

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

С. М. Єжов, М. А. Разумова

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту
як навчальний посібник
для студентів фізичних спеціальностей університетів

УДК 517.53(075.8)
ББК 22.161.5

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. П. І. Голод,
д-р фіз.-мат. наук, проф. І. С. Доценко,
д-р фіз.-мат. наук, проф. І. О. Шевчук

*Рекомендовано до друку вченою радою
фізичного факультету
(протокол № 12 від 29 червня 2011 року)*

Єжов, С. М.

Є41 Теорія функцій комплексної змінної: навч. посіб. для студентів фізичних спеціальностей університетів / С. М. Єжов, М. А. Разумова. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2012. – 191 с.

ISBN 978-966-439-582-0

Навчальний посібник підготовлений викладачами кафедри теоретичної фізики фізичного факультету Київського національного університету ім. Т.Шевченка, відображає багаторічний досвід викладання на фізичному факультеті курсу "Теорія функцій комплексної змінної" фізиками-теоретиками.

При поданні матеріалу була врахована його роль при вивченні наступних курсів теоретичної фізики та спецкурсів спеціалізації.

Для студентів, аспірантів і викладачів фізичних та інженерно-фізичних спеціальностей.

УДК 517.53(075.8)
ББК 22.161.5

Гриф надано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
(Лист №1/11-1614 від 06.02.12)

ISBN 978-966-439-582-0

© Єжов С.М., Разумова М. А., 2012
© Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
ВПЦ "Київський університет", 2012

Вступ

Історична довідка

У математиці існує два типи операцій (дій): прями та обернені. Простішим, звичайно, є виконання прямих операцій. Із історії математики відомо, що введення обернених операцій розширювало класи відомих чисел і навіть приводило до нових класів функцій. Наприклад, операція віднімання над натуральними числами, яка є оберненою до дії додавання, привела до введення від'ємних чисел і нуля. Обернена до операції множення операція ділення привела до появи дробових чисел (класу раціональних чисел). Операція добування кореня (обернена до операції піднесення до степеня) зумовила введення ірраціональних чисел.

Комплексні числа виникли із внутрішніх потреб самої математики, конкретніше, – із практики та теорії розв'язувань алгебраїчних рівнянь, задач, які зумовлюють виконання операції добування кореня над дійсними числами. Із комплексними числами вперше математики зустрілися, намагаючись отримати всі розв'язки квадратних рівнянь, у тому числі й такі, що не належали множині дійсних чисел. До XVI ст. математики, не знаходячи прийняттого тлумачення для таких (не дійсних) коренів, що виникали при розв'язуванні квадратних рівнянь, не брали до уваги та відкидали їх, вважаючи хибними, несправжніми (навіть від'ємні числа не враховували).

Відомо, що історія розв'язку квадратних рівнянь бере свій початок ще із Древнього Вавилону. Вавилонці вміли розв'язувати окремі види квадратних рівнянь 2000 років до н.е., щоправда, вони знаходили тільки додатні розв'язки й не володіли загальними методами розв'язання. Індус Брахмагупта (VII ст.) виклав загальне правило розв'язування квадратного рівняння. Аль-Хорезмі (IX ст.) дав класифікацію лінійних і квадратних рівнянь і навів способи їх розв'язання, щоправда, і він (як, утім, і всі математики аж до XVII ст.) не брав до уваги нульові та від'ємні розв'язки. Розв'язки квадратних рівнянь у загальному вигляді навів Франсуа Вієт (XVI ст.), проте і він визнавав тільки додатні розв'язки. Тільки у XVI ст. італійські математики Нікколо Тарталья, Джероламо Кардано, Рафаель

Бомбеллі враховують, крім додатних, від'ємні розв'язки квадратних рівнянь.

Лише у XVII ст., завдяки роботам Альбера Жирара, Рене Декарта, Ісаака Ньютона та інших математиків, розв'язок квадратних рівнянь набуває сучасного вигляду. Розв'язуваність рівнянь третього й четвертого ступенів була встановлена італійськими математиками Н. Тарталья, Д. Кардано, причому розв'язки рівнянь третього й четвертого ступенів можуть бути знайдені за допомогою формул, подібних до формул коренів квадратних рівнянь, але складніших.

Наполегливі пошуки протягом майже двох століть подібних формул для рівнянь п'ятого та більш високих ступенів не увінчалися успіхом. Лише в 20-х рр. XIX ст. молодий норвезький математик Нільс Абель довів неможливість запису розв'язку загального рівняння п'ятого ступеня в радикалах.

Д. Кардано, який займався розв'язуванням рівнянь третього й четвертого ступенів, був одним із перших математиків, хто формально оперував комплексними числами, хоча їх зміст багато в чому залишався для нього неясним. Зміст комплексних чисел роз'яснив інший італійський математик – Рафаель Бомбеллі. У книзі "Алгебра" (1572) він уперше виклав правила дій над комплексними числами в сучасній формі.

Велику увагу комплексним числам приділяв А. Жирар, який уперше сформулював основну теорему алгебри, згодом доведену Карлом Фрідріхом Гауссом. Разом із тим, аж до XVIII ст., комплексні числа вважали "уявними" й непотрібними.

Цікаво зазначити, що навіть такий видатний математик, як Р. Декарт, який ототожнював дійсні числа з відрізками числової прямої, вважав, що для комплексних чисел не може бути жодного реального тлумачення, і вони назавжди залишаться уявними. Аналогічних поглядів дотримувалися Ісаак Ньютон і Готфрід Вільгельм Лейбніц. Довгий час комплексні числа зберігали містичне забарвлення.

Лейбніц (1702): *"Уявні числа – це прекрасне й чудове сховище божественного духу, майже поєднання буття та небуття"*.

Пересторога, бажання відгородитися відчувається й у назвах, які давали таким числам: уявні, неможливі.

У середині XVIII ст. Жан д'Аламбер та Леонард Ейлер представили комплексне число у вигляді $a + bi$. Каспар Вессель

(1797), Жан Робер Арган (1806), Джон Уоррен (1826) і Карл Фрідріх Гаусс (до 1831) незалежно прийшли до ідеї комплексної площини й дали геометричну інтерпретацію комплексних чисел.

Хоча за допомогою комплексних чисел удалося отримати багато важливих фактів, що належать до дійсних чисел, але на той час саме існування комплексних чисел багатьом здавалося сумнівним. Підозри відносно комплексних чисел можливо були пов'язані з тим, що комплексні числа видимим чином не виявляються у фізичному світі й тому здавалися плодом уяви математиків, яким знадобилися числа більш загального характеру, ніж відомі раніше.

Спочатку не було жодного підґрунтя очікувати, що фізичний світ має якесь відношення до комплексних чисел. Але час показав, що комплексні числа утворюють єдність із природою та відіграють фундаментальну роль не тільки для математики, але й для опису фізичного Всесвіту. Видатний фізик Роджер Пенроуз у книзі "Шлях до реальності або закони, що керують Всесвітом" зазначає, що все виглядає так, ніби і природа була теж під великим враженням від загального та послідовного характеру системи комплексних чисел і доручила їм описувати тонкі процеси в найменших масштабах [12]: *"Насправді, прогрес можливий саме тому, що математичні поняття мають "власний імпульс розвитку", причому складається враження, що цей імпульс народжується більшою мірою всередині самої математики. Математичні ідеї розвиваються, і різні задачі виникають ніби природнім чином... При цьому розвиток математики може відхилитися від початкової спроби описати фізичну реальність. І, однак, існує багато прикладів, коли прагнення до математичної узгодженості та витонченості приводило до математичних структур і понять, які більш глибоко та широко відображали фізичну реальність, ніж вихідні структури."*

Розділ 1

Основні поняття

1.1. Комплексні числа та дії над ними

Узагальнюючи множину дійсних чисел, вимагатимемо існування квадратного кореня із -1 , що називається уявною одиницею, і збереження звичайних правил арифметики дійсних чисел.

Комплексним числом називають вираз типу $x + iy$, де x та y – дійсні числа, i – уявна одиниця. Числа x та y називають, відповідно, дійсною та уявною частинами комплексного числа $x + iy$ та позначають символами

$$x = \operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(x + iy), \quad y = \operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(x + iy). \quad (1.1)$$

(Re і Im – початкові літери латинських слів *Realis*, *Imaginaris*).

Множину всіх комплексних чисел позначають символом \mathbb{C} .

Якщо $y=0$, то $x+i0$ вважають числом, що збігається із дійсним числом x ; якщо $x=0$, то $0+iy$ називають суто уявним числом.

Коли ми маємо справу з комплексними числами, то розглядаємо числа $x + iy$ не як пари двох дійсних чисел, а як деякий єдиний об'єкт сам по собі, який можна позначати однією літерою z . Можна показати, що всі правила алгебри для комплексних чисел виконуються.

Говоритимемо, що комплексні числа $x_1 + iy_1$ і $x_2 + iy_2$ є рівними,

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2, \quad (1.2)$$

тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Значимо, що означено рівність двох комплексних чисел, але для комплексних чисел не означено поняття більше або менше.

Якщо $x_2 = x_1$, а $y_2 = -y_1$, то комплексне число $x_2 + iy_2$ називають комплексно спряженим до $x_1 + iy_1$ і позначають символом $\overline{x_1 + iy_1}$ або $(x_1 + iy_1)^*$. Таким чином

$$\overline{x + iy} = (x + iy)^* = x - iy. \quad (1.3)$$

Визначимо елементарні операції над комплексними числами.

1. Додавання. Сумою $z_1 + z_2$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (1.4)$$

Із означення безпосередньо випливають закони додавання:

а) комутативний: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

б) асоціативний: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.

2. Віднімання. Додавання допускає обернену операцію: для довільних двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ можна знайти таке число z , що $z_2 + z = z_1$. Це число називають різницею чисел z_1 і z_2 і позначається символом $z_1 - z_2$. Очевидно, що

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (1.5)$$

3. Множення. Добутком $z_1 z_2$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (1.6)$$

Із означення випливають такі закони множення:

а) комутативний: $z_1 z_2 = z_2 z_1$;

б) асоціативний: $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$;

в) дистрибутивний (відносно додавання): $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

Якщо z_1 і z_2 — дійсні числа, то визначення добутку збігається з визначенням добутку двох дійсних чисел. Якщо ж $z_1 = z_2 = i$, то із означення добутку випливає, що

$$i^2 = -1. \quad (1.7)$$

Усі операції над комплексними числами можна здійснювати за звичайними правилами алгебри, ураховуючи, що $i^2 = -1$.

Добуток комплексного числа на комплексно спряжене до нього завжди є невід'ємним числом, оскільки

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0. \quad (1.8)$$

4. Ділення. Множення також допускає обернену операцію, якщо тільки заданий множник не дорівнює нулю. Нехай $z_2 \neq 0$, тоді можна знайти таке число z , що $z_2 z = z_1$; для цього, згідно з (1.6), необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{aligned} x_2 x - y_2 y &= x_1, \\ y_2 x + x_2 y &= y_1, \end{aligned} \quad (1.9)$$

яка при $z_2 \neq 0$ завжди має однозначний розв'язок, оскільки її визначник $x_2^2 + y_2^2 > 0$. Це число z називають часткою чисел z_1 і z_2 і позначають символом z_1/z_2 . Розв'язавши систему (1.9) або помноживши чисельник і знаменник частки на комплексно спряжене знаменника та розкривши дужки, дістанемо

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (1.10)$$

1.2. Область на комплексній площині

При вивченні властивостей комплексних чисел дуже зручною є їх геометрична інтерпретація. Оскільки комплексне число визначається як упорядкована пара дійсних чисел, то природною геометричною інтерпретацією є зображення комплексного числа $z = x + iy$ точкою площини з декартовими координатами x та y . Числу $z = 0$ ставиться у відповідність точка O – початок координат на цій площині. Таку площину надалі називатимемо комплексною площиною (яку також позначають символом \mathbb{C}), вісь абсцис – дійсною, а вісь ординат – уявною віссю комплексної площини. При цьому встановлюється взаємно однозначна відповідність між комплексним числом $z = x + iy$ і точкою на площині з координатами x, y , а також радіус-вектором на цій площині, проекції якого на осі абсцис та ординат, відповідно, дорівнюють x та y (початок радіус-вектора міститься в точці $(0,0)$). Додавання (віднімання) комплексних чисел геометрично здійснюється за правилом додавання (віднімання) векторів.

Для визначення положення точки на площині можна користуватися полярними координатами (ρ, φ) , де ρ – відстань від точки до початку координат (модуль комплексного числа, $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$), а φ – кут, що утворює радіус-вектор даної точки з додатним напрямком осі абсцис (його ще називають аргументом комплексного числа, $\varphi = \text{Arg } z$) (рис. 1.1).

Додатним напрямком зміни кута φ вважається напрямок проти годинникової стрілки ($-\infty < \varphi < \infty$). У той час, як модуль комплексного числа визначається однозначно, аргумент визначено лише для $z \neq 0$ і лише з точністю до довільного адитивного доданка, кратного 2π :

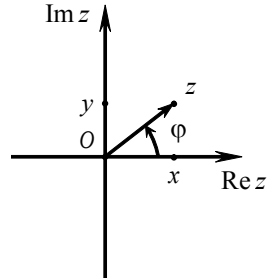


Рис. 1.1

$$\varphi = \text{Arg } z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} + 2k\pi, & \text{якщо } x > 0, \\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, & \text{якщо } x = 0, y > 0, \\ \arctg \frac{y}{x} + (2k+1)\pi, & \text{якщо } x < 0, \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, & \text{якщо } x = 0, y < 0, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}; \quad (1.11)$$

тут $-\frac{\pi}{2} < \arctg \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$, k – довільне ціле число, \mathbb{Z} – множина цілих чисел. Однозначно можна визначити головне значення аргументу комплексного числа $\arg z$, тобто те значення серед $\text{Arg } z$, яке лежить в інтервалі $(-\pi, \pi]$ (на рис. 1.1 $\arg z$ – це кут φ , який відраховується від додатного напрямку осі Ox до радіус-вектора точки z):

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi \operatorname{sgn} y, & x < 0; \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y, & x = 0. \end{cases}$$

Користуючись зв'язком декартових і полярних координат, можна отримати так звану тригонометричну форму запису комплексного числа

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.12)$$

Існує ще одне досить зручне представлення комплексних чисел у полярних координатах – експоненціальне (показникове)

$$z = \rho e^{i\varphi}. \quad (1.13)$$

Воно логічно виникає після узагальнення показникової функції на випадок комплексної змінної (див. п. 1.6, функція e^z). Можна скористатися у тригонометричному представленні $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ розвиненнями функцій дійсного аргументу $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ у ряди Маклорена, радіуси збіжності яких дорівнюють нескінченності, та об'єднати ці розвинення під знаком однієї суми

$$\begin{aligned} \cos \varphi + i \sin \varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} \varphi^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} \varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \varphi^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} = \exp(i\varphi). \end{aligned}$$

Тут ми скористалися представленням $-1 = i^2$ та розвиненням Маклорена для експоненціальної функції дійсного аргументу, припускаючи, що його можна узагальнити на випадок комплексного аргументу. Пізніше, при розгляді рядів аналітичних функцій, буде доведено законність використаного припущення.

При виконанні операцій добутку та ділення комплексних чисел зручно користуватися саме показниковою формою представлення. Дійсно, для добутку маємо

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned} \quad (1.14)$$

При множенні двох комплексних чисел їх модулі перемножуються, а аргументи додаються. І аналогічно для ділення

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (1.15)$$

Показникова форма представлення також є зручною при виконанні алгебраїчних операцій піднесення до цілого додатного степеня та добування кореня із комплексного числа. Наприклад, якщо $z = z_1^n$, то $\rho = \rho_1^n$ і $\varphi = n\varphi_1$.

Комплексне число $z_1 = \sqrt[n]{z}$ називають коренем степеня n із комплексного числа z , якщо $z = z_1^n$. Із цього означення випливає, що $\rho_1 = \sqrt[n]{\rho}$ і $\varphi_1 = \frac{\text{Arg } z}{n}$. Оскільки аргумент комплексного числа z визначається неоднозначно, то насправді існує множина значень аргументу числа z_1

$$\varphi_k = \frac{\text{arg } z}{n} + \frac{2\pi k}{n},$$

де k – ціле число, тобто існують різні комплексні числа, які при піднесенні до n -го степеня дорівнюють одному й тому самому комплексному числу z . Модулі цих комплексних чисел однакові й дорівнюють $\sqrt[n]{\rho}$, аргументи ж відрізняються на число, кратне $2\pi/n$. Кількість різних значень кореня степеня n із комплексного числа z дорівнює n . Точки на комплексній площині, що відповідають різним значенням кореня, розташовані у вершинах правильного багатокутника, що вписаний у коло радіуса $\sqrt[n]{\rho}$ з центром у точці $z = 0$. Відповідні значення φ_k отримують при k , що набувають значень $k = 0, 1, \dots, n-1$. Таким чином

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\text{arg } z}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.16)$$

Зазначимо, що сума різних коренів n порядку одиниці ($\sqrt[n]{1}$) дорівнює нулю

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n} k} = \frac{1 - e^{\frac{2\pi i}{n} n}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}} = 0.$$

Приклад 1. Знайти всі значення \sqrt{i} .

Запишемо у показниковій формі комплексне число $z = i = e^{i((\pi/2)+2\pi k)}$ і дістанемо для квадратних коренів із цього числа вирази

$$z_k = \sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{2\pi k}{2}}, \quad k = 0, 1 \text{ (рис. 1.2).}$$

Звідси

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

$$z_1 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = -z_0.$$

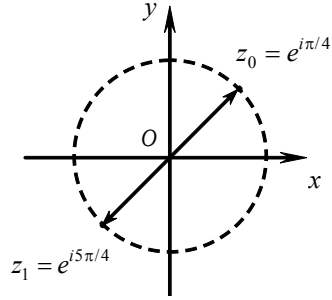


Рис. 1.2

Приклад 2. Знайти всі значення $\sqrt[p]{1}$, де p – ціле додатне число.

Скористаємось представленням $1 = e^{i(0+2\pi k)}$. Тоді, як і в попередньому прикладі, за (1.16) дістанемо

$$z_k = \sqrt[p]{1} = e^{i\frac{2\pi k}{p}}, \quad k = 0, 1, \dots, p-1.$$

Звідси $z_0 = e^{i0} = 1,$

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{p}} = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p},$$

...

$$z_{p-1} = e^{i\frac{2\pi(p-1)}{p}} = e^{-i\frac{2\pi}{p}} = \cos \frac{2\pi}{p} - i \sin \frac{2\pi}{p}.$$

Тобто корені відповідають вершинам правильного p -кутника, що вписаний в коло одиничного радіуса з центром у точці $z = 0$.

Приклад 3. Знайти всі значення $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$.

Оскільки $z = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3} + i2\pi k}$, то для значень квадратного

кореня отримаємо вираз $z_k = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6} + i\frac{2\pi k}{2}}, \quad k = 0, 1$. Звідси

$$z_0 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}},$$

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}} = -z_0. \triangleright$$

1.3. Геометричні поняття

ε -околом точки a називають відкритий круг радіуса ε з центром у точці a , тобто сукупність точок z , які задовольняють нерівність

$$|z - a| < \varepsilon.$$

Точка z_0 називається внутрішньою точкою множини E , якщо існує ε -окіл точки z_0 , всі точки якого належать множині E . Наприклад, точка z_0 множини $|z| \leq 1$ є внутрішньою, якщо $|z_0| < 1$; точка $z_0 = 1$ не є внутрішньою точкою даної множини.

Множину E називають областю, якщо вона має наступні властивості: 1) кожна точка множини E є внутрішньою точкою цієї множини (властивість відкритості); 2) дві довільні точки множини E можна сполучити ламаною, яка повністю належить E (властивість зв'язності).

Наприклад, множина точок $|z| < 1$ утворює область. Множина точок $|z| \leq 1$ не утворює відкриту область, оскільки не всі її точки є внутрішніми.

Точка z_1 називається зовнішньою точкою області G , якщо існує ε -окіл точки z_1 , усі точки якого **не належать** множині G .

Точка z_2 називається межевою точкою області G , якщо у довільному ε -околі точки z_2 містяться як точки, що належать області G , так і точки, що не належать області G . Сукупність усіх межевих точок утворює межу області G , яку звичайно позначатимемо Γ . Припускатимемо, що межа області складається із скінченної кількості замкнених ліній, розрізів і точок. Лінії і розрізи вважатимемо кусково-гладкими, тобто такими, що складаються зі скінченної кількості гладких дуг (дуг, уздовж яких дотичний вектор змінюється неперервно). В області G кількість зв'язних частин, на які розбивається її межа, називають порядком зв'язності цієї області. Якщо межа області складається із однієї зв'язної кривої, то область називають однозв'язною. Якщо ж межа області містить більше, ніж одну зв'язну частину, область називають багатозв'язною.

Множину, утворену внаслідок приєднання до області G усіх її межевих точок, називають замкненою областю й позначають \bar{G} .

Додатнім напрямком обходу межі області вважається такий, за якого область залишається ліворуч. При цьому деякі точки проходяться один раз (прості точки), інші – кілька (кратні точки). Неперервну криву, що не містить кратних точок, називають простою або жордановою кривою.

Нескінченно віддалену точку вводять наочно за допомогою так званої стереографічної проекції комплексної площини на сферу, що торкається площини в її початку координат своїм південним полюсом. Будь-яка точка площини z проектується в точку сфери, яка є точкою перетину сфери відрізком, що сполучає точку z і північний полюс сфери. Така відповідність між комплексною площиною та проколотою в північному полюсі сферою є взаємно однозначною.

Щоб поширити відповідність на всю сферу, на площині вводять умовну нескінченність ∞ , що якраз відповідає північному полюсу сфери. Комплексну площину, доповнену нескінченністю, називають розширеною комплексною площиною.

Таким чином, кожній точці розширеної площини відповідає точка на сфері, і навпаки. Цю відповідність називають стереографічною проекцією, а побудовану сферу – сферою Рімана.

Говорять, що послідовність комплексних чисел $\{z_n\}$ прямує до нескінченності, якщо $\forall M > 0 \exists N$ таке, що $\forall n > N (n \in \mathbb{N}) |z_n| > M$. Ця термінологія оправдовується тим, що стереографічні проекції послідовності $\{z_n\}$ прямують до північного полюсу сфери, який є стереографічною проекцією нескінченності.

Обхід нескінченності на комплексній площині здійснюється за колом великого радіуса $R \gg 1$ із центром в точці $z = 0$ за годинниковою стрілкою (нескінченно віддалена область при обході залишається ліворуч).

1.4. Функції комплексної змінної

Надалі в основному розглядатимемо такі множини, які утворюють область або замкнену область на комплексній площині.

Означення. В області G комплексної площини задано функцію

$$w = f(z),$$

якщо вказано закон, за яким кожній точці z області G ставиться у відповідність точка або сукупність точок w області D . У першому випадку функцію називають **однозначною**, в іншому – **багатозначною**. Множину G називають **множиною визначення** функції $f(z)$, а сукупність усіх значень w , які функція $f(z)$ приймає на D , – **множиною значень** функції $f(z)$.

Покладемо $z = x + iy$, $w = u + iv$. Означення $w = f(z)$ рівнозначне означенню двох дійсних функцій від двох дійсних змінних

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Домовимося відкладати значення z на одній комплексній площині, а значення w – на іншій. Тоді функцію комплексної змінної можна геометрично представляти як деяке відображення множини G площини z на множину D площини w .

Нехай функція $w = f(z)$ точкам області G комплексної площини z ставить у відповідність точки області D комплексної площини w . Тим самим установлюється й обернена відповідність – точкам області D комплексної площини w ставляться у відповідність точки z області G . Цю обернену відповідність задає функція $z = f^{-1}(w)$, яку називають оберненою по відношенню до $w = f(z)$.

Коли обернена функція

$$z = \varphi(w) \tag{1.17}$$

є однозначною в області D , то

$$z = \varphi[f(z)].$$

Функція $f(z)$ називається **однолистою** функцією в області G , якщо в різних точках z цієї області вона набуває різних значень.

Із цього означення випливає, що однолиста функція є оберненою до однозначної функції і здійснює взаємно однозначне відображення.

1.5. Неперервні функції

Нехай функція $f(z)$ визначена на деякій множині E . Розглянемо на цій множині різні послідовності точок $\{z_n\}$, які

збігаються до деякої точки z_0 ($z_n \neq z_0$), і відповідні до них послідовності значень функції $\{f(z_n)\}$. Якщо незалежно від вибору послідовності $\{z_n\}$ існує єдина границя $\lim_{z_n \rightarrow z_0} f(z_n) = w_0$,

то ця границя називається граничним значенням, або **границею**, функції $f(z)$ у точці z_0 , що можна записати у вигляді

$$\lim_{z_n \rightarrow z_0} f(z_n) = w_0. \quad (1.18)$$

Означення. Функція $f(z)$, задана на множині E , називається **неперервною** у точці $z_0 \in E$, якщо граничне значення цієї функції у точці z_0 існує, є обмеженим і збігається із значенням $f(z_0)$ функції $f(z)$ у точці z_0 , тобто $\lim_{z_n \rightarrow z_0} f(z_n) = f(z_0)$.

Означення. Точка z_0 називається **ізолюваною точкою** множини E , якщо існує такий ε -окіл точки z_0 , де немає інших точок множини E .

Якщо точка z_0 є ізолюваною точкою множини E , то функція $f(z)$, за означенням, вважається неперервною в точці z_0 .

Умову неперервності функції можна сформулювати таким чином. Функція $f(z)$ неперервна в точці z_0 , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що для всіх точок $z \in E$, які задовольняють нерівність $|z - z_0| < \delta$, має місце нерівність

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Із неперервності функції комплексної змінної $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ випливає неперервність її дійсної $u(x, y)$ та уявної $v(x, y)$ частин за сукупністю змінних x, y .

Приклад 4. Розглянемо лінійну функцію

$$f(z) = w = az + b, \quad (1.19)$$

де a та b – деякі комплексні сталі.

Вважатимемо $a \neq 0$. Функція (1.19) визначена для всіх значень незалежної змінної z . Множиною її значень є вся комплексна площина w . Кожному значенню z відповідає тільки одне значення w , тобто $f(z)$ є однозначною функцією z . Очевидно, що обернена функція

$$\varphi(w) = z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a} = a_1w + b_1$$

також є однозначною. Тому функція $f(z)$ є однолистою функцією z на повній комплексній площині та встановлює взаємно однозначну відповідність між площинами z та w .

Для того, щоб з'ясувати геометричний зміст такої відповідності, розглянемо допоміжну функцію $\zeta = az$. Маємо

$$\begin{aligned}\zeta &= |a| \cdot |z| \cdot \{\cos(\arg a + \arg z) + i \sin(\arg a + \arg z)\} = \\ &= |\zeta| \{\cos \arg \zeta + i \sin \arg \zeta\}.\end{aligned}$$

Звідси випливає: $|\zeta| = |a| \cdot |z|$, $\arg \zeta = \arg a + \arg z$. Тобто функція $\zeta = az$ будь-якому комплексному числу z ставить у відповідність комплексне число ζ , модуль якого в $|a|$ разів відрізняється від модуля z , а аргумент можна отримати із аргументу z додаванням сталого доданка – аргументу комплексного числа a . Геометричний зміст цього перетворення є очевидним: розтяг (або стиснення, якщо $|a| < 1$) площини z в $|a|$ разів і поворот цієї площини як цілого навколо точки $z = 0$ на кут $\arg a$.

Повертаючись до (1.19), яку тепер можна записати у вигляді $w = \zeta + b$, бачимо, що геометричний зміст останнього перетворення полягає у зсуві площини z на вектор \mathbf{b} , що ставиться у відповідність комплексному числу b .

Таким чином, лінійна функція перетворює комплексну площину z на комплексну площину w шляхом розтягу (стиснення для $|a| < 1$) подібності, повороту та зсуву.

Приклад 5. Розглянемо функцію

$$w = f(z) = 1/z. \quad (1.20)$$

Ця функція визначена на всій комплексній площині, крім точки $z = 0$, в околі якої функція прямує до нескінченності, та неперервна всюди в області визначення. Нескінченність для такої функції є нулем першого порядку (значення функції прямує до нуля, якщо її аргумент прямує до нескінченності, причому неважливо в якому напрямку). Функція (1.20) є однозначною та однолистою, яка відображає комплексну площину z з виколотим початком координат на повну площину w з виколотим початком координат. Для геометричної

інтерпретації цієї функції скористаємось показниковою формою представлення комплексних чисел

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad w = r e^{i\psi} = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}.$$

Ці рівності означають, що $\arg w = -\arg z$, $|w| = \frac{1}{|z|}$. Отримані

співвідношення дозволяють розглядати відображення, що здійснює дана функція, як послідовність двох відображень:

$$\zeta = \zeta(z), \text{ де } |\zeta| = |z|, \quad \arg \zeta = -\arg z,$$

$$w = w(\zeta), \text{ де } |w| = \frac{1}{|\zeta|}, \quad \arg w = \arg \zeta.$$

Перше відображення має геометричний зміст віддзеркалення відносно дійсної осі, при якому точка z переходить у точку z^* , а друге – інверсії в одиничному колі, що переводить точку z^* у точку $w = 1/z$.

Приклад 6. Розглянемо функцію

$$w = f(z) = z^2. \quad (1.21)$$

Ця функція є однозначною функцією комплексної змінної z , що визначена на всій комплексній площині. Тут зручно представити комплексні числа в показниковій формі:

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad w = r e^{i\psi} = \rho^2 e^{i2\varphi}.$$

Із такого представлення легко бачити, що всі точки площини z , які лежать на промені, що складає кут φ із додатним напрямком дійсної осі, переходять в точки площини w , що лежать на промені, який складає кут 2φ із додатним напрямком дійсної осі.

Точкам z і $-z$, модулі яких однакові, а аргументи відрізняються на кут π , відповідає одне й те саме значення w . Таким чином, обернена функція виявляється багатозначною.

Розглянемо детальніше відображення, що здійснюється функцією $w = z^2$. Верхня півплощина z разом, наприклад, з додатною частиною дійсної осі, переходить у повну площину w . Для точок верхньої півплощини z , для яких $0 < \varphi < \pi$, різним значенням z відповідають різні значення w .

Означення. Область зміни незалежної змінної, різним значенням якої відповідають різні значення функції, називається **областю однолистості**.

У попередніх прикладах областю однолистості була вся область визначення функції. Тепер областю, в якій задано функцію $w = z^2$, є також вся комплексна площина z , але областю однолистості служить півплощина. Зазначимо, що межі області однолистості (промені $\varphi = 0$ і $\varphi = \pi$) переходять в одну й ту саму півпрямую – додатну частину дійсної осі площини w .

Відмітимо також, що функція $w = z^2$ створює відображення і нижньої півплощини z разом із від'ємною частиною дійсної осі на повну площину w . У результаті функція

$$z = \sqrt{w}, \quad (1.22)$$

визначена на всій площині w , уже не є однозначною – одній точці площини w відповідають дві різні точки площини z .

Розглянемо на площині w деяку замкнену криву C (рис. 1.3), що не має точок самоперетину. Зафіксуємо на ній точку w_0 , яка має аргумент ψ_0 , знайдемо значення

$$z_0(w_0) = \sqrt{r}e^{i\psi_0/2} \quad \text{і} \quad z_1(w_0) = \sqrt{r}e^{i(\psi_0+2\pi)/2},$$

що відповідають значенням функції (1.22) у тій самій точці, але з різними значеннями аргументу, що відрізняються на 2π , і прослідкуємо за зміною функцій $z_0(w)$ і $z_1(w)$ за неперервного руху точки w кривою C . При цьому можливі два різних випадки. У першому – крива C (рис. 1.3) не охоплює точку $w = 0$. Тоді після обходу

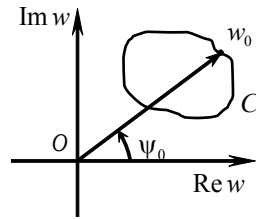


Рис. 1.3

кривої C аргумент точки w_0 повернеться до початкового значення $\arg w_0 = \psi_0$. У результаті і значення функцій $z_0(w)$ і $z_1(w)$ у точці $w = w_0$ дорівнюватимуть їх початковим значенням. Таким чином, на кривій C у цьому випадку визначено дві різні однозначні функції комплексної змінної w .

Означення. Якщо область D площини w має таку властивість, згідно з якою довільна замкнена крива в цій області не охоплює точку $w = 0$, то в області D визначено дві різні однозначні неперервні функції $z_0(w)$ і $z_1(w)$, які називають **гілками багатозначної функції** $z(w) = \sqrt{w}$.

У другому випадку крива C (рис. 1.4) охоплює точку $w=0$. Тоді після повного обходу кривої C у додатному напрямку значення аргументу точки w_0 уже не повернеться до початкового значення ψ_0 , а зміниться на кут 2π . Тому й значення функцій $z_0(w)$ і $z_1(w)$ у точці

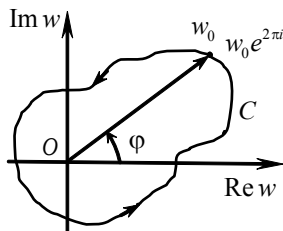


Рис. 1.4

w_0 у результаті їх неперервної зміни після повного обходу кривої C уже не дорівнюватимуть їх початковим значенням. Детальніше дістанемо

$$\tilde{z}_0(w_0) = z_0(w_0)e^{i\pi} = z_1(w_0), \quad \tilde{z}_1(w_0) = z_1(w_0)e^{i\pi} = z_0(w_0).$$

Тобто функція $z_0(w)$ перейшла у функцію $z_1(w)$, і навпаки.

Означення. Якщо для точки z_0 можна вказати такий ε -оکیل, що після однократного повного обходу точки z_0 за довільним замкненим контуром у цьому ε -околі одна гілка багатозначної функції переходить в іншу, то точку z_0 називають **точкою розгалуження** даної багатозначної функції, оскільки після повного обходу точки розгалуження значення функції у ній змінюється.

У розглянутій функції $z(w) = \sqrt{w}$ є дві точки розгалуження. Крім точки $w=0$, точкою розгалуження є нескінченність. За повного обходу околу нескінченності (обходу кола великого радіуса) ми також переходимо з однієї гілки функції на іншу.

1.6. Диференціювання функції комплексної змінної

Раніше теорію функцій комплексної змінної ми будували у повній аналогії з теорією функцій дійсної змінної. Але поняття диференційовності функції комплексної змінної вимагає виконання додаткових умов, що спричиняє суттєві відмінності.

Означення. Нехай в області G комплексної площини z задано функцію $f(z)$. Якщо для точки $z_0 \in G$ існує при $\Delta z \rightarrow 0$ границя (граничне значення) відношення приросту функції до приросту аргументу

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

незалежно від способу прямування Δz до нуля, то ця границя називається **похідною** функції $f(z)$ за комплексною змінною z у точці z_0 і позначається $f'(z_0)$, тобто

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \quad (1.23)$$

У цьому випадку функція $f(z)$ називається **диференційовною** у точці z_0 .

Підкреслимо принциповий момент: границя (1.23) не має залежати від способу прямування Δz до нуля. Виконання цієї вимоги накладає певні умови, які забезпечують диференційовність функцій комплексної змінної.

Теорема. Якщо функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ диференційовна в точці $z_0 = x_0 + iy_0$, то в точці (x_0, y_0) існують частинні похідні функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ за змінними x, y , причому мають місце такі співвідношення (умови Коші–Рімана)

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \quad (1.24)$$

За умови теореми існує границя (1.23), що не залежить від того, як $\Delta z \rightarrow 0$.

Припустимо, що точка $z_0 + \Delta z$ наближається до z_0 вздовж прямої, що паралельна дійсній осі, тобто що $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0$, Δx – дійсне. Тоді дістанемо

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + \\ + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Із факту існування граничного значення комплексного числа впливає існування границь його дійсної та уявної частин, і має місце формула

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0).$$

Нехай точка $z_0 + \Delta z$ наближається до z_0 вздовж прямої, що паралельна уявній осі: $\Delta z = i\Delta y$, Δy – дійсне, $\Delta y \rightarrow 0$. Тоді

$$f'(z_0) = -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} +$$

$$+ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} = -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0).$$

Порівнюючи дві отримані формули для $f'(z_0)$, переконуємося в правильності співвідношень (1.24).

Теорема. Якщо в точці (x_0, y_0) функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ диференційовні, а їх частинні похідні зв'язані співвідношенням (1.24), то функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ є диференційовною функцією комплексної змінної z у точці $z_0 = x_0 + iy_0$.

Відповідно до означення диференційовності, прирости функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ в околі точки (x_0, y_0) можна записати як

$$\begin{aligned} u(x, y) - u(x_0, y_0) &= u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \xi(x, y), \\ v(x, y) - v(x_0, y_0) &= v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \eta(x, y), \end{aligned} \quad (1.25)$$

де функції $\xi(x, y)$ і $\eta(x, y)$ прямують до нуля при $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ швидше, ніж Δx та Δy . Тоді за допомогою (1.25) і (1.24) можна отримати

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= u_x(x_0, y_0) \frac{\Delta x + i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \\ &+ v_x(x_0, y_0) \frac{i\Delta x - \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\xi(x, y) + i\eta(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} = \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + \frac{\zeta(z)}{\Delta z}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

де $\zeta(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$. Зазначимо, що, коли $\Delta z \rightarrow 0$, останній доданок (1.26) прямує до нуля, а перші – залишаються незмінними. Тому існує граничне значення

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0),$$

що й доводить диференційовність функції $f(z)$ у точці z_0 .

Таким чином, необхідними й достатніми умовами існування границі в (1.23) є умови Коші–Рімана (1.24). Якщо вони виконуються, то похідна функції комплексної змінної

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.27)$$

Із означення похідної (1.23) і властивостей границі випливає, що на функцію комплексної змінної можна поширити відомі з математичного аналізу правила диференціювання.

Означення. Якщо функція $f(z)$ диференційовна в усіх точках деякої області G , а її похідна неперервна в цій області, то функція $f(z)$ називається **аналітичною функцією** в цій області (інакше, **регулярною** або **голоморфною**).

Нехай функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ є аналітичною в деякій області G і, крім того, функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ мають неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Тоді, диференціюючи першу із умов Коші–Рімана за x , а другу – за y , дістанемо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Додаючи ці рівності та враховуючи, що похідні $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ в силу їх неперервності однакові, знаходимо рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{або} \quad \Delta u = 0,$$

яке називається рівнянням Лапласа. Аналогічно отримуємо $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. Дійсна функція $u(x, y)$, яка має в області G неперервні частинні похідні другого порядку та задовольняє рівняння Лапласа, називається **гармонічною** в області G .

Диференційовна в області G функція $f(z)$ має похідні довільного порядку в цій області, отже її дійсна та уявні частини мають неперервні частинні похідні довільного порядку. Тому дійсна та уявна частини функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, диференційовної в області G , є гармонічними в області G . Гармонічні функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$, зв'язані між собою умовами Коші–Рімана, називаються **спряженими**. Для довільної функції $u(x, y)$, гармонічної в однозв'язній області G , можна знайти спряжену до неї гармонічну функцію, яка визначається з точністю до довільної сталої.

Аналітичні функції відіграють особливу роль як при розв'язанні численних математичних проблем, так і в різних застосуваннях функцій комплексної змінної.

Розглянемо приклади деяких елементарних функцій комплексної змінної. Ці функції є природним узагальненням (продовженням на комплексну площину) звичайних для аналізу елементарних функцій. Але при такому продовженні функції інколи набувають нових властивостей, деякі з яких ми розглянемо.

Приклад 7. Лінійна функція $w = f(z) = az + b$.

$$\begin{aligned} w &= (\operatorname{Re} a + i \operatorname{Im} a)(x + iy) + (\operatorname{Re} b + i \operatorname{Im} b) = \\ &= (\operatorname{Re} a \cdot x - \operatorname{Im} a \cdot y + \operatorname{Re} b) + i(\operatorname{Re} a \cdot y + \operatorname{Im} a \cdot x + \operatorname{Im} b) = \\ &= u(x, y) + iv(x, y). \end{aligned}$$

Перевіримо для цієї функції виконання умов Коші–Рімана (1.24)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{Re} a = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\operatorname{Im} a = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

тобто лінійна функція є аналітичною. Похідна від лінійної функції згідно з (1.27)

$$f'(z) = \operatorname{Re} a + i \operatorname{Im} a = a,$$

отже збігається з відомою із математичного аналізу формулою для похідної від лінійної функції.

Приклад 8. Функція $w = f(z) = z^2$.

$$w = x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv.$$

Перевіримо аналітичність цієї функції:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Похідна, згідно з (1.27),

$$(z^2)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i2y = 2z.$$

Приклад 9. Функція $w = f(z) = 1/z$.

$$w = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = u + iv.$$

Перевіримо аналітичність:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

тобто функція $f(z) = 1/z$ є аналітичною всюди, за винятком точки $z = 0$:

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}.$$

Приклад 10. Функція $w = f(z) = z^n$.

Функція $w = z^n$ (n – натуральне число) визначена та однозначна для всіх значень комплексного аргументу z . Використовуючи запис через модулі та аргументи (показникове представлення), дістанемо

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad w = r(\cos \psi + i \sin \psi), \quad r = \rho^n, \quad \psi = n\varphi.$$

Тому відображення, що здійснюється функцією $w = z^n$, зводиться до розтягування (стиснення) кожного радіус-вектора точки z в $|z|^{n-1}$ разів і повороту на кут $(n-1)\arg z$ (рис. 1.5).

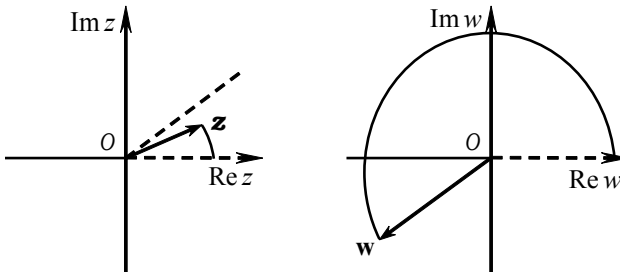


Рис. 1.5

Нехай точки z_1 і z_2 мають однакові модулі, а їх аргументи відрізняються на число, кратне $2\pi/n$:

$$\arg z_1 - \arg z_2 = \frac{2\pi k}{n}, \quad \text{де } k - \text{ціле (додатне або від'ємне) число.}$$

При відображенні $w = z^n$ вони переходять в одну точку, тобто функція $w = z^n$ не однолиста, якщо її розглядати на всій комплексній площині. Щоб вона була однолистою в області G , необхідно й достатньо, щоб область G не містила таких точок, які мають однакові модулі та аргументи, що відрізняються на число, кратне $2\pi/n$. Таку умову задовольняють, наприклад, сектори

$$\frac{2\pi k}{n} < \varphi < \frac{2\pi(k+1)}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

кожний із яких при відображенні $w = z^n$ перетворюється на площину w з вирізаною додатною піввіссю $\text{Re } w$. Усі промені з вершинами в точці $z = 0$ переходять у промені з вершинами в

точці $w = 0$, але повернуті на деякий кут, а дуги кіл із центром у точці $z = 0$ – у дуги кіл із центром у точці $w = 0$, але, загалом, іншого радіуса (рис. 1.5).

Функція $w = z^n$ аналітична в усій площині z , оскільки існує

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z^n + nhz^{n-1} - z^n + h^2(\dots)}{h} = nz^{n-1}.$$

Приклад 11. Функція $w = f(z) = \sqrt[n]{z}$.

Функція $w = \sqrt[n]{z}$ (n – натуральне число) – багатозначна (n -значна) при $z \neq 0$. Її багатозначність пов'язана з тим, що аргумент точки z є багатозначною функцією (див. (1.11)). n різних значень (гілок) функції обчислюють за формулами

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} e^{i(\arg z + 2\pi k)/n} = |z|^{1/n} e^{i\left(\frac{\arg z}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, k = \overline{0, n-1}.$$

Розглянемо площину комплексної змінної і точку z на ній. Виберемо для цієї точки певне значення аргументу та почнемо рух із точки z по якій-небудь замкненій кривій. Якщо крива не обходить початок координат, то повернувшись до точки z , одержимо те саме значення аргументу z , що й на початку руху. Якщо крива обходить початок координат, то після обходу замкненої кривої і повернення до точки z , одержимо значення аргументу, що відрізняється від вихідного на 2π . Аргумент точки z буде однозначним, якщо усунути можливість повного обходу точки $z = 0$.

Розглянемо тепер таку область G , яка відповідає площині z із вирізаною лінією, що йде від точки $z = 0$ у безмежність (напр., розріз уздовж додатного променя осі x). Ця область G не містить замкнених кривих, що обходять точку $z = 0$, і тому аргумент кожної її точки z фіксований. Виберемо певне значення функції $w = \sqrt[n]{z}$ – те, що відповідає взятому значенню аргументу довільної точки z . Таким чином, ми одержимо одну із n гілок багатозначної функції. Із кожною із цих n гілок можна оперувати як зі звичайною однозначною функцією. Очевидно, що можна виділити n неперервних та однозначних гілок у будь-якій області G , яка не містить жодної замкненої кривої, що обходить точку $z = 0$. Якщо $z \neq 0$, то в її достатньо малому околі, що не містить точку $z = 0$, можна виділити n гілок функції $\sqrt[n]{z}$.

Якщо на комплексній площині не робити розрізу, що йде від точки $z = 0$ у безмежність, то при повному обході точки $z = 0$, яка є точкою розгалуження функції $\sqrt[n]{z}$, неперервно переходитимемо з однієї гілки функції $\sqrt[n]{z}$ на іншу. Існування можливості повного обходу такої точки й створює умови неоднозначності функції $w = \sqrt[n]{z}$.

