. Скориставшись формулою $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$, дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=x^3+3xy^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=y^3+3x^2y.$$

Тоді

$$u(x,y)=\int\frac{\partial u}{\partial x}dx+C(y)=\int\left(x^3+3xy^2\right)dx+C(y)=\frac{x^4}{4}+3y^2\cdot\frac{x^2}{2}+C(y).$$

Для визначення функції $C(y)$ обчислимо $\frac{\partial u}{\partial y}$ і скористаємось умовою $\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$.

Маємо $\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y+C'(y)=y^3+3x^2y\Rightarrow C'(y)=y^3\Leftrightarrow C(y)=\frac{y^4}{4}+C_1$. Отже, $u(x,y)=\frac{x^4}{4}+$ $+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4}+C_1$, і загальний інтеграл даного рівняння має вигляд

$$\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4}=C.$$

3-й спосіб. Дане рівняння неважко звести до вигляду $du=0$ безпосереднім групуванням його членів:

$$x^3dx+3xy(ydx+xdy)+y^3dy=0.$$

Помічаємо, що

$$x^3dx = d\left(\frac{x^4}{4}\right),\quad 3xy(ydx + xdy) = 3xy\,d(xy) = d\left(\frac{3}{2}x^2y^2\right),\quad y^3dy = d\left(\frac{y^4}{4}\right).$$

Тому дане рівняння можна записати у вигляді

$$d\left(\frac{x^4}{4}\right) + d\left(\frac{3}{2}x^2y^2\right) + d\left(\frac{y^4}{4}\right) = d\left(\frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4}\right) = 0,$$

звідки дістаємо його загальний інтеграл

$$\frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} = C.$$

10. 6) Дане диференціальне рівняння можна записати так:

$$(\ln y + 2x - 1)dy - 2ydx = 0.$$

Тоді $Q(x, y) = \ln y + 2x - 1$, $P(x, y) = -2y$, $P'_y = -2$, $Q'_x = 2$. Тому функція $\psi = \frac{Q'_x - P'_y}{P} = $ $= \frac{2+2}{-2y} = -\frac{2}{y}$ залежить лише від y. Отже, функція $\mu(y) = \mathrm{e}^{\int \frac{-2dy}{y}} = \mathrm{e}^{-\ln y^2} = \frac{1}{y^2}$ є інтегрувальним множником даного диференціального рівняння. Тоді рівняння

$$-\frac{2dx}{y} + \left(\frac{\ln y}{y^2} + \frac{2x}{y^2} - \frac{1}{y^2}\right)dy = 0$$

є рівнянням у повних диференціалах. Його загальний інтеграл має вигляд

$$\int_{x_1}^{x} \frac{-2dt}{y_1} + \int_{y_1}^{y} \left(\frac{\ln t}{t^2} + \frac{2x}{t^2} - \frac{1}{t^2}\right)dt = C \iff -\frac{2x}{y_1} + \frac{2x_1}{y_1} + \left(\ln t\left(-\frac{1}{t}\right) - \frac{2x}{t} + \frac{1}{t}\right)\Bigg|_{y_1}^{y} = C \iff$$

$$\iff \frac{2x_1}{y_1} - \frac{\ln y}{y} + \frac{\ln y_1}{y_1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y_1} = C \iff \frac{1}{y} - \frac{\ln y}{y} - \frac{2x}{y} = C_1 \iff 1 - \ln y - 2x = C_1 y,\ y > 0.$$

§ 20.3. Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної. Особливі розв'язки

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку, не розв'язане відносно похідної, тобто рівняння вигляду

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (1)$$

Особливим розв'язком рівняння (1) називають таку функцію $y = \varphi(x)$, яка є розв'язком цього рівняння і через кожну точку її графіка проходить принаймні дві інтегральні криві рівняння (1). Зрозуміло, що особливий розв'язок не можна дістати із загального при жодному значенні сталої C. Цей розв'язок може з'явитися лише тоді, коли порушуються умови теореми про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння. Особливим розв'язком може бути лише *дискримінантна крива* рівняння (1), яка є множиною точок $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, координати яких задовольняють рівняння $f(x, y) = 0$, що дістаємо виключенням y' з рівностей $F(x, y, y') = 0$ і $F'_{y'}(x, y, y') = 0$. Дискримінантна крива напевно є графіком особливого розв'язку рівняння (1), якщо в її точках виконуються умови $F'_x \neq 0$ або $F'_y \neq 0$ і $F'_x + y'F'_y = 0$.

Обвідною сім'ї інтегральних кривих $\Phi(x, y, C) = 0$, $C = \text{const}$, рівняння (1) називають таку криву, яка дотикається до кожної з кривих даної сім'ї і складається лише з цих точок дотику. Обвідна сім'ї інтегральних кривих, якщо вона існує, обов'язково є особливим розв'язком рівняння (1).

Для відшукання обвідної сім'ї кривих $\Phi(x, y, C) = 0$ треба виключити параметр C із системи рівнянь

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

і перевірити виконання умови $\left(\Phi'_y\right)^2 + \left(\Phi'_x\right)^2 > 0$, $\Phi'_x \Phi''_{Cx} - \Phi'_y \Phi''_{Cy} \neq 0$.

Розглянемо деякі типи рівняння (1), які інтегруються в скінченному вигляді.

1) Рівняння (1) можна розв'язати відносно y'. Такі рівняння розглядалися у попередньому параграфі.

2) Рівняння (1) можна розв'язати відносно y: $y = f(x, y')$.

Таке рівняння розв'язують методом введення параметра:

$$\begin{cases} y' = p, \\ y = f(x, p) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' = p, \\ p = f'_x(x, p) + f'_p(x, p)\dfrac{dp}{dx} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' = p, \\ \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{p - f'_x(x, p)}{f'_p(x, p)}. \end{cases}$$

Визначивши p з останнього рівняння, можна знайти розв'язки даного рівняння.

3) Рівняння (1) можна розв'язати відносно x:

$$x = f(y, y') \text{ або } x = \varphi(y, x').$$

Таке рівняння розв'язують введенням параметра $p = x'$.

4) Рівняння (1) можна записати у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \varphi(p), \\ y' = \psi(p), \quad p = p(y') \in (\alpha; \beta). \end{cases}$$

Вважаючи $dx = \varphi'(p)dp$, дістанемо $dy = \psi(\mathrm{p})dx = \psi(\mathrm{p})\varphi'(p)dp$, звідки знаходимо $y = y(p, C)$ і параметричне рівняння розв'язків

$$\begin{cases} x = \varphi(p), \\ y = y(p, C). \end{cases}$$

Рівнянням Лагранжа називають диференціальне рівняння вигляду

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \tag{2}$$

(лінійне відносно x і y), де φ і ψ — деякі неперервно диференційовні функції на інтервалі (α, β).

Це рівняння вигляду 2). Підстановкою $y' = p$ його зводять до лінійного рівняння

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)},$$

якщо $\varphi(p) \not\equiv p$. У випадку коли $p_k, k \in \overline{1, n}$, є коренями рівняння $\varphi(p) = p$, прямі $y = x\varphi(p_k) + \psi(p_k)$ також є розв'язками рівняння (2), причому вони можуть бути особливими.

Окремим випадком рівняння Лагранжа є *рівняння Клеро*:

$$y = xy' + \psi(y'). \tag{3}$$

Особливістю цього рівняння є те, що його загальним розв'язком є сім'я прямих $y = Cx + \psi\ (C)$, де C — довільна стала з множини $D(\psi)$, яку можна дістати з (3), формально замінивши y' на C. Розв'язком рівняння (3) може бути також функція, задана параметрично:

$$\begin{cases} x + \psi'(p) = 0, \\ y = xp + \psi(p). \end{cases} \tag{4}$$

Якщо існує $\psi''(p) \neq 0$, то система (4) задає розв'язок рівняння Клеро і він є особливим.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) якщо диференціальне рівняння першого порядку розв'язане відносно похідної, то його можна записати у вигляді рівняння, не розв'язаного відносно похідної;

2) для кожного диференціального рівняння (1) можна вказати рівняння $y' = f(x, y)$ таке, що $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$ в деякому околі $O(x_0, y_0)$;

3) якщо функція F задовольняє умови теорем про існування та неперервність неявної функції, то існує функція f така, що:

а) $y' = f(x, y)$ і $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0,\ (x, y) \in O(x_0, y_0)$;

б) $y = f(x, y')$ і $F(x, f(x, y'), y') \equiv 0,\ (x, y') \in O(x_0, y_0)$;

в) $x = f(y, y')$ і $F(f(y, y'), y, y') \equiv 0,\ (y, y') \in O(y_0, y'_0)$;

4) рівняння Лагранжа може бути диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними;

5) кожне диференціальне рівняння першого порядку має особливий розв'язок;

6) кожне рівняння Клеро має особливий розв'язок;

7) кожна дискримінантна крива рівняння (1) є його особливим розв'язком;

8) графік особливого розв'язку рівняння (1) є обвідною сім'ї інтегральних кривих цього рівняння;

9)• кожне рівняння Лагранжа має особливий розв'язок;

10) існує рівняння (1) таке, що кожний його розв'язок є особливим.

2. Знайти розв'язки даних рівнянь, попередньо розв'язавши їх відносно похідної, якщо це можливо:

1) $xy'^2 - 2yy' + x = 0$; 2)• $y' + |y'| = 0$; 3) $y'^4 - 4y'^2 + 4 = 0$;

4) $yy'^2 = y - 2xy'$; 5) $x^2 = xy' + y'^2$; 6) $x^3 + y'^2 = x^2$;

7) $ydx = x\sqrt{dx^2 + dy^2}$; 8) $y^2\left(1 + y'^2\right) = a^2$.

3. Розв'язати дані рівняння введенням параметра:

1) $y\sqrt{1 + y'^2} = y'$; 2) $y'\sin y' - x = 0$;

3) $ay' + b\sqrt{1 + y'^2} - x = 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0$; 4)• $ay' + by'^2 + cx = 0$;

5) $y - y' = \sqrt{1 + y'^2}$; 6) $y - y'^2 = 2y'^3$; 7) $y - y'^2 \mathrm{e}^{y'} = 0$;

8) $x - 1 + xy'^2 = 0$; 9) $y^2\left(1 + y'^2\right) = a^2$; 10) $y'^2 - yy' + \mathrm{e}^x = 0$;

11) $y^2(y' - 1) = (2 - y')^2$; 12) $y = 2y'^2 + (x - 1)y'$.

4. Визначити, чи мають диференціальні рівняння із вправ 2 і 3 особливі розв'язки, якщо мають, то вказати їх.

5•. Вказати метод розв'язування рівнянь Лагранжа і Клеро.

6. Розв'язати дані рівняння Лагранжа або Клеро і вказати особливі розв'язки, якщо вони є:

1) $y = xy'^2 + 2y'$; 2) $y = 2xy' + y'^2$; 3) $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$;

4) $yy' - xy'^2 - a = 0$; 5) $xy'^2 - yy' - 1 = 0$; 6)• $y' = \sin(y - xy')$;

7) $y + y'^2 = y'(1 + x)$; 8) $y + y'^2 - xy' = 0$; 9) $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$;

10) $y - a = by'^2 + (x - c)y'$; 11) $a^2\left(1 + y'^2\right) = (xy' - y)^2,\ a > 0$;

12) $y' = \mathrm{e}^{\frac{y - xy'}{y'}}$; 13) $y^2 - 2xyy' + \left(1 + x^2\right)y'^2 = 1$;

14) $(y - xy')^2 + ay' = 0$; 15)• $y = x(y' + \sin y')$; 16) $y - xy' = \sqrt{-ay'}$.

7. Знайти особливі розв'язки даних диференціальних рівнянь за їх загальним розв'язком:

1) $y'^2 = 4y^3(1-y), \quad y + y(x-C)^2 = 1;$

2) $y = xy' + \dfrac{2}{y'}, \quad y = Cx + \dfrac{2}{C};$

3) $y = xy' - a\sqrt{1+y'^2}, \quad y = Cx - a\sqrt{1+C^2};$

4) $xy'^2 + 2xy' = y, \quad (y-C)^2 = 4Cx.$

8. Знайти обвідну даної сім'ї інтегральних кривих деякого диференціального рівняння, якщо вона існує:

1) $y = Cx + C^2;$ 2) $y = Cx - C^2;$ 3) $y = (x+C)^2;$

4) $y = C(x-C)^2;$ 5)• $y = Cx + \cos C;$ 6) $x^2 + y^2 = C^2;$

7) $(x-C)^2 + y^2 = a^2;$ 8) $y - C^3x^2 + 2C^2x - C = 0;$

9) $(y-C)^2 = (x-C)^3;$ 10) $y = \dfrac{x^2}{2} + Cx + Cx^2;$

11) $(y-Cx)^2 = 1 - C^2;$ 12) $y(x-C)^2 = 1-y;$ 13) $y = e^{xC}.$

9. Показати, що рівняння Клеро (3) має особливий розв'язок, якщо $\psi''(p) \neq 0$ і $\psi''(p)$ — неперервна функція на деякому інтервалі.

10. Дискримінантна крива рівняння (1) може бути: а) особливим розв'язком цього рівняння (у цьому випадку вона є обвідною сім'ї інтегральних кривих); б) частинним розв'язком рівняння; в) геометричним місцем точок звороту (або загострення) інтегральних кривих; г) геометричним місцем точок дотику різних інтегральних кривих.

Встановити характер дискримінантної кривої для даних диференціальних рівнянь:

1) $y^2 = y'^2;$ 2)• $y'^2 = x;$ 3) $y = y'^2;$ 4) $y^2 = 1 - y'^2;$

5) $y'^2 - x^2 = 0;$ 6)• $y^2 = y'^3;$ 7) $yy'^2 = 1;$ 8) $y = xy' - e^{y'}.$

Зразки розв'язування задач

1. 9) Розглянемо рівняння Лагранжа вигляду $y = xy' + y'$, тобто $y = y'(x+1)$. Його можна розв'язати як рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1} \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x+1| + \ln|C| \Rightarrow y = C(x+1),$$

де C — довільна стала. Розв'язуючи дане рівняння, виконаємо ділення на вираз $y(x+1)$, що може призвести до втрати інтегральних кривих $y=0$ і $x=-1$. Проте цього не трапилось, оскільки пряму $y=0$ дістаємо з рівності $y = C(x+1)$ при $C=0$, а пряма $x=-1$ не є інтегральною кривою даного диференціального рівняння. Отже, всі інтегральні криві описуються рівністю $y=C(x+1)$, де C — довільна стала, тому дане рівняння Лагранжа не має особливих розв'язків. Оскільки дане рівняння є також рівнянням Клеро, то і рівняння Клеро не завжди має особливі розв'язки.

Отже, дане твердження неправильне.

2. 2) Дане рівняння не можна розв'язати відносно похідної. Скористаємось властивостями модуля й умовою монотонності функції. Нехай функція $y=f(x)$, $x\in(a;\ b)$, є розв'язком даного диференціального рівняння, тобто $|f'(x)|+f'(x)\equiv 0$ на інтервалі $(a;\ b)$. Тоді $f'(x)\le 0\quad \forall x\in(a;\ b)$, бо в противному разі $|f'(x)|+f'(x)=f'(x)+f'(x)>0$ для деякої точки $x\in(a;\ b)$, що неможливо. Отже, якщо диференційовна на інтервалі $(a;\ b)$ функція f є розв'язком даного диференціального рівняння, то вона незростаюча на цьому інтервалі.

Покажемо, що й обернене твердження справедливе. Візьмемо довільну незростаючу і диференційовну на інтервалі $(a;\ b)$ функцію $y=f(x)$. Тоді $f'(x)\le 0\quad \forall x\in(a;\ b)$, тому

$$|f'(x)|+f'(x)=-f'(x)+f'(x)=0\quad \forall x\in(a;\ b).$$

Це означає, що $y=f(x)$, $x\in(a;\ b)$, є розв'язком рівняння $y'+|y'|=0$.

Таким чином, для того щоб диференційовна функція $y=f(x)$, $x\in(a;\ b)$, була розв'язком даного диференціального рівняння, необхідно й достатньо, щоб функція f була незростаючою на інтервалі $(a;\ b)$. Звідси, зокрема, випливає, що через кожну точку площини Oxy проходить безліч інтегральних кривих рівняння $y'+|y'|=0$, тому кожний розв'язок цього рівняння є особливим.

3. 4) Нехай $c=0$. Тоді дане диференціальне рівняння набирає вигляду $(a+by')y'=0$, звідки дістаємо, що $y'=0$ або $a+by'=0$. Отже, маємо розв'язки $y=C_1=\text{const}$ або $y=-\frac{a}{b}x+C_2$, $b\ne 0$.

Нехай $c\ne 0$. Тоді якщо $a=b=0$, то єдиною інтегральною кривою даного диференціального рівняння є пряма $x=0$. Якщо $a\ne 0$ або $b\ne 0$, то, ввівши параметр $p=y'$, дістанемо

$$x=-\frac{a}{c}p-\frac{b}{c}p^2,\quad dx=\left(-\frac{a}{c}-\frac{2b}{c}p\right)dp,$$

$$dy=y'dx=p\left(-\frac{a}{c}-\frac{2b}{c}p\right)dp.$$

Тоді загальний інтеграл даного рівняння у параметричній формі має вигляд

$$y=-\frac{ap^2}{2c}-\frac{2b}{3c}p^3+C_3,\quad x=-\frac{a}{c}p-\frac{b}{c}p^2.$$

5. Розглянемо рівняння Лагранжа (2). Введемо параметр $p=y'$. Тоді $y=x\varphi(p)+\psi(p)$, $y'=p=\varphi(p)+x\varphi'(p)\frac{dp}{dx}+\psi'(p)\frac{dp}{dx}$, звідки

$$p-\varphi(p)=\frac{dp}{dx}(x\varphi'(p)+\psi'(p)).\tag{5}$$

Припустимо, що $p-\varphi(p)\ne 0\quad \forall x\in(a;\ b)$. Тоді рівняння (5) можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{dp}-x\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}.$$

Останнє рівняння є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку відносно функції $x = x(p)$, і його загальний розв'язок має вигляд $x = x(p, C)$. Тоді загальний інтеграл даного диференціального рівняння у параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = x(p,C), \\ y = x\varphi(p)+\psi(p). \end{cases}$$

Якщо $p \equiv \varphi(p)$ на інтервалі $(a;\ b)$, то рівняння Лагранжа перетворюється у рівняння Клеро, для якого рівність (5) набирає вигляду

$$\frac{dp}{dx}(x+\psi'(p)) = 0.$$

Звідси маємо $\frac{dp}{dx} = 0$ або $x + \psi'(p) = 0$. З першого рівняння дістаємо $p = C$, тоді сім'я інтегральних кривих рівняння Клеро має вигляд $y = Cx + \psi(C)$ (це сім'я прямих, яку дістаємо з рівняння Клеро заміною y' на C).

Якщо $x + \psi'(p) = 0$, то система

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = xp+\psi(p), \end{cases}$$

можливо, задає розв'язок рівняння Клеро, який при цьому напевно є особливим (див. вправу 9).

Якщо $p = \varphi(p)$ в окремих точках p_k, $k = 1,\ 2,\ \ldots$, то функції $y = x\varphi(p_k) + \psi(p_k)$ будуть розв'язками рівняння Лагранжа і серед них можливі особливі розв'язки цього рівняння.

6. 6) Оскільки $y' = \sin(y - xy')$, то $y - xy' = (-1)^k \arcsin y' + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, тобто маємо рівняння Клеро $y = xy' + (-1)^k \arcsin y' + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Для простоти розглянемо випадок, коли $k = 0$. Тоді $y = xy' + \arcsin y'$. Сукупність усіх інтегральних кривих цього рівняння складається з прямих $y = Cx + \alpha\mathrm{rcsin}\, C$, де $C \in [-1;\ 1]$ — довільна стала, та кривих, що визначаються системою

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-p^2}} < -1, \\ y = px + \arcsin p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \pm\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} = \pm\dfrac{1}{x}\sqrt{x^2-1},\ x < -1, \\ y = \mp\sqrt{x^2-1} \mp \arcsin\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x},\ x < -1. \end{cases}$$

Останні функції є особливими розв'язками заданого рівняння.

15) Дане рівняння є рівнянням Лагранжа. Введенням параметра $p = y'$ дістаємо

$$y = x(p+\sin p) \Rightarrow y' = p = p + \sin p + x(1+\cos p)\frac{dp}{dx} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x(1+\cos p)\frac{dp}{dx} = -\sin p.$$

Останнє рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Отже, маємо

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{1+\cos p}{\sin p}dp = 0 \ \Leftrightarrow\ \ln|x| + \int\frac{\cos^2\frac{p}{2}dp}{\sin\frac{p}{2}\cos\frac{p}{2}} = \ln|C| \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \ln|x| + 2\ln\left|\sin\frac{p}{2}\right| = \ln|C| \ \Leftrightarrow\ x = \frac{C}{\sin^2\frac{p}{2}},\ C \ne 0,\ p \ne 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Звідси $p = \pm\arccos\left(1-\frac{2C}{x}\right)+2\pi m,\ \ m\in\mathbf{Z},$ і

$$y = x\left(\pm\arccos\left(1-\frac{2C}{x}\right)+2\pi m\pm\sqrt{1-\left(1-\frac{2C}{x}\right)^2}\right) = x\left(\pm\arccos\left(1-\frac{2C}{x}\right)+2\pi m\pm\sqrt{\frac{4C(x-C)}{x^2}}\right)$$

— сім'я інтегральних кривих за умови, що $\sin p\neq 0,$ тобто $p\neq\pi k\quad\forall k\in\mathbf{Z}.$ При $p=\pi k$ дістаємо $y=\pi kx,\ \ k\in\mathbf{Z}.$ Це також інтегральні криві даного рівняння. Встановимо їхній тип.

Зрозуміло, що через точку $(0,\ 0)$ проходить безліч інтегральних кривих даного рівняння. Візьмемо довільну точку $(x_0,y_0),\ \ x_0\neq 0,$ що лежить на прямій $y=\pi kx.$ Тоді $\frac{y_0}{x_0}=\pi k.$ Враховуючи, що

$$\frac{y}{x} = \pm\arccos\left(1-\frac{2C}{x}\right)+2\pi m\pm\sqrt{\frac{4C(x-C)}{x^2}}$$

і покладаючи $C=x_0,$ дістаємо

$$\frac{y_0}{x_0}=\pi k=\pm\pi+2\pi m=\pi(2m\pm 1)\ \Leftrightarrow\ k=2m\pm 1,$$

тобто через довільну точку прямої $y=(2m\pm 1)x$ проходить принаймні дві інтегральні криві даного рівняння. Отже, $y=(2m\pm 1)x,\ \ m\in\mathbf{Z},$ — особливі розв'язки заданого рівняння.

Оскільки прямі $y=2mx$ можна дістати із загального розв'язку при $C=0,$ то вони є інтегральними кривими, що відповідають частинним розв'язкам.

8. 5) Знайдемо обвідну даної сім'ї кривих. Враховуючи, що $\Phi(x,y,C)=y-Cx-\cos C=0,$ дістаємо

$$\begin{cases} y=Cx+\cos C,\\ -x+\sin C=0.\end{cases}$$

З другого рівняння системи знаходимо $C=\arcsin x.$ Тоді $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2},\ \ x\in(-1;\ 1),$ є обвідною даної сім'ї кривих, якщо $C\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],$ оскільки $\Phi_y'^{\,2}+\Phi_x'^{\,2}=1+C^2>0\quad\forall C$ і $\Phi_x'\Phi_{Cx}''-\Phi_y'\Phi_{Cy}''=C\neq 0\ \ \forall C\neq 0,$ а отже, є особливим розв'язком рівняння Клеро $y=$ $=xy'+\cos y',$ для якого $y=Cx+\cos C$ є сім'єю інтегральних кривих. Можливість інших особливих розв'язків дослідити самостійно.

10. 2) Дискримінантну криву знаходимо із системи рівнянь $\begin{cases} y'^2-x^2=0,\\ 2y'=0.\end{cases}$ Виключаючи $y',$ дістаємо рівняння дискримінантної кривої $x=0.$ Ця пряма не є інтегральною кривою, оскільки не задовольняє задане диференціальне рівняння. Загальний розв'язок даного рівняння має вигляд $(y+C)^2=\frac{4}{9}x^3$ (переконайтеся у цьому), тому точки прямої $x=0$ є геометричним місцем точок звороту інтегральних кривих.

6) Дискримінантну криву визначаємо виключенням y' із системи $F(x,y,y')=y^2-y'^3=$ $=0,\ \ F'_{y'}=-3y'^2=0.$ Маємо $y=0.$ Переконуємось, що пряма $y=0$ є інтегральною кривою даного рівняння. Оскільки загальний розв'язок даного диференціального рівняння має вигляд $y=\frac{1}{27}(x+C)^3,$ то неважко помітити, що $y=0$ не є частинним розв'язком (його не можна дістати при жодному значенні константи С), а отже, є особливим розв'язком.

§ 20.4. Практичні застосування диференціальних рівнянь першого порядку

Процес розв'язування практичної задачі складається з трьох кроків: складання диференціального рівняння, розв'язування цього рівняння та дослідження розв'язків.

Користуючись умовою задачі, складають співвідношення між шуканою величиною та її похідною, яка характеризує швидкість зміни цієї величини залежно від зміни аргументу. При цьому, розв'язуючи геометричну задачу, використовують геометричний зміст похідної, яка дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, а при розв'язуванні фізичної задачі — механічний зміст похідної, яка дорівнює миттєвій швидкості.

Розв'язуючи фізичні та інші прикладні задачі, часто користуються так званим методом диференціалів. Він полягає в тому, що наближене співвідношення між малими приростами величин замінюють співвідношеннями між їхніми диференціалами. Така заміна ґрунтується на означенні диференціала як лінійної та головної частини приросту функції.

Геометричну задачу можна розв'язувати за такою схемою:

1) рівняння шуканої кривої позначити $y = y(x)$ і зобразити її на площині Oxy у вигляді деякої кривої;

2) взяти на цій кривій довільну точку (x_0, y_0) і, якщо передбачено умовою задачі, провести через неї пряму (дотичну або нормаль до шуканої кривої) та записати рівняння цієї прямої;

3) пов'язати всі величини, що фігурують в умові задачі, між собою та з числами $x_0, y_0 = y(x_0), y_0' = y'(x_0)$, тобто фактично скласти диференціальне рівняння сім'ї кривих;

4) у складеному рівнянні опустити у змінних x_0, y_0 і y_0' індекс 0;

5) якщо передбачено умовою задачі, виділити початкову умову, наприклад точку, через яку має проходити шукана крива;

6) розв'язати і дослідити складене диференціальне рівняння.

Зауважимо, що пункт 4) у запропонованій схемі можна опустити, якщо вибрану точку кривої позначити (x, y), а біжучі координати відповідних прямих — X і Y.

Фізичну задачу можна розв'язувати за такою схемою:

1) з'ясувати, якому фізичному закону підпорядкований розглядуваний у задачі процес;

2) ввести незалежну змінну (наприклад, час t), шукану функцію (наприклад, шлях $s = s(t)$), її похідну (наприклад, швидкість $s' = s'(t)$);

3) виразити всі величини, які фігурують в умові задачі, через незалежну змінну, функцію та її похідну;

4) скласти диференціальне рівняння на основі використаного закону та залежності між указаними вище величинами;

5) якщо передбачено умовою задачі, виділити початкову умову (наприклад, $s_0 = s(t_0)$);

6) розв'язати та дослідити складене диференціальне рівняння.

За поданою схемою можна розв'язувати й інші практичні задачі.

Вправи

1. Знайти криву, яка задовольняє дані умови:

1) відрізок дотичної до цієї кривої, розміщений між координатними осями, у точці дотику ділиться навпіл, а крива проходить через точку $(1, 2)$;

2) довжина будь-якої її піддотичної є сталою і дорівнює a;

3) довжина будь-якої її піднормалі є сталою і дорівнює b;

4) довжина будь-якої її піддотичної дорівнює середньому арифметичному координат точки дотику;

5) кутовий коефіцієнт будь-якої дотичної до кривої дорівнює квадрату ординати точки дотику;

6) прямі $y = 0$, $x = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$, де (x_0, y_0) — довільна точка кривої, утворюють прямокутник, який ділиться даною кривою на дві частини, відношення площ яких дорівнює $\frac{m}{n}$;

7) усі нормалі кривої проходять через фіксовану точку;

8) усі дотичні кривої проходять через фіксовану точку;

9) дотична до кривої в точці (x, y) проходить через точку $\left(x^2, y^2\right)$;

10) усі дотичні кривої проходять через початок координат;

11) довжина будь-якої піддотичної даної кривої дорівнює сумі координат точки дотику;

12) довжина будь-якої піднормалі кривої у точці (x, y) дорівнює $\sqrt{x^2 + y^2} - x$;

13) відрізок будь-якої дотичної до кривої від точки дотику до точки перетину її з віссю Oy має сталу довжину, що дорівнює a;

14) довжина відрізка будь-якої дотичної до кривої між осями координат є сталою і дорівнює a;

15) будь-яка дотична до кривої відтинає на осях координат відрізки, сума довжин яких є сталою і дорівнює a;

16)• будь-яка дотична до кривої відтинає на осях координат відрізки, добуток довжин яких дорівнює одиниці, і крива проходить через точку $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$;

17) будь-яка дотична до кривої утворює з осями координат трикутник сталої площі;

18) дотична до кривої $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, у точці (x_0, y_0), осі координат і пряма $y = y_0$ утворюють трапецію, площа якої є сталою і дорівнює 3/2, а сама крива проходить через точку $(1, 0)$;

19) площа трикутника, утвореного віссю Ox, дотичною до кривої і радіусом-вектором точки дотику, є сталою і дорівнює 1, причому крива проходить через точку $(0, 1)$;

20) площа фігури, обмеженої осями координат, даною кривою $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, і довільною прямою $y = f(x_0)$, де $x_0 \in [a; b]$, утричі менша за площу прямокутника, обмеженого прямими $x = 0$, $y = 0$, $x = x_0$ і $y = f(x_0)$;

21) площа криволінійної трапеції, обмеженої відрізком $[1; x]$ і відповідною дугою кривої, дорівнює ординаті точки (x, y) цієї кривої, а сама крива проходить через точку $(0, 1)$;

22) крива $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, проходить через початок координат і така, що площа трикутника, утвореного дотичною до кривої в точці (x_0, y_0), прямою $y = y_0$ і віссю Ox, удвічі більша за площу криволінійної трапеції, утвореної кривою, віссю Ox і прямою $y = y_0$.

23) середня ордината кривої на відрізку $[0; x]$, тобто величина $\frac{1}{x}\int\limits_0^x y(t)\,dt$, пропорційна ординаті у кінцевій точці x;

24) крива задана у полярних координатах, і довжина будь-якої її дуги пропорційна площі сектора, обмеженого цією дугою і двома радіусами-векторами;

25) крива задана у полярних координатах, і в кожній її точці тангенс кута між радіусом-вектором цієї точки і дотичною дорівнює квадрату довжини радіуса-вектора.

2•. Крива, що перетинає всі криві даної сім'ї під даним кутом α і складається лише з цих точок перетину, *називається ізогональною траєкторією* даної сім'ї кривих. Зокрема, якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то ізогональна траєкторія називається *ортогональною*.

Довести, що ізогональні траєкторії сім'ї інтегральних кривих $F(x, y, y') = 0$ можна знайти як розв'язки диференціального рівняння $F\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0$, де $k = \operatorname{tg}\alpha$, а ортогональні траєкторії — з рівняння $F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$.

3. Знайти ортогональні (якщо не вказано кут α) або ізогональні (якщо вказано кут α) траєкторії даної сім'ї кривих:

1) $y = ax^2$; 2) $x^2 + y^2 = a^2$, α — довільне число;

3) $x^2 + y^2 = 2ax$, 4) $x^2 + y^2 = 2ax$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$; 5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

6)• $xy = a$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$; 7) $y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)$;

8) $x - y = x^2 + a^2$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$; 9) $x^2 - y^2 = a^2$.

4. Швидкість тіла пропорційна пройденому шляху. За перші 10 с тіло пройшло 100 м, за 15 с — 200 м. Який шлях пройде тіло за 20 с?

5•. Знайти закон зміни тиску повітря залежно від висоти над рівнем моря.

6. Населення країни зростає зі швидкістю, пропорційною його наявній кількості. Знайти закон залежності кількості населення від часу.

7. Визначити вартість обладнання через t років, якщо швидкість його знецінення внаслідок зносу в кожний момент часу пропорційна фактичній вартості, а початкова вартість дорівнює p_0.

8•. Температура вийнятого з печі хліба протягом 20 хв падає від 100 до 60 °C. Температура повітря 25 °C. Через який час від початку охолодження температура хліба знизиться до 30°C?

9. За 30 днів маса радіоактивної речовини зменшилась на 50%. Через який час залишиться 1 % від початкової кількості цієї речовини, якщо відомо, що швидкість розпаду радіоактивної речовини пропорційна наявній її кількості?

10•. У посудину об'ємом 40 л, що містила в початковий момент часу 80 % азоту і 20 % кисню, щосекунди надходить 0,2 л азоту, який неперервно змішується, і така сама кількість суміші виходить з посудини. Визначити, через який час у посудині залишиться 90 % азоту?

11. У корівнику, об'єм якого 1500 м^3, працюють два вентилятори, кожний з яких за 1 хв подає 60 м^3 чистого повітря, що містить 0,01 % вуглекислоти. Вважаючи, що у приміщенні знаходиться 120 корів, кожна з яких видихає за хвилину 0,1 м^3 повітря з 5 %-м вмістом вуглекислоти, визначити наявність вуглекислоти в 1 м^3 повітря після двох годин їхнього перебування у корівнику, якщо початковий вміст вуглекислоти в ньому становив 0,2 %.

12. Швидкість витікання води через отвір у дні резервуара визначається за формулою $v = 0,6\sqrt{2gh}$, де g – прискорення вільного падіння, h – висота рівня води над отвором. За який час вода, що заповнює резервуар, витече з нього повністю, якщо:

1) резервуар має форму круглого циліндричного бака з вертикальною віссю, діаметром D і висотою H, а діаметр отвору дорівнює d;

2) резервуар той самий, що і в 1), але з горизонтальною віссю, причому $D = 4$ м, $H = 6$ м і $d = 1/12$ м;

3) резервуар має форму півсфери, діаметр якої $D = 2$ м, а отвір у дні має діаметр $d = 0,2$ м.

13. У порожній резервуар, про який ідеться у вправі 12.1), надходить вода зі швидкістю 10 м^3/хв. Визначити час наповнення резервуара.

14. Човен сповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна 1,5 м/с, а його швидкість через 4 с дорівнює 1 м/с. Визначити, коли швидкість зменшиться до 1 см/с і який шлях пройде човен до зупинки.

15. Моторний човен рухається у стоячій воді зі швидкістю 5 м/с. На повному ходу його мотор виключають і через 40 с після цього швидкість човна зменшується до 2 м/с. Визначити швидкість човна через 2 хв після зупинки мотора, вважаючи, що опір води пропорційний швидкості руху човна.

16. Куля, рухаючись зі швидкістю $v_0 = 400$ м/с, пробиває стіну завтовшки $h = 20$ см і вилітає зі швидкістю 100 м/с. Знайти час проходження кулі через стіну, вважаючи, що сила опору стіни пропорційна квадрату швидкості руху кулі.

17•. Знайти максимальну швидкість падіння парашутиста, якщо його маса разом з парашутом дорівнює 80 кг, а сила опору повітря при падінні пропорційна квадрату швидкості його руху (вважати, що коефіцієнт пропорційності $k = 3 \cdot 10^2$ г/см).

18. Кількість світла, що поглинається при його проходженні через тонкий шар води, пропорційна кількості світла, що падає, та товщині шару води. Визначити, яка кількість падаючого світла дійде до глибини 30 м, якщо до глибини 3 м доходить половина падаючого світла.

19. Сила струму $I = I(t)$ у мережі з опором R_0, самоіндукцією L_0 і напругою $U = U(t)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$L_0 \frac{dI}{dt} + R_0 I = U.$$

Визначити:

1) залежність сили струму від часу за початкової умови $I(0) = 0$;

2) те саме, що й у вправі 1), вважаючи додатково, що $U = k_0 t$, $k_0 = \text{const}$;

3) те саме, що й у вправі 2), вважаючи додатково, що $U = 300$ В, $R_0 = 150$ Ом, $L_0 = 30$ Гн. За який час сила струму набуде 99 % своєї найбільшої величини?

20. У резервуар, що містить 100 л 10 %-го розчину солі, щохвилини надходить a л води і витікає b л розчину у другий резервуар, що містить 100 л води. Визначити:

1) кількість солі у першому резервуарі через t хвилин, якщо $a = 3$ і $b = 2$;

2) найбільшу кількість солі у другому резервуарі і час, коли це станеться, якщо $a = b = 3$, а розчин з другого резервуара виливається зі швидкістю 3 л за хвилину.

Вважати, що концентрація розчину в кожному резервуарі підтримується рівномірною за рахунок його неперервного перемішування.

21•. Промені джерела світла, розміщеного у даній точці, відбиваються від дзеркала автомобільної фари паралельним пучком відносно деякої осі, на якій міститься джерело світла. Яка крива, обертаючись навколо цієї осі, утворює поверхню цього дзеркала?

22. Тіло, маса якого m, рухається прямолінійно до точки M_0, яка притягує його із силою $F = \frac{mk^2}{r^2}$, де $r = r(t)$ – відстань від тіла до точки. Знайти час, за який тіло досягне точки M_0, якщо $r(0) = a$ і в момент часу $t = 0$ тіло перебувало у стані спокою.

23. Тіло, рухаючись з початковою швидкістю υ_0, під дією сили опору середовища через час t_1 має швидкість $\upsilon_1 < \upsilon_0$. Визначити швидкість тіла у момент часу $t_2 > t_1$, вважаючи опір середовища пропорційним швидкості руху тіла. Розглянути випадок, коли $\upsilon_0 = 5$ м/с, $t_1 = 40$ с, $\upsilon_1 = 2$ м/с і $t_2 = 2$ хв.

Зразки розв'язування задач

1. 16) Нехай $y = y(x)$ — рівняння шуканої кривої, а (x_0, y_0) — її довільна фіксована точка. Рівняння дотичної до кривої в точці (x_0, y_0) має вигляд

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0), \text{ де } y_0' = y'(x_0).$$

Нехай OA і OB — відрізки, що відтинаються дотичною до кривої на осях Ox і Oy відповідно. Тоді $A = (x_1,\ 0)$, $B(0,\ y_1)$, причому

$$0 - y_0 = y_0'(x_1 - x_0) \Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{y_0}{y_0'},$$

а

$$y_1 - y_0 = y_0'(0 - x_0) \Leftrightarrow y_1 = y_0 - x_0 y_0'.$$

Вважаючи, що x_1 і y_1 додатні, згідно з умовою задачі маємо

$$x_1 y_1 = 1 \Leftrightarrow \left(x_0 - \frac{y_0}{y_0'}\right)(y_0 - x y_0') = 1.$$

Опускаючи індекси в останній рівності, дістаємо диференціальне рівняння шуканої кривої:

$$\left(x - \frac{y}{y'}\right)(y - xy') = 1 \Leftrightarrow (y - xy')^2 = -y'.$$

Помічаємо, що при зроблених припущеннях $y' < 0$ і отримане рівняння є рівнянням Клеро $y = xy' + \sqrt{-y'}$.

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд $y = Cx + \sqrt{-C}$, $C < 0$, причому кожна з цих прямих перетинає вісь Ox у точці $\left(\frac{1}{\sqrt{-C}},\ 0\right)$, а вісь Oy — у точці $\left(0,\ \sqrt{-C}\right)$. Виділимо ту інтегральну криву, яка проходить через точку $\left(\frac{1}{4},\ 1\right)$. Маємо

$$1 = \frac{C}{4} + \sqrt{-C} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{C}{4}\right)^2 = -C \Leftrightarrow -1 - \frac{C}{2} + \frac{C^2}{16} = -C \Leftrightarrow \left(1 + \frac{C}{4}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow C = -4.$$

Тому пряма $y = -4x + 2$ задовольняє умови задачі.

Одержане рівняння Клеро має ще й особливий розв'язок, який знаходимо із системи

$$\begin{cases} y = Cx + \sqrt{-C}, \\ x - \dfrac{1}{2\sqrt{-C}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{4x},$$

і ця крива проходить через точку $\left(\frac{1}{4},\ 1\right)$.

Усі інші випадки стосовно x_1 та y_1 дослідити самостійно.

2. Нехай $y = y(x)$ — ізогональна траєкторія сім'ї інтегральних кривих диференціального рівняння $F(x, y, y') = 0$, а $y = \varphi(x)$ — інтегральна крива цієї сім'ї, яку крива $y = y(x)$ перетинає в точці $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 33). Якщо AM_0 — дотична до кривої $y = \varphi(x)$, а BM_0 — дотична до кривої $y = y(x)$, то $\operatorname{tg}\gamma = \varphi'(x_0)$, $\operatorname{tg}\beta = y'(x_0)$ і $\beta = \gamma + \alpha$. Звідси дістаємо

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma} \Rightarrow y'(x_0) = \frac{\varphi'(x_0) + k}{1 - k\varphi'(x_0)} \Rightarrow \varphi'(x_0) = \frac{y'(x_0) - k}{1 + ky'(x_0)}.$$

Оскільки точка (x_0, y_0) лежить на інтегральній кривій $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння $F(x, y, y') = 0$, то

$$F(x_0, y_0, \varphi'(x_0)) = 0 \Leftrightarrow F\left(x_0, y_0,\ \frac{y_0' - k}{1 + ky_0'}\right) = 0.$$

Якщо опустити індекс 0, то дістанемо диференціальне рівняння ізогональних траєкторій:

$$F\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0,\ \ k = \operatorname{tg}\alpha.$$

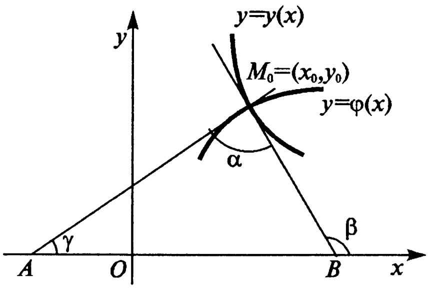


Рис. 33

Якщо покласти $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то дістанемо $\beta = \frac{\pi}{2} + \gamma$, а $\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{ctg}\gamma = -\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma} \Rightarrow y'(x_0) = -\frac{1}{\varphi'(x_0)} \Rightarrow \varphi'(x_0) = -\frac{1}{y'(x_0)}$, і диференціальне рівняння ортогональних траєкторій набере вигляду

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

3. б) Складемо диференціальне рівняння сім'ї кривих $xy = a$:

$$\begin{cases} xy = a, \\ y + xy' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \; y + xy' = 0.$$

Тоді згідно із вправою 2 диференціальне рівняння ізогональних траєкторій має вигляд

$$y + x\frac{y' - k}{1 + ky'} = 0, \text{ де } k = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

тобто $y' + x\dfrac{y' - 1}{1 + y'} = 0$. Розв'яжемо це рівняння. Маємо

$$y + yy' + xy' - x = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{x - y}{x + y}.$$

Це рівняння є однорідним, тому, поклавши $y = ux$, дістанемо

$$u + xu' = \frac{1-u}{1+u}, \quad x\frac{du}{dx} = \frac{1 - 2u - u^2}{1+u}, \quad \int\frac{(1+u)du}{u^2 + 2u - 1} + \int\frac{dx}{x} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|u^2 + 2u - 1\right| + \ln|x| = \ln|C|, \quad x\sqrt{u^2 + 2u - 1} = C,$$

звідки дістаємо шукані ізогональні траєкторії:

$$y^2 + 2yx - x^2 = C^2.$$

5. За незалежну змінну візьмемо висоту h, а шукану функцію позначимо $p = p(h)$. Відомо, що приріст тиску Δp при зміні висоти на Δh дорівнює масі стовпчика повітря, площа основи якого дорівнює одиниці, а висота Δh. Враховуючи, що густина повітря пропорційна атмосферному тиску, дістаємо таку залежність $\Delta p = -kp\Delta h$, $k > 0$ (знак «мінус» ставимо тому, що густина повітря зі збільшенням висоти зменшується й атмосферний тиск падає). Оскільки маємо лінійну залежність між Δp і Δh, то приріст функції можна замінити її диференціалом. Враховуючи, що $\Delta h = dh$, дістаємо диференціальне рівняння $dp = -kpdh$ або $\dfrac{dp}{p} = -kdh.$

Це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'язуючи його, дістаємо

$$\ln p = -kh + \ln C \Leftrightarrow p = Ce^{-kh}, \quad C > 0.$$

Якщо p_0 — атмосферний тиск над рівнем моря, тобто коли $h = 0$, то шуканий закон набирає вигляду $p = p_0 e^{-kh}$.

8. З фізики відомо емпіричний закон: швидкість охолодження тіла у будь-який момент часу пропорційна різниці температур тіла і середовища. Позначивши температуру хліба через T, а час — через t, дістанемо диференціальне рівняння, яке описує процес охолодження:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 25).$$

Тут k — коефіцієнт пропорційності. Знак «мінус» поставлено тому, що температура хліба знижується, а похідна спадної функції від'ємна. Відокремивши змінні в отриманому рівнянні, знайдемо його загальний розв'язок

$$\ln(T - 25) = -kt + C_1 \Leftrightarrow T - 25 = e^{-kt + C_1} \Leftrightarrow T = 25 + Ce^{-kt}, \quad C = e^{C_1}.$$

Скориставшись умовою $T(0) = 100$, визначимо C. Маємо $100 - 25 = Ce^{-k \cdot 0} \Leftrightarrow C = 75$. Для визначення коефіцієнта k використаємо другу умову, а саме $T(20) = 60$. Тоді $35 =$

$= 75e^{-20k}$, $-20k = \ln\frac{7}{15}$, $k = 0,038$. Остаточно дістаємо такий розв'язок: $T = 25 + 75e^{-0,038t}$ Підставляючи сюди замість T значення 30, обчислимо шуканий час:

$$30 - 25 = 75e^{-0,038t}, \quad e^{-0,038t} = \frac{1}{15}, \quad 0,038t = \ln 15, \quad t \approx 71 \text{ хв.}$$

10. Нехай $x = x(t)$ — кількість азоту у момент часу t. Тоді $\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t)$ — зміна кількості азоту за час Δt. За цей час у посудину надійшло $0,2\Delta t$ азоту, а вийшло $0,2\Delta t \cdot k(t)$, де $k(t) \approx \frac{x(t)}{40}$ — концентрація азоту в суміші. Отже,

$$\Delta x(t) \approx 0,2\Delta t - 0,2\Delta t\frac{x(t)}{40} \Leftrightarrow \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \approx 0,2 - \frac{x(t)}{40}\cdot 0,2,$$

причому наближення буде тим точнішим, чим менше Δt. Тому можна вважати, що

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = 0,2 - 0,2\frac{x(t)}{40} \Leftrightarrow 5x'(t) = 1 - \frac{x(t)}{40}.$$

Отже, відповідне диференціальне рівняння має вигляд $200x' + x - 40 = 0$, причому $x(0) = 0,8 \cdot 40 = 32$. Розв'яжемо це рівняння:

$$\frac{200dx}{x - 40} + dt = 0, \quad \ln|x - 40| + \ln e^{\frac{t}{200}} = \ln|C|, \quad x = 40 + Ce^{-\frac{t}{200}}.$$

Враховуючи умову $x(0) = 32$, дістаємо $32 = 40 + C \Rightarrow C = -8$. Отже,

$$x = 40 - 8e^{-\frac{t}{200}} \quad \forall t \ge 0.$$

Визначимо час t, коли $x(t) = 0,99 \cdot 40 = 39,6$. Маємо

$$39,6 = 40 - 8e^{-\frac{t}{200}} \Leftrightarrow 8e^{-\frac{t}{200}} = 0,4 \Leftrightarrow e^{\frac{t}{200}} = 20 \Leftrightarrow t = 200\ln 20 \approx 600\text{с} = 10 \text{ хв.}$$

17. Описаний в умові задачі процес підлягає другому закону Ньютона $F = ma$, де F — сила, що діє на рухоме тіло масою m, a — прискорення руху. Приймемо час t за аргумент, а швидкість $v = v(t)$ — за шукану функцію. Числові дані належать до початкових умов.

Сила F, що діє на тіло, складається із ваги $F_1 = mg$ і сили опору $F_2 = -kv^2$, $k > 0$. Тому

$$F = mg - kv^2.$$

Враховуючи, що $a = v'(t)$, дістаємо диференціальне рівняння

$$mv' = mg - kv^2.$$

Покладаючи $\frac{k}{m} = p$, дістаємо $v' = g - pv^2 \Leftrightarrow \frac{dv}{g - pv^2} = dt.$

Загальний інтеграл цього рівняння має вигляд

$$\frac{1}{2\sqrt{pg}}\ln\left|\frac{\sqrt{g} + \sqrt{p}v}{\sqrt{g} - \sqrt{p}v}\right| + \ln|C| = t \Leftrightarrow \frac{\sqrt{g} + \sqrt{p}v}{\sqrt{g} - \sqrt{p}v} = C_1e^{2\sqrt{pg}t}.$$

Зрозуміло, що максимальне значення швидкості дістанемо, якщо у рівності

$$v=\sqrt{\frac{g}{p}}\cdot\frac{1+C_1e^{-2\sqrt{pg}\,t}}{1-C_1e^{-2\sqrt{pg}\,t}},\quad C_1>0,$$

перейдемо до границі при $t\to\infty$. Маємо $\lim\limits_{t\to\infty}v=\sqrt{\frac{g}{p}}$, або замінюючи $p=\frac{k}{m}$, $v_{\max}=\sqrt{\frac{mg}{k}}$.

За умовою задачі $m=8\cdot10^4$ г, $k=3\cdot10^2$ г/см, $g=980$ см/с^2, а отже, $v_{\max}\approx510$ см/с = = 5,1 м/с.

21. Нехай вісь обертання збігається з віссю Ox, а джерело світла розміщено у початку координат. Візьмемо довільну точку $M(x,y)$ на шуканій кривій і проведемо дотичну MT у цій точці, яка утворює кут α з віссю Ox (рис. 34). Згідно з умовою задачі $\angle TMP=\alpha$. Оскільки $\angle OMK=$ $=\angle TMP$ (кут падіння дорівнює куту відбиття), то $\angle OMK=\angle PMT=\alpha$. Отже, трикутник OKM рівнобедрений і $KO=OM$.

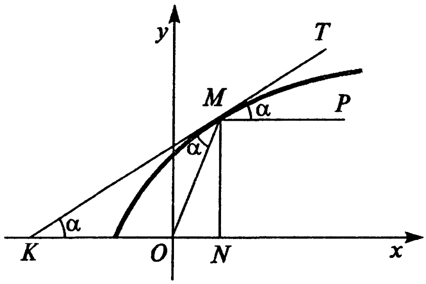


Рис. 33

Враховуючи, що $KO=KN-ON=$ $=y\operatorname{ctg}\alpha-x=\frac{y}{\operatorname{tg}\alpha}-x=\frac{y}{y'}-x$, а $OM=$ $=\sqrt{x^2+y^2}$, дістаємо таке диференціальне рівняння:

$$\frac{y}{y'}-x=\sqrt{x^2+y^2}\iff ydx-\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)dy=0.$$

Це рівняння є однорідним. Для його розв'язування зручно скористатись підстановкою $x=uy$, яка зводить дане рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними $\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=\frac{dy}{y}$.

Інтегруючи останню рівність, маємо

$$\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)=\ln y-\ln C\iff u+\sqrt{u^2+1}=\frac{y}{C}\iff\frac{y^2}{C^2}-\frac{2yu}{C}=$$
$$=1\iff y^2-2Cy\frac{x}{y}=C^2\iff y^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right),\ C>0.$$

Отже, дістали сім'ю парабол з віссю симетрії на осі Ox, параметром $p=C$ і вершиною, зміщеною вліво від початку координат на $C/2$. Зрозуміло, що поверхня дзеркала має форму параболоїда обертання.

Розділ 21 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ТА СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

§ 21.1. Рівняння n-го порядку. Деякі типи рівнянь, що допускають зниження порядку

Розглянемо диференціальне рівняння n-го порядку $(n > 1)$

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1}$$

Задача Коші для цього рівняння ставиться так: знайти розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (1), який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{2}$$

де $x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — задані числа.

Зокрема, для рівняння другого порядку $F(x, y, y', y'') = 0$ початкові умови набирають вигляду

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'.$$

Розв'язування такої задачі Коші з геометричної точки зору полягає у відшуканні інтегральної кривої $y = \varphi(x)$, яка проходить через точку (x_0, y_0) і має в цій точці кутовий коефіцієнт y_0' її дотичної.

Механічне тлумачення задачі Коші для рівняння другого порядку, записаного у вигляді $F(t, x, x', x'') = 0$, таке: знайти закон руху $x = x(t)$ матеріальної точки, що задовольняє початкові умови $x(t_0) = x_0$ і $x'(t_0) = x_0'$, тобто у початковий момент часу t_0 точка займає положення x_0 і має швидкість x_0'.

Для рівняння n-го порядку, розв'язаного відносно n-ї похідної, тобто для рівняння

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right), \tag{3}$$

справедливі теореми існування та єдиності розв'язку, аналогічні відповідним теоремам для рівняння першого порядку (див. § 20.1), зокрема справедливе таке твердження.

Теорема Коші. *Якщо функція* $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ *неперервна в області* $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ *і має частинні похідні за змінними* $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, *обмежені в достатньо малому околі довільної точки області* D, *то в деякому околі точки* x_0 *існує єдина функція* $y = \varphi(x)$, *яка є розв'язком диференціального рівняння* (3), *що задовольняє початкові умови* (2).

Розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (1) або (3) називається *частинним*, якщо в кожній його точці зберігається єдиність розв'язку задачі Коші.

Функцію $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ називають *загальним розв'язком рівняння n-го порядку*, якщо для будь-яких допустимих початкових умов (2) можна підібрати сталі C_k, $k \in \overline{1\,n}$, так, щоб ця функція була розв'язком даного рівняння і задовольняла задані початкові умови.

Якщо диференціальне рівняння n-го порядку $(n > 1)$ за допомогою деякої підстановки можна звести до рівняння нижчого порядку, то кажуть, що це рівняння допускає зниження порядку.

Розглянемо деякі типи рівнянь, що допускають зниження порядку.

I. Рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f(x) \tag{4}$$

за допомогою підстановки $y^{(n-1)}(x) = p$ зводиться до найпростішого рівняння першого порядку $p' = f(x)$. Фактично для знаходження загального розв'язку рівняння (4) треба виконати його n-кратне інтегрування.

II. Рівняння вигляду

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0,\ 1 \le k < n, \tag{5}$$

яке не містить у явному вигляді шуканої функції, за допомогою підстановки $y^{(k)} = p(x)$ зводиться до диференціального рівняння $F\left(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}\right) = 0$ порядку $n-k$. Зокрема, рівняння другого порядку

$$F(x, y', y'') = 0 \tag{6}$$

зводиться до рівняння першого порядку $F(x, p, p') = 0$.

III. Рівняння вигляду

$$F\left(y, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0,\ 1 \le k < n, \tag{7}$$

яке не містить у явному вигляді змінної x, за допомогою підстановки $y^{(k)} = p(y)$ зводиться до диференціального рівняння $F_1\left(y, p, p', \ldots, p^{(n-k)}\right) = 0$ порядку $n-k$. Зокрема, рівняння

$$F(y, y', y'') = 0 \tag{8}$$

зводиться до рівняння першого порядку $F(y, p, p'p) = 0$.

На практиці зустрічаються диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку іншими підстановками. Відповідної загальної підстановки не існує.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) геометричний зміст задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку полягає в тому, щоб знайти інтегральну криву, яка проходить через дану точку і має в цій точці дану дотичну;

2) механічний зміст задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку полягає в тому, щоб знайти закон руху матеріальної точки, яка в даний момент часу займає дане положення та має дану швидкість;

3) диференціальним рівнянням вищого порядку називають будь-яке диференціальне рівняння n -го порядку;

4) початкові умови для диференціального рівняння другого порядку мають вигляд $y'(x_0)=y_0$, $y''(x_0)=y_0''$;

5) задача Коші для рівняння $y''=\dfrac{2xy'}{1+x^2}$ має єдиний розв'язок для будь-яких початкових умов;

6) функція $y=Cx^2$, де C — довільна стала, може бути загальним розв'язком деякого диференціального рівняння вищого порядку;

7) загальний розв'язок рівняння $y^n=f(x)$, де f — неперервна на інтервалі $(a;b)$ функція, має вигляд $y=F(x)+\sum\limits_{k=0}^{n-1}C_{n-k}x^k$;

8) сім'я усіх парабол, осі симетрії яких паралельні осі Oy, не може бути сім'єю інтегральних кривих рівняння другого порядку;

9)• задача Коші для диференціального рівняння $y''=|xy'|$ має єдиний розв'язок для будь-яких початкових умов унаслідок теореми Коші;

10) твердження 9) правильне для рівняння $y''=xy'$;

11) якщо диференціальне рівняння другого порядку не містить у явному вигляді змінної x або y, то воно допускає зниження порядку.

2. Перевірити, чи є дана функція загальним розв'язком вказаного рівняння:

1) $y=C_1\sin x+C_2\cos x$, $y''+y=0$;

2) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}$ $y'''-2y''-y'+2y=0$;

3) $y=\dfrac{1}{x}\left(C_1e^x+C_2e^{-x}\right)$, $xy''+2y'-xy=0$;

4)• $y=C_1x^{\frac{3}{2}}+C_2$, $2xy''=y'$;

5) $y = C_1 x + C_2 x\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt,\ \ y''x\sin x - y'x\cos x + y\cos x = 0;$

6) $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x+C_1)^3} + C_2,\ \ 2y''y' = 1.$

3. Знайти загальний розв'язок даного диференціального рівняння:

1) $y'' = x + \sin x;$ 2) $y''' = x + \cos x;$ 3) $xy'' = 1 + x^2;$

4) $y'' = x^2 \ln x;$ 5) $y^n = a^x;$ 6) $y'''\sin^4 x = \sin 2x;$

7) $x^2 y'' = y'^2;$ 8)• $xy'' = y'(\ln y' - \ln x);$ 9) $y'' = 8\mathrm{e}^y;$

10) $\left(1+x^2\right)y'' + y'^2 + 1 = 0;$ 11) $(y'')^2 = 1 + y'^2;$ 12) $y''' = (y'')^3;$

13) $(y-1)y'' = 2y'^2;$ 14) $4xy'' - y''^2 = 4y';$ 15) $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}};$

16) $yy'' + y'^2 = y^2 \ln y;$ 17) $y^3 y'' = -1;$ 18) $y''y = y'y^2 + y'^2;$

19) $\left(3x - x^2\right)y'' + (6-4x)y' = 2y;$ 20) $x^2 yy'' = (y - xy')^2.$

4. Розв'язати задачу Коші:

1) $y'' = x\ln x,\ \ y(1) = y'(1) = 0;$

2) $y''' = x\mathrm{e}^x,\ \ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0;$

3)• $yy'' = (y')^2,\ \ y(0) = y'(0) = 1;$

4) $y^3 y'' = -1,\ \ y(1) = 1,\ \ y'(1) = 0;$

5) $xy'' - y' = x^2\mathrm{e}^x,\ \ y(0) = -1;\ \ y'(0) = 0;$

6) $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0,\ \ y(0) = -1;\ \ y'(0) = 0;$

7) $y'' = \mathrm{e}^{2y},\ \ y(0) = 0;\ \ y'(0) = 1;$

8)• $y''y - xy'^2 = 0,\ \ y(1) = 1,\ \ y'(1) = 2.$

5. Визначити змикаючу криву $y = y(x)$ закруглення трамвайної лінії за її диференціальним рівнянням $y'' = ax,\ \ y(0) = y'(0) = 0,\ \ a = \mathrm{const}.$

6. Переконатися в тому, що квадратична функція $s(t) = at^2 + bt + c$ задає закон рівноприскореного руху. З'ясувати фізичний зміст коефіцієнтів a, b і c.

7. Рух тіла описується диференціальним рівнянням $tx'' + x' + t = 0$. Знайти закон руху $x = x(t)$, якщо $x(1) = 0$ і $x'(1) = 0$.

8. Знайти всі плоскі криві, які мають сталий радіус кривини R.

9. Знайти плоску криву, яка дотикається до осі Ox у початку координат, а її кривина в довільній точці (x, y) дорівнює $\frac{1}{\cos x}$.

10. Знайти інтегральну криву рівняння $y''^2 = yy'y'' - y'^3$, яка у початку координат дотикається до прямої $y = -x$.

11. Знайти інтегральну криву рівняння $yy'' = y'^2$, яка проходить через точку $(0, 1)$ і дотикається в ній до прямої $x + y = 1$.

12. Матеріальна точка масою m падає на землю з висоти h. Знайти закон руху точки, якщо опір повітря пропорційний квадрату її швидкості.

13. Тіло занурюється у рідину так, що опір рідини прямо пропорційний швидкості занурення. Знайти закон руху тіла, якщо його швидкість у початковий момент дорівнює нулю.

14•. Матеріальна точка масою m рухається вздовж осі Ox під дією відштовхувальної сили, обернено пропорційної кубу відстані від цієї точки до початку координат. Знайти закон $x = x(t)$ руху точки, якщо $k > 0$ — коефіцієнт пропорційності, $x(0) = x_0$, $x'(0) = 0$.

15. Куля входить у дошку завтовшки h см із швидкістю v_0 м/с, а вилітає з дошки зі швидкістю v_1 м/с. Визначити час руху кулі через дошку за умови, що сила опору дошки пропорційна квадрату швидкості руху кулі.

16. Опір повітря руху баскетбольного м'яча масою 400 г пропорційний квадрату його швидкості і дорівнює 0,0048 Н при швидкості 1 м/с. Покладаючи $g = 10\,\text{м/с}^2$, визначити:

1) час падіння і швидкість м'яча в кінці падіння, якщо він падає з висоти 16,7 м без початкової швидкості;

2) час підіймання та найбільшу висоту підйому м'яча, якщо його кинуто вгору зі швидкістю 20 м/с.

17. Визначити швидкість метеорита у момент його падіння на Землю, якщо він падає з необмежено великої висоти зі стану спокою під дією сили тяжіння з прискоренням, обернено пропорційним квадрату його відстані від центра Землі. Вважати, що радіус Землі $R = 6377$ км, а прискорення вільного падіння $g = 9{,}8\,\text{м/с}^2$.

18. Знайти криву, яка проходить через точки $(0, 0)$ і $(1, 1)$, і таку, що площа трикутника, утвореного дотичною до кривої в деякій точці (x_0, y_0), прямою $y = y_0$ і віссю Ox, удвічі більша за площу криволінійної трапеції, утвореної кривою, віссю Ox і прямою $y = y_0$.

Зразки розв'язування задач

1. 9) Маємо рівняння вигляду $y'' = f(x, y, y')$, де $f(x, y, y') = |xy'|$ — неперервна функція в області $D = \mathbf{R}^3$. Однак вона не має похідної за змінною y' в точці $(x, y, 0)$, якщо $x \neq 0$ (переконатись у цьому). Отже, умови теореми Коші не виконуються. Перевіримо виконання умов теореми Пікара, а саме умову Ліпшиця за змінними y та y'. Маємо

$$|f(x,y_1,y_1')-f(x,y_2,y_2')|=\left||xy_1'|-|xy_2'|\right|\le|xy_1'-xy_2'|=|x||y_1'-y_2'|\le L|y_1'-y_2'|,$$

де точки (x, y_1, y_1') і (x, y_2, y_2') лежать у фіксованому околі довільної точки $(x_0, y_0, y_0')\in D$. Отже, умови теореми Пікара виконуються, тому дане диференціальне рівняння має єдиний розв'язок задачі Коші для будь-яких початкових умов.

2. 4) Спочатку покажемо, що при довільних фіксованих сталих C_1 і C_2 функція $y=C_1x^{\frac{3}{2}}+C_2$ є розв'язком рівняння $2xy''=y'$. Маємо

$$y'=\frac{3}{2}C_1x^{\frac{1}{2}},\quad y''=\frac{3}{4}C_1x^{-\frac{1}{2}},\quad x\in(0;\ +\infty),$$

$$C_1\ne0\Rightarrow 2x\cdot\frac{3}{4}C_1x^{-\frac{1}{2}}\equiv\frac{3}{2}C_1x^{\frac{1}{2}},\quad x\in(0;\ +\infty),\quad C_1\ne0.$$

Якщо $C_1=0$, то функція $y=C_2\quad\forall x$, очевидно, є розв'язком даного диференціального рівняння. Зафіксуємо довільні початкові умови даного рівняння: $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, де $x_0>0$, а y_0 і y_0' — довільні сталі. Тоді

$$\begin{cases} y_0=C_1x_0^{\frac{3}{2}}+C_2, \\ y_0'=\frac{3}{2}C_1x_0^{\frac{1}{2}} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} C_1=\frac{2}{3}x_0^{-\frac{1}{2}}y_0', \\ C_2=y_0-\frac{2}{3}x_0y_0'. \end{cases}$$

Якщо покласти $x_0=0$, то функція $y=C_1x^{\frac{3}{2}}+C_2$ задовольняє початкові умови тоді й тільки тоді, коли $C_1=0$, тобто коли $y=C_2$ (оскільки в іншому випадку $y''(0)$ не існує). При цьому має виконуватися умова $y_0'=0$. Зрозуміло, що умова $y(0)=y_0$, $y'(0)=$ $=y_0'\ne0$ не є допустимою, оскільки $2x_0y_0''=y_0'$, тобто $y_0'=0$, якщо $x_0=0$.

Отже, для будь-яких допустимих початкових умов існує єдина пара сталих C_1 і C_2 таких, що функція $y=C_1x^{\frac{3}{2}}+C_2$ є розв'язком даного диференціального рівняння і задовольняє ці умови.

Якщо $x_0>0$, то в достатньо малому околі точки (x_0, y_0, y_0') виконуються всі умови теореми Коші, що гарантує єдиність інтегральної кривої даного рівняння, яка проходить через указану точку. Якщо $x_0=0$, то через точку $(0, y_0, y_0')$ інтегральна крива проходить тоді й тільки тоді, коли ця точка лежить на осі Oy, тобто має вигляд $(0, y_0, 0)$. Нехай функція $y=\varphi(x)\not\equiv0$ є розв'язком даного диференціального рівняння, який задовольняє ці початкові умови. Тоді для $x>0$, внаслідок проведених вище міркувань, функція $\varphi(x)$ збігається з однією із функцій вигляду $y=C_1x^{\frac{3}{2}}+C_2$. Проте кожна з цих функцій має в точці 0 нескінченну другу похідну. Тому в точці $x=0$ рівність $2x\varphi''(x)=\varphi'(x)$ можна розглядати лише як асимптотичну:

$$\lim_{x\to0}2x\varphi''(x)=\lim_{x\to0}\varphi'(x)=0,$$

оскільки в іншому випадку функція $y=C_1x^{\frac{3}{2}}+C_2$ є загальним розв'язком даного рівняння $2xy''=y'$, якщо $x\in(0;\ +\infty)$.

3. 8) Дане диференціальне рівняння не містить змінної y в явному вигляді, тобто є рівнянням типу II. Застосуємо підстановку $y' = p(x)$. Тоді $y'' = p'$ і рівняння набирає вигляду

$$xp' = p\ln\frac{p}{x} \Leftrightarrow p' = \frac{p}{x}\ln\frac{p}{x}.$$

Маємо однорідне рівняння першого порядку. Введемо підстановку $p = ux$.

Тоді $p' = u'x + u \Rightarrow xu' + u = u\ln u$.

Оскільки $x > 0$ і $u > 0$, то останнє рівняння рівносильне такому:

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}, \quad u \neq \mathrm{e}.$$

Отже, маємо

$$\int\frac{d(\ln u - 1)}{\ln u - 1} = \int\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|\ln u - 1| = \ln|Cx| \Leftrightarrow u = \mathrm{e}^{Cx+1} \Leftrightarrow p = x\mathrm{e}^{Cx+1}.$$

Останній вираз містить у собі і випадок, коли $u = \mathrm{e}$ (якщо $C = 0$). Тому $p = x\mathrm{e}^{Cx+1}$, $x > 0$, — загальний розв'язок рівняння $xp' = p\ln\frac{p}{x}$. Враховуючи, що $p = y'$, дістаємо $y' = x\mathrm{e}^{Cx+1}$, звідки

$$y = \mathrm{e}\left(\frac{x}{C}\mathrm{e}^{Cx} - \frac{1}{C}\int\mathrm{e}^{Cx}dx\right) = \frac{1}{C}\mathrm{e}^{Cx+1}\left(x - \frac{1}{C}\right) + C_1, \quad C \neq 0.$$

Якщо $C = 0$, маємо $y' = \mathrm{e}x$, звідки $y = \frac{\mathrm{e}x^2}{2} + C_2$, $x > 0$.

Отже, загальний розв'язок даного диференціального рівняння складають дві сім'ї кривих

$$y = \frac{1}{C}(Cx - 1)\mathrm{e}^{Cx+1} + C_1,$$

де $C \neq 0$, $x > 0$, а C_1 — довільна стала, і

$$y = \frac{\mathrm{e}}{2}x^2 + C_2,$$

де $x > 0$ і C_2 — довільна стала.

4. 3) Дане рівняння не містить у явному вигляді змінної x, тобто має вигляд (8). Скористаємось підстановкою $y' = p(y)$. Тоді $y'' = p'y' = p'p$. Підставляючи значення y' і y'' у дане рівняння, дістаємо $ypp' = p^2$ або $yp' = p$, $p \neq 0$. Останнє рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \Leftrightarrow \ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|, \; C_1 \neq 0 \Leftrightarrow p = C_1 y, \; C_1 \neq 0.$$

Підставивши значення $p = y'(x) = \frac{dy}{dx}$, знайдемо функцію $y = y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = C_1 dx \Leftrightarrow \ln|y| = C_1 x + C_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |y| = \mathrm{e}^{C_2}\mathrm{e}^{C_1 x} \Leftrightarrow y = C\mathrm{e}^{C_1 x}, \; C \neq 0, \; C_1 \neq 0.$$

Оскільки при $p=0$ маємо $y=C$ (цей розв'язок можна дістати з попереднього при $C_1=0$), то функція $y=Ce^{C_1x}$, де C_1 і C — довільні константи, є загальним розв'язком даного рівняння.

З умови $y(0)=1$ знаходимо $C=1$, а з умови $y'(0)=1$ визначаємо $C_1=1$. Отже, розв'язком даної задачі Коші є функція $y=e^x$.

Зауважимо, що сталі C_1 і C_2 можна було б обчислювати у процесі розв'язування рівняння. Так, сталу C_1 можна визначити з рівняння $p=C_1y$, враховуючи обидві початкові умови, а сталу C — з рівняння $y=Ce^x$, враховуючи умову $y(0)=1$.

8) Дане диференціальне рівняння не належить до жодного з типів I — III, розглянутих у теоретичних відомостях, але воно рівносильне рівнянню $\frac{y''y}{y'^2}=x$, $y(1)=1$, $y'(1)=2$. Ліва частина останнього рівняння нагадує похідну від $\frac{y}{y'}$. Тому позначимо $p=\frac{y}{y'}$. Тоді

$$p'=\frac{y'^2-yy''}{y'^2}=1-\frac{yy''}{y'^2} \Leftrightarrow \frac{yy''}{y'^2}=1-p'$$

і задане рівняння набере вигляду $1-p'=x$, звідки $p=x-\frac{x^2}{2}+C_1$, тобто $\frac{y}{y'}=x-\frac{x^2}{2}+C_1$. Враховуючи початкові умови, дістаємо $\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}+C_1$, тобто $C_1=0$. Отже, маємо

$$\frac{y}{y'}=x-\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y}+\int\frac{2dx}{x(x-2)}=0 \Leftrightarrow \ln y-\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}\right)dx=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|y|-\ln|x|+\ln|x-2|=\ln|C_2| \Leftrightarrow y=\frac{C_2x}{x-2}.$$

Врахувавши початкову умову $y(1)=1$, дістанемо $1=\frac{C_2}{-1}$, звідки $C_2=-1$. Таким чином, розв'язком даної задачі Коші є функція $y=\frac{x}{2-x}$, і вона єдина, оскільки в достатньо малому околі точки $(1,\ 1,\ 2)$ права частина даного рівняння $f(x,\ y,\ y')=\frac{xy'^2}{y}$ задовольняє умови теореми Коші.

14. Скориставшись другим законом Ньютона, дістанемо диференціальне рівняння, яке описує даний рух:

$$mx''=\frac{k}{x^3} \quad \text{або} \quad x''=\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{x^3}.$$

Покладемо $x'=p(x)$. Тоді

$$x''=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=p'p \Rightarrow p'p=\frac{k}{mx^3} \Leftrightarrow pdp=\frac{k}{m}\cdot\frac{dx}{x^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2}{2}=-\frac{k}{2mx^2}+C \Leftrightarrow p=\sqrt{C_1-\frac{k}{mx^2}},\ C_1=2C.$$

Оскільки $p(0)=x'(0)=0$ при $x(0)=x_0$, то $0=\sqrt{C_1-\frac{k}{mx_0^2}} \Leftrightarrow C_1=\frac{k}{mx_0^2}$.

Тоді $p=\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{x^2-x_0^2}{x_0^2x^2}}$. Відокремивши змінні, дістанемо

$$\sqrt{\frac{k}{m}}dt=\frac{x_0x}{\sqrt{x^2-x_0^2}}dx.$$

Інтегруючи дане рівняння, маємо $x_0\sqrt{x^2-x_0^2}=\sqrt{\frac{k}{m}}t+C_2$. Враховуючи умову $x(0)=x_0$, знаходимо $C_2=0$, тоді шуканий закон руху точки має вигляд

$$x=\sqrt{x_0^2+\frac{k}{mx_0^2}t^2}.$$

§ 21.2. Структура загального розв'язку лінійних однорідних диференціальних рівнянь n-го порядку

Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку називають рівняння вигляду

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f, \tag{1}$$

де $a_k=a_k(x)$ (*коефіцієнти лінійного рівняння*) і $f=f(x)$ (*права частина рівняння*) — задані на інтервалі $(a;\ b)$ функції.

Рівняння (1) називають *однорідним* (або *рівнянням без правої частини*), якщо $f(x)\equiv 0$, і *неоднорідним* (або *рівнянням з правою частиною*), якщо $f(x)\not\equiv 0$.

Якщо a_k, $k\in\overline{1,\ n}$, і f — неперервні функції на інтервалі $(a;\ b)$, то для будь-яких початкових умов $y^k(x_0)=y_0^{(k)}$, $k\in\overline{0,\ n-1}$, де $x_0\in(a;b)$, $y_0^{(k)}\in\mathbf{R}$, існує єдиний розв'язок задачі Коші для неоднорідного рівняння (1). Зокрема, якщо рівняння (1) є однорідним, тобто має вигляд

$$y^{(n)}+a_1y^{n-1}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0, \tag{2}$$

то для початкових умов $y^{(k)}(x_0)=0$, $k\in\overline{0,\ n-1}$, $x\in(a;b)$, розв'язок задачі Коші має вигляд $y(x)\equiv 0$ і його називають *тривіальним*.

Функції $y=y_k(x)$, $k\in\overline{1,\ n}$, $x\in(a;b)$, є *розв'язками рівняння* (2) тоді й тільки тоді, коли функція

$$y=\sum_{k=1}^{n}C_ky_k(x) \tag{3}$$

є розв'язком цього рівняння при всіх $C_k \in \mathbf{R}$, $k \in \overline{1,\ n}$. При цьому функція (3) є *загальним розв'язком рівняння* (2) тоді й тільки тоді, коли на інтервалі $(a;b)$ *визначник Вронського* $W(x) \neq 0$, де

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \ldots y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \ldots y_n'(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) \ldots y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Систему функцій $y_k(x)$, $k \in \overline{1,\ n}$, у цьому випадку називають *фундаментальною системою розв'язків рівняння* (2), причому вона завжди існує.

Система функцій $y_k(x)$, $k \in \overline{1,\ n}$, $x \in (a;b)$, кожна з яких є розв'язком рівняння (2), є фундаментальною системою розв'язків цього рівняння тоді й тільки тоді, коли вона лінійно незалежна, тобто для всіх $x \in (a;b)$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \alpha_k = 0 \quad \forall k \in \overline{1,\ n}. \quad (5)$$

У випадку $n = 2$ умову (5) можна замінити еквівалентною їй: $y_1 \neq k y_2$, $k = \text{const}$.

