Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей,
О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова

МАТЕМАТИКА В ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Том 1

Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як підручник для студентів технічних університетів

Київ
2018

УДК [510+512+514](075.8)
М34

Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(*протокол № 7 від 25.06.2018 р.*)

Рецензенти:
В. В. Гавриленко — д-р фіз.-мат. наук, проф., завідувач кафедри інформаційних систем і технологій Національного транспортного університету,
П. В. Задерей — д-р фіз.-мат. наук, проф., завідувач кафедри вищої математики Київського національного університету технології та дизайну,
Б. В. Олійник — д-р фіз.-мат. наук, проф., завідувач кафедри математики Національного університету «Києво-Могилянська академія»

М34 Математика в технічному університеті : Підручник / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова ; за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. — Т. 1. — 496 с.

«Математика в технічному університеті» є навчальним комплексом, що складається з підручника та практикуму. Теоретична і практична частини комплексу відповідають навчальним програмам з вищої математики бакалавріату технічних університетів. Комплекс може бути застосований для забезпечення як денної форми навчання, так і дистанційної чи змішаної.

Для студентів технічних університетів.

УДК [510+512+514](075.8)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

В основу навчального комплексу «Математика в технічному університеті» покладено навчальні матеріали курсу вищої математики, які пройшли багаторічну серйозну апробацію викладачами та студентами Київського політехнічного інституту, а саме: конспекти лекцій, навчальний посібник з лінійної алгебри та аналітичної геометрії, практикуми для проведення практичних занять та організації самостійної роботи студентів, матеріали дистанційних курсів.

Теоретична та практична частини комплексу відповідають навчальним програмам з вищої математики всіх спеціальностей КПІ ім. Ігоря Сікорського денної та заочної форм навчання. Комплекс може бути застосований для підтримки як денної форми навчання, так і дистанційної чи змішаної.

Гармонійне поєднання теоретичної частини (власне підручника) і практичної частини (практикуму — задачника з великою кількістю розв'язаних задач) уже можна вважати традицією написання навчальних видань для майбутніх інженерів та економістів.

Перший том підручника складається з 4 розділів:

— множини й числа;

— лінійна алгебра;

— векторна алгебра;

— аналітична геометрія.

Значна частина розділу «Множини й числа» призначена для заповнення прогалин у шкільних знаннях з математики і може вивчатися студентами самостійно або в межах адаптаційного курсу математики.

Треба зазначити, що навколо порядку вивчення тем, рівня строгості викладання для нематематиків (жодним чином не применшуючи важливість ґрунтовної математичної підготовки для майбутнього інженера, економіста чи соціолога) триває безперервна дискусія.

Певної незалежності порядку вивчення розділів у виданні досягнуто завдяки модульній побудові комплексу (весь матеріал розбито на порівняно невеликі розділи). Для викладу теорії свідомо вибрано *базовий* рівень, «...щоб математичний підручник для інженера не перетворився на маленьку копію університетського курсу». Поглиблювати свої знання з основного курсу математики або вивчати ті спеціальні розділи, які не ввійшли до навчального комплексу можна за виданнями вказаними у списку рекомендованої літератури.

Кожен розділ побудовано за такою схемою:

— вступ (анотація розділу, місце розділу в курсі вищої математики, перелік ключових понять);

— основна частина (виклад теоретичного матеріалу);

— запитання та завдання для самоконтролю;

— формули, твердження, алгоритми та схеми;

— практикуми;

— основні поняття та вміння.

Основу тексту підручника складають опис основних понять, формулювання означень та теорем, обговорення умов теорем, доведення основних теорем, окремі ілюстративні приклади (основну частину прикладів подано у практикумі). У тексті також уміщено велику кількість рисунків, що унаочнюють і ілюструють математичні поняття та твердження.

Нумерація означень, теорем та рисунків є наскрізною в середині розділу. Розділ розбито на теми (обсяг наближено відповідає обсягу однієї лекції).

Кожен розділ містить опорний конспект теоретичного матеріалу, доповнений схемами та алгоритмами розв'язання задач, під назвою *«Формули, твердження, алгоритми»*.

Вивчення теорії з кожної теми підкріплюється опануванням відповідного *практикуму*, яке полягає у вивченні розв'язаних начальних задач і розв'язання певної кількості задач під керівництвом викладача чи самостійно. До всіх задач практикумів подано відповіді. Нумерація задач наскрізна. Обсяг кожного практикуму наближено відповідає обсягу практичного заняття.

Задачі вміщено тільки полегшеного і базових рівнів. Збірники задач та вправ, які містять складніші задачі, подано у *списку рекомендованих джерел*.

Опорні конспекти та практикуми також допоможуть під час розв'язання індивідуальних домашніх завдань, підготовці до контрольних робіт та іспитів, заповненні прогалин у попередніх знаннях.

Перелік *основних понять і вмінь, запитання та завдання для самоконтролю* допоможуть у підготовці до контрольних робіт, колоквіумів та іспиту.

Вивчати теоретичний матеріал на *підвищеному* рівні (зокрема ознайомитись з відсутніми в тексті доведеннями), а також ознайомитись з мотивацією запровадження математичних понять, їх історією та застосуваннями можна за *списком рекомендованих джерел.*

Для зручності користування підручником подано *предметний та іменний покажчики.* Предметний покажчик містить посилання на підпункти теоретичної частини розділу, де запроваджено чи розглянуто поняття та номери задач відповідного практикуму. Іменний покажчик містить посилання на підпункти теоретичної частини, де згадано прізвище видатного математика й коротку біографічну довідку про нього.

У *додатку А* подано латинську та грецьку абетки.

У *додатку Б* подано властивості дій над математичними об'єктами та формули площ деяких фігур та об'ємів деяких тіл.

У *додатку В* подано інформацію про походження деяких термінів та позначень.

У тексті практикумів використано такі позначення:

$[X.Y.Z\,]$ — посилання на опорний конспект («Формули, твердження, алгоритми»), а саме клітинку Z, у якій уміщено теоретичний факт або формулу, таблиці $X.Y.$ з розділу X;

X.Y.Z — посилання на навчальну задачу **X.Y.Z** практикуму **X.Y.**

①,②,③,... — посилання в навчальній задачі на коментар, який уміщено після її розв'язання.

Автори курсу вбачають, що курс вищої математики в технічному університеті та розроблення відповідного навчально-методичного забезпечення доцільно орієнтувати на досягнення трьох основних цілей:

— розвиток у студентів культури мислення (особливо його логічного та алгоритмічного аспектів);

— опанування математики як універсальної мови науки, необхідної для вивчення всіх подальших дисциплін;

— перетворення математики на робочий інструмент аналізу та дослідження математичних моделей.

Потреба ефективного керування самостійною роботою студентів спонукає до подальшого розвитку і ставить задачу створення та доповнення комплексу збірниками індивідуальних домашніх завдань, контрольних робіт, тестів різних форм.

Автори висловлюють вдячність рецензентам, колегам та студентам за корисні зауваження і поради, урахування яких дозволило покращити стиль викладу окремих розділів.

Зауваження й помічені огріхи та неточності можна надсилати на адреси:

alexir1@ukr.net,
victor144169@gmail.com,
a.dyx@ukr.net,
fedorova_lb@yahoo.com.ua

Автори

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$\blacksquare$	— завершення доведення
❍ та ●	— початок і завершення розв'язання прикладу
$\overline{p}$	— заперечення висловлювання p *1.1.2.4*
$\vee$ та $\wedge$	— символи диз'юнкції та кон'юнкції *1.1.2.4*
$\Rightarrow$	— символ імплікації *1.1.2.4*
$\Leftrightarrow$	— символ еквіваленції *1.1.2.4*
$\forall$ та $\exists$	— квантори загальності та існування *1.1.3.3*
$\exists! x$	— існує єдиний x *1.1.3.3*
$a \in X$	— елемент a належить множині X *1.2.1.3*
$a \notin X$	— елемент a не належить множині X *1.2.1.3*
$A = \{a, b, c\}$	— множина має тільки елементи a, b, c *1.2.1.5*
$A = \{x \mid M(x)\}$	— множині A належать елементи x, які мають властивість $M(x)$ *1.2.1.5*
$\varnothing$	— порожня множина *1.2.1.6*
$A \subset B$	— множина A міститься у множині B *1.2.2.3*
U	— універсальна множина *1.2.2.5*
$A \cup B$	— об'єднання множин A та B *1.2.2.6*
$A \cap B$	— перетин множин A та B *1.2.2.6*
$A \setminus B$	— різниця множин A та B *1.2.2.6*
$\overline{A}$	— доповнення множини A *1.2.2.6*
$A \times B$	— декартів добуток множин *1.2.4.2*
$x \mathcal{R} y$	— x зв'язаний з y відношенням $\mathcal{R}$ *1.2.4.4*
$f : X \to Y.$	— відображення f множини X у множину Y *1.2.5.1*
$y = f(x)$	— змінна y є функцією змінної x *1.2.5.1*
$D(f)$	— область означення відображення (функції) f *1.2.5.1*
$E(f)$	— множина значень відображення (функції) f *1.2.5.1*
$A \sim B$	— множини A та B рівнопотужні *1.2.5.5*
$a \equiv b \pmod m$	— числа a та b рівні за модулем m *1.3.3.1*
$a \,\vdots\, b$	— число a ділиться без остачі на число b *1.3.3.2*
НСД(a, b).	— найбільший спільний дільник чисел a та b *1.3.3.5*
НСК(a, b)	— найменше спільне кратне чисел a та b *1.3.3.5*

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел *1.3.6.1*

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел *1.3.6.1*

$\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел *1.3.6.1*

$\mathbb{I}$ — множина ірраціональних чисел *1.3.6.1*

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел *1.3.6.1*

$\left|x\right|$ — модуль числа x *1.4.1.1*

$\left|AB\right|$ — довжина відрізка AB *1.4.2.1*

$d(M_1, M_2)$ — віддаль між точками M_1 та M_2 *1.4.2.6*

$[a;b]$ — відрізок з кінцями в точках a та b *1.4.3.1*

$(a;b)$ — інтервал з кінцями в точках a та b *1.4.3.1*

$[a;b), (a;b]$ — півінтервали з кінцями в точках a та b *1.4.3.1*

$-\infty$ та $+\infty$ — нескінченні точки розширеної числової прямої *1.4.3.2*

∞ — об'єднання нескінчених точок $-\infty$ та $+\infty$ *1.4.3.2*

$\overline{\mathbb{R}}$ — розширена множина дійсних чисел *1.4.3.2*

$(-\infty;b), (-\infty;b]$, $(a;+\infty), [a;+\infty)$, $(-\infty;+\infty)$ — нескінченні проміжки *1.4.3.2*

$U_\varepsilon(x_0)$ — ε-окіл точки x_0 *1.4.4.1*

$U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ — проколений ε-окіл точки x_0 *1.4.4.1*

$\max A$ — найбільший елемент множини A *1.4.5.2*

$\min A$ — найменший елемент множини A *1.4.5.2*

$\sup A$ — точна верхня межа множини A *1.4.5.3*

$\inf A$ — точна нижня межа множини A *1.4.5.3*

$k = \overline{1,n}$ — число k набуває послідовні натуральні значення від 1 до n включно *1.5.1.1*

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ — сума n доданків $a_1, a_2, ..., a_n$ *1.5.1.2*

$n!$ — факторіал числа n *1.5.1.3*

$n!!$ — подвійний факторіал числа n *1.5.1.4*

A_n^k $(\tilde{A}_n^k)$ — кількість розміщень з n елементів по k елементів без повторень (з повтореннями) *1.5.4.3*

P_n $(\tilde{P}_n)$ — кількість перестановок з n елементів без повторень (з повтореннями) *1.5.5.3*

C_n^k $(\tilde{C}_n^k)$	— кількість комбінацій з n елементів по k елементів без повторень (з повтореннями) *1.5.6.3*
$A_{m\times n}$	— матриця розміром $m\times n$ *2.1.1.1*
$\vec{x}$	— матриця-стовпець *2.1.1.1*
$\overleftarrow{x}$	— матриця-рядок *2.1.1.1*
$O_{m\times n}$	— нульова матриця розміром $m\times n$ *2.1.2.1*
$\operatorname{tr} A$	— слід матриці A *2.1.2.4*
E_n	— одинична матриця порядку n *2.1.2.7*
$\overleftarrow{x}\cdot\vec{y}$	— добуток рядка $\overleftarrow{x}$ на стовпець $\vec{y}$ *2.1.4.2*
A^{T}	— транспонована до A матриця *2.1.5.2*
$\det A, \lvert A\rvert$	— визначник матриці A *2.2.1.1*
M_{ij}	— доповняльний мінор елемента a_{ij} *2.2.1.2*
A_{ij}	— алгебричне доповнення елемента a_{ij} *2.2.1.2*
$A\sim B$	— еквівалентні матриці *2.2.4.2*
A^{-1}	— обернена до A матриця *2.3.1.1*
A^*	— приєднана до A матриця *2.3.1.3*
$\operatorname{rang} A$	— ранг матриці A *2.4.2.2*
$\tilde{A}$	— розширена матриця системи *2.5.1.3*
$\vec{0}$	— нульовий стовпець *2.5.6.1*
$\overline{AB}$	— вектор з початком у точці A і кінцем у точці B *3.1.1.2*
$\overline{a}$	— вектор *3.1.1.2*
$\lvert\overline{a}\rvert, \lvert\overline{AB}\rvert$	— довжина вектора *3.1.1.2*
$\overline{0}$	— нульовий вектор *3.1.1.3*
$\overline{a}\parallel\overline{b}$	— колінеарність векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ *3.1.2.1*
$\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$ $(\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b})$	— однаково (протилежно) напрямлені вектори *3.1.2.1*
$(\widehat{\overline{a},\overline{b}})$	— кут між векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$ *3.1.2.3*
$\overline{a}\perp\overline{b}$	— ортогональність векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ *3.1.2.4*
$\overline{a}^0$	— орт вектора $\overline{a}$ *3.1.3.5*
$\mathbb{V}^n$	— n-вимірний векторний простір *3.1.5.4*
$\mathbb{R}^n$	— n-вимірний арифметичний простір *3.1.6.3*
$\overline{i},\overline{j},\overline{k}$	— вектори ортонормованого базису *3.2.1.2*

	координати точки:
$M(x)$	— на прямій *3.2.3.1*,
$M(x;y)$	— на площині *3.1.2.4*,
$M(x,y,z)$	— у просторі *3.1.2.5*
	прямокутна декартова система координат:
Ox	— на прямій *3.2.3.2*
Oxy	—на площині *3.2.3.5*
$Oxyz$	— у просторі *3.2.3.8*
$\operatorname{pr}_L \overline{a}, \operatorname{pr}_{\overline{s}} \overline{a}$	— проекція вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ на вісь L з напрямним вектором $\overline{s}$ *3.2.4.2*
a_x, a_y, a_z	— проекції вектора $\overline{a}$ на осі Ox, Oy, Oz *3.2.5.2*
$(\overline{a}, \overline{b})$	— скалярний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ *3.3.1.1*
$[\overline{a}, \overline{b}]$	— векторний добуток вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ *3.3.1.3*
$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$	— мішаний добуток векторів $\overline{a}, \overline{b}$ та $\overline{c}$ *3.3.1.6*
$\operatorname{Re} z$	— дійсна частина комплексного числа z *3.4.1.1*
$\operatorname{Im} z$	— уявна частина комплексного числа z *3.4.1.1*
$\mathbb{C}$	— множина комплексних чисел *3.4.1.3*
i	— уявна одиниця *3.4.1.5*
$\overline{z}$	— спряжене до комплексного числа z *3.4.2.4*
ρ, φ	— полярні координати точки *3.4.4.2*
$\lvert z \rvert$	— модуль комплексного числа z *3.4.5.1*
$\operatorname{Arg} z$	— аргумент комплексного числа z *3.4.5.1*
$\arg z$	— головне значення аргументу комплексного числа z *3.4*.5.1
$A \parallel B$	— геометричний об’єкт A паралельний об’єкту B *4.1.3.3*
$A \perp B$	— геометричний об’єкт A перпендикулярний до об’єкту B *4.1.3.5*

ВСТУП

Природа — відкрита книга. Але тільки
той зможе прочитати цю книгу, хто вивчить
мову, якою вона написана. А написана вона
мовою математики.
Ґ. Ґалілей

У людей, які засвоїли величні принципи
математики, одним органом почуттів більше,
ніж у простих смертних.
Ч. Дарвін

Математика — це мистецтво називати
різні речі одним і тим самим ім'ям.
А. Пуанкаре

Математичні знання почали з'являтися ще в сиву давнину і до сьогодні проникли тією чи іншою мірою в усі сфери людської діяльності. Математичні методи давно й успішно використовують у точних науках. Останнім часом розширюється застосування цих методів до економіки, медицини, психології, біології, лінгвістики, правознавства тощо. Без математики не були б можливі жодні цифрові технології, які зараз існують і виникатимуть надалі.

Сутність *загального методу математики* полягає в тому, що для конкретного об'єкту, що вивчається, будують або використовують готову математичну модель у вигляді формул, рівнянь, геометричних образів або логічних співвідношень і потім засобами математичного апарату аналізують її.

Адекватна математична модель — визначне наукове досягнення. Вона дозволяє провести детальний аналіз досліджуваного об'єкту і дає надійний прогноз його поведінки в різноманітних умовах. Але за адекватність математичної моделі нерідко доводиться розплачуватись її ускладненням, що викликає труднощі при її використанні. Тут математиці допомагає сучасна обчислювальна техніка.

Одні й ті самі математичні моделі мають найрізноманітніші застосування. Така загальність пояснюється тим, що математика ґрунтується на порівняно невеликій кількості основних, дуже ємких за змістом понять.

Сукупність таких понять та відношень між ними, утворює, фактично, універсальну мову науки.

У процесі свого становлення математика накопичувала розрізнені факти й узагальнювала їх у вигляді все більш повних теорій, рухаючись за індукцією від часткового до загального. Але вже сформовані розділи математики будують за дедукцією, починаючи із загальних понять та положень і строго логічно виводячи з них наслідки.

У технічному університеті в чистому вигляді не застосовний індуктивний шлях основними етапами розвитку математики, хоч і дуже захопливий, він не є реальним за витратами часу. Неприйнятним є також тільки дедуктивний шлях логічних і акуратних доведень, оскільки схильні до інженерної діяльності люди, як правило, абстрактним побудовам віддають перевагу конкретній інформації і витончену строгість доведення сприймають як «торжество науки над здоровим глуздом», якщо взагалі сприймають. Раціональний шлях лежить десь між ними.

Математика (як і будь-яка наука) неперервно розвивається. Вигляд деяких розділів математики змінювався протягом життя одного покоління. Тому вивчити математику раз і назавжди неможливо. Інженер повинен розширювати свої математичні знання все творче життя.

Характерною рисою технічних університетів повинно бути, перш за все, раціональне поєднання університетського рівня навчання з передовими досягненнями традиційної інженерної освіти. Таке поєднання може бути реалізовано лише шляхом пріоритетного підсилення циклу загальнонаукових дисциплін, і в першу чергу математичної підготовки студентів. Якість засвоєння загально-наукових дисциплін визначає глибину й логічну завершеність природничо-наукової освіти спеціалістів, їх науковий світогляд, уміння працювати з літературою, самостійно поповнювати свої знання, а також вести успішний пошук нових і перспективних технічних рішень.

РОЗДІЛ 1. МНОЖИНИ Й ЧИСЛА

Поняття множини та числа є основними для всього курсу математики.

У розділі запроваджено елементи математичної символіки; розглянуто поняття висловлювання, множини й числа; складові будь-якої математичної теорії, класифікацію теорем і способи їх доведення. Подано також деякі відомості з комбінаторики.

Ключові поняття:

— *висловлювання;*

— *теорема;*

— *множина;*

— *дійсне число;*

— *числова пряма;*

— *сполука.*

Опанувавши цей розділ, Ви зможете:

— *записувати символічно означення чи теорему;*

— *визначати структуру теореми;*

— *доводити твердження методом математичної індукції;*

— *виконувати дії над висловлюваннями та множинами;*

— *класифікувати числа;*

— *записувати числа в різних позиційних системах числення;*

— *увідповіднювати дійсні числа й точки числової прямої;*

— *обчислювати кількість розміщень, перестановок і комбінацій;*

— *використовувати формулу біному Ньютона.*

Попередні знання та вміння з розділів:

— *Елементарна алгебра.*

Поданий матеріал використовується в розділах:

— *Функції однієї змінної;*

— *Теорія границь.*

1.1. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Характерними рисами математики є її логічність, послідовність, доказовість і широке використання символіки, яке дозволяє записувати математичні факти стисліше та точніше.

Логіка вивчає закони і способи правильного мислення. Математична логіка — є частиною логіки, яку застосовують до аналізу основ математики та математичних доведень.

1.1.1. Складові математичної теорії

1. Строга побудова будь-якої математичної теорії вимагає означення всіх використаних понять. Кожне означення точно описує, характеризує означуване поняття (A) за допомогою іншого поняття (B), яке вважають відомим, або простішим, ніж A. При цьому поняття B також треба строго означити, і його означення міститиме поняття C (простіше, ніж B) тощо. Отже, кожна теорія потребує набору «найпростіших» понять, які вже не означують. Такі поняття називають *первісними*. Зміст первісних понять розкривають прикладами.

2. Щоб побудувати математичну теорію потрібно:

1) визначити перелік *первісних понять* — «найпростіших» понять, які не означують, а лише описують;

2) описати властивості основних понять за допомогою *аксіом* — тверджень, які вважають правдивими і які не вимагають доведень;

3) сформулювати низку *означень* для понять теорії;

4) сформулювати й довести *твердження*, які ще називають *теоремами*, про властивості означених об'єктів.

1.1.2. Висловлювання

1. Поняття висловлювання є первісним, неозначуваним. Під *висловлюванням* розуміють твердження, про яке можна сказати, істинне воно чи хибне. Одночасно істинним і хибним висловлювання бути не може.

Приміром, висловлювання «Київ — столиця України» — істинне, а висловлювання «$6 < 2$» — хибне.

2. Висловлювання може бути утворено за допомогою слів або яких-небудь знаків (символів). Не будь-яке речення, не будь-який набір символів, навіть, якщо вони мають сенс, є висловлюванням. Приміром, твердження «студент технічного університету», «$x > 0$», не є висловлюванням, оскільки про нього не можна сказати істинне воно чи хибне.

Не є висловлюваннями також означення, заклики чи питання.

3. У математичній логіці абстрагуються від змісту висловлювань і визначають лише істинність чи хибність висловлювання. Висловлювання позначають зазвичай маленькими літерами латинки p, q, r тощо, а істинність та хибність висловлювань позначають відповідно символами 1 та 0, тобто, якщо a — істинне висловлювання, то пишуть $a = 1$.

4. Виходячи із простих висловлювань, за допомогою логічних дій можна одержати нові складені висловлювання.

Над висловлюваннями p та q означують такі дії:

— *заперечення* $\overline{p}$ (читають «не p»);

— *диз'юнкцію* $p \vee q$ (читають «p диз'юнкція q» або «p або q» і розуміють під цим «або p, або q, або p і q»);

— *кон'юнкцію* $p \wedge q$ (читають «p кон'юнкція q» або «p і q»);

— *імплікацію* $p \Rightarrow q$ (читають «з p випливає q», «якщо p, то q»), висловлювання p називають *умовою* імплікації, а q — *висновком*;

— *еквіваленцію* $p \Leftrightarrow q$ (читають «p тоді й лише тоді, коли q»).

Дії над висловлюваннями можна задати такою *таблицею істинності*:

p	q	$\overline{p}$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Дії з висловлюваннями мають ті самі властивості, що й відповідні дії над множинами (п. 1.2.4).

5. Приміром, розгляньмо логічні дії з хибним висловлюванням $p =$ «$2 \times 2 = 5$» та правдивим висловлюванням $q =$«5 — просте число».

$\overline{p} =$«$2 \times 2 \neq 5$»$= 1$; $\overline{q} =$«5 — складене число»$= 0$;

$p \vee q =$ «$2 \times 2 = 5$ або 5 — просте число» $= 0 \vee 1 = 1$;

$p \wedge q =$ «$2 \times 2 = 5$ і 5 — просте число» $= 0 \wedge 1 = 0$;

$p \Rightarrow q =$ «якщо $2 \times 2 = 5$, то 5 — просте число» $= 0 \Rightarrow 1 = 1$;

$q \Rightarrow p =$ «якщо 5 — просте число, то $2 \times 2 = 5$» $= 1 \Rightarrow 0 = 0$;

$p \Leftrightarrow q =$ «$2 \times 2 = 5$ тоді й лише тоді, коли 5 — просте число» $= 0 \Leftrightarrow 1 = 0$.

1.1.3. Твердження, які залежні від змінних

1. У математиці, окрім висловлювань, розглядають твердження, які залежать від однієї чи кількох змінних. Їх називають *предикатами* і позначають $A(x), B(y), C(x, y), \ldots$ При цьому обов'язково зазначають, з якої множини розглядають змінну, від якої залежить предикат. Твердження $A(x), x \in M$, не є висловлюванням, якщо його розглядати на всій множині M. Для певного значення $x = x_0$ вже можна з'ясувати істинність чи хибність твердження $A(x_0)$, а, отже $A(x_0)$ вже є висловлюванням. Предикатами є всі рівняння чи нерівності.

Приміром, предикатом є твердження $A(x) =$ «$x > 0, x \in \mathbb{R}$». Так $A(-1)$ — хибне висловлювання, а $A(1)$ — правдиве.

2. Множину M, на якій задано предикат $A(x)$, можна розбити на дві підмножини. Одна містить ті елементи M, для яких висловлювання $A(x)$ істинне і її називають *областю істинності* предиката $A(x)$.

Два предикати $A(x)$ та $B(x)$, які задано на одній і тій самій множині, називають *рівносильними*, якщо їхні області істинності рівні.

Для предикатів, як і для висловлювань, означують дії заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації та еквіваленції.

3. Квантори. Із предикатами поєднують такі два типи висловлювань:

1) для всіх елементів x із множини M істинний $A(x)$;

2) існує елемент $x = x_0$ із множини M, такий, що $A(x_0)$ істинний.

Квантор загальності $\forall$ відповідає словам «для будь-якого», «для всіх». Вираз «для будь-якого $x \in M$ виконано $A(x)$» скорочено записують як

$$\boxed{\forall x \in M : A(x).}$$

Квантор існування $\exists$ відповідає словам «існує», «знайдеться». Вираз «існує $x \in M$ такий, що виконано $A(x)$» скорочено записують як

$$\boxed{\exists x \in M : A(x).}$$

Вираз «існує *єдиний* $x \in M$, такий, що виконано $A(x)$» записують як

$$\boxed{\exists!\, x \in M : A(x).}$$

4. Якщо символьний запис твердження P містить квантори $\exists, \forall$ та умову $A(x)$, то будуючи символьний запис протилежного твердження $\overline{P}$, квантор $\exists$ замінюють на $\forall$, квантор $\forall$ — на $\exists$, а умову A — на $\overline{A}$. Отже,

$$\overline{\forall x \in M : A(x)} \Leftrightarrow \exists x_0 \in M : \overline{A}(x);$$
$$\overline{\exists x_0 \in M : A(x)} \Leftrightarrow \forall x \in M : \overline{A}(x).$$

1.1.4. Типи теорем

1. Теореми в математиці зазвичай формулюють так:

Для кожного елемента x множини M з $P(x)$ випливає $Q(x)$ або

Для всіх $x \in M$, якщо $P(x)$, то $Q(x)$.

У символьному вигляді теорему можна записати як

$$\boxed{\forall x \in M : P(x) \Rightarrow Q(x),}$$

де $P(x)$ — *умова* теореми, $Q(x)$ — *висновок*.

2. Виділяють чотири типи теорем:

$P(x) \Rightarrow Q(x)$ — *пряма*;

$Q(x) \Rightarrow P(x)$ — *обернена*;

$\overline{P}(x) \Rightarrow \overline{Q}(x)$ — *протилежна*;

$\overline{Q}(x) \Rightarrow \overline{P}(x)$ — *протилежна оберненій*.

Теореми пряма і протилежна оберненій, а також обернена і протилежна — еквівалентні:

$$(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\overline{Q}(x) \Rightarrow \overline{P}(x));$$
$$(Q(x) \Rightarrow P(x)) \Leftrightarrow (\overline{P}(x) \Rightarrow \overline{Q}(x)).$$

Якщо пряма теорема правдива, то обернена може бути як правдивою, так і неправдивою.

3. Приміром, для Піфагорової теореми правдивими є пряма теорема «Якщо трикутник прямокутний, то квадрат більшої сторони дорівнює сумі квадратів двох менших сторін трикутника» й обернена теорема «Якщо квадрат більшої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох менших сторін, то такий трикутник прямокутний».

А от для прямої правдивої теореми: «Якщо кути вертикальні, то вони рівні», обернена теорема: «Якщо кути рівні, то вони вертикальні» не є правдивою.

4. Якщо твердження $P(x) \Rightarrow Q(x)$ правдиве, то кажуть, що $P(x)$ є *достатньою умовою* для $Q(x)$, а $Q(x)$ — *необхідною умовою* для $P(x)$.

Якщо правдиві пряма теорема $P(x) \Rightarrow Q(x)$ й обернена $Q(x) \Rightarrow P(x)$, то умова $P(x)$ є *необхідною та достатньою* для умови $Q(x)$ й умова $Q(x)$ — *необхідною та достатньою* для $P(x)$. Отже, умови $P(x)$ та $Q(x)$ — еквівалентні. Тоді пишуть

$$\boxed{P(x) \Leftrightarrow Q(x),}$$

Твердження такої теореми зазвичай звучить так: «$P(x)$ тоді й лише тоді, коли $Q(x)$». Такі теореми ще називають *критеріями*.

1.1.5. Основні методи доведення

1. Зазвичай математичне твердження (теорему) $P(x) \Rightarrow Q(x)$ доводять, будуючи ланцюжок

$$P(x) \Rightarrow R_1(x) \Rightarrow .... \Rightarrow R_n(x) \Rightarrow Q(x)$$

наслідків, кожен елемент якого або є аксіомою, або є вже доведеним твердженням. Цей тип доведення (*пряме доведення*) ґрунтується на правилі класичного виведення: якщо $P(x)$ і $P(x) \Rightarrow Q(x)$ є правдивими, то $Q(x)$ — правдиве.

2. Але, інколи ефективним є *доведення від супротивного*, яке ґрунтується на властивості

$$(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\overline{Q}(x) \Rightarrow \overline{P}(x)).$$

Схема доведення методом від супротивного.

Крок 1. Припускають правдивість умови $\overline{Q}$.

Крок 2. Міркуваннями приводять до суперечності з умовою P.

Крок 3. Висновують про правдивість теореми.

3. Часто в математичних твердженнях йдеться про нескінченну кількість об'єктів. Існує метод міркувань, що замінює нездійсненний перебір такої нескінченної кількості випадків — *метод математичної індукції*, який ґрунтується на *принципі математичної індукції*:

Твердження $P(n)$, правдивість якого залежить від натурального числа n, уважають правдивим, якщо виконано дві умови:

1) твердження $P(n)$ правдиве для $n = 1$;

2) із припущення, що твердження $P(n)$ правдиве для $n = k$, де k — будь-яке натуральне число, випливає, що воно правдиве і для значення $n = k + 1$.

Схема методу математичної індукції.

Крок 1. Перевіряють правдивість твердження $P(1)$.

Крок 2. Припускаючи правдивість твердження $P(k)$, доводять істинність твердження $P(k + 1)$.

Крок 3. Висновують про правдивість твердження: «якщо твердження правдиве для кожного натурального значення k, то, відповідно до принципу математичної індукції, твердження $P(n)$ є правдивим для будь-яких натуральних значень n».

1.2. МНОЖИНИ

Математичне поняття множини поступово виділилось зі звичних уявлень про сукупність, збірку, клас тощо. Мова теорії множин зараз є майже універсальною математичною мовою.

1.2.1. Множини

1. Поняття множини є одним з основних первісних понять, як точка, пряма чи площина у шкільній геометрії.

> Під *множиною* розуміють сукупність об'єктів довільної природи, об'єднаних за певною ознакою. Об'єкти, які утворюють множину, називають *елементами* множини.

Припускають, що елементи (об'єкти) сукупності можна відрізнити один від одного та від об'єктів, які не входять до цієї сукупності.

Множини зазвичай позначають великими літерами латинки $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$, а їхні елементи — малими літерами $a, b, \ldots, x, y, \ldots$.

2. Приклади множин:

1) множина студентів в аудиторії (елементи — студенти);

2) множина десяткових цифр;

3) множина літер певної абетки тощо.

3. Поняття «належати» також є первісним у математиці. Якщо елемент x *належить* множині A (x *є елементом* множини A), то пишуть $x \in A$. Якщо елемент x *не належить* множині A (x *не є елементом* множини A), то пишуть $x \notin A$.

Приміром, якщо $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, то

$$1 \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}.$$

Уважають, що множина не може бути своїм елементом, оскільки це може призводити до парадоксів.

4. Множину називають *скінченною*, якщо вона має скінченну кількість елементів. Множину, яка не є скінченною, називають *нескінченною*.

Приміром, множина студентів в аудиторії скінченна, а множина натуральних чисел — нескінченна.

5. Якщо лише елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n$ належать множині A, то це можна записати як

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Такий самий запис використовують і тоді, коли множина елементів нескінченна, приміром:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

Якщо можна задати властивість $M(x)$, яка характеризує всі елементи множини A (*характеристичну властивість* множини), використовують запис

$$A = \{x \mid M(x)\},$$

що читають як «A є множиною елементів x, таких, що $M(x)$.»

6. Множину, що не має жодного елементу, називають *порожньою* множиною і позначають $\varnothing$. Порожню множину можна задати будь-якою неможливою умовою. Приміром,

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}.$$

1.2.2. Дії над множинами

1. Означення 1.1 (рівності множин).

Множини A та B називають *рівними*, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, і позначають

$$A = B.$$

Якщо $A = B$, то кожний елемент множини A належить множині B, і навпаки, кожний елемент множини B належить множині A.

У множині однакові елементи не розрізняють і порядок запису елементів множини не є істотним. Тобто,

$$\{a, a, b\} = \{a, b\} = \{b, a\}.$$

2. Означення 1.2 (підмножини).

Множину A називають *підмножиною* множини B (множина A *міститься* у множині B), якщо кожний елемент множини A є елементом множини B, і пишуть

$$A \subset B.$$

3. Поняття підмножини має властивості:

1) порожня множина є підмножиною будь-якої множини, $\varnothing \subset A$;

2) кожна множина є підмножиною самої себе, $A \subset A$;

3) якщо $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$;

4) $A = B$ тоді й лише тоді, коли $A \subset B$ і $B \subset A$;

5) множина з n елементів має 2^n підмножин.

4. Приміром, підмножинами множини $X = \{a,b\}$ є:

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}.$$

Поняття елемента множини не є тотожним поняттю одноелементної підмножини. Так $a \in X$ та $\{a\} \subset X$; але $a \not\subset X$ та $\{a\} \notin X$.

5. У межах певного розділу математики (а інколи, у межах певної задачі) розглядають лише ті множини, що є підмножинами однієї й тієї самої множини, яку називають *універсальною* й позначають U.

Універсальна множина не може бути «як завгодно широкою» (приміром, «множиною всіх множин»), оскільки розгляд таких множин породжує парадокси — логічні суперечності.

Приміром, у планіметрії за універсальну множину беруть множину всіх точок площини. Тоді різноманітні фігури на площині є підмножинами такої універсальної множини.

6. Нехай множини A та B є підмножинами універсальної множини U.

Означення 1.3 (об'єднання[*] множин).

Об'єднанням множин A та B називають множину всіх елементів, які належать хоча б одній з цих множин, і позначають

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Означення 1.4 (перетину[**] множин).

Перетином множин A та B називають множину всіх елементів, які належать одночасно обом множинам, і позначають

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Означення 1.5 (різниці множин).

Різницею множин A та B називають множину всіх елементів множини A, які не належать множині B, і позначають

$$A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Означення 1.6 (доповнення множини).

Доповненням множини A (до множини U) називають різницю множин U та A і позначають

$$\bar{A} = U \setminus A.$$

7. Множини і дії з множинами можна зображувати за допомогою *діаграм Ойлера — Вена*: множини зазвичай зображують кругами, а універсальну множину зображують прямокутником (рис. 1.1).

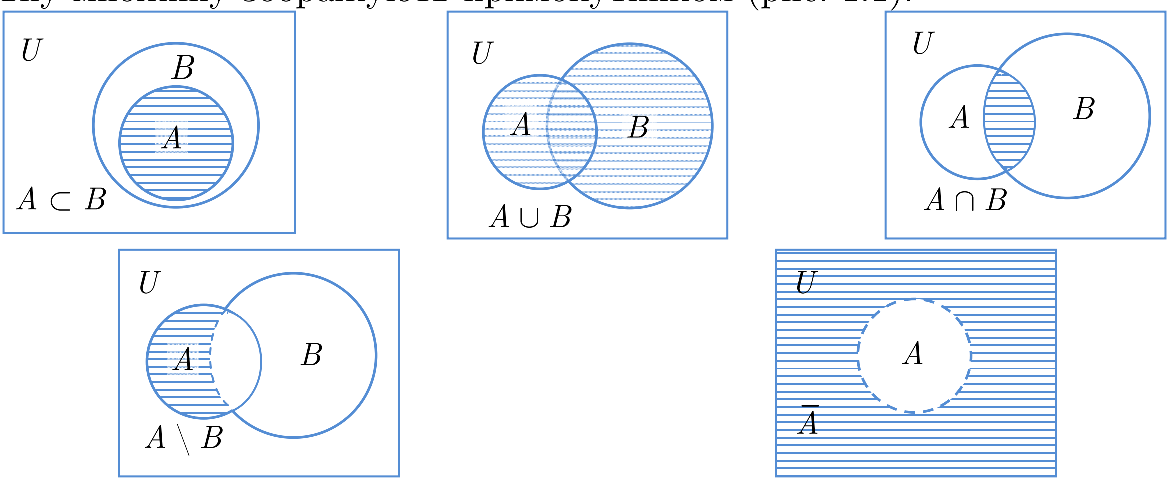


Рис. 1.1. Діаграми Ойлера — Вена для дій над множинами

[*] Використовують також термін «сума множин».

[**] Використовують також терміни «переріз множин» та «добуток множин».

8. Приміром, якщо $A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,4,5\}$, то

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}, A \cap B = \{2,3\},$$

$$A \setminus B = \{1\}, B \setminus A = \{4,5\}.$$

1.2.3. Властивості дій над множинами

Для будь-яких множин A, B, C, що є підмножинами універсальної множини U правдиві властивості:

1) $A \cup B = B \cup A$ (*комутативність об'єднання*);
2) $A \cap B = B \cap A$ (*комутативність перетину*);
3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (*асоціативність об'єднання*);
4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*асоціативність перетину*);
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*дистрибутивність об'єднання щодо перетину*);
6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (*дистрибутивність перетину щодо об'єднання*);
7) $A \cup A = A, A \cap A = A$ (*закони ідемпотентності*);
8) $A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing, A \setminus \varnothing = A, \overline{\varnothing} = U$ (*закони* $\varnothing$);
9) $A \cup U = U, A \cap U = A, U \setminus A = \overline{A}, \overline{U} = \varnothing$ (*закони* U);
10) $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$ (*закони поглинання*);
11) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (*закони де Моргана*);
12) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$ (*закон склеювання*);
13) $\overline{\overline{A}} = A$ (*закон подвійного поглинання*);
14) $A \cup \overline{A} = U$;
15) $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Такі самі властивості мають дії над висловлюванням, якщо замінити у співвідношеннях: U на 1, $\varnothing$ на 0, об'єднання на диз'юнкцію, перетин на кон'юнкцію, доповнення на заперечення.

1.2.4. Декартів добуток множин. Відношення

1. Пару елементів

$$(x; y), x \in A, y \in B,$$

називають *упорядкованою*, якщо вказано порядок запису елементів x та y. При цьому вважають, що $(x_1; y_1) = (x_2; y_2)$ тоді й лише тоді, коли $x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

Елементи x та y упорядкованої пари $(x;y)$ називають *координатами* цієї пари (x — перша координата, y — друга). Упорядковані пари записують за допомогою круглих дужок, на відміну від невпорядкованих пар, які записують за допомогою фігурних дужок.

2. Нехай A та B — довільні множини.

Означення 1.7 (декартового добутку множин).

Декартовим (*прямим*) *добутком* множин A та B називають множину, яка складається з усіляких упорядкованих пар x, y, де $x \in A, y \in B$, і позначають

$$A \times B = \{(x;y) \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

Якщо $A = B$, то $A \times A$ називають *декартовим квадратом* і позначають $A^2 = A \times A$.

3. Приміром, якщо $A = \{1,2,3\}, B = \{3,4\}$, то

$$A \times B = \{(1;3),(1;4),(2;3),(2;4),(3;3),(3;4)\},$$
$$B \times A = \{(3;1),(3;2),(3;3),(4;1),(4;2),(4;3)\}.$$

Порівнюючи $A \times B$ та $B \times A$, бачимо, що загалом $A \times B \neq B \times A$.

4. *Бінарним відношенням* $\mathcal{R}$ між множинами X та Y називають будь-яку множину впорядкованих пар $(x;y), x \in X, y \in Y$.

Тобто $\mathcal{R}$ є підмножиною декартового добутку $X \times Y$ і будь-якому $x \in X$ відповідає **принаймні один** $y \in Y$.

Множину X перших елементів упорядкованих пар, що утворюють $\mathcal{R}$, називають *областю означення* бінарного відношення $\mathcal{R}$, а множину Y других елементів пар — *областю значень* бінарного відношення $\mathcal{R}$.

Замість того, щоб писати $(x;y) \in \mathcal{R}$ часто пишуть $x\mathcal{R}y$ і кажуть, що x *зв'язаний з* y *відношенням* $\mathcal{R}$.

Якщо $\mathcal{R} \subset X^2$, то $\mathcal{R}$ називають *бінарним відношенням* на множині X.

Бінарне відношення називають *функціональним*, якщо воно не містить різних упорядкованих пар з однаковими першими координатами. Тобто кожному $x \in X$ відповідає **єдиний** $y \in Y$.

5. Приміром, оскільки

$$\{(0;1),(0;2),(1;2)\} \subset \{0,1,2\} \times \{1,2\},$$

то $\{(0;1),(0;2),(1;2)\}$ є бінарним відношенням між $X = \{0,1,2\}$ та $Y = \{1,2\}$. Це бінарне відношення не є функціональним, оскільки містить різні упорядковані пари $(0;1)$ та $(0;2)$ з однаковими першими компонентами.

1.2.5. Відображення множин

Поняття відображення можна означити за допомогою понять множини, декартового добутку, підмножини. Однак, у нашому курсі його зручно вважати первісним.

1. Якщо задано множини X, Y і правило f, за яким кожному елементу $x \in X$ відповідає **єдиний** елемент $y \in Y$ (рис. 1.2), то кажуть, що задано *відображення* f із множини X *у* множину Y (*функцію*, означену на множині X, із значеннями у множині Y) і позначають

$$y = f(x), x \in X \text{ або } f : X \to Y.$$

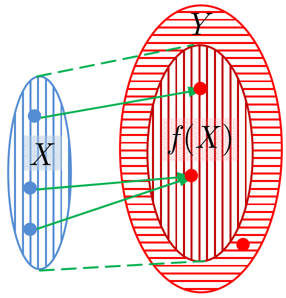


Рис. 1.2. Відображення $f : X \to Y$

Елемент $y \in Y$, у який відображено елемент $x \in X$, називають *образом елемента* x при відображенні f (*значенням функції* f, що відповідає значенню *аргументу* x). При цьому x називають *прообразом елемента* $f(x)$. У записі $y = f(x)$, y ще називають *залежною*, а x — *незалежною змінною*.

Множину X називають *областю означення* відображення f і позначають $D(f)$. Множину образів усіх елементів $x \in X$ при відображенні f називають *образом* множини X при цьому відображенні (*множиною значень* функції) і позначають

$$E(f) = \{f(x) \in Y \mid x \in X\} = f(X) \subset Y.$$

2. Приміром, функція $x \to x^2$ реалізує відображення з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, але $X = \mathbb{R}, Y = [0;+\infty) \subset \mathbb{R}$. Так само для функції $\log_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, область означення $X = (0;+\infty)$, а множина значень $Y = \mathbb{R}$.

3. Функцію $f : X \to \mathbb{R}$ називають *дійсною* функцією, функцію $f : \mathbb{R} \to Y$ називають функцією *дійсного* аргументу (дійсної змінної), а функцію $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ називають *дійсною* функцією *дійсного* аргументу (*дійсною* функцією *дійсної* змінної).

Функцію $f : \mathbb{N} \to Y$ називають *послідовністю* елементів множини Y, а функцію $f : \mathbb{N} \to Y \subset \mathbb{R}$ — *числовою послідовністю*

$$a_n = f(n), n \in \mathbb{N}.$$

Якщо множина значень функції містить лише одне число C, то таку функцію називають *сталою*.

4. Якщо ж $f(X) = Y$, то кажуть, що функція f *відображує* множину X *на* множину Y.

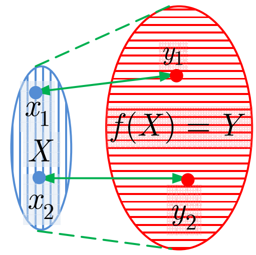


Рис. 1.3. Взаємно однозначне відображення

Відображення $f : X \to Y$ називають *взаємно однозначним*, якщо кожний елемент $y \in Y$ є образом лише одного елементу $x \in X$ (рис. 1.3).

Приміром, функція $x \mapsto ax + b, a \neq 0$, взаємно однозначно відображує $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$.

5. Дві множини A та B називають *рівнопотужними* (*еквівалентними*), якщо існує хоча б одне взаємно однозначне відображення однієї множини на іншу і позначають $A \sim B$.

Зрозуміло, що якщо $A = B$, то $A \sim B$. Однак обернене твердження неправильне: рівнопотужні множини можуть і не бути рівними. Приміром, якщо $A = \{1,2,3\}$ та $B = \{1,4,9\}$, то $A \sim B$, але $A \neq B$.

Існує два способи встановлення рівнопотужності двох скінченних множин:

1) установити безпосередньо взаємно однозначну відповідність між їхніми елементами;

2) перерахувати елементи множин і порівняти кількість елементів у кожній з них.

Для нескінченних множин другий спосіб неможливий.

6. Приміром, нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, A — множина парних натуральних чисел. Установімо між ними взаємно однозначну відповідність за допомогою співвідношення $n \leftrightarrow 2n$, тобто

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & \ldots, & n, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2, & 4, & \ldots, & 2n, & \ldots \end{array}$$

Отже, множина натуральних чисел еквівалентна власній підмножині парних натуральних чисел.

7. Будь-яку множину, еквівалентну множині натуральних чисел, називають *зліченною*. Якщо множина злічена, то її елементи можна занумерувати.

8. **Рівнопотужність множин** має для будь-яких множин A, B та C такі властивості:

1) $A \sim A$ (*рефлексивність*);

2) якщо $A \sim B$, то $B \sim A$ (*симетричність*);

3) якщо $A \sim B, B \sim C$, то $A \sim C$ (*транзитивність*).

1.3. ЧИСЛА

Вивчаючи числа, математика залишає осторонь питання про те, які величини описують ці числа. Істотним для математики є те, що між числами існують певні відношення та над ними можна виконувати певні дії.

Систематизуймо основні відомості про числа.

1.3.1. Дії над числами

1. Основними математичними діями над числами є додавання, множення (прямі дії), віднімання, ділення (обернені дії) і порівняння двох чисел. Обернені дії віднімання та ділення можна звести до прямих дій додавання та множення відповідно.

Крім того, можна розглянути дію піднесення числа до натурального степеня і обернену до неї дію — добування із числа кореня натурального степеня.

Уважаємо, що як виконувати ці дії над числами відомо.

2. Нагадаємо лише назви результатів і компонентів дій:

1) результат додавання чисел a та b називають їхньою *сумою* $a + b$, а самі числа a, b — *доданками*,

$$\text{доданок} + \text{доданок} = \text{сума};$$

2) результат віднімання від числа a числа b називають *різницею* $a - b$; число a називають *зменшуваним*, число b — *від'ємником*,

$$\text{зменшуване} - \text{від'ємник} = \text{різниця};$$

3) результат множення двох чисел a та b називають їхнім *добутком* $a \cdot b$, а самі числа a, b — *множниками,*

$$\text{множник} \cdot \text{множник} = \text{добуток};$$

4) результат від ділення числа a на число b називають *часткою* $a : b$; число a називають *діленим*, а число b — *дільником,*

$$\text{ділене} : \text{дільник} = \text{частка};$$

5) результат піднесення числа a до натурального степеня n називають n-*м степенем* числа a і позначають a^n; число a називають *основою* степеня, а число n — *показником* степеня,

$$\text{основа}^{\text{показник}} = \text{степінь};$$

6) результат добування кореня n-го степеня з числа a називають *коренем* n*-го степеня* і позначають $\sqrt[n]{a}$; число a називають *підкореневим* виразом, а число n — *показником* кореня,

$$\sqrt[\text{показник}]{\text{підкореневий вираз}} = \text{корінь}.$$

3. *Середнім арифметичним* чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називають число

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Середнім геометричним невід'ємних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називають число

$$G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0.$$

Середнім гармонічним додатних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називають число

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}, \quad x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0.$$

Середнім квадратичним чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називають число

$$S_n = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^n}{n}}.$$

Для додатним чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ виконано нерівність

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq S_n,$$

причому рівність досягається лише для $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

4. *Арифметичною прогресією* називають числову послідовність

$$a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_2 + d, \ldots, a_{n+1} = a_n + d, \ldots$$

кожен член якої, починаючи із другого, відрізняється від попереднього на сталий доданок d, який називають *різницею прогресії.*

Кожен член арифметичної прогресії визначають за формулою

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

В арифметичній прогресії кожний її член, крім першого, є середнім арифметичним двох сусідніх членів:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \; n = 2, 3, \ldots.$$

Суму перших n членів арифметичної прогресії обчислюють за формулою

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.}$$

5. *Геометричною прогресією* називають числову послідовність

$$b_1, b_2 = b_1 q, b_3 = b_2 q, \ldots, b_{n+1} = b_n q, \ldots$$

кожен член якої, починаючи із другого, дорівнює попередньому, помноженому на сталий множник $q \neq 0$, який називають *знаменником прогресії*.

Кожен член геометричної прогресії визначають за формулою

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

У геометричній прогресії кожний її член, крім першого, є середнім геометричним двох сусідніх членів:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}, \; n = 2, 3, \ldots.$$

Суму перших n членів геометричної прогресії обчислюють за формулою

$$\boxed{S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \; q \neq 1.}$$

Якщо $q = 1$, то $S_n = nb_1$.

Суму нескінченної спадної геометричної прогресії обчислюють за формулою

$$\boxed{S = \frac{b_1}{1-q}, \; |q| < 1.}$$

1.3.2. Позиційна система числення

1. Спосіб запису (позначення) чисел називають *системою числення* або *нумерацією*.

Символи, за допомогою яких записують числа називають *цифрами*, а їх сукупність — *абеткою* системи числення. Кількість символів абетки називають її *розмірністю*.

Систему числення називають *позиційною*, якщо кількісний еквівалент цифри залежить від її положення в запису числа.

Кожна цифра зліва направо вказує скільки одиниць відповідного розряду міститься в числі:

$$x = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_n b_n + a_{n-1} b_{n-1} + \dots + a_1 b_1 + a_0 b_0,$$

де $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ є цифрами числа, $b_n, b_{n-1}, \dots, b_0$ — вагами розряду.

Основною перевагою будь-якої позиційної системи є можливість запису довільного числа за допомогою обмеженої кількості символів.

2. Послідовність чисел $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, кожне з яких задає *вагу* відповідного розряду, називають *базисом* позиційної системи числення.

Позиційну систему називають *традиційною*, якщо її базис утворюють члени геометричної прогресії:

$$1, p, p^2, \dots, p^n, \dots$$

Знаменник p геометричної прогресії, члени якої утворюють базис традиційної системи числення, називають *основою* цієї системи числення. Традиційні системи числення з основою p називають ще *p-ковими*. У p-ковій системі розмірність абетки дорівнює основі системи числення.

Основою p-кової системи числення може бути будь-яке натуральне число, більше за 1.

3. Абетку двійкової системи утворюють лише дві цифри 0 та 1, а абетку десяткової системи числення складають цифри

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Якщо $p > 10$, то для цифр після 9 використовують літери латинки.

4. Нехай p — довільне натуральне число, більше за 1.

Теорема 1.1 (про запис числа у позиційній системі).

Існує єдине зображення будь-якого натурального числа x у вигляді

$$x = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = \overline{(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)}_p,$$

де $0 \le a_i < p, 0 \le i \le n, a_n \neq 0$.

Коли використовують розгорнуту форму запису числа в p-ковій системі числення, то основу p і його степені зазвичай записують у десятковій системі, а цифри — у p-ковій. Коли використовують згорнуту форму запису числа, то основу p, записану в десятковій системі, приписують до числа як нижній індекс. Винятком є лише десяткова система, для запису чисел у якій індекс зазвичай не пишуть.

Приміром,

$$p = 1 \cdot p + 0 \cdot 1 = 10_p,$$
$$101_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 5.$$

5. Будь-яке натуральне число n у десятковій системі можна записати, розклавши його за степенями основи системи, як

$$n = \overline{\alpha_k \alpha_{k-1} \alpha_{k-2} ... \alpha_2 \alpha_1 \alpha_0} =$$
$$= \alpha_k \cdot 10^k + \alpha_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \alpha_{k-2} \cdot 10^{k-2} + ... + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10^1 + \alpha_0.$$

(риску вгорі ставлять, щоб не сплутати число з добутком його цифр)

Цифра, яка стоїть на i-му місці, рахуючи справа, показує, скільки задане число містить одиниць розряду 10^{i-1}.

У записі числа крайня ліва цифра не може бути нулем. Так число 13 записують як 13, а не 013 чи 0013.

Приміром,

$$17 = 1 \cdot 10 + 7;$$
$$2506 = 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 6.$$

1.3.3. Подільність цілих чисел

1. У множині цілих чисел не завжди можна поділити одне число на інше.

Розділити ціле число a на ціле число b *з остачею* означає знайти такі цілі числа q та r, що

$$a = bq + r,$$

де $0 \le r < |b|$. Число q називають *неповною часткою*, а число r — *остачею*.

Якщо два цілих числа a та b під час ділення на ціле число m мають однакові остачі, то їх називають *рівними за модулем* m і пишуть

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

2. Якщо для двох цілих чисел a та b існує ціле число q, таке, що

$$a = bq,$$

то кажуть, що число a ділиться на число b (без остачі) і позначають $a \vdots b$. Число a називають *кратним* числа b, а число b — *дільником* числа a.

Приміром, $4 \vdots 2; 6 \vdots 3$.

Цілі числа, які діляться на 2, називають *парними*, решту цілих чисел називають *непарними*.

3. Натуральне число, відмінне від одиниці називають *простим*, якщо воно ділиться лише на себе і на одиницю.

Приміром, числа

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots.$$

є простими.

Множина простих чисел нескінченна.

Будь-яке натуральне число, яке відмінне від одиниці і не є простим, називають *складеним*. Число 1 не є ані простим, ані складеним.

Приміром, числа

$$4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, \ldots$$

є складеними.

4. Зображення натурального числа n добутком двох натуральних чисел $p \cdot q$ називають *розкладом на множники*.

Приміром, $12 = 2 \cdot 6$.

Якщо число n просте, то його розкладають як n (а не $1 \cdot n$).

Якщо число n складене, тобто

$$n = p \cdot q,$$

де $p \neq 1, q \neq 1$, то можливі випадки:

1) якщо натуральні числа p та q прості, то число n уже зображено добутком двох простих чисел p та q;

2) якщо хоча б одне з чисел p, q складене, то його (чи обидва складених числа p та q) можна розкласти на множники.

Розгляньмо натуральне число $n > 1$.

Теорема 1.2 (основна теорема арифметики).

Будь-яке натуральне число, більше за одиницю, можна єдиним чином (з точністю до порядку множників) розкласти на прості множники:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

де $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — прості числа, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — натуральні числа.

5. *Найбільшим спільним дільником* (НСД) двох натуральних чисел a та b називають найбільший із спільних дільників цих чисел і позначають НСД(a,b).

Взаємно простими числами називають числа, що не мають спільних дільників, окрім одиниці. Якщо a та b — взаємно прості, то НСД$(a,b)=1$.

Приміром, оскільки НСД$(4,9)=1$, то числа 4 та 9 взаємно прості.

Найменшим спільним кратним чисел a та b називають найменше з їх спільних кратних і позначають НСК(a,b).

Найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне двох чисел справджують співвідношення:

$$\text{НСД}(a,b)\cdot\text{НСК}(a,b)=ab.$$

1.3.4. Дроби

1. Частку від ділення цілого числа m на ціле число $n\neq 0$ можна записати у вигляді символу $\dfrac{m}{n}$, який називають *звичайним дробом* (*дробом*).

Число m називають *чисельником* дробу, а n — його *знаменником*.

Розгляньмо дріб з додатними чисельником і знаменником.

Якщо чисельник менший від знаменника, то дріб називають *правильним*. Якщо ж чисельник дорівнює знаменнику або більше за нього, то дріб називають *неправильним*.

Приміром, $\dfrac{4}{7}$ — правильний дріб; $\dfrac{4}{4},\dfrac{5}{3}$ — неправильні дроби.

Якщо числа p та q є взаємно простими, то дріб $\dfrac{p}{q}$ називають *нескоротним*.

Соту частку числа a називають *відсотком* (*процентом*) і позначають $\dfrac{a}{100}\%$.

Уважаємо, що умови рівності, порівняння й дії з дробами є відомими.

2. Частку $\dfrac{x}{y}$ називають *відношенням* числа x до числа y. Число x називають *попереднім* членом, y — *наступним* членом відношення.

Рівність двох відношень

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}.$$

називають *пропорцією*. Числа a та y називають *крайніми* членами, а числа x та b — *середніми* членами пропорції.

3. Дріб вигляду

$$\frac{N}{10^n}$$

де N — ціле, n — натуральне число, називають *десятковим* дробом.

Будь-який додатний десятковий дріб можна записати у вигляді

$$a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_n}{10^n},$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ — цифри.

Десятковий дріб коротше ще записують як

$$a_m a_{m-1} \ldots a_0, b_1 b_2 \ldots b_n \text{ або } A, b_1 b_2 \ldots b_n,$$

де $A = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot 10$ — ціле число, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — десяткові знаки.

Нескінченним десятковим дробом називають символ

$$A, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots = A + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_n}{10^n} + \ldots.$$

Нескінченний десятковий дріб вигляду

$$A, \underbrace{b_1 b_2 \ldots b_n}\, \underbrace{b_1 b_2 \ldots b_n} \ldots = A, (b_1 b_2 \ldots b_n),$$

або вигляду

$$A, b_1 b_2 \ldots b_k\, \underbrace{b_{k+1} \ldots b_{k+n}}\, \underbrace{b_{k+1} \ldots b_{k+n}} \ldots = A, b_1 b_2 \ldots b_k (b_{k+1} \ldots b_{k+n}),$$

де одна або декілька цифр повторюється в незмінному порядку, називають *періодичним*. Сукупність цифр, яка повторюється, називають *періодом* такого дробу.

Приміром,

$$0,3333\ldots. = 0,(3); \quad 0,21454545\ldots = 0,21(45).$$

1.3.5. Ірраціональні числа

1. Оскільки будь-яке раціональне число можна записати у вигляді скінченного десяткового дробу або нескінченного періодичного десяткового дробу, то можна вважати, що нескінченні неперіодичні десяткові дроби виражають числа, які не є раціональними. Такі числа називають *ірраціональними*.

Сума, різниця, добуток і частка раціонального й ірраціонального числа є числом ірраціональним.

2. Доведімо, що число $\sqrt{2}$ є ірраціональним. Припустімо, що існує такий нескоротний дріб, що $\dfrac{p}{q} = \sqrt{2}$. Але тоді і дріб $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2$ також нескоротний, і він не може дорівнювати 2. Одержана суперечність доводить твердження про ірраціональність числа $\sqrt{2}$.

3. Для числа $\sqrt{2}$ правдива нерівність

$$1 < \sqrt{2} < 2.$$

Число 1 називають *наближеним значенням* $\sqrt{2}$ *з недостачею* з точністю до 1, а число 2 — *наближеним значенням* $\sqrt{2}$ *з надлишком* з тією ж точністю.

Ділячи числовий проміжок від 1 до 2 на 10 рівних частин, дістаємо числа $1,1; 1,2; 1,3; \ldots; 1,9$. Підносячи ці числа до квадрату, знаходимо:

$$1,4^2 = 1,96 < 2, \quad 1,5^2 = 2,25 > 2.$$

Отже, правдива нерівність

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5.$$

Раціональні числа $1,4$ та $1,5$ — наближені значення $\sqrt{2}$ з точністю до $0,1$.

Ділячи числовий проміжок від $1,4$ до $1,5$ на 10 рівних частин, дістанемо точки, які відповідають числам $1,41; 1,42; 1,43; \ldots; 1,49$. Підносячи ці числа до квадрату, дістаємо:

$$1,41^2 = 1,9881 < 2, \quad 1,42^2 = 2,0164 > 2.$$

Отже,

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42.$$

Раціональні числа $1,41$ та $1,42$ є наближеними значеннями $\sqrt{2}$ з точністю до $0,01$.

Продовжуючи процес поділу числових проміжків на 10 рівних частин, одержуємо

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415;$$
$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Розглядаючи одержані подвійні нерівності, знаходимо

$$\sqrt{2} = 1,4142\dots.$$

Нескінчений процес приводить до неперіодичного десяткового дробу, оскільки число $\sqrt{2}$ не є раціональним.

4. Хоча число $\sqrt{2}$ є ірраціональним, воно може бути коренем деякого алгебричного рівняння з раціональними коефіцієнтами, приміром $x^2 = 2$.

Число, яке не може бути коренем жодного алгебричного рівняння з раціональними коефіцієнтами називають *трансцендентним*.

Число $\pi = 3,1415\dots$, яке виражає відношення довжини будь-якого кола до діаметра кола, є ірраціональним і трансцендентним.

1.3.6. Числові множини

1. Уважаємо поняття дійсного числа первісним. Будь-який десятковий дріб є записом *дійсного* числа. Отже, дійсне число може бути або раціональним, або ірраціональним.

Множину *дійсних* чисел позначають як

$$\mathbb{R} = \{x \mid x = a,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\},$$

де a — ціле число, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$— десяткові цифри.

Розгляньмо позначення основних *числових* множин, що є підмножинами множини дійсних чисел.

Множину *натуральних* чисел позначають як

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Множину *цілих* чисел позначають як

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Множину *раціональних* чисел позначають як

$$\mathbb{Q} = \left\{ x = \frac{m}{n} \middle| m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Множину *ірраціональних* чисел позначають

$$\mathbb{I} = \left\{ x \neq \frac{m}{n} \middle| m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Правдиві співвідношення між числовими множинами:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \mathbb{I} \subset \mathbb{R}, \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}.$$

2. Зведімо можливість виконання дій над числами для різних множин та деякі інші властивості до табл. 1.1 (знак «+» означає, що відповідна дія завжди виконувана в розглядуваній множині).

Неможливість добування кореня парного степеня з будь-якого дійсного числа спонукає до побудови розширення множини дійсних чисел. Такою множиною є множина комплексних чисел $\mathbb{C}$, якій присвячено тему 3.4.

Таблиця 1.1

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
Додавання	+	+	+	+
Множення	+	+	+	+
Віднімання		+	+	+
Ділення (не на нуль)			+	+
Добування кореня непарного степеня				+
Добування кореня парного степеня				
Приклад числа	1	-1	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$
Приклад нерозв'язного рівняння	$x+2=1$	$2x=1$	$x^2=2$	$x^2=-1$

3. Числову множину чисел називають *упорядкованою*, якщо для будь-яких її двох елементів a та b можливе одне й лише одне співвідношення:

$$a < b, a = b, a > b.$$

Усі розглянуті числові множини є впорядкованими. Якщо число більше за нуль, то його називають *додатним*, якщо менше від нуля — *від'ємним*.

4. Множина раціональних чисел (множина ірраціональних чисел) є *щільною* у множині дійсних чисел. Це означає, що між двома різними раціональними (ірраціональними) числами знайдеться хоча б одне раціональне (ірраціональне).

5. Множини натуральних, цілих і раціональних чисел є зліченними, а множина дійсних чисел є незліченною.

1.3.7. Властивості дій над дійсними числами

Розгляньмо довільні дійсні числа x, y, z.

1. Додавання чисел має властивості:

1) *комутативності*

$$x + y = y + x;$$

2) *асоціативності*

$$x + (y + z) = (x + y) + z;$$

3) *існування нейтрального елемента* (*нуля*)

$$x + 0 = x;$$

4) *існування симетричного елемента*

$$x + (-x) = 0,$$

де число $(-x)$ називають *протилежним до* x.

2. Множення дійсних чисел має властивості:

1) *комутативності*

$$x \cdot y = y \cdot x;$$

2) *асоціативності*

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$

3) *дистрибутивності множення щодо додавання*

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z;$$

4) *існування нейтрального елемента* (*одиниці*)

$$1 \cdot x = x;$$

5) *існування симетричного елемента*

$$x \cdot x^{-1} = 1 \ (x \neq 0),$$

де число $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ називають *оберненим до* x.

3. Порівняння дійсних чисел має властивості:

1) *транзитивності*

$$\text{якщо } x < y \text{ і } y < z, \text{ то } x < z;$$

2) *монотонності суми*

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z;$$

3) *монотонності добутку*

$$x > y \Rightarrow xz > yz \ \ (z > 0).$$

1.4. ЧИСЛОВА ВІСЬ

Числова вісь є зручним способом унаочнити дійсні числа та числові множини. Важливою і корисною є також можливість ототожнювати дійсні числа з точками числової прямої.

1.4.1. Модуль дійсного числа

1. *Модулем* (*абсолютною величиною*) дійсного числа x називають число

$$\left|x\right| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

2. Модуль дійсного числа має властивості:

1) якщо $x = y$, то $\left|x\right| = \left|y\right|$;

2) $\left|x\right| \geq 0$;

3) $-\left|x\right| \leq x \leq \left|x\right|$;

4) $\left|x\right| = \left|-x\right|$;

5) $\left|x+y\right| \leq \left|x\right| + \left|y\right|$ (*нерівність трикутника*);

6) $\left|x-y\right| \geq \left|\left|x\right| - \left|y\right|\right|$;

7) $\left|xy\right| = \left|x\right|\left|y\right|$;

8) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{\left|x\right|}{\left|y\right|}, y \neq 0.$

3. Із властивостей модуля випливає, що для $a \geq 0$

1) $\left|x\right| \leq a$ тоді й лише тоді, коли $-a \leq x \leq a$;

2) $\left|x\right| \geq a$ тоді й лише тоді, коли або $x \leq -a$, або $x \geq a$.

1.4.2. Зображення дійсних чисел

1. Уважаємо, що поняття довжини відрізка є інтуїтивно зрозумілим, а процес вимірювання довжини за допомогою еталону відомим.

Вимірювання відрізків ґрунтується на *аксіомі Архімеда*:

якщо задано два будь-які відрізки AB та CD $\left(\left|AB\right| > \left|CD\right|\right)$, то можна знайти таке натуральне число n, що виконуватимуться нерівності

$$(n-1)\left|CD\right| < \left|AB\right| \le n\left|CD\right|.$$

Довжина відрізка має такі властивості:

1) $\left|AB\right| \ge 0$;

2) $AB = CD$ тоді й лише тоді, коли $\left|AB\right| = \left|CD\right|$;

3) якщо $C \in AB$, то $\left|AB\right| = \left|AC\right| + \left|CB\right|$;

4) якщо відрізок PQ, узятий за еталон (одиницю вимірювання), то $\left|PQ\right| = 1$.

Спільною мірою двох відрізків називають відрізок, який міститься в кожному із заданих ціле число разів (без остачі).

Не кожні два відрізки мають спільну міру, приміром сторона й діагональ квадрату її не мають.

Два відрізки, що мають спільну міру, називають *сумірними*, а ті, які її не мають,— *несумірними*.

Якщо відрізок сумірний з еталонним відрізком, то його довжину виражає раціональне число, а якщо ні, то — ірраціональне.

2. *Числовою* (*координатною*) *віссю* називають пряму, на якій вибрано:

1) деяку точку O, *початок відліку*;

2) *додатний напрям*, який позначають стрілкою;

3) *масштаб* для вимірювання довжини (рис. 1.4).

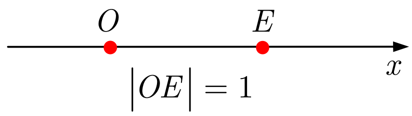


Рис. 1.4. Числова вісь Ox

Зазвичай числову вісь зображують горизонтально і додатний напрям вибирають зліва направо.

3. Між точками числової осі та множиною дійсних чисел можна встановити взаємно однозначну відповідність, при якій точки числової осі *зображатимуть* дійсні числа, а дійсні числа *характеризуватимуть* розташування точок на числовій осі, будуть їх *координатами*.

4. Правило зображення дійсного числа x_M точкою числової осі M (рис. 1.5):

1) відрізок OM має довжину, яка дорівнює $\left|x_M\right|$;

2) якщо $x_M < 0$, то точка M розташована ліворуч від точки O,

якщо $x_M = 0$, то точка M зливається з точкою O,

якщо $x_M > 0$, то точка M розташована праворуч від точки O.

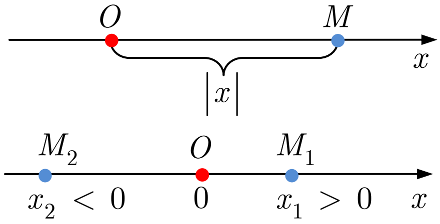


Рис. 1.5. Зображення дійсних чисел точками числової осі

5. Число x та протилежне до нього число $(-x)$ зображують точками, симетричними відносно точки O (рис. 1.6—1.7).

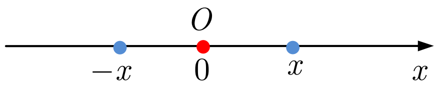


Рис. 1.6. Протилежні числа

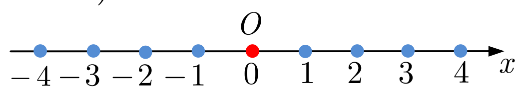


Рис. 1.7. Цілі числа на числовій осі

6. *Віддаль* між точками M_1 та M_2 числової осі з координатами x_1 та x_2 (рис. 1.8) знаходять за формулою

$$d(M_1, M_2) = |x_2 - x_1|.$$

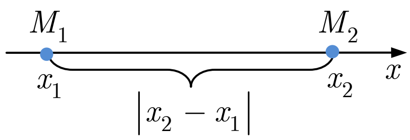


Рис. 1.8. Віддаль між точками

7. Але дійсні числа можна зображувати не лише точками прямої, а й точками кола. Побудуймо коло C, дотичне до числової прямої в початку відліку (Нойманове коло) (рис. 1.9). Точку кола, протилежну точці O, позначмо O'.

Для того щоб відобразити точку M числової прямої з координатою x на коло, проведімо пряму $O'M$. Вона, крім точки O', перетне коло в деякій єдиній точці Q, яку називають *проекцією* точки M на коло C. Точку Q називають *Неймановим зображенням* числа x.