Точки розгалуження є характеристиками багатозначних функцій. Для функції $\sqrt[n]{z}$ існує дві точки розгалуження: $z = 0$ і нескінченно віддалена точка $z = \infty$. Якщо із комплексної площини вилучити деяку жорданову криву, що сполучає точки розгалуження $z = 0$ і $z = \infty$ (зробивши розріз уздовж цієї кривої), то в цій області функція $\sqrt[n]{z}$ буде однозначною. У такий спосіб, створивши умови для неможливості повного обходу точок розгалуження, виділяють однозначні гілки багатозначних функцій.

Приклад 12. Функція $w = f(z) = e^z$.

Експоненціальну функцію $\omega = e^z$ визначають як

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Вона має наступні властивості.

1. За дійсних значень змінної z її означення збігається зі звичайним.

2. Визначена таким чином функція всюди аналітична

$$w = u + iv, \quad u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

Умови Коші–Рімана виконуються всюди в площині z .

3. Диференціювання здійснюється за звичайною формулою

$$\frac{d}{dz} e^z = \frac{\partial}{\partial x} e^x (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

4. Зберігається основна властивість експоненціальної функції

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

5. Експоненціальна функція не дорівнює нулю для жодного комплексного числа. Насправді, $|e^z| = e^x > 0$.

Поклавши $x = 0$, $y = \varphi$, одержимо формулу Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

за допомогою якої будь-яке комплексне число з модулем ρ та аргументом φ можна записати у формі

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}.$$

Про таке представлення ми говорили раніше, але воно послідовно виникає саме після узагальнення експоненціальної функції на випадок комплексної змінної.

6. Функція e^z є періодичною із суто уявним періодом $2\pi i$

$$e^{z+2\pi ik} = e^z e^{2\pi ik} = e^z, \text{ оскільки } e^{2\pi ik} = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k = 1.$$

Якщо $e^{z_1} = e^{z_2}$, $e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) = e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2)$, то $e^{x_1} = e^{x_2}$, $\cos y_1 = \cos y_2$, $\sin y_1 = \sin y_2$, тобто рівність задовольняється, коли $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1 + 2\pi k$, або $z_2 - z_1 = 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$.

Позначена на площині z (рис. 1.6) відкрита смуга $(-\infty < x < \infty, 0 < y < 2\pi)$ не містить точок, для яких $z_2 - z_1 = 2\pi ki$, тому функція e^z на ній однолиста. Ця смуга функцією e^z відображається на комплексну площину з вирізаною додатною піввіссю $\text{Re } w$.

Покладемо $w = e^z = r e^{i\psi}$, $r = e^x$, $\psi = y$. Прямі $y = y_0$ є відображенням, що здійснюється функцією e^z , перетворюються на промені, що виходять із початку координат. Відрізки $x = x_0$ перетворюються на кола із центром у початку координат (рис. 1.6).

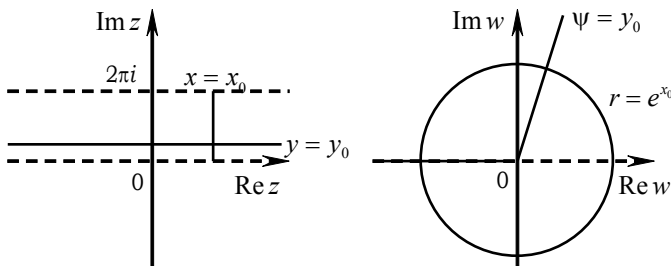


Рис. 1.6

Приклад 13. Функція $w = f(z) = \text{Ln } z$.

Логарифмічна функція визначається як така, що обернена до показникової: число w називається логарифмом числа z , якщо $e^w = z$. Із попереднього прикладу випливає, що $\text{Ln } z$ є

нескінченнозначною функцією. Щоб зазначити цей факт (багатозначність логарифма комплексного числа), використовують спеціальне позначення $\text{Ln } z$ (з великої літери).

Якщо $w_1 = \text{Ln } z_1$, $w_2 = \text{Ln } z_2$, то $w_1 + w_2 = \text{Ln}(z_1 z_2)$.

$$z_1 = e^{w_1}, \quad z_2 = e^{w_2}, \quad z_1 z_2 = e^{w_1 + w_2}.$$

Нехай $z_1 = |z|$, $z_2 = e^{i \text{Arg } z}$, тоді для $z = z_1 z_2$ логарифм

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg } z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi). \quad (1.28)$$

$\text{Arg } z$ може набувати будь-якого значення аргументу комплексного z , тому кожне комплексне число $z \neq 0$ має безмежну множину логарифмів, тобто логарифм є нескінченнозначною функцією, дійсна частина якої визначена однозначно, а уявна – з точністю до доданку, кратного 2π .

Точками розгалуження багатозначної функції $\text{Ln } z$ є $z = 0$ і $z = \infty$. Рухаючись уздовж кола довільного радіуса з центром у точці $z = 0$ в одному й тому самому напрямку та здійснюючи довільну кількість повних обходів, увесь час переходитимемо від однієї однозначної гілки до іншої, не повертаючись до вихідної гілки. Тому $z = 0$ і $z = \infty$ є точками розгалуження нескінченного порядку або логарифмічними точками розгалуження. Точки $z = 0$ і $z = \infty$ на комплексній площині можна сполучити розрізом уздовж деякої жорданової кривої, наприклад уздовж додатної частини дійсної осі, і розглядати у такій області однозначні гілки багатозначної функції $\text{Ln } z$, зафіксувавши в (1.28) значення k . Зокрема, поклавши в (1.28) значення $k = 0$, із багатозначної функції виділяють однозначну гілку, яку позначають $\ln z$

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z. \quad (1.29)$$

Тригонометричні функції. Формула Ейлера для дійсної змінної x , $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, і спряжена до неї, $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, дають вирази, які також називають формулами Ейлера, для тригонометричних функцій

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

Узагальнення цих формул на комплексні змінні

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

визначає тригонометричні функції косинус і синус для кожного комплексного $z \in \mathbb{C}$. Безпосередньо із цього визначення випливає, що функція $f(z) = \cos z$ ($z \in \mathbb{C}$) є парною, а $f(z) = \sin z$ ($z \in \mathbb{C}$) – непарною, обидві є періодичними ($f(z+T) = f(z)$) із суто дійсним періодом $T = 2\pi$.

Функції $f(z) = \cos z$ ($z \in \mathbb{C}$) і $f(z) = \sin z$ ($z \in \mathbb{C}$) задовольняють для будь-яких $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ рівності

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2.$$

Останні формули є основними в теорії тригонометричних функцій. Зокрема, з них дістаємо формули зведення аргументу

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = -\sin z, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \cos z \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

а також основну тригонометричну тотожність

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Таким чином, усі співвідношення між тригонометричними функціями дійсної змінної зберігаються також і в комплексній площині. Але! У загальному випадку комплексної змінної $\cos z$ та $\sin z$ за модулем уже не будуть обмежені одиницею, як було для дійсної змінної (див. нижче).

Якщо $z = iy$ – суто уявне, то

$$\cos iy = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) = \operatorname{ch} y,$$

$$\sin iy = \frac{1}{2i}(e^{-y} - e^y) = i \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = i \operatorname{sh} y$$

або, узагальнюючи на випадок довільного комплексного z , отримаємо рівності

$$\cos iz = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \operatorname{ch} z, \quad \sin iz = \frac{i}{2}(e^z - e^{-z}) = i \operatorname{sh} z.$$

які встановлюють зв'язок між гіперболічними й тригонометричними функціями. Із цих співвідношень випливають такі рівності

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Звідси $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ маємо

$$|\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}, \quad |\sin z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Видно, що $|\cos z|$ і $|\sin z|$ не обмежені одиницею та набувають як завгодно великих значень за великих $|y|$.

Узагальнення гіперболічних функцій на випадок комплексної змінної також зберігає всі формули, відомі для дійсної змінної.

Тригонометричні та гіперболічні функції виражають через показникову, тому обернені до них функції виражають через логарифм.

Приклад 14. Функція $w = \operatorname{Arccos}(z)$ – багатозначна функція, що є оберненою до косинуса.

Оскільки $z = \cos w$, то $e^{iw} + e^{-iw} = 2z$. Якщо ввести позначення $e^{iw} = p$ ($w = -i \operatorname{Ln} p$), то для p отримаємо квадратне рівняння $p^2 - 2zp + 1 = 0$, розв'язавши яке, знаходимо $p_{1,2} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$. Звідси $w = -i \operatorname{Ln} p = -i \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$, тобто

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

де з урахуванням двозначності кореневої функції знак \pm замінено на один знак $+$.

Із цієї рівності випливає, що точками розгалуження для функції $\operatorname{Arccos} z$ є $z = \pm 1$, $z = \infty$. Тому в області, яка збігається із усією комплексною площиною, розрізаною вздовж променів $(-\infty, -1]$ та $[1, \infty)$, можна вилучити її однозначні та неперервні гілки. Для кожного дійсного аргументу $x \in [-1, 1]$ усі значення $\operatorname{Arccos} x$ дістаємо за допомогою рівності

$$\operatorname{Arccos} x = \pm \arccos x + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Аналогічно визначають багатозначну функцію $w = \operatorname{Arcsin} z$ (як обернену до $z = \sin w$)

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}),$$

та обернені тригонометричні функції $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$. Функція $\operatorname{Arcsin} z$ має точки розгалуження $z = \pm 1$, $z = \infty$. Вона допускає вилучення однозначних і неперервних гілок у тих самих областях, що й $\operatorname{Arccos} z$. Для кожного дійсного аргументу $x \in [-1, 1]$ усі значення $\operatorname{Arcsin} x$ дістаємо за допомогою рівності

$$\operatorname{Arcsin} x = (-1)^k \arcsin x + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Функції $\operatorname{Arctg} z$ і $\operatorname{Arcctg} z$ мають лише дві точки розгалуження: $z = i$ і $z = -i$. Ці точки на комплексній площині можна

сполучити розрізом, наприклад уздовж уявної осі. В отриманій області можна вилучити однозначні та неперервні гілки цих функцій.

Загальна степенева функція $w = z^\alpha$ зводиться до функції від логарифма $w = \exp(\alpha \operatorname{Ln} z)$. Ця функція або нескінченнозначна, або скінченнозначна, залежно від α .

Загальна показникова функція $w = a^z$ зводиться до функції $w = \exp(z \operatorname{Ln} a)$. Вона являє собою сукупність окремих, не зв'язаних між собою однозначних функцій.

Співвідношення Коші–Рімана часто використовують при дослідженні різноманітних властивостей аналітичних функцій. Розглянемо ці співвідношення за інших представлень комплексної змінної або функції. Спочатку розглянемо експоненціальне представлення комплексної змінної у вигляді $z = \rho e^{i\varphi}$, тобто $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$. Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho}.$$

Аналогічно обчислюють вирази

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho}. \end{aligned}$$

Тоді, користуючись співвідношеннями (1.24) і лінійною незалежністю функцій $\sin \varphi$ і $\cos \varphi$, отримуємо умову аналітичності функції в іншому вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho}. \quad (1.30)$$

Аналогічно легко встановити, що модуль та аргумент аналітичної функції $f(z) = R(x, y)e^{i\Phi(x, y)}$ зв'язані співвідношеннями

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -R \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (1.31)$$

Корисними є співвідношення, які відображають властивості аналітичних функцій, для $f(z) = f(\rho e^{i\varphi}) = R(\rho, \varphi)e^{i\Phi(\rho, \varphi)}$:

$$\frac{\partial R}{\partial \rho} = \frac{R}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial R}{\partial \varphi} = -\rho R \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}. \quad (1.32)$$

Властивості аналітичних функцій

1. Якщо функція $f(z)$ є аналітичною в області G , то вона неперервна в цій області.

2. Якщо $f_1(z)$ та $f_2(z)$ є аналітичними функціями в області G , то їх сума та добуток також є аналітичними функціями в цій області, а функція $\varphi(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ є аналітичною всюди, де $f_2(z) \neq 0$.

3. Якщо $w = f(z)$ є аналітичною в області G комплексної змінної z , і в області її значень D на площині w визначена аналітична функція $\zeta = \varphi(w)$, то функція $F(z) = \varphi[f(z)]$ є аналітичною функцією комплексної змінної z в області G .

4. Якщо $w = f(z)$ є аналітичною в області G комплексної змінної z і $|f'(z)| \neq 0$ в околі деякої точки $z_0 \in G$, то в околі точки $w_0 = f(z_0)$ в області D значень функції $f(z)$ визначена обернена функція $z = \varphi(w)$, що є аналітичною функцією комплексної змінної w . При цьому має місце співвідношення

$$f'(z_0) = \frac{1}{\varphi'(w_0)}. \quad (1.33)$$

5. Нехай в області G площини x, y задано функцію $u(x, y)$, що є дійсною частиною аналітичної функції $f(z)$. Тоді уявна частина аналітичної функції визначається з точністю до адитивної сталої. Дійсно, унаслідок умов Коші–Рімана за заданою функцією $u(x, y)$ можна однозначно визначити повний диференціал невідомої функції $v(x, y)$

$$dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy,$$

звідки випливає сформульоване твердження.

6. Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в області G . Розглянемо у відповідній області на площині x, y сім'ї кривих $u(x, y) = C_1$ і $v(x, y) = C_2$ ($C_1, C_2 = \text{const}$), що є лініями рівнів дійсної та уявної частин функції $f(z)$. За допомогою співвідношень (1.24) можна показати, що в усіх точках даної області є правильною рівність

$$\text{grad } u \cdot \text{grad } v = u_x v_x + u_y v_y = 0,$$

тобто, сім'ї кривих $u(x, y) = C_1$ і $v(x, y) = C_2$ є взаємно ортогональними.

Задачі

1.1. Знайти модулі та аргументи комплексних чисел:

а) i , б) -3 , в) $1-i$, г) $1 + \cos \varphi + i \sin \varphi$, $\pi < \varphi \leq 3\pi$.

1.2. Записати в експоненціальній формі такі комплексні числа

та вирази: а) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$, $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$; б) $5(\cos 2 + i \sin 2)$,
 $5(\cos 2 - i \sin 2)$, $5(\sin 2 + i \cos 2)$, $5(\sin 2 - i \cos 2)$.

1.3. Знайти всі значення коренів і зобразити їх на комплексній площині.

а) $\sqrt[3]{27i}$, б) $\sqrt[6]{64}$, в) $\sqrt{1+i}$.

1.4. Знайти всі розв'язки рівнянь: а) $z^5 = -1$, б) $z^3 = -1$.

1.5. Знайти всі значення таких степенів:

а) 1^3 , б) $1^{1/3}$, в) $1^{\sqrt{2}}$, г) 1^i , д) i^i .

У задачах 1.6–1.10 з'ясувати геометричний зміст співвідношень:

1.6. $|z - z_0| = R$, $|z - z_0| < R$, $|z - z_0| > R$. **1.7.** $|z - 2i| + |z + 2i| = 5$.

1.8. $|z - 2| - |z + 2| > 3$.

1.9. $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$.

1.10. $\alpha < \arg z < \beta$, $\alpha < \arg(z - z_0) < \beta$ ($-\pi < \alpha < \beta \leq \pi$).

У задачах 1.11–1.12 визначити сім'ю ліній в z -площині, що задаються рівняннями:

1.11. а) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = C$; б) $\operatorname{Im} \frac{1}{z} = C$ ($-\infty < C < \infty$).

1.12. а) $\operatorname{Re} z^2 = C$; б) $\operatorname{Im} z^2 = C$ ($-\infty < C < \infty$).

1.13. Довести рівності: а) $\sin iz = i \operatorname{sh} z$; б) $\cos iz = \operatorname{ch} z$.

1.14. Обчислити: а) $|\sin z|$, б) $|\cos z|$. Переконайтеся, що тригонометричні функції $\cos z$ та $\sin z$ комплексного аргументу z уже не будуть обмеженими за модулем, як у випадку функцій дійсного аргументу.

1.15. Довести: $\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)$, $\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{z-i}{z+i} \right)$.

1.16. Знайти дійсні та уявні частини наступних аналітичних функцій $f(z) = u + iv$:

а) iz , б) z^2 , в) iz^2 , г) z^3 , д) iz^3 , е) e^z , ж) $1/z$, з) $\cos z$.

У задачах 1.17–1.19 розв'язати рівняння:

1.17. $2 \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = i$. **1.18.** $\sin z + \cos z = 2$. **1.19.** $\sin z = i \operatorname{sh} z$.

У задачах 1.20–1.23 обчислити:

1.20. $\operatorname{Ln} \left(\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \right)$. **1.21.** $(-3 - 4i)^{1-i}$. **1.22.** $\operatorname{th} \left(\ln 3 + i \frac{\pi}{4} \right)$.

1.23. $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + i \frac{1}{2} \ln 3 \right)$.

1.24. Знайти суми:

а) $1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$; б) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$;

в) $\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x$;

г) $\sin x - \sin 2x + \dots + (-1)^{n-1} \sin nx$; д) $\sum_{k=1}^n \sin(2k-1)x$.

У задачах 1.25–1.27 знайти аналітичну функцію $f(z) = u + iv$ за заданою уявною частиною:

1.25. $v = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}$.

1.26. $v = e^x \cos y - 5x + y - \frac{x}{x^2 + y^2}$.

1.27. $v = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$.

1.28. Нехай $z = \rho e^{i\varphi}$, $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$. Записати умови Коші–Рімана в полярних координатах.

1.29. Довести, що функція $f(z) = \bar{z}$ ніде не диференційовна.

У задачах 1.30–1.33 знайти аналітичні функції $f(z) = Re^{i\Phi}$ за заданим модулем або аргументом цієї функції.

1.30. $R = (x^2 + y^2)e^x$. **1.31.** $R = e^{\rho^2 \cos 2\varphi}$.

1.32. $\Phi = xy$. **1.33.** $\Phi = \varphi + \rho \sin \varphi$.

1.34. Нехай $z + \frac{1}{z} = 1$. Знайти $z^{2012} + \frac{1}{z^{2012}}$.

Розділ 2

Інтегрування функцій комплексної змінної

2.1. Інтеграл від функції комплексної змінної

Нехай задано деяку просту (без точок самоперетину) орієнтовану кусково-гладку криву C , яка має початок і кінець, і на ній – функція комплексної змінної $f(z)$.

Означення. Інтегралом від $f(z)$ вздовж C називається

$$\int_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}), \quad (2.1)$$

де $z_0 = a, z_1, \dots, z_n = b$ – послідовність точок, що розбивають криву C на n ділянок, a та b – кінці C , ζ_k – довільна точка, що лежить на інтервалі $[z_{k-1}, z_k]$ кривої C , і граничне значення береться за припущення, що $\max |z_k - z_{k-1}| \rightarrow 0$.

Якщо C – кусково-гладка крива, а $f(z)$ – кусково-неперервна та обмежена функція, то інтеграл (2.1) завжди існує. Питання про існування такого інтеграла можна звести до питання про існування деяких криволінійних інтегралів від дійсної u та уявної v частин функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Дійсно, якщо ввести позначення $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$, $u(\xi_k, \eta_k) = u_k$, $v(\xi_k, \eta_k) = v_k$, $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$, то

$$\begin{aligned} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) &= (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ &= u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k + i(v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k). \end{aligned}$$

Таким чином, початкова інтегральна сума завжди виражається через інтегральні суми для криволінійних інтегралів

$$\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_{k=1}^n (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k).$$

Тому у результаті граничного переходу одержимо

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy). \quad (2.2)$$

Це співвідношення може також служити визначенням інтеграла від функції $f(z)$ за кривою C . Із нього випливають

деякі властивості, що є очевидними наслідками відповідних властивостей криволінійних інтегралів:

$$1. \int_C f(\zeta) d\zeta = - \int_{C^-} f(\zeta) d\zeta, \quad (2.3)$$

тобто якщо змінити напрям обходу контуру C на протилежний C^- , то значення інтеграла змінить знак.

$$2. \int_{C_1+C_2} f(\zeta) d\zeta = \int_{C_1} f(\zeta) d\zeta + \int_{C_2} f(\zeta) d\zeta. \quad (2.4)$$

$$3. \int_C af(\zeta) d\zeta = a \int_C f(\zeta) d\zeta, \text{ де } a = \text{const}. \quad (2.5)$$

$$4. \int_C \{f_1(\zeta) + f_2(\zeta)\} d\zeta = \int_C f_1(\zeta) d\zeta + \int_C f_2(\zeta) d\zeta. \quad (2.6)$$

$$5. \left| \int_C f(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_C |f(\zeta)| ds, \quad (2.7)$$

де $ds = |d\zeta|$ – диференціал довжини дуги C .

Нехай криву C задано параметрично $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, де t – дійсний аргумент. Нехай, крім того, $z(\alpha) = a$, $z(\beta) = b$. Тоді обчислення інтеграла від $f(z)$ уздовж C зводиться до обчислення інтеграла від комплексної функції дійсної змінної

$$\int_C f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] z'(t) dt.$$

Загалом, $\int_C f(z) dz$ залежить як від підінтегральної функції,

так і від форми кривої C . Однак, за певних умов цей інтеграл повністю визначається положенням кінців контуру C і не залежить від форми кривої.

Теорема 1. Нехай функцію $f(z)$ визначено в однозв'язній області G . Якщо інтеграл від цієї функції вздовж довільного замкненого контуру, що лежить в області G , існує й дорівнює нулю, то для всіх кривих γ_i , що лежать в G і мають спільний початок і кінець, інтеграл

$$\int_{\gamma_i} f(z) dz$$

має одне й те саме значення.

Зазначимо, що $\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$ в

силу умови теореми (рис. 2.1). Тому

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = - \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz,$$

що й доводить теорему, оскільки γ_1, γ_2 – довільні криві в області G , які мають спільний початок і кінець.

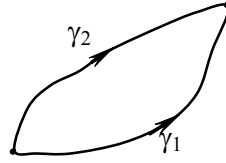


Рис. 2.1

Приклад 1. Надалі нам знадобиться інтеграл

$$I = \int_{C_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}, \quad (2.8)$$

де крива C_ρ являє собою коло радіуса ρ із центром у точці z_0 , яке необхідно обходити проти годинникової стрілки (рис. 2.2).

Скористаємось параметричною формою визначення кривої C_ρ :

$\zeta = z_0 + \rho e^{i\varphi}$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, і дістанемо

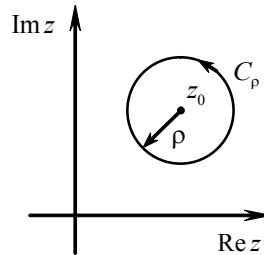


Рис. 2.2

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i. \quad (2.9)$$

Отже, значення інтеграла (2.8) не залежить від ρ та z_0 .

Надалі нас цікавитимуть інтеграли від функцій, що є аналітичними в деякій обмеженій області, причому у більшості випадків межею області буде служити кусково-гладка замкнена крива, що не має самоперетинів. Така крива називається замкненим контуром, а відповідний інтеграл – контурним інтегралом.

Теорема 2 (Коші). Нехай в однозв'язній області G задано однозначну аналітичну функцію $f(z)$. Тоді інтеграл від цієї функції за довільним замкненим контуром Γ , що цілком належить області G , дорівнює нулю.

Згідно із (2.2) можна записати

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} (udx - vdy) + i \int_{\Gamma} (vdx + udy).$$

Оскільки функція $f(z)$ є аналітичною всюди всередині контуру Γ , то функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ в області, що обмежена

цим контуром, мають неперервні частинні похідні першого порядку. Тоді до цих криволінійних інтегралів у правій частині можна застосувати відомий із аналізу результат, який дає формула Гріна про неперервні функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ у замкненій області \bar{G} , що обмежена кусково-гладким контуром C :

$$\int_C (Pdx + Qdy) = \iint_G \left\{ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\} dxdy. \quad (2.10)$$

Тому
$$\int_{\Gamma} (udx - vdy) = \iint_G \left\{ -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right\} dxdy = 0$$

у силу умов Коші–Рімана та
$$\int_{\Gamma} (vdx + udy) = \iint_G \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dxdy = 0,$$

що й доводить твердження теореми.

У силу теореми Коші та попередньої теореми для функцій, аналітичних в однозв'язній області, замість $\int_{\gamma} f(z)dz$ можна

писати $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$, де z_1, z_2 – кінці кривої γ , і як завгодно

деформувати контур (тобто змінювати форму контуру, але без створення самоперетинів) в області аналітичності функції $f(z)$.

Теорема 3. Якщо функція $f(z)$ неперервна в однозв'язній області G , а інтеграл від неї за будь-яким замкненим контуром C , який повністю належить області G , дорівнює нулю, то інтеграл

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta, \text{ що розглядається як функція верхньої межі, є}$$

аналітичною в G функцією, причому $F'(z) = f(z)$.

За означенням

$$\begin{aligned} F'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left\{ \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta \right\} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta, \end{aligned}$$

але в силу неперервності функції $f(z)$: $f(\zeta) = f(z) + \eta(\zeta)$, де $\eta(\zeta) \rightarrow 0$, коли $\zeta \rightarrow z$. Тому

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z)\Delta z}{\Delta z} + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} \eta(\zeta) d\zeta = f(z),$$

оскільки
$$\left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} \eta(\zeta) d\zeta \right| < \frac{1}{|\Delta z|} |\Delta z| \max_{\zeta \in [z, z+\Delta z]} |\eta(\zeta)| \rightarrow 0.$$

Теорема 4. Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області G і неперервна в замкненій області \bar{G} , то інтеграл від неї по межі області G , дорівнює нулю.

Інтеграл від функції вздовж довільного замкнутого контуру, що лежить в області її аналітичності,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Якщо контур γ прямує до межі області G , тобто до Γ , то рівність нулю інтеграла зберігається.

Теорема 5. Нехай функція $f(z)$ аналітична в багатозв'язній області G , обмеженій ззовні контуром Γ_0 , а зсередини – контурами $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, і нехай $f(z)$ – неперервна в замкненій області \bar{G} . Тоді

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0,$$

де Γ – повна межа області G , яка складається із контурів $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, причому обхід повної межі Γ здійснюється в додатному (від'ємному) напрямку.

Область обходять у додатному напрямку, якщо під час руху вздовж межі область залишається ліворуч. Проведемо гладкі криві $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, що сполучають контур Γ_0 із контурами $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$. Тоді область, обмежена кривими $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ та кривими $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, що проходяться двічі в протилежних напрямках, виявляється однозв'язною (рис. 2.3). Інтеграл від аналітичної функції, узятий по межі однозв'язної області, дорівнює нулю в силу теореми Коші.

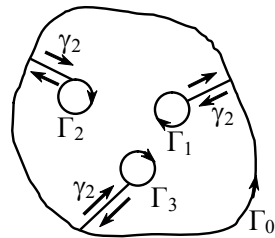


Рис. 2.3

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz + \int_{\gamma_1^+} f(z) dz + \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_1^-} f(z) dz +$$

$$+\dots + \int_{\gamma_n^+} f(z)dz + \int_{\Gamma_n} f(z)dz + \int_{\gamma_n^-} f(z)dz = 0.$$

В останній формулі можна опустити інтеграли вздовж кривих $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, що проходяться двічі в протилежних напрямках, ураховуючи властивість криволінійних інтегралів

$$\int_{\gamma_1^+} f(z)dz + \int_{\gamma_1^-} f(z)dz = 0,$$

оскільки інтеграл змінить знак, якщо змінити напрямок обходу контуру на протилежний. Залишаються інтеграли за $\{\Gamma_i\}$, $i = 0, n$, сума яких і складає інтеграл вздовж повної межі Γ .

2.2. Інтеграл Коші

Теорема Коші дозволяє встановити зв'язок між значеннями аналітичної функції у внутрішніх точках області її аналітичності та значеннями цієї функції на межі цієї області.

Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в однозв'язній області G , що обмежена контуром C . Оберемо довільну внутрішню точку z_0 і побудуємо замкнений контур Γ , що цілком лежить в G та охоплює точку z_0 . У середині контуру побудуємо ще один замкнений контур γ , що охоплює точку z_0 (рис. 2.4).

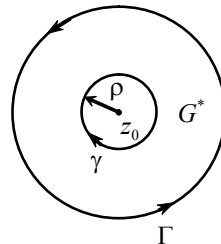


Рис. 2.4

Розглянемо допоміжну функцію

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}.$$

Функція $\varphi(z)$ є аналітичною всюди в області G , за винятком точки z_0 , отже, вона аналітична всюди в області G^* , що обмежена кривими Γ і γ . Тоді, згідно із теоремою Коші, інтеграл від функції $\varphi(z)$ уздовж кривої $\Gamma + \gamma$

$$\int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \int_{\gamma^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = 0.$$

Змінюючи напрям інтегрування у другому інтегралі, цю рівність можна переписати у вигляді

$$\int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta. \quad (2.11)$$

Оскільки інтеграл праворуч не залежить від вибору контуру γ , і таку саму властивість має інтеграл ліворуч, то надалі зручно обрати як контур інтегрування γ коло деякого радіуса ρ з центром у точці z_0 . Якщо покласти $\zeta = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, то отримаємо

$$\int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = i \int_0^{2\pi} f(\zeta) d\varphi.$$

Останній інтеграл можна перетворити

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(\zeta) d\varphi &= \int_0^{2\pi} [f(\zeta) - f(z_0)] d\varphi + \int_0^{2\pi} f(z_0) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} [f(\zeta) - f(z_0)] d\varphi + 2\pi f(z_0). \end{aligned}$$

Спрямуємо тепер радіус кола ρ до нуля. Оскільки функція $f(z)$ є аналітичною і, як наслідок, неперервною в області G , то завжди для довільного $\varepsilon > 0$ можна знайти таке значення ρ , що $|f(\zeta) - f(z_0)| < \varepsilon$ при $|\zeta - z_0| < \rho$. Звідси випливає, що при $\rho \rightarrow 0$ існує граничне значення

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} [f(\zeta) - f(z_0)] d\varphi = 0.$$

У результаті маємо шуканий результат:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta. \quad (2.12)$$

Інтеграл в правій частині (2.12) називають **інтегралом Коші**, а саму формулу (2.12) – **формулою Коші**.

Зазначимо, що до правої частини формули Коші входять лише значення $f(z)$ на межі Γ , тобто значення функції усередині області аналітичності цілком визначаються її значеннями на межі. Зазначимо також, що інтеграл в правій частині (2.12) має сенс для довільного положення точки z_0 за умови, що вона не лежить на контурі Γ . Детальніше можна записати

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \begin{cases} f(z_0), & z_0 - \text{усередині області, обмеженої } \Gamma, \\ 0, & z_0 - \text{ззовні області, обмеженої } \Gamma. \end{cases}$$

Коли ж точка $z_0 \in \Gamma$, то інтеграл

$$I(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

у звичайному розумінні не існує, але за додаткових умов щодо поведінки функції $f(z)$ на контурі Γ цьому інтегралу можна надати певний сенс. Наприклад, якщо функція $f(\zeta)$ задовольняє так звану умову Гьольдера–Ліпшиця

$$|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leq K |\zeta_1 - \zeta_2|^\nu, \quad 0 < \nu \leq 1, \quad (2.13)$$

де K – деяка стала, а ζ_1, ζ_2 – довільні дві точки на гладкому контурі Γ , то існує головне значення за Коші інтеграла $I(z_0)$

$$\text{V.p. } I(z_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta, \quad (2.14)$$

де Γ_ε являє собою контур Γ без ділянки, що потрапляє до ε -околу точки z_0 . При цьому

$$\text{V.p. } I(z_0) = \frac{1}{2} f(z_0).$$

Повернемося до аналітичної в області G функції $f(z)$.

Теорема про вищі похідні. Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в області G і неперервною в замкненій області \bar{G} . Тоді у внутрішніх точках області G існує похідна довільного порядку функції $f(z)$, і для неї є правильною формула

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad (2.15)$$

де Γ – межа області G .

За означенням похідної для цієї точки маємо

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left\{ \frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z} \right\} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}. \end{aligned}$$

Далі

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z - h)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - z - h)} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right] f(\zeta) d\zeta = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} + \frac{h}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2 (\zeta - z - h)}, \quad (2.16)
\end{aligned}$$

але
$$\left| \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2 (\zeta - z - h)} d\zeta \right| \leq \int_{\Gamma} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2 |\zeta - z - h|} ds \leq \frac{M}{d^3} l,$$

де $|f(\zeta)| < M$, l – довжина контуру Γ , d – мінімальна відстань від точки z та $z + h$ до контуру Γ .

Таким чином,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad (2.17)$$

оскільки другий доданок у правій частині (2.16) прямує до нуля разом із h .

Аналогічно, виходячи з (2.17), можна показати, що

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^3},$$

і взагалі, що
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}. \quad (2.18)$$

Таким чином, якщо точка z розташована всередині області G , а змінна інтегрування ζ пробігає контур в цій області та $z - \zeta \neq 0$, то функція під знаком інтеграла є неперервною, і похідну від контурного інтеграла за z можна обчислювати звичайним диференціюванням за z (як за параметром) під знаком інтеграла підінтегральної функції.

Зазначимо що, якщо функція $f(z)$ є аналітичною в області G , то в цій області функція $f(z)$ має неперервні похідні всіх порядків. Ця властивість аналітичної функції комплексної змінної суттєво відрізняє її від функції дійсної змінної, що має неперервну першу похідну в деякій області. В останньому випадку із існування першої похідної, загалом кажучи, не впливає існування похідних вищого порядку.

Розглянемо деякі важливі наслідки встановленої властивості аналітичної функції комплексної змінної.

Теорема Морера. Нехай функція $f(z)$ є неперервною в однозв'язній області G , а інтеграл від $f(z)$ уздовж довільного замкненого контуру, що

цілком належить G , дорівнює нулю. Тоді $f(z)$ є аналітичною функцією в області G .

У деякому розумінні ця теорема є оберненою до теореми Коші. Її можна узагальнити і на багатозв'язні області.

Теорема Ліувілля. Нехай на всій комплексній площині функція $f(z)$ є аналітичною, а її модуль рівномірно обмежений. Тоді ця функція тотожно дорівнює сталій.

Запишемо $f'(z)$ у довільній точці z

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Інтегруватимемо за колом деякого радіуса R із центром у точці z , тобто $|\zeta - z| = R$. За умовою теореми існує таке M , що $|f(\zeta)| < M$ незалежно від R . Тому

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(\zeta)|}{R^2} ds \leq \frac{M}{R}.$$

Оскільки R можна вибрати як завгодно великим, а $f'(z)$ не залежить від R , то $|f'(z)| = 0$. У силу довільності z робимо висновок, що $f'(z) \equiv 0$ на всій комплексній площині. Звідки і випливає, що $f(z) \equiv \text{const}$.

Як один із прикладів застосування цієї теореми розглянемо тригонометричну функцію $\sin z$ комплексної змінної. Нагадаємо, що

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i} (e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}) = \\ &= \frac{1}{2i} (e^{-y+ix} - e^{y-ix}) = \frac{1}{2i} [e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)] = \\ &= \frac{1}{2} [e^{-y}(\sin x - i \cos x) - e^y(-\sin x - i \cos x)] = \\ &= \frac{1}{2} (e^y + e^{-y}) \sin x + i \frac{1}{2} (e^y - e^{-y}) \cos x = \\ &= \text{ch } y \sin x + i \text{sh } y \cos x = u(x, y) + iv(x, y). \end{aligned}$$

Перевіримо аналітичність цієї функції:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \text{ch } y \cos x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \text{sh } y \sin x = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тобто функція $\sin z$ є аналітичною на всій комплексній площині. Оскільки вона не є сталою, то не може бути

рівномірно обмеженою. Зокрема, знайдуться такі значення комплексної змінної z , для яких $|\sin z| > 1$. Цією властивістю тригонометричні функції комплексної змінної суттєво відрізняються від відповідних функцій дійсної змінної.

Задачі

2.1. Нехай C – простий замкнений контур, що обмежує площу S . Довести рівність $\int_C \bar{z} dz = 2iS$.

2.2. Обчислити інтеграли $I_1 = \int_C x dz$, $I_2 = \int_C y dz$ уздовж шляхів:

а) уздовж радіус-вектора точки $z = 2 + i$;

б) уздовж півкола $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$, початок шляху в точці $z = 1$;

в) уздовж кола $|z - z_0| = R$.

2.3. Обчислити інтеграл $\int_C |z| dz$ уздовж шляхів:

а) уздовж радіус-вектора точки $z = 2 - i$;

б) уздовж півкола $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$, початок шляху в точці $z = 1$;

в) уздовж півкола $|z| = 1$, $-\pi/2 \leq \arg z \leq \pi/2$, початок шляху в точці $z = -i$;

г) уздовж кола $|z| = R$.

2.4. Обчислити інтеграл $\int_C |z| \bar{z} dz$, де C – замкнений контур, що складається із верхнього півкола $|z| = 1$ і відрізка $-1 \leq x \leq 1$, $y = 0$.

2.5. Обчислити інтеграл $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$, узявши гілку, яка визначається значенням функції \sqrt{z} у заданій початковій точці вздовж шляхів:

а) уздовж півкола $|z| = 1$, $y \leq 0$, якщо $\sqrt{1} = 1$;

б) уздовж кола $|z| = 1$ для гілки, де $\sqrt{1} = 1$.

2.6. Обчислити інтеграл $I = \int_C \operatorname{Ln} z dz$ уздовж кола $|z| = R$,

якщо в початковій точці $\operatorname{Ln} R = \ln R$.

2.7. Обчислити інтеграл $I = \int_{|z|=1} z^n \operatorname{Ln} z dz$, де n – ціле число,

узявши гілку, яка визначається значенням $\operatorname{Ln} z$ у підінтегральній функції у заданій початковій точці

а) $\operatorname{Ln} 1 = 0$; б) $\operatorname{Ln}(-1) = \pi i$.

У задачах 2.8–2.16 обчислити інтеграли:

2.8. $\int_L (x - y) dx - 5iy dy$, де L – коло $|z| = 2$.

2.9. $\int_L (z^2 + 2z\bar{z}) dz$, де L – дуга кола $|z| = 3$ ($0 \leq \arg z \leq \pi$).

2.10. $\int_L (x - y) dx - iy dy$, де L – коло $|z| = 1$.

2.11. $\int_L |z| z dz$, де L – коло $|z| = 2$.

2.12. $\int_L (1 + i - 2\bar{z}) dz$ вздовж ліній, що сполучають точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 1 + i$:

а) вздовж прямої; б) уздовж параболи $y = x^2$;

в) уздовж ламаної z_1, z_3, z_2 , де $z_3 = 1$.

2.13. $\int_L (z - z_0)^n dz$, де L – коло з центром у точці z_0 , що обходять проти ходу годинникової стрілки, n – ціле число.

2.14. $\int_L \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2 + 4z + 3} dz$, де L – коло $|z| = 2$.

2.15. $\oint_C \frac{z}{(z-1)(z^2+1)} dz$, де C – коло $|z+i|=1$.

2.16. $\int_C \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2}$, де C – коло $|z-2| = \frac{1}{2}$.

Розділ 3

Ряди функцій комплексної змінної

3.1. Ряди аналітичних функцій

Особливу роль у теорії функцій комплексної змінної відіграють ряди аналітичних функцій. Вивчення рядів є суттєвим як для виявлення загальних властивостей функцій комплексної змінної, так і для розв'язань різних задач, пов'язаних із застосуванням методів теорії функцій комплексної змінної.

Розглянемо спочатку числові ряди з комплексними числами, тобто вирази вигляду

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad (3.1)$$

де $\{a_k\}$ – задана числова послідовність.

Означення. Ряд (3.1) називається **збіжним**, якщо збігається послідовність його частинних сум $\{S_n\}$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

При цьому границю S послідовності $\{S_n\}$, коли $n \rightarrow \infty$, називають **сумою ряду**. Необхідною умовою збіжності ряду (3.1) є умова $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Якщо збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \quad (3.2)$$

з дійсними додатними членами, то, очевидно, що збігається ряд (3.1), який в цьому випадку буде **абсолютно збіжним**. Часто для дослідження збіжності ряду з комплексними членами розглядають ряди з дійсними членами, які є модулями членів вихідного ряду. Для рядів з дійсними додатними членами достатніми умовами збіжності є ознаки д'Аламбера та Коші.

Згідно з ознакою д'Аламбера ряд (3.2) збігається, якщо, починаючи з деякого номера N , відношення

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq l < 1$$

для всіх $n \geq N$. Згідно з ознакою Коші ряд (3.2) збігається, якщо, починаючи з деякого номера N , $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ для всіх $n \geq N$.

Означення. Якщо в області G визначено нескінченну послідовність однозначних функцій $\{u_n(z)\}$, то вираз вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \quad (3.3)$$

називають **функціональним рядом**. Функціональний ряд (3.3) називають **збіжним** в області G , якщо для довільного $z \in G$ відповідний числовий ряд збігається.

Якщо ряд (3.3) збігається в області G , то в цій області можна визначити однозначну функцію $f(z)$, значення якої у кожній точці області G дорівнює сумі відповідного числового ряду.

Означення. Якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати такий номер $N(\varepsilon)$, що для $n \geq N(\varepsilon)$ нерівність

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^n u_k(z) \right| < \varepsilon$$

виконується відразу для всіх точок z в області G , то ряд (3.3) **рівномірно збігається** в цій області.

Наведемо важливу достатню ознаку рівномірної збіжності.

Ознака Вейерштрасса. Якщо всюди в області G члени функціонального ряду (3.3) можуть бути мажоровані членами абсолютно збіжного числового ряду, то ряд (3.3) **рівномірно збігається** в області G .

За умовою має місце рівномірна оцінка

$$|u_n(z)| \leq |a_n|, z \in G. \quad (3.4)$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збігається, то для довільного $\varepsilon > 0$ мож-

на знайти таке N , що $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$ для всіх $n \geq N$. Тоді внаслідок

(3.4) в області G має місце нерівність

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon \quad \text{для } n \geq N + 1.$$

Зазначимо, що ознака Вейерштрасса є лише достатньою.

Властивості рівномірно збіжних рядів розкривають теореми.

Теорема 1. Якщо функції $u_n(z)$ неперервні в області G , а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ збігається в цій області рівномірно до функції $f(z)$, то функція $f(z)$ також є неперервною в області G .

Теорема 2. Якщо ряд неперервних функцій $u_n(z)$ збігається рівномірно в області G до функції $f(z)$, то інтеграл від цієї функції уздовж будь-якої кусково-гладкої кривої γ , яка повністю лежить в області G , можна обчислювати шляхом почленного інтегрування ряду, тобто

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} u_n(z) dz.$$

Теорема 3 (теорема Вейерштрасса). Нехай функції $u_n(z)$ аналітичні в області G , а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ збігається рівномірно в довільній замкненій підобласті $\overline{G'}$ області G до функції $f(z)$. Тоді 1) функція $f(z)$ є аналітичною в області G , 2) ряд можна диференціювати за допомогою почленного диференціювання довільну кількість разів, тобто

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(n)}(z),$$

3) ряди $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(n)}(z)$ збігаються рівномірно в будь-якій замкненій підобласті області G .

Доведення першого твердження ґрунтується на теоремі Морера, другого та третього – на інтегралі Коші.

3.2. Степеневі ряди

Раніше ми розглядали функціональні ряди (3.3) загального вигляду. Тепер розглянемо важливий випадок степеневих рядів, для яких $u_n(z) = c_n(z - z_0)^n$, де c_n – деякі комплексні числа, а z_0 – фіксована точка комплексної площини. Члени ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

є аналітичними функціями на всій комплексній площині. Зазначимо, що область збіжності степеневому ряду визначається виглядом його коефіцієнтів c_n . Тому, наприклад ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! (z - z_0)^n$$

збігається лише в точці $z = z_0$.

Для визначення області збіжності степеневому ряду використовують таку теорему.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

збігається в деякій точці $z_1 \neq z_0$, то він абсолютно збігається й у довільній точці z , що задовольняє умову $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, причому в крузі $|z - z_0| \leq \rho$ радіуса ρ , меншого за $|z_1 - z_0|$, ряд збігається рівномірно.

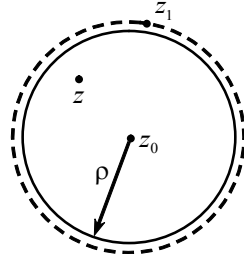


Рис. 3.1

Виберемо довільну точку z (рис. 3.1), що задовольняє умову $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, і розглянемо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (3.5)$$

Покладемо $|z - z_0| = q|z_1 - z_0|$, де $q < 1$, тоді

$$|c_n (z - z_0)^n| = |c_n| |z - z_0|^n = |c_n| |z_1 - z_0|^n q^n.$$

У силу того, що ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_1 - z_0)^n$$

збігається, абсолютне значення його доданків зменшується зі збільшенням n і в усякому випадку $|c_n| |z_1 - z_0|^n \leq M$. Тому для коефіцієнтів має місце оцінка

$$|c_n| \leq \frac{M}{|z_1 - z_0|^n}.$$

Отже,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \right| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} q^n,$$

тобто досліджуваний ряд мажорується нескінченною геометричною прогресією із знаменником, меншим від одиниці. Тому, поперше, він збігається абсолютно, по-друге, у крузі радіуса ρ і рівномірно, оскільки його можна мажорувати у цьому крузі збіжним числовим рядом.

Із цієї теореми можна зробити кілька важливих висновків.

Наслідок 1. Якщо степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

розбігається в деякій точці z_1 , то він розбігається в усіх точках z , що задовольняють умову

$$|z - z_0| > |z_1 - z_0|.$$

Припустимо супротивне. Нехай ряд збігається в точці z , але тоді в силу теореми Абеля він має збігатися й у точці $z_1 \neq z_0$, оскільки вона розташована ближче до центра розвинення z_0 , ніж точка z . Але це суперечить умові наслідку. Тому припущення про збіжність ряду в точці z приводить до протиріччя. Залишається лише одна можливість – ряд у точці z розбігається.