Лінійні рівняння зі змінними коефіцієнтами зручно інтегрувати за допомогою степеневих рядів. Наприклад, для рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (6)$$

коефіцієнти якого $p(x)$ і $q(x)$ розвиваються в ряди $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ і $q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, які збігаються при $|x| < r$, розв'язок можна знаходити у вигляді ряду

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad (7)$$

який також збігається при $|x| < r$.

Підставляючи вирази для p, q, y, y', y'' у рівняння (6), дістаємо

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0. \quad (8)$$

Перемножаючи степеневі ряди, збираючи подібні члени і прирівнюючи до нуля коефіцієнти при різних степенях x у лівій частині рівності (8), дістаємо ряд рівнянь для визначення коефіцієнтів c_k, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. При цьому коефіцієнти c_0 і c_1 залишаються довільними і відіграють роль довільних сталих.

На практиці зручніше робити так. Визначають за описаною вище схемою два частинні розв'язки y_1 та y_2, які б утворили фундаментальну систему. Як правило, допустимі початкові умови вибирають у так званій нормальній формі:

$$\begin{aligned} y_1(0)=0, \quad y_1'(0)=1, \\ y_2(0)=1, \quad y_2'(0)=0. \end{aligned} \tag{9}$$

Якщо y_1 і y_2 лінійно незалежні, то загальний розв'язок матиме вигляд $y = C_1y_1 + C_2y_2$, де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Зауважимо, що коли початкові умови задано в точці $x_0 \neq 0$, то розв'язок рівняння шукають у вигляді ряду за степенями $x - x_0$.

У деяких випадках, зокрема, при розв'язуванні задачі Коші коефіцієнти c_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, зручно обчислювати за формулою $c_k = \frac{y^k(x_0)}{k!}$, диференціюючи послідовно задане рівняння і наступні утворені рівності та використовуючи початкові умови (див. § 20.1).

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження (виконати усно):

1) якщо диференціальне рівняння n-го порядку є лінійним, то n-на похідна входить у це рівняння у першому степені;

2) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

3) диференціальне рівняння $y'' + xy' + x^2y^2 = 0$ є лінійним диференціальним рівнянням другого порядку;

4) рівняння (2) другого порядку має розв'язок $y = y(x) \not\equiv 0$, причому $y(x_0) = y'(x_0) = 0$;

5) якщо система функцій $y = y_k(x)$, $k \in \overline{1, n}$, $x \in (a;b)$, лінійно залежна, то існують числа $\alpha_k \in \mathbf{R}$, $k \in \overline{1, n}$, такі, що:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k(x) \equiv 0 \ \text{ i } \ \sum_{k=1}^{n} \alpha^2{}_k \neq 0;$$

6) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

7) якщо система функцій $y = y_k(x)$, $k \in \overline{1, n}$, $x \in (a;b)$, лінійно залежна, то на інтервалі $(a;\ b)$ її визначник Вронського $W(x) \equiv 0$;

8) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

9) розв'язок рівняння $y'' + y'\cos^2 x = ye^x$ можна знайти у вигляді степеневого ряду (7).

2. Обґрунтувати або спростувати такі твердження:

1) якщо $L_n = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x)$ — диференціальний оператор, що діє на функцію $y = y(x)$ за правилом

$$L_n(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y,$$

то лінійне рівняння n-го порядку — це рівняння вигляду $L_n(y) = f(x)$;

2) якщо функції $y = y_i(x)$, $i \in \overline{1,\ m}$, є розв'язками рівняння $L_n(y) = f_i(x)$, $i \in \overline{1,\ m}$, то функція $y = \sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x)$ є розв'язком рівняння $L(y) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)$ $\forall C_i \in \mathbf{R}$;

3) якщо $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ — різні розв'язки рівняння (1), то графіки цих розв'язків не перетинаються;

4) якщо визначник Вронського $W(x)$ для системи функцій $y = y_k(x)$, $k \in \overline{1,\ n}$, $x \in (a;b)$, такий, що $W(x_0) \neq 0$ для деякої точки $x_0 \in (a;b)$, то ця система лінійно незалежна;

5) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

6) якщо функції $y_k(x)$, $k \in \overline{1,\ n}$, $x \in (a;b)$, є розв'язками рівняння (2), то вони утворюють фундаментальну систему розв'язків цього рівняння;

7) якщо функції $y_k(x)$, $k \in \overline{1,\ n}$, $x \in (a;b)$, є розв'язками рівняння (2) і визначник Вронського $W(x)$ цих функцій такий, що $W(x_0) \neq 0$ для деякого $x_0 \in (a;b)$, то функція (3) є загальним розв'язком рівняння (2);

8)• якщо функції $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ двічі неперервно диференційовні на інтервалі $(a;b)$ і визначник $\Delta = y_1' y_2'' - y_2' y_1''$ для цих функцій не дорівнює нулю для всіх $x \in (a;b)$, то функція $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ є загальним розв'язком деякого рівняння (2) другого порядку.

3. Визначити, чи утворюють дані функції лінійно незалежну систему функцій, та знайти визначник Вронського цієї системи:

1) $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $x \in \mathbf{R}$; 2) $y_1 = \ln x$, $y_2 = 2\ln x$, $x > 0$;

3) $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$, $x \in \mathbf{R}$; 4) $y_1 = \ln x$, $y_2 = \ln 2x$, $x > 0$;

5) $y_1 = \frac{1}{2}\sin^2 x$, $y_2 = 3\cos^2 x$, $y_3 = 2$, $x \in \mathbf{R}$;

6) $y_1 = \pi$, $y_2 = \arcsin x$, $y_3 = \arccos x$, $x \in (-1;\ 1)$;

7) $y_1 = e^{a_1 x}$, $y_2 = e^{a_2 x}$, $a_1 \neq a_2$, $x \in \mathbf{R}$;

8) $y_1 = e^{ax}$, $y_2 = xe^{ax}$, $x \in \mathbf{R}$;

9) $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, $x \in \mathbf{R}$;

10)• $y_1 = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1, \\ (x-1)^2, & 1 < x \le 2, \end{cases}$ $y_2 = \begin{cases} (x-1)^2, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & 1 < x \le 2; \end{cases}$

11) $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$, $y_3 = \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$, $x \in \mathbf{R}$;

12) $y_1(x) = \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x \le 1, \end{cases}$ $y_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & \frac{1}{2} < x \le 1; \end{cases}$

13) $y_1(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0, \\ x^{\alpha}, & 0 < x \le 1; \end{cases}$ $y_2(x) = \begin{cases} x^{\alpha}, & -1 \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x \le 1, \end{cases}$ $\alpha > 1$;

14) $y_1(x) = 2\pi$, $y_2(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{2\pi}$, $y_3 = \operatorname{arcctg}\frac{x}{2\pi}$, $x \in \mathbf{R}$;

15) $y_k(x) = x^k$, $k \in \overline{0,\ n}$, $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$;

16) $y_1 = 1$, $y_2 = \sin 2x$, $y_3 = (\sin x - \cos x)^2$.

4. Визначити, чи утворюють дані функції фундаментальну систему розв'язків деякого рівняння (2), і, якщо так, вказати це рівняння та знайти його загальний розв'язок:

1) $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$; 2) $y_1 = x$, $y_2 = x^2$;

3) $y_1 = x$, $y_2 = 1$; 4)• $y_1 = \cos^2 x$, $y_2 = \sin^2 x$;

5) y_1 і y_2 — функції із вправи 3.10);

6) $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \sin 3x$;

7) y_1 і y_2 — функції із вправи 3.13);

8) $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$; 9) $y_1 = e^{ax}$, $y_2 = e^{bx}$, $a \ne b$;

10) $y_k(x) = x^k$, $k \in \overline{0,\ n}$,

11) y_1, y_2 і y_3 — функції із вправи 3.16);

12) $y_1 = x$, $y_2 = x^3$, $y_3 = e^x$.

5. Проінтегрувати дані рівняння за допомогою степеневих рядів:

1)• $y'' - xy' - 2y = 0$; 2) $y'' + xy' + y = 0$; 3) $y'' - x^2 y = 0$;

4) $\left(1 - x^2\right)y'' - 4xy' - 2y = 0$; 5) $y'' - ye^x = 0$.

6. Знайти розв'язок даної задачі Коші у вигляді степеневого ряду:

1)• $y'' + xy' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

2) $y'' = x^2 y$, $y(0) = y'(0) = 1$;

3) $y'' + xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

4) $y'' - xy' = y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

5) $y'' + y' - x^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Зразки розв'язування задач

2. 8) Розглянемо функцію $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Тоді $y'(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ і $y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2''(x)$, $x \in (a;\ b)$. Оскільки за умовою задачі визначник системи

$$\begin{cases} C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) = y'(x), \\ C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x) = y''(x) \end{cases}$$

відмінний від нуля, то ця система має єдиний розв'язок відносно C_1 і C_2:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} y'(x) & y_2'(x) \\ y''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix}} = \frac{y' y_2'' - y_2' y''}{y_1' y_2'' - y_2' y_1''} = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1'(x) & y'(x) \\ y_1''(x) & y''(x) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{y_1' y'' - y' y_1''}{\Delta} = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Тоді

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = y' \frac{y_2'' y_1 - y_1'' y_2}{\Delta} + y'' \frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{\Delta}.$$

Отже, маємо рівняння

$$y'' + \frac{y_2'' y_1 - y_1' y_2}{\Delta} y' - \frac{y_1' y_2'' - y_2' y_1''}{\Delta} y = 0, \quad \Delta = y_1' y_2 - y_1 y_2' \neq 0.$$

Підставляючи у це рівняння замість y спочатку y_1, а потім y_2, дістаємо в обох випадках тотожність, яка й доводить, що функції y_1 і y_2 є розв'язками одержаного рівняння.

Залишилося показати, що на деякому інтервалі $(a;\ b)$ визначник Вронського системи функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ не дорівнює нулю, тобто

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = |y_1 y_2' - y_1' y_2| \neq 0.$$

Для цього досить показати, що функції y_1 і y_2 лінійно незалежні на $(a;\ b)$. Припустимо супротивне: нехай існують числа C_1 і C_2 такі, що $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \equiv 0$ на інтервалі $(a;\ b)$, але $C_1^2 + C_2^2 > 0$. Тоді

$$\begin{cases} C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) \equiv 0, \\ C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x) \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x \in (a;\ b),$$

що суперечить умові задачі. Отже, функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно незалежні на інтервалі $(a;\ b)$.

Якщо припустити, що в деякій точці $x_0 \in (a;\ b)$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0, \text{ то система } \begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

має ненульовий розв'язок, а саме пару чисел $(C_1, C_2) \neq (0,\ 0)$. У цьому випадку функція $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ є розв'язком знайденого однорідного рівняння другого порядку і задовольняє початкові умови $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$. За теоремою про єдиність розв'язку маємо $y(x) \equiv 0$, тобто $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \equiv 0$ і $C_1^2 + C_2^2 > 0$, а отже, функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є лінійно залежними, що неможливо.

Таким $\{y_1(x), y_2(x)\}$ — фундаментальна система розв'язків знайденого рівняння другого порядку, тому $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ — загальний розв'язок цього рівняння.

Отже, твердження 2.8) правильне.

3. 10) Якщо C_1 і C_2 — довільні фіксовані сталі, то

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = \begin{cases} C_2 (x-1)^2, & 0 \le x \le 1, \\ C_1 (x-1)^2, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Тому $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \equiv 0 \Leftrightarrow C_1 = C_2 = 0$. Отже, дані функції є лінійно незалежними.

Знайдемо визначник Вронського для цих функцій. Неважко помітити, що

$$W(x) = \begin{vmatrix} 0 & (x-1)^2 \\ 0 & 2(x-1) \end{vmatrix} \equiv 0, \text{ якщо } 0 \le x \le 1,$$

і

$$W(x) = \begin{vmatrix} (x-1)^2 & 0 \\ 2(x-1) & 0 \end{vmatrix} \equiv 0, \text{ якщо } 1 < x \le 2.$$

Отже, $W(x) \equiv 0$ на відрізку $[0;\ 2]$, а функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно незалежні на цьому відрізку.

4. 4) Оскільки $y_1 = \cos^2 x$ і $y_2 = \sin^2 x$, то $y_1' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$, $y_2' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$.

Тоді $W(x) = \begin{vmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ -\sin 2x & \sin 2x \end{vmatrix} = \sin 2x \neq 0$, $2x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Нехай $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Розглянемо функцію $y = C_1 \cos^2 x + C_2 \sin^2 x$ і спробуємо знайти таке диференціальне рівняння, для якого ця функція є загальним розв'язком. Запишемо розглянуту функцію у вигляді

$$y = C_1 \frac{1+\cos 2x}{2} + C_2 \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{C_1 + C_2}{2} + \frac{C_1 - C_2}{2} \cos 2x =$$
$$= a + b\cos 2x,\ a = \frac{1}{2}(C_1 + C_2),\ b = \frac{1}{2}(C_1 - C_2).$$

Звідси знаходимо $y' = -2b\sin 2x$ і $y'' = -4b\cos 2x = 2y'\operatorname{ctg} 2x$. Тоді рівняння $y'' - 2y'\operatorname{ctg} 2x = 0$, можливо, і є шуканим диференціальним рівнянням. Справді, на інтервалі $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ маємо

$$y_1'' - 2y_1' \operatorname{ctg} 2x = -2\cos 2x + 2\sin 2x \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \equiv 0$$

і

$$y_2'' - 2y_2' \operatorname{ctg} 2x = 2\cos 2x - 2\sin 2x \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \equiv 0.$$

Таким чином, функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ і є розв'язками знайденого диференціального рівняння, і визначник Вронського для цих функцій $W(x) \neq 0$ на інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, тому вони утворюють фундаментальну систему розв'язків цього рівняння. Отже, загальний розв'язок знайденого диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 \cos^2 x + C_2 \sin^2 x.$$

5. 1) Частинний розв'язок y_1 знаходимо у вигляді ряду (7) з невідомими коефіцієнтами c_k. Тоді $y_1' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1}$, $y_1'' = \sum\limits_{k=2}^{\infty} (k-1)kx^{k-2}$. Підставляючи значення y_1, y_1' і y_1'' у задане рівняння, дістаємо

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k-1)kc_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^k - 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0. \tag{10}$$

Звівши подібні члени і прирівнявши до нуля коефіцієнти при різних степенях x, дістанемо рівності, з яких знайдемо коефіцієнти c_k, $k = 2, 3, 4, \ldots$. Візьмемо початкові умови у вигляді $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$ (див. формулу (9)). Тоді $c_0 = 0$ і $c_1 = 1$.

Отже, маємо

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)c_k x^k = 0,$$

$$\begin{array}{c|c}
x^0 & 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0, \\
x^1 & 3\cdot 2c_3 - 3c_1 = 0 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{2}, \\
x^2 & 4\cdot 3c_4 - 4c_2 = 0 \Rightarrow c_4 = 0, \\
x^3 & 5\cdot 4c_5 - 5c_3 = 0 \Rightarrow c_5 = \frac{1}{2\cdot 4}, \\
x^4 & 6\cdot 5c_6 - 6c_4 = 0 \Rightarrow c_6 = 0, \\
x^5 & 7\cdot 6c_7 - 7c_5 = 0 \Rightarrow c_7 = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Очевидно, що $c_{2k} = 0$, $c_{2k+1} = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2k)}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Отже,

$$y_1(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{2\cdot 4} + \frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6} + \ldots = x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^k}{k!} = xe^{\frac{x^2}{2}}. \tag{11}$$

Аналогічно, покладаючи $y_2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $y_2(0) = 1$, $y_2'(0) = 0$, знаходимо $a_0 = 1$ і $a_1 = 0$, і з рівності (10), в якій замість коефіцієнтів c_k стоятимуть a_k, знаходимо $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = \frac{1}{3}$, $a_5 = 0$, $a_6 = \frac{1}{3\cdot 5}$, $a_7 = 0, \ldots$

Таким чином,

$$y_2(x)=1+x^2+\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{3\cdot 5}x^6+\ldots+\frac{1}{(2n-1)!!}x^{2n}+\ldots\ . \tag{12}$$

Загальний розв'язок заданого рівняння матиме вигляд $y=C_1y_1+C_2y_2$, де y_1 і y_2 відповідно задаються формулами (11) і (12).

6. 1) Покладемо $y(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kx^k$, де $c_k=\dfrac{y^{(k)}(0)}{k!}$ (див. формулу (7)). Задане диференціальне рівняння запишемо у вигляді

$$y''=-xy'-y, \tag{13}$$

звідки знайдемо $y''(0)=-y(0)=0$. Диференціюючи послідовно рівняння (13), дістаємо

$$y'''=-xy''-2y' \Rightarrow y'''(0)=-2y'(0)=-2,$$

$$y^{(4)}=-xy'''-3y'' \Rightarrow y^{(4)}(0)=0,$$

$$y^{(5)}=-xy^{(4)}-4y''' \Rightarrow y^{(5)}(0)=-4y'''(0)=8.$$

Використовуючи метод математичної індукції, неважко довести, що

$$y^n=-xy^{(n-1)}-(n-1)y^{(n-2)}.$$

Звідси маємо $y^{(2k)}(0)=0$, $y^{(2k-1)}(0)=-(2k-2)y^{(2k-3)}(0)$, $k=2,\ 3,\ \ldots$. Враховуючи попередні обчислення, далі дістаємо $y^{(7)}(0)=-48$, $y^{(9)}(0)=384,\ldots$. Обчислимо тепер коефіцієнти c_k за формулою (7):

$$c_{2k}=0,\ \ k=0,1,2,\ldots;\ \ c_1=1,\ \ c_3=-\frac{1}{3},\ \ c_5=\frac{1}{3\cdot 5},\ \ c_7=-\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7},\ \ c_9=\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9},\ldots,$$

$$c_{2k-1}=\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!}.$$

Отже,

$$y(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{3\cdot 5}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!!}+\ldots\ .$$

Останній ряд збігається на всій числовій прямій (у цьому неважко переконатись, скориставшись ознакою Д'Аламбера) і дає шуканий розв'язок заданого диференціального рівняння.

§ 21.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Лінійним однорідним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами називають рівняння вигляду

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0, \tag{1}$$

де a_k, $k\in\overline{1,\ n}$, — задані сталі.

Зокрема, *лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами* називають рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \quad (2)$$

Функція $y = e^{kx}$ є розв'язком рівняння (1) тоді й тільки тоді, коли k є розв'язком алгебраїчного рівняння

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0, \quad (3)$$

яке називають *характеристичним рівнянням*, що відповідає рівнянню (1). Зокрема, характеристичне рівняння для рівняння (2) має вигляд

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \quad (4)$$

Загальний розв'язок рівняння (1) з дійсними коефіцієнтами можна знаходити за таким алгоритмом:

1) для даного диференціального рівняння скласти відповідне йому характеристичне рівняння (3);

2) знайти розв'язки характеристичного рівняння. Нехай коренями цього рівняння є числа k_s, $s \in \overline{1, n}$, серед яких можуть бути дійсні й уявні (прості й кратні);

3) кожному дійсному кореню k_i кратності p_i відповідає p_i лінійно незалежних розв'язків рівняння (1):

$$y_{i,r} = x^r e^{k_i x}, \quad r \in \overline{0, p_{i-1}};$$

4) кожній парі уявно спряжених коренів $k_j = \alpha_j \pm \beta_j$ кратності p_i відповідає $2p_i$ розв'язків рівняння (1):

$$y^*_{j,r} = x^r e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x$$

і

$$y^{**}_{j,r} = x^r e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x, \quad r \in \overline{0, p_{j-1}};$$

5) з усіх знайдених розв'язків $y_{j,r}$, $y^*_{j,r}$ і $y^{**}_{j,r}$ утворити систему $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$, яка й буде фундаментальною системою розв'язків рівняння (1);

6) записати загальний розв'язок рівняння (1) за формулою

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x). \quad (5)$$

Зокрема, для рівняння (2) можливі такі випадки:

1) корені характеристичного рівняння (4) дійсні різні, тобто $k_1 \neq k_2$. Тоді фундаментальна система розв'язків має вигляд $\left\{y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x}\right\}$, а загальний розв'язок

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}; \tag{6}$$

2) корені k_1 і k_2 рівняння (4) дійсні рівні, тобто $k_1 = k_2$. Тоді фундаментальна система розв'язків має вигляд $\left\{y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = x e^{k_1 x}\right\}$, а загальний розв'язок

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right)\ e^{k_1 x}; \tag{7}$$

3) корені k_1 і k_2 рівняння (4) уявно спряжені, тобто $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Тоді фундаментальна система розв'язків має вигляд $\left\{y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x\right\}$, а загальний розв'язок

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right). \tag{8}$$

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) кожне лінійне однорідне диференціальне рівняння є лінійним диференціальним рівнянням без правої частини;

2) кожне алгебраїчне рівняння n-го степеня є характеристичним рівнянням єдиного рівняння (1);

3) якщо відомо корені характеристичного рівняння, то можна знайти саме характеристичне рівняння та відповідне йому рівняння (1);

4) якщо k_1 і k_2 — корені характеристичного рівняння (4), то фундаментальна система розв'язків відповідного диференціального рівняння (2) має вигляд $\left\{y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x}\right\}$;

5)• функція $y = xe^x \sin 2x$ може бути розв'язком деякого рівняння (2);

6) якщо функція $y = xe^x \sin 2x$ є розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами, то функція $y = xe^x \cos 2x$ також є розв'язком цього рівняння;

7) функція $y = xe^x \sin 2x$ є розв'язком деякого рівняння (1) третього порядку.

2. Знайти загальний розв'язок даних диференціальних рівнянь:

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$; 2)• $y'' - y' - 2y = 0$; 3) $y'' + 2y' - 3y = 0$;

4) $y'' - y' - y = 0$; 5) $y'' - 4y = 0$; 6) $y'' - 8y' = 0$;

7) $y'' = 9y$; 8) $y'' + 5y' = 0$; 9) $y'' - 4y' + 4y = 0$;

10)• $y'' + 6y' + 9y = 0$; 11) $y'' + 6y' + 13y = 0$;

12)• $y'' - 2y' + 17y = 0$; 13) $y'' - 4y' + 5y = 0$;

14) $y'' + 3y = 0$; 15) $y'' + 9y = 0$;

16)• $y'' + 4y = 0$; 17) $y'' + p^2 y = 0$;

18) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$; 19) $y^{\mathrm{IV}} - 5y'' + 4y = 0$;

20) $y''' - y'' = 3y'$; 21) $y^{\mathrm{IV}} = y$;

22) $y''' = y$; 23) $y''' + y = 0$;

24) $y^{(7)} + 3y^{(6)} + 3y^{(5)} + y^{(4)} = 0$.

3. Розв'язати задачу Коші:

1)• $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$;

2) $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$;

3) $y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$;

4) $y'' + 2y' + 2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$;

5) $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1; \quad k = 0. \; y''(0) = -2$.

4. Знайти ту інтегральну криву диференціального рівняння $y''' - y'' - 2y' = 0$, яка проходить через точку (0; –3), має в цій точці дотичну, що утворює з віссю Ox кут $\operatorname{arctg} 6$, і кривину

5. За даними коренями характеристичного рівняння знайти відповідне диференціальне рівняння та розв'язати його:

1) $k_1 = 1, \; k_2 = -3$; 2) $k_1 = 0, \; k_2 = 4$; 3) $k_1 = -1, \; k_2 = 0$;

4) $k_1 = k_2 = -2$; 5) $k_1 = k_2 = 8$; 6) $k_{1,2} = \pm i$;

7) $k_{1,2} = 2 \pm 3i$; 8) $k_{1,2} = -1 \pm 2i$; 9) $k_1 = 3, \; k_2 = 0, \; k_3 = 1$;

10) $k_1 = 0, \; k_2 = 3, \; k_3 = k_4 = 5$; 11) $k_1 = k_2 = 1; \; k_{3,4} = \pm 2i$;

12) $k_{1,2} = 2 \pm i, \; k_{3,4} = -1 + 3i$; 13) $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 0$;

14)• $k_1 = k_2 = 1, \; k_{3,4} = \pm i$; 15) $k_{1,2} = 2 \pm i, \; k_{3,4} = k_{5,6} = k_{7,8} = -1 \pm 3i$.

6. За даною фундаментальною системою розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами знайти це рівняння та розв'язати його:

1) $y_1 = \mathrm{e}^{ax}, \; y_2 = \mathrm{e}^{bx}, \; a \neq b$; 2) $y_1 = \mathrm{e}^{ax}, \; y_2 = x\mathrm{e}^{ax}$;

3) $y_1 = \mathrm{e}^{x}, \; y_2 = x\mathrm{e}^{x}, \; y_3 = x^2\mathrm{e}^{x}$; 4) $y_1 = \cos 2x, \; y_2 = \sin 2x$;

5) $y_1 = 1, \; y_2 = \mathrm{e}^{-x}\cos x, \; y_3 = \mathrm{e}^{-x}\sin x$;

6) $y_1 = e^x, \; y_2 = e^{-x}, \; y_3 = xe^{-x}, \; y_4 = x^2e^{-x}$;

7)• $y_1 = 1, \; y_2 = x, \; y_3 = e^x, \; y_4 = e^x \cos x, \; y_5 = e^x \sin x,$

$y_6 = xe^x \cos x, \; y_7 = xe^x \sin x.$

7. Крива провисання каната, закріпленого в кінцях, визначається рівнянням $y'' = a^2 y$, де a — стала. Визначити рівняння цієї кривої, якщо $y(0) = h$, $y'(0) = 0$.

8•. Матеріальна точка масою m рухається вздовж осі Ox під дією сили притягання, напрямленої до початку координат і пропорційної відстані цієї точки від початку координат. Знайти закон руху.

9. Човну надано початкову швидкість $v_0 = 5$ м/с. Через 70 с після початку руху швидкість човна зменшилась удвоє. Знайти закон руху човна, якщо сила опору води прямо пропорційна швидкості човна (коефіцієнт пропорційності $\lambda > 0$). Яку максимальну відстань може пройти човен?

Зразки розв'язування задач

1. 5) Припустимо, що функція $y = xe^x \sin 2x$ є розв'язком рівняння (2). Тоді його загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де $\{y_1(x), y_2(x)\}$ — фундаментальна система розв'язків даного диференціального рівняння. Тому існують сталі C_1 і C_2 такі, що

$$xe^x \sin 2x \equiv C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad x \in (a;\, b).$$

Оскільки вигляд частинних розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$ залежить від значень коренів відповідного характеристичного рівняння (4), то треба розглядати такі три випадки: а) корені k_1 і k_2 дійсні та різні; б) k_1 і k_2 дійсні та рівні; в) корені $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ уявні спряжені.

У випадку а) маємо $xe^x \sin 2x \equiv C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$. Тоді при $x = 0$ дістаємо $C_1 + C_2 = 0$, тобто $C_1 = -C_2$, а при $x = \pi$ маємо $C_2\left(e^{k_2\pi} - e^{k_1\pi}\right) = 0$, тобто $C_2 = 0$ і $C_1 = -C_2 = 0$, а отже, $xe^x \sin 2x \equiv 0$, що неможливо.

Аналогічно дістаємо суперечність у випадках б) і в). Отже, наше припущення неправильне, тому дане твердження також неправильне.

2. 2) Складемо характеристичне рівняння для заданого диференціального рівняння: $k^2 - k - 2 = 0$. Корені цього рівняння $k_1 = -1$ і $k_2 = 2$ дійсні та різні, тому за формулою (6) маємо $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$.

10) У цьому випадку характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 4 = (k-2)^2 = 0$ має корені $k_{1,2} = 2$ (дійсні та рівні), тому за формулою (7) знаходимо $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$.

12) Характеристичне рівняння $k^2-2k+17=0$ має два уявних спряжених корені $k_{1,2}=1\pm 4i$. Отже, за формулою (8) загальний розв'язок даного рівняння має вигляд $y=\mathrm{e}^x\left(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x\right)$.

16) Характеристичне рівняння $k^2+4=0$ має уявні корені $k_{1,2}=\pm 2i$. Тому згідно з формулою (8) дістаємо $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

3. 1) Складемо характеристичне рівняння для даного диференціального рівняння і розв'яжемо його. Маємо $k^2-6k+9=0$, $k_1=k_2=3$. Оскільки корені дійсні та рівні, то фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1=\mathrm{e}^{3x}$ і $y_2=x\mathrm{e}^{3x}$. Тому за формулою (7) знаходимо загальний розв'язок $y=\mathrm{e}^{3x}\left(C_1+C_2x\right)$.

Враховуючи початкові умови $y(0)=0$ і $y'(0)=1$, дістаємо $0=C_1$ і

$$\left(3\mathrm{e}^{3x}\left(C_1+C_2x\right)+C_2\mathrm{e}^{3x}\right)\Big|_{x=0}=3C_1+C_2=1.$$

Отже, $C_1=0$, $C_2=1$ і функція $y=x\mathrm{e}^x$ є розв'язком даної задачі Коші.

5. 14) Оскільки характеристичне рівняння має чотири корені k_i, $i\in\overline{1,4}$, то його можна записати у вигляді

$$k^4+a_1k^3+a_2k^2+a_3k+a_4=0 \Leftrightarrow (k-k_1)(k-k_2)(k-k_3)(k-k_4)=0.$$

Враховуючи умову задачі, дістаємо

$$(k-k_1)(k-k_2)(k-k_3)(k-k_4)=0 \Leftrightarrow (k-1)^2(k-i)(k+i)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(k^2-2k+1\right)\left(k^2+1\right)=0 \Leftrightarrow k^4-2k^3+2k^2-2k+1=0.$$

За отриманим характеристичним рівнянням складаємо відповідне йому диференціальне рівняння $y^{IV}-2y'''+2y''-2y'+y=0$. Фундаментальна система розв'язків цього рівняння має вигляд

$$y_1=\mathrm{e}^x,\quad y_2=x\mathrm{e}^{-x},\quad y_3=\cos x,\quad y_4=\sin x,$$

а загальний розв'язок —

$$y=\left(C_1+C_2x\right)\mathrm{e}^x+C_2\cos x+C_4\sin x.$$

§ 21.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння *n*-го порядку

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n-го порядку:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x),\quad f(x)\not\equiv 0. \tag{1}$$

Відповідним йому *однорідним диференціальним рівнянням* називають рівняння вигляду

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0. \tag{2}$$

Теорема (про структуру загального розв'язку неоднорідного лінійного диференціального рівняння n-го порядку). *Нехай $y^*(x)$ — деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння* (1), *а* $\left\{y_k(x),\ k\in\overline{1,n}\right\}$ — *фундамен-*

тальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння (2). *Тоді загальний розв'язок рівняння* (1) *має вигляд*

$$y = y^*(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x) = y^*(x) + \tilde{y}(x), \tag{3}$$

тобто він дорівнює сумі загального розв'язку $\tilde{y}(x)$ відповідного однорідного рівняння і деякого частинного розв'язку $y^*(x)$ неоднорідного рівняння.

Зокрема, для неоднорідного рівняння другого порядку цей розв'язок запишеться так:

$$y = y^*(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = y^*(x) + \tilde{y}(x). \tag{4}$$

Для відшукання частинного розв'язку неоднорідного рівняння найчастіше використовують такі два методи.

I. Метод варіації довільних сталих (або метод Лагранжа). Цей метод полягає в тому, що за відомою фундаментальною системою розв'язків однорідного рівняння (2) невідомий розв'язок неоднорідного рівняння (1) шукають у вигляді

$$y^* = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k(x), \tag{5}$$

де функції $C_k = C_k(x)$ визначають за допомогою системи

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k^{(i)}(x) \equiv 0, \quad y_k^{(i)} = \dfrac{d^i y_k}{dx^i}, \quad i \in \overline{0,\ n-2}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k^{(n-1)}(x) \equiv f(x). \end{cases} \tag{6}$$

Зокрема, для неоднорідного рівняння другого порядку система (6) набирає вигляду

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) \equiv 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) \equiv f(x), \end{cases} \tag{7}$$

де $\{y_1(x), y_2(x)\}$ — фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння.

II. Метод невизначених коефіцієнтів. Цей метод застосовують тоді, коли коефіцієнти рівняння (1) є сталими, а права частина рівняння має спеціальний вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right), \tag{8}$$

де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ — многочлени степенів n і m відповідно, а α і β — фіксовані числа. Якщо $\alpha + i\beta$ — корінь кратності r характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння (2), то частинний розв'язок рівняння (1) можна шукати у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x}\left(P_s^*(x)\cos\beta x + Q_s^*(x)\sin\beta x\right), \tag{9}$$

де $s = \max\{n, m\}$, а $P_s^*(x)$ і $Q_s^*(x)$ — многочлени степеня s, невизначені коефіцієнти яких підбирають так, щоб функція y^* була розв'язком рівняння (1).

Визначення невідомих коефіцієнтів проводять за такою схемою:

а) підставляють y^* у рівняння (1);

б) якщо $\alpha \neq 0$, то ліву і праву частини рівняння скорочують на $e^{\alpha x}$;

в) якщо $\beta \neq 0$, то прирівнюють коефіцієнти при $\cos\beta x$ і $\sin\beta x$ у лівій і правій частинах одержаного рівняння;

г) якщо $\beta = 0$, то в отриманій рівності прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях x лівої і правої частин;

д) з одержаної системи однозначно знаходять невідомі коефіцієнти.

Зауважимо, що формула (5) фактично дає загальний розв'язок рівняння (1), якщо у рівностях $C_k(x) = \int C_k'(x)dx + \tilde{C}_k$, $k \in \overline{1, n}$, вважати $\tilde{C}_k$ довільними сталими.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) для знаходження загального розв'язку неоднорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку досить знайти один частинний розв'язок цього рівняння і два частинних розв'язки відповідного однорідного рівняння;

2) твердження 1) правильне, якщо два частинних розв'язки відповідного однорідного рівняння утворюють лінійно незалежну систему функцій;

3) якщо $y^*(x)$ — розв'язок рівняння (1) другого порядку, а $y_1(x)$ і $y_2(x)$ — розв'язки відповідного однорідного рівняння, то система функцій $\{y^*(x), y_1(x), y_2(x)\}$ лінійно незалежна;

4) якщо $y^*(x)$, $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — функції з попередньої вправи, то $y^*(x)$ не може бути лінійною комбінацією функцій $y_1(x)$ та $y_2(x)$;

5) якщо формула (4) задає загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1) другого порядку для всіх $x \in (a; b)$, то існує інтервал $(\alpha; \beta) \subset (a; b)$, такий, що $y_1(x) \neq 0$, $y_2(x) \neq 0$, $y_1'(x) \neq 0$ і $y_2'(x) \neq 0$ $\forall x \in (\alpha; \beta)$;

6)• якщо виконуються умови твердження 5), то $y^*(x)$ є розв'язком неоднорідного рівняння (1) другого порядку, а $\{y_1(x), y_2(x)\}$ — фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння;

7) якщо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ — розв'язки однорідного рівняння (2) другого порядку, що відповідає даному неоднорідному рівнянню, то можна так підібрати функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$, щоб функція $y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ стала розв'язком цього неоднорідного рівняння;

8) частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = P_m(x)$, де $P_m(x)$ — многочлен степеня m, завжди можна знайти у вигляді $y^*(x) = Q(x)$, де $Q(x)$ — многочлен степеня не вище за $m+1$;

9) частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = e^{\alpha x}$$

завжди можна знайти в одному з виглядів: а) $y^* = Ae^{\alpha x}$; б) $y^* = Axe^{\alpha x}$; в) $y^* = Ax^2 e^{\alpha x}$, де A — деяка стала;

10) частинний розв'язок рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = a\cos\beta x + b\sin\beta x$ завжди можна знайти у вигляді

$$y = A\cos\beta x + B\sin\beta x \quad \text{або} \quad y = x(A\cos\beta x + B\sin\beta x).$$

2. Для даного неоднорідного рівняння перевірити, чи утворюють задані функції фундаментальну систему розв'язків відповідного однорідного рівняння. У цьому випадку знайти загальний розв'язок даного рівняння:

1) $y'' - 2\operatorname{ctg}2x \cdot y' = 1$, $y_1 = \cos^2 x$, $y_2 = \sin^2 x$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

2) $y'' - \left(2 + \frac{1}{x}\right)y' + \left(1 + \frac{1}{x}\right)y = 1$, $y_1 = e^x$, $y_2 = x^2 e^x$, $x \in (a;\ b) \not\ni 0$;

3) $y''' - \frac{1}{x}y'' + y' - \frac{y}{x} = x$, $y_1 = x$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \sin x$, $x \in (a;\ b) \not\ni 0$;

4)• $y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 2$, $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$, $x \in (a;\ b) \not\ni 0$.

3. Розв'язати дані неоднорідні рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих:

1) $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$; 2) $y'' + y = \operatorname{tg}x$;

3) $y'' - y' = \dfrac{1}{1 + e^x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

4) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$; 5) $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$;

6) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$; 7) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}$;

8) $y'' - 2y' = 4x^2 e^x$; 9) $y''' - 2y'' - y' + 2y = \dfrac{2x^3 + x^2 - 4x - 6}{x^4}$;

10)• $y''' - 7y'' - 10y' + 16y = x^2$; 11) $y^{IV} + 2y'' + y = \sin x$;

12) $y''' - y'' - 4y' + 4y = x^2 - 8$.

4. Нехай виконуються умови: а) $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$, $x \in (a; b)$, — розв'язки рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ зі сталими коефіцієнтами; б) визначник Вронського функцій y_1 і y_2 відмінний від нуля на інтервалі $(a; b)$; в) диференційовні на $(a; b)$ функції $C_1 = C_1(x)$ і $C_2 = C_2(x)$ задовольняють на цьому інтервалі умову $C_1' y_1 + C_2' y_2 \equiv 0$.

Довести, що функція

$$y^*(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{10}$$

є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{11}$$

тоді й тільки тоді, коли виконується принаймні одна з умов:

1) $C_1' = \dfrac{f}{(y_1 / y_2)' y_2}$, $C_2' = \dfrac{f}{(y_2 / y_1)' y_1}$;

2) $C_1' = -\dfrac{f}{y_2}$, $C_2' = \dfrac{xf}{y_2}$

(якщо, крім того, $y_1 = xy_2 \neq 0$ на інтервалі $(a; b)$);

3) $C_1' = \dfrac{f}{\alpha e^{\alpha x} y_2}$, $C_2' = -\dfrac{f}{\alpha y_2}$

(якщо, крім того, $y_1 = e^{\alpha x} y_2 \neq 0$ на інтервалі $(a; b)$ і $\alpha \neq 0$);

4) $C_1' = -\dfrac{f \cos^2 \beta x}{\beta y_2}$, $C_2' = \dfrac{f \sin \beta x \cos \beta x}{\beta y_2}$

(якщо, крім того, $y_1 = y_2 \operatorname{tg} \beta x \neq 0$ на інтервалі $(a; b)$).

Зокрема, якщо $f = \dfrac{y_2}{\cos \beta x}$, то

$$C_1' = -\frac{\cos \beta x}{\beta}, \quad C_2' = \frac{\sin \beta x}{\beta}.$$

5. Нехай $y_i^*(x)$ — розв'язки рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = f_i(x)$, $i = 1, 2$. Довести, що функція $y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x)$ є розв'язком диференціального рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x)$.

6. Узагальнити твердження вправи 5 на випадок рівняння n-го порядку та довільної скінченної кількості функцій $y_i^*(x)$, $i \in \overline{1, m}$.

7. Довести, що функція $y^*(x) = \cos\beta x$ є розв'язком рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = \cos\beta x$ тоді й тільки тоді, коли $a_1 = 0$ і $a_2 = \beta^2 + 1$.

8. Указати вигляд частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

1) $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$;

2) $y'' + 2y' = x^2 - 1$;

3) $y'' + \omega^2 y = \sin\omega x$;

4) $y'' - 4y = xe^x \cos x$;

5) $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x} + x^2 e^x$;

6) $y'' - 3y' = x^2 + 3 + xe^{3x}$;

7) $y'' + 4y = x\sin 2x$;

8) $y'' - 4y' + 8y = xe^{2x}\cos 2x$;

9) $y'' - 3y' = x^2 + 1 + xe^{3x}$;

10) $y'' + 9y = \cos x \cos 2x$;

11) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}\left(x^2 - 2x + 1\right)$;

12) $y''' + 4y'' + 4y' = (x-1)e^{-2x}$;

13) $y''' - 4y' = 3x^2 + e^{2x}\sin 2x$;

14) $y'' + 4y = x\cos^2 x$;

15) $y''' - y'' - 9y' + 9y = (x-1)e^x + \left(x^2 - 2\right)e^{3x}$.

9. Користуючись методом невизначених коефіцієнтів, знайти вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння за відомою правою частиною $f(x)$ та коренями характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння:

1) $f(x) = e^{-x}(ax + b)$, $k_1 = -1$, $k_2 = 1$;

2) $f(x) = e^x\left(ax^2 + bx + c\right)$, $k_1 = k_2 = 1$;

3) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $k_1 = k_2 = 1$;

4) $f(x) = \sin 2x$, $k_{1,2} = \pm 2i$;

5) $f(x) = \cos 2x$, $k_1 = 0$, $k_2 = -1$;

6) $f(x) = e^{-x}(x\cos x - \sin x)$, $k_{1,2} = -1 \pm i$;

7) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $k_4 = 1$;

8) $f(x) = e^x \cos 2x$, $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = -1$;

9) $f(x) = ae^{2x} + be^{3x}$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = -1$;

10) $f(x) = ae^x + b\sin x$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, $k_{4,5} = k_{6,7} = \pm i$;

11) $f(x) = e^x\left(x^2\cos\frac{x}{2} - x\sin\frac{x}{2}\right)$, $k_{1,2} = k_{3,4} = 1 \pm \frac{i}{2}$, $k_5 = 0$;

12) $f(x) = xe^{-x}\sin x + x^2 e^{2x}$, $k_1 = k_2 = 2$, $k_3 = 1$.

10. Знайти загальний розв'язок даного рівняння:

1) $y'' - 2y = xe^{-x}$; 2) $y'' + 2y' = xe^{2x}$; 3)• $y'' + 9y = 9$;

4) $y'' + 2y' + y = -2$; 5) $y'' - y' = 5x + 2$; 6) $y'' + y' - 2y = 6x^2$;

7) $y'' - 3y' + 2y = x^2 + 1$; 8) $y'' - 3y' = 2 - 6x$;

9)• $y'' + 2y' + y = e^{-x}$; 10) $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$;

11) $y'' - a^2 y = e^{bx}$; 12) $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$;

13) $y'' + y' = xe^{-x}$; 14)• $x'' - 2x' = te^{2t}$; 15)• $y'' + 4y = 3\sin 2x$;

16) $y'' + y = \sin x$; 17) $y'' + y = x\cos x$;

18) $y'' - 6y' + 25y = 2\sin x + 3\cos x$; 19) $y'' + y = x + 2e^x$;

20) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\cos x + xe^{-x}$;

21) $y'' - 6y' + 13y = e^x\left(x^2 - 5x + 2\right)$;

22) $y'' + y = \cos^2 x + e^x + x^2$; 23) $y''' + y = e^{2x}\left(x^2 + x + 1\right)$.

11. Розв'язати дану задачу Коші:

1) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

2) $y''' - 3y' = 6 - 3x^2$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$;

3) $y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$.

12. Важке тіло ковзає уздовж похилої площини, кут нахилу якої дорівнює α. Знайти закон руху тіла, якщо початкова швидкість дорівнює нулю, а коефіцієнт тертя — μ.

13•. Ланцюг висить на гачку і починає сповзати вниз, коли з одного боку його довжина 8 м, а з другого — 12 м. Знайти закон руху ланцюга та час, за який він сповзе повністю.

14. Тіло масою 4 кг, яке підвішено на пружині, подовжує її на 1 см. Знайти закон руху тіла, якщо верхній кінець пружини здійснює вертикальні гармонічні коливання $y = \sin 30t$ (опором середовища знехтувати).

15. Частина ланцюга лежить на гладкому столі, а частина — завдовжки a метрів — звисає зі столу. З цього положення ланцюг починає сповзати вниз з прискоренням, пропорційним тій частині ланцюга, що звисає. За який час ланцюг впаде зі столу, якщо довжина ланцюга l метрів?

16. Використовуючи степеневі ряди, проінтегрувати дані диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами:

1)• $y'' + xy' + y = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$;

2) $y'' - xy' + y = x$, $y(0) = y'(0) = 0$;

3) $y'' + xy' + y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

4) $y'' + x^2 y' + 2xy = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

17. Знайти перші чотири члени розвинення у степеневий ряд розв'язку даної задачі Коші:

1) $y'' - xy' + y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0;$

2) $y'' - (2x-1)y + 1 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

3) $y'' = y\cos x + x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Зразки розв'язування задач

1. 6) Нехай $y = y^*(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ — загальний розв'язок рівняння $y'' + a_1y' + {}$ $+a_2y = f(x)$. Оскільки при будь-яких сталих C_1 і C_2 функція y є розв'язком цього рівняння, то, поклавши $C_1 = C_2 = 0$, дістанемо, що функція y^* також є розв'язком даного неоднорідного рівняння. Візьмемо $C_2 = 0$ і $C_1 = 1$ і розглянемо функцію $y = y^*(x) + y_1(x)$, яка має бути розв'язком даного рівняння, тобто $\left((y^*)'' + a_1(y^*)' + a_2y^*\right) + (y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) =$ $= f(x)$ на деякому проміжку $(a;\ b)$. Враховуючи, що $(y^*)'' + a_1(y^*)' + a_2y^* \equiv f(x)$, дістаємо $y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 \equiv 0$, тобто функція y_1 є розв'язком відповідного однорідного рівняння. Аналогічний висновок можна зробити щодо функції y_2.

Для доведення того, що функції y_1 і y_2 утворюють фундаментальну систему розв'язків, треба показати, що визначник Вронського

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in (a;\ b).$$

Доведемо від супротивного. Нехай існує точка $x_0 \in (a;\ b)$ така, що $W(x_0) = 0$. Тоді для початкових умов $y(x_0) = y^*(x_0)$, $y'(x_0) = y^{*\prime}(x_0)$ знайдуться такі сталі C_1 і C_2, що

$$\begin{cases} y(x_0) = y^*(x_0) + C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0), \\ y'(x_0) = y^{*\prime}(x_0) + C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = 0, \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) = 0. \end{cases}$$

Оскільки визначник останньої системи $W(x_0) = 0$, то існує безліч пар (C_1, C_2), для яких функція $y(x) = y^*(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ є розв'язком даного рівняння, який задовольняє задану початкову умову, що неможливо.

Отже, $\{y_1(x),\ y_2(x)\}$ — фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння $y'' + a_1y' + a_2y = 0$, тому твердження 1.6) правильне.

2. 4) Покажемо, що дані функції є розв'язками заданого рівняння. Маємо

$$y_1' = 1, \quad y_1'' = 0, \quad y_1''' = 0 \Rightarrow \frac{6}{x^2} - \frac{6}{x^3} \cdot x \equiv 0 \quad \forall x \neq 0,$$

$$y_2' = 2x, \quad y_2'' = 2, \quad y_2''' = 0 \Rightarrow -\frac{6}{x} + \frac{12}{x} - \frac{6}{x} \equiv 0 \quad \forall x \neq 0,$$

$$y_3' = 3x^2, \quad y_3'' = 6x, \quad y_3''' = 6 \Rightarrow 6 - 18 + 18 - 6 \equiv 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Розглянемо визначник Вронського для даних функцій. Маємо

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x\left(12x^2 - 6x^2\right) - \left(6x^3 - 2x^3\right) = 2x^3 \neq 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Отже, якщо розглядати дані функції на будь-якому інтервалі $(a;\ b)$, що не містить точки $x=0$, то вони утворюють фундаментальну систему розв'язків відповідного однорідного рівняння.

Для знаходження загального розв'язку заданого неоднорідного рівняння треба знайти деякий його частинний розв'язок y^*. Скористаємось методом варіації довільних сталих. Нехай $y^*(x)=C_1(x)x+C_2(x)x^2+C_3(x)x^3$, де C_i, $i\in\overline{1,\ 3}$, визначаються із системи

$$\begin{cases} C_1'x+C_2'x^2+C_3'x^3=0, \\ C_1'+2xC_2'+3x^2C_3'=0, \\ 2C_2'+6xC_3'=2. \end{cases}$$

Звідси дістаємо

$$\begin{cases} C_2'=1-3xC_3', \\ C_1'=3x^2C_3'-2x, \\ 3x^3C_3'-x^2-3x^3C_3+C_3x^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_3'=\dfrac{1}{x}, \\ C_2'=-2, \\ C_1'=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_3=\ln|x|+\widetilde{C}_3, \\ C_2=-2x+\widetilde{C}_2, \\ C_1=\dfrac{x^2}{2}+\widetilde{C}_1. \end{cases}$$

Тоді загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y=-\frac{3}{2}x^3+x^3\ln|x|+\widetilde{C}_1x+\widetilde{C}_2x^2+\widetilde{C}_3x^3.$$

3. 10) Характеристичне рівняння для відповідного однорідного диференціального рівняння має вигляд $k^3-7k^2-10k+16=0$. Звідси дістаємо $(k-1)\left(k^2-6k-16\right)=$ $=(k-1)(k+2)(k-8)=0$, тобто коренями характеристичного рівняння є числа $k_1=1$, $k_2=-2$, $k_3=8$. Тоді функції $y_1=e^x$, $y_2=e^{-2x}$ і $y_3=e^{8x}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків відповідного однорідного рівняння.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння знайдемо методом варіації довільних сталих. Маємо $y^*(x)=C_1(x)e^x+C_2(x)e^{-2x}+C_3(x)e^{8x}$, де C_1, C_2 і C_3 знайдемо із системи (6):

$$\begin{cases} C_1'e^x+C_2'e^{-2x}+C_3'e^{8x}=0, \\ C_1'e^x-2C_2'e^{-2x}+8C_3'e^{8x}=0, \\ C_1'e^x+4C_2'e^{-2x}+64C_3'e^{8x}=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3C_2'e^{-2x}=7C_3'e^{8x}, \\ C_1'e^x=-\dfrac{10}{3}C_3'e^{8x}, \\ \left(-\dfrac{10}{3}+\dfrac{28}{3}+\dfrac{192}{3}\right)C_3'e^{8x}=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} C_3'=\dfrac{1}{70}x^2e^{-8x} \\ C_2'=\dfrac{1}{30}x^2e^{2x} \\ C_1'=-\dfrac{1}{21}x^2e^{-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_3=-\dfrac{1}{560}\left(x^2+\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{32}\right)e^{-8x}+\widetilde{C}_3, \\ C_2=\dfrac{1}{120}\left(2x^2-2x+1\right)e^{2x}+\widetilde{C}_2, \\ C_1=\dfrac{1}{21}\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}+\widetilde{C}_1. \end{cases}$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$y=\frac{1}{21}\left(x^2+2x+2\right)+\frac{1}{120}\left(2x^2-2x+1\right)-\frac{1}{560}\left(x^2+\frac{x}{4}+\frac{1}{32}\right)+\widetilde{C}_1e^x+$$
$$+\widetilde{C}_2e^{-2x}+\widetilde{C}_3e^{8x}=\frac{1}{16}x^2+\frac{5}{64}x+\frac{53}{512}+\widetilde{C}_1e^x+\widetilde{C}_2e^{-2x}+\widetilde{C}_3e^{8x}.$$

Покажемо, що у даному випадку (коефіцієнти диференціального рівняння є сталими, а права частина має спеціальний вигляд) частинний розв'язок неоднорідного рівняння можна знайти простіше, скориставшись методом невизначених коефіцієнтів.

Оскільки $f(x)=x^2$, то, враховуючи формулу (8), маємо $\alpha=0$, $\beta=0$, $P_n(x)=x^2$, причому $\alpha+i\beta=0$ не є коренем характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок y^* можна шукати у вигляді

$$y^*(x)=Ax^2+Bx+C.$$

Тоді $(y^*)'=2Ax+B$, $(y^*)''=2A$, $(y^*)'''=0$. Підставляючи ці значення у дане рівняння, дістаємо

$$-14A-20Ax-10B+16Ax^2+16Bx+16C=x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2\cdot 16A+x(16B-20A)+(16C-10B-14A)=x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}16A=1,\\ 16B-20A=0,\\ 16C-10B-14A=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=\dfrac{1}{16},\\ B=\dfrac{5}{64},\\ C=\dfrac{53}{512}.\end{cases}$$

Отже, $y^*(x)=\frac{1}{16}x^2+\frac{5}{64}x+\frac{53}{512}$, тобто дістали той самий результат, але простішим способом.

10. 3) Маємо неоднорідне рівняння другого порядку. Спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y''+9y=0$. Його характеристичне рівняння $k^2+9=0$ має суто уявні корені $k_{1,2}=\pm 3i$. Тому загальний розв'язок однорідного рівняння $\tilde{y}(x)=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$. Оскільки $f(x)=9$ є многочленом нульового степеня, то згідно з формулою (8) $\alpha=\beta=0$, $P_n(x)=9$, причому число 0 не є коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння знаходитимемо у вигляді $y^*(x)=A$ (див. формулу (9)), де A — невідоме число, яке знайдемо, підставляючи замість y і y'' у дане рівняння відповідно $y^*=A$ і $(y^*)''=0$. Маємо $9A=9$, звідки $A=1$. Отже, $y^*=1$, а загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння $y=\tilde{y}+y^*=$ $=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+1$.

9) Маємо $k^2+2k+1=0$, $k_1=k_2=-1$. Отже, $\tilde{y}=(C_1+C_2x)e^{-x}$. Права частина заданого рівняння $f(x)=e^{-x}$, тому, враховуючи формулу (8), маємо $\alpha=-1$, $\beta=0$, $P_n(x)=1$, причому $\alpha+i\beta=-1$ є двократним коренем характеристичного рівняння. Отже, y^* знайдемо у вигляді $y^*=Ax^2e^{-x}$. Тоді $(y^*)'=\left(2Ax-Ax^2\right)e^{-x}$, $(y^*)''=e^{-x}\left(2A-4Ax+Ax^2\right)$.

Після підстановки цих значень у задане рівняння дістанемо $2Ae^{-x}=e^{-x}$. Скоротивши на $e^{-x}\neq 0$, маємо $A=\frac{1}{2}$. Таким чином, $y^*=\frac{1}{2}x^2e^{-x}$ і $y=\tilde{y}+y^*=e^{-x}\left(C_1+C_2x+\frac{x^2}{2}\right)$.

14) У даному випадку $k^2-2k=0$, $k_1=0$, $k_2=2$ і $x(t)=C_1+C_2e^{2t}$. Оскільки число 2 є коренем характеристичного рівняння, то, виходячи з вигляду правої частини, функцію x^* підбиратимемо у вигляді $x^*(t)=t(At+B)e^{2t}$. Підставивши значення $(x^*)'$ і $(x^*)''$ у

задане рівняння і скоротивши його на e^{2t}, прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях t. Дістанемо $4A=1$ і $2A+2B=0$, звідки $A=\frac{1}{4}$ і $B=-\frac{1}{4}$. Тоді $x^*(t)=\frac{t}{4}(t-1)\ e^{2t}$ і $x(t)=\tilde{x}(t)+x^*(t)=C_1+C_2e^{2t}+\frac{t}{4}(t-1)\ e^{2t}$.

15) Характеристичне рівняння $k^2+4=0$ має суто уявні корені $k_{1,2}=\pm 2i$, тому $\tilde{y}(x)=$ $=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$. Оскільки $2i$ є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок підбираємо у вигляді $y^*=x(A\cos 2x+B_2\sin 2x)$. Знаходимо $y^{*\prime}=A\cos 2x+$ $+B\sin 2x+x(2B\cos 2x-2A\sin 2x)$, $y^{*\prime\prime}=(4B-4Ax)\cos 2x+(-4A-4Bx)\sin 2x$. Підставляючи значення y^* замість y в задане рівняння і прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 2x$ і $\cos 2x$ у правій і лівій частинах, дістаємо $4B=0$, $-4A=3 \Rightarrow B=0$, $A=-\frac{3}{4}$. Отже, $y^*=-\frac{3}{4}x\cos 2x$, а $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{3}{4}x\cos 2x$.

16. 1) Скористаємось таким твердженням: якщо в рівнянні (1) коефіцієнти $a_k=a_k(x)$, $k\in\overline{1,\ n}$, і функція f нескінченно диференційовні в деякому околі точки x_0, то його розв'язок можна подати у вигляді степеневого ряду (див. § 21.2).

Оскільки вказані умови виконуються в будь-якому околі точки $x_0=0$, то дістанемо (виконати самостійно):

$$y(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2^k k!}x^{2k}=1-e^{-\frac{x^2}{2}},\quad x\in\mathbf{R}.$$

§ 21.5. Системи диференціальних рівнянь першого порядку

Системою диференціальних рівнянь першого порядку називають систему вигляду

$$F_k(x,y_1,y_1',\ldots,y_n,y_n')=0,\quad k\in\overline{1,\ m},\tag{1}$$

де m і n — задані натуральні числа, F_k — задані функції змінних $x, y_1, y_1',\ldots,y_n,y_n'$, x — незалежна змінна, $y_k=y_k(x)$, $k\in\overline{1,\ n}$, — невідомі функції змінної x.

Систему (1) називають *нормальною системою диференціальних рівнянь*, якщо її можна записати у вигляді

$$y_k'=f_k(x,y_1,\ldots,y_n),\quad k\in\overline{1,\ n},\tag{2}$$

де f_k, $k\in\overline{1,\ n}$, — задані функції змінних $x, y_1,\ldots,y_n$. Число n, що дорівнює кількості рівнянь та кількості невідомих функцій системи (2), називають *порядком* цієї системи.

Розв'язком системи (1) або системи (2) називають вектор-функцію $y=(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))$, $x\in(\alpha;\beta)$, компоненти якої перетворюють кожне рівняння системи у тотожність:

$$F_k(x,\varphi_1(x),\varphi_1'(x),\ldots,\varphi_n(x),\varphi_n'(x))=0 \quad \forall x\in(\alpha;\beta) \text{ і } \forall k\in\overline{1,\ m}$$

або

$$\varphi_k'(x)=f_k(x,\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)) \quad \forall x\in(\alpha;\beta) \text{ і } \forall k\in\overline{1,\ n}.$$

Початковими умовами для системи (1) або (2) називають умови вигляду

$$\varphi_k(x_0)=y_{k,0},\ k\in\overline{1,\ n}, \tag{3}$$

де $(x_0, y_{1,0},\ldots, y_{n,0})$ — задана точка (вектор) простору $\mathbf{R}^{n+1}$.

Теорема (існування та єдиність розв'язку). *Нехай функції* f_k *неперервні в області* $D\subset\mathbf{R}^{n+1}$ *разом із частинними похідними за змінними* y_k, $k\in\overline{1,\ n}$. *Тоді для кожної точки* $(x_0, y_{1,0},\ldots, y_{n,0})\in D$ *існує єдиний розв'язок нормальної системи* (2), *що задовольняє початкові умови* (3).

Нормальна система (2) називається *лінійною*, якщо функції f_k, $k\in\overline{1,\ n}$, мають вигляд

$$f_k(x)=\sum_{i=1}^{n}a_{ki}y_i+b_k,\ k\in\overline{1,\ n},$$

де $a_{ki}=a_{ki}(x)$ і $b_k=b_k(x)$, $k\in\overline{1,\ n}$, $i\in\overline{1,\ n}$, — задані функції, неперервні на деякому інтервалі $(\alpha;\beta)$. При цьому a_{ki} називають *коефіцієнтами*, а b_k — *вільними членами системи.*

Нормальна лінійна система називається *однорідною*, якщо усі вільні члени тотожно дорівнюють нулю.

Одним з методів розв'язування системи (1) є зведення цієї системи до розв'язування деякого диференціального рівняння вищого порядку з однією невідомою функцією. Зокрема, розв'язування лінійної системи n-го порядку можна звести до розв'язування лінійного диференціального рівняння n-го порядку.

Нехай система (2) задовольняє умови теореми існування та єдиності розв'язку. Вектор-функція $y=(\varphi_1(x,C_1,\ldots,C_n),\ldots,\varphi_n(x,C_1,\ldots,C_n))$, $x\in(\alpha;\beta)$, називається *загальним розв'язком системи* (2), якщо для будь-якої допустимої початкової умови (3) існують константи $C_1,\ldots,C_n$ такі, що відповідна вектор-функція $y=y(x,C_1,\ldots,C_n)$ є розв'язком системи (2), що задовольняє початкові умови (3).

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) кожне звичайне диференціальне рівняння є системою диференціальних рівнянь першого порядку;

2) якщо функція $y = \varphi(x)$ є розв'язком рівняння $F(x, y, y', y'') = 0$, то сукупність функцій $y_1 = \varphi(x)$, $y_2 = \varphi'(x)$ є розв'язком системи

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ F(x, y_1, y_2, y_2') = 0; \end{cases}$$

3) розв'язування кожного звичайного диференціального рівняння n-го порядку можна звести до розв'язування деякої системи диференціальних рівнянь першого порядку;

4) нормальна система диференціальних рівнянь має стільки рівнянь, скільки і невідомих функцій;

5) кожна нормальна система має єдиний розв'язок, що задовольняє задані початкові умови;

6) кожна лінійна система має єдиний розв'язок, що задовольняє задані початкові умови;

7)• кожна лінійна однорідна система зі сталими коефіцієнтами другого порядку має загальний розв'язок.

2. Визначити, чи є нормальними дані системи диференціальних рівнянь:

1) $\begin{cases} y_1' + \omega y_2 = 0, \\ y_2' - \omega y_2 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy' - y = 0, \\ xzz' + x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = f_1(t, x, y, z, x', y', z'), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = f_2(t, x, y, z, x', y', z'), \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = f_3(t, x, y, z, x', y', z'), \end{cases}$

де $x' = \dfrac{dx}{dt}$, $y' = \dfrac{dy}{dt}$, $z' = \dfrac{dz}{dt}$;

4) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = z + x, \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} = y + 2x; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 - 3x^2 - y^2. \end{cases}$

3. Знайти розв'язок даної системи, зводячи її до диференціального рівняння з однією змінною:

1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + \omega x = 0, \\ \dfrac{dx}{dt} + \omega y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy' - y = 0, \\ xzz' + x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - by, \\ \dfrac{dy}{dt} = bx + ay; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x^2 + \dfrac{1}{2y+1}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2xy + x; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x + \beta y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \gamma x + \delta y, \beta\gamma \geq 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\omega^2 x - 2\delta y, \end{cases}$ $\omega \neq 0, \ \delta > 0, \ \delta^2 - \omega^2 < 0;$

8)• $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = cy - bz, \\ \dfrac{dy}{dt} = az - cx, \\ \dfrac{dz}{dt} = bx - ay; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - a, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - b, \\ \dfrac{dz}{dt} = z - c. \end{cases}$

4. Знайти розв'язок даної системи диференціальних рівнянь, який задовольняє задані початкові умови:

1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - yz}{x^2 - yz}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z(x+y)}{x^2 - yz}, \end{cases}$ $y(0) = 1, \ z(0) = -1;$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - \dfrac{2x}{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - 1 + \dfrac{2x}{t}, \end{cases}$ $x(1) = \dfrac{1}{3}, \ y(1) = -\dfrac{1}{3};$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = z + y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x - y, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z, \end{cases}$ $x(0) = 1, \ y(0) = 0, \ z(0) = 0;$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x, \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0. \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y, \end{cases}$

Зразки розв'язування задач

1. 7) Розглянемо довільну фіксовану лінійну однорідну систему другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 =: f_1(y_1, y_2), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 =: f_2(y_1, y_2). \end{cases}$$

Зрозуміло, що функції f_1 і f_2 (які не залежать від x) задовольняють умови теореми існування та єдиності розв'язку в області $D \subset \mathbf{R}^3$, тобто для будь-якої точки $(x_0, y_{1,0}, y_{2,0})$ існує єдиний розв'язок системи: вектор-функція $y = (y_1(x), y_2(x))$, що задовольняє початкові умови

$$y_1(x_0) = y_{1,0}, \quad y_2(x_0) = y_{2,0}.$$

Покладемо $y_{1,0} = 1, \quad y_{2,0} = 0$. Візьмемо точку $(x_0,\ 0,\ 1) \neq (x_0,\ 1,\ 0)$ і знайдемо функцію $y^* = (y_1{}^*(x),\ y_2{}^*(x))$, що задовольняє початкові умови

$$y_1^*(x_0) = 0, \quad y_2^*(x_0) = 1.$$

Для вибраних функцій маємо

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_1^*(x_0) \\ y_2(x_0) & y_2^*(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Покажемо, що

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_1^*(x) \\ y_2(x) & y_2^*(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Припустимо протилежне. Нехай існує $x_1 \in \mathbf{R}$ таке, що

$$\begin{vmatrix} y_1(x_1) & y_1^*(x_1) \\ y_2(x_1) & y_2^*(x_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Тоді система

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_1) + C_2 y_1^*(x_1) = 0, \\ C_1 y_2(x_1) + C_2 y_2^*(x_1) = 0 \end{cases}$$

має ненульовий розв'язок $(C_1, C_2) \neq (0, 0)$, тому функція $y = \big(C_1 y_1(x) + C_2 y_1^*(x),\ C_2 y_2(x) + {}$ ${} + C_2 y_2^*(x)\big)$ є розв'язком даної системи і задовольняє умову $y(x_1) = (0, 0)$. Оскільки таким розв'язком є функція $y(x) \equiv (0, 0) \quad \forall x \in \mathbf{R}$, то за теоремою існування та єдиності розв'язку

$C_1y_1(x)+C_2y_1^*(x)=0$ і $C_1y_2(x)+C_2y_2^*(x)=0$ $\forall x\in\mathbf{R}$, але $C_1y_1(x_0)+C_2y_1^*(x_0)=C_1$, а $C_1y_2(x_0)+C_2y_2^*(x_0)=C_2$, тобто $C_1=C_2=0$, що суперечить умові $(C_1,C_2)\neq(0,\ 0)$.

Отже, нерівність (4) доведено. Тому функція $y=\left(C_1y_1(x)+C_2y_1^*(x),\quad C_1y_2(x)+ +C_2y_2^*(x)\right)$ є загальним розв'язком даної системи, оскільки вона перетворює кожне рівняння системи у тотожність $\forall C_1$ і C_2 і для будь-якої точки $(\overline{x},\ \overline{y}_1,\ \overline{y}_2)$ система

$$\begin{cases} C_1y_1(\overline{x})+C_2y_1^*(\overline{x})=\overline{y}_1, \\ C_1y_2(\overline{x})+C_2y_2^*(\overline{x})=\overline{y}_2 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок (C_1,C_2), який визначає розв'язок системи, що задовольняє початкові умови $y(\overline{x})=(\overline{y}_1,\overline{y}_2)$.

3. 8) Якщо функції $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ утворюють розв'язок даної системи, то неважко помітити, що

$$a\frac{dx(t)}{dt}+b\frac{dy(t)}{dt}+c\frac{dz(t)}{dt}\equiv 0.$$

Тому $ax(t)+by(t)+cz(t)\equiv C_1$.

Крім того, дістанемо, що

$$x(t)\frac{dx(t)}{dt}+y(t)\frac{dy(t)}{dt}+z(t)\frac{dz(t)}{dt}\equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)\right)\equiv 0 \Leftrightarrow x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)\equiv C_2.$$

Нехай $a=b=c=0$. Тоді функції $x=C_1,\ y=C_2,\ z=C_3$ утворюють загальний розв'язок системи.

Якщо $a^2+b^2+c^2>0$, то сім'я інтегральних кривих даної системи утворюється перетином площин $ax+by+cz=C_1$ і сфер $x^2+y^2+z^2=C_2$.

§ 21.6. Системи диференціальних рівнянь вищого порядку

Системою диференціальних рівнянь вищого порядку називається система вигляду

$$F_k\left(x,\ y_1,\ y_1',\ldots,\ y_1^{(m_1)},\ldots,\ y_n,\ y_n',\ldots,\ y_n^{(m_n)}\right)=0,\ \ k\in\overline{1,\ p}, \tag{1}$$

де n і p — задані натуральні числа, x — незалежна змінна, y_i, $i\in\overline{1,n}$, — невідомі функції змінної x, F_k, $k\in\overline{1,\ p}$, — задані функції змінних $x,\ y_1,\ y_1',\ldots,\ y_1^{(m_1)},\ldots,\ y_n,\ y_n',\ldots,\ y_n^{(m_n)}$ і серед чисел $m_i\in\mathbf{N}_0, i\in\overline{1,n}$, принаймні одне більше за 1.

Систему (1) називають *нормалізованою*, якщо її можна подати у вигляді

$$y_k^{(m_k)} = f_k\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}\right), k \in \overline{1, n}. \qquad (2)$$

Цю систему можна звести до нормальної за допомогою підстановок

$$u_1 = y_1, u_2 = y_1', \ldots, u_{m_1} = y_1^{(m_1-1)},$$

$$u_{m_1+1} = y_2, u_{m_1+2} = y_2', \ldots, u_{m_1+m_2} = y_2^{(m_2-1)}, \ldots,$$

$$u_{m_1+\ldots+m_{n-1}+1} = y_n, u_{m_1+\ldots+m_{n-1}+2} = y_n', \ldots, u_{m_1+\ldots+m_{n-1}+m_n} = y_n^{(m_n-1)}.$$

При цьому порядок одержаної нормальної системи, тобто кількість невідомих функцій і кількість рівнянь системи, дорівнює $m_1 + \ldots + m_n$. У зв'язку з цим *порядком системи* (1) називають число $p = m_1 + \ldots + m_n$.

Систему диференціальних рівнянь (1) називають *лінійною*, якщо її можна записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_i} a_{k,i,j} y_i^{(j)} = b_k, \, k \in \overline{1, n}, \qquad (3)$$

де $a_{k,i,j} = a_{k,i,j}(x), k \in \overline{1, n}, j \in \overline{1, m_i - 1}, i \in \overline{1, n},$ — задані коефіцієнти системи, а $b_k = b_k(x), k \in \overline{1, n},$ — задані вільні члени системи.

Якщо $b_k = 0 \quad \forall k \in \overline{1, n},$ то лінійна система називається *однорідною*, а якщо $a_{k,i,j}$ — сталі функції $\forall k, i, j,$ то маємо *лінійну систему зі сталими коефіцієнтами*.

Для лінійної системи (3) зі сталими коефіцієнтами завжди можна підрахувати визначник

$$D(p) = \begin{vmatrix} \sum\limits_{j=0}^{m_1} a_{1,1,j} p^j \ldots \sum\limits_{j=0}^{m_n} a_{1,n,j} p^j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{j=0}^{m_1} a_{n,1,j} p^j \ldots \sum\limits_{j=0}^{m_n} a_{n,n,j} p^j \end{vmatrix},$$

який є деяким многочленом відносно змінної p. Його називають *характеристичним многочленом* системи (3), а *характеристичним рівнянням* системи (3) називають рівняння

$$D(p) = 0. \qquad (4)$$

Алгоритм розв'язування лінійної однорідної системи зі сталими коефіцієнтами.

1. Обчислити визначник $D(p)$ системи.

2. Вказати усі різні розв'язки характеристичного рівняння (4), тобто числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$, кратності яких відповідно дорівнюють $m_1, \ldots, m_\nu$.

3. Для кожного кореня λ_i кратності m_i записати відповідний розв'язок системи у вигляді

$$y_{k,i} = g_{k,i}(x)e^{\lambda_i x},\ k \in \overline{1, n},$$

де $g_{k,i}(x)$ — многочлен степеня $m_i - 1$ з невизначеними коефіцієнтами.

4. Знайти невизначені коефіцієнти многочленів $g_{k,i}(x)$, підставивши функції $y_{k,i}$ у розв'язувану систему.

5. Записати загальний розв'язок системи:

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),\ \text{де}\ y_k = \sum_{i=1}^{n} y_{ki},\ k \in \overline{1, n}.$$

Теорема (про загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи). *Загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи можна знайти як суму загального розв'язку відповідної однорідної системи і якогось частинного розв'язку даної неоднорідної системи.*

Нехай вільні члени системи (3) мають вигляд

$$b_k = r_k \cos(\omega x + \alpha_k),\ k \in \overline{1, n},$$

де r_k, ω і $\alpha_k, k \in \overline{1, n},$ — фіксовані дійсні числа, а коефіцієнти системи є фіксованими дійсними числами, причому $D(i\omega) \neq 0$. Тоді частинний розв'язок системи (3) можна шукати у вигляді

$$y_k^* = a_k^* \cos(\omega x + \alpha_k) + b_k^* \sin(\omega x + \alpha_k),\ k \in \overline{1, n}, \tag{5}$$

де a_k^* і $b_k^*, k \in \overline{1, n},$ — невизначені коефіцієнти. Підставляючи y_k^* у систему (3), дістаємо систему для визначення коефіцієнтів a_k^* і $b_k^*, k \in \overline{1, n}$.

Характеристичний многочлен $D(p)$ системи (3) називають *стійким*, якщо всі його нулі мають від'ємні дійсні частини.

Для стійкого характеристичного многочлена умова $D(i\omega) \neq 0$ виконується завжди, причому якщо $y = Y(x)$ — загальний розв'язок відповідної однорідної системи, то $Y(x) \to 0, x \to +\infty$. Тому для великих x можна вважати, що розв'язок системи (3) мало відрізняється від функції $y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$, де y_k^* визначається рівностями (5). Це так званий *усталений розв'язок* системи (3).

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) кожне диференціальне рівняння вищого порядку є системою диференціальних рівнянь;

2) кожна система диференціальних рівнянь є нормалізованою;

3) кожна лінійна система диференціальних рівнянь є нормалізованою;

4) лінійна система цілком визначається своїми коефіцієнтами та вільними членами;

5) кожна лінійна система диференціальних рівнянь є однорідною;

6) кожна лінійна система має сталі коефіцієнти;

7) порядок лінійної системи (3) дорівнює $\sum_{i=1}^{n} m_i$;

8) степінь характеристичного многочлена $D(p)$ системи (3) не перевищує порядку цієї системи;

9) загальний розв'язок лінійної однорідної системи зі сталими коефіцієнтами цілком визначається коренями характеристичного рівняння цієї системи;

10) для знаходження загального розв'язку неоднорідної системи достатньо знайти загальний розв'язок однорідної системи і якийсь розв'язок неоднорідної системи;

11) якщо характеристичний многочлен системи (3) є многочленом другого степеня з додатними коефіцієнтами, то він є стійким;

12) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

13)• якщо характеристичний многочлен системи (3) має дійсні коефіцієнти і є стійким, то ці коефіцієнти додатні;

14) якщо λ — простий корінь характеристичного рівняння (4), то існує ненульовий вектор $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ такий, що $y = (C_1, C_2, \ldots, C_n)\mathrm{e}^{\lambda x}$ є розв'язком відповідної однорідної системи.

2. Перевірити, чи є дана система нормалізованою, і, якщо так, нормалізувати її:

1) $\begin{cases} y_1' + y_1 + y_2' = 0, \\ y_1'' + y_2'' + y_2 - y_1 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} a_1 y_1' + b y_2' = f_1(x), \\ a_2 y_2' + b y_1' = f_2(x); \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy' - y = 0, \\ xzz' + x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$

4)• $\begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dx^2} - x - z = 0, \\ \dfrac{d^2 z}{dx^2} - 2x - y = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} L\left(\dfrac{dy_1}{dt} + \dfrac{dy_2}{dt}\right) + Ry_2 = f(t), \\ L\dfrac{d^2 y}{dt^2} + R\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{c}(y_2 - y_1) = 0. \end{cases}$

3. Знайти порядок систем із вправи 2.

4. Визначити, які системи із вправи 2 є лінійними.

5. Довести, що многочлен $D(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3$, де $a_i \in \mathbf{R}, i \in \overline{0, 3}$, є стійким тоді й тільки тоді, коли $a_i > 0 \quad \forall i \in \overline{0, 3}$ і $a_1 a_2 > a_0 a_3$.