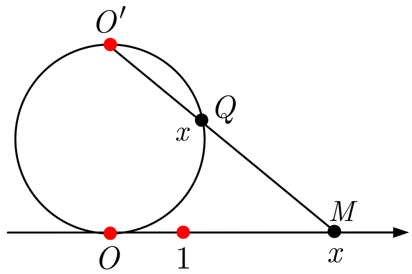


Рис. 1.9. Нойманове коло

Будь-якому числу x на числовій прямій відповідає єдина точка на колі, що лежатиме на лівому чи правому півколі, залежно від того, від'ємне x чи додатне (рис. 1.10). При цьому не всі точки кола вичерпаються. Точка O' лишиться вільною. Її вважатимемо за геометричний образ нескінченності ∞.

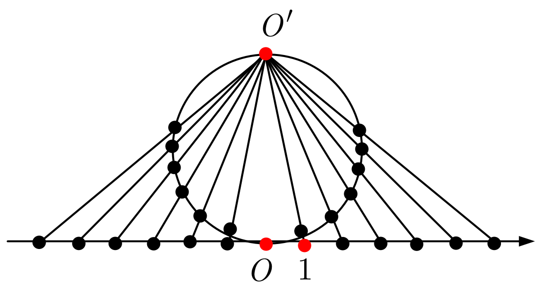


Рис. 1.10. Зображення дійсних чисел точками кола

1.4.3. Проміжки

1. *Скінченні проміжки* (рис. 1.11—1.13) позначують і означують так:

1) *відрізок* $[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$;

2) *інтервал* $(a;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$;

3) *півінтервал* $[a;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$;

4) *півінтервал* $(a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$.

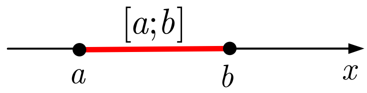


Рис. 1.11. Відрізок

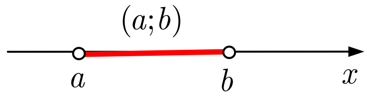


Рис. 1.12. Інтервал

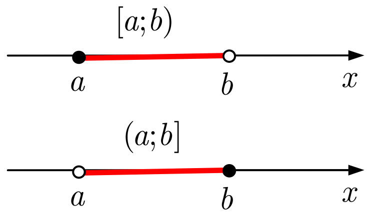


Рис. 1.13. Півінтервали

2. Множину дійсних чисел зручно доповнити елементами, які називають *плюс нескінченністю* та *мінус нескінченністю* і позначають $+\infty$ та $-\infty$, уважаючи при цьому, що для будь-якого дійсного числа x правдиві властивості:

1) $-\infty < x < +\infty$;

2) $x + (+\infty) = +\infty,\ x - (+\infty) = -\infty$;

3) $x(+\infty) = +\infty,\ x(-\infty) = -\infty, x > 0$;

$x(+\infty) = -\infty,\ x(-\infty) = +\infty, x < 0$;

4) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty,\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty$;

5) $(+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty,\ (+\infty)(-\infty) = -\infty$.

Дії $0 \cdot (\pm\infty), (\pm\infty) - (\pm\infty), \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ не означені.

Множину

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

називають *розширеною* множиною дійсних чисел.

Точка $(-\infty)$ на числовій осі розташована ліворуч від усіх чисел, а точка $(+\infty)$ — праворуч від усіх чисел. Іноді множину дійсних чисел доповнюють одним елементом *нескінченністю* (нескінченно віддаленою точкою) ∞.

Нескінченні проміжки (рис. 1.14) позначають і означують так:

1) $(a;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$;

2) $(-\infty;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$;

3) $[a;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$;

4) $(-\infty;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$;

5) $(-\infty;+\infty) = \mathbb{R}$.

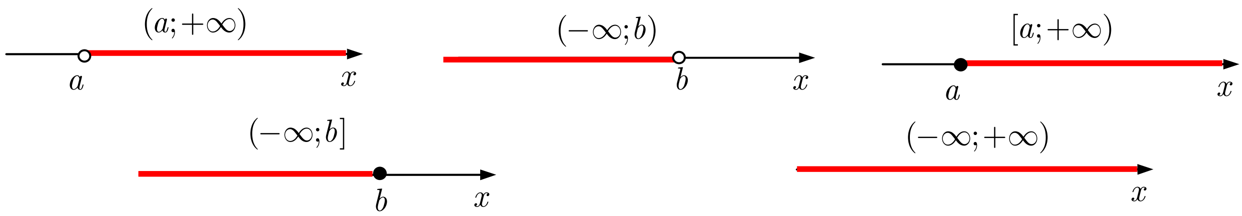


Рис. 1.14. Нескінчені проміжки

1.4.4. Околи

1. Розгляньмо точку $x_0 \in \mathbb{R}$ і додатне дійсне число ε.

Означення 1.8 **(ε-околу).**

Множину дійсних чисел, віддаль яких від точки x_0 менша за $\varepsilon > 0$, називають ε-*околом* точки x_0 і позначають

$$U_\varepsilon(x_0) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left|x - x_0\right| < \varepsilon\right\} = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon).$$

Число x_0 називають *центром* околу, ε — його *радіусом* (рис. 1.15).

Проколеним ε-*околом* точки x_0 називають її ε-окіл, з якого виключено саму точку x_0 і позначають $U(x_0) \setminus \{x_0\}$ (рис. 1.16).

ε-*околом мінус нескінченності* називають множину (рис. 1.17)

$$U_\varepsilon(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\varepsilon\} = (-\infty; -\varepsilon), \varepsilon > 0.$$

ε-*околом нескінченості* називають множину (рис. 1.18)

$$U_\varepsilon(\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid \left|x\right| > \varepsilon\} = (-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty).$$

ε-*околом плюс нескінченності* називають множину (рис. 1.19)

$$U_\varepsilon(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \varepsilon\} = (\varepsilon; +\infty), \varepsilon > 0.$$

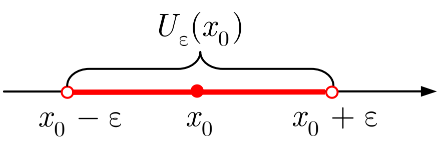


Рис. 1.15. ε-окіл точки $x_0 \in \mathbb{R}$

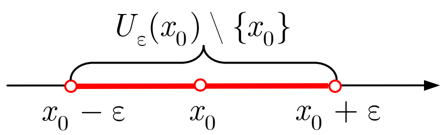


Рис. 1.16. Проколений ε-окіл точки $x_0 \in \mathbb{R}$

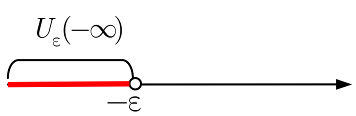


Рис. 1.17. ε-окіл $(-\infty)$

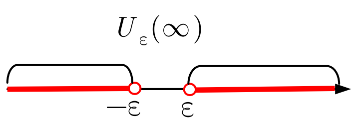


Рис. 1.18. ε-окіл точки ∞

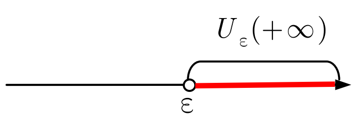


Рис. 1.19. ε-окіл $(+\infty)$

2. Дійсні числа мають властивість *відокремлюваності*: якщо a та b — два різні дійсні числа, то їх завжди можна відокремити одне від одного неперетинними околами.

1.4.5. Обмежені і необмежені числові множини

1. Розгляньмо непорожню множину $A \subset \mathbb{R}$.

Означення 1.9 (обмеженої множини).

Числову множину A називають *обмеженою зверху* (*обмеженою знизу*), якщо існує таке число M (число m), що для будь-якого числа $x \in A$ виконано нерівність
$$x \le M \quad (m \le x).$$
Число M називають *верхньою межею* множини A, а число m — *нижньою межею* множини A.
Числову множину $A \subset \mathbb{R}$ називають *обмеженою*, якщо існує таке число $C > 0$, що для будь-якого числа $x \in A$ виконано нерівність
$$\left|x\right| \le C.$$

Приміром, множина $E = (-\infty; 0]$ обмежена зверху числом 0; множина натуральних чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ обмежена знизу числом 1.

Множину, що не є обмеженою зверху (знизу), називають *необмеженою зверху* (*необмеженою знизу*).

Приміром, множина натуральних чисел $\mathbb{N}$ необмежена зверху; множина всіх від'ємних чисел необмежена знизу.

2. Якщо серед елементів множини A є *найбільше* число, то його позначають $\max A$.

Якщо серед елементів множини A є *найменше* число, то його позначають $\min A$.

Будь-яка скінченна множина $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ має найбільший та найменший елементи, а для нескінченної множини це не завжди так.

3. Будь-яка обмежена зверху (знизу) множина має нескінченно багато верхніх (нижніх) меж.

Означення 1.10 (точних меж).

Найменшу з усіх верхніх меж обмеженої зверху множини $A \subset \mathbb{R}$ називають *точною верхньою межею* і позначають $\sup A$.
Найбільшу з усіх нижніх меж обмеженої знизу множини $A \subset \mathbb{R}$ називають *точною нижньою межею* і позначають $\inf A$.

Рівність $M = \sup A$ означає, що:

1) для будь-якого $x \in A$ виконано нерівність $x \leq M$;

2) для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться елемент $x' \in A$, такий, що

$$x' > M - \varepsilon.$$

Рівність $m = \inf A$ означає, що:

1) для будь-якого $x \in A$ виконано нерівність $x \geq m$;

2) для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться елемент $x' \in A$, такий, що

$$x' < m - \varepsilon.$$

Для необмеженої зверху множини A вважають, що $\sup A = +\infty$.

Для необмеженої знизу множини A вважають, що $\inf A = -\infty$.

Аксіома верхньої (нижньої) точної межі.

> Будь-яка обмежена зверху непорожня множина дійсних чисел має точну верхню межу, а будь-яка обмежена знизу — точну нижню межу.

1.5. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Задачі, у яких вибирають з певної сукупності об'єктів елементи, що мають ті чи інші властивості, або розміщують ці елементи в певному порядку, і підраховують кількість способів здійснити вибір або розміщення називають *комбінаторними*.

Основним питанням комбінаторики є «Скільки?», яке ставлять у різних варіантах.

1.5.1. Скорочені позначення

1. Те, що індекс j *перебігає* натуральні значення від 1 до n скорочено записують як

$$\boxed{j = \overline{1, n} \Leftrightarrow j = 1, 2, \ldots, n.}$$

2. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — задані числа. Їх суму $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ коротко позначають як

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,}$$

де Σ — символ підсумовування, k — індекс підсумовування, і читають «сума за k від 1 до n».

Межі підсумовування можуть бути будь-якими цілими числами.

Сума не залежить від того, якою літерою позначено індекс підсумовування:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Символ підсумовування має властивості:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} ca_k = c\sum\limits_{k=1}^{n} a_k, c = \text{const};$

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k.$

Іноді виникає потреба у зсуві меж підсумовування в той чи інший бік за допомогою заміни індексу:

$$\sum_{k=l}^{n} a_k = \sum_{k=l+m}^{n+m} a_{k-m}, m \in \mathbb{Z}.$$

3. Добуток послідовних натуральних чисел від 1 до n включно називають *факторіалом* числа n і позначають

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.}$$

Читають «n факторіал».

Уважають, що

$$1! = 1.$$

Приміром,

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

З означення випливає, що для $n \geq 2$ правдива формула

$$n! = \underbrace{\overbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)}^{n-1 \text{ множників}} \cdot n}_{n \text{ множників}} = (n-1)!n.$$

Щоб ця формула була правдивою і для $n = 1$:

$$1! = 1 \cdot 0!,$$

уважають, що й

$$\boxed{0! = 1.}$$

4. *Подвійним факторіалом* натурального числа n називають добуток послідовних натуральних чисел від 1 до n, які мають однакову парність з n, і позначають $n!!$.

Для $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$, маємо

$$\boxed{(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-3) \cdot (2k-1), \quad 1!! = 1.}$$

Для $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, маємо

$$\boxed{(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k-2) \cdot (2k), \; 2!! = 2.}$$

Приміром,

$$5!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15, 6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48.$$

1.5.2. Правила суми й добутку

Більшість комбінаторних задач розв'язують за допомогою двох правил: правила суми і правила добутку.

1. Правило суми. Якщо об'єкт a можна вибрати m способами, а об'єкт b — іншими n способами, то вибір «або a, або b» можна здійснити $m + n$ способами.

Приміром, якщо на тарілці лежить 5 грушок і 4 яблука, то вибрати один фрукт (грушку чи яблуко) можна $4 + 5 = 9$ способами.

2. Правило добутку. Якщо об'єкт a можна вибрати m способами і після кожного з таких виборів об'єкт b можна вибрати n способами, то вибір «a та b» (у вказаному порядку) можна здійснити mn способами.

3. Приміром, якщо в кіоску продають ручки 5 видів і зошити 4 видів, та вибрати набір з ручки і зошита (пару — ручка і зошит) можна $5 \cdot 4 = 20$ способами.

1.5.3. Сполуки

1. Вибрані (або вибрані й розміщені) групи елементів називають *сполуками*. Якщо всі елементи сполуки різні, то дістають сполуки без повторень, а якщо елементи можуть повторюватись, то одержують сполуки з повтореннями.

2. Множину називають *упорядкованою*, якщо про кожні два її елементи можна говорити, що один з них передує іншому.

Приміром, множина раціональних чисел — упорядкована множина (раціональне число r_1 передує числу r_2, коли $r_1 < r_2$); множина точок відрізку — упорядкована множина (точка A відрізка передує точці B цього відрізка, коли точка A належить деякому відрізку MB); множина студентів, заданих їх списком, є впорядкована множина (той зі студентів передує іншому, чиє прізвище у списку подане раніше).

3. Щоб відрізнити запис упорядкованої множини від невпорядкованої, елементи впорядкованої множини часто записують у круглих дужках.

Приміром, $(1;2;3) \neq (1;3;2)$.

Одну й ту саму множину можна по-різному впорядковувати. Приміром, множину з трьох чисел $\{-5;1;3\}$ можна впорядкувати:

— за зростанням $(-5;1;3)$;

— за спаданням $(3;1;-5)$;

— за зростанням модуля числа $(1;3;-5)$ тощо.

Упорядкувати n-елементну множину — це означає вибрати який-небудь елемент за перший, потім який-небудь інший елемент — за другий тощо. Насамкінець, останній елемент — за n-й.

1.5.4. Розміщення

1. *Розміщенням* з n елементів по k елементів $(0 \le k \le n)$ називають будь-який упорядкований набір з k елементів n-елементної множини.

2. Розміщення різняться одне від одного або складом елементів або порядком їх розташування.

Приміром, із множини із трьох чисел $\{1;2;3\}$ можна скласти такі розміщення із двох елементів без повторень:

$$(1;2),(2;1),(1;3),(3;1),(2;3),(3;2)$$

і такі розміщення із двох елементів з повтореннями:

$$(1;1),(1;2),(2;1),(1;3),(3;1),(2;2),(2;3),(3;2),(3;3).$$

3. Кількість розміщень без повторень з n елементів по k позначають A_n^k, а розміщень з повтореннями — $\tilde{A}_n^k$.

Отже, з поданого прикладу випливає $A_3^2 = 6, \tilde{A}_3^2 = 9$.

З'ясуймо, скільки всього можна скласти розміщень з n елементів по k (без повторень).

Складання розміщення уявимо собі як послідовне заповнення k комірок.

На перше місце можна вибрати один з n елементів заданої множини (рис. 1.20).

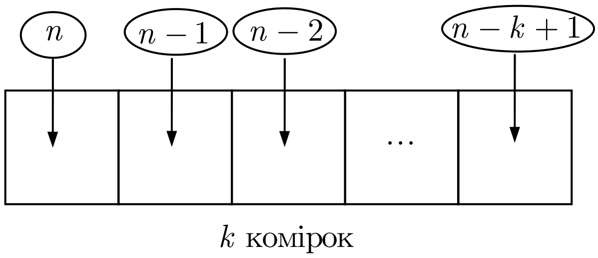


Рис. 1.20. Розміщення без повторень

На друге місце можна вибрати лише один елемент з тих, що залишились, тобто з $(n-1)$. На третє місце можна вибрати лише один з $(n-2)$ елементів тощо. Нарешті, на k-те місце можна вибрати лише один з $n-(k-1)=n-k+1$ елементів.

Оскільки потрібно вибрати елементи і на перше місце, і на друге, ..., і на k-те, то використовуємо правило добутку й одержуємо таку формулу кількості розміщень без повторень з n елементів по k елементів:

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}_{k \text{ множників}}.$$

Приміром, $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

4. За допомогою факторіалів кількість розміщень можна записати як

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k \leq n).}$$

5. З'ясуймо, скільки всього можна скласти розміщень з n елементів по k з повтореннями.

На перше місце можна вибрати один з n елементів заданої множини (рис. 1.21). Далі, якщо елементи можна повторювати, то на кожне наступне місце знову можемо вибрати один з n елементів заданої множини.

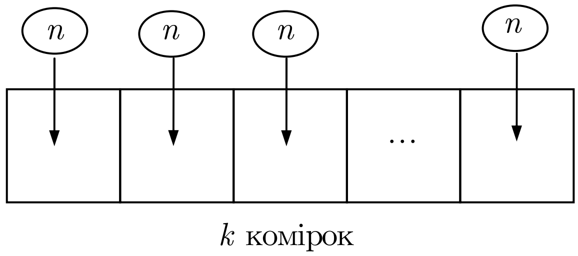


Рис. 1.21. Розміщення з повтореннями

Оскільки потрібно вибрати елементи і на перше місце, і на друге, ..., і на k-те, то використовуємо правило добутку й одержуємо таку формулу кількості розміщень з повтореннями з n елементів по k елементів:

$$\boxed{\tilde{A}_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot n...n}_{k \text{ множників}} = n^k.}$$

Приміром, $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$.

1.5.5. Перестановки

1. *Перестановкою* з n елементів (*без повторень*) називають будь-яку впорядковану підмножину з n елементів заданої множини.

2. Перестановки різняться одне від одного лише порядком розташування елементів; у перестановку входять усі елементи множини.

Фактично перестановки без повторень з n елементів є розміщенням з n елементів по n елементів без повторень.

Приміром, з трьох літер a,b та c маємо перестановки:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

3. Кількість перестановок з n елементів без повторень позначають як

$$\boxed{P_n = A_n^n = n!.}$$

Приміром, $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$

4. *Перестановкою з повтореннями* складу $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ з n елементів $a_1, a_2, \ldots, a_m$ деякої множини називають будь-який скінченний упорядкований набір, який складається з n елементів, і в який елемент a_1 входить k_1 разів, елемент a_2 входить k_2 разів, елемент a_m входить k_m разів.

5. Приміром, якщо переставлятимемо цифри в числі 4445 так, щоб одержати різні чотирицифрові числа, то одержимо перестановки з повтореннями, складені із трьох четвірок і однієї п'ятірки:

$$(4;4;4;5), (4;4;5;4), (4;5;4;4), (5;4;4;4).$$

6. Кількість перестановок з повтореннями позначають $\tilde{P}_n$ або $P(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

З'ясуємо, скільки всього можна скласти перестановок з повтореннями з n елементів, якщо в кожній з перестановок k_1 разів повторюється елемент a_1; k_2 разів повторюється елемент $a_2; \ldots; k_m$ разів повторюється елемент a_m.

Спочатку вважаємо, що всі n елементів, з яких складається перестановка, різні. Тоді одержуємо перестановки без повторень, їх кількість $P_n = n!$ (рис. 1.22).

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{a_1}\boxed{a_1}\boxed{\cdots}\boxed{a_1}}_{k_1\text{ разів}}\underbrace{\boxed{a_2}\boxed{a_2}\boxed{\cdots}\boxed{a_2}}_{k_2\text{ разів}}\boxed{\cdots}\underbrace{\boxed{a_m}\boxed{a_m}\boxed{\cdots}\boxed{a_m}}_{k_m\text{ разів}}}^{n\text{ комірок}}$$

Рис. 1.22. Розміщення з повтореннями

Далі врахуємо, що після переставлення місцями елементів a_1, які займають якісь k_1 місць (не обов'язково підряд), розглянута перестановка не зміниться (оскільки ми переставляємо однакові елементи). Елементи, які стоять на k_1 місцях, можна переставити $k_1!$ способами. Підраховуючи загальну кількість перестановок використовують правилом добутку. Тоді в одержаному добутку $n!$, у разі повторення k_1 разів елемента a_1, зайвим є добуток $k_1!$.

Так само, якщо елемент a_2 повторюється k_2 разів, то в одержаному добутку $n!$ зайвим є добуток $k_2!$.

Повторюючи ці міркування m разів, одержуємо, що кількість перестановок з повтореннями з n елементів, у кожній з яких k_1 разів повторюється елемент a_1, k_2 разів повторюється елемент $a_2, \dots, k_m$ разів повторюється елемент a_m, де $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, дорівнює

$$\boxed{\tilde{P}_n = P(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}.}$$

Приміром, кількість перестановок з повтореннями, складених із трьох четвірок і однієї п'ятірки, дорівнює

$$\tilde{P}_4 = P(3,1) = \frac{4!}{3!1!} = 4.$$

1.5.6. Комбінації

1. *Комбінацією* з n елементів по k елементів $(0 \le k \le n)$ називають будь-який набір з k елементів n-елементної множини.

2. Комбінації різняться одна від одної лише складом елементів.

Приміром, з елементів множини $\{a, b, c, d\}$ можна скласти такі комбінації без повторення із трьох елементів:

$$\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}.$$

Із двох літер $\{a, b\}$ можна скласти такі комбінації з повтореннями з 4 елементів:

$$aaaa, aaab, aabb, abbb, bbbb.$$

3. Кількість комбінацій без повторень з n елементів по k позначають як C_n^k, а з повтореннями — як $\tilde{C}_n^k$.

Отже, з поданого прикладу випливає, що $C_4^3 = 4, \tilde{C}_2^4 = 5$.

З'ясуємо, скільки всього можна скласти комбінацій з n елементів по k (без повторень).

Складання розміщення без повторень з n елементів по k проведімо у два етапи. Спочатку виберімо k різних елементів із заданої n-елементної множини, не враховуючи порядок вибору цих елементів (тобто виберімо комбінацію без повторень з n елементів по k елементів). Це можна зробити C_n^k способами. Після цього одержану множину з k різних елементів упорядкуємо. Їх можна впорядкувати $P_k = k!$ способами. Одержимо розміщення без повторень з n елементів по k. Отже, кількість розміщень без повторень з n елементів по k в $k!$ разів більша за кількість комбінацій без повторень з n елементів по k. Тобто

$$A_n^k = C_n^k k!.$$

Звідси

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$$

або

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.}$$

Ураховуючи означення і властивості факторіала, формулу для кількості комбінацій можна переписати ще так:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}^{k\ \text{множників}}}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3... \cdot k}_{k\ \text{множників}}}.$$

Приміром,

$$C_4^3 = \frac{4!}{1!\,4!} = \frac{4}{1} = 4.$$

4. З формули обчислення C_n^k випливає така властивість

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Причому, домовились уважати, що $C_n^0 = C_n^n = 1$.

5. З'ясуємо, скільки всього можна скласти комбінацій з повтореннями з n елементів по k.

Повторення елементу уявімо як його копіювання й розміщення на відповідному місці копії цього елементу. Для того щоб в останню комірку можна було б помістити будь-який із заданих n елементів, у попередні $(k-1)$ комірки треба помістити копії вибраних елементів (рис. 1.23).

Але тоді фактично розміщується $n+k-1$ елементів (n заданих і $k-1$ копія) без повторень на k місць (не враховуючи порядок), а це можна зробити C_{n+k-1}^k способами.

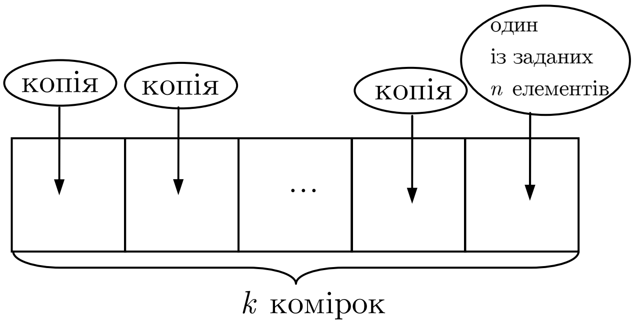


Рис. 1.23. Комбінації з повтореннями

Отже,

$$\boxed{\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.}$$

Приміром,

$$\tilde{C}_2^4 = C_5^4 = \frac{5!}{4!1!} = 5.$$

1.5.7. Біном Ньютона

1. *Біномом* (*двочленом*) називають суму або різницю двох алгебричних виразів, які є членами біному.

Важливим прикладами перетворення біномів є формули, які можна перевірити безпосередньо:

1) *квадрат суми*

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

2) *квадрат різниці*

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

3) *різниця квадратів*

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b);$$

4) *куб суми*

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

5) *куб різниці*

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

6) *сума кубів*

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

7) *різниця кубів*

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Узагальненням формул 3) та 7) є формула

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n) =$$

$$= (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k.$$

Узагальненням формул 2) та 4) є формула біному Ньютона.

Теорема 1.3 (про біном Ньютона).

Для усіх дійсних чисел a та b, відмінних від нуля, і для кожного натурального значення n правдива формула *біному Ньютона*

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k,$$

де C_n^k — *біноміальні коефіцієнти*, які обчислюють за формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Праву частину формули біному Ньютона називають *розкладом біному Ньютона*.

Доведення. Справді, під час перемноження n множників

$$(a+b)(a+b)\dots(a+b)$$

кількість членів вигляду $a^{n-k}b^k$ дорівнює C_n^k, оскільки k штук b в n множниках можна вибрати C_n^k способами. ■

2. Розклад біному Ньютона має властивості:

1) кількість членів розкладу дорівнює $n+1$;

2) у кожному члені розкладу суму показників степеня a та b дорівнює n;

3) розклад є многочленом, який спадає за степенями першого члена a, показники степеня a спадають від n до 0.

3. Біноміальні коефіцієнти мають такі властивості:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}, k = 0, 1, \ldots, n$;

2) $C_n^0 = C_n^n = 1$;

3) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}, k = 0, 1, \ldots, n-1$;

4) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

4. Обчислювати кількість комбінацій без повторень можна також послідовно (для невеликих n), використовуючи властивість

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

При цьому вважають, що $C_0^0 = 1$.

Ця рівність дозволяє послідовно обчислювати значення C_n^k за допомогою таблиці, яку називають *трикутником Паскаля* (рис. 1.24).

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4
\end{array}$$

Рис. 1.24. Трикутник Паскаля

Кожен рядок починається з одиниці і закінчується одиницею, а решта коефіцієнтів є сумою двох найближчих до нього чисел попереднього рядка.

В n-му рядку трикутника стоять біноміальні коефіцієнти:

$$C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n.$$

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1.1.1. Визначте, які з поданих тверджень є висловлюваннями. Які з висловлювань є істинними і які хибні?

1. Сума коренів зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ дорівнює вільному члену q.

2. Сума коренів будь-якого зведеного квадратного рівняння дорівнює вільному члену.

3. Існує зведене квадратне рівняння, сума коренів якого дорівнює вільному члену.

1.1.2. Задано три висловлювання p, q та r, про які відомо, що висловлювання $p \wedge q \wedge r$ хибне та висловлювання $p \wedge r$ істинне.

Визначте, які з варіантів правдиві:

1) p — істинне; 2) p — хибне; 3) q — істинне; 4) q — хибне; 5) r — істинне; 6) r — хибне?

1.1.3. З'ясуйте, істинне чи хибне висловлювання:

1) $\forall x : (x > 2 \vee x < 2)$; 2) $\exists x : (x < 10 \wedge x > 9)$.

1.1.4. Запишіть за допомогою кванторів висловлювання й установіть, істинне вони чи хибне:

1) якщо деяке число ділиться на 6, то воно ділиться на 3;

2) існує число більше за 10, і менше від 9.

1.1.5. Які з поданих теорем є відносно одна одної оберненими, протилежними, протилежними оберненим? Які з цих теорем правдиві?

1. Якщо кожне із двох натуральних чисел ділиться націло на 7, то їхня сума ділиться на 7.

2. Якщо жодне із двох чисел не ділиться на 7, то їхня сума не ділиться на 7.

3. Якщо хоча б одно із двох чисел ділиться на 7, то їхня сума ділиться на 7.

4. Якщо сума двох чисел ділиться на 7, то кожен доданок ділиться на 7.

5. Якщо сума двох чисел не ділиться на 7, то жоден доданок не ділиться на 7.

6. Якщо сума двох чисел не ділиться на 7, то хоча б один з доданків не ділиться на 7.

1.1.6. Подано теорему: «Якщо існує число x, для якого многочлен $x^2 + px + q$ набуває від'ємне значення, то квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$ має два додатних корені».

Сформулюйте обернену, протилежну і протилежну оберненій теореми. Які з них правдиві?

1.1.7. Запишіть зв'язок між твердженнями A та B, використовуючи символи $\Rightarrow, \Leftrightarrow$:

1) $A = \{$кожне із чисел a, b ділиться на 7$\}$,
$B = \{$сума $a + b$ ділиться на 7$\}$;

2) $A = \{$остання цифра числа a парна$\}$, $B = \{$число a ділиться на 4$\}$;

3) $A = \{$трикутник PQR рівнобедрений$\}$,
$B = \{$дві медіани трикутника PQR рівні між собою$\}$.

1.1.8. Визначте, чи правдива теорема:

1) «Для того щоб добуток двох чисел був додатним, *необхідно*, щоб обидва числа були додатними»;

2) «Для того щоб добуток двох чисел був додатним, *достатньо*, щоб обидва числа були додатними»?

1.1.9. Доведіть від супротивного, що якщо n^2 є парним числом, то n також парне число.

1.1.10. Доведіть методом математичної індукції, що:

1) $2n + 1 < 2^n$ для натуральних $n \geq 3$;

2) $n^2 < 2^n$ для натуральних $n \geq 5$.

1.2.1. Задайте множину $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 9\}$ переліком її елементів.

1.2.2. Задайте множину $A = \{1,2\}$ характеристичною умовою.

1.2.3. Визначте, які із тверджень є правдивими: 1) $\{3,2,1\} = \{1,2,3\}$; 2) $\{1,\{2,3\}\} = \{1,2,3\}$; 3) $\{\{1\},\{2\},\{3\}\} = \{1,2,3\}$?

1.2.4. Задано множину $M = \{5,\{3\},\{3,5\}\}$. Визначте, які із тверджень є правдивими: 1) $5 \in M$; 2) $\{5\} \in M$; 3) $\{5\} \subset M$; 4) $3 \in M$; 5) $\{3\} \in M$; 6) $\{3\} \subset M$; 7) $\{3,5\} \in M$; 8) $\{3,5\} \subset M$?

1.2.5. Наведіть приклад одноелементної множини, що її елемент є одночасно підмножиною заданої множини.

1.2.6. Випишіть усі підмножини множини: 1) $\varnothing$; 2) $\{\varnothing\}$; 3) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

1.2.7. Множина має 32 підмножини. Скільки елементів містить множина?

1.2.8. Поясніть, чому: 1) $\varnothing \subset \varnothing$; 2) $\varnothing \notin \varnothing$; 3) $\varnothing \in \{\varnothing\}$; 4) $\varnothing \neq \{0\}$.

1.2.9. Нехай $A=\{a,b,c,d\}, B=\{c,d,e\}$. Знайдіть множини: $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$.

Перевірте рівність $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$, де $n(A)$ — кількість елементів множини A.

1.2.10. Запишіть, яку множину зображує діаграма Ойлера — Вена.

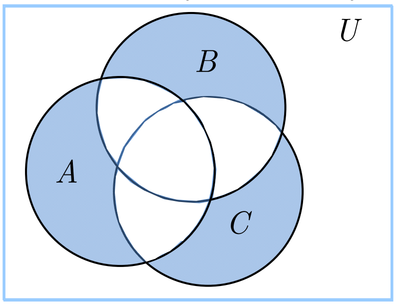


Рис. до 1.2.10.1)

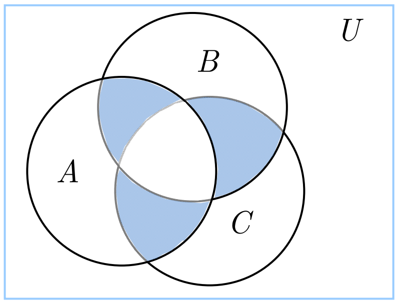


Рис. до 1.2.10.2)

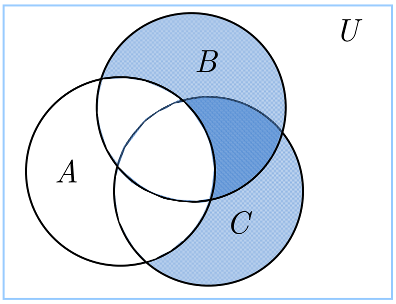


Рис. до 1.2.10.3)

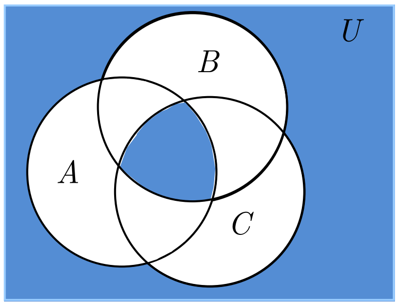


Рис. до 1.2.10.4)

1.2.11. Задано множини $A=\{1,2\}$ та $B=\{1,2,3\}$. Знайдіть множини $A \times B$ та $B \times A$.

1.2.12. Укажіть, які з поданих відношень є функціональними? Знайдіть область означення і область значень відношення: 1) $\{(1;3),(2;4),(3;5),(4;6)\}$; 2) $\{(1;0),(2;4),(1;5),(4;0)\}$.

1.2.13. Покажіть, що дві множини еквівалентні:

1) $A=\{1,2,3\}, B=\{a,b,c\}$; 2) $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3,\ldots\}, \mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$.

1.2.14. Знайдіть потужність множини: 1) $A=\{0,1,2,\ldots,9\}$; 2) $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots\right\}$.

1.2.15. Задано множини: $A = \{0{,}1\}, B = \{a,b,c\}, C = \{x,y,z\}$, $D = \{b,a,c\}$. Які з цих множин: 1) рівні та еквівалентні; 2) еквівалентні, але не рівні; 3) не рівні й не еквівалентні?

1.3.1. Класифікуйте як арифметичну чи геометричну прогресії числову послідовність: 1) $2,4,8,16,...;$2) $5,8,11,14,....$

1.3.2. Для чисел 2 та 3 знайдіть їх: 1) середнє арифметичне; 2) середнє геометричне; 3) середнє гармонічне; 4) середнє квадратичне.

1.3.3. Запишіть число 1000101_2 у: 1) вісімковій системі; 2) десятковій системі.

1.3.4. Числа $a = \alpha^2\beta\gamma^3, b = \alpha^3\beta^2\gamma$ розкладено на прості множники. Знайдіть НСД(a,b) та НСК(a,b).

1.3.5. Доведіть, якщо $x \neq 0$ — раціональне та y — ірраціональне, то $x + y, x - y, xy, \dfrac{x}{y}$ та $\dfrac{y}{x}$ є ірраціональними.

1.3.6. Чи завжди сума або добуток двох ірраціональних чисел є ірраціональним числом?

1.3.7. Між числами 0,11 та 0,12 знайдіть принаймні одне: 1) раціональне число; 2) ірраціональне число.

1.3.8. Задано числа -7, $\dfrac{2}{3}$, 5, $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt[3]{64}$, 1,(23). Визначте, які з цих чисел: 1) натуральні; 2) цілі; 3) раціональні; 4) додатні; 5) невід'ємні; 6) від'ємні; 8) невід'ємні; 9) ірраціональні; 10) дійсні.

1.3.9. Вкажіть, яку властивість дійсних чисел ілюструють приклади.

1) $6 + (-4) = (-4) + 6$; 2) $11 \cdot (7 + 4) = 11 \cdot 7 + 11 \cdot 4$;

3) $6 + (2 + 7) = (6 + 2) + 7$; 4) $6 \cdot (2 \cdot 3) = 6 \cdot (3 \cdot 2)$;

5) $\dfrac{1}{x + 3}(x + 3) = 1, x \neq -3$; 6) $(x + 3) + [-(x + 3)] = 0$;

7) $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$.

1.4.1. Для яких дійсних чисел рівність $\left|-a\right| = a$ є правильною?

1.4.2. Якщо $\left|a - 10\right| < 2$ та $\left|b - 10\right| \leq 3$, то як найточніше можна описати $\left|a - b\right|$?

1.4.3. Якщо $\left|a\right| < 4$ та $\left|b\right| \geq 9$, то як найточніше можна описати $\left|a - b\right|$?

1.4.4. За якої умови виконано рівність:

1) $\left|x+y\right|=\left|x\right|+\left|y\right|$; 2) $\left|x-y\right|=\left|x\right|-\left|y\right|$;

3) $\left|x-y\right|=\left|x\right|-\left|y\right|$; 4) $\left|x-y\right|=\left|x\right|+\left|y\right|$.

1.4.5. Запишіть як проміжок множину $X=\{x\in\mathbb{R}\mid -4<x\le 7\}$.

1.4.6. Запишіть, яку множину зображено на рисунку.

Рис. до 1.4.6.1)

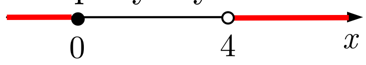


Рис. до 1.4.6.2)

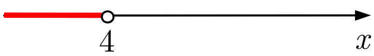


Рис. до 1.4.6.3)

Рис. до 1.4.6.4)

1.4.7. На координатній прямій позначено числа a,b та c. Визначте знаки різниць $a-b, a-c, c-b$.

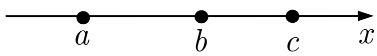


Рис. до 1.4.7

1.4.8. На координатній прямій позначено числа a та b. Розташуйте в порядку зростання числа: 1) $a-1,\dfrac{1}{a},a$; 2) $b-1,\dfrac{1}{b},b$.

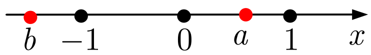


Рис. до 1.4.8

1.4.9. Одне з чисел $\sqrt{0{,}9},\sqrt{3},\sqrt{6},\sqrt{12}$ позначено на прямій точкою a. Яке це число?

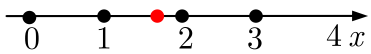


Рис. до 1.4.9

1.4.10. Знайдіть неперетинні околи точок $x_1=-1$ та $x=2$.

1.4.11. Запишіть за допомогою кванторів означення таких понять: 1) множини, обмеженої зверху; 2) множини обмеженої зверху; 3) множини, необмеженої зверху; 4) множини необмеженої знизу.

1.4.12. Які точні межі множини однозначних натуральних чисел?

1.4.13. Для яких множин $\inf X=\sup X$?

1.4.14. Знайдіть $\inf X$ та $\sup X$, $\max X$ та $\inf X$, якщо:

1) $X=[a;b]$; 2) $X=(a;b)$; 3) $X=[a;b)$; 4) $X=(a;b]$.

1.4.15. Для кожної із множини знайдіть, якщо це можливо $\sup X$, $\inf X,\max X,\min X$: 1) $X=\{x\in\mathbb{N}\mid x^2\le 10\}$; 2) $X=\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2\le 10\}$; 3) $X=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2\le 10\}$.

1.5.1. Розпишіть і знайдіть числове значення $\sum\limits_{k=1}^{5}k$.

1.5.2. Запишіть, використовуючи знак суми, вираз

$$4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24.$$

1.5.3. Які з перерахованих пар сум не є рівними?

1) $\sum_{i=1}^{4} i, \sum_{k=1}^{4} k$; 2) $\sum_{j=1}^{4} j^2, \sum_{k=2}^{5} k^2$;

3) $\sum_{j=1}^{4} j, \sum_{i=2}^{5} (i-1)$; 4) $\sum_{i=1}^{4} i(i+1), \sum_{j=2}^{5} (j-1)j$.

1.5.4. Запишіть усі сполуки по 2 елементи із двох елементів a та b:

1) упорядковані без повторення; 2) упорядковані з повторенням;

3) неупорядковані без повторення; 4) неупорядковані з повторенням.

1.5.5. Монету підкидають n разів і записують випадання гербів чи решіток. Скільки можливо різних записів?

1.5.6. Визначте біноміальним розкладом якого біному є многочлен $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$?

Відповіді

1.1.1. 1) не є висловлюванням; 2) хибне висловлювання; 3) хибне висловлювання.
1.1.2. 1), 4), 5).
1.1.3. 1) хибне; 2) істинне.
1.1.4. 1) $\forall x : (x \vdots 6 \Rightarrow x \vdots 3)$ — істинне; 2) $\exists x : (x > 10 \wedge x < 9)$ — хибне.
1.1.5. Взаємно обернені теореми 1 та 4, 2 та 5; взаємно протилежні 2 та 3, 4 та 6; протилежні оберненим 1 та 6, 3 та 5. Теореми 1 та 6 правдиві, решта — неправдиві.
1.1.6. Теорема та протилежна оберненій теоремі неправдиві, обернена та протилежна теореми правдиві.
1.1.7. 1) $A \Rightarrow B$; 2) $A \Leftarrow B$; 3) $A \Leftrightarrow B$.
1.1.8. 1) неправдива; 2) правдива.
1.2.1. $A = \{-3, 3\}$.
1.2.2. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-2) = 0\}$.
1.2.3. 1.
1.2.4. 1), 3), 5), 7.
1.2.5. $\{\varnothing\}$.
1.2.6. 1) $\varnothing$; 2) $\varnothing, \{\varnothing\}$; 3) $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.
1.2.7. 5.
1.2.8. 1) $\varnothing$ є підмножиною будь-якої множини; 2) $\varnothing$ не має жодного елемента; 3) за означенням; 4) $0 \notin \varnothing$.
1.2.9. $A \cup B = \{a,b,c,d,e\}, A \cap B = \{c,d\}, A \setminus B = \{a,b\}, B \setminus A = \{e\}$.
1.2.10. 1) $(A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))$

2) $((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))\setminus(A\cap B\cap C)$;

3) $(B\cup C)\setminus A$; 4) $\overline{A\cup B\cup C}\cup(A\cap B\cap C)$.

1.2.15. 1) $B\sim D, B=D$; 2) $B\sim C, B\neq C$; 3) $A\not\sim B$.

1.3.1. 1) геометрична прогресія; 2) арифметична прогресія.

1.3.2. 1) $\dfrac{5}{2}$; 2) $\sqrt{6}$; 3) $\dfrac{12}{5}$; 4) $\sqrt{\dfrac{13}{2}}$.

1.3.3. 1) 105_8; 2) 69_{10}.

1.3.4. НСД$(a,b)=\alpha^2\beta\gamma$, НСК$(a,b)=\alpha^3\beta^2\gamma^3$.

1.3.6. Ні, $x=3-\sqrt{2}, y=3+\sqrt{2}$ — ірраціональні, $x+y=6\in\mathbb{Q}, xy=5\in\mathbb{Q}$.

1.3.7. 1) $\dfrac{0{,}11+0{,}12}{2}=0{,}115\in\mathbb{Q}; 0{,}11+\dfrac{1}{10\sqrt{101}}\in\mathbb{I}$.

1.3.8. 1) $5, \sqrt[3]{64}=4$ — натуральні; 2) -7, $5, 0$, $\sqrt[3]{64}$ — цілі; 3) -7, $\dfrac{2}{3}$, 5, 0, $\sqrt[3]{64}$, 1,(23) — раціональні; 4) $\dfrac{2}{3}$, 5, $\sqrt[3]{64}$, 1,(23) — додатні; 5) $-7, -\sqrt{3}$ — від'ємні; $\dfrac{2}{3}$, 5, 0, $\sqrt[3]{64}$, 1,(23) — невід'ємні; $-\sqrt{3}$ — ірраціональне; 10) усі — дійсні.

1.3.11. 1) комутативність додавання; 2) дистрибутивність множення щодо додавання; 3) асоціативність додавання; 4) асоціативність множення; 5) існування оберненого числа; 6) існування протилежного числа; 7) комутативність множення.

1.4.1. $a\le 0$.

1.4.2. $1\le\left|a-b\right|\le 5$.

1.4.3. $5<\left|a-b\right|$.

1.4.5. $X=(-4;7]$.

1.4.15. 1) $\inf X=\min X=1, \sup X=\max X=3$;

2) $\inf X=-\sqrt{10}, \sup X=\sqrt{10}$; 3) $\inf X=\min X=-\sqrt{10}, \sup X=\max X=\sqrt{10}$.

1.5.1. $\sum\limits_{k=1}^{5}k=1+2+3+4+5=15$.

1.5.2. $4+8+12+16+20+24=\sum\limits_{k=1}^{6}4k$.

1.5.3. 2)

1.5.4. 1) ab, ba; 2) aa, ab, bb, ba; 3) ab; 4) aa, ab, bb.

1.5.5. 2^n.

1.5.6. $(x+2)^4$.

Формули, твердження, алгоритми

1.1. Висловлювання

<table>
<tr><td colspan="3">❶ Висловлювання. Під висловлюванням p розуміють твердження, про яке можна сказати, істинне воно чи хибне.</td><td colspan="2">Істинному висловлюванню p приписують значення $p = 1$, а хибному — значення $p = 0$.</td></tr>
<tr><td colspan="5">❷ Дії над висловлюваннями</td></tr>
<tr><td colspan="3">① Заперечення висловлювання p</td><td colspan="2">$\overline{p}$ («не p»)</td></tr>
<tr><td colspan="3">② Диз'юнкція висловлювань p та q</td><td colspan="2">$p \vee q$ («p або q»)</td></tr>
<tr><td colspan="3">③ Кон'юнкція висловлювань p та q</td><td colspan="2">$p \wedge q$ («p і q»)</td></tr>
<tr><td colspan="3">④ Імплікація висловлювань p та q</td><td colspan="2">$p \Rightarrow q$ («якщо p, то q»)</td></tr>
<tr><td colspan="3">⑤ Еквіваленція висловлювань p та q</td><td colspan="2">$p \Leftrightarrow q$ («p тоді й лише тоді, коли q»)</td></tr>
<tr><td colspan="5">❸ Таблиця істинності дій над висловлюваннями</td></tr>
</table>

p	q	$\overline{p}$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

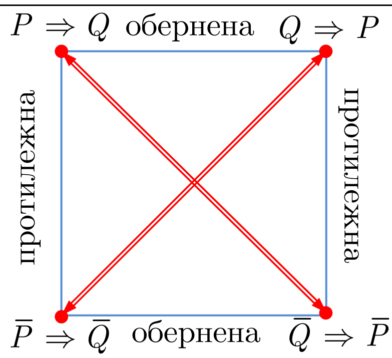
① $\overline{\overline{p}} = p$;

② $p \vee 0 = p$;	⑥ $p \wedge 0 = 0$;
③ $p \vee 1 = 1$;	⑦ $p \wedge 1 = p$;
④ $p \vee p = p$;	⑧ $p \wedge p = p$;
⑤ $p \vee \overline{p} = 1$;	⑨ $p \wedge \overline{p} = 0$

1.2. Квантори

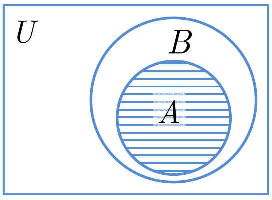
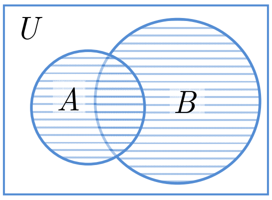
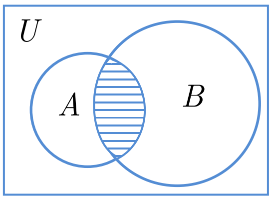
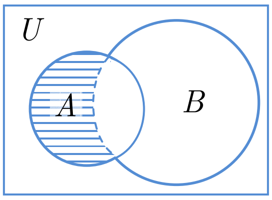
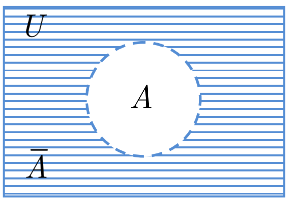
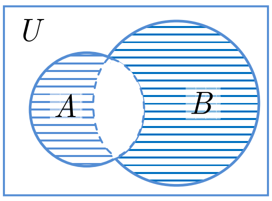
❶ ***Квантор існування***	$\exists$ («існує», «знайдеться»)
«існує x такий, що виконано $A(x)$»	$\exists x : A(x)$
❷ ***Квантор загальності***	$\forall$ («для будь-якого», «для всіх»)
«для будь-якого x виконано $A(x)$»	$\forall x : A(x)$
❸ ***Правила заперечення*** кванторів	① $\overline{\exists x : A(x)} \Leftrightarrow \forall x : \overline{A}(x)$; ② $\overline{\forall x : A(x)} \Leftrightarrow \exists x : \overline{A}(x)$

1.3. Теореми

❶ ***Типи теорем і логічний квадрат***	
① $P \Rightarrow Q$ — *пряма;* ② $Q \Rightarrow P$ — *обернена;* ③ $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$ — *протилежна;* ④ $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ — *протилежна оберненій* $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$; $(Q \Rightarrow P) \Leftrightarrow (\overline{P} \Rightarrow \overline{Q})$	
❷ ***Необхідна та достатня умови***	
① Правдива *теорема* $P \Rightarrow Q$	P — *достатня* умова для Q; Q — *необхідна* умова для P
② Правдивий *критерій* $P \Leftrightarrow Q$ (правдиві теореми $P \Rightarrow Q$ і $Q \Rightarrow P$)	P (Q) — *необхідна й достатня* умова для Q (P)
❸ ***Методи доведення теореми*** $P \Rightarrow Q$. ① *Прямий* $P \Rightarrow T_1 \Rightarrow .... \Rightarrow T_n \Rightarrow Q.$ ② *Непрямий (від супротивного)* $\overline{Q} \Rightarrow T_1 \Rightarrow .... \Rightarrow T_n \Rightarrow \overline{P}.$ ③ Метод *математичної індукції.*	❹ ***Схема доведення методом математичної індукції.*** ① Перевіряють правдивість твердження $P(n)$ для $n = 1$. ② Припускаючи правдивість твердження $P(k)$, доводять твердження $P(k+1)$. ③ На підставі принципу математичної індукції висновують правдивість твердження $P(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.4. Множини

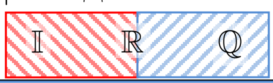
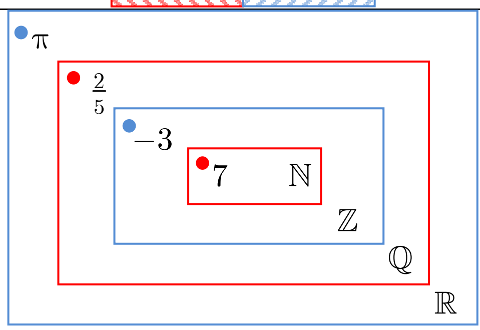
❶ ***Множина.*** Під *множиною* розуміють сукупність об'єктів довільної природи (*елементів* множини), об'єднаних за певною ознакою.	
① x *належить* множині A (x *є елементом* A)	$x \in A$
② x *не належить* множині A (x *не є елементом* A)	$x \notin A$
③ *універсальна* множина	U
④ *порожня* множина (не містить жодного елемента)	$\varnothing$

❷ ***Способи задавання*** множин:		
① *переліком* своїх елементів	$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\};$	
② *характеристичною* властивістю	$A = \{x \mid \text{виконано умову } P(x)\}$	
Дії з множинами унаочнюють за допомогою *діаграм Ойлера — Вена*		
❸ ***Включення*** множин. $A \subset B \Leftrightarrow \big(x \in A \Rightarrow x \in B\big)$ *A є підмножиною B;* *A міститься в B*		① $A \subset A;$ ② $\varnothing \subset A;$ ③ $A \subset U$
❹ ***Рівність*** множин. $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B, \\ x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$	$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B, \\ B \subset A \end{cases}$	
❺ ***Об'єднання*** множин. $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$		① $A \cup A = A;$ ② $A \cup \varnothing = A;$ ③ $A \cup U = U$
❻ ***Перетин*** множин. $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$		① $A \cap A = A;$ ② $A \cap \varnothing = \varnothing;$ ③ $A \cap U = A$
❼ ***Різниця*** множин. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$		① $A \setminus A = \varnothing;$ ② $A \setminus \varnothing = A;$ ③ $A \setminus U = \varnothing$
❽ ***Доповнення*** множини. $\overline{A} = U \setminus A$		① $A \cup \overline{A} = U;$ ② $A \cap \overline{A} = \varnothing;$ ③ $A \setminus \overline{A} = A;$ ④ $\overline{\overline{A}} = A$
❾ ***Симетрична різниця*** множин. $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$		① $A \triangle A = \varnothing;$ ② $A \triangle \varnothing = A;$ ③ $A \triangle U = \overline{A}$
❿ ***Декартів добуток*** множин	$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\},$ $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ разів}}$	

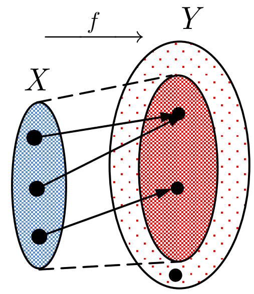
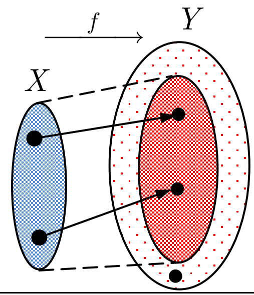
1.5. Властивості дій над множинами та висловлюваннями

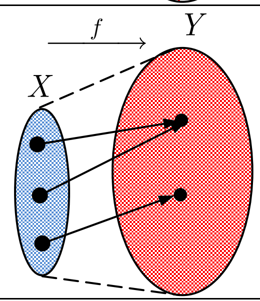
❶ ***Комутативність:***	
① *об'єднання*	$A \cup B = B \cup A$
② *диз'юнкції*	$p \vee q = q \vee p$
③ *перерізу*	$A \cap B = B \cap A$
④ *кон'юнкції*	$p \wedge q = q \wedge p$
❷ ***Асоціативність:***	
① *об'єднання*	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
② *диз'юнкції*	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$
③ *перерізу*	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
④ *кон'юнкції*	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$
❸ ***Дистрибутивність:***	
① *об'єднання щодо перерізу*	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
② *диз'юнкції щодо кон'юнкції*	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
③ *перерізу щодо об'єднання*	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
④ *кон'юнкції щодо диз'юнкції*	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
❹ ***Закони де Моргана*** для:	
① *об'єднання*	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
② *перерізу*	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
③ *диз'юнкції* ($\downarrow$ — *стрілка Пірса*)	$\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q} = p \downarrow q$
④ *кон'юнкції* ($\mid$ — *штрих Шефера*)	$\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q} = p \mid q$
⑤ *імплікації*	$\overline{p \Rightarrow q} = \overline{\overline{p} \vee q} = p \wedge \overline{q}$
⑥ *еквіваленції* ($\oplus$ — *виключне або*)	$\overline{p \Leftrightarrow q} = \overline{(p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)} = p \oplus q$
❺ ***Закони поглинання***	
①	$A \cup (A \cap B) = A$
②	$A \cap (A \cup B) = A$
③	$p \vee (p \wedge q) = p$
④	$p \wedge (p \vee q) = p$
❻ ***Закони склеювання***	
①	$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$
②	$(p \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q}) = p$

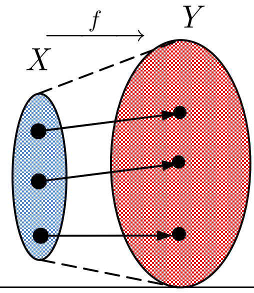
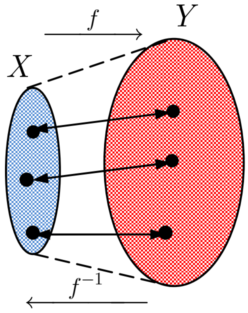
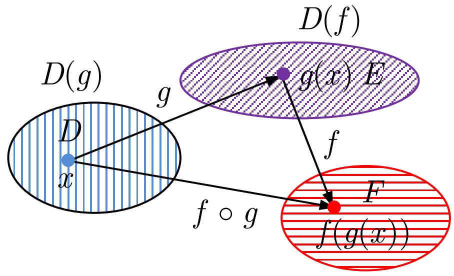
1.6. Числові множини

❶ Запис числа в ***десятковій*** системі	$\alpha_n \ldots \alpha_1\alpha_0 = \overline{(\alpha_n \ldots \alpha_1\alpha_0)}_{10} =$ $= \alpha_n \cdot 10^n + \ldots + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0,$ $\alpha_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
❷ Запис числа у ***двійковій*** системі	$\overline{(\alpha_n \ldots \alpha_1\alpha_0)}_2 =$ $= \alpha_n \cdot 2^n + \ldots + \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_0,$ $\alpha_i \in \{0,1\}$
❸ ***Десяткові дроби*** $(a \in \mathbb{Z}, \alpha_i, \beta_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\})$	
① *скінченний*	$a, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$
② *нескінченний періодичний*	$a, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n(\beta_1\beta_2 \ldots \beta_k) =$ $= a, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \underbrace{\beta_1\beta_2 \ldots \beta_k}_{\text{період}} \ldots \beta_1\beta_2 \ldots \beta_k \ldots$
❹ ***Позначення числових множин***	
① Множина *натуральних* чисел	$\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$
② Множина *цілих* чисел	$\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$
③ Множина *раціональних* чисел	$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle\vert m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} =$ $= \{x \mid x -$ *скінченний* або нескінченний *періодичний* десятковий дріб$\}$
④ Множина *ірраціональних* чисел	$\mathbb{I} = \left\{ x \neq \frac{m}{n} \middle\vert m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} =$ $= \{x \mid x -$ нескінченний *неперіодичний* десятковий дріб$\}$
⑤ Множина *дійсних* чисел	$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} =$ $= \{x \mid x -$ десятковий дріб$\}$ 
❺ ***Включення числових множин.*** $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$	

1.7. Відображення множин

<table>
<tr><td rowspan="2">❶ Відображення. Відображенням множини X у множину Y (функцією із множини X у множину Y) називають правило, яке кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність лише один елемент $y \in Y$.</td><td>$f : X \to Y$</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>$y = f(x), x \in X$</td></tr>
<tr><td>аргумент функції</td><td colspan="2">x (прообраз елемента $f(x)$)</td></tr>
<tr><td>значення функції</td><td colspan="2">$f(x)$ (образ елемента x)</td></tr>
<tr><td>область означення функції</td><td colspan="2">$D(f) = X$</td></tr>
<tr><td>множина значень функції</td><td colspan="2">$E(f) = \{f(x) \mid x \in X\} = f(X)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">❷ Деякі типи функцій</td></tr>
<tr><td>① дійсна функція</td><td colspan="2">$E(f) \subset \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>② функція дійсного аргументу</td><td colspan="2">$D(f) \subset \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>③ дійсна функція кількох змінних</td><td colspan="2">$D(f) \subset \mathbb{R}^n, E(f) \subset \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>④ вектор-функція</td><td colspan="2">$D(f) \subset \mathbb{R}, E(f) \subset \mathbb{R}^n$</td></tr>
<tr><td>⑤ послідовність елементів Y</td><td colspan="2">$f : \mathbb{N} \to Y$</td></tr>
<tr><td>⑥ числова послідовність</td><td colspan="2">$f : \mathbb{N} \to Y \subset \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>❸ Взаємно однозначне відображення (ін'єкція)</td><td>$\forall x_1 \in X\, \forall x_2 \in X :$
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow$
$f(x_1) \neq f(x_2)$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>❹ Відображення множини X на множину Y (сюр'єкція)</td><td>$\forall y \in Y\ \forall x \in X :$
$f(x) = y$

$f(X) = Y$</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>❺ Взаємно однозначна відповідність між X та Y (бієкція)</td>
<td>$\forall y \in Y\ \exists! x \in X:$
$f(x) = y$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>❻ Обернена функція. Якщо відображення $f: X \to Y$ є бієкцією, то функцію $f^{-1}: Y \to X$:
$x = f^{-1}(y), y \in Y$
називають оберненою до f функцією.</td>
<td colspan="2">
</td>
</tr>
<tr>
<td>❼ Складена функція. Якщо
$g: D \to E, \quad f: E \to F,$
то функцію $f \circ g: D \to F$:
$(f \circ g)(x) = f(g(x)), x \in D$
називають складеною функцією (суперпозицією функцій f та g).</td>
<td colspan="2">
</td>
</tr>
<tr>
<td>❽ Бінарне відношення</td>
<td colspan="2">$\mathcal{R} = \{(x;y) \mid x \in X, y \in Y\} \subset X \times Y$</td>
</tr>
</table>

1.8. Потужність множин

❶ ***Скінченна множина.*** Множину A називають *скінченною*, якщо вона має скінченну кількість елементів.	Кількість усіх підмножин n-елементної скінченної множини дорівнює 2^n.
❷ ***Рівнопотужні множини.*** Множини A та B називають *рівнопотужними*, якщо між їхніми елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність і позначають $A \sim B$.	❸ ***Зліченна множина.*** Множину A називають *зліченною*, якщо $A \sim \mathbb{N}$. Елементи множини A можна *занумерувати*.
❹ ***Властивості скінченних, нескінченних і зліченних множин***	
① Множина A скінченна тоді й лише тоді, коли $A \sim \{1, 2, ..., n\}$. ② Множина A нескінченна тоді й лише тоді, коли існує множина $B \subset A, B \neq A$, така, що $A \sim B$. ③ Нескінченна підмножина зліченної множини зліченна.	④ Нескінченна множина містить зліченну підмножину. ⑤ Множини $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ — зліченні, множини $\mathbb{I}, \mathbb{R}$ — незліченні. ⑥ Декартів добуток зліченних множин є зліченною множиною.

1.9. Дії над числами. Дроби

❶ *Додавання.* $a+b=c$ доданок + доданок = сума	**❷ *Множення.*** $a\cdot b=c$ множник · множник = добуток
❸ *Властивості додавання.* ① $x+y=y+x$ (*комутативність*); ② $x+(y+z)=(x+y)+z$ (*асоціативність*); ③ $x+0=x$ (*існування нуля*); ④ $x+(-x)=0$ (*існування протилежного числа* $(-x)$);	**❹ *Властивості множення.*** ① $x\cdot y=y\cdot x$ (*комутативність*); ② $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ (*асоціативність*); ③ $1\cdot x=x$ (*існування одиниці*); ④ $x\cdot x^{-1}=1$ $(x\neq 0)$ (*існування оберненого числа* x^{-1});
⑤ $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$ (*дистрибутивність множення щодо додавання*).	
❺ *Віднімання.* $a-b=c$ зменшуване − від'ємник = різниця	**❻ *Ділення.*** $a:b=c$ $(b\neq 0)$ ділене : дільник = частка
❼ *Правило знаків для множення й ділення*	
$+\cdot+=+$ $\quad +\cdot-=-$ $-\cdot+=-$ $\quad -\cdot-=+$	$+:+=+$ $\quad +:-=-$ $-:+=-$ $\quad -:-=+$
❽ *Порядок арифметичних дій*	$a\overset{⑤}{+}b\overset{③}{:}c\overset{④}{\cdot}(d\overset{①}{+}e\overset{②}{-}f)$
❾ *Звичайні дроби* $\dfrac{x}{y}$ $\quad \dfrac{\text{чисельник}}{\text{знаменник}}$ $\quad (x,y\in\mathbb{Z}, y\neq 0)$	Якщо $0<a<b$, то дріб $\dfrac{a}{b}$ називають *правильним*, а якщо $a\geq b>0$, то — *неправильним*.
❿ *Виділення цілої частини* неправильного дробу	$\dfrac{a}{b}=\dfrac{bq+r}{b}=q+\dfrac{r}{b}$, $a,b\in\mathbb{Z}, 0\leq r<\lvert b\rvert$ q — *неповна частка*, r — *остача*
⓫ *Дії з дробами* (знаменники всіх дробів відмінні від нуля)	
① $\dfrac{ac}{bc}=\dfrac{a}{b}$;	де $m=\text{НСК}(b,d), k=\dfrac{m}{b}, l=\dfrac{m}{d}$;
② $\dfrac{a}{c}\pm\dfrac{b}{c}=\dfrac{a\pm b}{c}$;	④ $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$;
③ $\dfrac{a}{b}\pm\dfrac{c}{d}=\dfrac{ak}{m}\pm\dfrac{cl}{m}=\dfrac{ak\pm cl}{m}$,	⑤ $\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bc}, c\neq 0$

1.10. Відсотки. Пропорції

❶ ***Відсотки.*** *Відсоток (процент)* числа a — одна сота частина a.	$1\%\,a = \frac{a}{100} = 0{,}01a$
❷ ***Задачі на відсотки***	
① Знаходження ***відсотків*** числа	$p\%\,a = \frac{pa}{100}$
② Знаходження ***числа*** за відсотками	$p\%a = b \Rightarrow a = b : \frac{p}{100} = \frac{b}{p}\cdot 100$
③ Знаходження ***процентного відношення*** чисел	число a становить $\frac{a}{b}\cdot 100\%$ від числа b
④ Якщо число a ***збільшити*** на $p\%$, то дістанемо число	$a\left(1+\frac{p}{100}\right)$
⑤ Якщо число a ***зменшити*** на $p\%$, то дістанемо число	$a\left(1-\frac{p}{100}\right)$
⑥ ***Формула складених відсотків.*** Якщо A — початковий вклад, p — річний відсоток, то наприкінці n-го року вклад становитиме	$A\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$
❸ ***Пропорція.*** *Пропорцією* називають рівність двох відношень: $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, b\neq 0, d\neq 0,$$ де a, d — *крайні* члени пропорції; b, c — *середні* члени пропорції	❹ ***Властивості пропорції.*** ① $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$; ② $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{c}=\frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$; ③ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$
❺ Задачі на ***пропорцію***	① $\frac{a}{x}=\frac{c}{d} \Rightarrow x=\frac{ad}{c}$; ② $\frac{x}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow x=\frac{bc}{d}$
❻ Поділ числа a ***у відношенні*** $k : l$	$\frac{ak}{k+l}$ та $\frac{al}{k+l}$
❼ ***Масова частка речовини.*** Якщо суміш містить k речовин масою $m_1, m_2, \ldots, m_k$, то масова концентрація i-ї речовини	$x_i = \frac{m_i}{m_1+m_2+\ldots+m_k}$, $i = 1, 2, \ldots, k$

1.11. Подільність натуральних чисел

❶ ***Ділення націло.*** Натуральне число a *ділиться* на натуральне число b (позначають $a \vdots b$), якщо існує натуральне число c таке, що $a = bc$. Якщо $a \vdots b$, то b — *дільник* a, число a *кратне* b, c — *частка*.

❷ ***Ділення з остачею.*** Якщо a — ділене, b — дільник і

$$a = bc + r,\ r < b,$$

то c — *неповна частка*, r — *остача*. Число a *рівне* r *за модулем* b.

$$a \equiv r \pmod{b}$$

❸ ***Основні властивості подільності*** $(a, b, c \in \mathbb{N})$

① $0 \vdots a$;
② $a \vdots 1$;
③ $a \vdots a$;
④ $a \vdots b, b \vdots a \Rightarrow a = b$;
⑤ $a \vdots b, b \vdots c \Rightarrow a \vdots c$;
⑥ $a \vdots (bc) \Rightarrow a \vdots b, a \vdots c$

❹ ***Ознаки подільності числа*** $m = \overline{\alpha_1 ... \alpha_{n-1}\alpha_n}, \Sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$

① $m \vdots 2$	$\alpha_n \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$	④ $m \vdots 5$	$\alpha_n \in \{0, 5\}$
② $m \vdots 3$	$\Sigma \vdots 3$	⑤ $m \vdots 9$	$\Sigma \vdots 9$
③ $m \vdots 4$	$\overline{\alpha_{n-1}\alpha_n} \vdots 4$	⑥ $m \vdots 10$	$\alpha_n = 0$

❺ ***Парні числа*** Натуральне число називають *парним*, якщо воно ділиться націло на 2. Його можна записати у вигляді $n = 2k, k \in \mathbb{N}$

❻ ***Непарні числа*** Натуральне число називають *непарним*, якщо воно не ділиться націло на 2. Його можна записати у вигляді $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$

❼ ***Прості і складені числа.*** *Простим* числом називають натуральне число, яке має лише два різних дільники — одиницю й саме число. Натуральне число, яке має більше як два різних дільники, називають *складеним*. Число 1 не належить ані до простих, ані до складених.

❽ ***Основна теорема подільності.*** Будь-яке натуральне число, більше за одиницю, можна розкласти в добуток простих чисел, причому цей добуток єдиний з точністю до порядку співмножників.

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k},$$

де p_i — прості числа, $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

❾ ***Найбільший спільний дільник.*** *Найбільшим спільним дільником* натуральних чисел a та b називають найбільше число, на яке ділиться і число a, і число b і позначають

$$\text{НСД}(a, b).$$

❿ ***Найменше спільне кратне.*** *Найменшим спільним кратним* натуральних чисел a та b називають найменше число, яке ділиться як на число a, так і на число b, і позначають

$$\text{НСК}(a, b).$$

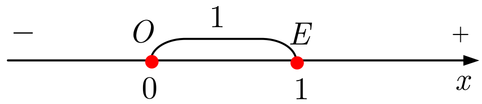
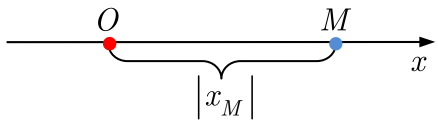
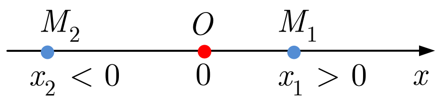
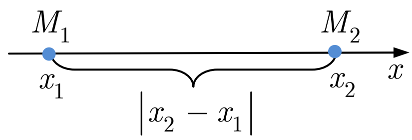
$$\text{НСД}(a, b) \cdot \text{НСК}(a, b) = ab$$

⓫ ***Алгоритм знаходження НСД.*** ① Розкладають задані числа на прості множники. ② Складають добуток зі спільних простих множників, узятих з найменшим показником степеня.	⓬ ***Алгоритм знаходження НСК.*** ① Розкладають задані числа на прості множники. ② Складають добуток з усіх простих множників, узятих з найбільшим показником степеня.