Розглянемо точну верхню грань R відстаней $|z - z_0|$ від точки z_0 до точки z , в яких ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

збігається. Якщо $R \neq \infty$, то в усіх точках $|z - z_0| > R$ ряд розбігається. Нехай R строго більше нуля, тоді всередині круга $|z - z_0| < R$ ряд збігається, і в точках на колі $|z - z_0| = R$ він може як збігатися, так і розбігатися.

Означення. Область $|z - z_0| < R$ ($R > 0$) називається **кругом збіжності** степеневого ряду, а число R – **радіусом збіжності**.

Таким чином, ми встановили

Наслідок 2. Для довільного степеневого ряду існує таке число R , що всередині круга $|z - z_0| < R$ ряд збігається, а зовні цього круга ряд розбігається.

Наслідок 3. Усередині круга збіжності степеневий ряд збігається до аналітичної функції.

Наслідок 4. Усередині круга збіжності степеневий ряд можна диференціювати та інтегрувати довільну кількість разів за допомогою відповідно почленного диференціювання та інтегрування вихідного ряду, причому радіус збіжності отриманих рядів дорівнює радіусу збіжності вихідного ряду.

Наслідок 5. Коефіцієнти степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

виражають через значення суми ряду $f(z)$ та її похідних у центрі круга збіжності за формулами

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0). \quad (3.6)$$

Покладемо $z = z_0$ у виразі для суми степеневого ряду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

і дістанемо значення $f(z_0) = c_0$. У виразі для похідної

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (z - z_0)^{n-1},$$

що знаходимо почленним диференціюванням вихідного ряду, покладемо $z = z_0$ і дістанемо $f'(z_0) = c_1$. Аналогічно можна поступати і далі, у результаті отримуємо (3.6).

Формула Коші–Адамара. Радіус збіжності степеневого ряду визначається формулою

$$R = \frac{1}{l}, \quad \text{де } l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}. \quad (3.7)$$

тут l – верхня границя послідовності $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$.

Нам треба довести, по-перше, що для будь-якого z_1 , що задовольняє умову $|z_1 - z_0| < 1/l$, ряд збігається. Нерівність $|z_1 - z_0| < 1/l$ можна замінити рівністю $|z_1 - z_0| = 1/(l + 2\varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$.

Оскільки l – верхня границя послідовності $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати номер N , починаючи з якого (для довільного $n \geq N(\varepsilon)$) виконується нерівність $\sqrt[n]{|c_n|} < l + \varepsilon$. Тому, якщо $n \geq N(\varepsilon)$, то

$$\sqrt[l+\varepsilon]{|c_n|} |z_1 - z_0| < (l + \varepsilon) |z_1 - z_0| = \frac{l + \varepsilon}{l + 2\varepsilon} = q < 1.$$

Отже, залишок досліджуваного ряду, тобто

$$\sum_{n=N(\varepsilon)}^{\infty} c_n (z_1 - z_0)^n,$$

мажоруються геометричною прогресією

$$\left| \sum_{n=N(\varepsilon)}^{\infty} c_n (z_1 - z_0)^n \right| \leq \sum_{n=N(\varepsilon)}^{\infty} |c_n| |z_1 - z_0|^n \leq \sum_{n=N(\varepsilon)}^{\infty} q^n,$$

знаменник якої менший за 1. Тому в точці z_1 ряд збігається.

Тепер покажемо, що ряд розбігається в точці z_2 , якщо $|z_2 - z_0| > 1/l$. Нерівність $|z_2 - z_0| > 1/l$ можна замінити рівністю $|z_2 - z_0| = 1/(l - 2\varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$, але $2\varepsilon < l$. За означенням верхньої границі послідовності, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує нескінченно багато членів $\{\sqrt[l]{|c_n|}\}$, для яких має місце нерівність $\sqrt[l]{|c_n|} > l - \varepsilon$.

Тоді для таких n

$$\sqrt[l]{|c_n|} |z_2 - z_0| > (l - \varepsilon) |z_2 - z_0| = \frac{l - \varepsilon}{l - 2\varepsilon} = q > 1.$$

$$|c_n| |z_2 - z_0|^n = \left(\frac{l - \varepsilon}{l - 2\varepsilon} \right)^n > 1.$$

Тобто безмежно велика кількість членів ряду в точці z_2 має модуль, більший за 1. Необхідна ознака збіжності ряду не задовольняється, тому ряд в точці z_2 розбігається.

Із ознаки д'Аламбера випливає ще одна формула для радіуса збіжності степеневого ряду

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \quad (3.8)$$

що є зручною для користування.

Як приклад розглянемо степеневий ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n,$$

усі коефіцієнти якого дорівнюють 1. За ознакою д'Аламбера отримаємо, що цей ряд збігається в області всередині круга $|z - z_0| < 1$ до деякої аналітичної функції. Цю функцію легко знайти

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (z - z_0)^{n+1}}{1 - (z - z_0)} = \frac{1}{1 - z + z_0}. \quad (3.9)$$

3.3. Ряд Тейлора

Попередній приклад показав, що всередині круга збіжності степеневий ряд визначає деяку аналітичну функцію. Можна поставити питання у деякому розумінні протилежне: чи можна аналітичну функцію представити деяким степеневим рядом, що збігається всередині цього круга до даної функції? Відповідь дає наступна теорема.

Теорема Тейлора. Функцію $f(z)$, що є аналітичною всередині круга $|z - z_0| < R$, можна представити в цьому крузі збіжним степеневим рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

причому цей ряд визначається однозначно.

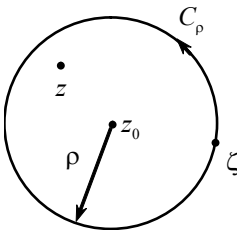


Рис. 3.2

Побудуємо коло C_ρ радіуса $\rho < R$ із центром у точці z_0 , яке охоплює точку z . Оскільки всередині кола функція $f(z)$ є аналітичною, то, згідно із формулою Коші, можна записати

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3.10)$$

Під знаком інтеграла можна зробити очевидне перетворення

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n}. \quad (3.11)$$

Тут використано оцінку $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$.

Коли $\zeta \in C_\rho$, ряд (3.11) збігається рівномірно за ζ , оскільки він мажорується збіжним числовим рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^n}{\rho^{n+1}}.$$

Підставимо (3.11) до (3.10) і почленним інтегруванням дістанемо

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n. \quad (3.12)$$

Позначимо

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (3.13)$$

і перепишемо (3.12) у вигляді збіжного в обраній точці z степеневого ряду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (3.14)$$

Згідно із теоремою Коші у (3.13) коло C_p можна замінити довільним простим (тобто без точок самоперетину) замкненим контуром C , що лежить в області $|z - z_0| < R$ та охоплює точку z_0 .

Залишається довести єдиність розвинення. Припустимо, що має місце інше збіжне розвинення

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n (z - z_0)^n,$$

але тоді всюди всередині круга $|z - z_0| < R$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n (z - z_0)^n.$$

Помножимо ліву та праву частини останньої рівності на $(z - z_0)^{-m-1}$, де m – фіксоване ціле число, і проінтегруємо почленно вздовж C_p , на якому $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$

$$\int_{C_p} (z - z_0)^{n-m-1} dz = \rho^{n-m} i \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi = \rho^{n-m} \begin{cases} 2\pi i, & \text{якщо } n = m; \\ 0, & \text{якщо } n \neq m. \end{cases}$$

Тому після інтегрування отримуємо $2\pi i c_m = 2\pi i c'_m$, тобто $c_m = c'_m$. Тим самим доведено єдиність розвинення.

Збіжний степеневий ряд називається розвиненням або **рядом Тейлора**.

Зауваження. Комплексні числа дають нам глибоке розуміння поведінки степеневих рядів, недоступне, якщо розглядати їх

структуру за дійсних значень аргументу. З'являється дуже простий алгоритм знаходження радіуса збіжності степеневого розвинення заданої функції. R визначається як відстань від точки z_0 до найближчої (на комплексній площині) особливої точки функції, до якої збігається відповідний степеневий ряд.

Приклад 1. Знайти розвинення в ряд Тейлора $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$.

Ця функція є аналітичною всюди на комплексній площині, за винятком точок $z_{1,2} = \pm i$. Тому в будь-якому крузі на комплексній площині, яке не містить точок $z_{1,2} = \pm i$, цю функцію внаслідок теореми Тейлора можна розвинути в ряд Тейлора.

Розглянемо спочатку відкритий круг $|z| < 1$. Усередині круга функцію $1/(1+z^2)$ можна розглядати як суму нескінченної спадної геометричної прогресії, тобто

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad (3.15)$$

що й являє собою шукане розвинення. Радіус збіжності цього ряду дорівнює 1.

Зараз розглянемо розвинення цієї функції у ряд Тейлора всередині круга $|z-1| < \sqrt{2}$. Безпосереднє користування виразом (3.13) приводить до громіздких обчислень коефіцієнтів c_n , тому використаємо наступне представлення

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right] = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{1-i+(z-1)} - \frac{1}{1+i+(z-1)} \right] = \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^{n+1}} \right] (z-1)^n. \end{aligned}$$

Показникова форма запису комплексних чисел $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

та $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ спрощує результат

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-\frac{n+1}{2}} \sin(\pi(n+1)/4) (z-1)^n. \quad (3.16)$$

3.4. Ряд Лорана

Ряди Тейлора зручно використовувати для аналітичних функцій у деяких кругових областях. В областях іншої форми, наприклад, коли функція аналітична в деякому околі точки z_0 всюди, за винятком самої точки z_0 , доводиться розглядати кільцеві області вигляду $0 < |z - z_0| < R$. Для таких функцій можна побудувати розвинення за додатними та від'ємними степенями $(z - z_0)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (3.17)$$

що є узагальненням ряду Тейлора та має назву **ряду Лорана**.

Розглянемо область збіжності цього ряду. Для цього перепишемо його у вигляді

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}. \quad (3.18)$$

Очевидно, що областю збіжності ряду (3.17) є спільна частина областей збіжності кожного з доданків правої частини (3.18). Областю збіжності першої суми є круг з центром в точці z_0 деякого радіуса R_1 . Усередині цього круга цей ряд збігається до деякої аналітичної функції:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R_1. \quad (3.19)$$

Для визначення області збіжності другої суми праворуч у (3.18) зробимо заміну змінної $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$. Тоді сума набуде вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n.$$

Це звичайний степеневий ряд, що збігається до деякої аналітичної функції $\varphi(\zeta)$ комплексної змінної ζ усередині круга збіжності радіуса, який позначимо $1/R_2$, тобто $|\zeta| < 1/R_2$. Повернувшись до старої змінної і позначивши $\varphi(\zeta(z)) = f_2(z)$, дістанемо

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad |z - z_0| > R_2, \quad (3.20)$$

тобто областю збіжності другого ряду за від'ємними степенями різниці $(z - z_0)$ є область, зовнішня щодо кола $|z - z_0| = R_2$.

Якщо $R_2 < R_1$, то існує спільна область збіжності цих рядів – кругове кільце $R_2 < |z - z_0| < R_1$, в якому ряд (3.18) збігається до аналітичної функції

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad R_2 < |z - z_0| < R_1. \quad (3.21)$$

При цьому $f_1(z)$ називають **правильною** частиною розвинення Лорана, а $f_2(z)$ – **головною** частиною розвинення.

Якщо $R_2 > R_1$, то ряди (3.19) та (3.20) не мають спільної області збіжності, і ряд (3.18) не збігається до жодної аналітичної функції.

Теорема 4. Функцію $f(z)$, що є аналітичною в круговому кільці

$$R_2 < |z - z_0| < R_1,$$

можна однозначно представити в цьому кільці збіжним рядом Лорана.

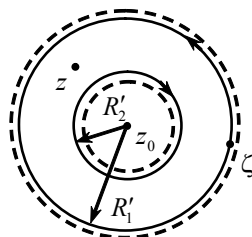


Рис. 3.3

Побудуємо в кільці $R_2 < |z - z_0| < R_1$ два кола $C_{R'_1}$ і $C_{R'_2}$ з центрами в точці z_0 (рис. 3.3). Нехай виконується умова $R_2 < R'_2 < R'_1 < R_1$. Для точки z , що задовольняє умову $R'_2 < |z - z_0| < R'_1$, згідно із формулою Коші, можна записати

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R'_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R'_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3.22)$$

На колі $C_{R'_1}$ виконується нерівність

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < q < 1,$$

тому зручним буде представлення

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

що приводить до степеневому ряду для першого інтеграла в (3.22)

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (3.23)$$

тут

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \geq 0. \quad (3.24)$$

На колі C_{R_2} виконується нерівність

$$\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < q < 1,$$

тому зручним буде інше представлення

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}},$$

що приводить до степеневого ряду з від'ємними степенями для другого інтеграла в (3.22)

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad (3.25)$$

тут

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta, \quad n > 0. \quad (3.26)$$

Оскільки підінтегральні функції у (3.24) і (3.26) є аналітичними в круговому кільці, то внаслідок теореми Коші контури інтегрування можна довільно деформувати в цьому кільці. Зокрема, їх можна зробити однаковими, що приводить до

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.27)$$

де C – довільний простий замкнений контур, який лежить у кільці $R_2 < |z - z_0| < R_1$ та охоплює точку z_0 .

Залишається довести єдиність розвинення. Припустимо, що має місце інше розвинення

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z - z_0)^n,$$

але тоді всюди всередині кільця $R_2 < |z - z_0| < R_1$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z - z_0)^n \quad (3.28)$$

Проведемо коло C_R радіуса R , де $R_2 < R < R_1$, із центром в точці z_0 . Ряди (3.28) збігаються на C_R рівномірно. Помножимо їх на $(z - z_0)^{-m-1}$, де m – фіксоване ціле число, і проінтегруємо почленно вздовж кола C_R , на якому $z - z_0 = Re^{i\varphi}$

$$\int_{C_R} (z - z_0)^{n-m-1} dz = R^{n-m} i \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi = R^{n-m} \begin{cases} 2\pi i, \text{ якщо } n = m; \\ 0, \text{ якщо } n \neq m. \end{cases}$$

Тому після інтегрування отримуємо $2\pi i c_m = 2\pi i c'_m$, тобто $c_m = c'_m$. Тим самим доведено єдиність розвинення.

3.5. Особливі точки

Нехай функцію $f(z)$ задано в області G . Точка z_0 області G називається **правильною точкою** функції $f(z)$, якщо існує степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (3.29)$$

збіжний в околі точки z_0 до $f(z)$, причому радіус збіжності цього ряду відмінний від нуля. Іншими словами, точка z_0 називається **правильною точкою** функції $f(z)$, якщо $f(z)$ в околі точки z_0 може бути розвинена в ряд Тейлора та цей ряд є збіжним всередині круга $|z - z_0| < \rho$, де $\rho > 0$.

Точки області G , які не є правильними точками функції $f(z)$, називаються її **особливими точками**.

Означення. Точка z_0 називається **ізолюваною особливою точкою** функції $f(z)$, якщо існує такий окіл $0 < |z - z_0| < R$ цієї точки (за винятком самої точки z_0), в якому функція $f(z)$ є аналітичною. У самій точці z_0 функція $f(z)$ може бути невизначена.

Розглянемо поведінку аналітичних функцій в околі точок найпростішого типу, де порушується аналітичність цих функцій.

Тут можливі три випадки, залежно від яких здійснюється класифікація ізолюваних особливих точок.

1. При наближенні до точки z_0 існує обмежене граничне значення $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$. Така особлива точка називається **усувною**.

Ряд Лорана для функції $f(z)$ в області $0 < |z - z_0| < R$ не містить членів з від'ємними степенями $(z - z_0)$. У цьому випадку граничне значення функції $f(z) = c_0$ при $z \rightarrow z_0$. Термін усувна означає, що можна покласти $f(z_0) = c_0$, причому $|c_0| < \infty$, тобто довизначити функцію й таким чином усунути особливість у точці z_0 .

Зазначимо, що в околі усувної особливої точки, коли функція $f(z)$ обмежена, її можна представити у вигляді

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z), \quad (3.30)$$

де $m \geq 0$ – ціле число, $\varphi(z_0) \neq 0$. Якщо при цьому $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$, то в (3.30) $m > 0$ називається **порядком нуля** функції $f(z)$ у точці $z = z_0$.

Приклад 2. Функція $\sin \frac{z}{z}$ у початку координат має усувну особливу точку. Дійсно, за будь-якого $z \neq 0$ можна записати

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots,$$

тобто ряд Лорана містить тільки правильну частину.

2. При наближенні до точки z_0 функція $f(z)$ нескінченно зростає за модулем, тобто $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$. У цьому випадку

точка z_0 називається **полюсом** функції $f(z)$.

Теорема 5. Для того, щоб точка z_0 була полюсом функції $f(z)$, необхідно й достатньо, щоб головна частина ряду Лорана $f(z)$ в околі точки z_0 містила лише обмежену кількість членів

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k. \quad (3.31)$$

Тут $c_{-m} \neq 0$, і додатне число m визначає порядок полюса.

Доведення не наводимо.

Функцію (3.31) можна представити у вигляді

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^m}, \quad \text{де } \psi(z) \text{ – аналітична в точці } z = z_0 \text{ функція.}$$

Точка $z = z_0$ для $f(z)$ є полюсом порядку m .

Функцію $g(z) = 1/f(z)$ можна записати як $g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, де $\varphi(z_0) \neq 0$. Згідно із (3.30), для неї точка $z = z_0$ є нулем m порядку. Тобто встановлено простий зв'язок

між нулями й полюсами функцій – точка z_0 , що є нулем порядку m аналітичної функції $g(z)$, одночасно є полюсом того самого порядку функції $f(z)=1/g(z)$.

Приклад 3. Функція $\frac{1}{e^{z^2} + 1}$ має нескінченну кількість полюсів у точках $z = \pm\sqrt{\pi(2k+1)i}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Дійсно, функція $g(z) = \frac{1}{f(z)} = e^{z^2} + 1$ має в цих точках нулі першого порядку, оскільки в них $e^{z^2} = -1 = e^{\pi(2k+1)i}$, і похідна $(e^{z^2} + 1)' = 2ze^{z^2}$ не дорівнює нулю. Отже, усі ці полюси – першого порядку та розташовані на двох бісектрисах координатних кутів.

3. При наближенні до точки z_0 не існує граничного значення $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)|$. У цьому випадку точка z_0 називається **істотно**

особливою точкою.

Теорема 6. Точка z_0 тоді й тільки тоді є істотно особливою точкою функції $f(z)$, коли головна частина ряду Лорана в околі точки z_0 містить нескінченну кількість членів.

Доведення не наводимо.

Приклад 4. Функція $e^{1/z}$ має в точці $z = 0$ істотно особливу точку.

Дійсно, за будь-якого $z \neq 0$ можна записати

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots,$$

тобто головна частина ряду Лорана містить необмежену кількість членів.

Теорема Сохоцького–Вейерштрасса. Яким би не було $\varepsilon > 0$, у будь-якому околі істотно особливої точки z_0 функції $f(z)$ знайдеться принаймні одна точка z_1 , в якій значення функції $f(z)$ відрізняється від довільного заданого комплексного числа B за модулем менш, ніж на ε .

$$|f(z_1) - B| < \varepsilon.$$

Зауваження щодо знаходження області $0 < |z - z_0| < R$ збіжності ряду

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Значення R визначають як відстань від точки z_0 до найближчої особливої точки функції $f(z)$.

Однозначні аналітичні функції можна розділити на два найпростіших класи за характером їх особливих точок.

1. Означення. Функція $f(z)$ називається **цілою** або **голоморфною**, якщо вона взагалі не має особливих точок.

Відповідно до теореми Тейлора (див. п. 3.3) довільну цілу функцію можна представити степеневим рядом $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, що збіжний

в усій комплексній площині. Правильним є й зворотнє твердження: якщо функцію всюди можна представити у вигляді збіжного степеневого ряду, вона є цілою функцією.

Прикладами цілих функцій можуть служити всі поліноми, показникові функції, $\sin z$, $\cos z$ тощо. Сума, добуток цілих функцій також будуть цілими функціями.

2. Означення. Функція $f(z)$ називається **дробовою** або **мероморфною**, якщо вона не має інших особливостей, крім полюсів.

Прикладами мероморфних функцій можуть служити дробово-раціональні функції.

Задачі

Знайти радіус збіжності ряду

3.1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$. **3.2.** $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln n} z^{2n}$. **3.3.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

3.4. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

3.5. Довести рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n\varphi}{n} = \frac{\varphi}{2}, \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

Використати теорему Абеля: якщо числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n$$

збігається, то $\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n$, $0 < r < 1$.

3.6. Розвинути в ряд Тейлора за степенями z
 $f(z) = (z + a)^\alpha$, $a^\alpha \equiv e^{\alpha \ln a}$.

3.7. Розвинути в ряд Тейлора за степенями $(z - 1)$

$$f(z) = \frac{z^2}{(1+z)^2}.$$

3.8. Розвинути в ряд Тейлора за степенями z

$$f(z) = e^z \ln(1+z).$$

3.9. В околі початку координат розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = e^{1/z}$.

3.10. Розвинути функцію $f(z) = 1/(z^2 - 4)$ у ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки.

3.11. Розвинути функцію $f(z) = 1/(2z - 5)$ у ряд Лорана в околі:

а) $z_0 = 0$; б) нескінченності.

3.12. В околі початку координат розвинути в ряд Лорана функцію $\sin(1/z)$.

3.13. Розвинути функцію $f(z) = 1/(z^2 - 4)$ у ряд Лорана в околі точки $z_0 = 2$.

3.14. Розвинути функцію $f(z) = 1/(z^3 + 1)$ у ряд Лорана в околі:
а) $z_0 = 0$, б) нескінченності.

3.15. Розвинути функцію $f(z) = (1 + z^2)^{-2}$ у ряд Лорана в околі точки $z_0 = i$.

У прикладах **3.16–3.19** знайти особливі точки функцій та визначити їх характер.

3.16. $\operatorname{ctg} z - (1/z)$.

3.17. $(z^2 + 4)^{-2}/z$.

3.18. а) $\frac{e^z - 1}{z}$; б) $\frac{1}{z^3}$; в) e^{1/z^2} ; з) $\frac{1 - e^{-z}}{z}$; д) $\frac{1 - \cos z}{z^7}$.

3.19. $f(z) = \frac{1}{e^{1/z} + 1}$.

3.20. Визначити, яку особливість у нескінченно віддаленій точці має функція:

а) $f(z) = 1/(2 - z)$; б) $f(z) = e^z$; в) $f(z) = \sin z$; г) $f(z) = \cos z$.

Розділ 4

Аналітичне продовження

4.1. Єдиність визначення аналітичної функції

Для визначення функції, аналітичної у даній області, можна обмежитися заданням значень цієї функції не в усій області. Раніше вже було показано, що аналітична функція повністю визначається своїми значеннями на межі області аналітичності. Виникає питання: якою є мінімальна інформація для того, щоб повністю визначити функцію, аналітичну в даній області? Покажемо, що аналітична функція повністю визначається своїми значеннями на довільній послідовності точок, що збігається до деякої внутрішньої точки області аналітичності.

Означення. Нулем аналітичної функції $f(z)$ називають довільну точку $z = a$, в якій $f(a) = 0$.

Якщо в околі цієї точки аналітична функція не дорівнює тотожно нулю, то у відповідному розвиненні в ряд Тейлора в околі точки a всі коефіцієнти не можуть дорівнювати нулю.

Означення. Номер молодшого, відмінного від нуля, коефіцієнта цього розвинення називають **порядком нуля** a .

Таким чином, в околі нуля порядку n ряд Тейлора для функції має вигляд

$$f(z) = c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \dots, \quad (4.1)$$

де $c_n \neq 0$ та $n \geq 1$. Це надає можливість представити аналітичну функцію в околі нуля порядку n у вигляді

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z), \quad (4.2)$$

де функція

$$\varphi(z) = c_n + c_{n+1}(z-a)^1 + \dots; \quad \varphi(a) = c_n \neq 0 \quad (4.3)$$

є аналітичною в околі точки a . Унаслідок неперервності ця функція відмінна від нуля також в деякому околі точки a . Звідси випливає теорема.

Теорема 1. Нехай функція $f(z)$ – аналітична в околі свого нуля a та не дорівнює тотожно нулю в жодному його околі. Тоді існує окіл точки a , в якому $f(z)$ не має інших нулів, крім a .

Теорема 2. Нехай функція $f(z)$ – аналітична в області G і дорівнює нулю в різних точках $z_n \in G$, $n = 1, 2, \dots$. Якщо нескінченна послідовність $\{z_n\}$ збігається до границі a , що належить тій самій області, то функція $f(z)$ тотожно дорівнює нулю в області G .

Оскільки $a \in G$, то функцію $f(z)$ можна розвинути в степеневий ряд в околі цієї точки

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

причому радіус збіжності R_0 цього ряду не перевищує відстань від точки a до межі області. Із означення неперервності $f(z)$ випливає, що $f(a) = 0$, отже $c_0 = 0$, і розвинення функції $f(z)$ в ряд в околі точки a має вигляд $f(z) = (z-a)f_1(z)$, де

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (z-a)^n.$$

Припустимо, що всі точки послідовності z_n відмінні від a . Це не зменшує загальності, оскільки тільки одна із них могла б дорівнювати a . У силу цього має бути $f_1(z_n) = 0$ і за означенням неперервності функції $f_1(a) = 0$. Звідси $c_1 = 0$, і розвинення функції $f_1(z)$ у ряд в околі точки a має вигляд

$$f_1(z) = (z-a)f_2(z), \text{ де } f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z-a)^n.$$

Аналогічно отримуємо, що й $f_2(a) = 0$, тобто $c_2 = 0$. Продовжуючи неперервно цей процес, отримаємо, що всі коефіцієнти c_n у розвиненні $f(z)$ в степеневий ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

в околі точки a дорівнюють нулю. Звідси випливає, що $f(z) \equiv 0$ всередині круга $|z-a| < R_0$.

Тепер доведемо тотожну рівність функції $f(z)$ нулю в усій області G . Для цього достатньо показати, що $f(\zeta) = 0$, де ζ – довільна точка, що лежить зовні круга $|z-a| < R_0$. Сполучаємо точки ζ та a спрямляючою кривою L , що повністю належить області G і роз-

ташована на відстані $d > 0$ від її межі (рис. 4.1). Довільну точку круга $|z - a| < R_0$, що лежить в області G , можна розглядати як границю послідовності нулів функції $f(z)$. Тому виберемо за новий центр розвинення точку a_1 перетину кривої L із колом $|z - a| = R_0$ та отримаємо, що $f(z) \equiv 0$ усередині круга збіжності такого розвинення. Радіус останнього круга $R_1 \geq d$. Про-

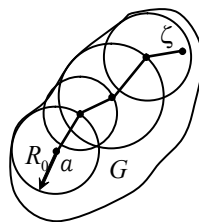


Рис. 4.1

довжуючи аналогічно, покриємо всю криву L скінченим числом кругів із радіусами, не меншими від d , усередині яких $f(z) \equiv 0$. При цьому точка ζ потрапляє всередину останнього круга, тому $f(\zeta) = 0$.

Доведена теорема має низку наслідків.

Наслідок 1. Функція $f(z)$, що не тотожно дорівнює нулю та є аналітичною в області G , у будь-якій замкненій підобласті $\overline{G'}$ області G має лише скінченну кількість нулів.

Наслідок 2. Аналітична функція може мати безмежну кількість нулів лише у відкритій або необмеженій області.

Теорема 3 (про єдиність визначення). Якщо функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ аналітичні в області G , і їх значення однакові на деякій послідовності точок $\{z_n\}$, що збігається до внутрішньої точки a області G , то всюди в G

$$f_1(z) = f_2(z).$$

Розглянемо функцію $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$. Вона є аналітичною в G і має своїми нулями точки z_n , а в силу неперервності – й точку a , тому що $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(a)$. Звідси випливає, що $f(z)$ тотожно дорівнює нулю в деякому околі a .

Наслідок. Якщо аналітичні в області G функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ збігаються на деякій кривій $L \in G$, то вони тотожно рівні в цій області.

Теорема 3 про єдиність визначення аналітичної функції дозволяє автоматично поширити на комплексну область елементарні функції дійсної змінної. Нехай на відрізку $[a, b]$ дійсної осі x задано неперервну функцію $f(x)$ дійсної змінної. Тоді в

деякій області G комплексної площини, що містить відрізок $[a, b]$ дійсної осі, може існувати лише одна аналітична функція $f(z)$, яка набуває заданих значень $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Функцію $f(z)$ називають **аналітичним продовженням** функції $f(x)$ дійсної змінної у комплексну область G .

4.2. Аналітичне продовження

Нехай на комплексній площині задано дві області G_1 і G_2 , що мають спільну область G_{12} . Нехай однозначні аналітичні функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$, які задано в областях G_1 і G_2 , відповідно, тотожно збігаються в області G_{12} . Тоді функція $F(z)$, визначена співвідношенням

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1, \\ f_2(z), & z \in G_2, \end{cases} \quad (4.4)$$

є аналітичною функцією в розширеній області $G = G_1 + G_2$ і збігається з $f_1(z)$ в G_1 та з $f_2(z)$ в G_2 . Функцію $F(z)$ називають **аналітичним продовженням** $f_1(z)$ (чи $f_2(z)$) на область $G = G_1 + G_2$. Аналітичне продовження $F(z)$ (якщо воно можливе) функції $f_1(z)$ на область $G = G_1 + G_2$, згідно з теоремою про єдиність, визначається однозначно.

Аналітичне продовження можна здійснити, наприклад за допомогою степеневих рядів. Нехай функція $f_1(z)$ є аналітичною в області G_1 . Виберемо довільну точку $z_0 \in G_{12}$ і розвинемо $f_1(z)$ у степеневий ряд в околі цієї точки. Якщо радіус збіжності R_0 цього степеневих ряду більший, ніж відстань до межі області G_1 , то область G_2 , що являє собою круг $|z - z_0| < R_0$, уже не є під-областю області G_1 , а має з нею лише спільну частину. В області G_2 збіжний степеневий ряд визначає аналітичну функцію $f_2(z)$, яка збігається з $f_1(z)$ в G_{12} та є аналітичним продовженням на G_2 .

4.3. Ріманові поверхні

Нехай функції $f_1(z)$ та $f_2(z)$, які задано, відповідно, в областях G_1 та G_2 , тотожно збігаються лише на частині G'_{12} перерізу областей G_1 та G_2 . Розглянемо $G = G_1 + G_2 - G''_{12}$, де $G''_{12} = G_{12} - G'_{12}$ -

та частина перерізу G_{12} , в якій функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ – різні. Згідно із попереднім, у G визначено єдину аналітичну функцію $F(z)$, яка є аналітичним продовженням функції $f_1(z)$, що задана в області G_1 , на область G . Ця функція тотожно збігається з $f_1(z)$ в області $G_1 - G''_{12}$ і з $f_2(z)$ в області $G_2 - G''_{12}$. Функцію $F(z)$ можна продовжити на множину G''_{12} двома способами:

$$F_1(z) = \begin{cases} F(z), & z \in G; \\ f_1(z), & z \in G''_{12}; \end{cases} \quad \text{або} \quad F_2(z) = \begin{cases} F(z), & z \in G; \\ f_2(z), & z \in G''_{12}. \end{cases}$$

Таким чином, ми отримали багатозначну аналітичну функцію $F(z)$, визначену в області $G = G_1 + G_2$, яка набуває різних значень в одних і тих самих точках частини G''_{12} області G .

Ми вже говорили, що при розгляді багатозначної функції вводять поняття гілки багатозначної функції. Виділивши ту чи іншу гілку багатозначної функції, отримують однозначну та неперервну функцію в деякій області визначення багатозначної функції. Однак є також інша можливість зведення багатозначної функції до однозначної. Ця можливість полягає в тому, щоб розглядати дану функцію як однозначну, але визначену на складнішому багатовиді, ніж звичайна площина комплексної змінної.

Проілюструємо це на наведеному вище прикладі двозначної функції. Нехай області G_1 і G_2 склеєні на спільній частині G'_{12} , де функції $f_1(z)$ та $f_2(z)$ збігаються, а дві частини G''_{12} , які належать областям G_1 і G_2 , залишені вільними. Тоді на отриманому багатовиді функція $F(z)$ однозначно аналітична. Побудований таким чином багатовид називають **рімановою поверхнею** функції $F(z)$, яка є аналітичним продовженням функції $f_1(z)$ ($f_2(z)$), а окремі частини областей, що повторюються, є різними листами ріманової поверхні.

Означення. Функція $F(z)$, отримана шляхом аналітичного продовження вздовж усіх можливих ланцюжків областей, що виходять із області G_1 початкового визначення аналітичної функції $f_1(z)$, називається **повною аналітичною функцією**. Її область визначення R називається **природною областю існування** повної аналітичної функції. Природна область існування повної аналітичної функції може бути рімановою поверхнею.

Аналітична функція $f(z)$, задана в G , якщо G не збігається з R , називається **елементом повної аналітичної функції** $F(z)$. Аналітичне продовження функції $f_1(z)$, заданої в G_1 , на область G_2 , що має з G_1 спільну частину G_{12} , називатимемо безпосереднім аналітичним продовженням функції $f_1(z)$.

4.4. Аналітичне продовження гамма-функції

Гамма-функція визначається інтегралом

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (4.5)$$

Тут інтегрування здійснюється вздовж додатної дійсної півосі. Інтеграл абсолютно збіжний та є аналітичною функцією для всіх z , що лежать у правій півплощині $\operatorname{Re} z > 0$, оскільки $|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{x-1}$.

Знайдемо інше представлення гамма-функції, яке правильне в більш широкій області значень аргументу, тобто здійснимо аналітичне продовження гамма-функції.

Розглянемо функцію

$$F(z) = \int_C e^{-\zeta} \zeta^{z-1} d\zeta, \quad (4.6)$$

де контур C складається із двох берегів розрізу по додатній півосі та розімкненого кола $C_r: |\zeta| = r$ (рис. 4.2).

Під ζ^{z-1} розуміємо функцію $e^{(z-1)\ln \zeta}$, де $\ln \zeta$ – гілка логарифма, для якої $0 < \arg z < 2\pi$. Поклавши на верхньому

березі розрізу $\zeta = t$, а на нижньому – $\zeta = te^{2\pi i}$, можна представити $F(z)$ у вигляді

$$F(z) = \int_r^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt + \int_{C_r} e^{-\zeta} \zeta^{z-1} d\zeta + e^{2\pi iz} \int_r^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (4.7)$$

За фіксованого r невластний інтеграл $\int_r^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ збігається рівномірно щодо z у довільній обмеженій області значень

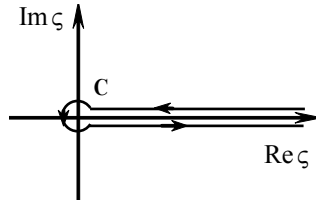


Рис. 4.2

$z = x + iy$. Це впливає з того, що при $|z| < M$ підінтегральна функція мажорується функцією $e^{-t} t^{M-1}$, інтеграл від якої на інтервалі (r, ∞) є збіжним. Таким чином, функція $F(z)$ є аналітичною для всіх скінченних z (є цілою функцією).

На C_r , де $\zeta = r e^{i\varphi}$, маємо $\left| e^{-\zeta} \zeta^{z-1} \right| = e^{-r \cos \varphi} r^{x-1} e^{-y\varphi}$. Тому справедлива оцінка

$$\left| \int_{C_r} e^{-\zeta} \zeta^{z-1} d\zeta \right| < r^{x-1} \int_0^{2\pi} e^{-r \cos \varphi - y\varphi} r d\varphi = A r^x$$

та $A r^x$ прямує до нуля, якщо $r \rightarrow 0$, лише для додатних $x = \operatorname{Re} z$. Отже, при $\operatorname{Re} z > 0$ можна перейти до границі, коли $r \rightarrow 0$, і дістати

$$F(z) = \left(e^{2\pi iz} - 1 \right) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \left(e^{2\pi iz} - 1 \right) \Gamma(z) \quad (4.8)$$

(при $\operatorname{Re} z < 0$ такий перехід не є законним). Із (4.8) маємо інтегральне представлення Ханкеля для гамма-функції

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \int_C e^{-\zeta} \zeta^{z-1} d\zeta. \quad (4.9)$$

Зазначимо, що права частина (4.9) являє собою відношення двох цілих функцій $F(z)$ та $e^{2\pi iz} - 1$. У правій півплощині вона збігається з аналітичною функцією $\Gamma(z)$ (4.5). Отже, (4.9) дає аналітичне продовження $\Gamma(z)$ на ліву півплощину. У лівій півплощині $\Gamma(z)$ виявляється аналітичною всюди, за винятком від'ємних[■] цілих значень $z = -n$ та $z = 0$, в яких знаменник в (4.9) дорівнює нулю.

Замінімо в (4.9) z на $(1-z)$:

$$\begin{aligned} \Gamma(1-z) &= \frac{1}{e^{-2\pi iz} - 1} \int_C e^{-\zeta} \zeta^{-z} d\zeta = \frac{e^{-\pi iz}}{e^{-2\pi iz} - 1} \int_C e^{-\zeta} (-\zeta)^{-z} d\zeta = \\ &= \frac{i}{2 \sin \pi z} \int_C e^{-\zeta} (-\zeta)^{-z} d\zeta = \frac{-i}{2 \sin \pi z} \int_{C^*} e^{\zeta} \zeta^{-z} d\zeta \end{aligned} \quad (4.10)$$

та скористаємося формулою

[■] Для додатних цілих значень $z = n$ функція $\Gamma(z)$ є аналітичною, $\Gamma(n) = (n-1)!$. Значить, за цих значень обертається в нуль як знаменник, так і контурний інтеграл в (4.9).

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

справедливою для довільного комплексного z . У (4.10) у результаті зробленої заміни змінної $-z$ на z контур C перейшов – у кон-

тур C^* (відповідно, точка $t + i\varepsilon$ на верхньому березі розрізу контуру C перейшла в точку $-(t + i\varepsilon) = -t - i\varepsilon$ на нижньому березі контуру C^*) (рис. 4.3). Маємо інше інтегральне представлення Ханкеля для гамма-функції:

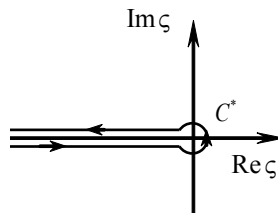


Рис. 4.3

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} e^{\zeta} \zeta^{-z} d\zeta. \quad (4.11)$$

Розділ 5

Застосування теорії функцій до аналізу

5.1. Ряди Тейлора та Лорана

Нагадаємо основні положення щодо розвинення функцій у ряди Тейлора та Лорана. У розд. 3 було показано, що аналітичну всередині круга $|z - z_0| < R$ функцію f можна представити у цьому крузі збіжним рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (5.1)$$

Його коефіцієнти обчислюють за формулами

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.2)$$

де C – довільний простий замкнений контур, що охоплює точку z_0 і належить кругу збіжності ряду $|z - z_0| < R$.

Безпосереднім обчисленням похідних від елементарних функцій e^z , $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ одержують наступні збіжні на всій комплексній площині розвинення:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty; \quad (5.3)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty; \quad (5.4)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |z| < \infty; \quad (5.5)$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty; \quad (5.6)$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |z| < \infty. \quad (5.7)$$

Покажемо ще збіжні в області $|z| < 1$ розвинення:

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \quad |z| < 1; \quad (5.8)$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1; \quad (5.9)$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1. \quad (5.10)$$

Розвинення функцій e^z , $\cos z$, $\sin z$, $(1+z)^\alpha$, $\ln(1+z)$ в околі нуля для дійсної змінної $z = x$ відомі із математичного аналізу як розвинення в ряд Маклорена.

Значимо, що для знаходження коефіцієнтів розвинення c_n необов'язково використовувати безпосередньо формули (5.2). Може бути доцільним використання відомих розвинень (5.3)–(5.10) і застосування різних штучних методів.

Нехай задано дві аналітичні в околі точки z_0 функції $f(z)$ і $g(z)$, які представляють степеневі ряди

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-z_0)^n, \quad (5.11)$$

збіжні в області $|z-z_0| < R$. Тоді мають місце розвинення

$$Af(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Ac_n (z-z_0)^n, \quad A = \text{const}, \quad (5.12)$$

$$f(z) \pm g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \pm d_n) (z-z_0)^n, \quad (5.13)$$

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n c_k d_{n-k} \right) (z-z_0)^n, \quad (5.14)$$

збіжні в області $|z-z_0| < R$.

Приклад 1. Знайти розвинення функції $f(z) = \frac{1}{(1-z^2)(z^2+4)}$

в околі точки $z_0 = 0$.

Доцільно представити $f(z)$ у вигляді суми простих дробів

$$f(z) = \frac{1}{5} \left\{ \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{z^2+4} \right\} = \frac{1}{5} \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{20} \frac{1}{(1+z^2/4)}.$$

Кожен із отриманих доданків можна розглядати як суму нескінченної збіжної геометричної прогресії. Skorиставшись для кожного із додатків відомим розвиненням (5.9), маємо

$$f(z) = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^n + \frac{1}{20} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z^2}{4}\right)^n = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\right), \quad |z| < 1.$$

Наведемо деякі прийоми розвинень, що є корисними для розв'язувань задач:

1) представлення функції у вигляді суми простіших дробів, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, відомий із математичного аналізу. Наприклад,

$$\frac{1}{(z+1)(z-2)} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+1} \right).$$

Після відповідного перетворення простих дробів варто використати розвинення (5.8) або (5.9);

2) можна спростити раціональну функцію множенням чисельника і знаменника на відповідний множник. Наприклад,

$$\frac{z^3}{(z^2+1)(z-1)} = \frac{z^3(z+1)}{(z^2+1)(z-1)(z+1)} = \frac{z^4+z^3}{z^4-1} = -\frac{z^4}{1-z^4} - \frac{z^3}{1-z^4};$$

$$\frac{1}{1+z+z^2} = \frac{(1-z)}{(1+z+z^2)(1-z)} = \frac{1-z}{1-z^3} = \frac{1}{1-z^3} - \frac{z}{1-z^3}.$$

Тут кожен отриманий праворуч доданок можна розглядати як суму відповідної нескінченної збіжної геометричної прогресії в області $|z| < 1$;

3) при розвиненні функції, що являє собою комбінацію із тригонометричних та експоненціальних функцій, рекомендується перейти до комбінації тільки експоненціальних функцій.

Приклад 2. Знайти розвинення функції $f(z) = e^z \cos z$ в околі точки $z_0 = 0$.

Щоб розвинути функцію $f(z)$ у ряд в околі точки $z_0 = 0$, можна перемножити ряди для e^z (5.3) та $\cos z$ (5.4), але для більш ефективного знаходження коефіцієнтів розвинення зручніше скористатися тотожністю

$$e^z \cos z = \frac{e^z}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2} \{ e^{z(1+i)} + e^{z(1-i)} \}.$$

Оскільки $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$, $1-i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$ (обмежимося тільки головним значення аргументу, оскільки при піднесенні цих комплексних чисел до цілого додатного степеня врахування

інших значень аргументу нових незалежних значень не дає), то в силу розвинення (5.3) маємо

$$e^z \cos z = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left\{ (1+i)^n + (1-i)^n \right\} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} z^n \frac{e^{i\pi n/4} + e^{-i\pi n/4}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2} z^n}{n!} \cos \frac{\pi n}{4}$$

– ряд, збіжний для всіх скінченних z .

Приклад 3. У деяких випадках досить легко отримати ряд Тейлора для неелементарних функцій, що виражаються за допомогою інтегралів.

1. Функція ймовірностей похибок визначається інтегралом

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta, \quad (5.15)$$

що не виражається через елементарні функції. Щоб отримати розвинення $\operatorname{erf} z$ у ряд Тейлора відносно точки $z_0 = 0$, достатньо розвинути $\exp(-\zeta^2)$ у ряд за степенями $(-\zeta^2)^n$ і проінтегрувати почленно

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}. \quad (5.16)$$

Цей ряд збігається за всіх скінченних z . При $z \rightarrow \infty$ на дійсній півосі функція прямує до граничного значення

$$\operatorname{erf}(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 1.$$

Але за довільного прямування $z \rightarrow \infty$ (не вздовж дійсної осі) граничного значення $\operatorname{erf} z$ не існує, тому $z = \infty$ є істотною особливою точкою $\operatorname{erf} z$.

2. Аналогічно можна отримати розвинення інтегрального синуса

$$\operatorname{si} z = \int_0^z \frac{\sin \zeta}{\zeta} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad (5.17)$$

що збігається для всіх скінченних z .

3. Поліном Лежандра $P_n(z)$ визначають як коефіцієнт біля w^n у розвиненні Тейлора для функції, що називають твірною для поліномів Лежандра:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zw+w^2}} = 1 + P_1(z)w + P_2(z)w^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)w^n. \quad (5.18)$$

$P_0(z) = 1$. Продиференціюємо (5.18) за w

$$\frac{z-w}{\sqrt{(1-2zw+w^2)^3}} = P_1(z) + 2P_2(z)w + 3P_3(z)w^2 + \dots$$

Порівнявши цю рівність із (5.18), отримаємо

$$\begin{aligned} (1-2zw+w^2)(P_1(z) + 2P_2(z)w + \dots + nP_n(z)w^{n-1} + \dots) = \\ = (z-w)(P_0(z) + P_1(z)w + P_2(z)w^2 + \dots + P_n(z)w^n + \dots). \end{aligned}$$

Прирівняємо коефіцієнти біля однакових степенів w і знайдемо

$$P_1(z) = z, \quad 2P_2(z) - 2zP_1(z) = -1 + zP_1(z) \quad \text{або} \quad P_2(z) = \frac{3z^2 - 1}{2},$$

і далі рекурентну формулу

$$(n+1)P_{n+1}(z) - 2nzP_n(z) + (n-1)P_{n-1}(z) = zP_n(z) - P_{n-1}(z),$$

або

$$(n+1)P_{n+1}(z) - (2n+1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0. \quad (5.19)$$

Використовуючи (5.19), за двома першими поліномами легко знайти інші.