6. Для даних лінійних однорідних систем знайти характеристичні многочлени та визначити їх стійкість:

1) $\begin{cases} y_1' + y_1 + y_2' = 0, \\ y_1'' - y_1 + y_2' + y_2 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_1 y_1' + b y_2' = 0, \\ b y_1' + a_2 y_2' = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} L y_1' + L y_2' + R y_2 = 0, \\ L y_1'' + R y_2' + \dfrac{1}{c}(y_2 - y_1) = 0; \end{cases}$ 4)• $\begin{cases} y'' - z = 0, \\ z'' - y = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\dfrac{g \sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0} \; y_1 - \dfrac{b}{m} y_2 + \dfrac{2q \sin \varphi_0}{\omega_0} y_3, \\ y_3' = -\dfrac{k}{J} y_1 \sin \varphi_0. \end{cases}$

7. Знайти загальні розв'язки даної однорідної системи:

1) $\begin{cases} y' + y + z' = 0, \\ y'' - y + z'' + z = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_1 y' + b z' = 0, \\ b y' + a_2 z' = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x'' + y' + x = 0, \\ x' + y'' = 0; \end{cases}$ 4)• $\begin{cases} y'' - z = 0, \\ z'' - y = 0. \end{cases}$

8. Знайти загальні розв'язки даної неоднорідної системи:

1) $\begin{cases} y'' - z = x, \\ z'' - y = 2x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y_1' - y_2' = \cos(x+1), \\ y_1' + y_2' = \cos(x-1); \end{cases}$

3) $\begin{cases} L y_1' + L y_2' + R y_2 = \cos x, \\ L y_2'' + R y_2' + \dfrac{1}{c}(y_2 - y_1) = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y_1' + y_1 + y_2' = \cos x + \cos 2x, \\ y_1'' - y_1 + y_2'' + y_2 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dt^2} = x + 1, \\ \dfrac{d^2 x}{dt^2} = y + 1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + x = e^t, \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{d^2 y}{dt^2} = 1. \end{cases}$

Зразки розв'язування задач

1. 13) Нехай $D(p) = a_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n$ — характеристичний многочлен і $a_i \in \mathbf{R} \;\; \forall i \in \overline{0, \; n}$. Тоді кожному уявному нулю $p_0 = a + ib$ многочлена $D(p)$ відповідає спряжено уявний нуль цього многочлена $\overline{p_0} = a - ib$. Тому за відомою теоремою многочлен $D(p)$ можна розкласти на множники вигляду $(p+\alpha_k)$ і $\left(p^2+\beta_k p+\gamma_k\right)$, які мають дійсні коефіцієнти. Зрозуміло, що ці множники є стійкими многочленами, оскільки $D(p)$ також стійкий многочлен. Отже, $\alpha_k > 0$. Оскільки $p^2+\beta_k p+\gamma_k = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}(-\beta_k \pm \sqrt{\beta_k^2 - 4\gamma_k}$, причому $\operatorname{Re} p > 0$, то $\beta_k > 0$ і $\gamma_k > 0$. Звідси, знаходячи $D(p)$ як добуток множників вигляду $(p+\alpha_k)$ і $\left(p^2+\beta_k p+\gamma_k\right)$ з додатними коефіцієнтами, дістанемо, що коефіцієнти $D(p)$ також додатні.

Отже, твердження 1.13) правильне.

2. 4) Дану систему можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = x + z, \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} = 2x + y. \end{cases}$$

Тому вона нормалізована, тобто її можна звести до нормальної системи за допомогою підстановок

$$u_1 = y, \quad u_2 = y', \\ u_3 = z, \quad u_4 = z'.$$

Ця нормальна система має вигляд

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = x + u_3, \\ u_3' = u_4, \\ u_4' = 2x + u_1. \end{cases}$$

3. 4) Враховуючи розв'язок задачі 2.4), дістаємо, що порядок даної системи дорівнює 4.

6. 4) Характеристичний многочлен даної системи має вигляд

$$D(p) = \begin{vmatrix} p^2 & -1 \\ -1 & p^2 \end{vmatrix} = p^4 - 1.$$

Оскільки коефіцієнти цього многочлена не є додатними, то за вправою 1.13) $D(p)$ не є стійким многочленом.

7. 4) Характеристичне рівняння даної системи має вигляд $p^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow p = \pm 1$ або $p = \pm i$. Тому усі корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$ є простими. Розв'язки даної системи шукатимемо у вигляді

$$(y_1, z_1) = (a_{11}, a_{12})e^x, \quad (y_2, z_2) = (a_{21}, a_{22})e^x,$$

$$(y_3, z_3) = (a_{31}, a_{32})e^{ix}, \quad (y_4, z_4) = (a_{41}, a_{42})e^{-ix}.$$

Підставимо (y_1, z_1) у дану систему:

$$\begin{cases} a_{11}e^x - a_{12}e^x = 0, \\ a_{12}e^x - a_{11}e^x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a_{11} = a_{12} =: a_1.$$

Підставимо (y_2, z_2) у дану систему:

$$\begin{cases} a_{21}e^{-x} - a_{22}e^{-x} = 0, \\ a_{22}e^{-x} - a_{21}e^{-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ a_{21} = a_{22} =: a_2.$$

Підставимо (y_3, z_3) у дану систему:

$$\begin{cases} -a_{31}e^{ix} - a_{32}e^{ix} = 0, \\ -a_{32}e^{ix} - a_{31}e^{ix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ a_{31} = -a_{32} =: a_3 .$$

Підставимо (y_4, z_4) у дану систему і також дістанемо, що $a_{41} = -a_{42} =: a_4$. Отже, загальний розв'язок системи має вигляд

$$(y, z) = \left(a_1e^{x} + a_2e^{-x} + a_3e^{ix} + a_4e^{-ix},\ a_1e^{x} + a_2e^{-x} - a_3e^{ix} - a_4e^{-ix}\right).$$

Розділ 22 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

§ 22.1. Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку

Диференціальні рівняння з частинними похідними стосуються функцій багатьох змінних.

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку відносно невідомої функції $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = b, \quad (1)$$

де коефіцієнти рівняння $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та вільний член b залежать від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$.

Для відшукання загального розв'язку рівняння (1) випишемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{b}$$

і знайдемо n незалежних інтегралів цієї системи:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = C_1, \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = C_2, \ldots$$
$$\ldots, \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = C_n,$$

де $C_i, i \in \overline{1, n},$ — довільні сталі. Тоді загальний розв'язок рівняння (1) записується так:

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0,$$

де F — довільна диференційовна функція.

Зокрема, якщо u входить тільки в один з інтегралів системи, наприклад в останній, то загальний розв'язок рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = f(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}),$$

де f — довільна диференційовна функція. Якщо розв'язати останню рівність відносно u, то дістанемо загальний розв'язок рівняння (1) у явному вигляді.

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку відносно функції $z = z(x, y)$:

$$a_1(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = b(x, y, z).$$

Знайдемо поверхню $z = z(x, y)$, яка проходить через задану лінію

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t). \tag{2}$$

Для цього запишемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{b}$$

і знайдемо два незалежних інтеграли цієї системи

$$\varphi_1(x, y, z) = C_1,\ \varphi_2(x, y, z) = C_2, \tag{3}$$

а потім замість змінних x, y, z підставимо їхні вирази через параметр t із рівнянь (2).

Матимемо $\Phi_1(t) = C_1$, $\Phi_2(t) = C_2$. Виключивши звідси параметр t, дістанемо $F(C_1, C_2) = 0$. Для одержання шуканої поверхні залишається підставити сюди значення C_1 і C_2 з рівнянь (3).

Вправи

1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

1) $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x - y;$

2) $e^x\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = ye^x;$

3) $2x\frac{\partial z}{\partial x} + (y - x)\frac{\partial z}{\partial y} - x^2 = 0;$

4) $xy\frac{\partial z}{\partial x} - x^2\frac{\partial z}{\partial y} = yz;$

5)• $xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} + xy = 0;$

6) $x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y + z;$

7) $x^2 z\frac{\partial z}{\partial x} + y^2 z\frac{\partial z}{\partial y} = x + y;$

8) $yz\frac{\partial z}{\partial x} - xz\frac{\partial z}{\partial y} = e^z;$

9) $(y + z)\frac{\partial u}{\partial x} + (z + x)\frac{\partial u}{\partial y} + (x + y)\frac{\partial u}{\partial z} = u;$

10) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + (z + u)\frac{\partial u}{\partial z} = xy;$

11) $(u - x)\frac{\partial u}{\partial x} + (u - y)\frac{\partial u}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial z} = x + y.$

2. Знайти поверхню $z = z(x, y)$, яка проходить через указану лінію, а функція z задовольняє дане рівняння:

1) $y^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + xy \dfrac{\partial z}{\partial y} = x, \quad x = 0, \quad z = y^2;$

2) $x \dfrac{\partial z}{\partial x} - 2y \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2; \quad y = 1, \quad z = x^2;$

3)• $xz \dfrac{\partial z}{\partial x} + yz \dfrac{\partial z}{\partial y} + xy = 0, \quad y = x^2, \quad z = x^3;$

4) $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = z - xy, \quad x = 2, \quad z = y^2 + 1;$

5) $x \dfrac{\partial z}{\partial x} - y \dfrac{\partial z}{\partial y} = z^2 (x - 3y), \quad x = 1, \quad yz + 1 = 0;$

6) $yz \dfrac{\partial z}{\partial x} + xz \dfrac{\partial z}{\partial y} = xy, \quad x = a, \quad y^2 + z^2 = a^2;$

7) $(y - z) \dfrac{\partial z}{\partial x} + (z - x) \dfrac{\partial z}{\partial y} - x + y = 0, \; z = y = -x.$

3*. Знайти загальне рівняння поверхонь, які перетинають під прямим кутом поверхні сім'ї $z^2 = Cxy$.

4*. Знайти поверхню, яка проходить через пряму $y = x, \quad z = 1$, ортогональну до поверхні $x^2 + y^2 + z^2 + Cx$.

5*. Знайти поверхні, в яких довільна дотична площина перетинає вісь Ox у точці з абсцисою, яка вдвічі менша за абсцису точки дотику.

6*. Написати рівняння з частинними похідними, яке задовольняють циліндричні поверхні з твірними, паралельними вектору $(1, 1, 2)$, і знайти загальний розв'язок цього рівняння.

7*. Написати рівняння з частинними похідними, яке задовольняють усі конічні поверхні з вершиною у точці (a, b, c), і знайти загальний розв'язок цього рівняння.

Зразки розв'язування задач

1. 5) Запишемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}.$$

Розв'язавши рівняння $\dfrac{dx}{xz} = \dfrac{dy}{yz}$, або $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$, маємо перший інтеграл системи $\dfrac{x}{y} = C_1$, звідки $x = C_1 y$. Підставивши це значення у друге рівняння системи $\dfrac{dy}{yz} = \dfrac{dz}{-xy}$, дістанемо $\dfrac{dy}{yz} = \dfrac{dz}{-C_1 y^2}$, $-C_1 y dy = z dz$.

Звідси $z^2 = -C_1 y^2 + C_2$. Підставимо сюди значення $C_1 = \frac{x}{y}$ зі знайденого першого інтеграла системи, матимемо ще один інтеграл $z^2 + xy = C_2$. Знайдені два інтеграли $\frac{x}{y} = C_1$ та $z^2 + x^2 y = C_2$ незалежні (перевірте це самостійно).

Таким чином, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$F\left(\frac{x}{y}, z^2 + xy\right) = 0,$$

де F — довільна диференційовна функція. Через те що z входить лише в один з інтегралів системи, то загальний розв'язок заданого рівняння можна записати у явному вигляді.

Маємо

$$z^2 + xy = f\left(\frac{x}{y}\right), \quad z = \pm\sqrt{f\frac{x}{y} - xy},$$

де f — довільна диференційовна функція.

2. 3) Запишемо задану лінію у параметричному вигляді, взявши за параметр змінну x: $x = x,\ y = x^2,\quad z = x^3$.

Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = -\frac{dz}{xy}.$$

Знайдемо два лінійно незалежних її інтеграли (див. приклад 1.5)):

$$\frac{x}{y} = C_1, \quad z^2 + xy = C_2.$$

Підставимо сюди значення змінних x, y, z через x, взяті з рівняння заданої лінії. Дістанемо $\frac{1}{x} = C_1$, $x^6 + x^3 = C_2$. Виключимо змінну x: $\frac{1}{C_1^6} + \frac{1}{C_1^3} = C_2$. І нарешті, підставимо сюди значення C_1 і C_2 з інтегралів системи:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^6 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = z^2 + xy.$$

Це і є шукана поверхня.

§ 22.2. Диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку

До основних рівнянь математичної фізики для функції двох змінних належать такі диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку.

1. *Хвильове рівняння*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Це найпростіше рівняння гіперболічного типу. З ним пов'язаний розгляд таких процесів, як поперечні коливання струни, поздовжні коливання стрижня, електричні коливання у провіднику, крутильні коливання вала, коливання газу тощо.

2. *Рівняння теплопровідності*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Це найпростіше рівняння параболічного типу. До дослідження такого рівняння приводять процеси поширення теплоти, фільтрації рідини і газу у пористому середовищі, деякі процеси теорії ймовірностей тощо.

3. *Рівняння Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Це найпростіше рівняння еліптичного типу. До такого рівняння приводять стаціонарні процеси в електричних та магнітних полях, задачі стаціонарного теплового стану, гідродинаміки, дифузії тощо.

Для функцій трьох і більшої кількості змінних названі рівняння мають аналогічний вигляд.

Будь-яке диференціальне рівняння з частинними похідними, як і звичайне диференціальне рівняння, має безліч розв'язків. Розв'язуючи конкретні задачі, потрібно знайти той розв'язок рівняння, який задовольняє певні додаткові умови, пов'язані зі змістом задачі.

Додаткові умови у рівняннях математичної фізики поділяють на два типи:

1) початкові умови, які характеризують шукану величину у початковий момент часу;

2) межові, або крайові, умови, що стосуються поведінки шуканої функції на межі розглядуваної області у довільний момент часу.

Зауважимо, що додаткові умови відносно шуканої функції мають забезпечити існування, єдиність та стійкість розв'язку рівняння, який задовольняє ці умови.

Розглянемо деякі найбільш поширені задачі математичної фізики.

1. *Задача Коші для рівняння коливання струни*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x),\ -\infty<x<+\infty.\tag{2}$$

Треба знайти відхилення $u(x,t)$ нескінченної струни у будь-якій її точці x та в довільний момент часу t, якщо задано початкові умови (2) (відхилення та швидкість струни у довільній точці в початковий момент часу $t=0$).

Задачу розв'язують методом Д'Аламбера і розв'язок дістають у вигляді

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(x)dx.\tag{3}$$

2. *Мішана задача для рівняння коливання струни* (1).

Треба знайти закон $u(x,t)$ коливання струни завдовжки l, якщо задано початкові умови

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x),\ 0<x<l, \tag{4}$$

та крайові умови

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\ t>0 \tag{5}$$

(кінці струни жорстко закріплені).

Задачу розв'язують методом Фур'є (метод розподілу змінних), за яким розв'язок дістають у вигляді

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+b_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{6}$$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx,\ b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx,\ k=1,2,\ldots.$$

3. *Мішана задача для рівняння теплопровідності*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{7}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0<x<l, \tag{8}$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\ t>0. \tag{9}$$

Треба знайти закон $u(x,t)$ поширення теплоти у стрижні завдовжки l, якщо задано початкову умову (8) (температуру у кожній точці стрижня при $t=0$) та крайові умови (9) (на кінцях стрижня $x=0$ та $x=l$ температура у будь-який момент часу $t>0$ дорівнює нулю).

Задачу розв'язують методом Фур'є і розв'язок дістають у вигляді

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\sin\frac{\pi k}{l}x\mathrm{e}^{\frac{-a^2\pi^2k^2}{l^2}t}, \tag{10}$$

$$C_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi k}{l}xdx,\ k=1,2\ldots.$$

4. *Задача Діріхле для рівняння Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{11}$$

$$\left.u(x,y)\right|_{x^2+y^2=R^2}=f(x,y). \tag{12}$$

Треба знайти функцію $u(x, y)$, яка задовольняє рівняння Лапласа (11) всередині круга радіуса R і на межі цього круга набуває заданого значення f.

Задачу розв'язують методом Фур'є, перейшовши до полярних координат (r, θ), і розв'язок дістають у вигляді інтеграла Пуассона

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\psi)+r^2}d\psi. \tag{13}$$

Вправи

1. Знайти загальний розв'язок даного диференціального рівняння:

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$; 2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^2-y$; 3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=x^2+y$; 4) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{x+y}$;

5) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=0$; 6) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=5y$; 7) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2y\frac{\partial u}{\partial x}$;

8) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial x}$; 9)• $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\frac{\partial u}{\partial y}$; 10) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x+y$.

2. Розв'язати задачу Коші для рівняння коливання струни $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $-\infty<x<+\infty$, $t>0$, якщо:

1) $u(x,0)=\sin x$, $u_t'(x,0)=0$ $(a=1)$;

2) $u(x,0)=0$, $u_t'(x,0)=A\sin x$, $A-\text{const}$;

3)• $u(x,0)=u_t'(x,0)=\frac{1}{1+x^2}$ $(a=1)$;

4) $u(x,0)=h^2\frac{\sin x}{x}$, $u_t'(x,0)=0$;

5) $u(x,0)=0$, $u_t'(x,0)=\begin{cases}\frac{a}{100}, & 0<x<l,\\ 0, & -\infty<x<0, l<x<+\infty;\end{cases}$

6) $u(x,0)=\begin{cases}0, & |x|>l,\\ \frac{l-x}{100}, & 0<x<l, u_t'(x,0)=0.\\ \frac{l+x}{100}, & -l<x<0,\end{cases}$

3. Знайти закон вільних коливань однорідної струни скінченної довжини при даних початкових та крайових умовах (у задачах 1) — 7) крайові умови вважати однорідними, тобто відхилення струни на її кінцях дорівнює нулю):

1) у початковий момент часу $t=0$ струна має форму квадратної параболи, симетричної відносно перпендикуляра до її середини, а початкова швидкість дорівнює нулю;

2) у початковий момент часу $t=0$ струну відтягнуто в точці $x=x_0$, $0<x_0<l$, на задану величину h, а потім відпущено без початкової швидкості;

3) $u(x,0)=\sin x,\ \ u_t'(x,0)=0\ \ 0<x<\pi;$

4) $u(x,0)=\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi-x, & \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi; \end{cases}$

5)• $u(x,0)=\dfrac{4h}{l}x(l-x),\ \ u_t'(x,0)=0\ \ (0<x<l);$

6) $u(x,0)=0,\ \ u_t'(x,0)=\dfrac{a}{10}\ \ (0<x<l);$

7) $u(x,0)=0,\ \ u_t'(x,0)=1\ \ (0<x<l);$

8) $u(x,0)=u_t'(x,0)=0,\ \ u(0,t)=0{,}1l\sin\dfrac{a\pi t}{l},\ \ u(l,t)=0;$

9) $u(x,0)=-\dfrac{x^2}{10l},\ \ u_t'(x,0)=u(0,\ t)=0,\ \ u_x'(l,\ t)=-0{,}1;$

10) $u(x,0)=u_t'(x,0)=u(0,\ t)=0,\ \ u(l,t)=A\sin\omega t,\ \ A,\omega-\mathrm{const}.$

4. Розв'язати мішану задачу для рівняння теплопровідності $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ при даних початковій та крайових умовах:

1) $u(x,0)=\begin{cases} x, & 0<x\le\dfrac{l}{2}, \\ l-x, & \dfrac{l}{2}<x<l, \end{cases}\ \ u(0,\ t)=u(l,\ t)=0;$

2) $u(x,0)=\dfrac{x(l-x)}{l^2},\ \ 0<x<l,\ \ u(0,\ t)=u(l,\ t)=0;$

3) $u(x,0)=\dfrac{1}{4}(\pi-2x),\ \ 0<x<\pi,\ \ u(0,\ t)=u(\pi,\ t)=0,\ \ a=1;$

4) $u(x,0)=3\sin 2x,\ \ 0<x<\pi,\ \ u(0,\ t)=u(\pi,\ t)=0;$

5) $u(x,0)=3\sin\dfrac{\pi x}{l}-2\sin\dfrac{3\pi x}{l},\ \ 0<x<l,\ \ u(0,\ t)=u(l,\ t)=0;$

6)• $u(x,0)=\varphi(x),\ \ 0<x<l,\ \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ \ u(l,t)=u_0-\mathrm{const};$

7) $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{200}{l}x, & 0<x\le\dfrac{l}{2},\\ 100, & \dfrac{l}{2}<x<l,\end{cases}$ $u(0,t)=0,\ \ u(l,t)=100°.$

5.* Знайти стаціонарний розподіл температури на тонкій однорідній круглій пластинці радіуса R, якщо у верхній половині її межі підтримується температура 1 °C, а у нижній — температура 0 °C.

6.* Знайти закон розподілу температури у нескінченному стрижні, якщо у початковий момент часу $t=0$ в усіх точках стрижня температура була однаковою і дорівнювала T_0.

7.* Довести, що розв'язком рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+t^k$, $k\in\mathbf{N}$, який задовольняє умови $u(x,0)=u_t'(x,0)=0,\ \ 0<x<\pi,\ \ u(0,t)=u(\pi,t)=0$, є функція

$$u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}\int_0^t\tau^k\sin n(t-\tau)d\tau.$$

8.* Знайти закон вимушених коливань струни, жорстко закріпленої на кінцях, якщо на неї діє рівномірно розподілена сила $g(x,t)=A\rho\sin\omega t$, $A,\rho,\omega-\mathrm{const}$ (початкове відхилення та початкова швидкість дорівнюють нулю, явище резонансу не враховувати).

Зразки розв'язування задач

1. 9) Запишемо задане рівняння у вигляді $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$, або $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}-2u\right)=0$, тоді $\dfrac{\partial u}{\partial y}-2u=C_1(x)$ і $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2u+C_1(x)$.

Для довільного фіксованого x останнє рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними, тому якщо $u_1(y)=u(x,y)$, то $\dfrac{du_1}{2u_1+C_1(x)}=dy$ і $\dfrac{1}{2}\ln\left|u_1+C_1(x)\right|=y+C_2(x)$, звідки $u_1+C_1(x)=\mathrm{e}^{2y+2C_2(x)}$, і шуканий загальний розв'язок матиме вигляд $u(x,y)=$ $=C(x)\mathrm{e}^{2y}-C_1(x)$, де $C(x)=\mathrm{e}^{2C_2(x)}$.

2. 3) У цьому випадку маємо задачу Коші (1), (2), де $a=1$,

$$\varphi(x)=\psi(x)=\frac{1}{1+x^2},\ -\infty<x<+\infty.$$

За формулою (3) дістаємо

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(x-t)^2}+\frac{1}{1+(x+t)^2}\right)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(x-t)^2}+\frac{1}{1+(x+t)^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\Big|_{x-t}^{x+t}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(x-t)^2}+\frac{1}{1+(x+t)^2}+\operatorname{arctg}(x+t)-\operatorname{arctg}(x-t)\right).$$

3. 5) Маємо мішану задачу для рівняння коливання струни.
За методом Фур'є дістаємо

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+b_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

де коефіцієнти a_k, b_k, $k=1,2,\dots$, ряду визначаються за відомими формулами

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{4h}{l}x(l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\quad b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{k\pi}{l}xdx=0.$$

При обчисленні коефіцієнтів a_k двічі застосуємо метод інтегрування частинами. Матимемо

$$a_k=\frac{8h}{l^2}\left(-\frac{l}{k\pi}x(l-x)\cos\frac{k\pi}{l}x\Big|_0^l+\frac{l}{k\pi}\int_0^l(l-2x)\cos\frac{k\pi}{l}xdx\right)=$$

$$=\frac{8h}{lk\pi}\left(\frac{l}{k\pi}(l-2x)\sin\frac{k\pi}{l}x\Big|_0^l+\frac{2l}{k\pi}\int_0^l\sin\frac{k\pi}{l}xdx\right)=$$

$$=-\frac{16hl}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi}{l}x\Big|_0^l=-\frac{16hl}{k^3\pi^3}(\cos k\pi-1)=\begin{cases}0, & k=2n,\\ \dfrac{32hl}{k^3\pi^3}, & k=2n-1,\ n=1,2,\dots.\end{cases}$$

Отже, остаточно $u(x,t)=-\dfrac{32hl}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^3}\cos\dfrac{(2n-1)a\pi}{l}t\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{l}x.$

4. 6) Фізичний зміст крайової умови $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$ полягає в тому, що кінець стрижня $x=0$ теплоізольований.

Маємо мішану задачу для рівняння теплопровідності з неоднорідними крайовими умовами, яку можна звести до задачі з однорідними крайовими умовами.

Введемо до розгляду функцію

$$\upsilon(x,t)=u(x,t)-u_0.$$

Тоді

$$u(x,t)=u_0+\upsilon(x,t),\quad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial \upsilon}{\partial t},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2},$$

і для функції υ маємо мішану задачу

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2},\tag{14}$$

$$\upsilon(x,0)=u(x,0)-u_0=\varphi(x)-u_0,\tag{15}$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x}(0,t)=0,\quad \upsilon(l,t)=u(l,t)-u_0=0.\tag{16}$$

Користуючись методом Фур'є, покладемо $\upsilon(x,t)=X(x)T(t)$. Тоді рівняння (14) набирає вигляду

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{a^2T(t)}.$$

Остання рівність можлива лише тоді, коли кожне з відношень є сталою, яку позначимо через $-\lambda^2$. Отже, дістаємо два рівняння $X''+\lambda^2 X=0$ та $T'+a^2\lambda^2 T=0$, розв'язками яких є $X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$ і $T(t)=C\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}$.

Отже,

$$\upsilon(x,t)=\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\left(C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x\right),$$

де $C_1=AC$ і $C_2=BC$ — довільні сталі.

Із крайових умов (16) маємо

$$\upsilon'_x\big|_{x=0}=\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\left(-\lambda C_1\sin\lambda x+\lambda C_2\cos\lambda x\right)\big|_{x=0}=\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\lambda C_2=0,$$

$$\upsilon\big|_{x=l}=\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\left(C_1\cos\lambda l+C_2\sin\lambda l\right)=0.$$

З першого рівняння випливає, що $C_2=0$. Оскільки $C_1\neq 0$ (інакше матимемо нульовий розв'язок), то з другого рівняння дістанемо $\cos\lambda l=0$, звідки $\lambda=\lambda_n=\dfrac{(2n-1)\pi}{2l}$, $n=1,2,\ldots$.

Таким чином, будь-яка з функцій

$$\upsilon_n(x,t)=C_n\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2a^2(2n-1)^2}{4l^2}t}\cos\frac{\pi(2n-1)}{2l}x,\ n=1,2,\ldots,$$

задовольняє крайові умови (16).

Розв'язок задачі (14) — (16) шукатимемо у вигляді

$$\upsilon(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2a^2(2n-1)^2}{4l^2}t}\cos\frac{\pi(2n-1)}{2l}x.$$

Тоді з початкової умови (15) дістанемо

$$\upsilon(x,0)=\varphi(x)-u_0=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\frac{\pi(2n-1)}{2l}x,$$

звідки

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\left(\varphi(x)-u_0\right)\cos\frac{\pi(2n-1)}{2l}xdx=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\frac{\pi(2n-1)}{2l}xdx-\\-\frac{(-1)^{n+1}\cdot 4u_0}{\pi(2n-1)},\ n=1,2,\ldots. \tag{17}$$

Остаточно розв'язок даної задачі має вигляд

$$u(x,t)=u_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2a^2(2n-1)^2}{4l^2}t}\cos\frac{\pi(2n-1)}{2l}x,$$

де коефіцієнти C_n визначаються формулами (17).

Розділ 23 ІНТЕГРАЛ І МІРА ЛЕБЕГА

§ 23.1. Множини L-міри нуль

Множину $E \subset \mathbf{R}^1$ називають *множиною L-міри нуль*, якщо її можна покрити не більше ніж зчисленною системою інтервалів, суму довжин яких можна зробити як завгодно малою, тобто $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (a_i; b_i): \bigcup\limits_i (a_i; b_i) \supset E$, а $\sum\limits_i (b_i - a_i) < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots$. При цьому записують $mE = 0$.

За означенням вважають, що $m\varnothing = 0$.

Об'єднання $\bigcup\limits_k E_k = E$ не більше ніж зчисленної кількості множин E_k, $k = 1, 2, \ldots$, L-міри нуль є також множиною L-міри нуль. Зокрема, кожна не більше ніж зчисленна множина $E \subset \mathbf{R}^1$ є множиною L-міри нуль.

Кажуть, що деякий факт має місце майже скрізь на множині E, якщо цей факт не має місця лише у тих точках з E, які утворюють множину L-міри нуль. Зокрема, $f_1(x) = f_2(x)$ майже скрізь на множині E, якщо $m\{x \in E: \ f_1(x) \neq f_2(x)\} = 0$.

Надалі всі множини, що розглядатимуться у цьому розділі, вважатимемо лінійними, тобто з простору $\mathbf{R}^1$, якщо не сказано інше.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) якщо множина E скінченна, то вона є множиною L-міри нуль;

2) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

3) якщо множина E складається тільки з ізольованих точок, то $mE = 0$;

4) існує множина L-міри нуль, в якої є внутрішня точка;

5) якщо $\overline{E}$ — замикання множини E, то $mE = 0 \Leftrightarrow m\overline{E} = 0$;

6) якщо A — множина дійсних алгебраїчних чисел, то $mA = 0$;

7)• кожний відрізок $[a; b]$, де $a < b$, не є множиною L-міри нуль;

8) множина ірраціональних чисел з відрізка $[a; b]$ є множиною L-міри нуль;

9) якщо $f_{\mathbf{Q}}$ і $f_{\mathbf{I}}$ – відповідно характеристичні функції множин раціональних та ірраціональних чисел, то $f_{\mathbf{I}}(x) \geq f_{\mathbf{Q}}(x)$ майже скрізь на $\mathbf{R}^1$;

10) $\sin^n x \to 0, n \to \infty,$ майже скрізь на $\mathbf{R}^1$.

2•. Довести, що множина E є множиною L-міри нуль тоді й тільки тоді, коли її можна покрити зчисленною системою інтервалів із скінченною сумою їх довжин, причому кожна точка E належить нескінченній кількості інтервалів з цієї системи.

3. Визначити, чи є дана множина E множиною L-міри нуль:

1) $E = \mathbf{R} \setminus \bigcup\limits_{n \in \mathbf{Z}} (n; n+1)$;

2) E — множина дійсних трансцендентних чисел;

3) $E = P_0$ —досконала множина Кантора;

4) $E = G$ — довільна лінійна відкрита множина;

5) E — множина точок розриву функції f, монотонної на $[a;b]$;

6) $E = \{x \in \mathbf{R}: \ \sin x + \cos x = 1\}$;

7) $E = \{x \in \mathbf{R}: \ \sin x - \cos x \geq a\}, \ \ a \in \mathbf{R}$;

8) $E = \left\{ x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k}{2^k}: \ a_{2n} = 0, \ a_{2n-1} = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N} \right\}$;

9) E — множина точок розриву функції f, яка є функцією обмеженої варіації на $[a; b]$.

4. Нехай $X_i = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left(a_k^{(i)}; b_k^{(i)} \right), i = 1, 2, \ldots,$ причому $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(b_k^{(i)} - a_k^{(i)} \right) \leq 2^{-i}$ $\forall i \in \mathbf{N}$, а $Y_m = \bigcup\limits_{i=m}^{\infty} X_i \quad \forall m \in \mathbf{N}.$

Довести, що множина $Y = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} Y_m$ є множиною L-міри нуль.

5. Довести дані твердження:

1) степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ збігається майже скрізь на відрізку $[x_0 - R; x_0 + R]$, якщо R — його радіус збіжності;

2) функція Діріхле є додатною майже скрізь на $\mathbf{R}^1$;

3) послідовність $\left(x^n\right)$ є збіжною майже скрізь на $[-1; 1]$ і не є збіжною майже скрізь на ширшому проміжку $\langle a; b \rangle \supset [-1; 1]$;

4) якщо функція f монотонна на $\langle a; b \rangle$, то вона неперервна майже скрізь на цьому проміжку;

5) кожна функція f, яка має обмежену варіацію на $[a; b]$, є неперервною майже скрізь на $[a; b]$;

6) існує континуальна множина L-міри нуль.

Зразки розв'язування задач

1. 7) Припустимо, що $m[a;b]=0$, тобто $\forall\varepsilon>0 \quad \exists(a_i;b_i)$: $\bigcup_i(a_i;\ b_i)\supset[a;\ b]$ і $\sum_i^{\infty}(b_i-a_i)<\varepsilon$. Оскільки $[a;\ b]$ — компактна множина, то з будь-якого покриття цього відрізка можна виділити скінченне підпокриття, тобто $\exists\left(a_{i_k};\ b_{i_k}\right)$:

$$\bigcup_{k=1}^{n}\left(a_{i_k};\ b_{i_k}\right)\supset[a;\ b] \text{ і } \sum_{k=1}^{n}\left(b_{i_k}-a_{i_k}\right)\le\varepsilon,\ \ k\in\overline{1,\ n}.$$

Вважаючи, що інтервали $\left(a_{i_k};\ b_{i_k}\right)$ перенумеровані у порядку зростання лівого кінця $a_{i_1}\le a_{i_2}\le\ldots\le a_{i_n}$, неважко показати, що $b-a\le\sum_{k=1}^{n}\left(b_{i_k}-a_{i_k}\right)\le\varepsilon$. Тому якщо взяти $\varepsilon<b-a$, то дістанемо суперечність. Отже, дане твердження правильне.

2. Нехай $E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k;\ b_k)$, $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)<\infty$ і кожна точка з E належить нескінченній множині інтервалів із системи $\{(a_k;\ b_k)\}$. Тоді $E\subset\bigcup_{k=n}^{\infty}(a_k;\ b_k)$ $\forall n\in\mathbf{N}$, а $\sum_{k=n}^{\infty}(b_k-a_k)\to0$ при $n\to\infty$, а це означає, що E є множиною L-міри нуль.

Навпаки, якщо E — множина L-міри нуль, то $\forall n\in\mathbf{N}$

$$\exists\left(a_i^{(n)};\ b_i^{(n)}\right):\ E\subset\bigcup_i\left(a_i^{(n)};\ b_i^{(n)}\right),\ \ i=1,\ 2,\ \ldots,\ \text{ і }\ 0<\sum_i\left(b_i^{(n)}-a_i^{(n)}\right)\le\frac{1}{2^n}.$$

Сукупність інтервалів $\left(a_i^{(n)};\ b_i^{(n)}\right)$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\in\mathbf{N}$, утворює зчисленну систему, причому $E\subset\bigcup_{i,n}\left(a_i^{(n)};\ b_i^{(n)}\right)$, а

$$\sum_{i,n}\left(b_i^{(n)}-a_i^{(n)}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_i\left(b_i^{(n)}-a_i^{(n)}\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$

Крім того, кожна точка з E належить нескінченній множині інтервалів з побудованої системи, оскільки для неї можна вказати інтервал із системи як завгодно малої довжини.

§ 23.2. L-інтеграл по відрізку

Простором $CR[a;b]$ називають множину функцій, неперервних на відрізку $[a;b]$, з метрикою, що визначається формулою

$$\rho_{CR}(f,g)=(R)\int_a^b|f(x)-g(x)|dx,$$

де праворуч стоїть інтеграл Рімана.

$CR[a;\, b]$ є неповним метричним простором, але його можна поповнити, причому процедура поповнення приводить до поняття L-інтеграла по відрізку.

Функцію $f:[a;\, b]\to \mathbf{R}$ називають *L-інтегровною* на відрізку $[a;b]$, якщо існує послідовність $(f_n(x))$, фундаментальна у просторі $CR[a;\, b]$ та збіжна до $f(x)$ майже скрізь на $[a;b]$. При цьому існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}(R)\int\limits_a^b f_n(x)dx$, яку називають *L-інтегралом* функції f по відрізку $[a;\, b]$ і позначають

$$(L)\int\limits_a^b f(x)dx \text{ або } \int\limits_a^b f(x)dx, \text{ або } \int\limits_a^b f dx.$$

Множину функцій, L-інтегровних на відрізку $[a;b]$, позначають $L[a;b]$.

Основні властивості L-інтеграла

1. *Єдиність L-інтеграла*: якщо функція f L-інтегровна на відрізку $[a;b]$, то вона має єдиний L-інтеграл, який не залежить від фундаментальної в $CR[a;\, b]$ послідовності $(f_n(x))$, що збігається з f майже скрізь на $[a;b]$.

2. *L-інтеграли майже скрізь рівних функцій*: якщо $f(x)=g(x)$ майже скрізь на $[a;\, b]$ і $f\in L[a;\, b]$, то $g\in L[a;b]$ і $\int\limits_a^b f dx=\int\limits_a^b g dx.$

3. *Зв'язок інтеграла Рімана з L-інтегралом*: якщо функція f інтегровна за Ріманом на відрізку $[a;b]$, то вона L-інтегровна на $[a;\, b]$ і

$$(R)\int\limits_a^b f dx=(L)\int\limits_a^b f dx.$$

4. *Лінійність L-інтеграла*: якщо $f, g\in L[a;b]$, а α, $\beta\in\mathbf{R}$, то $\alpha f+\beta g\in$ $\in L[a;b]$ і

$$\int\limits_a^b(\alpha f+\beta g)dx=\alpha\int\limits_a^b fdx+\beta\int\limits_a^b g\,dx.$$

5. *Оцінка модуля L-інтеграла*: якщо $f\in L[a;\, b]$, то $|f|\in L[a;\, b]$ і

$$\left|\int\limits_a^b f\,dx\right|\le\int\limits_a^b|f|dx.$$

6. *Монотонність L-інтеграла*: якщо $f(x) \geq g(x)$ майже скрізь на відрізку $[a; b]$, а $f, g \in L[a; b]$, то

$$\int_a^b f\,dx \geq \int_a^b g\,dx.$$

Зокрема, якщо $f(x) \geq 0$ майже скрізь на $[a; b]$, то $\int_a^b f dx \geq 0$.

7. *Повнота простору* $L[a; b]$: простір $L[a; b]$ функцій, L-інтегровних на відрізку $[a; b]$, з метрикою

$$\rho_L(f; g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

є поповненням метричного простору $CR[a; b]$, отже, є повним метричним простором, в якому функції f і g вважають рівними, якщо $f(x) = g(x)$ майже скрізь на $[a; b]$.

8. *Адитивність L-інтеграла*: якщо $f \in L[a; b]$, то $\forall c \in (a; b)$ $f \in L[a; c]$ і $f \in L[c; b]$, причому

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx. \tag{1}$$

Якщо $\exists c \in (a; b)$: $f \in L[a; c]$ і $f \in L[c; b]$, то $f \in L[a; b]$ і має місце формула (1).

9. *L-інтегровність добутку*: якщо функції f і g L-інтегровні на відрізку $[a; b]$, причому принаймні одна з них обмежена, то функція fg L-інтегровна на $[a; b]$.

10. *Зв'язок збіжності майже скрізь зі збіжністю у середньому*:

1) якщо послідовність $(f_n(x))$ фундаментальна у просторі $CR[a; b]$ і збіжна до $f(x)$ майже скрізь на відрізку $[a; b]$, то вона збіжна до $f(x)$ у середньому, тобто

$$\rho_L(f_n, f) = \int_a^b |f_n - f|\,dx \to 0, \quad n \to \infty;$$

2) якщо послідовність $(f_n(x))$ збіжна до $f(x)$ у середньому, то $\exists n_i \uparrow \infty:$ $f_{n_i}(x) \to f(x)$, $n \to \infty$, майже скрізь на $[a; b]$.

11. *Граничний перехід під знаком L-інтеграла*: нехай $f_n \in L[a;b]$ $\forall n \in \mathbf{N}$ і $f_n(x) \to f(x)$ майже скрізь на $[a;b]$. Тоді $f \in L[a;b]$ і

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dx,$$

якщо має місце принаймні одна з умов:

1) $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ $\forall n \in \mathbf{N}$ та $\forall x \in [a;b]$ і $\left|\int_a^b f_n dx\right| \leq H$ $\forall n \in \mathbf{N}$ (*теорема Беппо — Леві*);

2) $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall n \in \mathbf{N}$ та $\forall x \in [a;b]$ і $g \in L[a;b]$ (*теорема Лебега*).

12. *Почленне інтегрування функціонального ряду*: якщо $f_n \in L[a;b]$ $\forall n \in \mathbf{N}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_a^b |f_n(x)|dx < \infty$, то функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ абсолютно збігається майже скрізь на $[a;\, b]$, причому

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in L[a;\, b] \text{ і } \int_a^b F(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження (виконати усно):

1) у просторі $CR[a;\, b]$ кожна фундаментальна послідовність не є збіжною;

2) у просторі $CR[a;\, b]$ функції f і g рівні тоді й тільки тоді, коли $f(x) = g(x)$ $\forall x \in [a;b]$;

3) кожна L-інтегровна на $[a;\, b]$ функція є інтегровною на $[a;\, b]$ за Ріманом;

4) якщо $f + \varphi \in L[a;b]$, то $f \in L[a;b]$ і $\varphi \in L[a;b]$;

5) якщо $f \pm \varphi \in L[a;b]$, то $f \in L[a;b]$ і $\varphi \in L[a;b]$;

6) якщо $f \in L[a;b]$, то $\exists (f_n(x))$ — фундаментальна в $CR[a;\, b]$ та рівномірно збіжна до $f(x)$ на $[a;\, b]$;

7) якщо $f \in L[a;c]$ $\forall c \in (a;b)$, то $f \in L[a;b]$;

8) якщо $f, \varphi \in L[a;b]$, то $f\varphi \in L[a;b]$.

2. Довести або спростувати дані твердження:

1) послідовність $f_n(x) = \begin{cases} x^{2n}, & x \in (-1;1), \\ 1, & x \in [-2;-1] \bigcup [1;2], \end{cases}$ є фундаментальною у просторі CR $[-2;2]$;

2) послідовність $(f_n(x))$ з 1) є збіжною у просторі $CR\ [-2; 2]$;

3) якщо $f_n(x) = f(x)\quad \forall n \in \mathbf{N}$ і функція f неперервна на $[a; b]$, то $(f_n(x))$ — фундаментальна послідовність в $CR[a; b]$ і $f_n(x) \to f(x)$ майже скрізь на $[a; b]$;

4) функція Діріхле $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$ L-інтегровна на будь-якому відрізку $[a; b]$, причому $(L)\int\limits_a^b f(x)dx = 0$;

5) якщо множина E не більше ніж зчисленна, то її характеристична функція f_E L-інтегровна на будь-якому відрізку $[a; b]$ і $\int\limits_a^b f_E(x)dx = 0$;

6) якщо $|f| \in L[a; b]$, то і $f \in L[a; b]$;

7)• функція $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ не є L-інтегровною на $[0; 1]$;

8) функція $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ є L-інтегровною на $[0; 1]$.

3. Перевірити, чи є L-інтегровною на відрізку $[0; 1]$ дана функція f, і, якщо так, обчислити її L-інтеграл:

1) $f(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{якщо } x \text{ — алгебраїчне.} \\ \beta, & \text{якщо } x \text{ — трансцендентне;} \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \in \mathbf{Q}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \text{якщо } x \notin \mathbf{Q}; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x^\alpha, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} x^\alpha, & \text{якщо } x \notin \mathbf{Q}, \\ 1, & \text{якщо } x \in \mathbf{Q}; \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} x^\alpha, & \text{якщо } x \notin \mathbf{Q}, \\ x^\beta, & \text{якщо } x \in \mathbf{Q}; \end{cases}$

6) f — характеристична функція множини: а) ірраціональних чисел; б) трансцендентних чисел; в) досконалої множини Кантора P_0; г) відкритої множини Кантора G_0;

7) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \end{cases}$

8)• $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \notin \mathbf{Q} \text{ і } x < \dfrac{1}{3}, \\ x^3, & \text{якщо } x \notin \mathbf{Q} \text{ і } x > \dfrac{1}{3}, \\ 0, & \text{якщо } x \in \mathbf{Q}; \end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases}\sin \pi x, \text{ якщо } x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\cap G_0,\\ \cos \pi x, \text{ якщо } x\in\left[\frac{1}{2};1\right]\cap G_0,\\ x^2, \qquad \text{якщо } x\in P_0,\end{cases}$

де G_0 — відкрита, а P_0 — досконала множини Кантора;

10) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\in P_0,\\ x^\alpha, & \text{якщо } x\notin P_0,\end{cases}$ де P_0 — досконала множина Кантора.

4. Довести, що коли $f\in L[a;b]$, то $\forall\alpha>0$ $f(\alpha x)\in L\left[\frac{a}{\alpha};\frac{b}{\alpha}\right]$;

$$\int\limits_{\frac{a}{\alpha}}^{\frac{b}{\alpha}} f(\alpha x)dx=\frac{1}{\alpha}\int\limits_a^b f(\alpha x)dx.$$

5. Довести, що коли $f(x)=c$ майже скрізь на $[a;b]$, то $f\in L[a;b]$ і $\int\limits_a^b f dx=c(b-a)$. Чи обов'язково ця функція інтегровна за Ріманом на $[a;b]$?

6. Довести, що коли $f\in L[a;b]$, а $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ $\quad\forall x\in[a;b]$, то функція F неперервна на відрізку $[a;b]$.

7. Нехай $f\in L[a;b]$ і f неперервна на $[a;b]$. Довести, що $(L)\int\limits_a^b f(x)dx=$ $=\lim\limits_{c\to b-}(R)\int\limits_a^c f(x)dx.$

8. 1) Нехай

$$\varphi^{(H)}(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \varphi(x)\ge H,\\ H, & \varphi(x)<H.\end{cases}$$

Довести, що коли $(f_n(x))$ — фундаментальна послідовність у просторі $CR[a;b]$, то і $\left(f_n^{(H)}(x)\right)$ — фундаментальна послідовність в $CR[a;b]$. Якщо $f_n(x)\to f(x)$ майже скрізь на відрізку $[a;b]$, то $f_n^{(H)}(x)\to f^{(H)}(x)$ майже скрізь на $[a;b]$.

2) Сформулювати і довести аналогічне твердження для випадку, коли

$$\varphi^{(H)}(x)=\begin{cases}H, & \varphi(x)\ge H,\\ \varphi(x), & \varphi(x)<H.\end{cases}$$

3) Довести, що коли $f \in L[a;b]$, то $f^{(H)} \in L[a;b]$.

9. Нехай

$$f^{+}(x)=\begin{cases} f(x), & f(x)\ge 0,\\ 0, & f(x)<0, \end{cases} \quad f^{+}(x)=\begin{cases} 0, & f(x)\ge 0,\\ -f(x), & f(x)<0. \end{cases}$$

Довести, що $f \in L[a;b] \Leftrightarrow f^{+} \in L[a;b]$ і $f^{-} \in L[a;b]$. При цьому

$$\int_a^b f\,dx=\int_a^b f^{+}dx-\int_a^b f^{-}dx.$$

10. Довести, що коли $f(x)\ge 0$ на відрізку $[a;\, b]$ і $\int_a^b f\,dx=0$, то $f(x)=0$ майже скрізь на $[a;b]$. Чи правильне це твердження для функції, що має також від'ємні значення на $[a;b]$?

11. Довести, що коли $f_1,\ f_2 \in L[a;b]$, то $m(x)=\min\{f_1(x),\, f_2(x)\}\in L[a;b]$ і $M(x)=\max\{f_1(x),\, f_2(x)\}\in L[a;b]$.

12. Узагальнити попереднє твердження на довільну скінченну кількість функцій $f_k(x)$, $k\in\overline{1,\ n}$.

13. Для даної послідовності $(f_n(x))$, $x\in[0;\,1]$, перевірити, чи виконуються для неї умови властивості про граничний перехід під знаком L-інтеграла та чи правильна рівність $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$, якщо:

1) $f_n(x)=x^n$; 2) $f_n(x)=\operatorname{arctg} nx$;

3) $f_n(x)=n\left(\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\varphi(x)\right)$, де φ — диференційовна на $[0;2]$;

4) $f_n(x)=\begin{cases} n, & \text{якщо } 0\le x\le \frac{1}{n},\\ \frac{1}{x}, & \text{якщо } \frac{1}{n}<x\le 1; \end{cases}$ 5) $f_n(x)=\begin{cases} n, & \text{якщо } 0\le x\le \frac{1}{n},\\ 0, & \text{якщо } \frac{1}{n}<x\le 1; \end{cases}$

6) $f_n(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{якщо } \frac{1}{n+1}\le x\le \frac{1}{n},\\ 0, & \text{якщо } 0\le x<\frac{1}{n+1} \text{ або } \frac{1}{n}<x\le 1; \end{cases}$

7)• $f_n(x)=\begin{cases} \frac{1}{nx}\cos\frac{n}{x}, & \text{якщо } x\ne 0,\\ 0, & \text{якщо } x=0. \end{cases}$

14. Нехай функції $f_n \in L[a;b]$ $\forall n \in \mathbf{N}$ і $f_n(x) \to f(x)$ майже скрізь на відрізку $[a;b]$. Довести, що функція $f \in L[a;b]$, якщо виконується дана умова:

1) $|f(x)| \le |g(x)|$ $\forall x \in [a;\ b]$ і $g \in L[a;b]$;

2) $f_n(x) \ge 0$ $\forall x \in [a;\ b]$ і $\forall n \in \mathbf{N}$ і $\int\limits_a^b f_n(x)dx \le A$ $\forall n \in \mathbf{N}$.

15*. Довести, що функція f інтегровна за Ріманом на відрізку $[a;b]$ тоді й тільки тоді, коли вона майже скрізь неперервна на $[a;b]$.

16. Нехай функція f диференційовна на $[a;b]$ і f' обмежена на $[a;b]$. Довести, що $f' \in L[a;b]$ і $f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(t)dt$ $\forall x \in [a;\ b]$.

17. Нехай $(f_n(x))$ — фундаментальна послідовність у просторі $CR[a;b]$. Довести, що існують послідовність (n_i), $n_i \uparrow \infty$, $i \to \infty$, і функція $f = f(x)$, $x \in [a;b]$, такі, що:

1) $f_{n_k}(x) + \sum\limits_{m=k}^{\infty}\left(f_{n_{m+1}}(x) - f_{n_m}(x)\right) = f(x)$ майже скрізь на $[a;b]$ $\forall k \in \mathbf{N}$;

2) $f_{n_i}(x) \to f(x)$ майже скрізь на $[a;b]$.

18*. Показати, що функція $f \in L[a;b]$ тоді й тільки тоді, коли існують функції f_1, $f_2 \in L[a;b]$ і послідовності $\left(f_n^{(1)}(x)\right)$ та $\left(f_n^{(2)}(x)\right)$, фундаментальні у просторі $CR[a;b]$, такі, що $f_1(x) \ge 0$ і $f_2(x) \ge 0$ на відрізку $[a;b]$, $f_n^{(i)}(x) \to f(x)$ монотонно зростаючи, якщо $n \to \infty$ $(\forall i = 1,\ 2)$, майже скрізь на $[a;b]$ і $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ на $[a;b]$.

19. Довести, що функція $f \in L[a;b]$ тоді й тільки тоді, коли $\forall \varepsilon > 0$ $\exists h$, $g \in L[a;b]$ такі, що $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на відрізку $[a;b]$ і $\int\limits_a^b (h(x) - g(x))dx < \varepsilon$.

Зразки розв'язування задач

2.7) Припустимо, що функція f є L-інтегровною на [0; 1]. Тоді вона L-інтегровна на кожному відрізку $[\frac{1}{n};\ 1]$, $n \in \mathbf{N}$, причому за адитивною властивістю про монотонність L-інтеграла маємо

$$\int\limits_0^1 f\,dx = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} f\,dx + \int\limits_{\frac{1}{n}}^1 f\,dx \ge \int\limits_{\frac{1}{n}}^1 f\,dx.$$

Однак $f(x)=\frac{1}{x}$ — неперервна функція на $[\frac{1}{n};\ 1]$. Тому за властивістю про зв'язок інтеграла Рімана з L-інтегралом маємо

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f\,dx = (R)\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{dx}{x} = \ln x\Big|_{\frac{1}{n}}^{1} = \ln n \quad \forall n\in\mathbf{N}.$$

Отже, $\int_0^1 f\,dx > \ln n \to +\infty,\ n\to\infty$, що неможливо. Тому дане твердження є правильним.

3.8) Неважко помітити, що на відрізку $[0;\ \frac{1}{3}]$ функція f майже скрізь дорівнює функції $g(x)=x^2$, оскільки $f(x)\neq g(x)$, якщо $x\in\mathbf{Q}$, а $\mathbf{Q}$ — множина L-міри нуль. Оскільки g неперервна на відрізку $\left[0;\ \frac{1}{3}\right]$, то вона L-інтегровна на ньому і за властивостями L-інтеграла маємо

$$\int_0^{\frac{1}{3}} f\,dx = \int_0^{\frac{1}{3}} g\,dx = (R)\int_0^{\frac{1}{3}} x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{81}.$$

Аналогічно показуємо, що

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1} f\,dx = (R)\int_{\frac{1}{3}}^{1} x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{\frac{1}{3}}^{1} = \frac{1}{4}-\frac{1}{4\cdot 81}.$$

Тому, враховуючи адитивну властивість L-інтеграла, маємо

$$\int_0^1 f\,dx = \int_0^{\frac{1}{3}} f\,dx + \int_{\frac{1}{3}}^{1} f\,dx = \frac{1}{81}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4\cdot 81} = \frac{3}{4\cdot 81}+\frac{1}{4} = \frac{7}{27}.$$

13.7) Неважко помітити, що $f_n(x)\to 0,\ n\to\infty,\ \forall x\in\mathbf{R}$. Тому $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$. Якщо припустити, що при деякому $n\in\mathbf{N}$ функція f_n є L-інтегровною на відрізку $[0;\ 1]$, то, враховуючи вправу 4, можна показати, що $f_n\in L\ [0;1]\ \ \forall n\in\mathbf{N}$ (показати це). Припустимо, що функція

$$f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}\cos\frac{2}{x}, & \text{якщо } x\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x=0,\end{cases}$$

L-інтегровна на $[0;\ 1]$. Тоді згідно з попереднім функція

$$f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, & \text{якщо } x\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x=0,\end{cases}$$

також L-інтегровна на $[0;\ 1]$. Отже, $|f_1(x)|\in L[0;\ 1]$. Функція

$$\varphi(x)=\begin{cases}\left|\cos\frac{1}{x}\right|, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

інтегровна за Ріманом на відрізку $[0;\ 1]$ (чому?), а отже, L-інтегровна і обмежена на цьому відрізку. Тому за властивістю про L-інтегровність добутку функція

$$|f_1(x)|\varphi(x)=\begin{cases}\left|\dfrac{1}{x}\cos^2\dfrac{1}{x}\right|, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

є L-інтегровною на $[0;\ 1]$. Однак $\cos\frac{2}{x}=2\cos^2\frac{1}{x}-1$, звідки маємо $\frac{1}{x}=2\cdot\frac{1}{x}\cos^2\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{2}{x}$. Тому за властивістю лінійності дістаємо, що функція

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

є L-інтегровною на $[0;\ 1]$. Проте це не так (див. вправу 2.7)). Отже, кожна з функцій f_n не є L-інтегровною на відрізку $[0;\ 1]$.

§ 23.3. L-вимірні множини

Множину $E\subset[a;b]$ називають *L-вимірною*, якщо характеристична функція $f_E(x)$ цієї множини L-інтегровна на $[a;b]$. При цьому число $mE=(L)\int\limits_a^b f_E(x)\,dx$ називають *L-мірою* множини E.

Основні властивості L-міри

1. *Зв'язок міри Жордана з L-мірою*: якщо множина $E\subset[a;b]$ вимірна за Жорданом, то вона і L-вимірна, причому $\operatorname{mes}E=mE$.

2. *Монотонність L-міри*: якщо E_1 і E_2 — L-вимірні множини і $E_1\subset E_2$, то $mE_1\le mE_2$.

3. *L-вимірність множини та її доповнення*: якщо $E\subset[a;\ b]$, а $CE=[a;b]\setminus E$, то E і CE одночасно або L-вимірні, або ні. Якщо вони L-вимірні, то $mE+mCE=b-a$.

4. *L-вимірність об'єднання, перерізу та різниці*: якщо E_k, $k=1,\ 2$, — L-вимірні множини, то $E_1\bigcup E_2$, $E_1\bigcap E_2$ і $E_1\setminus E_2$ — також L-вимірні. При цьому $m(E_1\bigcup E_2)=mE_1+mE_2$, якщо $E_1\bigcap E_2=\varnothing$, а $m(E_1\setminus E_2)=mE_1-mE_2$, якщо $E_2\subset E_1$.

5. *Повна адитивність L-міри*: якщо $E_k\subset[a;\ b]$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, — L-вимірні множини, а $E=\bigcup\limits_k E_k$, тобто $E=\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k$ або $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$, то E також L-вимірна множина і $m\bigcup\limits_k E_k=\sum\limits_k mE_k$, коли E попарно не перетинаються.

6. *L-вимірність проміжку*: будь-який скінченний проміжок $\langle a;\ b\rangle$ L-вимірний і $m\langle a;\ b\rangle=b-a$.

7. *L-вимірність відкритої множини*: якщо $G \subset [a;\ b]$ — відкрита множина, $(a_k;\ b_k)$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$, — складові інтервали G, то G є L-вимірною множиною і $mG = \sum\limits_k (b_k - a_k)$.

8. *L-вимірність замкненої множини*: якщо $F \subset [a;\ b]$ — замкнена множина, а $a = \min F$, $b = \max F$ і $(a_k;\ b_k)$ — суміжні інтервали F, то F є L-вимірною множиною і $mF = b - a - \sum\limits_k (b_k - a_k)$.

9. *Неперервність L-міри*: нехай $E_k \subset [a;\ b]$ — L-вимірні множини $\forall k \in \mathbf{N}$. Тоді:

1) якщо $E_n \subset E_{n+1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$, то $m \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \lim\limits_{n\to\infty} mE_n$;

2) якщо $E_n \supset E_{n+1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$, то $m \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \lim\limits_{n\to\infty} mE_n$.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) кожна не більше ніж зчисленна множина $E \subset [a;\ b]$ L-вимірна і $mE = 0$;

2) кожна множина L-міри нуль є L-вимірною;

3) якщо E — це L-вимірна множина і $mE = 0$, то E — множина L-міри нуль;

4) кожна L-вимірна множина є вимірною за Жорданом;

5) множина $E = [a;\ b] \cap \mathbf{Q}$ є вимірною за Жорданом;

6) множина $E = [a;\ b] \cap \mathbf{Q}$ є L-вимірною;

7) якщо $mE = 0$, то $mE_1 = 0$ $\forall E_1 \subset E$;

8) L-міра множини E залежить від відрізка $[a;\ b] \supset E$;

9) існує E: $mE = 0$ і E має внутрішні точки;

10) міра Жордана має властивість повної адитивності;

11)• якщо $E \subset [a;\ b]$ і E — відкрита або замкнена множина, то E — вимірна за Жорданом.

2. Визначити, чи є L-вимірною дана множина E, і, якщо так, знайти mE:

1) $E = [a;\ b] \setminus \mathbf{Q}$;

2) $E = A \cap [a;\ b]$, де A — множина алгебраїчних чисел;

3) $E = [a;\ b] \setminus A$, де множина A з 2);

4) $E = P_0$ — досконала множина Кантора;

5) $E = G_0$ — відкрита множина Кантора;

6) $E \subset [0;\ 1]$ і кожну точку з E можна записати у вигляді нескінченного десяткового дробу без цифри 7;

7) $E \subset [0;\ 1]$ і кожну точку з E не можна записати у вигляді нескінченного десяткового дробу без цифри 7;

8) $E \subset [0;\ 1]$ і для кожної точки з E в її зображенні у вигляді нескінченного десяткового дробу фігурують усі цифри від 0 до 9.

3. Визначити, чи є множини з попередньої вправи вимірними за Жорданом.

4. Нехай $E \subset [a;\ b]$ є L-вимірною множиною, а $f(x) = m(E \cap [a;\ x])$ $\forall x \in [a;\ b]$. Довести, що функція f неперервна на відрізку $[a;\ b]$ і знайти множину значень цієї функції.

5. Довести, що коли E_1 і E_2 L-вимірні множини, то:

1) $m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2 - m(E_1 \cap E_2)$;

2) $m(E_1 \setminus E_2) = mE_1 - m(E_1 \cap E_2)$.

6. Нехай E — L-вимірна множина, а $E_d = \{y = x + d :\ x \in E\}$ $\forall d \in \mathbf{R}$. Довести, що $mE_d = mE$ $\forall d \in \mathbf{R}$.

7. Довести, що коли F — замкнена множина, $F \subset [a;\ b]$ і $F \neq [a;\ b]$, то $mF < b - a$.

8. Нехай E — L-вимірна множина, а $aE = \{ax :\ x \in E\}$. Довести, що $m(aE) = |a| mE$ $\forall a \in \mathbf{R}$.

9*. Довести, що коли $mE > 0$, то E — континуальна множина і в E існують точки x та y такі, що:

1) $|x - y| \notin \mathbf{Q}$; 2) $|x - y| \in \mathbf{Q}$.

10. Побудувати досконалу множину $E \subset [0;\ 1]$, яка не містить у собі будь-якого інтервалу (α; β) і має міру $mE = a$, де $a \in [0;\ 1)$ є довільним фіксованим числом.

11. 1)• Довести, що сукупність L-вимірних множин має потужність 2^c, де c — континуальна потужність.

2) Чи можна те саме стверджувати про сукупність множин, вимірних за Жорданом?

12. Нехай E_n — L-вимірні множини, $E_n \subset [0;\ 1]$ $\forall n \in \mathbf{N}$ і $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 :\ mE_{n_0} > 1 - \varepsilon$. Довести, що $m \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = 1$.

13. Для кожного $x \in \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$ позначимо $K(x) = \left\{y \in \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]:\ x - y \in \mathbf{Q}\right\}$.

Довести, що:

1) $K(x) = K(z) \Leftrightarrow z - x \in \mathbf{Q}$;

2) $K(x) \neq K(z) \Leftrightarrow K(x) \cap K(z) = \varnothing$.

14. Нехай $K(x)$ — множина з попередньої вправи, множина A містить тільки по одній точці з $K(x)$ $\forall x\in\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$ і не містить ніяких інших точок, а $A_{r_k} = \{y = x + r_k :\ x\in A\}$, де $\{r_0,\ r_1,\ \dots,\ r_k,\ \dots\} = \mathbf{Q}\cap[-1;\ 1]$, $r_0 = 0$. Довести, що:

1) $A_{r_k}\cap A_{r_i} = \varnothing,\ k\neq i$;   2) $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]\subset\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}A_{r_k}\subset\left[-\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right]$.

15. Довести, що множина A з попередньої вправи не є L-вимірною.

16*. Довести, що коли $mE > 0$, то існує $E_1\subset E$: E_1 не є L-вимірною множиною.

Зразки розв'язування задач

1. 11) Побудуємо відкриту множину Кантора способом, подібним до побудови відкритої множини Кантора G_0. Розглянемо ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}q^k = \frac{1}{1-q}$, де $0 < q\le\frac{1}{2}$. Позначимо $\Delta_1^{(1)}$ окіл середини відрізка $[0;\ 1]$ такий, що $m\Delta_1^{(1)} = q$. Якщо $\Delta_1^{(1)}$ викинути з відрізка $[0;\ 1]$, то утвориться два відрізки однакової довжини, яка менша за $\frac{1}{2}$, але більша за $\frac{q^2}{2}$. Нехай $\Delta_1^{(2)}$ та $\Delta_2^{(2)}$ — околи середин цих відрізків такі, що $m\Delta_i^{(2)} = \frac{q^2}{2}$, $i = 1, 2$. Якщо $\Delta_i^{(2)}$, $i = 1, 2$, також викинути з відрізка $[0;\ 1]$, то утвориться чотири відрізки однакової довжини, меншої за $\frac{1}{2^2}$, але більшої за $\frac{q^3}{2^2}$.

Припустимо, що визначено інтервали $\Delta_i^{(k)}$ для $k\in\overline{1,\ n}$, $i\in\overline{1,\ 2^{k-1}}$, причому $m\Delta_i^{(k)} = \frac{q^k}{2^{k-1}}$, $k\in\overline{1,\ n}$. Кількість цих інтервалів $m = 1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. Якщо їх викинути з відрізка $[0;\ 1]$, то утвориться 2^n відрізків однакової довжини, меншої за $\frac{1}{2^n}$, але більшої за $\frac{q^{n+1}}{2^n}$. Нехай $\Delta_i^{(n+1)}$, $i\in\overline{1,\ 2^n}$, околи середин цих відрізків такі, що $m\Delta_i^{(n)} = \frac{q^{n+1}}{2^n}$. За принципом математичної індукції можна вважати, що інтервали $\Delta_i^{(n)}$ побудовані $\forall n\in\mathbf{N}$ і $\forall i\in\overline{1,\ 2^{n-1}}$.

Позначимо $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{2^{n-1}}\Delta_i^{(n)}\right)$. Тоді $G\subset[0;\ 1]$, G — відкрита множина і $\Delta_i^{(n)}$ — складові інтервали G. Тому

$$mG = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{2^{n-1}}m\Delta_i^{(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}q^n = \frac{q}{1-q}\ \Rightarrow\ mF = 1 - \frac{q}{1-q} = \frac{1-2q}{1-q},\ \text{якщо}\ F = [0;\ 1]\setminus G.$$

Покажемо, що коли $0 < q < \frac{1}{2}$, то G — невимірна за Жорданом множина. Припустимо супротивне. Тоді за відомим критерієм межа G, тобто ∂G повинна мати міру Жордана $\operatorname{mes} \partial G = 0$.

Неважко помітити, що $\partial G = F$, оскільки множина F не містить у собі жодного інтервалу $(\alpha;\ \beta)$ (впевнитись у цьому). Тому дане припущення приводить до того, що $\operatorname{mes} F = 0 \Rightarrow mF = 0$, але $mF = \dfrac{1-2q}{1-q} > 0$.

Отже, G і F — невимірні за Жорданом множини. Тому дане твердження неправильне.

11. 1) Нехай A — сукупність усіх підмножин множини $\mathbf{R}$. Відомо, що потужність A дорівнює 2^c, тобто $\mu(A) = 2^c$. Позначимо через V сукупність усіх L-вимірних множин. Тоді $V \subset A$, тому $\mu(V) \le \mu(A)$, тобто $\mu(V) \le 2^c$. Позначимо через $V(P_0)$ сукупність усіх підмножин досконалої множини Кантора P_0. Неважко помітити, що $mP_0 = 0$, тому $mE = 0 \quad \forall E \subset V(P_0)$ (див. вправу 1.7). Отже, кожний елемент $V(P_0)$ є L-вимірною множиною, тобто $V(P_0) \subset V \Rightarrow \mu(V(P_0) \le \mu(V)$. Проте $\mu(V(P_0)) = 2^c$ (чому?). Отже, маємо

$$2^c \le \mu(V) \ge 2^c \;\Rightarrow\; \mu(V) = 2^c.$$

§ 23.4. L-інтеграл по L-вимірній множині

Функцію f, визначену на L-вимірній множині $E \subset [a;\ b]$, називають *L-інтегровною* на E і позначають $f \in LE$, якщо функція

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ 0, & x \notin E, \end{cases}$$

є L-інтегровною на $[a;\ b]$. При цьому інтеграл $\int\limits_a^b f_1(x)dx$ називають *L-інтегралом* функції f по множині E і позначають $\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E fdx$.

Усі основні властивості L-інтеграла по відрізку мають місце і для L-інтеграла по L-вимірній множині з очевидними змінами у формулюваннях. Крім того, мають місце й інші властивості.

1. *Повна адитивність L-інтеграла*: нехай E_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — L-вимірні множини, що попарно не перетинаються, і $E = \bigcup\limits_k E_k$. Тоді $f \in LE \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f \in LE_k \quad \forall k$ і $\sum\limits_k \int\limits_{E_k} |f|dx < +\infty$. При цьому $\int\limits_E fdx = \sum\limits_k \int\limits_{E_k} fdx$.

2. *Абсолютна неперервність L-інтеграла*: якщо $f \in LE$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\; m\mathrm{e} < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left|\int\limits_{\mathrm{e}} f\,dx\right| \le \int\limits_{\mathrm{e}} |f|dx < \varepsilon$$

для будь-якої L-вимірної множини $\mathrm{e} \subset E$.

3. *Нерівність Чебишова*: якщо $f \in LE$ та $f(x) \geq 0$ на E, то множина $E(f \geq c) := \{x \in E : f(x) \geq c\}$ є L-вимірною і

$$mE(f \geq c) \leq \frac{1}{c} \int_E f\, dx .$$

Функцію f називають L^p-*інтегровною* на L-вимірній множині E і позначають $f \in L^p E$, якщо $f \in LE$ і $f^p \in LE$, де $p > 0$ — фіксоване число. Зокрема, якщо $p = 2$, то f називають *L-інтегровною з квадратом* на E.

Основні властивості L^p-інтегровних функцій

1. *Нерівність Гельдера*: нехай $f \in L^p E$, $\varphi \in L^q E$, де $p \geq 1$, $q \geq 1$ і $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тоді $f\varphi \in LE$ і

$$\int_E |f\varphi|\, dx \leq \left(\int_E |f|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |\varphi|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}} .$$

Зокрема, при $p = q = 2$

$$\int_E |f\varphi|\, dx \leq \left(\int_E f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_E \varphi^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

для будь-яких f, $\varphi \in L^2 E$.

2. *Лінійність простору* $L^p E$: якщо f, $\varphi \in L^p E$, де $p > 0$, то $\alpha f + \beta\varphi \in L^p E$ $\forall \alpha$, $\beta \in \mathbf{R}$.

3. *Нерівність Мінковського*: якщо f, $\varphi \in L^p E$, де $p \geq 1$, то

$$\left(\int_E |f + \varphi|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |\varphi|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} .$$

4. *Повнота простору* $L^p E$: простір $L^p E$ з метрикою $\rho(f, \varphi) = \left(\int_E |f(x) - \varphi(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$ є повним лінійним простором, якщо ототожнювати функції, що рівні майже скрізь на E.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) якщо функція $f \in L^2 E$, то $f \in LE$;

2) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

3) якщо $f^2 \in LE$, то $f \in LE$;

4) якщо $f = 0$ майже скрізь на L-вимірній множині E, то $f \in LE$ і $\int\limits_E f\,dx = 0$;

5) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

6) якщо $f \in LE$, $f(x) \geq 0$ на множині E і $\int\limits_E f\,dx = 0$, то $f(x) = 0$ майже скрізь на E;

7) функція $f \in LE$ тоді й тільки тоді, коли $|f| \in LE$;

8) якщо функції f, $g \in LE$, то $f\,g \in LE$;

9)• якщо функція $f \in LE$ і

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq n, \\ n, & f(x) > n, \end{cases}$$

то $f_n \in LE \quad \forall n \in \mathbf{N}$ і

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_E f_n(x)\,dx = \int\limits_E f(x)\,dx;$$

10) $\int\limits_E f^2(x)\,dx = 0 \iff f(x) = 0$ майже скрізь на множині E;

11) $\int\limits_E f^3(x)\,dx = 0 \iff f(x) = 0$ майже скрізь на множині E;

12) якщо функція $f \in LE$ і f обмежена на E, то $f \in L^2 E$.

2. Перевірити, чи є дана функція f L-інтегровною на даній множині E, і, якщо так, обчислити $\int\limits_E f\,dx$:

1) $f(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{якщо } x \text{ — алгебраїчне}, \\ \beta, & \text{якщо } x \text{ — трансцендентне}, \end{cases} \quad E = [a;\ b] \setminus \mathbf{Q};$

2)• $f(x) = \begin{cases} 2^n, & \text{якщо } 2^{-2(n+1)} < x < 2^{-2n}, \\ 0 & \text{в інших точках } x, \end{cases} \quad n \in \mathbf{N}_0,\ E = [0;\ 1];$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \in \mathbf{Q} \cap [0;\ 1], \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \in [1;\ 3] \setminus \mathbf{Q}, \\ 0 & \text{в інших точках } x, \end{cases} \quad E = [0;\ 1) \cup (1;\ 3];$

4) $f(x)=\begin{cases} n, \text{ якщо } \dfrac{1}{n+1}<x<\dfrac{1}{n}, \ n\in\mathbf{N}, \\ 0 \text{ в інших точках } x, \end{cases}$ $E=[0;\ 1]\setminus\mathbf{Q}$;

5) функція f з 4), а $E=\mathbf{Q}\bigcap[0;\ 1]$; 6) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; $E=[0;\ 1]\setminus\mathbf{Q}$;

7) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, E — множина алгебраїчних чисел з інтервалу $(0;\ 1)$;

8) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$; $E=(0;\ 1)\bigcup(1;\ 2)$;

9) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n+1)x}{2n+3}$, $x\in[0;\ \pi]\setminus\mathbf{Q}$;

10) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n}$, $x\in(-1;\ 1)\setminus\mathbf{Q}$;

11) $f(x)=n$, якщо $x\in\Delta_i^{(n)}$, $i=1,\ 2^{n-1}$, $n\in\mathbf{N}$, де $\Delta_i^{(n)}$ — складові інтервали множини G, побудованої при розв'язуванні вправи 1.11) § 21.3, $E=G$;

12) $f(x)=n$, якщо $x\in\Delta_i^{(n)}$, $i\in\overline{1,\ 2^{n-1}}$, $n\in\mathbf{N}$, де $\Delta_i^{(n)}$ — такі самі, як у вправі 11), і $f(x)=1$, якщо $x\notin G$, $E=[0;\ 1]$.

3. Нехай функція f невід'ємна на множині E і така, що $\{x\in E:\ k\le \le f(x)<k+1\}=E_k$ — L-вимірна множина $\forall k\in\mathbf{N}$. Довести, що коли f — L-інтегровна на E_k, то вона L-інтегровна на E.

4. Нехай функція f обмежена і L-інтегровна на відрізку $[a;\ b]$. Довести, що $f(x)=0$ майже скрізь на $[a;\ b]$ $\Leftrightarrow$ $\int\limits_a^c f(x)dx=0$ $\forall c\in[a;\ b]$.

5. Нормою функції f у просторі L^pE називають число $\|f\|= =\left(\int\limits_E |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$. Довести, що:

1) $\|f\|\ge 0$ $\forall f\in L^pE$, причому $\|f\|=0$ $\Leftrightarrow$ $f(x)=0$ майже скрізь на E;

2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|f\|$ $\forall\alpha\in\mathbf{R}$ і $\forall f\in L^pE$; 3) $\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|$ $\forall f,\ g\in L^pE$;

4) якщо $\|f_n-f\|\to 0,\ n\to\infty$, то $\|f_n\|\to\|f\|,\ n\to\infty$;

5) якщо $\|f_n-f\|\to 0,\ n\to\infty$, а $p=2$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_E g(x)f_n(x)dx=\int\limits_E g(x)f(x)dx \quad \forall g\in L^2E;$$

6) $\|f_n-f\|\to 0,\ n\to\infty$ $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0(\varepsilon)$: $m\ge n\ge n_0(\varepsilon)$ $\Rightarrow$ $\|f_m-f_n\|<\varepsilon$.

Зразки розв'язування задач

1. 9) Вважатимемо, що функція f визначена на відрізку $[a;\ b]\supset E$. Тоді якщо

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x), & x\in E,\\ 0, & x\notin E,\end{cases}$$

то $\varphi(x)=f_E(x)f(x)$, де $f_E(x)$ — характеристична функція множини E. За умовою функція $\varphi=f_E f$ L-інтегровна на $[a;\ b]$. За відомою властивістю L-інтеграла (див. вправи 7 і 8 § 23.2) функція $\varphi_n(x)=(f_E f)_n(x)$ L-інтегровна на $[a;\ b]$. Проте неважко помітити, що $(f_E f)_n(x)=f_E(x)f_n(x)$ (впевнитись у цьому). Тому функція $f_E f_n$ L-інтегровна на $[a;\ b]$ і, отже, за означенням $f_n\in LE$. Далі майже очевидно, що $f_n(x)\to f(x)$, $n\to\infty$, $\forall x\in E$ і

$$f_n(x)\le f_{n+1}(x)\le f(x)\quad \forall n\in\mathbf{N},\ \forall x\in E\ \Rightarrow\ \int\limits_E f_n(x)dx\le\int\limits_E f(x)dx<\infty,$$

тому виконано всі умови теореми Беппо — Леві про граничний перехід під знаком L-інтеграла. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)dx=\int\limits_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=\int\limits_E f(x)dx\,.$$

Дане твердження правильне.