1.12. Деякі спеціальні нерівності

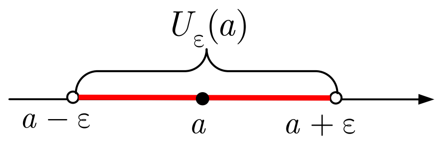
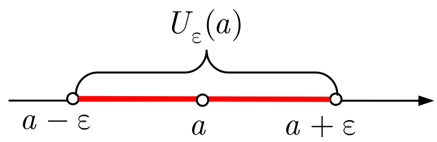
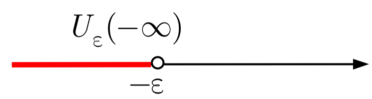
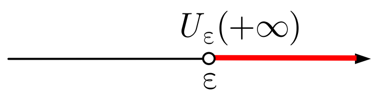
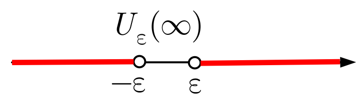
❶ ***Порівняння дійсних чисел.*** Для будь-яких дійсних чисел a та b встановлено одне із трьох відношень:	① $a = b$ (a дорівнює b); ② $a < b$ (a менше від b, b більше за a); ③ $a > b$ (a більше за b, b менше від a)
❷ ***Властивості рівностей.*** ① Якщо $a = b, b = c$, то $a = c$. Якщо $a = b$, то: ② $a \pm c = b \pm c$; ③ $ac = bc$; ④ $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, $c \neq 0$	❸ ***Властивості нерівностей.*** ① Якщо $a < b, b < c$, то $a < c$. Якщо $a < b$, то: ② $a \pm c < b \pm c$; ③ $ac < bc, c > 0$ і $ac > bc, c < 0$; ④ $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$, $c > 0$ і $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$, $c < 0$
❹ ***Нерівність Бернуллі***	$(1+h)^n > 1 + nh \quad (h > -1, n \in \mathbb{N})$
❺ ***Середнє арифметичне*** чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$	$A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$
❻ ***Середнє геометричне*** чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$	$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \quad (a_k \geq 0, k = \overline{1,n})$
❼ ***Середнє гармонічне*** чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$	$H_n = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$ $(a_k > 0, k = \overline{1,n})$
❽ ***Середнє квадратичне*** чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$	$S_n = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$
❾ ***Співвідношення між середніми***	$H_n \leq G_n \leq A_n \leq S_n$ $(a_k > 0, k = \overline{1,n})$
❿ ***Нерівність Коші***	$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ $(a_k \geq 0, k = \overline{1,n})$

1.13. Числова вісь

❶ ***Модуль дійсного числа.*** *Модулем* (*абсолютною величиною*) дійсного числа x називають число	$\lvert x \rvert = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
❷ ***Нескінченності.*** Множину дійсних чисел доповнюють елементами, які називають *плюс нескінченністю* та *мінус нескінченністю* і позначають $+\infty$ та $-\infty$, уважаючи при цьому, що:	1) $x + (+\infty) = +\infty$, $x - (+\infty) = -\infty \ \ \forall x \in \mathbb{R}$; 2) $x(+\infty) = +\infty$, $x(-\infty) = -\infty \ \ \forall x > 0$; 3) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$; 4) $-\infty < x < +\infty \ \forall x \in \mathbb{R}$
❸ ***Числова вісь.*** *Числовою* (*координатною*) *віссю* називають пряму, на якій вибрано: 1) початок — точку O; 2) додатний напрям; 3) масштаб.	 Між точками числової осі і множиною дійсних чисел можна встановити взаємно однозначну відповідність.
❹ ***Правило*** зображення дійсного числа x_M точкою числової осі M: 1) $\lvert OM \rvert = \lvert x_M \rvert$; 2) якщо $x_M < 0$, то точка M розташована ліворуч від точки O, якщо $x_M = 0$, то точка $M = O$; якщо $x_M > 0$, то точка M розташована праворуч від точки O.	  Число x називають *координатою* точки M на числовій осі і позначають $M(x)$.
❺ ***Віддаль між точками.*** *Віддаль* між точками $M_1(x_1)$ та $M_2(x_2)$ на прямій знаходять за формулою $d(M_1, M_2) = \lvert x_2 - x_1 \rvert$.	

1.14. Числові проміжки

❶ ***Відрізок*** $[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
❷ ***Інтервал*** $(a;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	

❸ ***Півінтервали***	
① $[a;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	
② $(a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	
❹ ***Нескінченні проміжки***	
① $(a;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	
② $(-\infty;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	
③ $[a;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$	
④ $(-\infty;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$	
⑤ $(-\infty;+\infty) = \mathbb{R}$	
❺ ε-***окіл*** точки $a \in \mathbb{R}$. $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \big\| \|x-a\| < \varepsilon\} =$ $= (a-\varepsilon; a+\varepsilon), \varepsilon > 0$	
❻ ***Проколений*** ε-***окіл*** точки $a \in \mathbb{R}$. $U_\varepsilon(a) \setminus \{a\} =$ $= \{x \in \mathbb{R} \big\| 0 < \|x-a\| < \varepsilon\} =$ $= (a-\varepsilon; a) \cup (a; a+\varepsilon)$	
❼ ε-***окіл*** точки $-\infty$ $U_\varepsilon(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} \big\| x < -\varepsilon\} =$ $= (-\infty; -\varepsilon)$	
❽ ε-***окіл*** точки $+\infty$ $U_\varepsilon(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \big\| x > \varepsilon\} =$ $= (\varepsilon; +\infty)$	
❾ ε-***окіл*** точки ∞ $U_\varepsilon(\infty) = \big\{x \in \mathbb{R} \big\| \|x\| > \varepsilon\big\} =$ $= (-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty)$	

1.15. Обмежені множини

❶ ***Обмежені множини***	
① Множину $A \subset \mathbb{R}$ називають *обмеженою зверху*, якщо $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A \Rightarrow x \le M.$ M — *верхня межа* множини A.	② Множину $A \subset \mathbb{R}$ називають *обмеженою знизу*, якщо $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in A \Rightarrow x \ge m.$ m — *нижня межа* множини A.

③ Множину $A \subset \mathbb{R}$ називають *обмеженою*, якщо вона обмежена зверху і знизу.	$\exists C > 0 : \forall x \in A \Rightarrow \lvert x \rvert \le C.$
❷ ***Точні межі множини.*** Найменшу з усіх верхніх (найбільшу з усіх нижніх) меж обмеженої зверху (знизу) множини $A \subset \mathbb{R}$ називають *точною верхньою* (*нижньою*) *межею* і позначають $\sup A$ $(\inf A)$.	
① Число $M \in \mathbb{R}$ є *точною верхньою межею* множини $A \subset \mathbb{R}$, якщо: 1) $\forall x \in A : x \le M$; 2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in A : x' > M - \varepsilon$. Позначають $M = \sup A$	② Число $m \in \mathbb{R}$ є *точною нижньою межею* множини $A \subset \mathbb{R}$, якщо: 1) $\forall x \in A : x \ge m$; 2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in A : x' < m + \varepsilon$. Позначають $m = \inf A$
❸ ***Існування точних меж.*** Будь-яка обмежена зверху непорожня множина дійсних чисел має точну верхню межу, а будь-яка обмежена знизу — точну нижню межу.	Для необмеженої зверху множини вважають, що $\sup A = +\infty$. Для необмеженої знизу множини A вважають, що $\inf A = -\infty$.

1.16. Прогресії

❶ ***Арифметична прогресія***	$\{a_n\} = a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \ldots$
① Означення (d — *різниця* прогресії)	$a_{n+1} = a_n + d$
② n-*й член*	$a_n = a_1 + d(n-1)$
③ *Характеристична* властивість	$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, n \ge 2$
④ *Сума n перших членів*	$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$
❷ ***Геометрична прогресія***	$\{b_n\} = b_1, b_1 q, b_1 q^2, \ldots$
① *Означення* (q — *знаменник* прогресії)	$b_{n+1} = b_n q\ (b_1 \ne 0, q \ne 0)$
② n-*й член*	$b_n = b_1 q^{n-1}$
③ *Характеристична* властивість	$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}, n \ge 2$
④ *Сума n перших членів*	$S_n = b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, q \ne 1$
⑤ *Сума нескінченно спадної геометричної прогресії*	$S = \dfrac{b_1}{1 - q},\ \lvert q \rvert < 1$

1.17. Елементи комбінаторики

<table>
<tr><td rowspan="2">❶ Факторіал
$(n \in \mathbb{N})$</td><td colspan="2">$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n;\ \ 0! = 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(n+1)! = n!(n+1)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">❷ Подвійний факторіал
$(k \in \mathbb{N})$</td><td colspan="2">$(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">❸ Розміщення. Розміщенням з n елементів по k елементів $(0 \le k \le n)$ називають будь-який упорядкований набір з k елементів n-елементної множини. Розміщення різняться одне від одного або складом елементів або порядком їх розташування.</td><td colspan="2">Кількість розміщень</td></tr>
<tr><td>без повторення</td><td>з повтореннями</td></tr>
<tr><td>$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$</td><td>$\tilde{A}_n^k = n^k$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">❹ Перестановка. Перестановкою з n елементів (без повторень) називають будь-яку впорядковану підмножину з n елементів заданої множини. Перестановки різняться одна від одної лише порядком розташування елементів.</td><td colspan="2">Кількість перестановок
$(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$</td></tr>
<tr><td>без повторення</td><td>з повтореннями</td></tr>
<tr><td>$P_n = n!$</td><td>$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) =$
$= \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">❺ Комбінація. Комбінацією з n елементів по k елементів $(0 \le k \le n)$ називають будь-який набір з k елементів n-елементної множини. Комбінації різняться одна від одної лише складом елементів.</td><td colspan="2">Кількість комбінацій</td></tr>
<tr><td>без повторення</td><td>з повтореннями</td></tr>
<tr><td>$C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$</td><td>$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$</td></tr>
<tr><td>❻ Правило суми. Якщо об’єкт a можна вибрати m способами, а об’єкт b — іншими n способами, то вибір «або a, або b» можна здійснити $m+n$ способами.</td><td colspan="2">❼ Правило добутку. Якщо об’єкт a можна вибрати m способами і після кожного з таких виборів об’єкт b можна вибрати n способами, то вибір «a та b» (у вказаному порядку) можна здійснити mn способами.</td></tr>
<tr><td>❽ Властивості A_n^k.
① $A_n^n = A_n^{n-1} = P_n = n!$;
② $A_n^0 = 1$;
③ $A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k$</td><td colspan="2">❾ Властивості C_n^k.
① $C_n^k = C_n^{n-k}, k = 0, 1, \ldots, n$;
② $C_n^0 = C_n^n = 1$;
③ $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}, k = 0, 1, \ldots, n-1$;
④ $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$</td></tr>
</table>

1.18. Біноміальна формула Ньютона

❶ ***Сума*** n доданків $a_1, a_2, \ldots, a_n$	$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

❷ ***Біноміальна формула Ньютона.***

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

❸ ***Біноміальний коефіцієнт***	$C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$

❹ ***Паскалів трикутник***

$(a+b)^0 = 1$	C_0^0	1
$(a+b)^1 = a + b$	$C_1^0 \quad C_1^1$	1 1
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$	$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$	$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$	1 4 6 4 1

❺ ***Формули скороченого множення***

① *квадрат суми*	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
② *квадрат різниці*	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
③ *різниця квадратів*	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
④ *куб суми*	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$
⑤ *куб різниці*	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$
⑥ *сума кубів*	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
⑦ *різниця кубів*	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

⑧ $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \ldots + a^2 b^{n-3} + a b^{n-2} + b^{n-1})$

❻ ***Формули перетворення ірраціональностей***

① $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$;

② $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$;

③ $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$;

④ $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$

Практикум 1.1. Елементи математичної логіки

Навчальні задачі

1.1.1. Задано два висловлювання: $p \equiv \{2 < 3\}$ та $q \equiv \{5$ — складене число$\}$. Визначити, істинним чи хибним є висловлювання.

1) $\overline{p}$; 2) $p \vee q$; 3) $p \wedge q$; 4) $p \Rightarrow q$; 5) $\overline{p} \Rightarrow q$; 6) $p \Leftrightarrow \overline{q}$.

Розв'язання. [1.1.]

Висловлювання p — істинне, а висловлювання q — хибне.

Отже, за означенням дій над висловлюваннями, висловлювання:

1) $\overline{p}$ — хибне; 2) $p \vee q$ — істинне; 3) $p \wedge q$ — хибне; 4) $p \Rightarrow q$ — хибне; 5) $\overline{p} \Rightarrow q$ — істинне; 6) $p \Leftrightarrow \overline{q}$ — істинне.

1.1.2. Скласти таблицю істинності для висловлювання $\overline{p} \vee q$ і довести, що $\overline{p} \vee q = p \Rightarrow q$.

Розв'язання. [1.1.3.]

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Порівнюючи таблиці істинності для $\overline{p} \vee q$ та $p \Rightarrow q$, дістаємо

$$\overline{p} \vee q = p \Rightarrow q.$$

1.1.3. Спростити висловлювання $(p \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})) \vee (p \wedge \overline{q})$.

Розв'язання. [1.5.]

$$(p \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})) \vee (p \wedge \overline{q}) \overset{[1.5.3]}{=} \big[(p \vee \overline{p}) \wedge (p \vee \overline{q})\big] \vee (p \wedge \overline{q}) =$$

$$= \big| p \vee \overline{p} \equiv 1;\ 1 \wedge p \equiv p \big| = (p \vee \overline{q}) \vee (p \wedge \overline{q}) \overset{[1.5.3]}{=}$$

$$= \big[(p \vee \overline{q}) \vee p\big] \wedge \big[(p \vee \overline{q}) \vee \overline{q})\big] \overset{[1.1.3]}{=} (p \vee \overline{q}) \wedge (p \vee \overline{q}) \overset{[1.1.3]}{=} p \vee \overline{q}.$$

1.1.4. Узявши за пряму теорему «Якщо чотирикутник — ромб, то його діагоналі взаємно перпендикулярні», записати теореми: обернену, протилежну та протилежну до оберненої та з'ясувати їхню правильність.

Розв'язання. [1.3.1.]

Обернена теорема: «Якщо діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні, то чотирикутник є ромб» (теорема неправдива).
Протилежна теорема: «Якщо чотирикутник не є ромб, то його діагоналі не перпендикулярні» (теорема неправдива).
Теорема, протилежна до оберненої: «Якщо діагоналі чотирикутника не взаємно перпендикулярні, то чотирикутник не є ромб» (теорема правдива).

1.1.5. Визначити тип умови: необхідна, достатня чи необхідна та достатня, накладену на сторони чотирикутника:

1) «Якщо $ABCD$ — квадрат, то $ABCD$ — чотирикутник з перпендикулярними діагоналями»;

2) «Якщо в чотирикутнику сторони рівні між собою, то цей чотирикутник є паралелограмом»;

3) «Чотирикутник є паралелограмом тоді й лише тоді, коли в нього протилежні сторони паралельні та рівні».

Розв'язання. [1.3.2.]
1. Умова перпендикулярності діагоналей є лише необхідною умовою для того, щоб чотирикутник був квадратом, але не є достатньою.
2. Умова рівності сторін є достатньою умовою того, що чотирикутник — паралелограм, але не є необхідною.
3. Умова паралельності та рівності сторін є необхідною та достатньою для того, щоб чотирикутник був паралелограм.

1.1.6. Методом математичної індукції довести, що

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, n \in \mathbb{N}.$$

Розв'язання. [1.3.4.]
[***Крок 1.*** *Перевіряємо правдивість твердження для* $n = 1$.]
Для $n = 1$ рівність правдива:

$$1 \cdot 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}.$$

[***Крок 2.*** *Припускаючи правдивість твердження для* $n = k$, *доводимо твердження для* $n = k + 1$.]
Нехай ця рівність правдива при $n = k$:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Доведімо, що рівність правдива і при $n = k + 1$, тобто

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Справді,

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + k(k+1) + (k+1)(k+2) =$$
$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

[*Крок 3.* *Висновуємо правдивість твердження для будь-якого n.*]
За принципом математичної індукції твердження є правдивим для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

1.1.7. Визначте, чи є речення висловлюванням і якщо так, то встановіть його істинність чи хибність:

1) Місяць — супутник Марса; 2) Париж — столиця Франції;

3) $x > 4$; 4) $y < 4$;

5) усі кішки сірі; 6) існують різні породи собак;

7) $\pi > 3$. 8) $2 \cdot 2 = 5$.

1.1.8. Задано два висловлювання: $p \equiv \{4 - \text{просте число}\}$ та $q \equiv \{\sqrt{5} < \sqrt{6}\}$. Визначте, істинним чи хибним є висловлювання:

1) $\overline{p}$; 2) $\overline{q}$; 3) $p \vee q$; 4) $\overline{p} \vee q$; 5) $\overline{p} \wedge q$; 6) $p \wedge q$; 7) $p \Rightarrow q$; 8) $q \Rightarrow p$; 9) $\overline{p} \Rightarrow q$; 10) $p \Rightarrow \overline{q}$; 11) $p \Leftrightarrow \overline{q}$; 12) $p \Leftrightarrow q$.

1.1.9. По мішені здійснено три постріли. Нехай p_k — висловлювання «мішень уражено k-м пострілом», $k = 1,2,3$. З'ясуйте, що означають такі висловлювання:

1) $p_1 \vee p_2 \vee p_3$; 2) $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$;

3) $(\overline{p}_1 \vee \overline{p}_2) \wedge p_3$; 4) $(p_1 \vee p_2) \wedge \overline{p}_3$?

Які з них істинні, якщо p_3 — істинне, а p_1, p_2 — хибні?

1.1.10. Віктор, Роман, Юрій, Сергій здобули на математичній олімпіаді перші чотири місця. Коли їх спитали про розподіл місць, вони дали такі відповіді:

1) Сергій — перший, Роман — другий;

2) Сергій — другий, Віктор — третій;

3) Юрій — другий, Віктор — четвертий.

Як розподілися місця, якщо в кожній відповіді лише одне твердження істинне?

1.1.11. Складіть таблицю істинності для логічного виразу:

1) $\overline{p} \Rightarrow q$; 2) $p \vee \overline{q}$; 3) $\overline{p \vee q}$; 4) $\overline{p} \wedge \overline{q}$; 5) $\overline{p \wedge q}$; 6) $\overline{p} \vee \overline{q}$; 7) $(p \vee q) \wedge r$; 8) $(p \wedge q) \Rightarrow r$.

1.1.12. Нехай кожному перемикачу перемикальної схеми увідповіднено висловлювання, яке істинне тоді, коли перемикач замкнено, і хибне, коли перемикач розімкнено.

Чи є електричне коло MN (рис. 1) замкненим, якщо відомо, що: 1) $p \wedge q = 1$; 2) $p \wedge q = 0$; 3) $p \vee q = 0$; 4) $\overline{p} \wedge q = 1$; 5) $\overline{p} \vee q = 0$?

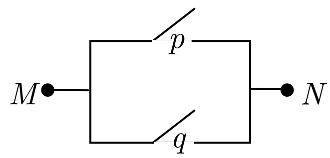


Рис. 1 до 1.1.12

1.1.13. Чи є електричне коло MN (рис. 1) замкненим, якщо відомо, що: 1) $\overline{p} \wedge \overline{q} = 1$; 2) $\overline{p} \vee q = 0$; 3) $p \wedge q = 1$?

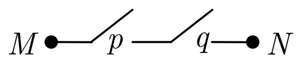


Рис. 1 до 1.1.13

1.1.14. Спростіть висловлювання:

1) $(p \wedge q) \vee ((r \vee p) \wedge q)$;

2) $(r \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r)$;

3) рис. 1 до 1.1.14;

4) рис. 2 до 1.1.14;

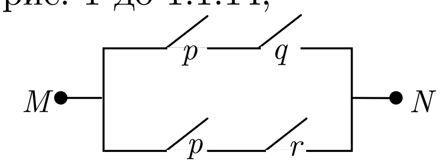


Рис. 1 до 1.1.14

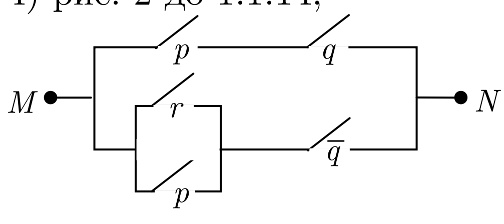


Рис. 2 до 1.1.14

1.1.15. Розрив ділянки електричного кола (подія A) (рис. 1—3) може виникнути внаслідок виходу з ладу елементів $\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$ (відповідно, події A_1, A_2, A_3). Виразіть подію A через події A_1, A_2, A_3.

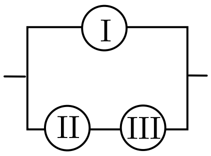


Рис. 1 до 1.1.15

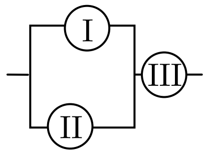


Рис. 2 до 1.1.15

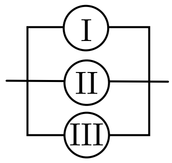


Рис. 3 до 1.1.15

1.1.16. З'ясуйте зміст висловлювання і встановіть, істинне воно чи хибне $(x, y \in \mathbb{R})$:

1) $\forall x : x^2 > x \Leftrightarrow (x > 1 \vee x < 0)$; 6) $\exists x : \sqrt{x^2} < x$;

3) $\forall x \, \exists y : x + y = 3$; 4) $\exists y \, \forall x : x + y = 3$;

5) $\exists x \, \exists y : x + y = 3$; 6) $\forall x \, \forall y : x + y = 3$.

7) $\forall b \, \exists a \, \forall x : x^2 + ax + b = 0$; 8) $\exists b \, \forall a \, \exists x : x^2 + ax + b = 0$;

9) $\exists b \, \forall a \, \exists x : x^2 + ax + b = 0$.

1.1.17. Побудуйте заперечення висловлювання та з'ясуйте, істинне воно чи хибне:

1) $\forall x : (x > 2 \vee x < 3)$; 2) $\exists x : (x > 10 \wedge x < 9)$.

1.1.18. Замініть крапки виразами «достатньо, але не необхідно», «необхідно, але не достатньо», «необхідно й достатньо» і запишіть висловлювання символічно так, щоб утворились істинні твердження:

1) «для того щоб виграти в лотерею, ... мати хоча б один лотерейний квиток»;

2) «для того щоб сума двох дійсних чисел була числом раціональним, ... щоб кожен доданок був раціональним числом»;

3) «для того щоб трикутник був рівнобедреним, ... щоб кути при основі були рівні».

1.1.19. Визначте, чи правдива теорема:

1) «для того щоб через дві прямі у просторі можна було провести площину, необхідно, щоб прямі перетиналися»;

2) «для того щоб через дві прямі у просторі можна було провести площину, достатньо, щоб прямі перетиналися»?

1.1.20. Сформулюйте обернену, протилежну та обернену до протилежної теореми і з'ясуйте їх правдивість для теореми:

1) «у будь-якому чотирикутнику, який є прямокутником, діагоналі рівні»;

2) «якщо деяке натуральне число ділиться націло на 5, то його квадрат ділиться націло націло на 25».

1.1.21. Методом математичної індукції доведіть, що для будь-якого n:

1) $n(2n^2 - 3n + 1)$ ділиться націло на 6;

2) $n^5 - n$ ділиться націло на 5;

3) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

4) $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{n^2} \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.

Відповіді

1.1.7. 1) хибне; 2) істинне; 3)—4) не є висловлюваннями; 5) істинне; 6) хибне.
1.1.8. 1), 3)—5), 7), 9)—12) — істинні; 2), 6), 8) — хибні.
1.1.9. 1) «Мішень уражено принаймні одним пострілом», істинне; 2) «усі три постріли потрапили в ціль», хибне; 3) «з перших двох пострілів хоча б один постріл невдалий, а третій постріл — удалий», істинне; 4) «з перших двох пострілів хоча б один постріл удалий, а третій постріл — невдалий, хибне.
1.1.10. Сергій, Юрій, Віктор, Роман.
1.1.11.

			1)		2)		3)	4)		5)	6)
p	q	$\overline{p}$	$\overline{p} \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$p \vee \overline{q}$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0

				7)		8)
p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

1.1.12. 1) так; 2) не відомо; 3) ні; 4) так; 5) так. **1.1.13.** 1) ні; 2) ні; 3) так.
1.1.14. 1) $p \vee (\overline{q} \wedge r) = (p \vee r) \wedge q$; 2) r; 3) рис. 1; 4) рис. 2.

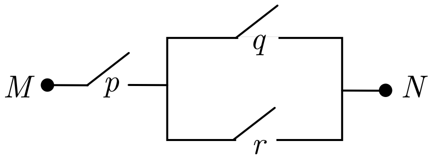


Рис. 1 до 1.1.14

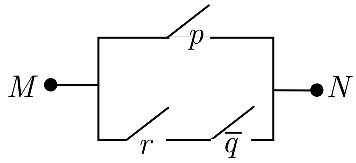


Рис. 2 до 1.1.14

1.1.15. 1) $A = A_1 \wedge (A_2 \vee A_3)$; 2) $A = (A_1 \wedge A_2) \vee A_3$; 3) $A = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$.
1.1.16. 1) істинне; 2) хибне; 3) істинне; 4) хибне; 5) істинне; 6) хибне; 7) істинне; 8) істинне; 9) хибне.
1.1.17. 1) $\exists x : (x \le 2 \wedge x \ge 3)$, хибне; 2) $\forall x : (x \le 10 \vee x \ge 9)$, істинне.
1.1.18. 1) «необхідно, але не достатньо», $P \Rightarrow Q$; 2) «достатньо, але не необхідно», $P \Leftarrow Q$; 3) «необхідно й достатньо», $P \Leftrightarrow Q$.
1.1.19. 1) неправдива; 2) правдива.
1.1.20. 1)—2) пряма та протилежна до оберненої теореми правдиві, обернена та протилежна теореми неправдиві.

Практикум 1.2. Множини

Навчальні задачі

1.2.1. Задати множину:

1) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$ переліком її елементів;

2) $M = \{1, 2, 3\}$ характеристичною умовою.

Розв'язання. [1.4.2.]

1. Розв'язуючи рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$, маємо $x_1 = 1, x_2 = 3$. Отже,
$$M = \{1, 3\}.$$

2. [*Один з можливих варіантів відповіді.*] $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 3\}$.

1.2.2. Записати всі підмножини множини $M = \{1, 2, 3\}$.

Розв'язання. [1.4.3.]

Порожня множина $\varnothing$ є підмножиною будь-якої множини.
Одноелементні підмножини множини M: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$.
Двоелементні підмножини множини M: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$.
Триелементна множина $M = \{1, 2, 3\}$ є своєю підмножиною.
Множина M має $2^3 = 8$ підмножин:
$$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}.$$

1.2.3. Задано множини $A = \{1,2,3\}$ та $B = \{2,3,4,5\}$. Знайти множини $A \cup B$, $A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B$. Зобразити діаграму Ойлера — Вена.

Розв'язання. [1.4.4–1.4.9.]

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}, \quad A \cap B = \{2,3\},$$
$$A \setminus B = \{1\}, \quad B \setminus A = \{4,5\},$$
$$A\Delta B = \{1,4,5\}.$$

Діаграму Ойлера — Вена зображено на рис. 1

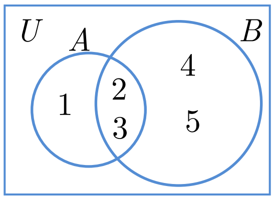


Рис. 1 до 1.2.3.

1.2.4. Задано множини $A = \{1,2\}$ та $B = \{2,3,4\}$. Знайти множини $A \times B$ та $B \times A$.

Розв'язання. [1.4.10.]

$$A \times B = \{(1;2),(1;3),(1;4),(2;2),(2;3),(2;4)\}.$$
$$B \times A = \{(2;1),(2;2),(3;1),(3;2),(4;1),(4;2)\}.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

1.2.5. Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ так, щоб отримати правильне твердження:

1) $5 * \mathbb{N}$; 2) $0 * \mathbb{N}$; 3) $0{,}5 * \mathbb{Z}$; 4) $-5 * \mathbb{Z}$; 5) $\pi * \mathbb{Q}$; 6) $3{,}14 * \mathbb{Q}$.

1.2.6. Визначте, чи правильне твердження:

1) $1 \in \{1,2,3\}$; 2) $1 \notin \{1\}$;

3) $\{1\} \in \{1,2\}$; 4) $\{1\} \in \{\{1\}\}$;

5) $\{1\} \subset \{1,2\}$; 6) $\{1\} \subset \{\{1\}\}$.

7) $\{1,2\} \in \{1,2,\{1,2,3\}\}$; 8) $\{1,2\} \subset \{1,2,\{1,2,3\}\}$;

9) $\{1,2\} \in \{1,2,\{1,2\}\}$; 10) $\{1,2\} \subset \{1,2,\{1,2\}\}$?

1.2.7. Опишіть переліком елементів множину:

1) $M = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x^2 - 4x = -3\right\}$; 2) $M = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x^2 - 3x = 10\right\}$;

3) $M = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x^2 + 1 = 0\right\}$; 4) $M = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x^2 - 2x + 2 = 0\right\}$;

5) $M = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x^3 + x - 2 = 0\right\}$; 6) $M = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x^3 - 3x - 2 = 0\right\}$;

7) правильних дробів зі знаменником 5;

8) правильних дробів, знаменник яких не перевищує 4;

9) множину літер у слові «математика»;

10) множину цифр числа 5555.

1.2.8. Запишіть за допомогою характеристичної умови множину:

1) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; 2) $B = \{2, 4, 6, 8\}$;

3) $C = \{2, 3, 5, 7\}$; 4) $D = \{4, 6, 8, 9\}$.

1.2.9. Запишіть усі підмножини множини M, якщо:

1) $M = \{3, 4\}$; 2) $\{\alpha, \beta\}$;

3) $M = \{5, 6, 12\}$; 4) $\{b, c, d\}$.

1.2.10. Знайдіть множини $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \Delta B, A \times B$ якщо:

1) $A = \{a, b\}, B = \{b, c, f\}$; 2) $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 4\}$.

Перевірте рівність

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),$$

де $n(A)$ — кількість елементів множини A.

1.2.11. На окремих діаграмах Ойлера — Вена зобразьте множини:

1) $A \cap B \neq \varnothing, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cup B, A \cup \overline{B}, \overline{A \cap B}, \overline{A \cup B}$;

2) $A \cap B = \varnothing, A, B, \overline{A}, \overline{B}, A \cup B, \overline{A} \cap B, A \cup \overline{B}, \overline{A \cap B}$;

3) $B \subset A\ (A \neq B), A, B, \overline{A}, \overline{B}, A \cap B, A \cup B, \overline{A} \cap B, A \cup \overline{B}, \overline{A \cap B}$;

4) $A \cap B \cap C \neq \varnothing, A, \overline{B}, B \cap C, A \cup B, A \cup B \cup C, \overline{A \cap B \cap C}$

1.2.12. Відомо, що 26 мешканців будинку тримають котів і собак, 16 з них мають котів, а 15 — собак. Скільки мешканців мають і собаку, і кота?

1.2.13. З анкети, з'ясувалося, що з 30 студентів групи 18 мають брата, 14 — сестру, а в 10 студентів є сестра і брат. Чи є в цій групі студенти, у яких немає ні сестри, ні брата?

Відповіді

1.2.5. 1) $5 \in \mathbb{N}$; 2) $0 \notin \mathbb{N}$; 3) $0{,}5 \notin \mathbb{Z}$; 4) $-5 \in \mathbb{Z}$; 5) $\pi \notin \mathbb{Q}$; 6) $3{,}14 \in \mathbb{Q}$.

1.2.6. 1), 4), 5), 8)—10) правильні; 2), 3), 6, 7) неправильні.

1.2.7. 1) $M = \{1{,}3\}$; 2) $\{-2{,}5\}$; 3) $M = \varnothing$; 4) $M = \varnothing$; 5) $\{1\}$; 6) $\{-1{,}2\}$; 7) $\left\{\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right\}$; 8) $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right\}$; 9) $\{$м, а, т, е, и, к$\}$; 10) $\{5\}$.

1.2.8. 1) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n -$ непарне$, n < 10\}$; 2) $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n -$ парне$, n < 10\}$; 3) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n -$ просте$, n < 10\}$; 4) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n -$ складене$, n < 10\}$.

1.2.9. 1) $\varnothing, \{3\}, \{4\}, \{3,4\}$; 2) $\varnothing, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha,\beta\}$;
3) $\varnothing, \{5\}, \{6\}, \{12\}, \{5,6\}, \{5,12\}, \{6,12\}, \{5,6,12\}$; 4) $\varnothing, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{b,c,d\}$.

1.2.10. 1) $A \cup B = \{a,b,c,f\}, A \cap B = \{b\}, A \setminus B = \{a\}, B \setminus A = \{c,f\}, A\Delta B = \{a,c,f\}$,
$A \times B = \{(a;c),(a;)\}$ $A \times B = \{(a;b),(a;c),(a;f),(b,b),(b,c),(b,f)\}$;
2) $A \cup B = \{1,2,3,4\}, A \cap B = \{2,3,4\}, A \setminus B = \{1\}, B \setminus A = \varnothing, A\Delta B = \{1\}$,
$A \times B = \{(1;2),(1;3),(1;4),(2;2),(2;3),(2;4),(3;2),(3;3),(3;4),(4;2),(4;3),(4;4)\}$.

1.2.12. 5. **1.2.13.** 8.

Практикум 1.3. Дії над числами. Прогресії

Навчальні задачі

1.3.1. Виконати дії:

1) $((34-24)\cdot 5+8\cdot 6):7+5$; 2) $3\cdot(-2)+(-4)\cdot(-5):2$.

Розв'язання. [1.9.1—1.9.9.]

1. [*Порядок арифметичних дій у числовому виразі наступний: спершу виконують дії в дужках, усередині будь-яких дужок спочатку виконують множення та ділення, а потім додавання та віднімання.*]

$$((34\overset{1}{-}24)\overset{2}{\cdot}5\overset{4}{+}8\overset{3}{\cdot}6)\overset{5}{:}7\overset{6}{+}5 = 98:7+5 = 14+5 = 19.$$

2. [*Ураховуємо правило знаків.*]

$$3\cdot(-2)+(-4)\cdot(-5):2 = -6+20:2 = -6+10 = 4.$$

1.3.2. Розкрити дужки у виразі:

1) $2(a+2b-3c)$; 2) $-2(x+y-z)$.

Розв'язання. [1.9.3]

1. $2(a+2b-3c) = 2a+4b-6c$.

2. $-2(x+3y-z) = -2x-6y+2z$.

1.3.3. Винести спільний множник за дужки у виразі:

1) $3a+6b-9$; 2) $xy+y$.

Розв'язання. ***[1.9.3]***

1. $3a+6b-9=\big[3\cdot a+3\cdot(2b)-3\cdot 3\big]=3(a+2b-3)$.
2. $xy+y=\big[x\cdot y+y\cdot 1\big]=y(x+1)$.

1.3.4. Серед чисел $6,8,10,11,12,19$ указати числа:

1) парні; 2) непарні; 3) які діляться на 3; 4) які рівні 1 за модулем 3; 5) які рівні 2 за модулем 3.

Розв'язання. [1.11.2, 1.11.7.]

[*Парні числа закінчуються на цифри* $0,2,4,6,8$.]

Парні числа: $6,8,10,12$.

[*Непарні числа закінчуються на цифри* $1,3,5,7,9$.]

Непарні числа: $11,19$.

[*Числа, які діляться на* 3 *мають суму цифр, що ділиться на* 3.]

$$6\,\vdots\,3,\;\; 8\not\vdots\,3;$$

$$1+0=1\not\vdots\,3,\;\; 1+1=2\not\vdots\,3,\;\; 1+2=3\,\vdots\,3,\;\; 1+9=10\not\vdots\,3.$$

Числа, які діляться на 3: $6,12$.

[*Знаходимо остачі всіх чисел за модулем* 3.]

$$6=3\cdot 2\Rightarrow 6\equiv 0\pmod 3;$$
$$8=3\cdot 2+2\Rightarrow 8\equiv 2\pmod 3;$$
$$10=3\cdot 3+1\Rightarrow 10\equiv 1\pmod 3;$$
$$11=3\cdot 3+2\Rightarrow 11\equiv 2\pmod 3;$$
$$12=3\cdot 4\Rightarrow 12\equiv 0\pmod 3;$$
$$19=3\cdot 6+1\Rightarrow 19\equiv 1\pmod 3.$$

Числа, які рівні 1 за модулем 3: $10,19$.

Числа, які рівні 2 за модулем 3: $8,11$.

1.3.5. Для чисел 12 та 18 знайти: 1) дільники; 2) найбільший спільний дільник; 3) кратні (перших три); 4) найменше спільне кратне.

Розв'язання. [1.11.1, 1.11.9, 1.11.10.]

[*Розкладаємо числа на прості дільники, використовуючи ознаки подільності [1.11.4].***]**

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow 12 = 2^2 \cdot 3; \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow 18 = 2 \cdot 3^2$$

Дільниками числа 12 є: $1, 2, 3, 6, 12$.

Дільниками числа 18 є: $1, 2, 3, 6, 9, 18$.

$$\text{НСД}(12{,}18) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Числами, які кратні 12 є: $12, 24, 36, \ldots$.

Числами, які кратні 18 є: $18, 36, 54, \ldots$.

$$\text{НСК}(12{,}18) = 2^2 \cdot 3^2 = 36.$$

1.3.6. Знайти середнє арифметичне, середнє геометричне, середнє гармонічне та середнє квадратичне чисел: $2, 4, 27$.

Розв'язання. [1.12.5–1.12.8.]

$$A_3 \overset{[1.12.5]}{=} \frac{2+4+27}{3} = \frac{33}{3} = 11; \qquad G_3 \overset{[1.12.6]}{=} \sqrt[3]{2 \cdot 4 \cdot 27} = \sqrt[3]{216} = 6;$$

$$H_3 \overset{[1.12.7]}{=} \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{27}} = \frac{324}{85}; \qquad S_3 \overset{[1.12.8]}{=} \sqrt{\frac{2^2 + 4^2 + 27^2}{3}} = \sqrt{\frac{749}{3}}.$$

1.3.7. Виділити цілу частину дробу $\frac{35}{8}$.

Розв'язання. [1.11.2, 1.9.9.]

[*Задача рівносильна діленню з остачею, де частка стає цілою частиною, остача — чисельником, дільник — знаменником.*]

$$\begin{array}{r|l} -\,35 & 8 \\ \underline{32} & \overline{4} \\ 3 & \end{array} \quad \Leftrightarrow \frac{35}{8} = 4 + \frac{3}{8}.$$

1.3.8. Звести до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{2}{3}$ та $\frac{4}{5}$; 2) $\frac{5}{6}$ та $\frac{2}{9}$.

Розв'язання. [1.11.10.]

[*Для того, щоб звести дроби до спільного знаменника, знаходять найменше спільне кратне знаменників.*]

1. $\text{НСК}(3, 5) = 15$.

$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{10}{15};\quad \frac{4}{5}=\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{12}{15}.$$

2. $\text{НСК}(6,9)=18$.

$$\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 3}{6\cdot 3}=\frac{15}{18};\quad \frac{2}{9}=\frac{2\cdot 2}{9\cdot 2}=\frac{4}{18}.$$

1.3.9. Для дробів $\frac{3}{5}$ та $\frac{2}{7}$ знайти:

1) суму; 2) різницю;

3) добуток; 4) частку.

Розв'язання. [1.9.11.]

[*Для того, щоб додати або відняти дроби, зводимо їх до найменшого спільного знаменника.*]

1. $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}+\frac{2\cdot 5}{7\cdot 5}=\frac{21}{35}+\frac{10}{35}=\frac{31}{35}$.

2. $\frac{3}{5}-\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}-\frac{2\cdot 5}{7\cdot 5}=\frac{21}{35}-\frac{10}{35}=\frac{11}{35}$.

3. $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 7}=\frac{6}{35}$.

4. $\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{2}=\frac{21}{10}$.

1.3.10. Знайти невідомі члени пропорції:

1) $\frac{x}{10}=\frac{2}{5}$; 2) $\frac{8}{y}=\frac{4}{7}$.

Розв'язання*. *[1.10.5.]

1. $x=\frac{10\cdot 2}{5}=4$.

2. $y=\frac{8\cdot 7}{4}=14$.

1.3.11. Знайти 40% від 70 грн.

Розв'язання*. *[1.10.1, 1.10.2.]

Нехай шукане число x. Тоді

70 гривням відповідає 100%,

x гривням відповідає 40%.

[*Складаємо пропорцію.*]

$$\frac{70}{x}=\frac{100}{40}.$$

40% від 70 грн становлять $\dfrac{70\cdot 40}{100}=28$ грн.

1.3.12. Знайти число, якщо 15% його становлять 135.

***Розв'язання*. [1.10.1, 1.10.2.]**

Нехай x — шукане число. Тоді

$$\begin{array}{ll} x & \text{відповідає } 100\%, \\ 135 & \text{відповідає } 15\%. \end{array}$$

$$\frac{x\cdot 15}{100}=135 \Leftrightarrow x=\frac{100\cdot 135}{15}=900.$$

1.3.13. Арифметичну прогресію задано формулою n-го члена $a_n=37-3n$. З'ясувати, чи є членом цієї послідовності число: 19; -7.

***Розв'язання*. [1.16.1.]**

[*Якщо число x є членом заданої прогресії, то існує таке натуральне число n, що $x=37-3n$.*]

$$19=37-3n \Leftrightarrow 3n=18 \Leftrightarrow n=6\in\mathbb{N};$$

$$-7=37-3n \Leftrightarrow 3n=44 \Leftrightarrow n=\frac{44}{3}\notin\mathbb{N}.$$

Число 19 є членом арифметичної прогресії, а число -7 — ні.

1.3.14. Знайти двадцятий член арифметичної прогресії, якщо $a_1=1, d=5$.

***Розв'язання*. [1.16.1.]**

$$a_{20}=1+5(20-1)=96.$$

1.3.15. Знайти суму ста перших парних натуральних чисел.

***Розв'язання*. [1.16.1.]**

Послідовність $2,4,6,\ldots,2n,\ldots$ — арифметична прогресія з першим членом $a_1=2$ та різницею $d=2$. Отже,

$$S_{100}=2+4+6+\ldots+198+200=\frac{2+200}{2}\cdot 100=10100.$$

1.3.16. Визначити, скільки треба взяти членів арифметичної прогресії з $a_1=6$ і $d=2$, щоб їх сума дорівнювала 168.

***Розв'язання*. [1.16.1.]**

$$168 = \frac{6+2(n-1)}{2}n \Leftrightarrow 168 = 2n + n^2 \Rightarrow n = 12.$$

1.3.17. Знайти перший член і знаменник геометричної прогресії, якщо її сума $S_n = 10(2^n - 1)$.

Розв'язання. [1.16.2.]

Нехай b_1 — перший член заданої прогресії, q — її знаменник. Тоді

$$b_1 = S_1 = 10 \cdot (2-1) = 10;$$
$$b_1 + b_2 = S_2 = 10 \cdot (2^2 - 1) = 30.$$

Отже,

$$b_2 = S_2 - b_1 = 30 - 10 = 20; \quad q = \frac{b_2}{b_1} = 2.$$

Перший член $b_1 = 10$, знаменник прогресії $q = 2$.

1.3.18. Подати нескінченний десятковий дріб $0,2(54)$ у вигляді звичайного дробу.

Розв'язання. [1.6.1, 1.6.3, 1.16.2.]

Маємо:

$$0,2(54) = 0,2545454... = 0,2 + 0,054 + 0,00054 + 0,0000054 + ...$$

Вираз $0,054 + 0,00054 + 0,0000054 + ...$ можна розглядати як суму нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом $b_1 = 0,054$ і знаменником $q = 0,01$. Тоді

$$0,054 + 0,00054 + 0,0000054 + ... = 0,054\left(1 + 0,01 + 0,01^2 + ...\right) =$$
$$\overset{[1.16.2]}{=} \frac{0,054}{1-0,01} = \frac{0,054}{0,99} = \frac{3}{55}.$$

Отже,

$$0,2(54) = 0,2 + \frac{3}{55} = \frac{1}{5} + \frac{3}{55} = \frac{14}{55}.$$

1.3.19. Записати число 432_5 у десятковій системі.

Розв'язання.

$$432_5 = 4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 100 + 15 + 2 = 117_{10}.$$

1.3.20. Записати число 3287_{10} у сімковій системі.

Розв'язання.

[Ділячи число 3287 на 7, дістаємо частку 469 та остачу 4. Остання цифра дорівнює **4**.

Ділячи частку 469 знову на 7, дістаємо частку 67, а остача при цьому дорівнює 0. Передостання цифра дорівнює **0**.

Продовжують процес ділення до поки, частка не стає меншою за основу системи числення — 7. Ця остання частка стає першою цифрою числа. Обчислення зручно записувати за схемою].

$$\begin{array}{lllll}
3287 & \multicolumn{1}{|l}{\underline{\;7\;}} & & & \\
\mathbf{4} & 469 & \multicolumn{1}{|l}{\underline{\;7\;}} & & \\
 & \mathbf{0} & 67 & \multicolumn{1}{|l}{\underline{\;7\;}} & \\
 & & \mathbf{4} & 9 & \multicolumn{1}{|l}{\underline{\;7\;}} \\
 & & & \mathbf{2} & \mathbf{1}
\end{array}$$

Отже,

$$3287_{10} = 12404_7.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

1.3.21. Знайдіть найбільший спільний дільник чисел:

1) 120 та 144; 2) 275 та 180;

3) 15876000 та 529200; 4) 3978 та 1716.

1.3.22. Знайдіть найменше спільне кратне чисел:

1) 70 та 112; 2) 74 та 111;

1) 1575 та 1485; 2) 104 та 5746.

1.3.23. Спростіть:

1) $\left(1\frac{1}{3} - 3\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{12}{29}$; 2) $\left(-3\frac{1}{2} + 5\frac{1}{3}\right) : \frac{11}{6}$;

3) $\frac{a-5}{a^2-5a}$; 4) $\frac{b^2+4b}{b+4}$.

1.3.24. Знайдіть відсоткове відношення чисел:

1) 1 до 4; 2) 3 до 5;

3) 5 до 2; 4) $3,2$ до $1,28$.

1.3.25. Знайдіть:

1) 4% від 75; 2) 15% від 84 кг;

3) 160% від 85 грн; 4) 45% від 140 грн.

1.3.26. Знайдіть число, якщо:

1) 40% його дорівнюють 12; 2) $1,25\%$ його дорівнюють 55;

3) $0,8\%$ його дорівнюють $1,84$; 4) 7% його дорівнюють 182.

1.3.27. Поділіть:

1) число 30 у відношення $1:9$; 2) число 44 у відношенні $4:7$;

3) число 48 у відношенні $3:5$; 4) число 72 у відношенні $5:7$.

1.3.28. З'ясуйте, чи є арифметичною прогресією послідовність, якщо так — укажіть її різницю:

1) $3,-6,12,-24$; 2) $4,8,12,16$;

3) $5,10,5,10$; 4) $42,39,36,33$.

1.3.29. 1. Перший член арифметичної прогресії $a_1=4$, різниця $d=0,4$. Знайдіть: a_3, a_{11}.

2. Перший член арифметичної прогресії $a_1=17$, різниця $d=-2$. Знайдіть: a_4, a_{15}.

1.3.30. Між числами -7 та 2 вставте:

1) два числа так, щоб вийшло чотири послідовних члени арифметичної прогресії;

2) три числа так, щоб вийшло п'ять послідовних члени арифметичної прогресії.

1.3.31. В арифметичній прогресії знайдіть:

1) a_{23}, якщо $a_{10}=25, a_{30}=95$; 2) a_2+a_9, якщо $a_5+a_6=18$.

1.3.32. Знайдіть суму:

1) семи перших членів арифметичної прогресії $\{a_n\}$, якщо $a_1=9, a_7=15$;

2) шести перших членів арифметичної прогресії $\{a_n\}$, якщо $a_1=19, a_6=14$;

3) дванадцяти перших членів арифметичної прогресії, перший член якої $a_1=-6$, різниця $d=4$;

4) двадцяти перших членів арифметичної прогресії: $-8, -6, -4, \ldots$;

5) тридцяти двох перших членів арифметичної прогресії, яку задано формулою n-го члена $a_n = -4n + 1$;

6) двадцяти шести перших членів арифметичної прогресії, яку задано формулою n-го члена $a_n = 5n - 2$.

1.3.33. Знайдіть суму всіх:

1) непарних чисел від 1 до 135 включно;

2) двозначних чисел від 10 до 100.

1.3.34. Укажіть геометричні прогресії, перший член і знаменник кожної з них:

1) $2, 6, 18, 36$; 2) $4, 8, 16, 32$;

3) $10, 20, 30, 40$; 4) $81, 27, 9, 3$;

5) $2, -2, 2, -2$; 6) $-9, -9, -9, -9$.

1.3.35. Знайдіть сьомий член геометричної прогресії $\{b_n\}$, якщо:

1) $b_6 = 8, q = -4$; 2) $b_8 = 16, q = \dfrac{3}{4}$.

1.3.36. Знайдіть вказані члени геометричної прогресії, якщо:

1) $y_1 = 64, q = -\dfrac{1}{2}, y_6, y_{10}$; 2) $y_1 = 9, q = -1, y_{21}, y_{50}$.

1.3.37. Знайдіть:

1) знаменник і п'ятий член геометричної прогресії $\dfrac{1}{216}, \dfrac{1}{36}, \dfrac{1}{6}, \ldots$;

2) знаменник і шостий член геометричної прогресії $18, 12, 8, \ldots$.

1.3.38. Знайдіть знаменник геометричної прогресії, якщо:

1) $b_1 = \dfrac{1}{2}, b_8 = 64$; 2) $b_6 = 75, b_8 = 27$.

1.3.39. Знайдіть перший член геометричної прогресії $\{b_n\}$, якщо:

1) $b_4 = \dfrac{1}{98}, q = \dfrac{2}{7}$; 2) $b_6 = 100, b_9 = 100000$.

1.3.40. Знайдіть суму n перших членів геометричної прогресії $\{b_n\}$, зі знаменником q, якщо:

1) $b_1 = 0,6; q = 2, n = 5;$ 2) $b_1 = -4, q = -1, n = 10;$

3) $b_1 = -9; q = \sqrt{3}, n = 6;$ 4) $b_1 = 8, q = -\frac{1}{2}, n = 4.$

1.3.41. Запишіть звичайним дробом нескінченний десятковий періодичний дріб:

1) $0,(1);$ 2) $0,2(6);$

3) $0,(24);$ 4) $1,(18).$

1.3.42. Запишіть у десятковій системі число:

1) 42_5; 2) 31_5; 3) 213_8; 4) 563_8;

5) 11011_2; 6) 101001_2; 7) 123_{16}; 8) ACE_{16}.

1.3.43. Запишіть число x у системі числення з основою p, якщо:

1) $x = 15, p = 5;$ 2) $x = 27, p = 5;$

3) $x = 18, p = 2;$ 4) $x = 43, p = 2;$

5) $x = 25, p = 16;$ 6) $x = 121, p = 16.$

1.3.44. Знайдіть середнє арифметичне та середнє геометричне чисел:

1) $2, 18, 48;$ 2) $3, 15, 25, 45.$

Відповіді

1.3.21. 1) 24; 2) 5; 3) 75600; 4) 78. **1.3.22.** 1) 560; 2) 222; 3) 51975; 4) 22894.
1.3.23. 1) -1; 2) 1; 3) a^{-1}; 4) b. **1.3.24.** 1) 25%; 2) 60%; 3) 250%; 4) 250%.
1.3.25. 1) 3; 2) 4; 3) 136; 4) 63. **1.3.26.** 1) 30; 2) 4400; 3) 230; 4) 2600.
1.3.27. 1) 3 та 27; 2) 16 та 28; 3) 18 та 30; 4) 30 та 42.
1.3.28. 1), 3), 6) ні; 2) $d = 4$; 4) $d = -3$; 5) $d = -2$.
1.3.29. 1) $a_3 = 4,8; a_{11} = 8$; 2) $a_4 = 11, a_{15} = -11$.
1.3.30. 1) $-4, -1$; 2) $-\frac{19}{4}, -\frac{10}{4}, -\frac{1}{4}$. **1.3.31.** 1) $a_{23} = 70,5$; 2) $a_2 + a_9 = 18$.
1.3.32. 1) 84; 2) 99; 3) 192; 4) 220; 5) -2080; 6) 1703. **1.3.33.** 1) 4624; 2) 4905.
1.3.34. 1), 3) ні; 2) $b_1 = 4, q = 2$; 4) $b_1 = 81, q = \frac{1}{3}$; 5) $b_1 = 2, q = -1$; 6) $b_1 = -9, q = 1$.

1.3.35. 1) $b_7 = -32$; 2) $b_7 = \dfrac{64}{3}$. **1.3.36.** 1) $y_6 = -2, y_{10} = -\dfrac{1}{8}$; 2) $y_{21} = 9, y_{50} = -9$.

1.3.37. 1) $q = 6, b_5 = 6$; 2) $q = \dfrac{2}{3}, b_6 = \dfrac{64}{27}$. **1.3.38.** 1) 2; 2) $\dfrac{3}{5}$ або $-\dfrac{3}{5}$.

1.3.39. 1) $\dfrac{7}{16}$; 2) $0,001$. **1.3.40.** 1) $S_5 = 18,6$; 2) $S_{10} = 0$; 3) $S_6 = -\dfrac{234}{\sqrt{3}-1}$; 4) $S_4 = 5$.

1.3.41. 1) $\dfrac{1}{9}$; 2) $\dfrac{4}{15}$; 3) $\dfrac{8}{33}$; 4) $\dfrac{13}{11}$.

1.3.42. 1) 22; 2) 16; 3) 139; 4) 371; 5) 27; 6) 41; 7) 291; 8) 2766.

1.3.43. 1) 30_5; 2) 102_5; 3) 10010_2; 4) 101011_2; 5) 19_{16}; 6) 79_{16}.

1.3.44. 1) $A_3 = \dfrac{68}{3}, G_3 = 12$; 2) $A_4 = 22, G_4 = 15$.

Практикум 1.4. Числова вісь

Навчальні задачі

1.4.1. Розв'яжіть рівняння $|x| = 3$.

Розв'язання. [1.13, 5.14.1–5.14.4.]

I спосіб (аналітичний).

$$|x| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 3, \\ &x = -3 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 3.$$

II спосіб (геометричний).

Геометрично співвідношення $|x| = 3$ означає, що віддаль від точки x до початку координат дорівнює 3, тобто $x = 3$ або $x = -3$ (рис. 1).

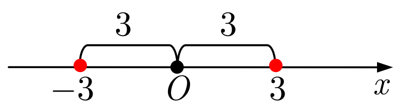


Рис. 1 до 1.4.1

III спосіб (графічний).

[*Знаходимо точки перетину графіка* $y = |x|$ *і прямої* $y = 3$.]

Розв'язками рівняння $|x| = 3$ є числа $x = \pm 3$ (рис. 2).

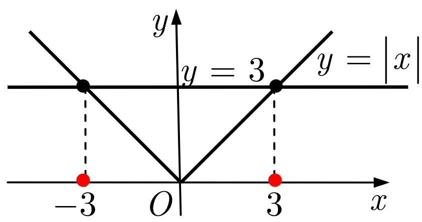


Рис. 2 до 1.4.1

1.4.2. Розв'яжіть нерівність $|x+1| < 2$.

Розв'язання. [5.14.4.]

I спосіб (аналітичний).

$$|x+1| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 < 2, \\ x+1 > -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x > -3, \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-3; 1).$$

II спосіб (геометричний).

Геометрично нерівність $\left|x+1\right|<2$ означає, що віддаль від точки x до точки -1 менша за 2 (рис. 1). Отже, $x\in(-3;1)$.

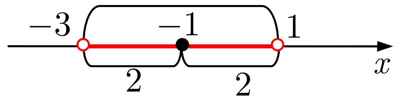


Рис. 1 до 1.4.2

III спосіб (графічний).

[*Будуємо графік* $y=\left|x+1\right|$ *і пряму* $y=2$.]

Розв'язком нерівності $\left|x+1\right|<2$ є проекція на вісь Ox частини графіка $y=\left|x+1\right|$, яка розташована нижче за пряму $y=2$ (рис. 2).

Отже, $x\in(-3;1)$.

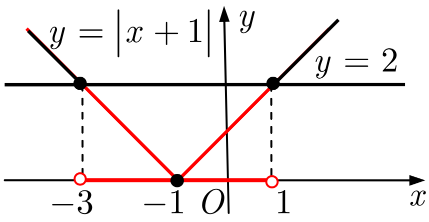


Рис. 2 до 1.4.2

1.4.3. Розв'яжіть нерівність $\left|x+1\right|\geq 2$.

Розв'язання. [5.14.4.]

I спосіб (аналітичний).

$$\left|x+1\right|\geq 2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1\geq 2,\\x+1\leq -2,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 1,\\x\leq -3,\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty).$$

II спосіб (геометричний).

Геометрично нерівність $\left|x+1\right|\geq 2$ означає, що віддаль від точки x до точки -1 не менша за 2 (рис. 1). Отже, $x\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$.

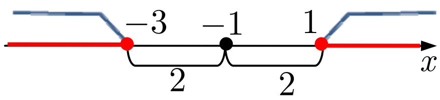


Рис. 1 до 1.4.3

III спосіб (графічний).

[*Будуємо графік* $y=\left|x+1\right|$ *і пряму* $y=2$.]

Розв'язком нерівності $\left|x+1\right|\geq 2$ є проекція на вісь Ox частини графіка $y=\left|x+1\right|$, яка розташована не нижче за пряму $y=2$ (рис. 2).

Отже, $x\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$.

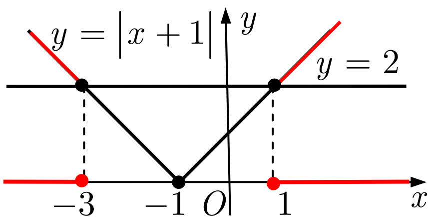


Рис. 2 до 1.4.3

1.4.4. Розкрити модуль у виразі $y=\left|x+2\right|+\left|x-2\right|$.

Розв'язання. [5.14.1.]

Коренями виразів, які стоять під знаком модуля, є числа $x_1=-2, x_2=2$.

Вони розбивають числову вісь на 3 області: $\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III}$ (рис. 1).

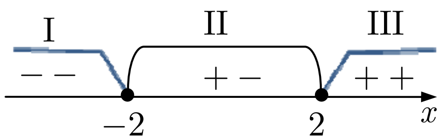


Рис. 1 до 1.4.4

[*Указуємо знаки виразів* $x+2$ *та* $x-2$ *в кожній з цих областей і звільняємось від знака модуля.*]

I. $x < -2, y = -(x+2) - (x-2) = -x - 2 - x + 2 = -2x$.

II. $-2 \le x \le 2, y = (x+2) - (x-2) = x + 2 - x + 2 = 4$.

II. $x > 2, y = (x+2) + (x-2) = x + 2 + x - 2 = 2x$.

1.4.5. Задано множини $A = (-\infty; 3], B = [-2; 4), U = (-\infty; +\infty)$. Знайти множини $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B, \overline{A}, \overline{B}$.

Розв'язання. [1.4.5–1.4.9.]

$$A \cup B = (-\infty; 3] \cup [-2; 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \vee -2 \le x < 4\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\} = (-\infty; 4);$$
$$A \cap B = (-\infty; 3] \cap [-2; 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \wedge -2 \le x < 4\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x < 3\} = A \cap B = [-2; 3],$$
$$A \setminus B = (-\infty; 3] \setminus [-2; 4) = (-\infty; -2);$$
$$B \setminus A = [-2; 4) \setminus (-\infty; 3] = (3; 4);$$
$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (-\infty; -2) \cup (3; 4);$$
$$\overline{A} = U \setminus A = (-\infty; +\infty) \setminus (-\infty; 3] = (3; +\infty);$$
$$\overline{B} = U \setminus B = (-\infty; +\infty) \setminus [-2; 4) = (-\infty; -2) \cup [4; +\infty).$$

1.4.6. Задано множини

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \left|x - 1\right| < 1\}, B = \{x \in \mathbb{R} : \left|x + 1\right| \ge 2\}.$$

Знайти і зобразити множини $A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$.

Розв'язання. [1.4.5–1.4.7.]

[*Знаходимо множини* A *та* B, *розв'язуючи відповідні нерівності.*]

$$\left|x - 1\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 1 < 1;\ 0 < x < 2.$$

$$\left|x + 1\right| \ge 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 \ge 2, \\ x + 1 \le -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 1, \\ x \le -3. \end{array}\right.$$

[*Зображуємо знайдені множини на числових осях. Решту множин можна знаходити як аналітично, так і графічно.*]

Рис. 1.

$A = (0; 2);$
$B = (-\infty; -3] \cup [1; +\infty);$
$A \cup B = (-\infty; -3] \cup (0; +\infty);$
$A \cap B = [1; 2);$

$A \setminus B = (0; 1);$
$B \setminus A = (-\infty; -3] \cup [2; +\infty).$

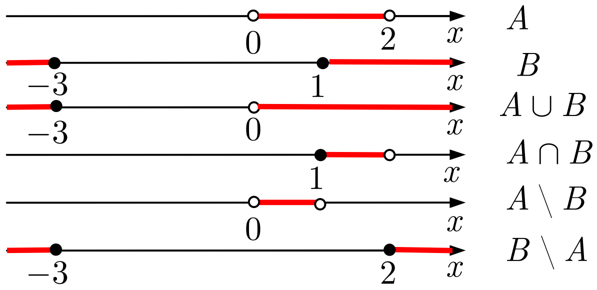


Рис. 1 до 1.4.6

1.4.7. Визначте, які з множин: 1) $A = (-2;1]$; 2) $B = \{0\} \cup [1;+\infty)$; 3) $D = (-\infty;1)$ обмежені знизу, обмежені зверху, обмежені?

Розв'язання. [1.15.1.]

1. Оскільки, для всіх $x \in A$ виконано подвійну нерівність $-2 \le x \le 1$, то множина A — обмежена знизу (нижньою межею може бути будь-яке число $m \le -2$) та обмежена зверху (верхньою межею може бути будь-яке число $M \ge 1$).

Оскільки існує таке число $C = 2$, що для всіх $x \in A$ виконано нерівність $\left|x\right| \le 2$, то множина A обмежена.

2. Оскільки для всіх $x \in B$ виконано нерівність $0 \le x$, то множина B обмежена знизу, але вона не є обмеженою зверху.

3. Оскільки для всіх $x \in D$ виконано нерівність $x \le 1$, то множина D обмежена зверху, але вона не є обмеженою знизу.

1.4.8. Знайти $\sup A, \inf A, \max A, \min A$, якщо $A = [0;2)$.

Розв'язання. [1.15.2.]

Оскільки $\forall x \in [0;2)\ \exists x^* : x < x^*$, то ця множина не має найбільшого елемента.

Множина верхніх меж A — це множина $[2; +\infty)$ з найменшим елементом 2, який і є точною верхньою межею множини $[0; 2)$. Отже, $\sup A = 2$.

Множина нижніх меж — це множина $(-\infty; 0]$ з найбільшим елементом $0 \in A$, який і є точною нижньою межею множини A. Отже, $\min A = \inf A = 0$.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

1.4.9. Запишіть рівнянням або нерівністю задану умову і зобразьте на числовій прямій множину точок $N(x)$, віддаль від яких до точки $M(1)$ числової прямої:

1) дорівнює 2, менша від 2, не менша від 2;

2) дорівнює 3, більша за 3, не більше за 3.

1.4.10. Розв'яжіть рівняння чи нерівність і зобразіть розв'язки на числовій прямій:

1) $|x| = 3$; 2) $|x| = 5$;

1) $|x| \geq 1$; 2) $|x+3| > 2$;

3) $|x+2| < 1$; 4) $|x-1| \leq 3$;

5) $|x| \leq 0$; 6) $|x| > -3$;

7) $1 < |x| \leq 3$; 8) $2 \leq |x+1| < 3$.

1.4.11. Розкрийте модуль у виразі:

1) $|x-2|, x \in (-\infty; 2)$; 2) $|x-2|, x \in (2; +\infty)$;

3) $|2-x| - 4|x-3|, x \in (2; 3)$; 4) $|x-1| - 3|x-5|, x \in [1; 5)$.

5) $|x-3|$; 6) $|x+4|$.

1.4.12. Розв'яжіть рівняння:

1) $|x-1| = 2$; 2) $|x+3| = 1$.

3) $|x| = -2$; 4) $|x| = -3$;

5) $|x| = x$; 6) $|x| = -x$;

7) $|x| + |x-1| = 0$; 8) $|x+2| + |x-2| = 0$;

1.4.13. Запишіть за допомогою знаку модуля нерівність:

1) $-7 < a < 7$; 2) $-1,5 \leq a \leq 1,5$;

3) $a < -2$ або $a > 2$; 4) $a \leq -5$ або $a \geq 5$;

5) $2 < x < 6$; 6) $-4 \le x \le 2$;

7) $x \le 2$ або $x \ge 6$; 8) $x < -4$ або $x > 2$.

1.4.14. Задано множини A та B. Знайдіть множини $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$, $B \setminus A$, якщо:

1) $A = (1;+\infty); B = (-\infty;2)$; 2) $A = (-2;3], B = [2;4)$;

3) $A = \{x \in \mathbb{R} : \left|x+1\right| < 1\}, B = \{x \in \mathbb{R} : \left|x-1\right| \ge 2\}$;

4) $A = \{x \in \mathbb{R} : \left|x\right| > 1\}, B = \{x \in \mathbb{R} : \left|x-1\right| \le 3\}$.

1.4.15. Узявши відрізок $U = [0;1]$ за універсальну множину, запишіть і зобразіть доповнення множини:

1) $A = \{0,1\}$; 2) $B = \left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left[\frac{2}{3};1\right)$;

3) $C = \left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$. 4) $D = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right)$.

1.4.16. Визначте чи є множина обмеженою знизу, обмеженою зверху, обмеженою чи необмеженою:

1) $A_1 = \{x \in \mathbb{R} \big| \left|x\right| < 1\}$; 2) $A_2 = \{x \in \mathbb{R} \big| \left|x\right| > 1\}$;

3) $A_3 = (3;+\infty)$; 4) $A_4 = (-\infty;-2]$;

5) $A_5 = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\right\}$; 6) $A_6 = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

1.4.17. Знайдіть $\max A, \min A$, $\sup A$ та $\inf A$ якщо вони існують, де:

1) $A = (0;1)$; 2) $A = [0;2)$;

3) $A = \{-1\} \cup [2;3]$; 4) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Відповіді

1.4.9. 1) $\left|x-1\right| = 2, \left|x-1\right| < 2, \left|x-1\right| \ge 2$; 2) $\left|x-1\right| = 3, \left|x-1\right| > 3, \left|x-1\right| \le 3$.

1.4.10. 1) $\{-3,3\}$; 2) $\{-5,5\}$; 3) $(-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$; 4) $(-\infty;-5) \cup (-1;+\infty)$; 5) $(-3;-1)$; 6) $[-2;4]$; 7) $\{0\}$; 8) $\mathbb{R}$; 9) $[-3;-1) \cup (1;3]$; 10) $(-4;-3] \cup [1;2)$.

1.4.11. 1) $2-x$; 2) $x-2$; 3) $7x-14$; 4) $4x-16$; 5) $\begin{cases} x-3, & x\ge 3,\\ 3-x, & x<3;\end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+4, & x\ge -4,\\ -x-4, & x<-4.\end{cases}$

1.4.12. 1) $\{-1;3\}$; 2) $\{-4;-2\}$; 3) $\varnothing$; 4) $\varnothing$; 5) $[0;+\infty)$; 6) $(-\infty;0]$; 7) $\varnothing$; 8) $\varnothing$.

1.4.13. 1) $\left|a\right|<7$; 2) $\left|a\right|\le 1,5$; 3) $\left|a\right|>2$; 4) $\left|a\right|\ge 5$; 5) $\left|x-4\right|<2$; 6) $\left|x+1\right|\le 3$; 7) $\left|x-4\right|\ge 2$; 8) $\left|x+1\right|>3$.

1.4.14. 1) $A=(1;+\infty), B=(-\infty;2), A\cup B=(-\infty;+\infty), A\cap B=(1;2), A\setminus B=[2;+\infty)$, $B\setminus A=(-\infty;1]$;

2) $A\cup B=(-2;4)$, $A\cap B=[2;3]$, $A\setminus B=(-2;2)$, $B\setminus A=(3;4)$;

3) $A=(-2;0)$, $B=(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$, $A\cup B=(-\infty;0)\cup[3;+\infty)$, $A\cap B=(-2;-1]$, $A\setminus B=(-1;0)$, $B\setminus A=(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$;

4) $A=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, $B=[-2;4]$, $A\cup B=(-\infty;+\infty)$, $A\cap B=[-2;-1)\cup(1;4]$, $A\setminus B=(-\infty;-2]\cup(4;+\infty)$, $B\setminus A=[-1;1]$.

1.4.15. 1) $\bar{A}=(0;1)$; 2) $\bar{B}=\left[0;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)\cup\{1\}$; 3) $\bar{C}=\left[0;\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{1}{2};1\right]$;

4) $D=\left[0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{3}{4};1\right]$.

1.4.16. 1) обмежена; 2) необмежена; 3) обмежена знизу; 4) обмежена зверху; 5) обмежена; 6) обмежена.

1.4.17. 1) $\nexists\max A, \nexists\min A, \sup A=1$, $\inf A=0$; 2) $\nexists\max A, \sup A=2, \min A=\inf A=0$; 3) $\max A=\sup A=3, \min A=\inf A=-1$; 4) $\max A=\sup A=1, \nexists\min A, \inf A=0$.

Практикум 1.5. Елементи комбінаторики

Навчальні задачі

1.5.1. Обчислити: 1) $\sum\limits_{k=1}^{5}(2k-1)$; 2) $5\,!$; 3) $5\,!!$.

Розв'язання. [1.18.1, 1.17.1, 1.17.2.]

1. $\sum\limits_{k=1}^{5}(2k-1) \overset{[1.18.1]}{=} 1+3+5+7+9=25.$

2. $5\,! \overset{[1.17.1]}{=} 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120.$

3. $5\,!! \overset{[1.17.2]}{=} 1\cdot 3\cdot 5=15.$

1.5.2. Скоротити дріб:

1) $\dfrac{(n+2)\,!}{n\,!}$; 2) $\dfrac{k\,!}{(k-3)\,!}$.

Розв’язання. [1.17.1.]

1. $\dfrac{(n+2)!}{n!} = \dfrac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = (n+2)(n+1).$

2. $\dfrac{k!}{(k-3)!} = \dfrac{k(k-1)(k-2)(k-3)!}{(k-3)!} = k(k-1)(k-2).$

1.5.3. Нехай з міста A в місто B веде 5 доріг, а з міста B в місто C — 3 дороги. Нехай, крім того, з міста A у місто D можна потрапити двома шляхами, а з D в C — чотирма. Скількома способами можна потрапити з A в C?

Розв’язання. [1.17.6, 1.17.7.]

Можливі два випадки: шлях з A до C проходить через місто B або D. У кожному з цих випадків кількість можливих маршрутів можна підрахувати за правилом множення: у першому випадку маємо

$$5 \cdot 3 = 15;$$

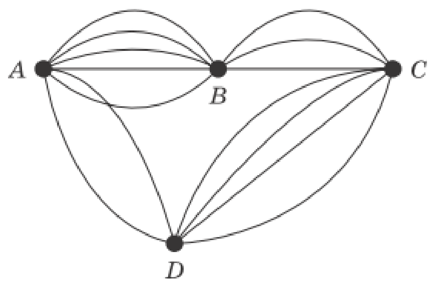


Рис. 1 до 1.5.3

у другому —

$$2 \cdot 4 = 8.$$

Кількість усіх маршрутів можна підрахувати за правилом додавання:

$$15 + 8 = 23.$$

1.5.4. За навчальним планом студенти протягом семестру вивчають 8 дисциплін. Щодня заплановано 3 пари з різних дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять на один день?

Розв’язання. [1.17.3]

Усі можливі розклади занять на один день — це розміщення з 8 елементів по 3, оскільки вони можуть різнитися дисциплінами або порядком. Тому кількість способів складання розкладу на один день

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

1.5.5. До буфету одночасно зайшло чотири студенти. Скількома способами вони можуть утворити чергу?

Розв’язання. [1.17.3]

Кількість способів утворити чергу — це кількість перестановок з 4 елементів:

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

1.5.6. У чемпіонаті країни з футболу беруть участь 16 команд. Скільки матчів усього грають протягом одного кола (тобто кожні команди зустрічаються між собою один раз)?

Розв'язання. [1.17.5]

У колі відбудеться стільки матчів, скільки існує двохелементних підмножин у множині, яка містить 16 елементів, тобто їхня кількість дорівнює кількості комбінацій із 16 по 2:

$$C_{16}^2 = \frac{16\,!}{14\,!\,2\,!} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120.$$

1.5.7. Шифр кодового замка складається з чотирьох цифр. Скільки різних комбінацій можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри в коді можуть повторюватись?

Розв'язання*. *[1.17.5]

Якщо цифри в коді можуть повторюватись, то на кожній позиції може стояти будь-яка з п'яти цифр, тобто загальна кількість варіантів — кількість розміщень з 5 елементів по 4 з повтореннями:

$$\tilde{A}_5^4 = 5^4 = 625.$$

1.5.8. Піднести до квадрату:

1) $(x-2)^2$; 2) $(2a+3)^2$.

Розв'язання. [1.18.4.]

1. $(x-2)^2 = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 = x^2 - 4x + 4.$

2. $(2a+3)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3 + 3^2 = 4a^2 + 12a + 9.$

1.5.9. Піднести до кубу:

1) $(x+2)^3$; 2) $(2a-3)^3$.