Ряди Лорана є узагальненням рядів Тейлора. За їх допомогою можна представляти функції, що є аналітичними в кругових кільцях $r < |z - z_0| < R$ ($r \geq 0, R < \infty$),

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (5.20)$$

Коефіцієнти ряду Лорана обчислюють за формулами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (5.21)$$

де C – довільний простий замкнений контур, що охоплює точку z_0 і належить області аналітичності функції f .

Значимо, що для знаходження коефіцієнтів розвинення c_n в (5.20) не обов'язково використовувати безпосередньо формули (5.21). Тут також можна скористатися прийомами отримання розвинень, які описано вище, для розвинень Тейлора в околі правильної точки.

5.2. Ділення степеневих рядів

Розглянемо задачу про пошук коефіцієнтів розкладу в ряд Тейлора в околі точки $z_0 = 0$ функції, що дорівнює відношенню двох аналітичних функцій, ряди Тейлора яких відомі.

Нехай задано два степеневі ряди

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad (5.22)$$

причому $f_2(0) = b_0 \neq 0$. Центри областей збіжності цих рядів збігаються з початком координат. Нехай особливі точки функції f_1 мають своїми модулями множину значень (R'_1, R'_2, \dots) , функції f_2 , відповідно, $-(R''_1, R''_2, \dots)$, і нулі функції f_2 мають своїми модулями множину значень (R'''_1, R'''_2, \dots) . Нехай R – найменший із усіх цих модулів. Тоді всередині круга $|z| < R$ частку при діленні цих рядів знов можна представити у вигляді степеневого ряду

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \quad (5.23)$$

Для визначення коефіцієнтів c_n використаємо співвідношення

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (5.24)$$

яке випливає із (5.23). Оскільки ліворуч в (5.24) підсумовування здійснюється по всіх цілочислових точках у першому квадранті на площині (n, k) (рис. 5.1), то можна перейти до нової змінної $n + k = m$ замість $k = m - n$ і підсумовування здійснити в іншому порядку. Спочатку за всіма вузлами, що представлені точками по бісектрисі першого квадранту, на якій m змінюється від нуля до нескінченності, а потім по вузлах, що потрапили на обмежені відрізки, перпендикулярні до бісектриси, на яких n змінюється від нуля до m . Процедуру обчислення відображає рівність

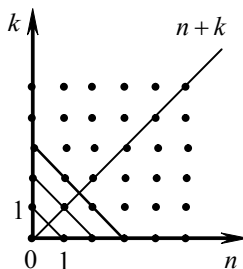


Рис. 5.1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_n c_k z^{n+k} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{n=0}^m b_n c_{m-n}. \quad (5.25)$$

Тоді, збираючи коефіцієнти біля однакових степенів z^n у (5.24), знайдемо

$$b_0 c_0 = a_0, \quad b_0 c_1 + b_1 c_0 = a_1, \dots, b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \dots + b_n c_0 = a_n, \dots \quad (5.26)$$

Маємо рекурентні співвідношення, які дозволяють послідовно знайти $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$.

Приклад 4. Знайти коефіцієнти розвинення для функції $f(z) = \frac{\sin z}{\cos z}$.

$$\text{Тут ми маємо } a_{2k} = 0, \quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, \quad b_{2k+1} = 0,$$

$b_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$. Тоді послідовно із (5.26) можна знайти

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \dots \Rightarrow \operatorname{tg} z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots$$

Приклад 5. Знайти коефіцієнти B_n у розвиненні функції

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n. \quad (5.27)$$

Помноживши ліву та праву частину (5.27) на $e^z - 1$ і скориставшись (5.3), можна записати

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

або

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}. \quad (5.28)$$

Оскільки праворуч в (5.28) можна перейти до нової змінної $n+k=m$ і змінити порядок підсумовування (див. рис. 5.1), тобто скористатися рівністю

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{n=0}^m \frac{B_n}{n!(m-n+1)!} \quad (5.29)$$

то, збираючи коефіцієнти біля однакових степенів z^m в (5.28), знайдемо

$$1 = B_0, \quad 0 = \sum_{n=0}^m \frac{B_n}{n!(m-n+1)!}, \text{ якщо } m \neq 0. \quad (5.30)$$

Таким чином отримано рекурентні співвідношення, які дозволяють послідовно знайти $B_1, \dots, B_n \dots$. Рекурентну формулу в (5.30) для $m \neq 0$, помноживши на $(m+1)!$, можна переписати в більш компактній формі

$$0 = \sum_{n=0}^m B_n C_{m+1}^n, \text{ якщо } m \neq 0, \quad (5.31)$$

тут C_{m+1}^n – біноміальні коефіцієнти. Із співвідношень $B_0 = 1$ та (5.31) визначаємо числа, які називаються **числами Бернуллі**.

Приклад 6. Довести, що всі числа Бернуллі з непарними індексами, крім B_1 , дорівнюють нулю.

Скористаємося рівністю $\frac{z}{e^z - 1} - \frac{(-z)}{e^{-z} - 1} = -z$, з якої випливає, урахувуючи (5.27), що

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{B_n}{n!} z^n - \frac{B_n}{n!} (-z)^n \right] = -z.$$

Збираючи коефіцієнти в останній рівності біля однакових степенів z , знаходимо

$$\frac{B_n}{n!} \left(1 - (-1)^n \right) = 0, \text{ якщо } n \neq 1, \text{ та } B_1 \cdot 2 = -1.$$

Звідки, оскільки $\left(1 - (-1)^{2k+1} \right) = 2 \neq 0$, робимо висновок, що всі числа Бернуллі з непарними індексами, крім $B_1 = -\frac{1}{2}$, дорівнюють нулю.

Приклад 7. Знайти розвинення функції в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки

$$f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}.$$

Спочатку скористаємося розвиненням (5.3) в ряд експоненціальної функції і виділимо в ньому в явному вигляді величину $1/z$, за степенями якої, урахувуючи (5.8), маємо здійснити розвинення функції в околі нескінченності

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{1}{1-z}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(1-z)^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!z^n(1-1/z)^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!z^n} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-n} = \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!z^n} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-m+1)}{m!(-z)^m}\right).
 \end{aligned}$$

Оскільки під знаком внутрішньої суми по m у чисельнику m від'ємних множників, мінуси із кожного множника можна винести і скоротити з мінусами знаменника, після чого чисельник і знаменник помножити на $(n-1)!$, спростити знаменник, розкрити дужки й отримати вираз

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+m-1)!}{n!m!z^{n+m}(n-1)!}. \quad (5.32)$$

У подвійній сумі виразу (5.32) підсумовування здійснюється за цілочисловими точками області (рис. 5.2), що задаються нерівностями $1 \leq n < \infty$, $1 \leq m < \infty$.

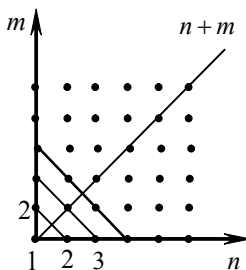


Рис. 5.2

Введемо нову змінну $k = n + m$, яка змінюватиметься в межах $2 \leq k < \infty$ і набуватиме лише цілочислових значень.

Тоді $n = k - m \geq 1$, $n_{\min} = 1$ досягається, коли $m = k - 1$, $n_{\max} = k - 1$ досягається,

коли

$m = 1$, тобто $1 \leq n \leq k - 1$ і область (на рис.5.2) можна задавати іншими нерівностями:

$$\begin{aligned}
 &2 \leq k < \infty, 1 \leq n \leq k - 1, \\
 &\text{або } 2 \leq k < \infty, 1 \leq m \leq k - 1,
 \end{aligned}$$

і, відповідно,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+m-1)!}{n!m!z^{n+m}(n-1)!} &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{z^k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{(-1)^n(k-1)!}{n!(k-n)!(n-1)!} = \\
 &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{z^k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{(-1)^n}{n!} \binom{k-1}{n-1},
 \end{aligned}$$

де $\binom{k-1}{n-1} \equiv C_{k-1}^{n-1} = \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!}$ – біноміальні коефіцієнти. В

останньому виразі зробимо заміну змінних $n-1 = p$ ($n = p+1$)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{z^k} \sum_{p=0}^{k-2} \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!} \binom{k-1}{p} \quad (5.33)$$

і повернемося до (5.32), замінивши змінну підсумовування n в першій сумі на k , виділивши із неї окремо перший доданок і врахувавши перетворення подвійної суми в (5.32) на (5.33).

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! z^k} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{z^k} \sum_{p=0}^{k-2} \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!} \binom{k-1}{p} = \\ = 1 - \frac{1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{z^k} \left\{ \frac{(-1)^k}{k!} + \sum_{p=0}^{k-2} \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!} \binom{k-1}{p} \right\}. \end{aligned}$$

Доданок $\frac{(-1)^k}{k!}$ можна внести під знак суми за p , оскільки він відповідає доданку із $p = k-1$. Маємо остаточний результат для розвинення у вигляді

$$e^{1-z} = 1 - \frac{1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{z^k} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!} \binom{k-1}{p}, \quad |z| > 1. \quad (5.34)$$

Розділ 6

Теорія лишків

6.1. Лишок аналітичної функції в ізольованій особливій точці

Раніше було встановлено, що в околі своєї ізольованої особливої точки z_0 функція $f(z)$ може бути єдиним способом представлена у вигляді ряду Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (6.1)$$

де
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

зокрема
$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) d\zeta. \quad (6.2)$$

Означення. Лишком аналітичної функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці z_0 називають комплексне число, що дорівнює значенню інтеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) d\zeta$. Інтеграл обчислюють уздовж

довільного замкнутого контуру C , що повністю лежить в області аналітичності функції $f(z)$ та охоплює лише одну із особливих точок функції $f(z)$ – точку z_0 (напрямок обходу контуру – додатний).

Із означення випливає, що (6.2) служить рецептом для обчислення лишку функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці

$$\operatorname{res} [f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) d\zeta = c_{-1}. \quad (6.3)$$

Зокрема, в усуній особливій точці лишок функції завжди дорівнює нулю.

Розглянемо деякі окремі випадки.

1. Нехай точка z_0 є полюсом першого порядку функції $f(z)$. Тоді в околі цієї точки має місце розвинення

$$f(z) = c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (6.4)$$

Помножимо обидві частини (6.4) на $(z - z_0)$ і спрямуємо $z \rightarrow z_0$

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (6.5)$$

У даному випадку функцію $f(z)$ в околі точку z_0 можна представити у вигляді відношення двох аналітичних функцій

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad (6.6)$$

причому $\varphi(z_0) \neq 0$, а точка z_0 є нулем першого порядку функції $\psi(z)$, тобто

$$\psi(z) = \psi'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}\psi''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots, \quad \psi'(z_0) \neq 0. \quad (6.7)$$

Підставивши (6.6) та (6.7) до (6.5), отримуємо формулу для обчислення лишку в полюсі першого порядку

$$\operatorname{res} \left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, z_0 \right] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (6.8)$$

Приклад 1. Знайти лишки функції $f(z) = \frac{z}{z^n - 1}$.

Особливими точками цієї функції є

$$z_k = \sqrt[n]{1} = \exp\left(i \frac{2\pi k}{n}\right) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

причому всі вони є полюсами першого порядку. Дійсно, функцію $f(z)$ можна записати як $f(z) = \frac{z}{g(z)}$, і далі функцію $g(z) = z^n - 1$ в

околі точки z_k – представити у вигляді ряду Тейлора

$$g(z) = nz_k^{n-1}(z - z_k) + \frac{1}{2}n(n-1)z_k^{n-2}(z - z_k)^2 + \dots,$$

і
$$g'(z_k) = nz_k^{n-1} = n \exp\left(-i \frac{2\pi k}{n}\right) \neq 0.$$

Тобто z_k є нулем першого порядку функції $g(z)$. Тоді, згідно (6.8), можна записати

$$\operatorname{res} [f(z), z_k] = \frac{z_k}{nz_k^{n-1}} = \frac{1}{n} \frac{z_k^2}{z_k^n} = \frac{1}{n} z_k^2 = \frac{1}{n} \exp\left(i \frac{4\pi k}{n}\right). \quad (6.9)$$

2. Нехай точка z_0 є полюсом порядку m функції $f(z)$. Тоді в околі цієї точки має місце розвинення

$$f(z) = c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots \quad (6.10)$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на $(z - z_0)^m$

$$f(z)(z - z_0)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + c_0(z - z_0)^m + \dots$$

Візьмемо від обох частин похідну $(m-1)$ порядку і перейдемо до граничного значення при $z \rightarrow z_0$. У результаті дістанемо формулу для обчислення лишку в повній частині порядку m

$$c_{-1} = \text{res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z - z_0)^m]. \quad (6.11)$$

Видно, що (6.5) є частинним випадком останньої формули.

Приклад 2. Знайти лишок функції $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^n}$ у точці

$$z = i.$$

Особливими точками цієї функції є точки $z_{1,2} = \pm i$, причому обидві є полюсами порядку n , оскільки для функції

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = (z+i)^n (z-i)^n$$

ці точки, очевидно, є нулями порядку n . Тоді, згідно (6.11), можна записати

$$\begin{aligned} \text{res}[f(z), i] &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{1}{(1+z^2)^n} (z-i)^n \right] = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{1}{(z+i)^n} \right] = \\ &= (-1)^{n-1} \frac{n(n+1) \cdots (2n-2)}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{(z+i)^{2n-1}} \Big|_{z=i} = \quad (6.12) \\ &= (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2} \cdot \frac{1}{(2i)^{2n-1}} = -i \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} [(n-1)!]^2}. \end{aligned}$$

6.2. Основна теорема теорії лишків

Основна теорема теорії лишків. Нехай функція $f(z)$ є аналітичною всюди в замкненій області \bar{G} , за винятком скінченної кількості ізольованих особливих точок z_k ($k=1, \dots, N$), що лежать усередині області G . Тоді

$$\int_{\Gamma^+} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{res}[f(z), z_k], \quad (6.13)$$

де Γ^+ є повною межею області G , вздовж якої інтегрування здійснюється в додатному напрямку.

Нагадаємо, що якщо функція $f(z)$ є аналітичною в замкненій області \bar{G} , то усі точки межі Γ цієї області є правильними (тобто неособливими). Проведемо навколо кожної особливої точки z_k функції $f(z)$ замкнений контур γ_k , що не охоплює інших особливих точок, окрім z_k . В отриманій таким чином замкненій багатозв'язній області, що обмежена контурами Γ і γ_k (рис. 6.1), функція $f(z)$ буде всюди аналітичною. Тоді, згідно теореми Коші для аналітичної функції в багатозв'язній області, можна записати

$$\int_{\Gamma^+} f(\zeta) d\zeta + \sum_{k=1}^N \int_{\gamma_k^-} f(\zeta) d\zeta = 0. \quad (6.14)$$

Використовуючи означення (6.3), отримаємо твердження теореми.

Велике практичне значення (6.13) полягає в тому, що в багатьох випадках набагато простіше знаходити лишки функції $f(z)$ в особливих точках, що лежать усередині області інтегрування, ніж безпосередньо обчислювати інтеграл у лівій частині (6.13).

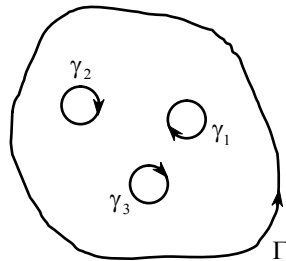


Рис. 6.1

Розглянемо ще одне важливе поняття.

Означення. **Лишком** аналітичної функції $f(z)$ у точці $z = \infty$ називають комплексне число, що дорівнює значенню інтеграла

$$\operatorname{res}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(\zeta) d\zeta,$$

де C^- – довільний замкнений контур, зовні якого функція $f(z)$ є аналітичною та не має особливих точок, крім $z = \infty$. Контур обходять за годинниковою стрілкою (за такого обходу окіл нескінченності залишається ліворуч).

Припустимо, що в околі нескінченно віддаленої точки розвинення функції $f(\zeta)$ у ряд Лорана має загальний вигляд

$$f(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \zeta^n.$$

Оскільки цей ряд рівномірно збіжний на контурі C^- , то його можна почленно інтегрувати. Виберемо контур, який легко параметризувати. Нехай це буде коло $|\zeta| = R$ достатньо великого радіуса R (пам'ятаємо, що в області аналітичності зміна форми замкненого контуру на значення інтеграла не впливає). Тут $\zeta = Re^{i\varphi}$, $d\zeta = iRe^{i\varphi} d\varphi$, і

$$\int_{C^-} f(\zeta) d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{C^-} \zeta^n d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi = -2\pi i C_{-1}.$$

Усі члени ряду, крім одного, після інтегрування перетворилися на нуль. Тому

$$\operatorname{res}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(\zeta) d\zeta = -C_{-1}, \quad (6.15)$$

лишок функції $f(z)$ на нескінченності виражається через один коефіцієнт розвинення цієї функції у ряд Лорана. Підкреслимо, що тут C_{-1} – коефіцієнт біля $1/z$ розвинення функції $f(z)$ у ряд Лорана в околі нескінченності (а не в околі нуля).

Із (6.15), зокрема, впливає, що якщо точка $z = \infty$ є усупною особливою точкою функції $f(z)$, то $\operatorname{res}[f(z), \infty]$ може бути відмінним від нуля, у той час як лишок у скінченній усупній особливій точці завжди дорівнює нулю.

Оскільки

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(\zeta) d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} f(\zeta) d\zeta,$$

із формул (6.13) і (6.15) випливає твердження наступної теореми.

Теорема. Нехай функція $f(z)$ є однозначною аналітичною на повній комплексній площині, за винятком скінченної кількості ізольованих особливих точок z_k ($k = 1, \dots, N$). Тоді

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{res} [f(z), z_k] + \operatorname{res} [f(z), \infty] = 0, \quad (6.16)$$

тобто сума лишків відносно всіх особливих точок, включаючи нескінченність, дорівнює нулю.

6.3. Обчислення визначених інтегралів за допомогою лишків

Нехай необхідно обчислити інтеграл від дійсної функції $f(x)$ на деякому інтервалі (обмеженому чи необмеженому) (a, b) осі x . Треба доповнити (a, b) деякою кривою C , що разом з (a, b) утворює межу області G , та аналітично продовжити $f(x)$ в область \bar{G} . Аналітичне продовження $f(z)$ функції $f(x)$ дійсної змінної в комплексну область \bar{G} можна отримати із $f(x)$ формальною заміною дійсної змінної x на комплексну змінну z . До побудованого таким чином аналітичного продовження $f(z)$ можна застосувати теорему про лишки

$$\int_a^b f(x) dx + \int_C f(z) dz = 2\pi i \cdot \Sigma, \quad (6.17)$$

де Σ – сума лишків $f(z)$ відносно всіх ізольованих особливих точок, які розташовані в області G . Якщо інтеграл уздовж C вдається обчислити або виразити через шуканий інтеграл

$$\int_a^b f(x) dx,$$

то задачу можна вважати розв'язаною.

У деяких випадках допоміжну функцію $F(z)$ обирають таким чином, щоб вихідна функція $f(x)$, яку задано на (a, b) , була її дійсною чи уявною частиною. Тоді шуканий інтеграл

можна знайти за допомогою відповідного розділення дійсних та уявних частин (6.17).

За допомогою теорії лишків можна обчислювати й невідлічні інтеграли. Нагадаємо, що визначений інтеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

називається невідлічним, якщо виконується принаймні одна із таких умов:

1) межа a або b (або обидві межі) є нескінченними (невідлічний інтеграл I роду);

2) функція $f(x)$ має одну або кілька точок розриву всередині відрізка $[a, b]$ (невідлічний інтеграл II роду).

Якщо функція $f(x)$ інтегровна на кожному скінченному відрізку $[a, b]$, то за означенням, вважають

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Якщо функція $f(x)$ не обмежена в околі точки b та інтегровна на кожному скінченному відрізку $[a, b - \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$), то приймають

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

У математичному аналізі невідлічні інтеграли досліджують на збіжність із використанням ознак порівняння та спеціальної ознаки збіжності. Нагадаємо введене поняття головного значення для збіжних невідлічних інтегралів. Під **головним значенням за Коші** (v. p. або V. p.) збіжного невідлічного інтеграла розуміють число

$$\text{v. p.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right],$$

якщо функція $f(x)$ має єдину точку розриву c усередині відрізка $[a, b]$. Якщо таких точок розриву кілька, всі вони мають бути враховані аналогічно (перевірка збіжності інтегралів і виключення нескінченно малих ε -околіть точок розриву із інтервалу інтегрування).

Аналогічно

$$\text{v. p. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x)dx .$$

У випадку необмежених відрізків (a, b) в (6.17) звичайно розглядаються сім'ї контурів, що нескінченно розширюються так, щоб у результаті граничного переходу було отримано інтеграл на інтервалі (a, b) . Тут інтеграл уздовж частини контуру C можна не обчислювати, а лише знайти його граничне значення, причому воно може виявитися рівним нулю.

6.3.1. Інтеграли вигляду $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$

Розглянемо інтеграл

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta, \quad (6.18)$$

де R – раціональна функція своїх аргументів. Зробимо заміну змінної

$$z = e^{i\theta}, \quad d\theta = \frac{1}{i} \frac{dz}{z}, \quad \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Якщо дійсна змінна θ змінюється від 0 до 2π , комплексна змінна $z = e^{i\theta}$ пробігає замкнений контур – коло $|z|=1$ у додатному напрямку. Таким чином, інтеграл (6.18) переходить в інтеграл по замкнутому контуру від функції комплексної змінної

$$I = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{z}. \quad (6.19)$$

Оскільки завжди для раціональної функції можна записати

$$R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{z} = \tilde{R}(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}, \quad (6.20)$$

де $\tilde{R}(z)$ є аналітичною функцією всередині кола $|z|=1$ всюди, за винятком скінченної $N \leq m$ кількості особливих точок z_k ,

що є нулями знаменника в (6.20). Тоді внаслідок основної теореми теорії лишків можна отримати результат

$$I = 2\pi \sum_{k=1}^N \operatorname{res} [\tilde{R}(z), z_k]. \quad (6.21)$$

Якщо m_k – порядок полюса z_k функції $\tilde{R}(z)$ (очевидно, що $\sum_{k=1}^N m_k \leq m$), то останню формулу за допомогою (6.11) можна переписати у вигляді

$$I = 2\pi \sum_{k=1}^N \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{m_k-1}}{dz^{m_k-1}} \left[(z - z_k)^{m_k} \tilde{R}(z) \right]. \quad (6.22)$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta}, \quad |a| < 1. \quad (6.23)$$

Зробимо заміну змінної $z = e^{i\theta}$ та отримаємо

$$I = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{1 + a \left(z + \frac{1}{z} \right)} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{az^2 + 2z + a}. \quad (6.24)$$

Знаменник має два нулі першого порядку

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - a^2}}{a}.$$

Оскільки $|z_1| \cdot |z_2| = 1$, то до області всередині контуру $|z| = 1$ потрапляє лише одна точка: за умови $|a| < 1$ це точка

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}.$$

Тоді за допомогою (6.21) отримаємо

$$I = 4\pi \operatorname{res} \left[\frac{1}{az^2 + 2z + a}, z_1 \right] = 4\pi \left. \frac{1}{a(z - z_2)} \right|_{z=z_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}. \quad (6.25)$$

Приклад 4. Обчислити головне значення інтеграла

$$I = \text{v. p.} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\ln |\sin \theta|}{1 + a \cos \theta} d\theta, \quad |a| < 1. \quad (6.26)$$

Такою самою заміною, як і в попередньому прикладі, дістанемо

$$I = \operatorname{Re} \frac{1}{i} \int_C \ln \frac{1-z^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} \cdot \frac{dz}{z} = \operatorname{Re} \frac{2}{i} \int_C \ln \frac{1-z^2}{2} \cdot \frac{dz}{az^2 + 2z + a}. \quad (6.27)$$

Тут використано співвідношення

$$\ln |\sin \theta| = \ln \left| \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right| = \ln \left| \frac{1 - e^{2i\theta}}{2} \right| = \operatorname{Re} \ln \frac{1 - z^2}{2}.$$

Зауважимо, що комплексна змінна z пробігає розімкнений контур C – коло $|z|=1$ з вирізаними ε -околами точок $z=1$ і $z=-1$. Це коло можна доповнити півколами радіуса ε (рис. 6.2), інтеграли від підінтегральної функції вздовж яких дорівнюють нулю, якщо ε спрямувати до нуля. Тоді контур стає замкненим, і за допомогою формули (6.21) отримаємо

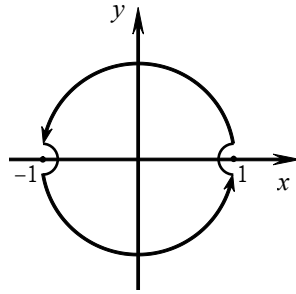


Рис. 6.2

$$\begin{aligned} I &= 4\pi \operatorname{Re} \operatorname{res} \left[\ln \frac{1-z^2}{2} \cdot \frac{1}{az^2 + 2z + a}, z_1 \right] = \\ &= 4\pi \operatorname{Re} \ln \frac{1-z^2}{2} \cdot \frac{1}{a(z-z_2)} \Big|_{z=z_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \ln \left| \frac{2\sqrt{1-a^2} - (1-a^2)}{2a^2} \right|. \quad (6.28) \end{aligned}$$

Тут враховано лише особливу точку

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-a^2}}{a},$$

яка потрапила всередину контуру інтегрування (на рис. 6.2).

Приклад 5. Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}(x+a) dx, \quad a - \text{комплексне число, } a = a_1 + ia_2.$$

Підінтегральну функцію можна представити у вигляді

$$\operatorname{ctg}(x+a) = i \frac{e^{2i(x+a)} + 1}{e^{2i(x+a)} - 1}$$

і під знаком інтеграла зробити заміну змінної $z = e^{2i(x+a)}$, $dz = 2ie^{2i(x+a)}dx$, $dx = \frac{dz}{2iz}$. Нова змінна z двічі повністю обходить коло радіуса $|z| = e^{-2a_2}$, коли дійсна змінна x пробігає значення від 0 до 2π . Тому

$$I = 2 \int_{|z|=e^{-2a_2}} i \frac{z+1}{z-1} \frac{dz}{2iz} = \int_{|z|=e^{-2a_2}} \frac{z+1}{z(z-1)} dz.$$

Інтеграл може набувати різних значень, залежно від знаку a_2 . Якщо $a_2 > 0$, то в область усередині контуру $|z| = e^{-2a_2} < 1$ потрапляє лише одна особлива точка $z_0 = 0$, і лише вона дає внесок до інтеграла

$$I = 2\pi i \operatorname{res} \left[\frac{z+1}{z(z-1)}, 0 \right] = -2\pi i.$$

Якщо $a_2 < 0$, то до області всередині контуру $|z| = e^{-2a_2} > 1$ потрапляють дві точки, $z_0 = 0$ і $z_1 = 1$ і

$$I = 2\pi i \left(\operatorname{res} \left[\frac{z+1}{z(z-1)}, 0 \right] + \operatorname{res} \left[\frac{z+1}{z(z-1)}, 1 \right] \right) = 2\pi i.$$

Отримані результати можна об'єднати

$$I = -2\pi i \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} a).$$

6.3.2. Інтеграли вигляду $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

Застосуємо метод лишків до обчислення невластних інтегралів вигляду

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx. \quad (6.29)$$

Розглянемо випадок, за якого функцію $f(x)$ задано на всій дійсній осі та її можна аналітично продовжити на верхню півплощину так, що її продовження задовольнятиме деякі додаткові умови.

Лема 1. Нехай функція $f(z)$ є аналітичною у верхній півплощині $\operatorname{Im} z > 0$ всюди, за винятком скінченної кількості ізольованих

особливих точок. Нехай існують такі додатні числа R_0 , M та δ , що для всіх точок верхньої півплощини, що задовольняють умову $|z| > R_0$, має місце оцінка

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \quad |z| > R_0. \quad (6.30)$$

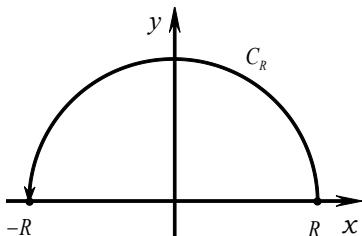


Рис. 6.3

Тоді

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(\zeta) d\zeta = 0, \quad (6.31)$$

де контур інтегрування C_R являє собою півколо $|z| = R > R_0$, $\text{Im } z > 0$ у верхній півплощині z (рис. 6.3).

Дійсно, унаслідок (2.7) та умови леми при $R > R_0$ справедливі співвідношення

$$\left| \int_{C_R} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_{C_R} |f(\zeta)| d\zeta < \frac{M\pi R}{R^{1+\delta}} = \frac{M\pi}{R^\delta} \Big|_{R \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

Зауваження 1. Якщо умови леми виконуються в деякому секторі $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$ площини z , то (6.31) має місце при інтегруванні по дузі C'_R кола, що лежить у цьому секторі.

Зауваження 2. Умови леми виконуються й у випадку, коли функція $f(z)$ є аналітичною в околі нескінченно віддаленої точки, і ця точка $z = \infty$ являє собою нуль функції $f(z)$ не нижче другого порядку. Дійсно, у цьому випадку розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана в околі $z = \infty$ має вигляд

$$f(z) = \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \dots = \frac{\Psi}{z^2},$$

причому $|\Psi(z)| < M$, звідки випливає оцінка (6.30) при $\delta = 1$.

Лема 1 має широке застосування при обчисленні деяких невластних інтегралів типу

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Теорема 2. Нехай функція $f(x)$, що задана на усій дійсній осі $-\infty < x < \infty$, може бути аналітично продовжена на верхню

півплощину $\text{Im } z \geq 0$, причому її аналітичне продовження $f(z)$ задовольняє умови леми 1 і не має особливих точок на дійсній осі. Тоді існує невластний інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ та

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{res}[f(z), z_k], \quad (6.32)$$

де z_k – ізольовані особливі точки функції $f(z)$ у верхній півплощині.

За умовами теореми функція $f(z)$ у верхній півплощині має скінченну кількість особливих точок z_k , причому всі вони задовольняють умову $|z_k| < R_0$. Розглянемо замкнений контур (рис. 6.4), що складається із відрізка

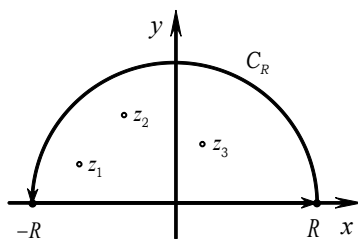


Рис. 6.4

ка дійсної осі $-R \leq x \leq R$ ($R > R_0$) і півкола C_R , $|z| = R$, у верхній півплощині. Тоді, унаслідок основної теореми теорії лишків, справедлива рівність

$$\int_{-R}^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{res}[f(z), z_k]. \quad (6.33)$$

Оскільки виконуються умови леми 1, то граничне значення другого доданка в лівій частині (6.33) при $R \rightarrow \infty$ дорівнює нулю. При цьому права частина цього виразу від R не залежить.

Зауваження. Аналогічна теорема має місце й у випадку, коли аналітичне продовження функції $f(z)$ в нижню півплощину задовольняє умови леми, аналогічні умовам леми 1, але в нижній півплощині. Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = -2\pi i \sum_{k=1}^N \text{res}[f(z), z_k], \quad (6.34)$$

де z_k – ізольовані особливі точки функції $f(z)$ у нижній півплощині. Тут знак мінус у правій частині пов'язаний із від'ємним напрямком обходу контуру при його замиканні на

нижню півплощину (при обході контуру область залишається праворуч).

Приклад 6. Обчислити

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}. \quad (6.35)$$

Аналітичне продовження підінтегральної функції задовольняє умови теореми 2. Особливою точкою у верхній півплощині є $z_0 = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i$, причому вона є полюсом першого порядку. Тому

$$I = 2\pi i \operatorname{res} \left[\frac{1}{z^2 + 1}, z_0 \right] = 2\pi i \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=i} = \pi. \quad (6.36)$$

Очевидно, що цей результат легко отримати й у звичайному аналізі, оскільки $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

Приклад 7. Обчислити

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}. \quad (6.37)$$

Аналітичне продовження підінтегральної функції задовольняє умови теореми 2. Особливими точками у верхній півплощині є $z_{0,1} = \exp\left(i\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)$, $k = 0, 1$, причому обидві вони є полюсами першого порядку. Тому

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \left\{ \operatorname{res} \left[\frac{1}{z^4 + 1}, z_0 \right] + \operatorname{res} \left[\frac{1}{z^4 + 1}, z_1 \right] \right\} = \\ &= 2\pi i \left\{ \left. \frac{1}{4z^3} \right|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} + \left. \frac{1}{4z^3} \right|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} \right\} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Приклад 8. Обчислити

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^n}, \quad n - \text{натуральне число, } n > 1.$$

Аналітичне продовження підінтегральної функції $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$

задовольняє умови теореми 2. Особливими точками є

$$z_k = \exp\left(i \frac{\pi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, n-1,$$

усі вони є полюсами першого порядку. Розглянемо інтеграл по замкненому контуру C (рис. 6.5), який охоплює лише одну особливу точку

$$z_0 = \exp\left(\frac{i\pi}{n}\right).$$

Згідно з основною теоремою теорії лишків

$$\int_C \frac{dz}{1+z^n} = 2\pi i \operatorname{res}\left[\frac{1}{1+z^n}, z_0\right].$$

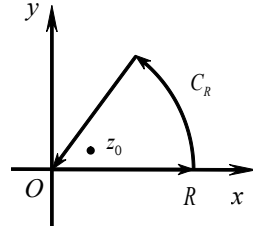


Рис. 6.5

Лишок у простому полюсі за (6.8)

$$\operatorname{res}\left[\frac{1}{1+z^n}, z_0\right] = \frac{1}{ne^{\frac{\pi i}{n}}} = -\frac{1}{n} e^{\frac{\pi i}{n}}.$$

Замкнений контур C складається із трьох ділянок. На першій – $z = x$, x пробігає значення від нуля до R , відповідно інтеграл

уздовж цієї ділянки дорівнює $\int_0^R \frac{dx}{1+x^n}$.

Друга ділянка – дуга радіуса R , на якій функція $\frac{1}{1+z^n}$ рівномірно прямує до нуля, коли $R \rightarrow \infty$, причому швидше, ніж $1/z$ (див. лему 1). На третій ділянці – кут фіксований і дорівнює $2\pi/n$, комплексна змінна $z = re^{2\pi i/n}$, r пробігає значення від R до 0 , відповідно інтеграл уздовж цієї ділянки дорівнює

$$-e^{\frac{2\pi i}{n}} \int_0^R \frac{dr}{1+r^n}.$$

Здійснивши граничний перехід $R \rightarrow \infty$, урахувавши лему 1, маємо

$$\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) I = -\frac{2\pi i}{n} e^{\frac{\pi i}{n}}.$$

$$I = \frac{\pi}{n \sin(\pi/n)}.$$

6.3.3. Інтеграли вигляду $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx$. Лема Жордана

Лема Жордана. Нехай функція $f(z)$ аналітична у верхній півплощині $\text{Im } z > 0$, за винятком обмеженої кількості ізольованих особливих точок, і рівномірно відносно $\arg z$ прямує до нуля при $|z| \rightarrow \infty$. Тоді при $a > 0$ справедлива рівність

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{ia\zeta} f(\zeta) d\zeta = 0, \quad (6.39)$$

де C_R – дуга півкола $|z| = R$ у верхній півплощині.

Умова рівномірного прямування $f(z)$ до нуля означає, що при $|z| = R$ має місце оцінка

$$|f(z)| < \mu_R, \quad |z| = R,$$

де $\mu_R \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. В інтегралі (6.39)

зробимо заміну змінної $\zeta = Re^{i\varphi}$ і

скористаємось співвідношенням $\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$,

коли $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ (рис. 6.6). У результаті

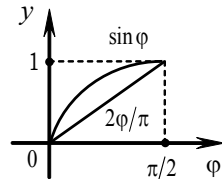


Рис. 6.6

$$\left| \int_{C_R} e^{ia\zeta} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \mu_R \cdot R \int_0^{\pi} |e^{ia\zeta}| d\varphi = \mu_R \cdot R \int_0^{\pi} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi =$$

$$= 2\mu_R R \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi < 2\mu_R R \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2aR}{\pi} \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{a} \mu_R (1 - e^{-aR}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Зауваження 1. Якщо $a < 0$, то можна сформулювати умови такої самої лемі для дуги в нижній півплощині. Аналогічні твердження мають місце і у випадках $a = \pm i\alpha$ ($\alpha > 0$), коли

інтегрування проводиться відповідно в правій ($\operatorname{Re} z > 0$) або лівій ($\operatorname{Re} z < 0$) півплощині.

Зауваження 2. Лема Жордана залишається справедливою й у випадку, коли $f(z)$ задовольняє умови леми в півплощині $\operatorname{Im} z \leq y_0$. Доведення проводять аналогічно попередньому при заміні змінної $\zeta = Re^{i\varphi} + iy_0$.

Зауваження 3. Лема Жордана залишається справедливою й у деяких випадках, коли $f(z)$ задовольняє послаблені умови: якщо функція $f(z)$ при $|z| > R$ рівномірно відносно z прямує до нуля при $0 \leq \arg z \leq \varphi_0$, $\pi - \varphi_1 \leq \arg z \leq \pi$ і рівномірно обмежена в секторі $\varphi_0 < \arg z < \pi - \varphi_1$. Зазначимо, що прямування до нуля підінтегральної функції забезпечує множник $e^{ia\zeta}$, що при $a > 0$ швидко спадає на дузі великого радіуса ($|e^{ia\zeta}| = e^{-ay} = e^{-aR\sin\varphi}$ прямує до нуля при прямуванні R до нескінченності) у верхній півплощині.

Лема Жордана має численні застосування при обчисленні невласних інтегралів.

Теорема 3. Нехай функція $f(x)$, що задана та не має особливих точок на всій дійсній осі, може бути аналітично продовжена на верхню півплощину $\operatorname{Im} z > 0$, причому її аналітичне продовження у верхній півплощині задовольняє умови леми Жордана. Тоді

інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx$ ($a > 0$) існує та

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{res} [e^{iaz} f(z), z_k], \quad (6.40)$$

де z_k – ізольовані особливі точки функції $f(z)$ у верхній півплощині.

За умовою теореми всі особливі точки z_k функції $f(z)$ задовольняють умову $|z_k| < R_0$. Розглянемо замкнений контур, що складається із відрізка дійсної осі $-R \leq x \leq R$, $R > R_0$ і дуги C_R півкола $|z| = R$ у верхній півплощині (рис. 6.7).

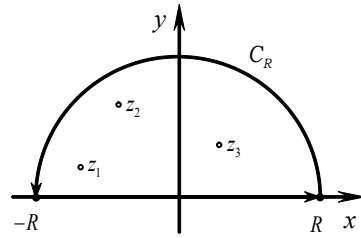


Рис. 6.7

Згідно з основною теоремою теорії лишків можна записати

$$\int_{-R}^R e^{iax} f(x) dx + \int_{C_R} e^{ia\zeta} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{res}[e^{iaz} f(z), z_k].$$

За лемою Жордана граничне значення другого інтеграла в лівій частині при $R \rightarrow \infty$ дорівнює нулю. Звідси випливає твердження теореми.

Приклад 9. Обчислити

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2}, \quad a > 0. \quad (6.41)$$

Для обчислення цього інтеграла скористаємось парністю підінтегральної функції

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 + a^2}. \quad (6.42)$$

Розглянемо інтеграл від

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$$

по зображеному (рис. 6.8) замкненому контуру, на якому R достатньо велике та більше за a . Простий полюс $f(z)$, який потрапляє всередину контуру, розташований у точці $z = ia$ і тоді при $R > a$ можна записати

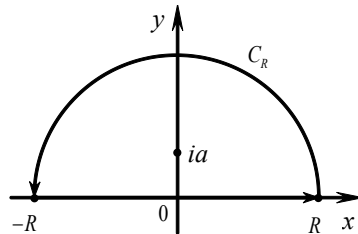


Рис. 6.8

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix} dx}{x^2 + a^2} + \int_{C_R} \frac{e^{iz} dz}{z^2 + a^2} = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2ai}.$$

Оскільки на контурі C_R підінтегральна функція задовольняє умови леми Жордана, то, спрямовуючи R до нескінченності та використовуючи парність підінтегральної функції, знайдемо шуканий інтеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2ae^a}.$$

Приклад 10. Обчислити інтеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{x^2 + a^2} dx$, $\alpha > 0$, $a > 0$.

$$I = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{i\alpha x}}{x^2 + a^2} dx = 2\pi \frac{ia e^{i\alpha \cdot ia}}{2ia} = \pi e^{-\alpha a}.$$

Зауваження 1. Якщо функція $f(x)$ – парна, тобто $f(-x) = f(x)$, $a > 0$, то

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x) \cos ax dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx = \\ &= \pi i \sum_{k=1}^N \text{res} \left[e^{iaz} f(z), z_k \right], \quad \text{Re } z_k > 0. \end{aligned}$$

Зауваження 2. Якщо функція $f(x)$ – непарна, тобто $f(-x) = -f(x)$, $a > 0$, то

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x) \sin ax dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ax dx = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx = \\ &= \pi \sum_{k=1}^N \text{res} \left[e^{iaz} f(z), z_k \right], \quad \text{Re } z_k > 0. \end{aligned}$$

При доведенні теорем 2–3 припускають, що функція $f(x)$ не має особливих точок на дійсній осі. Виявляється, що деякі незначні доповнення дозволяють застосувати ці теореми до обчислення невластних інтегралів і в тому випадку, коли функція $f(x)$ має особливі точки на дійсній осі.

Покажемо це на нескладному прикладі.

Приклад 11. Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx, \quad \alpha > 0. \quad (6.43)$$

Скориставшись парністю підінтегральної функції, можна переписати інтеграл у вигляді

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} I_1. \quad (6.44)$$

Зазначимо, що інтеграл I_1 необхідно розглядати як головне значення невластного інтеграла, а саме

$$I_1 = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0, \\ R \rightarrow \infty}} \left\{ \int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx + \int_{\rho}^R \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx \right\}. \quad (6.45)$$

Розглянемо у верхній півплощині $\operatorname{Im} z \geq 0$ замкнений контур Γ , що складається з відрізків дійсної осі $[-R, -\rho]$, $[\rho, R]$ і двох

півкіл C_ρ , $|z| = \rho$ і C_R , $|z| = R$

(рис. 6.9). У середині цього контуру аналітичне продовження функції, а саме $e^{i\alpha z}/z$, не має особливих точок. Тому за теоремою Коші можна записати

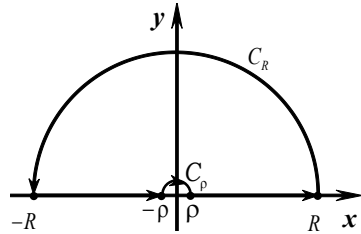


Рис. 6.9

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx + \int_{C_\rho} \frac{e^{i\alpha \zeta}}{\zeta} d\zeta + \int_{\rho}^R \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx + \int_{C_R} \frac{e^{i\alpha \zeta}}{\zeta} d\zeta = 0. \quad (6.46)$$

Останній доданок, згідно леми Жордана, прямує до нуля при $R \rightarrow \infty$. У другому доданку півколо C_ρ обходять у від'ємному напрямку (за стрілкою годинника), і при заміні змінної $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ отримаємо

$$I_3 = \int_{C_\rho} \frac{e^{i\alpha \zeta}}{\zeta} d\zeta = i \int_{\pi}^0 e^{i\alpha \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)} d\varphi \rightarrow -i\pi \text{ при } \rho \rightarrow 0. \quad (6.47)$$

Розглядаючи граничне значення (6.46) для $\rho \rightarrow 0$ і $R \rightarrow \infty$, згідно із (6.45) і (6.47), дістанемо

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = i\pi, \quad \alpha > 0, \quad (6.48)$$

звідки
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha > 0. \quad (6.49)$$

Приклад 12. Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\text{sh } \pi x} dx, \quad a > 0. \quad (6.50)$$

Перепишемо I у вигляді $I = 2 \text{Im} \int_0^{\infty} \frac{e^{iax}}{e^{2\pi x} - 1} dx$.