2. 2) Неважко помітити, що $E=[0;\ 1]=\{0\}\cup\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\left[2^{-2(n+1)};\ 2^{-2n}\right)\right)$, причому об'єднувані множини попарно не перетинаються, L-вимірні, а функція f невід'ємна та L-інтегровна на них. Зрозуміло, що

$$\int\limits_{\{0\}} f\,dx=0\,,\qquad \int\limits_{\left[2^{-2(n+1)};\,2^{-2n}\right]} f\,dx=\int\limits_{2^{-2(n+1)}}^{2^{-2n}} 2^n dx=2^n\left(\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{2^{2(n+1)}}\right)=\frac{3}{2^{n+2}}\quad \forall n\in\mathbf{N}_0\,.$$

Звідси, враховуючи властивість про повну адитивність L-інтеграла, дістаємо

$$\int\limits_E f\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2^{n+2}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\,.$$

§ 23.5. Класичне означення міри та інтеграла Лебега

Зовнішньою мірою Лебега множини E називають число

$$m^*E=\inf_{\bigcup\limits_k(\alpha_k;\beta_k)\supset E}\sum_k(\beta_k-\alpha_k),$$

де $\bigcup\limits_k(\alpha_k;\beta_k)=\bigcup\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k;\beta_k)$ або $\bigcup\limits_k(\alpha_k;\beta_k)=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha_k;\beta_k)$.

Для будь-якої множини $E\subset[a;\ b]$ має місце нерівність $m^*E+m^*CE\ge$ $\ge b-a$, де $CE=[a;\ b]\setminus E$.

Множину $E\subset[a;\ b]$ називають *вимірною за Лебегом*, якщо $m^*E+m^*CE=$ $=b-a$. При цьому число $mE=m^*E$ називають *мірою Лебега* множини E.

Зв'язок між L-мірою та мірою Лебега. Множина $E\subset[a;\ b]$ вимірна за Лебегом тоді й тільки тоді, коли вона L-вимірна. При цьому $mE=m^*E=$ $=\int\limits_a^b f_E(x)dx$, де f_E — характеристична функція множини E.

Функцію f називають *вимірною за Лебегом* на множині $E\subset[a;\ b]$, якщо $\forall a\in\mathbf{R}$ множина $E(f>a)=\{x\in E:\ f(x)>a\}$ є вимірною за Лебегом.

Функцію f називають *L-вимірною на відрізку* $[a;\ b]$, якщо існує послідовність функцій $f_n(x)$, $n\in\mathbf{N}$, неперервних на $[a;\ b]$ і таких, що $f_n(x)\to f(x)$ майже скрізь на $[a;\ b]$.

Зв'язок між L-вимірністю функції та її вимірністю за Лебегом. Для того щоб функція f була вимірною за Лебегом на вимірній множині $E\subset[a;\ b]$, необхідно й достатньо, щоб функція

$$\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & x\in E,\\ 0, & x\notin E,\end{cases}$$

була L-вимірною на відрізку $[a;\ b]$.

Невід'ємну та вимірну за Лебегом на множині E функцію f називають *сумовною*, якщо існує послідовність $0\le l_n\uparrow\infty$, $n\to\infty$, для якої $0<l_{k+1}-l_k\le\delta$ $\forall k=0,\ 1,\ 2,\ \dots$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} l_k mE_k$, де $E_k=\{x\in E:\ l_{k-1}\le f(x)<l_k\}$ є збіжним.

При цьому існують $\sup\limits_{(l_k)}\sum\limits_{k=1}^{\infty} l_{k-1}mE_k=I_*$ та $\inf\limits_{(l_k)}\sum\limits_{k=1}^{\infty} l_k mE_k=I^*$ і $I_*=I^*=I$. Число I називають *інтегралом Лебега* сумовної невід'ємної функції f на множині E і позначають $\int\limits_E f\,dx$.

Довільну вимірну на множині E функцію f називають сумовною, якщо функції

$$f^+(x)=\begin{cases}f(x), & f(x)\ge 0,\\ 0, & f(x)<0,\end{cases}\quad \text{та}\quad f^-(x)=\begin{cases}0, & f(x)\ge 0,\\ -f(x), & f(x)<0,\end{cases}$$

є сумовними на E. При цьому інтеграл Лебега функції f на множині E визначається рівністю

$$\int\limits_E f dx=\int\limits_E f^+dx-\int\limits_E f^-dx.$$

Зв'язок між L-інтегралом та інтегралом Лебега. Для того щоб функція f була вимірною і сумовною на множині $E \subset [a;\ b]$, необхідно й достатньо, щоб вона була L-інтегровною на E. При цьому L-інтеграл та інтеграл Лебега функції f на множині E збігаються.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) кожна множина E має скінченну зовнішню міру;

2) якщо множина $E \subset [a;\ b]$ вимірна за Лебегом, то $m^*E = b - a - m^*CE$;

3) кожна множина L-міри нуль є вимірною за Лебегом;

4) $E(f \le a) = E \setminus E(f > a)$, а $E(f \ge a) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E\left(f \ge a - \frac{1}{k}\right)$;

5) якщо функція f обмежена і L-вимірна на відрізку $[a;\ b]$, то вона L-інтегровна на $[a;\ b]$;

6) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

7) сума, різниця, добуток і частка двох сумовних функцій на множині E є сумовною функцією на E;

8) якщо $E \subset [a;\ b]$, то $m^*E = b - a - m^*CE$, де $CE = [a;\ b] \setminus E$;

9) якщо функція f вимірна за Лебегом на множині $E \subset [a;\ b]$, то E — вимірна за Лебегом множина;

10)• $E(f > g) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left(E(f > r_k) \cap E(g < r_k)\right)$, де $\{r_k :\ k \in \mathbf{N}\} = \mathbf{Q}$;

11) якщо f неперервна на компактній множині $E \subset \mathbf{R}^1$, то вона вимірна на E;

12) кожна обмежена вимірна функція на E є інтегровною за Лебегом на E;

13) існує обмежена невимірна за Лебегом множина;

14) існує обмежена на відрізку $[a;\ b]$ функція f, яка не є сумовною на цьому відрізку.

2. Довести такі твердження:

1) $m^*[a;\ b] = b - a$;

2) $m^*\mathbf{Q} = 0$;

3) $m^* \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k \le \sum\limits_{k=1}^{n} m^*E_k$;

4) $m^* \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} m^*E_k$;

5) $m^*E + m^*CE \ge b - a$, де $E \subset [a;\ b]$ і $CE = [a;\ b] \setminus E$;

6)• якщо $E \subset [a;\ b]$ і $b - a - m^*CE > 0$, то існує досконала множина $F \subset E :\ mF > 0$;

7) якщо $E \subset [a;\ b]$ і $b - a - m^*CE > 0$, то E — континуальна множина, зокрема, кожна вимірна множина E, для якої $mE > 0$, є континуальною;

8) якщо F — замкнена обмежена множина, то $mF = m^*F =$ $= \inf\{mG: G \supset F$ і G — відкрита множина$\}$;

9) якщо G — відкрита обмежена множина, то $mG = \sup\{mE: F \subset G$ і F — замкнена множина$\}$;

10) $m^*E = 0$ для кожної не більше ніж зчисленної множини E.

3. Для даної функції f і даної множини E знайти множини $E(f > a)$, $E(f \geq a)$, $E(f < a)$, $E(f \leq a)$ і $E(f = a)$:

1) $f(x) = x^{\alpha}$, $E = D(f)$;

2) $f(x) = c^x$, $E = \mathbf{R}$;

3) $f(x) = \sin x$, $E = \mathbf{R}$;

4)• $f(x) = \cos x$, $E = [-\pi; \pi]$;

5) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $E = D(f)$;

6) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $E = (0; \pi)$;

7) $f(x) = \log_b x$, $E = (0; +\infty)$;

8) $f(x) = \arcsin x$, $E = D(f)$;

9) $f(x) = \arccos x$, $E = D(f)$;

10) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $E = \mathbf{R}$;

11) $f(x)=\begin{cases}1, & x \notin \mathbf{Q},\\ -1, & x \in \mathbf{Q},\end{cases}$ $E = [a; b]$;

12) $f(x)=\begin{cases}1, & x \in \mathbf{Q},\\ 0, & x \notin \mathbf{Q},\end{cases}$ $E = [a; b]$;

13) $f(x) = \text{const}$, E — довільна множина.

4. Довести дані твердження:

1)• якщо якась із множин $E(f > a)$, $F(f \geq a)$, $E(f < a)$ і $E(f \leq a)$ є вимірною (за Лебегом) при довільному $a \in \mathbf{R}$, то й усі інші з даних множин вимірні $\forall a \in \mathbf{R}$;

2) якщо f стала на вимірній множині E, то f вимірна на E;

3) якщо f вимірна на кожній із множин $E_k \subset [a; b]$, $k = 1, 2, \ldots$, то вона вимірна і на множині $E = \bigcup\limits_k E_k$;

4) якщо f і φ вимірні на множині E, то вимірними на цій множині є також функції: а) $f + \varphi$; б) $f\varphi$; в) $\dfrac{f}{\varphi}$; г) $|f|$; д) f^{α} $\forall \alpha \in \mathbf{N}$;

5) кожна функція є вимірною на множині E, міра якої $mE = 0$;

6) функція f є вимірною на множині E тоді й тільки тоді, коли E — вимірна множина і f — вимірна функція на будь-якій вимірній підмножині $E_1 \subset E$;

7) функції f і φ, які рівні майже скрізь на множині E, є одночасно вимірними або ні на цій множині;

8) якщо функції f_n вимірні на множині E і $f_n(x) \to f(x)$ майже скрізь\ на E, то функція f вимірна на E;

9) якщо функція f диференційовна на відрізку $[a; b]$, то f' вимірна на $[a; b]$;

10) кожна функція обмеженої варіації на відрізку $[a; b]$ є вимірною на цьому відрізку;

11) кожна функція, інтегровна за Ріманом на $[a;\ b]$, вимірна на $[a;\ b]$;

12) кожна L-інтегровна на $[a;\ b]$ функція є вимірною на $[a;\ b]$;

13) існують невимірні функції;

14) якщо функції f_n вимірні на множині E і $f_n(x) \to f(x)$ майже скрізь на E, то (f_n) збіжна до f за мірою на E, тобто

$$\lim_{n\to\infty} m\{x\in E : |f_n(x) - f(x)| > \delta\} = 0 \quad \forall\delta > 0;$$

15) існує послідовність (f_n) збіжна до f на множині E за мірою і не збіжна до f у кожній точці E;

16) якщо функції f_n і f вимірні на множині E і

$$\lim_{n\to\infty} m\{x\in E : |f_n(x) - f(x)| > \delta\} = 0$$

$$\forall\delta > 0, \text{ то } \exists n_i \uparrow \infty : f_{n_i}(x) \to f(x) \text{ майже скрізь на } E;$$

17) якщо послідовність (f_n) збіжна до функції f за мірою, то $\forall\varepsilon > 0$ $\exists E_\varepsilon \subset E : mE - mE_\varepsilon < \varepsilon$ і $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множині E (*теорема Єгорова*).

5. Використовуючи означення, визначити, чи є сумовною дана функція f на даній множині E, і, якщо так, знайти відповідний інтеграл Лебега:

1) $f(x) = x^\alpha$, $E = (0;\ 1)$;

2)• $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x\in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x\notin \mathbf{Q}, \end{cases}$ $E = [a;\ b]$;

3) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x\notin \mathbf{Q}, \\ -1, & \text{якщо } x\in \mathbf{Q}, \end{cases}$ $E = [-1,\ 1]$;

4) $f(x) = \sin x$, $E = [-\pi,\ \pi]$; 5) $f(x) = \ln x$, $E = (0;\ \mathrm{e})$;

6) $f(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{якщо } x \text{ −алгебраїчне}, \\ \beta, & \text{якщо } x \text{ −трансцендентне}, \end{cases}$ $E = [a;\ b]\setminus \mathbf{Q}$;

7) $f(x) = \begin{cases} n, & \text{якщо } \dfrac{1}{n+1} < x < \dfrac{1}{n},\ n\in \mathbf{N}, \\ -1 & \text{в інших точках } x, \end{cases}$ $E = [0,\ 1]$;

8) $f(x) = \begin{cases} 2^n, & \text{якщо } 2^{-2(n+1)} < x < 2^{-2n}, \\ 0 & \text{в інших точках } x, \end{cases}$ $E = [0,\ 1]$;

9) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$, $E = (0;\ 1)\cup(1;\ 2)$; 10) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $E = [0;\ 1]\setminus \mathbf{Q}$.

6. Довести дані твердження:

1) якщо $f_n(x) \ge 0$ і $\int\limits_E f_n(x)dx \to 0$, $n\to\infty$, то послідовність (f_n) збіжна до нуля за мірою на множині E;

2) якщо функція f неперервна на відрізку $[a;\ b+\delta]$, $\delta>0$, то

$$\lim_{h\to 0+}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx=0;$$

3) якщо функція f сумовна на відрізку $[a;\ b]$, то $\forall\varepsilon>0$ існує неперервна на $[a;\ b]$ функція φ така, що

$$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx<\varepsilon;$$

4) якщо функція f сумовна на відрізку $[a;\ b+\delta]$, $\delta>0$, то

$$\lim_{h\to 0+}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx=0;$$

5) якщо функція $f\varphi$ сумовна на множині E для будь-якої f, сумовної на E, то $\forall n\in\mathbf{N}\ \ m\{x\in E:\ |\varphi(x)|\ge n\}=0$.

Зразки розв'язування задач

1. 10) Зрозуміло, що

$$x_0\in E(f>g)=\{x\in E:\ f(x)>g(x)\}\ \Leftrightarrow\ x_0\in E \text{ і } f(x_0)>g(x_0)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \exists r_{k_0}\in\mathbf{Q}:\ f(x_0)>r_{k_0}>g(x_0) \text{ і } x_0\in E\ \Leftrightarrow\ x_0\in\left\{x\in E:\ f(x)>r_{k_0}\right\} \text{ і}$$

$$x_0\in\left\{x\in E:\ g(x)<r_{k_0}\right\}\ \Leftrightarrow\ \exists k_0\in\mathbf{N}:\ x_0\in E\left(f>r_{k_0}\right)\cap E\left(g<r_{k_0}\right)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x_0\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(E(f>r_k)\cap E(g<r_k)\right).$$

Звідси за означенням рівних множин дістаємо задану рівність. Отже, дане твердження правильне.

2. 6) Оскільки

$$m^*CE=\inf_{\bigcup_k(\alpha_k;\,\beta_k)\supset CE}\sum_k(\beta_k-\alpha_k)=\inf_{G\supset E} mG,$$

де $G\bigcup_k(\alpha_k;\beta_k)$ — відкрита множина, то $\forall\varepsilon>0\ \ \exists G\supset CE:\ G$ — відкрита і $mG<m^*CE+\varepsilon$. Позначимо $F=[a;\ b]\setminus G$. Тоді неважко показати, що F — замкнена множина і $F\subset E$ (показати це). Крім того,

$$F\cup G\supset[a;\ b]\ \Rightarrow\ mF+mG\ge b-a\ \Rightarrow\ mF\ge b-a-m^*CE-\varepsilon.$$

Враховуючи, що $b-a-m^*CE>0$, візьмемо $\varepsilon>0$ таким, щоб $b-a-m^*CE-\varepsilon>0$. Отже, існує замкнена множина $F\subset E:\ mF>0$. Разом з тим відомо, що кожна замкнена множина F є об'єднанням досконалої множини P і не більше ніж зчисленної множини M, тобто

$$F=P\cup M\ \Rightarrow\ mF=mP+mM=mP>0,$$

оскільки $mM=0$.

3. 4) Нехай $a \in \mathbf{R}$ — довільне фіксоване число. Тоді можливі випадки:

а) $a < -1 \Rightarrow E(f > a) = \{x \in [-\pi;\ \pi]:\ \cos x > a\} = [-\pi;\ \pi]$, оскільки $\cos x \ge -1\ \ \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow$ $\Rightarrow E(f \ge a) = [-\pi;\ \pi],\ E(f < a) = \varnothing,\ E(f \le a) = \varnothing$ і $E(f = a) = \varnothing$;

б) $-1 \le a < 1 \Rightarrow E(f > a) = \{x \in [-\pi;\ \pi]:\ \cos x > a\} = (-\arccos a;\ \arccos a) \Rightarrow E(f \ge a) =$ $= [-\arccos a;\ \arccos a],\ E(f < a) = [-\pi;\ -\arccos a) \cup (\arccos a;\ \pi],\ E(f \le a) = [-\pi;$ $-\arccos a] \cup [\arccos a; \pi]$ і $E(f = a) = \{\pm \arccos a\}$;

в) $a \ge 1 \Rightarrow E(f > a) = \{x \in [-\pi;\ \pi]:\ \cos x > a\} = \varnothing$, оскільки

$$\cos x \le 1\quad \forall x \in \mathbf{R} \ \Rightarrow\ E(f \ge \mathrm{a}) = E(f = a) = \begin{cases} \{0\}, & \text{якщо } a = 1, \\ \varnothing, & \text{якщо } a > 1, \end{cases}$$

$$E(f \le a) = [-\pi;\ \pi] \ \text{ і } \ E(f < a) = \begin{cases} [-\pi;\ \pi], & \text{якщо } a > 1, \\ [-\pi;\ 0) \cup (0;\ \pi], & \text{якщо } a = 1. \end{cases}$$

4. 1) Оскільки

$$E(f \ge a) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E\left(f > a - \frac{1}{k}\right),\ E(f < a) = E \setminus E(f \ge a),\ E(f \le a) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E\left(f < a + \frac{1}{k}\right),$$

$$\text{а } E(f > a) = E \setminus E(f \le a)$$

(довести ці рівності), то, припустивши, що якась з даних множин вимірна $\forall a \in \mathbf{R}$, дістанемо (враховуючи властивості вимірних множин), що й усі інші множини вимірні $\forall a \in \mathbf{R}$. Наприклад, якщо множина $E(f > a)$ вимірна $\forall a \in \mathbf{R}$, то множина $E(f \ge a) =$ $= \bigcap_{k=1}^{\infty} E\left(f > a - \frac{1}{k}\right)$ вимірна як переріз вимірних множин, тому множина $E(f < a) =$ $= E \setminus E(f \ge a)$ вимірна як різниця вимірних множин, а отже, і множина $E(f \le a) =$ $= \bigcap_{k=1}^{\infty} E\left(f < a + \frac{1}{k}\right)$ вимірна як переріз вимірних множин.

5. 2) Візьмемо довільну послідовність $(l_k):\ l_0 = 0,\ l_n < l_{n+1} \to \infty,\ n \to \infty$, і розглянемо множини $E_k = \{x \in [a;\ b]:\ l_{k-1} \le f(x) < l_k\}$. Вважаючи $0 < l_k - l_{k-1} < 1\quad \forall k \in \mathbf{N}$, дістанемо

$$E_1 = \left\{x \in [a;\ b]:\ l_0 = 0 \le f(x) < l_1 < 1\right\} = \{x \in [a;\ b]:\ f(x) = 0\} = [a;\ b] \setminus \mathbf{Q}$$

і $mE_1 = b - a$. Для інших $k > 1$ можливі такі випадки: або $1 \in [l_{k-1};\ l_k)$, або $1 \notin [l_{k-1};\ l_k]$, причому

$$\exists! k_0 :\ 1 \in \left[l_{k_0 - 1};\ l_{k_0}\right] \Rightarrow E_{k_0} = \left\{x \in [a;\ b]:\ l_{k_0 - 1} \le f(x) < l_{k_0}\right\} =$$

$$= \{x \in [a;\ b]:\ f(x) = 1\} = [a;\ b] \cap \mathbf{Q} \Rightarrow mE_{k_0} = 0,$$

а якщо $k > 0$ і $k \ne k_0$, то $E_k = \varnothing$ і $mE_k = 0$. Отже,

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_k m E_k = l_1 (b - a) \Rightarrow \inf_{(l_k)} \sum_{k=1}^{\infty} l_k m E_k = \inf_{(l_k)} l_1 (b - a) = 0,$$

оскільки l_1 може бути як завгодно близьким до нуля. Таким чином, функція f сумовна на $[a;\ b]$ і $\int_a^b f\,dx = 0$.

Розділ 24 ПОХІДНА ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

§ 24.1. Диференційовні функції. Аналітичність за Коші і за Ріманом. Гармонічні функції. Диференціювання степеневих рядів

Нехай $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in \langle\alpha; \beta\rangle$, — комплекснозначна функція дійсної змінної. *Похідною* цієї функції в точці $t_0 \in \langle\alpha; \beta\rangle$ називають границю (скінченну або нескінченну)

$$\lim_{t\to t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta z(t_0)}{\Delta t} =: z'(t_0) =: \frac{dz(t_0)}{dt}. \tag{1}$$

При цьому для $t_0 = \alpha$ маємо $\Delta t \to 0+ \Leftrightarrow t \to t_0+$, а для $t_0 = \beta$ $\Delta t \to 0- \Leftrightarrow \Leftrightarrow t \to t_0-$. Якщо $z'(t_0) \neq \infty$, то функцію $z = z(t)$ називають *диференційовною в точці* t_0. Функція $z = z(t)$ диференційовна в точці t_0 тоді й тільки тоді, коли функції $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$ і $y(t) = \operatorname{Im} z(t)$ диференційовні в цій точці. При цьому

$$z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0). \tag{2}$$

Похідною функції f комплексної змінної z в точці z_0 називають границю (скінченну або нескінченну)

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0) =: \frac{df(z_0)}{dz}. \tag{3}$$

Функцію f називають *диференційовною в точці* z_0, якщо вона має в цій точці скінченну похідну.

Найпростіші властивості диференційовних функцій комплексної змінної (а також комплекснозначних функцій дійсної змінної) аналогічні відповідним властивостям функцій дійсної змінної. Зокрема, про неперервність диференційовної функції, про похідну сталої, суми, добутку, різниці й частки, про похідну складної функції.

Критерій диференційовності. Нехай $z = x + iy$, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$, $z_0 = x_0 + iy_0$. Для того щоб функція f була диференційовною в точці z_0, необхідно й достатньо, щоб функції u і v були диференційовними в точці $(x_0,\ y_0)$ і

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x_0,\ y_0)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x_0,\ y_0)}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u(x_0,\ y_0)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x_0,\ y_0)}{\partial x}. \end{cases} \tag{4}$$

При цьому

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0,\ y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0,\ y_0)}{\partial x}. \tag{5}$$

Умови (4) називають умовами Коші — Рімана або Д'Аламбера — Ейлера.

Функцію f називають *аналітичною* в області D *за Коші*, якщо вона має в цій області неперервну похідну f'.

Функцію f називають *аналітичною* в області D *за Ріманом*, якщо дійсна й уявна частини цієї функції мають в області D неперервні частинні похідні, що задовольняють в D умови (4).

Означення аналітичності функції за Коші і за Ріманом є еквівалентними.

Дійсна й уявна частини функції $f(z) = u(x,\ y) + iv(x,\ y)$, аналітичної в області D, є спряженими гармонічними функціями, тобто такими, що є гармонічними і задовольняють умови Коші — Рімана.

Похідні вищих порядків функції комплексної змінної означаються і позначаються так само, як і для функції дійсної змінної.

Теорема (про диференційовність суми степеневого ряду). *Нехай* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $R > 0$ *— радіус збіжності, а* $K = \{z : |z - z_0| < R\}$ *— круг збіжності даного степеневого ряду. Тоді:*

1) *функція* f *має в крузі* K *похідну* $f^{(n)}$ *будь-якого порядку, причому*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ \dots\ (n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k} \quad \forall z \in K, \tag{6}$$

і останній степеневий ряд має той самий круг збіжності, що й даний ряд. Зокрема,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z - z_0)^{n-1} \quad \forall z \in K; \tag{7}$$

2) *будь-яка похідна функції* f *є аналітичною функцією у крузі* K;

3) *якщо* f *розвивається у крузі* K *в степеневий ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, *то це розвинення єдине і є рядом Тейлора функції* f, *тобто*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n\,!} \quad \forall n = 0,\ 1,\ 2\dots,\ f^{(0)}(z) := f(z).$$

Функцію f називають *регулярною* в точці z_0, якщо в деякому околі цієї точки її можна розвинути в степеневий ряд, тобто

$$\exists O(z_0):\ f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall z\in O(z_0).$$

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження (виконати усно):

1) якщо функція $z=z(t)$, $t\in\langle\alpha,\ \beta\rangle$, має в точці $t_0\in\langle\alpha,\ \beta\rangle$ похідну, то функції $x(t)=\operatorname{Re} z(t)$ і $y(t)=\operatorname{Im} z(t)$ також мають у цій точці похідні;

2) функція $z(t)=|t|+i\sqrt[3]{t}$ має похідну в точці $t=0$;

3) якщо функція f має похідну в точці z_0, то вона неперервна у цій точці;

4) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

5) кожна раціональна функція диференційовна у комплексній площині;

6) якщо функція f диференційовна в точці $z_0=x_0+iy_0$, то $u=\operatorname{Re} f$ і $v=\operatorname{Im} f$ також диференційовні в точці $(x_0;\ y_0)$;

7) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

8) якщо функція f аналітична в області D, то вона неперервна у цій області;

9) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

10) якщо функції $u=\operatorname{Re} f$ і $v=\operatorname{Im} f$ мають в області D неперервні частинні похідні, то функція f аналітична в D;

11) якщо функція f регулярна в точці z_0, то вона аналітична у деякому околі цієї точки.

2. Довести або спростувати дані твердження:

1) теорема Ролля має місце для комплекснозначних функцій дійсної змінної, зокрема для $z(t)=\exp it$, $t\in[0;\ 2\pi]$;

2)• функція $f(z)=\overline{z}$ має похідну в деякій точці z_0;

3) якщо функції $u=\operatorname{Re} f$ і $v=\operatorname{Im} f$ мають у точці $(x_0;\ y_0)$ частинні похідні, що задовольняють умови Коші — Рімана, то функція f диференційовна в точці $z_0=x_0+iy_0$;

4) означення аналітичності функції за Коші і за Ріманом еквівалентні;

5) існує степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \not\equiv 0$ такий, що

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n (z-z_0)^n \quad \forall z\in K;$$

6) кожну функцію f, неперервну в крузі K, можна розвинути у цьому крузі в степеневий ряд;

7) якщо функція f регулярна у кожній точці області D, то вона аналітична в D.

3. Визначити проміжки диференційовності даної комплекснозначної функції $z = z(t)$ дійсної змінної t і знайти її похідну:

1) $z(t) = \left(t - it^2\right)^2$; 2) $z(t) = \exp it$; 3)• $z(t) = \dfrac{1}{(t-i)^2}$;

4) $z(t) = \sqrt[3]{t} - i|t|$; 5) $z(t) = (1+it)\exp(-it)$; 6) $z(t) = t - i\sqrt{1-t^2}$;

7) $z(t) = \left(t + i\sqrt{t}\right)^3$; 8) $z(t) = \begin{cases} \exp(i\pi t), & \text{якщо } 0 \le t < 1, \\ t-2, & \text{якщо } 1 \le t \le 3. \end{cases}$

4. Нехай функція $z = z(t)$ диференційовна в точці $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ і $z(t) \ne 0$. Довести, що функції $|z(t)|$ і $\arg z(t)$ також диференційовні в точці t і правильні рівності:

1) $\dfrac{d|z(t)|}{dt} = |z(t)| \operatorname{Re} \dfrac{z'(t)}{z(t)}$; 2) $\dfrac{d(\arg z(t))}{dt} = \operatorname{Im} \dfrac{z'(t)}{z(t)}$;

3) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{z(t)}{|z(t)|}\right) = i\dfrac{z(t)}{|z(t)|} \operatorname{Im} \dfrac{z'(t)}{z(t)}$.

5. Використовуючи умови Коші — Рімана, визначити множину точок, на якій дана функція f є диференційовною:

1) $f(z) = z^2$; 2) $f(z) = \dfrac{1}{z}$; 3) $f(z) = x^2 + iy^2$;

4) $f(z) = (\overline{z})^2$; 5)• $f(z) = \dfrac{z}{|z|}$; 6) $f(z) = |z|^2$;

7) $f(z) = z \operatorname{Re} z$; 8) $f(z) = z^3 - (\operatorname{Im} z)^2$.

6. Визначити, де є диференційовною дана функція f, і знайти її похідну $(z = x + iy)$:

1) $f(z) = \exp z$; 2)• $f(z) = \sin z$; 3) $f(z) = \cos z$;

4) $f(z) = \operatorname{tg} z$; 5) $f(z) = \operatorname{ctg} z$; 6) $f(z) = \operatorname{sh} z$;

7) $f(z) = \operatorname{ch} z$; 8) $f(z) = \operatorname{th} z$; 9) $f(z) = \operatorname{cth} z$;

10) $f(z) = \ln z$; 11) $f(z) = z^\alpha$ (головне значення);

12) $f(z) = \dfrac{1}{|z|}$; 13) $f(z) = z|z|$; 14) $f(z) = x^2 + 2xyi$;

15)• $f(z) = z \operatorname{Im} z$; 16) $f(z) = az^2 \operatorname{Re} z + z - 2$;

17) $f(z) = \overline{z}^2 + 2z + 1$; 18) $f(z) = z^2 + b\overline{z} - 2z + 1$;

19) $f(z) = axy - i\left(x^2 + y^2\right)$; 20)• $f(z) = \sqrt{|xy|}$;

21) $f(z) = \dfrac{z}{\exp z}$; 22) $f(z) = \dfrac{\exp z + 1}{\exp z - 1}$; 23) $f(z) = |\exp z|$.

7. Нехай функція f диференційовна в області D. Довести, що $f(z) = \text{const}$ в D, якщо в цій області виконується одна з умов:

1) $f'(z) \equiv 0$; 2) $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = \text{const}$;

3) $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = \text{const}$; 4)• $|f(z)| = \text{const}$;

5) $\arg f(z) = \text{const}$;

6) $\exists a, b$ і $c \in \mathbf{R}$: $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ і $a \operatorname{Re} f(z) + b \operatorname{Im} f(z) + c \equiv 0$;

7)* існує строго монотонна і диференційовна в $\mathbf{R}$ функція F така, що $\operatorname{Im} f(z) = F(\operatorname{Re} f(z))$.

8. Визначити, чи є аналітичними в деякій області дані функції:

1) $f(z) = z^n$; 2)• $f(z) = \frac{1}{z}$; 3) $f(z) = |z|$;

4) $f(z) = z^2 + \operatorname{Im} z$; 5) $f(z) = -2xy + i\left(x^2 - y^2\right)$.

9. Знайти числа a, b і c, при яких функція f є аналітичною в $\mathbf{C}$, якщо:

1) $f(z) = \left(x^2 - y^2 + ax + 1\right) + i(2xy + by)$;

2) $f(z) = \left(\mathrm{e}^x \cos y + x^2 - y^2 + ax + 9\right) + i\left(\mathrm{e}^x \sin y + bxy + 5y\right)$;

3) $f(z) = \left(x^2 + ax - by^2\right) + i(2xy + cy)$.

10•. Нехай функція $w = f(z)$ аналітична в області D і здійснює взаємно однозначне відображення замкненої квадровної області $E \subset D$ у замкнену область F площини w. Знайти площу області F.

11. Користуючись результатом вправи 10, обчислити площу замкненої області F, на яку дана функція f відображає замкнену область E, якщо:

1) $f(z) = z^3$, $E = \left\{z:\ 1 \le |z| \le 2,\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}\right\}$;

2) $f(z) = z^2$, $E = \left\{z:\ |z| \le 1,\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{4}\right\}$.

12. Довести, що функція $f(z) = f(\rho(\cos\varphi + i \sin\varphi))$ диференційовна в точці $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \ne 0$ тоді й тільки тоді, коли функції $u = \operatorname{Re} f = u(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ і $v = \operatorname{Im} f = v(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ диференційовні в точці (ρ, φ) та правильні рівності $\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}$ і $\frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}$. При цьому

$$f'(z) = \frac{\rho}{z} \cdot \frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\rho}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + i\frac{\partial v}{\partial \rho}\right) = \frac{1}{iz} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right).$$

13. Визначити, чи є функції u і v спряженими гармонічними:

1) $u = -2xy$, $v = x^2 - y^2$; 2) $u = xy + x^2$, $v = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 2xy$;

3) $u = 3x^2 y - y^3$, $v = 3xy^2 - x^3$; 4) $u = \mathrm{e}^x \cos y$, $v = \mathrm{e}^x \sin y$.

14. Побудувати аналітичну функцію $f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$ за її дійсною або уявною частиною:

1)• $v=x^2-y^2,\ f(0)=0$; 2) $u=x^2-y^2+2x+1,\ f(0)=1$;

3) $u=3x+x^2-y^2+e^x\cos y$; 4) $v=-\dfrac{y}{x^2+y^2},\ f(i)=-i$;

5) $u=x+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ x>0$; 6) $u=\ln\left(x^2+y^2\right),\ x>0$.

15. Знайти аналітичну функцію f, для якої дана функція φ є або дійсною частиною, або уявною, якщо:

1) $\varphi(x,y)=xy$; 2) $\varphi(x,y)=x^2-y^2+xy$;

3) $\varphi(x,y)=x^3-3xy^2$; 4) $\varphi(x,y)=\cos x\operatorname{ch}y$;

5) $\varphi(x,y)=\operatorname{sh}x\cos y$; 6) $\varphi(x,y)=\sin x\operatorname{ch}y$;

7) $\varphi(x,y)=\operatorname{ch}x\cos y$; 8) $\varphi(x,y)=y\cos y\operatorname{sh}x+x\sin y\operatorname{ch}x$;

9) $\varphi(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; 10) $\varphi(x,\ y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

16. Знайти радіус збіжності, круг збіжності та суму даного степеневого ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n z^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n(z+1)^{2n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^n$; 4)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2(z+i)^n$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^n}(z+1-i)^{2n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n n(z-1+i)^{2n-1}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n n^2(z+2i)^{2n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+i)^n nz^{2n-1}$.

17. Нехай функції f і φ диференційовні в області D і L — кусково-гладкий контур Жордана, що лежить в D, причому $|\varphi(z)|<|f(z)|\quad \forall z\in L$. Довести, що

$$\frac{f'(z)+\varphi'(z)}{f(z)+\varphi(z)}=\frac{f'(z)}{f(z)}+\left(\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)'\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)^n \quad \forall z\in L.$$

Зразки розв'язування задач

2. 2) Нехай z_0 — довільна фіксована точка і $z\neq z_0$. Тоді

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{\overline{z}-\overline{z}_0}{z-z_0}=\frac{(x-x_0)-i(y-y_0)}{(x-x_0)+i(y-y_0)},$$

де $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. Зрозуміло, що $z \to z_0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$. Якщо припустити, що існує похідна $f'(z_0)$, тоді має існувати границя $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, тому границя

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 1.$$

Отже, якщо похідна $f'(z_0)$ існує, то вона скінченна. Тоді за властивостями границь мають існувати також границі відношень

$$\frac{\Delta x^2 - \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad \text{і} \quad \frac{-2\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

якщо $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$. Однак вони не існують, оскільки за умови $0 \neq \Delta x = \Delta y \to 0$ маємо $\dfrac{\Delta x^2 - \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0$, а якщо $\Delta x = 0$, $0 \neq \Delta y \to 0$, то $\dfrac{\Delta x^2 - \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = -1$.

Таким чином, функція $f(z) = \overline{z}$ не має похідної у жодній точці $z_0 \in \mathbf{C}$.

3. 3) Оскільки за означенням похідної комплекснозначної функції дійсної змінної аналогічне означенню похідної функції дійсної змінної, то правила знаходження похідної залишаються тими самими. Тому за правилами диференціювання частки, сталої і степеневої функції маємо

$$z'(t) = \left(\frac{1}{(t-i)^2} \right)' = \frac{(1)'(t-i)^2 - \left((t-i)^2\right)' \cdot 1}{(t-i)^4} = -\frac{2}{(t-i)^3} \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

5. 5) Область визначення даної функції $D(f) = \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Виділимо дійсну й уявну частини цієї функції:

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Функції u і v диференційовні в будь-якій точці $(x, y) \neq (0, 0)$. Знайдемо частинні похідні цих функцій:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{xy}{\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2}{\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}}.$$

Очевидно, що принаймні одна з умов (4) не виконується, якщо $x^2 + y^2 \neq 0$. Отже, функція $f(z) = \frac{z}{|z|}$ не диференційовна в жодній точці своєї області визначення.

6. 2) Оскільки

$$f(z) = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \frac{\exp(-y) + \exp y}{2} +$$

$$+ \cos x \frac{\exp(-y) - \exp y}{2i} = \frac{1}{2} \sin x \left(e^y + e^{-y}\right) + \frac{i}{2} \cos x \left(e^y - e^{-y}\right),$$

то

$$u=\operatorname{Re} f(z)=\frac{1}{2}\left(e^{y}+e^{-y}\right)\sin x,\ v=\operatorname{Im} f(z)=\frac{1}{2}\left(e^{y}-e^{-y}\right)\cos x \quad \forall(x;y)\in\mathbf{R}.$$

Звідси маємо

$$u'_x=\frac{1}{2}\left(e^{y}+e^{-y}\right)\cos x,\ v'_x=-\frac{1}{2}\left(e^{y}-e^{-y}\right)\sin x,$$

$$u'_y=\frac{1}{2}\left(e^{y}-e^{-y}\right)\sin x,\ v'_y=\frac{1}{2}\left(e^{y}+e^{-y}\right)\cos x.$$

Одержані частинні похідні неперервні і задовольняють умови (4) в $\mathbf{R}^2$. Отже, функції u і v диференційовні і задовольняють умови Коші — Рімана в $\mathbf{R}^2$, тому функція f є диференційовною в $\mathbf{C}$ і за формулою (5)

$$f'(z)=u'_x(x,\ y)+iv'_x(x,\ y)=\frac{1}{2}\left(e^{y}+e^{-y}\right)\cos x-\frac{i}{2}\left(e^{y}-e^{-y}\right)\sin x=$$

$$=\cos iy\cos x-\sin iy\sin x=\cos(x+iy)=\cos z \quad \forall z\in\mathbf{C}.$$

15) Маємо

$$f(z)=z\operatorname{Im} z=(x+iy)y=xy+iy^2,\ u(x,\ y)=xy,$$

$$v(x,y)=y^2,\ u'_x=y,\ u'_y=x,\ v'_x=0,\ v'_y=2y.$$

Умови (4) виконуються лише в одній точці (0; 0), тому задана функція диференційовна лише в точці $z=0$ і її похідна в цій точці $f'(0)=0$.

20) Запишемо дану функцію у вигляді $f(z)=\sqrt{|xy|}+i\cdot 0$. Тоді $u(x,\ y)=\operatorname{Re} f(z)=$ $=\sqrt{|xy|}$, а $v(x,\ y)=\operatorname{Im} f(z)=0 \quad \forall z=x+iy\in\mathbf{C}$. Звідси знаходимо

$$v'_x=v'_y=0 \quad \forall(x,\ y)\in\mathbf{R}^2,\ u'_x=\frac{y}{2\sqrt{xy}},\ v'_y=\frac{x}{2\sqrt{xy}}.$$

Отже, $u'_x\neq v'_y \quad \forall(x;y)$: $x>0$ і $y>0$ або $x<0$ і $y<0$, тому f недиференційовна у першій та третій чвертях комплексної площини. Аналогічно показуємо, що задана функція недиференційовна у другій та четвертій чвертях комплексної площини.

Залишилося перевірити диференційовність функції f на дійсній та уявній осях. Нехай $z=0+iy$ і $y\neq 0$. Тоді $u'_x(0,\ y)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|y,\ \Delta x|}}{\Delta x}=\infty$, тому функція u недиференційовна у точці $(0;y)$ $\forall y\neq 0$. Аналогічно доводимо, що u недиференційовна в точці $(x;0)$ $\forall x\neq 0$. Отже, функція f недиференційовна $\forall z\neq 0$.

Розглянемо точку $z=0+i\cdot 0=0$. Маємо

$$u'_x(0,\ 0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot 0|}-\sqrt{|0\cdot 0|}}{\Delta x}=0=u'_y(0,\ 0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{|0\cdot\Delta y|}-0}{\Delta y},$$

тому $u'_x(0,\ 0)=v'_y(0,\ 0)$ і $u'_y(0,\ 0)=-v'_x(0,\ 0)$. Зрозуміло, що функція v диференційовна в точці (0; 0). Припустимо, що функція u також є диференційовною в точці (0; 0). Тоді

$$\sqrt{|\Delta x\Delta y|}=\Delta u(0,0)=u'_x(0,0)\Delta x+u'_y(0,0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y=\alpha\Delta x+\beta\Delta y,$$

де $\alpha\to 0$ і $\beta\to 0$, якщо $\Delta x\to 0$ і $\Delta y\to 0$. Звідси дістаємо, що

$$\frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\cdot\alpha+\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\cdot\beta\to 0,$$

якщо $\Delta x\to 0$ і $\Delta y\to 0$. Однак $\dfrac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\not\to 0$, якщо $\Delta x\to 0$ і $\Delta y\to 0$, бо $\dfrac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=$ $=\sqrt{\dfrac{1}{2}}\neq 0$, якщо $\Delta x=\Delta y\neq 0$. Дістали суперечність, яка й доводить, що функція u недиференційовна в точці $z=0$.

Таким чином, функція f не є диференційовною у будь-якій точці комплексної площини.

7. 4) Оскільки $|f(z)|=|u(x,\ y)+iv(x,\ y)|=\sqrt{u^2(x,\ y)+v^2(x,\ y)}=\text{const}=C$ в області D, то $u^2(x,y)+v^2(x,y)=C^2$ в D. За умовою функція f диференційовна в D, тому функції u і v також диференційовні і задовольняють умови Коші — Рімана в D: $u'_x=v'_y$ і $u'_y=-v'_x$. Продиференціюємо тотожність $u^2(x,y)+v^2(x,y)\equiv C^2$:

$$\begin{cases}2u\cdot u'_x+2v\cdot v'_x\equiv 0,\\ 2u\cdot u'_y+2v\cdot v'_y\equiv 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2u\cdot v'_y+2v\cdot v'_x\equiv 0,\\ -2u\cdot v'_x+2v\cdot v'_y\equiv 0\end{cases}\Rightarrow\ 2v'_y\left(u^2+v^2\right)\equiv 0\ \text{ і }\ 2v'_x\left(u^2+v^2\right)\equiv 0,$$

але

$$u^2+v^2\equiv C^2\Rightarrow C^2v'_y\equiv 0\ \text{ і }\ C^2v'_x=0.$$

Якщо припустити, що $C=0$, то $u(x,\ y)\equiv v(x,\ y)\equiv 0$. Якщо $C\neq 0$, то $v'_y\equiv 0$ і $v'_x\equiv$ $\equiv 0\Rightarrow u'_x\equiv 0$ і $v'_y\equiv 0\Rightarrow u(x,y)=\text{const}$ і $v(x,\ y)=\text{const}$ в області D, тобто $f(z)=\text{const}$ в D.

8. 2) Дана функція визначена в області $\mathbf{C}\setminus\{0\}$. Для неї маємо

$$u=\operatorname{Re}f(z)=\frac{x}{x^2+y^2},\quad v=\operatorname{Im}f(z)=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$u'_x=v'_y=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\ u'_y=-v'_x=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\quad\forall(x,\ y)\neq(0,\ 0).$$

Оскільки виконуються умови (4) і всі частинні похідні функцій u і v неперервні в області $\mathbf{R}^2\setminus\{(0;0)\}$, то похідна f' неперервна в області $\mathbf{C}\setminus\{0\}$, а отже, задана функція аналітична у цій області.

10. Якщо виконуються умови задачі, то замкнена область F є квадровною і її площу можна обчислити за допомогою подвійного інтеграла

$$S_F=\iint\limits_F du\,dv.$$

У цьому інтегралі виконаємо заміну змінних за формулами $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$. Якобіан $J(u,v)$ цього перетворення обчислимо, користуючись умовами Коші — Рімана. Дістанемо

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=|f'(z)|^2.$$

Тоді

$$S_F=\iint\limits_F dudv=\iint\limits_E |f'(z)|^2\,dxdy.$$

14. 1) Диференціюючи функцію v, маємо $\dfrac{\partial v}{\partial x}=2x$ і $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-2y$. Знайдемо функцію u, користуючись умовами (4), тобто знайдемо розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=-2y,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-2x.\end{cases}$$

З першого рівняння цієї системи знаходимо

$$u(x,\,y)=-2xy+c(y),$$

звідки $u'_y=-2x+c'(y)$. Після підстановки цього виразу у друге рівняння маємо $c'(y)=0\;\Rightarrow$ $\Rightarrow\;c(y)=c_1=\mathrm{const}$. Тоді $u(x,\,y)=-2xy+c_1$. Отже,

$$f(z)=u+iv=(-2xy+c_1)+i\left(x^2-y^2\right).$$

Враховуючи умову $f(0)=0$, дістаємо, що $c_1=0$, тобто

$$f(z)=-2xy+i\left(x^2-y^2\right)=i\left(x^2+y^2+i\cdot 2xy\right)=iz^2.$$

16. 4) Радіусом збіжності даного ряду є $R=1$ (перевірити це), а кругом збіжності — круг $|z+i|<1$. Тоді сума цього ряду

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2(z+i)^n=(z+i)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2(z+i)^{n-1}=$$

$$=(z+i)\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+i)^n\right)'(z+i)\right)'.$$

Користуючись формулою суми геометричної прогресії

$$\frac{1}{1+(z+i)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+i)^n,\ |z+i|<1,$$

дістаємо

$$f(z)=(z+i)\left(\left(\frac{1}{1+z+i}\right)'(z+i)\right)'=(z+i)\left(-\frac{1}{(1+z+i)^2}(z+i)\right)'=$$

$$=-(z+i)\frac{(1+z+i)^2-(z+i)\cdot 2(1+z+i)}{(1+z+i)^4}=\frac{(z+i)(z-1+i)}{(z+1+i)^3}.$$

Зауважимо, що, скориставшись рівністю $n^2=n(n-1)+n$, можна суму даного ряду знайти як суму двох рядів

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n-1)(z+i)^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(z+i)^n,$$

диференціюючи в одному випадку відповідний геометричний ряд один раз, а в іншому — двічі.

§ 24.2. Геометричний зміст похідної. Поняття конформного відображення

Якщо $z = z(t)$, $t \in \langle\alpha;\ \beta\rangle$, — неперервна комплекснозначна функція дійсної змінної, то множину $\Gamma = \{z = z(t):\ t \in \langle\alpha;\ \beta\rangle\}$ називають *неперервною кривою* у комплексній площині, а рівняння $z = z(t)$, $t \in \langle\alpha;\ \beta\rangle$, — *рівнянням* цієї *кривої*. Дану криву ототожнюють з кривою $\Gamma = \{(x;\ y) \in \mathbf{R}^2:\ x = x(t) = \operatorname{Re} z(t),$ $y = y(t) = \operatorname{Im} z(t)\}$, $t \in \langle\alpha;\ \beta\rangle$, у площині Oxy. Тому до неперервних кривих у комплексній площині застосовні усі поняття, введені до кривих у площині Oxy, а саме: неперервна дуга, проста дуга або крива Жордана, гладка крива, кусково-гладка крива, контур або замкнена крива.

Нехай $z = z(t)$, $t \in \langle\alpha;\ \beta\rangle$, — рівняння неперервної кривої і функція z диференційовна у точці $t_0 \in \langle\alpha;\ \beta\rangle$.

Якщо $z'(t_0) \neq 0$, то геометрично це означає, що вектор $z'(t_0)$ є дотичним до кривої $z = z(t)$ у точці $z_0 = z(t_0)$, причому $|z'(t_0)|$ — довжина цього вектора, а $\operatorname{Arg} z'(t_0)$ — кут, який він утворює з додатним напрямом дійсної осі. Отже, якщо крива $z = z(t)$, $t \in \langle\alpha;\ \beta\rangle$, гладка (тобто функція z' неперервна і $z'(t) \neq 0$ на проміжку $\langle\alpha;\ \beta\rangle$), то вона у кожній своїй точці має дотичний вектор, який змінюється неперервно разом з t.

Нехай функція комплексної змінної $f(z) = u(x;\ y) + iv(x;\ y)$ неперервна в області D, $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$, функції u і v мають у точці $(x_0,\ y_0)$ скінченні частинні похідні та існує скінченна границя

$$k = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \neq 0.$$

Тоді f відображає будь-яку неперервну криву $\Gamma = \{z = z(t):\ t \in \langle\alpha;\ \beta\rangle\}$, що лежить в D, проходить через точку $z_0 = z(t_0)$ і має в цій точці дотичний вектор $z'(t_0) \neq 0$, у неперервну криву $\Gamma_1 = \{w = f(z(t)):\ t \in \langle\alpha;\ \beta\rangle\}$, що проходить через точку $w_0 = f(z_0)$ і має в цій точці дотичний вектор $w'(t_0) \neq 0$. При переході від кривої Γ до кривої $\Gamma_1 = f(\Gamma)$ дотичний вектор повертається на кут $\alpha = \operatorname{Arg} w'(t_0) - \operatorname{Arg} z'(t_0)$, а його довжина змінюється в $k = \dfrac{|w'(t_0)|}{|z'(t_0)|}$ разів. Тому α називають *кутом повороту кривої* Γ у точці z_0, а

k — *коефіцієнтом лінійного розтягу* Γ у цій точці. Зокрема, якщо функція f диференційовна в точці z_0 і $f'(z_0) \neq 0$, то

$$\alpha = \operatorname{Arg} w'(t_0) - \operatorname{Arg} z'(t_0) = \operatorname{Arg} f'(z_0), \ k = \frac{|w'(t_0)|}{|z'(t_0)|} = |f'(t_0)|, \tag{1}$$

і вони не залежать від кривої Γ. У цьому полягає геометричний зміст похідної $f'(z_0)$.

Якщо через точку $z_0 = z(t_0)$, крім кривої $z = z(t)$, $t \in [\alpha;\ \beta]$, проходить інша крива $z = z_1(t)$, $t \in [\alpha;\ \beta]$, яка має в точці z_0 дотичний вектор $z_1'(t_0)$, то кутом між цими кривими вважають кут між відповідними векторами, і він дорівнює $\operatorname{Arg} z'(t_0) - \operatorname{Arg} z_1'(t_0)$. Розглянута вище неперервна функція f, для якої $f'(z_0) \neq 0$, відображає криві $z = z(t)$ і $z = z_1(t)$, $t \in [\alpha;\ \beta]$, у відповідні криві $w = w(t) = f(z(t))$ і $w = w_1(t) = f(z_1(t))$, $t \in [\alpha;\ \beta]$, $w_0 = w(t_0) = w_1(t_0)$, кут між якими дорівнює $\operatorname{Arg} z'(t_0) - \operatorname{Arg} z_1'(t_0)$, тобто f зберігає кут між кривими. Таке відображення називають *конформним* у точці z_0.

Якщо функція f аналітична в D, то вона є конформним відображенням у всіх точках $z \in D$, для яких $f'(z) \neq 0$.

Функцію f називають *однолистою* в області D, якщо вона аналітична в D і $f(z_1) \neq f(z_2)$ $\forall z_1 \neq z_2$ з D. Якщо функція f взаємно однозначно відображає область D на область D_1, то це відображення є конформним тоді й тільки тоді, коли f однолиста в D.

Якщо Γ — кусково-гладкий контур Жордана, то обмежену в $\mathbf{C}$ область D, межею якої є Γ, називають *внутрішньою частиною контуру* Γ, а $\mathbf{C} \setminus \overline{D}$ — *зовнішньою частиною контуру* Γ.

Якщо D — область в $\mathbf{C}$, а Γ — кусково-гладкий контур Жордана, то D називають:

1) однозв'язною областю у комплексній площині $\mathbf{C}$, якщо $\forall \Gamma \subset D$ внутрішня частина Γ лежить в D;

2) однозв'язною областю у розширеній комплексній площині $\overline{\mathbf{C}}$, якщо $\forall \Gamma \subset D$ внутрішня або зовнішня частина Γ лежить в D.

Нехай D — однозв'язна область у розширеній комплексній площині, причому межа D складається більше ніж з однієї точки, і $K = \{z : |z| < 1\}$. Тоді:

1) існує нескінченна множина конформних відображень $f : D \leftrightarrow K$ (*теорема Рімана*);

2) для будь-якої точки $z_0 \in D$ існує єдине відображення $f : D \leftrightarrow K$ таке, що f — конформне в D, $f(z_0) = 0$ і $f'(z_0) > 0$ (*теорема Пуанкаре*).

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження (виконати усно):

1) кожна крива Жордана має в будь-якій своїй точці дотичний вектор;
2) крива $z = t + i|t|$ має дотичний вектор у точці $z_0 = 0$;
3) кусково-гладка крива має у кожній своїй точці дотичний вектор;
4) кожна однолиста функція є аналітичною;
5) кожна аналітична функція є однолистою;
6) якщо D — однозв'язна область в $\mathbf{C}$, то D — однозв'язна і в $\overline{\mathbf{C}}$;
7) твердження, обернене до попереднього, є правильним.

2. Довести або спростувати дані твердження:

1) якщо $\Gamma = \{z = z(t):\ t \in \langle\alpha;\ \beta\rangle\}$ — неперервна крива й існує точка $t_0 \in \langle\alpha;\ \beta\rangle$ така, що $z'(t_0) \neq 0$, то існує відрізок $[a;\ b] \subset \langle\alpha;\ \beta\rangle$ такий, що $\Gamma_1 = \{z = z(t):\ t \in [a;\ b]\}$ є простою дугою;

2) існує відображення f, для якого коефіцієнт лінійного розтягу та кут повороту кривої Γ у точці z_0 не залежать ні від Γ, ні від z_0;

3) якщо $f(z) = \overline{z}$, то коефіцієнт лінійного розтягу і кут повороту кривої Γ у точці z_0 не залежать ні від Γ, ні від z_0;

4) якщо $f(z) = \overline{z}$, то відображення f зберігає кут між двома кривими за величиною, але не за напрямом відліку;

5) неперервне відображення f зберігає кут між двома кривими, що проходять через точку z_0, якщо $f'(z_0) \neq 0$;

6)• якщо $f'(z_0) = 0$, то відображення f не зберігає кут між будь-якими двома неперервними кривими, що проходять через точку z_0;

7) якщо D_1 і D_2 — однозв'язні області, межі яких складаються більше ніж з однієї точки, то існує відображення $f:\ D_1 \leftrightarrow D_2$ таке, що f — конформне в D_1.

3. Визначити, чи є дана крива $z = z(t)$, $t \in \langle\alpha;\ \beta\rangle$, гладкою або кусково-гладкою, знайти дотичний вектор до неї в точці z_0 і зробити відповідний рисунок:

1) $z(t) = t + it^2$, $t \in (-\infty;\ +\infty)$, $z_0 = 0$;

2) $z(t) = t + i \cdot 2t$, $t \in (-\infty;\ +\infty)$, $z_0 = 2 + 4i$;

3) $z(t) = 2t + it$, $t \in [0;\ 2]$, $z_0 = z(1)$;

4) $z(t) = t + i\dfrac{t}{2}$, $t \in [0;\ 2]$, $z_0 = z(1)$;

5) $z(t) = t + it^3$, $t \in (-\infty;\ +\infty)$, $z_0 = 1 + i$;

6) $z(t)=1+\exp it,\ t\in[0;\ 2\pi],\ z_0=0$;

7) $z(t)=z_1+R\exp it,\ t\in[0;\ 2\pi],\ z_0=z_1-R$;

8) $z(t)=i\cos t,\ t\in[0;\ 2\pi],\ z_0=z(\pi)$;

9)• $z(t)=\begin{cases}\exp i\pi t, & 0\le t<1,\\ t-2, & 1\le t\le 3,\end{cases}\quad z_0=z(1)$;

10) $z(t)=1+i\cos^2 t,\ t\in[0;\ 2\pi],\ z_0=z(\pi)$.

4. Знайти кут φ між даними кривими у точках їх перетину та зробити відповідний рисунок:

1) $z_1(t)=t+it^2,\ z_2(t)=t+it,\ t\in[0;\ 1]$;

2) $z_1(t)=t+it,\ z_2(t)=t+it^3,\ t\in[-1;\ 1]$;

3) $z_1(t)=t+ie^t,\ z_2(t)=t+i,\ t\in[0;\ 1]$;

4)• $z_1(t)=t+i\ln t,\ z_2(t)=t-i\ln t,\ t\in(0;+\infty)$;

5) $z_1(t)=t+i\cos t,\ z_2(t)=t+i\sin t,\ t\in[0;\ \pi]$;

6) $z_1(t)=t+ie^t,\ z_2(t)=t-ie^t,\ t\in[-1;\ 1]$;

7) $z_1(t)=t+i\,\mathrm{tg}\,t,\ z_2(t)=t+i\,\mathrm{ctg}\,t,\ t\in\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

5. Нехай Γ — промінь $\arg(z-z_0)=\varphi\in\left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$. Для даного відображення f і даної точки z_0 знайти коефіцієнт лінійного розтягу k та кут повороту α променя Γ:

1) $f(z)=z^2,\ z_0=1$;

2) $f(z)=2\overline{z},\ z_0=i$;

3) $f(z)=\overline{z}^2,\ z_0=i$;

4)• $f(z)=i\exp 2z,\ z_0=0$;

5) $f(z)=2z-i\overline{z},\ z_0=0$;

6) $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1},\ z_0=1$;

7) $f(z)=\dfrac{1-iz}{1+iz},\ z_0=-i$;

8) $f(z)=az+b\overline{z},\ a$ і $b>0,\ z_0=0$.

6. Для даного відображення f знайти множину E точок, у яких коефіцієнт лінійного розтягу дорівнює одиниці, та множину E_1 точок, у яких кут повороту дорівнює нулю:

1)• $f(z)=z^2$;

2) $f(z)=iz^2$;

3) $f(z)=z^3$;

4) $f(z)=z^2-2z$;

5) $f(z)=\dfrac{1}{z}$;

6) $f(z)=\dfrac{i}{z}$;

7) $f(z)=\dfrac{1+iz}{1-iz}$;

8) $f(z)=\exp z$;

9) $f(z)=\ln z$;

10) $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d},\ a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R},\ c\ne 0,\ ad-bc>0$.

7. Визначити, яка частина площини стискається ($k<1$), а яка розтягується $(k>1)$ при заданих відображеннях f:

1)• $f(z)=z^2-4z$; 2) $f(z)=z^3$; 3) $f(z)=\frac{1}{z}$; 4) $f(z)=\frac{z}{1+z}$.

8. Нехай функція f диференційовна у точці z_0 і $f'(z_0)\neq 0$, а гладкі криві Γ_1 і Γ_2 проходять через точку z_0. Довести, що ці криві перетинаються під прямим кутом, якщо:

1) $\operatorname{Re} f(z)=\operatorname{Re} f(z_0)\ \ \forall z\in\Gamma_1$, $\operatorname{Im} f(z)=\operatorname{Im} f(z_0)\ \ \forall z\in\Gamma_2$;

2) $|f(z)|=|f(z_0)|\ \ \forall z\in\Gamma_1$, $\arg f(z)=\arg f(z_0)\ \ \forall z\in\Gamma_2$.

9. Для даної функції f визначити область D_1 однолистості та область D_2 конформності:

1) $f(z)=az+b$, $a\neq 0$; 2) $f(z)=z^n$, $n\in\mathbf{N}$;

3) $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc\neq 0$; 4) $f(z)=\sqrt[n]{z}$ (головне значення);

5) $f(z)=\exp z$; 6) $f(z)=\exp 2iz$; 7) $f(z)=\ln z$;

8)• $f(z)=\exp z$, $|z|<3$; 9) $f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ (функція Жуковського);

10) $f(z)=z^2$, $3<|z+2|<4$, $0<\arg(z+2)<\frac{3\pi}{2}$.

10. Нехай a, b і z_0 — задані комплексні числа, а $R=\left|z_0+\frac{a}{2}\right|$. Довести, що функція $f(z)=z^2+az+b$ однолиста у крузі $K=\{z:|z-z_0|<R\}$.

11. Довести, що функція $f(z)=z^2+az+b$ однолиста у відкритій півплощині, обмеженій будь-якою прямою, що проходить через точку $z=-\frac{a}{2}$.

12. Знайти образ даної множини E при заданому відображенні f, якщо $z=x+iy$:

1) $E=\{z:\ \operatorname{Re} z>0\}$, $f(z)=(1-i)z+i$;

2)• $E=\left\{z:\ x^2+y^2=ax,\ a>0\right\}$, $f(z)=\frac{1}{z}$;

3) $E=\{z:\ y=x+a,\ a>0\}$, $f(z)=\frac{1}{z}$;

4) $E=\{z:\ y=ax,\ a>0\}$, $f(z)=\frac{1}{z}$;

5) $E=\left\{z:\ x^2+y^2<ax,\ a>0\right\}$, $f(z)=\frac{1}{z}$;

6) $E=\{z:\ |z-1|<2\}$, $f(z)=1-2iz$;

7) $E=\{z:\ |z-1|<2\},\ f(z)=\dfrac{2iz}{z+3}$;

8) $E=\{z:\ \operatorname{Im} z=2\operatorname{Re} z\},\ f(z)=\dfrac{z-3}{z+3}$;

9) $E=\{z:\ |z|=2\},\ f(z)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$;

10) $E=\{z:\ |z|>2\},\ f(z)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$;

11) $E=\{z:\ \operatorname{Re} z=2\},\ f(z)=z^2$;

12) $E=\{z:\ x+y=1\},\ f(z)=-z^2$;

13) $E=\{z:\ y=a\},\ f(z)=\exp z$;

14) $E=\left\{z:\ -\dfrac{\pi}{2}<\operatorname{Re} z<\dfrac{\pi}{2}\right\},\ f(z)=\sin z$;

15) $E=\{z:\ 0<\operatorname{Im} z<\pi\},\ f(z)=\cos z$.

13. Довести, що лінійна функція $w=az+b,\ a\neq 0$, відображає пряму на пряму, а коло — на коло.

14. Знайти лінійну функцію $w=az+b$, яка точку i залишає нерухомою, а точку $1+i$ відображає в точку $3i$.

15. Знайти лінійну функцію $w=az+b$, яка трикутник з вершинами у точках $z_k,\ k\in\overline{1,\ 3}$, відображає у трикутник з вершинами у точках $w_k,\ k\in\overline{1,\ 3}$. (Чи є ці трикутники подібними?):

1) $z_k\in\{0,\ 1,\ 1+i\},\quad w_k\in\{i,\ 0,\ -1+i\}$;

2)• $z_k\in\{0,\ 4,\ 2+2i\},\quad w_k\in\{-1,\ 0,\ -i\}$;

3) $z_k\in\{1+i,\ 2+4i,\ 3+i\},\quad w_k\in\{1+4i,\ 7+2i,\ 1\}$.

16. Знайти загальний вигляд лінійних функцій, які здійснюють відображення верхньої півплощини на:

1) себе;
2) нижню півплощину;
3) праву півплощину;
4) ліву півплощину.

17. Довести, що дробово-лінійне відображення $w=\dfrac{az+b}{cz+d},\ ad-bc\neq 0$, $c\neq 0$, має дві нерухомі точки $z_{1,2}=\dfrac{1}{2c}\left((a-d)\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}\right)$.

18. Довести, що образом прямої $x=a$ при відображенні $f(z)=\exp z$ є коло з центром у точці $z=0$ і радіусом e^a.

19•. За допомогою функції $f(z)=\exp az$ побудувати відображення смуги G, обмеженої прямими $y=x$ і $y=x+2$, на верхню півплощину.

20. Показати, що образом прямої $y = a$, $a \neq 0$, є еліпс $\dfrac{u^2}{\operatorname{ch}^2 a} + \dfrac{v^2}{\operatorname{sh}^2 a} = 1$ при відображенні $w = \sin z$ $(w = u + iv)$.

21. Знайти образ смуги $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ при відображенні $w = \operatorname{ch} z$.

22*. Знайти функцію $w = f(z)$, яка конформно відображає область $D = \{z: 0 < \arg z < \pi\alpha\}$, $0 < \alpha < 1$, на смугу $0 < \operatorname{Im} w < 1$.

Зразки розв'язування задач

2. 6) Розглянемо відображення $f(z) = z|z|$. Неважко перевірити, що $f'(0) = 0$. Якщо $z = x + iy$, то f відображає кожну пряму $y = kx$ на множину $\left\{z = (x + ikx)\sqrt{x^2 + k^2x^2} = x|x|\sqrt{1 + k^2}\,(1 + ik)\right\}$, яка, очевидно, збігається з цією самою прямою. Отже, у цьому випадку кут між двома прямими при відображенні f зберігається.

Якщо розглянути відображення $f(z) = z^2$, для якого також $f'(0) = 0$, то воно кожну пряму $y = kx$ перетворює у множину $\left\{z = (x + ikx)^2 = x^2\left(1 - k^2\right) + ix^2 \cdot 2k\right\}$. Зокрема, прямі $y = \pm x$, кут між якими дорівнює $\dfrac{\pi}{2}$, дане відображення перетворює у промені $z = 2ix^2$ і $z = -2ix^2$, $x \in (-\infty;\ +\infty)$, кут між якими дорівнює π.

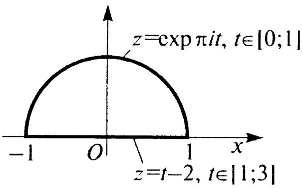


Рис. 35

Отже, якщо $f'(z_0) = 0$, то нічого конкретного про збереження кутів між кривими сказати не можна. Тому дане твердження неправильне.

3. 9) Помічаємо, що коли $t < 1$, то $z'(t) = \pi i \exp \pi i t \to -\pi i$, $t \to 1-$, а якщо $t > 1$, то $z'(t) = 1 \to 1$, $t \to 1+$. Тому не існує похідної $z'(1)$, тобто дана крива (рис. 35) не має дотичного вектора в точці $z_0 = z(1) = -1$. Зрозуміло, що вона не є гладкою, проте є кусково-гладкою.

4. 4) Оскільки $z_1(t) = z_2(t) \Leftrightarrow t + i\ln t = t - i\ln t \Leftrightarrow \ln t = -\ln t \Leftrightarrow t = 1$, то дані криві перетинаються лише у точці $z_0 = z(1) = 1$. Далі маємо

$$z_1'(1) = 1 + \left.\frac{i}{t}\right|_{t=1} = 1 + i\,,\quad z_2'(1) = 1 - \left.\frac{i}{t}\right|_{t=1} = 1 - i\,.$$

Звідси знаходимо $\operatorname{Arg} z_1'(1) = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$, $\operatorname{Arg} z_2'(1) = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$. Тому кут між даними кривими дорівнює $\operatorname{Arg} z_1'(1) - \operatorname{Arg} z_2'(1) = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi(k + n) = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbf{Z}$. Рисунок до задачі виконати самостійно.

5. 4) Скориставшись формулами (1), дістанемо

$$k = |f'(z_0)| = |2i \exp 2z|_{z=0} = 2,\ \alpha = \operatorname{Arg} f'(z_0) = \operatorname{Arg} 2i = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\,.$$

6. 1) Функція $f(z) = z^2$ є аналітичною в усій комплексній площині і її похідна $f'(z) = 2z = 2x + i \cdot 2y$. Користуючись формулами (1), дістаємо

$$k = |f'(z)| = \sqrt{4x^2 + 4y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \text{ або } |z| = \frac{1}{2}.$$

Отже, $E=\left\{z:\ |z|=\frac{1}{2}\right\}$, тобто коефіцієнт лінійного розтягу при даному відображенні дорівнює одиниці у точках кола $|z|=\frac{1}{2}$.

Далі маємо

$$\alpha=\operatorname{Arg}f'(z)=\operatorname{Arg}(2x+i\cdot 2y)=0\Leftrightarrow x>0\ \text{ i }\ y=0.$$

Тому $E_1=\{z=x+i\cdot 0,\ x>0\}$, тобто при даному відображенні f кут повороту дорівнює нулю в точках дійсної додатної осі.

7. 1) При відображенні, яке здійснює аналітична функція, стискається та частина площини, у точках якої коефіцієнт лінійного розтягу $k<1$, а розтягується — якщо $k>1$. Враховуючи формулу (1), для даної функції $f(z)=z^2-4z$ маємо

$$f'(z)=2z-4,\ k=|2z-4|<1\Leftrightarrow|z-2|<\frac{1}{2}.$$

Отже, при заданому відображенні стискається внутрішність круга $|z-2|<\frac{1}{2}$, а розтягується його зовнішня частина.

9. 8) Оскільки $f'(z)=\exp z\ \ \forall z\in\mathbf{C}$ (переконатись у цьому), то функція f аналітична в $\mathbf{C}$ і $f'(z)\neq 0\ \ \forall z\in\mathbf{C}$, тому f конформна в $\mathbf{C}$. Отже, дана функція $f(z)=\exp z$ аналітична й конформна в області $D=\{z:\ |z|<3\}$. Для того щоб функція f була однолистою в цій області, необхідно й достатньо, щоб виконувалась умова: якщо $z_1\neq z_2$ — довільні точки з області D, то $f(z_1)\neq f(z_2)$. Отже, маємо

$$\exp z_1-\exp z_2\neq 0\ \Leftrightarrow\ \exp z_2(\exp(z_1-z_2)-1)\neq 0\ \Leftrightarrow\ \exp(z_1-z_2)\neq 1\ \Leftrightarrow\ z_1-z_2\neq 2\pi ki$$

$$\forall k\in\mathbf{Z}(k\neq 0)\ \Leftrightarrow\ x_1\neq x_2\ \text{або}\ x_1=x_2,\ \text{але}\ y_1-y_2\neq 2\pi k\quad\forall k\in\mathbf{Z},\ k\neq 0.$$

Враховуючи, що в області $D\,|z|<3$, для $z=x+iy$ дістаємо

$$|y|<3\ \Rightarrow\ |y_1-y_2|<6<2\pi|k|\ \ \forall k\in\mathbf{Z},\ k\neq 0,\ \text{якщо}\ z_1\ \text{і}\ z_2\in D.$$

Отже, $f(z_1)\neq f(z_2)$, якщо точки $z_1\neq z_2$ належать області D. Тому дана функція є однолистою у заданій області.

12. 2) У даному випадку множина E складається з точок кола $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$, параметричне рівняння якого має вигляд $z=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\exp it,\ t\in[0;\ 2\pi]$. Тому

$$w=f(z(t))=\frac{1}{z(t)}=\frac{1}{\frac{a}{2}(1+\exp it)}=\frac{2}{a}\cdot\frac{\cos t+1-i\sin t}{|(\cos t+1)+i\sin t|^2}=$$

$$=\frac{2}{a}\cdot\frac{2\cos^2\frac{t}{2}-i\cdot 2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}}{(\cos t+1)^2+\sin^2 t}=\frac{2}{a}\cdot\frac{\cos^2\frac{t}{2}-i\cdot 2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}}{4\cos^2\frac{t}{2}}=\frac{1}{a}\left(1-i\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right).$$

Звідси дістаємо, що $\operatorname{Re}f(z)=\frac{1}{a}$ і $\operatorname{Im}f(z)=-\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{t}{2}$, тому верхнє півколо відображається на нижній промінь, а нижнє півколо — на верхній промінь прямої $\operatorname{Re}f(z)=\frac{1}{a}$ з вершиною у точці $z=\frac{1}{a}$.

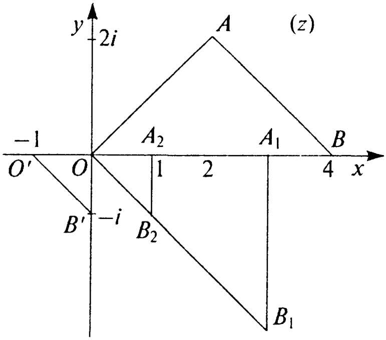


Рис. 36

15. 2) Для відшукання даного відображення треба визначити числа a і b. З цією метою запишемо лінійну функцію у вигляді $w = |a|\exp(i\arg a)z + b$. Враховуючи, що лінійне відображення є конформним у всій комплексній площині , тобто зберігає величини кутів і напрям обходу контуру, неважко помітити, що точка $2 + 2i$ (вершина прямого кута) переходить у точку O, точка 4 — у точку $-i$, а точка O — у точку -1. У зв'язку з цим виконаємо спочатку таке перетворення:

$$w_1 = \exp\left(-\frac{\pi}{4}i\right)z,$$

тобто повернемо заданий трикутник OAB на кут $\frac{\pi}{4}$ за годинниковою стрілкою (рис. 36). Дістанемо трикутник OA_1B_1, який подібний до трикутника $O'OB'$, котрий треба дістати після відображення. Далі виконаємо гомотетію відносно точки O з коефіцієнтом $k = |a| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, оскільки $\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$, тобто виконаємо перетворення

$$w_2 = kw_1 = |a|w_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}w_1.$$

Дістанемо при цьому $\Delta OA_2B_2 = \Delta O'OB'$. Залишається здійснити паралельне перенесення ΔOA_2B_2 ліворуч на одиницю, тобто на вектор $b = -1$: $w_3 = w_2 - 1$. Отже, враховуючи вказані перетворення, дістаємо шукану лінійну функцію

$$w = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)z - 1 = \frac{1-i}{4}z - 1.$$

19. Відомо, що функція $w = \exp z$ відображає горизонтальну смугу $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ на верхню півплощину. Тому спочатку побудуємо відображення даної смуги G на горизонтальну смугу $0 < \operatorname{Im} z < \pi$. Для цього поступово виконаємо такі відображення:

1) $w_1 = \exp\left(-\frac{\pi}{4}i\right)z$ (при цьому смуга G перетвориться в горизонтальну смугу G_1 завширшки $\frac{2}{\sqrt{2}}$, обмежену прямими $y = 0$ і $y = \frac{2}{\sqrt{2}}$);

2) $w_2 = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}w_1$ (у цьому випадку смуга G_1 перетвориться у горизонтальну смугу G_2 завширшки π, тобто відображення $w_2 = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}\exp\left(-\frac{\pi}{4}i\right)z$ смугу G відображає на смугу G_2);

3) $w = \exp w_2$ (дане відображення перетворює смугу G_2 у верхню півплощину).

Таким чином, шукане відображення має вигляд

$$w = \exp\left(\frac{\pi}{2}(1-i)z\right).$$

Розділ 25 ІНТЕГРАЛ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

§ 25.1. Поняття інтеграла, його існування та обчислення. Інтегрування функціонального ряду

Якщо $z(t)=x(t)+iy(t)$, $t\in[\alpha;\ \beta]$, — комплекснозначна функція дійсної змінної t, то інтеграл цієї функції на відрізку $[\alpha;\ \beta]$ визначається рівністю

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} z(t)\,dt=\int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)\,dt+i\int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)\,dt \tag{1}$$

за умови, що інтеграли справа існують.

Нехай функція f комплексної змінної z визначена на неперервній дузі $\Gamma=\{z=z(t):\ t\in[\alpha;\ \beta]\}$, $\{t_k\}_{k=0}^{n}$ — (T)-розбиття відрізка $[\alpha;\ \beta]$, $\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$, $\lambda(T)=\max\limits_{0\le k\le n-1}\Delta t_k$ — дрібність цього розбиття, $z_k=z(t_k)$, $\Delta z_k=z_{k+1}-z_k$, $t_k^*\in[t_k;\ t_{k+1}]$, $z_k^*=z\left(t_k^*\right)$ і $S(T)=\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(z_k^*\right)\Delta z_k$ — інтегральна сума функції f, яка відповідає заданому (T)- розбиттю і вибору точок z_k^*.

Число I називають *границею інтегральної суми* $S(T)$ при $\lambda(T)\to 0$ і записують $I=\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(T)$, якщо

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta(\varepsilon):\ \lambda(T)<\delta(\varepsilon)\Rightarrow\left|S(T)-I\right|<\varepsilon .$$

Інтеграл функції f уздовж кривої Γ — це число

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(z_k^*\right)\Delta z_k . \tag{2}$$

При цьому функцію f називають *інтегровною вздовж* Γ.