Розв'язання*. *[1.18.4.]

1. $(x+2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8.$

2. $(2a-3)^3 = (2a)^3 - 3 \cdot (2a)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2a \cdot 3^2 - 3^3 = 8a^3 - 36a^2 + 54a - 27.$

1.5.10. Розкласти за формулою різниці квадратів:

1) $a^2 - 4b^2$; 2) $4a^{10} - 1$.

Розв'язання. [1.18.5.]

1. $a^2 - 4b^2 = a^2 - (2b)^2 = (a-2b)(a+2b).$

2. $4a^{10} - 1 = (2a^5)^2 - 1^2 = (2a^5 - 1)(2a^5 + 1).$

1.5.11. Розкласти за формулою різниці (суми) кубів:

1) $27 - a^3$; 2) $a^6 + 125$.

Розв'язання. [1.18.5.]

1. $27 - a^3 = 3^3 - a^3 = (3 - a)(9 + 3a + a^2)$.
2. $a^6 + 125 = (a^2)^3 + 5^3 = (a^2 + 5)(a^4 - 5a^2 + 25)$.

1.5.12. Розкласти біном $(a + b)^6$.

Розв'язання*. *[1.18.2—1.18.4.]

[*Виписуємо формулу для бінома у згорнутому вигляді і розгортаємо його.***]**

$$(a+b)^6 \overset{[1.18.2]}{=} \sum_{k=0}^{6} C_6^k a^{6-k} b^k =$$

$$= C_6^0 a^6 b^0 + C_6^1 a^5 b^1 + C_6^2 a^4 b^2 + C_6^3 a^3 b^3 + C_6^4 a^2 b^4 + C_6^5 a^1 b^5 + C_6^6 a^0 b^6.$$

[*Обчислюємо біноміальні коефіцієнти.***]** ①

$$C_6^0 = C_6^6 = 1;\ C_6^1 = C_6^5 \overset{[1.18.3]}{=} \frac{6!}{1!5!} = 6;$$

$$C_6^2 = C_6^4 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15;\ C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

[*Підставляємо знайдені коефіцієнти в розклад.***]**

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

***Коментар*.** ① Для невеликих n біноміальні коефіцієнти можна знаходити за трикутником Паскаля [1.18.4].

1.5.13. Спростити вираз:

1) $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$.

Розв'язання*. *[1.18.4, 1.18.5, 5.3.6.]

1. $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} =$
$= \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2.$
2. $\sqrt{7-2\sqrt{6}} = \sqrt{1 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{(1-\sqrt{6})^2} = \left|1 - \sqrt{6}\right| =$
$= -(1-\sqrt{6}) = \sqrt{6} - 1.$

1.5.14. Розкласти за формулою різниці квадратів:

1) $x - y$; 2) $\sqrt{x} - \sqrt{y}$.

Розв'язання*. *[1.18.5.]

1. $x - y = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.
2. $\sqrt{x} - \sqrt{y} = (\sqrt[4]{x})^2 - (\sqrt[4]{y})^2 = (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})$.

1.5.15. Розкласти за формулою різниці (суми) кубів:

1) $x + y$; 2) $1 - \sqrt{a}$.

***Розв'язання*. [1.18.5.]**

1. $x + y = (\sqrt[3]{x})^3 + (\sqrt[3]{y})^3 = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})$.

2. $1 - \sqrt{a} = 1^3 - (\sqrt[6]{a})^3 = (1 - \sqrt[6]{a})(1 + \sqrt[6]{a} + \sqrt[3]{a})$.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

1.5.16. Запишіть суму в згорнутому вигляді:

1) $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{298}$; 2) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{19 \cdot 20}$;

3) $1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2$; 4) $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \ldots - 12^3$.

1.5.17. Обчисліть:

1) $\sum_{k=1}^{6} (-1)^k k$; 2) $\sum_{l=1}^{5} (-1)^{l+1} l^2$;

3) $\sum_{m=-2}^{3} 2 \cdot 3^m$; 4) $\sum_{n=-1}^{4} 3 \cdot 4^n$;

5) $6! - 7!! + 4!!$; 6) $7! - 8!! - 9!!$;

7) C_{12}^{10}; 8) C_{11}^{8};

9) $C_5^0 - C_6^3 + P_4 - A_4^2$; 10) $C_6^6 - C_5^3 + P_5 - A_5^3$.

1.5.18. Спростіть вирази:

1) $\frac{n! + (n+1)!}{(n+2)!}$; 2) $\frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$;

3) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$; 4) $\frac{1}{(2n-1)!} - \frac{4n^2}{(2n+1)!}$.

1.5.19. Розкрийте дужки:

1) $(x + 3ay)^2$; 2) $(x + 3y)^2$;

3) $(2a - b)^3$; 4) $(2a + b)^3$.

1.5.20. Розкладіть біном:

1) $(1+x)^5$; 2) $(a-b)^4$;

3) $(a-\sqrt{2})^5$; 4) $(a+2b)^6$;

5) $(2x+y)^7$; 6) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^8$.

1.5.21. Спростіть вирази:

1) $(1-\sqrt{6})^2(1+\sqrt{6})^2$; 2) $\left(\sqrt{6-\sqrt{11}}+\sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2$.

1.5.22. Виконайте дії:

1) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+2\sqrt{xy}$; 2) $(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})$;

3) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 4) $\dfrac{x-4y}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}$;

5) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)$; 6) $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})$;

7) $\dfrac{m-n}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}$; 8) $\dfrac{k+l}{\sqrt[3]{k}+\sqrt[3]{l}}$.

1.5.23. 1. На вершину гори веде 5 маршрутів. Скількома способами альпініст може піднятись на гору і спуститись з неї? Дайте відповідь на це питання також за умови, коли підйом і спуск мають відбуватись за різними маршрутами.

2. Кафе пропонує в меню 3 різі салати, 6 різних м'ясних страв і 5 різних десертів. Скільки існує способів вибрати обід із двох страв різного виду?

1.5.24. 1. Монету підкидають 4 рази. Скільки різних послідовностей гербів і цифр можна отримати?

2. Гральний кубик кидають 3 рази. Скільки різних послідовностей очок можна отримати?

1.5.25. 1. У футбольній команді з 11 чоловік потрібно обрати капітана та його заступника. Скількома способами це можна зробити?

2. Комісія, яка складається з 15 осіб, має вибрати голову, його заступника і секретаря. Скількома способами це можна зробити?

1.5.26. 1. Енциклопедія складається з 9 томів — з першого по дев'ятий. Скількома способами її можна розмістити на полиці так, щоб томи не були розташовані один за одним за зростанням їх номерів?

2. Скількома способами можна розмістити n осіб: а) на лаві; 2) за круглим столом?

1.5.27. 1. Під час зустрічі 16 осіб потисли один одному руки. Скільки всього зроблено рукостискань?

2. Скільки діагоналей має n-кутник?

Відповіді

1.5.16. 1) $\sum\limits_{n=1}^{100}\dfrac{1}{3n-2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{19}\dfrac{1}{n(n+1)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{10}n^2$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{12}(-1)^{n+1}n^3$.

1.5.17. 1) 3; 2) 15; 3) $\dfrac{728}{9}$; 4) $\dfrac{4095}{4}$; 5) 623; 6) 3711; 7) 66; 8) 165; 9) -7; 10) 51.

1.5.18. 1) $\dfrac{1}{n+1}$; 2) $\dfrac{n}{n+2}$; 3) $\dfrac{n}{(n+1)!}$; 4) $\dfrac{2n}{(2n+1)!}$.

1.5.19. 1) $x^2+6axy+9a^2y^2$; 2) $x^2+6xy+9y^2$; 3) $8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$; 4) $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$.

1.5.20. 1) $x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$; 2) $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$;
3) $a^5-5\sqrt{2}a^4+20a^3-20\sqrt{2}a^2+20a-4\sqrt{2}$;
4) $a^6+12a^5b+60a^4b^2+160a^3b^3+240a^2b^4+192ab^5+64b^6$;
5) $128x^7+448x^6y+672x^5y^2+560x^4y^3+280x^3y^4+84x^2y^5+14xy^6+y^7$;
6) $x^8-8x^6+28x^4-56x^2+70-\dfrac{56}{x^2}+\dfrac{28}{x^4}-\dfrac{8}{x^6}+\dfrac{1}{x^8}$.

1.5.21. 1) 25; 2) 22.

1.5.22. 1) $x+y$; 2) a^2-b; 3) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; 4) $\sqrt{x}-2\sqrt{y}$; 5) $\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}$; 6) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$; 7) $\sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}$; 8) $\sqrt[3]{k^2}-\sqrt[3]{kl}+\sqrt[3]{l^2}$.

1.5.23. 1) $5\cdot5=25, 5\cdot4=20$; 2) $3\cdot6+3\cdot5+6\cdot5=63$.

1.5.24. 1) $2^4=16$; 2) $6^3=216$.

1.5.25. 1) $A_{11}^2=110$; 2) $A_{15}^3=2730$.

1.5.26. 1) $P_9-1=362879$; 2) а) $n!$, б) $(n-1)!$.

1.5.27. 1) $C_{16}^2=120$; 2) C_n^2-n.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВМІННЯ

<table>
<tr><th colspan="2">Основні означення</th></tr>
<tr><td>1. Математична символіка: дії над висловлюваннями і квантори.
2. Необхідна умова, достатня умова, критерій.
3. Дії з множинами: об’єднання, перетин, різниця, доповнення.
4. Декартів добуток множин.
5. Відображення множин.
6. Множина дійсних чисел.</td><td>7. Числова вісь.
8. Окіл точки.
9. Обмежені множини.
10. Точна верхня та точна нижня межа множини.
11. Скорочені позначення: символ суми, факторіал.
12. Правило суми і правило добутку.
13. Сполуки: розміщення, перестановки, комбінації.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Методи</th></tr>
<tr><td>1. Метод доведення від супротивного.</td><td>2. Метод математичної індукції.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Основні задачі</th></tr>
<tr><td>1. Знаходити об’єднання, перетин, різницю і доповнення множин.
2. Розрізняти і позначати числові множини.
3. Записувати числа в різних позиційних системах числення.
4. Розкладати натуральне число на прості множники.
5. Знаходити найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне двох натуральних чисел.</td><td>6. Зображувати дійсні числа та числові множини на числовій осі.
7. Розв’язувати основні нерівності з модулем.
8. Знаходити межі та точні межі множин.
9. Обчислювати факторіал і кількість комбінацій з n елементів по k.
10. Знаходити біноміальні коефіцієнти й розклад біному Ньютона.</td></tr>
</table>

РОЗДІЛ 2. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Поняття матриці, прямокутної таблиці чисел, є зручним інструментом оперування з упорядкованими наборами чисел.

У розділі розглянуто теорію матриць і її застосування до дослідження й розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь. Такі системи часто постають у різноманітних задачах науки й техніки.

Важливі застосування мають і матриці, зокрема, в економіці й комп'ютерних науках.

Ключові поняття:

— *матриця;*

— *обернена матриця;*

— *визначник матриці;*

— *ранг матриці;*

— *матричне рівняння;*

— *система лінійних алгебричних рівнянь;*

— *загальний розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь.*

Опанувавши цей розділ, Ви зможете:

— *визначати структуру матриці;*

— *класифікувати матриці;*

— *виконувати дії над матрицями;*

— *обчислювати визначник матриці;*

— *знаходити обернену матрицю;*

— *знаходити ранг матриці;*

— *досліджувати розв'язність і розв'язувати матричні рівняння;*

— *досліджувати розв'язність і розв'язувати системи лінійних алгебричних рівнянь.*

Попередні знання та вміння з розділів:

— *Елементарна алгебра.*

Поданий матеріал використовується в розділах:

— *Векторна алгебра;*

— *Аналітична геометрія;*

— *Диференціальні рівняння.*

2.1. МАТРИЦІ

Матриця, з одного боку, є зручним і компактним способом табличного запису інформації, а з другого боку — самостійним математичним об'єктом, з яким можна виконувати різноманітні дії.

2.1.1. Поняття матриці

1. Означення 2.1 (матриці).

Матрицею A *розміром* $m \times n$ називають прямокутну таблицю чисел (*елементів матриці*)

$$a_{ij},\ i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n},$$

розташованих у m рядках та n стовпцях, і позначають

$$A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & i\text{-й рядок} \\ j\text{-й стовпець} & \end{array}$$

Матриці позначають великими літерами латинки й беруть у круглі* дужки.

Елемент a_{ij} матриці A розташовано в її i-му рядку та j-му стовпці.

i-*й рядок* (*завдовжки* n) матриці $A_{m\times n}$ позначають $\overleftarrow{a}_i$, j-*й стовпець* (*заввишки* m) матриці A позначають $\vec{a}_j$.

* Іноді використовують квадратні [ ] або подвійні ‖ ‖ дужки.

2. Матрицю можна вважати рядком її стовпців або стовпцем її рядків:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{a}_2 \\ \cdots \\ \overleftarrow{a}_m \end{pmatrix}.$$

3. Приміром, випишімо для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ усі її елементи, рядки та стовпці.

Матриця A розміром 2×3 має 6 елементів, 2 рядки і 3 стовпці:

$$\begin{matrix} a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{13} = 3, & \overleftarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \\ a_{21} = 4, a_{22} = 5, a_{23} = 6; & \overleftarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \end{matrix} \quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

2.1.2. Типи матриць

1. Матрицю розміром $m \times n$, усі елементи якої дорівнюють нулю, називають *нульовою* матрицею і позначають $O_{m\times n}$.

2. Матрицю розміром $1 \times n$ називають *матрицею-рядком* (*рядком*) завдовжки n (рис. 2.1).

3. Матрицю розміром $m \times 1$ називають *матрицею-стовпцем* (*стовпцем*) заввишки m (рис. 2.2).

$$\overleftarrow{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)$$

Рис. 2.1. Матриця-рядок

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Рис. 2.2. Матриця-стовпець

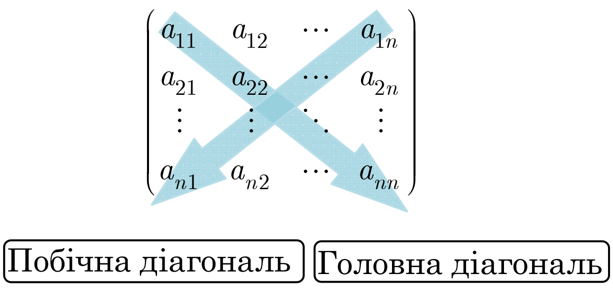


Рис. 2.3. Квадратна матриця

4. Якщо $m = n$, то матрицю A називають *квадратною* матрицею порядку n (рис. 2.3). Набір елементів $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ утворює *головну діагональ*, а набір $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ — *побічну діагональ*.

Суму елементів головної діагоналі називають *слідом* матриці й позначають

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

5. Квадратну матрицю, усі елементи якої нижче (вище) від головної діагоналі дорівнюють нулю, називають *верхньою* (*нижньою*) *трикутною* матрицею (рис. 2.4).

6. Квадратну матрицю, усі елементи якої, крім, можливо, елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називають *діагональною* матрицею (рис. 2.5).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Рис. 2.4. Верхня і нижня трикутні матриці

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Рис. 2.5. Діагональна матриця

7. Діагональну матрицю порядку n, усі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, називають *одиничною* матрицею і позначають

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Приміром,

$$\boxed{E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

2.1.3. Лінійні дії над матрицями

1. Рівність матриць.

Означення 2.2 (рівності матриць).

Матриці A та B називають *рівними*, якщо вони однакового розміру і мають рівні відповідні елементи.

Отже, матриця $A_{m\times n} = B_{p\times q}$, якщо:

1) $m = p$ і $n = q$;

2) $a_{ij} = b_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Приміром, два стовпці $\vec{x}$ та $\vec{y}$ заввишки m (два рядки завдовжки n) рівні, якщо вони рівні поелементно:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_m = y_m; \end{cases} \quad \begin{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \\ \| \\ \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = y_n. \end{cases}$$

2. Додавання (віднімання) матриць. Додавання та віднімання матриць означують лише для матриць однакового розміру.

Розгляньмо матриці $A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n}$ та $B_{m\times n} = (b_{ij})_{m\times n}$.

Означення 2.3. (суми матриць).

Сумою матриць A та B розміром $m \times n$ називають матрицю $A + B$ розміром $m \times n$, кожен елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A та B, тобто

$$A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{m\times n}.$$

Означення 2.4. (різниці матриць).

Різницею матриць A та B розміром $m \times n$ називають матрицю $A - B$ розміром $m \times n$, кожен елемент якої дорівнює різниці відповідних елементів матриць A та B, тобто

$$A - B = \left(a_{ij} - b_{ij}\right)_{m\times n}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тобто додають та віднімають матриці поелементно.

3. Приміром,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \pm y_1 \\ x_2 \pm y_2 \\ \dots \\ x_m \pm y_m \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \\ \pm \\ \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} \\ \| \\ \begin{pmatrix} x_1 \pm y_1 & x_2 \pm y_2 & \dots & x_n \pm y_n \end{pmatrix} \end{matrix}$$

4. Якщо додати до матриці $A_{m\times n}$ нульову матрицю $O_{m\times n}$, то дістаємо матрицю A:

$$A + O = A.$$

Протилежною матрицею до матриці $A_{m\times n}$ називають матрицю $(-A)_{m\times n}$, таку, що:

$$A + (-A) = O_{m\times n}.$$

Різницю матриць A та B можна записати як суму матриці A та матриці, протилежної до матриці B:

$$A - B = A + (-B).$$

5. Приміром, знайдімо суму та різницю матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ та } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Матриці A та B мають однаковий розмір 2×2 і тому їх можна додавати та віднімати:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+0 \\ 4+2 & 5+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-1) & 2-0 \\ 4-2 & 5-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

6. Множення матриці на число. Розгляньмо матрицю $A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n}$ і число $\alpha \in \mathbb{R}$.

Означення 2.5 (добутку матриці на число).

Добутком матриці A розміром $m\times n$ *на число* α називають матрицю αA розміром $m\times n$, кожен елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента матриці A на число α, тобто

$$\alpha A = \left(\alpha a_{ij}\right)_{m\times n}.$$

Отже,

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тобто множать матрицю на число поелементно.

Для матриці-рядка та матриці-стовпця маємо:

$$\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \dots \\ \alpha x_m \end{pmatrix}; \quad \alpha\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha x_2 & \dots & \alpha x_n \end{pmatrix}$$

7. Приміром, помножмо матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ на число 2:

$$2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 5 & 2\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

8. Якщо помножити матрицю A на число 1, то дістанемо саму матрицю A:

$$1\cdot A = A.$$

З означення протилежної матриці й добутку матриці на число випливає, що

$$(-A) = (-1)A.$$

9. Додавання матриць і множення матриці на число називають *лінійними діями* над матрицями.

Лінійною комбінацією матриць $A_1, A_2, \dots, A_n$ однакового розміру з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ називають матрицю

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n.$$

Лінійною комбінацією стовпців $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ заввишки m з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ є стовпець

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n.$$

10. Властивості лінійних дій над матрицями. Розгляньмо матриці $A_{m\times n}, B_{m\times n}, C_{m\times n}$ і числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Додавання матриць має властивості:

1) *комутативності*

$$A + B = B + A;$$

2) *асоціативності*

$$A + (B + C) = (A + B) + C;$$

3) *існування нульової матриці*

$$A + O_{m\times n} = A;$$

4) *існування протилежної матриці*

$$A + (-A) = O_{m\times n}.$$

Множення матриці на число має властивості:

5) *існування одиниці*

$$1 \cdot A = A;$$

6) *дистрибутивності щодо додавання чисел*

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A;$$

7) *дистрибутивності щодо додавання матриць*

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B;$$

8) *асоціативності*

$$\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha\beta) \cdot A.$$

2.1.4. Множення матриць

1. Матрицю $A_{m \times n}$ називають *узгодженою* з матрицею $B_{p \times q}$, якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B $(n = p)$. При цьому матриця B може бути й не узгодженою з матрицею A.

Приміром, матриця $A_{3\times 4}$ узгоджена з матрицею $B_{4\times 5}$, але матриця B неузгоджена з матрицею A.

Добуток матриць запроваджують лише для узгоджених матриць.

2. *Добутком рядка* $\overleftarrow{x} = \left(x_j\right)_n$ завдовжки n *на стовпець* $\vec{y} = \left(y_i\right)_n$ заввишки n називають число, яке дорівнює сумі добутків елементів рядка на відповідні елементи стовпця, тобто

$$\overleftarrow{x} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Точніше, добутком рядка на стовпець є матриця розміром 1×1, яку ототожнюють зі своїм єдиним елементом.

3. Приміром,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 6.$$

4. Множення матриць. Розгляньмо матриці $A_{m\times l}=(a_{ij})_{m\times l}$ та $B_{l\times n}=(b_{ij})_{l\times n}$.

Означення 2.6 (добутку матриць).

Добутком матриці A розміром $m\times l$ *на матрицю* B розміром $l\times n$ називають матрицю $C=AB$ розміром $m\times n$, кожний елемент c_{ij} якої дорівнює добутку i-го рядка матриці A на j-й стовпець матриці B (рис. 2.6), тобто

$$C_{m\times n}=A_{m\times l}B_{l\times n}=(c_{ij})_{m\times n}=\left(\overleftarrow{a}_i\cdot\vec{b}_j\right)_{m\times n}.$$

Отже,

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{il}b_{lj}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj},\ \ i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}.$$

$$\begin{array}{c}\\ \\ \overleftarrow{a}_i\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_{il}}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{ml}\end{pmatrix}\cdot\begin{array}{c}\vec{b}_j\\ \begin{pmatrix} b_{11} & \vdots & \boxed{b_{1j}} & \vdots & b_{1n}\\ \vdots & \vdots & \boxed{\vdots} & \vdots & \vdots\\ b_{l1} & \vdots & \boxed{b_{lj}} & \vdots & b_{ln}\end{pmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}j\text{-й стовпець}\\ \begin{pmatrix} c_{11} & \vdots & c_{1n}\\ \cdots & \boxed{\overleftarrow{a}_i\cdot\vec{b}_j} & \cdots\\ c_{m1} & \vdots & c_{mn}\end{pmatrix}\end{array}\ i\text{-й рядок}$$

Рис. 2.6. Множення матриць

Тобто матриці перемножують за правилом «рядок на стовпець».

5. Приміром, для матриць

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ \text{та}\ B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

знайдімо їх добутки:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot0+0\cdot1 & 1\cdot0+0\cdot0\\ 0\cdot0+0\cdot1 & 0\cdot0+0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot1+0\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot0\\ 1\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Із цього прикладу випливає, що множення матриць має такі **відмінності** від множення чисел:

1) добуток ненульових матриць може бути нульовою матрицею;

2) множення матриць не є комутативним, у загальному випадку

$$\boxed{AB\neq BA.}$$

6. Властивості множення матриць. Розгляньмо матриці A,B,C та число $\alpha\in\mathbb{R}$ і вважаймо, що виконати дії в кожній властивості можливо.

Множення матриць має такі властивості:

1) *асоціативності*

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C;$$

2) *дистрибутивності щодо додавання матриць*

$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B,$$
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C;$$

3) *асоціативності щодо множення на число*

$$\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B);$$

4) *існування одиничної матриці*

$$A_{m\times n} \cdot E_n = E_m \cdot A_{m\times n} = A;$$

5) *існування нульової матриці*

$$A_{m\times n} \cdot O_{n\times l} = O_{m\times l},\ O_{l\times m} \cdot A_{m\times n} = O_{l\times n}.$$

7. Якщо матриці A та B справджують співвідношення $AB = BA$, то їх називають *переставними*.

З узгодженості матриць випливає, що переставними можуть бути лише квадратні матриці.

Одинична матриця E_n та нульова матриця O_n порядку n переставні з будь-якою квадратною матрицею того ж порядку:

$$AE_n = E_nA = A;$$
$$O_nA = AO_n = O_n.$$

8. Степінь матриці. Матрицю A можна помножити саму на себе тоді й лише тоді, коли вона квадратна.

Натуральним *степенем* $A^k, k > 1$, квадратної *матриці* A називають добуток k матриць A. Отже,

$$A^k = \underbrace{AA...A}_{k \text{ разів}}.$$

Під нульовим степенем квадратної матриці A порядку n розуміють одиничну матрицю порядку n. Отже,

$$(A_n)^0 = E_n.$$

9. Матричний многочлен. Якщо

$$f(x) = a_kx^k + ... + a_1x + a_0,$$

то *матричним многочленом* $f(A)$ називають матрицю

$$f(A) = a_kA^k + ... + a_1A + a_0E_n.$$

Якщо $f(A) = O$, то матрицю A називають *коренем* матричного многочлена $f(A)$.

10. Приміром, знайдімо значення многочлена $f(x)=x^2+4$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -1\end{pmatrix}$:

$$f(A)=A^2+4E_2=\begin{pmatrix}1 & 5\\ \hdashline -1 & -1\end{pmatrix}\left(\begin{array}{c:c}1 & 5\\ -1 & -1\end{array}\right)+4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Отже, матриця A є коренем матричного многочлена A^2+4E_2.

2.1.5. Транспонування матриць

1. Запис елементів рядка матриці у стовпець або елементів стовпця матриці в рядок у тому ж порядку називають *транспонуванням* і позначають

$$\overleftarrow{x}^{\mathrm{T}}=(x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix}=\vec{x};$$

$$\vec{x}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=(x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n)=\overleftarrow{x}.$$

2. Розгляньмо матрицю $A_{m\times n}$.

Означення 2.7 (транспонованої матриці).

Матрицю розміром $n\times m$, яку одержують з матриці A розміром $m\times n$ транспонуванням стовпців (рядків), називають *транспонованою* матрицею до A і позначають A^{T}.

$$(A)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}| & | & & |\\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n\\ | & | & & |\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}— & (\vec{a}_1)^{\mathrm{T}} & —\\ — & (\vec{a}_2)^{\mathrm{T}} & —\\ & \vdots & \\ — & (\vec{a}_n)^{\mathrm{T}} & —\end{pmatrix}=A^{\mathrm{T}}.$$

3. Приміром, транспонованою до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ є матриця

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Властивості транспонування матриць. Розгляньмо матриці A, B та число $\alpha \in \mathbb{R}$ і вважаймо, що виконати дії у кожній властивості можливо.

Транспонування матриць має властивості:

1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$;

2) $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;

3) $(\alpha A)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}}$;

4) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$.

5. Матрицю A називають *симетричною*, якщо

$$A = A^{\mathrm{T}}$$

і *кососиметричною*, якщо

$$A = -A^{\mathrm{T}}.$$

Добуток $C = AA^{\mathrm{T}}$ будь-якої матриці на транспоновану до неї матрицю є симетричною матрицею, оскільки

$$C^{\mathrm{T}} = (AA^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} = AA^{\mathrm{T}} = C.$$

2.2. ВИЗНАЧНИКИ

Найважливішою числовою характеристикою квадратної матриці є її визначник.

2.2.1. Індуктивне означення визначника

1. Розгляньмо квадратну матрицю n-го порядку $A = (a_{ij})_{n \times n}$. З матрицею зв'яжімо цілком певну числову характеристику — її визначник.

Означення 2.8 (визначника).

Визначником (*детермінантом*) матриці A називають число $\left|A\right| = \det A$, яке обчислюють за правилом:
1) якщо $n = 1$, то

$$\left|a_{11}\right| = a_{11};$$

2) якщо $n > 1$, то

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k},$$

де M_{1k} — визначник матриці порядку $(n-1)$, яку одержимо з матриці A викреслюванням 1-го рядка та k-го стовпця.

2. Визначник матриці, одержаної викреслюванням з матриці A i-го рядка та j-го стовпця, називають *доповняльним мінором* M_{ij} елемента a_{ij}. Число

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

називають *алгебричним доповненням* елемента a_{ij}.

Отже, алгебричне доповнення елемента a_{ij} — це доповняльний мінор M_{ij}, узятий:

— зі знаком «$+$», якщо $i + j$ — парне число;

— зі знаком «$-$», якщо $i + j$ — непарне число.

Визначник квадратної матриці дорівнює сумі добутків елементів 1-го рядка на їх алгебричні доповнення:

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k}.}$$

2.2.2. Обчислення визначників за означенням

1. Формула обчислення визначника матриці 2-го порядку. Обчислімо доповняльні мінори елементів 1-го рядка матриці

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \left|a_{22}\right| = a_{22}; \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \left|a_{21}\right| = a_{21}.$$

З означення визначника випливає, що (рис. 2.7)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

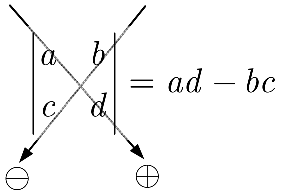


Рис. 2.7. Схема обчислення визначника 2-го порядку

Приміром,

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 10.$$

2. Формула обчислення визначника матриці 3-го порядку. Обчислімо доповняльні мінори елементів 1-го рядка матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

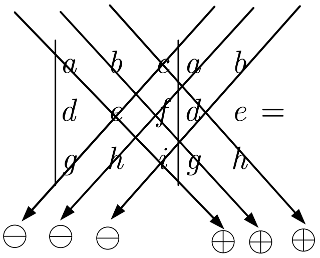
З означення визначника випливає, що (рис. 2.8)

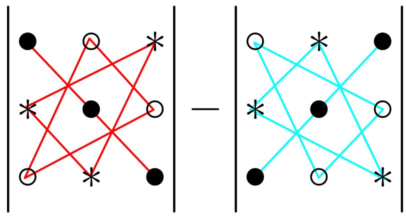
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^2 a_{11} M_{11} + (-1)^3 a_{12} M_{12} + (-1)^4 a_{13} M_{13} =$$

$$= a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$





$= (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$

Рис. 2.8. Схема Сарюса та схема трикутників

3. Приміром, обчислімо за означенням визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-10) = 35.$$

4. Простих схем для визначників порядку 4 і вище не існує. Можна показати, що визначник матриці порядку n — це число, що дорівнює сумі добутків з n елементів матриці, узятих по одному з кожного рядка та кожного стовпця матриці з певним знаком.

5. Розкладання визначника за будь-яким рядком (стовпцем). Надалі під елементами, рядками та стовпцями визначника розумітимемо елементи, рядки та стовпці відповідної матриці.

Природно виникає питання — чи не можна для обчислення визначника скористатись елементами й відповідними їм доповняльними мінорами не 1-го, а довільного рядка чи стовпця?

Теорема 2.1 (розкладання).

Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого його рядка (будь-якого його стовпця) на їхні алгебричні доповнення. Тобто правдиві формули:

розкладу визначника за i-м рядком

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}, \ 1 \le i \le n,$$

та *розкладу визначника за j-м стовпцем*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj}, \ 1 \le j \le n.$$

6. Приміром, розкладімо визначник 3-го порядку за елементами 2-го стовпця:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} =$$
$$= -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32} =$$
$$= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

2.2.3. Властивості визначника

Визначники мають низку важливих властивостей, які допомагають ефективно їх обчислювати та застосовувати для прикладних задач.

1. *Рівноправність рядків та стовпців.* Транспонування матриці не змінює її визначника:

$$\det A = \det A^{\mathrm{T}}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

2. *Лінійність.* Якщо рядок (стовпець) визначника є сумою двох рядків (стовпців), то визначник дорівнює сумі двох відповідних визначників, приміром

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3. *Однорідність.* Спільний множник рядка (стовпця) можна виносити за знак визначника, приміром

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \det(kA_n) = k^n \det A.$$

4. *Антисиметричність.* Якщо переставити два рядки (стовпці) визначника, то він змінить знак:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

5. *Умови рівності нулеві визначника.* Визначник матриці дорівнює нулю, якщо матриця містить:

1) нульовий рядок (стовпець);

2) два однакові рядки (стовпці);

3) пропорційні рядки (стовпці), приміром

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

6. *Теорема анулювання.* Сума добутків елементів стовпця (рядка) визначника на алгебричні доповнення відповідних елементів іншого стовпця (рядка) дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0, j \neq k,$$

Так $a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} = 0$, але $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} = \det A_{2\times 2}$.

7. Визначник не зміниться, якщо до будь-якого його рядка (стовпця) додати інший його рядок (стовпець), помножений на деяке число, приміром

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

8. Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку визначників цих матриць:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

2.2.4. Обчислення визначника елементарними перетвореннями

1. Елементарні перетворення матриці.

Означення 2.9 (елементарних перетворень матриці).

Елементарними перетвореннями матриці називають:

1) переставляння стовпців (рядків);

2) множення стовпця (рядка) на число, відмінне від нуля;

3) додавання до стовпця (рядка) іншого стовпця (рядка), помноженого на деяке число.

2. Матриці A та B називають *еквівалентними*, якщо одну з них одержано з іншої скінченною кількістю елементарних перетворень, і позначають $A \sim B$.

3. Вплив елементарних перетворень матриці на визначник. Із властивостей визначника випливає, що:

1) переставлення стовпців (рядків) змінює знак визначника;

2) помноження стовпця (рядка) на число, відмінне від нуля, помножує визначник на це число;

3) додавання до стовпця (рядка) іншого стовпця (рядка), помноженого на деяке число, не змінює визначника;
4) визначник матриці не зміниться, якщо до будь-якого стовпця (рядка) додати лінійну комбінацію решти стовпців (рядків).

4. Приміром, розгляньмо елементарні перетворення матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \overleftarrow{a}_1 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 \\ 3 & 4 & \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_1 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix};$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \overleftarrow{a}_1 \leftarrow 2\overleftarrow{a}_1 \\ 3 & 4 & \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix};$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \\ 3 & 4 & \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 - 3\overleftarrow{a}_1 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Тут запис $\overleftarrow{a}_i \leftarrow \alpha\overleftarrow{a}_i + \beta\overleftarrow{a}_j$ означає, що замість i-го рядка записуємо лінійну комбінацію рядків $\alpha\overleftarrow{a}_i + \beta\overleftarrow{a}_j$ (α чи β можуть дорівнювати нулю).

5. Визначник трикутної матриці. Визначник верхньої (нижньої) трикутної матриці дорівнює добутку діагональних елементів, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.$$

Як наслідок, визначник одиничної матриці E_n дорівнює одиниці.

6. Схема методу зведення визначника до трикутного вигляду. Розгляньмо визначник $\Delta_n = \det A$ матриці A порядку n.

А. Якщо всі елементи 1-го стовпця визначника дорівнюють нулю, то $\det A = 0$.

Б. Нехай $a_{11} \neq 0$ (якщо це не так, то переставленням рядків цього можна досягнути). Додаємо 1-й рядок, помножений на коефіцієнт $\left(-\dfrac{a_{s1}}{a_{11}}\right)$ до s-го рядка, $s = \overline{2, n}$:

$$\det A = \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \left| \overleftarrow{b}_s \leftarrow \overleftarrow{a}_s + \left(-\frac{a_{s1}}{a_{11}}\right)\overleftarrow{a}_1, s = \overline{2, n} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots \\ 0 & \Delta_{n-1} \end{vmatrix},$$

де

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}, i = \overline{2, n}, j = \overline{2, n}.$$

B. Для визначника Δ_{n-1} повторюємо кроки 1-й і 2-й.

2. Приміром, обчислімо зведенням до трикутного вигляду визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 5 & -7 & -2 & 0 \end{vmatrix} \left| \begin{matrix} \\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 - 4\overleftarrow{a}_1 \\ \\ \overleftarrow{a}_4 \leftarrow \overleftarrow{a}_4 - 5\overleftarrow{a}_1 \end{matrix} \right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \left| \begin{matrix} \\ \\ \overleftarrow{a}_3 \leftarrow \overleftarrow{a}_3 - 2\overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{a}_4 \leftarrow \overleftarrow{a}_4 + 2\overleftarrow{a}_2 \end{matrix} \right| =$$

На першому кроці:
від 2-го рядка віднімаємо 1-й, помножений на 4;
від 4-го рядка віднімаємо 1-й, помножений на 5

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \left| \begin{matrix} \\ \\ \\ \overleftarrow{a}_4 \leftarrow \overleftarrow{a}_4 + 2\overleftarrow{a}_3 \end{matrix} \right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{vmatrix} =$$

Визначник трикутної матриці
дорівнює добутку
діагональних елементів

$$= 1 \cdot 1 \cdot (-2)(-14) = 28.$$

2.3. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

2.3.1. Обернена матриця і її властивості
2.3.2. Знаходження оберненої матриці
2.3.3. Розв'язування матричних рівнянь за допомогою оберненої матриці

Ділення матриць не запроваджують, але для квадратних матриць існує аналог оберненого числа — обернена матриця.

2.3.1. Обернена матриця і її властивості

1. Розгляньмо квадратну матрицю A порядку n.

Означення 2.10 (оберненої матриці).

Оберненою матрицею до квадратної матриці A порядку n називають матрицю A^{-1} таку, що

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E_n.$$

Матрицю A, для якої існує обернена матриця, називають *оборотною*. З означення випливає, що матриці A та A^{-1} взаємообернені й переставні.

Оскільки $E_n E_n = E_n$, то

$$\left(E_n\right)^{-1} = E_n.$$

2. Розгляньмо оборотні квадратні матриці A та B порядку n. **Обернення матриць** має властивості:

1) якщо обернена матриця існує, то вона єдина;

2) $(A^{-1})^{-1} = A$;

3) $(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}, k = 0,1,2,\ldots$;

4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

5) $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$.

3. З'ясуймо умову оборотності квадратної матриці A порядку n, тобто існування такої матриці A^{-1}, що

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n.$$

Квадратну матрицю називають *невиродженою*, якщо її визначник відмінний від нуля.

Теорема 2.2 (критерій оборотності матриці).

Матриця оборотна тоді й лише тоді, коли вона невироджена.

Доведення. $\boxed{\Rightarrow}$ Доведімо, що якщо матриця оборотна, то вона невироджена.

З означення оборотної матриці та властивості визначника 8 випливає, що

$$AA^{-1} = E_n \Rightarrow \left|A\right|\left|A^{-1}\right| = \left|E_n\right| = 1 \Rightarrow \left|A\right| \neq 0,$$

тобто матриця A невироджена.

$\boxed{\Leftarrow}$ Покажімо тепер, що якщо матриця невироджена, то вона оборотна.

Доведімо, що

$$AA^* = \left|A\right|E_n,$$

де

$$A^* = \left(A_{ij}\right)^{\mathrm{T}}_{n\times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

$A_{ij}, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n},$ — алгебричні доповнення елементів матриці A.

Із властивості визначника 6 та теореми 2.1 випливає, що

$$\overleftarrow{a}_i \cdot \vec{a}_j^{\,*} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \ldots \\ A_{jn} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} 0, & i \ne j, \\ |A|, & i = j. \end{cases}$$

Отже, $AA^* = |A|E_n$. Так само доводять, що $A^*A = |A|E_n$. Тобто

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = E_n \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*. \blacksquare$$

Матрицю $A^* = \left(A_{ij}\right)^{\mathrm{T}}_{n\times n}$ називають *приєднаною* до матриці $A_{n\times n}$.

2.3.2. Знаходження оберненої матриці

1. На теоремі 2.2 ґрунтується *метод приєднаної матриці* знаходження оберненої матриці:

1) обчислюють визначник матриці A;

2) якщо $\det A = 0$, то оберненої до A матриці не існує, якщо $\det A \ne 0$, то будують приєднану до A матрицю

$$A^* = \left(A_{ij}\right)^{\mathrm{T}};$$

3) обернену до A матрицю знаходять за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*.$$

2. Правильність обчислень перевіряють умовою

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E_n.$$

Оскільки метод приєднаної матриці потребує обчислення великої кількості визначників, то його застосовують частіше для теоретичних міркувань й обернення матриць 2-го та 3-го порядків.

3. Приміром, для невиродженої матриці 2-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

маємо

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.}$$

4. Обернену матрицю можна знаходити і за допомогою **елементарних перетворень** матриці. Розгляньмо невироджену матрицю A порядку n. Дописуючи праворуч від матриці A одиничну матрицю E_n, утворюємо матрицю

$$\left(A \mid E_n\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

Помножуємо одержану матрицю на матрицю A^{-1} зліва і використаємо означення оберненої матриці й властивість одиничної матриці:

$$A^{-1}\left(A \mid E_n\right) = \left(A^{-1}A \mid A^{-1}E_n\right) = \left(E_n \mid A^{-1}\right).$$

Звідси випливає, що якщо елементарними перетвореннями рядків матриці $\left(A \mid E_n\right)$ привести її до вигляду $\left(E_n \mid B\right)$, то завдяки єдиності оберненої матриці дістаємо, що

$$B = A^{-1}.$$

Якщо матриця A вироджена, то під час перетворення в матриці ліворуч від риски з'являться нульові рядки.

2.3.3. Розв'язування матричних рівнянь за допомогою оберненої матриці

1. Розгляньмо *матричне рівняння* щодо матриці X

$$AX = B,$$

де A та B — відомі матриці розміром $n \times n$ та $n \times l$ відповідно.

Розв'язком цього рівняння (якщо він існує) є матриця X розміром $n \times l$.

Якщо матриця A оборотна, то існує єдиний розв'язок матричного рівняння

$$\boxed{X = A^{-1}B.}$$

Справді, помножуючи зліва рівняння на матрицю A^{-1}, маємо

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow E_nX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

2. Матричне рівняння $XA = B$ з оборотною матрицею A має розв'язок

$$\boxed{X = BA^{-1}.}$$

2.4. РАНГ МАТРИЦІ

Ранг матриці є числовою характеристикою ступеня лінійної незалежності стовпців (рядків) матриці.

2.4.1. Лінійна незалежність (залежність) стовпців матриці

1. Означення 2.11 (лінійно незалежної і залежної системи стовпців).

Систему стовпців $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$ однакової висоти називають *лінійно незалежною,* якщо з рівності

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_s \vec{a}_s = \vec{0}$$

випливає, що

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = 0.$$

Систему стовпців $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$ однакової висоти називають *лінійно залежною*, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, які не дорівнюють одночасно нулю, що

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_s \vec{a}_s = \vec{0}$$
$$\left(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_s| \neq 0\right).$$

2. Можна показати, що стовпці $\vec{e}_i, i = \overline{1,n}$, одиничної матриці E_n лінійно незалежні та будь-який стовпець $\vec{a}$ заввишки n є лінійною комбінацією стовпців одиничної матриці. Коефіцієнтами лінійної комбінації є елементи стовпця $\vec{a}$:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n.$$

Так само означують лінійну незалежність і залежність рядків матриці.

3. Теорема 2.3 (критерій лінійної залежності стовпців).

Система з $s > 1$ стовпців однакової висоти лінійно залежна тоді й лише тоді, коли хоча б один із стовпців є лінійною комбінацією решти стовпців.

Доведення. $\boxed{\Rightarrow}$ Нехай система стовпців $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s$ однакової висоти лінійно залежна. Тоді правдива рівність

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_s\vec{a}_s = \vec{0},$$

у якій не всі коефіцієнти дорівнюють нулю. Припустімо, що саме $\alpha_1 \neq 0$, тоді цю рівність можна переписати так:

$$\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_s}{\alpha_1}\vec{a}_s.$$

Отже, стовпець $\vec{a}_1$ лінійно виражається через решту стовпців.

$\boxed{\Leftarrow}$ Якщо один із стовпців (нехай для визначеності це $\vec{a}_1$) є лінійною комбінацією решти стовпців, тобто

$$\vec{a}_1 = \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_s\vec{a}_s,$$

то

$$\vec{a}_1 + (-\alpha_2)\vec{a}_2 + \ldots + (-\alpha_s)\vec{a}_s = \vec{0},$$

де принаймні коефіцієнт при $\vec{a}_1$ відмінний від нуля.

Отже, система стовпців $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ лінійно залежна. ■

2.4.2. Ранг матриці та його властивості

1. Розгляньмо матрицю A розміром $m \times n$. Виберімо в матриці A k рядків та k стовпців $(1 \leq k \leq \min(m,n))$.

Визначник порядку k, складений з елементів, які стоять на перетині вибраних рядків і стовпців, називають *мінором k-го порядку* матриці A.

Приміром, одним з мінорів 2-го порядку матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

є визначник $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$.

2. Якщо $s = \min(m,n)$, то матриця A має мінори порядків $1, 2, \ldots, s$, серед яких можуть бути рівні нулю й відмінні від нуля.

Означення 2.12 (рангу матриці).

Рангом матриці A називають найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля, і позначають $\operatorname{rang} A$.

Якщо $r = \operatorname{rang} A_{m\times n}$, то $0 \leq r \leq \min(m,n)$. Ранг нульової матриці вважають рівним нулю.

Правдиві такі нерівності:

1) $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$;

2) $\operatorname{rang}(AB) \leq \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B)$.

3. Приміром, знайдімо ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Усі мінори 3-го порядку дорівнюють нулю. Серед мінорів 2-го порядку є мінор

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Отже, $\operatorname{rang} A = 2$.

4. Нехай $\operatorname{rang} A > 0$. Мінор матриці, порядок якого дорівнює рангу матриці, називають *базисним*, а рядки і стовпці, що утворюють базисний мінор, називають *базисними* рядками і стовпцями.

У матриці може бути кілька базисних мінорів.

Теорема 2.4 (про базисний мінор).

1. Базисні стовпці (рядки) матриці A лінійно незалежні.
2. Кожний стовпець (рядок) матриці A є лінійною комбінацією її базисних стовпців (рядків).

Теорема 2.5 (про ранг матриці).

Найбільша кількість лінійно незалежних рядків матриці дорівнює найбільшій кількості її лінійно незалежних стовпців і дорівнює рангу матриці.

5. Для квадратної матриці можна встановити зв'язок між її виродженістю (невиродженістю) та рангом матриці.

Теорема 2.6 (про ранг квадратної матриці).

1. Визначник квадратної матриці A n-го порядку дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли її ранг менше від n, тобто
$$\det A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A < n.$$
2. Визначник квадратної матриці A n-го порядку відмінний від нуля тоді й лише тоді, коли її ранг дорівнює порядку матриці, тобто
$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A = n.$$
3. Квадратна матриця A n-го порядку вироджена тоді й лише тоді, коли її стовпці (рядки) лінійно залежні.

2.4.3. Знаходження рангу матриці методом Ґауса

1. Ненульовий елемент рядка з найменшим номером називають *лідером* рядка.

Означення 2.13 (східчастої матриці).

Матрицю називають *східчастою*, якщо вона справджує умови:
1) нульові рядки матриці розташовані нижче від ненульових;
2) номери стовпців, які містять лідери рядків, зростають.

Друга умова означає, що всі елементи, які розташовані вліво й униз від лідера рядка східчастої матриці нульові.

2. Матриці на рис. 2.9 та 2.10 східчасті (квадратиками $\blacksquare$ позначено лідери, зірочками $*$ — довільні елементи), а на рис. 2.11 матриця несхідчаста (номери лідерів не зростають).

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \end{pmatrix}$$

Рис. 2.9. Східчаста матриця

$$\begin{pmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.10. Східчаста матриця

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \end{pmatrix}$$

Рис. 2.11. Несхідчаста матриця

Верхня трикутна матриця є окремим випадком східчастої матриці.

3. Східчасту матрицю називають *зведеною*, якщо всі лідери рядків дорівнюють одиниці, а над лідерами стоять нулі (рис. 2.12).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.12. Зведена східчаста матриця

Будь-яку матрицю елементарними перетвореннями можна перетворити до східчастого вигляду й до зведеного східчастого вигляду.

4. Алгоритм методу Ґауса (прямий хід). Розгляньмо матрицю $A_{m\times n}$. Зведення матриці до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень її рядків (стовпців) називають *методом Ґауса* (його прямим ходом). Алгоритм його такий:

1) якщо матриця A має східчастий вигляд, то зупиняємось;

2) якщо матриця A ще не має східчастого вигляду, то знаходимо 1-й зліва стовпець з лідером. Переставляючи рядки, переміщуємо рядок, який містить цей лідер, угору:

$$A \sim B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & b_{2k_1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{mk_1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix};$$

3) додаючи до всіх рядків, які розташовані нижче, цей рядок, помножений на відповідні коефіцієнти, дістаємо під лідером рядка нулі:

$$B \left| \begin{matrix} \overleftarrow{c}_i \leftarrow \overleftarrow{b}_i - \dfrac{b_{ik_1}}{b_{1k_1}} \overleftarrow{b}_1, \\ i = \overline{2, m} \end{matrix} \right| \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & \dots & \dots & b_{1n} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & c_{2,k_1+1} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{m,k_1+1} & \dots & c_{mn} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} & b_{1k_1} & \dots \\ \mathbf{0} & \vec{0} & \boxed{C} \end{pmatrix};$$

4) повторюємо кроки 1—3 для матриці C.

5 Алгоритм методу Ґауса — Йордана. Перетворення матриці за допомогою елементарних перетворень її рядків (стовпців) до зведеного східчастого вигляду називають *методом Ґауса — Йордана**. Алгоритм його такий:

1) зводимо матрицю до східчастого вигляду (прямий хід методу Ґауса);

2) якщо матриця має зведений східчастий вигляд, то зупиняємось;

3) ділячи останній ненульовий рядок матриці на його лідера, одержуємо на місці лідера 1;

4) додаючи до решти рядків новий останній рядок, помножений на відповідні коефіцієнти, дістаємо нулі над одиницею;

5) повторюємо кроки 2—4 для решти рядків, які мають лідери (*зворотний хід методу Ґауса*).

6. Можна довести, що:

1) транспонування матриці, елементарні перетворення матриці та видалення нульових рядків (стовпців) матриці не змінюють її рангу;

2) ранги еквівалентних матриць рівні.

> Ранг східчастої матриці дорівнює кількості ненульових рядків.

---

* Метод досить часто помилково називають методом Ґауса — Жордана, плутаючи прізвища німецького геодезиста В. Йордана (W. Jordan) і французького математика К. Жордана (C. Jordan).

Отже, ранг матриці можна знайти, зводячи матрицю за допомогою елементарних перетворень до східчастого вигляду.

7. Приміром, знайдімо ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 - 2\overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 - 3\overleftarrow{a}_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \overleftarrow{a}_3 \leftarrow \overleftarrow{a}_3 - \overleftarrow{a}_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Східчаста матриця, яка еквівалентна матриці A, має 2 ненульових рядки. Отже, $\operatorname{rang} A = 2$.

2.5. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Системи лінійних алгебричних рівнянь виникають під час моделювання багатьох математичних, економічних, фізичних і технічних задач.

Застосуймо розвинений вище математичний апарат матриць до дослідження й розв'язання таких систем.

2.5.1. Система лінійних алгебричних рівнянь і способи її запису

1. Рівняння щодо невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

називають *лінійним алгебричним*. Задані числа $a_i, i = \overline{1, n}$, називають *коефіцієнтами* рівняння, а число b — *вільним членом* рівняння.

Система m *лінійних алгебричних рівнянь* (СЛАР) з n невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n$ має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Перший індекс коефіцієнта a_{ij} при невідомій указує на номер рівняння, а другий індекс — на номер невідомої, при якій стоїть цей коефіцієнт.

2. Систему лінійних алгебричних рівнянь називають *однорідною*, якщо вільні члени всіх рівнянь нульові та *неоднорідною*, якщо хоча б один з них відмінний від нуля.

3. Матрицю, елементами якої є коефіцієнти при невідомих називають *основною матрицею* системи

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(\vec{a}_j\right)_n .$$

Розширеною матрицею системи називають матрицю системи, яку доповнено *стовпцем вільних членів*:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = \left(\vec{a}_j \mid \vec{b}\right)_{n+1}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Якщо позначити також стовпець невідомих як

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

то систему можна записати:

1) у *матричному* вигляді

$$\boxed{A\vec{x} = \vec{b}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix};$$

2) у *векторному* вигляді

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{a}_j = \vec{b}} \Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

2.5.2. Розв'язки систем лінійних алгебричних рівнянь

1. *Розв'язком* системи лінійних алгебричних рівнянь називають набір n значень невідомих $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$, підставлення яких у всі рівняння системи перетворює їх на тотожності. Розв'язок системи записують як стовпець

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Будь-який розв'язок СЛАР називають її *частинним* розв'язком. Множину всіх частинних розв'язків називають *загальним* розв'язком СЛАР.

2. Приміром, система лінійних алгебричних рівнянь може:

1) мати один розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1; \end{cases}$$

2) мати безліч розв'язків:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0; \end{cases}$$

3) не мати жодного розв'язку, приміром:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

3. Систему лінійних алгебричних рівнянь називають *сумісною* (*розв'язною*), якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною* (*нерозв'язною*), якщо вона не має розв'язків.

Сумісну систему називають *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має більше як один розв'язок.

Дві системи називають *рівносильними*, якщо кожний розв'язок першої системи є розв'язком другої, і навпаки. Усі несумісні системи вважають рівносильними.

Розв'язати систему — це означає:

1) з'ясувати, чи є система сумісною або несумісною;

2) якщо система сумісна, то знайти множину її розв'язків.

2.5.3. Розв'язування систем з невиродженою матрицею

1. Розгляньмо систему лінійних алгебричних рівнянь у матричній формі

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

з невиродженою квадратною матрицею A n-го порядку.

Помножуючи обидві частини рівності зліва на матрицю A^{-1}, одержимо розв'язок СЛАР:

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b};$$

$$\boxed{\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.}$$

У цьому полягає *метод оберненої матриці* (*матричний метод*) розв'язання СЛАР.

2. Ураховуючи формулу для оберненої матриці (теорема 2.2), дістаємо:

$$\begin{pmatrix} | \\ \vec{x} \\ | \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} A^* \begin{pmatrix} | \\ \vec{b} \\ | \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} | \\ A^*\vec{b} \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{|A|}\left(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{|A|}\left(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n\right) \end{pmatrix};$$

$$x_j = \frac{1}{|A|}\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} | & & \overset{j}{} & & | \\ \vec{a}_1 & \ldots & \vec{b} & \ldots & \vec{a}_n \\ | & & | & & | \end{vmatrix}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Одержані формули є розгорнутим записом *формул Крамера*:

$$\boxed{x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = \overline{1, n},}$$

де Δ_j — визначник матриці, одержаної з матриці A заміною j-го стовпця на стовпець вільних членів; а Δ — визначник матриці A.

3. Приміром, розв'яжімо за формулами Крамера СЛАР:

$$\begin{cases} x + 4y = -10, \\ 3x - y = 9. \end{cases}$$

❍ Записуємо матрицю системи і стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

За формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = -26; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 39;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-26}{-13} = 2; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{39}{-13} = -3.$$

Відповідь: $x = 2, y = -3.$ ●

2.5.4. Дослідження сумісності системи лінійних алгебричних рівнянь

1. Розгляньмо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

і розширену матрицю

$$\tilde{A} = \left(A \mid \vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

системи лінійних алгебричних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Теорема 2.7 (Кронекера — Капеллі, критерій сумісності системи).

Система лінійних алгебричних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ з розширеною матрицею $\tilde{A} = (A \mid \vec{b})$ сумісна тоді й лише тоді, коли ранг матриці системи A дорівнює рангу розширеної матриці системи $\tilde{A}$, тобто

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A}.$$

Доведення. $\boxed{\Rightarrow}$ Нехай система сумісна. Доведімо, що $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A}$. Завдяки сумісності системи існує набір значень:

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n,$$

такі, що виконано рівність

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{x}_n = \vec{b},$$

з якої випливає, що останній стовпець розширеної матриці $(A \mid \vec{b})$ є лінійною комбінацією стовпців матриці A. Отже, у матриці $(A \mid \vec{b})$ стільки ж лінійно незалежних стовпців, скільки їх є у матриці A, тобто

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Якщо $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A}$, то стовпець $\vec{b}$ не є серед r базисних стовпців розширеної матриці. Звідси випливає, що базисними стовпцями є стовпці матриці A, а стовпець $\vec{b}$ є лінійною комбінацією стовпців матриці з деякими коефіцієнтами:

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{x}_n = \vec{b}.$$

Це й означає, що набір

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$$

є розв'язком системи

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

тобто система сумісна. ■

Наслідки з теореми 2.7 (рис. 2.13.)

1. Якщо ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці й дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв'язок.
2. Якщо ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці, але менший від кількості невідомих, то система має безліч розв'язків.

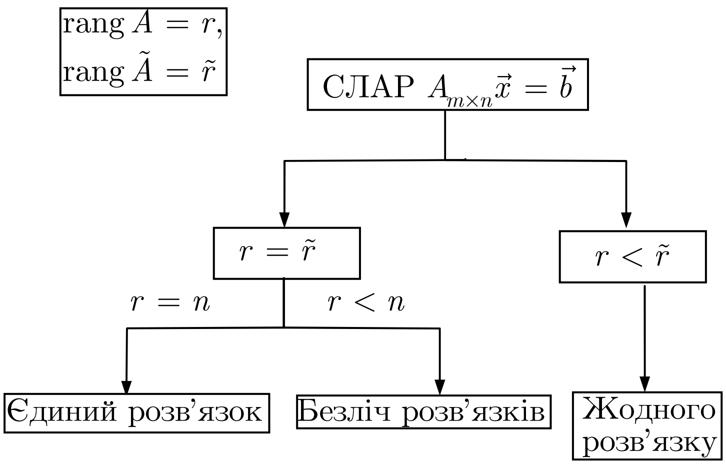


Рис. 2.13. Кількість розв'язків системи

2. *Елементарними перетвореннями* СЛАР називають:

1) переставляння рівнянь;

2) множення обох частин якого-небудь рівняння на число, відмінне від нуля;

3) додавання до рівняння іншого рівняння, помноженого на деяке число.

3. Елементарні перетворення СЛАР приводять до відповідних елементарних перетворень рядків основної та розширеної матриць системи.

Системи лінійних алгебричних рівнянь, одержані одна з одної елементарними перетвореннями, називають *еквівалентними.* Еквівалентні СЛАР рівносильні.

2.5.5. Розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь методом елементарних перетворень

Розгляньмо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Опишімо алгоритм дослідження й розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь методом Ґауса — Йордана (виключення невідомих).

1. Записуємо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

2. Зводимо розширену матрицю до східчастого вигляду (прямий хід методу Ґауса):

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc|c} \alpha_{1,k_1} & \ldots & \ldots & & & & & & & & & \beta_1 \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{2,k_2} & \ldots & & & & & & & \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & & & & & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & \alpha_{r,k_r} & \ldots & \ldots & & \beta_r \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & 0 & & 0 & & \beta_{r+1} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & 0 & \ldots & 0 & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & 0 & \ldots & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

3. Досліджуємо систему на сумісність (теорема Кронекера — Капеллі).

Якщо $\beta_{r+1} \neq 0$, то система несумісна.

Якщо ж $\beta_{r+1} = 0$, то система сумісна.

4. У разі сумісності перетворюємо східчасту матрицю до зведеного східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c} 1 & \ldots & \ldots & 0 & & & & 0 & & & \delta_1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & & & 0 & & & \delta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & & & & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & 1 & \ldots & \ldots & \delta_r \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \ldots & & & & & & & \ldots & & \ldots \end{array}\right).$$

5. Знаходимо розв'язки одержаної системи. Можливі два випадки:
1) кількість невідомих дорівнює рангу матриці системи $(n = r)$:

$$\begin{cases} x_1 = \delta_1, \\ x_2 = \delta_2, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \delta_n; \end{cases}$$

2) кількість невідомих n більша за кількість рівнянь r $(n > r)$.

Невідомі, які відповідають лідерам рядків, називають *базисними*, а решту невідомих — *вільними*. Отже, $x_1, x_2, \dots, x_r$ — базисні невідомі, $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ — вільні невідомі.

Вільним невідомим надаємо довільних значень $C_1, \dots, C_{n-r}$ і виражаємо через них базисні невідомі.

$$\begin{cases} x_1 = \delta_1 - \gamma_{1,r+1}C_1 - \dots - \gamma_{1,n}C_{n-r}, \\ x_2 = \delta_2 - \gamma_{2,r+1}C_1 - \dots - \gamma_{2,n}C_{n-r}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = \delta_r - \gamma_{r,r+1}C_1 - \dots - \gamma_{r,n}C_{n-r}, \\ x_{r+j} = C_j, j = \overline{1, n-r}. \end{cases}$$

6. Записуємо загальний розв'язок системи у векторному вигляді:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \delta_1 - \sum\limits_{j=1}^{n-r} \gamma_{1,r+j}C_j \\ \dots \\ \delta_r - \sum\limits_{j=1}^{n-r} \gamma_{r,r+j}C_j \\ C_1 \\ \dots \\ C_{n-r} \end{pmatrix} = \vec{d} + C_1\vec{e}_1 + \dots + C_{n-r}\vec{e}_{n-r},$$

де

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \dots \\ \delta_r \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{d}; \quad \begin{pmatrix} -\gamma_{1,r+1} \\ \dots \\ -\gamma_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1; \dots; \begin{pmatrix} -\gamma_{1,n} \\ \dots \\ -\gamma_{r,n} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_{n-r}.$$

7. Приміром, дослідімо на сумісність і знайдімо загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 = 2. \end{cases}$$

❍ 1. Записуємо розширену матрицю системи:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

2. Зводимо елементарними перетвореннями рядків розширену матрицю до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 - 2\overleftarrow{a}_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

3. Оскільки $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = 2$ (східчастий вигляд як матриці системи A, так і розширеної матриці системи $\tilde{A}$ містить два ненульові рядки), то система сумісна.

4. Продовжуючи перетворення, зводимо матрицю до зведеного східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \overleftarrow{a}_1 \leftarrow \overleftarrow{a}_1 + \frac{1}{3}\overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow -\frac{1}{3}\overleftarrow{a}_2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

5. Отже, x_1 та x_3 — базисні невідомі, а $x_2 = C_1, x_4 = C_2, x_5 = C_3$ — вільні невідомі, яким надано довільних значень $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Виписуємо систему, яка відповідає перетвореній розширеній матриці, і виражаємо з неї базисні невідомі:

$$\begin{cases} x_1 + 2C_1 - \frac{1}{3}C_2 = 1, \\ x_3 - \frac{2}{3}C_2 + C_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2C_1 + \frac{1}{3}C_2, \\ x_3 = \frac{2}{3}C_2 - C_3. \end{cases}$$

6. Записуємо загальний розв'язок системи:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 - 2C_1 + \frac{1}{3}C_2 \\ C_1 \\ \frac{2}{3}C_2 - C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}. \quad ●$$

8. Розв'язання матричних рівнянь методом Ґауса — Йордана. Розгляньмо рівняння щодо матриці X

$$AX = B,$$

де A та B — відомі матриці розміром $m \times n$ та $m \times l$. Тоді розв'язком цього рівняння є матриця X розміром $n \times l$:

$$X = \left(\vec{x}_j\right)_l.$$

З означення добутку матриць випливає, що

$$A\left(\vec{x}_j\right)_l = \left(\vec{b}_j\right)_l \Leftrightarrow A\vec{x}_j = \vec{b}_j, j = \overline{1,l}.$$

З'ясувати розв'язність і розв'язати рівняння $AX = B$ можна, застосовуючи метод Ґауса — Йордана до матриці $\left(A \mid B\right)$.

> Матричне рівняння доцільніше розв'язувати методом Ґауса і для оборотної матриці A. І лише в разі, коли треба розв'язати низку рівнянь з однією і тією самою оборотною матрицею A, а стовпці вільних членів не відомі наперед, ефективніший метод оберненої матриці.

2.5.6. Структура загального розв'язку СЛАР

1. Розгляньмо ненульову (тобто не всі коефіцієнти рівнянь дорівнюють нулю) однорідну СЛАР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}.$$

Однорідна СЛАР має властивості:

1) однорідна СЛАР завжди сумісна (вона завжди має нульовий розв'язок $\vec{x} = \vec{0}$);

2) сума розв'язків однорідної СЛАР також є її розв'язком;

3) добуток розв'язку однорідної СЛАР на будь-яке число також є розв'язком системи;

4) будь-яка лінійна комбінація розв'язків однорідної СЛАР є розв'язком цієї системи.

2. Оскільки однорідна СЛАР завжди сумісна, то слушно поставити питання про умови існування ненульових розв'язків.

Нехай задано однорідну систему лінійних алгебричних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{0}.$$

Теорема 2.8 (про структуру загального розв'язку однорідної СЛАР).

Якщо $\operatorname{rang} A = r < n$, то:

1) існує лінійно незалежна система розв'язків системи $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-r}\}$;

2) загальний розв'язок цієї системи є лінійною комбінацією розв'язків $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-r}$:

$$\vec{x}_{\text{заг. одн}} = C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2 + \dots + C_{n-r}\vec{e}_{n-r}.$$

Доведення. 1. Справді, система стовпців $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-r}\}$, побудованих у пункті 2.5.5.6 є лінійно незалежною:

$$C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2 + \dots + C_{n-r}\vec{e}_{n-r} = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{j=1}^{n-r}\gamma_{1,r+j}C_j \\ \dots \\ -\sum\limits_{j=1}^{n-r}\gamma_{r,r+j}C_j \\ C_1 \\ \dots \\ C_{n-r} \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ C_{n-r} = 0. \end{cases}$$

2. Кожен стовпець $\vec{e}_i$ є розв'язком системи, який відповідає набору значень сталих:

$$C_i = 1, \quad C_j = 0, j \neq i, \quad (i, j = \overline{1, n-r}).$$

3. Для будь-яких значень сталих стовпець

$$C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2 + \dots + C_{n-r}\vec{e}_{n-r}$$

є розв'язком системи. ■

Означення 2.14 (фундаментальної системи розв'язків СЛАР).

Будь-яку сукупність з $n - r$ лінійно незалежних розв'язків однорідної СЛАР називають *фундаментальною системою розв'язків* (ФСР) системи.

3. Однорідна СЛАР із квадратною матрицею $A_{n\times n}$ має ненульові розв'язки тоді й лише тоді, коли матриця A вироджена, тобто $\det A = 0$ (рис. 2.14).

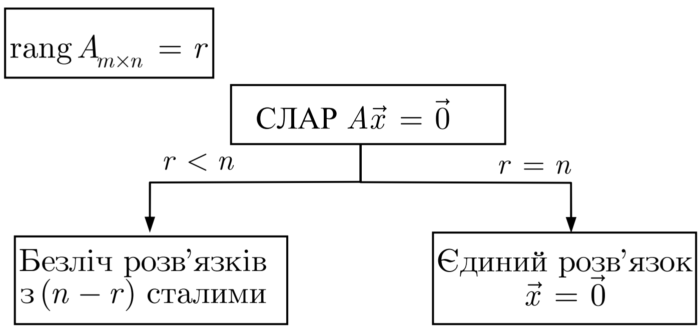


Рис. 2.14. Кількість розв'язків однорідної системи

4. Розгляньмо неоднорідну СЛАР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}, \vec{b} \neq \vec{0},$$

і відповідну їй однорідну СЛАР

$$A\vec{x} = \vec{0}.$$

Теорема 2.9 (про структуру загального розв'язку неоднорідної СЛАР).

Загальний розв'язок неоднорідної СЛАР дорівнює сумі загального розв'язку відповідної однорідної СЛАР і деякого частинного розв'язку неоднорідної СЛАР:

$$\vec{x}_{\text{заг. неодн}} = \vec{x}_{\text{заг. одн}} + \vec{x}_{\text{част. неодн}}.$$

Доведення випливає з пункту 2.5.5.6.

5. Продемонструємо теорему 2.9 на загальному розв'язку системи з п. 2.5.5.7. Використаємо означення матричних дій:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 - 2C_1 + \frac{1}{3}C_2 \\ C_1 \\ \frac{2}{3}C_2 - C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{d}} + C_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_1} + C_2 \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_2} + C_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_3}.$$

Стовпець $\vec{d}$ є частинним розв'язком неоднорідної системи, який відповідає нульовим сталим:

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

Стовпці $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. А, отже, стовпець

$$C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2 + C_3\vec{e}_3$$

є загальним розв'язком відповідної однорідної системи.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

2.1.1. Скільки рядків і стовпців у матриці $A=(a_{ij})_{3\times 2}$ розміром 3×2? Який елемент матриці стоїть у 2-му рядку і 1 стовпці матриці? Запишіть матрицю, рядки та стовпці цієї матриці.

2.1.2. Запишіть нульову матрицю розміром 2×3 та одиничну матрицю 4-го порядку.

2.1.3. Визначте, яка з матриць є верхньою трикутною, нижньою трикутною, діагональною:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Запишіть елементи головної і побічної діагоналі діагональної матриці.

2.1.4. Визначте, яка з матриць є одиничною:

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

2.1.5. Чи завжди можна:

1) до матриці додати ту саму матрицю;

2) від матриці відняти ту саму матрицю;

3) помножити матрицю на (-1);

4) матрицю помножити на ту саму матрицю;

5) транспонувати матрицю?

якщо можна, то що дістанемо?

2.1.6. Чи завжди можна помножити:

1) матрицю-рядок $\overleftarrow{x}_{1\times n}$ на матрицю-стовпець $\vec{y}_{m\times 1}$;

2) матрицю-стовпець $\vec{y}_{m\times 1}$ на матрицю рядок $\overleftarrow{x}_{1\times n}$;

3) матрицю $A_{m\times n}$ на матрицю $B_{p\times q}$ і матрицю B на матрицю A одночасно? Якщо можна, то що одержимо?

2.1.7. Запишіть приклад, щоб добуток ненульових матриць був нульовою матрицею.

2.1.8. Як зміниться добуток матриць A та B, якщо:

1) переставити i-й та j-й рядки матриці A;

2) до i-го рядка матриці A додати j-й рядок, помножений на число c;

3) переставити i-й та j-й стовпці матриці B;

4) до i-го стовпця матриці B додати j-й стовпець, помножений на число c?

2.1.9. Чому дорівнює матриця $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$? Чи можуть бути рівними матриці A та A^{T}?

2.1.10. Якого вигляду буде матриця A^{T}, якщо матриця A є: 1) одиничною; 2) нульовою; 3) верхньою трикутною; 4) нижньою трикутною; 5) діагональною.

2.1.11. Визначте параметри m та n, якщо:

1) $A + X_{m\times n} = B_{2\times 3}$; 2) $A - X_{m\times n} = B_{3\times 4}$;

3) $3X_{m\times n} = A_{4\times 3}$; 4) $-2X_{m\times n} = A_{2\times 2}$;

5) $A_{5\times 9}X_{m\times n} = B_{5\times 1}$; 6) $A_{5\times m}X_{7\times n} = B_{5\times 6}$;

7) $B_{m\times n} = (A_{3\times 2})^{\mathrm{T}}$; 8) $B_{5\times n} = \left(A_{4\times m}\right)^{\mathrm{T}}$.

2.2.1. Як зв'язані між собою алгебричне доповнення і мінор заданого елемента? Чому дорівнює доповняльний мінор та алгебричне доповнення елемента a_{12} матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$?

2.2.2. Скільки добутків елементів матриці містить повний розклад визначника: 1) 3-го порядку; 2) 4-го порядку; 3) 5-го порядку?

2.2.3. Відомо, що $\det A = 2$. Чому дорівнює $\det A^{\mathrm{T}}$?, $\det(2A)$?

2.2.4. Нехай $\Delta = \det A_{3\times 3}$. Чи є вказане перетворення визначника елементарним (якщо так, то як воно вплине на визначник):

1) множення рядка на 2;

2) множення стовпця на 0;

3) переставлення елементів 2-го рядка та 2-го стовпця;

4) переставлення 1-го та 3-го рядка;

5) додавання до 1-го рядка 3-го рядка, помноженого на 5;

6) віднімання від 3-го рядка 2-го стовпця, помноженого на 2?

2.2.5. Які з визначників завжди дорівнюють нулеві:

$$1)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix};\ 2)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & f & g \end{vmatrix};\ 3)\ \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \\ e & 0 & f \end{vmatrix};\ 4)\ \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{vmatrix};\ 5)\ \begin{vmatrix} a & d & 2a-3d \\ b & e & 2b-3e \\ c & f & 2c-3f \end{vmatrix}.$$

2.3.1. Для яких матриць існує обернена? Яка матриця є оберненою до одиничної матриці E_n ?