Аналітичне продовження підінтегральної функції

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z} - 1}$$

має безліч полюсів першого порядку $\{in\}$, (n – ціле число), які є розв'язками рівняння $e^{2\pi z} - 1 = 0$. Усі вони попадають на уявну вісь комплексної площини. Оскільки функція $f(z)$ містить множником функцію $\frac{1}{e^{2\pi z} - 1}$, що є періодичною із суто уявним періодом $T = i$, то доцільно вибрати контур інтегрування у вигляді

замкненої смуги шириною $|T| = 1$ з урахуванням обходу двох особливостей, які потрапляють на цю смугу. Тому проінтегруємо функцію

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z} - 1} \text{ по контуру (рис. 6.10).}$$

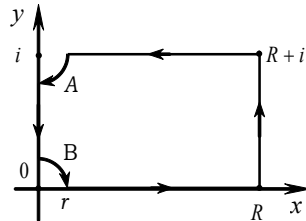


Рис. 6.10

На верхній горизонтальній ділянці контуру, де $z = x + i$ та x змінюється від R до r , значення функції

$$f(x+i) = \frac{e^{ia(x+i)}}{e^{2\pi(x+i)} - 1} = e^{-a} \frac{e^{iax}}{e^{2\pi x} - 1} = e^{-a} f(x),$$

тобто, можна об'єднати інтеграли по верхній та нижній горизонтальній ділянкам в один

$$(1 - e^{-a}) \int_r^R f(x) dx. \quad (6.51)$$

Інтеграл по вертикальній ділянці $[R, R + i]$, де $z = R + iy$ та y змінюється від 0 до 1,

$$\int_R^{R+i} \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z} - 1} dz = i \int_0^1 \frac{e^{ia(R+iy)}}{e^{2\pi(R+iy)} - 1} dy = ie^{iaR-2\pi R} \int_0^1 \frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy} - e^{-2\pi R}} dy, \quad (6.52)$$

прямує до нуля, коли $R \rightarrow \infty$.

Інтеграл по ділянці контуру, що лежить на уявній осі, де $z = iy$ та y змінюється від $1-r$ до r , обчислюють як

$$\begin{aligned} \int_{(1-r)i}^{ri} f(z) dz &= - \int_r^{(1-r)i} f(z) dz = -i \int_r^{1-r} \frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy} - 1} dy = \\ &= -i \int_r^{1-r} e^{-i\pi y} \frac{e^{-ay}}{e^{\pi iy} - e^{-i\pi y}} dy = -\frac{1}{2} \int_r^{1-r} e^{-i\pi y} \frac{e^{-ay}}{\sin \pi y} dy = \\ &= -\frac{1}{2} \int_r^{1-r} \frac{(\cos \pi y - i \sin \pi y) e^{-ay}}{\sin \pi y} dy = -\frac{1}{2} \int_r^{1-r} \operatorname{ctg}(\pi y) e^{-ay} dy + \frac{i}{2} \int_r^{1-r} e^{-ay} dy. \end{aligned}$$

Нас цікавить тільки уявна частина інтеграла, тому обчислимо тільки її. Це дає

$$\frac{1}{2} \int_r^{1-r} e^{-ay} dy = -\frac{1}{2a} (e^{-a(1-r)} - e^{-ar}) \rightarrow -\frac{1}{2a} (e^{-a} - 1), \text{ якщо } r \rightarrow 0. \quad (6.53)$$

Підінтегральну функцію поблизу точки $z_0 = i$ можна представити у вигляді

$$f(z) = \frac{e^{-a} e^{ia(z-i)}}{e^{2\pi(z-i)} - 1} = \frac{e^{-a}}{2\pi} \cdot \frac{1}{z-i} + P_1(z-i),$$

де $P_1(z-i)$ – функція, для якої точка $z_0 = i$ є правильною, тобто в околі цієї точки функцію $P_1(z-i)$ можна розвинути у збіжний ряд Тейлора. На ділянці A (рис. 6.10) $z = i + re^{i\varphi}$ і $dz = ire^{i\varphi} d\varphi$, тому

$$\int_A f(z) dz = \frac{e^{-a}}{2\pi} \int_A \frac{1}{z-i} dz + \int_A P_1(z-i) dz =$$

$$= \frac{e^{-a}}{2\pi} \int_0^{-(\pi/2)} \frac{ire^{i\varphi} d\varphi}{re^{i\varphi}} + O(r) = -i \frac{e^{-a}}{4} + O(r). \quad (6.54)$$

Тут використано позначення $O(r)$ для величини порядку r . Вона прямує до нуля разом із прямуванням $r \rightarrow 0$.

Аналогічно поблизу точки $z_0 = 0$ маємо

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z} - 1} = \frac{1}{2\pi z} + P_2(z),$$

де $P_2(z)$ – функція, для якої точка $z_0 = 0$ є правильною, і

$$\int_B f(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_B \frac{1}{z} dz + \int_B P_2(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^0 \frac{ire^{i\varphi} d\varphi}{re^{i\varphi}} + O(r) = -i \frac{1}{4} + O(r). \quad (6.55)$$

Оскільки всередині замкненого контуру (рис. 6.10) підінтегральна функція не має особливостей, то, згідно з теоремою Коші, інтеграл по цьому контуру дорівнює нулю, у тому числі дорівнює нулю і його уявна частина. Звідси, ураховуючи (6.51)–(6.55), отримаємо остаточний результат

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx = 2 \operatorname{Im} \int_0^{\infty} f(x) dx = \\ & = \frac{2}{1 - e^{-a}} \left[\frac{1}{2a} (e^{-a} - 1) + \frac{e^{-a}}{4} + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + e^{-a}}{1 - e^{-a}} - \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Приклад 13. Обчислити інтеграл $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} dx$.

Перепишемо I у вигляді

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{2 \operatorname{sh} x} dx = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{2i \operatorname{sh} x} dx.$$

Аналітичне продовження підінтегральної функції

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{i(e^z - e^{-z})}$$

має безліч полюсів першого порядку $\{i\pi n\}$, (n – ціле число), які є розв'язками рівняння $e^{2z} - 1 = 0$. Усі вони потрапляють на уявну вісь комплексної площини. Виберемо контур інтегрування у вигляді замкненої смуги шириною π (рис. 6.11) із урахуван-

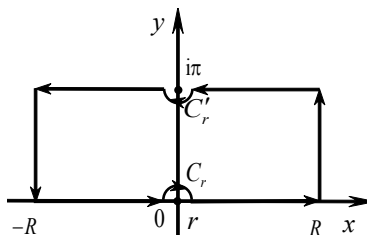


Рис. 6.11

ням обходу двох особливостей підінтегральної функції, які потрапляють на цю смугу. Тоді в області всередині вибраного контуру функція

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{i(e^z - e^{-z})}$$

є аналітичною, інтеграл від цієї функції по такому контуру дорівнює нулю.

На верхній горизонтальній ділянці контуру, де $z = x + i\pi$ та x змінюється від R до $-R$, ця функція має значення

$$f(x + i\pi) = \frac{e^{i(x+i\pi)}}{i(e^{x+i\pi} - e^{-x-i\pi})} = -e^{-\pi} \frac{e^{ix}}{i(e^x - e^{-x})} = -e^{-\pi} f(x),$$

тому можна об'єднати інтеграли по верхній та нижній горизонтальних ділянках до одного

$$(1 + e^{-\pi}) \text{v.p.} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

Інтеграл по вертикальній ділянці $[R, R + i\pi]$, де $z = R + iy$ та y змінюється від 0 до π ,

$$\begin{aligned} \int_R^{R+i\pi} \frac{e^{iz}}{i(e^z - e^{-z})} dz &= \int_0^\pi \frac{e^{i(R+iy)}}{e^{\pi(R+iy)} - e^{-\pi(R+iy)}} dy = \\ &= e^{iR-\pi R} \int_0^\pi \frac{e^{-y}}{e^{\pi iy} - e^{-2\pi R - \pi iy}} dy, \end{aligned}$$

прямує до нуля, коли $R \rightarrow \infty$, за рахунок множника $e^{-\pi R}$.

Аналогічно поводитьься інтеграл по вертикальній ділянці $[-R + i\pi, -R]$, коли $R \rightarrow \infty$.

На ділянці контуру C'_r поблизу точки $z = i\pi$ зробимо заміну змінної $z = i\pi + re^{i\varphi}$, $dz = ire^{i\varphi} d\varphi$. Тоді підінтегральну функцію можна представити у вигляді

$$f(z) = \frac{-ie^{i(\pi+re^{i\varphi})}}{e^{i\pi+re^{i\varphi}} - e^{-i\pi-re^{i\varphi}}} = ie^{-\pi} \frac{e^{ire^{i\varphi}}}{e^{re^{i\varphi}} - e^{-re^{i\varphi}}}.$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C'_r} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{-\pi} ie^{-\pi} \frac{e^{ire^{i\varphi}}}{e^{re^{i\varphi}} - e^{-re^{i\varphi}}} ire^{i\varphi} d\varphi =$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{-\pi} ie^{-\pi} \frac{1}{2re^{i\varphi}} ire^{i\varphi} d\varphi = \frac{\pi e^{-\pi}}{2}.$$

На ділянці контуру поблизу точки $z = 0$ зробимо заміну змінної $z = re^{i\varphi}$, $dz = ire^{i\varphi} d\varphi$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = -i \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{e^{ire^{i\varphi}}}{e^{re^{i\varphi}} - e^{-re^{i\varphi}}} ire^{i\varphi} d\varphi =$$

$$= -i \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{1}{2re^{i\varphi}} ire^{i\varphi} d\varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

Оскільки, згідно теореми Коші, інтеграл по замкненому контуру (рис. 6.11) дорівнює нулю, то здійснивши граничний перехід $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, і врахувавши обчислені на окремих ділянках інтеграли, отримаємо

$$I(1 + e^{-\pi}) + \frac{\pi}{2}(e^{-\pi} - 1) = 0,$$

звідки маємо остаточний результат

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \frac{\pi}{2}.$$

Раніше ми розглядали лише однозначні аналітичні функції. Теорія лишків також може бути застосована й у випадках, коли підінтегральна функція після продовження на комплексну площину виявляється неоднозначною.

6.3.4. Інтеграли вигляду $\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} f(x) dx$, $0 < \alpha < 1$

Розглянемо інтеграл

$$I = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} f(x) dx, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Нехай функція $f(z)$ є однозначною аналітичною функцією, за винятком скінченного числа ізольованих особливих точок z_k , які не лежать на додатній частині дійсної осі та нехай існують такі дійсні додатні числа M, M_1, R_0, r_0 , що

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|}, \quad \text{коли } |z| > R_0, \quad |f(z)| < M_1, \quad \text{коли } |z| < r_0.$$

Функція $\varphi(z) = z^{\alpha-1} f(z)$ в області G ($0 < \arg z < 2\pi$), що являє собою площину z із розрізом по додатній частині дійсної осі, є однозначною аналітичною функцією, яка має лише ізольовані особливі точки. Ці точки збігаються з особливими точками функції $f(z)$.

Розглянемо в області G контур Γ , який складається із відрізків дійсної осі $[r, R]$ на верхньому та нижньому берегах розрізу та розімкнених кіл C_r ($|z| = r$) та C_R ($|z| = R$), $r < r_0$, $R > R_0$ (рис. 6.12).

За основною теоремою теорії лишків інтеграл по замкненому контуру, що розбивають на суму інтегралів уздовж окремих ділянок,

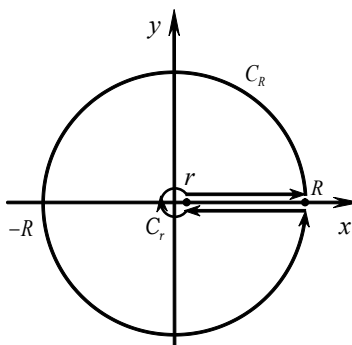


Рис. 6.12

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \varphi(z) dz &= \int_{r+i\varepsilon}^{R+i\varepsilon} x^{\alpha-1} f(x) dx + \int_{C_R^+} z^{\alpha-1} f(z) dz + \int_{R-i\varepsilon}^{r-i\varepsilon} z^{\alpha-1} f(z) dz + \\ &+ \int_{C_r^-} z^{\alpha-1} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{res} [z^{\alpha-1} f(z), z_k], \end{aligned} \quad (6.56)$$

$$\text{але } \left| \int_{C_R^+} z^{\alpha-1} f(z) dz \right| < \frac{M}{R} R^{\alpha-1} 2\pi R = 2\pi \frac{M}{R^{1-\alpha}} \rightarrow 0, \text{ коли } R \rightarrow \infty,$$

$$\left| \int_{C_r^-} z^{\alpha-1} f(z) dz \right| < M_1 r^{\alpha-1} 2\pi r = 2\pi M_1 r^\alpha \rightarrow 0, \text{ коли } r \rightarrow 0.$$

На нижньому березі розрізу $\arg z = 2\pi$, тому (оскільки $z = xe^{2\pi i}$, $dz = dx$, але $f(xe^{2\pi i}) = f(x)$) маємо

$$\int_R^r z^{\alpha-1} f(z) dz = e^{i2\pi(\alpha-1)} \int_R^r x^{\alpha-1} f(x) dx = -e^{i2\pi\alpha} \int_r^R x^{\alpha-1} f(x) dx.$$

Здійснивши в (6.56) граничний перехід $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, отримаємо

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} \sum_{k=1}^N \text{res} [z^{\alpha-1} f(z), z_k],$$

тут підсумовування здійснюється з урахуванням всіх особливих точок z_k функції $f(z)$, причому значення їх аргументу беремо із інтервалу $0 < \arg z_k < 2\pi$.

Приклад 14. Обчислити інтеграл $I = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$, $0 < \alpha < 1$.

$$I = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \frac{dx}{1+x} = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} \text{res} \left[z^{\alpha-1} \frac{1}{1+z}, -1 \right] =$$

$$= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} e^{i\pi(\alpha-1)} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

6.4. Принцип аргументу та теорема Руше

Теорема. Нехай $f(z)$ аналітична в області G , можливо, за винятком скінченної кількості полюсів, D – обмежена однозв'язна область, що належить області G разом із своєю межею Γ .

Якщо $f(z)$ не має на Γ ні нулів, ні полюсів, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P, \quad (6.57)$$

де N – кількість нулів, P – кількість полюсів в області D . При цьому кожен нуль рахується стільки разів, скільки його кратність, а кожен полюс – таку кількість разів, який його порядок.

За умовою теореми кількість полюсів та нулів функції $f(z)$ є скінченною. Якщо кількість нулів нескінченна, то існує точка, гранична для нулів, що лежать в області G , і $f(z) \equiv 0$ за теоремою про єдиність визначення аналітичної функції.

Особливими точками функції

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

є лише нулі та полюси функції $f(z)$.

Нехай $z = a$ – нуль функції $f(z)$ кратності n . Тоді $f(z) = (z-a)^n g(z)$, де $g(z)$ – аналітична в точці $z = a$ функція, $g(a) \neq 0$.

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Звідси випливає, що $\operatorname{res}[F(z), a] = n$, тобто лишок функції $F(z)$ у нулі кратності n функції $f(z)$ дорівнює кратності нуля.

Аналогічно, якщо $z = b$ – полюс функції $f(z)$ порядку p , то $f(z) = \frac{h(z)}{(z-b)^p}$, де $h(z)$ – аналітична в точці $z = b$ функція, $h(b) \neq 0$.

$$F(z) = -\frac{p}{z-b} + \frac{h'(z)}{h(z)} \quad \text{і} \quad \operatorname{res}[F(z), b] = -p.$$

Таким чином, ураховуючи всі полюси та нулі, знаходимо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$$

Зауваження 1. Формула (6.57) залишається справедливою й для неоднозв'язної області.

Наслідок. За умов теореми (6.57) можна записати у вигляді

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg f(z) = N - P.$$

За умовою теореми функція $f(z)$ аналітична в околі кривої Γ і $f(z) \neq 0$ на Γ . Отже, $f(z) \neq 0$ у деякому околі кривої Γ , і в цьому околі можна виділити аналітичну гілку функції $\ln f(z)$.

Оскільки $(\ln f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d(\ln f(z)) = \frac{1}{2\pi i} \Delta_{\Gamma} \ln f(z),$$

де $\Delta_{\Gamma} \ln f(z)$ – приріст функції $\ln f(z)$ при обході точкою z замкненого контуру в додатному напрямку.

Але $\ln f(z) = \ln |f(z)| + i \arg f(z)$, де $\ln |f(z)|$ – однозначна функція, тому $\Delta_{\Gamma} \ln |f(z)| = 0$. Отже, $\Delta_{\Gamma} \ln f(z) = i \Delta_{\Gamma} \arg f(z)$ і

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg f(z). \text{ Звідки випливає рівність}$$

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg f(z) = N - P, \quad (6.58)$$

відома під назвою

Принцип аргументу

Різниця між кількістю нулів і кількістю полюсів функції $f(z)$ усередині контуру Γ дорівнює приросту аргументу цієї функції при обході цього контуру, поділеному на 2π (за умови, що функція $f(z)$ є аналітичною та не обертається в нуль на Γ та є аналітичною в області всередині контуру Γ , за винятком скінченної кількості полюсів).

Якщо $f(z)$ не має полюсів в області D ($P = 0$), то

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg f(z) = N. \quad (6.59)$$

З'ясуємо геометричний зміст $\Delta_{\Gamma} \arg f(z)$. Нехай Γ' – зображення кривої Γ при відображенні, що здійснюється функцією $w = f(z)$. При повному обході контуру Γ точкою z відповідна точка на площині w здійснює N повних обертів вздовж контуру Γ' , що враховується відповідним приростом $\Delta_{\Gamma} \arg f(z)$.

При підрахунку кількості нулів аналітичної функції у заданій області часто застосовують наступну теорему.

Теорема Руше. Нехай функції $f(z)$ і $g(z)$ – аналітичні в обмеженій однозв'язній області D і на її межі, $\forall z \in \Gamma$ має місце нерівність

$$|f(z)| > |g(z)|. \quad (6.60)$$

Тоді функції $f(z)$ та $F(z) = f(z) + g(z)$ мають в D однакову кількість нулів.

У силу умови (6.60) $f(z) \neq 0$ для всіх $z \in \Gamma$. Крім того, $F(z) \neq 0$ на Γ , оскільки $|F(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$. Нехай N_F і N_f – кількість нулів в області D функцій $F(z)$ та $f(z)$, відповідно. Згідно (6.59)

$$N_F = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg F(z).$$

Оскільки $f(z) \neq 0$ на Γ , то для всіх $z \in \Gamma$ із

$$F(z) = f(z) + g(z) = f(z) \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right]$$

випливає, що

$$\Delta_{\Gamma} \arg F(z) = \Delta_{\Gamma} \arg f(z) + \Delta_{\Gamma} \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right).$$

Покажемо, що другий доданок в останній формулі дорівнює нулю. Дійсно, при обході точкою z замкнутого контуру Γ (рис. 6.13) точка $w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ описує

замкнену криву Γ' , що лежить усередині круга $|w-1| < 1$, оскільки $\forall z \in \Gamma$ в силу $|f(z)| > |g(z)|$ маємо $|w-1| = |g(z)/f(z)| < 1$.

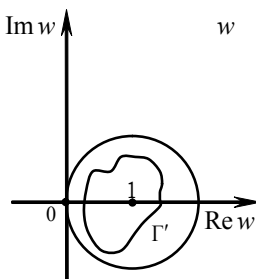


Рис. 6.13

Звідси випливає: радіус-вектор точки w , що рухається вздовж кривої Γ' , не здійснює жодного повного оберту навколо точки $w = 0$, тому

$$\Delta_{\Gamma} \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) = 0, \quad \text{тобто } N_F = N_f.$$

Приклад 15. Знайти число коренів рівняння

$$z^9 - 6z^4 + 3z - 1 = 0 \tag{6.61}$$

усередині круга $|z| < 1$.

Позначимо $f(z) = -6z^4$, $g(z) = z^9 + 3z - 1$. Якщо $z \in \Gamma$, де Γ : $|z| = 1$, то $|f(z)| = 6$, $|g(z)| \leq |z|^9 + 3|z| + 1 = 5$. Звідки $|f(z)| > |g(z)|$ для $z \in \Gamma$. За теоремою Руше кількість нулів вихідного рівняння

в крузі $|z| < 1$ збігається з кількістю коренів рівняння $f(z) = -6z^4 = 0$, тобто дорівнює чотирьом.

Приклад 16. Довести, що рівняння

$$z + \lambda - e^z = 0, \quad \lambda > 1, \quad (6.62)$$

має в лівій півплощині ($\operatorname{Re} z < 0$) єдиний (дійсний) корінь.

Розглянемо замкнений контур (рис. 6.14). Покладемо $f(z) = z + \lambda$, $g(z) = -e^z$. На відрізку l : $[-iR, iR]$ маємо $|f(z)| = |\lambda + iy| \geq \lambda > 1$, $|g(z)| = |e^{iy}| = 1$. На півколі C_R при $R > \lambda + 1$ маємо $|f(z)| \geq |z| - \lambda = R - \lambda > 1$, $|g(z)| = e^x \leq 1$.

За теоремою Руше кількість коренів рівняння в області $|z| < R$, $\operatorname{Re} z < 0$, $\forall R > \lambda + 1$ збігається із кількістю коренів рівняння $z + \lambda = 0$, тобто дорівнює одиниці. Існує один корінь в усій лівій півплощині. Цей корінь дійсний, оскільки ліва частина рівняння для дійсного $z = x \in \mathbb{R}$ неперервною функцією, що більша за нуль ($x + \lambda - e^x > 0$) при $x = 0$ і прямує до $-\infty$ при $x \rightarrow -\infty$, тобто має обернутися в нуль за деякого проміжного дійсного від'ємного значення x .

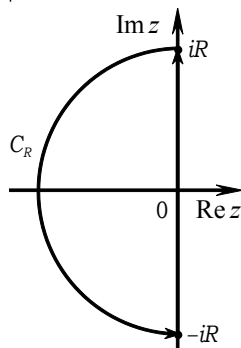


Рис. 6.14

Зауваження 2. Теорема Руше залишається в силі, якщо за збереження інших умов теореми замінити умову аналітичності $f(z)$, $g(z)$ на Γ умовою неперервності функцій аж до межі цієї області.

Теорема Руше дозволяє дати просте доведення наступної теореми.

Основна теорема вищої алгебри

Багаточлен n -го ступеня із комплексними коефіцієнтами має рівно n нулів.

Нехай $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ – довільний багаточлен n -го порядку. Позначимо $f(z) = a_0 z^n$, $g(z) = a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$. Тоді

$P_n(z) = f(z) + g(z)$. Оскільки $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g(z)}{f(z)} = 0$, то знайдеться таке $R > 0$, що для довільного z такого, що $|z| \geq R$, виконується нерівність

$$|g(z)/f(z)| < 1. \quad (6.63)$$

Нехай контур Γ являє собою коло $|z| = R$. Оскільки на Γ має місце нерівність (6.63), то за теоремою Руше кількість нулів багаточлена $N_P = N_f$. Але $N_f = n$, оскільки функція $f(z) = a_0 z^n$ має n нулів у крузі $|z| < R$ (точка $z = 0$ є нулем кратності n функції $f(z)$). Таким чином у крузі $|z| < R$ кількість нулів функції $P_n(z)$ дорівнює n , тобто багаточлен має n нулів. Оскільки в силу нерівності (6.63) багаточлен $P_n(z)$ не має нулів при $|z| \geq R$, то теорему доведено.

6.5. Розвинення мероморфних функцій на найпростіші дроби

Функція $f(z)$ називається **мероморфною**, якщо всі її особливі точки є полюсами. Пронумеруємо полюси в порядку зростання їх модулів

$$|a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_n| \leq \dots$$

Позначимо $g_n(z)$ головну частину $f(z)$ у точці a_n , яка є полюсом m_n -го порядку

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{m_n} \frac{c_{-k}^{(n)}}{(z - a_n)^k}, \quad (6.64)$$

та

$$g(z) = \sum_{k=1}^m c_k z^k \quad (6.65)$$

– її головну частину в нескінченно віддаленій точці (якщо остання також є полюсом).

Теорема 1. Якщо мероморфна функція $f(z)$ має лише скінченну кількість полюсів a_1, a_2, \dots, a_l , і, крім цього, точка $a_{l+1} = \infty$ є або її правильною точкою, або полюсом, то цю функцію можна представити у вигляді суми її головних частин

$$f(z) = c_0 + g(z) + \sum_{n=1}^l g_n(z), \quad (6.66)$$

і вона є, таким чином, дробово-раціональною. (Функція $g(z)$ входить до розвинення (6.66) лише у випадку, якщо $z = \infty$ є полюсом).

Доведення не наводимо.

Визначимо правильну систему контурів $\{C_n\}$ як сукупність замкнених кривих, що задовольняють наступні умови:

1) C_1 охоплює точку $z = 0$, кожний контур C_n розташований усередині області, що обмежена контуром C_{n+1} ;

2) найменша відстань d_n від точок контуру C_n до початку координат необмежено зростає із зростанням n ;

3) відношення довжини l_n кривої C_n до d_n залишається обмеженим

$$\frac{l_n}{d_n} \leq A. \quad (6.67)$$

Має місце

Теорема 2 (О. Коші). Нехай мероморфна функція $f(z)$ на деякій правильній системі контурів $\{C_n\}$ зростає не швидше за z^p , тобто на всіх C_n виконується умова

$$|f(z)| \leq M |z|^p, \quad (6.68)$$

де M – стала, $p \geq 0$ – ціле число. За цих умов функцію $f(z)$ можна представити у вигляді

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n(z) - h_n(z)\}, \quad (6.69)$$

де $g_n(z)$ – головні частини $f(z)$ в її полюсах a_n та

$$h(z) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k, \quad h_n(z) = \sum_{k=0}^p \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} z^k \quad (6.70)$$

є багаточленами степеня не вище за p .

Доведення не приводимо.

Ця теорема узагальнюється на випадок довільної мероморфної функції $f(z)$. Має місце

Теорема 3 (М. Мітгаг-Леффлера). Нехай

$$h_n(z) = \sum_{k=0}^{p_n} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} z^k \quad (6.71)$$

є частиною ряду Тейлора для головної частини $g_n(z)$ довільної мероморфної функції $f(z)$, для якої точка $z=0$ є правильною. Тоді існує така послідовність цілих чисел $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ і така ціла функція $h(z)$, за яких залишається правильним розвинення (6.69).

Є правильною й обернена теорема, яка стверджує, що на комплексній площині для коректно заданих головних частин завжди існує мероморфна функція з цими головними частинами.

Теорема 4 (М. Мітгаг-Леффлера). Для довільної послідовності комплексних чисел a_n , $|a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_i| \leq \dots$ і для довільної послідовності головних частин $g_n(z)$ (6.64) існує мероморфна функція з полюсами в точках послідовності a_n та з головними частинами розвинень відносно цих точок, що дорівнюють $g_n(z)$.

Як наслідок теореми, довільну мероморфну функцію $f(z)$ можна представити у вигляді суми ряду

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n(z) - h_n(z)\},$$

де $h_n(z)$ визначають за (6.71). Ряд рівномірно збігається у довільній обмеженій області, якщо відкинути в ньому члени, що відповідають полюсам у цій області. Мероморфна функція $f(z)$ має своїми полюсами точки a_n , і тільки ці точки, причому її головна частина в полюсі a_n дорівнює g_n .

Приклад 17. Знайти розвинення мероморфної функції $\operatorname{ctg} z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$ у ряд головних частин.

Функція $\operatorname{ctg} z$ має особливості в точках, де $\sin z = 0$, тобто в нулях функції $\sin z$: $z_k = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Оскільки $(\sin z)' = \cos z$ не дорівнює нулю в цих точках, то можна зробити висновок, що функція $\operatorname{ctg} z$ має полюси першого порядку в точках z_k із

$$\operatorname{res}[\operatorname{ctg} z, z_k] = \left. \frac{\cos z}{(\sin z)'} \right|_{z=k\pi} = 1.$$

Покажемо, що функція $\operatorname{ctg} z$ обмежена по модулю на всій комплексній площині, якщо виділити із площини круги $|z - k\pi| < r$. Унаслідок періодичності функції достатньо показати її обмеженість у смужці $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ з вирізаними півкругами $|z - \pi| < r$, $|z| < r$. Маємо

$$|\operatorname{ctg} z| \leq \frac{e^{-y} + e^y}{|e^{-y} - e^y|};$$

тобто при $y > 1$ є оцінка $|\operatorname{ctg} z| \leq \frac{1 + e^{-2y}}{1 - e^{-2y}} < \frac{1 + e^{-2}}{1 - e^{-2}}$,

а при $y < -1$ є оцінка $|\operatorname{ctg} z| \leq \frac{1 + e^{2y}}{1 - e^{2y}} < \frac{1 + e^{-2}}{1 - e^{-2}}$.

У тій самій частині, де $-1 \leq y \leq 1$, функція $|\operatorname{ctg} z|$ обмежена внаслідок неперервності.

Розглянемо на комплексній площині систему кіл C_n

$$|z| = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

які утворюють правильну систему контурів. Вважаємо r достатньо малим так, щоб кола C_n не проходили через виділені круги $|z - k\pi| < r$ (рис. 6.15). Тоді функція обмежена і

на всіх C_n , і в теоремі 2 (О. Коші) можна прийняти $p = 0$.

У точці $z = 0$ головна частина $\operatorname{ctg} z$ дорівнює $1/z$, а функція

$$f(z) = \operatorname{ctg} z - (1/z)$$

прямує до граничного значення, що дорівнює 0 (це є наслідком непарності $f(z)$ та її неперервності в точці $z = 0$). Лишок функції $f(z)$ у полюсі $z_n = n\pi$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) дорівнює одиниці, і таким чином головні частини

$$g_n(z) = \frac{1}{z - n\pi}.$$

Формула (6.69) для $p = 0$ має вигляд

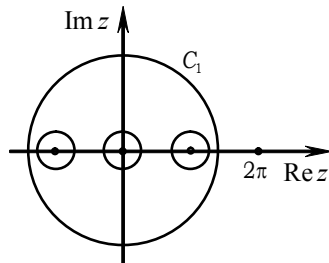


Рис. 6.15

$$f(z) = f(0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \{g_n(z) - g_n(0)\}$$

і дає

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right) \quad (6.72)$$

або

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2 \pi^2}. \quad (6.73)$$

Задачі

У задачах 6.1–6.5 знайти лишки функцій в особливих точках.

6.1. $\frac{1}{z(z^2+4)^2}$. **6.2.** $\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$. **6.3.** $\frac{1}{z^3 - z^5}$. **6.4.** $\operatorname{ctg}^2 z$. **6.5.** $z \sin \frac{1}{z}$.

У задачах 6.6–6.23 обчислити інтеграли.

6.6. $\int_C \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}$, де C – коло $|z-2| = \frac{1}{2}$.

6.7. $\frac{1}{2\pi i} \int_C \sin^2 \frac{1}{z} dz$, де C – коло $|z| = 2$.

6.8. $\int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x+ia) dx$, де a – дійсне число.

6.9. $\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}(x+ia) dx$, $a > 0$.

6.10. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}$, $n = 2, 3, \dots$

6.11. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2}$.

6.12. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^3}$, $a > 0$.

6.13. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

6.14. $\int_0^{\infty} \frac{\cos \ln x}{x^2 + a^2} dx$, $a > 0$.

6.15. $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$.

6.16. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^4 + 8x^2 + 16} dx$.

$$6.17. \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx .$$

$$6.19. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos^2 \varphi}, a > 0, b > 0.$$

$$6.21. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx \quad (0 < a < 1).$$

$$6.23. \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2(x^2 + a^2)} dx, \operatorname{Re} a > 0.$$

$$6.18. \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{x}} dx .$$

$$6.20. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}, a \neq \pm 1 .$$

$$6.22. \int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(x^2 + a^2)} dx, \operatorname{Re} a > 0.$$

$$6.24. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + a^2} dx, \alpha > 0, a > 0.$$

Розділ 7

Перетворення Лапласа

7.1. Визначення перетворення Лапласа

Перетворення Лапласа є однією із можливих реалізацій так званого принципу відповідності, коли можна встановити відповідність між елементами двох різних класів об'єктів, наприклад між функціями та операторами, між функціями та функціями тощо. В основі перетворення Лапласа лежить ідея інтегрального перетворення, при цьому, наприклад розв'язку деякої вихідної задачі (звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами), що являє собою функцію дійсної змінної $f(t)$, ставиться у відповідність функція комплексної змінної $F(p)$, яка задовольняє деяке алгебраїчне рівняння; або рівнянню в частинних похідних ставиться у відповідність звичайне диференціальне рівняння.

Означення. Перетворення Лапласа ставить у відповідність функції $f(t)$ дійсної змінної t функцію $F(p)$ комплексної змінної p за допомогою інтегрального перетворення

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (7.1)$$

Природно, що цей інтеграл існує не для довільної функції $f(t)$. Тому необхідно вказати клас функцій (**клас оригіналів**), для яких це перетворення існує.

Розглянемо функцію $f(t)$, що визначена для всіх значень дійсної змінної $-\infty < t < \infty$ і задовольняє такі умови:

1. При $t < 0$ функція $f(t) \equiv 0$.
2. При $t \geq 0$ функція $f(t)$ на довільній обмеженій ділянці осі t має не більш ніж скінченну кількість точок розриву першого роду.
3. При $t \rightarrow \infty$ функція $f(t)$ має обмежену швидкість зростання, тобто для кожної функції цього класу існують такі дійсні сталі $M \geq 0$ та a , що для всіх $t > 0$ виконується умова

$$|f(t)| \leq Me^{at}. \quad (7.2)$$

Точну нижню грань значень a називають **показником зростання** функції $f(t)$. Зокрема, для функції $f(t) = t^n$ показник зростання дорівнює нулю.

Зазначимо, що інтеграл (7.1) є невласним інтегралом, який залежить від змінної p як від параметра. Із цього випливає, що цей інтеграл збігається не за всіх значень параметра p . Наприклад, якщо функція $f(t)$ при $t \rightarrow \infty$ прямує до граничного значення, що відрізняється від нуля, а $\operatorname{Re} p < 0$, то інтеграл розбігається.

Теорема 1. Інтеграл (7.1) збігається в області $\operatorname{Re} p > a$, де a – показник зростання функції $f(t)$, причому для довільного $x_0 > a$ інтеграл (7.1) при $\operatorname{Re} p \geq x_0 > a$ збігається рівномірно.

Для довільного $p = x + iy$ при $x > a$ можна вказати таке $\varepsilon > 0$, що $x > a_1 = a + \varepsilon$, причому $|f(t)| < Me^{a_1 t}$. Тоді

$$|F(p)| = \left| \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| \leq M \int_0^{\infty} e^{-xt} e^{a_1 t} dt = \frac{M}{x - a_1}, \quad x > a_1, \quad (7.3)$$

тобто інтеграл збігається при $x > a$. Якщо $x \geq x_0 > a$, то аналогічна оцінка дає

$$|F(p)| \leq M \int_0^{\infty} e^{-(x_0 - a_1)t} dt = \frac{M}{x_0 - a_1}, \quad (7.4)$$

що доводить рівномірну збіжність.

Функцію $F(p)$, визначену за допомогою (7.1), називають **зображенням Лапласа** функції $f(t)$. Функцію $f(t)$ називають **оригіналом** функції $F(p)$. Зв'язок функцій $f(t)$ та $F(p)$ символічно позначатимемо як

$$f(t) \doteq F(p) \quad \text{або} \quad F(p) \doteq f(t), \quad (7.5)$$

або $f(t) \rightarrow F(p)$, $F(p) \rightarrow f(t)$.

Нагадаємо, що серед функцій комплексної змінної найбільш важливим класом є аналітичні функції. З'ясуємо, чи є аналітичною функцією зображення Лапласа $F(p)$.

Теорема 2. Зображення Лапласа $F(p)$ функції $f(t)$ є аналітичною функцією комплексної змінної p в області $\operatorname{Re} p > a$, де a – показник зростання функції $f(t)$.

Доведення не наводимо.

Необхідною ознакою зображення є $\lim_{|p| \rightarrow \infty} F(p) = 0$ в області $\operatorname{Re} p > a$.

7.2. Зображення Лапласа елементарних функцій

Знайдемо зображення деяких елементарних функцій дійсної змінної.

1. Одинична функція Хевісайда. Нехай

$$f(t) = \sigma_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \quad (7.6)$$

Тоді $f(t) \doteq F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}$,

а функція $F(p)$ визначена в області $\operatorname{Re} a > 0$. Таким чином

$$f(t) = \sigma_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \doteq \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (7.7)$$

Домовимося надалі під функцією $f(t)$ розуміти добуток $f(t) \cdot \sigma_0(t)$, тобто функцію, тотожно рівну нулю при $t < 0$.

2. Показникова функція

$$f(t) = e^{\alpha t}. \quad (7.8)$$

Обчислимо інтеграл (7.1) і дістанемо

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} dt = \frac{1}{p - \alpha} \doteq e^{\alpha t}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha. \quad (7.9)$$

3. Степенева функція

$$f(t) = t^{\nu}, \quad \nu > -1. \quad (7.10)$$

У цьому випадку інтеграл (7.1) має вигляд

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{\nu} dt, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (7.11)$$

Почнемо з випадку, коли змінна p набуває дійсних значень $p = x > 0$. Тоді

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{\nu} dt = \frac{1}{x^{\nu+1}} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\nu} ds = \frac{\Gamma(\nu+1)}{x^{\nu+1}}, \quad (7.12)$$

де $\Gamma(v+1)$ – гамма-функція Ейлера. Унаслідок єдиності аналітичного продовження функція $F(p)$ в області $\operatorname{Re} p > 0$ має вигляд

$$F(p) = \frac{\Gamma(v+1)}{p^{v+1}}. \quad (7.13)$$

При цьому у випадку дробових або ірраціональних значень v необхідно обирати ту гілку багатозначної функції $1/p^{v+1}$, яка є безпосереднім аналітичним продовженням в область $\operatorname{Re} p > 0$ дійсної функції $1/x^{v+1}$ дійсної змінної $x > 0$.

Таким чином,

$$t^v \doteq \frac{\Gamma(v+1)}{p^{v+1}}, \quad v > -1, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (7.14)$$

Зокрема, для цілих $v = n$ можна записати

$$t^n \doteq \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (7.15)$$

7.3. Властивості зображень

1. Лінійність зображення. Унаслідок властивостей визначених інтегралів справедливе твердження

якщо $F_i(p) \doteq f_i(t)$, $\operatorname{Re} p > a_i$, ($i = 1, \dots, n$), то

$$F(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(p) \doteq \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t), \quad \operatorname{Re} p > \max a_i, \quad (7.16)$$

де α_i – задані сталі, a_i – показник зростання функції $f_i(t)$.

Приклад 1. $\cos \omega t$.

Як приклад застосування цієї властивості та (7.9) отримаємо

$$\begin{aligned} \cos \omega t &= \frac{1}{2} \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) \doteq \\ &\doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Аналогічно

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|. \quad (7.18)$$

2. Властивість подібності. Нехай $F(p) \doteq f(t)$, $\operatorname{Re} p > a$, тоді

$$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \doteq f(\alpha t), \quad \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} p > a. \quad (7.19)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(\alpha t) dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\alpha} \tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

3. Теорема запізнювання. Нехай $F(p) \doteq f(t)$, $\operatorname{Re} p > a$ та задано функцію

$$f_{\tau}(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \tau > 0, \\ f(t - \tau), & t \geq \tau. \end{cases} \quad (7.20)$$

Тоді $f_{\tau}(t) \doteq F_{\tau}(p) = e^{-p\tau} F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$. (7.21)

$$F_{\tau}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f_{\tau}(t) dt = \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t - \tau) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-p(t'+\tau)} f(t') dt' = e^{-p\tau} F(p).$$

Таким чином, множення зображення на $e^{-p\tau}$ зміщує графік оригіналу вправо на τ , що відповідає явищу, яке в фізиці називають запізнюванням.

Приклад 2. Схдинкова функція.

Розглянемо зображення сходянкової функції (рис. 7.1)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ nf_0, & n\tau \leq t < (n+1)\tau, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (7.22)$$

Для визначення $f(t)$ можна застосувати функцію Хевісайда σ_0

$$f(t) = f_0[\sigma_0(t - \tau) + \sigma_0(t - 2\tau) + \dots].$$

Використаємо властивість лінійності, теорему запізнювання та отримаємо

$$f(t) \doteq F(p) = f_0 e^{-p\tau} \frac{1}{p} + f_0 e^{-2p\tau} \frac{1}{p} + \dots = \frac{f_0}{p} \frac{e^{-p\tau}}{1 - e^{-p\tau}}. \quad (7.23)$$

Приклад 3. Періодична функція.

Аналогічно можна отримати зображення періодичної функції (рис. 7.2).

$$f(t) = \begin{cases} f_0, & 2n\tau \leq t < (2n+1)\tau, \\ -f_0, & (2n+1)\tau \leq t < (2n+2)\tau, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.24)$$

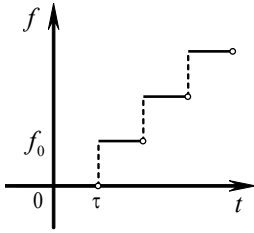


Рис. 7.1

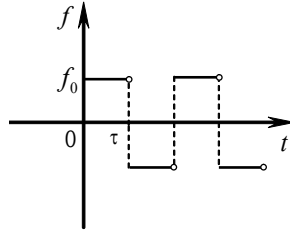


Рис. 7.2

Дійсно, спочатку запишемо

$$f(t) = f_0 [\sigma_0(t) - 2\sigma_0(t - \tau) + 2\sigma_0(t - 2\tau) - 2\sigma_0(t - 3\tau) + \dots],$$

а потім

$$\begin{aligned} f(t) \doteq F(p) &= f_0 \left[\frac{1}{p} - 2e^{-p\tau} \frac{1}{p} + 2e^{-2p\tau} \frac{1}{p} - 2e^{-3p\tau} \frac{1}{p} + \dots \right] = \\ &= \frac{f_0}{p} [2 - 2e^{-p\tau} + 2e^{-2p\tau} - 2e^{-3p\tau} + \dots - 1] = \\ &= \frac{2f_0}{p} [1 - e^{-p\tau} + e^{-2p\tau} - e^{-3p\tau} + \dots] - \frac{f_0}{p} = \\ &= \frac{2f_0}{p} \frac{1}{1 + e^{-p\tau}} - \frac{f_0}{p} = \frac{f_0}{p} \frac{1 - e^{-p\tau}}{1 + e^{-p\tau}} = \frac{f_0}{p} \operatorname{th} \left(\frac{p\tau}{2} \right). \end{aligned} \quad (7.25)$$

Приклад 4. Періодична функція загального вигляду.

Теорема запізнювання дозволяє отримати загальну формулу для зображення періодичної функції. Попередньо розглянемо випадок, коли функцію дійсної змінної $f(t)$ можна представити у вигляді

$$f(t) = \begin{cases} \varphi(t), & 0 \leq t < \tau, \\ 0, & \tau \leq t. \end{cases} \quad (7.26)$$

Позначимо зображення функцій

$$\varphi(t) \doteq \Phi(p) \quad \text{і} \quad \varphi(t + \tau) \doteq \Phi_\tau(p).$$

Перепишемо (7.26) у вигляді

$$f(t) = \varphi(t) + \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau, \\ -\varphi(t + \tau - \tau), & t \geq \tau. \end{cases}$$

Використаємо властивість лінійності, теорему запізнювання і дістанемо

$$f(t) \doteq F(p) = \Phi(p) - e^{-pt} \Phi_\tau(p). \quad (7.27)$$

Нехай функція $\varphi(t)$ є періодичною з періодом τ , тобто $\varphi(t + \tau) = \varphi(t)$, тоді $\Phi_\tau(p) = \Phi(p)$. Тоді із (7.27) маємо

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - e^{-p\tau}}. \quad (7.28)$$

4. Зображення похідної. Якщо $f'(t)$ задовольняє умови існування зображення при $\operatorname{Re} p > a$ та $f(t) \doteq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, то

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0), \quad \operatorname{Re} p > a. \quad (7.29)$$

Це одна з основних властивостей зображення: операції диференціювання в просторі зображень ставиться у відповідність операція множення на незалежну змінну p , якщо початкова умова для оригіналу – нульова ($f(0) = 0$).

Інтегруємо частинами й дістаємо

$$f'(t) \doteq \int_0^\infty e^{-pt} f'(t) dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = pF(p) - f(0).$$

5. Зображення похідної вищих порядків. Якщо $f^{(n)}(t)$ задовольняє умови існування зображення при $\operatorname{Re} p > a$ та $f(t) \doteq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, то

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n \left\{ F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right\}, \quad \operatorname{Re} p > a. \quad (7.30)$$

Доведення аналогічне до попереднього.

Формула (7.30) особливо спрощується у випадку, коли

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0: \quad (7.31)$$

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p).$$

Приклад 5. Розв'язати задачу Коші для звичайного лінійного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = f(t), \quad (7.32)$$

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0, \quad (7.33)$$

де $f(t)$ є заданою функцією при $t \geq 0$.

Якщо покласти, що $f(t) = 0$ при $t < 0$, то можна побудувати зображення $f(t) \doteq F(p)$. Нехай функція $y(t)$ та усі її похідні

задовольняють умови існування зображення, $y(t) \doteq Y(p)$ і $Y(p)$ – поки невідома. Тоді домножимо (7.32) на e^{-pt} і проінтегруємо за t у межах від 0 до ∞ . У результаті

$$Y(p)\{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n\} = F(p).$$

Позначивши багаточлен у фігурних дужках як $P_n(p)$, маємо

$$Y(p) = \frac{F(p)}{P_n(p)}. \quad (7.34)$$

Якщо вдається відновити оригінал $y(t)$ за його зображенням $Y(p)$ (7.34), то вихідна задача буде розв'язана.

6. Зображення інтеграла. Нехай $f(t) \doteq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$. Тоді

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{p} F(p), \quad \operatorname{Re} p > a. \quad (7.35)$$

Зображенням інтеграла $\int_0^t f(\tau) d\tau$ є повторний інтеграл $\int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau) d\tau$,

що виражає подвійний інтеграл по області, яка задається нерівностями $0 \leq t \leq T$, $0 \leq \tau \leq t$, де $T \rightarrow \infty$ (рис. 7.3). Цю область можна задати по-іншому ($0 \leq \tau \leq T$, $\tau \leq t \leq T$, де $T \rightarrow \infty$) і змінити порядок інтегрування

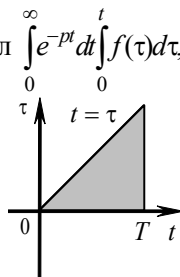


Рис. 7.3

$$\int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{p} F(p).$$

7. Зображення багатократного інтеграла. Нехай

$$f(t) \doteq F(p), \quad \operatorname{Re} p > a.$$

Тоді

$$\varphi(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n f(t_n) \doteq \frac{1}{p^n} F(p), \quad \operatorname{Re} p > a. \quad (7.36)$$

Цю властивість доводять аналогічно попередній.