Функція $f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$ інтегровна вздовж Γ тоді й тільки тоді, коли існують криволінійні інтеграли $\int\limits_{\Gamma} udx-vdy$ і $\int\limits_{\Gamma} vdx+udy$. При цьому

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz=\int\limits_{\Gamma} udx-vdy+i\int\limits_{\Gamma} vdx+udy . \tag{3}$$

Зокрема, якщо функція f неперервна на кусково-гладкій дузі $\Gamma = \{z = z(t):\ t \in [\alpha;\ \beta]\}$, то вона інтегровна вздовж Γ і

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))\,z'(t)\,dt. \tag{4}$$

Основні властивості інтеграла функції комплексної змінної аналогічні відповідним властивостям криволінійних інтегралів функцій двох змінних. Зокрема, мають місце властивості лінійності, адитивності, про інтеграли за протилежними напрямами, оцінка модуля інтеграла. Узагальненням властивості лінійності є властивість про почленне інтегрування функціонального ряду, а саме: якщо функціональний ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ рівномірно збігається на кусково-гладкій дузі Γ до суми $F(z)$, а члени цього ряду $f_n(z)$ є неперервними функціями на Γ $\forall n \in \mathbf{N}$, то

$$\int_{\Gamma} F(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} f_n(z)\,dz. \tag{5}$$

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження (виконати усно):

1) $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz \approx \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(z_k^*\right)\Delta z_k$, причому абсолютну похибку наближення можна зробити як завгодно малою, якщо розбиття T взяти досить дрібним;

2) якщо функція f інтегровна вздовж Γ, то вона неперервна на Γ;

3) визначений інтеграл функції дійсної змінної є окремим випадком інтеграла функції комплексної змінної;

4) якщо функція $f + \varphi$ інтегровна вздовж дуги Γ, то функції f і φ інтегровні вздовж Γ.

2. Довести або спростувати такі твердження:

1) якщо $f(z) = c$ на неперервній дузі $\Gamma = \{z = z(t):\ t \in [\alpha;\ \beta]\}$, то функція f інтегровна на Γ і $\int\limits_{\Gamma} c\,dz = c(z(\beta) - z(\alpha))$;

2) якщо $F(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ і $f_n(z)$ — неперервні функції на кусково-гладкій дузі Γ, то $\int\limits_{\Gamma} F(z)\,dz = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Gamma} f_n(z)\,dz$;

3) якщо має місце остання рівність, то функціональний ряд є рівномірно збіжним на дузі Γ;

4) функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1-z)\left(nz^n-(n-1)z^{n-1}\right)$ нерівномірно збіжний на відрізку $[0;\ 1]$, але його можна інтегрувати почленно на цьому відрізку;

5)• якщо $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ $\forall z:\ |z-z_0|<R$, а Γ — кусково-гладка дуга, що лежить у крузі $K=\{z:\ |z-z_0|<R\}$, то

$$\int_{\Gamma}f(z)dz=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_{\Gamma}(z-z_0)^n\,dz.$$

3. Обчислити дані інтеграли:

1) $\int_0^1(1+it)^2\,dt$; 2) $\int_0^1\frac{dt}{1+it}$; 3) $\int_0^1\frac{1+it}{1-it}dt$;

4) $\int_0^1\exp itdt$; 5) $\int_0^1\exp i\pi tdt$; 6)• $\int_{-\pi}^{\pi}\exp int\,dt$, $n\in\mathbf{Z}$;

7) $\int_0^1\left(1+i\sqrt{t}\right)^3dt$; 8) $\int_0^1(1-it)\exp itdt$;

9) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}z^m\overline{z}^n dt$, де m і $n\in\{0,\ 1,\ 2,\ ...\}$, а $z=\exp it$.

4. Довести, що коли $w'(t)=z(t)$ $\forall t\in[\alpha;\ \beta]$ і функція z інтегровна на відрізку $[\alpha;\ \beta]$, то

$$\int_{\alpha}^{\beta}z(t)dt=w(t)\Big|_{\alpha}^{\beta}=w(\beta)-w(\alpha).$$

5. Нехай функції z і w неперервні на відрізку $[a;b]$. Довести дані нерівності:

1) $\left|\int_a^b z(t)dt\right|\le\int_a^b|z(t)|dt\le(b-a)\max\limits_{[a;b]}|z(t)|$;

2) $\left|\int_a^b\operatorname{Re}z(t)dt\right|\le\left|\int_a^b z(t)dt\right|\le\left|\int_a^b\operatorname{Re}z(t)dt\right|+\left|\int_a^b\operatorname{Im}z(t)dt\right|$;

3) $\left|\int_a^b z(t)w(t)dt\right|^2\le\left(\int_a^b|z(t)||w(t)|dt\right)^2\le\int_a^b|z(t)|^2dt\int_a^b|w(t)|^2dt$

(*нерівність Коші*);

4) $\left|\int\limits_a^b z(t)w(t)\,dt\right| \le \left(\int\limits_a^b |z(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_a^b |w(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$, якщо $p>1,\ q>1,\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ (*нерівність Гельдера*);

5) $\left(\int\limits_a^b |z(t)+w(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int\limits_a^b |z(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_a^b |w(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\ p\ge 1$ (*нерівність Мінковського*).

6. За допомогою інтегральних сум обчислити дані інтеграли вздовж кусково-гладкої дуги $\Gamma=\{z=z(t): t\in[\alpha;\ \beta]\}$:

1) $\int\limits_\Gamma dz$; 2) $\int\limits_\Gamma z\,dz$; 3)• $\int\limits_\Gamma \dfrac{dz}{z-a}$, $z(t)=a+r\exp it,\ t\in[0;\ 2\pi]$.

7. Обчислити дані інтеграли:

1) $\int\limits_\Gamma |z|\,dz$, Γ — відрізок, що сполучає точки $z_1=-i$ та $z_2=i$;

2) $\int\limits_\Gamma |\overline{z}|\,dz$: а)• Γ — відрізок, що сполучає точки $z_1=0$ і $z_2=1-i$;

б) Γ — коло $|z|=1$;

3) $\int\limits_\Gamma |z|\,dz$, Γ — праве півколо $|z|=1$ від точки $z_1=-i$ до точки $z_2=i$;

4) $\int\limits_\Gamma |z|\overline{z}\,dz$, Γ — верхнє півколо $|z|=1$ від точки $z_1=1$ до точки $z_2=-1$;

5) $\int\limits_\Gamma z\,dz$, Γ — коло $|z-z_0|=r$;

6) $\int\limits_\Gamma z\,dz$, Γ — дуга кривої $y=\sin x$ від точки (π, 0) до точки (0, 0);

7) $\int\limits_\Gamma \operatorname{Im} z\,dz$, Γ — дуга параболи $y=2x^2$ від точки (0, 0) до точки (1, 2);

8)• $\int\limits_\Gamma \overline{z}\operatorname{Re} z\,dz$, Γ — дуга параболи $y=x^2$ від точки (0, 0) до точки (1, 1);

9) $\int\limits_\Gamma \left(z^2+z\overline{z}\right)dz$, Γ — дуга із вправи 8);

10) $\int\limits_\Gamma \left(z^2+z+1\right)dz$, $\Gamma=\{z:\ |z|=1\}$;

11)• $\int\limits_\Gamma \exp\overline{z}\,dz$, Γ — відрізок, що сполучає точки $z_1=0$ і $z_2=\pi+\pi i$;

12) $\int\limits_\Gamma z\operatorname{Im}\left(z^2\right)dz$, $\Gamma=\{z:\ \operatorname{Re} z=1,\ |\operatorname{Im} z|\le 2\}$;

13) $\int\limits_{\Gamma}(|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|)dz$, Γ — квадрат з вершинами у точках 1, i, -1, $-i$;

14)• $\int\limits_{\Gamma}(z-z_0)^{\alpha}\,dz$ $\forall\alpha\in\mathbf{Z}$, Γ — коло $|z-z_0|=r$;

15) $\int\limits_{\Gamma} z\sin z\,dz$, Γ — відрізок, що сполучає точки $z_1=0$ і $z_2=i$;

16) $\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{z-z_0}$, $z=z_0+r\exp it$, $t\in[\alpha;\ \beta]\subset[0;\ 2\pi]$;

17) $\int\limits_{\Gamma}\operatorname{Re}(\cos z)\sin z\,dz$, $\Gamma=\left\{z:\operatorname{Re} z=\frac{\pi}{3},\ |\operatorname{Im} z|\le\frac{1}{2}\right\}$;

18) $\int\limits_{\Gamma}\frac{\ln z}{z}dz$, Γ — відрізок, що сполучає точки $z_1=i$ та $z_2=ie$.

8. Нехай f — неперервна функція в околі точки z_0 і $\Gamma=\{z:|z-z_0|=r\}$. Довести, що

$$\lim_{z\to 0}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0).$$

9. Нехай f — неперервна функція в розширеній комплексній площині, а Γ_a — відрізок, що сполучає точки $z=a$ і $z=a+1$. Довести, що

$$\lim_{a\to\infty}\int\limits_{\Gamma_a} f(z)dz=\lim_{z\to\infty} f(z).$$

10. Нехай $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ $\forall z:\ |z-z_0|<R$, а $\Gamma=\{z:\ |z-z_0|=r<R\}$. Довести, що

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}\quad\forall n=0,\ 1,\ 2\ ,\ \ldots .$$

11. Нехай f — аналітична функція в кільці $K=\{z:\ r<|z-z_0|<R\}$, $z_1\in K:\ r<r_1<|z_1-z_0|<R_1<R$, $\Gamma_{r_1}=\{z:\ |z-z_0|=r_1\}$ і $\Gamma_{R_1}=\{z:\ |z-z_0|=$ $=R_1\}$. Довести, що:

1) $$\int\limits_{\Gamma_{R_1}}\frac{f(z)dz}{z-z_1}=\sum_{n=0}^{\infty}(z_1-z_0)^n\int\limits_{\Gamma_{R_1}}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}};$$

2)• $$\int\limits_{\Gamma_{r_1}}\frac{f(z)dz}{z-z_1}dz=\sum_{n=1}^{\infty}(z_1-z_0)^{-n}\int\limits_{\Gamma_{r_1}}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

12. Обчислити інтеграли від тих однозначних віток даних многозначних функцій, які визначаються вказаною умовою:

1)• $\int\limits_{\Gamma} z^{\alpha} dz$, $\Gamma = \left\{z: |z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}\right\}$, $1^{\alpha} = 1$, $\alpha \in \mathbf{C}$;

2) $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{z} dz$, $\Gamma = \{z: |z| = 4,\ -\pi \le \arg z \le 0\}$, $\sqrt{1} = -1$;

3) $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, $\Gamma = \{z: |z| = 9,\ 0 \le \arg z \le \pi\}$, $\sqrt{1} = 1$;

4) $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt[3]{z}}$, $\Gamma = \left\{z: |z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}\right\}$, $\sqrt[3]{1} = 1$;

5)• $\int\limits_{\Gamma} \mathrm{Ln}\, z\, dz$, $\Gamma = \left\{z: |z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}\right\}$, $\mathrm{Ln}\, i = \frac{\pi}{2} i$;

6) $\int\limits_{\Gamma} \mathrm{Ln}\, z\, dz$, $\Gamma = \{z: |z| = 2,\ 0 \le \arg z \le \pi\}$, $\mathrm{Ln}\, 2 = \ln 2 + 2\pi i$;

7) $\int\limits_{\Gamma} \frac{\mathrm{Ln}\, z}{z} dz$, $\Gamma = \left\{z: |z| = \mathrm{e},\ -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}\right\}$, $\mathrm{Ln}\, \mathrm{e} = 1$.

Зразки розв'язування задач

2. 5) Оскільки дуга Γ і межа ∂K круга K — замкнені обмежені множини, які не перетинаються (тому що $\Gamma \subset K$, а $\partial K \cap K = \varnothing$), то відстань між цими множинами $\rho(\Gamma,\ \partial K) > 0$. Тому існує круг $K_1 = \{z: |z - z_0| < r < R\} \supset \Gamma$. Відомо, що в крузі K_1 степеневий ряд рівномірно збіжний, а отже, він є рівномірно збіжним і на Γ. Оскільки члени степеневого ряду є неперервними функціями в крузі збіжності, то виконуються всі умови про почленне інтегрування ряду, тому дане в умові задачі твердження є правильним.

3. 6) За формулою Ейлера $\exp nit = \cos nt + i \sin nt$. Користуючись формулою (1), дістаємо при $n \ne 0$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp nit\, dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nt\, dt + i \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nt\, dt = \frac{1}{n} \sin nt \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{i}{n} \cos nt \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Якщо $n = 0$, то $\exp nit = 1$, тому $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp nit\, dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi$.

6. 3) Підінтегральна функція є неперервною на кривій Γ, що є колом з центром у точці a і радіусом r. Отже, при обчисленні даного інтеграла можна обмежитися розглядом спеціального (T)-розбиття відрізка $[0;\ 2\pi]$ на частини і спеціального вибору точок t_k^*. Тому відрізок $[0;\ 2\pi]$ розіб'ємо на n рівних частин точками $t_k = \frac{2\pi}{n} \cdot k$, $k \in \overline{0,\ n}$. Тоді $\Delta t_k = \frac{2\pi}{n}$, $\lambda(T) = \frac{2\pi}{n} \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$, $z_k = a + r \exp it_k$, $\Delta z_k = r\left(\exp it_{k+1} - \exp it_k\right)$. Покладемо $t_k^* = t_k$, тоді $z_k^* = z_k$, $f\left(z_k^*\right) = \frac{1}{z_k^* - a} = \frac{1}{r \exp it_k}$ і

$$S(T)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{r\left(\exp it_{k+1}-\exp it_k\right)}{r\exp it_k}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\exp i\Delta t_k-1\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\exp\frac{2\pi i}{n}-1\right)=$$

$$=n\frac{\exp\frac{2\pi i}{n}-1}{2\pi i/n}\cdot\frac{2\pi i}{n}\to 2\pi i,\ n\to\infty.$$

Отже, згідно з формулою (2) маємо $\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{z-a}=2\pi i$.

7. 2), а) Рівняння заданого відрізка запишемо у вигляді $z=(1-i)t,\ 0\le t\le 1$. Тоді $dz=$ $=(1-i)dt,\ \overline{z}=(1+i)t$ і за формулою (4)

$$\int\limits_{\Gamma}\overline{z}dz=\int\limits_0^1(1+i)t(1-i)dt=2\cdot\frac{t^2}{2}\bigg|_0^1=1.$$

8) Виділимо дійсну та уявну частини підінтегральної функції: $\overline{z}\operatorname{Re}z=(x-iy)x=x^2-ixy$, $u(x,\ y)=x^2,\ v(x,\ y)=-xy$. Згідно з формулою (3) маємо

$$\int\limits_{\Gamma}\overline{z}\operatorname{Re}z\,dz=\int\limits_{\Gamma}x^2dx+xy\,dy+i\int\limits_{\Gamma}x^2dy-xy\,dx.$$

Оскільки на дузі Γ $y=x^2,\ 0\le x\le 1$, то $dy=2xdx$ і

$$\int\limits_{\Gamma}\overline{z}\operatorname{Re}z\,dz=\int\limits_0^1\left(x^2+x^3\cdot 2x\right)dx+i\int\limits_0^1x^3dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}\right)\bigg|_0^1+i\frac{x^4}{4}\bigg|_0^1=\frac{11}{15}+\frac{i}{4}.$$

11) Рівняння відрізка Γ запишемо у вигляді $z=(1+i)t,\ 0\le t\le\pi$. Тоді $\overline{z}=(1-i)t,\ dz=$ $=(1+i)dt$, і за формулою (4)

$$\int\limits_{\Gamma}\exp\overline{z}dz=\int\limits_0^{\pi}\exp((1-i)t)(1+i)dt=\frac{1+i}{1-i}\exp(1-i)t\bigg|_0^{\pi}=$$

$$=i(\exp(1-i)\pi-\exp 0)=i\left(e^{\pi}\exp(-i\pi)-1\right)=-i\left(e^{\pi}+1\right).$$

14) Якщо $\alpha=-1$, то $\int\limits_{\Gamma}(z-z_0)^{\alpha}dz=\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{z-z_0}=2\pi i$ (див. вправу 6.3)). Нехай $\alpha\ne -1$ і $\alpha\in\mathbf{Z}$. Параметричне рівняння кола Γ запишемо у вигляді $z=z_0+r\exp it,\ t\in[-\pi;\ \pi]$. Тоді $z'(t)=ir\exp it$ і за формулою (4) маємо

$$\int\limits_{\Gamma}(z-z_0)^{\alpha}dz=\int\limits_{-\pi}^{\pi}r^{\alpha}\exp i\alpha t\cdot ir\exp it\,dt=$$

$$=ir^{\alpha+1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp i(\alpha+1)t\,dt=ir^{\alpha+1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp int\,dt,\ n=\alpha+1\ne 0.$$

Останній інтеграл дорівнює нулю (див. вправу 3.6)). Отже,

$$\int\limits_{\Gamma}(z-z_0)^{\alpha}dz=\begin{cases}2\pi i, & \text{якщо } \alpha=-1,\\ 0, & \text{якщо } \alpha\in\mathbf{Z},\ \alpha\ne -1.\end{cases}$$

11. 2) Скориставшись геометричним рядом $\frac{a}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, $|q| < 1$, перетворимо підінтегральну функцію так:

$$\frac{f(z)}{z-z_1} = \frac{f(z)}{z-z_0+z_0-z_1} = \frac{f(z)}{(z_1-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)} = \frac{f(z)}{z_1-z_0}\cdot\frac{1}{1-q} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{z_1-z_0} q^n, \text{ де } q = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}, \ |q| = \frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|} = \frac{r_1}{|z_1-z_0|} < 1.$$

За умовою функція f аналітична у кільці K, тому неперервна в ньому і, зокрема, на множині Γ_{r_1}, яка є компактною. Тому функція f обмежена на Γ_{r_1}, тобто $\exists M > 0$: $|f(z)| \le$ $\le M \quad \forall z \in \Gamma_{r_1}$

$$\left|\frac{f(z)}{z_1-z_0}\left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)^n\right| \le \frac{M}{|z_1-z_0|}|q|^n \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall z \in \Gamma_{r_1},$$

де $|q| = \frac{r_1}{|z_1-z_0|} < 1$ не залежить від z. Звідси за ознакою Вейєрштрасса дістаємо, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{z_1-z_0}\left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)^n$ рівномірно збігається на колі Γ_{r_1}, тому

$$\int_{\Gamma_{r_1}} \frac{f(z)}{z-z_1}dz = \sum_{n=0}^{\infty} (z_1-z_0)^{-n-1} \int_{\Gamma_{r_1}} f(z)(z-z_0)^n dz =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (z_1-z_0)^{-n} \int_{\Gamma_{r_1}} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{-n+1}}.$$

12. 1) За означенням загальної степеневої функції $z^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Ln} z)$. Враховуючи задану умову $1^\alpha = 1$, дістаємо однозначну вітку $z^\alpha = \exp(\alpha \ln z)$ — головне значення степеневої функції. Тоді при $\alpha = -1$ маємо

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z} = \pi i.$$

Якщо $\alpha \ne -1$, то, записавши рівняння кривої Γ у вигляді $z = \exp it$, $0 \le t \le 2\pi$, дістанемо

$$\int_\Gamma z^\alpha dz = i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(\alpha it)\exp it\, dt = i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(i(\alpha+1)t)dt =$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}\exp(i(\alpha+1)t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{i\exp\frac{i\alpha\pi}{2} - 1}{\alpha+1}.$$

5) Функція $f(z) = \operatorname{Ln} z$ є многозначною:

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2\pi ki = \ln|z| + i\arg z + 2\pi ki.$$

Умову $\operatorname{Ln} i = \frac{\pi}{2} i$ задовольняє та однозначна гілка цієї функції, для якої $k = 0$. Дійсно, при $k = 0$ маємо $\operatorname{Ln} i = \ln|i| + i \arg i = i\frac{\pi}{2}$. Записавши рівняння дуги Γ у вигляді $z = \exp it$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, дістанемо $z' = i \exp it$, $\operatorname{Ln} z = \ln z = it$ і, отже,

$$\int_\Gamma \operatorname{Ln} z\, dz = \int_\Gamma \ln z\, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} it \cdot i \exp it\, dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \exp it\, dt =$$

$$= -\left(t \cdot \frac{1}{i} \exp it\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{i}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp it\, dt = it \exp it \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \exp it \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{2} - i .$$

§ 25.2. Інтегральна теорема і формула Коші. Розвинення аналітичної функції в степеневий ряд. Аналітичність функції за Вейєрштрассом

Інтегральна теорема Коші. Нехай функція f аналітична в однозв'язній області D, а Γ_1 і Γ_2 — кусково-гладкі дуги, що лежать в D і мають початок у точці z_1, а кінець — у точці z_2. Тоді

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz =: \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz, \tag{1}$$

тобто інтеграл залежить від початкової і кінцевої точок дуги, а не від її форми. Зокрема, якщо $\Gamma \subset D$ — замкнена кусково-гладка дуга, то

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0. \tag{2}$$

Якщо функція f аналітична в області G, що містить у собі многозв'язну область D, обмежену кусково-гладкими контурами Γ і γ_k, $k \in \overline{1,\ n}$, причому всі γ_k містяться всередині Γ, то

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \ \dots\ + \int_{\gamma_n} f(z)dz \tag{3}$$

(*теорема Коші* для многозв'язної області). Зокрема, якщо $n = 1$, то

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz \tag{4}$$

(рівність інтегралів з різними контурами).

Якщо функція f аналітична в області D і Γ — кусково-гладкий контур Жордана, що лежить в D разом зі своєю внутрішньою областю D^*, то $\forall z_0 \in D^*$ має місце *інтегральна формула Коші*:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0). \tag{5}$$

Ця формула визначає одну з найважливіших властивостей аналітичної функції, а саме: значення аналітичної функції f у будь-якій точці області D визначається через її значення на контурі цієї області.

Теорема про розвинення аналітичної функції у степеневий ряд. Нехай функція f аналітична в області D, $z_0 \in D$ і $R = \rho(z_0, \partial D) = \inf\limits_{z\in\partial D}|z-z_0|$, де ∂D — межа області D. Тоді в крузі $K = \{z : |z-z_0| < R\}$ функція f розвивається у степеневий ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in K, \tag{6}$$

де

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \forall n \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}, \tag{7}$$

а $\Gamma = \{z : |z-z_0| = R_1\}$, причому $0 < R_1 < R$.

З цієї теореми дістаємо наслідок про зв'язок аналітичності функції з її регулярністю: для того щоб функція f була аналітичною в області D, необхідно й достатньо, щоб вона була регулярною у кожній точці цієї області.

Функцію f називають *аналітичною* в області D *за Вейєрштрассом*, якщо вона регулярна у кожній точці цієї області, тобто $\forall z_0 \in D$ можна вказати такий окіл цієї точки, в якому функцію f можна розвинути у степеневий ряд (6).

Якщо функція f аналітична в області D, то вона має в D похідну будь-якого порядку f^n, $n \in \mathbf{N}_0$, яка також є аналітичною функцією в області D і $\forall z_0 \in D$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \tag{8}$$

де Γ — будь-який кусково-гладкий контур Жордана, який лежить в області D разом зі своєю внутрішньою частиною D^*, причому $z_0 \in D^*$.

Якщо $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ і $|f(z)| \le M \quad \forall z \in K = \{z: |z-z_0| < R\}$, то

$$|a_n| \le \frac{M}{R^n} \quad \forall n \in \mathbf{N}_0 \tag{9}$$

(*нерівність Коші для коефіцієнтів степеневого ряду*).

Теорема Ліувілля. *Якщо функція f аналітична й обмежена в комплексній площині* $\mathbf{C}$, *то вона є сталою в* $\mathbf{C}$.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) якщо функція f аналітична в області D і $\Gamma \subset D$ — кусково-гладкий контур Жордана, то $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0$;

2) якщо функція f аналітична в області $D=\{z: \operatorname{Re} z > 0\}$, то $\int\limits_{AB} f(z)dz$ не залежить від форми кусково-гладкої дуги $AB \subset D$;

3) якщо функція f аналітична в крузі K і $|f(z)| \le M \ \forall z \in K$, то $\left| \int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz \right| \le$ $\le M|z_1 - z_2|$;

4) $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$ для будь-якого кусково-гладкого контуру Жордана;

5) кожну функцію f, аналітичну в області D, можна розвинути в цій області у степеневий ряд;

6) кожну функцію f, аналітичну в комплексній площині $\mathbf{C}$, можна розвинути в $\mathbf{C}$ у степеневий ряд;

7) означення аналітичності за Коші, Ріманом і Вейєрштрассом є еквівалентними;

8) якщо функція $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ обмежена в крузі $K=\{z: |z|<1\}$, то послідовність (a_n) обмежена;

9) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

10) якщо функція f аналітична й обмежена в області D, то вона є сталою в D.

2. Виконати усно такі завдання.

1) Визначити, в яких випадках до інтеграла $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^2-1}$ можна застосувати інтегральну теорему Коші, якщо контуром інтегрування Γ є коло:

а) $|z| = \frac{1}{2}$; б) $|z| = 2$; в) $|z-1| = 1$; г) $|z+1| = 1$;

д) $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4}$;   е) $|z+i|=1$;   є) $|z-i|=1$.

2) Вказати, які з даних функцій можна розвинути у степеневий ряд в деякому околі відповідної точки z_0:

а) $f(z)=\frac{1}{z},\ z_0=1$;   б) $f(z)=\frac{1}{z},\ z_0=0$;

в) $f(z)=\exp\frac{1}{z},\ z_0=0$;   г) $f(z)=\frac{1}{z+1},\ z_0=-1$;

д) $f(z)=\sin\frac{1}{z+1},\ z_0=0$;   е) $f(z)=\frac{1}{z^2+1},\ z_0=i$;

є) $f(z)=\operatorname{tg} z,\ z_0=\frac{\pi}{2}$;   ж) $f(z)=\begin{cases}\frac{\sin z}{z}, & z\neq 0,\\ 1, & z=0,\end{cases}\quad z_0=0$.

3. Нехай функція f аналітична в кільці $K=\{z:\ r<|z-z_0|<R\}$ і $\Gamma_\rho=\{z:\ |z-z_0|=\rho\}$, де $r<\rho<R$. Довести, що $\int\limits_{\Gamma_\rho} f(z)dz$ не залежить від $\rho\in(r;\ R)$.

4. Обчислити дані інтеграли:

1) $\int\limits_{|z+i|=3}\frac{\sin z}{z+i}dz$;   2) $\int\limits_{|z|=4}\frac{\exp 2z}{z-\pi i}dz$;   3) $\int\limits_{|z|=2}\frac{\exp z}{z^2-1}dz$;

4) $\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1}dz$;   5) $\int\limits_{|z-i|=3}\frac{z}{z^2+4}dz$;   6) $\int\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\exp z-1}{z(z-i)}dz$;

7) $\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{z(2-z)}$, якщо: а) $\Gamma=\{z:\ |z|=1\}$;

б) $\Gamma=\{z:\ |z-2|=1\}$;   в) $\Gamma=\{z:\ |z-1|=2\}$.

8)• $\int\limits_{\Gamma}\frac{z}{(z+1)(z^2+1)}dz$, якщо: а) $\Gamma=\left\{z:\ |z|=\frac{1}{2}\right\}$;

б) $\Gamma=\{z:\ |z+1|=1\}$;   в) $\Gamma=\{z:\ |z|=2\}$.

9) $\int\limits_{|z-i|=1}\frac{zdz}{z^4-1}$;   10) $\int\limits_{|z|=1}\operatorname{ctg} z\,dz$;   11) $\int\limits_{|z-1|=1}\operatorname{tg} z\,dz$.

5. Користуючись формулою (8), обчислити дані інтеграли:

1) $\int\limits_{|z|=1}\frac{\sin z}{z^2}dz$;   2)• $\int\limits_{|z|=2}\frac{z\sin z}{(z+1)^3}dz$;   3) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=4}\frac{\cos z\,dz}{(z-\pi)^{45}}$;

4) $\int\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{z^2(z-i)^4}$;   5) $\int\limits_{|z+i|=3}\frac{\exp z}{(\pi i+z)^7}dz$;   6)• $\int\limits_{|z|=1}\frac{\operatorname{ctg} z}{z}dz$;

7) $\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}$, де: а) $\Gamma=\{z:\ |z-1|=1\}$;

б) $\Gamma=\{z:\ |z+1|=1\}$; в) $\Gamma=\{z:\ |z|=r,\ r\neq 1\}$.

6. Обчислити дані інтеграли вздовж кусково-гладкого жорданового контура Г, що обмежує довільну область D:

1) $\int\limits_{\Gamma}\frac{\exp z}{z-i}dz$; 2) $\int\limits_{\Gamma}\frac{\operatorname{sh} z}{z^2-z}dz$; 3) $\int\limits_{\Gamma}\frac{\cos z}{(z-i)^3}dz$;

4)• $\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{(1+z)(z-1)^3}$; 5) $\int\limits_{\Gamma}\frac{\exp z}{z(1-z)^3}dz$; 6) $\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$, $n\in\mathbf{N}$.

7. Нехай функція f аналітична в області D і $\overline{K}=\{z:\ |z-z_0|\le R\}\subset D$. Довести, що

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0+R\exp it)dt=f(z_0)$$

(*теорема про середнє*).

8•. Довести, що коли функція f аналітична в області D і відмінна від сталої у будь-якому околі $O(z_0)\subset D\ \forall z_0\in D$, то функція $|f|$ не може набувати в цій області свого найбільшого значення (*принцип максимуму модуля*).

9. Обчислити визначені інтеграли:

1)• $\int\limits_0^{2\pi}\cos^4 x\,dx$; 2) $\int\limits_0^{2\pi}\sin^6 x\,dx$; 3) $\int\limits_0^{2\pi}\cos^8 x\,dx$.

10. Довести, що:

1) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{\cos t+a}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, $a>1$; 2) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{a}{a^2+\sin^2 t}dt=\frac{2\pi}{\sqrt{1+a^2}}$, $a>0$.

11*. Довести дані рівності:

1)• $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2ax\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2}$;

2) $\int\limits_0^{+\infty}\cos x^2dx=\int\limits_0^{+\infty}\sin x^2dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (*інтеграли Френеля*);

3) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ (*інтеграл Діріхле*).

12•. Довести, що в крузі $|z|<1$ мають місце такі розвинення:

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n, \tag{10}$$

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n, \tag{11}$$

$$\frac{1}{\left(1+z^2\right)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{2n}. \tag{12}$$

13. Знайти суму даного ряду в крузі збіжності:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2nz^{2n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)z^{2n-1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(2n-1)z^{n+2}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^2+7n+4\right)z^n$.

14. Знайти розвинення даної функції f у степеневий ряд в околі точки z_0:

1) $f(z)=\exp 2z,\ z_0=0$; 2)• $f(z)=\cos^2\frac{z}{2},\ z_0=0$;

3) $f(z)=\sin 3z,\ z_0=0$; 4) $f(z)=\sin^2 z,\ z_0=0$;

5) $f(z)=\operatorname{sh}\frac{z}{3},\ z_0=0$; 6) $f(z)=\operatorname{ch}2z,\ z_0=0$;

7) $f(z)=(\exp z-1)^2,\ z_0=0$; 8) $f(z)=\sin z,\ z_0=a$;

9) $f(z)=\exp z,\ z_0=a$; 10) $f(z)=\operatorname{ch} z,\ z_0=a$;

11) $f(z)=\operatorname{sh} z,\ z_0=a$; 12) $f(z)=\frac{z}{1-2z},\ z_0=0$;

13) $f(z)=\frac{1}{(1+z)^2},\ z_0=0$; 14) $f(z)=\frac{z}{1-z^2},\ z_0=0$;

15) $f(z)=\frac{1}{z^2-z-2},\ z_0=0$; 16)• $f(z)=\frac{4-3z}{z^2-3z+2},\ z_0=0$;

17) $f(z)=\frac{2z-5}{z^2-5z+6},\ z_0=0$; 18) $f(z)=\frac{1}{1-z},\ z_0=a,\ a\neq 1$;

19) $f(z)=\sin^4 z+\cos^4 z,\ z_0=0$; 20)• $f(z)=\exp z\cdot\sin z,\ z_0=0$.

15. Нехай функція f аналітична в околі нуля, $f(0)=0$ і $f(z)=z+f\left(z^2\right)$ $\forall z\in O(0)$. Довести, що $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^{2^n}$ $\forall z\in O(0)$.

16. Нехай Φ_n — числа Фібоначчі: $\Phi_0=1,\ \Phi_1=1,\ \Phi_{n+2}=\Phi_{n+1}+\Phi_n$ $\forall n\in\mathbf{N}_0$. Довести, що:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Phi_n z^n=\frac{1}{1-z-z^2}\quad\forall z\in O(0)$;

2) $\Phi_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$, $n \in \mathbf{N}_0$.

17*. Нехай $C_n^\alpha = \frac{\alpha(\alpha-1)\ \dots\ (\alpha-n+1)}{n!}$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $C_0^\alpha = 1$ — біноміальні коефіцієнти, $B_0 = 1$, $C_{n+1}^0 B_0 + C_{n+1}^1 B_1 + \ \dots\ + C_{n+1}^n B_n = 0$ $\forall n \in \mathbf{N}$ (B_n називають *числами Бернуллі*), $E_0 = 1$, $E_{2n+1} = 0$, $E_0 + C_{2n}^2 E_2 + C_{2n}^4 E_4 + \ \dots\ + C_{2n}^{2n} E_{2n} = 0$ (E_n називають *числами Ейлера*). Довести, що:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \frac{z}{\exp z - 1}$ $\forall z: |z| < 2\pi$;

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!} z^{2n} = \frac{1}{\cos z}$ $\forall z: |z| < \frac{\pi}{2}$.

18. Довести, що коли функція $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ обмежена в крузі $K = \{z: |z - z_0| < R\}$ і $R > 1$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$.

19. Нехай функція f аналітична в крузі $K = \{z: |z| < R\}$ і неперервна в замкненому крузі $\bar{K}$. Довести, що

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right| \le \frac{MR}{(R - |z|)^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall z \in K, \text{ де } M = \max_{\bar{K}} |f(z)|.$$

20. Довести, що коли функція f аналітична у комплексній площині $\mathbf{C}$ і f' обмежена в $\mathbf{C}$, то f є многочленом не вище першого степеня.

21. Узагальнити попереднє твердження на випадок n-ї похідної.

22. За допомогою теореми Ліувілля довести, що кожний многочлен степеня $n \ge 1$ має у комплексній площині принаймні один нуль.

23. Довести, що коли f — многочлен степеня $n \ge 1$, то $f(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$, тобто множиною значень f є вся комплексна площина.

24. Довести, що для кожного многочлена $P(z)$ і кожного числа z_0 існують числа n і a_k, $k \in \overline{0,\ n}$, такі, що $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k$ $\forall z \in \mathbf{C}$.

Зразки розв'язування задач

4. 8), а) В області, обмеженій контуром $|z| = \frac{1}{2}$, підінтегральна функція є аналітичною, тому за інтегральною теоремою Коші

$$I = \int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z}{(z+1)(z^2+1)} dz = 0.$$

б) У цьому випадку область, обмежена колом $|z+1|=1$, містить лише одну точку $z=-1$, в якій знаменник підінтегральної функції перетворюється в нуль, а функція $f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$ є аналітичною, тому за інтегральною формулою Коші (5) маємо

$$I=\int\limits_{|z+1|=1}\frac{\frac{z}{z^2+1}}{z+1}dz=2\pi i\frac{z}{z^2+1}\bigg|_{z=-1}=-\pi i.$$

в) Область, обмежена контуром $|z|=2$, містить усі три точки -1, i та $-i$, в яких знаменник підінтегральної функції дорівнює нулю.

Обчислимо даний інтеграл двома способами.

1-й спосіб. Побудуємо кола γ_1, γ_2 і γ_3 з центрами в точках -1, i та $-i$ відповідно і так, щоб вони між собою не перетиналися і містилися в крузі $|z|<2$ (рис. 37). Використовуючи формули (3) і (5), дістаємо

$$I=\int\limits_{\gamma_1}\frac{\frac{z}{z^2+1}}{z+1}dz+\int\limits_{\gamma_2}\frac{\frac{z}{(z+i)(z+1)}}{z-i}dz+\int\limits_{\gamma_3}\frac{\frac{z}{(z-i)(z+1)}}{z+i}dz=$$

$$=2\pi i\left(\frac{z}{z^2+1}\bigg|_{z=-1}+\frac{z}{(z+i)(z+1)}\bigg|_{z=i}+\frac{z}{(z-i)(z+1)}\bigg|_{z=-i}\right)=0$$

2-й спосіб. Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби, обчислимо невідомі коефіцієнти і скористаємося формулою $\int\limits_{\Gamma}\dfrac{dz}{z-a}=2\pi i$ (див. вправу 6.3) § 25.1) для обчислення кожного з отриманих інтегралів. Отже, маємо

$$\frac{z}{(z+1)\left(z^2+1\right)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-i}+\frac{C}{z+i}=\frac{A\left(z^2+1\right)+B(z+1)(z+i)+C(z+1)(z-i)}{(z+1)\left(z^2+1\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=-\frac{1}{2},\ B=\frac{1-i}{4},\ C=\frac{1+i}{4},\ I=2\pi i(A+B+C)=0.$$

5. 2) Користуючись формулою (8), дістаємо

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{z\sin z}{(z+1)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}\cdot\frac{d^2(z\sin z)}{dz^2}\bigg|_{z=-1}=\pi i(2\cos z-z\sin z)\big|_{z=-1}=\pi i(2\cos 1-\sin 1).$$

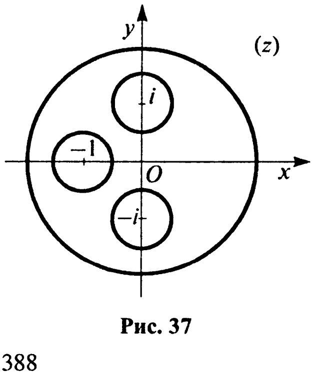


Рис. 37

6) Оскільки

$$f(z)=\frac{\operatorname{ctg} z}{z}=\frac{\cos z}{z\sin z}=\frac{\cos z\cdot\frac{z}{\sin z}}{z^2}=\frac{\varphi(z)}{z^2},$$

де

$$\varphi(z)=\cos z\cdot\frac{z}{\sin z}=\frac{\cos z}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}},$$

то функцію φ можна вважати аналітичною в крузі $|z|<2$, в якому лежить коло $|z|=1$. За формулою (8)

$$\varphi^{(n)}(0)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{\varphi(z)dz}{(z-0)^{n+1}}.$$

При $n=1$ дістаємо

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{\operatorname{ctg} z}{z}dz=\int\limits_{|z|=1}\frac{\varphi(z)}{(z-0)^2}dz=\varphi'(0)\cdot 2\pi i.$$

Оскільки

$$\varphi'(z)=\frac{-\sin z\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}-\cos z\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2nz^{2n-1}}{(2n+1)!}}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}\right)^2},$$

то $\varphi'(0)=0$. Отже,

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{\operatorname{ctg} z}{z}dz=0.$$

6. 4) Розглянемо всі можливі випадки положення контуру Γ.

а) Нехай контур Γ обмежує область D, яка не містить точок $z=-1$ і $z=1$. Тоді підінтегральна функція є аналітичною в цій області і заданий інтеграл дорівнює нулю (за інтегральною теоремою Коші).

б) Якщо контур Γ містить всередині себе точку $z=-1$ і не містить точки $z=1$, то функція $f(z)=\frac{1}{z+1}$ є аналітичною в цій області, і тоді за формулою (8) маємо

$$I=\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{(1+z)(z-1)^3}=\frac{2\pi i}{2!}f''(1)=\pi i\frac{2}{(1+z)^3}\bigg|_{z=1}=\frac{\pi i}{4}.$$

в) Нехай контур Γ обмежує область, що містить точку $z=-1$ і не містить точки $z=1$. Тоді функція $f(z)=\frac{1}{(z-1)^3}$ є аналітичною в цій області і за формулою (5)

$$I=2\pi i\, f(-1)=2\pi i\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{\pi i}{4}.$$

г) Контур Γ обмежує область, що містить точки -1 і 1. Тоді, скориставшись тим самим способом, що й при розв'язуванні вправи 4.8), в), дістанемо

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{(1+z)(z-1)^3}=\int\limits_{\gamma_1}\frac{\frac{1}{(z-1)^3}}{1+z}dz+\int\limits_{\gamma_2}\frac{\frac{1}{1+z}}{(z-1)^3}dz=-\frac{\pi i}{4}+\frac{\pi i}{4}=0.$$

8. Припустимо, що $\exists z_0\in D:\ |f(z_0)|=\max\limits_{z\in D}|f(z)|$. Тоді $|f(z)|\le|f(z_0)|\quad\forall z\in D$. Візьмемо довільне число $R>0$ таке, що $\overline{K}=\{z:\ |z-z_0|\le R\}\subset D$. Тоді згідно з вправою 7

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}f(z_0+R\exp it)dt=f(z_0)\ \Rightarrow\ |f(z_0)|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(z_0+R\exp it)|dt.$$

Якщо припустити, що принаймні в одній точці $z^* = z_0 + R\exp it^*$, що лежить на колі $z = z_0 + R\exp it$, $t \in [0;\ 2\pi]$, правильна нерівність $|f(z_0 + R\exp it)| < |f(z_0)|$, то внаслідок неперервності функції $|f(z_0 + R\exp it)|$ знайшовся б відрізок $[\alpha;\beta] \subset [0; 2\pi]$ такий, що $\max\limits_{[\alpha;\beta]} |f(z_0 + R\exp it)| < |f(z_0)|$. Тоді

$$|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_0^\alpha + \int\limits_\alpha^\beta + \int\limits_\beta^{2\pi}\right)|f(z_0 + R\exp it)|\,dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\left(|f(z_0)\cdot\alpha + \max_{[\alpha;\beta]}|f(z_0 + R\exp it)|(\beta-\alpha) + |f(z_0)(2\pi-\beta) < |f(z_0)|,\right.$$

що неможливо. Таким чином, на кожному колі $|z - z_0| = R$ достатньо малого радіуса $R > 0$ маємо $|f(z)| = |f(z_0)|$. Звідси згідно з вправою 7.4) § 24.1 $f(z) = \text{const}$ у деякому околі точки $z_0 \in D$, а це суперечить умові задачі. Тому припущення, що $\exists z_0 \in D$: $|f(z_0)| = \max\limits_D |f(z)|$ неправильне, а отже, принцип максимуму модуля доведено.

9. 1) Виконавши заміну $z = \exp ix$, $dz = i\exp ix dx$, заданий інтеграл зведемо до інтеграла по контуру $|z| = 1$. Далі маємо $dx = \dfrac{dz}{iz}$ і $\cos x = \dfrac{\exp ix + \exp(-ix)}{2} = \dfrac{z^2+1}{2z}$. Тоді

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^4 x dx = \int\limits_{|z|=1} \left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^4 \frac{dz}{iz} = \frac{1}{16i}\int\limits_{|z|=1} \frac{\left(z^2+1\right)^4}{z^5}dz.$$

Застосовуючи формулу (8), дістаємо

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^4 x dx = \frac{1}{16i}\cdot\frac{2\pi i}{4!}\left(\left(z^2+1\right)^4\right)^{\text{IV}}\Bigg|_{z=0} = \frac{3}{4}\pi,$$

оскільки $f'(z) = 8z\left(z^2+1\right)^3$, $f''(z) = 8\left(z^2+1\right)^2\left(7z^2+1\right)$, $f'''(z) = 16\left(z^2+1\right)\left(21z^3+9z\right)$, $f^{\text{IV}}(z) = 16\left(2z\left(21z^3+9z\right) + \left(z^2+1\right)\left(63z^2+9\right)\right)$, $f^{\text{IV}}(0) = 16\cdot 9$.

11. 1) Розглянемо функцію $f(z) = \exp\left(-z^2\right)$, яка є аналітичною на всій комплексній площині, і проінтегруємо її по контуру прямокутника Γ: $|x| \le R$, $0 \le y \le a$ (рис. 38). Маємо

$$\int\limits_\Gamma \exp\left(-z^2\right)dz = \int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}dx + \int\limits_0^a \exp\left(-(R+iy)^2\right)idy + \int\limits_R^{-R}\exp\left(-(x+ia)^2\right)dx + \int\limits_a^0 \exp\left(-(-R+iy)^2\right)idy =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}dx + i\int\limits_0^a e^{-R^2+y^2}\exp(-2iRy)dy + \int\limits_R^{-R} e^{-x^2+a^2}\exp(-2aix)dx + i\int\limits_a^0 e^{-R^2+y^2}\exp(2Riy)dy =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}dx + 2\int\limits_0^a e^{-R^2+y^2}\sin 2y dy + \int\limits_R^0 e^{-x^2+a^2}\exp(-2aix)dx + \int\limits_0^{-R} e^{-x^2+a^2}\exp(-2aix)dx =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}dx - 2\int\limits_0^R e^{-x^2+a^2}\cos 2ax dx + 2\int\limits_0^a e^{-R^2+y^2}\sin 2yR\, dy.$$

Враховуючи, що за інтегральною теоремою Коші

$$\int_{\Gamma} \exp\left(-z^2\right) dz = 0,$$

дістаємо

$$\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx - 2\int_{0}^{R} e^{-x^2+a^2} \cos 2ax\, dx +$$

$$+2\int_{0}^{a} e^{-R^2+y^2} \sin 2yR\, dy = 0.$$

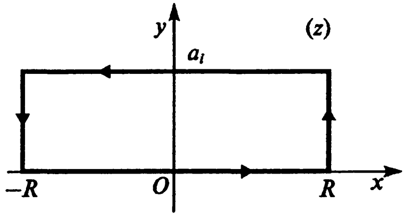


Рис. 38

Переходячи в цій рівності до границі при $R \to \infty$ і беручи до уваги, що

$$\lim_{R\to\infty} \int_{0}^{a} e^{-R^2+y^2} \sin 2yR\, dy = 0,$$

маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2+a^2} \cos 2ax\, dx = 0.$$

Оскільки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (інтеграл Ейлера — Пуассона), то

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2ax\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2}.$$

12. Коефіцієнти a_n у даному випадку зручно обчислювати за правою частиною формули (7), а саме: $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Маємо:

$$f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad f(0) = 1; \; f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad f'(0) = 1; \; f''(z) = \frac{2!}{(1-z)^3},$$

$$f''(0) = 2!, \;\ldots\;, \; f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}, \; f^{(n)}(0) = n! \;\ldots\; \Rightarrow \; a_0 = a_1 = \ldots = a_n = \ldots = 1.$$

Підставляючи значення a_n у формулу (6), дістаємо розвинення (10):

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \; |z| < 1.$$

Диференціюючи останній ряд в його крузі збіжності, дістаємо формулу (11):

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n, \; |z| < 1.$$

Нарешті, замінивши у цьому ряді z на $-z^2$, маємо ряд (12):

$$\frac{1}{\left(1+z^2\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{2n}, \; |z| < 1.$$

14. 2) У цьому випадку можна обійтися без копіткої роботи з обчислення коефіцієнтів a_n, а скористатись відомим розвиненням у ряд функції $\cos z$, виконавши попередньо елементарне перетворення. Отже, маємо

$$\cos^2\frac{z}{2}=\frac{1+\cos z}{2}=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\ |z|<\infty.$$

16) У даному випадку можна уникнути обчислення коефіцієнтів a_n (що привело б до складних обчислень), розкладаючи заданий дріб на елементарні та використовуючи розвинення (10).

Оскільки коренями знаменника є числа 1 і 2, то

$$\frac{4-3z}{z^2-3z+2}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}\ \Rightarrow\ A=-1,\ B=-2.$$

Отже,

$$\frac{4-3z}{z^2-3z+2}=-\frac{1}{z-1}-\frac{2}{z-2}=\frac{1}{1-z}+\frac{2}{2-z}.$$

Користуючись формулою (10), дістаємо

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ \dots\ +z^n+\ \dots\ ,\ |z|<1,$$

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ \dots\ +\frac{z^n}{2^n}+\ \dots\ ,\ |z|<2.$$

У крузі $|z|<1$ обидва допоміжних ряди збігаються, тобто їх можна почленно додати. Тоді дістанемо шукане розвинення:

$$\frac{4-3z}{z^2-3z+2}=2+\left(1+\frac{1}{2}\right)z+\left(1+\frac{1}{2^2}\right)z^2+\dots+\left(1+\frac{1}{2^n}\right)z^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)z^n,\ |z|<1.$$

20) За формулою Ейлера

$$\sin z=\frac{1}{2i}(\exp iz-\exp(-iz)).$$

Користуючись відомим розвиненням $\exp z$ за степенями z, маємо

$$f(z)=\frac{1}{2i}\exp z(\exp iz-\exp(-iz))=\frac{1}{2i}(\exp z(1+i)-\exp z(1-i))=$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n z^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n z^n}{n!}\right).$$

Враховуючи, що

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\ \Rightarrow\ (1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\ \Rightarrow\ (1-i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

$$(1+i)^n-(1-i)^n=2^{\frac{n}{2}}\cdot 2i\sin\frac{n\pi}{4},$$

остаточно дістаємо

$$f(z)=\exp z\cdot\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\cdot\frac{z^n}{n!}\quad \forall z\in \mathbf{C}.$$

§ 25.3. Властивість єдиності та нулі аналітичної функції

Нехай у крузі $K = \{ z : |z - z_0| < R \}$ мають місце розвинення $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ та $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ і, крім того, $f(z) = \varphi(z) \quad \forall z \in E \subset D$, причому z_0 — гранична точка множини E. Тоді $f(z) = \varphi(z) \quad \forall z \in K$ (*властивість єдиності аналітичної функції в крузі*).

Нехай функції f і φ аналітичні в області D і набувають однакових значень на множині $E \subset D$, яка має в D принаймні одну граничну точку. Тоді $f(z) = \varphi(z) \quad \forall z \in D$ (*властивість єдиності аналітичної функції в довільній області*).

Точку z_0 називають *нулем функції* f, якщо $f(z_0) = 0$.

Якщо z_0 — нуль функції f, аналітичної в деякому околі точки z_0, то $a_0 = f(z_0) = 0$, тому

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in O(z_0). \tag{1}$$

Точку z_0 називають *нулем кратності* m функції f, якщо $\exists m \in \mathbf{N}: \ a_m \neq 0$ і

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in O(z_0). \tag{2}$$

Зрозуміло, що в цьому випадку $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, а $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Зокрема, при $m = 1$ точку z_0 називають *простим нулем функції* f.

Множина E нулів аналітичної в області D функції $f(z) \not\equiv 0$ не має в D граничних точок, тому кожна точка множини $E = \{ z \in D : \ f(z) = 0 \}$ є ізольованою точкою цієї множини.

Для того щоб точка z_0 була нулем кратності m функції f, аналітичної в $O(z_0)$, необхідно й достатньо, щоб існувала функція φ, аналітична в $O(z_0)$ і така, що

$$\varphi(z_0) \neq 0 \ \text{ і } \ f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z) \quad \forall z \in O(z_0). \tag{3}$$

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження (виконати усно):

1) якщо функція f аналітична в $\mathbf{C}$ і $f(z) \equiv 0$ на множині E, яка є нескінченною, то $f(z) \equiv 0$ на множині $\mathbf{C}$;

2) кожна функція, аналітична в області D, має в D принаймні один нуль;

3) кожний многочлен має в заданій області принаймні один нуль;

4) кожний многочлен має в комплексній площині принаймні один нуль.

2. Довести або спростувати такі твердження:

1) якщо два квадратних тричлени набувають однакових значень у трьох точках, то вони набувають однакових значень у всій комплексній площині;

2) для того щоб два многочлени степеня n набували однакових значень $\forall z \in \mathbf{C}$, необхідно й достатньо, щоб вони набували однакових значень у $(n+1)$-й точці;

3) $f(z) \equiv 0$ в області D тоді й тільки тоді, коли функція f аналітична в D й існує множина $E \subset D$ така, що $E' \cap D \neq \varnothing$ і $f(z) \equiv 0$ на множині E;

4) якщо функція f неперервна в області D і $f(z) \equiv 0$ на множині $E \subset D$, причому $E' \cap D \neq \varnothing$, то $f(z) \equiv 0$ в D;

5)• якщо функція f неперервна в області D і $f(z) \equiv 0$ на множині $E \subset D$, причому $E \cup E' = D$, то $f(z) \equiv 0$ в D;

6) якщо функція f аналітична в області D, то кожна точка множини $E = \{z \in D : f(z) = 0\}$ є ізольованою точкою E;

7) якщо z_0 — нуль кратності m функції f, то z_0 — нуль кратності $m-1$ функції f';

8) усі нулі функції $f(z) = \sin z$ є простими.

3. Нехай $f(z) \neq \text{const}$ — аналітична функція в крузі $K = \{z : |z - z_0| < R \leq \leq +\infty\}$ і a — довільне фіксоване число. Довести, що $\forall R_1 < R$ множина $E = = \{z : |z - z_0| < R_1 \text{ і } f(z) = a\}$ скінченна (зокрема, порожня).

4. Довести, що коли в околі нуля функція f аналітична і $f(z) = f(2z)$, то $f(z) = \text{const}$ у цьому околі.

5. Визначити, чи існує функція f, аналітична в околі нуля і така, що $\forall n \in \mathbf{N}_0 : n \geq n_0$ задовольняє дану умову:

1) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \sin\dfrac{\pi n}{2}$; 2)• $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\cos \pi n$; 3) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n+1}$;

4) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2}$; 5) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n+1}$;

6) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \exp(-n)$; 7) $\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right| \leq \exp(-n)$.

6. Довести, що коли в області D функція f аналітична і відмінна від сталої, то функція $|f|$ не може набувати в будь-якій точці області D свого найбільшого значення (*принцип максимуму модуля*; порівняти із вправою 8 § 25.2).

7•. Нехай функція f аналітична в крузі $K = \{z : |z| < 1\}$, $|f(z)| < M$ $\forall z \in K$ і $f(0) = 0$. Довести, що $|f(z)| \leq M|z|$ $\forall z \in K$, причому, якщо існує z_0 таке, що $0 < |z_0| < 1$ і $|f(z_0)| = M(z_0)$, то $f(z) = Mz \exp i\varphi$ для деякого дійсного φ (*лема Шварца*).

8. Знайти нулі даної функції та визначити їх кратність m:

1) $f(z)=z^4-5z^2+4$; 2) $f(z)=z^3+z^2-8z-12$;

3) $f(z)=z^4+2z^2+1$; 4) $f(z)=\operatorname{ctg} z$; 5) $f(z)=\dfrac{\cos\pi\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$;

6) $f(z)=1-\cos z$; 7) $f(z)=1+\operatorname{ch} z$; 8) $f(z)=\operatorname{sh}2z$;

9) $f(z)=1-\exp z$; 10)• $f(z)=\exp 2z-4\exp z+3$;

11) $f(z)=\operatorname{cth}\dfrac{z}{2}$; 12) $f(z)=\exp z-i$; 13) $f(z)=i-\operatorname{sh} z$;

14) $f(z)=i+\operatorname{th} z$; 15)• $f(z)=z\operatorname{sh} z$; 16) $f(z)=z\operatorname{tg}^2 z$.

9. Довести формулу (3).

Зразки розв'язування задач

2. 5) Нехай z_0 — довільна фіксована точка з області D. Оскільки $D=E\cup E'$, то $z_0\in E$ або $z_0\in E'$. Якщо $z_0\in E$, то за умовою $f(z_0)=0$. Якщо $z_0\in E'$, тобто є граничною точкою множини E, то $\exists(z_n):\ z_n\in E,\ z_n\neq z_0$ і $z_n\to z_0$, коли $n\to\infty$. За умовою функція f неперервна в області D, а отже, і в точці z_0, тому $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=f(z_0)$. Однак $f(z_n)=0$, оскільки $z_n\in E$.

Таким чином, $f(z_0)=\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=0$, тому дане твердження є правильним.

5. 2) Припустимо, що існує функція f, аналітична в околі нуля, для якої $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=$ $=\dfrac{1}{n}\cos\pi n$. Тоді

$$f\left(\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n}\cos 2\pi n=\frac{1}{2n},$$

тому $f(z)=z\quad \forall z\in\left\{\dfrac{1}{2n}:\ n\in\mathbf{N}\right\}=E$. Звідси за властивістю єдиності аналітичної функції маємо $f(z)=z\quad\forall z\in O(0)$. Тому $f\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2n+1}$. Однак за умовою $f\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)=$ $=\dfrac{1}{2n+1}\cos(2n+1)\pi=\dfrac{-1}{2n+1}$. Дістали суперечність, яка й доводить неправильність припущення. Отже, не існує функції, яка б задовольняла дану умову.

7. За теоремою про розвинення аналітичної функції в степеневий ряд маємо

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\quad \forall z:\ |z|<1.$$

Оскільки $a_0=f(0)$, то з умови задачі випливає, що $a_0=0$. Тому

$$\frac{f(z)}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^{n-1}=\varphi(z),$$

де функція φ аналітична в крузі $K=\{z:\ |z|<1\}$. За принципом максимуму модуля (див. вправу 8 § 25.2) маємо $\forall R\in(0;\ 1)$

$$\max_{|z|\le R}|\varphi(z)|=\max_{|z|=R}|\varphi(z)|=\max_{|z|=R}\frac{|f(z)|}{|z|}\le\frac{M}{R}\Rightarrow\left|\frac{f(z)}{z}\right|\le\frac{M}{R}\Rightarrow|f(z)|\le\frac{M}{R}|z|\quad\forall z\in K.$$

Якщо в останній нерівності спрямувати R до 1, то дістанемо

$$|f(z)|\le M|z|.$$

Якщо тепер припустити, що $\exists z_0: 0<|z_0|<1$ і $|f(z_0)|=M|z_0|$, то функція φ набуває найбільшого значення в точці z_0, тому за принципом максимуму модуля $\varphi(z)=\mathrm{const}=C$, причому $\left|\frac{C}{M}\right|=1$, звідки $\frac{C}{M}=\exp i\varphi$. Отже, $f(z)=Mz\exp i\varphi$ для деякого дійсного φ.

8. 10) З рівняння

$$\exp 2z-4\exp z+3=0$$

дістаємо $\exp z=1$ і $\exp z=3$, тобто дістаємо дві серії розв'язків $z^{(1)}=2\pi ki$, $k\in\mathbf{Z}$, і $z^{(2)}=\mathrm{Ln}\,3=\ln 3+2\pi ni$, $n\in\mathbf{Z}$. Для визначення кратності нулів знайдемо похідну

$$f'(z)=2\exp 2z-4\exp z.$$

Оскільки $f'(2\pi ki)\ne 0$ $\forall k\in\mathbf{Z}$ і $f'(\ln 3+2\pi ni)\ne 0$ $\forall n\in\mathbf{Z}$, то ці нулі є простими.

15) Нулями функції $f(z)=z\,\mathrm{sh}\,z$ є точки $z=i\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Для визначення порядку цих нулів знайдемо похідну $f'(z)=\mathrm{sh}\,z+z\,\mathrm{ch}\,z$. Тоді $f'(i\pi k)=(-1)^k i\pi k$. Якщо $k\ne 0$, то $f'(i\pi k)\ne 0$, тобто точки $z=i\pi k$, $k\ne 0$, є простими нулями.

Для визначення порядку нуля в точці $z=0$ скористаємось розвиненням в ряд Тейлора функції $f_1(z)=\mathrm{sh}\,z$ в околі точки O (див. вправу 14.11) § 25.2). Маємо

$$f(z)=z^2\left(1+\frac{z^2}{3!}+\ \ldots\right)=z^2\varphi(z),$$

де $\varphi(0)\ne 0$, і згідно з формулою (3) дістаємо, що точка $z=0$ є нулем другого порядку.

§ 25.4. Первісна і формула Ньютона — Лейбніца. Аналітичність функції за Осгудом

Первісною функції f, неперервної в області D, називають таку функцію F, для якої $F'(z)=f(z)$ $\forall z\in D$. При цьому кажуть, що функція f має в області D первісну.

Якщо функція f неперервна в області D і має в ній первісну, то ця функція аналітична в області D (*необхідна умова існування первісної*).

Критерій існування первісної. Нехай функція f неперервна в області D. Для того щоб функція f мала в області D первісну, необхідно й достатньо, щоб для будь-яких двох точок A і B з області D інтеграл $\int\limits_{AB} f(z)dz$ не залежав від форми кусково-гладкої дуги $AB\subset D$. При цьому первісною функції f може бути функція

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi, \tag{1}$$

де $z_0 \in D$ — фіксована точка, а $z \in D$ — біжуча. Зокрема, якщо D — однозв'язна область, то функція f має в ній первісну тоді й тільки тоді, коли f аналітична в області D.

Якщо функція f аналітична в області D, а F — її первісна в цій області, то має місце *формула Ньютона — Лейбніца*:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2)-F(z_1) \quad \forall z_1,\ z_2 \in D. \tag{2}$$

Якщо f і g — аналітичні функції в однозв'язній області D, а F і G — відповідні їм первісні в цій області, то справедлива *формула інтегрування частинами*:

$$\int_{z_1}^{z_2} F(z)g(z)dz = F(z)G(z)\Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} f(z)G(z)dz \quad \forall z_1,\ z_2 \in D. \tag{3}$$

Функцію f називають *аналітичною в однозв'язній області* D за Осгудом, якщо вона неперервна в цій області і для будь-яких точок A і B з D інтеграл $\int\limits_{AB} f(z)dz$ не залежить від форми кусково-гладкої дуги $AB \subset D$.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження (виконати усно):

1) кожна функція, неперервна в області, має в цій області первісну;

2) кожна функція, аналітична в області, має в цій області первісну;

3) якщо функція аналітична в однозв'язній області D, то вона має в цій області первісну;

4) первісною многочлена також є многочлен;

5) первісною раціональної функції також є раціональна функція;

6) якщо первісна функції f є раціональною функцією, то й сама f є раціональною функцією;

7) для будь-якої функції f, аналітичної в області D, існує функція F така, що

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2)-F(z_1) \quad \forall z_1,\ z_2 \in D.$$

2. Довести або спростувати дані твердження:

1)• якщо функція f має первісну в області D, то вона єдина з точністю до сталого доданка;

2) якщо функція f аналітична в однозв'язній області D, то множина всіх первісних цієї функції описується формулою

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi+C,$$

де $z_0\in D$ — фіксована точка, а $z\in D$ — біжуча і C — довільна стала;

3) якщо функція f аналітична в однозв'язній області D за Осгудом, то вона аналітична в цій області і за Вейєрштрассом;

4) твердження, обернене до попереднього, є правильним.

3•. Довести формулу (3).

4. Нехай $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$, $R>1$ — радіус збіжності даного степеневого ряду і K — його круг збіжності. Довести, що первісною функції f у крузі K є функція

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{n-1}}{n}(z-z_0)^n. \tag{4}$$

5. Визначити, чи має дана функція f первісну в указаній області D, і, якщо так, знайти всі її первісні:

1) $f(z)=z^3+3z-1,\ D=\mathbf{C}$;
2) $f(z)=\exp az,\ D=\mathbf{C}$;
3) $f(z)=\sin az,\ D=\mathbf{C}$;
4) $f(z)=\cos az,\ D=\mathbf{C}$;
5) $f(z)=\operatorname{sh} az,\ D=\mathbf{C}$;
6) $f(z)=\operatorname{ch} az,\ D=\mathbf{C}$;
7) $f(z)=\sin^2 z,\ D=\mathbf{C}$;
8)• $f(z)=\frac{1}{z},\ D=\mathbf{C}\setminus\{0\}$;
9) $f(z)=\frac{1}{z},\ D=\mathbf{C}\setminus\{z=x:\ x\le 0\}$;
10) $f(z)=\frac{z}{1+z^2},\ D=\{z:\ |z|>1\}$;
11) $f(z)=\frac{z}{z^2+1},\ D=\{z:\ |z|<1\}$;
12) $f(z)=z\exp az,\ D=\mathbf{C}$;
13) $f(z)=z^2\operatorname{sh} z,\ D=\mathbf{C}$;
14) $f(z)=z\sin^2 z,\ D=\mathbf{C}$;
15) $f(z)=\exp az\cos bz,\ D=\mathbf{C}$;
16) $f(z)=\exp 2z\sin^2 z,\ D=\mathbf{C}$;
17) $f(z)=z^2\cos az,\ a\ne 0,\ D=\mathbf{C}$;
18) $f(z)=\frac{1}{z\left(1-z^2\right)},\ D=\{z:0<|z|<1\}$.

6. Довести, що коли F — первісна функції f в області D, а $\Gamma=\{z=z(t),\ t\in[\alpha;\ \beta]\}\subset D$ — кусково-гладка дуга, то

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=F(z(\beta))-F(z(\alpha)). \tag{5}$$

7. За формулою Ньютона — Лейбніца обчислити дані інтеграли:

1) $\int\limits_0^{1+i}\left(z^3-2iz\right)dz$; 2) $\int\limits_0^{\pi i}\exp\frac{z}{2}dz$; 3) $\int\limits_{-\pi i}^{\pi i}\operatorname{ch}3z\,dz$; 4) $\int\limits_0^{i}\cos^2 z\,dz$;

5) $\int\limits_0^{1}\exp z\cos z\,dz$; 6)• $\int\limits_{-1}^{i} z\operatorname{sh}dz$; 7) $\int\limits_0^{i} z\cos z\,dz$; 8) $\int\limits_0^{1+i}\exp z\operatorname{ch}z\,dz$;

9) $\int\limits_0^{\pi i/2} z^2\sin z\,dz$; 10) $\int\limits_0^{\pi i} z^2\exp z\,dz$; 11) $\int\limits_i^{ei}\frac{\ln z}{z}dz$; 12) $\int\limits_{-1+i}^{-1-i}\frac{\ln^2(z+1)}{z+1}dz$;

13) $\int\limits_0^{\frac{i}{2}}\frac{dz}{1+z^2}$, підінтегральна функція розглядається в області $D=$ $=\{z:\ |z|<1\}$;

14) $\int\limits_0^{\frac{i}{2}}\frac{z\,dz}{1+z^2}$, підінтегральна функція розглядається в області $D=$ $=\{z:\ |z|<1\}$;

15)• $\int\limits_0^{i}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, підінтегральна функція розглядається в області $D=$ $=\{z:\ |z-i|<1\}$ і $\sqrt{1-z^2}$ — головне значення кореня.

8. Довести, що для будь-якої кусково-гладкої дуги $\Gamma\subset D=\mathbf{C}\setminus\{0\}$, що сполучає точки 1 і z, існує ціле число k таке, що

$$\int\limits_\Gamma\frac{d\xi}{\xi}=\ln z+2\pi ki.$$

9. Користуючись формулою Ньютона — Лейбніца, обчислити інтеграли 1), 3) –5) і 7) із вправи 12 § 25.1.

10. Знайти суми даних рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)}$; 4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n-2)(2n-1)}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)z^{n+2}$; 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3)^n}{n+1}$; 7)• $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{4^n(2n-1)}$.

Зразки розв'язування задач

2. 1) Нехай F — фіксована первісна функції f в області D. Тоді, очевидно, функція $\Phi(z)=F(z)+C$, де C — довільна стала, також є первісною функції f в області D. Припустимо, що Ψ — інша фіксована первісна функції f в області D. Покажемо, що обов'язково знайдеться така стала C, що $\Psi(z)=F(z)+C$. З цією метою розглянемо функцію

$\alpha(z)=\Psi(z)-F(z)$. Тоді $\alpha'(z)=\Psi'(z)-F'(z)=f(z)-f(z)\equiv 0$ в області D. Звідси, користуючись результатами вправи 7.1) § 24.1, дістаємо, що $\alpha(z)=\mathrm{const}$ в області D, тобто $\exists C:\ \alpha(z)=C\quad \forall z\in D$. Тому $\Psi(z)-F(z)=C$, звідки $\Psi(z)=F(z)+C\quad \forall z\in D$. Отже, дане твердження правильне.

3. Оскільки $(F(z)G(z))'=F'(z)G(z)+F(z)G'(z)=f(z)G(z)+F(z)g(z)$, то $F(z)G(z)$ є первісною функції $fG+Fg$ в області D. Тому за формулою Ньютона — Лейбніца

$$\int_{z_1}^{z_2}(F(z)g(z)+f(z)G(z))dz=F(z)G(z)\Big|_{z_1}^{z_2}\quad \forall z_1,\ z_2\in D.$$

За властивістю лінійності інтеграла маємо

$$\int_{z_1}^{z_2}(F(z)g(z)+f(z)G(z))dz=\int_{z_1}^{z_2}F(z)g(z)dz+\int_{z_1}^{z_2}f(z)G(z)dz.$$

Звідси й випливає потрібна формула (3).

5. 8) Відомо, що $\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z}=2\pi i\neq 0$. Тому в області $D=\mathbf{C}\setminus\{0\}$, яка не є однозв'язною, інтеграл $\int\limits_{AB}\frac{dz}{z}$ залежить від форми дуги AB. Тому за критерієм існування первісної дана функція $f(z)=\frac{1}{z}$ не має первісної в заданій області D.

7. 6) Зрозуміло, що в області $D=\mathbf{C}$ первісною функції $f(z)=1$ є функція $F(z)=z$, а первісною функції $g(z)=\operatorname{sh}z$ — функція $G(z)=\operatorname{ch}z$. Тому за формулами (3) і (2) маємо

$$\int_{-1}^{i}z\operatorname{sh}z\,dz=z\operatorname{ch}z\Big|_{-1}^{i}-\int_{-1}^{i}\operatorname{ch}z\,dz=i\operatorname{ch}i+\operatorname{ch}(-1)-\operatorname{sh}z\Big|_{-1}^{i}=$$
$$=i\cos 1+\operatorname{ch}1-\operatorname{sh}i-\operatorname{sh}1=i(\cos 1+\sin 1)+(\operatorname{ch}1-\operatorname{sh}1).$$

15) У заданій області підінтегральна функція є аналітичною і її первісна $F(z)=\arcsin z$. Тому за формулою (2)

$$\int_0^i\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\arcsin z\Big|_0^i=\frac{1}{i}\ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)\Big|_0^i=\frac{1}{i}\ln\left(-1+\sqrt{2}\right)=-i\ln\left(\sqrt{2}-1\right).$$

10. 7) Неважко перевірити, що кругом збіжності даного ряду є круг $|z|<2$. Позначимо суму ряду $f(z)$ і продиференціюємо його у крузі збіжності. Дістанемо

$$f'(z)=\frac{1}{4}-\frac{z^2}{4^2}+\frac{z^3}{4^3}-\ \ldots=\frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{z^2}{4}}=\frac{1}{4+z^2},\ |z|<2.$$

Інтегруючи останню рівність по будь-якому контуру, що сполучає точки 0 і z з круга $|z|<2$, і використовуючи формулу Ньютона — Лейбніца (2) та умову $f(0)=0$, дістаємо шукану суму

$$f(z)=\int_0^z f'(\xi)d\xi=f(z)-f(0)=\int_0^z\frac{d\xi}{4+\xi^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{z}{2}.$$

§ 26.1. Ряд і теорема Лорана. Класифікація ізольованих особливих точок аналітичних функцій

Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n} = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$, де $a_{-n} = b_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$ є абсолютно збіжним в області $D = \mathbf{C} \setminus \overline{K}$, де $\overline{K} = \left\{ z: \ |z-z_0| \le r = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{-n}|} \right\}$, і розбіжним у крузі $K = \{ z: \ |z-z_0| < r \}$. Якщо при цьому $r < \infty$, то функція $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n} = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$ є аналітичною в області D.

Рядом Лорана називають вираз вигляду

$$\ldots + a_{-m}(z-z_0)^{-m} + \ \ldots \ + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots$$
$$\ldots + a_n (z-z_0)^n + \ \ldots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \tag{1}$$

де $a_n \ \forall n \in \mathbf{Z}$ і z_0 — задані числа, причому a_n називають *коефіцієнтами ряду Лорана*. Вирази

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n \quad (2) \qquad \text{і} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad (2^*)$$

називають відповідно *головною* і *правильною частиною ряду Лорана*.

Ряд Лорана називають *збіжним* (*абсолютно збіжним*) у точці z, якщо в цій точці є збіжними (абсолютно збіжними) головна і правильна частини цього ряду. При цьому сумою ряду Лорана в точці z є число

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Якщо

$$0 \le r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{-n}|} < R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \le +\infty, \tag{3}$$

то ряд Лорана абсолютно збігається в кільці $K = \{ z: \ r < |z-z_0| < R \}$ і розбігається у зовнішніх точках цього кільця. У цьому випадку K називають *кільцем* *збіжності ряду Лорана.* Сума ряду Лорана є аналітичною функцією в кільці збіжності цього ряду.

Теорема Лорана. *Якщо функція f аналітична в кільці $K=\{z: r<|z-z_0|<R\}$, то*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \tag{4}$$

де

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad \forall n\in \mathbf{Z}, \tag{5}$$

$\Gamma=\{z: |z-z_0|=R_1\}$ і $R_1\in(r, R)$. *При цьому якщо* $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ $\forall z\in K$, *то* $a_n=b_n$ $\forall n\in \mathbf{Z}$, *тобто розвинення функції f в ряд Лорана в кільці K єдине.*

Точку z_0 називають *ізольованою особливою точкою* функції f, якщо f аналітична в деякому проколеному околі точки z_0, однак не є аналітичною в жодному околі цієї точки.

Якщо z_0 — ізольована особлива точка функції f, то існує проколений окіл точки z_0 такий, що $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ $\forall z\in O^*(z_0)$. При цьому, якщо:

1) $a_{-n}=0$ $\forall n\in \mathbf{N}$, то z_0 називають *усувною особливою точкою* функції f;

2) $\exists m\in \mathbf{N}$ таке, що $a_{-m}\neq 0$, проте $a_{-m-k}=0$ $\forall k\in \mathbf{N}$, то z_0 називають *полюсом* порядку m функції f, зокрема, при $m=1$ z_0 називають *простим полюсом*;

3) $\{n\in \mathbf{N}: a_{-n}\neq 0\}$ — нескінченна множина, то z_0 називають *істотно особливою точкою* функції f.

Критерії характеру ізольованих особливих точок. Нехай z_0 — ізольована особлива точка функції f. Тоді z_0 є:

1) усувною особливою точкою функції f тоді й тільки тоді, коли функція f обмежена в деякому проколеному околі точки z_0 або $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)\neq\infty$;

2) полюсом порядку m функції f тоді й тільки тоді, коли існує аналітична в околі точки z_0 функція φ така, що $\varphi(z_0)\neq 0$ і $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ $\forall z\in O^*(z_0)$;

3) полюсом функції f тоді й тільки тоді, коли $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$;

4) істотно особливою точкою функції f тоді й тільки тоді, коли f не має границі в цій точці (ні скінченної, ні нескінченної).

Теорема Сохоцького. Якщо z_0 *— істотно особлива точка функції* f, *то для будь-якої точки* $a \in \mathbf{C}$ *існує збіжна до* z_0 *послідовність* (z_n) *така, що* $f(z_n) \to a,\ n \to \infty.$

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження (виконати усно):

1) кожний ряд (2) розбігається принаймні в одній точці;

2) кожний ряд (2) збігається принаймні в одній точці;

3) будь-який ряд Лорана має непорожнє кільце збіжності;

4) кожний степеневий ряд є рядом Лорана;

5) якщо функція f аналітична в проколеному околі точки z_0, то z_0 — ізольована особлива точка цієї функції;

6) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

7) якщо z_0 — ізольована особлива точка функції f, то f не визначена в цій точці;

8) якщо $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, то z_0 — усувна особлива точка функції f.

2. Довести або спростувати такі твердження:

1) якщо ряд (2) збігається в точці z_1, то він збігається абсолютно $\forall z:\ |z - z_0| > |z_1 - z_0|$, а якщо розбігається в точці z_2, то він розбігається для всіх z таких, що $|z - z_0| < |z_2 - z_0|$;

2)• якщо функція f аналітична в кільці $K = \{z:\ |z - z_0| > r \geq 0\}$, то існує єдиний ряд (2) такий, що $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in K$;

3) кільцем збіжності ряду (1) є: а) проколений окіл точки z_0; б) зовнішня частина деякого круга; в) уся комплексна площина, крім однієї точки;

4) якщо $a_n \neq b_n \quad \forall n \in \mathbf{Z}$, то суми рядів $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ і $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ є різними функціями;

5) кожна ізольована особлива точка функції f є або лише усувною, або полюсом, або істотно особливою точкою цієї функції;

6) якщо $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ і $a_n \neq 0 \quad \forall n$, то z_0 — істотно особлива точка функції f;

7) якщо z_0 — усувна, полюс або істотно особлива точка функції f, то вона є такою самою точкою і для функції f';

8) якщо z_0 — ізольована особлива точка функції f, то вона також є ізольованою особливою точкою функції $\dfrac{1}{f-a}$ $\forall a \in \mathbf{C}$.