2.3.2. Якщо A^{-1} — обернена матриця до матриці A, то чому дорівнює $A^{-1}A - A^{-1}A$?

2.3.3. Задано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Знайдіть матриці AB, BA та A^{-1}.

2.3.4. Доведіть, що:

1) добуток двох невироджених матриць є невиродженою матрицею;

2) добуток двох квадратних матриць, з яких хоча б одна вироджена, є виродженою матрицею.

2.3.5. Доведіть, що:

1) якщо матриця A невироджена, то $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}, k \neq 0$;

2) якщо A та B — невироджені матриці однакового порядку, то AB і $B^{-1}A^{-1}$ — взаємно обернені матриці;

3) якщо матриця A симетрична невироджена, то й матриця A^{-1} симетрична.

2.3.6. Який розв'язок має рівняння $AXB = C$, якщо матриці A та B оборотні?

2.3.7. Як зміниться матриця A^{-1}, якщо в матриці A:

1) поміняти місцями i-й та j-й рядки (i-й та j-й стовпці)?

2) i-й рядок (стовпець) помножити на число $k \neq 0$;

3) до i-го рядка (стовпця) додати j-й рядок (стовпець), помножений на число $k \neq 0$?

2.4.1. Чи може $\operatorname{rang} A_{30\times 5}$ дорівнювати 7 ? Які значення може набувати ранг цієї матриці?

2.4.2. Чому дорівнює ранг матриці A, якщо:

1) $\det A_{4\times 4} = 3$;

2) у матриці $A_{20\times 50}$ існує відмінний від нуля мінор порядку 10, а всі мінори порядку 11 дорівнюють нулю;

3) серед мінорів 3-го порядку матриці $A_{3\times 6}$ є відмінний від нуля?

2.4.3. Опишіть усі матриці ранга: 1) 0; 2) 1.

2.4.4. Укажіть, які з матриць є східчастими? зведеними східчастими? Чому дорівнює ранги цих матриць?

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&2&3\\0&1&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&0&1&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&3&0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

2.4.5. Укажіть перетворення матриць, які не змінюють їх ранг:

1) помноження елементів будь-якого рядка на число, відмінне від нуля;

2) додавання до елементів стовпця відповідних елементів інших стовпців;

3) переставлення будь-яких рядків (стовпців);

4) викреслювання стовпців, які містять лише нульові елементи;

5) викреслювання рядка і стовпця, на перетині яких стоїть нульовий елемент.

2.4.6. Як може змінитись ранг матриці:

1) після транспонування;

2) після приписування до неї ще одного рядка;

3) після приписування до неї ще одного стовпця;

4) після приписування до неї її першого рядка

5) після помноження матриці на число $\alpha \neq 0$?

2.5.1. Запишіть приклад лінійного рівняння із змінними x, y та z.

2.5.2. Задано систему $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 = 4. \end{cases}$ Запишіть:

1) систему в матричному вигляді; 2) систему у векторному вигляді;

3) розширену матрицю системи.

2.5.3. Скільки розв'язків може мати система лінійних алгебричних рівнянь? Запишіть приклад системи, яка:

1) не має жодного розв'язку; 2) має безліч розв'язків;

3) має єдиний розв'язок.

2.5.4. Задано систему 3 лінійних алгебричних рівнянь із 3 невідомими з матрицею A та розширеною матрицею $\tilde{A}$. Скільки розв'язків має система і якими методами її можна розв'язати, якщо:

1) $\operatorname{rang} A = 1, \operatorname{rang} \tilde{A} = 1$; 2) $\operatorname{rang} A = 2, \operatorname{rang} \tilde{A} = 3$;

3) $\operatorname{rang} A = 3, \operatorname{rang} \tilde{A} = 3$?

2.5.5. Скільки розв'язків має система, якщо її графічна ілюстрація є:

1) пара паралельних прямих; 2) пара перетинних прямих;

3) одна пряма.

У яких випадках система є сумісною? визначеною?

2.5.6. Які із тверджень є правдивими (A — матриця системи, $\tilde{A}$ — розширена матриця системи, n — кількість невідомих):

1. Якщо $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} \tilde{A}$, то система має безліч розв'язків.

2. Якщо $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = n$, то система має єдиний розв'язок.

3. Якщо $\det A = 0$, то однорідна система $A\vec{x} = \vec{0}$ має безліч розв'язків.

4. Якщо $\det A \neq 0$, то $A\vec{x} = \vec{0}$ не має розв'язків.

5. Якщо $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} < n$, то система $A\vec{x} = \vec{b}$ не має розв'язків.

2.5.7. Нехай $A\vec{x} = \vec{b}$ система n лінійних рівнянь з n невідомими. Що можна сказати про кількість розв'язків такої системи, якщо:

1) $\det A \neq 0, \vec{b} \neq 0$; 2) $\det A \neq 0, \vec{b} = 0$;

3) $\det A = 0, \vec{b} \neq \vec{0}$; 4) $\det A = 0, \vec{b} = \vec{0}$?

2.5.8. Множини розв'язків систем збігаються. Чи рівні розширені матриці цих систем? Їх ранги?

2.5.9. На скільки одиниць ранг основної матриці системи може відрізнятись від рангу розширеної? Скільки базисних невідомих може мати сумісна СЛАР з матрицею $A_{m\times n}$, $\operatorname{rang} A = r$? Скільки вільних змінних може мати така СЛАР?

2.5.10. Укажіть який-небудь частинний розв'язок системи 3×4, якщо стовпець вільних членів СЛАР дорівнює: 1) сумі всіх стовпців її основної матриці; 2) 1-му стовпцю її матриці системи.

2.5.11. Чи може однорідна СЛАР бути несумісною? Сформулюйте критерій того, щоб однорідна СЛАР $A\vec{x} = \vec{0}$ мала: 1) лише нульовий розв'язок; 2) ненульовий розв'язок?

2.5.12. Нехай k — найбільше число лінійно незалежних розв'язків однорідної СЛАР. Виразіть k через розміри $m \times n$ і ранг r матриці системи. У якому випадку $k = 0$?

2.5.13. Відомо, що однорідна СЛАР з матрицею розміром 20×30 має 10 вільних змінних. Скільки розв'язків містить кожна ФСР цієї системи?

2.5.14. Чи правильно, що сума (різниця) двох будь-яких розв'язків СЛАР також є її розв'язком, якщо система:

1) однорідна; 2) неоднорідна?

2.5.15. Чи правильно, що добуток розв'язку системи на будь-яке число також є її розв'язком, якщо система:

1) однорідна; 2) неоднорідна?

2.5.16. Скільки розв'язків має однорідна СЛАР $A\vec{x}=\vec{0}$, якщо неоднорідна система $A\vec{x}=\vec{b}$:

1) не має розв'язків; 2) має єдиний розв'язок;

3) має нескінченно багато розв'язків?

Відповіді

2.1.1. 3 рядки та 2 стовпці. a_{21}.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix};\ \overleftarrow{a}_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\end{pmatrix},\ \overleftarrow{a}_2=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\ \overleftarrow{a}_3=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32}\end{pmatrix};\quad \vec{a}_1=\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ a_{31}\end{pmatrix}, \vec{a}_2=\begin{pmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ a_{32}\end{pmatrix}.$$

2.1.2. $O_{2\times3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, E_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

2.1.3. A, C — верхні трикутні, A, B — нижні трикутні, A — діагональна матриця, головна діагональ: $1, -3, 0,$ побічна діагональ: $0, -3, 0.$ **2.1.4.** $C.$

2.1.5. 1) можна, $A+A=2A$; 2) можна, $A-A=O$; 3) можна, $(-1)A=-A$ — протилежна матриця; 4) ні, не завжди, лише для квадратних матриць, $A_{m\times m}A_{m\times m}=A^2$; 5) можна, A^{T} — транспонована матриця.

2.1.6. 1) ні, не завжди, лише якщо $n=m, \overleftarrow{x}_{1\times n}\cdot\vec{y}_{n\times1}=$ число; 2) можна, матрицю $m\times n$; 3) ні, не завжди, лише, коли $n=p, m=q,$

$A_{m\times n}B_{n\times m}=C_{m\times m}, B_{n\times m}A_{m\times n}=C_{n\times n}.$ **2.1.7.** $\begin{pmatrix} 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2\\ 1\end{pmatrix}=(0).$

2.1.8. У добутку AB: 1) поміняються місцями i-й та j-й рядки;

2) до i-го рядка додасться j-й рядок, помножений на число c;

3) поміняються місцями i-й та j-й стовпці;

4) до i-го стовпця додасться j-й стовпець, помножений на число c.

2.1.9. A. Так, для симетричної матриці A.

2.1.10. 1) одинична; 2) нульова; 3) нижня трикутна; 4) верхня трикутною; 5) діагональна.

2.1.11. 1) 2×3; 2) 3×4; 3) 4×3; 4) 2×2; 5) 9×1; 6) 7×6; 7) 2×3; 8) 5×4.

2.2.1. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. $M_{12} = a_{21}, A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -a_{21}$.

2.2.2. 1) $3! = 6$; 2) $4! = 24$; 3) $5! = 120$. **2.2.3.** $\det A^{\mathrm{T}} = 2.$, $\det(2A) = 2^5 \cdot 2 = 64$.

2.2.4. 1) елементарне, множить визначник на 2; 2) не елементарне; 3) не елементарне; 4) елементарне, змінює знак визначника; 5) елементарне, не змінює визначника; 6) не елементарне.

2.2.5. 1), 3), 5. **2.3.1.** Квадратних, невироджених. $(E_n)^{-1} = E_n$. **2.3.2.** O.

2.3.3. 1) $AB = BA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, A^{-1} = -\dfrac{1}{2} B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. **2.3.6.** $X = A^{-1} C B^{-1}$.

2.3.7. 1) поміняються місцями i-й та j-й стовпці (i-й та j-й рядки); 2) i-й стовпець (рядок) помножиться на $\dfrac{1}{k}$; 3) з j-го стовпця віднíметься i-й стовпець (рядок), помножений на k.

2.4.1. Ні, не може. $\operatorname{rang} A \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

2.4.2. 1) $\operatorname{rang} A = 3$; 2) $\operatorname{rang} A = 10$; 3) $\operatorname{rang} A = 3$.

2.4.4. B, D — східчасті, B — зведена східчаста, $\operatorname{rang} B = 2, \operatorname{rang} D = 2$.

2.4.5. 1), 2), 3), 4. **2.4.6.** 1) не зміниться; 2), 3) не зміниться, або збільшиться на 1; 4) не зміниться; 5) не зміниться. **2.5.1.** $x - 2y + 3z = 4$.

2.5.2. 1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; 2) $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; 3) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{array}\right)$.

2.5.3. 0,1 або ∞.

1) $\begin{cases} x_1 + x_1 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_1 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0; \end{cases}$ 3) 1) $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1. \end{cases}$

2.5.4. 1) ∞, метод Ґауса; 2) 0; 3) 1, метод Крамера, матричний метод, метод Ґауса.

2.5.5. 1) 0, несумісна; 2) 1, сумісна, визначена; 3) ∞, сумісна, невизначена.

2.5.6. 2, 3. **2.5.7.** 1) 1; 2) 1; 3) 0 або ∞; 4) ∞.

2.5.8. Розширені матриці можуть бути не рівні, а їх ранги рівні.

2.5.9. На 1. r; $n - r$.

2.5.10. 1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.5.11. Ні, не може. 1) $\det A = 0$; 2) $\det A \neq 0$. **2.5.12.** $k = n - r$. $r = n$. **2.5.13.** 10.

2.5.14. 1) так; ні. **2.5.15.** 1) так; ні.

2.5.16. 1), 3) має нескінченно багато розв'язків; 2) має єдиний розв'язок.

Формули, твердження, алгоритми

2.1. Матриці

❶ ***Матриця.*** *Матрицею A розміром* $m \times n$ називають прямокутну таблицю чисел (*елементів матриці*)

$$a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n},$$

розташованих у m рядках та n стовпцях і позначають

$$A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n}.$$

Елемент a_{ij} матриці A розташований в i-му рядку та j-му стовпці.

i-й рядок $\overleftarrow{a}_i$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

j-й стовпець $\vec{a}_j$

❷ ***Матриця-рядок***

$$\overleftarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

❸ ***Матриця-стовпець***

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

❹ ***Нульова матриця***

$$O_{m\times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{n \text{ стовпців}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}\right\} m \text{ рядків}$$

❺ ***Квадратна матриця n-го порядку***

$$A_n = A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

побічна діагональ | головна діагональ

Слід матриці

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

❻ ***Нижня трикутна матриця***

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

❼ ***Верхня трикутна матриця***

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

❽ ***Діагональна матриця*** $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	❾ ***Одинична матриця*** $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$ $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
❿ Матриця є стовпцем своїх рядків і рядком своїх стовпців.	$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{a}_2 \\ \vdots \\ \overleftarrow{a}_m \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \ldots \quad \vec{a}_n)$	

2.2. Лінійні дії над стовпцями (рядками)

❶ ***Рівність стовпців.*** Два стовпці $\vec{x}$ та $\vec{y}$ називають *рівними*, якщо вони мають: 1) однакову висоту; 2) рівні відповідні елементи.	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} m = k, \\ x_i = y_i, i = \overline{1,m} \end{cases}$
❷ ***Додавання (віднімання) стовпців.*** *Сумою* (*різницею*) двох *стовпців* $\vec{x}$ та $\vec{y}$ заввишки m називають стовпець $\vec{x} \pm \vec{y}$ заввишки m, кожен елемент якого дорівнює сумі (різниці) відповідних елементів стовпців $\vec{x}$ та $\vec{y}$.	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \pm y_1 \\ x_2 \pm y_2 \\ \vdots \\ x_m \pm y_m \end{pmatrix}$
❸ ***Множення стовпця на число.*** *Добутком стовпця* $\vec{x}$ *заввишки* m *на дійсне число* α називають стовпець $\alpha\vec{x}$ заввишки m, кожен елемент якого дорівнює відповідному елементу стовпця $\vec{x}$, помноженому на це число.	$\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_m \end{pmatrix}$

2.3. Лінійні дії над матрицями

<table>
<tr><td>

❶ ***Рівність матриць.*** Дві матриці A та B називають *рівними*, якщо вони:

1) однакового розміру;

2) мають рівні відповідні елементи.

</td><td>

$$A_{m\times n}=B_{k\times l}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}m=k,n=l;\\a_{ij}=b_{ij},i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}\end{cases}$$

</td></tr>
<tr><td>

❷ ***Додавання (віднімання) матриць.*** *Сумою* (*різницею*) матриць A та B розміром $m\times n$ називають матрицю $A+B$ розміром $m\times n$, елементи якої дорівнюють сумі (різниці) відповідних елементів матриць A та B.

$$\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\pm\left(b_{ij}\right)_{m\times n}=\left(a_{ij}\pm b_{ij}\right)_{m\times n}$$

Матриці додають (віднімають) поелементно.

</td><td>

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\pm$$
$$\pm\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mn}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}a_{11}\pm b_{11}&a_{12}\pm b_{12}&\cdots&a_{1n}\pm b_{1n}\\a_{21}\pm b_{21}&a_{22}\pm b_{22}&\cdots&a_{2n}\pm b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}\pm b_{m1}&a_{m2}\pm b_{m2}&\cdots&a_{mn}\pm b_{mn}\end{pmatrix}$$

</td></tr>
<tr><td>

❸ ***Множення матриці на число.*** *Добутком матриці* A розміром $m\times n$ *на число* α називають матрицю αA розміром $m\times n$, елементи якої дорівнюють добутку елементів матриці A на число α.

$$\alpha\left(a_{ij}\right)_{m\times n}=\left(\alpha a_{ij}\right)_{m\times n}$$

Матрицю множать на число поелементно.

</td><td>

$$\alpha\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha a_{11}&\alpha a_{12}&\cdots&\alpha a_{1n}\\\alpha a_{21}&\alpha a_{22}&\cdots&\alpha a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\alpha a_{m1}&\alpha a_{m2}&\cdots&\alpha a_{mn}\end{pmatrix}$$

</td></tr>
<tr><td>

❹ ***Властивості додавання матриць.***

① $A+B=B+A$;

② $A+(B+C)=(A+B)+C$;

③ $A+O_{m\times n}=A$;

④ $A+(-A)=O_{m\times n}$

</td><td>

❺ ***Властивості множення матриці на число.***

① $1\cdot A=A$;

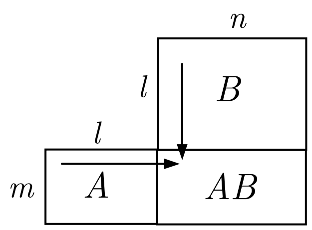
② $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$;

③ $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$;

④ $\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\beta)\cdot A$

</td></tr>
</table>

2.4. Множення матриць

<table>
<tr><td colspan="2">❶ Узгоджені матриці. Матрицю A називають узгодженою з матрицею B, якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B («довжина» матриці A дорівнює «висоті» матриці B).</td></tr>
<tr><td>❷ Добуток рядка на стовпець.
Добутком рядка $\overleftarrow{x} = (x_j)_n$ завдовжки n на стовпець $\vec{y} = (y_i)_n$ заввишки n називають число $\overleftarrow{x} \cdot \vec{y}$, яке дорівнює сумі добутків елементів рядка на відповідні елементи стовпця.</td>
<td>$$\overleftarrow{x} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$ $$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$</td></tr>
<tr><td>❸ Множення матриць. Добутком матриці A розміром $m \times l$ на матрицю B розміром $l \times n$ називають матрицю $C = AB$ розміром $m \times n$, кожний елемент c_{ij} якої дорівнює добутку i-го рядка матриці A на j-й стовпець матриці B.
$$(\overleftarrow{a}_i)_m \cdot (\vec{b}_j)_n = (c_{ij})_{m\times n} = (\overleftarrow{a}_i \cdot \vec{b}_j)_{m \times n}$$
Матриці множать за правилом «рядок на стовпець».</td>
<td>$$\overbrace{\begin{pmatrix} - & \overleftarrow{a}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \overleftarrow{a}_i & - \\ & \vdots & \\ - & \overleftarrow{a}_m & - \end{pmatrix}}^{l} \cdot \left.\begin{pmatrix} | & & | & & | \\ \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_j & \cdots & \vec{b}_n \\ | & & | & & | \end{pmatrix}\right\} l =$$ $$= \begin{pmatrix} \overleftarrow{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \cdots & \overleftarrow{a}_1 \cdot \vec{b}_j & \cdots & \overleftarrow{a}_1 \cdot \vec{b}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overleftarrow{a}_i \cdot \vec{b}_1 & \cdots & \overleftarrow{a}_i \cdot \vec{b}_j & \cdots & \overleftarrow{a}_i \cdot \vec{b}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overleftarrow{a}_m \cdot \vec{b}_1 & \cdots & \overleftarrow{a}_m \cdot \vec{b}_j & \cdots & \overleftarrow{a}_m \cdot \vec{b}_n \end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>❹ Схема Фалька множення матриць</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>❺ Особливості множення матриць.
① множення матриць не комутативне, тобто $AB \neq BA$;
② добуток ненульових матриць може бути нульовою матрицею.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$ $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$</td>
<td>❻ Властивості множення матриць.
① $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
② $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$,
$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
③ $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$;
④ $A_{m\times n} \cdot E_n = E_m \cdot A_{m\times n} = A$;
⑤ $A_{m\times n} \cdot O_{n\times l} = O_{m\times l}$,
$O_{l\times m} \cdot A_{m\times n} = O_{l\times n}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

❼ ***Переставні матриці.*** Якщо матриці A та B справджують співвідношення

$$AB = BA,$$

то їх називають *переставними.*

</td>
<td>

Одинична матриця E_n та нульова матриця O_n порядку n переставні з будь-якою квадратною матрицею того ж порядку.

① $AE_n = E_nA = A$;

② $O_nA = AO_n = O_n$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

❽ ***Натуральний степінь*** k квадратної матриці A порядку n розуміють як

$$A^k = \underbrace{AA...A}_{k \text{ разів}}; \quad A^0_{n\times n} = E_n.$$

</td>
<td>

❾ ***Матричний многочлен.*** Якщо

$$f(x) = a_kx^k + ... + a_1x + a_0,$$

то *многочленом* $f(A)$ *від матриці* A називають матрицю

$$f(A) = a_kA^k + ... + a_1A + a_0E_n.$$

</td>
</tr>
</table>

2.5. Транспонування матриць

<table>
<tr>
<td>

❶ ***Транспонування матриці.*** Запис елементів рядка матриці у стовпець або елементів стовпця матриці в рядок у тому ж порядку називають *транспонуванням*

Матрицю, розміром $n \times m$, яку одержують з матриці A розміром $m \times n$ транспонуванням стовпців (рядків), називають *транспонованою матрицею* до A і позначають A^{T}.

$$a_{ij}^{\mathrm{T}} = a_{ji}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$$

</td>
<td>

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} — & (\vec{a}_1)^{\mathrm{T}} & — \\ — & (\vec{a}_2)^{\mathrm{T}} & — \\ & \vdots & \\ — & (\vec{a}_n)^{\mathrm{T}} & — \end{pmatrix}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

❷ ***Властивості транспонування матриць.***

① $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$;

② $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;

③ $(\alpha A)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}}$;

④ $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

</td>
<td>

❸ ***Симетрична і кососиметрична матриця.*** Матрицю A називають *симетричною*, якщо

$$A^{\mathrm{T}} = A,$$

і *кососиметричною*, якщо

$$A^{\mathrm{T}} = -A.$$

Добуток будь-якої матриці на транспоновану до неї матрицю є симетричною матрицею.

</td>
</tr>
</table>

2.6. Індуктивне означення визначника

❶ ***Визначник матриці.*** *Визначником* (*детермінантом*) квадратної матриці A називають число $\left\|A\right\| = \det A$, яке обчислюють за правилом* ① При $n = 1$: $$\left\|a_{11}\right\| = a_{11}.$$	② При $n > 1$: $$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k},$$ де M_{1k} — визначник матриці порядку $(n-1)$, яку одержано з матриці A викреслюванням 1-го рядка та k-го стовпця**.
❷ ***Доповняльний мінор.*** Визначник матриці, одержаної викреслюванням з матриці A i-го рядка та j-го стовпця називають *доповняльним мінором* M_{ij} елемента a_{ij}.	❸ ***Алгебричне доповнення.*** Число $$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$ називають *алгебричним доповненням* елемента a_{ij}.
❹ Визначник матриці порядку n є числом, що дорівнює сумі добутків з n елементів матриці, узятих по одному з кожного рядка та кожного стовпця матриці з певним знаком.	

2.7. Обчислення визначника

❶ ***Обчислення визначника 2-го порядку***	
① *Доповняльні мінори елементів 1-го рядка*	$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22};$$ $$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{21}$$
② *Формула обчислення*	$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
③ *Схема обчислення*	$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$ $\ominus$ $\oplus$

* Визначник для неквадратних матриць не означують.

** Визначник матриці порядку n означують через визначники матриць порядку $(n-1)$.

❷ *Обчислення визначника 3-го порядку*

① *Доповняльні мінори елементів 1-го рядка*

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

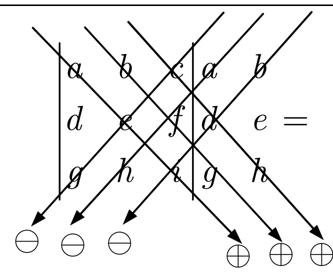
$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

② *Формула обчислення*

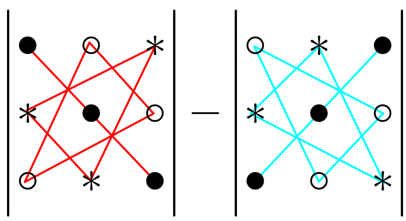
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

③ ***Схема Сарюса****



$$= (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

④ ***Схема трикутників***



❸ *Обчислення визначника порядку* n

① *Розклад визначника за i-м рядком* $(1 \le i \le n)$	$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$
② *Розклад визначника за j-м стовпцем* $(1 \le j \le n)$	$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$

* Простих схем для визначників порядку 4 і вище не існує.

2.8. Властивості визначника

❶ ***Рівноправність рядків та стовпців.*** Транспонування матриці не змінює її визначника.	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix};$ $\det A = \det A^{\mathrm{T}}$
❷ ***Лінійність.*** Якщо стовпець (рядок) визначника є сумою двох стовпців (рядків), то визначник дорівнює сумі двох відповідних визначників.	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$
❸ ***Однорідність.*** Спільний множник стовпця (рядка) можна виносити за знак визначника.	$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$ $\det(kA_n) = k^n \det A$
❹ ***Антисиметричність.*** Якщо переставити два стовпці (рядки) визначника, то він змінить знак.	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$
❺ ***Умови рівності нулеві визначника.*** Визначник матриці дорівнює нулю, якщо матриця містить пропорційні стовпці (рядки).*	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = 0$
❻ ***Теорема анулювання.*** Сума добутків елементів стовпця (рядка) визначника на алгебричні доповнення відповідних елементів іншого стовпця (рядка) дорівнює нулю.	$a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} = 0$
❼ Визначник не зміниться, якщо до будь-якого стовпця (рядка) додати інший стовпець (рядок), помножений на деяке число k.	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
❽ Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку визначників цих матриць.	$\lvert AB \rvert = \lvert A \rvert \lvert B \rvert$

[*] Визначник матриці дорівнює нулю, якщо матриця містить: 1) нульовий стовпець (рядок); 2) два рівні стовпці (рядки).

2.9. Обчислення визначника методом Ґауса (за допомогою елементарних перетворень)

❶ ***Елементарні перетворення матриці.*** *Елементарними перетвореннями матриці* називають: 1) переставляння стовпців (рядків); 2) множення стовпця (рядка) на число, відмінне від нуля; 3) додавання до стовпця (рядка) іншого стовпця (рядка), помноженого на деяке число.	❷ ***Дія елементарних перетворень матриці на її визначник:*** 1) переставлення стовпців (рядків) змінює знак визначника; 2) помноження стовпця (рядка) на число відмінне від нуля, помножує визначник на це число; 3) додавання до стовпця (рядка) іншого стовпця (рядка), помноженого на деяке число не змінює визначника.

❸ Матриці A та B називають *еквівалентними*, якщо одна з них одержана з іншої скінченною кількістю елементарних перетворень, і позначають $A \sim B$.

❹ Визначник верхньої (нижньої) трикутної матриці дорівнює добутку діагональних елементів.	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}...a_{nn}$
Визначник одиничної матриці дорівнює 1.	$\lvert E_n \rvert = 1$

❺ ***Крок методу Ґауса.*** Мета методу — за допомогою елементарних перетворень звести визначник до трикутного вигляду.

$$\det A = \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \left| \overleftarrow{a}_s \leftarrow \overleftarrow{a}_s + \left(-\frac{a_{s1}}{a_{11}}\right)\overleftarrow{a}_1, s = \overline{2, n} \right| =$$

$$= \left|\begin{array}{c:ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hdashline 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c:c} a_{11} & \dots \\ \hdashline 0 & \Delta_{n-1} \end{array}\right|$$

Крок методу повторюють для визначника Δ_{n-1} і так далі.

2.10. Обернення матриць

❶ ***Обернена матриця.*** *Оберненою матрицею* до квадратної матриці A порядку n називають матрицю A^{-1} таку, що	$A^{-1}A = AA^{-1} = E_n.$
❷ ***Критерій оборотності матриці.*** Квадратна матриця є оборотною тоді й лише тоді, коли вона *невироджена* ($\det A \neq 0$).	A є оборотною $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
❸ ***Властивості обернення матриць***	
① Якщо обернена матриця існує, то вона єдина. ② Матриці A та A^{-1} взаємообернені й переставні. ③ $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$	④ $(A^{-1})^{-1} = A$; ⑤ $(A^{-1})^k = (A^k)^{-1},\ k = 0, 1, 2, \ldots$; ⑥ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; ⑦ $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$
❹ ***Алгоритм методу приєднаної матриці.*** ① Обчислюють визначник матриці A. ② Якщо $\det A = 0$, то оберненої до A матриці не існує. Якщо $\det A \neq 0$, то будують *приєднану* до A матрицю $A^* = \left(A_{ij}\right)^{\mathrm{T}}.$	③ Обернену до A матрицю знаходять за формулою $A^{-1} = \dfrac{A^*}{\det A} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$
❺ ***Формула обернення матриці 2-го порядку*** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \det A \neq 0$	$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
❻ ***Метод Ґауса — Йордана*** (елементарних перетворень)	$(A \mid E_n) \xrightarrow[\text{рядків розширеної матриці}]{\text{елементарні перетворення}} (E_n \mid A^{-1})$
❼ ***Розв'язання матричного рівняння*** (для невироджених матриць A)	$A_{n\times n}X_{n\times l} = B_{n\times l} \Rightarrow X = A^{-1}B$; $X_{m\times n}A_{n\times n} = B_{m\times n} \Rightarrow X = BA^{-1}$

2.11. Лінійна залежність і незалежність стовпців матриці

❶ ***Лінійна комбінація стовпців.*** *Лінійною комбінацією стовпців* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ називають стовпець $\vec{y} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n.$	$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$
❷ ***Лінійна незалежність системи стовпців.*** Систему стовпців $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s$ однакової висоти називають *лінійно незалежною*, якщо з рівності $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_s\vec{a}_s = \vec{0}$ випливає, що $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0.$	❸ ***Лінійна залежність системи стовпців.*** Систему стовпців $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s$ однакової висоти називають *лінійно залежною*, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, які не рівні одночасно нулю, що $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ $\left(\lvert\alpha_1\rvert + \lvert\alpha_2\rvert + \ldots + \lvert\alpha_s\rvert \neq 0\right).$
❹ ***Критерій невиродженості квадратної матриці.*** Квадратна матриця невироджена тоді й лише тоді, коли її стовпці лінійно незалежні.	❺ ***Критерій виродженості квадратної матриці.*** Квадратна матриця вироджена тоді й лише тоді, коли її стовпці лінійно залежні.
❻ ***Критерії лінійної залежності стовпців***	
① Система з $s > 1$ стовпців лінійно залежна тоді й лише тоді, коли хоча б один із стовпців є лінійною комбінацією решти стовпців.	$\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_s, \vec{y}\}$ — лінійно залежна $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \vec{y} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_s\vec{x}_s$
② Стовпці $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ заввишки n лінійно залежні тоді й лише тоді, коли визначник матриці, утвореної стовпцями $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, дорівнює нулю.	$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ — лінійна залежні $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \det A = 0$
❼ ① Стовпці $\vec{e}_i, i = \overline{1, n}$, одиничної матриці E_n лінійно незалежні. ② Будь-який стовпець $\vec{a}$ заввишки n є лінійною комбінацією одиничних стовпців, коефіцієнтами якої є елементи стовпця $\vec{a}$.	

2.12. Ранг матриці

❶ ***Мінор.*** Виберімо в матриці A розміром $m \times n$ k рядків та k стовпців $(1 \le k \le \min(m,n))$. Визначник порядку k, складений з елементів, які стоять на перетині вибраних рядків і стовпців, називають *мінором k-го порядку* матриці A.	❷ ***Ранг матриці.*** *Рангом* матриці A називають найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля, і позначають $\operatorname{rang} A$. Якщо $r = \operatorname{rang} A_{m\times n}$, то $$0 \le r \le \min(m,n).$$ Ранг нульової матриці вважають рівним нулю.
❸ ***Базисний мінор.*** Мінор матриці, порядок якого дорівнює рангу матриці $r > 0$, називають *базисним*, а рядки (стовпці), що утворюють базисний мінор, називають *базисними* рядками (стовпцями).	❹ ***Теорема про базисний мінор.*** ① Базисні стовпці (рядки) матриці A лінійно незалежні. ② Кожний стовпець (рядок) матриці A є лінійною комбінацією її базисних стовпців (рядків).
❺ ***Лідер.*** Ненульовий елемент рядка з найменшим номером називають *лідером* рядка.	Усі елементи, які розташовані вліво й униз від лідера рядка східчастої матриці нульові.
❻ ***Східчаста матриця.*** Матрицю називають *східчастою*, якщо вона справджує умови: 1) нульові рядки матриці (якщо вони є) розташовані нижче ненульових; 2) номери стовпців, у яких стоять лідери рядків, зростають.	$$\begin{pmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $\blacksquare$ — лідери; $*$ — будь-які елементи
❼ ***Зведена східчаста матриця.*** Східчасту матрицю називають *зведеною**, якщо: 1) усі лідери рядків дорівнюють 1; 2) над лідерами стоять 0.	$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Будь-яку матрицю елементарними перетвореннями можна звести до східчастого (зведеного східчастого) вигляду.	

* Зведену східчасту матрицю ще називають *редукованою*.

❽ *Властивості рангу матриці.*

① Ранг матриці дорівнює найбільшій кількості лінійно незалежних рядків (стовпців) матриці.

② Ранг східчастої матриці дорівнює кількості ненульових рядків.

③ Транспонування матриці, елементарні перетворення матриці та видалення нульових рядків (стовпців) матриці не змінюють її рангу.

④ Ранги еквівалентних матриць рівні.

⑤ $\det A_n = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A_n < n$.

⑥ $\det A_n \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A_n = n$.

⑦ $\operatorname{rank}(A+B) \le \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$.

⑧ $\operatorname{rang}(AB) \le \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B)$.

❾ *Алгоритм перетворення матриці до східчастого вигляду (прямий хід методу Ґауса).*

① Якщо матриця має східчастий вигляд, то зупиняємось.

② Знаходимо перший зліва стовпець з лідером; переставляючи рядки, переміщуємо рядок, який містить цей лідер нагору.

③ Додаючи до всіх рядків, які розташовані нижче, цей рядок, помножений на відповідні коефіцієнти, дістаємо під лідером нулі.

④ Повторюємо кроки 1—3 для решти рядків.

❿ *Алгоритм перетворення матриці до зведеного східчастого вигляду (метод Ґауса — Йордана).*

① Зводимо матрицю до східчастого вигляду (*прямий хід методу Ґауса*).

② Якщо матриця має зведений східчастий вигляд, то зупиняємось.

③ Ділячи останній ненульовий рядок на його лідера, одержуємо на місці лідера 1.

④ Додаючи до решти рядків новий останній рядок, помножений на відповідні коефіцієнти, дістаємо нулі над одиницею.

⑤ повторюємо кроки 2—4 для решти рядків, які мають лідери (*зворотний хід методу Ґауса*).

⓫ *Знаходження рангу матриці методом Ґауса.*

① Матрицю за допомогою елементарних перетворень зводять до східчастого вигляду.

② Кількість ненульових рядків у східчастому вигляді матриці дорівнює її рангу.

2.13. Системи лінійних алгебричних рівнянь

<table>
<tr><td>❶ Система m лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$</td><td>$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Основна матриця системи[*]</td><td>$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>Стовпець невідомих</td><td>$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>Стовпець вільних членів</td><td>$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>Розширена матриця системи[**]</td><td>$\tilde{A} = \left(A \mid \vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$</td></tr>
<tr><td>❷ Матричний вигляд СЛАР</td><td>$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>❸ Векторний вигляд СЛАР</td><td>$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$</td></tr>
</table>

[*] Перший індекс коефіцієнта a_{ij} при невідомій указує на номер рівняння, а другий — на номер невідомої, при якій стоїть цей коефіцієнт.

[**] Розширена матриця системи повністю задає СЛАР.

2.14. Дослідження розв'язності СЛАР

❶ *Розв'язок СЛАР.*

① *Розв'язком СЛАР* називають набір n значень невідомих

$$\begin{matrix} x_1 = c_1, \\ \ldots \\ x_n = c_n, \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix},$$

підставлення яких у всі рівняння системи перетворює їх на тотожності.

② Будь-який розв'язок системи називають її *частинним розв'язком.*

③ Множину всіх частинних розв'язків називають *загальним розв'язком* системи.

❷ *Характеристики СЛАР.*

① СЛАР називають *сумісною* (*розв'язною*), якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною* (*нерозв'язною*), якщо вона не має розв'язків.

② Сумісну систему називають *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має більше як один розв'язок.

③ Дві системи називають *рівносильними*, якщо кожний розв'язок першої системи є розв'язком другої, і навпаки. Усі несумісні системи вважають рівносильними.

Система лінійних алгебричних рівнянь може мати: $0, 1$ та ∞ розв'язків.

❸ *Теорема Кронекера — Капеллі.* СЛАР сумісна тоді й лише тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи.

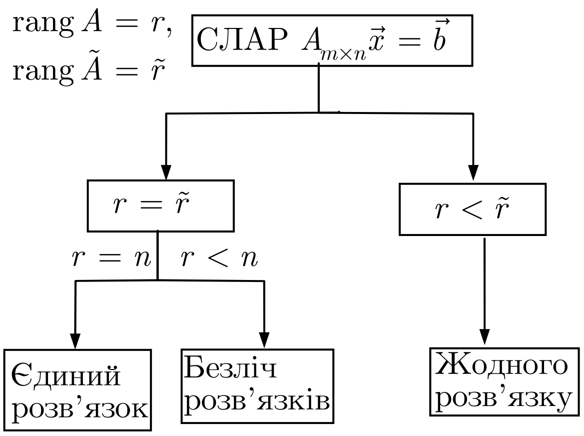
$$\text{СЛАР сумісна} \Leftrightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A}$$

❹ *Кількість розв'язків СЛАР.*

① Якщо $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} \tilde{A}$, то система не має ***жодного*** розв'язку.

② Якщо $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = n$, то система має ***єдиний*** розв'язок.

③ Якщо $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} < n$, то система має ***безліч*** розв'язків.



❹ *Розв'язати систему* означає:

① з'ясувати, чи є система сумісною або несумісною;

② якщо система сумісна, то знайти множину її розв'язків.

❺ *СЛАР з матрицею* $n \times n$:

① $\det A \neq 0 \Rightarrow$ система має єдиний розв'язок;

② $\det A = 0 \Rightarrow$ система не має жодного розв'язку або має безліч розв'язків.

2.15. Методи розв'язання СЛАР

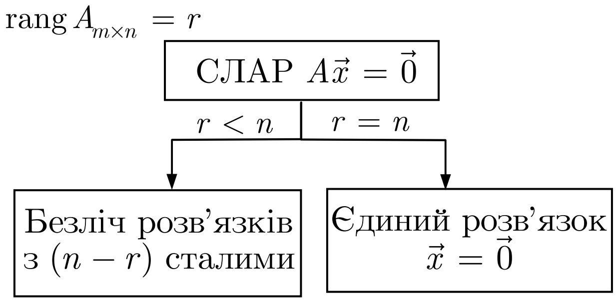
❶ Метод ***оберненої матриці*** (***матричний*** метод) (для невироджених систем, $\det A \neq 0$)	$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$
❷ Метод ***Крамера*** (для невироджених систем)	$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}, j = \overline{1,n},$
$\Delta = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_n \end{vmatrix} \neq 0;$	$\Delta_j = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{b} & \cdots & \vec{a}_n \end{vmatrix}$ стовпець вільних членів j-й стовпець матриці A
Матричний метод і метод Крамера застосовують лише до квадратних матриць.	
❸ ***Елементарними перетвореннями*** *СЛАР* називають: 1) переставляння рівнянь; 2) множення обох частин якого-небудь рівняння на число, відмінне від нуля; 3) додавання до рівняння іншого рівняння, помноженого на деяке число.	Елементарні перетворення СЛАР приводять до відповідних елементарних перетворень рядків матриці та розширеної матриці системи. СЛАР, одержані одна з одної елементарними перетвореннями, називають ***еквівалентними***. Еквівалентні СЛАР ***рівносильні***.
❹ ***Алгоритм методу Ґауса — Йордана**** (універсальний метод)	
① Записуємо розширену матрицю системи.	$\left(\begin{array}{ccc\|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$
② Зводимо розширену матрицю до східчастого вигляду (прямий хід методу Ґауса).	$\left(\begin{array}{cccccccccc\|c} \alpha_{1,k_1} & \ldots & \ldots & & & & & & & & \beta_1 \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{2,k_2} & \ldots & & & & & & \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & & & & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & \alpha_{r,k_r} & \ldots & \ldots & \beta_r \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & 0 & & 0 & \beta_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right)$

* Цей метод ще називають методом *елементарних перетворень*.

③ Досліджуємо систему на сумісність (теорема Кронекера — Капеллі).	Якщо $\beta_{r+1} \neq 0,$ то система несумісна. Якщо ж $\beta_{r+1} = 0,$ то система сумісна.
④ У разі сумісності, перетворюємо східчасту матрицю до зведеного східчастого вигляду.	$\left(\begin{array}{ccccccccc\|c} 1 & \ldots & \ldots & 0 & & & 0 & & & \delta_1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & & 0 & & & \delta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & & & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & \ldots & \delta_r \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \ldots & & & & & & \ldots & & \ldots \end{array}\right).$
⑤ Знаходимо розв'язки одержаної системи. Можливі 2 випадки:	
1) кількість невідомих дорівнює рангу матриці системи $(n = r)$;	$\begin{cases} x_1 = \delta_1, \\ x_2 = \delta_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_r = \delta_r \end{cases} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_r \end{pmatrix}$
2) кількість невідомих n більше за кількість рівнянь r $(n > r)$. Невідомі, які відповідають лідерам рядків називають *базисними**, а решту невідомих — *вільними.* Надаємо вільним невідомим довільних значень $C_1, \ldots, C_{n-r}$ і виражаємо через них базисні невідомі. Нехай $y_1, y_2, \ldots, y_r$ — базисні невідомі; $y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_n$ — вільні невідомі	$\begin{cases} x_1 = \delta_1 - \gamma_{1,r+1}C_1 - \ldots - \gamma_{1,n}C_{n-r}, \\ x_2 = \delta_2 - \gamma_{2,r+1}C_1 - \ldots - \gamma_{2,n}C_{n-r}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = \delta_r - \gamma_{r,r+1}C_1 - \ldots - \gamma_{r,n}C_{n-r}, \\ x_{r+j} = C_j, j = \overline{1, n-r}. \end{cases}$ $\Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} \delta_1 - \sum\limits_{j=1}^{n-r} \gamma_{1,r+j}C_j \\ \ldots \\ \delta_r - \sum\limits_{j=1}^{n-r} \gamma_{r,r+j}C_j \\ C_1 \\ \ldots \\ C_{n-r} \end{pmatrix}$
❺ ***Розв'язання матричного рівняння методом Ґауса — Йордана*** (для невироджених матриць A)	$A_{n\times n}X_{n\times l} = B_{n\times l}:$ $(A \mid B) \xrightarrow[\text{рядків розширеної матриці}]{\text{елементарні перетворення}}$ $(E_n \mid X)$

* Кожне рівняння містить лише одну базисну невідому.

2.16. Однорідні й неоднорідні СЛАР

❶ ***Однорідні й неоднорідні СЛАР.*** СЛАР називають *однорідною*, якщо вільні члени всіх рівнянь нульові, і *неоднорідною*, якщо хоч один з них відмінний від нуля.	Однорідна СЛАР завжди сумісна, бо вона має нульовий розв'язок $\vec{x} = \vec{0}$. Будь-яка лінійна комбінація розв'язків однорідної СЛАР є розв'язком цієї системи.
❷ ***Дослідження однорідної СЛАР.*** Якщо ранг матриці $A_{m\times n}$ однорідної СЛАР дорівнює r, то система має $n - r$ лінійно незалежних розв'язків $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-r}$, які утворюють *фундаментальну систему розв'язків* (*ФСР*). Кожний розв'язок однорідної СЛАР лінійно виражається через сукупність розв'язків, які утворюють ФСР цієї системи.	
❸ ***Структура загального розв'язку однорідної СЛАР.*** Якщо $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-r}\}$ — ФСР однорідної СЛАР, то загальний розв'язок системи є лінійною комбінацією розв'язків $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-r}$. $$\vec{x}_{\text{заг. одн.}} = C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2 + \ldots + C_{n-r}\vec{e}_{n-r}$$	❹ ***Структура загального розв'язку неоднорідної СЛАР.*** Загальний розв'язок неоднорідної СЛАР дорівнює сумі загального розв'язку відповідної однорідної СЛАР* і деякого частинного розв'язку неоднорідної СЛАР. $$\vec{x}_{\text{заг. неодн.}} = \vec{x}_{\text{заг. одн.}} + \vec{x}_{\text{част. неодн.}}$$
❺ ***Однорідна СЛАР із квадратною матрицею A***	
① Якщо $\det A \neq 0$, то система має єдиний розв'язок $\vec{x} = \vec{0}$. ② Якщо $\det A = 0$, то система має безліч розв'язків.	③ Однорідна СЛАР має ненульовий розв'язок тоді й лише тоді, коли $$\det A = 0.$$

* Неоднорідній СЛАР $A\vec{x} = \vec{b}$ відповідає однорідна СЛАР $A\vec{x} = \vec{0}$.

Практикум 2.1. Матриці

Навчальні задачі

2.1.1. Визначити розмір матриці $A=\begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 & 0 \\ -6 & 8 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Виписати всі рядки і стовпці матриці, елементи a_{14} та a_{22}.

Розв'язання. [2.1.1.]

Матриця A має розмір 2×4. ①

Рядки матриці A:

$$\overleftarrow{a}_1=\begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\overleftarrow{a}_2=\begin{pmatrix} -6 & 8 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Стовпці матриці A:

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \vec{a}_2=\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{a}_3=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{a}_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$a_{14}=0, a_{22}=8.\ ②$$

Коментар. ① Матриця A має два рядки і чотири стовпці.

② Елемент a_{14} розташований у 1-му рядку і 4-му стовпці. Елемент a_{22} розташований у 2-му рядку і 2-му стовпці.

2.1.2. Задано матриці:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1.2.1. Визначити при яких значеннях параметрів x та y виконано рівність $\begin{pmatrix} x & -2 \\ 3 & y \end{pmatrix}=C$.

Розв'язання. [2.3.1.]

$$\begin{pmatrix} x & -2 \\ 3 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=0. \end{cases}$$

2.1.2.2. Знайти матрицю $A+B$.

Розв'язання. [2.3.2.]

$$A+B\overset{①}{=}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{додаємо відповідні елементи}}=\begin{pmatrix} 1+7 & -3+1 & -2+0 \\ 2+0 & 1+(-1) & 0+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Коментар. ① Матриці A та B однакового розміру 2×3 — їх можна додавати й віднімати. Щоб додати матриці A та B (того самого розміру), треба додати їхні відповідні елементи.

2.1.2.3. Знайти матрицю $A - B$.

Розв'язання. [2.3.2.]

$$A - B \overset{①}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{віднімаємо відповідні елементи}} = \begin{pmatrix} 1-7 & -3-1 & -2-0 \\ 2-0 & 1-(-1) & 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Коментар. ① Щоб відняти від матриці A матрицю B (того самого розміру), від кожного елемента матриці A треба відняти відповідний елемент матриці B.

2.1.2.4. Знайти матрицю $A + C$.

Розв'язання. [2.3.2.]

Оскільки матриця A розміром 2×3, а матриця C розміром 2×2, то їх додавати не можна.

2.1.2.5. Знайти матрицю $3A$.

Розв'язання. [2.3.3.]

$$3A \overset{①}{=} \underbrace{3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{кожен елемент} \\ \text{множимо на } 3}} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-3) & 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 & -6 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Коментар. ① Щоб помножити матрицю на число, треба кожен її елемент помножити на це число.

2.1.3. Задано матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1.3.1. Знайти матрицю B^{T}.

Розв'язання. [2.5.1.]

$$B^{\mathrm{T}} \overset{①}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}}_{\substack{\text{міняємо рядки} \\ \text{на стовпці}}} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Коментар. ① Щоб транспонувати матрицю B, треба поміняти її стовпці на рядки й записати їх у тому самому порядку.

2.1.3.2. Знайти добуток $\overleftarrow{a}_1 \cdot \vec{b}_1$.

Розв'язання. [2.4.1, 2.4.2.]

Рядок $\overleftarrow{a}_1$ завдовжки 3 узгоджений із стовпцем заввишки 3.

$$\overleftarrow{a}_1 \cdot \vec{b}_1 \overset{①}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{перемножуємо відповідні елементи і додаємо добутки}} = 1 \cdot 7 + (-3) \cdot 1 + (-2) \cdot 0 = 4.$$

Коментар. ① Щоб помножити рядок на узгоджений з ним стовпець, треба перемножити їхні відповідні елементи й добутки додати. Дістаємо квадратну матрицю 1-го порядку, яку ототожнюють з числом — єдиним її елементом.

2.1.3.3. Знайти матрицю AB.

Розв'язання. [2.4.1, 2.4.3, 2.4.4.]

[*Визначаємо можливість множення і розмір добутку.*]

матриця A 2×3 *матриця B* 3×2

рівні

добуток буде розміром 2×2

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{①}{=} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{12} \end{pmatrix}.$$

матриці множать за правилом «рядок на стовпець»

[*Знаходимо елементи добутку.*]

$$d_{11} = \overleftarrow{a}_1 \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{②}{=} 4;$$

$$d_{12} = \overleftarrow{a}_1 \cdot \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{③}{=} -1;$$

$$d_{21} = \overleftarrow{a}_2 \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{④}{=} 15;$$

$$d_{22} = \overleftarrow{a}_2 \cdot \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{\text{⑤}}{=} -1.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -1 \end{pmatrix}.$$

[*Множення матриць записують ще за схемою Фалька.*]

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 7 & 0 \\ & & & 1 & -1 \\ & & & 0 & 2 \\ \hline 1 & -3 & -2 & 4^{\text{②}} & -1^{\text{③}} \\ 2 & 1 & 0 & 15^{\text{④}} & -1^{\text{⑤}} \end{array} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -1 \end{pmatrix}.$$

Коментар. ① Матриця A розміром 2×3 узгоджена з матрицею B розміром 3×2. Добуток $D = AB$ буде матрицею 2×2.

② $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 7 + (-3) \cdot 1 + (-2) \cdot 0 = 4.$

③ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 = -1.$

④ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 15.$

⑤ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = -1.$

2.1.3.4. Знайти матрицю BA.

Розв'язання. [2.4.1, 2.4.4.]

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 1 & -3 & -2 \\ & \text{①} & 2 & 1 & 0 \\ \hline 7 & 0 & 7 & -21 & -14 \\ 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \end{array} \Leftrightarrow BA = D_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 7 & -21 & -14 \\ -1 & -4 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Коментар. ① Матриця B розміром 3×2 узгоджена з матрицею A розміром 2×3. Добуток $D = BA$ буде матрицею 3×3.

2.1.3.5. Знайти матрицю AC.

Розв'язання. [2.4.1.]

$$\begin{array}{ccc} \textit{матриця } A & & \textit{матриця } C \\ 2\times 3 & & 2\times 2 \\ \uparrow & \underset{\textit{нерівні}}{\rule{3cm}{0.4pt}} & \uparrow \end{array}$$

Оскільки матриці A та C — неузгоджені, то добуток AC не існує.

2.1.3.6. Знайти матрицю C^2.

Розв'язання. [2.4.8.]

$$C^2 \overset{①}{=} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{②}{=} \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Коментар. ① Квадратну матрицю завжди можна помножити саму на себе. За означенням $C^2 = C\cdot C$.

$$② \quad \begin{array}{cc|cc} & & 1 & -2 \\ & & 3 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -5 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -6 \end{array}$$

2.1.3.7. Знайти значення матричного многочлена $f(C)$, якщо $f(x) = 2x^2 - x + 3$.

Розв'язання. [2.4.9.]

$$f(C) \overset{①}{=} 2C^2 - C + 3E_2 \overset{②}{=}$$

$$= 2\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}.$$

Коментар. ① Підставляємо замість x матрицю C, а замість сталої 3 — матрицю $3E_2$ (E_2 — одинична матриця 2-го порядку — того ж порядку, що й матриця C).

② Матрицю C^2 знайдено в **2.1.3.6.**

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

2.1.4. Якого розміру матриця $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$? Чому дорівнюють елементи a_{21} та a_{32}? Які індекси має елемент d?

2.1.5. Визначте розмір матриці A, випишіть усі рядки і стовпці матриці й елементи a_{23} та a_{32}:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$;
2) $A = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -1 & 0 \\ -9 & 0 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$;
4) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$.

2.1.6. Визначте тип матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -6 \\ 7 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.1.7. Визначте, при яких значеннях x, y та z рівні матриці:

1) $\begin{pmatrix} 5 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & -3 \end{pmatrix}$;
2) $\begin{pmatrix} 6x \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5y \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & 2x \\ y & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$;
4) $\begin{pmatrix} x-1 & 4 \\ y+3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} x^2 & 1 & z \\ 2 & 3 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & 1 & 4 \\ 2 & y & -1 \end{pmatrix}$;
6) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ x & 2 & 4 \\ 9 & 1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ y & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.1.8. Задано матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть:

1) $\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{a}_2 - \vec{a}_1, 2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2, \alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2;$

2) $\overleftarrow{b}_1 + \overleftarrow{b}_2, \overleftarrow{b}_1 - \overleftarrow{b}_2, \overleftarrow{b}_2 - \overleftarrow{b}_1, 3\overleftarrow{b}_2 - 2\overleftarrow{b}_1, \alpha\overleftarrow{b}_1 + \beta\overleftarrow{b}_2;$

3) $A + B, A - B, 2A + 3B, A + C, A - \lambda E_2;$

4) $C + D, C - D, D - C, D - B, B - \lambda E_2;$

5) $L + M, 3L - M, L + C, L - \lambda E_3;$

6) $L - M, 2L + 3M, M - D, M - \lambda E_3;$

7) $\overleftarrow{a}_1 \cdot \vec{a}_1, \vec{a}_1 \cdot \overleftarrow{a}_1, A\vec{a}_1, \overleftarrow{a}_1 A;$

8) $\overleftarrow{b}_1 \cdot \vec{b}_1, \vec{b}_1 \cdot \overleftarrow{b}_1, B\vec{b}_1, \overleftarrow{b}_1 B;$

9) $AB, A^2, A^{\mathrm{T}}B;$

10) $BA, B^2, AB^{\mathrm{T}};$

11) $A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}, (AB)^{\mathrm{T}};$

12) $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}, (BA)^{\mathrm{T}};$

13) $AC, CA, C^{\mathrm{T}}A;$

14) $BD, DB, D^{\mathrm{T}}B;$

15) $CC^{\mathrm{T}}, C^{\mathrm{T}}C, C^2, CD;$

16) $DD^{\mathrm{T}}, D^{\mathrm{T}}D, D^2, DC;$

17) $\overleftarrow{c}_1 L, L\vec{c}_1, LM, L^2, CL, LC;$

18) $\overleftarrow{d}_1 M, M\vec{d}_1, ML, M^2, DM, MD;$

19) $\overleftarrow{c}_1 L\vec{c}_1, CLA, ACL;$

20) $\overleftarrow{d}_1 M\vec{d}_1, DMB, BDM, MDB.$

2.1.9. Задано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Знайдіть матрицю X із рівняння:

1) $3A + \dfrac{1}{2}X = B;$

2) $2A - 5X = B.$

Знайдіть матриці X та Y із системи:

3) $\begin{cases} X + Y = A, \\ 2X + 3Y = B; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2X - 3Y = A, \\ 3X - 2Y = B. \end{cases}$

2.1.10. Задано матриці A, B та C. Знайдіть найраціональнішим способом добуток ABC, якщо:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -7 \\ 8 & 3 & 11 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2.1.11. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ знайдіть найраціональнішим способом:

1) $A + B - (A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}})$; 2) $\left(-\frac{1}{2}B^{\mathrm{T}} - B\right)^{\mathrm{T}}$.

2.1.12. Знайдіть матрицю:

1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$; 4) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n, \lambda \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

2.1.13. Задано многочлен $f(x) = x^2 - 5x - 2$. Знайдіть значення матричного многочлена $f(A)$:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.1.14. Переконайтесь, що матриця A справджує рівняння:

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3 - 9A^2 + 18A = O$;

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A^3 + 2A^2 - A - 2E_3 = O$.

2.1.15. Знайдіть всі матриці, переставні з матрицею:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.1.16. Розв'яжіть матричне рівняння:

1) $\left(3A^{\mathrm{T}} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\left(2A^{\mathrm{T}} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}} = 4A - 9\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповіді

2.1.4. Матриця A розміром 3×2. $a_{21} = c, a_{32} = f$. $d = a_{22}$.

2.1.5. 1) $2 \times 3, \overleftarrow{a}_1 = (1 \quad -2 \quad 3), \overleftarrow{a}_2 = (-4 \quad 5 \quad -6)$,

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}, a_{23} = -6, a_{32} -$ не існує;

2) $2 \times 4, \overleftarrow{a}_1 = (-6 \quad 4 \quad -1 \quad 0), \overleftarrow{a}_2 = (-9 \quad 0 \quad 1/2 \quad 2)$,

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, a_{23} = \dfrac{1}{2}, a_{32} -$ не існує;

3) $3 \times 3, \overleftarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \overleftarrow{a}_2 = (-4 \quad 5 \quad 6), \overleftarrow{a}_3 = (7 \quad -8 \quad 9)$,

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}, a_{23} = -6, a_{32} = -8;$

4) $3 \times 2, \overleftarrow{a}_1 = (-1 \quad 0), \overleftarrow{a}_2 = (3 \quad 4), \overleftarrow{a}_3 = (-7 \quad 5),\ \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$

$a_{23} -$ не існує, $a_{32} = 5$.

2.1.6. A — діагональна матриця; B — верхня трикутна матриця; C — одинична матриця 3-го порядку; D — квадратна матриця; F — матриця-стовпець; G — матриця-рядок.

2.1.7. 1) $x = -3, y = 5$; 2) $x = -\dfrac{3}{2}, y = 5$; 3) $x = -1, y = 1$;

4) $x = 1, y = -5$; 5) $x = -1, y = 3, z = 4$;

6) $x = 2, y = 9, z = 0$.

2.1.8. 1) $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix},$

$2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ 2\alpha \end{pmatrix};$

2) $\overleftarrow{b}_1 + \overleftarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix}, \overleftarrow{b}_1 - \overleftarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}, \overleftarrow{b}_2 - \overleftarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix},$

$3\overleftarrow{b}_2 - 2\overleftarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} -8 & 7 \end{pmatrix}, \alpha\overleftarrow{b}_1 + \beta\overleftarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta & \alpha + 3\beta \end{pmatrix};$

3) $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, A - B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, 2A + 3B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix},$

$A + C -$ не існує, $A - \lambda E_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix};$

4) $C + D = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}, C - D = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, D - C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 0 \\ -1 & -8 \end{pmatrix},$

$D - B -$ не існує, $B - \lambda E_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix};$

5) $L + M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 7 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}, 3L - M = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 5 & 13 & 17 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix},$

$L+C-$ не існує, $L-\lambda E_3=\begin{pmatrix}3-\lambda & 1 & 0\\ 2 & 5-\lambda & 6\\ 1 & 4 & 3-\lambda\end{pmatrix}$;

6) $L-M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 5\\ -2 & 2 & 4\end{pmatrix}, 2L+3M=\begin{pmatrix}12 & -1 & 0\\ 7 & 16 & 15\\ 11 & 14 & 3\end{pmatrix}$,

$M-D-$ не існує, $M-\lambda E_3=\begin{pmatrix}2-\lambda & -1 & 0\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 3 & 2 & -1-\lambda\end{pmatrix}$;

7) $\overleftarrow{a}_1\cdot\vec{a}_1=-1, \vec{a}_1\cdot\overleftarrow{a}_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix},\ A\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}, \overleftarrow{a}_1A=\begin{pmatrix}-1 & -1\end{pmatrix}$;

8) $\overleftarrow{b}_1\cdot\vec{b}_1=-1, \vec{b}_1\cdot\overleftarrow{b}_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix}, B\vec{b}_1=\begin{pmatrix}-1\\ -8\end{pmatrix}, \overleftarrow{b}_1B=\begin{pmatrix}-1 & 4\end{pmatrix}$;

9) $AB=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}, A^2=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}, A^{\mathrm{T}}B=\begin{pmatrix}-3 & 7\\ -1 & -1\end{pmatrix}$;

10) $BA=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}, B^2=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ -8 & 7\end{pmatrix}, AB^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0 & -5\\ 2 & -4\end{pmatrix}$;

11) $A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}, (AB)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$; 12) $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}, (BA)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$;

13) $AC-$ не існує, $CA=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 4 & -4\\ 19 & -5\end{pmatrix}, C^{\mathrm{T}}A-$ не існує;

14) $BD-$ не існує, $DB=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 1 & 1\\ 6 & 1\end{pmatrix}, D^{\mathrm{T}}B-$ не існує;

15) $CC^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 19\\ 4 & 16 & 20\\ 19 & 20 & 74\end{pmatrix}, C^{\mathrm{T}}C=\begin{pmatrix}42 & 37\\ 37 & 53\end{pmatrix}, C^2, CD-$ не існує;

16) $DD^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}10 & 3 & 13\\ 3 & 1 & 4\\ 13 & 4 & 17\end{pmatrix}, D^{\mathrm{T}}D=\begin{pmatrix}26 & -7\\ -7 & 2\end{pmatrix}, D^2, DC-$ не існує;

17) $\overleftarrow{c}_1 L -$ не існує, $L\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 52 \\ 32 \end{pmatrix}, LM = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 27 & 20 & -1 \\ 15 & 13 & 1 \end{pmatrix}$,

$L^2 = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 6 \\ 22 & 51 & 48 \\ 14 & 33 & 33 \end{pmatrix}, CL -$ не існує, $LC = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 52 & 46 \\ 32 & 23 \end{pmatrix}$;

18) $\overleftarrow{d}_1 M -$ не існує, $M\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}, ML = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -6 \\ 8 & 15 & 15 \\ 12 & 9 & 9 \end{pmatrix}$,

$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 7 & 5 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}, DM -$ не існує, $MD = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$;

19) $\overleftarrow{c}_1 L\vec{c}_1, CLA, ACL -$ не існує, $LCA = \begin{pmatrix} 19 & -7 \\ 144 & -52 \\ 78 & -32 \end{pmatrix}$;

20) $\overleftarrow{d}_1 M\vec{d}_1, DMB, BDM -$ не існує, $MDB = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 13 & 3 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$.

2.1.9. 1) $\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$; 3) $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$;

4) $X = \begin{pmatrix} -2/5 & 1/5 \\ -3/5 & -2/5 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -3/5 & -1/5 \\ -2/5 & -3/5 \end{pmatrix}$.

2.1.10. 1) $\begin{pmatrix} 52 & -468 & -156 & -312 \\ -19 & 171 & 57 & 114 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 24 \\ 58 \end{pmatrix}$.

2.1.11. 1) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ -1/2 & -6 \end{pmatrix}$.

2.1.12. 1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $O_{3\times 3}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

2.1.13. 1) $O_{2\times 2}$; 2) $\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -8 \\ -13 & 25 & -1 \\ -16 & 29 & -4 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -6 & 6 & -3 \\ 3 & -11 & -1 \\ -6 & -6 & -11 \end{pmatrix}$.

2.1.15. 1) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$; 2) $\begin{pmatrix} a+b & 5a \\ a & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$. **2.1.16.** 1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -\frac{9}{2} & -5 \end{pmatrix}$.

Практикум 2.2. Визначники

Навчальні задачі

2.2.1. Для матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ знайти доповняльний мінор та алгебричне доповнення елемента a_{12}.

Розв'язання. [2.6.2, 2.6.3.]

$$M_{12} \overset{①}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{викреслюємо} \\ \text{1-й рядок} \\ \text{і 2-й стовпець}}} = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 4 - 6\cdot 7 = -12 - 42 = -54;$$

$$A_{12} \overset{②}{=} (-1)^{1+2} M_{12} = 54.$$

Коментар. ① Щоб одержати мінор M_{12} елемента a_{12}, треба з матриці A викреслити 1-й рядок і 2-й стовпець. Визначник одержаної матриці і буде мінором M_{12}.

② $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

2.2.2. Задано матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

2.2.2.1. Обчислити визначник $\det A$ за означенням.

Розв'язання. [2.6.1.]

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \overset{①}{=}$$

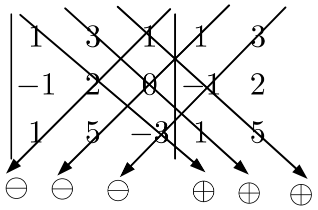
$$= \underbrace{1\cdot(-6) - 3\cdot 3 + 1\cdot(-7)}_{\text{обчислюємо визначники 2-го порядку}} = -22.$$

Коментар. ① $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3) - 0\cdot 5 = -6;$

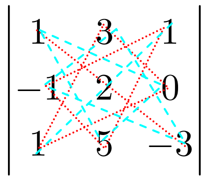
$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-3) - 0\cdot 1 = 3; \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 5 - 2\cdot 1 = -7.$$

2.2.2.2. Обчислити визначник $\det A$ за схемою Сарюса (трикутників).

Розв'язання. [2.7.2.]



або



$$\det A = (1\cdot 2\cdot(-3) + 3\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot(-1)\cdot 5) -$$
$$-(1\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 5 + 3\cdot(-1)\cdot(-3)) =$$
$$= -11 - 11 = -22.$$

2.2.3.1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & 0 \end{vmatrix}$, розкладаючи його за 1-м рядком.

Розв'язання. [2.7.3.]

$$\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & 0 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$
$$= \overline{i}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + \overline{j}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + \overline{k}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= -12\overline{i} + 21\overline{j} + 15\overline{k}.$$

2.2.3.2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & a & -2 \\ 3 & b & 6 \\ 7 & c & -4 \end{vmatrix}$, розкладаючи його за 2-м стовпцем.

Розв'язання. [2.7.3.]

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -2 \\ 3 & b & 6 \\ 7 & c & -4 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} =$$
$$= a(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} + b(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} + c(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} =$$
$$= 54a + 10b - 12c.$$

2.2.4. Користуючись властивостями, довести, що

$$\begin{vmatrix} 4\alpha + 2\beta & 4 & 2 \\ 2\alpha + 3\beta & 2 & 3 \\ -\alpha + \beta & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язання. [2.8.2, 2.8.3, 2.8.5.]

[*Визначник можна розбити на суму двох визначників.*]

$$\begin{vmatrix} 4\alpha + 2\beta & 4 & 2 \\ 2\alpha + 3\beta & 2 & 3 \\ -\alpha + \beta & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{[2.8.2]}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} 4\alpha & 4 & 2 \\ 2\alpha & 2 & 3 \\ -\alpha & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{виносимо спільний} \\ \text{множник} \\ \text{1-го стовпця}}} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2\beta & 4 & 2 \\ 3\beta & 2 & 3 \\ \beta & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{виносимо спільний} \\ \text{множник} \\ \text{1-го стовпця}}} \overset{[2.8.3]}{=}$$

$$= \alpha \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{визначник має} \\ \text{два рівні стовпці}}} + \beta \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{визначник має} \\ \text{два рівні стовпці}}} \overset{[2.8.5]}{=} \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0.$$

2.2.5. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

зведенням до трикутного вигляду.

Розв'язання. [2.9.2–2.9.5.]

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{множимо 1-й рядок} \\ \text{на відповідні коефіцієнти} \\ \text{і віднімаємо його} \\ \text{від решти рядків}}} \begin{array}{|l|} \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 - 3\overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{a}_3 \leftarrow \overleftarrow{a}_3 + 2\overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{a}_4 \leftarrow \overleftarrow{a}_4 - 2\overleftarrow{a}_1 \end{array} \overset{①}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{множимо 2-й рядок} \\ \text{на відповідні коефіцієнти} \\ \text{і віднімаємо його} \\ \text{від 3-го та 4-го рядків}}} \begin{array}{|l|} \overleftarrow{a}_3 \leftarrow \overleftarrow{a}_3 - \frac{4}{3}\overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{a}_4 \leftarrow \overleftarrow{a}_4 - \frac{2}{3}\overleftarrow{a}_2 \end{array} \overset{②}{=}$$

$$= \underset{\substack{\textit{множимо 3-й рядок}\\ \textit{на відповідний коефіцієнт}\\ \textit{і віднімаємо його}\\ \textit{від 4-го рядка}}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{41}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{5}{3} \end{vmatrix}} \;\Bigg|\; \overleftarrow{a}_4 \leftarrow \overleftarrow{a}_4 - \frac{10}{41}\overleftarrow{a}_3 \;\Bigg|\; \overset{③}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{41}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{65}{41} \end{vmatrix} \overset{[2.9.4]}{=}$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot \frac{41}{3} \cdot \left(-\frac{65}{41}\right) \overset{④}{=} -65.$$

Коментар. ① Формуємо 1-й стовпець — додаванням до решти рядків 1-го рядка з відповідними коефіцієнтами, досягаємо нулів під елементом a_{11} (*якщо 1-й стовпець нульовий, то й визначник дорівнює нулю; якщо ж ні, переставленням рядків завжди можна досягнути, щоб 1-й елемент 1-го стовпця був ненульовий* (*зручніше за все — одиниця*)).

Додаємо до 2-го рядка 1-й рядок, помножений на (-3), і записуємо результат у 2-й рядок. Додаємо до 3-го рядка 1-й рядок, помножений на 2 і записуємо результат у 3-й рядок. Додаємо до 4-го рядка 1-й рядок, помножений на (-2), і записуємо результат у 4-й рядок.

Перший стовпець трикутної матриці сформований.

② Формуємо 2-й стовпець (*1-й рядок не бере участь у перетвореннях*).

Додаємо до 3-го рядка 2-й рядок, помножений на $\left(-\frac{4}{3}\right)$, і записуємо результат у 3-й рядок. Додаємо до 4-го рядка 2-й рядок, помножений на $\left(-\frac{2}{3}\right)$, і записуємо результат у 4-й рядок.

③ Формуємо 3-й стовпець (*1-й і 2-й рядки не беруть участь у перетвореннях*).

Додаємо до 4-го рядка 3-й рядок, помножений на $\left(-\frac{10}{41}\right)$, і записуємо результат у 4-й рядок.

④ Визначник матриці з цілими елементами є цілим числом (*хоча під час обчислення можуть виникати дроби*).

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

2.2.6. Задано матрицю A. Обчисліть доповняльні мінори та алгебричні доповнення вказаних елементів:

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}, a_{22}, a_{32};$ 2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, a_{23}, a_{11}.$

2.2.7. Обчисліть визначник:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix};$ 2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix};$

3) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix};$ 4) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix};$

5) $\begin{vmatrix} 1 & \log_a \frac{1}{b} \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix};$ 6) $\begin{vmatrix} \log_a b & \log_{a^2} b \\ \log_{b^2} a & \log_b a \end{vmatrix};$

7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix};$ 8) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix};$

9) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix};$ 10) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix};$

11) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix};$ 12) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 10 \end{vmatrix}.$

2.2.8. Знайдіть значення λ, при яких визначник дорівнює нулеві:

1) $\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 3 & 6 \end{vmatrix};$ 2) $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix};$

3) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix};$ 4) $\begin{vmatrix} 11-\lambda & 2 & -8 \\ 2 & 2-\lambda & 10 \\ -8 & 10 & 5-\lambda \end{vmatrix}.$

2.2.9. Обчисліть визначники розкладанням за символічним рядком:

1) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a & 1 & 4 \\ b & 2 & 5 \\ c & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2.2.10. Користуючись властивостями визначника, доведіть, що:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

2.2.11. Користуючись властивостями визначника, спростіть та обчисліть визначник:

1) $\begin{vmatrix} 131 & 231 \\ -130 & -230 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$.

3) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 15325 & 15323 & 37527 \\ 23735 & 23735 & 17417 \\ 23737 & 23737 & 17418 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 2 & \sin^2\alpha & -\cos^2\alpha \\ 2 & \sin^2\beta & -\cos^2\beta \\ 2 & \sin^2\gamma & -\cos^2\gamma \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1+a & 1+b & 1+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

2.2.12. Обчисліть визначник методом елементарних перетворень:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$; 10) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$.

2.2.13. Числа $185, 518, 851$ діляться на 37. Доведіть, що визначник $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 5 & 1 & 8 \\ 8 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ ділиться на 37.