Означення. Згорткою $f_1 * f_2$ функцій $f_1(t)$ і $f_2(t)$ називається функція $\varphi(t)$, що визначається співвідношенням

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau. \quad (7.37)$$

8. Зображення згортки. Якщо $f_1(t) \doteq F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > a_1$, і $f_2(t) \doteq F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > a_2$, то

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \doteq F_1(p) F_2(p), \quad \operatorname{Re} p > \max\{a_1, a_2\}. \quad (7.38)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau &= \int_0^\infty f_1(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t - \tau) dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-pt'} f_2(t') dt' = F_1(p) F_2(p). \end{aligned}$$

Таким чином, згортці у просторі оригіналів відповідає множення у просторі зображень.

Приклад 6. Знайти оригінал функції $F(p) = \frac{p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$.

Згідно з (7.17) і (7.18), можна записати

$$\frac{p}{p^2 + \omega^2} \doteq \cos \omega t, \quad \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \doteq \sin \omega t.$$

Тому
$$F(p) \doteq \int_0^t \sin \omega \tau \cdot \cos \omega(t - \tau) d\tau = \frac{t}{2} \sin \omega t. \quad (7.39)$$

9. Диференціювання зображення. Нехай $F(p) \doteq f(t)$, $\operatorname{Re} p > a$. Тоді

$$F'(p) \doteq -tf'(t), \quad \operatorname{Re} p > a. \quad (7.40)$$

$$F'(p) = \frac{d}{dp} \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = - \int_0^\infty e^{-pt} t f(t) dt \doteq -tf'(t).$$

Цю властивість можна узагальнити.

10. Багатократне диференціювання зображення. Нехай

$$F(p) \doteq f(t), \quad \operatorname{Re} p > a.$$

Тоді
$$F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n t^n f(t), \quad \operatorname{Re} p > a. \quad (7.41)$$

11. Інтегрування зображення. Нехай $F(p) \doteq f(t)$, $\operatorname{Re} p > a$, функція $f(t)/t$ задовольняє умови існування зображення. Тоді

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt = \int_p^{\infty} F(q) dq, \quad \operatorname{Re} p > a. \quad (7.42)$$

Позначимо

$$I(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt,$$

і продиференціюємо цей вираз (праву частину – по параметру)

$$I'(p) = \frac{d}{dp} \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt = - \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = -F(p).$$

Урахуємо, що $I(\infty) = 0$, та отримаємо

$$\int_p^{\infty} F(q) dq = - \int_p^{\infty} I'(q) dq = I(p) - I(\infty) = I(p).$$

Приклад 7. Знайти зображення функції $\frac{1}{t} \sin \omega t$.

Оскільки $\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, то

$$\frac{1}{t} \sin \omega t \doteq \int_p^{\infty} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} dp = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{\omega}. \quad (7.43)$$

Зокрема, при $\omega = 1$

$$\frac{1}{t} \sin t \doteq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

Тоді, урахуваючи властивість 6 – зображення інтеграла (7.35), можна отримати зображення інтегрального синуса

$$\operatorname{si} t = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \doteq \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p \right). \quad (7.44)$$

12. Теорема зміщення зображення. Нехай $f(t) \doteq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$. Тоді для довільного комплексного числа λ справедливе співвідношення

$$F(p + \lambda) \doteq e^{-\lambda t} f(t), \quad \operatorname{Re} p > a - \operatorname{Re} \lambda. \quad (7.45)$$

$$F(p + \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-(p+\lambda)t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-\lambda t} f(t) dt \doteq e^{-\lambda t} f(t).$$

Теорема зміщення застосовується у фізичних явищах, пов'язаних із затухаючими коливаннями.

13. Гранична теорема 1. Нехай $f(t) \doteq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, функція $f'(t)$ належить до класу оригіналів та існує граничне значення $f(t)$, коли $t \rightarrow \infty$. Тоді

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p). \quad (7.46)$$

Властивість (7.46) безпосередньо впливає, якщо здійснити граничний перехід у формулі для зображення похідної функції:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} (pF(p) - f(0)),$$

звідки
$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) - f(0).$$

14. Гранична теорема 2. Нехай $f(t) \doteq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, і функція $f'(t)$ належить до класу оригіналів. Тоді

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p). \quad (7.47)$$

Властивість (7.47) впливає із необхідної умови існування зображення похідної функції

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (pF(p) - f(0)) = 0.$$

Звідси
$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0).$$

15. Диференціювання за параметром. Нехай $f(t, \lambda) \doteq F(p, \lambda)$, $\operatorname{Re} p > a$, і при $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ та $t > 0$ існує $\partial f / \partial \lambda$. Тоді для всіх λ із вказаного інтервалу справедливе співвідношення

$$\frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial \lambda} \doteq \frac{\partial F(p, \lambda)}{\partial \lambda}. \quad (7.48)$$

Ця властивість використовується при розв'язуванні диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Таблиця зображень. Наведені вище властивості допомагають знайти зображення багатьох функцій, деякі з яких ми зібрали нижче ($t > 0$):

$$1) 1 \doteq 1/p, \operatorname{Re} p > 0; \quad 2) t^{\nu} \doteq \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}, \nu > -1, \operatorname{Re} p > 0;$$

- 3) $t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}$, n – натуральне, $\operatorname{Re} p > 0$;
- 4) $e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p - \alpha}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$; 5) $\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$;
- 6) $\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}$, $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$;
- 7) $\operatorname{sh} \lambda t \doteq \frac{\lambda}{p^2 - \lambda^2}$, $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} \lambda|$;
- 8) $\operatorname{ch} \lambda t \doteq \frac{p}{p^2 - \lambda^2}$, $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} \lambda|$;
- 9) $t^n e^{\alpha t} \doteq \frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$;
- 10) $t \sin \omega t \doteq \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$, $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$;
- 11) $t \cos \omega t \doteq \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$, $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$;
- 12) $e^{\lambda t} \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda + |\operatorname{Im} \omega|$;
- 13) $e^{\lambda t} \cos \omega t \doteq \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda + |\operatorname{Im} \omega|$;
- 14) $\frac{\sin \omega t}{t} \doteq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{\omega}$, $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$;
- 15) $|\sin \omega t| \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \operatorname{cth} \frac{p\pi}{2\omega}$, $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$;
- 16) $\operatorname{si} t \doteq \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p \right)$, $\operatorname{Re} p > 0$.

7.4. Обернене перетворення Лапласа. Формула Мелліна

Нехай відомо, що функція комплексної змінної $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$ з обмеженим показником зростання $|f(t)| < Me^{at}$, і значення сталої a задано. Необхідно за даною

функцією $F(p)$ відновити оригінал $f(t)$. Розв'язати цю задачу допомагає теорема.

Теорема 3 (формула Мелліна). Нехай відомо, що функція $F(p)$ в області $\operatorname{Re} p > a$ є зображенням кусково-гладкої функції $f(t)$ дійсної змінної t , що має показник зростання a . Тоді

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad x > a. \quad (7.49)$$

Розглянемо допоміжну функцію $\varphi(t) = e^{-xt} f(t)$, $x > a$. Ця функція є кусково-гладкою, тобто на довільній обмеженій ділянці осі t має скінченну кількість точок розриву першого роду, і експоненціально прямує до нуля при $t \rightarrow \infty$. Її можна представити за допомогою інтеграла Фур'є

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta) e^{i\xi(t-\eta)} d\eta. \quad (7.50)$$

Використаємо тепер визначення функції $\varphi(t)$

$$\begin{aligned} e^{-xt} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\eta} f(\eta) e^{i\xi(t-\eta)} d\eta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} d\xi \int_0^{\infty} e^{-(x+i\xi)\eta} f(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (7.51)$$

оскільки $f(\eta) = 0$ при $\eta < 0$. Домножимо обидві частини (7.51) на e^{xt} і, здійснивши перехід до нової змінної $p = x + i\xi$, маємо:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x+i\xi)t} d\xi \int_0^{\infty} e^{-(x+i\xi)\eta} f(\eta) d\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp.$$

Зазначимо, що інтегрування у формулі Мелліна здійснюється на комплексній площині по прямій, що паралельна уявній осі та проходить праворуч прямої $\operatorname{Re} p = a$. Далі покажемо, що значення інтеграла (7.49) не залежить від x за умови, що пряма інтегрування лежить праворуч прямої $\operatorname{Re} p = a$.

Формула Мелліна в певному смислі є оберненим перетворенням Лапласа. Оскільки в процесі виведення її від невідомої функції $f(t)$ ми прийшли до інтеграла Фур'є, який

збігається до $f(t)$ лише в точках неперервності цієї функції, то й (7.49) визначає $f(t)$ лише в точках її неперервності.

Розглянемо застосування формули Мелліна (7.49) для знаходження зображення добутку, якщо відомі зображення співмножників.

Теорема 4. Нехай $f_1(t) \doteq F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > a_1$, $f_2(t) \doteq F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > a_2$. Тоді

$$\begin{aligned} f(t) = f_1(t)f_2(t) \doteq F(p) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q)F_2(p-q)dq = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(p-q)F_2(q)dq, \end{aligned} \quad (7.52)$$

причому функція $F(p)$ є визначеною та аналітичною всюди в області $\operatorname{Re} p > a_1 + a_2$, а інтегрування проводиться по довільній прямій, що паралельна до уявної осі й задовольняє у першому випадку умову $a_1 < \operatorname{Re} q < \operatorname{Re} p - a_2$, а в другому – умову $a_2 < \operatorname{Re} q < \operatorname{Re} p - a_1$.

Оскільки функція $f(t)$ задовольняє всі умови існування зображення, то для неї існує перетворення Лапласа

$$\begin{aligned} f(t) \doteq F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-pt} f_2(t)dt \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{qt} F_1(q)dq = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q)dq \int_0^{\infty} e^{-(p-q)t} f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q)F_2(p-q)dq. \end{aligned}$$

Зазначимо, що $\operatorname{Re} q = x > a_1$, а функція $F_2(p-q)$ визначена для $\operatorname{Re}(p-q) > a_2$, звідки $\operatorname{Re} p > a_1 + a_2$. Крім того, змінювати порядок інтегрування можна в силу рівномірної збіжності даних невласних інтегралів, залежних від параметрів.

Ця теорема у деякому розумінні обернена до властивості 8.

Приклад 7. Нехай $f_1(t) = \cos \omega t$, $f_2(t) = t$. Знайти зображення функції $f(t) = t \cos \omega t$.

Оскільки $\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}$, $t \doteq 1/p^2$, то внаслідок (7.52)

можна записати

$$f(t) \doteq F(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{q dq}{(q^2 + \omega^2)(p-q)^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|, \quad (7.53)$$

де інтегрування проводять уздовж довільної прямої, що є паралельною до уявної осі та лежить праворуч від прямої $\operatorname{Re} q = |\operatorname{Im} \omega|$.

Нехай ця пряма проходить ліворуч точки $q = p$ (рис. 7.4), і розглянемо замкнений контур Γ , що складається із відрізка $[x+iR, x-iR]$ цієї прямої і півкола $|q-x|=R$. В області, що обмежена цим контуром, підінтегральна функція є аналітичною всюди, за винятком точки $q = p$, яка є полюсом другого порядку. Тоді

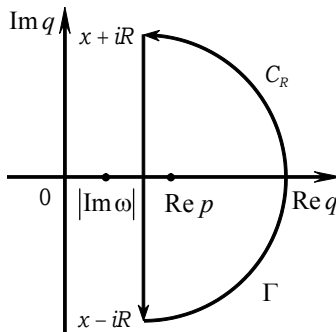


Рис. 7.4

$$\begin{aligned} F(p) &= -2\pi i \cdot \frac{1}{2\pi i} \operatorname{res} \left[\frac{q}{(q^2 + \omega^2)(p-q)^2}, q = p \right] = \\ &= -\frac{d}{dq} \left[\frac{q}{(q^2 + \omega^2)(p-q)^2} (q-p)^2 \right]_{q=p} = \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}, \end{aligned}$$

що збігається з результатом п. 11 табл. в п. 7.3. Тут знаком мінус ураховано зміну напрямку інтегрування в (7.53), порівняно із зображеним на рис. 7.4. Отже,

$$t \cos \omega t \doteq \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}. \quad (7.54)$$

Розглянемо тепер достатні умови, при виконанні яких задана функція $F(p)$ комплексної змінної p є зображенням функції $f(t)$ дійсної змінної t , та покажемо як знайти останню.

Теорема 5. Нехай функція $F(p)$ комплексної змінної p задовольняє наступні умови:

- 1) $F(p)$ – аналітична в області $\operatorname{Re} p > a$;
- 2) в області $\operatorname{Re} p > a$ функція $F(p)$ прямує до нуля при $|p| \rightarrow \infty$ рівномірно відносно $\arg p$;

3) для всіх $\operatorname{Re} p = x > a$ збігається інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(p)| dy < M, \quad p = x + iy, \quad x > a.$$

Тоді функція $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > a$ є зображенням функції $f(t)$ дійсної змінної t , яка визначається виразом

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad x > a. \quad (7.55)$$

Із самого початку виникає питання про існування невласного інтеграла в (7.55). Покажемо, що невласний інтеграл рівномірно збігається по t на будь-якому інтервалі $0 < t < T$. Використаємо властивість (2.7)

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |e^{pt} F(p)| |dp| = \frac{e^{xt}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)| dy \leq \frac{e^{xt}}{2\pi} M.$$

Далі можна встановити, що інтеграл (7.55) не залежить від x і визначає функцію лише від однієї змінної t . Для цього в області $\operatorname{Re} p > a$ розглянемо замкнений контур Γ (рис. 7.5), який складається з відрізків прямих $[x_1 + iR, x_1 - iR]$ і $[x_2 - iR, x_2 + iR]$, які паралельні уявній осі, і з'єднуючих їх відрізків прямих $[x_1 - iR, x_2 - iR]$ та $[x_2 + iR, x_1 + iR]$,

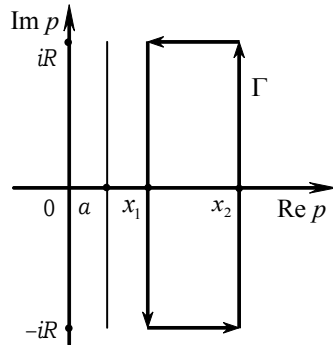


Рис. 7.5

які паралельні дійсній осі. Тут $R > 0$, x_1, x_2 – довільні числа, більші за a .

За теоремою Коші інтеграл від функції $e^{pt} F(p)$ по контуру Γ дорівнює нулю. Спрямуємо R до нескінченності, залишаючи x_1, x_2 фіксованими. Тоді інтеграли по горизонтальних відрізках

прямують до нуля, а інтеграли по вертикальних відрізках дадуть

$$\int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \int_{x_2-i\infty}^{x_2+i\infty} e^{pt} F(p) dp$$

що й треба було довести.

За теоремою Коші та зауваженням до леми Жордана, якщо вибрати замкнений контур інтегрування так, як показано на (рис. 7.6),

впливає, що

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp \equiv 0 \text{ для } t < 0,$$

оскільки всі особливі точки підінтегральної функції залишилися ліворуч прямої $\text{Re } p = a$.

Побудуємо зображення Лапласа функції $f(t)$ і розглянемо його значення для деякого довільного p_0 , де $\text{Re } p_0 > x > a$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t) dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-p_0 t} dt \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p) dp \int_0^{\infty} e^{-(p_0-p)t} dt = -\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{F(p)}{p-p_0} dp = F(p_0), \end{aligned}$$

що й треба було довести. Тут при знаходженні останнього інтеграла скористалися інтегруванням по замкненому контуру, що зображений на рис. 7.6. Точка p_0 потрапляє до області всередині цього контуру, вона й дає внесок у значення інтеграла. Інтеграл по півколу C_R дорівнює нулю, оскільки $F(p)$ як функція-зображення рівномірно прямує до нуля, коли $|p| \rightarrow \infty$ і $\text{Re } p > a$.

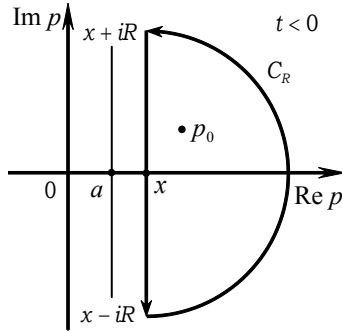


Рис. 7.6

7.5. Приклади використання формули Мелліна

Нехай однозначна функція $F(p)$ задовольняє всі умови, необхідні для існування формули Мелліна, і, крім того, у лівій

півплощині $\operatorname{Re} p < a$ вона задовольняє умови леми Жордана. Зокрема, вона задовольняє відповідні умови на нескінченності, до того ж, має скінченне число ізольованих особливих точок усередині лівого півкруга $|p - a| < R_0$, а зовні цього півкруга всюди аналітична. Тоді, використовуючи основну теорему теорії лишків, знаходимо

$$f(t) = \sum_{k=1}^N \operatorname{res} \left[e^{pt} F(p), p_k \right].$$

Підсумовування здійснюється по лишках функції $e^{pt} F(p)$ відносно всіх особливих точок, що розташовані всередині області,

обмеженої півколом $|p - a| < R_0$, $\operatorname{Re} p < a$ та прямою $\operatorname{Re} p = a$ (рис. 7.7).

Приклад 8. Нехай $F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$.

Знайти оригінал.

$F(p)$ має дві ізольовані особливі точки $p_1 = i\omega$, $p_2 = -i\omega$ – полюси першого порядку, тому

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \frac{\omega dp}{p^2 + \omega^2} = \\ &= \sum_{k=1}^2 \operatorname{res} \left[e^{pt} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, p_k \right] = \frac{e^{i\omega t} \omega}{2i\omega} + \frac{e^{-i\omega t} \omega}{-2i\omega} = \sin \omega t. \end{aligned}$$

Приклад 9. Знайти оригінал $F(p) = \frac{1}{p^{\alpha+1}}$, $-1 < \alpha < 0$, $\operatorname{Re} p > 0$.

Функція $F(p)$ є багатозначною в розглядуваній області. Розумітимемо під $F(p)$ ту гілку заданої багатозначної функції, яка є безпосереднім аналітичним продовженням в область $\operatorname{Re} p > 0$ дійсної функції $1/x^{\alpha+1}$ дійсної змінної $x > 0$. При цьому ми, очевидно, маємо вважати, що $\arg p = 0$ при $p = x$, $x > 0$. Функція $F(p)$ не задовольняє умову 3) теореми 5. Покажемо, однак, що функція

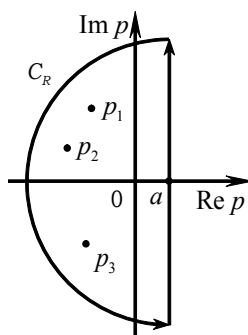


Рис. 7.7

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \frac{dp}{p^{\alpha+1}}$$

є оригіналом заданої функції.

Аналітичне продовження функції $F(p)$ на всю комплексну площину є багатозначною функцією із точками розгалуження 0 та ∞ . Можна виділити область однозначності аналітично продовженої функції $F(p)$, сполучивши точки розгалуження розрізом, для виключення можливості повного обходу точок розгалуження й, таким чином, переходу з однієї гілки функції на іншу. Доцільно точки 0 та ∞ сполучити розрізом по від'ємній частині дійсної осі. Таким чином, розглядатимемо в області G , що являє собою комплексну площину p із розрізом по від'ємній частині дійсної осі, ту гілку багатозначної функції $1/p^{\alpha+1}$, що є безпосереднім аналітичним продовженням функції $F(p)$, яка початково задана у правій півплощині. В області G розглянемо замкнений контур Γ , що складається із відрізка $[x-iR, x+iR]$, $x > 0$, відрізків $-R < x < -\rho$ на берегах розрізу, дуги кола C_ρ , $|p| = \rho$, що їх замикає, та дуг кола C'_R , C''_R , $|p-x|=R$, що сполучають береги розрізу з вертикальним відрізком $[x-iR, x+iR]$ (рис. 7.8). Згідно з теоремою Коші інтеграл по замкнутому контуру Γ дорівнює нулю

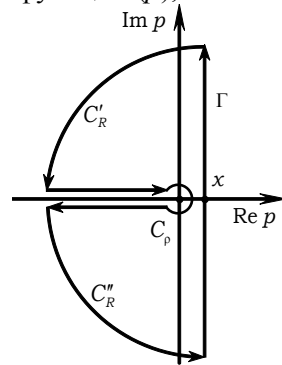


Рис. 7.8

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iR}^{x+iR} e^{pt} \frac{dp}{p^{\alpha+1}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_R} e^{pt} \frac{dp}{p^{\alpha+1}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-R+i\epsilon}^{-\rho+i\epsilon} e^{pt} \frac{dp}{p^{\alpha+1}} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} e^{pt} \frac{dp}{p^{\alpha+1}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\rho-i\epsilon}^{-R-i\epsilon} e^{pt} \frac{dp}{p^{\alpha+1}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C''_R} e^{pt} \frac{dp}{p^{\alpha+1}} = 0. \end{aligned}$$

Здійснимо граничний перехід $\epsilon \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$. У силу наслідків із леми Жордана інтеграли вздовж дуг кола C''_R , C'_R

прямують до нуля. На колі C_ρ , де $p = \rho e^{i\phi}$ та аргумент ϕ змінюється від π до $-\pi$, справедлива оцінка

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} e^{pt} \frac{dp}{p^{\alpha+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi \rho^\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} e^{t\rho \cos \phi} d\phi,$$

тобто інтеграл вздовж C_ρ прямує до нуля, коли $\rho \rightarrow 0$, оскільки $-1 < \alpha < 0$. Таким чином залишаються лише інтеграли по прямолінійних ділянках. Значимо, що на верхньому березі розрізу $p = re^{i\pi}$, на нижньому $p = re^{-i\pi}$. Тому

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \frac{dp}{p^{\alpha+1}} = \frac{1}{2\pi i} \left\{ -e^{-i\pi\alpha} \int_{\infty}^0 e^{-rt} \frac{dr}{r^{\alpha+1}} - e^{i\pi\alpha} \int_0^{\infty} e^{-rt} \frac{dr}{r^{\alpha+1}} \right\} = \\ &= \frac{\sin(-\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-rt} r^{-\alpha-1} dr, \end{aligned} \quad (7.56)$$

Зробивши в (7.56) заміну змінної $rt = s$, дістанемо

$$f(t) = \frac{\sin(-\pi\alpha)}{\pi} t^\alpha \Gamma(-\alpha).$$

Скориставшись рівністю

$$\Gamma(-\alpha)\Gamma(1+\alpha) = \frac{\pi}{\sin(-\pi\alpha)},$$

отримаємо кінцеву формулу

$$\frac{1}{p^{\alpha+1}} \doteq f(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Приклад 10. Нехай

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \frac{1}{p^{2k+1}}, \quad |p| > 1. \quad (7.57)$$

Відновити оригінал.

Заданий ряд в (7.57) визначає однозначну гілку двозначної функції $1/\sqrt{p^2+1}$. Цей ряд рівномірно збігається при $|p| > 1$. Тому в цій області його можна інтегрувати почленно. Виберемо у формулі Мелліна (7.49) $x > 1$, здійснимо почленне інтегрування з урахуванням рівності

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \frac{dp}{p^{2k+1}} = \operatorname{res} \left[\frac{e^{pt}}{p^{2k+1}}, 0 \right] = \frac{1}{(2k)!} t^{2k}$$

і знайдемо

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} = J_0(t),$$

де $J_0(t)$ – функція Бесселя нульового порядку.

З іншого боку, для знаходження оригіналу можна безпосередньо скористатися формулою Мелліна (без розвинення в ряд)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{e^{pt}}{\sqrt{p^2+1}} dp.$$

Вибравши контур інтегрування так, як показано на рис. 7.9, і скориставшись тим, що інтеграли по всіх дугах дорівнюють нулю, одержимо

$$f(t) = \frac{2}{2\pi i} \int_{-i}^i \frac{e^{pt}}{\sqrt{p^2+1}} dp = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\cos yt}{\sqrt{1-y^2}} dy.$$

Тут зроблено заміну $p = iy$ і відкинуто частину інтеграла, що обертається в нуль. Тому знайдена раніше у вигляді ряду функція Бесселя

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\cos yt}{\sqrt{1-y^2}} dy.$$

Таким чином, для функції Бесселя отримано два представлення: у вигляді ряду та у вигляді інтеграла, які можна використовувати в різних прикладних задачах.

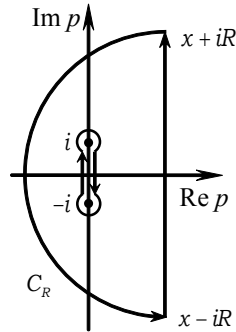


Рис. 7.9

7.6. Розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь

7.6.1. Звичайні диференціальні рівняння n -го порядку із сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами для функції $f(t)$

$$\hat{L}f(t) = \varphi(t),$$

де \hat{L} – диференціальний оператор, що містить лінійну комбінацію похідних різного порядку по t . Наприклад,

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \gamma \frac{df}{dt} + \omega_0^2 f = \varphi(t), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0.$$

У просторі зображень такому диференціальному рівнянню для $f(t)$ відповідає алгебраїчне рівняння для $F(p)$, $F(p) \doteq f(t)$, розв'язавши яке, можна знову повернутися до функції $f(t)$, здійснивши обернене перетворення Лапласа.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння n -го порядку загального вигляду із сталими коефіцієнтами

$$L[x] = a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t), \quad (7.58)$$

доповнене початковими умовами

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \dots \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}.$$

Нехай функція $x(t)$, усі її похідні та $f(t)$ задовольняють умови існування зображення, $X(p) \doteq x(t)$, $F(p) \doteq f(t)$. Тоді домножимо (7.58) на e^{-pt} і проінтегруємо за t в межах від 0 до ∞ . У результаті отримаємо алгебраїчне рівняння

$$\begin{aligned} & (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) X(p) = \\ & = F(p) + x_0 (a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + \\ & + x_1 (a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + a_{n-2}) + \dots + x_{n-1} a_0, \end{aligned}$$

з якого знаходимо $X(p)$. За відомого зображення $X(p)$ можна здійснити обернене перетворення Лапласа, і в такий спосіб знайти розв'язок (7.58), що задовольняє задані початкові умови.

Приклад 11. Розв'язати крайову задачу

$$x'' - 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Нехай функція $x(t)$ та її похідні задовольняють умови існування зображення, $X(p) \doteq x(t)$. У просторі зображень вихідному диференціальному рівнянню відповідає алгебраїчне рівняння: $(p^2 - 2p + 2)X(p) = 1/p$, з якого знаходимо

$$X(p) = \frac{1}{p(p^2 - 2p + 2)}.$$

Однозначна функція $X(p)$ задовольняє всі умови, необхідні для існування формули Мелліна, крім того, у лівій півплощині $\operatorname{Re} p < 1$ вона задовольняє умови леми Жордана, зокрема, відповідні умови на нескінченності. До того ж, має три ізольовані особливі точки (нулі знаменника): $p_{1,2} = 1 \pm i$, $p_3 = 0$ – полюси першого порядку, усередині лівого півкруга $|p - a| < R$, $a > 1$, а зовні цього півкруга всюди аналітична. Тому замкнемо контур так, як на рис. 7.10. Спрямуємо R до нескінченності та використаємо основну теорему теорії лишків і лему Жордана. Знайдемо

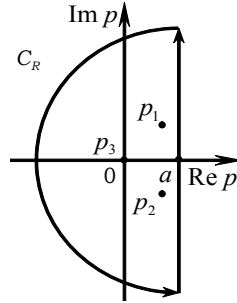


Рис. 7.10

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} X(p) dp = \sum_{k=1}^3 \operatorname{res} \left[e^{pt} X(p), p_k \right].$$

Обчислюємо лишки в простих полюсах

$$\operatorname{res} \left[\frac{e^{pt}}{p(p^2 - 2p + 2)}, 0 \right] = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{res} \left[\frac{e^{pt}}{p(p^2 - 2p + 2)}, 1 \pm i \right] = e^{t(1 \pm i)} \frac{1}{2(-1 \pm i)} = \frac{1}{4} e^t e^{\pm it} (-1 \mp i),$$

додаємо їх і як результат отримуємо розв'язок задачі

$$x(t) = \frac{1}{2} e^t (-\cos t + \sin t) + \frac{1}{2}.$$

Приклад 12. Розв'язати крайову задачу

$$x' + i\omega x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad \omega = \text{const}.$$

Тут $f(t)$ – функція загального вигляду, що належить до класу оригіналів.

У просторі зображень вихідному диференціальному рівнянню відповідає алгебраїчне рівняння $(p + i\omega)X(p) = F(p)$, де $X(p) \doteq x(t)$, $F(p) \doteq f(t)$. Із цього рівняння знаходимо

$$X(p) = F(p) \frac{1}{p + i\omega},$$

тобто зображення $X(p)$ має вигляд добутку двох зображень, для яких відомі оригінали, $1/(p + i\omega) \doteq e^{-i\omega t}$, і, згідно із (7.38), його оригіналом буде згортка

$$x(t) = \int_0^t e^{-i\omega(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

7.6.2. Інтеграл Дюамеля та його застосування

Нехай задано лінійне, але неоднорідне, диференціальне рівняння n -го порядку із сталими коефіцієнтами для функції $x(t)$ з однорідними початковими умовами

$$\hat{L}[x] = f(t), \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0, \quad (7.59)$$

тут \hat{L} – диференціальний оператор n -го порядку, що містить лінійну комбінацію похідних різного ($\leq n$) порядку по t .

Розглянемо спочатку допоміжну, простішу, задачу

$$\hat{L}[\bar{x}] = 1, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}'(0) = \bar{x}''(0) = \dots = \bar{x}^{(n-1)}(0) = 0. \quad (7.60)$$

Нехай для розв'язків задач (7.59), (7.60) існують зображення: $x(t) \doteq X(p)$, $\bar{x}(t) \doteq \bar{X}(p)$. Якщо $\bar{x}(t)$ задовольняє задачу (7.60), то в просторі зображень цій задачі відповідає алгебраїчне рівняння вигляду $A(p)\bar{X}(p) = 1/p$. Тут використано позначення $A(p)$ для відповідного полінома n -го порядку такого, що добуток $A(p)\bar{X}(p)$ дає зображення виразу $\hat{L}\bar{x}(t)$ за нульових початкових умов (7.60). Аналогічно $A(p)X(p) = F(p)$ – відповідне задачі (7.59) алгебраїчне рівняння в просторі зображень, де $F(p) \doteq f(t)$. Оскільки $A(p) = 1/p\bar{X}(p)$, тобто $A(p)$ можна знайти, розв'язавши допоміжну задачу (7.60), то $X(p) = p\bar{X}(p)F(p)$, що можна розглядати як зображення відповідної згортки

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\bar{x}'(t-\tau) d\tau \quad (7.61)$$

(тут $\bar{x}(0) = 0$, тому $p\bar{X}(p) \doteq \bar{x}'(t)$). Представлення розв'язку задачі (7.59) через розв'язок задачі (7.60) у вигляді (7.61) називається **інтегралом Дюамеля**.

Тепер розглянемо іншу допоміжну для (7.59) задачу з однорідним рівнянням та однорідними, за винятком однієї, початковими умовами

$$\hat{L}[v]=0, \quad v(0)=v'(0)=\dots=v^{(n-2)}(0)=0, \quad v^{(n-1)}(0)=1. \quad (7.62)$$

Вважатимемо, що в диференціальному операторі \hat{L} n -го порядку коефіцієнт біля похідної n -го порядку дорівнює одиниці.

Нехай для розв'язків рівнянь (7.59), (7.62) існують зображення: $x(t) \doteq X(p)$, $v(t) \doteq V(p)$. Якщо $v(t)$ задовольняє початкову задачу (7.62), то в просторі зображень цієї задачі відповідає алгебраїчне рівняння n порядку відносно p : $A(p)V(p)=1$. Аналогічно $A(p)X(p)=F(p)$. Оскільки $A(p)=1/V(p)$, то $X(p)=V(p)F(p)$, що можна розглядати як зображення відповідної згортки

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)v(t-\tau)d\tau. \quad (7.63)$$

Представлення розв'язку задачі (7.59) через розв'язок задачі (7.62) у вигляді (7.63) також називають **інтегралом Дюамеля**, а розв'язок задачі (7.62) називають функцією Гріна для задачі (7.59).

Проілюструємо на прикладі спосіб розв'язування диференціального рівняння за нульових початкових умов, використовуючи формулу Дюамеля.

Приклад 13. Розв'язати крайову задачу

$$x'' + \omega^2 x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad \omega = \text{const} > 0. \quad (7.64)$$

Тут $f(t)$ – функція загального вигляду, що належить до класу оригіналів.

Розв'язок цієї задачі виражається через відповідну функцію Гріна, що є розв'язком задачі

$$v'' + \omega^2 v = 0, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 1. \quad (7.65)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$v(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

де A, B – довільні сталі. Із умови $v(0) = 0$ знаходимо $A = 0$, із умови $v'(0) = 1 \Rightarrow B = 1/\omega$. Таким чином, функція Гріна має вигляд

$$v(t) = \frac{\sin \omega t}{\omega}$$

і розв'язок крайової задачі (7.64)

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

7.6.3. Диференціальні рівняння з коефіцієнтами, лінійними відносно змінної

Лінійному диференціальному рівнянню із коефіцієнтами біля похідних i -го порядку по t вигляду $a_i t + b_i$, де a_i, b_i – сталі, у просторі зображень відповідає диференціальне рівняння першого порядку для зображення $X(p)$. Якщо вдається розв'язати це диференціальне рівняння, то повернутися до функції $x(t)$ можна, здійснивши обернене перетворення Лапласа.

Приклад 14. Розв'язати, використовуючи перетворення Лапласа $x'' + (t+1)x' + tx = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$. (7.66)

Перейдемо до зображень за формулами

$$x(t) \doteq X(p), \quad tx(t) \doteq -X'(p), \quad x'(t) \doteq pX(p) - x(0),$$

$$tx'(t) \doteq -(pX(p))' = -pX'(p) - X(p),$$

$$x''(t) \doteq p^2 X(p) - px(0) - x'(0),$$

одержимо неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку

$$X'(p) = \left(p - \frac{1}{p+1} \right) X(p) - \frac{p}{p+1}. \quad (7.67)$$

Розв'яжемо спочатку однорідне рівняння

$$X'_o(p) = \left(p - \frac{1}{p+1} \right) X_o(p).$$

У ньому можна відокремити змінні

$$\frac{dX_o(p)}{X_o(p)} = \left(p - \frac{1}{p+1} \right) dp.$$

Після інтегрування отримуємо $\ln X_o(p) = (p^2/2) - \ln(1+p) + \ln C$
 або $X_o(p) = \frac{C}{1+p} e^{p^2/2}$.

Розв'язок неоднорідного рівняння (7.67) шукатимемо методом варіації сталих

$$X(p) = \frac{C(p)}{1+p} e^{p^2/2}. \quad (7.68)$$

Підставимо (7.68) до (7.67) і проінтегруємо одержане рівняння

$$\frac{dC(p)}{dp} = -p e^{-p^2/2}.$$

Знаходимо $C(p) = e^{-p^2/2} + C_2$, $C_2 = \text{const}$. Після підстановки одержаного $C(p)$ до (7.68) маємо

$$X(p) = \frac{1}{1+p} + \frac{C_2}{1+p} e^{p^2/2}. \quad (7.69)$$

Необхідна умова того, що функція $X(p)$ є зображенням, $\lim_{|p| \rightarrow \infty} X(p) = 0$, задовольняється лише для $C_2 = 0$, інакше другий доданок в (7.69) необмежений при $|p| \rightarrow \infty$. Тому

$$X(p) = \frac{1}{1+p} \quad (7.70)$$

і відповідний оригінал $x(t) = e^{-t}$.

Приклад 15. Знайти перетворення Лапласа для функції Бесселя нульового порядку $J_0(t)$, розв'язавши відповідне рівняння у просторі зображень, враховуючи умови $J_0(0) = 1$ та $J'_0(0) = 0$.

Розглянемо рівняння для функції Бесселя нульового порядку

$$tx'' + x' + tx = 0. \quad (7.64)$$

Перейшовши до зображень за формулами

$$x(t) \doteq X(p), \quad tx(t) \doteq -X'(p), \quad x'(t) \doteq pX(p) - x(0),$$

$$x''(t) \doteq p^2 X(p) - px(0) - x'(0),$$

$$tx''(t) \doteq -\left(p^2 X(p)\right)' + x(0) = -p^2 X'(p) - 2pX(p) + x(0),$$

із (7.64) отримаємо диференціальне рівняння першого порядку із змінними, що відокремлюються,

$$(p^2 + 1)X'(p) + pX(p) = 0,$$

розв'язавши яке, отримаємо

$$X(p) = \frac{C}{\sqrt{1+p^2}}, \quad x(t) = J_0(t), \quad C = \text{const.}$$

Сталу C визначимо, користуючись граничною теоремою 2 $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pX(p)$. Тут $\lim_{t \rightarrow 0} J_0(t) = 1 = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{pC}{\sqrt{1+p^2}} = C$. Отже, $C = 1$.

7.6.4. Інтегральні рівняння

Метод Лапласа є ефективним методом розв'язку лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра типу згортки.

Приклад 16. Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$1 - \cos t = \int_0^t \text{sh}(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Перейдемо до зображень за формулами

$$1 - \cos t \doteq \frac{1}{p(p^2 + 1)}, \quad \text{sh } t * f(t) \doteq \frac{1}{p^2 - 1} F(p),$$

у просторі зображень одержимо алгебраїчне рівняння

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p^2 - 1} F(p),$$

з якого знаходимо

$$F(p) = \frac{p^2 - 1}{p(p^2 + 1)} = \frac{2p}{p^2 + 1} - \frac{1}{p}$$

і відповідно відновлюємо оригінал $f(t) = 2 \cos t - 1$.

Задачі

Розв'язати методом Лапласа:

7.1. $x'' - 2x' = e^{-2t}$, $x(0) = x'(0) = 0$.

7.2. $x'' + 4x' + 4x = 2e^{-2t} \sin t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$.

7.3. $x'' + tx' - (t+1)x = 0$, $x(0) = x'(0) = 1$.

7.4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$tx'' + (2t - 1)x' + (t - 1)x = 0.$$

7.5. $tx'' + (2t-1)x' + (t-1)x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1.$

7.6. $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \end{cases}$ за початкових умов $x(0) = y(0) = 1.$

7.7. $\begin{cases} x + x' = y + e^t, \\ y + y' = x + e^t, \end{cases}$ за початкових умов $x(0) = y(0) = 1.$

7.8. $\begin{cases} x'' + x - y - z = 0, \\ y'' - x + y - z = 0, \\ z'' - x - y + z = 0, \end{cases}$

за початкових умов $x(0) = y(0) = z(0) = 1, \quad x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0.$

7.9. $\phi(t) = f(t) + \int_0^t (t-x)\phi(x)dx.$

7.10. $\phi(t) = f(t) + \int_0^t e^{t-x}\phi(x)dx.$

7.11. $f(t) = t + 2 - 2\cos t - \int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau.$

Розділ 8

Асимптотичні методи

8.1. Асимптотичні розклади та їх властивості

Означення 1. Послідовність $\{\varphi_n(z)\}$ називають **асимптотичною**, якщо існує окіл точки z_0 , в якому жодна з цих функцій не дорівнює нулю (за винятком точки z_0), і якщо для довільного натурального n

$$\varphi_{n+1}(z) = o(\varphi_n(z)) \text{ при } z \rightarrow z_0.$$

Приклади асимптотичних послідовностей: $\{(z - z_0)^n\}$, якщо z_0 – скінченна точка; $\{1/z^n\}$, якщо $z \rightarrow \infty$.

Розклади за асимптотичними послідовностями широко використовували ще у XVIII ст., зокрема, Л. Ейлер. На початку XIX ст. Н. Абель, О. Л. Коші зробили спробу поставити математичний аналіз на стійке підґрунтя. Одним із результатів цього стала повна заборона використання розбіжних рядів, хоча цей крок супроводжувався деяким опором. Протягом наступної половини сторіччя не було жодної спроби реабілітувати використання розбіжних рядів. Двома вимогами до загальної теорії були: 1) застосовність до широкого класу відомих рядів; 2) допустимість елементарних операцій над ними, включаючи додавання, множення на число, інтегрування, диференціювання, зворотність. Залишкові члени мали бути обмеженими за абсолютною величиною модулем першого відкинутого доданку. Але врешті-решт цим вимогам задовольнило введене 1886 р. Анрі Пуанкаре поняття "асимптотичний розклад". Теорія Пуанкаре охоплює широкий клас часто використовуваних розбіжних рядів і всі елементарні операції у ній допустимі (за деякими обмеженнями у випадку диференціювання).

Означення 2. Говоритимемо, що формальний ряд

▪ Нагадаємо співвідношення порядку або O -символіку. Нехай $\varphi(z)$ та $\psi(z)$ визначені на комплексній площині G і точка $z_0 \in G$ є граничною (можливо, нескінченність). Запис $\varphi(z) = o(\psi(z))$ означає, що $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = 0$. Запис

$\varphi(z) = O(\psi(z))$ означає, що $\left| \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right|$ обмежений, якщо $z \rightarrow z_0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(z),$$

не обов'язково збіжний, є **асимптотичним розкладом** (за Пуанкаре) функції $f(z)$ за асимптотичними послідовностями $\{\varphi_n(z)\}$, якщо для довільного натурального m справедлива рівність

$$f(z) - \sum_{n=0}^m a_n \varphi_n(z) = o(\varphi_m(z)). \quad (8.1)$$

Оскільки

$$f(z) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n \varphi_n(z) = a_m \varphi_m(z) + o(\varphi_m(z)), \quad (8.2)$$

то частинні суми $\sum_{n=0}^{m-1} a_n \varphi_n(z)$ є наближеними значеннями

функції $f(z)$ з похибкою $O(\varphi_m(z))$ при $z \rightarrow z_0$, тобто похибка має величину порядку першого відкинутого доданка. Із означення (8.1) випливає, що для асимптотичного розкладу збіжність не відіграє жодної ролі, а зміст поняття асимптотичного розкладу в тому, що різниця $f(z)$ і частинної суми (див. (8.1)) за модулем є малою величиною порівняно з модулем найменшого члену цієї суми. Найпростіші асимптотичні розклади – це збіжні степеневі ряди.

Якщо асимптотичний розклад існує, то він єдиний, і коефіцієнти розкладу визначають за формулою

$$a_m = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n \varphi_n(z)}{\varphi_m(z)}. \quad (8.3)$$

Таким чином, для асимптотичного розкладу питання про його збіжність не має значення. Пишуть $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(z)$ і вказують

область, де розклад є правильним. Частинні суми цього формального ряду називатимемо асимптотичним наближенням функції $f(z)$, хоча нескінченний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(z)$ може бути

розбіжним.

Підкреслимо суттєву відмінність збіжних рядів та асимптотичних розкладів. Збіжний ряд прямує до $f(z)$ за фіксованого z , коли кількість урахованих доданків прямує до нескінченності, у той час як асимптотичний ряд прямує до $f(z)$, коли $z \rightarrow z_0$, за фіксованої кількості врахованих доданків (за фіксованого m).

Зазначимо, що нескінченний асимптотичний ряд може не збігатися для жодного z , оскільки його члени, починаючи з деякого n , зростають по модулю. Але вираз зі скінченним числом таких членів може бути дуже корисним. Ряд поводить себе подібно до збіжного знакозмінного ряду, за винятком того, що залишковий член не прямує до нуля. Мінімальне значення похибки визначається найменшим за модулем членом ряду. Для довільного z існує оптимальна кількість m членів ряду, сума яких найкраще апроксимує $f(z)$. При врахуванні m доданків ряду похибка за абсолютним значенням менша, ніж наступний член розкладу. Таким чином, точність наближеного виразу максимальна, якщо обмежитися підсумовуванням до доданку, який стоїть перед найменшим за модулем доданком. Апроксимуючий вираз може бути уточненим, якщо до суми цих m доданків ряду включити половину залишку (залишкового члену, що містить інтеграл) за умови, що залишок змінює знак із зростанням m .

Вигляд асимптотичного розкладу залежить від вибору асимптотичних послідовностей, за якими здійснюється розклад.

Різні функції можуть мати однакові асимптотичні розклади в певній області. Наприклад, у секторі $|\arg z| \leq (\pi/2 - \delta)$, де $0 < \delta < \pi/2$, функції $1/(z+1)$ та $1/(z+1) + e^{-z}$ мають однаковий розклад

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} \text{ при } z \rightarrow \infty,$$

оскільки в даному секторі $e^{-z} z^n \rightarrow 0$ для довільного n при $z \rightarrow \infty$.

Асимптотичний розклад по $\{1/z^n\}$ називають асимптотичним степеневим розкладом.

Означення 3. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ називають **асимптотичним степеневим розкладом** функції $f(z)$ при $z \rightarrow \infty$, якщо

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^k \left\{ f(z) - \sum_{n=0}^k \frac{a_n}{z^n} \right\} = 0. \quad (8.4)$$

Значимо, що із цього означення також не впливає збіжності ряду.