3. Визначити кільце збіжності даного ряду Лорана:

1) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a^n z^n,\ a \neq 0$; 2)• $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a^{-|n|} z^n,\ a \neq 0$;

3) $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} 2^{-n-1}(z-2)^n$; 4) $\sum\limits_{n=-\infty}^{-2} n \cdot 5^{-n-2}(z-1)^n$;

5) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{z^n}{a^n+1}$; 6) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{(z-z_0)^n}{\operatorname{ch}(an)},\ a>0$;

7) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{1+2^{-n^3}}(z-z_0)^{2n}$; 8) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n^2}}(z+i)^{n^3}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{n-1}-1}{z^n}$; 10) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{-z^n}{3^{n+1}} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{-1}{z^n}$.

4. Нехай ряд Лорана (1) має кільце збіжності $K = \{z:\ 0 \le r < |z-z_0| < R \le \le +\infty\}$, а r_1 і R_1 такі, що $r < r_1 < R_1 < R$. Довести, що:

1) даний ряд рівномірно збігається в кільці $K_1 = \{z:\ r_1 < |z-z_0| < R_1\}$;

2) $\exists M = \max\limits_{K_1} |f(z)|$, де $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$;

3) $|a_n| \le M\left(r_1^{-n} + R_1^{-n}\right)$ $\forall n \in \mathbf{N}$;

4) $f'(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ $\forall z \in K$;

5) якщо ряд Лорана $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ збігається на множині K і $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-z_0)^n = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ $\forall z:\ |z-z_0| = r_1$, то $a_n = b_n$ $\forall n \in \mathbf{Z}$.

5. Для даної функції f:

а) знайти ізольовані особливі точки;

б) вказати найширші кільця з центрами у цих точках і такі, що функція f є аналітичною в них;

в) знайти розвинення в ряд Лорана функції f у знайдених кільцях:

1) $f(z)=\sin\frac{1}{z}$; 2) $f(z)=\exp\frac{1}{z-1}$; 3) $f(z)=\frac{z}{z^2+1}$;

4)• $f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$; 5) $f(z)=z^3\cos\frac{1}{z+1}$; 6) $f(z)=\frac{\exp z}{z(1-z)}$;

7) $f(z)=\begin{cases}\frac{1-\cos z}{z^2}, & z\neq 0,\\ \frac{1}{2}, & z=0;\end{cases}$ 8) $f(z)=\begin{cases}\frac{-\exp\frac{1}{z}+1}{z^2}, & z\neq 0,\\ \frac{1}{2}, & z=0.\end{cases}$

6. Нехай у деякому околі точки z_0 функції f і φ аналітичні, відмінні від сталих і $f(z_0)=\varphi(z_0)=0$. Довести, що z_0 — ізольована особлива точка функції $\psi=\frac{f}{\varphi}$, яка є або усувною особливою точкою, або полюсом функції ψ.

7. Довести, що z_0 — нуль кратності m аналітичної функції тоді й тільки тоді, коли z_0 — полюс порядку m функції $\frac{1}{f}$.

8. Знайти ізольовані особливі точки даних функцій та визначити їх характер:

1) $f(z)=\frac{z^2+1}{z+1}$; 2) $f(z)=\frac{z^2+1}{z+i}$; 3) $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$;

4) $f(z)=\frac{2+z}{z-z^2}$; 5) $f(z)=\frac{z}{(1+z)^2}$; 6)• $f(z)=\frac{z^3+1}{z(z^2+4)^2}$;

7) $f(z)=\frac{z^2+i}{(1-z)^3}$; 8) $f(z)=\frac{z+1}{z(z-1)(z+2)^2}$; 9) $f(z)=\frac{\sin z}{z}$;

10) $f(z)=\frac{1}{\sin z}$; 11) $f(z)=\frac{1}{z^3\sin(z+1)}$; 12) $f(z)=\frac{\operatorname{tg} z}{z}$;

13)• $f(z)=\frac{\operatorname{tg}(z-1)}{z-1}$; 14) $f(z)=\operatorname{tg}^3 z$; 15) $f(z)=\frac{1-\cos z}{2z^2}$;

16) $f(z)=\frac{1-\cos z^2}{z^4}$; 17) $f(z)=\frac{\sin z}{z^4}$; 18) $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^6+2z^4+z^2}$;

19) $f(z)=\sin\frac{1}{z+i}$; 20)• $f(z)=\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}$; 21) $f(z)=\operatorname{tg} z-\frac{1}{z}$;

22) $f(z)=\exp\frac{1}{2i-z}$; 23) $f(z)=\frac{1-\exp z}{z}$; 24) $f(z)=\frac{\exp\frac{1}{z}}{z^2+1}$;

25) $f(z)=\frac{\exp z}{4-z^2}$; 26) $f(z)=\frac{1+z^2}{\exp z}$; 27) $f(z)=z^2\cos\frac{\pi}{z}$;

28) $f(z)=z^2\sin\frac{z}{z+1}$; 29) $f(z)=\frac{1}{z^2-1}\cos\frac{\pi z}{z+1}$;

30) $f(z)=\sin\left(\exp\frac{1}{z}\right)$; 31) $f(z)=\exp\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{z}\right)$;

32)• $f(z)=\cos\frac{1}{z}$; 33) $f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$; 34) $f(z)=\frac{1}{\exp z-2}$.

9. Нехай z_0 — ізольована особлива точка функції f. Довести, що:

1) z_0 — ізольована особлива точка функції $\varphi(z)=(z-z_0)^m f(z)$ $\forall m\in\mathbf{Z}$;

2) z_0 — усувна особлива точка функції f тоді й тільки тоді, коли $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$;

3) якщо існує таке число $m\in\mathbf{N}$, що функція $f(z)(z-z_0)^m$ обмежена $\forall z\in O^*(z_0)$, то z_0 не може бути істотно особливою точкою функції f;

4) z_0 — полюс порядку m функції f тоді й тільки тоді, коли існує скінченна границя $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)\neq 0$;

5)• якщо $\operatorname{Re} f(z)>0$ в деякому проколеному околі точки z_0, то z_0 — усувна особлива точка функції f;

6) якщо z_0 — істотно особлива точка функції f і $f(z)\neq a$ $\forall z\in O^*(z_0)$, то z_0 — істотно особлива точка функції $\frac{1}{f-a}$;

7) якщо z_0 — істотно особлива точка функції f і $M(r)=\max\limits_{|z-z_0|=r}|f(z)|$, то $\lim\limits_{r\to 0} r^k M(r)=+\infty$ $\forall k\in\mathbf{N}$;

8) z_0 — істотно особлива точка функції f тоді й тільки тоді, коли існують збіжні до z_0 послідовності (z_n') і (z_n'') і при цьому $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n')\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n'')$.

10. Нехай $D=\{z:\ 0<|z-z_0|<r\}\setminus\{z_k:\ k\in\mathbf{N}\}$, де z_k — попарно різні точки і $z_k\to z_0$ при $k\to\infty$. Довести, що:

1) множина D є областю;

2) якщо функція f аналітична в області D, то z_k — ізольована особлива точка функції f $\forall k\in\mathbf{N}$;

3) точка z_0 не є ізольованою особливою точкою функції f;

4)• якщо z_k — полюс функції f $\forall k\in\mathbf{N}$, то $\forall a\in\overline{\mathbf{C}}$ $\exists z_n^*\in D$: $z_n^*\to z_0$ і $f\left(z_n^*\right)\to a$ при $n\to\infty$.

Зразки розв'язування задач

2. 2) Розглянемо функцію $f(z)=\exp\frac{1}{z}$, яка є аналітичною в кільці $K=\{z:\ |z|>0\}$. Зрозуміло, що $f(z)=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ \dots\ +\frac{1}{n!z^n}+\ \dots\quad \forall z\in K$, причому це розвинення за теоремою Лорана єдине, тобто не існує розвинення вигляду

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n=\frac{a_{-1}}{z}+\frac{a_{-2}}{z^2}+\ \dots\ +\frac{a_{-n}}{z^n}+\ \dots\ .$$

Отже, дане твердження неправильне.

3. 2) Оскільки

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{-|n|}z^n=\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^n+\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{-n}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{az}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n,$$

то даний ряд Лорана збігається тоді й тільки тоді, коли збігаються геометричні ряди, в яких $q_1=\frac{1}{az}$ і $q_2=\frac{z}{a}$. Для цього необхідно й достатньо, щоб $|q_1|<1$ і $|q_2|<1$, тобто $\frac{1}{|a||z|}<1$ і $\frac{|z|}{|a|}<1$, звідки $\frac{1}{|a|}<|z|<|a|$. Останнє можливе лише тоді, коли $|a|>1$. Отже, кільцем збіжності даного ряду Лорана є $K=\left\{z:\ \frac{1}{|a|}<|z|<|a|\right\}$, якщо $|a|>1$, і $K=\varnothing$, якщо $0<|a|<1$.

5. 4) Оскільки $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$, то функція f аналітична в області $D=\mathbf{C}\setminus\{1,\ 2\}$, тому вона є аналітичною в проколених околах точок *1* і *2* з радіусами 1 і не є аналітичною ні в яких околах цих точок. Тому точки *1* і *2* є ізольованими особливими точками даної функції. Вкажемо найширші кільця, межі яких містять точку *1* або *2* і в яких функція f є аналітичною. З геометричних міркувань неважко помітити, що ці кільця такі:

$$K_1=\{z:\ 0<|z-1|<1\}\quad \text{і}\quad K_2=\{z:\ |z-1|>1\},$$
$$K_3=\{z:\ 0<|z-2|<1\}\quad \text{і}\quad K_4=\{z:\ |z-2|>1\},$$
$$K_5=\{z:\ 1<|z|<2\}\quad \text{і}\quad K_6=\{z:\ |z|>2\}.$$

Знайдемо розвинення функції f в ряд Лорана у знайдених кільцях. Зауважимо, що

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}\quad \forall z\in D.$$

Тому якщо $z\in K_1$, тобто $0<|z-1|<1$, то

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-1-1}=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1-(z-1)}=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n.$$

Перший доданок в останній рівності справа є головною частиною, а другий — правильною частиною відповідного ряду Лорана. Тут використано формулу суми геометричної прогресії $\frac{a}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, коли $|q|<1$.

Нехай $z \in K_2$, тобто $|z-1|>1$. Тоді

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}.$$

Для кілець K_3 і K_4 міркування аналогічні.

Нехай $z \in K_5$, тобто $1<|z|<2$. Тоді

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(-z^n\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z^n}{2^{n+1}}\right)$$

і перший доданок справа — це головна, а другий — правильна частина знайденого ряду Лорана.

Розвинення в кільцях K_3, K_4 і K_6 знайти самостійно.

8. 6) Нулями знаменника дробу є точки $z=0$ і $z=\pm 2i$. Оскільки в цих точках чисельник дробу не дорівнює нулю (тобто границя функції в цих точках є нескінченною), то вони є полюсами заданої функції. Точка $z=0$ є простим полюсом, оскільки вона є простим нулем знаменника, а точки $z=\pm 2i$ — полюсами другого порядку, оскільки вони є нулями другого порядку знаменника дробу.

13) Функція f не визначена в точках $z^*=1$ і $z_k=1+\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$, а в області $D=$ $=\mathbf{C}\setminus\left(\{z_k : k\in\mathbf{Z}\}\cup\{z^*\}\right)$ є аналітичною. Тому вказані точки є ізольованими особливими точками функції f. Оскільки

$$\lim_{z\to 1}\frac{\operatorname{tg}(z-1)}{z-1}=\lim_{z\to 1}\frac{\sin(z-1)}{z-1}\cdot\frac{1}{\cos(z-1)}=1,$$

то $z^*=1$ — усувна особлива точка функції f. Для фіксованої точки z_k маємо $1=z_k-\frac{\pi}{2}(2k+1)$, тому

$$z-1=z-z_k+\frac{\pi}{2}(2k+1)\Rightarrow \operatorname{tg}(z-1)=\operatorname{tg}\left(z-z_k+\frac{\pi}{2}(2k+1)\right)=-\operatorname{ctg}(z-z_k)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{\operatorname{ctg}(z-z_k)}{z-1}=\frac{\cos(z-z_k)}{z-1}\cdot\frac{z-z_k}{\sin(z-z_k)}\cdot\frac{1}{z-z_k}=\frac{\varphi(z)}{z-z_k},$$

де $\varphi(z)=\frac{\cos(z-z_k)}{z-1}\cdot\frac{z-z_k}{\sin(z-z_k)}$, якщо $0<|z-z_k|<r, 0<r$ — досить мале, і $\varphi(z_k):=$ $=\frac{1}{z_k-1}\neq 0$. Зрозуміло, що φ — аналітична функція у достатньо малому околі точки z_k. Тому за критерієм полюса дістаємо, що z_k — простий полюс функції f $\forall k\in\mathbf{N}$.

20) Функція $f(z)=\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}$ аналітична в області $D=\mathbf{C}\setminus\{z=\pi k : k\in\mathbf{Z}\}$. Зрозуміло, що кожна точка $z=\pi k$, де $k\in\mathbf{Z}$, є ізольованою особливою точкою даної функції. Для визначення характеру особливості точки $z=0$ запишемо дану функцію у вигляді

$$f(z)=\frac{\cos z}{\sin z}-\frac{1}{z}=\frac{1}{\sin z}\left(\cos z-\frac{\sin z}{z}\right)=\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}\right)=\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{(2n)!}-\frac{1}{(2n+1)!}\right)z^{2n-1}.$$

Помічаємо, що $f(z)\to 0$, якщо $z\to 0$ (внаслідок неперервності суми степеневого ряду в точці $z=0$). Отже, $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=0$, тому що $z=0$ — усувна особлива точка функції f.

Нехай $z_k=\pi k\neq 0$ і $k\in\mathbf{Z}$ — фіксоване число. Функція f аналітична в кільці $0<|z-z_k|<\pi$, а функція $\varphi(z)=\frac{1}{z}$ аналітична в крузі $|z-z_k|<\pi$. Тому характер особливості точки z_k стосовно функції f збігається з характером особливості цієї точки стосовно функції $\psi(z)=\operatorname{ctg}z$. Для функції $\operatorname{tg}z$ точки z_k є простими нулями, тому вони є простими полюсами функції $\operatorname{ctg}z=\frac{1}{\operatorname{tg}z}$. Отже, $z_0=0$ — усувна особлива точка, а точки $z_k=\pi k\neq 0$, $k\in\mathbf{Z}$, — прості полюси функції $f(z)=\operatorname{ctg}z-\frac{1}{z}$.

32) Покажемо, що точка $z=0$ є істотно особливою точкою функції $f(z)=\cos\frac{1}{z}$. Для цього досить показати, що для двох різних послідовностей $\left(z_n^{(1)}\right)$ і $\left(z_n^{(2)}\right)$, які мають своєю границею число 0, послідовності відповідних значень функції мають різні границі.

Нехай $z_n^{(1)}=\frac{1}{2\pi n}\to 0$, $n\to\infty$, і $z_n^{(2)}=\frac{1}{(2n+1)\pi}\to 0$, $n\to\infty$. Тоді $f\left(z_n^{(1)}\right)=\cos 2\pi n\to 1$, а $f\left(z_n^{(2)}\right)=\cos(2n+1)\pi\to -1$, $n\to\infty$. Отже, $z=0$ — істотно особлива точка даної функції.

9. 5) Оскільки $\operatorname{Re}f(z)>0$ у деякому проколеному околі точки z_0, то $f(z)$ при $z=z_n\to z_0$ не може прямувати, наприклад, до числа $w_0=-1$. Тому за теоремою Сохоцького точка z_0 не може бути істотно особливою точкою функції f. Припустимо, що z_0 — полюс функції f. Тоді маємо

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0 \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}\frac{1}{u+iv}=\lim_{z\to z_0}\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}-i\lim_{z\to z_0}\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}=0,$$

якщо $f(z)=u+iv$. Звідси випливає, що $\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{u^2}}}\to 0$, якщо $z\to z_0$, тому

$$\frac{v}{u}\to\infty \Rightarrow \frac{u}{v}\to 0 \Rightarrow \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{v^2}+1}}\to 1,\ z\to z_0.$$

Проте $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}=0$. Дістали суперечність. Отже, z_0 не може бути полюсом функції f. Тому z_0 — усувна особлива точка функції f.

10. 4) Нехай $a=\infty$. Оскільки z_k — полюс функції f, то за критерієм полюса $\lim\limits_{z\to z_k} f(z)=\infty$ $\forall k\in\mathbf{N}$, тобто $\forall k\in\mathbf{N}$ $\exists z_k^*\in D$: $\left|z_k^*-z_k\right|<\frac{1}{k}$ і $\left|f\left(z_k^*\right)\right|>k$, звідки $z_k^*\to z_0$ і $f\left(z_k^*\right)\to\infty$, $k\to\infty$.

Нехай $a\neq\infty$. Тоді можливі два випадки:

а) $\forall n\in\mathbf{N}$ $\exists z_n^*\in D$: $\left|z_n^*-z_0\right|<\frac{1}{n}$ і $f\left(z_n^*\right)=a$;

б) $\exists n_0\in\mathbf{N}$: $f(z)\neq a$ $\forall z$: $\left|z-z_0\right|<\frac{1}{n_0}$ і $z\in D$.

У випадку а) $z_n^*\to z_0$ і $f\left(z_n^*\right)\to a$, якщо $n\to\infty$. У випадку б) для функції $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-a}$ кожна точка z_k (для всіх достатньо великих k) є усувною особливою точкою, тому що $\varphi(z)\to 0$, $z\to z_k$. Якщо цю особливість усунути, поклавши $\varphi(z_k)=0$, то функція φ стане аналітичною в деякому проколеному околі точки z_0, тому z_0 — ізольована особлива точка функції φ. Нехай z_0 — усувна особлива точка функції φ. Поклавши $\varphi(0)=\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=\lim\limits_{z_k\to z_0}\varphi(z_k)=0$, за властивістю єдиності аналітичної функції дістанемо, що $\varphi(z)\equiv 0$ у деякому околі точки z_0. Однак це неможливо, оскільки $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-a}$. Отже, z_0 не може бути усувною особливою точкою функції φ. Вона не може бути також полюсом цієї функції, оскільки $\varphi(z_k)=0$ і $z_k\to z_0$, $k\to\infty$, тобто $\varphi(z)\not\to\infty$, якщо $z\to z_0$. Таким чином, z_0 — істотно особлива точка функції φ. Тому за теоремою Сохоцького $\exists z_n^*\to z_0$: $\varphi\left(z_n^*\right)\to\infty$, а отже,

$$f\left(z_n^*\right)=a+\frac{1}{\varphi\left(z_n^*\right)}\to a,\ n\to\infty.$$

§ 26.2. Нескінченно віддалена точка як ізольована особлива точка функції. Класифікація аналітичних функцій

Нескінченно віддалену точку ∞ називають *ізольованою особливою точкою* функції f, якщо f аналітична в деякому околі цієї точки.

Для того щоб точка $z_0=\infty$ була ізольованою особливою точкою функції f, необхідно й достатньо, щоб точка $w_0=0$ була ізольованою особливою точкою функції $\varphi(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)$. При цьому точку $z_0=\infty$ називають *усувною особливою точкою*, *полюсом порядку* m чи *істотно особливою точкою* функції f, якщо такою є точка $w_0=0$ для функції φ.

Цілою функцією називають функцію, яка є аналітичною в усій комплексній площині. Для кожної цілої функції f можливий один і тільки один з трьох випадків:

1) $f(z) = \text{const}$ на $\mathbf{C}$ тоді й тільки тоді, коли $z = \infty$ є усувною особливою точкою функції f;

2) $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $n \in \mathbf{N}$, $a_n \neq 0$, тоді й тільки тоді, коли $z = \infty$ є полюсом порядку n функції f; у цьому випадку f називають *цілою раціональною функцією*;

3) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ відмінна від будь-якого многочлена тоді й тільки тоді, коли $z = \infty$ є істотно особливою точкою функції f; у цьому випадку f називають *цілою трансцендентною функцією*.

Функцію f називають *мероморфною*, якщо вона є відношенням двох цілих функцій φ і ψ: $f = \dfrac{\varphi}{\psi}$, причому $f(z) \not\equiv 0$ на множині $\mathbf{C}$.

Для того щоб функція f була мероморфною, необхідно й достатньо, щоб вона була аналітичною в області $D = \mathbf{C} \setminus \{z_k\}$, де множина $E = \{z_k\}$ не більше ніж зчисленна, кожна точка $z_k \in E$ є для функції f усувною або полюсом і множина $E \cap \{z : |z| < R\}$ є скінченною для всіх $R > 0$.

Мероморфну функцію, що є відношенням двох многочленів, називають *раціональною*. Для раціональної функції $R(z) = \dfrac{P(x)}{Q(z)}$ останній дріб вважають нескоротним.

Для того щоб мероморфна функція була раціональною, необхідно й достатньо, щоб виконувалась одна з умов: а) точка $z = \infty$ є полюсом або усувною особливою точкою функції f; б) функція f має не більше ніж скінченну кількість ізольованих особливих точок, кожна з яких є або усувною, або полюсом функції f. При цьому, якщо точки z_k, $k \in \overline{1,\ n}$, є скінченними полюсами функції f відповідного порядку m_k, то існує многочлен $P(z)$ та числа $a_r^{(k)}$, $r \in \overline{1,\ m_k}$, такі, що

$$f(z) = P(z) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{m_k} \frac{a_r^{(k)}}{(z - z_k)^r} \quad \forall z \in \mathbf{C} \setminus \{z_k : k \in \overline{1,\ n}\},$$

і цей розклад функції f на елементарні дроби єдиний.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження (виконати усно):

1) якщо $z_0 = \infty$ — ізольована особлива точка функції f, то f аналітична у деякому околі цієї точки;

2) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

3) якщо $z_0=\infty$ — полюс порядку m функції f, то

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{0} a_n z^n+\sum_{n=1}^{m} a_n z^n \quad \forall z\in O(\infty), \text{ де } a_m\neq 0;$$

4) якщо $z_0=\infty$ — усувна особлива точка функції f, то

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{0} a_n z^n \quad \forall z\in O(\infty);$$

5) якщо $z_0=\infty$ — істотно особлива точка функції f, то

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{0} a_n z^n+\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \forall z\in O(\infty)$$

і множина $\{n\in \mathbf{N}:\ a_n\neq 0\}$ нескінченна;

6) кожний многочлен є цілою функцією;

7) кожна ціла функція є многочленом;

8) сума, різниця, добуток і частка двох цілих функцій є цілою функцією;

9) сума, різниця, добуток і частка двох мероморфних функцій є мероморфною функцією;

10) якщо функція f має на множині $\mathbf{C}$ скінченну кількість ізольованих особливих точок, то вона мероморфна на $\mathbf{C}$;

11) твердження, обернене до попереднього, є правильним.

2. Довести або спростувати такі твердження:

1) точка $z_0=\infty$ є усувною, полюсом або істотно особливою точкою функції f тоді й тільки тоді, коли відповідно $\exists \lim\limits_{z\to\infty} f(z)\neq\infty$, $\exists \lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$ або $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ не існує;

2) точка $z_0=\infty$ є усувною особливою точкою функції f тоді й тільки тоді, коли f обмежена в деякому околі цієї точки;

3)• точка $z_0=\infty$ є полюсом порядку m функції f тоді й тільки тоді, коли в деякому околі цієї точки існує аналітична функція φ така, що $f(z)=z^m\varphi(z)$ $\forall z\in O(\infty)$ і $\varphi(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty} f(z)\neq 0$;

4) якщо $z_0=\infty$ — полюс функції f, то f є многочленом;

5) якщо $z_0=\infty$ — усувна особлива точка функції f, то ця функція є сталою;

6) суперпозиція двох мероморфних функцій є мероморфною функцією;

7) функція $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$ є мероморфною.

3. Для даної функції f визначити, чи є точка $z_0=\infty$ ізольованою особливою точкою, і, якщо так, встановити характер особливості:

1) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$; 2) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$; 3) $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^3+1}$;

4) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z+1}$; 5) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^8+1}$; 6)• $f(z)=\cos z$;

7) $f(z)=\sin z$; 8) $f(z)=\dfrac{1}{\exp z}$; 9) $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$;

10)• $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$; 11) $f(z)=\operatorname{tg} z$; 12) $f(z)=\operatorname{ctg} z$;

13)• $f(z)=\exp\dfrac{1}{z}$; 14) $f(z)=\dfrac{1}{\exp z-1}$; 15) $f(z)=z\exp(-3z)$;

16)• $f(z)=z^3\cos\dfrac{1}{z}$; 17) $f(z)=\sin\dfrac{z}{z+4}$; 18) $f(z)=z\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$;

19) $f(z)=\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{z}$; 20) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$; 21) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$;

22) $f(z)=z^2\cos\dfrac{1}{z}-z$; 23) $f(z)=\sin\exp z$;

24) $f(z)=\sin\exp\dfrac{1}{z}$; 25) $f(z)=z\left(\exp\dfrac{1}{z}-1\right)$;

26) $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}\cos\dfrac{\pi z}{z+1}$; 27) $f(z)=z^2\sin\dfrac{z}{z+1}$;

28) $f(z)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}\left(1-\cos\dfrac{1}{z}\right)$; 29)• $f(z)=\exp\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{z}\right)$.

4. Для нескінченно віддаленої точки сформулювати теорему, аналогічну теоремі Сохоцького, і перевірити, чи правильне її твердження.

5. Нехай функція f не має в розширеній комплексній площині ніяких особливих точок, крім полюсів. Довести, що f є раціональною функцією.

6. Нехай нескінченно віддалена точка є полюсом порядку m для функції f і полюсом порядку n для функції φ. Довести, що ця точка є полюсом порядку mn для функції $F(z)=f(\varphi(z))$.

7. Нехай функція f аналітична в деякому околі нескінченно віддаленої точки і функція $F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt$ не залежить від форми дуги, що сполучає точки z_0 і z з цього околу. Нехай, крім того, точка $z_0=\infty$ є усувною або полюсом порядку m, або істотно особливою точкою функції f. Визначити, що можна сказати про точку z_0 щодо функцій: а) f'; б) $f^{(n)}$; в) F.

8. Довести, що коли f — мероморфна функція, то в кожній обмеженій області D міститься не більше ніж скінченна кількість ізольованих особливих точок функції f.

9. Розкласти дані раціональні функції на елементарні дроби:

1) $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$; 2) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$; 3) $f(z)=\dfrac{4z^3}{z^4-1}$;

4) $f(z)=\dfrac{2i\left(z^4+1\right)}{z^5+2z^3+z}$; 5) $f(z)=\dfrac{4z+6}{z^4+6z^3+11z^2+6z}$;

6)• $f(z)=\dfrac{z^5+z^4+2z^3+z^2+z+2}{z^3+z}$.

Зразки розв'язування задач

2. 3) Припустимо, що $z_0=\infty$ — полюс порядку m функції $f(z)$. Тоді точка $w_0=0$ є полюсом порядку m функції $\psi(w)=f\left(\dfrac{1}{w}\right)$, де $w=\dfrac{1}{z}$. Тому за критерієм полюса існує функція $\varphi_1(w)$, яка є аналітичною в деякому проколеному околі точки w_0 і така, що $\varphi(w_0)=\varphi(0)\neq 0$, а $\psi(w)=\dfrac{\varphi_1(w)}{w^m}$ $\forall w\in O^*(w_0)$. Звідси випливає, що

$$f(z)=\psi\left(\frac{1}{z}\right)=z^m\varphi_1\left(\frac{1}{z}\right)=z^m\varphi(z)\quad \forall z\in O(\infty),$$

причому функція $\varphi(z)=\varphi_1\left(\dfrac{1}{z}\right)$ аналітична в $O(\infty)$ і існує границя

$$\lim_{z\to\infty}\varphi(z)=\lim_{z\to\infty}\varphi_1\left(\frac{1}{z}\right)=\lim_{w\to 0}\varphi_1(w)=\varphi_1(0)\neq 0.$$

Аналогічно показуємо справедливість оберненого твердження. Отже, дане в умові задачі твердження є правильним.

3. 6) Маємо

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ \ldots=1-\frac{1}{2!w^2}+\frac{1}{4!w^4}-\ \ldots=\cos\frac{1}{w},\quad w=\frac{1}{z}.$$

Оскільки точка $w=0$ є істотно особливою для функції $\cos\dfrac{1}{w}$, то точка $z=\infty$ є такою самою особливістю для функції $f(z)=\cos z$.

10) Оскільки $\sin z=0 \iff z=\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$, то в будь-якому околі точки $z_0=\infty$ функція $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ навіть не визначена. Тому $z_0=\infty$ не є ізольованою особливою точкою даної функції.

13) Маємо

$$f(z)=\exp\frac{1}{z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ \ldots=1+w+\frac{w^2}{2!}+\ \ldots=\exp w,\quad w=\frac{1}{z}.$$

Точка $w_0=0$ є усувною особливою точкою функції $\exp w\left|\lim\limits_{w\to v}\exp w=1\right|$, тому $z_0=\infty$ — усувна особлива точка функції f.

16) Для функції $\varphi(w)=\dfrac{\cos w}{w^3}$ точка $w_0=0$ є полюсом третього порядку. Отже, такою самою особливістю для заданої функції $f(z)=z^3\cos\dfrac{1}{z}$ є точка $z_0=\infty$.

Такий самий результат можна дістати за допомогою розвинення даної функції в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки:

$$z^3\cos\frac{1}{z}=z^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n}}=z^3-\frac{z}{2!}+\frac{1}{4!z}-\frac{1}{6!z^3}+\ \dots .$$

29) Дана функція визначена в усіх точках z, де $\sin\dfrac{\pi}{z}\neq 0$, тобто $\dfrac{\pi}{z}\neq \pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Звідси дістаємо, що $z\neq 0$ і $z\neq\dfrac{1}{k}$, $k=\pm1,\ \pm2,\ \dots$. Отже, $D(f)=\mathbf{C}\setminus\left\{0,\ \pm1,\ \pm\dfrac{1}{2},\ \dots\ \pm\dfrac{1}{n},\ \dots\right\}\supset$ $\supset\{z:\ |z|>1\}$, причому функція f аналітична в області $O(\infty)=\{z:\ |z|>1\}$. Тому $z_0=\infty$ є ізольованою особливою точкою функції f.

Розглянемо функцію $\varphi(w)=f\left(\dfrac{1}{w}\right)=\exp(\operatorname{ctg}\pi w)$, де $w=\dfrac{1}{z}$. Нехай $0<w\to 0$. Тоді $\operatorname{ctg}\pi w\to+\infty \Rightarrow \exp(\operatorname{ctg}\pi w)\to\infty$. Якщо $0>w\to 0$, то $\operatorname{ctg}\pi w\to-\infty \Rightarrow \exp(\operatorname{ctg}\pi w)\to 0$. Звідси випливає, що функція $\varphi(w)$ не має в точці $w_0=0$ границі (ні скінченної, ні нескінченної). Тому $w_0=0$ — істотно особлива точка функції $\varphi(w)$, а отже, $z_0=\infty$ — істотно особлива точка функції f.

9. 6) Виділимо цілу частину функції f:

$$f(z)=\frac{\left(z^5+z^3\right)+\left(z^4+z^2\right)+\left(z^3+z\right)+2}{z^3+z}=z^2+z+1+\frac{2}{z(z+i)(z-i)}.$$

Скориставшись методом невизначених коефіцієнтів, матимемо

$$\frac{2}{z(z+i)(z-i)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+i}+\frac{C}{z-i}\ \Leftrightarrow\ 2=A(z+i)(z-i)+Bz(z-i)+Cz(z+i)\quad \forall z.$$

Надамо z значення 0, i та $-i$, що є нулями знаменника, і дістанемо

$$z=0\ \Rightarrow\ 2=A\ \Rightarrow\ A=2,$$
$$z=i\ \Rightarrow\ 2=-2C\ \Rightarrow\ C=-1,$$
$$z=-i\ \Rightarrow\ 2=-2B\ \Rightarrow\ B=-1.$$

Отже,

$$\frac{2}{z(z+i)(z-i)}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z+i}-\frac{1}{z-i},$$

тому

$$f(z)=z^2+z+1+\frac{2}{z}-\frac{1}{z+i}-\frac{1}{z-i}\quad \forall z\in D(f).$$

§ 26.3. Поняття лишку. Основна теорема про лишки та її застосування

Нехай $z_0\neq\infty$ — ізольована особлива точка функції f і $f(z)=$ $=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n$. *Лишком функції* f відносно точки z_0 називають число

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=a_{-1}. \tag{1}$$

За теоремою Лорана

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)dz, \tag{2}$$

де $\Gamma=\{z: |z-z_0|=r\}\subset O^*(z_0)\}$. Однак формулу (2) частіше використовують для обчислення інтегралів за допомогою лишків.

Якщо z_0 — простий полюс функції f, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z), \tag{3}$$

а якщо z_0 — полюс порядку $m>1$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\cdot\frac{d^{m-1}\left(\left(z-z_0\right)^m f(z)\right)}{dz^{m-1}}. \tag{4}$$

Основна теорема про лишки. Якщо f *— аналітична функція в області* D *і* $\Gamma\subset D$ *— кусково-гладкий контур Жордана, внутрішня частина якого лежить в* D, *за винятком скінченної кількості точок* z_k, $k\in\overline{1,\ n}$, *то*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{5}$$

Наслідок 1 (про обчислення інтеграла $\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$). Нехай f — аналітична функція в області D, $\Gamma\subset D$ — кусково-гладкий контур Жордана, внутрішність якого D^* лежить в D, крім, можливо, скінченної кількості полюсів функції f. Якщо $f(z)\neq 0$ на Γ, то

$$\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i(N-P), \tag{6}$$

де N — кількість нулів, а P — кількість полюсів функції f, що лежать в D^*, причому кожний нуль і кожний полюс рахується стільки разів, яка його кратність (порядок). Зокрема, якщо $D^*\subset D$, то

$$\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i\cdot N. \tag{7}$$

Наслідок 2 (про обчислення невласних інтегралів). Нехай

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n}a_k z^k\Big/\sum_{k=1}^{m}b_k z^k,\ a_n\neq 0,\ b_m\neq 0,\ m\geq n+2,\ f(x)\neq 0\quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{r} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z), \tag{8}$$

де z_k, $k \in \overline{1,\ r}$ — усі полюси функції f, що лежать у півплощині $\operatorname{Im} z > 0$.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) якщо z_0 — усувна особлива точка функції f, то $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 0$;

2) якщо z_0 — полюс функції f, то $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) \neq 0$;

3) якщо z_0 — істотно особлива точка функції f, то, можливо, $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) \neq 0$;

4) якщо z_0 — полюс або істотно особлива точка функції f, то $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) \neq 0$;

5) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

6)• теорема про інтегральну формулу Коші є частинним випадком основної теореми про лишки;

7) основна теорема про лишки є наслідком теореми про інтегральну формулу Коші;

8) якщо $f(z) = P_n(z)$ — многочлен степеня $n \geq 1$, то $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{P_n'(z)}{P_n(z)} dz \neq 0$ для довільного кусково-гладкого контуру Жордана Г, на якому немає нулів многочлена $P_n(z)$.

2. Нехай $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}$ $\forall z \in O^*(z_0)$, де $m \in \mathbf{N}$, φ — аналітична функція в деякому околі точки z_0. Довести, що

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}. \tag{9}$$

3. Нехай $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де функції φ і ψ аналітичні в деякому околі точки z_0, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$. Довести, що

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{10}$$

4. Нехай f і φ — аналітичні функції в деякому околі точки z_0 і z_0 — нуль порядку m цих функцій. Довести, що

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)} \cdot \frac{1}{z-z_0} = \frac{f^{(m)}(z_0)}{\varphi^{(m)}(z_0)}.$$

5. Нехай f і φ — аналітичні функції в деякому околі точки z_0, а z_0 — нуль кратності m функції f. Довести, що

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = m\varphi(z_0).$$

6•. Нехай z_0 — полюс порядку m функції f, а φ — аналітична функція в деякому околі точки z_0. Довести, що

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = -m\varphi(z_0).$$

7. Нехай функція f є парною або непарною, а z_0 — ізольована особлива точка цієї функції. Довести, що точка $(-z_0)$ також є ізольованою особливою точкою функції f, причому:

1) $\operatorname*{res}\limits_{z=-z_0} f(z) = -\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z)$, якщо f — парна функція;

2) $\operatorname*{res}\limits_{z=-z_0} f(z) = \operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z)$, якщо f — непарна функція.

8. Нехай z_0 — ізольована особлива точка функції g і $f(z) = g(az)$, де $a \neq 0$. Довести, що точка $\frac{z_0}{a}$ — ізольована особлива точка функції f і $\operatorname*{res}\limits_{z=\frac{z_0}{a}} f(z) = \frac{1}{a}\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} g(z)$.

9. Обчислити лишки даних функцій відносно їхніх ізольованих точок:

1) $f(z) = \frac{1}{z^2+z}$; 2) $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$; 3) $f(z) = \frac{z+1}{z^4+2z^3+z^2}$;

4) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2+1}$; 5) $f(z) = \frac{\sin \pi z}{z^2-z^3}$; 6) $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z-1)^7}$;

7) $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^3(1-z)^2}$; 8)• $f(z) = \frac{\exp x}{z^2\left(z^2+1\right)}$; 9) $f(z) = \sin\frac{1}{z-1}$;

10) $f(z) = \frac{\sin\frac{1}{z}}{z(1-z)}$; 11) $f(z) = \cos\frac{z}{1-z}$; 12) $f(z) = \operatorname{tg} z$;

13)• $f(z)=\operatorname{ctg}2z$; 14) $f(z)=\operatorname{th}z$; 15) $f(z)=\operatorname{cth}3z$;

16) $f(z)=\operatorname{tg}^2 z$; 17) $f(z)=\dfrac{\operatorname{ctg}z}{z}$; 18) $f(z)=\dfrac{1}{\exp z+1}$;

19) $f(z)=\dfrac{1}{\sin\pi z}$; 20) $f(z)=z\exp\dfrac{1}{z-1}$; 21) $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$;

22) $f(z)=z^2\sin\dfrac{\pi}{z}$; 23) $f(z)=\dfrac{1}{z^6(z-2)}$; 24) $f(z)=\dfrac{1+z^8}{z^6(z+2)}$;

25)• $f(z)=\dfrac{1+z^{10}}{z^6\left(z^2+1\right)}$; 26) $f(z)=\sin z\sin\dfrac{1}{z}$;

27) $f(z)=\dfrac{1+z^{2n}}{z^n(z-a)}$, $a\neq 0$, $n\in\mathbf{N}$.

10. За допомогою формул (5), (6) або (7) обчислити дані інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2}\frac{z\,dz}{\sin z}$; 2)• $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{\sin z}$; 3) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=3}\frac{dz}{\cos z}$;

4) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4}\frac{zdz}{(z+3)\exp\frac{3}{z}}$; 5) $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{z\sin z}{(z-1)^5}dz$; 6) $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{z^2+1}{z^2(z-2)}dz$;

7) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{(1-z)^2\left(1+z^2\right)}$, Γ — еліпс $|z+1|+|z-1|=4$;

8) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{\sin z}{1-z^2}dz$, Γ — трикутник з вершинами у точках $-2, 2i, -2i$;

9) $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\operatorname{tg}z\,dz$; 10) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4}\operatorname{ctg}z\,dz$; 11) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1}\frac{dz}{1+z^4}$;

12) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\sin\frac{1}{z-1}dz$; 13) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\sin\frac{z}{z+1}dz$; 14)• $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}z\cos\frac{z}{z+1}dz$,

де Γ — кусково-гладкий контур Жордана, що обмежує область D^*.

11. За допомогою формули (7) довести, що кожний многочлен степеня $n\geq 1$ має у комплексній площині n нулів, якщо кожний нуль рахувати стільки разів, яка його кратність.

12•. Довести, що коли f — однолиста функція в області D, то $f'(z)\neq 0$ $\forall z\in D$.

13. Довести, що в наслідку 2 (про обчислення невласних інтегралів) точками z_k можуть бути всі полюси функції f, які лежать у півплощині $\operatorname{Im}z<0$.

14. Обчислити дані невласні інтеграли:

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; 2)• $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$; 3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$;

4) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$; 5) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+6x^2+25}$; 6) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{m+1}}$, $m \in \mathbf{N}$;

7) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}$, $a>0,\ b>0$; 8) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2ix-2}$;

9) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+4ix-5)^2}$; 10) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n}$, $a>0,\ b>0,\ n \in \mathbf{N}$.

15•. Нехай функції f і φ аналітичні в області D, L — кусково-гладкий контур Жордана, що лежить в D разом зі своєю внутрішньою частиною D^*, причому $|f(z)| > |\varphi(z)|$ $\forall z \in L$. Довести, що функції f і $f+\varphi$ мають в D^* однакову кількість нулів (*теорема Руше*).

16. Знайти число коренів даного рівняння у даній області D:

1) $z^4-3z+1=0,\ D=\{z:\ |z|<1\}$; 2) $2z^4-5z+2=0,\ D=\{z:\ |z|>1\}$;

3) $z^7=5z^4-z^2+2,\ D=\{z:\ |z|<1\}$;

4) $z^8=4z^5-z^2+1,\ D=\{z:\ |z|>1\}$;

5) $z^3=12z-2,\ D=\{z:\ |z|<2\}$; 6)• $z^4=9z-1,\ D=\{z:\ |z|>2\}$;

7) $z^6=6z+1=0,\ D=\{z:\ |z|>1\}$.

Зразки розв'язування задач

1. 6) Інтегральна формула Коші має вигляд

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

за умови, що функція f аналітична в області D, Γ — кусково-гладкий контур Жордана, який повністю лежить в D разом зі своєю внутрішньою частиною D^* і $z_0 \in D^*$.

Для підінтегральної функції $\varphi(z)=\frac{f(z)}{z-z_0}$ точка z_0 є єдиною ізольованою особливою точкою, що лежить в D^*, причому згідно з вправою 2 $\operatorname*{res}\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=f(z_0)$, а отже, якщо до цієї функції застосувати основну теорему про лишки, то дістанемо

$$\int\limits_{\Gamma}\varphi(z)dz=2\pi i f(z_0),$$

тобто

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

Таким чином, дане твердження є правильним.

6. За критерієм полюса існує функція ψ, аналітична в околі точки z_0, і така, що $\psi(z_0)\neq 0$, а $f(z)=\dfrac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$ $\forall z\in O^*(z_0)$. Звідси дістаємо

$$f'(z)=\frac{\psi'(z)(z-z_0)^m-m(z-z_0)^{m-1}\psi(z)}{(z-z_0)^{2m}}$$

і

$$\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}=\varphi(z)\left(\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}-\frac{m}{z-z_0}\right)=\frac{\varphi(z)\left(\dfrac{\psi'(z)(z-z_0)}{\psi(z)}-m\right)}{z-z_0}$$

$\forall z\in O^*_\delta(z_0)$, якщо $\delta>0$ досить мале. Оскільки функція

$$\varphi_1(z)=\varphi(z)\left(\frac{\psi'(z)(z-z_0)}{\psi(z)}-m\right)$$

аналітична в $O_\delta(z_0)$, то згідно з вправою 5 або 3

$$\operatorname*{res}_{z=z_0}\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}=\operatorname*{res}_{z=z_0}\frac{\varphi_1(z)}{z-z_0}=\varphi_1(z_0)=-m\varphi(z_0).$$

9. 8) Помічаємо, що $z_0=0$ — полюс другого порядку функції f, а $z_1=i$ і $z_2=-i$ — прості полюси цієї функції. Тому на підставі формул (3) і (4) дістаємо

$$\operatorname*{res}_{z=i}f(z)=\lim_{z\to i}\frac{\exp z(z-i)}{z^2(z-i)(z+i)}=\lim_{z\to i}\frac{\exp z}{z^2(z+i)}=\frac{\exp i}{-2i}=\frac{i}{2}(\cos 1+i\sin 1),$$

$$\operatorname*{res}_{z=-i}f(z)=\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{\exp z}{z^2(z-i)(z+i)}=\lim_{z\to -i}\frac{\exp z}{z^2(z-i)}=\frac{\exp(-i)}{2i}=-\frac{i}{2}(\cos 1-i\sin 1),$$

$$\operatorname*{res}_{z=0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{d\left(z^2\dfrac{\exp z}{z^2\left(z^2+1\right)}\right)}{dz}=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\exp z}{z^2+1}\right)'=\lim_{z\to 0}\frac{\exp z\left(z^2+1\right)-2z\cdot\exp z}{\left(z^2+1\right)^2}=1.$$

Для обчислення цих лишків можна було б скористатися формулою (9).

13) Оскільки функція $f(z)=\operatorname{ctg}2z=\dfrac{\cos 2z}{\sin 2z}$ є відношенням двох цілих функцій, то її особливими точками є нулі знаменника. Тому точки $z_k=\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$, є простими полюсами функції f і за формулою (10)

$$\operatorname*{res}_{z_k=\frac{\pi k}{2}}\operatorname{ctg}2z=\left.\frac{\cos 2z}{(\sin 2z)'}\right|_{z=\frac{\pi k}{2}}\left.\frac{\cos 2z}{2\cos 2z}\right|_{z=\frac{\pi k}{2}}=\frac{1}{2}.$$

25) Зрозуміло, що $z_0 = 0$ — полюс шостого порядку заданої функції, а $z_1 = i$ і $z_2 = -i$ — прості полюси цієї функції.

Можна розв'язати цю вправу аналогічно вправі 9.8). Однак при знаходженні $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)$ обчислення будуть досить громіздкими. Тому розкладемо функцію f на елементарні дроби:

$$f(z) = \frac{z^{10}+1}{z^6\left(z^2+1\right)} = z^2 - 1 + \frac{z^6+1}{z^6\left(z^2+1\right)} = z^2 - 1 + \frac{1}{z^2+1} + \frac{1}{z^6\left(z^2+1\right)};$$

$$\frac{1}{z^6\left(z^2+1\right)} = \frac{1+z^2-z^2}{z^6\left(z^2+1\right)} = \frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^4\left(z^2+1\right)} = \frac{1}{z^6} - \frac{1+z^2-z^2}{z^4\left(z^2+1\right)} = \frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^2\left(z^2+1\right)} =$$

$$= \frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2+1} \Rightarrow f(z) = z^2 - 1 + \frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^2}.$$

Дістали розвинення функції f у ряд Лорана в достатньо малому проколеному околі точки $z_0 = 0$. З цього розвинення бачимо, що коефіцієнт $a_{-1} = 0$, тобто $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 0$.

Лишки функції f відносно точок i та $-i$ обчислити самостійно.

10. 2) Підінтегральна функція всередині кола $|z| = 2$ має одну особливу точку $z = 0$, що є простим полюсом. Тому на підставі формул (3) і (2) маємо

$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{1}{\sin z} = \lim_{z \to 0} z \cdot \frac{1}{\sin z} = 1$$

і

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{\sin z} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} \frac{1}{\sin z} = 2\pi i.$$

14) Єдиною ізольованою особливою точкою функції $f(z) = z\cos\frac{z}{z+1}$ є точка $z = -1$. Для знаходження $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z)$ розвинемо функцію f у ряд Лорана в проколеному околі точки -1:

$$f(z) = z\cos\frac{z}{z+1} = z\cos\left(1 - \frac{1}{z+1}\right) = (z+1)\left(\cos 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!(z+1)^{2n}} + \right.$$

$$\left. + \sin 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(z+1)^{2n+1}}\right) - \cos 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z+1)^{2n}} -$$

$$\left. - \sin 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z+1)^{2n+1}} \right) \Rightarrow a_{-1} = -\frac{\cos 1}{2!} - \frac{\sin 1}{1!}.$$

Отже, $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = -\left(\frac{1}{2}\cos 1 + \sin 1\right)$.

Відносно положення контуру Γ можливі такі випадки:

а) точка $z = -1$ лежить зовні контуру Γ. Тоді за інтегральною теоремою Коші $\int_\Gamma z\cos\frac{z}{z+1}\,dz = 0$;

б) точка $z=-1$ лежить усередині контуру Γ. Тоді за основною теоремою про лишки

$$\int_\Gamma z\cos\frac{z}{z+1}dz = -2\pi i\left(\frac{1}{2}\cos 1+\sin 1\right) = -\pi i(\cos 1 + 2\sin 1);$$

в) точка $z=-1$ лежить на контурі Γ. Тоді інтеграл не існує.

12. Оскільки функція f однолиста в області D, то для довільної точки $z_0 \in D$ існує коло $\Gamma = \{z: |z-z_0| = r\}$, що всередині нього є лише один нуль функції $\varphi(z) = f(z) - f(z_0)$, а саме точка z_0. Тому за наслідком 1 $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz = m$, де m — кратність точки z_0 як нуля функції φ. Якщо припустити, що $f'(z_0)=0$, то $\varphi'(z_0)=0$, і тому $m>1$. Отже,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz = m > 1.$$

З іншого боку,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi'(z_0 + r\exp it) ri\exp it}{\varphi(z_0 + r\exp it)}dt.$$

Оскільки f (а отже, і φ) — однолиста функція, то вона взаємно однозначно відображає коло Γ на контур L: $w = \varphi(z_0 + r\exp it)$, $t \in [0;\ 2\pi]$. Тому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{w'(t)dt}{w(t)} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi'(z_0 + r\exp it) ir\exp it}{\varphi(z_0 + r\exp it)}dt.$$

Таким чином,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi'(z)dz}{\varphi(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{dw}{w} \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{dw}{w} = m > 1.$$

Однак останній інтеграл дорівнює 1, якщо $w_0 = 0$ лежить усередині контуру L, і дорівнює 0, якщо $w_0 = 0$ лежить зовні L. Отже, припущення, що $f'(z_0)=0$, неправильне. Тому $f'(z_0) \neq 0 \quad \forall z \in D$.

14. 2) Для функції $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}$ виконуються всі умови наслідку 2. Тому для обчислення даного невласного інтеграла треба знайти лишки функції f відносно особливих точок, які лежать у півплощині $\operatorname{Im} z > 0$. Зрозуміло, що такими точками є $z_0 = i$ та $z_1 = 3i$, які є простими полюсами функції f. Тому

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \frac{i^2}{2i\cdot 8} = \frac{i}{16},\ \operatorname*{res}_{z=3i} f(z) = \frac{9i^2}{-8\cdot 6i} = -\frac{3i}{16}$$

і за формулою (8)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+9)} = 2\pi i\left(\frac{i}{16} - \frac{3i}{16}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

15. За формулою (7) кількість нулів в області D^* функцій f і $f+\varphi$ відповідно дорівнює

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz \quad \text{і} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(z)+\varphi'(z)}{f(z)+\varphi(z)}dz.$$

На підставі вправи 17 § 24.1 маємо

$$\frac{f'(z)+\varphi'(z)}{f(z)+\varphi(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} + \left(\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)' \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)^n \quad \forall z\in L.$$

Останній ряд є рівномірно збіжним на L (впевнитись у цьому), тому його можна почленно інтегрувати:

$$\int_L \frac{f'(z)+\varphi'(z)}{f(z)+\varphi(z)}dz = \int_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_L \psi'(z)\psi^n(z)dz,$$

де $\psi(z)=\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$. Оскільки функція $F(z)=\dfrac{1}{n+1}\psi^{n+1}(z)$ є первісною для функції $\psi'\psi^n$ в області D_1, що містить L, проте $D_1\subset D$, то за формулою Ньютона — Лейбніца $\int_L \psi'(z)\psi^n(z)dz=0 \quad \forall n\in \mathbf{N}_0$. Отже,

$$\int_L \frac{f'(z)+\varphi'(z)}{f(z)+\varphi(z)}dz = \int_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz,$$

і теорему Руше доведено.

16. 6) Нехай $f(z)=1-9z$ і $\varphi(z)=z^4$. Тоді $|f(z)|\geq 9|z|-1=17$, якщо $|z|=2$, і $|\varphi(z)|= = 2^4=16<|f(z)|$, якщо $|z|=2$. Тому за теоремою Руше функції $f(z)=1-9z$ і $f(z)+ +\varphi(z)=z^4-9z+1$ мають у крузі $K=\{z: |z|<2\}$ однакову кількість нулів. Оскільки функція f має в цьому крузі один нуль, то й функція $f+\varphi$ має в крузі K один нуль. Інші три нулі функції $f(z)+\varphi(z)=z^4-9z+1$ задовольняють нерівність $|z|\geq 2$. Проте при $|z|=2$ маємо

$$|f(z)+\varphi(z)|\geq 9|z|-|z|^4-1=18-16-1=1>0.$$

Отже, у даній області $D=\{z: |z|>2\}$ лежать три нулі функції $f+\varphi$, тобто три корені рівняння $z^4-9z+1=0$.

Розділ 27 АНАЛІТИЧНЕ ПРОДОВЖЕННЯ

§ 27.1. Поняття аналітичного продовження. Правильні та особливі точки суми степеневого ряду

Функцію f_1 називають *аналітичним продовженням функції* f із множини E на область $D \supset E$, якщо f_1 — аналітична в D і $f_1(z) = f(z) \quad \forall z \in E$.

Якщо існує аналітичне продовження функції f із множини E на область $D \supset E$ і $E' \cap D \neq \varnothing$, то це продовження єдине.

Існують функції f, для яких немає аналітичного продовження множини $D(f)$ на ширшу область $D_1 \supset D(f)$. Зокрема, функція $f(z) = \sum\limits_{n=0} z^{n!}$, що є аналітичною в крузі $K = \{z: |z| < 1\}$, не має аналітичного продовження на область $D \supset K$.

Нехай $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, R — радіус збіжності цього степеневого ряду, $0 < R < \infty$, а $\Gamma = \{z: |z - z_0| = R\}$ — коло його збіжності. Тоді точку $z^* \in \Gamma$ називають *правильною точкою функції* f, якщо існує аналітичне продовження цієї функції з круга $K = \{z: |z - z_0| < R\}$ на область D, що містить точку z^*. У противному разі $z^* \in \Gamma$ називають *особливою точкою функції* f.

Якщо степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ має скінченний радіус збіжності $R > 0$, то на колі збіжності Γ цього ряду є принаймні одна особлива точка його суми $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. При цьому точка $z^* = z_0 + R \exp it^* \in \Gamma$ є особливою, якщо існує точка $z_1 = z_0 + r \exp it^*$ така, що $0 < r < R$ і

$$R - |z_1 - z_0| = R - r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\dfrac{\left| f^{(n)}(z_1) \right|}{n!}}}.$$

Якщо

$$R - |z_1 - z_0| = R - r < \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z_1)|}{n!}}},$$

то z^* — правильна точка функції f.

Купюрою, або *природною межею, аналітичної функції* f називають межу такої області D, в якій функція f аналітична і не існує аналітичного продовження цієї функції з області D на область $D_1 \supset D$.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження (виконати усно):

1) якщо існує аналітичне продовження функції f із множини E на область D, то це продовження єдине;

2) для будь-якої функції f існує аналітичне продовження з множини $D(f)$ на ширшу область D_1;

3) на колі збіжності даного степеневого ряду є принаймні одна правильна точка суми цього ряду.

2. Довести або спростувати дані твердження:

1) функція $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n$, $|z| < 1$, має аналітичне продовження;

2)• функція $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n!+1}}{n!+1}$, $|z| \le 1$, має аналітичне продовження з множини $\overline{K} = \{z : |z| \le 1\}$ на ширшу область D;

3) коло збіжності будь-якого степеневого ряду є купюрою суми цього ряду;

4) якщо існує аналітичне продовження функції f з області D на ширшу область D_1, то існує аналітичне продовження функції f' з D на D_1;

5) твердження, обернене до попереднього, є правильним;

6) сума степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$ має на колі збіжності дві особливі точки;

7) якщо на колі збіжності даного степеневого ряду існує одна правильна точка суми цього ряду, то існує і нескінченна кількість таких точок;

8) якщо у твердженні 7) слово «правильна» замінити на «особлива», то дістанемо правильне твердження;

9) сума степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ має на колі збіжності одну особливу точку.

3. Для двох даних функцій f і φ визначити, чи є одна з них аналітичним продовженням іншої:

1) $f(z)=\ln 2-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1-z)^n}{n\cdot 2^n}$, $\varphi(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$;

2)• $f(z)=i\pi-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{(z-2)^n}{n}$, $\varphi(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$;

3) $f(z)=\frac{2}{(z-1)(z-3)}$, $\varphi(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}-1}{z^n}$;

4) $f(z)=\frac{2}{(z-1)(z-3)}$, $\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{-z^n}{3^{n+1}}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^{-n}$;

5) $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$, $\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$;

6) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$, $\varphi(z)=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{2^n}$;

7) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$, $\varphi(z)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z+1)^n$;

8) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n z^n$, $\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-a)^n z^n}{(1-z)^{n+1}}$.

4. Нехай $f(z)=\sum\limits_{n=0}a_n(z-z_0)^n$, $0<R<\infty$ і $\Gamma=\{z:\ z=z_0+R\exp it,$ $t\in[0;2\pi]\}$ — коло збіжності даного степеневого ряду. Довести, що:

1) множина $\{t\in[0;2\pi]:\ z=z_0+R\exp it\}$ — особлива точка $f\}$ є замкненою у просторі $\mathbf{R}^1$;

2) множина $\{z\in\Gamma:\ z$ — особлива точка $f\}$ є замкненою в $\mathbf{C}$;

3) множина $\{t\in\mathbf{R}:\ z=z_0+R\exp it$ — особлива точка $f\}$ є замкненою у просторі $\mathbf{R}^1$;

4)• множина $\{t\in\mathbf{R}:\ z=z_0+R\exp it$ — правильна точка $f\}$ є відкритою у просторі $\mathbf{R}^1$.

5. Знайти правильні та особливі точки суми даного степеневого ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^{2n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 z^n$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^{n!}$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n!+1}}{n!+1}$;

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}na^n z^n$, $a\neq 0$; 6)• $\ln 2-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{n\cdot 2^n}$.

6. Довести, що коли $a_n \ge 0$ і $\forall n$ $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = 1$, то $z = 1$ є особливою точкою функції $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

7. Довести, що коли $a_n \in \mathbf{R}$ $\forall n$, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ і $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = +\infty$ (або $-\infty$), то $z = 1$ є особливою точкою функції $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

8. Нехай $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$. Довести, що:

1) кругом збіжності цього ряду є $K = \{z: |z| < 1\}$;

2) $f(z) = z^2 + z^4 + \ldots + z^{2^n} + f\left(z^{2^n}\right)$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall z \in K$;

3) множина $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{z \in \mathbf{C}: z^{2^n} = 1\right\}$ скрізь щільна на колі $\Gamma = \{z: |z| = 1\}$;

4) якщо $z^* \in E$, а $|z| < 1$ і $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} z^*$, то $\exists n_0: n > n_0 \Rightarrow z^{2^n} > 0$ і $z^{2^n} \to 1$ при $n \to \infty$;

5) $f(z) \to \infty$, якщо $z \to z^*$, $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} z^*$, $|z| < 1$ $\forall z^* \in E$;

6) кожна точка кола $|z| = 1$ є особливою точкою функції $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$;

7) коло $|z| = 1$ є купюрою суми степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$.

Зразки розв'язування задач

2. 2) Припустимо, що існує функція f_1, аналітична в області $D \supset \overline{K}$ і така, що $f_1(z) = f(z)$ $\forall z \in \overline{K}$. Тоді $f_1'(z) = f'(z)$ $\forall z \in K = \{z: |z| < 1\}$. Проте за теоремою про диференціювання суми степеневого ряду маємо $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ $\forall z \in K$. Отже, сума останнього степеневого ряду має аналітичне продовження на область $D \supset K$, $D \ne K$. Однак це неможливо. Таким чином, дане твердження неправильне.

3. 2) Неважко помітити, що кругом збіжності першого степеневого ряду є круг $K_1 = \{z: |z-2| < 1\}$, а другого ряду — круг $K_2 = \{z: |z-2| < 1\}$. Оскільки $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, то жодна з даних функцій не є аналітичним продовженням іншої.

4. 4) Нехай $t^* \in \mathbf{R}$: $z^* = z_0 + R\exp it^*$ — правильна точка функції f. Тоді існує аналітичне продовження функції f з круга $K = \{z: |z - z_0| < R\}$ на ширшу область $D \supset K$, що містить точку z^*. Оскільки $z^* \in D$, то $\exists O\left(z^*\right) \subset D$, тобто існує дуга кола Γ, яка містить точку z^* і повністю лежить в D. Це означає, що існує окіл $O\left(t^*\right)=(\alpha;\ \beta)$ такий, що $t^* \in (\alpha;\ \beta)$ і множина $\{z=z_0+R\exp it:\ t\in(\alpha;\ \beta)\}\subset D$, а отже, t^* — внутрішня точка множини $\{t\in\mathbf{R}:\ z=z_0+R\exp it$ — правильна точка $f\}$, тому дана множина є відкритою у просторі $\mathbf{R}^1$.

5. б) Кругом збіжності даного степеневого ряду є $K=\{z:\ |z-1|<2\}$. У цьому крузі

$$f'(z)=\left(\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{n\cdot 2^n}\right)'=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}=\frac{1}{z+1}.$$

Тому для f' на колі $\Gamma=\{z:\ |z-1|=2\}$ єдиною особливою точкою є $z=-1$. Зрозуміло, що ця точка є особливою і для функції f. Усі інші точки кола Γ лежать в однозв'язній області $D=\mathbf{C}\setminus\{z=x:\ x\le -1\}$, де аналітична функція $F(z)=\ln(z+1)$ є первісною для функції $f'(z)=\frac{1}{z+1}$, тому $f(z)=F(z)+C\quad \forall z\in D$. Отже, $f(z)=\ln(z+1)\quad \forall z\in D$, зокрема для всіх $z\in K$. Це означає, що кожна точка $z\in\Gamma$ є правильною точкою функції f.

§ 27.2. Елементарні функції комплексної змінної як аналітичне продовження з дійсної осі у комплексну площину

Функцію φ називають *аналітичним продовженням функції* f з дійсної осі, якщо $D(f)=E\subset\mathbf{R}$, $D(\varphi)=G$ — область в $\mathbf{C}$, φ — аналітична в G і $\varphi(x)=f(x)\quad \forall x\in E\subset G$.

Якщо f — основна елементарна функція дійсної змінної, то область визначення $D(f)$ містить у собі деякий інтервал $(a;b)$, тому $E'\cap G\ne\varnothing$ $\forall G\supset E$, де G — область в $\mathbf{C}$. Звідси випливає, що різні способи аналітичного продовження такої функції приводять до однієї й тієї самої функції.

Наприклад, експоненціальну функцію можна аналітично продовжити з дійсної осі у комплексну площину за допомогою формул:

1) $\exp z=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\quad \forall z\in\mathbf{C}$; 2) $\exp z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\quad \forall z\in\mathbf{C}$;

3) $\exp z=e^x(\cos y+i\sin y)\quad \forall z\in\mathbf{C}$, де $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$.

Вправи

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) кожну функцію дійсної змінної, визначену на множині $\mathbf{R}$, можна аналітично продовжити на множину $\mathbf{C}$;

2) кожну елементарну функцію, визначену на множині $\mathbf{R}$, можна аналітично продовжити на множину $\mathbf{C}$;

3) кожну основну елементарну функцію, визначену на $\mathbf{R}$, можна аналітично продовжити на $\mathbf{C}$;

4) якщо функція $w = f_1(z)$ є аналітичним продовженням функції $y = f(x)$, $x \in (-R, R)$, $0 < R \le \infty$, на круг $K = \{z : |z| < R\}$, то $f_1(z) = f(z)$ $\forall z = x \in (-R; R)$, тобто $f_1(z)$ дістаємо з $f(x)$ формальною заміною x на z;

5) функцію $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ можна аналітично продовжити з дійсної осі на комплексну площину $\mathbf{C}$;

6) існує аналітичне продовження функції $f(x) = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbf{R}$, на комплексну площину $\mathbf{C}$;

7)• якщо існує аналітичне продовження функції $y = f(x)$, $x \in (a; b) \subset \mathbf{R}$, на область $D \subset \mathbf{C}$, то f має на інтервалі $(a; b)$ похідну будь-якого порядку;

8) твердження, обернене до попереднього, є правильним.

2. Для даної функції f дійсної змінної визначити, чи існує її аналітичне продовження з області визначення $D(f)$ на якусь область $G \subset \mathbf{C}$, і, якщо так, вказати найширшу область G:

1) $f(x) = \exp x$, $D(f) = \mathbf{R}$;   2) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$, $D(f) = \mathbf{R}$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbf{N}$, $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$;   4) $f(x) = \sqrt{x}$, $D(f) = \{x : x \ge 0\}$;

5) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $D(f) = \mathbf{R}$;   6)• $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $D(f) = \{x : x > 0\}$;

7) $f(x) = \sin x$, $D(f) = \mathbf{R}$;   8) $f(x) = \cos x$, $D(f) = \mathbf{R}$;

9) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $D(f) = \left\{x \in \mathbf{R} : x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}\right\}$;

10) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $D(f) = \{x \in \mathbf{R} : x \ne \pi n, n \in \mathbf{Z}\}$;

11) $f(x) = \operatorname{sh} x$, $D(f) = \mathbf{R}$;   12) $f(x) = \operatorname{ch} x$, $D(f) = \mathbf{R}$;

13) $f(x) = \operatorname{th} x$, $D(f) = \mathbf{R}$;   14) $f(x) = \operatorname{cth} x$, $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$;

15) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^{2n}}$, $D(f) = \mathbf{R}$;

16)• $f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right), & x \ne 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $D(f) = \mathbf{R}$;

17) $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$, $D(f) = \{x \in \mathbf{R} : \cos x \ne 0\}$;

18) $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$, $D(f) = \mathbf{R}$;   19) $f(x) = \arcsin x$, $D(f) = (-1; 1)$;

20) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $D(f) = (-\infty; +\infty)$;   21) $f(x) = \ln x$, $D(f) = (0; +\infty)$.

3. Показати, коли функція f_1 є аналітичним продовженням функції

$$f(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right), & \text{якщо } x\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x=0,\end{cases}$$

з деякого проміжку $\langle a;\, b\rangle$ на область $D\subset \mathbf{C}$, де $D\supset\langle a;\, b\rangle$, то обов'язково $f_1(z)=\exp\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)$ $\forall z\neq 0$.

4. Показати, що функцію $y=\sin x$ можна аналітично продовжити з дійсної осі на комплексну площину за допомогою однієї з формул:

1) $\sin z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\forall z\in\mathbf{C}$;

2) $\sin z=\sin x\,\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}+i\cos x\,\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}$ $\forall z\in\mathbf{C}$, де $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$;

3) $\sin z=\dfrac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}$ $\forall z\in\mathbf{C}$ за умови, що $\exp z$ певним чином визначена на множині $\mathbf{C}$.

5. Сформулювати та розв'язати задачу, аналогічну задачі 4, для даних функцій:

1) $\cos x$; 2) $\operatorname{ch} x$; 3) $\operatorname{sh} x$; 4) $\exp x$.

6. Нехай функція f визначена на множині $\mathbf{C}$. Довести, що $f(z)=\exp z$ $\forall z\in\mathbf{C}$ тоді й тільки тоді, коли виконується принаймні одна з умов:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n=f(z)$ $\forall z\in\mathbf{C}$; 2) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$ $\forall z\in\mathbf{C}$;

3) f — аналітична функція в $\mathbf{C}$, $f(0)=1$ і $f'(z)=f(z)$ $\forall z\in\mathbf{C}$;

4) $f(z+w)=f(z)f(w)$ $\forall z,\, w\in\mathbf{C}$ і $f'(0)=1$;

5) $f(z+w)=f(z)f(w)$ $\forall z,\, w\in\mathbf{C}$ і $f(z)\neq\text{const}$ в $\mathbf{C}$.

7. Нехай функція f визначена на множині $\mathbf{C}$. Довести, що $f(z)=\cos z$ $\forall z\in\mathbf{C}$ тоді й тільки тоді, коли виконується принаймні одна з умов:

1) $f(z)=\dfrac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2}$ $\forall z\in\mathbf{C}$;

2) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$ $\forall z\in\mathbf{C}$;

3) f — аналітична функція в $\mathbf{C}$, $f(0)=1$, $f'(0)=0$ і $f''(z)=-f(z)$ $\forall z\in\mathbf{C}$;

4) f — аналітична функція в $\mathbf{C}$, $f(z)\neq\text{const}$ в $\mathbf{C}$,
$f(z+w)+f(z-w)=2f(z)f(w)$ $\forall z,\, w\in\mathbf{C}$ і $f'(0)=0$;

5) f — неперервна функція в $\mathbf{C}$, $f(z) \neq \text{const}$ в $\mathbf{C}$,

$$f(z+w)+f(z-w)=2f(z)f(w) \quad \forall z,\ w \in \mathbf{C},\ |f(x)| \leq 1 \quad \forall x \in O(0).$$

8. Сформулювати і розв'язати задачу, аналогічну попередній, для функції $f(z)=\operatorname{ch} z$.

9. Використовуючи поняття аналітичного продовження, обґрунтувати, чому дану функцію дійсної змінної не можна розвинути у степеневий ряд на інтервалі $(-\infty;\ +\infty)$:

1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^4}$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^{2n}}$ $\forall n \in \mathbf{N}$;

4) $f(x)=\operatorname{arctg} x$; 5)• $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$;

6) $f(x)=\operatorname{arcctg} x$; 7) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$

Зразки розв'язування задач

1. 7) Припустимо, що функція f_1 є аналітичним продовженням функції f з інтервалу $(a;b) \subset \mathbf{R}$ на область $D \subset \mathbf{C}$. Тоді $f_1(x)=f(x)$ $\forall x \in (a;\ b)$ і $\forall x_0 \in (a;\ b)$, функція $f_1(z)$ має похідну будь-якого порядку як функція комплексної змінної. Тому $f_1(x)$ має в точці x_0 похідну будь-якого порядку як функція дійсної змінної. Проте для $z=x$ маємо $f_1(x)= f(x)$, тому твердження 1.7) є правильним.

2. 6) Відомо, що $\forall x>0$ $x^{\alpha}=\exp(\alpha \ln x)$. Враховуючи це, покладемо $f_1(z)=\exp(\alpha \ln z)$, де $\ln z=\ln|z|+i \arg z$ $\forall z:\ z \neq x,\ \forall x \leq 0$. Функція f_1 є аналітичною в області $D= \mathbf{C} \setminus \{z:\ z=x \leq 0\}$ і $f_1(x)=f(x)$ $\forall x>0$. Отже, функція f_1 є аналітичним продовженням функції f з інтервалу $(0;+\infty)$ на область D.

Якщо припустити, що існує інша функція f_2, яка є аналітичним продовженням функції f на ширшу область $G \supset D$, то за властивістю єдиності аналітичної функції $f_2(z)= f_1(z)$ $\forall z \in D$. Тому існує точка $z^* \in G$ така, що $z^* \notin D$, $z^* \neq 0$ і $z^*=x^*<0$, причому $\lim\limits_{z \to z^*} f_2(z)=f_2\left(z^*\right)$, звідки $\lim\limits_{D \ni z \to z^*} f_2(z)=\lim\limits_{D \ni z \to z^*} f_1(z)=f_2\left(z^*\right)$. Проте функція $f_1(z)= e^{\alpha \ln|z|} \exp(i\alpha \arg z)=e^{\alpha \ln|z|}(\cos \alpha \arg z+i \sin \alpha \arg z)$ не має границі в точці $z^*=x^*<0$ (покажіть це). Отже, функція $f_1(z)=\exp(\alpha \ln z)$ є єдиним аналітичним продовженням функції $f(x)=x^{\alpha}$ з інтервалу $(0;+\infty)$ на найбільш широку область $D=\mathbf{C} \setminus \{z:\ z=x \leq 0\}$.

16) Якщо припустити, що існує аналітичне продовження функції f з інтервалу $(-\infty;\ +\infty)$ на якусь область $D \supset (-\infty;\ \infty)$, то за властивістю єдиності аналітичного

продовження $f_1(z) = \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right)$ $\forall z \neq 0$. Неважко помітити, що точка $z=0$ є істотно особливою точкою функції f_1, тому f_1 не може бути аналітичною в області $D \supset (-\infty;\ +\infty)$. Отже, не існує аналітичного продовження функції f з інтервалу $(-\infty; +\infty)$ на будь-яку область $D \supset (-\infty;\ +\infty)$.

9.5) Якщо припустити, що $\ln\left(1+x^2\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-\infty; +\infty)$, то за теоремою Абеля і властивістю єдиності аналітичної функції дістанемо, що $\ln\left(1+z^2\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbf{C}$. Проте функція $f(z) = \ln\left(1+z^2\right)$ не є аналітичною в області, що містить точки $z = yi$, де $|y| \geq 1$. Тому дану функцію не можна розвинути у степеневий ряд на інтервалі $(-\infty; +\infty)$.

ВІДПОВІДІ

§ 13.1

4. 1) Так; 3) так; 5) ні; 7) ні; 8) ні; 9) так; 10) так. **5.** 1) Так; 2) так. **9.** 2) Так; 3) ні. **13.** 1) Так; 2) так. **15.** Ні. **16.** 2) 8; 3) 3; 4) $\sqrt{2}$; 5) e. **19.** 2) Так; 3) так; 4) ні; 5) так. **20.** 1) $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$; 2) $\sqrt{\frac{\pi^3}{3}-3}$. **22.** 0,5. **23.** 2) $x(t)=\operatorname{sign} t,\ \ y(t)=0,\ t\in\mathbf{R}$.

§ 13.2

6. 1) ± 1, обмежена, розбіжна; 2) ± 1, ± i, обмежена, розбіжна; 3) і 5) 0, збіжна; 6) 0,5, збіжна; 7) e^{-1}, збіжна; 8) $-1+i$, збіжна; 9) $2i$, ∞, необмежена; 10) 1, збіжна. **8.** 1) Ні; 3) так; 4) так; 5) ні. **9.** 1), 2), 5) — 8) Ні; 4) так. **13.** Нескінченну границю мають послідовності 1), 6) і 8). **14.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **15.** Ні. **16.** Ні.

§ 13.3

1. 3), а), в), д), є) Неправильне; б) правильне. **4.** 1) $E'=[a;b]$, $E^0=(a;b)$, $\partial E=\{a;b\}$, $\overline{E}=[a;b]$, $\mathbf{R}^1\setminus\overline{E}=(-\infty;\ a)\cup(b;\ +\infty)$, ізольованих точок немає; 3) $E'=\varnothing=E^0$, $\partial E=\mathbf{N}=\overline{E}$, $\mathbf{R}^1\setminus\overline{E}=(-\infty;\ 1)\cup\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(k;\ k+1)\right)$, $\mathbf{N}$ — множина ізольованих точок; 5) $E'=\mathbf{R}$, $E^0=\varnothing$, $\partial E=\mathbf{R}=\overline{E}$, $\mathbf{R}^1\setminus\overline{E}=\varnothing$, ізольованих точок немає. **5.** 1) $E'=E=\overline{E}$, $E^0=\{z\in\mathbf{C}:\ |z|<2\}$, $\partial E=\{z\in\mathbf{C}:\ |z|=2\}$, $\mathbf{C}\setminus\overline{E}=\{z\in\mathbf{C}:\ |z|>2\}$, ізольованих точок немає; 3) $E^0=\varnothing$, $\partial E=E$, $\mathbf{C}\setminus\overline{E}=\{z\in\mathbf{C}:\ |z-1|+|z+1|\neq 1\}$, ізольованих точок немає; $E'=E=\overline{E}$, 5) $E'=\left\{z\in\mathbf{C}:\arg(z-z_0)\le\frac{\pi}{4}\right\}\cup\{z_0\}\cup\{z:\ \arg(z-z_0)=\pi\}=\overline{E}$, $E^0=E$, $\partial E=\left\{z\in\mathbf{C}:\ \arg(z-z_0)=\frac{\pi}{4}\right\}$ або $\arg(z-z_0)=\pi\}$, $\mathbf{C}\setminus\overline{E}=\left\{z\in\mathbf{C}:\ \frac{\pi}{4}<\arg(z-z_0)<\pi\right\}$, ізольованих точок немає.

§ 13.4

1. 1), 2) Ні; 3) — 5) так. **4.** Ні. **14.** 1) Досконала; 2) — 4) не обов'язково. **17.** 1), 2) Так; 3), 4) ні. **21.** 1) — 4) Так.

§ 13.5

1. 1), 3), 4) і 7) Так; 2), 5), 6) і 8) ні. **3.** Будь-яка нескінченна множина у просторі ізольованих точок. **4.** 1) Ні, якщо крива необмежена; 2) і 3) так. **5.** Так. **6.** 1) Ні; 2) — 4) так. **8.** Відрізки. **22.** Ні, якщо множина має більше ніж одну точку. **23.** 1), 2) і 4) Так; 3) ні.