Відповіді

2.2.6. 1) $M_{22} = -2, A_{22} = -2, M_{32} = 24,\ A_{32} = -24$;
2) $M_{23} = -1, A_{23} = 1, M_{11} = A_{11} = 15$.

2.2.7. 1) 18; 2) -5; 3) 1; 4) $4ab$; 5) 2; 6) $\dfrac{3}{4}$; 7) 0; 8) -15; 9) 1; 10) -1; 9), 10) -10.

2.2.8. 1) $\lambda = 2$; 2) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$; 3) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$;
4) $\lambda_1 = -9, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 18$.

2.2.9. 1) $-2a + 4b - 2c$; 2) $6b - 3a - 3c$; 3) $8a + 15b + 12c - 19d$; 4) $2a - b - c - d$.

2.2.11. 1) -100; 2) -1487600; 3) -29400000; 4) -22198; 5) 0; 6) $(b-a)(c-a)(c-b)$.

2.2.12. 1) 160; 2) -140; 3) 90; 4) 27; 5) 1875; 6) 394; 7) $9\sqrt{10}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; 8) $n!$; 9) $2n+1$; 10) $n(-1)^{n-1}$.

Практикум 2.3. Обернена матриця

Навчальні задачі

2.3.1. Знайти методом приєднаної матриці обернену матрицю до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. [2.10.4.]

[***Крок 1.*** *Обчислюємо визначник матриці A.*] ①

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Існує обернена матриця до матриці A.

[***Крок 2.*** *Знаходимо алгебричні доповнення A_{ij} елементів a_{ij} матриці.*] ②

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = -1, A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -2, A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1, A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2.$$

[***Крок 3.*** *Складаємо приєднану матрицю.*] ③

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[***Крок 4.*** *Знаходимо обернену матрицю A^{-1}.*] ④

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[*Крок 5.* *Перевіряємо правильність обчислень.*] ⑤

Перевірка:

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-2&1&0\\-3&-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-3&1\\4&-5&2\\5&-7&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Коментар. ① Якщо $\det A=0$, то для матриці A не існує оберненої. Якщо $\det A\neq 0$, то обернена матриця існує.

② Алгебричні доповнення знаходимо за формулою $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$. Мінори M_{ij} дістаємо викреслюванням з визначника i-го рядка та j-го стовпця.

③ Приєднану матрицю знаходимо за формулою

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

④ Обернену матрицю знаходимо за формулою

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*.$$

⑤ Досить перевірити рівність $A^{-1}A=E_n$.

2.3.2. Знайти обернену матрицю до матриці $A=\begin{pmatrix}4&1\\2&3\end{pmatrix}$.

***Розв'язання.* [2.10.4, 2.10.5.]**

$$\det A=\begin{vmatrix}4&1\\2&3\end{vmatrix}=10\neq 0.$$

Існує обернена матриця до матриці A.

$$A_{11}=|3|=3,\qquad A_{12}=-|2|=-2,$$
$$A_{21}=-|1|=-1,\qquad A_{22}=|4|=4.$$

$$A^*=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&4\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&4\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}\overset{①}{=}\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3&-1\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/10&-1/10\\-1/5&2/5\end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$\begin{pmatrix}3/10&-1/10\\-1/5&2/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Коментар. ① Обернену до матриці 2-го порядку $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ можна знаходити за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2.3.3. Розв'язати матричні рівняння $AX = B, XA = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. [2.10.7.]

$\det A = -1 \neq 0.$① Отже, існує матриця

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$AX = B;$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$XA = B;$$

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Коментар. ① Завдяки невиродженості матриці A матричне рівняння можна розв'язати за допомогою оберненої до A матриці.

2.3.4. Знайти методом Ґауса — Йордана обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. [2.10.6, 2.12.10.]

[***Крок 1.*** *Дописуючи праворуч від матриці A матрицю E_3, утворюємо розширену матрицю.*]

$$(A \mid E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

[***Крок 2.*** *Зводимо розширену матрицю* $(A \mid E_3)$ *елементарними перетвореннями її рядків до східчастого вигляду* (*прямий хід методу Ґауса*).]

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|c|} \\ \overleftarrow{b}_2 \leftarrow \overleftarrow{b}_2 - 2\overleftarrow{b}_1 \\ \overleftarrow{b}_3 \leftarrow \overleftarrow{b}_3 - \frac{5}{2}\overleftarrow{b}_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -5/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|c|} \\ \\ \overleftarrow{b}_3 \leftarrow \overleftarrow{b}_3 - \frac{1}{2}\overleftarrow{b}_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right).$$

[***Крок 3.*** *Висновуємо про існування оберненої до* A *матриці.*] $\operatorname{rang} A = 3 \Rightarrow$ матриця A невироджена і має обернену.

[***Крок 4.*** *Зводимо східчасту матрицю елементарними перетвореннями рядків до зведеного східчастого вигляду* (*зворотний хід методу Ґауса*).]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|c|} \overleftarrow{b}_1 \leftarrow \overleftarrow{b}_1 - 2\overleftarrow{b}_3 \\ \\ \overleftarrow{b}_3 \leftarrow 2\overleftarrow{b}_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{|c|} \overleftarrow{b}_1 \leftarrow \overleftarrow{b}_1 + 3\overleftarrow{b}_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{|c|} \overleftarrow{b}_1 \leftarrow \frac{1}{2}\overleftarrow{b}_1 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right) = (E_3 \mid A^{-1}).$$

[***Крок 5.*** *Виписуємо обернену матрицю.*]

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[***Крок 6.*** *Перевіряємо правильність обчислень.*]

Перевірка:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

2.3.5. Задано матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$. Використовуючи означення оберненої матриці, з'ясуйте, чи є матриця B оберненою до матриці A, якщо:

1) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; 2) $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

2.3.6. Задано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Знайдіть матриці AB, BA та A^{-1}.

2.3.7. Знайдіть обернену до матриці A, якщо:

1) $A^2 - 4A + E_n = O_n$; 2) $A^3 + 5A^2 - 3A - E_n = O_n$.

2.3.8. Обчисліть $(AB)^{-1}$ та $(\alpha A)^{-1}$, якщо:

1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \alpha = 5$;

2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \alpha = -3$.

2.3.9. Знайдіть матрицю, обернену до матриці (якщо вона існує):

1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

2.3.10. Розв'яжіть матричні рівняння:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

3) $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$; 4) $X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2.3.11. Знайдіть методом Ґауса — Йордана обернену матрицю до матриці:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповіді

2.3.5. 1) ні; 2) ні. **2.3.6.** $AB = BA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

2.3.7. 1) $A^{-1} = -A + 4E_n$; 2) $A^{-1} = A^2 + 5A - 3E_n$.

2.3.8. 1) $(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&3\\-1&8\end{pmatrix}, (5A)^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$;

2) $(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}0&3&4\\4&9&20\\8&-6&-4\end{pmatrix}, (-3A)^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$.

2.3.9. 1) $\begin{pmatrix}5&-2\\3&-1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}4/5&-3/5\\1/5&-2/5\end{pmatrix}$; 3) матриця необоротна; 4) $\begin{pmatrix}4/15&-1/5\\1/3&0\end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix}-7/3&2&-1/3\\5/3&-1&-1/3\\-2&1&1\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}1/9&2/9&2/9\\2/9&1/9&-2/9\\2/9&-2/9&1/9\end{pmatrix}$.

2.3.10. 1) $\begin{pmatrix}-1&-1\\2&3\end{pmatrix}$; 2) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}14&24\\-7&-11\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}$; 4) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-11&7\\-21&13\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}2&-2\\1&3\end{pmatrix}$.

2.3.11. 1) $\begin{pmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}7&-4\\-5&3\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-7/3&2&-1/3\\5/3&-1&-1/3\\-2&1&1\end{pmatrix}$; 4) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix}-1&-1/3&2/3\\0&-2/3&1/3\\1&1/2&-1/2\end{pmatrix}$; 6) $\frac{1}{41}\begin{pmatrix}11&6&-4\\-5&1&13\\14&-11&-20\end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix}-7&5&12&-19\\3&-2&-5&8\\41&-30&-69&111\\-59&43&99&-159\end{pmatrix}$; 8) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$.

Практикум 2.4. Ранг матриці

Навчальні задачі

2.4.1. Методом Ґауса (елементарних перетворень) знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3&5\\1&-5&1&-3\\2&-1&5&6\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. [2.12.9, 2.12.11.]

$$A\overset{①}{=}\begin{pmatrix}1&1&3&5\\1&-5&1&-3\\2&-1&5&6\end{pmatrix}\begin{array}{|c|}\\ \overleftarrow{a}_2\leftarrow\overleftarrow{a}_2-\overleftarrow{a}_1\\ \overleftarrow{a}_3\leftarrow\overleftarrow{a}_3-2\overleftarrow{a}_1\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&3&5\\0&-6&-2&-8\\0&-3&-1&-4\end{pmatrix}\begin{array}{|c|}\\ \\ \overleftarrow{a}_3\leftarrow\overleftarrow{a}_3-\frac{1}{2}\overleftarrow{a}_2\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&1&3&5\\0&-6&-2&-8\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B.^{②}$$

Матриця B має два ненульових рядки, отже, $\operatorname{rang}A=2$.

Коментар. ① Зводимо матрицю елементарними перетвореннями рядків до східчастого вигляду.

② Ранг східчастої матриці дорівнює кількості її ненульових рядків.

2.4.2. З'ясувати, чи є система стовпців $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix},\vec{a}_2=\begin{pmatrix}2\\-8\\5\end{pmatrix},\vec{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}$ лінійно незалежною.

Розв'язання. [2.12.8.]

[***Крок 1.*** *Записуємо матрицю із заданими стовпцями.*]

$$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\-3&-8&-4\\1&5&3\end{pmatrix}.$$

[***Крок 2.*** *Знаходимо ранг матриці.*]

$$\begin{pmatrix}2&2&1\\-3&-8&-4\\1&5&3\end{pmatrix}\begin{array}{|c|}\overleftarrow{a}_3\leftarrow\overleftarrow{a}_1\\ \\ \overleftarrow{a}_1\leftarrow\overleftarrow{a}_3\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&5&3\\-3&-8&-4\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{array}{|c|}\\ \overleftarrow{a}_2\leftarrow\overleftarrow{a}_2+3\overleftarrow{a}_1\\ \overleftarrow{a}_3\leftarrow\overleftarrow{a}_3-2\overleftarrow{a}_2\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&5&3\\0&7&5\\0&-8&-5\end{pmatrix}\begin{array}{|c|}\\ \\ \overleftarrow{a}_3\leftarrow\overleftarrow{a}_3+\frac{8}{7}\overleftarrow{a}_2\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&5&3\\0&7&5\\0&0&5/7\end{pmatrix}\overset{①}{\Rightarrow}\operatorname{rang}A=3.$$

[***Крок 3.*** *Висновуємо про лінійну залежність (незалежність) заданих стовпців.*] Стовпці $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ лінійно незалежні^{②}.

Коментар. ① Ранг східчастої матриці дорівнює кількості її ненульових рядків.

② Інший спосіб з'ясувати лінійну незалежність такої системи стовпців (кількість стовпців дорівнює довжині стовпців) — це обчислити визначник матриці, утвореної з цих стовпців.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

2.4.3. Укажіть який-небудь базисний мінор і визначте ранг матриці:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; 6) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2.4.4. Знайдіть ранг матриці:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$.

2.4.5. Чому дорівнює ранг матриці при різних значеннях λ?

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & \lambda & -1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & \lambda \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ 3 & \lambda & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

2.4.6. З'ясуйте, чи є система стовпців, лінійно залежною:

1) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; 2) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

3) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$; 4) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$;

5) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; 6) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Відповіді

2.4.3. 1) $\operatorname{rang} A = 1, M_1 = |1|$ 2) $\operatorname{rang} A = 1, M_1 = |2|$; 3) $\operatorname{rang} A = 0$, не існує; 4) $\operatorname{rang} A = 1, M_1 = |1|$; 5) $\operatorname{rang} A = 2, M_2 = |A|$; 6) $\operatorname{rang} A = 2, M_2 = |A|$.

2.4.4. 1) 2; 2) 3; 3) 3; 4) 2; 5) 3; 6) 2; 7) 3; 8) 2; 9) 3; 10) 3.

2.4.5. 1) 2, якщо $\lambda = 3$ і 3, якщо $\lambda \neq 3$; 2) 2, якщо $\lambda = -17$ і 3, якщо $\lambda = -17$; 3) 3, якщо $\lambda = 3$ і 4, якщо $\lambda \neq 3$; 4) 3, якщо $\lambda = \pm 3$ і 4, якщо $\lambda \neq \pm 3$.

2.4.6. 2)—5) лінійно залежна; 1, 6) лінійно незалежна.

Практикум 2.5. Системи лінійних алгебричних рівнянь

Навчальні задачі

2.5.1. Розв'язати систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6, \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 21 \end{cases}$ за методом Крамера.

Розв'язання. [2.15.2.]

[***Крок 1.*** *Записуємо матрицю системи і стовпець вільних членів.*] ①

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 10 & 8 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

[***Крок 2.*** *Обчислюємо визначник матриці системи* $\det A$.] ②

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 10 & 8 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{система має єдиний розв'язок.}$$

[***Крок 3.*** *Обчислюємо визначники, що відповідають кожній змінній.*]

$$\Delta_1 = \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \\ 21 & 10 & 8 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{1-й стовпець } \Delta \text{ замінюємо} \\ \text{на стовпець вільних членів}}} = -9;$$

$$\Delta_2 = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 21 & 8 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{2-й стовпець } \Delta \text{ замінюємо} \\ \text{на стовпець вільних членів}}} = 9;$$

$$\Delta_3 = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 10 & 21 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{3-й стовпець } \Delta \text{ замінюємо} \\ \text{на стовпець вільних членів}}} = 0.$$

[***Крок 4.*** *Обчислюємо значення змінних за Крамеровими формулами.*]

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-9}{3} = -3; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{9}{3} = 3; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{3} = 0.$$

[***Крок 5.*** *Записуємо розв'язок системи.*]

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Коментар. ① Матрицю системи формують коефіцієнти при невідомих x_1, x_2, x_3.

② Якщо $\det A \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера.

Якщо $\det A = 0$, то метод Крамера не застосовний.

2.5.2.1. Дослідити на сумісність і знайти загальний розв'язок СЛАР
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. [2.15.4.]

[***Крок 1.*** *Записуємо розширену матрицю системи.*]
$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

[***Крок 2.*** *Елементарними перетвореннями рядків зводимо розширену матрицю до східчастого вигляду.*]
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 - 2\overleftarrow{a}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

[***Крок 3.*** *Перевіряємо критерій Кронекера — Капеллі.*] Оскільки
$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = 2,$$
то система сумісна.

[***Крок 4.*** *Продовжуючи перетворення, перетворюємо матрицю до зведеного східчастого вигляду.*]
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \overleftarrow{a}_1 \leftarrow \overleftarrow{a}_1 + \frac{1}{3}\overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow -\frac{1}{3}\overleftarrow{a}_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

[***Крок 5.*** *Визначаємо, які невідомі є базисними, а які вільними*①. *Вільним невідомим надаємо довільних значень $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Виписуємо систему, яка відповідає перетвореній розширеній матриці і знаходимо з неї базисні невідомі*②.]

Невідомі x_1 та x_3 — базисні; $x_2 = C_1, x_4 = C_2, x_5 = C_3$ — вільні.
$$\begin{cases} x_1 + 2C_1 - \frac{1}{3}C_2 = 1, \\ x_3 - \frac{2}{3}C_2 + C_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2C_1 + \frac{1}{3}C_2, \\ x_3 = \frac{2}{3}C_2 - C_3. \end{cases}$$

[***Крок 6.*** *Записуємо загальний розв'язок системи.*]

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 - 2C_1 + \dfrac{1}{3}C_2 \\ C_1 \\ \dfrac{2}{3}C_2 - C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Коментар. ① Базисні невідомі відповідають лідерам рядків, а решта невідомих — вільні.

② Система має безліч розв'язків, оскільки

$$\operatorname{rang} A = 2 = \operatorname{rang} \tilde{A} < n = 5.$$

2.5.2.2. Дослідити на сумісність і знайти загальний розв'язок СЛАР

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & -3 & 14 \\ -1 & -1 & 5 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \overleftarrow{a}_1 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_1 - 2\overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{a}_3 \leftarrow \overleftarrow{a}_3 + \overleftarrow{a}_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & -7 & 7 & -35 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow -\dfrac{1}{7}\overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{a}_3 \leftarrow \overleftarrow{a}_3 + \dfrac{1}{7}\overleftarrow{a}_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{array}\right).$$

Оскільки $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = 3$, то система сумісна.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \overleftarrow{a}_1 \leftarrow \overleftarrow{a}_1 + \overleftarrow{a}_3 \\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 + \dfrac{1}{3}\overleftarrow{a}_3 \\ \overleftarrow{a}_3 \leftarrow \dfrac{1}{3}\overleftarrow{a}_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \overleftarrow{a}_1 \leftarrow \overleftarrow{a}_1 - 2\overleftarrow{a}_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Невідомі x_1, x_2, x_3 — базисні①.

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Коментар. ① Система має єдиний розв'язок, оскільки
$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = n = 3.$$

2.5.3. Знайти методом Ґауса — Йордана загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. [2.15.4, 2.16.2, 2.16.3.]

[*Для однорідної системи можна перетворювати основну матрицю системи.*]

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 - \overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{a}_3 \leftarrow \overleftarrow{a}_3 - 2\overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{a}_4 \leftarrow \overleftarrow{a}_4 - 4\overleftarrow{a}_1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow -\overleftarrow{a}_3 \\ \overleftarrow{a}_3 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overleftarrow{a}_1 \leftarrow \overleftarrow{a}_1 + 2\overleftarrow{a}_2 \\ \\ \overleftarrow{a}_3 \leftarrow \overleftarrow{a}_3 - 5\overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{a}_4 \leftarrow \overleftarrow{a}_4 - 4\overleftarrow{a}_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \overleftarrow{a}_3 \leftarrow -\frac{1}{8}\overleftarrow{a}_3 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 5/8 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overleftarrow{a}_1 \leftarrow \overleftarrow{a}_1 - 3\overleftarrow{a}_3 \\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 - \overleftarrow{a}_3 \\ \\ \overleftarrow{a}_4 \leftarrow \overleftarrow{a}_4 + 8\overleftarrow{a}_3 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -7/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -5/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\operatorname{rang} A = r = 3$; x_1, x_2, x_3 — базисні невідомі, $x_4 = C_1, x_5 = C_2$ — вільні невідомі, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}C_1 - \frac{7}{8}C_2 = 0, \\ x_2 + \frac{1}{2}C_1 - \frac{5}{8}C_2 = 0, \\ x_3 - \frac{1}{2}C_1 + \frac{5}{8}C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}C_1 + \frac{7}{8}C_2, \\ x_2 = -\frac{1}{2}C_1 + \frac{5}{8}C_2, \\ x_3 = \frac{1}{2}C_1 - \frac{5}{8}C_2. \end{cases}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}C_1 + \frac{7}{8}C_2 \\ -\frac{1}{2}C_1 + \frac{5}{8}C_2 \\ \frac{1}{2}C_1 - \frac{5}{8}C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_1} + C_2 \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{5}{8} \\ -\frac{5}{8} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_2} = C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2.$$

ФСР: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

2.5.4. Знайти методом Ґауса — Йордана загальний розв'язок неоднорідної СЛАР і фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної СЛАР, якщо $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

Розв'язання. [2.15.4, 2.16.2–2.16.4.]

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \overleftarrow{a}_1 \leftarrow \frac{1}{2}\overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 - \frac{3}{2}\overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{a}_3 \leftarrow \overleftarrow{a}_3 - \frac{9}{2}\overleftarrow{a}_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7/2 & 3/2 & 1/2 & 3 \\ 0 & -11/2 & -5/2 & 1/2 & -5 \\ 0 & -55/2 & -25/2 & 5/2 & -25 \end{array}\right) \begin{array}{l} \overleftarrow{a}_1 \leftarrow \overleftarrow{a}_1 + \frac{7}{11}\overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow -\frac{2}{11}\overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{a}_3 \leftarrow \overleftarrow{a}_3 - 5\overleftarrow{a}_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/11 & 9/11 & -2/11 \\ 0 & 1 & 5/11 & -1/11 & 10/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = 2 \Rightarrow$ система сумісна; x_1, x_2 — базисні невідомі, $x_3 = C_1, x_4 = C_2$ — вільні, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{11} + \frac{1}{11}C_1 - \frac{9}{11}C_2, \\ x_2 = \frac{10}{11} - \frac{5}{11}C_1 + \frac{1}{11}C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{11} + \frac{1}{11}C_1 - \frac{9}{11}C_2 \\ \frac{10}{11} - \frac{5}{11}C_1 + \frac{1}{11}C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \underset{\vec{x}_{\text{част. неодн.}}}{\begin{pmatrix} -\frac{2}{11} \\ \frac{10}{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \underbrace{C_1 \underset{\vec{e}_1}{\begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + C_2 \underset{\vec{e}_2}{\begin{pmatrix} -\frac{9}{11} \\ \frac{1}{11} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}_{\vec{x}_{\text{заг. одн.}}};$$

$$\vec{x} = \vec{x}_{\text{част. неодн.}} + C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2$$

ФСР відповідної однорідної системи: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

2.5.5. Визначити значення параметра λ, при якому система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ має ненульовий розв'язок і знайти цей розв'язок.

Розв'язання. [2.16.2.]

[*Зводимо матрицю системи до східчастого вигляду.*]

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \\ 1 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overleftarrow{a}_1 \leftarrow \overleftarrow{a}_3 \\ \\ \overleftarrow{a}_3 \leftarrow \overleftarrow{a}_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 4 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 - 4\overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{a}_3 \leftarrow \overleftarrow{a}_3 - 2\overleftarrow{a}_1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 0 & -1-4\lambda & -1 \\ 0 & 1-2\lambda & -1 \end{pmatrix} \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 - 2\overleftarrow{a}_3 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1-2\lambda & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \overleftarrow{a}_3 \leftarrow \overleftarrow{a}_3 + \frac{1-2\lambda}{3}\overleftarrow{a}_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -(2+2\lambda)\big/3 \end{pmatrix}.$$

[*З'ясовуємо для яких значень параметра λ ранг матриці менший від кількості невідомих. Тоді однорідна система матиме ненульові розв'язки.*]

Ранг матриці системи буде менше від 3 (кількості невідомих), коли $2+2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$.

[*Підставляючи знайдене значення параметра, знаходимо загальний розв'язок системи.*]

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \tfrac{1}{3}\overleftarrow{a}_2 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix} \overleftarrow{a}_1 \leftarrow \overleftarrow{a}_1 + \overleftarrow{a}_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Невідомі x_1, x_2 — базисні; $x_3 = C_1$ — вільна невідома, $C_1 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{3}C_1 = 0, \\ x_2 - \frac{1}{3}C_1 = 0, \\ x_3 = C_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{5}{3}C_1, \\ x_2 = \frac{1}{3}C_1, \\ x_3 = C_1 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3}C_1 \\ \frac{1}{3}C_1 \\ C_1 \end{pmatrix}.$$

2.5.6. Розв'язати методом Ґауса — Йордана матричне рівняння $SX = T$, де

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. [2.15.5.]

[***Крок 1.*** *Дописуючи праворуч від матриці S матрицю T, утворюємо розширену матрицю.*]

$$A = (S \mid T) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

[***Крок 2.*** *Зводимо розширену матрицю $A = (S \mid T)$ елементарними перетвореннями її рядків до східчастого вигляду (прямий хід методу Ґауса).*]

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 - 2\overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{a}_3 \leftarrow \overleftarrow{a}_3 - 3\overleftarrow{a}_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 & 4 \end{array}\right) \overleftarrow{a}_2 \leftarrow -\tfrac{1}{3}\overleftarrow{a}_2 \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rr}1&2&1&2&-1\\0&1&1&1&-1\\0&-3&-1&-4&4\end{array}\right)\begin{array}{l}\overleftarrow{a}_1\leftarrow\overleftarrow{a}_1-2\overleftarrow{a}_2\\ \\ \overleftarrow{a}_3\leftarrow\overleftarrow{a}_3+3\overleftarrow{a}_2\end{array}\sim\left(\begin{array}{rrr|rr}1&0&-1&0&1\\0&1&1&1&-1\\0&0&2&-1&1\end{array}\right).$$

[***Крок 3.*** *Висновуємо про розв'язність матричного рівняння.*] $\operatorname{rang} S=\operatorname{rang} A=3\Rightarrow$матричне рівняння розв'язне.

[***Крок 4.*** *Елементарними перетвореннями рядків перетворюємо східчасту матрицю до зведеного східчастого вигляду.*]

$$B\ \overleftarrow{b}_3\leftarrow\tfrac{1}{2}\overleftarrow{b}_3\sim\left(\begin{array}{rrr|rr}1&0&-1&0&1\\0&1&1&1&-1\\0&0&1&-1/2&1/2\end{array}\right)\begin{array}{l}\overleftarrow{b}_1\leftarrow\overleftarrow{b}_1+\overleftarrow{b}_3\\ \overleftarrow{b}_2\leftarrow\overleftarrow{b}_2-3\overleftarrow{b}_3\sim\\ \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rr}1&0&0&-1/2&3/2\\0&1&0&3/2&-3/2\\0&0&1&-1/2&1/2\end{array}\right).$$

[***Крок 5.*** *Записуємо матрицю-розв'язок.*]

$$X=\begin{pmatrix}-1/2&3/2\\3/2&-3/2\\-1/2&1/2\end{pmatrix}.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

2.5.7. Запишіть у матричному вигляді систему лінійних алгебричних рівнянь:

1) $\begin{cases}x_1-x_2=1,\\2x_1-2x_2=5;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x+2y=5,\\6x+4y=10;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x_1+2x_2=3,\\-2x_1+3x_2=0,\\-2x_1-4x_2=1;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=1,\\x_2+x_3=2.\end{cases}$

2.5.8. Розв'яжіть систему:

1) $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=-7,\\x_1+4x_2+2x_3=-1,\\x_1-4x_2=-5;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}5x_1+8x_2+x_3=2,\\3x_1-2x_2+6x_3=-7,\\2x_1+x_2-x_3=-5;\end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1, \\ 3x + 2y - z = 9, \\ x - 4y + 3z = -5; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 7x - 2y - 3z = -3, \\ x + 5y + z = 14, \\ 3x + 4y + 2z = 10; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x - 5y + z = 1, \\ x + y - z = 2, \\ x - 13y + 5z = -4; \end{cases}$
6) $\begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 2x + y - 5z = -1, \\ x - y - z = -2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3; \end{cases}$
8) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

2.5.9. Дослідіть на сумісність і знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок системи:

1) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22, \end{cases}$
2) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 7; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$

2.5.10. Знайдіть фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок системи:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

2.5.11. Знайдіть загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних алгебричних рівнянь за допомогою фундаментальної системи розв'язків відповідної однорідної системи і частинного розв'язку неоднорідної системи:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 2, \\ x_2 - x_3 - x_4 = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 3, \\ x_1 - x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 - 11x_4 - 2x_5 = 3, \\ 4x_3 - 3x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$

2.5.12. З'ясуйте для яких значень параметра p система має єдиний розв'язок:

1) $\begin{cases} x + py - z = 1, \\ x + 10y - 6z = p, \\ 2x - y + pz = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 4y - 2z = -p, \\ 3x + 5y - pz = 3, \\ px + 3py + z = p. \end{cases}$

2.5.13. Дослідіть на сумісність і знайдіть загальні розв'язки систем залежно від значень параметра λ:

1) $\begin{cases} \lambda x_1 - 4x_2 = 2, \\ x_1 - \lambda x_2 = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ (\lambda+1)x_1 + (\lambda+2)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ \lambda x_2 - \lambda x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

2.5.14. Розв'яжіть матричні рівняння методом Ґауса — Йордана:

1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$

3) $X \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 9 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -15 \\ 6 & -10 \end{pmatrix};$ 4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$

2.5.15. Знайдіть невідомі коефіцієнти многочлена:

1) $f(x) = ax^2 + bx + c$, якщо $f(-2) = -8, f(1) = 4, \; f(2) = 4;$

2) $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, якщо: $f(-1) = 3, f(1) = 1, \; f(2) = -15.$

2.5.16. Розв'яжіть нелінійну систему:

1) $\begin{cases} x^3y^2z = 16, \\ x^2y^3z = 32, \\ x^4yz^2 = 32; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy^2z^3 = 3, \\ x^2y^3z^4 = 9, \\ x^2yz = 3. \end{cases}$

Відповіді

2.5.7. 1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2.5.8. 1) $\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}\frac{11}{7}+\frac{4}{7}C_1\\ \frac{3}{7}+\frac{3}{7}C_1\\ C_1\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}-1+2C_1\\1+C_1\\C_1\end{pmatrix}$; 7) $\varnothing$; 8) $\varnothing$.

2.5.9. 1) $\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\2\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}0\\2\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-\frac{2}{11}+\frac{1}{11}C_1-\frac{9}{11}C_2\\ \frac{10}{11}-\frac{5}{11}C_1+\frac{1}{11}C_2\\ C_1\\ C_2\end{pmatrix}$; 4) $\varnothing$; 5) $\begin{pmatrix}1+2C_1+C_2-3C_3\\C_1\\1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}C_1-\frac{4}{3}C_2-\frac{8}{3}C_3\\ C_1\\ C_2+3C_3\\ C_2\\ C_3\end{pmatrix}$.

2.5.10. 1) $C_1\vec{e}_1, \vec{e}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$; 2) $C_1\vec{e}_1+C_2\vec{e}_2, \vec{e}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$;

3)—4) система має лише тривіальний розв'язок;

5) $C_1\vec{e}_1+C_2\vec{e}_2, \vec{e}_1=\begin{pmatrix}8\\-6\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_2=\begin{pmatrix}-7\\5\\0\\1\end{pmatrix}$; 6) $C_1\vec{e}_1+C_2\vec{e}_2, \vec{e}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\0\\-\frac{5}{7}\\1\end{pmatrix}$.

2.5.11. 1) $\vec{x}=\vec{x}_{\text{чн}}+C_1\vec{x}_1+C_2\vec{x}_2, \vec{x}_{\text{чн}}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{x}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$;

2) $\vec{x}=\vec{x}_{\text{чн}}+C_1\vec{x}_1+C_2\vec{x}_2, \vec{x}_{\text{чн}}=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{x}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{x}_2=\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$;

3) $\vec{x} = \vec{x}_{\text{чн}} + C_1\vec{x}_1 + C_2\vec{x}_2 + C_3\vec{x}_3,\ \vec{x}_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

4) $\vec{x} = \vec{x}_{\text{чн}} + C_1\vec{x}_1 + C_2\vec{x}_2,\ \vec{x}_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2.5.12. 1) $\mathbb{R} \setminus \{-5, 3\}$; 2) $\mathbb{R} \setminus \{-1, -7\}$.

2.5.13. 1) для $\lambda = 2$ система несумісна, при $\lambda = -2$ загальний розв'язок $\begin{pmatrix} -1 - 2C_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$, для $\lambda \neq \pm 2$ розв'язок $\begin{pmatrix} \frac{2}{\lambda - 2} \\ \frac{1}{\lambda - 2} \end{pmatrix}$;

2) для $\lambda = -2$ загальний розв'язок $C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, для $\lambda = 1$ загальний розв'язок $\begin{pmatrix} -C_1 - C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, для $\lambda \neq 1$ та $\lambda \neq -2$ розв'язок $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

3) для $\lambda = 0$ система несумісна,

для $\lambda = 1$ загальний розв'язок $\begin{pmatrix} -4 - C_1 \\ 2 \\ 3 \\ C_1 \end{pmatrix}$, для $\lambda(\lambda - 1) \neq 0$ розв'язок $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\lambda} \\ \frac{3}{\lambda} \\ 1 - \frac{5}{\lambda} \end{pmatrix}$.

2.5.14. 1) $\varnothing$; 2) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 14 & 24 \\ -7 & -11 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 - 3\alpha & \alpha \\ 2 - 3\beta & \beta \end{pmatrix}$; 4) $\varnothing$

2.5.15. 1) $a = -1, b = 3, c = 2$; 2) $a = -1, b = -3, c = 5$.

2.5.16. 1) $x = 1, y = 2, z = 4$; 2) $x = 1, y = 9, z = \frac{1}{3}$.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВМІННЯ

Основні означення	
1. Матриця, рядки і стовпці матриці. **2.** Типи матриць. **3.** Дії з матрицями: додавання, віднімання, множення матриці на число, множення матриць, транспонування матриці, піднесення матриці до натурального степеня. **4.** Матричний многочлен. **5.** Індуктивне означення визначника матриці. **6.** Обернена матриця. **7.** Ранг матриці.	**8.** Система лінійно незалежних (лінійно залежних) стовпців (рядків) матриці. **9.** Матричний і векторний запис системи лінійних алгебричних рівнянь. **10.** Типи систем лінійних алгебричних рівнянь: сумісні, несумісні, визначені, невизначені, однорідні, неоднорідні. **11.** Фундаментальна система розв'язків однорідної СЛАР. **12.** Загальний розв'язок СЛАР.
Теореми	
1. Властивості визначника. **2.** Критерій оборотності матриці. **3.** Теорема про базисний мінор. **4.** Теорема про ранг матриці.	**5.** Теорема Кронекера — Капеллі. **6.** Теорема про структуру розв'язків однорідної СЛАР. **7.** Теорема про структуру розв'язків неоднорідної СЛАР.
Методи	
1. Метод приєднаної матриці. **2.** Метод Крамера. **3.** Метод оберненої матриці.	**4.** Метод Ґауса. **5.** Метод Ґауса — Йордана.
Основні задачі	
1. Додавати, віднімати, перемножувати, транспонувати матриці, множити матрицю на число. **2.** Знаходити значення матричного многочлена. **3.** Обчислювати визначник 3-го порядку: розкладанням за будь-яким рядком, розкладанням за будь-яким стовпцем, правилом Сарюса (трикутників), зведенням до трикутного вигляду. **4.** Обчислювати визначник 4-го порядку зведенням до трикутного вигляду.	**5.** Знаходити обернену матрицю: методом приєднаної матриці, методом Ґауса — Йордана. **6.** Розв'язувати матричні рівняння вигляду $AX = B$ або $XA = B$ з оборотною матрицею A. **7.** Розв'язувати невироджені системи 2-го та 3-го порядків методом: Крамера, оберненої матриці, Ґауса — Йордана. **8.** Знаходити ранг матриці методом Ґауса. **9.** Розв'язувати загальні системи методом Ґауса — Йордана.

РОЗДІЛ 3. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Векторна алгебра — розділ математики, у якому вивчають дії над векторами. Поняття вектора описує величини, що характеризуються не тільки числовим значенням, але й напрямом.

Векторна алгебра використовує поняття лінійної алгебри і є ефективним інструментом в аналітичній геометрії й теорії поля.

У розділі також розглянуто комплексні числа як важливе узагальнення дійсних чисел.

Ключові поняття:

— *вектор;*

— *базис на прямій, на площині й у просторі;*

— *координати вектора;*

— *прямокутна декартова система координат;*

— *полярна системи координат;*

— *комплексне число.*

Опанувавши цей розділ, Ви зможете:

— *знаходити координати вектора в заданому базисі;*

— *виконувати дії над векторами;*

— *досліджувати взаємне розташування векторів;*

— *застосовувати вектори в задачах геометрії й фізики;*

— *виконувати дії над комплексними числами.*

Попередні знання та вміння з розділів:

— *Елементарна геометрія;*

— *Лінійна алгебра.*

Поданий матеріал використовується в розділах:

— *Аналітична геометрія;*

— *Диференціальне числення функцій кількох змінних;*

— *Теорія поля;*

— *Теорія функцій комплексної змінної.*

3.1. ВЕКТОРИ

У математиці та фізиці для дослідження й опису величин, які характеризуються не тільки числовим значенням (одним числом), а й напрямом (кількома числами), використовують вектори геометричні (арифметичні).

3.1.1. Поняття вектора

Багато фізичних величин повністю визначаються своїм числовим значенням (об'єм, маса, густина, температура тощо); їх називають *скалярними*. Але існують величини, які крім числового значення мають ще й напрям (швидкість, сила, напруженість магнітного поля тощо). Такі величини називають *векторними*.

1. Розгляньмо впорядковану пару точок A та B простору. Ця пара визначає напрямлений відрізок (точка A є першою, точка B — другою), напрям якого на рисунку вказують стрілкою.

Означення 3.1. (вектора).

Вектором у геометрії (*геометричним вектором*) називають напрямлений відрізок. Першу точку напрямленого відрізка називають *початком* вектора, а другу — *кінцем* вектора (рис. 3.1).

2. Вектор з початком у точці A й кінцем у точці B позначають як $\overline{AB}$. Якщо вказівка на точки несуттєва, то застосовують простіше позначення — однією малою літерою латинки з рискою зверху: $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$.

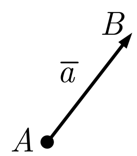


Рис. 3.1. Вектор як напрямлений відрізок

Вектор $\overline{BA}$ (з початком у точці B й кінцем у точці A) називають *протилежним* до вектора $\overline{AB}$ і позначають $-\overline{AB}$.

Довжиною вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ називають довжину відрізка AB і позначають як $|\overline{a}|, |\overline{AB}|$.

3. Якщо початок A й кінець вектора B зливаються, то вектор називають *нульовим* і позначають $\overline{AA}$ або $\overline{0}$.

Напрям нульового вектора невизначений і може бути вибраний довільним. Довжина нульового вектора (і лише його) дорівнює нулю.

3.1.2. Взаємне розташування векторів

1. Колінеарні вектори. Два вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називають *колінеарними* і позначають $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

Колінеарні ненульові вектори можуть бути: *однаково напрямленими* (позначають $\uparrow\uparrow$) (рис. 3.2) або *протилежно напрямленими* (позначають $\uparrow\downarrow$) (рис. 3.3).

Уважають, що нульовий вектор колінеарний будь-якому вектору.

2. Компланарні вектори. Вектори, які лежать в одній або паралельних площинах, називають *компланарними* (рис. 3.4).

Два вектори завжди компланарні.

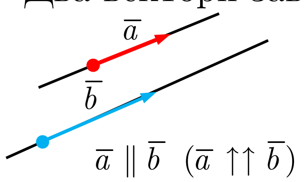


Рис. 3.2. Колінеарні, однаково напрямлені вектори

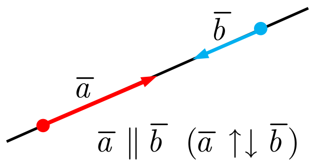


Рис. 3.3. Колінеарні, протилежно напрямлені вектори

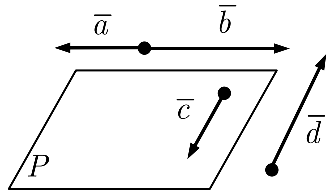


Рис. 3.4. Компланарні вектори

3. Кут між векторами. Відкладімо ненульові вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ від спільного початку: $\bar{a} = \overline{OA}, \bar{b} = \overline{OB}$ (рис. 3.5).

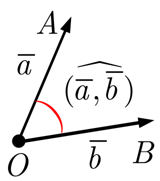


Рис. 3.5. Кут між векторами

Кутом між векторами $\bar{a}$ та $\bar{b}$ вважають величину кута AOB і позначають

$$(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \angle AOB.$$

Кут між векторами справджує нерівність:

$$0 \le (\widehat{\bar{a},\bar{b}}) \le \pi.$$

Якщо один або обидва вектори нульові, то кут між ними невизначений. Кут між колінеарними однаково напрямленими векторами дорівнює 0, а між протилежно напрямленими дорівнює π.

4. Ортогональні вектори. Якщо $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \dfrac{\pi}{2}$, то вектори називають *ортогональними* і позначають $\bar{a} \perp \bar{b}$. Уважають, що нульовий вектор ортогональний до будь-якого вектора.

5. Рівні вектори. Розгляньмо два вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ (рис. 3.6).

Означення 3.2 (рівності векторів).

Два вектори називають *рівними*, якщо вони:
1) колінеарні,
2) однаково напрямлені,
3) мають ту саму довжину.

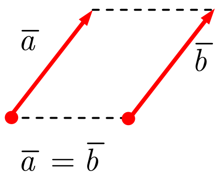


Рис. 3.6. Рівні вектори

Усі три умови є значущими. Так не є рівними вектори: колінеарні, протилежно напрямлені вектори рівної довжини (рис. 3.7); колінеарні, однаково напрямлені вектори різної довжини (рис. 3.8); неколінеарні вектори (рис. 3.9).

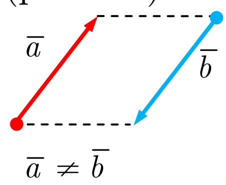


Рис. 3.7. Протилежно напрямлені вектори

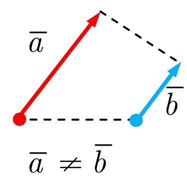


Рис. 3.8. Вектори різної довжини

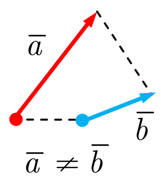


Рис. 3.9. Неколінеарні вектори

Геометричні вектори з таким означенням рівності ще називають *вільними*.

6. Відкладання вектора від точки. З означення рівності векторів випливає, що від будь-якої точки A можна *відкласти* вектор $\overline{AB}$, що дорівнює заданому вектору $\overline{a}$ (рис. 3.10).

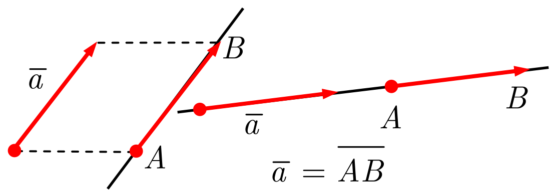


Рис. 3.10. Відкладання вектора від точки

3.1.3. Лінійні дії з векторами

1. Додавання векторів і множення вектора на число називають *лінійними діями* з векторами.

2. Додавання векторів. Розгляньмо два вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ і відкладімо вектор $\overline{b}$ від кінця вектора $\overline{a}$ (рис. 3.11).

Означення 3.3 (суми векторів).

Сумою $\overline{a} + \overline{b}$ векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називають вектор, який напрямлений від початку вектора $\overline{a}$ до кінця вектора $\overline{b}$ (додавання за *правилом трикутника*).

Можна відкласти два вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ зі спільного початку і побудувати на цих векторах паралелограм (рис. 3.12). Тоді сумою $\overline{a}+\overline{b}$ є вектор діагоналі, яка виходить зі спільного початку (*правило паралелограма*).

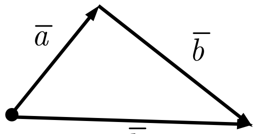


Рис. 3.11. Правило трикутника

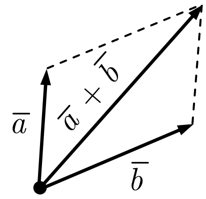


Рис. 3.12. Правило паралелограма

Суму скінченної кількості n векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ можна знайти за *правилом замикача* (рис. 3.13)

Під *різницею* векторів $\overline{b}-\overline{a}$ розуміють суму векторів $\overline{b}$ та $-\overline{a}$ (рис. 3.14):

$$\overline{b}-\overline{a}=\overline{b}+(-\overline{a}).$$

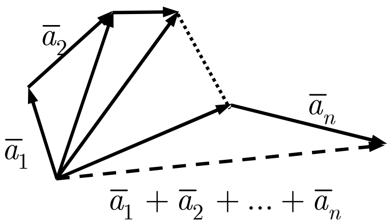


Рис. 3.13. Правило замикача

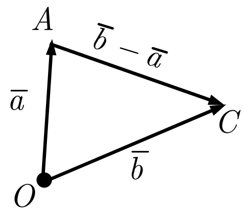


Рис. 3.14. Різниця векторів

3. Добуток вектора на число. Розгляньмо ненульовий вектор $\overline{a}$ і відмінне від нуля число λ.

Означення 3.4 (добутку вектора на число).

Добутком $\lambda\overline{a}$ *вектора* $\overline{a}\neq\overline{0}$ *на* дійсне *число* $\lambda\neq 0$ називають вектор:

1) колінеарний вектору $\overline{a}$;

2) довжина якого дорівнює $|\lambda||\overline{a}|$, і який:

однаково напрямлений з вектором $\overline{a}$, якщо $\lambda>0$,

і протилежно напрямлений з вектором $\overline{a}$, якщо $\lambda<0$ (рис. 3.15).

Якщо $\lambda=0$ або $\overline{a}=\overline{0}$, то вважають, що $\lambda\overline{a}=\overline{0}$.

Протилежний вектор можна розглядати як добуток вектора на (-1):

$$-\overline{a}=(-1)\overline{a}.$$

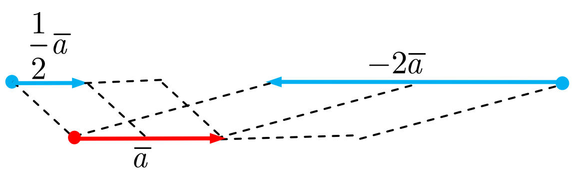


Рис. 3.15. Множення вектора на число

4. Теорема 3.1 (критерій колінеарності векторів).

Вектор $\overline{b}$ колінеарний вектору $\overline{a}\neq\overline{0}$ тоді й лише тоді, коли існує таке число λ, що $\overline{b}=\lambda\overline{a}$, тобто

$$\overline{a}\parallel\overline{b}\Leftrightarrow\overline{b}=\lambda\overline{a},\ \overline{a}\neq\overline{0}.$$

Доведення. $\boxed{\Rightarrow}$ Нехай вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ колінеарні. Можливі випадки:

1) вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ однаково напрямлені. Тоді

$$\overline{b} = \frac{\left|\overline{b}\right|}{\left|\overline{a}\right|}\overline{a} \Rightarrow \lambda = \frac{\left|\overline{b}\right|}{\left|\overline{a}\right|};$$

2) вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ протилежно напрямлені. Тоді

$$\overline{b} = -\frac{\left|\overline{b}\right|}{\left|\overline{a}\right|}\overline{a} \Rightarrow \lambda = -\frac{\left|\overline{b}\right|}{\left|\overline{a}\right|}.$$

3) $\overline{b} = 0$. Тоді $\lambda = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Нехай $\overline{b} = \lambda\overline{a}$. Тоді, згідно з означенням множення вектора на число вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ колінеарні. ■

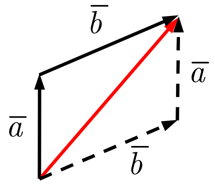
5. Орт вектора. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називають *одиничним*.

Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\overline{a}$, називають *ортом* вектора $\overline{a}$ і позначають $\overline{a}^0$.

Вектор $\overline{a}$ та його орт $\overline{a}^0$ зв'язують співвідношення:

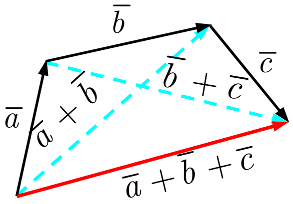
$$\boxed{\overline{a}^0 = \frac{1}{\left|\overline{a}\right|}\overline{a}, \quad \overline{a} = \left|\overline{a}\right|\overline{a}^0.}$$

6. Властивості лінійних дій над векторами. Розгляньмо вектори $\overline{a}, \overline{b}$ та $\overline{c}$ і числа $\lambda \in \mathbb{R}$ та $\mu \in \mathbb{R}$.



$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$

Рис. 3.16. Комутативність додавання векторів



$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$

Рис. 3.17. Асоціативність додавання векторів

Додавання векторів має властивості:

1) *комутативності* (рис. 3.16)

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a};$$

2) *асоціативності* (рис. 3.17)

$$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c});$$

3) *існування нульового вектора*

$$\overline{0} + \overline{a} = \overline{a};$$

4) *існування протилежного вектора*

$$\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}.$$

Множення вектора на число має властивості:

5) *існування одиниці*

$$1 \cdot \overline{a} = \overline{a};$$

6) *дистрибутивності щодо додавання чисел*

$$(\lambda + \mu) \cdot \overline{a} = \lambda \cdot \overline{a} + \mu \cdot \overline{a};$$

7) *дистрибутивності щодо додавання векторів*

$$\lambda \cdot (\overline{a} + \overline{b}) = \lambda \cdot \overline{a} + \lambda \cdot \overline{b};$$

8) *асоціативності*

$$\lambda \cdot (\mu \cdot \overline{a}) = (\lambda\mu) \cdot \overline{a}.$$

Властивості лінійних дій над векторами 1—8 дозволяють виконувати звичні перетворення під час лінійних дій над векторами: міняти доданки місцями, брати вирази в дужки, групувати, виносити за дужки як скалярні, так і векторні спільні множники.

Множину геометричних векторів простору (площини) із запровадженими лінійними діями над векторами, які мають властивості 1—8, називають *лінійним* або *векторним простором* $\mathbb{V}$.

3.1.4. Лінійна залежність та лінійна незалежність векторів

Лінійною комбінацією векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ називають вектор

$$\overline{b} = \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n.$$

При цьому кажуть, що вектор $\overline{b}$ *лінійно виражається* через вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ (*розкладено* за векторами $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$).

Означення 3.5 (лінійно незалежної та залежної системи векторів).

Систему векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_s$ називають *лінійно незалежною*, якщо з рівності

$$\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_s\overline{a}_s = \overline{0}$$

випливає, що

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_s = 0.$$

Систему векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_s$ називають *лінійно залежною*, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$, які не дорівнюють одночасно нулю, що

$$\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_s\overline{a}_s = \overline{0}$$
$$\left(\left|\alpha_1\right| + \left|\alpha_2\right| + ... + \left|\alpha_s\right| \neq 0\right).$$

З означення випливає, що порожня система векторів є лінійно незалежною.

Теорема 3.2 (критерій лінійної залежності векторів).
Вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ лінійно залежні тоді й лише тоді, коли хоча б один з векторів лінійно виражається через решту.

Наслідки.
1. Нульовий вектор лінійно залежний. Будь-який ненульовий вектор лінійно незалежний.
2. Колінеарні вектори лінійно залежні. Будь-які два неколінеарних вектори лінійно незалежні.
3. Компланарні вектори лінійно залежні. Будь-які три некомпланарних вектори лінійно незалежні.

Доведення. З теореми 3.2 випливає, що якщо система векторів містить лінійно залежну підсистему, то система векторів є лінійна залежна.

1. Оскільки $1 \cdot \overline{0} = \overline{0}$, то нульовий вектор лінійно залежний.

Якщо $\overline{a} \neq \overline{0}$, то рівність $\lambda\overline{a} = \overline{0}$, можлива лише для $\lambda = 0$. Отже, будь-який ненульовий вектор лінійно незалежний.

2. Якщо вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ колінеарні, то $b = \lambda a$ і $\lambda a + (-1)\overline{b} = \overline{0}$. Обернене твердження доводиться від супротивного.

3. Нехай вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарні, але вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ неколінеарні (рис. 3.18). Відкладімо вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ від однієї точки. За правилом паралелограма додавання векторів і означення добутку вектора на число маємо:

$$\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}.$$

А отже, вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ лінійно залежні.

Обернене твердження доводиться від супротивного. ■

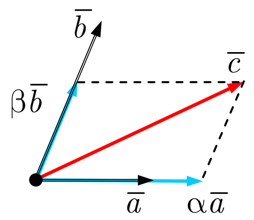


Рис. 3.18. Компланарні вектори

3.1.5. Базис на прямій, на площині й у просторі

1. Базис на прямій. *Базисом на прямій* називають будь-який лінійно незалежний вектор $\overline{e}$. Базис на прямій L утворює будь-який ненульовий вектор $\overline{e}$ (рис. 3.19).

Будь-який вектор $\overline{x}$ прямої L єдиним чином лінійно виражається через вектор базису $\{\overline{e}\}$:

$$\boxed{\overline{x} = x\overline{e}.}$$

Цю формулу називають *розкладом* вектора *за базисом* на прямій. Коефіцієнт x у розкладі називають *координатою* вектора $\overline{x}$ у базисі $\{\overline{e}\}$.

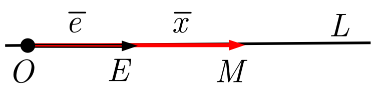


Рис. 3.19. Розкладання вектора на прямій

2. Базис на площині. *Базисом на площині* називають будь-яку впорядковану пару лінійно незалежних векторів. Базис на площині P утворює будь-яка впорядкована пара неколінеарних векторів $\overline{e}_1$ та $\overline{e}_2$ (рис. 3.20).

Будь-який вектор $\overline{x}$ площини P, єдиним чином лінійно виражається через вектори базису $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$:

$$\boxed{\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2.}$$

Цю формулу називають *розкладом* вектора *за базисом* на площині. Коефіцієнти x_1, x_2 у розкладі називають *координатами* вектора $\overline{x}$ у базисі $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$.

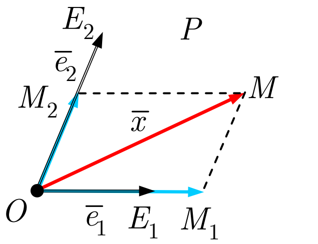


Рис. 3.20. Розкладання вектора на площині

3. Базис у просторі. *Базисом у просторі* називають будь-яку впорядковану трійку лінійно незалежних векторів. Базис у просторі утворює будь-яка впорядкована трійка некомпланарних векторів $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ та $\overline{e}_3$ (рис. 3.21).

Будь-який вектор простору $\overline{x}$ єдиним чином лінійно виражається через вектори базису $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$:

$$\boxed{\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3.}$$

Цю формулу називають *розкладом* вектора $\overline{x}$ *за базисом* у просторі. Коефіцієнти x_1, x_2, x_3 у розкладі називають *координатами* вектора $\overline{x}$ у базисі $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$.

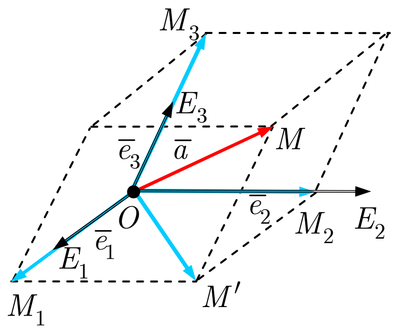


Рис. 3.21. Розкладання вектора у просторі

4. Роль базису. Твердження пп. 1—3 підсумовує

Теорема 3.3 (про базис).

1. Базис на прямій утворює будь-який ненульовий вектор. Кожен вектор, колінеарний ненульовому вектору, можна єдиним чином розкласти за цим вектором.
2. Базис на площині утворює будь-яка впорядкована пара неколінеарних векторів. Кожен вектор, що паралельний площині, можна єдиним чином розкласти за базисом на цій площині.
3. Базис у просторі утворює будь-яка впорядкована трійка некомпланарних векторів. Кожен вектор простору можна єдиним чином розкласти за базисом у просторі.

З теореми 3.3. випливає, що будь-які два вектори на прямій, три вектори на площині, чотири вектори у просторі є лінійно залежними.

Означення 3.6 (базису векторного простору).

Базисом векторного простору $\mathbb{V}$ називають будь-яку впорядковану лінійно незалежну систему векторів цього простору з найбільшою можливою кількістю векторів.

Вектори, які утворюють базис простору, називають *базисними*.

Кількість базисних векторів простору називають *вимірністю* простору.

Отже, пряма є одновимірний простір $\mathbb{V}^1$, площина є двовимірний простір $\mathbb{V}^2$, а геометричний простір — тривимірний ($\mathbb{V}^3$).

5. Кожному вектору простору (тривимірного) в заданому базисі відповідає єдина впорядкована трійка чисел — його координат, і навпаки, кожній упорядкованій трійці чисел відповідає в заданому базисі єдиний вектор.

Координати вектора у фіксованому базисі утворюють *координатний стовпець* вектора. Тому замість розкладу вектора

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3$$

за базисом $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ можна записати координатний стовпець

$$\overline{x} = \vec{x}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}}.$$

6. Для довільного базису $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ правдиві розклади:

$$\begin{aligned} \overline{e}_1 &= 1\overline{e}_1 + 0\overline{e}_2 + 0\overline{e}_3, \\ \overline{e}_2 &= 0\overline{e}_1 + 1\overline{e}_2 + 0\overline{e}_3, \\ \overline{e}_3 &= 0\overline{e}_1 + 0\overline{e}_2 + 1\overline{e}_3. \end{aligned}$$

Отже, базисні вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ завжди мають у базисі $\left\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\right\}$ координатні стовпці

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}}.$$

Координати вектора відрізняються в різних базисах, і лише нульовий вектор має нульові координати в будь-якому базисі.

Запровадження базису лінійного простору дозволяє лінійні дії над векторами звести до лінійних дій над числами — їхніми координатами в цьому базисі.

3.1.6. Дії над векторами в координатній формі

1. Нехай $\overline{x} = \vec{x}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}}, \overline{y} = \vec{y}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}}$.

Теорема 3.4 (про дії над векторами в координатній формі).

1. Рівні вектори мають рівні координати.
2. Лінійним діям над векторами відповідають лінійні дії над їхніми координатами.
3. Вектори колінеарні тоді й лише тоді, коли їхні координати пропорційні.
4. Система векторів лінійно залежна тоді й лише тоді, коли лінійно залежна система їхніх координатних стовпців у фіксованому базисі.

Отже,

$$\overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}};$$

$$\overline{x} + \overline{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}}; \ \lambda\overline{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overline{x} \parallel \overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}.$$

2. Знайдімо координати векторів $\overline{a} + \overline{b}$ та $2\overline{a}$, якщо $\overline{a} = 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2 - \overline{e}_3, \overline{b} = \overline{e}_2 + 4\overline{e}_3$.

❍Записуємо координати векторів

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}}.$$

Тоді

$$\overline{a} + \overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \ 2\overline{a} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}. \bullet$$

3. Оскільки будь-який стовпець заввишки n можна подати у вигляді

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

і стовпці одиничної матриці є лінійно незалежними, то множина стовпців заввишки n утворює лінійний простір вимірності n, який називають *арифметичним n-вимірним простором* $\mathbb{R}^n$, а елемент цього простору — *арифметичним вектором*. Стовпці одиничної матриці утворюють базис у цьому просторі, який називають *стандартним*.

3.2. ПРЯМОКУТНА ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ

На прямій, на площині чи у просторі задано систему координат, якщо вказано спосіб, який установлює положення точки задаванням відповідно одного числа, упорядкованої пари чисел чи упорядкованої трійки чисел. Існують різні способи опису положення точки, залежно від яких розглядають різні системи координат.

Прямокутна декартова система координат — основний спосіб опису положення точки на площині або у просторі.

3.2.1. Декартова система координат

1. Зафіксуємо в одному з геометричних просторів (на прямій, на площині чи у просторі) точку O, яку називають *початком координат*, і виберімо базис.

Декартовою системою координат називають сукупність, що складається з фіксованої точки O і деякого базису.

Радіусом-вектором точки M відносно точки O називають вектор $\overline{OM}$.

Декартовими координатами точки M називають координати її радіуса-вектора.

2. Ортонормований базис. Базис $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ називають *ортонормованим*, якщо його вектори одиничні й попарно перпендикулярні.

Вектори ортонормованого базису мають стандартні позначення:

$$\overline{e}_1 = \overline{i}, \overline{e}_2 = \overline{j}, \overline{e}_3 = \overline{k}.$$

Отже,

$$\left|\overline{i}\right| = \left|\overline{j}\right| = \left|\overline{k}\right| = 1, \overline{i} \perp \overline{j}, \overline{j} \perp \overline{k}, \overline{i} \perp \overline{k}.$$

3. Декартову систему координат з ортонормованим базисом називають *прямокутною декартовою системою координат* (ПДСК).

Якщо вектори базису одиничні, але не є попарно перпендикулярні, то декартову систему координат називають *косокутною декартовою системою координат*.

3.2.2. Орієнтація в геометричних просторах

1. Орієнтація на прямій. Пряму на якій вибрано напрям називають *віссю*. Заданий на осі напрям уважають додатним і позначають стрілкою, а протилежний йому напрям уважають від'ємним (рис. 3.22).

Вибір напряму на прямій називають її *орієнтацією*. Для горизонтальної прямої за додатний напрям уважатимемо напрям зліва направо, а для вертикальної — знизу догори.

Напрям на прямій L можна задати вибором ненульового вектора $\overline{e}$, який паралельний прямій. Це вектор називають *напрямним вектором* осі.

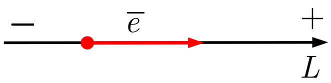


Рис. 3.22. Вісь

Базис $\{\overline{s}\}$, вектор якого однаково напрямлений з вибраним вектором $\overline{e}$ називають додатно-орієнтованим, а базис, вектор якого протилежно напрямлений до вибраного,— від'ємно-орієнтованим.

2. Орієнтація на площині. Вибір напряму повороту на площині називають її *орієнтацією*. За додатний напрям повороту виберімо поворот проти годинникової стрілки (рис. 3.23).

Відкладімо від спільного початку неколінеарні вектори $\overline{e}_1$ та $\overline{e}_2$.

Упорядковану пару векторів $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ називають *додатно-орієнтованою* (*правою*), якщо «найкоротший поворот» від першого вектора до другого вектора відбувається проти руху годинникової стрілки і *від'ємно-орієнтованою* (*лівою*), якщо — за рухом годинникової стрілки.

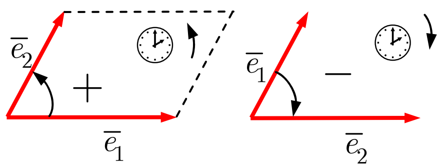


Рис. 3.23. Орієнтація на площині

3. Орієнтація у просторі. Відкладімо три некомпланарних вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ від спільного початку.

Упорядковану трійку векторів $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ називають *додатно-орієнтованою* (*правою*), якщо найкоротший поворот від першого вектора до другого вектора відбувається проти руху годинникової стрілки, якщо дивитись з кінця третього вектора, і *від'ємно-орієнтованою* (*лівою*), якщо — за рухом годинникової стрілки (рис. 3.24).

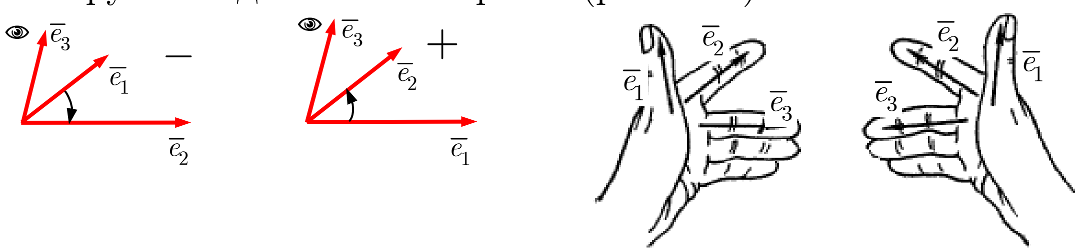


Рис. 3.24. Орієнтація у просторі. Ліва та права трійки векторів

3.2.3. Прямокутна декартова система координат

1. Декартова система координат на прямій. Зафіксуймо на прямій точку O, *початок координат*, і розгляньмо базис з орту $\overline{i}$.

Сукупність $\{O; \overline{i}\}$ точки O і базису $\{\overline{i}\}$ називають *декартовою системою координат на прямій* (рис. 3.25).

Розгляньмо довільну точку M на прямій і розкладімо вектор $\overline{OM}$ за базисом $\{\overline{i}\}$ (рис. 3.26):

$$\overline{OM} = x\overline{i}.$$

Координатою точки M у системі $\{O; \overline{i}\}$ називають координату x вектора $\overline{OM}$ у базисі $\{\overline{i}\}$ і записують

$$M = M(x) \text{ або } M(x).$$

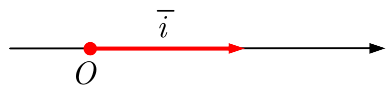


Рис. 3.25. Система координат на прямій

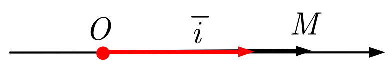


Рис. 3.26. Координати точки на прямій

2. Запроваджуючи декартову систему координат на прямій, маємо взаємно однозначну відповідність: кожній точці M на прямій відповідає єдине число x — її координата; якщо задано довільне число x, то існує єдина точка M з координатою x.

Пряму, на якій задано декартову систему координат, називають *координатною* (*числовою*) *віссю* Ox (рис. 3.27).

Початкова точка O має нульову координату; на одній із двох півосей, на які точка O розбиває числову вісь, координати всіх точок додатні, на другій — від'ємні: маємо *додатну* та *від'ємну* півосі.

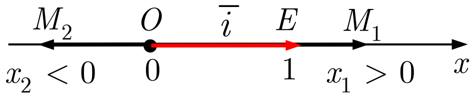


Рис. 3.27. Координатна вісь

3. Прямокутна декартова система координат на площині. Зафіксуймо на площині точку O, *початок координат*, і розгляньмо ортонормований базис з векторів $\overline{i}$ та $\overline{j}$, яку утворюють праву пару векторів.

Сукупність $\{O;\overline{i},\overline{j}\}$ точки O і базису $\{\overline{i},\overline{j}\}$ називають *прямокутною декартовою системою координат* (ПДСК) на площині (рис. 3.28) і позначають

$$\{O;\overline{i},\overline{j}\} \text{ або } Oxy.$$

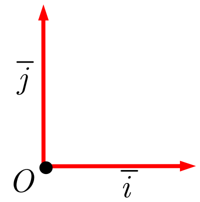


Рис. 3.28. Права ПДСК на площині

4. Розгляньмо довільну точку M на площині і розкладімо її радіус-вектор $\overline{OM}$ за базисом $\{\overline{i},\overline{j}\}$ (рис. 3.29):

$$\overline{OM} = \overline{OM_x} + \overline{OM_y} = x\overline{i} + y\overline{j}.$$

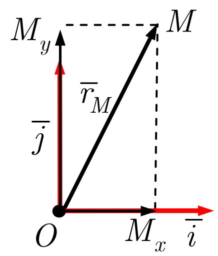


Рис. 3.29. Розкладання радіуса-вектора точки на площині

Координатами точки M у прямокутній декартовій системі координат $\{O;\overline{i},\overline{j}\}$ називають координати її радіуса-вектора $\overline{OM}$ у базисі $\{\overline{i},\overline{j}\}$ і записують

$$M = M(x;y) \text{ або } M(x;y).$$

Першу координату називають *абсцисою*, другу — *ординатою*.

5. Запроваджуючи декартову систему координат на площині Oxy, маємо взаємно однозначну відповідність: кожній точці M на площині відповідає впорядкована пара чисел $(x;y)$ — її координат; якщо задано довільну впорядковану пару чисел $(x;y)$, то існує єдина точка M з координатами $(x;y)$.

Осі, що проходять через початок координат з напрямними векторами $\overline{i}$ та $\overline{j}$ називають *координатними* осями: першу — *віссю абсцис* Ox, другу — *віссю ординат* Oy.

Площину на якій задано систему координат називають *координатною площиною* Oxy.

Координатні осі розбивають площину на чотири частини, які називають *чвертями* (*квадрантами*). Кожній чверті відповідає певна комбінація знаків координат (рис. 3.30).

6. *Координатними лініями* у ПДСК, тобто лініями з найпростішими рівняннями, є вертикальні прямі $x = a, a \in \mathbb{R}$, та горизонтальні прямі $y = b, b \in \mathbb{R}$ (рис. 3.31).

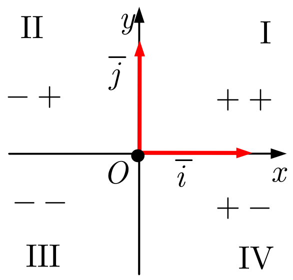


Рис. 3.30. Чверті

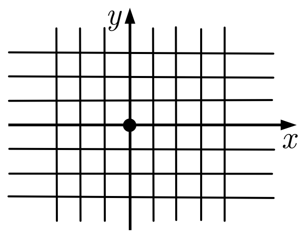


Рис. 3.31. Координатні лінії ПДСК на площині

7. Прямокутна декартова система координат у просторі. Зафіксуймо у просторі точку O, *початок координат*, і розгляньмо ортонормований базис з векторів $\overline{i}, \overline{j}$ та $\overline{k}$, які утворюють праву трійку.

Сукупність точки O і базису $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ називають *прямокутною декартовою системою координат* у просторі (рис. 3.32) і позначають

$$\{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\} \text{ або } Oxyz.$$

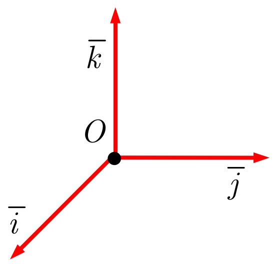


Рис. 3.32. Права ПДСК у просторі

8. Координати точки. Розгляньмо довільну точку M у просторі розкладімо її радіус-вектор $\overline{OM}$ за базисом $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ (рис. 3.33):

$$\overline{OM} = x_1 \overline{i} + x_2 \overline{j} + x_3 \overline{k}.$$

Координатами точки M у прямокутній декартовій системі координат

$$\{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\} = Oxyz$$

називають координати її радіуса-вектора $\overline{OM}$ у базисі $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ і записують

$$M = M(x; y; z) \text{ або } M(x; y; z).$$

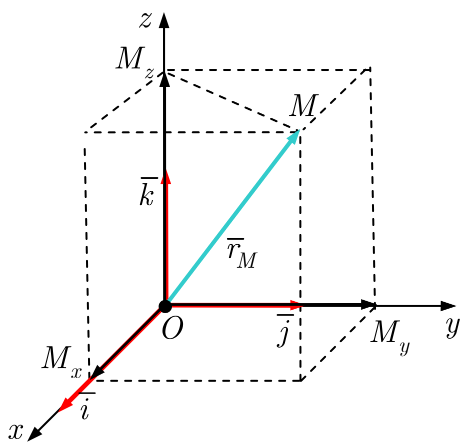


Рис. 3.33. Розкладання радіуса-вектора точки у просторі

Першу координату називають *абсцисою*, другу — *ординатою*, третю — *аплікатою*.

9. Запроваджуючи прямокутну декартову систему координат у просторі $Oxyz$, маємо взаємно однозначну відповідність: кожній точці M простору відповідає впорядкована трійка чисел $(x;y;z)$ — її координат; якщо задано довільну впорядковану трійку чисел $(x;y;z)$, то існує єдина точка M з координатами $(x;y;z)$.

Осі, що проходять через початок координат з напрямними векторами $\overline{i}, \overline{j}$ та $\overline{k}$ називають *координатними осями*: першу — *віссю абсцис* Ox, другу — *віссю ординат* Oy, третю — *віссю аплікат* Oz (рис. 3.34).

Площини, що проходять через осі координат, називають *координатними площинами* Oxy, Oxz та Oyz. Координатні площини розбивають простір на вісім частин — *октантів*.

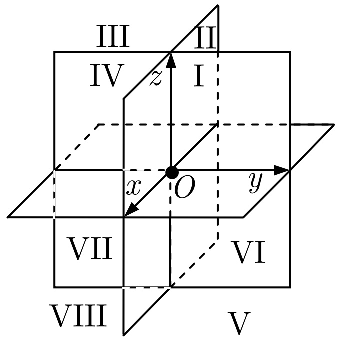


Рис. 3.34. Октанти

3.2.4. Проекція вектора на вісь

1. *Ортогональною проекцією* точки M площини (простору) на пряму L називають точку M' перетину прямої із прямою (площиною), що проходить через точку M перпендикулярно до прямої L (рис. 3.35).

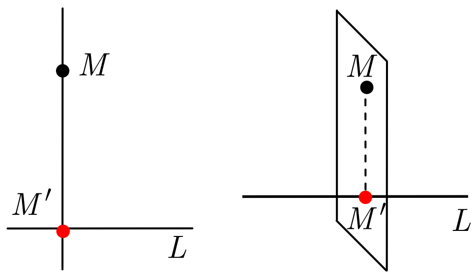


Рис. 3.35. Ортогональна проекція точки на пряму

2. Нехай задано вісь L з напрямним ортом $\overline{s}$. Розгляньмо вектор $\overline{a} = \overline{AB}$.