Асимптотичні розклади можна додавати, віднімати, множити на константу, інтегрувати. Диференціювати почленно степеневий асимптотичний розклад можна лише, коли $f'(z)$ допускає асимптотичний розклад за тією самою системою асимптотичних послідовностей, що й $f(z)$.

Досить простим та ефективним методом отримання асимптотичного розкладу функції, заданої у вигляді визначеного інтеграла, є метод інтегрування частинами. Члени асимптотичного ряду знаходять один за одним повторним застосуванням цієї операції. Асимптотичний характер одержаного ряду встановлюється дослідженням залишкового члена, який має вигляд визначеного інтеграла. Область застосування цього методу обмежена, і сформулювати якісь загальні теореми було б важко.

Продемонструємо ідею цього методу на прикладах.

Приклад 1. Неповна гамма-функція $\gamma(a, x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt$, $x, a > 0$.

Ряд, зручний для обчислення для малих x , можна одержати одразу ж, розвинувши e^{-t} у ряд і здійснивши почленно інтегрування: $\gamma(a, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+a}}{(a+n)n!}$. Але для великих x ,

наприклад, $x = 10$, $a = 1/2$, значення найбільшого в розвиненні доданку, що відповідає $n = 8$, наближено дорівнює 923. Тому, якщо x – велике, краще розглядати розклад іншого інтеграла

$$\Gamma(a, x) = \Gamma(a) - \gamma(a, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt,$$

збіжного для довільного додатного a . Здійснюючи в ньому інтегрування частинами, отримаємо

$$\begin{aligned}\Gamma(a, x) &= -\int_x^{\infty} t^{a-1} de^{-t} = e^{-x} x^{a-1} + (a-1)\Gamma(a-1, x) = \\ &= e^{-x} \left(x^{a-1} + (a-1)x^{a-2} \right) + (a-1)(a-2)\Gamma(a-2, x) = \\ &= e^{-x} \left(x^{a-1} + (a-1)x^{a-2} + (a-1)(a-2)x^{a-3} \right) + \\ &+ (a-1)(a-2)(a-3)\Gamma(a-3, x) = \dots = \\ &= e^{-x} \sum_{r=1}^n \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-r+1)} x^{a-r} + \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)} \Gamma(a-n, x).\end{aligned}$$

Оцінимо залишковий член:

$$\left| \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)} \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-n-1} dt \right| < \left| \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)} \right| x^{a-n-1} \int_x^{\infty} e^{-t} dt = \left| \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)} \right| x^{a-n-1} e^{-x}.$$

Таким чином, якщо $a-n-1 < 0$, тобто $n > a-1$, при $x \rightarrow \infty$ є справедливий асимптотичний розклад

$$\Gamma(a, x) \sim e^{-x} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-r+1)} x^{a-r},$$

Причому похибка (при $n > a-1$) за абсолютним значенням менша за перший член, що відкидається. Тому доцільно зупинити підсумовування на доданку, який стоїть перед найменшим за модулем. Крім того, оскільки отриманий ряд, починаючи з деякого доданку, стає знакозмінним, найкраще наближення отримаємо, коли зупинимось перед найменшим за абсолютним значенням доданком, додавши $1/2$ найменшого доданку.

Інший приклад має відношення до розкладів інтегралів Френеля

$$\int_u^{\infty} \cos x^2 dx, \quad \int_u^{\infty} \sin x^2 dx,$$

що застосовують у фізичній оптиці, які можна записати у вигляді

$$\int_{u^2}^{\infty} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} dx, \quad \int_{u^2}^{\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dx,$$

що є частинними випадками дійсної та уявної частин інтеграла наступного прикладу.

Приклад 2. $F(x, \alpha) = \int_x^{\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$ – інтеграл, збіжний для довільного

додатного x , якщо $\alpha > 0$.

Для одержання розкладу при $x \gg 1$ скористаємося інтегруванням частинами.

$$\begin{aligned} F(x, \alpha) &= \int_x^{\infty} \frac{1}{it^\alpha} de^{it} = \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha F(x, \alpha + 1) = \\ &= \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha \left\{ \frac{ie^{ix}}{x^{\alpha+1}} - i(\alpha + 1)F(x, \alpha + 2) \right\} = \\ &= \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{ix} + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(ix)^2} + \dots + \frac{\alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + n - 1)}{(ix)^n} \right\} - \\ &\quad - \frac{i}{i^n} \alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + n)F(x, \alpha + n + 1) = \\ &= \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)(ix)^k} + \frac{1}{i^{n+1}} \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha)} F(x, \alpha + n + 1). \end{aligned}$$

Для абсолютного значення залишкового члена отримуємо оцінку

$$\left| \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_x^{\infty} \frac{e^{it}}{t^{\alpha+n+1}} dt \right| \right| \leq \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_x^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+n+1}} \right| = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{x^{\alpha+n}},$$

що дорівнює абсолютному значенню $(n + 1)$ -го доданка розкладу.

Приклад 3. Записати асимптотичний розклад функції $f(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x+z} dx$ для випадку $|z| \gg 1$.

В області $|z+x| \geq |z|\sin \delta$, коли $|\arg z| \leq \pi - \delta$, можна скористатися формулою для суми скінченної геометричної прогресії

$$1 - \frac{x}{z} + \left(\frac{x}{z}\right)^2 - \left(\frac{x}{z}\right)^3 + \dots + (-1)^n \left(\frac{x}{z}\right)^n = \frac{1 + (-1)^n \left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}}{1 + \frac{x}{z}},$$

з якої випливає рівність

$$\frac{1}{1+x/z} = 1 - \frac{x}{z} + \left(\frac{x}{z}\right)^2 - \left(\frac{x}{z}\right)^3 + \dots + (-1)^n \left(\frac{x}{z}\right)^n + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{z^{n+1}(1+x/z)},$$

або

$$\frac{1}{1+x/z} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\frac{x}{z}\right)^k + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{z^{n+1}(1+x/z)}, \quad (8.5)$$

справедлива для довільного z із указанної області. Ураховуючи (8.5), знаходимо

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x/z} e^{-x} dx = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\frac{x}{z}\right)^k + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{z^n(z+x)} \right) e^{-x} dx = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{z^{k+1}} \int_0^{\infty} x^k e^{-x} dx + \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} \int_0^{\infty} \frac{x^{n+1}}{x+z} e^{-x} dx, \end{aligned}$$

тобто

$$f(z) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{k!}{z^{k+1}} + R_{n+1}(z), \quad (8.6)$$

де залишковий член

$$R_{n+1}(z) = \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} \int_0^{\infty} \frac{x^{n+1}}{x+z} e^{-x} dx. \quad (8.7)$$

Радіус збіжності R нескінченного степеневого ряду $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \xi^{k+1} k!$ (при $\xi = 1/z$) дорівнює нулю, оскільки за (3.8)

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 0.$$

Тобто якщо ряд в (8.6) не обірвати, то він буде розбіжним.

Оцінимо залишковий член (8.7).

$$\left| R_{n+1}(z) \right| < \frac{1}{|z|^{n+2}} \int_0^{\infty} \frac{x^{n+1}}{\left| 1 + \frac{x}{z} \right|} e^{-x} dx < \frac{1}{|z|^{n+2}} \int_0^{\infty} x^{n+1} e^{-x} dx = \frac{(n+1)!}{|z|^{n+2}}. \quad (8.8)$$

Як видно, він по модулю не перевищує наступний член розкладу у (8.6). Отже, цей розклад є асимптотичним. Отриманий асимптотичний розклад є знаковмінним, його частинні суми по модулю то більші, то менші за $|f(z)|$. Найкраще наближення буде, якщо зупинитись перед найменшим по модулю членом, додавши $1/2$ найменшого члена.

8.2. Метод Лапласа

Розглянемо інтеграли Лапласа, тобто інтеграли вигляду

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(t) e^{\lambda f(t)} dt, \quad (8.9)$$

де λ – великий додатний параметр, $f(t)$ – функція, що набуває тільки дійсних значень, функція $\varphi(t)$ може бути комплексно-значною. Нехай функції $\varphi(t)$, $f(t)$ – неперервні на $[a, b]$. Інтеграли Лапласа (8.9) обчислюють в явному вигляді в небагатьох випадках, але асимптотику для великих λ вдається обчислити практично завжди.

Вважатимемо, що інтеграл (8.9) існує, і спробуємо отримати асимптотичний розклад функції $F(\lambda)$ за оберненими степенями параметра λ .

Розглянемо три найважливіші випадки.

1. Локальний максимум функції $f(t)$ досягається на інтервалі $[a, b]$ в одній точці $t = t_0$ ($f'(t_0) = 0$, $f''(t_0) < 0$), що є внутрішньою точкою цього інтервалу. За великих додатних λ величина інтеграла (8.9) визначається, у першу чергу, поведінкою експоненціальної функції. Зі зростанням λ максимум в точці t_0 стає все більш вираженим, тому значення інтеграла наближено визначається внеском лише околу точки t_0 : $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, причому δ залежатиме від λ ($\delta = \delta(\lambda)$). У цьому околі функцію $f(t)$ можна наближено замінити квадратичною, а $\varphi(t)$ – лінійною

$$\varphi(t) \approx \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t - t_0),$$

$$f(t) \approx f(t_0) + f''(t_0)(t - t_0)^2/2, \text{ якщо } |t - t_0| \leq \delta.$$

$$\text{Тому } F(\lambda) \approx \int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} \varphi(t) e^{\lambda f(t)} dt \approx \int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} \varphi(t_0) e^{\lambda f(t_0)} e^{\lambda f''(t_0)(t - t_0)^2/2} dt.$$

Зробимо заміну змінної $\sqrt{-\lambda f''(t_0)/2}(t - t_0) = x$. При $\lambda \rightarrow \infty$ інтеграл за змінною x обчислюється в межах від $-\infty$ до ∞ .

$$F(\lambda) \approx \varphi(t_0) e^{\lambda f(t_0)} \sqrt{\frac{2}{-\lambda f''(t_0)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Таким чином, справедлива асимптотична оцінка інтеграла (8.9)

$$F(\lambda) \approx \varphi(t_0) e^{\lambda f(t_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda f''(t_0)}} \quad (8.10)$$

2. Точка локального максимуму функції $f(t)$ на інтервалі $[a, b]$ досягається в межевій точці, наприклад точці a ($f'(a) = 0$, $f''(a) < 0$). Тоді в асимптотиці виникає множник $1/2$, порівняно із (8.10)

$$F(\lambda) \approx \frac{1}{2} \varphi(a) e^{\lambda f(a)} \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda f''(a)}}. \quad (8.11)$$

3. Абсолютний максимум функції $f(t)$ на інтервалі $[a, b]$ досягається у межевій точці, наприклад точці a (але $f'(a) < 0$). Тоді головний внесок до інтегралу надасть інтервал $[a, a + \delta]$, де $\varphi(t) \approx \varphi(a)$, $f(t) \approx f(a) + f'(a)(t - a)$. Тоді для великих λ

$$\begin{aligned} F(\lambda) &\approx \int_a^{a+\delta} \varphi(t) e^{\lambda f(t)} dt \approx \varphi(a) e^{\lambda f(a)} \int_a^{a+\delta} e^{\lambda(x-a)f'(a)} dx \approx \\ &\approx \varphi(a) e^{\lambda f(a)} \left(-\frac{1}{\lambda f'(a)} + \frac{e^{\lambda \delta f'(a)}}{\lambda f'(a)} \right). \\ F(\lambda) &\approx -\frac{\varphi(a)}{\lambda f'(a)} e^{\lambda f(a)}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Таким чином, основна ідея методу Лапласа полягає в тому, що інтеграл (8.9) асимптотично можна замінити деяким виразом, що залежить тільки від локальної поведінки підінтегральної функції у точці максимуму. Величину, що визначається цим виразом, називають внеском точки максимуму. У застосуваннях методу треба знайти внесок точки (або точок, якщо їх кілька на інтервалі інтегрування) максимуму й показати, що весь інтеграл наближено дорівнює внеску цієї точки (або сумі відповідних внесків).

Як приклад, розглянемо інтеграл, що визначає гамма-функцію Ейлера

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} x^p e^{-x} dx, \quad (8.13)$$

та оцінімо його наближене значення за великих значень p . З цієї метою зробимо деякі перетворення підінтегрального виразу

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} e^{p \ln x - x} dx.$$

що приводять шуканий інтеграл до вигляду (8.9). Підінтегральна функція прямує до нуля при $x \rightarrow 0$ і $x \rightarrow \infty$. Тому значення інтеграла визначається в основному значенням підінтегральної функції в околі її максимуму.

Максимальне значення функція

$$f(x) = p \ln x - x$$

набуває у точці $x = p$, і в околі цієї точки з точністю до перших членів розкладу можна записати

$$f(x) \simeq p \ln p - p - \frac{1}{2p}(x-p)^2.$$

Це дозволяє легко отримати оцінку значення інтеграла

$$\begin{aligned} \Gamma(p+1) &\simeq \int_{p-\delta}^{p+\delta} e^{p \ln p - p - \frac{1}{2p}(x-p)^2} dx = p^p e^{-p} \int_{p-\delta}^{p+\delta} e^{-\frac{1}{2p}(x-p)^2} dx \simeq \\ &\simeq p^p e^{-p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2p}(x-p)^2} dx = \sqrt{2\pi p} \left(\frac{p}{e}\right)^p. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Наближені рівності мають місце, оскільки підінтегральна функція при виконанні умови $|x-p| > \delta$ мала й швидко прямує до нуля.

Формула (8.14) дає наближене значення інтеграла (8.13) за великих значень p . Цю формулу часто називають **формулою Стірлінга**. При отриманні цієї формули не було зроблено оцінки точності використаних наближень, тому цей приклад має лише ілюстративний характер, у зв'язку з чим зробимо кілька зауважень, що дозволять легше зрозуміти основну ідею методу перевалу (див. п. 8.4). Формула (8.14) дає наближене значення інтеграла (8.13) через значення підінтегральної функції у точці її максимуму ($p^p e^{-p}$) і деякий додатковий множник, що відповідає довжині відрізка інтегрування, на якому значення підінтегральної функції є достатньо близьким до максимального. Тут варто нагадати, що підінтегральна функція в останньому рядку формули (8.14) відповідає нормальному (гауссовому) розподілу в теорії ймовірностей із дисперсією p .

Далі зупинимось на строгому доведенні деяких тверджень, що лежать в основі методу Лапласа асимптотичної оцінки інтегралів від функції дійсної змінної.

Лема 1. При $p > 0$ і $A \rightarrow \infty$ має місце асимптотична формула

$$\int_0^A x^{p-1} e^{-x} dx = \Gamma(p) + O\left(e^{-A/2}\right). \quad (8.15)$$

Для $0 < p \leq 1$ справедлива оцінка

$$\int_A^\infty x^{p-1} e^{-x} dx \leq \int_A^\infty e^{-x} dx = e^{-A}.$$

Для $p > 1$ зробимо заміну змінної $x = y + A$ та розіб'ємо отриманий інтервал інтегрування по y на два: $[0, A]$ та $[A, \infty]$, замінимо інтеграли більшими

$$\begin{aligned} \int_A^\infty x^{p-1} e^{-x} dx &= e^{-A} \int_0^\infty e^{-y} (y + A)^{p-1} dy < \\ &< e^{-A} \left\{ \int_0^A e^{-y} (2A)^{p-1} dy + \int_0^\infty e^{-y} (2y)^{p-1} dy \right\} = \\ &= e^{-A} \left((2A)^{p-1} (1 - e^{-A}) + 2^{p-1} \Gamma(p) \right). \end{aligned}$$

При $A^p < e^{A/2}$ і впливає формула (8.15).

Надалі важливу роль відіграватимуть інтеграли вигляду

$$\Phi(\lambda) = \int_{-a}^a \varphi(t) e^{-\lambda t^2} dt, \quad 0 < a < \infty,$$

для яких має місце наступна лема.

Лема 2. Нехай функція $\varphi(t)$ обмежена. При $|t| \leq \delta$ її можна представити у вигляді

$$\varphi(t) = c_0 + c_1 t + O(t^2), \quad (8.16)$$

і для деякого $\lambda_0 > 0$ збігається інтеграл

$$\int_{-a}^a |\varphi(t)| e^{-\lambda_0 t^2} dt < M. \quad (8.17)$$

Тоді для $\lambda > \lambda_0$ має місце асимптотична формула

$$\Phi(\lambda) = \int_{-a}^a \varphi(t) e^{-\lambda t^2} dt = c_0 \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + O(\lambda^{-3/2}). \quad (8.18)$$

Якщо функція $\varphi(t)$ обмежена при $|t| > a$, значення інтеграла (8.18) суттєво не зміниться при заміні a на ∞ . Ця оцінка та можливість заміни меж інтегрування й є основним змістом лєми. Оскільки δ – фіксоване, то для довільного $\lambda > \lambda_0$ та $t > \delta$ має місце

$$\lambda t^2 = \lambda \delta^2 + \lambda(t^2 - \delta^2) > \lambda \delta^2 + \lambda_0(t^2 - \delta^2) = (\lambda - \lambda_0)\delta^2 + \lambda_0 t^2.$$

$$\left| \int_{\delta}^a \varphi(t) e^{-\lambda t^2} dt \right| < e^{-(\lambda - \lambda_0)\delta^2} \int_{\delta}^a |\varphi(t)| e^{-\lambda_0 t^2} dt \leq M e^{\lambda_0 \delta^2} e^{-\lambda \delta^2} = O(e^{-\lambda \delta^2}).$$

Аналогічно можна показати, що такий самий порядок має внесок відрізка $[-a, -\delta]$. Основний внесок до $\Phi(\lambda)$ дає область інтегрування $|t| \leq \delta$

$$\int_{-\delta}^{\delta} [c_0 + c_1 t] e^{-\lambda t^2} dt = \frac{c_0}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\lambda \delta^2} \tau^{-1/2} e^{-\tau} d\tau = \frac{c_0}{\sqrt{\lambda}} \left\{ \Gamma(1/2) + O(e^{-\lambda \delta^2/2}) \right\}.$$

(тут зроблено заміну змінної інтегрування $\lambda t^2 = \tau$),

$$\int_{-\delta}^{\delta} O(t^2) e^{-\lambda t^2} dt < c_2 \int_{-\delta}^{\delta} t^2 e^{-\lambda t^2} dt \Big|_{\lambda t^2 = \tau} = \frac{c_2}{\lambda^{3/2}} \int_0^{\lambda \delta^2} \tau^{1/2} e^{-\tau} d\tau =$$

$$= \frac{c_2}{\lambda^{3/2}} \left\{ \Gamma(3/2) + O(e^{-\lambda \delta^2/2}) \right\} = O(\lambda^{-3/2}).$$

Ураховуючи отримані вирази, маємо (8.18).

Зауваження 1. Можна показати, що у випадку, коли функцію $\varphi(t)$ можна розвинути в ряд Тейлора

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k + O(t^n), \quad c_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!},$$

має місце асимптотичний розклад

$$\Phi(\lambda) = \int_{-a}^a \varphi(t) e^{-\lambda t^2} dt = \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} c_{2m} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda^{-m - \frac{1}{2}} + O(\lambda^{-\frac{n+1}{2}}), \quad (8.19)$$

де символ $[(n-1)/2]$ означає цілу частину від числа $(n-1)/2$, яка дорівнює найбільшому цілому числу, що менше або дорівнює $(n-1)/2$.

Зокрема, при $n=1$, коли розклад функції $\varphi(t)$ має вигляд $\varphi(t) = c_0 + O(t)$, залишковий член у (8.19) має порядок λ^{-1} , оскільки для оцінки залишку головну роль відіграє інтеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta} O(t)e^{-\lambda t^2} dt < C \int_{-\delta}^{\delta} |t| e^{-\lambda t^2} dt = 2C \int_0^{\delta} te^{-\lambda t^2} dt.$$

Зауваження 2. Лема залишається справедливою й у випадку, коли інтегрування відбувається по відрізку $[a_1, a_2]$, де $a_1 < 0$, $a_2 > 0$ і $-a_1 \neq a_2$.

Лема 3. Нехай на відрізку $|t| \leq \delta_0$ функції $\varphi(t)$ та $\mu(t)$ можна представити у вигляді

$$\varphi(t) = c_0 + c_1 t + O(t^2), \quad \mu(t) = c_3 t^3 + O(t^4),$$

і нехай при $\lambda \rightarrow \infty$ функція $\delta(\lambda) \leq \delta_0$ задовольняє умови[†]

$$\lambda \delta^2(\lambda) \rightarrow \infty, \quad \lambda \delta^3(\lambda) \rightarrow 0. \quad (8.20)$$

Тоді при $\lambda \rightarrow \infty$ має місце асимптотична формула

$$I(\lambda) = \int_{-\delta(\lambda)}^{\delta(\lambda)} \varphi(t) e^{\lambda[-t^2 + \mu(t)]} dt = c_0 \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + O(\lambda^{-\frac{3}{2}}). \quad (8.21)$$

На інтервалі $|t| \leq \delta(\lambda)$ можна скористатися розкладом

$$\varphi(t)e^{\lambda\mu(t)} = c_0 + c_1 t + c_0 c_3 \lambda t^3 + O(t^2) + O(\lambda^2 t^6) + O(\lambda t^4)$$

і врахувати, що непарні по t доданки дають нульовий внесок до інтеграла (8.21) із симетричними межами, а $O(t^2), O(\lambda^2 t^6), O(\lambda t^4)$ – дають однаковий порядок малості ($\lambda^{-3/2}$).

Ці леми дозволяють довести наступну теорему, що є основною в методі Лапласа асимптотичного розкладу інтегралів від функцій дійсної змінної.

Теорема 1. Нехай функція $f(t)$, що задана на відрізку $[a, b]$, досягає абсолютного максимуму у деякій внутрішній точці t_0 , причому $f''(t_0) < 0$, і нехай існує таке $\delta_0 > 0$, що при $|t - t_0| < \delta_0$ має місце представлення

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t - t_0)^2 + \mu(t).$$

Тоді, якщо функції $\varphi(t)$ і $\mu(t)$ при $|t - t_0| < \delta_0$ задовольняють умови леми 3, тобто

$$\varphi(t) = c_0 + c_1 t + O(t^2), \quad \mu(t) = c_3 t^3 + O(t^4),$$

то має місце асимптотична формула

[†] Можна показати, що, наприклад функція $\delta(\lambda) = \lambda^{-2/5}$ задовольняє умови (8.20).

$$\Psi(\lambda) = \int_a^b \varphi(t) e^{\lambda f(t)} dt = e^{\lambda f(t_0)} \left\{ \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda f''(t_0)}} \varphi(t_0) + O(\lambda^{-\frac{3}{2}}) \right\}, \quad (8.22)$$

якщо задовольняються наступні додаткові умови:

а) для заданого δ_0 одночасно виконуються співвідношення

$$\text{при } |t - t_0| \leq \delta_0 \quad |\mu(t)| < -\frac{f''(t_0)}{4}(t - t_0)^2,$$

$$\text{при } |t - t_0| > \delta_0 \quad f(t_0) - f(t) \geq h > 0;$$

б) для деякого $\lambda_0 > 0$ збігається інтеграл

$$\int_a^b |\varphi(t)| e^{\lambda_0 f(t)} dt \leq M.$$

Нехай $a < t_0 - \delta_0 \leq t_0 - \delta(\lambda) < t_0 < t_0 + \delta(\lambda) \leq t_0 + \delta_0 < b$ і при $\lambda \rightarrow \infty$ функція $\delta(\lambda) \leq \delta_0$ задовольняє умови (8.20). Оцінимо інтеграли за крайніми відрізками так само, як у лемі 2.

$$\begin{aligned} \lambda[f(t_0) - f(t)] &= (\lambda - \lambda_0)[f(t_0) - f(t)] + \lambda_0[f(t_0) - f(t)] \geq \\ &\geq h(\lambda - \lambda_0) + \lambda_0 f(t_0) - \lambda_0 f(t). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що для $\lambda > \lambda_0$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{t_0 - \delta_0} \varphi(t) e^{\lambda f(t)} dt \right| &< e^{\lambda f(t_0)} \int_a^{t_0 - \delta_0} |\varphi(t)| e^{\lambda[f(t) - f(t_0)]} dt \leq \\ &\leq e^{(\lambda - \lambda_0)f(t_0) - h(\lambda - \lambda_0)} \int_a^{t_0 - \delta_0} |\varphi(t)| e^{\lambda_0 f(t)} dt = e^{\lambda f(t_0)} O(e^{-\lambda h}). \end{aligned}$$

На інтервалі $t_0 - \delta_0 \leq t \leq t_0 - \delta(\lambda)$ скористаємося нерівністю

$$f(t_0) - f(t) > -\frac{f''(t_0)}{4}(t - t_0)^2 \geq -\frac{f''(t_0)}{4}\delta^2(\lambda).$$

$$\left| \int_{t_0 - \delta_0}^{t_0 - \delta(\lambda)} \varphi(t) e^{\lambda f(t)} dt \right| < e^{\lambda f(t_0)} e^{\lambda \delta^2(\lambda) f''(t_0)/4} \int_{t_0 - \delta_0}^{t_0 - \delta(\lambda)} |\varphi(t)| dt = e^{\lambda f(t_0)} O(e^{-\lambda \delta^2(\lambda) C}),$$

де $C = |f''(t_0)|/4$.

Інтеграл

$$\int_{t_0 - \delta(\lambda)}^{t_0 + \delta(\lambda)} \varphi(t) e^{\lambda f(t)} dt = e^{\lambda f(t_0)} \int_{t_0 - \delta(\lambda)}^{t_0 + \delta(\lambda)} \varphi(t) e^{\lambda \left[\frac{f''(t_0)}{2}(t - t_0)^2 + \mu(t) \right]} dt$$

заміною $-\frac{f''(t_0)}{2}(t-t_0)^2 = \tau^2$ приводимо до такого, що задовольняє умови леми 3.

Зауваження 3. Теорема 1 залишається справедливою в тому випадку, коли одна або обидві межі інтегрування дорівнюють нескінченності.

Зауваження 4. Було отримано лише перший член асимптотичного розкладу інтеграла (8.22). Аналогічно можна отримати вирази й для наступних членів асимптотичного розкладу.

Зауваження 5. У випадку, коли максимальне значення функції $f(t)$ досягається в якій-небудь крайовій точці відрізка $[a, b]$, у (8.22) праворуч (в асимптотиці) з'являється додатковий множник $1/2$.

Зауваження 6. У випадку, коли функція $f(t)$ усередині відрізка $[a, b]$ має кілька локальних максимумів, що дають внески одного порядку, асимптотикою інтеграла (8.9) для великого параметра λ буде сума цих внесків.

Розглянемо приклади застосування цієї теореми.

Приклад 4. Отримати асимптотичний розклад гамма-функції Ейлера для $p \rightarrow \infty$

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} x^p e^{-x} dx.$$

Представимо підінтегральну функцію у вигляді

$$x^p e^{-x} = e^{p \ln x - x}.$$

Функція досягає максимального значення у точці $x_0 = p$, що змінюється разом із великим параметром p . Скористатися безпосередньо (8.22) не можна, оскільки в ній значення t_0 фіксоване і від великого параметра не залежить. Для усунення залежності точки локального максимуму від p , зробимо в інтегралі заміну змінних $x = pt$. Тоді

$$\Gamma(p+1) = p^{p+1} \int_0^{\infty} e^{p(\ln t - t)} dt.$$

Тут є інтеграл типу (8.22) із $\varphi \equiv 1$ та $f(t) = \ln t - t$. Функція $f(t)$ досягає максимального значення при $t_0 = 1$, причому

$$f(1) = -1, \quad f'(1) = 0, \quad f''(1) = -1.$$

Тому згідно з (8.22) маємо

$$\Gamma(p+1) = e^{-p} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{p}} + O(p^{-3/2}) \right\} p^{p+1} = \sqrt{2\pi p} \left(\frac{p}{e}\right)^p \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{p}\right) \right\}.$$

Таким чином отримано асимптотичну оцінку гамма-функції Ейлера. Наведемо без виведення кілька перших членів формули Стірлінга

$$\Gamma(p+1) = \sqrt{2\pi p} \left(\frac{p}{e}\right)^p \left\{ 1 + \frac{1}{12p} + \frac{1}{288p^2} - \frac{139}{51840p^3} + \dots \right\}.$$

Приклад 5. Отримати асимптотичний розклад інтеграла

$$\int_0^{\infty} e^{px-e^x} dx \quad \text{для } p \rightarrow \infty.$$

Підінтегральна функція досягає максимального значення у точці $x_0 = \ln p$, тобто як й у попередньому прикладі, у точці, яка змінюється разом зі зміною великого параметра p . Для усунення залежності точки локального максимуму від p під знаком інтеграла доцільно зробити заміну змінних $x = t + \ln p$. Тоді

$$\int_0^{\infty} e^{px-e^x} dx = p^p \int_{-\ln p}^{\infty} e^{p(t-e^t)} dt.$$

Тут є інтеграл типу (8.22) із $\varphi \equiv 1$ та $f(t) = t - e^t$. Функція $f(t)$ досягає максимального значення при $t_0 = 0$, причому

$$f(0) = -1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1.$$

Тому, згідно з (8.22), маємо

$$\int_0^{\infty} e^{px-e^x} dx = p^p e^{-p} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{p}} + O(p^{-3/2}) \right\} = \sqrt{2\pi} \left(\frac{p}{e}\right)^p \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{p}\right) \right\}.$$

Приклад 6. Отримати асимптотичний розклад інтеграла

$$\int_0^{\infty} e^{\lambda x - (x-1)\ln x} dx \quad \text{для } \lambda \rightarrow \infty.$$

Вибір $f(x) = x$ у формулі методу (8.22) безрезультатний, оскільки для цієї функції максимум буде на нескінченності. Тому перепишемо підінтегральну функцію у вигляді $x e^{\lambda x - x \ln x}$. Видно, що основний внесок обумовлює експоненціальна

функція, що досягає максимального значення у точці $x_0 = e^{\lambda-1}$, яка змінюється разом зі зміною великого параметра λ . Щоб зупинити залежність точки локального максимуму від λ , в інтегралі доцільно зробити заміну змінних $x = te^{\lambda-1}$. Тоді

$$\int_0^{\infty} x e^{\lambda x - x \ln x} dx = e^{2(\lambda-1)} \int_0^{\infty} t e^{e^{\lambda-1} t (1-\ln t)} dt.$$

Тут є інтеграл типу (8.22) із великим дійсним параметром $e^{\lambda-1}$, $\varphi(t) = t$ та $f(t) = t(1 - \ln t)$. Функція $f(t)$ досягає максимального значення при $t_0 = 1$, причому

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 0, \quad f''(1) = -1.$$

Тому, згідно з (8.22), отримуємо

$$\int_0^{\infty} x e^{\lambda x - x \ln x} dx = e^{3(\lambda-1)/2} e^{e^{\lambda-1}} \sqrt{2\pi} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{e^{\lambda-1}}\right) \right\}.$$

8.3. Метод стаціонарної фази

Розглянемо інтеграли вигляду (інтеграли Фур'є)

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda f(t)} dt,$$

де λ – великий додатний параметр, $f(t)$ – дійсна функція, яка називається фазою або фазовою функцією, $\varphi(t)$ – функція дійсного аргументу t , яка може бути як дійсною, так і комплексною. Припустимо, що функції $f(t)$ та $\varphi(t)$ неперервні разом із своїми похідними на $[a, b]$.

Інтеграл Фур'є буде малим при $\lambda \gg 1$ унаслідок швидких осциляцій $e^{i\lambda f(t)}$. Найбільш загальним результатом є

Лема Рімана–Лебега: якщо $\varphi(t)$ є гладкою на $(-\infty, +\infty)$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{i\lambda t} dt = o(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Жодної, точнішої інформації за таких умов одержати не можна. Очевидно, що основний внесок до асимптотики (за гладких $f(t)$ та $\varphi(t)$) мають давати околиці стаціонарних (тобто критичних) точок фазової функції, в яких $f'(t) = 0$, оскільки поблизу них

осциляції функції $e^{i\lambda f(t)}$ уповільнюються, а також околи особливостей функцій $f(t)$ і $\varphi(t)$ та їх похідних, тобто особливостей, яких, за нашим припущенням, не мало бути.

Зазначимо, що на відміну від інтеграла Лапласа (8.9), для інтеграла Фур'є гладкість функцій $f(t)$ та $\varphi(t)$ на всьому інтервалі інтегрування $[a, b]$ є суттєвою. За таких умов унаслідок швидких осциляцій $e^{i\lambda f(t)}$ основний внесок до асимптотичної поведінки інтеграла дають околи кінців інтервалу інтегрування та околи стаціонарних точок фазової функції $f(t)$. При цьому внесок стаціонарних точок, якщо вони є на $[a, b]$, буде більш суттєвим. Покажемо це, розглянувши два окремі випадки.

1. Фазова функція без стаціонарних точок

Теорема 1. Нехай $[a, b]$ – скінченний відрізок, $f'(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$, функції $f(t)$ та $\varphi(t)$ – неперервно-диференційовні на $[a, b]$ разом із своїми похідними $(N+2)$ та $(N+1)$ -го порядку, відповідно, включно. Тоді при $\lambda \rightarrow \infty$ справедливий розклад

$$\int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda f(t)} dt = \sum_{k=0}^N (i\lambda)^{-k-1} e^{i\lambda f(t)} \left(-\frac{1}{f'(t)} \frac{d}{dt} \right)^k \left(\frac{\varphi(t)}{f'(t)} \right) \Big|_a^b + o(\lambda^{-N-1}).$$

Якщо функція $f(t)$ не має стаціонарних точок на $[a, b]$, асимптотику інтеграла Фур'є легко знайти інтегруванням частинами.

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_a^b \frac{\varphi(t)}{i\lambda f'(t)} d e^{i\lambda f(t)} = \frac{\varphi(t)}{i\lambda f'(t)} e^{i\lambda f(t)} \Big|_a^b - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b e^{i\lambda f(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\varphi(t)}{f'(t)} \right) dt = \\ &= \sum_{k=0}^N (i\lambda)^{-k-1} e^{i\lambda f(t)} \left(-\frac{1}{f'(t)} \frac{d}{dt} \right)^k \left(\frac{\varphi(t)}{f'(t)} \right) \Big|_a^b + \\ &+ \frac{1}{(i\lambda)^{N+1}} \int_a^b e^{i\lambda f(t)} \frac{d}{dt} \left(\left(-\frac{1}{f'(t)} \frac{d}{dt} \right)^N \frac{\varphi(t)}{f'(t)} \right) dt. \end{aligned}$$

Останній доданок визначає залишковий член розкладу, в якому інтеграл, згідно з лемою Рімана–Лебега, $o(1)$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Головний член отриманого розкладу має порядок $1/\lambda$

$$F(\lambda) \sim \frac{1}{i\lambda} \left[\frac{\varphi(b)}{f'(b)} e^{i\lambda f(b)} - \frac{\varphi(a)}{f'(a)} e^{i\lambda f(a)} \right].$$

Приклад 7. Знайти асимптотичну оцінку інтеграла

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} (1+t)^{-\alpha} e^{i\lambda t} dt, \quad \alpha > 0, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{1}{i\lambda} \int_0^{\infty} (1+t)^{-\alpha} de^{i\lambda t} = \frac{1}{i\lambda} \left\{ (1+t)^{-\alpha} e^{i\lambda t} \Big|_0^{\infty} + \frac{\alpha}{i\lambda} \int_0^{\infty} (1+t)^{-\alpha-1} de^{i\lambda t} \right\} = \\ &= -\frac{1}{i\lambda} + \frac{\alpha}{(i\lambda)^2} \left\{ (1+t)^{-\alpha-1} e^{i\lambda t} \Big|_0^{\infty} + \frac{\alpha+1}{i\lambda} \int_0^{\infty} (1+t)^{-\alpha-2} de^{i\lambda t} \right\} = \\ &= \frac{i}{\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda^2} - \frac{i\alpha(\alpha+1)}{\lambda^3} + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right). \end{aligned}$$

2. Фазова функція має одну стаціонарну точку на $[a, b]$.

Теорема 2. Нехай задані функції $f(t)$ і $\varphi(t)$ є неперервними разом із своїми похідними на всьому відрізку $[a, b]$, та функція $f(t)$ має всередині $[a, b]$ єдину стаціонарну точку t_0 , $a < t_0 < b$, $f'(t_0) = 0$. Якщо $f''(t_0) \neq 0$, то при $\lambda \rightarrow \infty$ справедлива асимптотична формула

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda f(t)} dt = \\ &= e^{i\left\{ \lambda f(t_0) + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} f''(t_0) \right\}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |f''(t_0)|}} \varphi(t_0) + O(\lambda^{-1}). \end{aligned}$$

Підкреслимо, що всі зауваження, зроблені до теореми методу Лапласа, залишаються в силі й у цьому випадку.

Зауважимо повну подібність асимптотичних формул для інтеграла Лапласа та інтеграла Фур'є: їх одержують формальною заміною $\lambda \rightarrow i\lambda$ (див. (8.22)).

Приклад 8. Знайти асимптотичну оцінку інтеграла

$$F(\lambda) = \int_0^{2\pi} t \sin(\lambda \sin t) dt, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

$$F(\lambda) = \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} t e^{i\lambda \sin t} dt. \quad \text{Фазова функція } f(t) = \sin t \text{ на } [0, 2\pi]$$

має дві стаціонарні точки: $t_1 = \pi/2$ і $t_2 = 3\pi/2$, причому

$$f(\pi/2) = 1, \quad f''(\pi/2) = -1, \quad f(3\pi/2) = -1, \quad f''(3\pi/2) = 1.$$

Асимптотика інтеграла дорівнює сумі внесків від стаціонарних точок t_1 і t_2 :

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \operatorname{Im} \left\{ -\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \frac{\pi}{2} e^{i(\lambda - \pi/4)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \frac{3\pi}{2} e^{-i(\lambda - \pi/4)} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\} = \\ &= \pi \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \lambda\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

8.4. Метод перевалу

Розглянемо інтеграли вигляду

$$F(\lambda) = \int_C \varphi(z) e^{\lambda f(z)} dz, \quad (8.23)$$

де $\varphi(z)$ та $f(z)$ – функції комплексної змінної z , що є аналітичними в деякій області \mathcal{G} , в якій міститься крива C ; λ – велике додатне число. Вважатимемо, що цей інтеграл існує та спробуємо отримати асимптотичний розклад функції $F(\lambda)$ за оберненими степенями параметра λ . Оскільки підінтегральна функція в (8.23) є аналітичною в області \mathcal{G} комплексної площини z , то внаслідок теореми Коші значення інтеграла (8.23) визначається положеннями початкової z_1 і кінцевої z_2 точок шляху інтегрування і не залежить від форми кривої C . Тому контур інтегрування, що належить області аналітичності, можна деформувати (тобто змінювати форму контуру в області аналітичності) так, щоб він проходив через точку, де модуль підінтегральної функції досягає максимуму. Цей інтеграл (як і у методі Лапласа) можна обчислити наближено через максимальне значення модуля підінтегральної функції із поправкою на швидкість її спадання на деформованому контурі інтегрування. Якщо шлях інтегрування, який сполучає точки z_1 і z_2 , вибрати таким, що на невеликій його ділянці абсолютне значення підінтегральної функції досягає найбільшого значення, а потім швидко спадає, то основний внесок буде давати саме ця невелика ділянка контуру, де абсолютне значення підінтегральної функції максимальне, а осциляції сповільнені.

Шукаємо значення інтеграла (8.23) за великих додатних значень параметра λ , що стоїть у показнику експоненти. Тому природно очікувати, що головний внесок до значення інтеграла даватимуть ті ділянки шляху інтегрування, на яких функція $u(x, y)$, що є дійсною частиною функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, і відповідно $\left| e^{\lambda f(z)} \right| = e^{\lambda u(x, y)}$ досягають своїх найбільших значень. При цьому необхідно брати до уваги, що функція $u(x, y)$ гармонічна в області \mathcal{G} ($u_{xx} + u_{yy} = 0$, і якщо, наприклад $u_{xx} > 0$, то $u_{yy} < 0$), і вона не може досягати абсолютного максимуму у внутрішніх точках цієї області, тобто всередині області \mathcal{G} немає точок, в яких функція $u(x, y)$ зростає або спадає за всіма напрямками. Поверхня функції $u(x, y)$ може мати сідлові точки або, як їх іще називають, точки перевалу, в яких $f'(z) = 0$. Назва пояснюється тим, що, якщо вважати $u(x, y) = \text{Re } f(z)$ зображенням гірської поверхні, то точки, в яких $f'(z) = 0$, будуть схожими на гірські перевали.

Нехай точка $z_0 = x_0 + iy_0$ є єдиною точкою перевалу поверхні $u(x, y)$ в області \mathcal{G} . Розглянемо лінії постійних значень $u(x, y) = u(x_0, y_0) = \text{const}$ функції $u(x, y)$, що проходять через точку (x_0, y_0) . Їх називають **лініями рівня**. Унаслідок принципу максимуму для гармонічних функцій, ці лінії не можуть утворювати замкнених кривих в області \mathcal{G} , тобто вони або спираються в межу області, або прямують на нескінченність у випадку необмеженої області. Криві $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ розбивають область \mathcal{G} на сектори, усередині яких значення функції $u(x, y)$, відповідно, або менші, або більші за значення $u(x_0, y_0)$. Перші сектори називають **від'ємними**, а другі – **додатними**.

Якщо межові точки z_1 і z_2 кривої інтегрування лежать в одному секторі і функція $u(x, y)$ приймає в цих точках різні значення, то, очевидно, можна таким чином деформувати контур, щоб на ньому функція $u(x, y)$ змінювалась монотонно. При цьому основний внесок у значення інтеграла буде давати

окол тієї точки, в якій значення $u(x, y)$ є найбільшим. Така ж ситуація має місце і у випадку, коли точки z_1 і z_2 лежать у різних секторах, та одна точка – у додатному, а інша – у від'ємному секторі.

Метод перевалу застосовується в тому випадку, коли точки z_1 і z_2 лежать у різних від'ємних секторах, що дає можливість обрати такий контур інтегрування, що проходить через точку перевалу (x_0, y_0) . На обраному контурі значення функції $u(x, y)$ максимальне у точці (x_0, y_0) і швидко спадає у напрямках до межових точок. Очевидно, що в цьому випадку основний внесок до значення інтеграла (8.23) даватиме мала ділянка в околі точки перевалу, причому її можна обрати тим меншою, чим швидше спадають значення $u(x, y)$ вздовж обраної кривої інтегрування.

Метод перевалу інколи називають методом найшвидшого спуску. Ця назва пов'язана з топографією поверхні функції $u(x, y)$ в околі її точки перевалу (сідлової точки).

Перейдемо тепер до розгляду власне самого методу перевалу для отримання асимптотичних розкладів інтегралів типу (8.23).

Як вже було зазначено, в області аналітичності підінтегральної функції контур можна деформувати. На значення інтеграла це не впливатиме. Якщо контур інтегрування C такий, що на деякій невеликій його ділянці $u(x, y)$ – дійсна частина функції $f(z)$ – досягає найбільшого значення, а потім швидко спадає (при цьому $v(x, y) = \text{Im } f(z)$ залишається сталою, щоб забезпечити відсутність небажаних швидких осциляцій підінтегральної функції), то основний внесок до величини інтеграла (8.23) дає безпосереднє інтегрування по невеликій ділянці контуру C . Тому для наближеного обчислення цього інтеграла необхідно деформувати контур C таким чином, щоб підінтегральна функція на ньому мала вказані властивості. При цьому необхідна деформація контуру C визначається, у першу чергу, топографією поверхні функції $u(x, y)$. Зокрема, контур інтегрування має проходити через точку перевалу поверхні функції $u(x, y)$ у напрямку найшвидшої зміни цієї функції.

Зупинимось детальніше на топографії поверхні гармонічної функції $u(x, y)$ в околі її точки перевалу $M_0(x_0, y_0)$,

$x_0 + iy_0 = z_0$. Напрямки найшвидшої зміни функції визначають за напрямком вектора $\text{grad } u = \vec{\nabla} u$. Нехай $\vec{\nabla} u \neq 0$. Оскільки для аналітичної функції $\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v = 0$, то напрям вектора $\vec{\nabla} u$ визначає криву $v(x, y) = \text{const}$. Справедливе також обернене твердження: якщо на деякій кривій $v(x, y) = \text{const}$ і $\vec{\nabla} u \neq 0$, то функція $u(x, y)$ уздовж цієї кривої змінюється найшвидше. Проте в самій точці перевалу M_0 вектор $\vec{\nabla} u = 0$. У точці M_0 похідні за напрямом \vec{l} дотичної до кривої $v(x, y) = \text{const}$

$$\frac{\partial u}{\partial l}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial l}(x_0, y_0) = 0.$$

Оскільки похідна від аналітичної функції у заданій точці не залежить від напрямку прямування до цієї точки, то звідси випливає, що

$$f'(z_0) = 0.$$

Якщо $f''(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0) = 0$, а $f^{(p)}(z_0) \neq 0$, то розклад функції $f(z)$ в околі точки z_0 має вигляд

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^p \{c_0 + c_1(z - z_0) + \dots\},$$

де $p \geq 2$, $c_0 \neq 0$, а величина $(p-1)$ визначає порядок точки перевалу. Випадок $p=2$ відповідає простій точці перевалу.