§ 13.6

3. 2) Ні; 3) так. **12.** 1) Так; 2) ні. **14.** 1), 2) Повний; 3) неповний.

§ 14.1

3. $f:(M,\rho)\to \mathbf{R}$ — оператор і дійсний функціонал, $\{x\in(M,\rho):\ f(x)=0\}=\overline{E}$. **4.** 1) $D(f)=\left\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ x\ge y\right\}$ — досконала множина, $D'(f)=D(f)$, $D^0(f)=$ $=\left\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ x>y\right\}$, $\partial D(f)=\left\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ x=y\right\}$, $\left\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ x<y\right\}$ — множина зовнішніх точок, ізольованих точок немає; 3) $D(f)=\left\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ y\ge 0,\ x\ge \sqrt{y}\right\}$ — досконала множина, $D'(f)=D(f)$, $D^0(f)=\left\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ y>0,\ x>\sqrt{y}\right\}$, $\partial D(f)=$ $=\left\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ x=\sqrt{y}\ \text{або}\ y=0\right\}$, $\mathbf{R}^2\setminus D(f)$ — множина зовнішніх точок, ізольованих точок немає; 5) $D(f)=\left\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ x<\frac{1}{2}(5y-|y|)\ \text{або}\ x>\frac{1}{2}(5y+|y|)\right\}$ — відкрита множина, $D'(f)=\overline{D}(f)=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2:\ x\le\frac{1}{2}(5y-|y|)\ \text{або}\ x\ge\frac{1}{2}(5y+|y|)\}$, $D^0(f)=D(f)$ $\partial D(f)=$ $=\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ x=3y\ \text{або}\ x=2y\}$, $\mathbf{R}^2\setminus\overline{D}(f)$ — множина зовнішніх точок, ізольованих точок немає; 7) $D(f)=\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ (x-1)^2+y^2\le 1\}\setminus\{(0,\ 0)\}$ — незамкнена і невідкрита множина, $D'(f)=\overline{D}(f)=\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ (x-1)^2+y^2\le 1\}$, $D^0(f)=\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:$ $:(x-1)^2+y^2<1\}$, $\partial D(f)=\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ (x-1)^2+y^2=1\}$, $\mathbf{R}^2\setminus\overline{D}(f)$ — множина зовнішніх точок, ізольованих точок немає; 9) $D(f)=\bigcup\limits_{n\in \mathbf{Z}}\Big(\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ y\ge 0\ \text{і}\ 2\pi n\le x\le \pi+2\pi n\}\cup$ $\cup\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ y\le 0\ \text{і}\ \pi+2\pi n<x<2\pi+2\pi n\}\Big)$ — досконала множина, $D'(f)=D(f)$, $D^0(f)=\bigcup\limits_{n\in \mathbf{Z}}\Big(\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ y>0\ \text{і}\ 2\pi n<x<\pi+2\pi n\}\cup\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ y<0\ \text{або}\ \pi+2\pi n<$ $<x<2\pi+2\pi n\}\Big)$, $\partial D(f)=\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ x=0\ \text{або}\ y=0, \text{або}\ x=\pi n,\ n\in \mathbf{Z}\}$, $\mathbf{R}^2\setminus D(f)$ — множина зовнішніх точок, ізольованих точок немає; 11) $D(f)=\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ (x-1)^2+y^2\le 1$ або $(x+1)^2+y^2\le 1\}\setminus\{(0,\ 0)\}$ — незамкнена і невідкрита множина, $D'(f)=D(f)\cup\{(0,\ 0)\}$, $D^0(f)=\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ (x-1)^2+y^2<1\ \text{або}\ (x+1)^2+y^2<1\}$, $\partial D(f)=\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ (x-1)^2+$ $+y^2=1\ \text{або}\ (x+1)^2+y^2=1\}$, $\mathbf{R}^2\setminus D'(f)$ — множина зовнішніх точок, ізольованих точок немає; 13) $D(f)=\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ x=n\ \text{і}\ y=k,\ n\in \mathbf{Z},\ k\in \mathbf{Z}\}$ — досконала множина, $D'(f)=$ $=D(f)$, $D^0(f)=\varnothing$, $\partial D(f)=D(f)$, $\mathbf{R}^2\setminus D(f)$ — множина зовнішніх точок, ізольованих точок немає. **6.** 1) $x=y+c,\ c>0$; 3) $x^2-y^2=c^2,\ c>0$; 5) $x=|y|+c,\ c\in \mathbf{R}$; 7) $\dfrac{2x}{x^2+y^2}=c$, $c\in \mathbf{R}\Leftrightarrow (x-c_1)^2+y^2=c_1^2,\ c_1\in \mathbf{R},\ (x,\ y)\ne(0,\ 0)$ або $x=0$ і $(x,\ y)\ne(0,0)$. **7.** 1) $x+y+$ $+2z=c,\ c\in \mathbf{R}$; 3) $z=x^2+y^2-c,\ c\in \mathbf{R}$. **8.** 1) $f(x,\ y)=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y-1)^2}$; 3) $f(x,\ y)=$

$= \ln x + \sqrt{1-x^2-y^2}$; 5) $f(x, y) = \ln\dfrac{(y-x)(2x-y)}{x}$. **9.** 1) $\mathrm{Re}\, f(z) = u(x, y) = -x^2 - y^2$, $\mathrm{Im}\, f(z) = v(x, y) = 4xy$; 3) $\mathrm{Re}\, f(z) = e^x \cos y$, $\mathrm{Im}\, f(z) = e^x \sin y$; 5) $\mathrm{Re}\, f(z) = \cos x \operatorname{ch} y$, $\mathrm{Im}\, f(z) = -\sin x \operatorname{sh} y$; 7) $\mathrm{Re}\, f(z) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y$, $\mathrm{Im}\, f(z) = \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$; 9) $\mathrm{Re}\, f(z) = \dfrac{\sin 2x}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}$, $\mathrm{Im}\, f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\cos 2x - \operatorname{ch} 2y}$; 13) $\mathrm{Re}\, f(z) = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$, $\mathrm{Im}\, f(z) = \arg z$. **11.** 1) Так; 2) ні. **12.** 1) Промінь $\Gamma_1 = \{(x, y): x = r\cos\theta_0, \ y = r\sin\theta_0, \ r \in [0; +\infty)\}$, з вершиною в точці (0, 0); 3) криволінійний чотирикутник $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta, \ 0 \le \theta \le \theta_0, \ r_0 \le r \le R\}$. **19.** 1) Пряма $y = kx + b$; 3) парабола $y = ax^2 + bx + c$, якщо $a \ne 0$; 5) гіпербола $y = \dfrac{1}{x}$; 7) верхнє півколо $|z| = 1$ і відрізок дійсної осі $[-1; 1]$; 9) відрізок $[-1; 1]$ уявної осі.

§ 14.2

5. 1) Границя не існує, $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)\right) = 0$, друга повторна границя не існує; 3) границя не існує, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)\right) = 1$, $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)\right) = -1$; 5) $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = 0$, повторні границі не існують. **6.** 1) Існує і дорівнює 0; не існує; 3) для $\varphi_0 \ne \dfrac{\pi}{4} + \pi n$ не існує; не існує; 5) існує і дорівнює ∞; не існує. **7.** 1) 0; 3) 1; 5) 1; 7) $\dfrac{2}{3}$. **8.** 3) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \dfrac{\overline{z}_0 \,\mathrm{Re}\, z_0}{|z_0|^2}$ $\forall z_0 \ne 0$; 5) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \arg z_0$, $z_0 \notin \{z = x + i0 : x \le 0\}$; 7) $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{\sin\alpha z}{z} = \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha z_0}{\overline{z}_0}, & z_0 \ne 0, \\ \alpha, & z_0 = 0; \end{cases}$ 9) $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{1-\cos z}{z^2} = \begin{cases} \dfrac{1-\cos z_0}{z_0^2}, & z_0 \ne 0, \\ 0{,}5, & z_0 = 0; \end{cases}$ 11) $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{z^2-1}{z^2-5z+4} = \begin{cases} \dfrac{z_0^2-1}{z_0^2-5z_0+4}, & z_0 \ne 4, \ z_0 \ne 1, \\ -\dfrac{2}{3}, & z_0 = 1, \\ \infty, & z_0 = 4. \end{cases}$

§ 14.3

5. 1) На $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0\}$; 3) на $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$; 5) на $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| = 2|y|\}$; 7) на $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = y\}$; 9) на $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$. **6.** 1) Ні; 2) так, $f(0, 0) = 0$; 3) ні; 4) так, $f(0, 0) = 0$; 5) так, $f(0, 0) = 0$; 6), 7) ні. **7.** 1), 3) На $\mathbf{C} \setminus \{0\}$; 5) на $\mathbf{C} \setminus \{z = x + i0 : x \le 0\}$; 7), 9), 11), 13) на $\mathbf{C}$; 15) на $\mathbf{C} \setminus \left\{ i\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right) : n \in \mathbf{Z} \right\}$; 17) на $\mathbf{C} \setminus \{z = x + i0 : x \le 0\}$. **8.** 1) Так; 3), 5) ні. **9.** 1) $\begin{cases} x = t, \\ y = -\dfrac{a}{b}t + c, \end{cases}$

$z(t)=t+i\left(-\frac{a}{b}t+c\right)$, $t\in(-\infty;\ +\infty)$; 3) $\begin{cases}x=x_0+(x_1-x_0)t,\\ y=y_0+(y_1-y_0)t,\end{cases}$ $z(t)=x_0+(x_1-x_0)t+i(y_0+$ $+(y_1-y_0)t)$, $t\in[0;\ 1]$; 5) $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\end{cases}$ $z(t)=a\cos t+ib\sin t$, $t\in[0;2\pi]$; 7) $\begin{cases}x=a\,\mathrm{ch}t,\\ y=b\,\mathrm{sh}t,\end{cases}$ $z(t)=a\,\mathrm{ch}t+ib\,\mathrm{sh}t$, $t\in(-\infty;\ +\infty)$. **10.** 1) Не є дугою; 2) контур; 3) дуга, але не контур; 4) не є дугою; 5) контур; 6) дуга, але не контур; 7) не є дугою. **11.** 1) $(0;\ +\infty)$, не є компактною; 3) $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, є компактною. **12.** Так. **13.** f — сталий на $\mathbf{R}^1$. **14.** Так. **15.** Ні, розглянути $f(x,\ y)=yD(x)$, де $D(x)$ — функція Діріхле.

§ 14.4

3. 1) Так; 3) ні; 5), 7) так. **4.** 1) Так; 3) ні; 5) так; 7) так, не може. **5.** 1) Ні; 3) ні; 5) ні; 7) так; 9) так. **7.** 1) Ні; 3) так; 5) ні.

§ 14.5

3. 1), 3) Так; 5) ні; 9) так. **6.** 2) 0 і 1; 3) 0, ±1; 4) нерухомих точок немає; 5) $1+\sqrt{2}$; 6) нерухомих точок немає; 7) $x(t)=0$; 8) будь-яка невід'ємна функція на відрізку [0; 1]; 10) нерухомих точок немає. **8.** 1), 3) Так; 5) ні; 7) так; 9) ні. **9.** 1) 0,198 з точністю до 0,001; 3) 1,521 з точністю до 0,001; 5) 0,7035 з точністю до 10^{-4}; 7) 1,1712 з точністю до 10^{-4}; 8) x = 2,33, а y = 1,18 з точністю до 0,01. **12.** 2) 0,27; 3) 0,21; 4) –0,82; 5) 4,73; 6) 3,69.

§ 15.1

2. 1) $z'_x=\sqrt{x+y}+\frac{x}{2\sqrt{x+y}}$, $z'_y=\frac{x}{2\sqrt{x+y}}-2y$; 2) $z'_x=\frac{2x^2+2xy-3y^2-6}{3\sqrt[3]{\left(xy-x^2+1\right)^2(2x-3y)^2}}$, $z'_y=\frac{6xy-7x^2+9}{3\sqrt[3]{\left(xy-x^2+1\right)^2(2x-3y)^2}}$; 3) $z'_x=2^{x-y}\ln2-\sin\left(x+y^2\right)$, $z'_y=-2^{x-y}\ln2-2y\sin\left(x+y^2\right)$; 4) $z'_x=y^2\cos\left(xy^2\right)-2xe^{2y-x^2}$, $z'_y=2xy\cos\left(xy^2\right)+2e^{2y-x^2}$; 5) $z'_x=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $z'_y=$ $=\frac{x}{x^2+y^2}$; 6) $z'_x=-\frac{1}{\sin^2\left(3^{x^2-2y}-\frac{x^2}{y}\right)}\left(2x\cdot3^{x^2-2y}\ln3-\frac{2x}{y}\right)$, $z'_y=-\frac{1}{\sin^2\left(3^{x^2-2y}-\frac{x^2}{y}\right)}\times$ $\times\left(-2\cdot3^{x^2-2y}\ln3+\frac{x^2}{y^2}\right)$; 7) $z'_x=\frac{2xy}{\sqrt{1-\left(x^2-y\right)^2}}$, $z'_y=\arcsin\left(x^2-y\right)-\frac{y}{\sqrt{1-\left(x^2-y\right)^2}}$; 8) $z'_u=$ $=\mathrm{arctg}(u-v)+\frac{u+v}{1+(u-v)^2}$, $z'_v=\mathrm{arctg}(u-v)-\frac{u+v}{1+(u-v)^2}$; 9) $w'_x=\frac{x}{w}$, $w'_y=\frac{y}{w}$, $w'_z=\frac{z}{w}$; 10) $-\frac{1}{y^2+z^2}w'_x=\frac{1}{xy}w'_y=\frac{1}{xz}w'_z=\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{y^2+z^2}}$; 11) $w'_x=\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $w'_y=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z$,

$w'_z=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\left(\frac{x}{y}\right)$; 13) $w'_x=\frac{w}{x}y^z$, $w'_y=wzy^{z-1}\ln x$, $w'_z=wy^z\ln x\ln y$; 14) $w'_x=yzx^{yz-1}$, $w'_y=zx^{yz}\ln x$, $w'_z=yx^{yz}\ln x$; 15) $z'_x=\frac{2y}{x^2\sin\frac{2y}{x}}$, $z'_y=-\frac{2}{x\sin\frac{2y}{x}}$; 16) $z'_x=\frac{y^3+3x^2y}{\sqrt{1+\left(xy^3+yx^3\right)^2}}$, $z'_y=\frac{3xy^2+x^3}{\sqrt{1+\left(xy^3+yx^3\right)^2}}$; 17) $z'_x=zy^x\ln^2 y$, $z'_y=zy^{x-1}(1+x\ln y)$; 18) $z'_x=zyx^{y-1}\ln y$, $z'_y=$ $=zx^y\left(\frac{1}{y}+\ln x\ln y\right)$; 19) $z'_x=\frac{z}{x}y^y$, $z'_y=zy^y\ln x(1+\ln y)$; 20) $z'_x=z\left(\frac{x}{a+xy}+\frac{\ln(a+xy)}{y}\right)$, $z'_y=z\left(\frac{x^2}{y(a+xy)}-\frac{x\ln(a+xy)}{y^2}\right)$; 21) $x^2z'_x=y^2z'_y=-\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$; 22) $-\frac{x\ln^2 x}{\ln y}z'_x=y\ln xz'_y=$ $=5\left(2+\frac{\ln y}{\ln x}\right)^4$; 23) $u'_x=y(\cos z)^{xy}\ln\cos z$, $u'_y=x(\cos z)^{xy}\ln\cos z$, $u'_z=-xy(\cos z)^{xy-1}\sin z$; 24) $z'_x=-\frac{\sqrt{y^x}\ln y}{2\left(1+y^x\right)}$, $z'_y=-\frac{x\sqrt{y^x}}{2y\left(1+y^x\right)}$; 25) $\frac{u'_x}{yz}=\frac{u'_y}{xz}=\frac{u'_z}{xy}=-\frac{1}{\left(1+\sqrt{xyz}\right)\sqrt{xyz-x^2y^2z^2}}$; 26) $\frac{1}{2x}u'_x=\frac{1}{2y}u'_y=\frac{1}{2z}u'_z=\frac{1-x^2-y^2-z^2-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\left(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2}$; 27) $\frac{u'_x}{y^2+z^2+2x(y+z)}=$ $=\frac{u'_y}{x^2+z^2+2y(x+z)}=\frac{u'_z}{x^2+y^2+2z(x+y)}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(x\left(y^2+z^2\right)+y\left(x^2+z^2\right)+z\left(x^2+y^2\right)\right)^2}}$; 28) $u'_x=-\frac{az^2(ax-by)^{z^2-1}}{1+(ax-by)^{2z^2}}$, $u'_y=\frac{bz^2(ax-by)^{z^2-1}}{1+(ax-by)^{2z^2}}$, $u'_z=\frac{2z(ax-by)^{z^2}\ln(ax-by)}{1+(ax-by)^{2z^2}}$; 29) $u'_x=$ $=uy\left(\ln(y+xz)+\frac{xz}{y+xz}\right)$, $u'_y=xu\left(\ln(y+xz)+\frac{y}{y+xz}\right)$, $u'_z=\frac{ux^2y}{y+xz}$; 30) $\frac{u'_x}{a}=\frac{u'_y}{b}=\frac{u'_z}{c}=$ $=u(1+\ln(ax+by+cz))$; 31) $u'_x=yz(1-\pi xyz\sin\pi xyz)e^{\cos\pi xyz}$, $u'_y=xz(1-\pi xyz\sin\pi xyz)e^{\cos\pi xyz}$, $u'_z=xy(1-\pi xyz\sin\pi xyz)e^{\cos\pi xyz}$; 32) $w'_x=-\mathrm{ctg}^3\alpha\left(2xy^2-yzt\right)$, $w'_y=-\mathrm{ctg}^3\alpha\left(2x^2y-xzt\right)$, $w'_x=-\mathrm{ctg}^3\alpha\left(2zt^2-xyt\right)$, $w'_t=-\mathrm{ctg}^3\alpha\left(2z^2t-xyz\right)$, де $\alpha=x^2y^2+z^2t^2-xyzt$; 33) $f'_x\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}\right)=$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f'_y\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}\right)=-3$; 34) $f'_x\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=1$, $f'_y\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=-1$; 35) $f'_x(b,a)=b\sqrt[3]{\frac{ab}{\left(b^2-a^2\right)^2}}$, $f'_y(b,a)=-a\sqrt[3]{\frac{ab}{\left(b^2-a^2\right)^2}}$; 36) $\frac{3}{112}$; 37) $\frac{29}{25}$; 38) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **4.** 1) $\mathrm{arctg}\frac{1}{4}$, $\mathrm{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, $\mathrm{arctg}4$,

$\operatorname{arctg} 9$; 2) $-\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$, $-\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}, 0$, $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. **5.** 1) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, 0, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg} 8$, $\operatorname{arctg} 64$. **6.** $\operatorname{arctg}\frac{4}{19}$. **7.** $Oxz: \alpha = \operatorname{arctg} 12$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \operatorname{arctg}\frac{1}{12}$; $Oyz: \alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \operatorname{arctg} 6$, $\gamma = \operatorname{arctg}\frac{1}{6}$. **9.** $ab\rho$. **10.** $abcr^2 \sin\theta$.

§ 15.2

3. 1) $dz = \left(2x\cos^2 y + y^2 \sin 2x\right)dx + \left(2y\sin^2 x - x^2 \sin 2y\right)dy$, $(x,\ y) \in \mathbf{R}^2$; 2) $dz = \mathrm{e}^{x+y} \times \left(\frac{1+x}{y}dx + \frac{x}{y}\left(1 - \frac{1}{y}\right)dy\right)$, $y \neq 0$; 3) $dz = -\frac{2y}{x^2 \sin\frac{2y}{x}}dx + \frac{2}{x\sin\frac{2y}{x}}dy$, $x \neq 0$, $\operatorname{tg}\frac{y}{x} > 0$; 4) $du = x^{y^z}\left(\frac{y^z}{x}dx + zy^{z-1}\ln x dy + y^z \ln x \ln y dz\right)$, $x > 0$, $y > 0$; 5) $dz = (\sin x)^{\cos y}(\operatorname{ctg} x \cos y dx - \sin y \ln\sin x dy)$, $\sin x > 0$; 7) $dz = \frac{2}{\pi}\left(\left(\mathrm{e}^x \ln y + \frac{\mathrm{e}^y}{x}\right)dx + \left(\frac{\mathrm{e}^x}{y} + \mathrm{e}^y \ln x\right)dy\right)$, $x > 0$, $y > 0$; 8) $dz = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2^{xy}}{2^{xy} - (x+y)^2}} \cdot \frac{xy}{2^{xy}}((2 - y(x+y)\ln 2)dx + (2 - x(x+y)\ln 2)dy)$; 9) $dz = \frac{1}{x^2 + 2y^2} \times (2xdx + 4ydy)$; 10) $dz = -\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2}$; 11) $du = \frac{1}{1+(xyz)^2}(yzdx + xzdy + xydz)$, $(x,\ y,\ z) \in \mathbf{R}^3$; 12) $du = z^{xy}\left(y\ln z dx + x\ln z dy + \frac{xy}{z}dz\right)$, $z > 0$, $z \neq 1$; 13) $df(8,\ 2) = \frac{dx}{3} + 8dy$; 14) $df(1, 2) = 4dx - dy$; 15) $df(2, 3) = \frac{1}{13}(3dx - 2dy)$, $df(-4, 1) = -\frac{1}{17}(dx + 4dy)$; 16) $df(2, 2) = -0{,}1(dx + dy)$; 17) $du = -\frac{x^2 z}{y\sin^2\frac{x^2 z}{y}}\left(\frac{2dx}{x} - \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}\right)$; 18) $du = -\mathrm{e}^{-x\operatorname{ctg}\frac{y}{z}}\left(\operatorname{ctg}\frac{y}{z}dx - \frac{x}{z\sin^2\frac{y}{z}}dy + \frac{xy}{z^2 \sin^2\frac{y}{z}}dz\right)$. **6.** 1) 0,06; 2) 2,06; 3) 0,04e; 4) 0; 5) 0,007; 6) 0,12. **7.** $\Delta V = dV = 155$ см^3; $\Delta l = 0{,}071$ см, $dl = 0{,}065$ см. **8.** $\Delta T = \pi\frac{g\Delta l - l\Delta g}{g\sqrt{lg}}$, $\delta_T = 0{,}00002$. **9.** Зменшити на 2 см. **10.** $V = 61625$ см^3, $\Delta V = 608$ см^3. **11.** $\Delta V = 4600\pi$ см^3, $\delta_V = 0{,}04$. **12.** Об'єм зростає зі швидкістю $5{,}4$ дм^3/с, діагональ зростає зі швидкістю 10/7 см/с. **14.** 1) 0,887; 2) 1,08; 3) 1156,7; 4) 1,133. **16.** 1) $\frac{du}{dt} = t^6(7\sin t + t\cos t)$; 3) $dv = \rho^2\left(\left(\sin 2\varphi - \sin^2\varphi\right)\cos\varphi + \left(\cos^2\varphi - \sin 2\varphi\right)\sin\varphi\right)d\rho + \rho^3\left(\left(\cos^2\varphi - \sin 2\varphi\right)\cos\varphi - \left(\sin 2\varphi - \sin^2\varphi\right)\sin\varphi\right)d\varphi$; 4) $dz = 2u\left(\left(u^2 - v^2\right)\left(u^2 + v^2\right)^{u^2 - v^2 - 1} + \left(u^2 - v^2\right)^{u^2 + v^2}\ln\left(u^2 - v^2\right) + \left(u^2 + v^2\right)^{u^2 - v^2}\ln\left(u^2 + v^2\right) + \left(u^2 - v^2\right)^{u^2 + v^2 - 1}\left(u^2 + v^2\right)\right)du + 2v\left(\left(u^2 - v^2\right)\left(u^2 + v^2\right)^{u^2 - v^2 - 1} + \left(u^2 - v^2\right)^{u^2 + v^2}\ln\left(u^2 - v^2\right) - \left(u^2 + v^2\right)^{u^2 - v^2}\ln\left(u^2 + v^2\right) -\right.$

$-\left(u^2-v^2\right)^{u^2+v^2-1}\left(u^2+v^2\right)\Big)dv$; 5) $du=\left(\frac{2t}{v^2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{tv}{t+v}}+\frac{v}{2}\sqrt{\frac{t+v}{tv}}+\frac{v\cos tv}{\sin^2 tv}\right)dt+\left(-\frac{2t^2}{v^3}+\right.$ $\left.+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{tv}{t+v}}+\frac{t}{2}\sqrt{\frac{t+v}{tv}}+\frac{t\cos tv}{\sin^2 tv}\right)dv$; 6) $dz=\frac{1}{xy^2-yx^2+\sqrt{1+x^2+y^2}}\left(\left(y^2-2xy+\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)dx+\right.$ $\left.+\left(2xy-x^2+\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)dy\right)$; 7) $\frac{dz}{dt}=\frac{\cos\sqrt{t}}{2t^2\sqrt{t}}-\frac{2\sin\sqrt{t}}{t^3}-\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}-\cos\frac{1}{t}$; 8) $\frac{dz}{dt}=$ $=\sec^2\left(4t-e^t\cos t+2e^{2t}\sin^2 t\right)\left(4-e^t\left(\cos t-\sin t\right)+4e^{2t}\sin t(\sin t+\cos t)\right)$; 9) $\frac{du}{dx}=\sin x-$ $-4\sin x\cos^3 x+3\sin^2 x\cos x+x\cos x$; 10) $\frac{du}{dx}=e^{-ax}\left((a-ab)\cos x-\left(b+a^2\right)\sin x\right)$; 11) $dz=\frac{\left(x\cos^2 y+y^2\sin x\cos x\right)dx+\left(y\sin^2 x-x^2\sin y\cos y\right)dy}{y^2\sin^2 x+x^2\cos^2 y}$; 12) $dw=$ $=\left(x+\frac{x\cos^2 y+y^2\sin x\cos y}{\sqrt{x^2\cos^2 y+y^2\sin^2 x}}\right)dx+\left(y+\frac{y\sin^2 x-x^2\sin y\cos y}{\sqrt{x^2\cos^2 y+y^2\sin^2 x}}\right)dy$; 13) $\frac{dz}{dt}=\frac{2\left(5t^4-1\right)}{\sin 2\left(t^5-t\right)}$; 14) $dw=2\left(uy^2z^2f'_x+2uxyz^3f'_y+3vxy^2z^2f'_z\right)du+2\left(vy^2z^3f'_x-2vxyz^3f'_y+3uxy^2z^2f'_z\right)dv$.

20. 1) $z=4x-2y-3$, $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$; 3) $z=-\frac{1}{2}(x-y)+\frac{\pi}{4}$, $\frac{x-1}{-1/2}=\frac{y-1}{1/2}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1}$; 4) $z=7x+2y-18$, $\frac{x-2}{7}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{-1}$; 5) $z=x+2y+5$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{-1}$; 6) $x-y-$ $-2z=0$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-2}$; 7) $z=x-y+\frac{\pi}{2}$, $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{2z-\pi}{-2}$; 8) $z+2x+4y-3=0$, $\frac{x-2}{-2}=$ $=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-3}{-1}$; 9) $x-y+z=0$, $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$; 10) $3x+3y+z-2=0$, $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-1}{-3}=$ $=\frac{z+4}{-1}$; 11) $4z+\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-4\sqrt{2}=0$, $\frac{x-1}{-4\sqrt{2}}=\frac{y-1}{-4\sqrt{2}}=\frac{2z-\sqrt{2}}{-8}$; 12) $z=x$, $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=$ $=\frac{z-1}{-1}$; 13) $4x-\pi y-4z=0$, $\frac{2x-\pi}{8}=\frac{y-2}{-\pi}=\frac{z}{-4}$.

§ 15.3

2. $\frac{dz}{dl}=-\frac{16}{\sqrt{5}}$, функція спадає. **3.** 1) $\frac{1}{2}\left(3\sqrt{3}-5\right)$; 2) $\frac{3\sqrt{2}}{10}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) 4; 5) $\frac{\sqrt{29}}{2}$, $\bar{l}=\frac{1}{\sqrt{29}}(2\bar{i}+5\bar{j})$; 6) $5+3\sqrt{2}$, $\bar{l}=\frac{1}{2}\left(\bar{i}+\sqrt{2}\bar{j}+\bar{k}\right)$; 7) $\frac{2\sqrt{3}}{15}$, $\bar{l}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}\right)$; 8) $\frac{74}{\sqrt{7}}$, $\bar{l}=\frac{1}{\sqrt{7}}\left(\sqrt{3}\bar{i}+2\bar{j}\right)$; 9) $-\frac{4}{5\sqrt{13}}$, $\bar{l}=\frac{1}{\sqrt{13}}(2\bar{i}+3\bar{j})$; 10) $\frac{19}{8\sqrt{13}}$, $\bar{l}=\frac{1}{\sqrt{13}}(2\bar{i}+3\bar{j})$; 11) $-\frac{1}{5}$, $\bar{l}=-\bar{i}$; 12) $\frac{2u}{r}$, $\bar{l}=\frac{1}{r}\left(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}\right)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. **5.** 1) Точки прямої $y=x$; 2) (0, 0), $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$, (–1, 2), (–1, –2); 3) (0, 0), (0, 6), (2, 3), (4, 0), (4, 6); 4) (0, 0), (4, 0), (0, 4), $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

7. 1) $\operatorname{arctg}\frac{5}{13}\left(\approx 21^\circ\right)$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\left(\approx 26^\circ 34'\right)$; 4) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{5}\left(\approx 60^\circ 40'\right)$. **8.** 1) $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{\max}=\sqrt{2}$,

$\vec{l}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$; $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{\min}=-\sqrt{2}$, $\vec{l}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})$, $\alpha=\frac{5\pi}{4}$; $\frac{\partial z}{\partial l}=0$, якщо $\vec{l}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i}+\vec{j})$, $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ і $\vec{l}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}-\vec{j})$, $\alpha=\frac{7\pi}{4}$; 3) $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{\max}=\frac{3\sqrt{5}}{25}$, $\vec{l}=-\frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i}+2\vec{j})$, $\alpha=\pi-\operatorname{arctg}2$; $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{\min}=-\frac{3\sqrt{5}}{25}$, $\vec{l}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i}+2\vec{j})$, $\alpha=2\pi-\operatorname{arctg}2$; $\frac{\partial z}{\partial l}=0$, якщо $\vec{l}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i}+\vec{j})$, $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ і якщо $\vec{l}=-\frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i}+\vec{j})$, $\alpha=\pi+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **10.** 1) $\left(\frac{5}{4},\ \frac{3}{2}\right)$; 2) $y=-\frac{\pi}{2}+2\pi k-x$, $k\in\mathbf{Z}$; 3) $\left(1,\ -\frac{2}{3}\right)$. **11.** $x^2+y^2+z^2=1$. **12.** 1) $|\operatorname{grad}\ z(0,\ 0)|=5$ у напрямі вектора $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$; 2) $|\operatorname{grad}\ z(1,\ 1)|=2\sqrt{5}$ у напрямі вектора $\vec{a}=4\vec{i}+2\vec{j}$; 3) $|\operatorname{grad}\ u(M_0)|=\sqrt{35}$ у напрямі вектора $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k}$. **15.** 1) $2\vec{r}$; 2) $\frac{\vec{r}}{r}$; 3) $\frac{\vec{r}}{r^3}$; 4) $\frac{\vec{r}}{r^2}$; 5) $-\frac{\sin r}{r}\vec{r}$; 6) $2F'\left(\vec{r}^{\,2}\right)\vec{r}$; 7) $\vec{a}$; 8) $\vec{a}\left(\vec{b},\ \vec{r}\right)+\vec{b}\left(\vec{a},\ \vec{r}\right)$. **16.** $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{(\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} v)}{|\operatorname{grad} v|}$, $\frac{u}{\partial l}=0$, якщо $\operatorname{grad} u\perp\operatorname{grad} v$.

§ 15.4

2. 1) $d^2z=e^{xy}\left(y^2dx^2+2(xy+1)dxdy+x^2dy^2\right)$; 2) $d^2z=2\frac{\left(y^2-x^2\right)dx^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\frac{4xydxdy-\left(x^2-y^2\right)dy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; 3) $d^2z=2\left(\cos\alpha-\frac{1}{\alpha^2}\right)dtd\alpha+\left(\frac{2t}{\alpha^3}-t\sin\alpha\right)d\alpha^2$; 4) $d^2z=\left(\frac{y}{x}\right)^x\times\left(\left(\left(\ln\frac{y}{x}-1\right)^2-\frac{1}{x}\right)dx^2+\frac{2}{y}\left(x\ln\frac{y}{x}-x+1\right)dxdy+\frac{x(x-1)}{y^2}dy^2\right)$; 5) $d^2u=2(dxdy+dydz+dxdz)$; 6) $d^2u=\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^3}\left(2z\left(3x^2-y^2\right)dx^2+16xyzdxdy-4y\left(x^2+y^2\right)dydz+2z\left(3y^2-x^2\right)dy^2-4x\left(x^2+y^2\right)dxdz\right)$; 7) $d^2u=\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\left(\left(y^2+z^2\right)dx^2+\left(x^2+z^2\right)dy^2+\left(x^2+y^2\right)dz^2-2xydxdy-2xzdxdz-2yzdydz\right)$; 8) $d^2u=\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-2}\left(2yx^4+yx^2z^2-yz^4-y^3z^2\right)dx^2-2y\left(x^2+z^2\right)^2dy^2-y\left(x^4-x^2z^2+x^2y^2-2z^4\right)dz^2-2x\left(x^2+z^2\right)\left(x^2-y^2+z^2\right)dxdy+2xyz\left(3x^2+y^2+3z^2\right)dxdz-2z\left(x^2+z^2\right)\left(x^2-y^2+z^2\right)dydz\Big)$; 9) $d^2u=x^{y^z}\left(\frac{y^z\left(y^z-1\right)}{x^2}dx^2+zy^{z-2}\ln x\left(z-1+zy^z\ln x\right)dy^2+y^z\left(1+y^z\ln x\right)\ln x\ln^2 y\,dz^2+2\frac{zy^{z-1}}{x}\left(1+y^z\ln x\right)dxdy+\right.$

$+2\frac{y^z\ln y}{x}\left(1+y^z\ln x\right)dxdz+2y^{z-1}\ln x\left(1+z\ln y\left(1+y^z\ln x\right)\right)dydz;$ 10) $d^2u=-\cos(xyz)\times$ $\times\left(y^2z^2dx^2+x^2z^2dy^2+x^2y^2dz^2\right)-2\left(xyz^2\cos(xyz)+z\sin(xyz)\right)dxdy-2\left(xzy^2\cos(xyz)+\right.$ $\left.+y\sin(xyz)\right)dxdz-2\left(x^2yz\cos(xyz)+x\sin(xyz)\right)dydz;$ 11) $d^2z=-\sin\left(x+3y^2\right)dx^2-$ $-12y\sin\left(x+3y^2\right)dxdy+\left(6\cos\left(x+3y^2\right)-36y^2\sin\left(x+3y^2\right)\right)dy^2;$ 12) $d^2z=-\frac{y}{x^2}dx^2+\frac{2}{x}dxdy+$ $+\frac{1}{y}dy^2;$ 13) $d^2u=\left(x^4+y^2z^2\right)^{-2}\left(\left(6x^4yz-2x^3y^3\right)dx^2-2x^2yz^3dy^2+2x^2y^3zdz^3+4xz\times\right.$ $\left.\times\left(y^2z^2-x^4\right)dxdy+4xy\left(y^2z^2-x^4\right)dxdz+2x^2\left(x^4-y^2z^2\right)dydz\right);$ 14) $d^2z=\frac{2}{y^4\sin^2\frac{2x}{y}}\times$ $\times\left(2y^2\cos\frac{2x}{y}dx^2+2\left(y^2\sin\frac{2x}{y}-2xy\cos\frac{2x}{y}\right)dxdy+2x\left(x\cos\frac{2x}{y}-y\sin\frac{2x}{y}\right)dy^2;\right.$ 15) $d^2z=$ $=x^yy^x\left(\left(\left(\frac{y}{x}+\ln y\right)^2-\frac{y}{x^2}\right)dx^2+2\left(1+\frac{y}{x}\ln x+\frac{x}{y}\ln y+\ln x\ln y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dxdy+\left(\left(\frac{x}{y}+\ln x\right)^2-\right.\right.$ $\left.\left.-\frac{x}{y^2}\right)dy^2\right);$ 16) $d^2u=z^{xy}\left(y^2\ln^2zdx^2+x^2\ln^2zdy^2+\frac{(xy)^2-xy}{z^2}dz^2+2(\ln z(xy\ln z+1)dxdy+\right.$ $\left.+\left(\frac{xy^2}{z}\ln z+\frac{y}{z}\right)dxdz+\left(\frac{x^2y}{z}\ln z+\frac{x}{z}\right)dydz\right)\Bigg).$ **3.** 1) $d^3z=6(dx+dy)^3=6\left(dx^3+3dx^2dy+3dxdy^2+\right.$ $\left.+dy^3\right);$ 2) $d^3z=\left(8x^3\sin\left(x^2+y^2\right)-12x\cos\left(x^2+y^2\right)\right)dx^3+3\left(8x^2y\sin\left(x^2+y^2\right)-\right.$ $\left.-4y\cos\left(x^2+y^2\right)\right)dx^2dy+3\left(8xy^2\sin\left(x^2+y^2\right)-4x\cos\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy^2+\left(8y^3\sin\left(x^2+y^2\right)-\right.$ $\left.-12y\cos\left(x^2+y^2\right)\right)dy^3;$ 3) $d^6z=\sin(x+3\pi)\operatorname{sh}ydx^6+6\sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)\operatorname{ch}ydx^5dy+$ $+15\sin(x+2\pi)\operatorname{sh}ydx^4dy^2+20\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{ch}ydx^3dy^3+15\sin(x+\pi)\operatorname{sh}ydx^2dy^4+6\sin\left(x+\right.$ $\left.+\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ch}ydxdy^5+\sin x\operatorname{sh}ydy^6=\left(-dx^6+15dx^4dy^2-15dx^2dy^4+dy^6\right)\sin x\operatorname{sh}y+2dxdy\left(3dx^4-\right.$ $\left.-10dx^2dy^2+3dy^4\right)\cos x\operatorname{ch}y;$ 4) $d^6u=4!\left(\frac{dx^6}{x^5}+\frac{dy^6}{y^5}+\frac{dz^6}{z^5}\right);$ 5) $d^mz=e^{ax+by}(adx+bdy)^m;$ 6) $d^{20}z=-19!\frac{(dx+dy)^{20}}{(x+y)^{20}};$ 7) $d^mu=f^{(m)}(ax+by+cz)(adx+bdy+cdz)^m;$ 8) $d^mu=(-1)^{m-1}\times$ $\times(m-1)!\left(\frac{dx^m}{x^m}+\frac{dy^m}{y^m}+\frac{dz^m}{z^m}\right);$ 9) $d^5z=e^x\left(\left(dx^5-10dx^3dy^2+5dxdy^4\right)\cos y+\left(-5dx^4dy+\right.\right.$ $\left.\left.+10dx^2dy^3-dy^5\right)\sin y\right);$ 10) $d^3z=\left(6\cos y+y^3\sin x\right)dx^3-3\left(6x\sin y+3y^2\cos x\right)dx^2dy-$ $-3\left(3x^2\cos y+6y\sin x\right)dxdy^2+\left(x^3\sin y+6\cos x\right)dy^3.$ **4.** 1) $\Delta u=0;$ 2) $\Delta u=0;$ 3) $\Delta u=6(x+$

$+y+z)$; 4) $\Delta u=0$; 5) $\Delta u=3f''_{11}+4(x+y+z)f''_{12}+4\left(x^2+y^2+z^2\right)f''_{22}+6f'_2$; 6) $\Delta u=6f'+$ $+12\left(x^2+y^2+z^2\right)f''$. **8.** 1) $t=x+y$, $d^2u=f''(t)(dx+dy)^2$; 2) $t=xyz$, $d^2u=f''(t)(yzdx+$ $+xzdy+xydz)^2+2f'(t)(zdxdy+ydxdz+xdydz)$; 3) $t=\sqrt{x^2+y^2}$, $d^2u=f''(t)\dfrac{(xdx+ydy)^2}{x^2+y^2}+$ $+f'(t)\dfrac{(ydx-xdy)^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$; 5) $u=ax$, $v=by$, $d^2u=f''_{u^2}a^2dx^2+2f''_{uv}abdxdy+f''_{v^2}b^2dy^2$; 6) $\alpha=$ $=x+y$, $\beta=z$, $d^2u=f''_{\alpha^2}(dx+dy)^2+2f''_{\alpha\beta}(dx+dy)dz+f''_{\beta^2}dz^2$; 7) $\alpha=t$, $\beta=t^2$, $\gamma=t^3$, $d^2u=\left(f''_{\alpha\alpha}+4tf''_{\alpha\beta}+6t^2f''_{\alpha\gamma}+4t^2f''_{\beta\beta}+12t^3f''_{\beta\gamma}+9t^4f''_{\gamma\gamma}+2f'_\beta+6tf'_\gamma\right)dt^2$; 8) $\alpha=x^2+y^2$, $\beta=x^2-y^2$, $\gamma=2xy$, $d^2u=4f''_{\alpha^2}(xdx+ydy)^2+4f''_{\beta^2}(xdx-ydy)^2+4f''_{\gamma^2}(ydx+xdy)^2+$ $+8f''_{\alpha\beta}\left(x^2dx^2-y^2dy^2\right)+8f''_{\alpha\gamma}(xdx+ydy)(ydx+xdy)+8f''_{\beta\gamma}(xdx-ydy)(ydx+xdy)+2f'_\alpha\left(dx^2+\right.$ $\left.+dy^2\right)+2f'_\beta\left(dx^2-dy^2\right)+4f'_\gamma dxdy$; 9) $\alpha=\dfrac{z}{x}$, $\beta=\dfrac{x}{y}$, $d^2u=f''_{\alpha^2}\dfrac{(xdz-zdx)^2}{x^4}+2f''_{\alpha\beta}\dfrac{(xdz-}{x^2y^2}$ $\dfrac{-zdx)(ydx-xdy)}{x^2y^2}+f''_{\beta^2}\dfrac{(ydx-xdy)^2}{y^4}-2f'_\alpha\dfrac{xdz-zdx}{x^3}dx-2f'_\beta\dfrac{ydx-xdy}{y^3}dy$; 10) $d^2u=\dfrac{y}{x^3}f''dx^2+$ $+2\left(-\dfrac{1}{y^2}f+\dfrac{1}{xy}f'-\dfrac{1}{x^2}f''\right)dxdy+\left(\dfrac{2x}{y^3}f-\dfrac{2}{y^2}f'+\dfrac{1}{xy}f''\right)dy^2$; 11) $\alpha=xy$, $\beta=\dfrac{x}{y}$, $\gamma=x+y$, $d^2u=\left(y^2f''_{\alpha^2}+\dfrac{1}{y^2}f''_{\beta^2}+f''_{\gamma^2}+2f''_{\alpha\beta}+2yf''_{\alpha\gamma}+\dfrac{2}{y}f''_{\beta\gamma}\right)dx^2+2\left(xyf''_{\alpha^2}-\dfrac{x}{y^3}f''_{\beta^2}+f''_{\gamma^2}+(x+y)f''_{\alpha\gamma}+\right.$ $\left.+\dfrac{y-x}{y^2}f''_{\beta\gamma}+f'_\alpha-\dfrac{1}{y^2}f'_\beta\right)dxdy+\left(x^2f''_{\alpha^2}+\dfrac{x^2}{y^4}f''_{\beta^2}+f''_{\gamma^2}-\dfrac{2x^2}{y^2}f''_{\alpha\beta}+2xf''_{\alpha\gamma}-\dfrac{2x}{y^2}f''_{\beta\gamma}+\dfrac{2x}{y^3}f'_\beta\right)dy^2$; 12) $d^2u=(x\varphi''+2\varphi'+y\psi'')dx^2+2(x\varphi''+\varphi'+\psi'+y\psi'')dxdy+(x\varphi''+2\psi'+y\psi'')dy^2$; **9.** 1) $\dfrac{1}{2}+$ $+\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{1}{4}\left(\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2+2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)+\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)^2\right)-\dfrac{1}{12}\left(\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^3+3\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2\times\right.$ $\left.\times\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)+3\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)^2+\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)^3\right)+R_3$; 3) $\Delta z=\dfrac{\Delta x-2\Delta y}{x-2y}+\dfrac{\left(-\Delta x^2+4\Delta x\Delta y-4\Delta y^2\right)}{2(x-2y)^2}+$ $+\dfrac{1}{3(x-2y)^3}\left(\Delta x^3-6\Delta x^2\Delta y+12\Delta x\Delta y^2-8\Delta y^3\right)+R_3$; 4) $\Delta z=-\dfrac{\operatorname{sign} y}{y\sqrt{y^2-x^2}}(y\Delta x-x\Delta y)-$ $-\dfrac{\operatorname{sign} y}{2y^2\left(y^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(xy^2\Delta x^2-2y^3\Delta x\Delta y+\left(2xy^2-x^3\right)\Delta y^2\right)-\dfrac{\operatorname{sign} y}{6y^3\left(y^2-x^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\left(y^5-4x^2y^3\right)\Delta x^3-\right.$ $\left.-9xy^4\Delta x^2\Delta y+3\left(2y^5-x^2y^3\right)\Delta x\Delta y^2-\left(2x^5-5x^3y^2+6xy^4\right)\Delta y^3\right)+R_3$; 5) $3\left((x-1)^2+(y-1)^2-\right.$

$-(z-1)^2-(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)-(y-1)(z-1)\Big)+(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3-3(x-1)\times$ $\times(y-1)(z-1)+R_3$; 6) $1-\frac{1}{2}(x+y+z)^2+R_3$; 7) $1+2(x-1)+(x-1)^2+(x-1)(y-2)+(x-1)^2\times$ $\times(y-2)+R_3$; 8) $x-y-\frac{1}{3}\left(x^3-y^3\right)+R_3$; 9) $x+y-\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{3}(x+y)^3+R_3$; 10) $1+mx+$ $+ny+\frac{1}{2}m(m-1)x^2+mnxy+\frac{1}{2}n(n-1)y^2+\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)x^3+\frac{1}{2}mn(m-1)x^2y+\frac{1}{2}mn(n-$ $-1)xy^2+\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)y^3+R_3$; 11) $x+xy-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}\left(2x^3-3x^2y+3xy^2\right)+R_3$; **10.** 1) 1,282; 3) 1,128; 4) 0,1121.

§ 15.5

2. 1) Ні; 3) — 7). Так. **3.** 3) $y'=\dfrac{\frac{y}{x}-e^{2y}}{2xe^{2y}-\ln x}$, $y''=\dfrac{2\left(\frac{1}{x}-2e^{2y}\right)\left(\frac{y}{x}-e^{2y}\right)}{\left(2xe^{2y}-\ln x\right)^2}-\dfrac{4xe^{2y}\left(\frac{y}{x}-e^{2y}\right)^2}{\left(2xe^{2y}-\ln x\right)^3}-$ $-\dfrac{1}{x\left(2xe^{2y}-\ln x\right)}$; 4) $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$, $y''=\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{(x-y)^3}$; 5) $y'=\dfrac{y\left(2x^2\ln y-y^2\right)}{x\left(2y^2\ln x-x^2\right)}$, $y''=\dfrac{y}{x}\times$

$$\times\frac{\left(4x\ln y+\left(\frac{2x^2}{y}-2y\right)y'\right)\left(2y^2\ln x-x^2\right)-\left(2x^2\ln y-y^2\right)\left(4yy'\ln x+\frac{2y^2}{x}-2x\right)}{\left(2y^2\ln x-x^2\right)^2}+\frac{2x^2\ln y-y^2}{2y^2\ln x-x^2}\times$$

$\times\dfrac{xy'-y}{x^2}$; 6) $y'=1+\dfrac{1}{y^2}$; $y''=-\dfrac{2\left(1+y^2\right)}{y^5}$; 7) $y'=\dfrac{3x^2}{a\sin y-2y}$; $y''=-\dfrac{6x(a\sin y-2y)^2+9x^4(a\cos y-2)}{(a\sin y-2y)^3}$. **4.** 1) $z'_x=\dfrac{2y-6xz}{3\left(x^2+z^2\right)}$, $z'_y=\dfrac{2x}{3\left(x^2+z^2\right)}$; 2) $z''_{x^2}=-\dfrac{2\left(\cos 2x\sin^2 2z+\cos 2z\sin^2 2x\right)}{\sin^3 2z}$; 3) $dz=-\dfrac{xdx+ydy}{z}$, $d^2z=-\dfrac{\left(x^2+z^2\right)dx^2+2xydxdy+\left(y^2+z^2\right)dy^2}{z^3}$; 5) $dz=$ $=\dfrac{yzdx+z^2dy}{y(x+z)}$; $d^2z=-\dfrac{z^2(ydx-xdy)^2}{y^2(x+z)^3}$; 6) $dz=dx+\dfrac{z-x}{(z-x)^2+y^2+y}dy$, $d^2z=\dfrac{2(x-z)(y+1)\times\left((z-x)^2+y^2\right)}{\left((z-x)^2+y^2+y\right)^3}dy^2$; 7) $d^2z(3,\ -2)=-\dfrac{2}{243}\Big(2dx^2-5dxdy+2dy^2$; 8) $d^2z(2,\ 0)=-\dfrac{4}{343}dx^2-$ $-\dfrac{2}{7}dy^2$. **6.** 1) $x+y+z-3=0$, $x=y=z$; 2) $x+y-4z=0$, $\dfrac{x-2}{1}-\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-4}$; 3) $x+y+z=$ $=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $\dfrac{x-x_0}{\frac{x_0}{a^2}}=\dfrac{y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}}=\dfrac{z-z_0}{\frac{z_0}{c^2}}$, $z_0=\pm\dfrac{c^2}{K}$, $y_0=\pm\dfrac{b^2}{K}$, $x_0=\pm\dfrac{a^2}{K}$, $K=$ $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 4) $x+4y+6z=21$, $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-2}{6}$ і $x+4y+6z=-21$, $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{4}=$

$= \frac{z+2}{6}$; 5) $x+y=1+\sqrt{2}$; $\frac{x-1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}=\frac{y-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}=\frac{z}{0}$ і $x+y=1-\sqrt{2}$, $\frac{x-1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}=\frac{y+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}=\frac{z}{0}$.

7. 1) $z(x, y)=1+2(x-1)-(y-1)-8(x-1)^2+10(x-1)(y-1)+3(y-1)^2+R_2$; 2) $z(x, y)= =1+\frac{2}{5}(x-1)-\frac{3}{25}(x-1)^2+\frac{8}{125}(x-1)^3-\frac{1}{5}y^3+R_3$; 3) $z(x, y)=(x+1)-\frac{1}{2}(x+1)^2+(x+1)\times \times(y-2)+\frac{1}{3}\left((x+1)^3-4(x+1)^2(y-2)+2(x+1)(y-2)^2\right)+R_3$; 4) $z(x, y)=1-(x-1)+(y-1)+ +\frac{1}{2}\left((x-1)^2+(x-1)(y-1)+(y-1)^2\right)-\frac{1}{2}\left((x-1)^3+2(x-1)^2(y-1)+2(x-1)(y-1)^2+(y-1)^3\right)+ +R_3$. **8.** 1) $y'(1)=\frac{7}{15}$, $y''(1)=-\frac{38}{45}$, $z'(1)=\frac{4}{3}$, $z''(1)=-\frac{4}{9}$; 3) $y'(2)=-1$, $y''(2)=\frac{1}{4}$, $z'(2)= =0$, $z''(2)=-\frac{1}{4}$; 4) $y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-2$, $y''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-6\sqrt{2}$, $z'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1$, $z''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=6\sqrt{2}$; 5) $y'(1)= =1$, $y''(1)=-12$, $z'(1)=2$, $z''(1)=6$; 6) $y'(1)=-\frac{7}{2}$, $y''(1)=\frac{21}{8}$, $z'(1)=3$, $z''(1)=-\frac{3}{2}$.

9. 1) $du(0, 1)=-dy$, $dv(0,1)=dx$, $d^2u(0,1)=-2\left(dx^2-dy^2\right)$, $d^2v(0,1)=-2dxdy$; 2) $du(1,1)=dx$, $dv(1,1)=dy$, $d^2u(1,1)=-d^2v(1,1)=\frac{1}{2}dx^2+\frac{3}{2}dy^2$; 3) $du(1,-1)=-dx+dy$, $dv(1,-1)=dx$, $d^2u(1, -1)=dx^2-4dxdy+2dy^2$, $d^2v(1, -1)=-dx^2+2dxdy+2dy^2$; 4) $du(1,2)= =-\frac{1}{3}dy$, $dv(1,2)=-dx+\frac{1}{3}dy$; $d^2u(1, 2)=-\frac{8}{3}dxdy+\frac{14}{9}dy^2$, $d^2v(1,2)=dx^2+\frac{4}{3}dxdy- -\frac{10}{9}dy^2$. **10.** $x=\pm\frac{4}{9}$, $y=\pm\frac{8}{9}$, $z=\pm\frac{1}{9}$. **11.** $4x+2y-z-28=0$. **12.** $4x+2y-3z- -6=0$. **13.** $M_1(2, -4, 2)$, $M_2(2, -4, -2)$, $M_3\left(2, \sqrt{17}-4, 0\right)$, $M_4\left(2, -\left(4+\sqrt{17}\right), 0\right)$, $M_5\left(\frac{4+\sqrt{17}}{2}, -4, 0\right)$, $M_6\left(\frac{4-\sqrt{17}}{2}, -4, 0\right)$.

§ 15.6

2. 1) $z_{\max}=z\left(\frac{3}{2}, -3\right)=\frac{289}{4}$; 2) $z_{\min}=z\left(-2\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)=-2e^{-\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{2}\right)$; 3) $z_{\min}=z(5, -5)= =-25$; 4) $z_{\max}=z(2, 4)=10\ln 2$; 5) $z_{\min}=z(3, 3)=3$; 6) $z_{\max}=z(0, 0)=0$, $z_{\min}= =z(2, 0)=-8$; 7) $z_{\max}=z(9, 3)=6$; 8) $z_{\min}=z(1, 1)=24$; 9) $z_{\min}=z\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)=12+24\ln 2- -18\ln 3$; 10) $z_{\max}=z\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{4}\right)=\frac{a^4}{64}$; 11) $z_{\min}=z(1, -1)=-3$; 12) екстремуму немає; 13) $z_{\min}=z(1, 0)=-1$; 14) $z_{\min}=z\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}\right)=-1$, $z_{\max}=z\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}\right)=1$; 15) $z_{\min}=z\left(a, \frac{1}{a}\right)=3$; 16) $z_{\max}=z(0, 0)=1$; 17) $z_{\min}=z(0, 0)=0$, якщо $a>0$, $b>0$, $z_{\max}=z(0, 0)=0$, якщо $a<0$, $b<0$; якщо $a=b$, то функція z має нестрогий максимум (якщо $a>0$) $z_{\max}=\frac{a}{e}$ або нестрогий мінімум (якщо $a<0$) $z_{\min}=\frac{a}{e}$ у точках кола x^2+

$+y^2=1$; 18) $z_{\min}=z\left(\pm\frac{1}{2e},\ \pm\frac{1}{2e}\right)=-\frac{1}{2e}\approx-0{,}184$, $z_{\max}=z\left(\pm\frac{1}{2e},\ \mp\frac{1}{2e}\right)=\frac{1}{2e}$, екстремуму немає у точках $(0,\ \pm1)$ і $(\pm1,\ 0)$; 19) екстремуму немає в єдиній стаціонарній точці $(0,\ 0)$; 20) $z_{\max}=z(2\pi k,\ 0)=2$, $k\in\mathbf{Z}$, мінімуму немає; 21) $u_{\min}=u(-1,\ -2,\ 3)=-14$; 23) $u_{\min}=u(7,\ 2,\ 7)=39$; 24) $u_{\max}=u(-1,\ 2,\ 1)=2$; 25) $u_{\min}=u\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)=4$. **3.** 1) $z_{\min}=z\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\ 0\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}$; 3) $z_{\min}=z(1,\ -1)=-2$, $z<0$, $z_{\max}=z(1,\ -1)=6$, $z>0$; 4) екстремуму немає; 5) $z_{\min}=z\left(-\frac{16}{7},\ 0\right)=\frac{8}{7}$, $z_{\max}=z(2,\ 0)=-1$; 6) $z_{\max}=z(1,\ 1)=2$, $z_{\min}=z(-1,\ -1)=-2$. **4.** 1) $\min\limits_E z=z(0,\ b)=-2b-3$, $\max\limits_E z=z(a,\ 0)=a-3$; 2) $\max\limits_E z=z(\pm1,\ 0)=z(0,\ \pm1)=1$, $\min\limits_E z=z(0,\ 0)=0$; 3) $\min\limits_E u=u(0,\ 0,\ 0)=0$, $\max\limits_E u=u(0,\ 0,\ \pm10)=300$; 5) $\min\limits_E z=z(0,\ \pm b)=b^2$, $\max\limits_E z=z(\pm a,\ 0)=a^2$; 6) $\max\limits_E z=z\left(1,\ \frac{4}{3}\right)=\frac{2}{9}$, $\min\limits_E z=0$ на сторонах трикутника; 7) $\max\limits_E z=z\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\min\limits_E z=z(0,\ 0)=0$; 8) на множині E екстремуму немає; 9) $\max\limits_E z=z(-1,\ 4)=72$, $\min\limits_E z=z(1,\ 1)=2$; 10) $\max\limits_E z=z(3,-2)=5$, $\min\limits_E z=z(0,\ -6)=-164$. **5.** 1) $z_{\max}=z\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)=\frac{ab}{4}$; 2) $z_{\min}=z\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)=\left(\frac{a}{2}\right)^2$; 3) $z_{\min}=z\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)=\frac{4}{a}$; 4) $u_{\max}=u\left(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3},\ \frac{a}{3}\right)=\frac{a^3}{27}$; 5) $u_{\max}=u\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{8}$; 6) $z_{\max}=z\left(\frac{\alpha A}{\alpha+\beta},\ \frac{\beta A}{\alpha+\beta}\right)=\frac{\alpha^\alpha\beta^\beta}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}A^{\alpha+\beta}$, якщо $\alpha=\beta=1$, звідки дістаємо нерівність $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$; 7) $u_{\max}=u(1,\ 1,\ 1)=2$; 8) $z_{\max}=z\left(\frac{3\pi}{8}+\pi k,\ \frac{5\pi}{8}+\pi k\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$, $z_{\min}=z\left(\frac{7\pi}{8}+\pi k,\ \frac{9\pi}{8}+\pi k\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. **7.** 1) $\frac{31}{4\sqrt{2}}$; 2) $\frac{7}{4\sqrt{2}}$; 3) $\frac{23}{8\sqrt{5}}$; 4) $\frac{8}{3\sqrt{10}}$. **8.** $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. **9.** $\frac{\pi ab}{|C|}\times\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. **10.** $r=d+\sqrt[3]{V/(2\pi)}$, $h=2d+2\sqrt[3]{V/(2\pi)}$. **11.** Рівносторонній. **12.** Рівнобедрений, кути при основі дорівнюють $\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$. **13.** $x=\frac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{4}x_i$, $y=\frac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{4}y_i$ $(x_i,\ y_i)$ — координати вершин. **14.** Рівнобедрений, $S_{\max}=\frac{l^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **15.** Куб, ребро $a=\sqrt{S/6}$. **16.** Куб, ребро $a=L/12$. **17.** $x=y=z=\sqrt[3]{V}+2\alpha$. **18.** $x=y=\sqrt[3]{V}+2\alpha$, $z=x/2$. **19.** Висота циліндра дорівнює діаметру основи. **20.** Основа паралелепіпеда — квадрат, сторона якого дорівнює $2\sqrt{2}R/3$, а висота — $H/3$, $V_{\max}=\frac{8}{27}HR^2$. **21.** Радіус основи конуса $R=\sqrt{S/\left(\pi\sqrt{3}\right)}$, висота $H=\sqrt{2}R$. **22.** $x=y=z=\frac{\pi}{3}$. **23.** Рівносторонній. **24.** $S_{\max}=2R^2\sin\alpha$. **25.** $S_{\max}=3\sqrt{3}ab/4$. **26.** $p\sqrt{5}$. **27.** Нормаль провести у точках з координатами $x=\pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $y=\pm\frac{b\sqrt{2}}{2}$, $S_{\max}=\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{4ab}$. **28.** Дотичні провести у точках з координатами $x=\pm\sqrt{\frac{a^3}{a+b}}$,

$y=\pm\sqrt{\dfrac{b^3}{a+b}}$, $l_{\min}=a+b$. **29.** Рівносторонній. **30.** Круг. **32.** $2a=4$, $2b=2$. **33.** Рівносторонній, $S_{\max}=3\sqrt{3}R^2/4$. **34.** Квадрат, сторона $a=\sqrt{2}R$. **35.** Рівносторонній, $S_{\max}=$ $=\sqrt{3}p^2/9$. **36.** Радіус основи $R=\sqrt[3]{3V/\left(\pi\sqrt{3}\right)}$, висота $H=\sqrt{2}R$. **37.** Радіус основи $r=$ $=\dfrac{R}{2}\sqrt{2+\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$, висота $h=R\sqrt{2-\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$. **38.** $V_{\max}=\dfrac{\pi}{12}p^3$, трикутник рівнобедрений, основа якого $a=p/2$. **39.** 1) $D\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$ над хордою AB, $C\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$ під хордою AB; 2) $D\left(\dfrac{2\left(1-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}},\ \dfrac{3\left(1+\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2}}\right)$ над хордою AB, $C\left(\dfrac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{3\left(1+\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2}}\right)$ під хордою AB; 3) $D\left(\dfrac{30-25\sqrt{3}}{2\sqrt{70-15\sqrt{3}}},\ \dfrac{26}{\sqrt{70-15\sqrt{3}}}\right)$ над хордою AB, $C\left(\dfrac{25\sqrt{3}-30}{2\sqrt{70-15\sqrt{3}}},\ -\dfrac{26}{\sqrt{70-15\sqrt{3}}}\right)$ під хордою AB. **40.** 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{10}$; 4) $\sqrt{17}$; 5) $3\sqrt{42}/7$; 6) $3\sqrt{2}$. **41.** $V_{\max}=V\left(\dfrac{2a}{\sqrt{3}},\ \dfrac{2b}{\sqrt{3}},\ \dfrac{2c}{\sqrt{3}}\right)=$ $=\dfrac{8}{3\sqrt{3}}abc$. **42.** Рівняння еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=3$. **43.** Куб, ребро $a=\sqrt[3]{V}$. **44.** Рівнобедрений, катети $a=b=\sqrt{2S}$, гіпотенуза $c=2\sqrt{S}$. **45.** Сторони паралелепіпеда $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{R}{\sqrt{3}}$. **46.** $A_1(1,4)$, $A_2(4,1)$. **47.** $S_{\min}=3\sqrt{3}ab$.

§ 16.1

2. 1) $\dfrac{\pi}{2}$; 3) $\dfrac{3}{7}$; 5) $\ln\dfrac{2e}{1+e}$. **3.** 1) Неперервна; 3) розривна при $y=0$; 7), 9) неперервна. **4.** 1) $2ye^{-y^3}-e^{-y^2}-\int\limits_y^{y^2}x^2e^{-yx^2}dx$; 7) $\dfrac{2y+1}{y^2+y}\sin y(1+y)-\dfrac{2y-1}{y^2-y}\sin y(y-1)$; 9) $\int\limits_0^y\left(x(x-y)\cos xy-\sin xy\right)dx$; 11) $-\left(e^{y|\sin y|}\sin y+e^{y|\cos y|}\cos y\right)+\int\limits_{\sin y}^{\cos y}\sqrt{1-x^2}e^{y\sqrt{1-x^2}}dx$.
5. 1) $\ln\dfrac{b+1}{a+1}$; 3) $-\dfrac{1}{10}$; 5) $\dfrac{1}{2}$.

§ 16.2

5. 1) $\dfrac{\pi}{8}$; 3) $\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}$; 5) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\dfrac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)}$; 7) $\dfrac{\pi}{2\cos\frac{\pi x}{2}}$; 9) $\dfrac{2^{n-1}\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\left(1-k^2\right)\Gamma(n)}$; 11) $\pi\operatorname{ctg}\pi a$; 13) $\dfrac{\pi(1-a)}{\sin\pi a}$. **7.** 1) $\dfrac{\pi b^{x-1}}{2\Gamma(x)\cos\frac{\pi x}{2}}$, $b>0$. **9.** $aB\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2n}\right)$. **10.** $\dfrac{2a^2\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$. **11.** $\dfrac{a^3\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{3n^2\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}$.

13. 1) $157,\ 970+0{,}0004\theta,\ 0<\theta<1$; 3) $10^{2866}\cdot 7{,}7\left(1+\frac{\theta}{12000}\right),\ |\theta|<1$; 5) $0{,}0798\left(1+\frac{\theta}{300}\right)$, $|\theta|<1$; 7) $0{,}355\left(1+\frac{\theta}{600}\right),\ |\theta|<1$; 9) e.

§ 17.1

4. 1) $\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{1}{54}\left(145^{\frac{3}{2}}-10^{\frac{3}{2}}\right)-\frac{1}{6}\left(6\sqrt{145}-\frac{3}{2}\sqrt{10}+\ln\sqrt{\frac{12+\sqrt{145}}{3+\sqrt{10}}}\right)$; 5) $\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; 7) 0; 9) 4π; 11) $\frac{3\sqrt{2}}{\cancel{2}}+\frac{28\sqrt{5}}{3}-\frac{1}{\cancel{2}}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; 13) $2\pi a^{2n+1}$; 15) $\frac{256}{15}a^3$; 17) $2\left(e^a-1\right)+\frac{\pi a}{4}e^a$; 21) π; 23) $\frac{5}{12}\operatorname{arctg}\frac{8\pi}{3}$; 25) $5\left(18\pi^2+36\pi^4+\frac{128}{3}\pi^6\right)$. **5.** 1) $\frac{335}{27}a$; 3) $\frac{1}{2}\ln\left(e^2+e^{-2}\right)$; 5) $16a$; 7) 5. **6.** 1) $\frac{1}{6}\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)$; 3) $\frac{17}{2}$; 5) $2b\left(b+a\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ — ексцентриситет еліпса; 7) k; 9) $2k\pi a\sqrt{2a}$; 13) $\frac{1}{8}\left(3\sqrt{3}-1+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$; **7.** 1) $M_x=M_y=\frac{3}{5}a^2$; 3) $\frac{b^2}{2}+$ $+\frac{a^2b}{2\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, $\frac{a^2}{2}+\frac{ab^2}{2\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{b}$. **8.** 1) $\frac{7\sqrt{5}}{24}$; 3) $\frac{145}{512}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)-$ $-\frac{25\sqrt{5}}{256}$, $\frac{9\sqrt{5}}{32}-\frac{1}{64}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$; 5) $\frac{a^3}{128\sqrt{2}}\left(\frac{89\sqrt{2}}{3}+95\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$. **9.** 1) $x_c=y_c=\frac{2r}{\pi}$; 3) $x_c=0$, $y_c=\frac{a\left(e^4+4e^2-1\right)}{4e\left(e^2-1\right)}$; 5) $x_c=y_c=\frac{a}{5}$; 7) $x_c=0,\ y_c=\frac{2}{5}a$; 9) $x_c=\frac{8}{3},\ y_c=\frac{4}{3}$; 11) $x_c=\frac{4}{5}a$, $y_c=\frac{2}{5}a$; 13) $x_c=y_c=z_c=\frac{4a}{3\pi}$. **11.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{11}{3}$. **12.** 0; $\gamma\frac{2mM}{\pi r^2}$, γ — гравітаційна стала. **13.** $\gamma\frac{mMb}{\left(b^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, γ — гравітаційна стала. **14.** $\frac{2I\ \ m}{a}$.

§ 17.2

2. 1) $\frac{40}{3}$; 3) $\frac{e^3}{3}$; 5), а) $-\frac{1}{3}$; б) $-\frac{3}{5}$; в) 0; 7) 12; 9) 18; 11) 0; 13) $\frac{3}{4}\pi a^2$; 15) $3a^2$; 17) $\frac{4}{3}$; 19) $-\frac{a^2\pi}{3}$; 21) 0; 23) $\frac{1}{35}$; 25) 0. **3.** 1) 8; 3) $-\frac{3}{2}$; 5) -4; 7) 64. **4.** 1) $\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C$; 3) ні; 5) ні; 7) $e^{x+y}+\sin(x-y)+2y+C$; 9) $\operatorname{ch}x+x\operatorname{ch}y+y+C$. **5.** $|I_R|\le\frac{8\pi}{R^2}$. **6.** 1) $\frac{1+3\ln 2}{24}$; 3) πab; 5) 6π; 7) a^2; 9) $\frac{1}{60}$. **7.** 1) 19; 3) πab; 5) 4. **8.** $\frac{m}{2}\left(r_B^2-r_A^2\right)$. **9.** $Q=\int\limits_{\Gamma}u\,dy-v\,dx,\ \ \bar{q}=u\bar{i}+v\bar{j}$.

§ 17.3

3. 1) $\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i\sum_{j=1}^{n}j=\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}$. **4.** 1) $\overline{S}=\frac{(2n+1)(3n+1)}{n^2}$, $\underline{S}=\frac{(2n-1)(3n-1)}{n^2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{S}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\underline{S}=6$; 3) $\overline{S}=\frac{40}{3}+\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}$, $\underline{S}=\frac{40}{3}-\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{S}=\lim\limits_{n\to\infty}\underline{S}=\frac{40}{3}$. **7.** 1) $\frac{8}{3}$; 3) 14;

5) $\frac{\pi a^3}{3}$. **9.** $F(b, d, n)-F(a, d, n)-F(b, c, n)+F(a, c, n)-F(b, d, m)+F(a, d, m)+$ $+F(b, c, m)-F(a, c, m)$. **11.** 1) $\ln\frac{25}{24}$; 3) $\frac{1}{24}$; 5) $-\frac{3}{2}$; 7) $\frac{1}{3}abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

§ 17.4

7. 1) $12\pi < I < 20\pi$; 3) $-\frac{\pi}{2} < I < 4\pi$; 5) $1{,}63 < I < 2$; 7) $28\sqrt{3}\pi < I < 52\sqrt{3}\pi$. **8.** 1) 0,9; 3) $112\frac{8}{105}$; 7) 0; 9) $\left(2+\frac{1}{2\pi^2}\right)\sin 1-\frac{1}{\pi^2}\cos 1$; **9.** 1) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^1 f(x, y)dx$; 3) $\int\limits_0^6 dx\int\limits_{\frac{x^2}{6}-1}^{x-1} f(x, y)dy$;

5) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x, y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x} f(x, y)dy$; 7) $\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy+\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} f(x, y)dy$;

9) $\int\limits_{-4}^0 dx\int\limits_{-\sqrt{2-\frac{x}{2}}}^{x} f(x, y)dy+\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\sqrt{2-\frac{x}{2}}}^{\sqrt{4-x}} f(x, y)dy$; 11) $\int\limits_0^{\ln 2} dx\int\limits_1^{e^x} f(x, y)dy+\int\limits_{\ln 2}^1 dx\int\limits_1^2 f(x, y)dy+$ $+\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^2 f(x, y)dy$; 13) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{3\sqrt{x}} f(x, y)dy$. **10.** 1) $\int\limits_{-6}^2 dy\int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y)dx$, $\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_{-\sqrt{4x+4}}^{\sqrt{4x+4}} f(x, y)dy+\int\limits_0^8 dx\int\limits_{-\sqrt{4x+4}}^{2-x} f(x, y)dy$; 3) $\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} f(x, y)dy$, $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 dy\int\limits_{\frac{1}{y}}^2 f(x, y)dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_y^2 f(x, y)dx$;

5) $\int\limits_0^{\sqrt{2}c} dy\int\limits_{\frac{y^2}{2c^2}}^{\sqrt{3-\frac{y^2}{c^2}}} f(x,y)dx$, $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{c\sqrt{2x}} f(x,y)dy+\int\limits_1^{\sqrt{3}} dx\int\limits_0^{c\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dy$; 7) $\int\limits_{-a}^a dx\int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{\sqrt{2a^2-x^2}} f(x, y)dy$, $\int\limits_0^a dy\int\limits_{-\sqrt{ay}}^{\sqrt{ay}} f(x,y)dx+\int\limits_a^{a\sqrt{2}} dy\int\limits_{-\sqrt{2a^2-y^2}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} f(x,y)dx$; 9) $\int\limits_0^a dx\int\limits_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy+$ $+\int\limits_a^{2a} dx\int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$, $\int\limits_0^{\frac{a}{2}} dy\int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2-4y^2}\right)} f(x, y)dx+\int\limits_0^{\frac{a}{2}} dy\int\limits_{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-4y^2}\right)}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)dx+$ $+\int\limits_{\frac{a}{2}}^a dy\int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$; 13) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x,y)dy$, $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{1-\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x,y)dx$. **11.** 1) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{4}{3}a^4$; 5) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{1}{3}$; 9) 0; 11) $\frac{4}{3}a^3$; 13) $\frac{1}{15}a^3b^2$; 15) $\frac{8}{105}a^3$. **12.** 1) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{1-x-y} f(x,y,z)dz$,

$\int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{1-x-y} f(x, y, z)dz,\quad \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-z-y} f(x, y, z)dx;\quad$ 3) $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(x, y, z)dz,$

$\int_0^1 dy \int_0^y dz \int_y^1 f(x, y, z)dx,\quad \int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_z^x f(x, y, z)dy;\quad$ 7) $\int_{-1}^1 dx \int_0^{4-x} dy \int_0^{4-x-y} f(x, y, z)dz,$

$\int_{-1}^1 dx \int_0^{4-x} dz \int_0^{4-x-z} f(x,y,z)dy,\quad \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dx \int_0^{4-x-z} f(x,y,z)dy + \int_3^5 dz \int_{-1}^{4-z} dx \int_0^{4-z-x} f(x,y,z)dy;$

9) $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz,\quad \int_0^R dx \int_0^{x^2} dz \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y,z)dy + \int_0^R dx \int_{x^2}^{R^2} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y,z)dy,$

$\int_0^R dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} dx \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z)dz.$ **13.** 1) $\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$; 3) 9; 7) $\frac{1}{96}$; 9) $\frac{4}{\sqrt{3}}\pi a^5$; 11) $\frac{16}{3}\pi$;

13) $\frac{\pi R^5}{5}\left(3-\sqrt{2}\right)$; 15) $\frac{51}{64}\pi R^5$. **14.** 1) $\frac{\pi a^4}{2}$; 3) $-\frac{4}{3}$; 7) $-\frac{\pi a^3}{8}$. **15.** 1) $\frac{1}{n!}$; 3) $\frac{2^n a^n}{n!}$;

5) $\frac{2}{(n-1)!(2n+1)}$.

§ 17.5

2. 1) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \rho f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)d\rho,\quad \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)d\theta;$ 3) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_r^R \rho f(\rho\cos\theta,$

$\rho\sin\theta)d\rho,\quad \int_r^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)d\theta;$ 5) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)d\rho,$

$\int_0^a \rho d\rho \int_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{\rho^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{\rho^2}{a^2}} f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)d\theta;$ 7) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}} \rho f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)d\rho,$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)d\theta + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \rho d\rho \left(\int_0^{\alpha-\frac{\pi}{4}} f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)d\theta + \int_{\frac{3}{4}\pi-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)d\theta \right),$$

де $\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2\rho}}$; 11) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \rho f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} \rho f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)d\rho,$

$\int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)d\theta + \int_1^{\sqrt{2}} \rho d\rho \int_{\arccos\frac{1}{\rho}}^{\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{\rho}} f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)d\theta.$ **3.** 1) $\frac{\pi r^3}{6}$; 3) $\frac{3}{2}\pi a^4$;

7) $\frac{\pi r^3}{36}$; 9) $\frac{a^2}{12}(3\pi-2)$; 11) $\frac{2\sqrt{2}}{15}a^4$. **4.** 1) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{20}{3}$; 7) $\frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}$; 9) $\frac{2}{5}\cdot\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}\left(\sqrt{q^5}-\sqrt{p^5}\right)$.
5. 1) $\frac{4\pi r^5}{15}$; 5) $\frac{\pi}{10}$; 7) $\frac{4\pi}{15}\left(R^5-r^5\right)$; 9) $\frac{8a^2}{9}$; 11) $\frac{\pi h^2R^2}{4}$; 13) $\frac{9r^6}{1280}$.