Ортогональними проекціями точок A та B на вісь L є відповідно точки A' та B'.

Векторною проекцією вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ *на вісь* $L \parallel \overline{s}$ (рис. 3.36) називають вектор

$$\overline{a}_L = \overline{A'B'}.$$

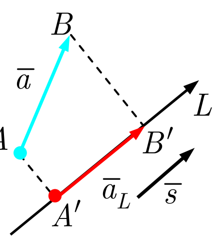


Рис. 3.36. Векторна проекція вектора

Означення 3.7 (проекції вектора).

Проекцією (*скалярною проекцією*) вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ *на вісь* L з напрямним вектором $\overline{s}$ (рис. 3.37) називають число

$$\operatorname{pr}_L \overline{a} = \operatorname{pr}_{\overline{s}} \overline{a} = \begin{cases} +\left|\overline{A'B'}\right|, & \text{якщо } \overline{s} \uparrow\uparrow \overline{A'B'}, \\ 0, & (\widehat{\overline{s},\overline{a}}) = \dfrac{\pi}{2}, \\ -\left|\overline{A'B'}\right|, & \text{якщо } \overline{s} \uparrow\downarrow \overline{A'B'}. \end{cases}$$

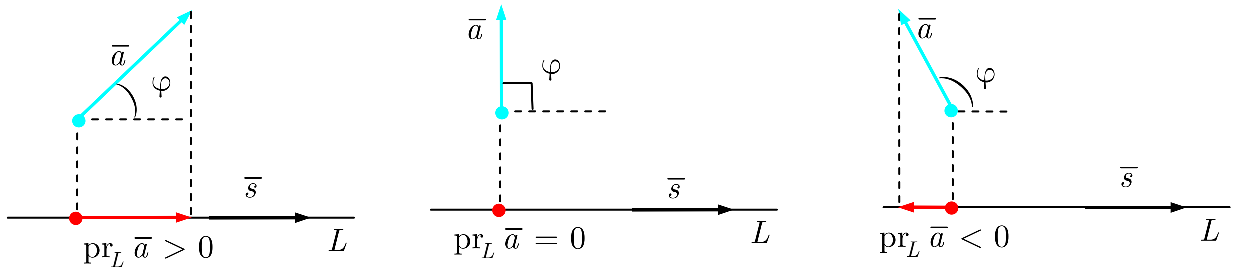


Рис. 3.37. Проекція вектора на вісь

З означення проекції вектора на вісь випливає, що

$$\boxed{\operatorname{pr}_L \overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cos(\widehat{\overline{a},\overline{s}});}$$

$$\overline{a}_L = \operatorname{pr}_L \overline{a} \cdot \overline{s}.$$

3. Проекція вектора на вісь має властивості:

1) якщо $\overline{a} = \overline{b}$, то $\operatorname{pr}_L \overline{a} = \operatorname{pr}_L \overline{b}$;

2) $\operatorname{pr}_L(\overline{a} + \overline{b}) = \operatorname{pr}_L \overline{a} + \operatorname{pr}_L \overline{b}$;

3) $\operatorname{pr}_L(\lambda\overline{a}) = \lambda \operatorname{pr}_L \overline{a}$ для довільного λ.

3.2.5. Застосування прямокутної декартової системи координат

1. Координати вектора. Знайдімо координати вектора $\overline{AB}$ з початком у точці $A(x_A;y_A;z_A)$ і кінцем у точці $B(x_B;y_B;z_B)$ (рис. 3.38). Маємо

$$\overline{AB} = \overline{r}_B - \overline{r}_A = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

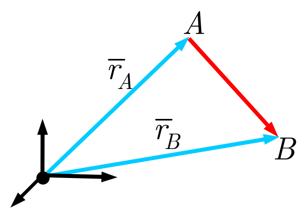


Рис. 3.38. Координати вектора

Отже, щоб знайти координати вектора, треба від координат його кінця відняти координати початку.

2. Довжина вектора. З теореми Піфагора про діагональ паралелепіпеда випливає, що довжину вектора

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$$

можна знайти за формулою

$$\boxed{\left|\overline{a}\right| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}.}$$

3. Приміром, знайдімо довжину вектора $\overline{a} = -2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$.

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}.$$

4. Віддаль між двома точками $A(x_A;y_A;z_A)$ та $B(x_B;y_B;z_B)$, що дорівнює довжині відрізка AB та довжині вектора $\overline{AB}$, можна знайти за формулою

$$\boxed{\left|AB\right| = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.}$$

5. Зв'язок між координатами вектора і проекціями вектора на координатні осі. Відкладімо ненульовий вектор $\overline{a}$ від початку координат O і розкладімо його за ортонормованим базисом $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$ (рис. 3.39):

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}.$$

Ураховуючи означення векторної проекції вектора на вісь і взаємну ортогональність векторів базису маємо:

$$\overline{a}_{Ox} = a_x\overline{i}, \overline{a}_{Oy} = a_y\overline{j}, \overline{a}_{Oz} = a_z\overline{k}.$$

А враховуючи зв'язок між векторною і скалярною проекціями вектора, маємо:

$$\boxed{\begin{aligned} a_x &= \mathrm{pr}_{\overline{i}}\,\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{i}});\\ a_y &= \mathrm{pr}_{\overline{j}}\,\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{j}});\\ a_z &= \mathrm{pr}_{\overline{k}}\,\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{k}}).\end{aligned}}$$

Якщо вектор утворює гострий (тупий) кут з координатною віссю, то його відповідна координата додатна (від'ємна).

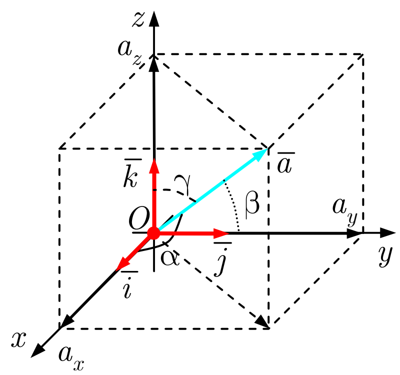


Рис. 3.39. Розклад вектора за ортонормованим базисом

6. Напрямні косинуси вектора. *Напрямними косинусами* вектора

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$$

називають косинуси кутів α,β та γ, які утворює вектор з осями координат (базисними векторами):

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\overline{a},\overline{i}}),$$

$$\cos\beta = \cos(\widehat{\overline{a},\overline{j}}),$$

$$\cos\gamma = \cos(\widehat{\overline{a},\overline{k}}).$$

Напрямні косинуси вектора можна знайти за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}.$$

Правдива тотожність:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}{|\overline{a}|^2} = 1.$$

7. Орт $\overline{a}^0$ вектора $\overline{a}$ має координати:

$$\overline{a}^0 = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_x}{|\overline{a}|} \\ \dfrac{a_y}{|\overline{a}|} \\ \dfrac{a_z}{|\overline{a}|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}.$$

8. Приміром, знайдімо орт і напрямні косинуси вектора $\overline{a} = -2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$.

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{14}}\overline{a} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{14} \end{pmatrix};$$

$$\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{14}}, \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{14}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

9. Поділ відрізка в заданому співвідношенні. Кажуть, що точка M *поділяє* відрізок A_1A_2 *у відношенні* $\lambda \neq -1$, якщо виконано співвідношення

$$\overline{A_1M} = \lambda\overline{MA_2}.$$

Нехай точка $M(x;y;z)$ поділяє відрізок A_1A_2, який з'єднує точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$ та $A_2(x_2;y_2;z_2)$, у відношенні λ. Розгляньмо вектори $\overline{A_1M}$ та $\overline{MA_2}$ (рис. 3.40).

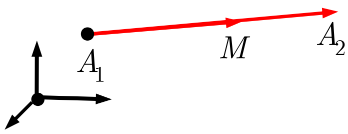


Рис. 3.40. Поділ відрізка у відношенні

Оскільки

$$\overline{A_1M} = \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix};\ \overline{MA_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \\ z_2 - z \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} x-x_1 \\ y-y_1 \\ z-z_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_2-x \\ y_2-y \\ z_2-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_2-x) \\ \lambda(y_2-y) \\ \lambda(z_2-z) \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-x_1=\lambda(x_2-x); \\ y-y_1=\lambda(y_2-y); \\ z-z_1=\lambda(z_2-z). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+\lambda)x=(x_1+\lambda x_2); \\ (1+\lambda)y=(y_1+\lambda y_2); \\ (1+\lambda)z=(z_1+\lambda z_2). \end{cases}$$

Якщо $\lambda=-1$, то $\overline{A_1M}+\overline{MA_2}=\overline{0}$, тобто $\overline{A_1A_2}=0$ (маємо випадок виродженого відрізка).

Отже, для ненульового відрізка, якщо $\lambda \neq -1$, маємо

$$\boxed{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.}$$

Якщо (рис. 3.41):

1) $\lambda=0$, то точки A_1 та M збігаються;

2) $\lambda>0$, то точка M лежить усередині відрізка A_1A_2;

3) $\lambda<0$, то точка M лежить ззовні відрізка A_1A_2 і кажуть, що вона поділяє відрізок зовнішнім чином;

4) $\lambda=1$, точка M є серединою відрізка A_1A_2 і її координати знаходять за формулами:

$$\boxed{x=\frac{x_1+x_2}{2}, y=\frac{y_1+y_2}{2}, z=\frac{z_1+z_2}{2}.}$$

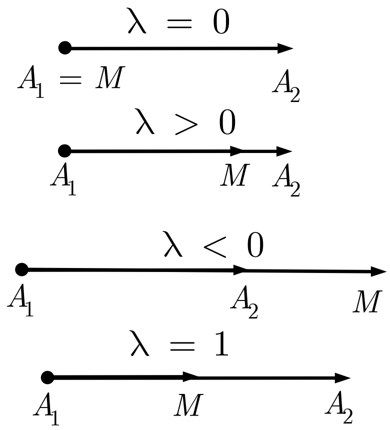


Рис. 3.41. Окремі випадки поділу відрізка в заданому відношенні

10. Приміром, знайдімо координати вектора $\overline{AB}$ й середини відрізка AB, якщо $A(2;1;3), B(4;3;4)$.

Координати вектора

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 3-1 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Середина відрізка AB точка C має координати:

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2+4}{2}=3;\quad y_C=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{1+3}{2}=2;$$

$$z_C=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{3+4}{2}=3,5.$$

3.3. ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

Існують різні способи перемноження векторів. Для двох векторів розглядають скалярне множення, результатом якого є число, і векторне множення, результатом якого є вектор. Для трьох векторів розглядають векторно-скалярне множення, результатом якого є мішаний добуток, і векторно-векторне множення, результатом якого є подвійний векторний добуток.

3.3.1. Означення добутків векторів

1. Скалярний добуток векторів. Розгляньмо два ненульових вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

Означення 3.8 (скалярного добутку).

Скалярним добутком двох *векторів* $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називають число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними і позначають*

$$(\overline{a},\overline{b}) = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}).$$

Якщо хоча б один з векторів нульовий, то кут не визначений, і скалярний добуток уважають рівним нулю.

З означення скалярного добутку і властивості проекції випливає, що

$$(\overline{a},\overline{b}) = \left|\overline{a}\right|\operatorname{pr}_{\overline{a}}\overline{b} = \left|\overline{b}\right|\operatorname{pr}_{\overline{b}}\overline{a}.$$

2. З означення скалярного добутку векторів випливає, що:

1) скалярний добуток двох векторів є числом — об'єктом іншої природи, ніж множники;

2) рівність $(\overline{x},\overline{y}) = 0$ виконано не лише для $\overline{x} = \overline{0}$ або $\overline{y} = \overline{0}$, а й для ненульових ортогональних векторів;

3) можна запровадити лише «скалярний квадрат» вектора $\overline{x}^2 = (\overline{x},\overline{x})$.

* Скалярний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ позначають ще як $\overline{a}\cdot\overline{b}$.

3. Векторний добуток векторів. Розгляньмо два неколінеарних вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

Означення 3.9 (векторного добутку).

Векторним добутком векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називають вектор $\overline{c}$ (рис. 3.42) який:

1) перпендикулярний до векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$;

2) завдовжки дорівнює добутку довжин векторів на синус кута між ними:

$$\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin(\widehat{\overline{a},\overline{b}});$$

3) напрямлений так, що вектори $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ утворюють праву трійку, і позначають*

$$\overline{c} = [\overline{a},\overline{b}].$$

Векторний добуток колінеарних векторів уважають рівним нульовому вектору, зокрема $[\overline{a},\overline{a}] = \overline{0}$.

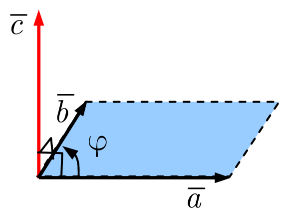


Рис. 3.42. Векторний добуток векторів

4. З означення векторного добутку випливає, що:

1) векторний добуток $[\overline{a},\overline{b}]$ неколінеарних векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ перпендикулярний до площини, що визначається векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$;

2) довжина вектора $[\overline{a},\overline{b}]$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$;

3) рівність $[\overline{x},\overline{y}] = \overline{0}$ виконується не лише для нульових векторів, а й для ненульових колінеарних векторів;

4) оскільки $[\overline{a},\overline{a}] = \overline{0}$, то векторний степінь не розглядають.

5. Приміром, знайдімо скалярний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ і довжину векторного добутку $\overline{a}$ та $\overline{b}$, якщо $\left|\overline{a}\right| = 2, \left|\overline{b}\right| = 5, (\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

$$(\overline{a},\overline{b}) = 2\cdot 5\cos\frac{\pi}{3} = 10\cdot\frac{1}{2} = 5.$$

$$\left|[\overline{a},\overline{b}]\right| = 2\cdot 5\sin\frac{\pi}{3} = 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

* Векторний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ позначають ще як $\overline{a}\times\overline{b}$.

6. Мішаний добуток трьох векторів. Розгляньмо три вектори $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$.

Означення 3.10 (мішаного добутку).

Мішаним (*векторно-скалярним*) *добутком векторів* $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ називають число — скалярний добуток векторного добутку векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ на вектор $\overline{c}$ і позначають

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = ([\overline{a},\overline{b}],\overline{c}).$$

7. У просторі $\mathbb{V}^3$ кожна трійка некомпланарних векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$, прикладених до однієї точки, визначає паралелепіпед, ребрами якого є ці вектори.

З означення мішаного добутку векторів випливає, що (рис. 3.43):

1) модуль мішаного добутку $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$;

2) мішаний добуток $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ додатний, якщо трійка $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ права, і від'ємний, якщо вона ліва;

3) мішаний добуток векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ дорівнює нулю, якщо вектори $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ компланарні.

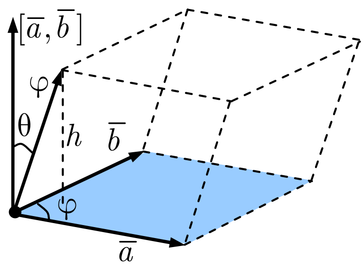


Рис. 3.43. Мішаний добуток векторів

Доведення. 1. З означення мішаного добутку випливає, що

$$\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right| = \left|[\overline{a},\overline{b}]\right|\left|\overline{c}\right|\cos\theta = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\varphi\cdot\left|\overline{c}\right|\cos\theta.$$

Оскільки, об'єм паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи $S = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\varphi$ на висоту $h = \left|\overline{c}\right|\cos\theta$, то

$$V = \left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|.$$

2. Знак мішаного добутку збігається зі знаком $\cos\theta$, і тому мішаний добуток додатний, якщо трійка $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ права, і від'ємний, якщо ліва.

3. Якщо хоча б один з векторів нульовий, то властивість очевидна.

Нехай тепер жоден з векторів-співмножників не нульовий. Тоді $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = 0$, коли $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (а, отже, вектор $\overline{c}$ лежить у площині векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$) або $[\overline{a},\overline{b}] = \overline{0}$, (а, отже, вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ — колінеарні, тобто вектори $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ — компланарні). ■

8. Подвійний векторний добуток. *Подвійним векторним добутком* векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ називають вектор, що дорівнює векторному добутку вектора $\overline{a}$ на векторний добуток векторів $\overline{b}$ та $\overline{c}$ і позначають $[\overline{a},[\overline{b},\overline{c}]]$.

Якщо вектори $\overline{b}$ та $\overline{c}$ ненульові, то правдива формула

$$[\overline{a},[\overline{b},\overline{c}]] = \overline{b}(\overline{a},\overline{c}) - \overline{c}(a,\overline{b}).$$

Зауважмо, що

$$[[\overline{x},\overline{y}],\overline{z}] \neq [\overline{x},[\overline{y},\overline{z}]].$$

3.3.2. Властивості добутків векторів

1. Властивості скалярного добутку. Розгляньмо будь-які вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ та будь-які дійсні числа α та β:

Скалярний добуток векторів має властивості:

1) *комутативності*

$$(\overline{a},\overline{b}) = (\overline{b},\overline{a});$$

2) *лінійності*

$$(\alpha\overline{a} + \beta\overline{b},\overline{c}) = \alpha(\overline{a},\overline{c}) + \beta(\overline{b},\overline{c}),$$
$$(\overline{a},\beta\overline{b} + \gamma\overline{c}) = \beta(\overline{a},\overline{b}) + \gamma(\overline{a},\overline{c});$$

3) *додатної визначеності*

$$(\overline{a},\overline{a}) = \left|\overline{a}\right|^2 \geq 0, \quad (\overline{a},\overline{a}) = 0 \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{0}.$$

2. Із властивостей скалярного добутку випливає, що:

1) лінійні комбінації векторів можна перемножувати скалярно як лінійні многочлени;

2) $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{(\overline{a},\overline{a})}$.

3. Властивості векторного добутку. Розгляньмо будь-які три вектора $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ і дійсні числа α та β.

Векторний добуток векторів має властивості:

1) *антикомутативності*

$$[\overline{a},\overline{b}] = -[\overline{b},\overline{a}];$$

2) *лінійності*

$$[\alpha\overline{a} + \beta\overline{b},\overline{c}] = \alpha[\overline{a},\overline{c}] + \beta[\overline{b},\overline{c}],$$
$$[\overline{a},\beta\overline{b} + \gamma\overline{c}] = \beta[\overline{a},\overline{b}] + \gamma[\overline{a},\overline{c}];$$

3) $[\overline{a},\overline{a}] = \overline{0}$.

4. Властивості мішаного добутку. Розгляньмо будь-які вектори $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ і дійсні числа α та β.

Мішаний добуток векторів має властивості:

1) знаки векторного та скалярного добутків можна міняти місцями, що дозволяє позначати мішаний добуток як

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = ([\overline{a},\overline{b}],\overline{c}) = (\overline{a},[\overline{b},\overline{c}]);$$

2) циклічне переставляння співмножників не змінює мішаного добутку

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = (\overline{c},\overline{a},\overline{b}) = (\overline{b},\overline{c},\overline{a});$$

3) переставляння двох співмножників змінює знак мішаного добутку

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = -(\overline{b},\overline{a},\overline{c}) = -(\overline{c},\overline{b},\overline{a}) = -(\overline{a},\overline{c},\overline{b});$$

4) *лінійність* за будь-яким множником, приміром,

$$(\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2,\overline{b},\overline{c}) = \alpha_1(\overline{a}_1,\overline{b},\overline{c}) + \alpha_2(\overline{a}_2,\overline{b},\overline{c}).$$

3.3.3. Добутки векторів у координатній формі

1. Скалярний добуток в ортонормованому базисі. Вектори ортонормованого базису

$$\bar{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_{\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}}, \bar{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_{\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}}, \bar{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}}$$

справджують таку таблицю скалярного множення:

$(\,,)$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

2. Нехай задано координати векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ в ортонормованому базисі $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k},\ \bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}.$$

Перемножмо їх скалярно, ураховуючи властивості скалярного добутку та ортонормованість базису:

$$\begin{aligned}(\bar{a},\bar{b}) &= (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}, b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) = \\ &= a_xb_x(\bar{i},\bar{i}) + a_xb_y(\bar{i},\bar{j}) + a_xb_z(\bar{i},\bar{k}) + \\ &+ a_yb_x(\bar{j},\bar{i}) + a_yb_y(\bar{j},\bar{j}) + a_yb_z(\bar{j},\bar{k}) + \\ &+ a_zb_x(\bar{k},\bar{i}) + a_zb_y(\bar{k},\bar{j}) + a_zb_z(\bar{k},\bar{k}) = \\ &= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.\end{aligned}$$

Дістаємо формулу обчислення скалярного добутку векторів $\bar{a}$

$$\boxed{(\bar{a},\bar{b}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = \overleftarrow{a}\cdot\vec{b}.}$$

3. Приміром, обчислімо скалярний добуток векторів

$$\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k} \text{ та } \bar{b} = 4\bar{i} + 5\bar{j} + 6\bar{k}.$$

$$(\bar{a},\bar{b}) = 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 = 32.$$

4. Векторний добуток в ортонормованому базисі. Нехай задано правий ортонормований базис $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$. Із властивостей векторного добутку випливає така таблиця векторного множення координатних ортів (першим вибирають рядок):

$[\,,]$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	$\bar{0}$

5. Нехай задано координати векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ в ортонормованому базисі $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$:

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k},\ \overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}.$$

Перемножмо їх векторно, ураховуючи властивості векторного добутку та ортонормованість базису:

$$\begin{gathered}[\overline{a},\overline{b}] = [a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}, b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}] = \\ = a_xb_x[\overline{i},\overline{i}] + a_xb_y[\overline{i},\overline{j}] + a_xb_z[\overline{i},\overline{k}] + \\ + a_yb_x[\overline{j},\overline{i}] + a_yb_y[\overline{j},\overline{j}] + a_yb_z[\overline{j},\overline{k}] + \\ + a_zb_x[\overline{k},\overline{i}] + a_zb_y[\overline{k},\overline{j}] + a_zb_z[\overline{k},\overline{k}] = \\ = \overline{0} + a_xb_y\overline{k} - a_xb_z\overline{j} - a_yb_x\overline{k} + \overline{0} + a_yb_z\overline{i} + a_zb_x\overline{j} - a_zb_y\overline{i} + \overline{0} = \\ = (a_yb_z - a_zb_y)\overline{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\overline{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\overline{k}.\end{gathered}$$

Ураховуючи вирази для визначників 2-го порядку та означення визначника, дістаємо формулу обчислення векторного добутку в координатній формі:

$$\boxed{[\overline{a},\overline{b}] = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\overline{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\overline{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\overline{k} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.}$$

6. Приміром, обчислімо векторний добуток векторів

$$\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k} \text{ та } \overline{b} = 4\overline{i} + 5\overline{j} + 6\overline{k}.$$

$$[\overline{a},\overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3\overline{i} + 6\overline{j} - 3\overline{k}.$$

7. Мішаний добуток в ортонормованому базисі. Нехай задано координати векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ в ортонормованому базисі $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$:

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}, \overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k} \text{ та } \overline{c} = c_x\overline{i} + c_y\overline{j} + c_z\overline{k}.$$

Знайдімо їх мішаний добуток, використовуючи координатну форму векторного та скалярного добутків:

$$\begin{gathered}(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = ([\overline{a},b],\overline{c}) = \\ = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\overline{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\overline{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\overline{k}, c_x\overline{i} + c_y\overline{j} + c_z\overline{k}\right) = \\ = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.\end{gathered}$$

Дістаємо формулу обчислення мішаного добутку в координатній формі:

$$\boxed{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.}$$

8. Приміром, знайдімо мішаний добуток векторів

$$\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}, \overline{b} = 2\overline{j} - \overline{k}, \overline{c} = 3\overline{k}.$$

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

3.3.4. Застосування добутків векторів

1. Довжина вектора.

$$\boxed{\left|\overline{a}\right| = \sqrt{(\overline{a},\overline{a})}.}$$

2. Кут між ненульовими векторами.

$$\boxed{\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \frac{(\overline{a},\overline{b})}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|};}$$

$$\boxed{(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \arccos\frac{(\overline{a},\overline{b})}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|}.}$$

3. Проекція вектора.

$$\boxed{\operatorname{pr}_{\overline{a}} \overline{b} = \frac{(\overline{a},\overline{b})}{\left|\overline{a}\right|}.}$$

4. Критерій ортогональності векторів. Два вектори ортогональні тоді й лише тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$\boxed{\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow (\overline{a},\overline{b}) = 0.}$$

5. Робота сталої сили. Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно з положення B у положення C під дією сталої сили $\overline{F}$, що утворює кут φ з вектором переміщенням $\overline{s} = \overline{BC}$ (рис. 3.44).

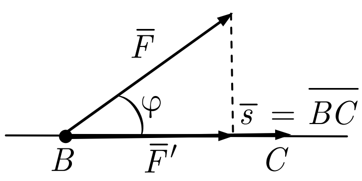


Рис. 3.44. Робота сталої сили

Роботу сили $\overline{F}$ під час переміщення $\overline{s}$ обчислюють за формулою

$$\boxed{A = \left|\overline{F}\right|\cos\varphi \cdot \left|\overline{s}\right| = (\overline{F},\overline{s}).}$$

6. Площа паралелограма. Розгляньмо паралелограм і трикутник, побудований на неколінеарних векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$, і висоту на сторону, що збігається з вектором $\overline{a}$ (рис. 3.45).

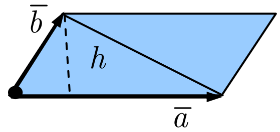


Рис. 3.45. Паралелограм (трикутник)

$$\boxed{S_{\square} = \left|[\overline{a}, \overline{b}]\right|.}$$

Як наслідок, площу паралелограма, побудованого на плоских векторах $\overline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ та $\overline{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$, знаходять за формулою

$$S_{\square} = \left| \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right|.$$

7. Площа трикутника.

$$\boxed{S_{\triangle} = \frac{1}{2}\left|[\overline{a}, \overline{b}]\right|.}$$

8. Висота паралелограма (трикутника).

$$\boxed{h = \left|\text{pr}_{[\overline{a}, \overline{b}]}\overline{b}\right| = \frac{\left|[\overline{a}, \overline{b}]\right|}{\left|\overline{a}\right|}.}$$

9. Критерій колінеарності векторів. Два вектори колінеарні тоді й лише тоді, коли їхній векторний добуток є нульовим вектором, тобто

$$\boxed{\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow [\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0}.}$$

10. Момент сили відносно точки. Нехай $\overline{F} = \overline{AB}$ — вектор сили, прикладеної до точки A (рис. 3.46).

Моментом $\overline{M}$ *сили* $\overline{F}$ відносно точки O називають вектор

$$\overline{M}_O(\overline{F}) = [\overline{OA}, \overline{F}].$$

Довжина моменту $\left|\overline{M}\right|$ не залежить від точки A прикладання сили $\overline{F}$ на її лінії дії L. Справді,

$$\left|\overline{M}\right| = \left|[\overline{OA}, \overline{F}]\right| = \left|\overline{F}\right| h,$$

де $h = OC$ — перпендикуляр до L. Величина h від точки A не залежить.

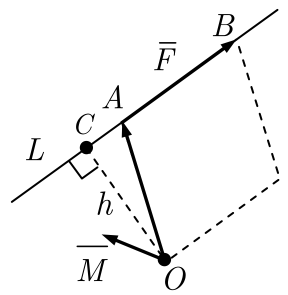


Рис. 3.46. Момент сили відносно точки

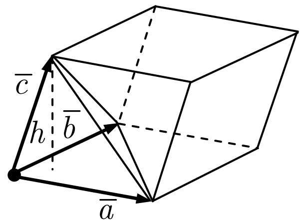


Рис. 3.47. Паралелепіпед (трикутна піраміда)

11. Об'єм паралелепіпеда. Розгляньмо паралелепіпед (трикутну піраміду) (рис. 3.47), побудований на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ і висоту, опущену на грань, яку утворено векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

$$\boxed{V_{\text{пар}} = \left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|.}$$

12. Об'єм трикутної піраміди.

$$\boxed{V_{\text{пір}} = \frac{1}{6}\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|.}$$

13. Висота паралелепіпеда (трикутної піраміди).

$$\boxed{h = \left|\operatorname{pr}_{[\overline{a},\overline{b}]}\overline{c}\right| = \frac{\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|}{\left|[a,\overline{b}]\right|}.}$$

14. Критерій компланарності векторів. Три вектори компланарні тоді й лише тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю, тобто

$$\boxed{\overline{a},\overline{b},\overline{c} - \textbf{ компланарні} \Leftrightarrow (\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = 0.}$$

15. Взаємна орієнтація векторів. Для будь-яких некомпланарних векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$:

1) якщо $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) > 0,$ то вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ утворюють праву трійку;

2) якщо $(\overline{a},b,\overline{c}) < 0,$ то вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ утворюють ліву трійку.

3.4. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Відомо, що квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами й від'ємним дискримінантом, зокрема $x^2+1=0,$ не має дійсних коренів. Виникає потреба розширити множину $\mathbb{R}$ так, щоб якомога більше властивостей дійсних чисел зберігалось і на ширшій множині вже будь-яке алгебричне рівняння з дійсними коефіцієнтами було розв'язним.

Таким узагальненням множини дійсних чисел є множина комплексних чисел.

3.4.1. Комплексні числа як упорядковані пари

1. Означення 3.11 (комплексного числа).

Комплексним числом z називають упорядковану пару $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ дійсних чисел x та y, тобто

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Перший елемент пари x називають *дійсною частиною*, а другий елемент — *уявною частиною* комплексного числа z і позначають

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

2. Дії з комплексними числами. Розгляньмо два комплексні числа

$$z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ та } z_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Рівність, додавання та множення комплексних чисел запроваджують за формулами:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2; \end{cases} \quad z_1 + z_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}; \quad z_1 z_2 = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

3. Дійсні числа як окремий випадок комплексних. Оскільки

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то комплексні числа вигляду $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$, ототожнюють з дійсними числами і записують

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x, x \in \mathbb{R}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Звідси випливає, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ є підмножиною множини комплексних чисел $\mathbb{C}$.

Правдиві такі включення

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

4. Невпорядкованість множини комплексних чисел. Поняття «більше» та «менше» для комплексних чисел не означують, тобто множина комплексних чисел $\mathbb{C}$, на відміну від множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, *не впорядкована.*

5. Уявна одиниця. Серед комплексних чисел особливе місце займає число $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, яке називають *уявною одиницею* і позначають як

$$i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

З означення множення комплексних чисел випливає, що

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1,$$

тобто комплексне число i є розв'язком рівняння $z^2 + 1 = 0$ і $i^2 = -1$.

6. З означення дій над комплексними числами випливає, що

$$iy = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = x + iy.$$

3.4.2. Алгебрична форма комплексних чисел

1. Запис комплексного числа в алгебричній формі. *Алгебричною формою* комплексного числа $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ називають вираз

$$\boxed{z = x + iy,}$$

де $i^2 = -1$.

2. Дії над комплексними числами в алгебричній формі. Розгляньмо комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$.

I. Комплексні числа є *рівними*, якщо рівні їх дійсні і уявні частини:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

II. Комплексні числа *додають* за правилом:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

III. Комплексні числа *віднімають* за правилом:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

IV. Комплексні числа *перемножують* за правилом:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

V. Піднесення комплексного числа z до натурального степеня n розглядають як множення числа z на себе n разів:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n \text{ разів}}.$$

3. Арифметичні дії над комплексними числами можна проводити як з алгебричними виразами, ураховуючи, що $i^2 = -1$.

4. Комплексне число $x - iy$ називають *спряженим* до числа $z = x + iy$ і позначають

$$\overline{z} = x - iy.$$

Маємо

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = (x^2 + y^2) + 0i = x^2 + y^2 \in \mathbb{R},$$

$$z\overline{z} \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 0.$$

5. Для будь-якого комплексного числа $z = x + iy \neq 0$ існує *обернене*. Справді, помножуючи рівність

$$z^{-1} z = 1$$

на $\overline{z}$, дістаємо

$$z^{-1} z\overline{z} = \overline{z} \Leftrightarrow z^{-1} = \frac{1}{z\overline{z}}\overline{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Під *часткою* комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ розуміють комплексне число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

6. Знайдімо суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 2 + 3i$ та $z_2 = -1 + 2i$.

❍ Ураховуючи формули для дій над комплексними числами в алгебричній формі, маємо:

$$z_1 + z_2 = 2 + 3i + (-1 + 2i) = 1 + 5i;$$

$$z_1 - z_2 = 2 + 3i - (-1 + 2i) = 3 + i;$$

$$z_1 z_2 = (2 + 3i)(-1 + 2i) = -2 - 3i + 4i + \underbrace{6i^2}_{\text{ураховуємо, що } i^2 = -1} =$$

$$= -2 + i - 6 = -8 + i;$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\underbrace{\frac{(2+3i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}}_{\substack{\text{помножуємо чисельник і знаменник}\\ \text{дробу на спряжене число до знаменника}}}=\frac{(2+3i)(-1-2i)}{(-1)^2+(2)^2}=$$

$$=\frac{-2-3i-4i-6i^2}{1+4}=\frac{4-7i}{5}=\frac{4}{5}-\frac{7}{5}i.\bullet$$

3.4.3. Геометричне зображення комплексних чисел

1. Комплексне число $z=x+iy$ зображують на площині Oxy точкою $M(x;y)$ або радіусом-вектором $\overline{OM}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ (рис. 3.48—3.49).

Існує взаємно однозначна відповідність між комплексними числами $z=x+iy, x,y\in\mathbb{R}$, і точками площини Oxy. При цьому:

площину, точки якої ототожнюють з комплексними числами, називають *комплексною площиною*;

вісь абсцис називають *дійсною віссю* (на ній лежать дійсні числа $z=x$);

вісь ординат називають *уявною віссю* (на ній лежать уявні числа $z=iy$).

2. Якщо число z зображують точкою $(x;y)$, то числа $\overline{z}, -z$ і $-\overline{z}$ зображують відповідно точками $(x;-y), (-x;-y)$ і $(-x;y)$ (рис. 3.50).

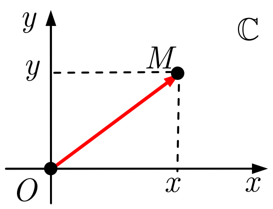


Рис. 3.48. Зображення комплексного числа точкою та її радіусом-вектором

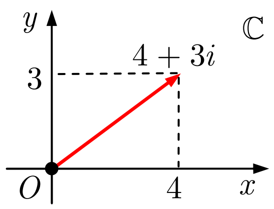


Рис. 3.49. Зображення числа $4+3i$

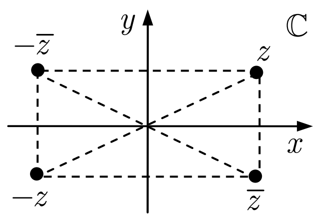


Рис. 3.50. Зображення чисел

3. Стереографічна проекція. Побудуємо ще одне зображення множини комплексних чисел, навіть поповненої нескінченно віддаленою точкою.

Розгляньмо сферу, яка торкається комплексної площини в точці O (рис. 3.51). Позначаємо через P точку сфери, діаметрально протилежну точці O.

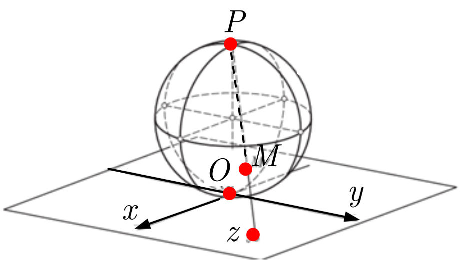


Рис. 3.51. Стереографічна проекція

Кожній точці комплексної площини увідповіднюємо точку перетину сфери з відрізком, що з'єднує точки z та P. Точці P відповідає нескінченно віддалена точка.

Таку відповідність між точками розширеної комплексної площини (доповненої точкою ∞) і точками сфери є взаємно однозначною, її називають *стереографічною проекцією*, а сферу — *сферою Рімана*.

3.4.4. Полярна система координат

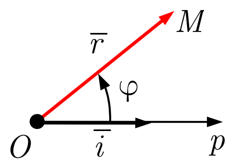


Рис. 3.52. Полярна система координат

1. Зафіксуймо на площині точку O, яку називають *полюсом*, розгляньмо орт $\overline{i}$, і виберімо додатну орієнтацію (проти годинникової стрілки) (рис. 3.52).

Тоді на площині буде задано *полярну систему координат*.

Промінь Op, який орієнтований вектором $\overline{i}$, називають *полярною віссю*.

2. Положення точки M, відмінної від полюса O, на площині задають довжиною її радіуса-вектора $\rho = \left|\overline{r}\right|$ і кутом φ між полярною віссю і променем OM. Кут φ вважають додатним, якщо його відраховують від полярної осі проти ходу годинникової стрілки, і від'ємним, якщо його відраховують за годинниковою стрілкою.

Полярними координатами точки M називають упорядковану пару чисел (ρ, φ) і записують $M(\rho; \varphi)$. Координату $\rho > 0$ називають *полярним радіусом*, координату φ — *полярним кутом*.

Для полюса — точки $O:\ \rho = 0$, а полярний кут можна брати довільним.

Полярні координати однозначно визначають точку на площині, а кожній точці площини відповідає нескінченна кількість пар ρ та φ. У цих парах ρ те саме, а полярні кути φ відрізняються один від одного на число, кратне 2π, тобто

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi,$$

де φ_0 справджує умову

$$-\pi < \varphi_0 \le \pi.$$

Число φ_0 називають *головним значенням* полярного кута (інколи беруть $\varphi_0 \in [0;2\pi)$).

Якщо скористатися головним значенням полярного кута, то відповідність між упорядкованими парами дійсних чисел $(\rho;\varphi_0)$ і точками площини буде взаємно однозначною (крім точки 0, де $\rho = 0$, а φ_0 — довільний).

3. Нехай на площині задано полярну систему координат. Прямокутні декартові координати x, y називають *узгодженими* з полярними координатами ρ, φ (рис. 3.53), якщо:

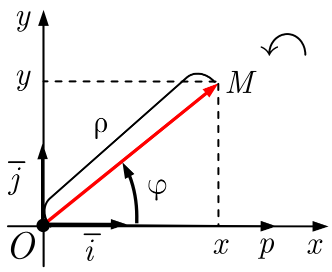


Рис. 3.53. Узгодження систем координат

1) базис $\{\overline{i}, \overline{j}\}$ задає вибрану орієнтацію площини;
2) полюс O є початком координат ПДСК;
3) промінь Op є додатною піввіссю осі абсцис.

Якщо x, y — прямокутні координати, узгоджені з полярними координатами ρ, φ, то декартові координати виражаються через полярні співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$$

а полярні через декартові — співвідношеннями:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi : \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Зауважмо, що

$$x^2 + y^2 = \rho^2.$$

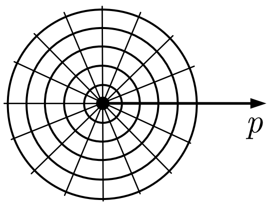


Рис. 3.54. Координатні лінії полярної системи

7. *Координатними лініями* в полярній системі координат є кола з центром у полюсі й радіусом R, що мають рівняння $\rho = R$, та промені, які виходять з полюса і мають рівняння $\varphi = \alpha$ (рис. 3.54)

3.4.5. Тригонометрична форма комплексних чисел

1. Запис комплексного числа у тригонометричній формі. Розгляньмо комплексне число $z \neq 0$, яке зображує точка $M \neq O$ з полярними координатами (ρ, φ).

Полярний радіус ρ називають *модулем* комплексного числа z і позначають

$$\left|z\right| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

полярний кут φ називають *аргументом* комплексного числа z і позначають

$$\operatorname{Arg} z = \varphi.$$

Головним значенням аргументу комплексного числа $z \neq 0$ називають число

$$\arg z = \varphi_0 \in (-\pi; \pi].$$

Отже,

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

2. Поняття модуля комплексного числа узгоджене з поняттям модуля дійсного числа:

$$\left|x + 0i\right| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \left|x\right|.$$

$$z\overline{z} = x^2 + y^2 = \left|z\right|^2.$$

Аргумент комплексного числа $z = 0$ невизначений (тобто можна брати будь-яким), а модуль дорівнює нулю.

3. Нехай точка, що зображує комплексне число $z = x + iy$, має полярні координати $(\rho; \varphi)$. Тоді, ураховуючи зв'язок між декартовими і полярними координатами, маємо

$$z = x + iy = \rho \cos \varphi + i\rho \sin \varphi, \rho \geq 0.$$

Тригонометричною формою комплексного числа $z \neq 0$ називають вираз

$$\boxed{z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi),}$$

де $\rho = \left|z\right|$ — модуль комплексного числа z; $\varphi = \operatorname{Arg} z$ — аргумент комплексного числа z.

4. Приміром, число $z = 2i = 0 + 2i$ можна записати в тригонометричній формі як

$$z = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right).$$

5. Дії над комплексними числами у тригонометричній формі. Розгляньмо комплексні числа

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1);$$
$$z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

З означень дій над комплексними числами і тригонометричної форми комплексного числа випливає, що:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2,\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$
$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2));$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Доведення. Доведімо формулу множення:

$$z_1 z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)] =$$
$$= \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \blacksquare$$

6. Наслідком формули множення комплексних чисел є формула *піднесення* комплексного числа *до* натурального *степеня*, яку називають *Муавровою*:

$$z^n = \left[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

7. Комплексне число w називають *коренем* n-*го степеня* з комплексного числа, якщо

$$w^n = z,\quad w = \sqrt[n]{z}, n \in \mathbb{N}. \qquad (*)$$

Для будь-якого $z \neq 0$ корінь $\sqrt[n]{z}$ має n різних значень. Справді, підставляючи

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

у формулу $(*)$, дістаємо

$$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

З рівності комплексних чисел випливає рівність їхніх модулів, а аргументи чисел відрізняються на $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Отже, маємо співвідношення:

$$r = \sqrt[n]{\rho},\ \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}. \qquad (**)$$

Отже, модулі всіх коренів n-го степеня з числа z однакові, а аргументи відрізняються на $\dfrac{2\pi k}{n}$.

Точки на комплексній площині, що відповідають різним значенням кореня n-го степеня з комплексного числа $z \neq 0$, розташовані у вершинах правильного n-кутника, вписаного в коло радіусом $\sqrt[n]{\rho}$ з центром у точці $w = 0$ (рис. 3.55).

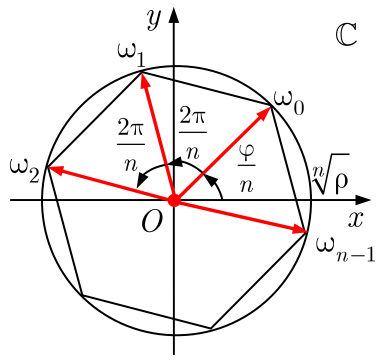


Рис. 3.55. Усі значення $\sqrt[n]{z}$

Надаючи у співвідношенні (**) числу k значень $0, 1, 2, \ldots, n-1$, одержимо n різних комплексних чисел

$$\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right),$$
$$k = \overline{0, n-1}.$$

8. Важливий випадок добування кореня n-го степеня з одиниці. З рівності

$$1 = \cos 0 + i\sin 0$$

випливає, що

$$\sqrt[n]{1} = \varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, k = \overline{0, n-1}.$$

На комплексній площині корені n-го степеня з одиниці розташовані на колі одиничного радіуса і поділяють його на n рівних дуг; однією з точок поділу є число 1.

3.4.6. Показникова форма комплексних чисел

1. *Ойлерова формула*, що встановлює зв'язок між показниковою і тригонометричними функціями,

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \ \varphi \in \mathbb{R},}$$

дає змогу записувати комплексні числа ще й у показниковій формі:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Leftrightarrow z = \rho e^{i\varphi}, \rho = |z|, \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Якщо покласти в Ойлеровій формулі $\varphi = \pi$, то дістаємо цікаву рівність

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0,}$$

яка містить 5 визначних сталих $0, 1, \pi, e, i$ і символізує єдність усієї математики.

2. Запис комплексних чисел у показниковій формі. *Показниковою формою* комплексного числа $z \neq 0$ називають вираз

$$\boxed{z = \rho e^{i\varphi},}$$

де $\rho = \left|z\right|$ — модуль комплексного числа z; $\varphi = \operatorname{Arg} z$ — аргумент комплексного числа z.

3. Дії з комплексними числами в показниковій формі. Подаймо формули для дій з комплексними числами

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$$

в показниковій формі:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2, \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)};$$

$$z_1^n = \rho_1^n e^{in\varphi_1}, n \in \mathbb{N}; \quad \sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{\rho_1} e^{i\frac{\varphi_1 + 2\pi k}{n}}, k = \overline{0, n-1}, n \in \mathbb{N}.$$

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

3.1.1. За початок усіх векторів завдовжки r, узято точку A. Де розташовані кінці цих векторів?

3.1.2. Скільки різних векторів задають усілякі впорядковані пари точок, утворені з вершин: 1) трикутника; 2) паралелограма?

3.1.3. Нехай $|\overline{a}| = |\overline{b}|$. Чи випливає з цього, що $\overline{a} = \overline{b}$? Які з векторів зображено на рисунку рівними? Виразіть вектори $\overline{AE}$ та $\overline{DE}$ через вектори $\overline{AB}$ та $\overline{AD}$.

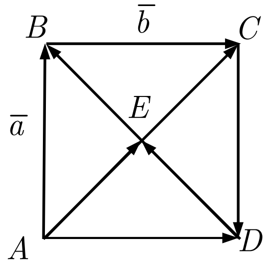


Рис. до 3.1.3

3.1.4. У трикутнику ABC вектор $\overline{AB} = \overline{m}$ і вектор $\overline{AC} = \overline{n}$. Побудуйте вектор: 1) $\dfrac{\overline{m}+\overline{n}}{2}$; 2) $\dfrac{\overline{m}-\overline{n}}{2}$.

3.1.5. Чому дорівнює сума векторів: 1) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$; 2) $\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{BC}$.

3.1.6. Яке взаємне розташування точок A, B та C, якщо: 1) вектори $\overline{AC}$ та $\overline{AB}$ колінеарні; 2) $\overline{AC} = \overline{CB}$; 3) $\overline{AC} = -3\overline{CB}$.

3.1.7. Чи може довжина вектора $\overline{a}+\overline{b}$ бути менше від довжини кожного з векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$?

3.1.8. Яку умову мають справджувати вектори $\overline{a}, \overline{b}$ та $\overline{c}$ простору, щоб з них можна було утворити трикутник?

3.1.9. Довжини векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ задано. Як мають бути напрямлені ці вектори, щоб довжина вектора $\overline{a}+\overline{b}$ була: 1) найменшою; 2) найбільшою?

3.1.10. Виразіть вектор $\overline{x}$:

1) через вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$;

2) через вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$;

3) через вектори $\overline{a}, \overline{b}$ та $\overline{c}$;

4) та вектор $\overline{y}$ через вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

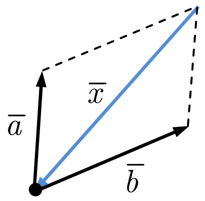


Рис. до 3.1.10.1)

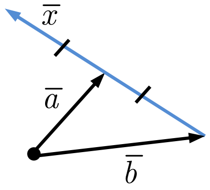


Рис. до 3.1.10.2)

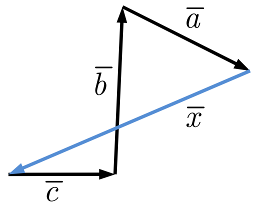


Рис. до 3.1.10.3)

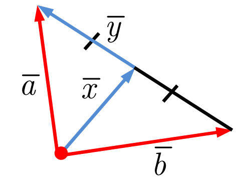


Рис. до 3.1.10.4)

3.1.11. Відомо, що $\overline{a} \neq \overline{0}$ і $\overline{b} = \lambda\overline{a}$. Яким має бути число λ, щоб виконувалась умова:

1) $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ і $\left|\overline{b}\right| = 1$; 2) $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ і $\left|\overline{b}\right| = 1$; 3) $\overline{b} = \overline{0}$; 4) $\overline{b} = -\overline{a}$.

3.1.12. Виразіть вектор $\overline{a}$ через колінеарний з ним одиничний вектор $\overline{e}$.

3.1.13. На прямій задано три точки A, B, C. Чи існує на цій прямій така точка M, що $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$?

3.1.14. Задано дві різні точки A_1 та A_2 та число k. Знайдіть таку точку M, щоб вектори $\overline{A_1M}$ та $k\overline{A_2M}$ були: 1) рівні; 2) протилежні.

3.1.15. Які зображені вектори є:

1) колінеарними;

2) неколінеарними;

3) компланарними;

4) некомпланарними?

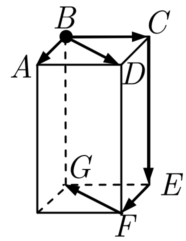


Рис. до 3.1.15

3.1.16. Чи колінеарні вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$, якщо колінеарні вектори $\overline{a} + \overline{b}$ та $\overline{a} - \overline{b}$?

3.1.17. Доведіть, що для будь-яких заданих векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ вектори $\overline{a} + \overline{b}, \overline{b} + \overline{c}, \overline{c} - \overline{a}$ компланарні.

3.1.18. У базисі $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ задано вектори:

$$\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{a}_5 = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{a}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \overline{a}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \overline{a}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{a}_9 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{a}_{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Укажіть вектори: 1) колінеарні $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$; 2) компланарні векторам $\overline{e}_1$ та $\overline{e}_2$, $\overline{e}_1$ та $\overline{e}_3$, $\overline{e}_2$ та $\overline{e}_3$?

3.1.19. Доведіть твердження:

1) скінченна система векторів, яка містить нульовий вектор, лінійно залежна;

2) скінченна система векторів, яка має два рівних вектори, лінійно залежна.

3.2.1. Знайдіть площу трикутника ABC.

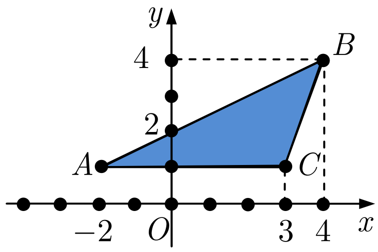


Рис. до 3.2.1

3.2.2. Точка M є серединою відрізка AB. Доведіть, що M рівновіддалена від вершин трикутника ABC.

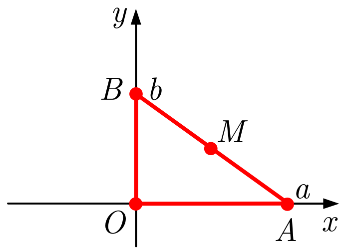


Рис. до 3.2.2

3.2.3. Задано координати двох вершин прямокутного паралелепіпеда (рис.). Знайдіть координати решти 6 вершин.

3.2.4. Які координати векторів $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ у базисі $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$?

3.2.5. Знайдіть напрямні косинуси орта $\overline{a} = \dfrac{\overline{i}}{\sqrt{3}} - \dfrac{\overline{j}}{\sqrt{3}} + \dfrac{\overline{k}}{\sqrt{3}}$.

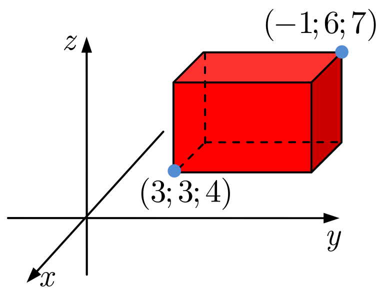


Рис. до 3.2.3

3.2.6. Чи може вектор утворювати з векторами ортонормованого базису $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ кути $\alpha = \dfrac{\pi}{6}, \beta = \dfrac{\pi}{6}, \gamma = \dfrac{\pi}{2}$?

3.2.7. Визначити в яких чвертях може бути розташована точка $M(x; y)$, якщо: 1) $xy > 0$; 2) $xy < 0$.

3.2.8. У яких октантах може бути розташована точка $M(x; y; z)$, якщо: 1) $xy > 0$; 2) $xz < 0$; 3) $yz > 0$; 4) $xyz > 0$; 5) $xyz < 0$.

3.2.9. Знайдіть координати вектора $\overline{v}$.

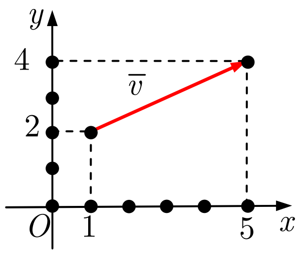


Рис. до 3.2.9.1)

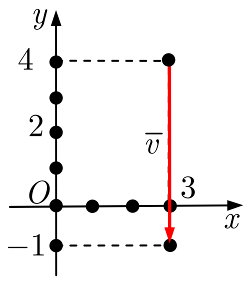


Рис. до 3.2.9.2)

3.2.10. Вектор $\overline{a}$ утворює з віссю L кут φ. Який кут з віссю L утворює вектор $\lambda\overline{a}$ $(\lambda \neq 0)$?

3.3.1. Задано $\left|\overline{a}\right| = 2, \left|\overline{b}\right| = 3, \left|\overline{c}\right| = 5, (\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \dfrac{\pi}{3}, \overline{c} \perp \overline{a}, \overline{c} \perp \overline{b}$. Обчисліть:

1) $(\overline{a},\overline{b}),(\overline{a},\overline{c})$; 2) $\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|,\left|[\overline{a},\overline{c}]\right|$; 3) $\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|$.

3.3.2. Відомо, що $(\overline{a},\overline{b}) = -2, [\overline{a},\overline{b}] = \overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}, (\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = 3$. Знайдіть, чому дорівнює:

1) $(\overline{b},\overline{a})$; 2) $[\overline{b};\overline{a}]$; 3) $(\overline{b},\overline{a},\overline{c})$ та $(\overline{c},\overline{a},\overline{b})$?

3.3.3. Чому дорівнює: 1) $(\overline{a},\overline{a})$; 2) $[\overline{a},\overline{a}]$; 3) $(\overline{a},\overline{a},\overline{a})$?

3.3.4. Чому дорівнює: 1) $(\overline{i},\overline{j})$; 2) $[\overline{i},\overline{j}]$; 3) $(\overline{i},\overline{j},\overline{k})$?

3.3.5. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед ($AB = 1$, $BC = 1, BB_1 = 2$). Точка E — середина сторони A_1A. Який з векторів є векторним добутком $[\overline{BC},\overline{BA}]$?

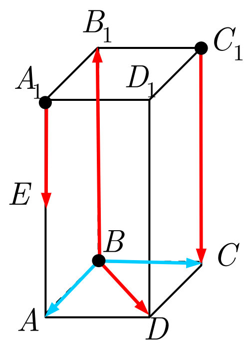


Рис. до 3.3.5

3.3.6. Відомо, що $\overline{d} \perp \overline{b}$. Спростіть:

1) $(\overline{a} + \lambda\overline{d},\overline{b})$; 2) $[\overline{a} + \lambda\overline{b},\overline{b}]$; 3) $(\overline{a},\overline{b},\overline{c} + \lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b})$.

3.3.7. Нехай вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ утворюють праву трійку. Яку трійку утворюють вектори: 1) $\overline{b},\overline{a},\overline{c}$; 2) $\overline{b},\overline{c},\overline{a}$; 3) $\overline{c},\overline{b},\overline{a}$?

3.3.8. Знайдіть $\left|\overline{a}\right|$, якщо $(\overline{a},\overline{a}) = 16$.

3.3.9. Знайдіть $\mathrm{pr}_{\overline{a}}\,\overline{b}$, якщо $(\overline{a},\overline{b}) = 10, \left|\overline{a}\right| = 2$.

3.3.10. Знайдіть $(\widehat{\overline{a},\overline{b}})$, якщо $(\overline{a},\overline{b}) = 10, \left|\overline{a}\right| = 4, \left|\overline{b}\right| = 5$.

3.3.11. Задано $(\overline{a},\overline{a}) = 4, \left|[\overline{a},\overline{b}]\right| = 5, (\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = -20$. Знайдіть:

1) довжину вектора $\overline{a}$;

2) площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$;

3) висоту паралелограма на сторону $\overline{a}$;

4) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$;

5) висоту паралелепіпеда, опущену на основу $\overline{a},\overline{b}$.

3.3.12. Визначте, які із зображених ПДСК є правими?

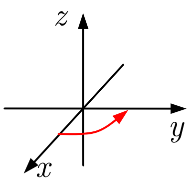


Рис. до 3.3.12.1)

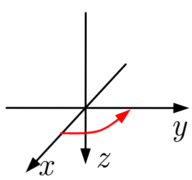


Рис. до 3.3.12.2)

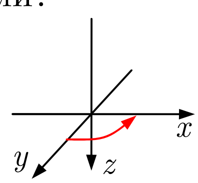


Рис. до 3.3.12.3)

3.3.13. Що відомо про взаємне розташування векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$, якщо:

1) $(\overline{a},\overline{b}) = 0$; 2) $\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$; 3) $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$; 4) $[\overline{a},\overline{b}] = \overline{0}$?

3.3.14. Що відомо про взаємне розташування векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$, якщо:

1) $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = 0$; 2) $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$; 3) $(\overline{a},\overline{b},c) < 0$; 4) $(\overline{a},\overline{b},c) > 0$?

3.3.15. Чи рівносильні рівності $\overline{a} = \overline{b}$ та $(\overline{a},\overline{c}) = (\overline{b},\overline{c})$?

3.3.16. При якому взаємному розташуванні ненульових векторів $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ правдива рівність $(\overline{a},\overline{b})\overline{c} = (\overline{b},\overline{c})\overline{a}$?

3.3.17. Яку умову мають справджувати вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$, щоб була правдивою рівність $\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = \left|\overline{a} - \overline{b}\right|$?

3.3.18. Чи рівносильні рівності $\overline{a} = \overline{b}$ та $[\overline{a},\overline{c}] = [\overline{b},\overline{c}]$, де $\overline{c} \neq \overline{0}$?

3.3.19. Нехай рівність $[\overline{a},\overline{x}] = [\overline{b},\overline{x}]$ правдива для будь-якого $\overline{x}$. Чи випливає з цього, що $\overline{a} = \overline{b}$?

3.3.20. Чи може мішаний добуток векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ бути більшим за добуток довжин цих векторів?

3.3.21. Покажіть, що:

1) вектори $\overline{m} = \overline{a}(\overline{b},\overline{c}) - \overline{b}(\overline{a},\overline{c})$ та $\overline{c}$ ортогональні.

2) вектори $\overline{a}$ та $\overline{c} = \overline{b} - \dfrac{(\overline{a},\overline{b})}{\left|\overline{a}\right|^2}\overline{a}$ ортогональні.

3) $[[\overline{i},\overline{j}],\overline{j}] \neq [\overline{i},[\overline{j},\overline{j}]]$;

4) вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ — компланарні, якщо $[\overline{a},\overline{b}] + [\overline{b},\overline{c}] + [\overline{c},\overline{a}] = \overline{0}$.

3.3.22. Нехай вектор $\overline{a} \neq \overline{0}$. Чи правильно, що:

1) якщо $(\overline{a},\overline{b}) = (\overline{a},\overline{c})$, то $\overline{b} = \overline{c}$;

2) якщо $[\overline{a},\overline{b}] = [\overline{a},\overline{c}]$, то $\overline{b} = \overline{c}$;

3) якщо $(\overline{a},\overline{b}) = (\overline{a},\overline{c})$ та $[\overline{a},\overline{b}] = [\overline{a},\overline{c}]$, то $\overline{b} = \overline{c}$?

3.3.23. Чи зміниться скалярний добуток векторів, якщо до одного із множників додати вектор, перпендикулярний до другого множника?

3.3.24. Чи зміниться векторний добуток, якщо до одного із множників додати вектор, колінеарний другому множнику?

3.3.25. Чи існують такі вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$, що $[\overline{a},\overline{b}]=[\overline{b},\overline{a}]$?

3.4.1. Зобразіть числа $z_1=2, z_2=2i, z_3=-2$ $z_4=-2i$ на комплексній площині, знайдіть їхні $\operatorname{Re} z$ та $\operatorname{Im} z$; запишіть тригонометричну і показникову форму чисел.

3.4.2. Знайдіть полярні координати точок P та Q.

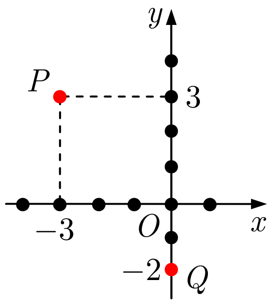


Рис. до 3.4.2

3.4.3. Зобразіть на площині множину чисел для яких:

1) $\rho=1$; 2) $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$; 3) $\rho=1, \varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

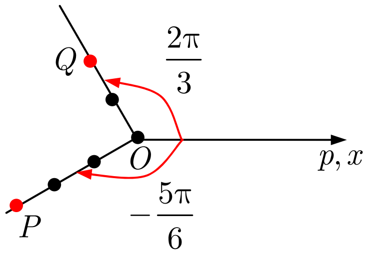


Рис. до 3.4.3

3.4.4. Задайте заштриховану область умовою на полярні координати точок.

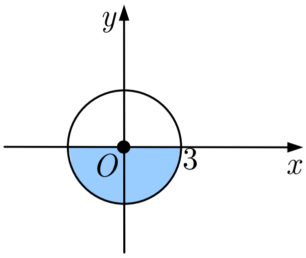


Рис. до 3.4.4.1)

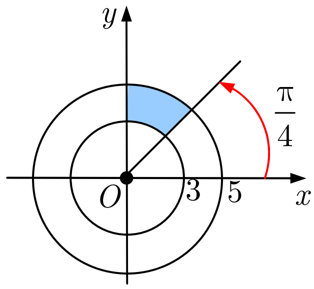


Рис. до 3.4.4.2)

3.4.5. Знайдіть головне значення аргументу $(-\pi<\varphi_0\le\pi)$:

1) $z=3\cos\dfrac{\pi}{8}-i3\sin\dfrac{\pi}{8}$; 2) $z=4\cos\dfrac{\pi}{8}+i4\sin\dfrac{\pi}{8}$;

3) $z=-2\cos\dfrac{\pi}{8}-i2\sin\dfrac{\pi}{8}$; 4) $z=-5\cos\dfrac{\pi}{8}+i5\sin\dfrac{\pi}{8}$.

3.4.6. Зобразіть криву, на якій розташовано всі значення $\sqrt[3]{27i}$. Яку фігуру утворюють ці точки?

3.4.7. При якій умові квадрат комплексного числа $x+iy$ є суто уявним числом, тобто числом вигляду $di, d\in\mathbb{R}$?

3.4.8. Який геометричний має величина: 1) $|z|$; 2) $|\operatorname{Re} z|$; 3) $|\operatorname{Im} z|$?

3.4.9. Чи можуть бути спряженими: 1) два дійсних числа? 2) два суто уявних? 3) дійсне та суто уявне число?

3.4.10. Нехай $\arg z=\dfrac{\pi}{6}$. Чому дорівнює $\arg\overline{z}$?

3.4.11. Доведіть, що послідовність чисел $\{z_n\}$, де $z_n = \cos nx + i\sin nx$, є геометричною прогресією. Знайдіть її знаменник.

3.4.12. Доведіть, що якщо $\left|z\right| = 1$, то $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

3.4.13. Скільки і які значення має добуток $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4}$?

3.4.14. Обчисліть: 1) $\left|e^{i\varphi}\right|$; 2) $\left|\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi\right|$.

3.4.15. Чи може сума квадратів двох комплексних чисел бути від'ємною?

3.4.16. Як зміниться модуль та аргумент комплексного числа z після помноження цього числа на: 1) 2; 2) $2i$; 3) -2; 4) $-2i$?

Відповіді

3.1.1. На колі з центром у точці A радіусом r.

3.1.2. 1) 7 векторів; 2) 9 векторів.

3.1.3. Ні. $\overline{b} = \overline{AD}, \overline{AE} = \overline{EC}, \overline{DE} = \overline{EB}$. $\overline{AE} = \dfrac{1}{2}\overline{AB} + \dfrac{1}{2}\overline{AD}, \overline{DE} = \dfrac{1}{2}\overline{AB} - \dfrac{1}{2}\overline{AD}$.

3.1.5. 1), 2) $\overline{0}$.

3.1.6. 1) лежать на одній прямій; 2) точка C — середина відрізка AB; 3) лежать на одній прямій, точка C між точками A та B.

3.1.7. Може.

3.1.8. Їх довжини мають справджувати нерівність трикутника.

3.1.9. 1) колінеарні, протилежно напрямлені; 2) колінеарні, однаково напрямлені.

3.1.10. 1) $\overline{x} = -\overline{a} - \overline{b}$; 2) $\overline{x} = 2\overline{a} - 2\overline{b}$; 3) $\overline{x} = -\overline{a} - \overline{b} - \overline{c}$;
4) $\overline{x} = \dfrac{1}{2}\overline{a} + \dfrac{1}{2}\overline{b}, \overline{y} = \dfrac{1}{2}\overline{a} - \dfrac{1}{2}\overline{b}$.

3.1.11. 1) $\lambda = \dfrac{1}{\left|\overline{a}\right|}$; 2) $\lambda = -\dfrac{1}{\left|\overline{a}\right|}$; 3) $\lambda = 0$; 4) $\lambda = -1$.

3.1.12. $\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\overline{e}$.

3.1.13. Існує єдина така точка.

3.1.14. 1) $\overline{A_1M} = \dfrac{k}{k-1}\overline{A_1A_2}$; 2) $\overline{A_1M} = \dfrac{k}{k+1}\overline{A_1A_2}$;

3.1.15. 1) $\overline{BD}$ та $\overline{FG}$, $\overline{BA}$ та $\overline{EF}$, $\overline{BD}$ та $\overline{FG}$; 3) $\overline{BA}, \overline{BD}, \overline{BC}, \overline{EF}, \overline{FG}$.

3.1.16. Так, колінеарні.

3.1.18. $\overline{a}_3 \parallel \overline{e}_1; \overline{a}_4, \overline{a}_8 \parallel \overline{e}_2; \overline{a}_6 \parallel \overline{e}_3$. Вектори $\overline{a}_3, \overline{a}_4, \overline{a}_5, \overline{a}_8$ компланарні векторам $\overline{e}_1$ та e_2; вектори $\overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_6$ компланарні векторам $\overline{e}_1$ та $\overline{e}_3$; вектори $\overline{a}_4, \overline{a}_6, \overline{a}_7, \overline{a}_{10}$ компланарні векторам $\overline{e}_2$ та $\overline{e}_3$.

3.2.1. $S = 15$.

3.2.6. Ні, не може.

3.2.7. 1) I та III; 2) II та IV.

3.2.8. 1) I, III, V, VII; 2) II, III, V, VIII; 3) I, II, VII, VIII; 4) I, III, VI, VIII; 5) II, IV, V, VII.

3.2.9. 1) $\overline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; 2) $\overline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

3.2.10. 1) φ, якщо $\lambda > 0$, $\pi - \varphi$, якщо $\lambda < 0$.

3.3.1. 1) $(\overline{a},\overline{b}) = 3, (\overline{a},\overline{c}) = 0$; 2) $\left|[\overline{a},\overline{b}]\right| = 3\sqrt{3}, \left|[\overline{a},\overline{c}]\right| = 15$; 3) $\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right| = 15\sqrt{3}$.

3.3.2. 1) $(\overline{b},\overline{a}) = -2$; 2) $[\overline{b};\overline{a}] = -\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$; 3) $(\overline{b},\overline{a},\overline{c}) = -3$, $(\overline{c},\overline{a},\overline{b}) = 3$.

3.3.3. 1) $(\overline{a},\overline{a}) = \left|\overline{a}\right|^2$; 2) $[\overline{a},\overline{a}] = \overline{0}$; 3) $(\overline{a},\overline{a},\overline{a}) = 0$.

3.3.4. 1) $(\overline{i},\overline{j}) = 0$; 2) $[\overline{i},\overline{j}] = \overline{k}$; 3) $(\overline{i},\overline{j},\overline{k}) = 1$.

3.3.5. $\overline{A_1E}$

3.3.6. 1) $(\overline{a} + \lambda\overline{d},\overline{b}) = (\overline{a},\overline{b})$; 2) $[\overline{a} + \lambda\overline{b},\overline{b}] = [\overline{a},\overline{b}]$; 3) $(\overline{a},\overline{b},\overline{c} + \lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b}) = (\overline{a},\overline{b},\overline{c})$.

3.3.7. 1) ліву; 2) праву; 3) ліву.

3.3.8. $\left|\overline{a}\right| = 4$.

3.3.9. $\text{pr}_{\overline{a}}\,\overline{b} = 5$.

3.3.10. $(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

3.3.11. 1) $\left|\overline{a}\right| = 2$; 2) $S = 5$; 3) $h = \dfrac{5}{2}$; 4) $V = 20$; 5) $h = 4$.

3.3.12. 1), 3).

3.3.13. 1), 3) вектори ортогональні; 2), 4) вектори колінеарні.

3.3.14. 1), 2) вектори компланарні; 3) вектори утворюють ліву трійку;
4) вектори утворюють праву трійку.

3.3.15. Ні.

3.3.16. $\overline{a} \parallel \overline{c}$.

3.3.17. $\overline{a} \perp \overline{b}$.

3.3.18. Ні.

3.3.19. Так.

3.3.20. Ні.

3.3.22. 1) Ні; 2) Ні; 3) Так.

3.3.23. Ні.

3.3.24. Ні.

3.3.25. Так.

3.4.1. $z_1 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2e^{i0}, z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$,

$z_3 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2e^{i\pi}, z_4 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$.

3.4.2. $P\left(3\sqrt{2};\dfrac{3\pi}{4}\right), Q\left(2;-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3.4.4. 1) $\rho \le 3, -\pi \le \varphi \le 0$; 2) $3 \le \rho \le 5, \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

3.4.5. 1) $\varphi_0 = -\dfrac{\pi}{8}$; 2) $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{8}$; 3) $\varphi_0 = -\dfrac{7\pi}{8}$; 4) $\varphi_0 = \dfrac{7\pi}{8}$.

3.4.6. Коло із центром у початку координат, радіусом 3, трикутник.

3.4.7. $y = \pm x$.

3.4.8. Віддаль від точки z до: 1) початку координат; 2) уявної осі; 3) дійсної осі.

3.4.9. 1) ні; 2) так; 3) ні.

3.4.10. $\arg z = -\dfrac{\pi}{6}$.

3.4.11. $q = \cos x + i \sin x$.

3.4.13. 2 значення: 2 та -2.

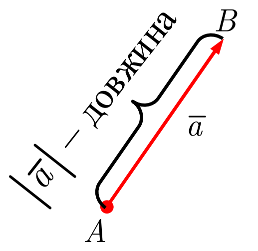
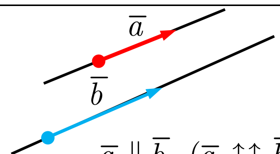
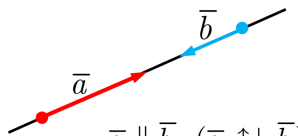
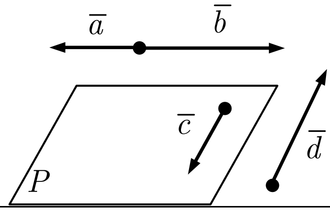
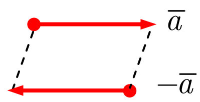
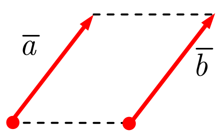
3.4.14. 1) 1; 2) 1.

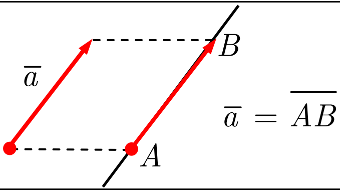
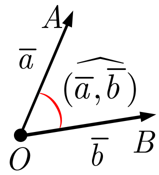
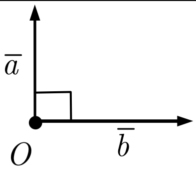
3.4.15. Так.

3.4.16. 1) модуль збільшиться вдвічі, аргумент не зміниться; 2) модуль збільшиться вдвічі, аргумент збільшиться на $\dfrac{\pi}{2}$; 3) модуль збільшиться вдвічі, аргумент збільшиться на π (поміняє знак); 4) модуль збільшиться вдвічі, аргумент зменшиться на $\dfrac{\pi}{2}$.