Нехай $c_n = r_n e^{i\theta_n}$, $n = 0, 1, \dots$, $z - z_0 = \rho e^{i\psi}$, тоді

$$f(z) - f(z_0) = \rho^p \left\{ r_0 e^{i[p\psi + \theta_0]} + \rho r_1 e^{i[(p+1)\psi + \theta_1]} + \dots \right\}.$$

Введемо позначення

$$U(\rho, \psi) = r_0 \cos[p\psi + \theta_0] + \rho r_1 \cos[(p+1)\psi + \theta_1] + \dots, \quad (8.24)$$

$$V(\rho, \psi) = r_0 \sin[p\psi + \theta_0] + \rho r_1 \sin[(p+1)\psi + \theta_1] + \dots \quad (8.25)$$

для виразів, які пов'язані із дійсною та уявною частинами функції $f(z) - f(z_0)$, а саме

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = \rho^p U(\rho, \psi), \quad v(x, y) - v(x_0, y_0) = \rho^p V(\rho, \psi).$$

Для кривих $u(x, y) = \text{const}$, що проходять через точку z_0 , маємо рівняння $U(\rho, \psi) = 0$, яке в безпосередньому околі точки z_0 (коли $\rho \rightarrow 0$) зводиться до $\cos[p\psi + \theta_0] = 0$, що визначає напрямки ліній, що відокремлюють додатні та від'ємні сектори. Оскільки функція $\cos[p\psi + \theta_0]$ при зміні ψ від 0 до 2π змінює знак $2p$ разів, то окіл точки z_0 розпадається на $2p$ криволінійних

секторів, усередині яких функція $U(\rho, \psi)$ зберігає знак. Межі цих секторів визначаються розв'язком рівняння $U(\rho, \psi) = 0$. Сектори, в яких $U(\rho, \psi) < 0$, є **від'ємними**, а сектори, в яких $U(\rho, \psi) > 0$, – **додатними**. Напрямки найшвидшого спуску функції (на яких $v(x, y) = v(x_0, y_0)$ і, відповідно, $V(\rho, \psi) = 0$) лежать як у від'ємних, так і в додатних секторах. Шляхи найшвидшого спуску у від'ємних секторах починаються в напрямках, що визначаються тими значеннями кута ψ , для яких функція $V(\rho, \psi) = 0$ і $U(\rho, \psi) < 0$, тобто $\cos(p\psi + \theta_0) = -1$ у малому околі точки (x_0, y_0) . Ці значення

$$\psi_m = -\frac{\theta_0}{p} + \frac{2m+1}{p}\pi, \quad m = 0, 1, \dots, p-1. \quad (8.26)$$

Зазначимо, що напрямки ліній найшвидшого спуску у безпосередньому околі точки (x_0, y_0) є бісектрисами відповідних секторів.

Надалі розглядатимемо тільки випадок $p = 2$ (простої точки перевалу), коли $f''(z_0) \neq 0$. При цьому

$$c_0 = \frac{1}{2}f''(z_0) \text{ і } \theta_0 = \arg f''(z_0).$$

У цьому випадку є лише два від'ємних сектори, усередині яких проходить лінія найшвидшого спуску функції $u(x, y)$. Напрямок дотичної до цієї лінії в точці z_0 , згідно з (8.26), визначається кутами

$$\psi_0 = \frac{-\theta_0 + \pi}{2}, \quad \psi_1 = \frac{-\theta_0 + 3\pi}{2} = \psi_0 + \pi.$$

Теорема. Нехай функції $\varphi(z)$ та $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ є аналітичними в області \mathcal{G} і задовольняють умови:

1) Поверхня функції $u(x, y)$ має всередині \mathcal{G} єдину точку перевалу $z_0 = x_0 + iy_0$, причому $f''(z_0) \neq 0$.

2) Існує таке $\delta > 0$, яке на лінії L постійного значення функції $v(x, y) = v(x_0, y_0)$, що проходить через точку z_0 , в обох від'ємних секторах цієї точки функція $u(x, y)$ зовні δ -околу точки z_0 задовольняє умову

$$u(x_0, y_0) - u(x, y) \geq h > 0. \quad (8.27)$$

3) Для деякого значення $\lambda_0 > 0$ збігається криволінійний інтеграл

$$\int_C |\varphi(z)| e^{\lambda_0 u(x,y)} ds < M,$$

де крива C повністю лежить в області \mathcal{G} , причому її початкова z_1 і кінцева z_2 точки розташовані в різних від'ємних секторах точки z_0 таким чином, що їх можна сполучити з кривою L кривими γ_1 і γ_2 скінченної довжини, на яких функція $u(x,y)$ задовольняє умову (8.27).

Тоді для всіх $\lambda \geq \lambda_0$ має місце асимптотична формула

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_C \varphi(z) e^{\lambda f(z)} dz = \\ &= e^{\lambda f(z_0)} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |f''(z_0)|}} \varphi(z_0) e^{i\psi_m} + O(\lambda^{-\frac{3}{2}}) \right\} \end{aligned} \quad (8.28)$$

де $\psi_m = \frac{\pi - \theta_0}{2} + m\pi$ ($m = 0, 1$) і $\theta_0 = \arg f''(z_0)$. Вибір значення ψ_m із двох можливих значень узгоджується із напрямком обходу контуру C .

Доведення теореми не наводимо.

Зазначимо, що ψ_m – це кут нахилу кривої інтегрування у простій точці перевалу, що набуває одного із можливих значень $-\frac{\theta_0}{2} \pm \frac{\pi}{2}$ (які відрізняються на π), залежно від напрямку руху через перевал (в один бік або в протилежний). Помилитися з вибором правильного ψ_m , якщо уявляємо шлях інтегрування, важко.

Зауваження 1. Із теореми випливає, що якщо обидві межові точки z_1 та z_2 кривої інтегрування C лежать в одному й тому самому від'ємному секторі точки перевалу z_0 , то має місце спрощена оцінка

$$F(\lambda) = \int_C \varphi(z) e^{\lambda f(z)} dz = e^{\lambda f(z_0)} O(e^{-\lambda h}). \quad (8.29)$$

Зауваження 2. У застосуваннях часто доводиться розглядати інтеграли типу (8.23) в необмеженій області, коли крива інтегрування C прямує до нескінченності. У цих випадках для збіжності інтеграла (8.23) необхідно, щоб крива інтегрування прямувала до

нескінченності у від'ємних секторах точки перевалу z_0 . При цьому теорема та (8.28) зберігають силу.

Приклад 9. Знайти асимптотику для функції Ханкеля першого роду

$$H_\nu^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_C e^{i\lambda \sin z - i\nu z} dz \text{ при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Тут контур C – довільний контур, що йде із $0 + i\infty$ в $\pi - i\infty$ (рис. 8.1), тобто має вертикальні асимптоти $x=0$ та $x=\pi$.

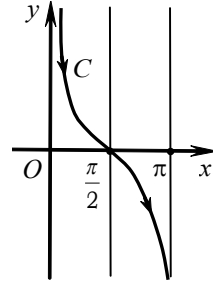


Рис. 8.1

Маємо контурний інтеграл вигляду (8.28), в якому $\varphi(z) = e^{-i\nu z}$, $f(z) = i \sin z$. У відкритій смузі $0 < x < \pi$ функція

$$f(z) = i \sin z = -\cos x \operatorname{sh} y + i \sin x \operatorname{ch} y$$

має єдину точку перевалу $z_0 = \pi/2$, в якій $f(\pi/2) = i$, $f'(\pi/2) = 0$, $f''(\pi/2) = -i$. Дійсна частина функції $f(z)$: $u(x, y) = -\cos x \operatorname{sh} y$ дорівнює нулю на прямих $y=0$ та $x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. У точці перевалу $z_0 = \pi/2$ $u(x_0, y_0) = 0$, тобто у відкритій смузі $0 < x < \pi$ є по два від'ємних і додатних сектори, в яких $u(x, y) - u(x_0, y_0)$, відповідно, менше та більше за нуль. Початкова та кінцева точки контуру C знаходяться у різних від'ємних секторах. Прямі $y=0$ та $x = \pi/2$ є лініями рівня, що проходять через перевальну точку та відмежовують одні сектори від інших. Бісектриси від'ємних секторів є лініями найшвидшого спуску. Очевидно, що із двох можливих значень $\psi_m = \{-\pi/4, 3\pi/4\}$ в (8.28) вибираємо $-\pi/4$, оскільки саме цей кут задає напрямком, що узгоджується з напрямком обходу контуру через точку $z_0 = \pi/2$. Тому, згідно з асимптотичною формулою (8.28), маємо

$$H_\nu^{(1)}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} e^{i\left(\lambda - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right).$$

Приклад 10. Знайти асимптотику функції Бесселя $J_\nu(t)$ при $t \rightarrow \infty$ для довільного невід'ємного ν

$$J_\nu(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} e^{\frac{t}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} z^{-\nu-1} dz.$$

Маємо контурний інтеграл вигляду (8.28), в якому $\varphi(z) = z^{-\nu-1}$, $f(z) = \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)$.

Точками перевалу будуть $z_1 = i$, $z_2 = -i$; $f(\pm i) = \pm i$, $\operatorname{Re} f(\pm i) = 0$. Лініями однакового рівня

$$u = \operatorname{Re} f(z) = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0, \quad \text{що}$$

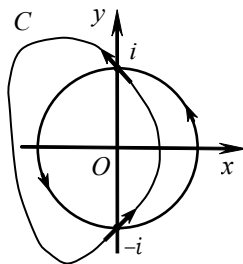


Рис. 8.2

проходять через обидві перевальні точки, є коло $|z| = 1$ та пряма $x = 0$ (рис. 8.2).

Деформуємо контур так, щоб він проходив через перевальні точки по лініях найшвидшого спуску. На рисунку подано напрямки руху вздовж бісектрис від'ємних секторів, що проходять через перевальні точки та задають напрямки найшвидшого спуску. Асимптотична поведінка інтеграла задається сумою внесків околів двох перевальних точок $z_1 = i$, $z_2 = -i$. Кут нахилу деформованої кривої інтегрування у простій точці перевалу $z_1 = i$, як видно, дорівнює $3\pi/4$, а у простій точці перевалу $z_2 = -i$ відповідний кут набуває значення $\pi/4$. Протилежні напрямки відповідали б напрямку обходу контуру C за годинниковою стрілкою.

Згідно з асимптотичною формулою (8.28), ураховуючи внесок двох точок перевалу, маємо

$$\begin{aligned} J_\nu(t) &\sim \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \left\{ i^{-\nu-1} e^{it} e^{3i\pi/4} + (-i)^{-\nu-1} e^{-it} e^{i\pi/4} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \left\{ -e^{-i\pi\nu/2} e^{it} e^{3i\pi/4} + e^{i\pi\nu/2} e^{-it} e^{i\pi/4} \right\}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$J_\nu(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos \left(t - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4} \right) + O \left(\frac{1}{t^{3/2}} \right).$$

Приклад 11. Знайти асимптотику функції Ейрі $Ai(x)$ для великих від'ємних значень аргументу $x \rightarrow -\infty$

$$Ai(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(xz + \frac{z^3}{3}\right)} dz.$$

Знайдемо критичні точки підінтегральної функції, які збігаються із критичними точками функції у показнику експоненти. Прирівнявши нулю похідну від неї

$$\left(xz + \frac{z^3}{3}\right)' = x + z^2 = 0,$$

знаходимо дві критичні точки $z_{1,2} = \pm\sqrt{|x|}$, які залежать від великого параметра x , тобто не є сталими, а змінюються разом із x . Щоб усунути залежність критичних точок від параметра, зробимо заміну змінної $z = \sqrt{|x|}t$. Одержимо інше представлення для функції Ейрі

$$Ai(-|x|) = \frac{\sqrt{|x|}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i|x|^{3/2}\left(\frac{t^3}{3} - t\right)} dt,$$

подібне до (8.28), де великий дійсний параметр $|x|^{3/2} \rightarrow \infty$, $f(t) = i(t^3/3 - t)$, $f'(t) = i(t^2 - 1) = 0$ у двох точках перевалу: $t_{1,2} = \mp 1$, $f''(\pm 1) = \pm 2i$. Значення функції $f(t)$ у знайдених точках перевалу суто уявне, $f(\mp 1) = \pm 2i/3$, тобто $u(\pm 1, 0) = 0$. Аналітичне продовження $f(t)$ на комплексну площину, тобто для $t = \xi + i\eta$, має дійсну частину

$$u = \operatorname{Re} f(\xi, \eta) = \eta \left(\frac{\eta^2}{3} - \xi^2 + 1 \right).$$

Рівняння ліній рівня, що проходять через перевальні точки та відмежовують від'ємні та додатні сектори, тут визначаються в явному вигляді як нулі функції

$$u = \operatorname{Re} f(\xi, \eta) = \eta \left(\frac{\eta^2}{3} - \xi^2 + 1 \right) = 0,$$

тобто $\eta = 0$ (рівняння прямої) і $\frac{\eta^2}{3} + 1 = \xi^2$ (рівняння гіперболи із

асимптотами $\eta = \pm\sqrt{3}\xi$) (рис. 8.3). Тому деформуємо контур так, щоб він проходив через перевальні точки по лініях найшвидшого спуску. На рис. 8.3 зображено напрямки руху по цих лініях вздовж бісектрис від'ємних секторів, що проходять через перевальні точки. Асимптотична поведінка інтеграла задається сумою внесків околів двох перевальних точок. Кут нахилу деформованої кривої інтегрування у простій точці перевалу $t_1 = -1$, як видно з рисунку, дорівнює $-\pi/4$, а у простій точці перевалу $t_2 = 1$ відповідний кут набуває значення $\pi/4$.

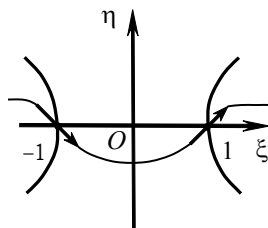


Рис. 8.3

Тоді, згідно з асимптотичною формулою (8.28), ураховуючи внесок двох точок перевалу, маємо

$$Ai(-|x|) \sim \frac{\sqrt{|x|}}{2\sqrt{\pi}} \left\{ e^{\frac{2i}{3}|x|^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{|x|^{3/2}}} e^{-\frac{\pi i}{4}} + e^{-\frac{2i}{3}|x|^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{|x|^{3/2}}} e^{\frac{\pi i}{4}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{|x|^{1/4}} \cos \left\{ \frac{2}{3}|x|^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Таким чином, $Ai(-|x|) \sim \frac{1}{|x|^{1/4}} \sin \left\{ \frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right\}$.

Саме таке представлення використовують у квантовій механіці при розгляді руху зарядженої частинки в однорідному електричному полі.

Приклад 12. Знайти асимптотику функції Ейрі $Ai(x)$ для великих додатних значень аргументу $x \rightarrow +\infty$

$$Ai(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(xz + \frac{z^3}{3}\right)} dz.$$

Робимо заміну змінної $z = \sqrt{x}t$ та одержуємо представлення для функції Ейрі

$$Ai(x) = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^{3/2}\left(\frac{t^3}{3} + t\right)} dt,$$

де, якщо зівставити із (8.28), великий дійсний параметр $x^{3/2} \rightarrow \infty$, $f(t) = i(t^3/3 + t)$, $f'(t) = i(t^2 + 1) = 0$ у двох точках перевалу: $t_{1,2} = \pm i$, $f''(\pm i) = \mp 2$. Значення функції $f(t)$ у знайдених точках перевалу суто дійсні, $f(\pm i) = \mp 2/3$, тобто $v(0, \pm 1) = 0$. Аналітичне продовження $f(t)$ на комплексну площину, тобто для $t = \xi + i\eta$, має дійсну частину

$$u = \operatorname{Re} f(\xi, \eta) = -\eta \left(-\frac{\eta^2}{3} + \xi^2 + 1 \right).$$

Рівняння ліній рівня, що проходять через перевальні точки та відмежовують від'ємні та додатні сектори, можна знайти, розв'язавши кубічне рівняння

$$\eta \left(-\frac{\eta^2}{3} + \xi^2 + 1 \right) = \pm \frac{2}{3}.$$

Оскільки уявна частина $f(t)$ у знайдених точках перевалу дорівнює нулю, то рівняння для відповідних ліній найшвидшого спуску виявляються простішими

$$v = \operatorname{Im} f(\xi, \eta) = \xi \left(1 - \eta^2 + \frac{\xi^2}{3} \right) = 0,$$

тобто $\xi = 0$ (рівняння прямої) та $\frac{\xi^2}{3} + 1 = \eta^2$ (рівняння гіперболи із асимптотами $\xi = \pm \sqrt{3}\eta$) (рис. 8.4).

Нагадаємо, що знайдені лінії найшвидшого спуску поблизу перевальних точок є бісектрисами від'ємних (додатних) секторів. На рисунку стрілками на лініях найшвидшого спуску (на гіперболах)

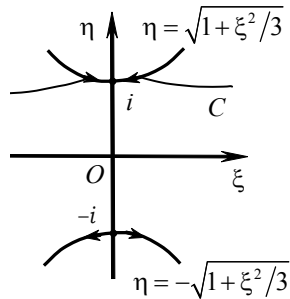


Рис. 8.4

вказано напрямки зростання $\operatorname{Re} f(\xi, \eta)$. У цьому легко переконатись, наприклад розглянувши невелике дійсне відхилення $\varepsilon > 0$ від перевальної точки ліворуч або праворуч

$$\operatorname{Re} \left[f(\pm \varepsilon, 1) + \frac{2}{3} \right] = -\varepsilon^2 < 0, \quad \operatorname{Re} \left[f(\pm \varepsilon, -1) - \frac{2}{3} \right] = \varepsilon^2 > 0.$$

Деформуємо початковий контур, що проходив уздовж дійсної осі від $-\infty$ до $+\infty$, так, щоб він проходив через перевальну точку по лінії найшвидшого спуску із одного від'ємного сектора до іншого. Із рисунку видно, що цією перевальною точкою має бути $t_1 = i$ з відповідним кутом нахилу деформованої кривої інтегрування через цю точку $\psi = 0$.

Тоді, згідно з асимптотичною формулою (8.28), маємо

$$Ai(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{x^{3/2}}} = \frac{1}{2x^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}.$$

8.5. Наближені вирази для обернених перетворень Лапласа

Приклад 13. Знайти асимптотичний розклад

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{e^{pt} \sqrt{p}}{p^2 + \omega^2} dp, \quad \omega > 0.$$

для великих значень t .

Розглянемо інтеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{pt} \sqrt{p}}{p^2 + \omega^2} dp$ по

межі області (рис. 8.5). У середині області підінтегральна функція однозначна та має дві ізольовані особливі точки $\pm i\omega$ – полюси першого порядку. Тому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{pt} \sqrt{p}}{p^2 + \omega^2} dp = \operatorname{res} \left[\frac{e^{pt} \sqrt{p}}{p^2 + \omega^2}, i\omega \right] + \operatorname{res} \left[\frac{e^{pt} \sqrt{p}}{p^2 + \omega^2}, -i\omega \right],$$

де лишки функції $\operatorname{res} \left[\frac{e^{pt} \sqrt{p}}{p^2 + \omega^2}, \pm i\omega \right] = \frac{e^{\pm i\omega t} \sqrt{\pm i\omega}}{\pm 2i\omega} = \frac{e^{\pm i\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)}}{\pm 2i\sqrt{\omega}}$,

та їх сума $\operatorname{res} \left[\frac{e^{pt} \sqrt{p}}{p^2 + \omega^2}, i\omega \right] + \operatorname{res} \left[\frac{e^{pt} \sqrt{p}}{p^2 + \omega^2}, -i\omega \right] = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right)$.

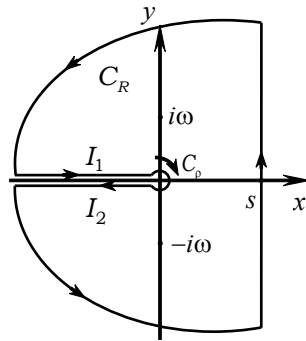


Рис. 8.5

З іншого боку, межа області складається з кількох гладких кривих: вертикального відрізка $z = s + iy$, де $s = \text{const} > 0$, $y \in [-R, R]$, двох дуг C_R радіуса R ; верхнього I_1 та нижнього I_2 берегів розрізу від'ємної частини дійсної осі та розімкненого кола C_ρ . Тепер спрямуємо R до нескінченності, а ρ – до нуля. Інтеграл по дугах радіуса C_R занулюється згідно з лемою Жордана. Граничне значення інтеграла вздовж C_ρ

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{e^{pt} \sqrt{p}}{p^2 + \omega^2} dp = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \rho^{\frac{3}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{\rho t e^{i\varphi}}}{\rho^2 e^{2i\varphi} + \omega^2} e^{\frac{3i\varphi}{2}} d\varphi = 0.$$

Оскільки на верхньому березі $p = -x = xe^{i\pi}$, $\sqrt{p} = i\sqrt{x}$, а на нижньому – $p = -x = xe^{-i\pi}$, $\sqrt{p} = -i\sqrt{x}$, то сума інтегралів уздовж I_1 та I_2

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-xt} \sqrt{x}}{x^2 + \omega^2} dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^n \int_0^\infty e^{-xt} (-1)^k \frac{x^{2k+1/2}}{\omega^{2k+2}} dx + \frac{(-1)^{n+1}}{\pi \omega^{2n+2}} \int_0^\infty \frac{e^{-xt} x^{2n+5/2}}{x^2 + \omega^2} dx. \end{aligned}$$

Тут скористалися рівністю

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + \omega^2} &= \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + (x/\omega)^2} = \\ &= \frac{1}{\omega^2} \left(1 - \left(\frac{x}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{x}{\omega}\right)^4 - \dots + (-1)^n \left(\frac{x}{\omega}\right)^{2n} \right) + \frac{(-1)^{n+1} (x/\omega)^{2n+2}}{x^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Залишковий член розкладу $f_1(t)$ у вигляді інтеграла по модулю не перевищує модуль наступного доданку розкладу

$$\left| \frac{(-1)^n}{\pi \omega^{2n+2}} \int_0^\infty \frac{e^{-xt} x^{2n+5/2}}{x^2 + \omega^2} dx \right| < \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-xt} x^{2n+5/2}}{\omega^{2n+4}} dx = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(2n+7/2)}{\omega^{2n+4} t^{2n+7/2}}.$$

Таким чином, отримано асимптотичний розклад

$$f_1(t) \sim \frac{1}{\pi \omega^2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{-xt} (-1)^k \frac{x^{2k+1/2}}{\omega^{2k}} dx = \frac{1}{\pi \omega^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(2k+3/2)}{\omega^{2k} t^{2k+3/2}},$$

а для функції

$$\begin{aligned}
 f(t) &= -f_1(t) + \operatorname{res} \left[\frac{e^{pt} \sqrt{p}}{p^2 + \omega^2}, i\omega \right] + \operatorname{res} \left[\frac{e^{pt} \sqrt{p}}{p^2 + \omega^2}, -i\omega \right] = \\
 &= -f_1(t) + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right). \\
 f(t) &\sim -\frac{1}{\pi \omega^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(2k+3/2)}{\omega^{2k} t^{2k+3/2}} + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right).
 \end{aligned}$$

Приклад 14. Знайти для тієї самої функції, що у прикладі 13,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{e^{pt} \sqrt{p}}{p^2 + \omega^2} dp, \quad \omega > 0.$$

наближену формулу для малого значення t .

Нагадаємо, що у формулі Мелліна вертикальну пряму $\operatorname{Re} p = s = \text{const}$, по якій здійснюється інтегрування, вибирають так, щоб всі особливі точки підінтегральної функції залишилися ліворуч цієї вертикальної лінії. При цьому значення інтеграла від s не залежить і не зміниться, якщо контур інтегрування паралельно перемістити праворуч так, щоб значення параметра s стало більшим за ω . Тоді можна скористатися наступним збіжним знакозмінним розкладом підінтегральної функції

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{p^2 + \omega^2} &= \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 + (\omega/p)^2} = \\
 &= \frac{1}{p^2} \left(1 - \left(\frac{\omega}{p} \right)^2 + \left(\frac{\omega}{p} \right)^4 - \dots + (-1)^n \left(\frac{\omega}{p} \right)^{2n} + \dots \right) i \\
 f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} p^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \left(\frac{\omega}{p} \right)^2 + \left(\frac{\omega}{p} \right)^4 - \dots + (-1)^n \left(\frac{\omega}{p} \right)^{2n} + \dots \right) dp.
 \end{aligned}$$

Після заміни змінної $pt = z$ отримуємо

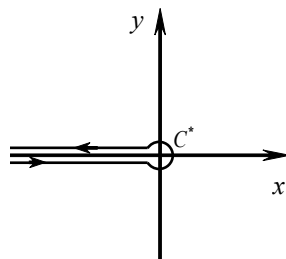
$$f(t) = \frac{\sqrt{t}}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\omega t)^{2k} \int_{st-i\infty}^{st+i\infty} e^z z^{-(3/2)-2k} dz.$$

Скористаємося рівністю

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{st-i\infty}^{st+i\infty} e^z z^{-(3/2)-2k} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} e^z z^{-(3/2)-2k} dz$$

(див. приклад 13 та рис. 8.5) та інтегральним представленням Ханкеля для гамма-функції

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} e^z z^{-(3/2)-2k} dz = \frac{1}{\Gamma(2k + 3/2)}.$$



Тут контур C^* зображено на рис. 8.6.
Тоді

Рис. 8.6

$$f(t) = \sqrt{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega t)^{2k}}{\Gamma(2k + 3/2)} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \left\{ 1 - \frac{(2\omega t)^2}{5!!} + \frac{(2\omega t)^4}{9!!} + \dots \right\} \sim 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}.$$

В останньому розкладі використано рівності $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$ та $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Задачі

У задачах 8.1 – 8.3 довести співвідношення та оцінити залишковий член при $x > 0$.

$$\mathbf{8.1.} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n+1}}, \quad \mathbf{8.2.} \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}},$$

$$\mathbf{8.3.} \int_1^{\infty} \frac{1}{(x + \ln t)^{1/3} t^2} dt \sim x^{-1/3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{(3x)^n}.$$

У задачах 8.4 – 8.15 дослідити асимптотику.

$$\mathbf{8.4.} \int_0^1 e^{-\frac{1}{x} - \lambda x} dx \quad (\lambda \gg 1). \quad \mathbf{8.5.} \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} t} dt \quad (x \gg 1).$$

$$\mathbf{8.6.} \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt \quad (n \gg 1). \quad \mathbf{8.7.} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx \quad (n \gg 1).$$

$$\mathbf{8.8.} K_\nu(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu t - x \operatorname{ch} t} dt \quad (x \gg 1).$$

$$\mathbf{8.9.} K_\nu(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu t - x \operatorname{ch} t} dt \quad (x > 0, \nu \gg 1).$$

$$8.10. \int_0^{\infty} \operatorname{ch} t e^{i\lambda(t+(1/t))} dt \quad (\lambda \gg 1).$$

$$8.11. \int_{-1}^{\infty} (t^3 + 3t - 2i)^{-n} e^{it} dt \quad (n \in \mathbb{N}, n \gg 1)$$

$$8.12. \int_{-i\infty}^{+i\infty} z^{z^2} e^{-\lambda z^2} dz \quad (\lambda \rightarrow \infty).$$

$$8.13. \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} e^{2\lambda\left(-z^2 - \frac{2}{z}\right)} dz \quad (\lambda \rightarrow \infty, a > 0).$$

$$8.14. \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{e^{zt}}{z^2(z+\omega)^3} dz \quad (\operatorname{Re} \omega > 0), t \rightarrow \infty.$$

8.15. Знайти асимптотичний розклад для великих t

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{e^{zt}}{z(1+z^{3/2})} dz \quad (z^{3/2} > 0 \text{ для } z > 0).$$

Відповіді та вказівки до розв'язування задач

1.1. а) $|i|=1$, $\arg i = \pi/2$; б) $|-3|=3$, $\arg(-3) = \pi$; в) $|1-i| = \sqrt{2}$, $\arg(1-i) = -\pi/4$, г) $1+e^{i\varphi} = 2|\cos(\varphi/2)|e^{i(\varphi/2-\pi)}$, $\pi < \varphi \leq 3\pi$.

1.2. а) $e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}$, $e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}$, $e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)}$, $e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)}$, $k \in \mathbb{Z}$;

б) $5e^{i(2+2\pi k)}$, $5e^{i(-2+2\pi k)}$, $5e^{i\left(-2+\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$, $5e^{i\left(2-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.3. а) $3e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right)}$, $k = \overline{0,2}$; б) $2e^{\frac{i\pi k}{3}}$, $k = \overline{0,5}$; в) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{8}}$, $\sqrt{2}e^{-\frac{7\pi i}{8}}$.

1.4. а) $e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi k}{5}\right)}$, $k = \overline{0,4}$; б) $e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}\right)}$, $k = \overline{0,2}$.

1.5. а) 1, б) $e^{\frac{2\pi ki}{3}}$, $k = \overline{0,2}$, в) $e^{2\sqrt{2}\pi ki}$, $k \in \mathbb{Z}$, г) $e^{2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$,
д) $e^{-\pi/2+2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.6. Коло радіуса R із центром у точці z_0 , відкрита область усередині цього кола, відкрита область ззовні цього кола.

1.7. Еліпс із фокусами у точках $(0,2)$ і $(0,-2)$ та великою піввіссю $5/2$.

1.8. Внутрішність лівої гілки гіперболи із фокусами у точках $z = \pm 2$ та дійсною піввіссю $3/2$.

1.9. Смуга $-1 < y < 0$.

1.10. Внутрішність кута з вершиною в початку координат і сторонами, що утворюють із додатною частиною дійсної осі кути, які дорівнюють α та β , відповідно. Внутрішність такого самого (за величиною) кута, але з вершиною в точці $z = z_0$ і сторонами, які утворюють з радіус-вектором точки, що ставиться у відповідність числу z_0 на комплексній площині, кути, які дорівнюють α та β , відповідно.

1.11. а) Сім'я кіл, що є дотичними в початку координат до уявної осі, і сама уявна вісь (сім'я рівнянь: $C(x^2 + y^2) = x$);

б) сім'я кіл, що є дотичними в початку координат до дійсної осі, і сама дійсна вісь (сім'я рівнянь: $C(x^2 + y^2) = -y$).

1.12. а) Сім'я гіпербол: $x^2 - y^2 = C$;

б) сім'я гіпербол: $xy = C/2$.

1.14. а) $|\sin z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}$; б) $|\cos z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x}$.

1.16. а) $-y + ix$; б) $x^2 - y^2 + 2ixy$; в) $-2xy + i(x^2 - y^2)$;

г) $x^3 - 3xy^2 + i(3yx^2 - y^3)$; д) $y^3 - 3yx^2 + i(x^3 - 3xy^2)$;

е) $e^x \cos y + ie^x \sin y$; ж) $\frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$; з) $\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$.

1.17. $z = (2k + 1/2)\pi i$ і $z = -\ln 3 + (2k - 1/2)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.18. $z = \pi/4 + 2\pi k - i \ln(\sqrt{2} \pm 1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.19. $z = \pi k(1 + i)$ і $z = \pi(1 + 2k)(1 - i)/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.20. $z = \pm i\pi/4 + 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.21. $5e^{\operatorname{arctg}(4/3) + 2\pi k - \pi} e^{i(\operatorname{arctg}(4/3) + 2\pi k - \pi - \ln 5)}$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.22. $\frac{40 + 9i}{41}$. **1.23.** $\frac{3\sqrt{3} + 8i}{7}$. **1.24.** а) $\frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$.

б) $\frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$; в) $\frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$; г) $\frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$; д) $\frac{\sin^2 nx}{\sin x}$.

1.25. $v = \operatorname{Im}(iz^2 + 5iz + z + 1/z + C)$; $f(z) = iz^2 + (1 + 5i)z + 1/z + C$, $C \in \mathbb{R}$.

1.26. $f(z) = ie^z + z(1 - 5i) - i/z + C$, $C \in \mathbb{R}$.

1.27. $f(z) = z^3(2 + i) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

1.28. $\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$.

1.30. $f(z) = z^2 e^{z+iC}$, C – довільна дійсна стала.

1.31. $f(z) = e^{z^2+iC}$, C – довільна дійсна стала.

1.32. $f(z) = |C|e^{z^2/2}$, C – довільна дійсна стала.

1.33. $f(z) = |C|ze^z$, C – довільна дійсна стала. **1.34.** -1 .

2.2. а) $I_1 = 2 + i, I_2 = 1 + \frac{i}{2}$; б) $I_1 = \frac{i\pi}{2}, I_2 = -\frac{\pi}{2}$; в) $I_1 = i\pi R^2$,
 $I_2 = -\pi R^2$. 2.3. а) $\sqrt{5}\left(1 - \frac{i}{2}\right)$; б) 2; в) $2i$, г) 0. 2.4. πi .

2.5. а) $-2(1+i)$; б) -4 . 2.6. $2\pi Ri$. 2.7. а) $\frac{2\pi i}{n+1}$ при $n \neq -1$, $-2\pi^2$
при $n = -1$; б) $(-1)^{n+1} \frac{2\pi i}{n+1}$ при $n \neq -1$, $-4\pi^2$ при $n = -1$.

2.8. 4π . 2.9. -126 . 2.10. π . 2.11. 0. 2.12. а) $-2 + 2i$; б) $4i$; в) $-2 + 2i$.

2.13. 0, якщо $n \neq -1$; $2\pi i$, якщо $n = -1$. 2.14. $\pi i \cos 1$.

2.15. $-\pi(1+i)/2$. 2.16. $-2\pi i$.

3.1. $1/4$. 3.2. 1. 3.3. $|z| < \infty$. 3.4. $-\ln(1-z), |z| < 1$.

3.5. Указівка. Скористатися теоремою Абеля та відповіддю до задачі 3.4.

3.6. $a^\alpha \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n! a^n} z^n\right), |z| < a$.

3.7. $\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-3)(z-1)^n}{2^{n+2}}, |z-1| < 2$.

3.8. $\sum_{m=1}^{\infty} z^m \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{k(m-k)!}, |z| < 1$.

3.9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}, 0 < |z| < \infty$. 3.10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{z^{2n+2}}, |z| > 2$.

3.11. а) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{5^{n+1}} z^n, |z| < 5/2$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{2^{n+1} z^{n+1}}, |z| > 5/2$.

3.12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{2n+1}}, 0 < |z| < \infty$.

3.13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2)^{n-1}}{4^{n+1}}, 0 < |z-2| < 4$.

3.14. а) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{3n}, |z| < 1$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{3n+3}}, |z| > 1$.

3.15. $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n (n+1)(z-i)^{n-2}}{2^{n+2}}, 0 < |z-i| < 2$.

3.16. $z=0$ – усувна особлива точка, $z=\pi n, n \neq 0, n \in \mathbb{Z}$ – полюси першого порядку.

3.17. $z=0$ – полюс першого порядку, $z=\pm 2i$ – полюси другого порядку.

3.18. а) $z=0$ – усувна особлива точка, $z=\infty$ – істотно особлива точка; б) $z=0$ – полюс третього порядку; в) $z=0$ – істотно особлива точка; г) $z=0$ – усувна особлива точка, $z=\infty$ – істотно особлива точка; д) $z=0$ – полюс п'ятого порядку, $z=\infty$ – істотно особлива точка.

3.19. $z=0$ – істотно особлива точка, $z_k = -\frac{i}{\pi(2k+1)}, k \in \mathbb{Z}$, –

полюси першого порядку.

3.20. а) нуль першого порядку; б), в), г) – істотно особлива точка.

$$\mathbf{6.1.} \operatorname{res} \left[\frac{1}{z(z^2+4)^2}, 0 \right] = \frac{1}{16}, \operatorname{res} \left[\frac{1}{z(z^2+4)^2}, \pm 2i \right] = -\frac{1}{32}.$$

$$\mathbf{6.2.} \operatorname{res}[f(z), -1] = 2 \sin 2, \operatorname{res}[f(z), \infty] = -2 \sin 2.$$

$$\mathbf{6.3.} \operatorname{res}[f(z), \pm 1] = -1/2, \operatorname{res}[f(z), 0] = 1, \operatorname{res}[f(z), \infty] = 0.$$

$$\mathbf{6.4.} \operatorname{res}[f(z), \pi k] = 0, k \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{6.5.} \operatorname{res}[f(z), 0] = -1/6. \quad \mathbf{6.6.} -2\pi i.$$

$$\mathbf{6.7.} 0. \quad \mathbf{6.8.} \pi i \operatorname{sgn} a. \quad \mathbf{6.9.} -2\pi i \operatorname{sgn} a. \quad \mathbf{6.10.} \frac{\pi}{n \sin(\pi/n)}. \quad \mathbf{6.11.} 0.$$

$$\mathbf{6.12.} \frac{\pi}{16a^3}. \quad \mathbf{6.13.} \frac{\pi(2n-2)!}{((n-1)!)^2} 2^{1-2n}. \quad \mathbf{6.14.} \frac{\pi \cos(\ln a)}{2a \operatorname{ch}(\pi/2)}. \quad \mathbf{6.15.} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

$$\mathbf{6.16.} \frac{3\pi}{16e^2}. \quad \mathbf{6.17.} \pi/2. \quad \mathbf{6.18.} 0. \quad \mathbf{6.19.} \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+ab}}.$$

$$\mathbf{6.20.} \frac{2\pi}{a^2-1}, |a| > 1; \quad \frac{2\pi}{1-a^2}, |a| < 1; \quad 0 \quad (\text{голове значення}),$$

$$|a|=1, a \neq \pm 1. \quad \mathbf{6.21.} \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

$$\mathbf{6.22.} \frac{\pi}{2a^4} \left(1-a + \frac{a^2}{2} - e^{-a} \right). \quad \mathbf{6.23.} \frac{\pi}{2a^3} (a-1+e^{-a}). \quad \mathbf{6.24.} \frac{\pi}{a} e^{-\alpha a}$$

$$\mathbf{7.1.} (\operatorname{ch} 2t-1)/4. \quad \mathbf{7.2.} e^{-2t}(-1+t-2 \sin t). \quad \mathbf{7.3.} e^t.$$

$$\mathbf{7.4.} x(t) = (C_1 + C_2 t^2) e^{-t}, \text{ де } C_1, C_2 \text{ – довільні сталі.}$$

7.5. $e^{-t}(1+Ct^2)$, де C – довільна стала. **7.6.** $x(t) = y(t) = e^{-t}$.

7.7. $x(t) = y(t) = e^t$.

7.8. $x(t) = y(t) = z(t) = \operatorname{ch} t$. **7.9.** $\phi(t) = f(t) + \int_0^t \operatorname{sh}(t-x)f(x)dx$.

7.10. $\phi(t) = f(t) + \int_0^t e^{2(t-x)} f(x)dx$. **7.11.** $f(t) = (1+t)\sin t$.

8.4. $e^{-2\sqrt{\lambda}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\lambda^{3/4}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{5/4}}\right) \right)$. **8.5.** $e^{-\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}$. **8.6.** $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

8.7. $\sqrt{\frac{\pi}{n}}$. **8.8.** $e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$. **8.9.** $(ex)^{-\nu} \sqrt{\pi} (2\nu)^{\nu-1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right)$.

Указівка. Зробити заміну: $t = \tau + \ln \frac{2\nu}{x}$. **8.10.** $\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{i(2\lambda + \pi/4)} \operatorname{ch} 1$.

8.11. $2e\left(\frac{i}{4}\right)^n \sqrt{\frac{\pi}{3n}}$. Указівка. Точка $z_1 = i$ є особливою точкою,

асимптотика інтеграла дорівнює внеску точки перевалу $z_2 = -i$.

8.12. $i\sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{2}\exp(2\lambda-1)} \left(1 + O\left(e^{-2\lambda}\right) \right)$. Указівка. Зробити заміну:

$z = te^{\lambda-(1/2)}$.

8.13. $\sqrt{\frac{\pi}{6\lambda}} \exp\left\{3\lambda + 3^{3/2}\lambda i\right\}$. Указівка. Асимптотика інтеграла

визначається внеском точки перевалу $z_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. **8.14.** $\frac{\omega t - 3}{\omega^4}$.

8.15. $1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Gamma\left(3k + \frac{3}{2}\right) t^{-3k - \frac{3}{2}}$.

Список літератури

1. Волковський, Л. И. *Сборник задач по теории функций комплексного переменного* / Л. И. Волковський, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. – М. : Наука, 1975. – 319 с.
2. Грищенко, О. Ю. *Теорія функцій комплексної змінної* / О. Ю. Грищенко, С. І. Ляшко. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2009. – 495 с.
3. Грищенко, О. Ю. *Теорія функцій комплексної змінної: розв'язування задач* / О. Ю. Грищенко, М. І. Нагнибіда, П. П. Настасієв. – К. : Вища шк., 1994. – 335 с.
4. Демидович, Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие* / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с.
5. Диткин, В. А. *Операционное исчисление* / В. А. Диткин, А. П. Прудников. – М. : Высшая шк., 1975. – 408 с.
6. Евграфов, М. А. *Аналитические функции* / М. А. Евграфов. – М. : Наука, 1968. – 472 с.
7. *Комплексний аналіз. Приклади і задачі : навч. посібник* / В. Г. Самойленко, В. А. Бородін, Г. В. Верьовкіна, А. В. Ловейкін, І. Б. Романенко; за ред. В. Г. Самойленка. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2010. – 224 с.
8. Лаврентьев, М. А. *Методы теории функций комплексного переменного* / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 736 с.
9. Мартыненко, В. С. *Операционное исчисление* / В. С. Мартыненко. – Киев : Изд-во КГУ, 1968. – 198 с.
10. *Математический энциклопедический словарь*. – М. : Советская энциклопедия, 1988 [статья "Комплексные числа"].
11. Олвер, Ф. *Введение в асимптотические методы и специальные функции* / Ф. Олвер. – М. : Наука, 1978. – 376 с.
12. Пенроуз, Р. *Путь к реальности или законы, управляющие Вселенной* / Р. Пенроуз. – М. : Ижевск, Ин-т компьют. исслед., 2007. – 911 с.
13. Привалов, И. И. *Введение в теорию функций комплексного переменного* / И. И. Привалов. – М. : Наука, 1984. – 432 с.
14. Свешников, А. Г. *Теория функций комплексной переменной* / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – М. : Наука, 1979. – 320 с.
15. Сидоров, Ю. В. *Лекции по теории функций комплексного переменного* / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. – М. : Наука, 1989. – 480 с.

16. Смирнов, В. И. Курс высшей математики / В. И. Смирнов : В 3 т. – М. : Наука, 1974. – Т.3, ч.2. – 672 с.
17. Стройк, Д. Я. Краткий очерк истории математики / Д. Я. Стройк. – М. : Наука, 1984.
18. Титчмарш, Е. Теория функций / Е. Титчмарш. – М. : Наука, 1980. – 464 с.
19. Федорюк М. В. Метод перевала / М. В. Федорюк. – М. : Наука, 1977. – 368 с.
20. Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1969. – 576 с.
21. Шкіль М. І. Математичний аналіз : В 2 ч. / М. І. Шкіль. – К. : Вища шк., 1981. – Ч. II. – 456 с.

Зміст

Вступ. Історична довідка.....	3
Розділ 1. Основні поняття.....	6
1.1. Комплексні числа та дії над ними.....	6
1.2. Область на комплексній площині.....	8
1.3. Геометричні поняття.....	13
1.4. Функції комплексної змінної.....	14
1.5. Неперервні функції.....	15
1.6. Диференціювання функції комплексної змінної.....	20
Розділ 2. Інтегрування функцій комплексної змінної.....	36
2.1. Інтеграл від функції комплексної змінної.....	36
2.2. Інтеграл Коші.....	41
Розділ 3. Ряди функцій комплексної змінної.....	48
3.1. Ряди аналітичних функцій.....	48
3.2. Степеневі ряди.....	50
3.3. Ряд Тейлора.....	55
3.4. Ряд Лорана.....	58
3.5. Особливі точки.....	61
Розділ 4. Аналітичне продовження.....	66
4.1. Єдиність визначення аналітичної функції.....	66
4.2. Аналітичне продовження.....	69
4.3. Ріманові поверхні.....	69
4.4. Аналітичне продовження гамма-функції.....	71
Розділ 5. Застосування теорії функцій до аналізу.....	74
5.1. Ряди Тейлора та Лорана.....	74
5.2. Ділення степеневих рядів.....	79
Розділ 6. Теорія лишків.....	84
6.1. Лишок аналітичної функції в ізольованій особливій точці.....	84
6.2. Основна теорема теорії лишків.....	87
6.3. Обчислення визначених інтегралів за допомогою лишків.....	89
6.3.1. Інтеграли вигляду $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$	91
6.3.2. Інтеграли вигляду $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$	94

6.3.3. Інтеграли вигляду $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx$. Лема Жордана.....	99
6.3.4. Інтеграли вигляду $\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} f(x) dx$, $0 < \alpha < 1$	109
6.4. Принцип аргументу та теорема Руше.....	110
6.5. Розвинення мероморфних функцій на найпростіші дроби.....	115
Розділ 7. Перетворення Лапласа.....	121
7.1. Визначення перетворення Лапласа.....	121
7.2. Зображення Лапласа елементарних функцій.....	123
7.3. Властивості зображень.....	124
7.4. Обернене перетворення Лапласа. Формула Мелліна.....	132
7.5. Приклади використання формули Мелліна.....	137
7.6. Розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь.....	141
7.6.1. Звичайні диференціальні рівняння <i>n</i> -го порядку із сталими коефіцієнтами.....	141
7.6.2. Інтеграл Дюамеля та його застосування.....	144
7.6.3. Диференціальні рівняння з коефіцієнтами, лінійними відносно змінної.....	146
7.6.4. Інтегральні рівняння.....	148
Розділ 8. Асимптотичні методи.....	150
8.1. Асимптотичні розклади та їх властивості.....	150
8.2. Метод Лапласа.....	157
8.3. Метод стаціонарної фази.....	166
8.4. Метод перевалу.....	169
8.5. Наближені вирази для обернених перетворень Лапласа.....	180
Відповіді та вказівки до розв'язування задач.....	185
Список літератури.....	190