§ 17.6

2. 1) $4\sqrt{3}$; 3) $\ln 3$; 5) $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$; 9) $\frac{1}{18}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$; 11) $(\pi-1)a^2$; 13) $\frac{1}{4}\left(b^2-a^2\right)(\pi+2)$; 15) $\frac{\left(q^2-p^2\right)\left(b^3-a^3\right)}{6a^3b^3}$. **4.** 1) $\frac{a^2b^2}{2c^2}$; 3) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)ab$; 5) $\frac{ab}{70}$; 7) $\frac{a^5b}{10h^4}$. **5.** 1) $\frac{abc}{6}$; 3) π; 7) $\frac{344}{105}$; 9) $\frac{5\pi R^3}{12}$; 11) $\frac{16}{9}$; 13) $\frac{\pi}{6}$; 15) $\frac{\pi}{192}$; 17) $\frac{a^3}{6}$; 19) $\frac{4}{9}\cdot\frac{a^4bc}{h^3}$; 21) $\frac{\pi^2a^3}{4}$.
7. 1) $\frac{\pi a^2bc}{3h}$; 5) $\frac{abc}{60}\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$; 7) $\frac{abc}{90}$. **8.** 1) $2\sqrt{2}\pi a^2$; 3) $2\pi\left(r^2-r\sqrt{r^2-a^2}\right)$; 7) $\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$; 9) $\pi\sqrt{2}$; 11) $8a^2$; 13) $\frac{a^2}{9}(20-3\pi)$; 15) $2\sqrt{2}$. **9.** 1) $\frac{16a^3}{9}(3\pi-4)$, $8\pi a^2$; 3) $\frac{\pi^2}{16}aR^2$, $\frac{\pi}{4}\left(R\sqrt{a^2+R^2}+a^2\ln\frac{R+\sqrt{a^2+R^2}}{a}\right)+\frac{R}{8}a\pi^2+\frac{aR\pi}{2}+\frac{\pi R^2}{4}$; 5) $\frac{5}{6}\pi a^3$, $\sqrt{2}\pi a^2+$ $+\frac{\pi a^2}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)$. **10.** 1) $\frac{1}{n!}$; 3) $\frac{a_1a_2\ \ldots\ a_n}{n!}$; 5) $\frac{8\pi^2R^5}{15}$.

§ 17.7

2. 1) $\frac{2}{3}k\pi r^3$; 3) $\frac{21}{50\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-\frac{1}{10}\right)}$; 5) $\frac{64}{3}$; 7) 8; 9) $\frac{52}{3}$. **3.** 1) $\frac{abc}{2}(a+b+c)$; 3) $\frac{k\pi R^4}{2}$; 5) $\frac{8\sqrt{2}}{35}$; 7) $\frac{\pi H\left(R^2-r^2\right)}{2}$; 9) $2\pi\left(\sqrt{3}-\frac{5}{6}\right)$. **4.** 1) $\left(\frac{10}{3(\pi-2)},\ \frac{2}{\pi-2}\right)$; 3) $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$; 5) $\left(\frac{2R\sin\alpha}{3\alpha},\ 0\right)$; 7) $\left(\frac{9}{20},\ \frac{9}{20}\right)$; 9) $\left(a\pi,\ \frac{5a}{6}\right)$; 11) $\left(\frac{\pi a\sqrt{2}}{8},\ 0\right)$. **5.** 1) $\left(\frac{a}{4},\ \frac{b}{4},\ \frac{c}{4}\right)$; 3) $\left(0,\ 0,\ \frac{3}{8}a(1+\cos\alpha)\right)$; 5) $\left(\frac{4}{3},\ 0,\ \frac{10}{9}\right)$; 7) $\left(\frac{7}{10},\ 0,\ 1\right)$; 9) $\left(3,\ 3,\ \frac{45}{32}\right)$. **6.** 1) $\frac{ab^3}{12}$; 3) $\frac{2r^3}{3}$; 5) $\frac{1}{24}$. **7.** 1) $\frac{ab\left(a^2+b^2\right)}{12}$; 3) $\frac{4096}{105}$; 5) $\frac{2\alpha-\sin 2\alpha}{16}a^4$, $\frac{2\alpha+\sin 2\alpha}{16}a^4$; 7) $\frac{3}{2}\pi a^4$; 9) $3\pi a^4$; 11) $0{,}1\pi hr^4$, $\frac{\pi hr^2}{60}\left(2h^2+3r^2\right)$; 13) $\frac{2}{3}a^5$; **9.** $\frac{ah^2}{6}$. **11.** 1) $\frac{2\pi}{3z}\left(\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}-z^3-\frac{3}{2}a^2z+a^3\right)$, якщо $z>a$; $\frac{2\pi}{3z}\left(\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}-a^3-\frac{3}{2}a^2z-2z^3\right)$, якщо $z<a$; 3) $\pi h\left(\sqrt{h^2+r^2}-h\right)$; 5) $\frac{2\pi a^2b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)$. **12.** $\frac{2\pi\gamma H}{\sqrt{H^2+R^2}}\left(\sqrt{H^2+R^2}-H\right)$, γ — стала закону тяжіння.
13. $\frac{33}{5}$. **14.** $2\pi\gamma\left(R+H-\sqrt{R^2-H^2}\right)$.

§ 17.8

3. 1) Розбіжний; 5) збіжний, якщо $\alpha > 1$; 7) розбіжний; 9) розбіжний; 11) збіжний, якщо $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$. **4.** 1) Збіжний; 3) збіжний; 5) збіжний, якщо $\alpha < 1$; 7) збіжний, якщо $\alpha < \frac{3}{2}$; 9) збіжний, якщо $p < 2$. **5.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{1}{4}$; 7) $\frac{3}{2}\pi$; 9) 4π; 11) $\frac{1}{(1-p)(1-q)(1-r)}$, $p<1$, $q<1$, $r<1$. **7.** Вказівка. Використати заміну змінних $x=\frac{u+v}{2}$, $y=\sqrt{uv}$.

§ 18.1

2. 1) $\sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$; 3) $\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$; 5) $\frac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}$; 9) $\approx 2{,}2$; 11) $\pi^2\left(a+\sqrt{1+a^2}+\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right)$. **3.** 1) $\frac{4}{3}\pi abc$; 3) 0; 5) $2\pi a$; 7) -2π; 9) $\frac{4\pi}{abc}\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)$. **4.** 1) $3\pi R^2$; 3) $8R^2$; 5) $2\pi a^2\left(3-\sqrt{3}\right)$. **5.** 1) $\frac{\pi^2a^3}{8}$; 3) $\frac{8ka^3}{15}\left(\sqrt{2}+1\right)$; 5) $\frac{2\pi\left(1+6\sqrt{3}\right)}{15}$. **6.** 1) $\left(0,\ 0,\ \frac{R}{2}\right)$; 3) $\left(0,\ 0,\ \frac{307-15\sqrt{5}}{310}\right)$; 5) $\left(0,\ 0,\ \frac{3}{4}\right)$; 7) $\left(0,\ 0,\ \frac{R+H}{2}\right)$. **7.** 1) $\frac{4\pi R^4}{3}$, $\frac{2\pi R^4}{3}$; 3) $\frac{2\pi R}{3}\left(2R^3-3R^2H+H^3\right)$; 5) $\frac{\pi a^4}{\sqrt{2}}$; 7) $40a^4$; 9) $\frac{8}{15}a^4$. **10.** $\frac{kq}{r^2}$, якщо $r>R$, $k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, ε_0 — діелектрична стала, і 0, якщо $r<R$. **11.** $\vec{F}=\{F_1,\ F_2,\ F_3\}$, $F_1=F_2=0$, $F_3=\pi\gamma m\ln\frac{a}{b}$, γ — гравітаційна стала.

§ 18.2

1. 1) 0; 3) $-\pi$; 5) -4π; 7) -4. **4.** 1) $4\pi abc$; 3) $\frac{\pi a^2b^2}{2}$; 5) $\frac{13}{6}\pi$; 7) π; 9) $\frac{\pi}{5}$; 11) 0. **5.** 1) $8\pi-\frac{32\sqrt{2}}{3}$; 3) $6\sqrt{5}$; 5) $\frac{19}{6}\pi$.

§ 19.1

1. 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=C$; 3) $x=C_1y=C_2\sqrt{|z|}$; 5) $x=C_1t$, $y=C_2t$, $z=C_3t$. **2.** 1) $2(x+y+z)$; 3) $2y^2z^3+6xyz^3-3xy^2z^2$; 5) 14; 7) $\frac{2}{r}$; 9) 0; 11) $\frac{f'(r)}{4}(\vec{r},\vec{c})$; 13) $4(\vec{r},\vec{a})$; 15) $2\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. **3.** 1) $\vec{0}$; 3) $\vec{0}$; 5) $\vec{0}$; 7) $-2y\vec{i}+2x\vec{j}-2(3x+2y)\vec{k}$; 9) $\vec{0}$; 11) $\vec{0}$; 13) $\vec{0}$; 15) $2f(r)\vec{c}+\frac{f'(r)}{r}\left(\vec{c}r^2-\vec{r}(\vec{c},\vec{r})\right)$. **4.** 1), а) πR^2H; б) $3\pi R^2H$; в) $4\pi R^3$; 3), а) $-4\pi q$; б) 0; в) 0; 5) 0; 7) $\frac{1}{15}$; 9) $\frac{\pi R^2H}{4}$; 11) $\frac{\pi abc}{2}$; 13) $4\pi R^2$; 15) 36; 17) $\frac{2}{5}$; 19) $\frac{1}{3}$. **5.** 1) 2π; 3) $-\frac{3}{16}\pi r^2$; 5) $4\pi I$; 0; 9) $3\pi R^2$; 11) $-\frac{31}{30}$; 13) -2π; 15) -3; 17) πa^2-ab. **8.** а) $3V$; б) 0, якщо тіло не містить точки (0, 0, 0), і -4π у противному разі.

§ 19.2

2. 1) $xy+xz+yz+C$; 3) $2l\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C\right)$; 5) $\frac{x^3y^2}{z}-\frac{x^4}{2}+\frac{3}{4}y^4+\frac{z^4}{4}+C$; 7) $\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+\right.$ $\left.+z^2\right)+C$; 11) $-\frac{q}{r}+C$. **3.** 1), 3) Так; 7) ні; 9) так, у довільній області, яка не містить початку координат. **4.** 1) Так; 3), 5), 7) ні. **5.** 1) Ні; 3), 5), 7) так. **6.** 1) $(\operatorname{grad}u, \operatorname{grad}v)+u\Delta v$; 3) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}-\Delta\vec{a}$; 5) $(\vec{c},\vec{\nabla})\operatorname{grad}u$; 7) $(\vec{c},\vec{\nabla})\operatorname{grad}u-c\nabla^2 u$.

§ 20.1

4. 1) $\mathbf{R}^2$; 2) $x\neq 0$; 3) $y\neq 0$; 4) $y>x$; 5) $y<x^2$. **5.** 1) $y=\frac{1}{2}xy'$, $y=\frac{3}{4}x^2$; 2) $y'=y$, $y=e^x$; 3) $y'=2y+e^{2x}$, $y=xe^{2x}$; 4) $x+2yy'=0$, $x^2+2y^2=51$; 5) $y'^2+y^2=1$, $y=\sin x$; 6) $y\cos x-y'\sin x=1$, $y=\sin x+\cos x$. **6.** 1) $y=xy'$; 2) $2y=xy'$; 3) $y=2xy'$; 4) $x^2+y=xy'$; 5) $\left(x^2-y\right)y'=xy$; 6) $2xyy'=y^2-x^2$; 7) $y'x+y=0$; 8) $2xyy'=x^2+y^2$; 9) $y'=y\operatorname{th}x$; 10) $y=$ $=\sin\frac{xy'}{\sqrt{1-y^2}}$; 11) $y''=y$; 12) $y''=2y'-y$; 13) $y''=-y$; 14) $y''+y=0$; 15) $xyy'+y^2=4$; 16) $y=xy'\ln\frac{x}{y}$; 17) $y'''=0$. **7.** 1) $x=Cy^2-2Cy$, $x'=\frac{2x(y-1)}{y(y-2)}$. Вказівка. Розглянути загальне рівняння параболи $x=ay^2+by+c$ і підставити в нього координати заданих точок; 3) $(x-C)^2+(y-C)^2=C^2$, $y'(1+2xy)=2xy-2x^2-y^2$. Вказівка. Розглянути загальне рівняння кола $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ і покласти в ньому $a=b=r$. **8.** 1) (0, 0); 2) (2, 1); 3) (–5, 2), (2, –5), (2, 3), (3, 2); 4) (2, 3), (3, 2), (–2, –3), (–3, –2); 5) (1, 3), (3, 1); 6) (2, 3), (3, 2); 7) (2, 3), (3, 2); 8) (2, 8), (8, 2). **9.** 1), 3), 4) Так. **10.** 1) $\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right]$, $y_2=1+x^2+$ $+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^5}{5}$; 3) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, $y_3=\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5\cdot 4}+\frac{x^8}{4\cdot 5\cdot 8}-\frac{x^{11}}{10\cdot 16\cdot 25}$; 5) $[-1;1]$, $y_3=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{48}$; 7) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, $y_3=\frac{x^6}{24}-\frac{x^3}{3}$. **13.** 1) $y=x-2-\frac{x^4}{4}$; 2) $y=\ln|\cos x|+1$; 3) $y=x\ln^2 x-2x\ln x+$ $+2x+2-e$; 4) $y=(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\frac{\pi}{2}+1$. **14.** 2), а) $y=2x$ (точки мінімуму); б) точок перегину немає; 3), а) $y=x^2$ (точки мінімуму, якщо $x>0$, і точки максимуму, якщо $x<0$); б) $y=x^2-2x$; 4), а) точок екстремуму немає, оскільки $y'=x^2+y^2\geq 0$ $\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2$; б) $x+x^2y+y^3=0$; 5), а) $y+x^3=0$ (точки мінімуму); б) $y+x^3+3x^2=0$; 6), а) $y=-x+$ $+2\pi k$ (точки мінімуму), $y=-x+\pi(2k+1)$ (точки максимуму); б) $y=-x+\frac{\pi}{2}+2\pi k$. **15.** $y=$ $=x^2+C$. **16.** $y=x+1-\frac{1}{2}\sin 2x$. **17.** $s(t)=5t^2-\frac{t^3}{3}-34$. **18.** 141. **19.** 1) $y'=y+2$; 2) $yy'=x$. **21.** 1) $y=4\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)=4e^{-x}+2(x-1)$; 3) $y=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots=e^{-x^2}$; 4) $y=C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k=C(1+x)^n$; 5) $y=1+x+3x^2+\frac{9x^4}{2!}+\frac{27x^6}{3!}+\ldots=x+e^{3x^2}$;

6) $y=1+x+x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{7}{6}x^4+\frac{6}{5}x^5+\ldots$. **22.** 1) $y=\frac{1}{4}e^{-2x}-\frac{1}{4}+\frac{x}{2}-\ldots$; 3) $y=1+x+\frac{x^3}{3}+\ldots$; 5) $y=1+x+\frac{3x^2}{2!}+\ldots$.

§ 20.2

2. 1) $y=x+C$, якщо $a=0$ і $b=0$; $y=\frac{1}{a}e^{ax}+C$, якщо $a\neq 0, b=0$; $x=C-\frac{1}{b}e^{-by}$, якщо $a=0$ і $b\neq 0$; $y=-\frac{1}{b}\ln\left(-\frac{b}{a}e^{ax}+bC\right)$, якщо $a\neq 0$ і $b\neq 0$; 3) $\frac{2}{3}\sqrt{y^3}-\frac{2}{\sqrt{x}}=C, x=0, y=0$; 5) $y=\frac{1}{2}\left(C\sin^2 x-1\right)$; 7) $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$; 9) $y=a+\frac{Cax}{1+ax}$; 11) $y^2=C+2\ln\left(e^x+1\right)$, $y=\sqrt{2\ln\left(e^x+1\right)+1-\ln 4}$; 13) $C-\frac{2}{\sqrt{1+x}}=\ln\left(\left(1+y^2\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\right)$; 15) $\cos y=C\cos x$, $\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$; 17) $y=e^{Cx}$. **3.** 1) $y=\ln x$; 3) $y=\sqrt{2x}$; 5) $y=Cx^{+3}e^{-\frac{1}{x}}$. **4.** 1) $y=xe^{1-Cx}$; 3) $x=y(C-\ln|y|)$; 5) $C\sqrt{x^2+y^2}=e^{-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$; 7) $x+ye^{\frac{x}{y}}=C$, $x+ye^{\frac{x}{y}}=2$; 9) $x^4+2x^2y^2+$ $+y^4=C$; 11) $y=2x\operatorname{arctg} Cx$, $y=2x\operatorname{arctg} x$; 13) $y=\frac{1}{2C}\left(x^2-C^2\right)$; 15) $x^2-Cx+y^2=0$. **5.** 1) $10y-5x+7\ln(10x+5y+9)=C$; 3) $x^2-y^2+2xy-4x+6y=C$; 4) $(x-y)(x+7y-4)^3=$ $=C$; 5) $x^2+xy-y^2+3y=C$; 7) $(x-y-3)^2+10x=C$; 9) $e^{\frac{y}{x+1}}-\ln(x+1)=C$; 11) $x=C-$ $-\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}$, $y=x+2\pi n$, $n\in\mathbf{N}$. Вказівка. Скористатися заміною $x-y=z(x)$; 13) $y=$ $=c^2x+C$, якщо $a=b=0$, $y=\frac{1}{3a}(ax+c)^3+C$, якщо $a\neq 0$ і $b=0$, $x+C=\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}(ax+\right.$ $\left.+by+c)\right)$, якщо $ab>0$, $x+C=\frac{1}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{ax+by+c-\sqrt{-\frac{a}{b}}}{ax+by+c+\sqrt{-\frac{a}{b}}}\right|$, якщо $ab<0$. **6.** 1) $y=x-1+$ $+Ce^{-x}$; 2) $y=e^x(x+C)$; 3) $y=Cx-\frac{1}{2x}$; 5) $y=\sin x-1+Ce^{-\sin x}$, $y=\sin x-1+e^{-\sin x}$; 6) $y=\frac{x^3+3x+C}{\left(x^2+1\right)^2}$; 7) $y=\frac{x^2}{4}+\frac{C}{x^2}$; 9) $x\sqrt{1+y^2}+\cos y=C$; 11) $y=\frac{x}{x+1}(x+\ln|x|+C)$, не існує розв'язку, що задовольняє умову $y(0)=1$; 15) $x=Ce^{\sin y}-2\sin y-2$; 17) $x=$ $=y^2\left(1+e^{\frac{1}{y}}\right)$. **7.** 1) $Cy^2e^{2x^2}+y^2+2x^2y^2=2$, $y=0$; 2) $y=\left(x-2+Ce^{-\frac{x}{2}}\right)^2$; 3) $y^2\left(Ce^{x^2}+\right.$ $\left.+x^2+1\right)=1$, $y=0$; 5) $y(Cx+\ln x+1)=1$, $y=0$; 7) $y=-\frac{1}{\frac{1}{3}x^5+Cx^2}$, $y=0$. **8.** 1) $\frac{x^2}{2}+$ $+xy-\frac{y^2}{2}=C$; 5) $x+\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}-\frac{y^2}{2}=C$; 7) $\sqrt{1+y^2}-xy=C$; 9) $x^y=C$; 11) $xe^y+ye^x=$

$= C$; 13) $\frac{x^2}{2} + y^2 + \frac{x^2}{2}\cos 2y = C$, не існує розв'язку, що задовольняє умову $y(0) = 0$.
10. 1) $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$; 2) $x = y(C + y)$, $\mu = \frac{1}{y^2}$; 3) $x^2 - y^2 = Cx$; 5) $x^2y^2 - 2x^3y - x^4 = C$; 7) $xy - \ln y = C$; 9) $6x^2y^2 + 8x^3y + 3x^4 = C$; 10) $ye^x\left(x^2 + \frac{y^3}{3}\right) = C$; 11) $xy\left(y^3 - 5\right)^2 + \frac{y^5}{5} - \frac{5}{2}y^2 = C$; 13) $x^2 \ln y + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(y^2 + 1\right)^2} = C$. **11.** 1) $x = Cy^2 - \frac{1}{y}$; 3) $xy^2 - x + \frac{3}{2}y^2 = C$; 5) $\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = C$; 7) $y = \frac{e^x + C}{x}$; 9) $x = Cy^2 - \frac{1}{y}$; 11) $\frac{x^2}{2} - y + x\ln y - \cos y = C$; 13) $x\ln x - x - \frac{x^2}{2}\ln y = C$; 15) $x\ln y + y^2\cos 5x = e^2$. **14.** $T = T_0(1 - kH)$. **15.** $p = CT^{\frac{L}{R}}$, $C = \text{const}$. **16.** $t = \frac{1}{k}\ln\frac{x_0}{x_0 - x}$. **17.** $T = \frac{b}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{a}t}\right)$. **18.** В к а з і в к а . Скористатися формулою $S_1 = \int_0^x y(t)\,dt$. Тоді $S_2 = xy - S_1$ і $3\int_0^x y(t)\,dt = xy$.

§ 20.3

2. 1) $\left(x^2C^2 + 1 - 2Cy\right)\left(x^2 + C^2 - 2Cy\right) = 0$, $x^2 - y^2 = 0$; 3) $y = \pm\sqrt{2}x + C$; 5) $y = \frac{x^2}{4}\left(\pm\sqrt{5} - 1\right) + C$; 7) $\ln x + C = \frac{y}{2x}\sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}\right) - \frac{y^2}{2x^2}$. **3.** 1) $y = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1 + p^2} - 1}{\sqrt{1 + p^2} + 1} + C$; 3) $x = ap + b\sqrt{1 + p^2}$, $y = \frac{ap^2}{2} + \frac{3}{2}bp\sqrt{1 + p^2} + \frac{1}{2}b\ln\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) + C$; 5) $y = p + \sqrt{1 + p^2}$, $x = \ln p + \ln\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) + C$; 7) $y = p^2e^p$, $x = e^p + pe^p + C$; 9) якщо $a \neq 0$, то $\left(x - C^2\right) + y^2 = a^2$, $y = \pm a$, якщо $a = 0$, то $y = 0$; 11) $= x - C - \frac{1}{x - C}$. **6.** 1) $y = xp^2 + 2p$, $x = \frac{2\ln p - p + C}{(p - 1)^2}$; 3) $x^2 = 2C(y - 2C)$, $y = \pm\, 2x$; 5) $y = Cx + \frac{1}{C}$, $4x = y^2$; 7) $y = Cx + C - C^2$, $y = \frac{1}{4}(x + 1)^2$; 9) $x^2 = 2C(y - 2C)$, $y = \pm\, 2x$; 11) $y = Cx \pm a\sqrt{1 + C^2}$, $x^2 + y^2 = a^2$; 13) $y = Cx \pm \sqrt{1 - C^2}$, $x^2 - y^2 = 1$. **7.** 1) $y = 0$; $y = 1$; 2) $y^2 = 8x$; 3) $x^2 + y^2 = a^2$; 4) $y = -x$. **8.** 1) $y = -\frac{x^2}{4}$; 2) $y = \frac{x^2}{4}$; 3) $y = 0$; 4) $y = \frac{4}{27}x^3$, $y = 0$; 6) не існує обвідної; 7) $y = \pm\, a$; 9) $y = x - \frac{4}{27}$; 12) $y = 1$. **10.** 1) $y = 0$ — частинний розв'язок; 3) $y = 0$ — особливий розв'язок; 4) $y = \pm 1$ — особливі розв'язки; 5) $x = 0$ — геометричне місце точок дотику інтегральних кривих $y = \pm x^2 + C$; 7) $y = 0$ — геометричне місце точок звороту інтегральних кривих; 8) $y = x(\ln x - 1)$ — особливий розв'язок.

§ 20.4

1. 1) $xy=2$; 3) $y^2=2bx$; 5) $y=-\frac{1}{x+C}$; 7) будь-яке коло; 9) $y=\frac{x^2}{2x-1+C(x-1)^2}$; 11) $y=Ce^{\frac{x}{y}}$; 13) $C=\sqrt{a^2-y^2}+a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}+x$; 15) $4ax=(y-x-a)^2$; 17) $4xy=\pm a^2$; 18) $y=\frac{1}{x}-x^2$; 19) $x=\pm\left(\frac{1}{y}-y\right)$; 20) $y=Cx^2$; 21) $y=e^x$; 22) $x=Cy^3$; 23) $y=Cx^{\frac{1-k}{k}}$; 25) $\rho=2\varphi+C$. **3.** 1) $2y^2+x^2=C$; 3) $x^2+y^2=Cy$; 5) $x^2+y^2=8\ln y+C$; 7) $y^2=2C\left(\frac{C}{2}-x\right)$; 9) $xy=C$. **4.** 400 м. **6.** $x=Ce^{kt}$, k — коефіцієнт пропорційності. **7.** $p=p_0e^{-kt}$. **9.** ≈200 днів. **11.** 0,5 %. **12.** 1) $\frac{2D^2\sqrt{H}}{06d^2\sqrt{2g}}$; 3) 35,2 с. **13.** 24,4 хв. **14.** ≈ 50 с, ≈ 15 м. **16.** 0,0011 с. В к а з і в к а . Рівняння має вигляд $m\frac{dv}{dt}=-kv^2$. **18.** 1/1024. **19.** 1) $I=\frac{1}{L_0}\int_{t_0}^{t}e^{\frac{-R_0}{L_0}t}U(t)dt+I_0e^{-\frac{R_0}{L_0}(t-t_0)}$; 3) $I=I_0e^{\frac{-R_0}{L_0}t}+\frac{U_0}{R_0^2+\omega_0^2L_0^2}\left(R_0\sin\omega_0t-\omega_0L_0\left(\cos\omega_0t-e^{\frac{-R_0}{L_0}t}\right)\right)$. **20.** 1) $m=1000/(10+t)^2$. **22.** $t=\frac{a^2}{k}$. **23.** $v_2=v_0\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^{\frac{t_2}{t_1}}$; $v_2=v(120)=0{,}32$ м/с.

§ 21.1

3. 1) $y=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2$; 3) $y=\frac{1}{6}x^3+x\ln x+C_1x+C_2$; 5) $y=\frac{a^x}{\ln^n a}+\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-k}x^k$; 6) $y=\ln\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$; 7) $C_1^2y=C_1x-\ln|C_1x+1|+C_2$, $y=\frac{x^2}{2}+C$, $y=C$; 9) $x+C_2=\pm\frac{1}{C_1}\ln\frac{\sqrt{C_1^2+16e^y}-C_1}{\sqrt{C_1^2+16e^y}+C_1}$; 10) $y=C_2-C_1x+\left(1+C_1^2\right)\ln|x+C_1|$, $y=-\frac{x^2}{2}+C$; 11) $y=\operatorname{ch}(x+C_1)+C_2$; 13) $y=1+\frac{1}{C_1x+C_2}$, $y=C$; 14) $y=C_1x(x-C_1)+C_2$, $y=\frac{x^3}{3}+C$; 15) $y=\pm\frac{2}{3}\left(\sqrt{y}-2C_1\right)\sqrt{\sqrt{y}+C_1}+C_2$; 17) $\frac{1}{C_1}\sqrt{C_1y^2+1}=C_2\pm x$; 18) $C_1x+C_2=\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|$; 19) $y=\frac{C_1x+C_2}{3x-x^2}$; 20) $y=C_2xe^{-\frac{C_1}{x}}$. **4.** 1) $y=\frac{x^3}{6}\ln x-\frac{5}{36}x^3+\frac{x}{4}-\frac{4}{36}$; 2) $y=(x-3)e^x+\frac{x^2}{2}+2x+3$; 4) $y=\sqrt{2x-x^2}$; 5) $y=Cx^2+e^x(x-1)$; 7) $y=-\ln|x-1|$. **5.** $y=\frac{ax^3}{6}$. **7.** $s(t)=\frac{1}{2}\ln t-\frac{t^2}{4}+\frac{1}{4}$. **8.** $\left(x+C_1^2\right)+(y+C_2)^2=R^2$. В к а з і в к а . $R=\frac{1}{y''}\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}$. **9.** $y=\ln\cos x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. **10.** $y=1-e^x$, $y=-1+e^{-x}$. **11.** $x=-y\ln y$. **12.** $ms''(t)=mg-k(s'(t))^2$, $s=\frac{m}{k}\ln\operatorname{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}t$,

$k>0$ — коефіцієнт пропорційності. **13.** $ms''=mg-ks'$, $s=\frac{m^2g^2}{k^2}\left(e^{-\frac{k}{m}t}-1\right)+\frac{mg}{k}t$, m — маса тіла, k — коефіцієнт опору. **15.** $t=\frac{h(v_1-v_0)}{v_0v_1(\ln v_1-\ln v_0)}$. **16.** 1) $t=1{,}89$ с, $v=16{,}6$ м/с. Вказівка. Скористатись формулами $t=\sqrt{\frac{m}{kg}}\operatorname{arctg} v_0\sqrt{\frac{k}{mg}}$ і $h=\frac{m}{2k}\ln\left(1+\frac{kv_0^2}{mg}\right)$, де m — маса м'яча, k — коефіцієнт пропорційності і v_0 — початкова швидкість. **17.** 11,2 км/с. **18.** $y=\sqrt[3]{x}$.

§ 21.2

3. 1) Так, $W(x)=x^2$; 3) так, $W(x)=e^{5x}$; 5) ні, $W(x)\equiv 0$; 7) так, $W(x)=(a_2-a_1)\times\times e^{(a_1+a_2)x}$; 9) так, якщо $\beta\neq 0$, $W(x)=\beta e^{2\alpha x}$; ні, якщо $\beta=0$, $W(x)\equiv 0$; 11) ні, $W(x)\equiv 0$; 13) так, $W(x)\equiv 0$; 15) так, $W(x)=\prod_{k=0}^{n}k!$ **4.** 1) Так, $y''-2y'+y=0$, $y=(C_1+C_2x)e^x$; 3) так, $y''=0$, $y=C_1x+C_2$; 5) ні; 7) ні; 8) так, $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0$, $y=C_1x+C_2x^2+ +C_3x^3$; 11) ні. **5.** 2) $y=C_1\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}-\ldots+\frac{(-1)^k x^{2k}}{2\cdot 4\ldots 2k}+\ldots\right)+C_2\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{3\cdot 5}-\ldots\right.$ $\left.\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\ldots\right)$; 3) $y=C_1\left(1+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}+\ldots\right)+C_2\left(x+\frac{x^5}{4\cdot 5}+\frac{x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}+\ldots\right)$; 4) $y=C_1\left(x+x^3+x^5+\ldots\right)+C_2\left(1+x^2+x^4+\ldots\right)=\frac{C_1x}{1-x^3}+\frac{C_2}{1-x^2}$; 5) $y=C_1\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\right.$ $\left.+\frac{x^5}{24}+\ldots\right)+C_2\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{30}+\ldots\right)$. **6.** 2) $y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 5\ldots(4k+1)(4k+2)}{(4k)!}x^{4k}$, $x\in\mathbf{R}$; 3) $y= =1-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1\cdot 4}{6!}x^6-\frac{1\cdot 4\cdot 7}{9!}x^9+\ldots$, $x\in\mathbf{R}$; 4) $y=1+\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{x^{2k}}{2\cdot 4\ldots 2k}+\ldots)$, $x\in\mathbf{R}$; 5) $y=1+\frac{2x^4}{4!}-\frac{2x^5}{5!}+\frac{2x^6}{6!}-\frac{2x^7}{7!}+\frac{62x^8}{8!}-\ldots$.

§ 21.3

2. 1) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$; 3) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$; 5) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$; 7) $y=C_1e^{3x}+ +C_2e^{-3x}$; 9) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$; 11) $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$; 13) $y=e^{2x}(C_1\cos x+ +C_2\sin x)$; 15) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$; 17) $y=C_1\cos px+C_2\sin px$, якщо $p\neq 0$, і $y= =C_1x+C_2$, якщо $p=0$; 19) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+C_3e^{-2x}+C_4e^{2x}$; 21) $=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+C_3\cos x+ +C_4\sin x$; 22) $y=C_1e^{x}+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{3}{2}x+C_3\sin\frac{3}{2}x\right)$; 23) $y=C_1e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{3}{2}x+\right.$

$+C_3\sin\frac{3}{2}x\Big)$; 24) $y=C_1+C_2x+C_3x^2+\left(C_5+C_6x+C_7x^2\right)e^{-x}$. **3.** 3) $\frac{1}{3}\left(5-2e^{-3x}\right)$; 5) $y=\frac{1}{4}e^x-\frac{1}{4}e^{-3x}$. **4.** $y=-4e^{-x}+e^{2x}$. **5.** 1) $y''+2y'-3=0$, $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$; 3) $y''+y'=0$, $y=C_1+C_2e^{-x}$; 5) $y''-16y'+64y=0$, $y=(C_1+C_2x)e^{8x}$; 7) $y''-4y'+13y=0$; $y=(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)e^{2x}$; 9) $y'''-4y''+3y'=0$, $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{3x}$; 11) $y^{\mathrm{IV}}-2y'''+5y''-8y'+4y=0$; $y=(C_1+C_2x)e^x+(C_3+C_4x)\cos 2x+(C_5+C_6x)\sin 2x$; 13) $y^{(5)}=0$, $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+C_5x^4$; 15) $y^{(8)}+2y^{(7)}+23y^{(6)}-10y^{(5)}+118y^{(4)}-920y'''+2860y''-3700y'+5000y=0$, $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-x}\left(\left(C_3+C_4x+C_5x^2\right)\cos x+\left(C_6+C_7x+C_8x^2\right)\sin x\right)$. **6.** 1) $y''-(a+b)y'+aby=0$, $y=C_1e^{ax}+C_2e^{bx}$; 3) $y'''-3y''+3y'-y=0$, $y=\left(C_1+C_2x+C_3x^2\right)e^x$; 5) $y'''+2y''+2y'=0$, $y=C_1+e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$; 6) $y^{(4)}-4y'''+6y''-4y'+y=0$, $y=C_1e^x+e^{-x}\left(C_2+C_3x+C_4x^2\right)$. **7.** $y=\frac{h}{2}\left(e^{ax}+e^{-ax}\right)$. **9.** $x(t)=500\left(1-e^{0,01t}\right)$, 500 м. Вказівка. Розв'язати задачу Коші: $mx''+\lambda x'=0$, $x(0)=0$, $x'(0)=5$. Для визначення λ скористатись умовою $x'(70)=2,5$.

§ 21.4

2. 1) Так, $y=C_1\cos^2 x+C_2\sin^2 x+\cos^2 x\ln\cos x+\sin^2 x\ln\sin x$; 3) так, $y=C_1x+C_2\cos x+C_3\sin x+x^2-2$. **3.** 1) $y=(C_1\cos x+C_2\sin x+\ln|\cos x|\cdot\cos x+x\sin x)e^{2x}$; 3) $y=\left(1+e^x\right)\times\ln\left(1+e^x\right)+e^x(3-\ln 2-x)-(2+\ln 2+x)$; 5) $y=C_1\cos x+C_2\sin x-2+\sin x\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$; 7) $y=(C_1\cos x+C_2\sin x-x\cos x+\sin x\ln\sin x)e^{-x}$; 9) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+\frac{1}{x}$; 11) $y=(C_1+C_2x)\sin x+(C_3+C_4x)\cos x-\frac{1}{8}x^2\sin x$. **8.** 1) $y^*=x(Ax+B)e^{2x}$; 2) $y^*=x\left(Ax^2+Bx+C\right)$; 3) $y^*=x(A\cos\omega t+B\sin\omega t)$; 4) $y^*=e^x((Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x)$, 5) $y^*=x\left(Ax^2+Bx+C\right)e^x+x(Mx+N)e^{2x}$; 6) $y^*=x\left(Ax^2+Bx+C\right)+xe^{3x}(Mx+N)$; 7) $y^*=x((Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x)$; 8) $y^*=xe^{2x}((Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x)$; 9) $y^*=x\left(Ax^2+Bx+C\right)+xe^{3x}(Mx+N)$; 10) $y^*=x(A\cos 3x+B\sin 3x)+(C\cos x+D\sin x)$; 11) $y^*=e^{2x}\left(Ax^2+Bx+C\right)$; 12) $y^*=x^2e^{-2x}(Ax+B)$; 13) $y^*=x\left(Ax^2+Bx+C\right)+e^{2x}(M\cos 2x+N\sin 2x)$; 14) $y^*=Ax+B+x((Cx+D)\cos 2x+(Mx+N)\sin 2x)$; 15) $y^*=xe^x(Ax+B)+xe^{3x}\left(Cx^2+Dx+E\right)$. **9.** 1) $y^*=xe^{-x}(Ax+B)$; 3) $y^*=Ax^2+Bx+C$; 5) $y^*=A\cos 2x+B\sin 2x$; 7) $y^*=x^3\left(Ax^2+Bx+C\right)$; 9) $y^*=Axe^{2x}+Be^{3x}$; 11) $y^*=x^2e^x\left((Ax+B)\cos\frac{x}{2}+(Cx+D)\sin\frac{x}{2}\right)$. **10.** 1) $y=C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x}-(x-2)e^{-x}$; 2) $y=C_1+C_2e^{-2x}+\left(\frac{1}{8}x-\frac{3}{32}\right)e^{2x}$; 5) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-5x-2$; 7) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}\left(x^2+3x+\frac{9}{2}\right)$; 11) $y=C_1e^{-ax}+C_2e^{ax}+$

$+\frac{1}{b^2-a^2}e^{bx}$, якщо $a\neq b$; $y=C_1e^{-ax}+C_2e^{ax}+\frac{xe^{ax}}{1+a}$, якщо $a=b$; 13) $y=C_1+C_2e^{-x}-$ $-\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)e^{-x}$; 17) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{4}x\cos x+\frac{1}{4}x^2\sin x$; 19) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+$ $+x+e^x$; 21) $y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+e^x\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{32}\right)$; 23) $y=C_1e^{-x}+e^{\frac{-x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\right.$ $\left.+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+e^{2x}\left(\frac{x^2}{9}-\frac{5}{27}x+\frac{17}{81}\right)$. **11.** 1) $y=\frac{1}{2}x(x+2)e^{4x}$; 3) $y=4+(3x-5)e^x+2(\cos x+$ $+\sin x)$. **12.** $s=\frac{1}{2}g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)t^2$. **14.** $h=1-0{,}12\sin\left(10\sqrt{gt}\right)+0{,}01\cos\left(10\sqrt{gt}\right)+0{,}12\sin 30t$.

15. $t=\sqrt{\frac{l}{g}}\ln\frac{l+\sqrt{l^2-a^2}}{a}$. **16.** 2) $y(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}(k-1)!}{(2k+1)!}x^{2k+1}$, $x\in\mathbf{R}$; 3) $y(x)=x+$ $+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!!}x^{2k+1}$, $x\in\mathbf{R}$; 4) $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1\cdot4\cdot7\ldots(3k+1))^2}{(3k+2)!}(3k+4)x^{3k+2}$, $x\in\mathbf{R}$. **17.** 1) $y=$ $=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\frac{3x^6}{6!}+\frac{3\cdot5x^8}{8!}+\ \ldots$; 2) $y=x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{24}x^4-\ \ldots$; 3) $y=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ \ldots$.

§ 21.5

2. 1) Так; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) так. **3.** 1) $y=C_1$, $x=C_2$, якщо $\omega=0$, і $y=C_1e^{\omega t}+$ $+C_2e^{-\omega t}$, $x=C_1\omega e^{\omega t}-C_2\omega e^{-\omega t}$, якщо $\omega\neq0$; 2) $y=C_1x$, $z^2+\left(C_1^2+1\right)x^2=C_2$; 3) $x=C_1e^{2t}+$ $+C_2e^{-t}$, $y=C_1e^{2t}-(C_2+C_3)e^{-t}$, $z=C_3e^{-t}+C_1e^{2t}$; 4) $x=Ae^{at}\cos(bt+\alpha)$, $y=Ae^{at}\sin(bt+$ $+\alpha)$; 5) $y=C_1t+C_2$, $x=\frac{C_1}{2C_1t+2C_2+1}$; 6) якщо $\gamma=0$, то $y=C_1e^{\delta t}$, а $x=\frac{C_1\beta}{\delta-\alpha}e^{\delta t}+C_2e^{\alpha t}$, коли $\delta\neq\alpha$, і $x=(C_1\beta t+C_2)e^{\alpha t}$, коли $\delta=\alpha$; а якщо $\gamma\neq0$, то $y=C_1e^{k_1t}+C_2e^{k_2t}$, $x=\frac{1}{\gamma}(C_1(k_1-\delta)e^{k_1t}+C_2(k_2-\delta)e^{k_2t}$, де $k_{1,2}=\frac{1}{2}(\delta+\alpha\pm\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4\beta\gamma}$; 7) $x=$ $=e^{\delta t}\left(C_1\cos\sqrt{\omega^2-\delta^2}t+C_2\sin\sqrt{\omega^2-\delta^2}t\right)$, $y=x'(t)$; 9) $x=a+C_1e^t$, $y=b+C_2e^t$, $z=C+C_3e^t$.

4. 1) $\begin{cases}z=x-y,\\ y(y-2x)^3=(x-y)^2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=\frac{t}{3},\\ y=-\frac{t}{3};\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x=\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-2t},\\ y=\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-2t},\\ z=-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t};\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x=-e^{-t},\\ y=e^{-t},\\ z=0.\end{cases}$

§ 21.6

2. 1) Ні; 2) так, якщо $b=0$, $a_1\neq0$, $a_2\neq0$, або $b\neq0$ і $a_1=a_2=0$; 3) так; 5) так. **3.** 1) 4; 2) 3; 3) 2; 4) 4; 5) 3. **6.** 1) $2p^2+2p$, нестійкий; 2) $\left(a_1a_2-b^2\right)p^2$, нестійкий; 3) $L^2p^3+LRp^2+$ $+\frac{2L}{c}p+\frac{R}{C}$, стійкий; 5) $p^3+\frac{b}{m}p^2+\frac{g\sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0}p+\frac{2kg\sin^2\varphi_0}{J\omega_0}$, стійкий, якщо $\frac{bg}{m\cos\varphi_0}>$ $>\frac{2kg}{J\omega_0}$. **7.** 1) $\begin{cases}y=(C_1t+C_2)e^{-t},\\ z=C_1e^{-t};\end{cases}$ 2) якщо $a_1=b=a_2=0$, то $y=y(x)$ і $z=z(x)$ — довільні диференційовні функції; якщо $a_1=b=0,\ a_2\neq 0$, то $y=y(x)$ — довільна диференційовна функція, а $z=C=\text{const}$; якщо $a_1=0,\ b\neq 0$, то — $z=C_1=\text{const}$ і $y==C_2=\text{const}$; якщо $a_1\neq 0$ і $b^2-a_1a_2=0$, то $z=z(x)$ — довільна диференційовна функція, а $y=-\frac{b}{a_1}z(x)+C$; якщо $a_1\neq 0$ і $b^2-a_1a_2\neq 0$, то $z=C_1=\text{const}$ і $y=C_2=\text{const}$; 3) $\begin{cases} x=C_1+C_2t+C_3t^2, \\ y=C_4-(C_1+2C_3)t-\frac{1}{2}C_2t^2-\frac{1}{3}C_3t^3. \end{cases}$ **8.** 1) $\begin{cases} y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-2x, \\ z=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x-x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y_1=\cos 1\cos x+C_1, \\ y_2=-\sin 1\sin x+C_2. \end{cases}$

§ 22.1

1. 1) $F\left(x^2-y^2,\ x-y+z\right)=0$; 3) $F\left(x^2-4z,\ \dfrac{(x+y)^2}{x}\right)=0$; 7) $F\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y},\ \ln|xy|-\dfrac{z^2}{2}\right)=0$; 9) $F\left(u(x-y),\ u(y-z),\ \dfrac{x+y+z}{u^2}\right)=0$; 11) $F\left(\dfrac{x-y}{z},\ (2u+x+y)z,\ \dfrac{u-x-y}{z^2}\right)=0$. **2.** 1) $y^2-x^2-\ln\sqrt{y^2-x^2}=z-\ln|y|$; 5) $2xy+1=x+3y+\dfrac{1}{z}$; 7) $3(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$. **3.** $F\left(x^2-y^2,\ 2x^2+z^2\right)=0$. **4.** $2y^2+z^2=z\left(x^2+y^2+z^2\right)$. **5.** $F\left(\dfrac{x^2}{y},\ \dfrac{z}{y}\right)=0$. **6.** $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+2\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=0$, $F(2x-z,\ 2y-z)=0$. **7.** $(x-a)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+(y-b)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+(z-c)\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=0$, $F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\ \dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$.

§ 22.2

1. 1) $xC_1(y)+C_2(y)$; 3) $\dfrac{x^4}{12}+\dfrac{x^2y}{2}+xC_1(y)+C_2(y)$; 5) $C_1(x)+\dfrac{1}{x}C_2(y)$; 7) $C_1(x)e^{y^2}+C_2(y)$. **2.** 1) $u(x,\ t)=\sin x\cos t$; 5) $u(x,\ t)=\psi(x+at)-\psi(x-at)$, $\psi(z)=\begin{cases} 0, & z<0, \\ \dfrac{z}{200}, & 0\le z\le l, \\ \dfrac{l}{200}, & z>l. \end{cases}$

3. 1) $u(x,t)=\dfrac{32h}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^3}\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{l}x\cos\dfrac{(2n-1)\pi a}{l}t$, h — максимальне початкове відхилення струни; 3) $u(x,\ t)=\cos at\sin x$; 7) $u(x,t)=\dfrac{2l}{\pi^2 a}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-\cos nx}{n^2}\sin\dfrac{n\pi a}{l}t\sin\dfrac{n\pi}{l}x$; 9) $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8l}{5(2n-1)^3\pi^3}\cos\dfrac{(2n-1)\pi a}{2l}t\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2l}x-\dfrac{x}{10}$. **4.** 1) $u(x,t)=\dfrac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\times e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{l}x$; 3) $u(x,\ t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-4n^2t}\sin 2nx}{2n}$; 5) $u(x,t)=3e^{-\frac{\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\dfrac{\pi}{l}x-2e^{-\frac{9\pi^2a^2}{l}t}\sin\dfrac{3\pi}{l}x$; 7) $u(x,t)=\dfrac{100x}{l}+\dfrac{400}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{a^2n^2}{l^2}t}\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{l}x$. **5.** $u(r,\psi)=$

$$=\begin{cases}1-\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{R^2-r^2}{2R\sin\psi}, & 0<\psi<\pi;\\ -\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{R^2-r^2}{2Rr\sin\psi}, & \pi<\psi<2\pi.\end{cases}$$ Вказівка. Скористатися інтегралом Пуассона.

6. $u(x,\ t)=\dfrac{T_0}{2a\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(\tau-x)^2}{4a^2t}}\,d\tau$. Вказівка. Скористатися інтегралом Фур'є. **8.** $u(x,\ t)=$

$$=\frac{4lA}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\dfrac{(2n-1)}{l}\pi a\sin\omega t-\omega\sin\dfrac{(2n-1)\pi a}{l}t}{(2n-1)^2\left(\dfrac{(2n-1)^2\pi^2a^2}{l^2}-\omega^2\right)}\sin\frac{(2n-1)\pi}{l}x.$$ Вказівка. Розв'язок задачі шукати у вигляді ряду $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\gamma_k(t)\sin\dfrac{k\pi}{l}x$, де $\gamma_k(t)$ — невідомі коефіцієнти.

§ 23.1

3. 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) ні; 5) так; 6) так; 7) так, якщо $a\ge\sqrt{2}$; ні, якщо $a<\sqrt{2}$; 8) так; 9) так.

§ 23.2

3. 1) Так, β; 2) так, 2; 3) так, $\dfrac{1}{\alpha+1}$, якщо $\alpha>-1$, ні, якщо $\alpha\le-1$; 4) як у 3); 5) як у 3); 6), а) так, 1; б) так, 1; в) так, 0; г) так, 1; 7) ні; 9) так, 0; 10) як у 3). **13.** 1) Так, правильна; 2) так, правильна; 3) так, правильна; 4) ні, неправильна; 5) ні, неправильна; 6) ні, правильна.

§ 23.3

2. 1) Так, $mE=b-a$; 2) так, $mE=0$; 3) так, $mE=b-a$; 4) так, $mE=0$; 5) так, $mE=1$; 6) так, $mE=0$; 7) так, $mE=1$; 8) так, $mE=1$.

§ 23.4

2. 1) Так, $\beta(b-a)$; 3) так, $2\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}$; 4) ні; 5) так, 0; 6) ні; 7) так, 0; 8) так, 3; 9) так, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{1}{3}$; 10) так, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{(2n+1)(2n+3)}\dfrac{1}{3}$; 11) так, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nq^n=q\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\right)'=\dfrac{q}{(1-q)^2}$; 12) так, $\dfrac{q}{(1-q)^2}+\dfrac{1-2q}{1-q}$.

§ 23.5

3. 1) Якщо $0<\alpha\notin\mathbf{Q}$, то $E(f>a)=\begin{cases}[0;\ +\infty), & a<0,\\ \left(a^{\frac{1}{\alpha}};+\infty\right), & a>0;\end{cases}$ 2) якщо $c>1$, то $E(f>a)=$ $=\begin{cases}(-\infty;\ +\infty), & a\le0,\\ (\ln a;\ +\infty), & a>0;\end{cases}$ 3) $E(f>a)=\begin{cases}(-\infty;+\infty),\ a<-1,\\ \bigcup\limits_{n\in\mathbf{Z}}(\arcsin a+2\pi;\ \pi-\arcsin a+2\pi n),\ -1\le a<1,\\ \varnothing,\ a\ge1;\end{cases}$ 5) $E(f>a)=$

$= \bigcup_{n\in\mathbf{Z}}\left(\operatorname{arctg} a+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$; 6) $E(f>a)=\bigcup_{n\in\mathbf{Z}}(\pi n; \operatorname{arctg} a+\pi n)$; 7) $E(f>a)=\left(b^a; +\infty\right)$, $b>1$; 8) $E(f>a)=\begin{cases}[-1;1], & a<-\frac{\pi}{2},\\ [\sin a;1], & -\frac{\pi}{2}\le a<\frac{\pi}{2},\\ \varnothing, & a\ge\frac{\pi}{2};\end{cases}$ 9) $E(f>a)=\begin{cases}[-1;1], & a<0,\\ [-1;\ \cos a], & 0\le a<\pi,\\ \varnothing, & a\ge\pi;\end{cases}$

10) $E(f>a)=\begin{cases}(-\infty, +\infty), & a\le-\frac{\pi}{2},\\ (\operatorname{tg} a; +\infty), & -\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2},\\ \varnothing, & a\ge\frac{\pi}{2};\end{cases}$ 11) $E(f>a)=\begin{cases}[a;b], & a<-1,\\ [a;b]\setminus\mathbf{Q}, & -1\le a<1,\\ \varnothing, & a\ge 1;\end{cases}$

12) $E(f>a)=\begin{cases}[a;\ b], & a<0,\\ [a;\ b]\cap\mathbf{Q}, & 0\le a<1,\\ \varnothing, & a\ge 1;\end{cases}$ 13) $E(f>a)=\begin{cases}E, & a<\text{const},\\ \varnothing, & a\ge\text{const}.\end{cases}$ **5.** 1) Ні, якщо $\alpha\le-1$, так, якщо $\alpha>-1$, $\frac{1}{\alpha+1}$; 3) так, 2; 4) так, 0; 5) так, 0; 6) так, $\beta(b-a)$; 7) ні; 8) так, 3/2; 9) так, 3; 10) ні.

§ 24.1

6. 1) $z\in\mathbf{C}$, $\exp z$; 3) $z\in\mathbf{C}$, $-\sin z$; 5) $z\ne\pi k$ $\forall k\in\mathbf{Z}$, $-\frac{1}{\sin^2 z}$; 7) $z\in\mathbf{C}$, $\operatorname{sh} z$; 9) $z\ne\pi ki$ $\forall k\in\mathbf{Z}$, $-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 z}$; 11) $z\ne x+i0$ $\forall x\le 0$, $\alpha z^{\alpha-1}$; 12) $\varnothing$; 13) $z=0$, 0; 14) $z=x+i0$ $\forall x\in\mathbf{R}$, $2x$; 16) $z\in\mathbf{C}$ і $f'(z)=1$, якщо $a=0$, $z=0$, і $f'(0)=1$, якщо $a\ne 0$; 17) $z=0$, $f'(0)=2$; 19) якщо $a=2$, то $z\in\mathbf{C}$ і $f'(z)=-2iz$, а якщо $a\ne 2$, то $z=0$ і $f'(0)=0$; 21) $z\in\mathbf{C}$, $\frac{1-z}{\exp z}$; 23) $\varnothing$. **8.** 1) Так; 3) ні; 4) ні; 5) так. **9.** 1) $a=b=2$; 2) $a=5$, $b=2$; 3) $a=c$, $b=1$. **10.** 1) $\frac{189\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{4}$. **13.** 1), 3), 4) Так; 2) ні. **14.** 2) $f(z)=z^2+2z+1$; 3) $f(z)=\exp z+z^2+$ $+3z+iC$; 4) $f(z)=\frac{1}{z}$; 5) $f(z)=z-i\ln z+C$; 6) $f(z)=2\ln z+C$. **16.** 1) $R=1$, $K=$ $=\{z:\ |z|<1\}$, $f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$; 3) $R=1$, $K=\{z:\ |z|<1\}$, $f(z)=\frac{2z}{(1-z)^3}$; 5) $R=3$, $K=$ $=\{z:\ |z+1-i|<3\}$, $f(z)=\frac{(z+1-i)^2}{3\left(1-\frac{(z+1-i)^2}{3}\right)^2}$; 7) $R=\frac{1}{3}$, $K=\left\{z:\ |z+2i|<\frac{1}{3}\right\}$, $f(z)=$

$$=\frac{3(z+2i)^2\left(1+3(z+2i)^2\right)}{\left(1-3(z+2i)^2\right)^3}.$$

§ 24.2

3. 1) Гладка, $z'(0)=1$; 2) гладка, $z'(2)=1+2i$; 4) гладка, $z'(1)=1+\frac{i}{2}$; 5) гладка, $z'(1)=1+3i$; 7) гладка, $z'(\pi)=-iR$; 8) кусково-гладка, $z'(\pi)=0$, дотичний вектор не існує; 10) кусково-гладка, $z'(\pi)=0$, дотичний вектор не існує. **4.** 1) $\varphi(0)=-\frac{\pi}{4}$, $\varphi(1)=$

$= -\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 2$; 3) $\varphi(0) = \frac{\pi}{4}$; 5) $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) криві не перетинаються; 7) $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ $= 2\operatorname{arctg} 2$. **5.** 1) $k = 2$, $\alpha = 0$; 2) $k = 2$, $\alpha = -2\varphi$; 3) $k = 2$, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$; 5) $k = \sqrt{5}$, $\alpha =$ $= \operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\varphi - 1}{2 - \operatorname{tg}\varphi} - \varphi$; 6) $k = \frac{1}{2}$, $\alpha = 0$; 7) $k = \frac{1}{2}$, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$; 8) $k = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos 2\varphi}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{a-b}{a+b} - \varphi$. **6.** 1) $E = \left\{z : |z| = \frac{1}{2}\right\}$, $E_1 = \{z = x + i0 : x > 0\}$; 3) $E = \left\{z : |z| = \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, $E_1 = \{z = x + i0 : x \neq 0\}$; 5) $E = \{z : |z| = 1\}$, $E_1 = \{z = x + iy : y \neq 0\}$; 7) $E = \left\{z : |z + i| = \sqrt{2}\right\}$, $E_1 = \{z = -(1 + y) + iy : y \neq -1\}$; 9) $E = \{z : |z| = 1, z \neq -1\}$, $E_1 = \{z = x + i0 : x > 0\}$. **9.** 1) $D_1 =$ $= D_2 = \mathbf{C}$; 3) $D_1 = D_2 = \mathbf{C} \setminus \left\{z : z = -\frac{d}{c}\right\}$; 5) $D_2 = \mathbf{C}$, D_1 — довільна область, що лежить у смузі, паралельній дійсній осі, і ширина якої не більша за 2π; 7) $D_1 = D_2 = \mathbf{C} \setminus \{z =$ $= x + i0 : x \leq 0\}$; 9) D_1 — будь-яка область, що задовольняє одну з умов: а) $\operatorname{Im} z > 0$, б) $\operatorname{Im} z < 0$, в) $|z| < 1$, г) $|z| > 1$. **12.** 1) $\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Im} f(z) + 1 > 0$; 3) коло з центром у точці $\frac{-1-i}{2a}$ і радіусом $\frac{1}{\sqrt{2}a}$; 5) $\operatorname{Re} f(z) > \frac{1}{a}$; 7) $\left|f(z) + \frac{i}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$; 9) $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$, де $a = \frac{5}{4}$, $b = \frac{3}{4}$, $u = \operatorname{Re} f(z)$, $v = \operatorname{Im} f(z)$; 11) $\operatorname{Re} f(z) = 4 - (\operatorname{Im} f(z))^2/16$; 13) промінь, що виходить з точки $w = 0$ під кутом a до дійсної осі; 15) $\operatorname{Re} f(z) > 0$ і $\operatorname{Im} f(z) < 0$. **14.** $w = 2iz +$ $+ i + 2$. **15.** 1) $w = iz$; 3) $w = 2iz - 1 + 6i$. **16.** 1) $w = z$; 2) $w = -z$; 3) $w = iz$; 4) $w = iz$.

§ 25.1

3. 1) $\frac{2}{3} + i$; 2) $\frac{\pi}{4} - i\frac{\ln 2}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2} - 1 + i\ln 2$; 4) $2\sin\frac{1}{2}\exp\frac{i}{2}$; 5) $\frac{2i}{\pi}$; 7) $-\frac{1}{2} + i\frac{4}{5}$; 8) $2\sin 1 - \cos 1 + i(2 - \cos 1 - \sin 1)$; 9) 1, якщо $m = n$, 0, якщо $m \neq n$. **6.** 1) $z(\beta) - z(\alpha)$; 2) $\frac{z^2(\beta) - z^2(\alpha)}{2}$. **7.** 1) i; 2), б) πi; 3) $2i$; 4) πi; 5) 0; 6) $-\frac{1}{2}\pi^2$; 7) $\frac{2}{3} + 2i$; 9) $-\frac{2}{15} + \frac{3}{2}i$; 10) 0; 12) $-\frac{32}{3}$; 13) 0; 15) $-ie^{-1}$; 16) $i(\beta - \alpha)$; 17) $\frac{i\sqrt{3}}{8}(1 + \operatorname{sh} 1)$; 18) $\frac{1}{2}(1 + \pi i)$. **12.** 2) $\frac{16}{3}(i - 1)$; 3) $6(i - 1)$; 4) $\frac{3}{4}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$; 6) $4 - 4\ln 2 - 10\pi i$; 7) $i\pi$.

§ 25.2

4. 1) $2\pi \operatorname{sh} 1$; 2) $2\pi i$; 3) $2\pi i \operatorname{sh} 1$; 4) $2\pi i$; 5) $2\pi i$; 6) $2\pi(\exp i - 1)$; 7), а) πi; б) $-\pi i$; в) 0; 9) $-\frac{1}{2}\pi i$; 10) $2\pi i$; 11) $2\pi i$. **5.** 1) $2\pi i$; 3) $-\frac{1}{44!}$; 4) -8π; 5) $-\frac{\pi i}{360}$; 7), а) $\frac{3}{8}\pi i$; б) $-\frac{3}{8}\pi i$; в) 0. **6.** 1) 0, якщо $i \notin \overline{D}$; $2\pi i$, якщо $i \in D$; 2) 0, якщо 0 і $1 \notin \overline{D}$ або $0 \in D$, $1 \notin \overline{D}$; $2\pi i \operatorname{sh} 1$, якщо $1 \in D$, $0 \notin \overline{D}$ або 0 і $1 \in D$; 3) 0, якщо $i \notin \overline{D}$; $-i\pi \operatorname{ch} 1$, якщо $i \in D$; 5) 0, якщо 0 і $1 \notin D$, $-\pi i$, якщо $0 \in D$, $1 \in \overline{D}$; 6) $\frac{2\pi i}{(b-a)^n}$, якщо $b \in D$, $a \notin \overline{D}$; $\frac{(-1)^{n-1} 2\pi i}{(n-1)!(a-b)^n}$, якщо $a \in D$, $b \notin \overline{D}$; $\frac{2\pi i}{(b-a)^n}\left(1 + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\right)$, якщо a, $b \in D$, $a \neq b$. **9.** 2) $\frac{5}{8}\pi$; 3) $\frac{35}{64}\pi$. **13.** 1) $\frac{2z^2}{\left(1 - z^2\right)^2}$, $|z| < 1$;

2) $\frac{2}{(1-z)^3}$, $|z|<1$; 3) $\frac{3z^4-z^3}{(1-z)^3}$, $|z|<1$; 4) $\frac{2z\left(2z^2-7z+6\right)}{(1-z)^3}$, $|z|<1$. **14.** 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}z^n$, $|z|<\infty$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 3^{2n-1}}{(2n-1)!}z^{2n-1}$, $|z|<\infty$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}z^{2n}}{(2n)!}$, $|z|<\infty$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{3^{2n-1}(2n-1)!}$, $|z|<\infty$; 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(2n)!}z^{2n}$, $|z|<\infty$; 7) $z^2+\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{2-2^n}{n!}z^n$, $|z|<\infty$; 9) $\exp a\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{n!}$, $|z|<\infty$; 10) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k\frac{(z-a)^k}{k!}$, де $\alpha_{2n}=\operatorname{ch}a$, $\alpha_{2n+1}=\operatorname{sh}a$, $|z|<\infty$; 11) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k\frac{(z-a)^k}{k!}$, де $\alpha_{2n}=\operatorname{sh}a$, $\alpha_{2n+1}=\operatorname{ch}a$, $|z|<\infty$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}z^n$, $|z|<\frac{1}{2}$; 13) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n$, $|z|<1$; 14) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^{2n+1}$, $|z|<1$; 15) $2\sqrt{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n z^n\left(\frac{1}{\left(1-\sqrt{3}\right)^{n+1}}-\frac{1}{\left(1+\sqrt{3}\right)^{n+1}}\right)$, $|z|<\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; 17) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n$, $|z|<2$; 18) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}$, $|z-a|<|1-a|$; 19) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(4z)^{2n}}{(2n)!}$, $|z|<\infty$.

§ 25.3

8. 1) $z=\pm 1$, $z=\pm 2, m=1$; 2) $z=3$, $m=1; z=-2, m=2$; 3) $z=\pm i, m=2$; 4) $\frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}, m=1$; 5) $\frac{(2k+1)^2}{4}$, $k\in\mathbf{N}_0, m=1$; 6) $z=2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, $m=2$; 7) $i(2k+1)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, $m=2$; 8) $\frac{\pi k i}{2}$, $k\in\mathbf{Z}, m=1$; 9) $2\pi k i$, $k\in\mathbf{Z}$, $m=1$; 11) $\pi(2k+1)i, m=1$; 12) $\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right)i$, $m=1$; 13) $\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right)i, m=2$; 14) $\pi\left(-\frac{1}{4}+k\right)i$, $m=1$; 16) 0, $m=3; \pi k$, $m=2$.

§ 25.4

5. 1) $\frac{1}{4}z^4+\frac{3}{2}z^2-z+C$; 2) $\frac{1}{a}\exp az+C$; 3) $-\frac{1}{2}\cos az+C$; 4) $\frac{1}{a}\sin az+C$; 5) $\frac{1}{a}\operatorname{ch}az+$ $+C$; 6) $\frac{1}{a}\operatorname{sh}az+C$; 7) $\frac{z}{2}-\frac{1}{4}\sin 2z+C$; 9) $\ln z+C$; 10) не має; 11) $\frac{1}{2}\ln\left(1+z^2\right)+C$; 12) $\frac{1}{a}\left(z-\frac{1}{a}\right)\exp az+C$; 13) $\left(z^2+2\right)(\operatorname{ch}z-1)-2z(\operatorname{sh}z-z)-z^2+C$; 14) $\frac{z^2}{4}-\frac{z}{4}\sin 2z-\frac{\cos 2z}{8}+$ $+C$; 15) $\frac{a\cos bz+b\sin bz}{a^2+b^2}\exp az+C$; 16) $\frac{1}{8}\exp 2z(2-\sin 2z-\cos 2z)+C$; 17) $\left(\frac{z^2}{a}-\frac{2}{a^3}\right)\sin az+$ $+\frac{2z}{a^2}\cos az+C$; 18) не має; **7.** 1) 1; 2) $2(i-1)$; 3) 0; 4) $\frac{i}{2}\left(1+\frac{1}{2}\operatorname{sh}2\right)$; 5) $\frac{1}{2}((\cos 1+\sin 1)\mathrm{e}-$ $-1)$; 7) $\mathrm{e}^{-1}-1$; 8) $\frac{1}{4}(\exp(2+2i)+1+2i)$; 9) $\left(2+\frac{\pi^2}{4}\right)\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}-\pi\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}-2$; 10) $-\pi(\pi+2i)$; 11) $\frac{1+\pi i}{2}$;

12) $\frac{\pi^3 i}{12}$; 13) $\frac{i}{2}\ln 3$; 14) $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$. **10.** 1) $-\ln(1-z)$, $|z|<1$; 2) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$, $|z|<1$; 3) $1+(1-z)\frac{\ln(1-z)}{z}$, $0<|z|<1$; 0, $z=0$; 4) $\frac{1}{2}((1-z)(\ln(1-z)-1)-(1+z)(\ln(1+z)-1))$, $|z|<1$; 5) $(z^2-1)\ln(1+z)-\frac{1}{2}(z-1)^2$, $|z|<1$; 6) $-\frac{\ln(4-z)}{z-3}$, $0<|z-3|<1$; 0, $z=3$.

§ 26.1

3. 1) $\varnothing$; 3) $|z-2|>2$; 4) $|z-1|>5$; 5) $0<|a|<|z|<1$, $\varnothing$, якщо $|a|>1$ або $a=0$; 6) $e^{-a}<|z-z_0|<e^a$; 8) $\varnothing$; 9) $|z|>3$; 10) $1<|z|<3$. **5.** 1) $z_0=0$, $|z|>0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}}$; 2) $z_0=1$, $|z-1|>0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-1)^n}$; 3) $z_0=i$, $|z-i|>2$, $\frac{1}{2(z-i)}\left(1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-2i)^n}{(z-i)^n}\right)$; $z_0=-i$, $|z+i|<2$, $\frac{1}{2(z+i)}-\frac{1}{2i}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{(2i)^n}$; $z_0=-i$, $|z+i|>2$, $\frac{1}{2(z+i)}\left(1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2i)^n}{(z+i)^n}\right)$; 5) $z_0=-1$, $|z+1|>0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{1}{(z+1)^{2n-3}}-\frac{3}{(z+1)^{2n-2}}+\frac{3}{(z+1)^{2n-1}}-\frac{1}{(z+1)^{2n}}\right)$; 6) $z_0=0$, $0<|z|<1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^{n-1}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{z}+2+\frac{5}{2}z+\ldots$, $z_0=0$, $|z|>1$, $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\ldots-\frac{e}{z^2}-\frac{e-1}{z}-(e-2)-\left(e-\sum\limits_{k=0}^{2}\frac{1}{k!}\right)z-\left(e-\sum\limits_{k=0}^{3}\frac{1}{k!}\right)z^2-\ldots$, $z_0=1$; $|z-1|<1$, $-e\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-1}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}=-e\left(\frac{1}{z-1}+\frac{z-1}{2}-\frac{(z-1)^2}{3}+\ldots\right)$, $z_0=1$, $|z-1|>1$, $-e\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+2}}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}=-e\left(\ldots+\frac{e}{(z-1)^2}-\frac{e-1}{z-1}+(e-2)-\left(e-\sum\limits_{k=0}^{2}\frac{1}{k!}\right)(z-1)+\left(e-\sum\limits_{k=0}^{3}\frac{1}{k!}\right)(z-1)^2-\ldots\right)$; 7) немає ізольованих особливих точок; 8) $z_0=0$, $|z|>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n+2}}$. **8.** 1) $z=-1$ — простий полюс; 2) $z=-i$ — простий полюс; 3) $z=\pm i$ — прості полюси; 4) $z=0$ і $z=1$ — прості полюси; 5) $z=-1$ — полюс другого порядку; 7) $z=1$ — полюс 3-го порядку; 8) $z=0$ і $z=1$ — прості полюси, $z=-2$ — полюс другого порядку; 9) $z=0$ — усувна особлива точка; 10) $z_k=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, — прості полюси; 11) $z=0$ — полюс 3-го порядку, $z_k=\pi k-1$, $k\in\mathbf{Z}$, — прості полюси; 12) $z=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$ — прості полюси, $z=0$ — усувна особлива точка; 14) $z_k=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$, — полюси 3-го порядку; 15) $z=0$ — усувна особлива точка; 16) $z=0$ — усувна особлива точка; 17) $z=0$ — полюс 3-го порядку; 18) $z=0$ — усувна особлива точка, $z=\pm i$ — полюси 2-го порядку; 19) $z=-i$ — істотно особлива точка;

21) $z=0$ і $z=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, — прості полюси; 22) $z=2i$ — істотно особлива точка; 23) $z=0$ — усувна особлива точка; 24) $z=0$ — істотно особлива точка; $z=\pm i$ — прості полюси; 25) $z=\pm 2$ — прості полюси; 26) немає ізольованих особливих точок; 27) $z=0$ — істотно особлива точка; 28) $z=-1$ — істотно особлива точка; 29) $z=1$ — усувна особлива точка, а $z=-1$ — істотно особлива точка; 30) $z=0$ — істотно особлива точка; 31) $z_k=\frac{1}{k}$, $k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$, — істотно особливі точки; 33) $z_k=\frac{1}{\pi k}$, $k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$, — прості полюси; 34) $z_k=\ln 2+2\pi ki$, $k\in\mathbf{Z}$, — прості полюси.

§ 26.2

3. 1), 2), 3), 5) Усувна особлива точка; 4) простий полюс; 7), 8) істотно особлива точка; 9), 11), 12), 14) не є ізольованою особливою точкою; 15) істотно особлива; 17), 18) усувна; 19) простий полюс; 20), 21) істотно особлива; 22) полюс 2-го порядку; 23) істотно особлива; 24) усувна; 25), 26) усувна; 27) полюс 2-го порядку; 28) усувна. **9.** 1) $f(z)=$ $=\frac{1}{2(z-1)}-\frac{1}{2(z+1)}$; 2) $f(z)=\frac{1}{2(z-i)}+\frac{1}{2(z+i)}$; 3) $f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}$; 4) $f(z)=\frac{2i}{z}-\frac{i}{(z+i)^2}+\frac{i}{(z-i)^2}$; 5) $f(z)=\frac{1}{z}-\frac{2}{3(z+1)}-\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z+3}$.

§ 26.3

9. 1) $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=1$, $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z)=-1$; 2) $\operatorname*{res}_{z=\pm 2i} f(z)=\pm\frac{1}{4i}$; 3) $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z)=1$, $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=-1$; 4) $\operatorname*{res}_{z=\pm i} f(z)=\frac{1}{2}\operatorname{sh}1$; 5) $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\pi$, $\operatorname*{res}_{z=1} f(z)=0$; 6) $\operatorname*{res}_{z=1} f(z)=-\frac{4}{45}\sin 2$; 7) $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{2}$, $\operatorname*{res}_{z=1} f(z)=3\cos 1+\sin 1-3$; 9) $\operatorname*{res}_{z=1} f(z)=1$; 10) $\operatorname*{res}_{z=1} f(z)=-\sin 1$, $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\sin 1$; 11) $\operatorname*{res}_{z=1} f(z)=-\sin 1$; 12) $\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}+\pi k} f(z)=-1$; 14) $\operatorname*{res}_{z=i\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)} f(z)=1$; 15) $\operatorname*{res}_{z=\frac{i\pi k}{3}} f(z)=\frac{1}{3}$; 17) $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=0$, $\operatorname*{res}_{z=\pi k} f(z)=\frac{1}{\pi k}$, $k\neq 0$; 18) $\operatorname*{res}_{z=\pi i+2\pi k} f(z)=-1$; 19) $\operatorname*{res}_{z=k} f(z)=\frac{(-1)^k}{\pi}$. $k\in\mathbf{Z}$; 20) $\operatorname*{res}_{z=1} f(z)=\frac{3}{2}$; 21) $\operatorname*{res}_{z=1} f(z)=\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$; 22) $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\frac{\pi^3}{3!}$; 23) $\operatorname*{res}_{z=2} f(z)=$ $=\frac{1}{64}$, $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=-\frac{1}{64}$; 24) $\operatorname*{res}_{z=-2} f(z)=\frac{257}{64}$, $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=-\frac{1}{64}$; 26) $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=0$; 27) $\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\frac{1+a^{2n}}{a^n}$, якщо $a^{2n}+1\neq 0$, і $\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=0$, якщо $a^{2n}+1=0$, $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=-a^{-n}$.
10. 1) 0; 3) 0; 4) $-12\pi i$; 5) $\frac{\pi i}{12}(\sin 1-4\cos 1)$; 6) $\pi i(2-\cos 1)$; 7) 0; 8) $-\pi i\sin 1$; 9) $-4\pi i$; 10) $6\pi i$; 11) $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$; 12) 0, якщо $1\notin\overline{D}^*$, і $2\pi i$, якщо $1\in D^*$; 13) 0, якщо $-1\notin\overline{D}^*$, і $-2\pi i\cos 1$, якщо $-1\in D^*$. **14.** 1) π; 3) $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}$; 4) $\frac{4\pi}{3}$; 5) $\frac{\pi}{4}$; 6) $\frac{(2n)!\pi}{(n!)^2\cdot 2^{2n}}$; 7) $\frac{\pi(a+2b)}{2ab^3(a+b)^2}$; 8) 0; 9) 0; 10) $\pi a^{-n}\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}$, $n\geq 2$. **16.** 1) Один; 2) три; 3) чотири; 4) три; 5) один; 7) п'ять.

§ 27.1

3. 1) Так; 3) так; 5) ні; 7) ні. **5.** 1) $z = \pm 1$ — особливі точки, $\{z : |z| = 1, z \neq \pm 1\}$ — множина правильних точок; 3) $\{z : |z| = 1\}$ — множина особливих точок; 5) $z = \frac{1}{a}$ — особлива точка, $\left\{z : |z| = \frac{1}{|a|}\right\}$ — множина правильних точок.

§ 27.2

2. 1) Так, $G = \mathbf{C}$; 3) так, $G = \mathbf{C} \setminus \{0\}$; 5) так, $G = \mathbf{C} \setminus \{z = x + i0 : \ x \leq 0\}$; 7) так, $G = \mathbf{C}$; 9) так, $G = \mathbf{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n : \ n \in \mathbf{Z}\right\}$; 11) $G = \mathbf{C}$; 13) так, $G = \mathbf{C} \setminus \left\{i\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) : \ n \in \mathbf{Z}\right\}$; 15) так, $G = \mathbf{C} \setminus \left\{z : \ z^{2n} = -1\right\}$; 17) так, $G = \mathbf{C} \setminus \left\{z = \frac{\pi}{2} + \pi n : \ n \in \mathbf{Z}\right\}$; 21) так, $G = \mathbf{C} \setminus \{z = x + i0 : \ x \leq 0\}$.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Дюженкова Любов Іванівна
Колесник Тамара Всеволодівна
Лященко Микола Якович
Михалін Геннадій Олександрович
Шкіль Микола Іванович

Математичний АНАЛІЗ у задачах і прикладах

У двох частинах

Частина 2

Оправа і титул художника *В. С. Жиборовського*
Художній редактор *Г. С. Муратова*
Технічний редактор *А. І. Омоховська*
Коректори: *Л. М. Байбородіна, Л. О. Зеленько*
Комп'ютерна верстка *С. В. Дьогтєвої*

Свідоцтво про внесення до Держ. реєстру від 04.12.2000
серія ДК № 268

Підп. до друку 03.02.2003. Формат 60 × 84/16. Папір офс. № 1.
Гарнітура Times. Офс. друк. Ум. друк. арк. 27,43.
Обл.-вид. арк. 35,31. Тираж 3000 пр. Вид. № 10098.
Зам. № 3-78

Видавництво «Вища школа», 01054, Київ-54, вул. Гоголівська, 7г

Надруковано з плівок, виготовлених у видавництві
«Вища школа», у ВАТ «Білоцерківська книжкова фабрика»,
09117, Біла Церква, вул. Л. Курбаса, 4