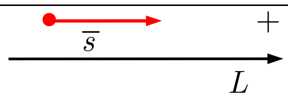
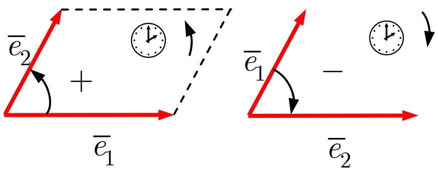
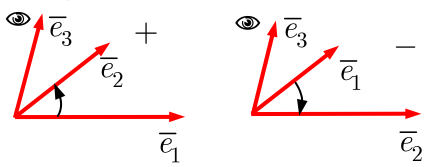
Формули, твердження, алгоритми

3.1. Вектори. Взаємне розташування векторів

❶ ***Геометричний вектор.*** *Геометричним вектором* називають напрямлений відрізок. Першу точку напрямленого відрізка називають *початком* вектора, а другу — *кінцем* вектора.	 $\left\|\overline{a}\right\| = \left\|\overline{AB}\right\| = AB$
❷ ***Нульовий вектор.*** Якщо початок і кінець вектора зливаються, то вектор називають *нульовим* і позначають $\overline{0}$.	$\overline{0} = \overline{AA}$ Довжина нульового вектора дорівнює нулю.
❸ ***Колінеарність векторів.*** Вектори називають *колінеарними* (позначають $\parallel$), якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Колінеарні вектори можуть бути: 1) однаково-напрямлені (позначають $\uparrow\uparrow$); 2) протилежно напрямлені (позначають $\uparrow\downarrow$).	 $\overline{a} \parallel \overline{b}$ $(\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b})$  $\overline{a} \parallel \overline{b}$ $(\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b})$ Нульовий вектор колінеарний будь-якому вектору.
❹ ***Компланарність векторів.*** Вектори називають *компланарними*, якщо вони лежать в одній або паралельних площинах.	 Два вектори завжди компланарні.
❺ ***Протилежні вектори.*** Вектори, які мають однакову довжину і протилежно напрямлені, називають *протилежними*.	
❻ ***Рівність векторів.*** Два вектори називають *рівними*, якщо вони: 1) колінеарні, 2) однаково напрямлені, 3) мають ту саму довжину.	 $\overline{a} = \overline{b}$

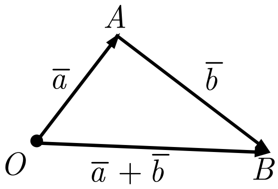
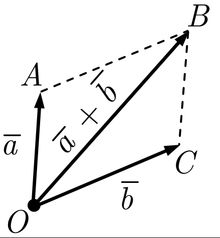
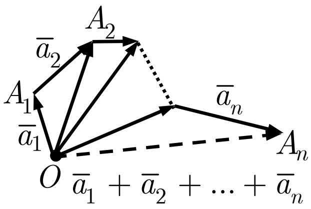
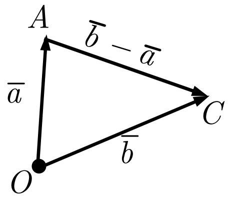
❼ ***Відкладання вектора від точки.*** Від будь-якої точки можна відкласти вектор, рівний заданому.	
❽ ***Кут між векторами.*** *Кутом між векторами* $\overline{a} = \overline{OA}$ та $\overline{b} = \overline{OB}$ вважають величину кута AOB і позначають $(\widehat{\overline{a},\overline{b}})$.	 $0 \le (\widehat{\overline{a},\overline{b}}) \le \pi$
❾ ***Ортогональність векторів.*** Вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називають *ортогональними*, якщо $(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \dfrac{\pi}{2}$ і позначають $\overline{a} \perp \overline{b}$.	 Нульовий вектор ортогональний до будь-якого вектора.

3.2. Орієнтація

❶ ***Орієнтація на прямій.*** Пряму L, на якій вибрано *додатний напрям* (орієнтацію), називають *віссю.* Додатний напрям осі позначають стрілкою.	 Пряму можна орієнтувати вибором її *напрямного вектора.*
❷ ***Орієнтація на площині.*** Упорядковану пару векторів $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ називають *додатно-орієнтованою* (*правою*), якщо «найкоротший поворот» від першого вектора до другого вектора відбувається проти руху годинникової стрілки і *від'ємно-орієнтованою* (*лівою*), якщо — за рухом годинникової стрілки. 	❷ ***Орієнтація у просторі.*** Упорядковану трійку векторів $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ називають *додатно-орієнтованою* (*правою*), якщо найкоротший поворот від першого вектора до другого вектора відбувається проти руху годинникової стрілки, якщо дивитись з кінця третього вектора, і *від'ємно-орієнтованою* (*лівою*), якщо — за рухом годинникової стрілки. 

3.3. Лінійні дії над векторами

❶ *Додавання (віднімання) векторів*

правило трикутника	правило паралелограма	правило замикача	різниця векторів
			

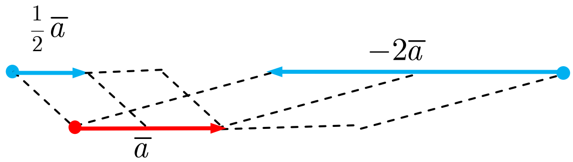
❷ *Множення вектора на число*

$\lambda\overline{a}$ — вектор $(\lambda \neq 0, \overline{a} \neq \overline{0})$:

1) $\lambda\overline{a} \parallel \overline{a}$;

2) $|\lambda\overline{a}| = |\lambda||\overline{a}|$;

3) $\lambda\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{a}$, якщо $\lambda > 0$,
$\lambda\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{a}$, якщо $\lambda < 0$



$$0\overline{a} = \lambda\overline{0} = \overline{0}$$

❸ *Критерій колінеарності векторів*. Вектор $\overline{b}$ колінеарний вектору $\overline{a} \neq \overline{0}$ тоді й лише тоді, коли існує таке число λ, що $\overline{b} = \lambda\overline{a}$.

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \overline{b} = \lambda\overline{a},\ \ \overline{a} \neq \overline{0}$$

❹ *Властивості лінійних дій над векторами*

① $\overline{a}+\overline{b} = \overline{b}+\overline{a}$;	⑤ $1\cdot\overline{a} = \overline{a}$, $(-\overline{a}) = (-1)\cdot\overline{a}$;
② $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c} = \overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$;	⑥ $\lambda\cdot(\mu\cdot\overline{a}) = (\lambda\mu)\cdot\overline{a}$;
③ $\overline{0}+\overline{a} = \overline{a}$;	⑦ $\lambda\cdot(\overline{a}+\overline{b}) = \lambda\cdot\overline{a}+\lambda\cdot\overline{b}$;
④ $\overline{a}+(-\overline{a}) = \overline{0}$	⑧ $(\lambda+\mu)\cdot\overline{a} = \lambda\cdot\overline{a}+\mu\cdot\overline{a}$

❺ *Векторний геометричний простір.* Множину геометричних векторів з означеними лінійними діями над векторами називають *векторним* (геометричним) *простором* $\mathbb{V}$.

❻ *Одиничний вектор.* Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називають *одиничним.*

❼ *Орт.* *Ортом* вектора $\overline{a}$ називають одиничний вектор $\overline{a}^0$, який однаково напрямлений з вектором $\overline{a}$.

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{|\overline{a}|}\overline{a}$$

$$\overline{a} = |\overline{a}|\overline{a}^0$$

3.4. Лінійна залежність (незалежність) векторів. Базис

❶ ***Лінійна комбінація векторів.*** *Лінійною комбінацією* векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ називають вектор $\overline{b} = \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{a}_n$.*

❷ ***Лінійна незалежність системи векторів.*** *Систему* векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_s$ називають *лінійно незалежною*, якщо з рівності

$$\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \ldots + \alpha_s\overline{a}_s = \overline{0}$$

випливає, що

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0.$$

❸ ***Лінійна залежність системи векторів.*** *Систему* векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_s$ називають *лінійно залежною*, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, які не дорівнюють одночасно нулю, що

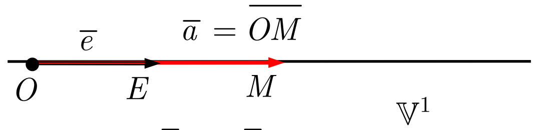
$$\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \ldots + \alpha_s\overline{a}_s = \overline{0}$$
$$\left(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_s| \neq 0\right).$$

❹ ***Критерій лінійної залежності векторів.*** Вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ лінійно залежні тоді й лише тоді, коли хоча б один з векторів лінійно виражається через решту.

① Нульовий вектор лінійно залежний. Будь-який ненульовий вектор лінійно незалежний.
② Колінеарні вектори лінійно залежні. Будь-які два неколінеарних вектори лінійно незалежні.
③ Компланарні вектори лінійно залежні. Будь-які три некомпланарних вектори лінійно незалежні.

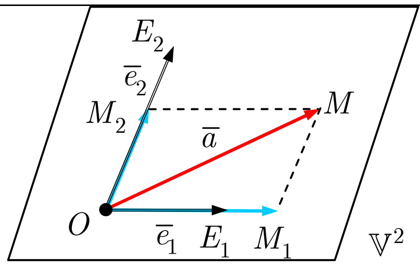
❺ ***Базис і вимірність векторного простору.*** *Базисом* векторного простору $\mathbb{V}$ називають будь-яку лінійно незалежну систему з найбільшою можливою кількістю векторів. Кількість векторів базису простору називають його *вимірністю.*

❻ Базис на прямій утворює будь-який ненульовий вектор $\overline{e}$. Будь-який вектор $\overline{a}$ прямої єдиним чином лінійно виражається через вектор $\overline{e}$.



$\overline{a} = a\overline{e}$

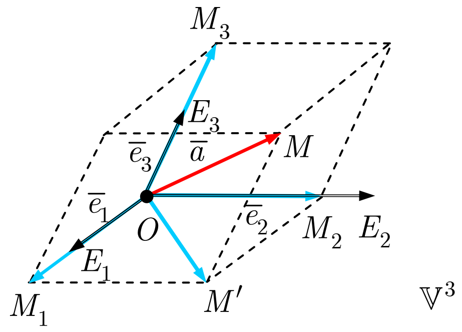
❼ Базис на площині утворює будь-яка впорядкована пара неколінеарних векторів $\overline{e}_1$ та $\overline{e}_2$. Будь-який вектор площини єдиним чином лінійно виражається через вектори базису $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$.



$\overline{a} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2$

---

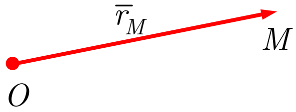
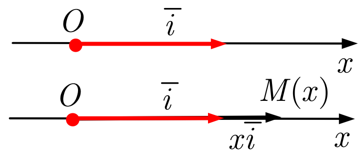
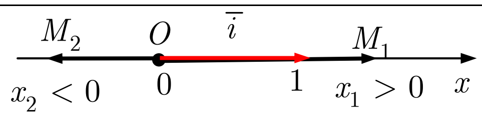
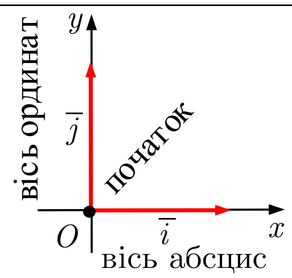
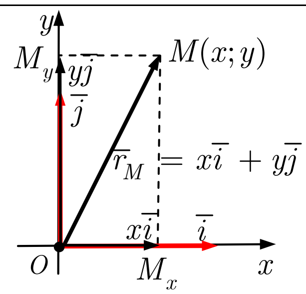
* Вектор $\overline{b}$ *лінійно виражається* через вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_s$.

❽ Базис у просторі утворює будь-яка впорядкована трійка некомпланарних векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ та $\bar{e}_3$. Будь-який вектор простору єдиним чином лінійно виражається через вектори базису $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.	 $\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3$

3.5. Координати вектора

❶ ***Розкладання вектора за базисом.*** Співвідношення $$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$$ називають *розкладом вектора* $\bar{x}$ *за базисом* $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Числа x_1, x_2, x_3 називають *координатами вектора* $\bar{x}$ у базисі $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.	❷ ***Координатний стовпець*** вектора $\bar{x}$. $$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow \bar{x} = \vec{x}_{\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}}$$
❸ ***Рівність векторів.*** Рівним векторам відповідають рівні координати.	$$\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}}$$
❹ ***Додавання (віднімання) векторів.*** Додаванню (відніманню) векторів відповідає додавання (віднімання) їхніх координат.	$$\bar{x} \pm \bar{y} = \begin{pmatrix} x_1 \pm y_1 \\ x_2 \pm y_2 \\ x_3 \pm y_3 \end{pmatrix}_{\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}}$$
❺ ***Множення вектора на число.*** Множенню вектора на число відповідає множення його координат на це число.	$$\lambda\bar{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}_{\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}}$$
❻ ***Умова колінеарності векторів.*** Координати колінеарних векторів у фіксованому базисі пропорційні.	$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \bar{x} \parallel \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \lambda$$
❼ Система векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ лінійно незалежна тоді й лише тоді, коли система їхніх координатних стовпців $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ у вибраному базисі лінійно незалежна.	

3.6. Прямокутна декартова система координат

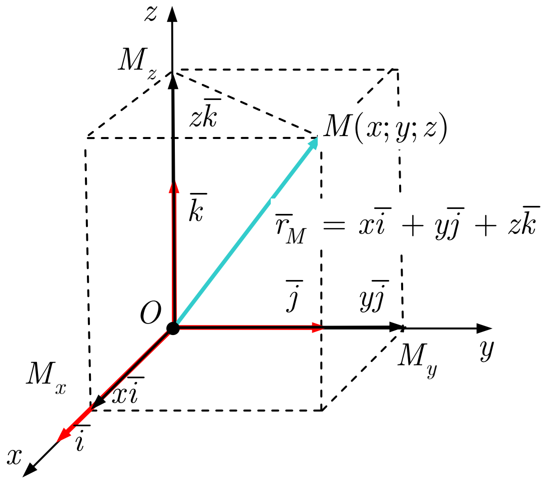
❶ ***Ортонормований базис.*** Базис називають *ортонормованим*, якщо його вектори попарно ортогональні і мають одиничну довжину. Розглядатимемо *правий* базис.	① $\bar{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_{\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}}, \bar{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \bar{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};$ ② $\bar{i} \perp \bar{j}, \bar{i} \perp \bar{k}, \bar{j} \perp \bar{k};$ ③ $\lvert\bar{i}\rvert = \lvert\bar{j}\rvert = \lvert\bar{k}\rvert = 1$
❷ ***Декартова система координат.*** *Декартовою системою координат* називають сукупність, що складається з фіксованої точки O (*початку координат*) і деякого базису.	❸ ***Прямокутна декартова система координат.*** Декартову систему координат з ортонормованим базисом називають *прямокутною декартовою системою координат* (ПДСК).
❹ ***Радіус-вектор.*** *Радіусом-вектором* точки M (відносно точки O) називають вектор $\bar{r}_M = \overline{OM}$.	
❺ ***Декартові координати.*** *Декартовими координатами* точки M називають координати її радіуса-вектора.	$\overline{OM} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \bar{x}_3\bar{e}_3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow M = M(x_1; x_2; x_3)$
❻ ***Система координат на прямій.*** Сукупність $\{O; \bar{i}\}$ точки O (початку координат) і базису з одиничного вектора $\bar{i}$ називають *декартовою системою координат на прямій.*	 
Пряму, на якій запроваджено систему координат, називають *координатною віссю Ox.*	
❼ ***ПДСК на площині.*** Сукупність $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ точки O (початку координат) і базису з ортонормованих векторів $\bar{i}$ та $\bar{j}$ називають *прямокутною декартовою системою координат* на площині. Осі координат: 1) *вісь абсцис* $Ox \parallel \bar{i}$; 2) *вісь ординат* $Oy \parallel \bar{j}$.	  $\bar{r}_M = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_{\{\bar{i},\bar{j}\}}$ $M = M(x; y)$ x — *абсциса;* y — *ордината*
Площину, на якій запроваджено систему координат, називають *координатною площиною Oxy.*	

❽ ***ПДСК у просторі.*** Сукупність $\{O;\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$ точки O (початку координат) і ортонормованого базису з векторів $\overline{i},\overline{j}$ та $\overline{k}$ називають *прямокутною декартовою системою координат* у просторі.

Осі координат:

1) *вісь абсцис* $Ox \parallel \overline{i}$;
2) *вісь ординат* $Oy \parallel \overline{j}$;
3) *вісь аплікат* $Oz \parallel \overline{k}$.

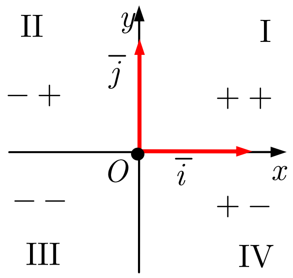
Координатні площини:
Oxy, Oyz, Oxz.



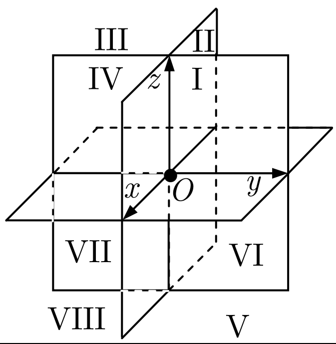
$$\overline{r}_M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}}$$

x — *абсциса*;
y — *ордината*;
z — *апліката*

❾ ***Чверті*** (квадранти)

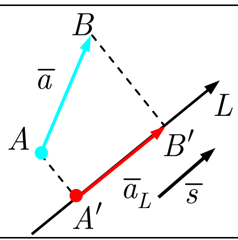


❿ ***Октанти***



3.7. Проекція вектора на вісь

❶ ***Векторна проекція.*** *Векторною проекцією* вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ *на вісь* L з напрямним вектором $\overline{s}$ називають вектор $\overline{a}_L = \overline{A'B'}$.



❷ ***Скалярна проекція.*** *Проекцією* вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ *на вісь* L з напрямним вектором $\overline{s}$ (*проекцією вектора на напрям вектора* $\overline{s}$) називають число

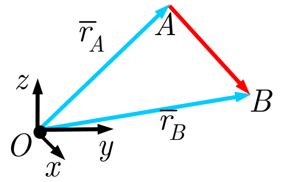
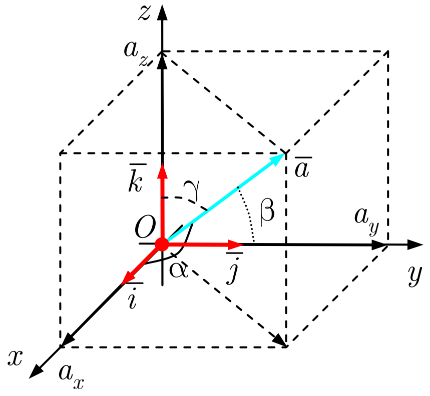
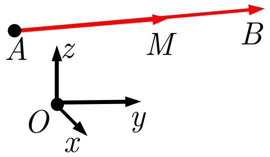
$$\mathrm{pr}_L\,\overline{a} = \mathrm{pr}_{\overline{s}}\,\overline{a} = \begin{cases} +\left|\overline{A'B'}\right|, & \text{якщо } \overline{s} \uparrow\uparrow \overline{A'B'}, \\ 0, & (\widehat{\overline{s},\overline{a}}) = \dfrac{\pi}{2}, \\ -\left|\overline{A'B'}\right|, & \text{якщо } \overline{s} \uparrow\downarrow \overline{A'B'}. \end{cases}$$

❸ ***Обчислення проекції вектора на вісь***

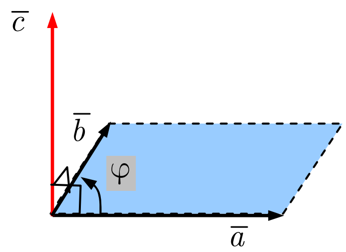
$$\mathrm{pr}_{\overline{s}}\,\overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cos(\widehat{\overline{a},\overline{s}})$$

❹ ***Властивості проекції вектора на вісь***	
① $\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow \mathrm{pr}_{\overline{s}}\,\overline{a} = \mathrm{pr}_{\overline{s}}\,\overline{b}$;	④ $\mathrm{pr}_{\overline{s}}\,\overline{a} < 0$, якщо $\overline{s} \uparrow\downarrow \overline{A'B'}$;
② $\mathrm{pr}_{\overline{s}}(\overline{a} + \overline{b}) = \mathrm{pr}_{\overline{s}}\,\overline{a} + \mathrm{pr}_{\overline{s}}\,\overline{b}$;	⑤ $\mathrm{pr}_{\overline{s}}\,\overline{a} = 0$, якщо $\overline{s} \perp \overline{a}$;
③ $\mathrm{pr}_{\overline{s}}(\lambda\overline{a}) = \lambda\,\mathrm{pr}_{\overline{s}}\,\overline{a}$;	⑥ $\mathrm{pr}_{\overline{s}}\,\overline{a} > 0$, якщо $\overline{s} \uparrow\uparrow \overline{A'B'}$

3.8. Застосування прямокутної декартової системи координат

❶ ***Координати вектора*** з початком $A(x_A; y_A; z_A)$ і кінцем $B(x_B; y_B; z_B)$ $\overline{AB} = \overline{r}_B - \overline{r}_A$.		$\overline{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
❷ ***Зв'язок між координатами і проекціями вектора.*** Координати вектора в ортонормованому базисі дорівнюють проекціям вектора на координатні осі. $\mathrm{pr}_{\overline{i}}\,\overline{a} = a_x$ $\mathrm{pr}_{\overline{j}}\,\overline{a} = a_y$ $\mathrm{pr}_{\overline{k}}\,\overline{a} = a_z$		
❸ ***Довжина*** вектора	$\left\|\overline{a}\right\| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}$	
Віддаль від A до B	$\left\|AB\right\| = \left\|\overline{AB}\right\|$	
❹ ***Напрямні косинуси*** вектора — косинуси кутів, утворених вектором з векторами базису.	$\cos\alpha = \dfrac{a_x}{\left\|\overline{a}\right\|},\ \cos\beta = \dfrac{a_y}{\left\|\overline{a}\right\|},\ \cos\gamma = \dfrac{a_z}{\left\|\overline{a}\right\|}$ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$	
❺ ***Координати орта*** вектора	$\overline{a}^0 = \dfrac{\overline{a}}{\left\|\overline{a}\right\|} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$	
❻ ***Координати точки поділу відрізка*** AB з кінцями $A(x_A; y_A; z_A)$ та $B(x_B; y_B; z_B)$. Кажуть, що точка M *поділяє* відрізок AB *у відношенні* $\lambda \neq -1$, якщо виконано співвідношення $\overline{AM} = \lambda\overline{MB}$.		$x = \dfrac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}$; $y = \dfrac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}$; $z = \dfrac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda}$, $\lambda \neq -1$
❼ Координати ***середини*** відрізка AB	$x = \dfrac{x_A + x_B}{2}, y = \dfrac{y_A + y_B}{2}, z = \dfrac{z_A + z_B}{2}$	

3.9. Означення добутків векторів

<table>
<tr><td rowspan="2">❶ Скалярний добуток. Скалярним добутком двох векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називають число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними і позначають $(\overline{a},\overline{b})$.*</td><td>$(\overline{a},\overline{b}) = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}})$</td></tr>
<tr><td>$(\overline{a} = \overline{0} \vee \overline{b} = \overline{0}) \Rightarrow (\overline{a},\overline{b}) = 0$</td></tr>
<tr><td>❷ Зв'язок скалярного добутку і скалярної проекції вектора</td><td>$(\overline{a},\overline{b}) = \left|\overline{a}\right|\mathrm{pr}_{\overline{a}}\,\overline{b} = \left|\overline{b}\right|\mathrm{pr}_{\overline{b}}\,\overline{a}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">❸ Векторний добуток. Векторним добутком вектора $\overline{a}$ на $\overline{b}$ називають вектор $\overline{c}$, який:
1) перпендикулярний до векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$;
2) завдовжки дорівнює добутку довжин векторів на синус кута між ними;
3) напрямлений так, що вектори $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ утворюють праву трійку.
Позначають $\overline{c} = [\overline{a},\overline{b}]$.**</td><td>
$\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin(\widehat{\overline{a},\overline{b}})$</td></tr>
<tr><td>$\overline{a} \parallel \overline{b} \Rightarrow [\overline{a},\overline{b}] = \overline{0}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">❹ Мішаний добуток векторів. Мішаним добутком векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ називають число — скалярний добуток векторного добутку векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ на вектор $\overline{c}$ і позначають $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$.</td><td>$([\overline{a},\overline{b}],\overline{c}) = (\overline{a},\overline{b},\overline{c})$</td></tr>
<tr><td>$\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ — компланарні $\Rightarrow (\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \overline{0}$</td></tr>
<tr><td>❺ Подвійний векторний добуток векторів. Подвійним векторним добутком векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ називають вектор,</td><td>що дорівнює векторному добутку вектора $\overline{a}$ на векторний добуток векторів $\overline{b}$ та $\overline{c}$ і позначають $[\overline{a},[\overline{b},\overline{c}]]$.</td></tr>
<tr><td>❻ Обчислення подвійного векторного добутку</td><td>$[\overline{a},[\overline{b},\overline{c}]]=\overline{b}(\overline{a},\overline{c}) - \overline{c}(a,\overline{b})$,
$\overline{b} \neq 0, \overline{c} \neq \overline{0}$</td></tr>
</table>

---

* Ще використовують позначення $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

** Ще використовують позначення $\overline{a} \times \overline{b}$.

3.10. Властивості добутків векторів

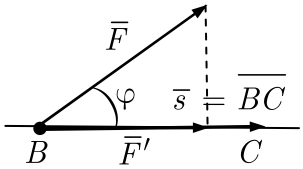
❶ ***Властивості скалярного добутку***	
① *комутативність*	$(\overline{a},\overline{b}) = (\overline{b},\overline{a})$
② *лінійність*	$(\alpha\overline{a} + \beta\overline{b},\overline{c}) = \alpha(\overline{a},\overline{c}) + \beta(\overline{b},\overline{c})$; $(\overline{a},\beta\overline{b} + \gamma\overline{c}) = \beta(\overline{a},\overline{b}) + \gamma(\overline{a},\overline{c})$
③ *додатна визначеність*	$(\overline{a},\overline{a}) = \lvert\overline{a}\rvert^2 \geq 0$, $(\overline{a},\overline{a}) = 0 \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{0}$
❷ ***Властивості векторного добутку***	
① *антикомутативність*	$[\overline{a},\overline{b}] = -[\overline{b},\overline{a}]$
② *лінійність*	$[\alpha\overline{a} + \beta\overline{b},\overline{c}] = \alpha[\overline{a},\overline{c}] + \beta[\overline{b},\overline{c}]$, $[\overline{a},\beta\overline{b} + \gamma\overline{c}] = \beta[\overline{a},\overline{b}] + \gamma[\overline{a},\overline{c}]$
③ *анулювання*	$[\overline{a},\overline{a}] = \overline{0}$
❸ ***Властивості мішаного добутку***	
① у мішаному добутку знаки векторного та скалярного добутків можна *міняти* місцями	$([\overline{a},\overline{b}],\overline{c}) = (\overline{a},[\overline{b},\overline{c}])$
② *циклічне переставляння* співмножників не змінює мішаного добутку	$([\overline{a},\overline{b}],\overline{c}) = ([\overline{c},\overline{a}],\overline{b}) = ([\overline{b},\overline{c}],\overline{a})$
③ *переставляння* двох співмножників змінює знак мішаного добутку	$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = -(\overline{b},\overline{a},\overline{c}) =$ $= -(\overline{c},\overline{b},\overline{a}) = -(\overline{a},\overline{c},\overline{b})$
④ мішаний добуток *лінійний* за будь-яким множником	$(\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2,\overline{b},\overline{c}) =$ $= \alpha_1(\overline{a}_1,\overline{b},\overline{c}) + \alpha_2(\overline{a}_2,\overline{b},\overline{c})$

3.11. Добутки векторів у координатній формі

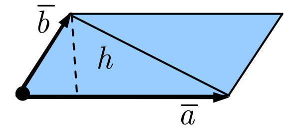
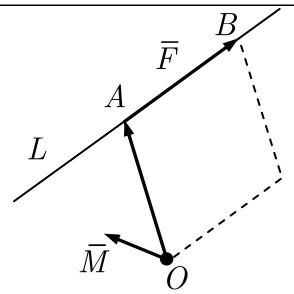
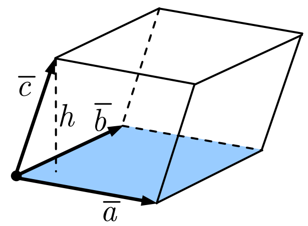
❶ ***Таблиця скалярного множення***	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|} (\,,) & \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \hline \overline{i} & 1 & 0 & 0 \\ \hline \overline{j} & 0 & 1 & 0 \\ \hline \overline{k} & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$
❷ ***Скалярний добуток*** векторів $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$, $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$	$(\overline{a},\overline{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

❸ ***Таблиця векторного множення*** (першим вибирають рядок)	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|} [\,,] & \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \hline \overline{i} & \overline{0} & \overline{k} & -\overline{j} \\ \hline \overline{j} & -\overline{k} & \overline{0} & \overline{i} \\ \hline \overline{k} & \overline{j} & -\overline{i} & \overline{0} \\ \hline \end{array}$ $\left[\overline{i},\overline{j}\right] = \overline{k}$
❹ ***Векторний добуток*** векторів $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$, $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$	$[\overline{a},\overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$
❺ ***Мішаний добуток*** векторів $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$, $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$, $\overline{c} = c_x\overline{i} + c_y\overline{j} + c_z\overline{k}$	$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

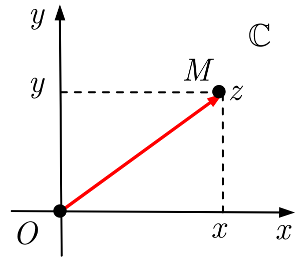
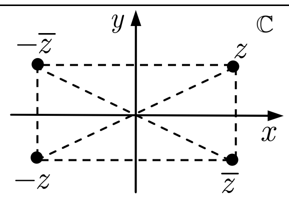
3.12. Застосування скалярного добутку векторів

❶ ***Довжина*** вектора	$\left\|\overline{a}\right\| = \sqrt{(\overline{a},\overline{a})}$
❷ ***Кут*** між ненульовими векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$	$\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \dfrac{(\overline{a},\overline{b})}{\left\|\overline{a}\right\|\left\|\overline{b}\right\|}$; $(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \arccos\dfrac{(\overline{a},\overline{b})}{\left\|\overline{a}\right\|\left\|\overline{b}\right\|}$
❸ ***Проекція*** вектора $\overline{b}$ на напрям вектора $\overline{a}$	$\mathrm{pr}_{\overline{a}}\,\overline{b} = \dfrac{(\overline{a},\overline{b})}{\left\|\overline{a}\right\|}$
❹ ***Критерій ортогональності.*** Два вектори ортогональні тоді й лише тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю.	$\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow (\overline{a},\overline{b}) = 0$
❺ ***Робота*** сили $\overline{F}$ під час переміщення $\overline{s}$	 $A = \left\|\overline{F}\right\|\cos\varphi\cdot\left\|\overline{s}\right\| = (\overline{F},\overline{s})$

3.13. Застосування векторного та мішаного добутків

<table>
<tr><td rowspan="2">❶ Площа паралелограма (трикутника), побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$</td><td colspan="2">$S_{\square} = \left|[\overline{a},\overline{b}]\right|$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$S_{\triangle} = \dfrac{1}{2}\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|$</td></tr>
<tr><td>❷ Висота паралелограма (трикутника), опущена на сторону $\overline{a}$</td><td>$h_a = \dfrac{\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|}{\left|\overline{a}\right|}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>❸ Критерій колінеарності.
Два вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ колінеарні тоді й лише тоді, коли їхній векторний добуток є нульовим вектором.</td><td colspan="2">$\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow [\overline{a},\overline{b}] = \overline{0}$</td></tr>
<tr><td>❹ Момент $\overline{M}$ сили $\overline{F}$ відносно точки O</td><td>$\overline{M}_O(\overline{F}) = [\overline{OA},\overline{F}]$</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">❺ Об'єм паралелепіпеда (тетраедра) побудованого на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$</td><td>$V_{\text{пар}} = \left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|,$</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>$V_{\text{тетр}} = \dfrac{1}{6}\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|$</td></tr>
<tr><td>❻ Висота паралелепіпеда (тетраедра), побудованого на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$, на основу, яку утворюють вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$</td><td>$h = \dfrac{\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|}{\left|[a,\overline{b}]\right|}$</td></tr>
<tr><td>❼ Взаємна орієнтація векторів.
① Якщо $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) > 0$, то вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ утворюють праву трійку.
② Якщо $(\overline{a},b,\overline{c}) < 0$, то вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ утворюють ліву трійку.</td><td colspan="2">$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) > 0 \Rightarrow \overline{a},\overline{b},\overline{c}$ – права трійка;
$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) < 0 \Rightarrow \overline{a},\overline{b},\overline{c}$ – ліва трійка</td></tr>
<tr><td>❽ Критерій компланарності.
Вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ компланарні тоді й лише тоді, коли $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = 0$.</td><td colspan="2">$\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ – компланарні $\Leftrightarrow (\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = 0$</td></tr>
</table>

3.14. Комплексні числа

❶ ***Комплексне число.*** *Комплексним числом* z називають упорядковану пару $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ дійсних чисел x та y. x — *дійсна частина*, $x = \operatorname{Re} z$ y — *уявна частина*, $y = \operatorname{Im} z$*	Комплексне число z зображують точкою $M(x; y)$ або радіусом-вектором $\overline{OM}$. 
❷ ***Алгебрична форма*** комплексного числа	$z = x + iy$ $i^2 = -1$
❸ ***Рівність*** комплексних чисел**	$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2 \end{cases}$
❹ ***Сума (різниця)*** комплексних чисел	$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$
❺ ***Добуток*** комплексних чисел	$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
❻ ***Натуральний степінь*** комплексного числа	$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n}$ $i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1$
❼ ***Спряжене*** до комплексного числа	$\overline{z} = x - iy$ 
❽ ***Частка*** комплексних чисел	$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2}$
❾ Арифметичні дії над комплексними числами в алгебричній формі можна проводити як з алгебричними виразами, ураховуючи, що $i^2 = -1$.	
❿ ***Множина комплексних чисел.*** Множину всіх комплексних чисел з означеними рівністю, додаванням і множенням називають *множиною комплексних чисел* і позначають $\mathbb{C}$.	Правдиві включення: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

* Дійна та уявна частини комплексного числа дійсні числа.

** Поняття «більше» та «менше» для комплексних чисел не означують.

3.15. Полярна система координат

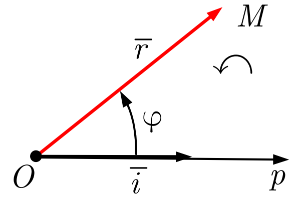
❶ *Полярна система координат.*

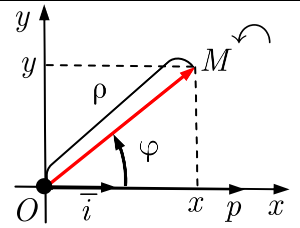
Полярну систему координат задає:

1) точка O — *полюс*;

2) промінь, орієнтований одиничним вектором $\overline{i}$,— *полярна вісь*;

3) *додатний напрям* відліку кутів (проти годинникової стрілки).





Полярні координати:

ρ — *полярний радіус* ($\rho \geq 0$);

φ — *полярний кут*.

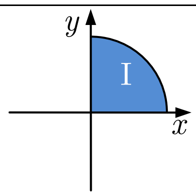
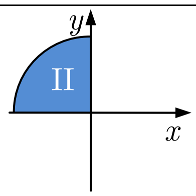
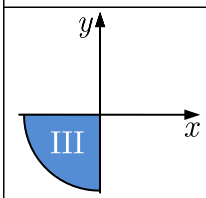
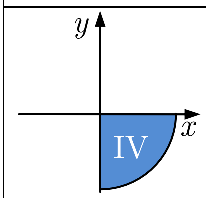
❷ *Зв'язок* між декартовими координатами і полярними координатами

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \rho^2;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi : \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

❸ *Головне значення* φ_0 полярного кута $(-\pi < \varphi_0 \leq \pi; \varphi = \varphi_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$

	$x > 0, y = 0$	$\varphi = 0$
	$x > 0, y > 0$	$\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \arccos\dfrac{x}{\rho}$
	$x = 0, y > 0$	$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$
	$x < 0, y > 0$	$\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \arccos\dfrac{x}{\rho}$
	$x < 0, y = 0$	$\varphi = \pi$
	$x < 0, y < 0$	$\varphi = -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = -\arccos\dfrac{x}{\rho}$
	$x = 0, y < 0$	$\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$
	$x > 0, y < 0$	$\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = -\arccos\dfrac{x}{\rho}$

3.16. Дії над комплексними числами у тригонометричній і показниковій формах

❶ ***Тригонометрична*** (***показникова***) форма комплексного числа	$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$
❷ ***Ойлерова*** формула	$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
	$e^{\pi i} + 1 = 0$
❸ ***Модуль*** комплексного числа	$\lvert z\rvert = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
	$z\overline{z} = \lvert z\rvert^2$
❹ ***Аргумент*** комплексного числа	$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
	$\arg z$ — *головне значення* $\operatorname{Arg} z$, $\arg z \in (-\pi; \pi]$
❺ ***Добуток*** комплексних чисел	$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
❻ ***Спряжене*** комплексне число	$\overline{z} = \rho(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = \rho e^{-i\varphi}$
❼ ***Частка*** комплексних чисел	$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
❽ ***Натуральний степінь*** комплексного числа (***Муаврова*** формула)	$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho^n e^{in\varphi}$, $n \in \mathbb{N}$
❾ ***Корінь*** з комплексного числа	$\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}$, $k = \overline{0, n-1}, n \in \mathbb{N}$
	Усі значення $\sqrt[n]{z}$ розташовані у вершинах правильного n-кутника

Практикум 3.1. Вектори

Навчальні задачі

3.1.1.1. Вектори $\overline{AD}, \overline{BE}$ та $\overline{CF}$ — медіани ΔABC. Довести, що $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \overline{0}$.

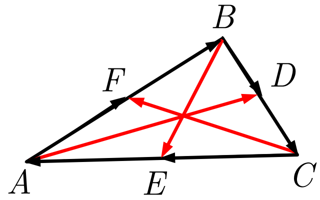


Рис. до 3.1.1.1

***Розв'язання.* [3.3.1, 3.3.2.]**

$$\overline{AD} \overset{\textcircled{1}}{=} \overline{AB} + \overline{BD} \overset{\textcircled{2}}{=} \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC};$$

$$\overline{BE} = \overline{BC} + \overline{CE} = \overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CA};$$

$$\overline{CF} = \overline{CA} + \overline{AF} = \overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB}.$$

Додаємо рівності:

$$\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \frac{3}{2}\left(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}\right) \overset{\textcircled{3}}{=} \frac{3}{2} \cdot \overline{0} = \overline{0}.$$

Коментар. ① Використовуємо правило трикутника додавання векторів.
② За означенням медіани (D — середина сторони BC) і множення вектора на число.
③ За правилом замикача.

3.1.1.2. M — точка перетину медіан ΔABC, O — довільна точка простору. Довести, що

$$\overline{OM} = \frac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\right).$$

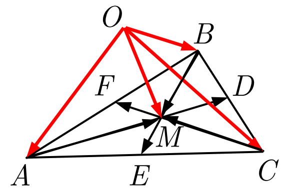


Рис. до 3.1.1.2

***Розв'язання.* [3.3.1, 3.3.2.]**

$$\overline{OM} \overset{\textcircled{1}}{=} \overline{OA} + \overline{AM} \overset{\textcircled{2}}{=} \overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{AD};$$

$$\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{BM} = \overline{OB} + \frac{2}{3}\overline{BE};$$

$$\overline{OM} = \overline{OC} + \overline{CM} = \overline{OC} + \frac{2}{3}\overline{CF}.$$

Додаємо рівності:

$$3\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \underbrace{\frac{2}{3}\left(\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF}\right)}_{\textit{скористаємось результатом задачі 3.1.1.1}} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

$$\overline{OM} = \frac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\right).$$

Коментар. ① Використовуємо правило трикутника додавання векторів. ② За властивістю медіан трикутника (вони поділяються спільною точкою перетину у відношенні $2:1$) і множення вектора на число.

3.1.2. Яку умову мають справджувати ненульові вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$, щоб виконувалась рівність $\left|\overline{a}+\overline{b}\right| = \left|\overline{a}-\overline{b}\right|$?

Розв'язання. [3.3.1.]

Побудуймо на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$, відкладених від точки O, паралелограм $OADB$.

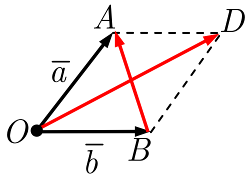


Рис. до 3.1.2

Тоді

$$\overline{OD} = \overline{a} + \overline{b},\ \overline{BA} = \overline{a} - \overline{b}.$$

Рівність

$$\left|\overline{a}+\overline{b}\right| = \left|\overline{a}-\overline{b}\right|$$

означає, що довжини діагоналей паралелограма рівні. Отже, цей паралелограм є прямокутником і вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ перпендикулярні.

3.1.3. Задано: $\Delta ABC, \overline{AM} = \alpha\overline{AB}, \quad \overline{AN} = \beta\overline{AC}$. Знайти при яких значеннях α та β вектори $\overline{MN}$ та $\overline{BC}$ — колінеарні.

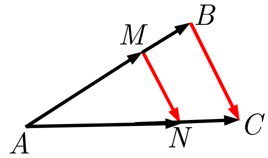


Рис. до 3.1.3

Розв'язання. [3.4.7, 3.5.6.]

Виражаємо вектори $\overline{BC}$ та $\overline{MN}$ через пару неколінеарних векторів $\overline{AB}, \overline{AC}$, які утворюють базис у множині всіх векторів площини:

$$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{\overline{AB},\overline{AC}\}};$$

$$\overline{MN} = \overline{AN} - \overline{AM} = \beta\overline{AC} - \alpha\overline{AB} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix}_{\{\overline{AB},\overline{AC}\}}.$$

З колінеарності векторів $\overline{BC}$ та $\overline{MN}$ випливає, що

$$\frac{-1}{-\alpha} = \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

3.1.4. У просторі задано вектори $\overline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ та $\overline{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Знайдіть вектори $-\overline{a}$ та $2\overline{a} - 3\overline{b}$.

Розв'язання. [3.5.4, 3.5.5.]

$$-\overline{a} = (-1)\overline{a} \overset{①}{=} \begin{pmatrix} (-1)\cdot 4 \\ (-1)\cdot(-1) \\ (-1)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$2\overline{a} - 3\overline{b} \overset{①}{=} 2\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4 - 3\cdot(-9) \\ 2\cdot(-1) - 3\cdot 0 \\ 2\cdot 2 - 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Коментар. ① Лінійним діям над векторами відповідають лінійні дії над їхніми стовпцями координат у фіксованому базисі.

3.1.5 З'ясуйте для яких значень l та m колінеарні вектори

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} l \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ та } \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -3 \end{pmatrix}?$$

Розв'язання. [3.5.6.]

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \frac{l}{1} = \frac{-2}{m} = \frac{6}{-3} \Leftrightarrow \begin{cases} -3l = 6, \\ 6m = 6 \end{cases} \Leftrightarrow l = -2, m = 1.$$

Вектори колінеарні для $l = -2, m = 1$.

3.1.6. З'ясуйте, для яких значень λ вектори $\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \overline{c} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ компланарні?

Розв'язання. [3.5.7, 3.4.4.]

[***Крок 1.*** *Записуємо матрицю з координатних стовпців.*]

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

[***Крок 2.*** *Знаходимо ранг матриці методом Ґауса*①.]

$$A=\begin{pmatrix}2&-3&\lambda\\1&1&1\\3&-2&8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\3&-2&8\\2&-3&\lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-5&5\\0&-5&\lambda-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-5&5\\0&0&\lambda-7\end{pmatrix}.$$

Для того щоб $\operatorname{rang}A<3$ необхідно, щоб

$$\lambda-7=0\Leftrightarrow\lambda=7.$$

Вектори компланарні, якщо $\lambda=7$.

Коментар. ① Вектори $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ компланарні тоді й лише тоді, коли ранг матриці, утвореної їхніми координатними стовпцями буде менший, ніж 3.

3.1.7. Задано вектори $\overline{a}=\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix},\overline{b}=\begin{pmatrix}2\\2\\-5\end{pmatrix},\ \overline{c}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\ \overline{l}=\begin{pmatrix}-3\\0\\12\end{pmatrix}$. Перевірити, що вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ утворюють базис у просторі і знайти координати вектора $\overline{l}$ у базисі $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$.

Розв'язання. [3.4.8, 3.5.1, 3.5.7.]

[*Записуємо СЛАР у векторному вигляді.*] ①

$$x_1\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\2\\-5\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\12\end{pmatrix}.$$

І спосіб.

[***Крок 1.*** *Записуємо розширену матрицю системи.*]

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&-1&-3\\1&2&1&0\\-1&-5&1&12\end{array}\right).$$

[***Крок 2.*** *Зводимо її до східчастого вигляду.*]

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&-1&5\\1&2&1&4\\-1&-5&1&-5\end{array}\right)\overset{②}{\sim}\ldots\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&-3&2&12\\0&0&-9&-27\end{array}\right).$$

[***Крок 3.*** *Висновуємо про лінійну незалежність (залежність) векторів* $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ *.*]

Оскільки $\operatorname{rang}A=3$, то вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ — лінійно незалежні і утворюють базис серед усіх векторів простору.

[***Крок 4.*** *За допомогою зворотного ходу методу Ґауса знаходимо координати вектора* $\overline{l}$ *у базисі* $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{l} = \overline{a} - 2\overline{b} + 3\overline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}}.$$

II спосіб.

[***Крок 1.*** *Записуємо матрицю системи.*]

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

[***Крок 2.*** *Обчислюємо її визначник.*]

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 27 \neq 0.$$

[***Крок 3.*** *Висновуємо про лінійну незалежність векторів* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.] Оскільки матриця невироджена, то вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ — лінійно незалежні і утворюють базис серед усіх векторів простору.

[***Крок 4.*** *Розв'язуємо систему за правилом Крамера.*]

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 12 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 27;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 12 & 1 \end{vmatrix} = -54;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & 12 \end{vmatrix} = 81.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{27}{27} = 1; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-54}{27} = -2; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{81}{27} = 3.$$

[***Крок 5.*** *Записуємо відповідь.*]

$$\overline{l} = \overline{a} - 2\overline{b} + 3\overline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}}$$

Коментар. ① Для того щоб трійка векторів $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ тривимірного простору утворювала базис простору, необхідно й досить, щоб вона була лінійно незалежною. Отже, щоб ранг матриці A утвореної з їхніх координатних стовпців, дорівнював трьом (матриця була невиродженою).

Тоді вектор $\overline{l}$ однозначно розкладається за базисом $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$:

$$x_1\overline{a} + x_2\overline{b} + x_3\overline{c} = \overline{l}.$$

Оскільки лінійним діям над векторами відповідає лінійні дії над їхніми координатами (координатними стовпцями), то

$$x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{l}.$$

Дістали СЛАР, записану у векторному вигляді.

Дослідити лінійну незалежність стовпців $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ і розв'язати СЛАР можна, застосовуючи до системи метод Ґауса — Йордана або метод Крамера.

② Зведення матриці до східчастого вигляду див. у **2.3.3.**

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

3.1.8. На рис. 1 зображено вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$. Який з цих векторів є сумою? різницею решти?

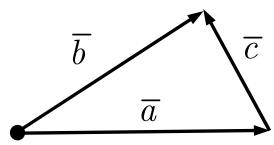


Рис. 1 до 3.1.8

3.1.9. 1. Відомо, що $\dfrac{|AC|}{|CB|} = \dfrac{3}{4}$. Виразіть вектор $\overline{AC}$ через $\overline{AB}$, якщо $\overline{AC} \uparrow\downarrow \overline{AB}$.

2. Відомо, що $\dfrac{|AC|}{|CB|} = \dfrac{4}{3}$. Виразіть вектор $\overline{AC}$ через $\overline{AB}$, якщо $\overline{AC} \uparrow\uparrow \overline{AB}$.

3.1.10. 1. У трикутнику ABC задано $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{b}$, точка M — середина сторони BC. Виразіть вектор $\overline{c} = \overline{AM}$ через вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

2. У трикутнику ABC задано $\overline{AM} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{b}$, M — точка перетину медіан трикутника. Розкладіть вектори $\overline{p} = \overline{AB}$ та $\overline{q} = \overline{BC}$ за векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

3.1.11. Точка O — центр правильного шестикутника $ABCDEF$. Знайдіть розклади векторів $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$ за векторами $\overline{p} = \overline{OE}, \overline{q} = \overline{OF}$.

3.1.12. На стороні AD паралелограма $ABCD$ відкладено вектор $\overline{a} = \overline{AK}$ завдовжки $\left|\overline{AK}\right| = \dfrac{1}{5}\left|\overline{AD}\right|$, а на діагоналі AC — вектор $\overline{b} = \overline{AL}$ завдовжки $\left|\overline{AL}\right| = \dfrac{1}{6}\left|\overline{AC}\right|$. Доведіть, що вектори $\overline{p} = \overline{KL}$ та $\overline{q} = \overline{LB}$ колінеарні.

3.1.13. У трикутнику ABC: $\overline{AM} = \alpha\overline{AB}$ і $\overline{AN} = \beta\overline{AC}$. Виразити вектори $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$ через неколінеарні вектори $\overline{a} = \overline{MN}$ та $\overline{b} = \overline{BC}$.

3.1.14. Задано три некомпланарних вектори $\overline{a}, \overline{b}$ та $\overline{c}$:

1) доведіть, що вектори $\overline{a} + 2\overline{b} - \overline{c}$, $3\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$, $-\overline{a} + 5\overline{b} - 3\overline{c}$ компланарні;

2) знайдіть значення λ, при якому вектори $\lambda\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$, $\overline{a} + \lambda\overline{b} + \overline{c}$, $\overline{a} + b + \lambda\overline{c}$ компланарні;

3) знайдіть значення λ та μ, за яких вектори $\lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \overline{c}$ та $\overline{a} + \lambda\overline{b} + \mu\overline{c}$ колінеарні.

3.1.15. Задано вектори $\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Знайдіть координати векторів:

1) $\overline{a} + \overline{b}, 2\overline{a}, -\overline{c}, 2\overline{a} + 3\overline{b} - \overline{c}$; 2) $\overline{a} - \overline{b}, 3\overline{b}, -\overline{a}, 16\overline{a} + 5\overline{b} - 9\overline{c}$.

3.1.16. Задано вектори $\overline{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Знайдіть вектори:

1) $-\overline{b}, 2\overline{a} + \overline{b}$; 2) $-\overline{a}, \overline{a} - 2\overline{b}$.

3.1.17. Задано вектори $\overline{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Підберіть відмінні від нуля числа α, β, γ так, щоб $\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c} = \overline{0}$.

3.1.18. Задано чотири вектора $\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \overline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \overline{d} = \begin{pmatrix} -20 \\ 27 \\ -35 \end{pmatrix}$.

Підберіть числа α, β, γ так, щоб $\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c} + \overline{d} = \overline{0}$.

3.1.19. З'ясуйте, чи є система векторів, заданих координатами в деякому базисі, лінійно залежною:

1) $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; 2) $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

3) $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$; 4) $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$;

5) $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; 6) $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3.1.20. Переконайтесь, що $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ — базис у множині всіх векторів на площині. Знайдіть розклад вектора $\overline{a}$ за базисом $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$, якщо:

1) $\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; 2) $\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

3.1.21. Переконайтесь, що $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ — базис у множині всіх векторів у просторі. Знайдіть розклад вектора $\overline{a}$ за базисом $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$, якщо:

1) $\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

2) $\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.1.22. З'ясуйте, для яких значень l та m колінеарні вектори:

1) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ l \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ m \end{pmatrix}$; 2) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ l \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -m \\ 4 \end{pmatrix}$;

3.1.23. З'ясуйте, чи є вектор $\overline{d}$ лінійною комбінацією векторів:

1) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

2) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3.1.24. З'ясуйте, при якому значенні λ компланарні вектори:

1) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \overline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \lambda \end{pmatrix}$; 2) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \lambda \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix}$.

3.1.25. На матеріальну точку діють дві сили $\overline{F_1} = 2\overline{a}$ і $\overline{F_2} = 3\overline{b}$, де $\overline{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Знайдіть рівнодійну цих сил.

Відповіді

3.1.8. $\overline{b} = \overline{a} + \overline{c}, \overline{c} = \overline{b} - \overline{a}, \overline{a} = \overline{b} - \overline{c}$. **3.1.9.** 1) $\overline{AC} = -3\overline{AB}$; 2) $\overline{AC} = 4\overline{AB}$.

3.1.10. 1) $\overline{c} = \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}$; 2) $\overline{p} = 3\overline{a} - \overline{b}, \overline{q} = 2\overline{b} - 3\overline{a}$.

3.1.11. $\overline{OA} = \overline{q} - \overline{p}, \overline{OB} = -\overline{p}, \overline{OC} = -\overline{q}, \overline{OD} = \overline{p} - \overline{q}$.

3.1.12. $\overline{LB} = 5\overline{KL}$. **3.1.13.** $\overline{AB} = \frac{\beta\overline{b} - \overline{a}}{\alpha - \beta}, \overline{AC} = \frac{\alpha\overline{b} - \overline{a}}{\alpha - \beta}$.

3.1.14. 2) $\lambda \in \{1, -2\}$; 3) $\lambda = \mu = 1$.

3.1.15. 1) $\overline{a} + \overline{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, 2\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, -\overline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, 2\overline{a} + 3\overline{b} - \overline{c} = \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \end{pmatrix}$;

2) $\overline{a} - \overline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, 3\overline{b} = \begin{pmatrix} -15 \\ -3 \end{pmatrix}, -\overline{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, 16\overline{a} + 5\overline{b} - 9\overline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.1.16. 1) $-\overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, 2\overline{a} + \overline{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$; 2) $-\overline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \overline{a} - 2\overline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$.

3.1.17. $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = -3$. **3.1.18.** $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 5$.

3.1.19. 2)—5) лінійно залежна; 1, 6) лінійно незалежна.

3.1.20. 1) $\overline{a} = -\frac{4}{5}\overline{e}_1 - \frac{2}{5}\overline{e}_2$; 2) $\overline{a} = \overline{e}_1 - \overline{e}_2$.

3.1.21. 1) $\overline{a} = 2\overline{e}_1 - \overline{e}_2 - \overline{e}_3$; 2) $\overline{a} = 2\overline{e}_2 + 2\overline{e}_3$.

3.1.22. 1) $l = -2; m = -2$; 2) $l = 12; m = -3$. **3.1.23.** 1) так; 2) ні.

3.1.24. 1) $\lambda = -6$; 2) $\lambda = -1$.

3.1.25. $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 = \begin{pmatrix} 13 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Практикум 3.2. Прямокутна декартова система координат

Навчальні задачі

3.2.1. Задано дві точки $A(-3;7)$ та $B(5;11)$.

3.2.1.1. Знайти координати вектора $\overline{a} = \overline{AB}$.

Розв'язання. [3.8.1.]

$$\overline{a} \overset{①}{=} \begin{pmatrix} 5-(-3) \\ 11-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Коментар. ① Щоб знайти координати вектора, віднімаємо від координат кінця вектора координати початку.

3.2.1.2. Знайти віддаль між точками A та B.

Розв'язання. [3.8.3.]

$$|AB| = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(5-(-3))^2 + (11-7)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

3.2.1.3. Знайти координати точки D, яка поділяє відрізок AB у відношенні $\lambda = 3$.

Розв'язання. [3.8.6.]

$$x_D = \frac{-3 + 3 \cdot 5}{1+3} = \frac{12}{4} = 3; \; y_D = \frac{7 + 3 \cdot 11}{1+3} = \frac{40}{4} = 10 \Leftrightarrow D(3;10).$$

3.2.1.4. Знайти координати точки C — середини відрізка AB.

Розв'язання. [3.8.7.]

$$x_C = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1;\ y_C = \frac{7+11}{2} = \frac{18}{2} = 9 \Leftrightarrow C(1;9).$$

3.2.2. Знайти $\text{pr}_{\overline{b}}\,\overline{a}$, якщо $\left|\overline{a}\right| = 2, (\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. [3.7.3.]

$$\text{pr}_{\overline{b}}\,\overline{a} = 2\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

3.2.3. Задано вектор $\overline{a} = -\overline{i} + 2\overline{k}$.

3.2.3.1. Записати координатний стовпець вектора $\overline{a}$ і знайти проекції вектора на осі координат.

Розв'язання. [3.5.2, 3.8.2.]

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} \text{pr}_{\overline{i}}\,\overline{a} &= -1, \\ \text{pr}_{\overline{j}}\,\overline{a} &= 0, \\ \text{pr}_{\overline{k}}\,\overline{a} &= 2. \end{aligned}$$

3.2.3.2. Знайти $\left|\overline{a}\right|$, орт вектора $\overline{a}^0$, напрямні косинуси вектора $\overline{a}$.

Розв'язання. [3.8.3—3.8.5.]

$$\left|\overline{a}\right| \overset{[3.8.3]}{=} \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

$$\overline{a}^0 \overset{[3.8.5]}{=} \frac{1}{\left|\overline{a}\right|}\overline{a} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\overline{a},\overline{i}}) = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos\beta = \cos(\widehat{\overline{a},\overline{j}}) = 0,$$

$$\cos\gamma = \cos(\widehat{\overline{a},\overline{k}}) = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

3.2.4. Знайти координати вектора $\overline{a}$, якщо $\left|\overline{a}\right| = 4$ і кути, які він утворює з осями координат $\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. [3.8.4.]

$$\left.\begin{aligned} a_x &= |\overline{a}|\cos\alpha = 4\cdot\cos\frac{2\pi}{3} = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2;\\ a_y &= |\overline{a}|\cos\beta = 4\cdot\cos\frac{\pi}{4} = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2};\\ a_z &= |\overline{a}|\cos\gamma = 4\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 4\cdot\frac{1}{2} = 2 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \overline{a} = \begin{pmatrix} -2\\ 2\sqrt{2}\\ 2 \end{pmatrix}.$$

3.2.5. Від точки O відкладено два вектори $\overline{a} = \overline{OA}$ та $\overline{b} = \overline{OB}$. Знайти будь-який вектор $\overline{OM}$, який напрямлений уздовж бісектриси кута AOB.

Розв'язання. [3.3.7.]

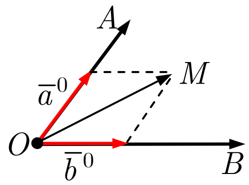


Рис. до 3.2.5

Знайдімо орти $\overline{a}^0 = \dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$ та $\overline{b}^0 = \dfrac{\overline{b}}{|\overline{b}|}$ і на них, як на сторонах побудуймо ромб. Діагональ ромба — шуканий вектор $\overline{OM} = \overline{a}^0 + \overline{b}^0$.

3.2.6. Задано три послідовних вершини паралелограма: $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(6;4;4)$. Знайти його четверту вершину.

Розв'язання.

Нехай вершина $D(x;y;z)$. Оскільки $ABCD$ — паралелограм, то $\overline{BC} = \overline{AD}$.

Знаходимо координати векторів $\overline{BC}$ та $\overline{AD}$:

$$\overline{BC} \overset{[3.8.1]}{=} \begin{pmatrix} 3\\ 2\\ 3 \end{pmatrix},\ \overline{AD} = \begin{pmatrix} x-1\\ y+2\\ z-3 \end{pmatrix}.$$

З рівності векторів $\overline{BC}$ та $\overline{AD}$ випливає, що

$$\begin{pmatrix} 3\\ 2\\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1\\ y+2\\ z-3 \end{pmatrix} \overset{[3.5.3]}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-1=3,\\ y+2=2,\\ z-3=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4,\\ y=0,\\ z=6 \end{cases} \Rightarrow D(4;0;6).$$

3.2.7. Задано дві вершини $A(1;3;5)$, $B(-1;2;1)$ паралелограма $ABCD$ і точка перетину його діагоналей $E(1;0;1)$. Знайдіть дві інших вершини паралелограма.

Розв'язання.

Оскільки $1 \neq \frac{1}{2}(1-1) = 0$, то точка E — не є серединою відрізка AB. Отже, A та B — суміжні вершини.

Точка C поділяє відрізок AE зовнішнім чином у відношенні $\lambda = -2$:

$$\begin{aligned} x_C &\overset{[3.8.6]}{=} 2x_E - x_A = 1; \\ y_C &= 2y_E - y_A = -3; \\ z_C &= 2z_E - z_A = -3. \end{aligned}$$

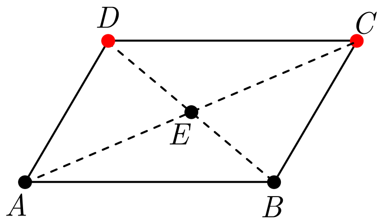


Рис. до 3.2.7

Отже, $C(1;-3;-3)$.

[*Координати точки D знаходять так само.*] $D(3;-2;1)$.

3.2.8. З'ясувати, чи лежать на одній прямій три точки $A(1;2;3), B(4;0;5), C(10;-4;9)$.

Розв'язання. [3.5.6.]

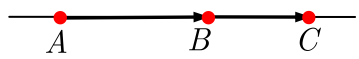


Рис. до 3.2.8

Точки A, B, C лежатимуть на одній прямій, тоді й лише тоді, коли вектори $\overline{AB}$ та $\overline{BC}$ колінеарні.

[*Знаходимо координати векторів* $\overline{AB}$ та $\overline{BC}$.]

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Оскільки,

$$\frac{3}{6} = \frac{-2}{-4} = \frac{2}{4},$$

то $\overline{AB} \parallel \overline{BC}$ і точки A, B та C лежать на одній прямій.

3.2.9. Знайдіть вектор $\overline{x}$, колінеарний вектору $\overline{a} = 12\overline{i} + 3\overline{i} - 4\overline{k}$, який має довжину $|\overline{x}| = 26$ і утворює з ортом $\overline{k}$ гострий кут.

Розв'язання. [3.5.6, 3.8.3, 3.8.4.]

Оскільки вектор $\overline{x}$ колінеарний вектору $\overline{a}$, то існує таке число λ, що

$$\overline{x} = \lambda\overline{a} \Leftrightarrow \overline{x} = \begin{pmatrix} 12\lambda \\ 3\lambda \\ -4\lambda \end{pmatrix}.$$

$$|\overline{x}| = \sqrt{(12\lambda)^2 + (3\lambda)^2 + (-4\lambda)^2} = \sqrt{144\lambda^2 + 9\lambda^2 + 16\lambda^2} = \sqrt{169\lambda^2} = 13|\lambda|.$$

Отже,

$$13|\lambda| = 26 \Leftrightarrow |\lambda| = 2 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2.$$

Маємо відповідно два вектори, які справджують перші дві умови:

$$\overline{x}_1 = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}, \overline{x}_2 = \begin{pmatrix} -24 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $0 < (\widehat{\overline{x}, \overline{k}}) < \dfrac{\pi}{2}$, то $\cos(\widehat{\overline{x}, \overline{k}}) > 0$ і 3-я координата вектора $\overline{x}$ додатна. Отже,

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} -24 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

3.2.10. Для точок A, B, C, D знайдіть координати:

а) проекцій на вісь абсцис; б) проекцій на вісь ординат;

в) точок, симетричних указаним точкам відносно осі абсцис;

г) точок, симетричних указаним точкам відносно осі ординат;

ґ) точок, симетричних указаним точкам відносно точки $O(0;0)$;

д) точок, симетричних указаним точкам відносно бісектрисі 1-ої чверті, якщо:

1) $A(1;2), B(-2;1), C(0;-1), D(x;y)$; 2) $A(2;1), B(2;-1), C(2;2), D(-1;0)$.

3.2.11. Для точок A, B, C знайдіть координати:

а) проекцій на координатні площини;

б) проекцій на координатні осі;

в) точок, симетричних указаним точкам відносно площини Oxy;

г) точок, симетричних указаним точкам відносно осі Oz;

ґ) точок, симетричних указаним точкам відносно початку координат, якщо:

1) $A(1;2;3), B(-2;1;1), C(x;y;z)$; 2) $A(3;2;1), B(2;0;1), C(-1;2;-1)$.

3.2.12. Знайдіть координати векторів $\overline{MN}$ і $\overline{NM}$, якщо:

1) $M(1;1), N(2;5)$; 2) $M(2;9), N(1;4)$;

3) $M(0;1;2), N(1;5;7)$; 4) $M(2;9;10), N(0;2;4)$.

3.2.13. Знайдіть координати кінця вектора $\overline{a}$, відкладеного від точки M, якщо:

1) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, M(-2;7;1);$ 2) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, M(1;3;2);$

3.2.14. Знайдіть віддаль між точками A та B:

1) $A(-1;2), B(5;10);$ 2) $A(3;-2), B(3;3);$

3) $A(4;-2;3), B(4;5;2);$ 4) $A(-3;1;-1), B(-1;1;-1).$

3.2.15. 1. На осі абсцис знайдіть точку C, віддаль від якої до точки $A(-3;4;8)$ дорівнює 12.

2. На осі ординат знайдіть точку C, рівновіддалену від точок $A(1;-3;7)$ та $B(5;7;-5)$.

3.2.16. Для заданого вектора знайдіть:

а) координатний стовпець вектора;

б) проекції вектора на осі координат;

в) довжину вектора; г) координати орта;

ґ) напрямні косинуси вектора, якщо:

1) $\overline{a} = 6\overline{i} + 7\overline{j} - 6\overline{k};$ 2) $\overline{b} = 3\overline{i} - 6\overline{j} + 2\overline{k}.$

3.2.17. Знайдіть координати вектора $\overline{a}$, якщо відомі його кути з векторами $\overline{i}, \overline{j}$ та $\overline{k}$ і $\left|\overline{a}\right|$:

1) $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{3}, \left|\overline{a}\right| = 4;$ 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{\pi}{3}, \left|\overline{a}\right| = 8.$

3.2.18. З'ясуйте, чи лежать на одній прямій три точки:

1) $A(1;1), B(3;4), C(7;10);$ 2) $A(0;1), B(1;3), C(2;2);$

3) $A(1;2;3), B(1;5;7), C(1;8;11);$ 4) $A(2;1;1), B(5;10;5), C(8;19;29).$

3.2.19. 1. Відрізок з кінцями в точках $A(3;-2)$ і $B(6;4)$ поділено на три рівні частини точками C, D. Знайдіть координати точок поділу.

2. Знайдіть координати кінців A та B відрізка, який точками $P(2;2)$ та $Q(1;5)$ поділено на три рівні частини.

3.2.20. 1. Відрізок з кінцями в точках $A(-2;5;13)$ і $B(6;17;-7)$ поділено точками C, D, E на чотири рівні частини. Знайдіть координати точок поділу.

2. Відрізок з кінцями в точках $A(-1;8;3)$ і $B(9;-7;-2)$ поділено точками C, D, E, F на п'ять рівних частин. Знайдіть координати точок поділу.

3.2.21. Задано вершини A, B, C паралелограма $ABCD$. Знайдіть координати вершини D, яка протилежна вершині B, якщо:

1) $A(3;-4;7), B(-5;3;-2), C(1;2;-3)$;

2) $A(3;-1;2), B(1;2;-4), C(-1;1;2)$.

3.2.22. Задано дві вершини $A(2;-3;-5), B(-1;3;2)$ паралелограма $ABCD$ і точка перетину його діагоналей $E(4;-1;7)$. Знайдіть координати двох інших вершин цього паралелограма.

3.2.23. 1. Знайдіть вектор $\overline{x}$ завдовжки $\left|\overline{x}\right| = 15$, колінеарний вектору $\overline{a} = \overline{i} - 2\overline{j} - 2\overline{k}$, що утворює з ортом $\overline{j}$ гострий кут.

2. Знайдіть вектор $\overline{x}$ завдовжки $\left|\overline{x}\right| = 50$, колінеарний вектору $\overline{a} = 6\overline{i} - 8\overline{j} - \dfrac{15}{2}\overline{k}$, що утворює з ортом $\overline{k}$ гострий кут.

3.2.24. 1. Знайдіть ненульовий вектор, колінеарний бісектрисі кута A трикутника ABC, якщо $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Знайдіть вектор $\overline{x}$, напрямлений уздовж бісектриси кута між векторами $\overline{a} = 7\overline{i} - 4\overline{j} - 4\overline{k}$ та $\overline{b} = -2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$, якщо $\left|\overline{x}\right| = 3\sqrt{6}$.

Відповіді

3.2.10. 1) а) $(1;0), (-2;1), (0;0), D(x;0)$; б) $(0;2), (0;1), (0;-1), (0;y)$; в) $(1;-2), (-2;-1), (0;1), (x;-y)$; г) $(-1;2), (2;1), (0;-1), (-x;y)$; ґ) $A(-1;-2), B(2;-1), C(0;1), D(-x;-y)$; д) $A(2;1), B(1;-2), C(-1;0), D(y;x)$.

3.2.11. 1) а) $A(1;2;0), B(-2;1;0), C(x;y;0)$; б) $A(1;0;0), B(-2;0;0), C(x;0;0)$; в) $A(1;2;-3), B(-2;1;-1), C(x;y;-z)$; г) $A(-1;-2;3), B(2;-1;1), C(-x;-y;z)$;

ґ) $A(-1;-2;-3), B(2;-1;-1), C(-x;-y;-z)$.

3.2.12. 1) $\overline{MN} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; 2) $\overline{MN} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$; 3) $\overline{MN} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$; 4) $\overline{MN} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$.

3.2.13. 1) $N(1;8;-4)$; 2) $N(3;0;7)$. **3.2.14.** 1) 10; 2) 5; 3) $5\sqrt{2}$; 4) 2.

3.2.15. 1) $C_1(5;0;0), C_2(-11;0;0)$; 2) $C(0;2;0)$.

3.2.16. 1) а) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{matrix} \text{pr}_{\bar{i}}\, \bar{a} = 6, \\ \text{pr}_{\bar{j}}\, \bar{a} = 7, \\ \text{pr}_{\bar{k}}\, \bar{a} = -6; \end{matrix}$ в) $|\bar{a}| = 11$; г—ґ) $\bar{a}^0 = \begin{pmatrix} 6/11 \\ 7/11 \\ -6/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$;

2) а) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{matrix} \text{pr}_{\bar{i}}\, \bar{b} = 3, \\ \text{pr}_{\bar{j}}\, \bar{b} = -6, \\ \text{pr}_{\bar{k}}\, \bar{b} = 2; \end{matrix}$ в) $|\bar{b}| = 7$; г—ґ) $\bar{b}^0 = \begin{pmatrix} 3/7 \\ -6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$.

3.2.17. 1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -4\sqrt{2} \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. **3.2.18.** 1), 3), 4) так; 2) ні.

3.2.19. 1) $C(4;0)$ та $D(5;2)$; 2) $A(3;-1)$ та $B(0;8)$.

3.2.20. 1) $C(0;8;8), D(2;11;3), E(4;14;-2)$; 2) $C(1;5;2), D(3;2;1), E(5;-1;0), F(7;-4;-1)$.

3.2.21. 1) $D(9;-5;6)$; 2) $D(1;-2;8)$; **3.2.22.** $C(6;1;19), D(9;-5;12)$.

3.2.23. 1. $\bar{x} = -5\bar{i} + 10\bar{j} + 10\bar{k}$; 2) $\bar{x} = -24\bar{i} + 32\bar{j} + 30\bar{k}$.

3.2.24. 1) $17\bar{i} + 10\bar{j} + 19\bar{k}$; 2) $\bar{i} - 7\bar{j} + 2\bar{k}$.

Практикум 3.3. Добутки векторів

Навчальні задачі

3.3.1. Задано $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 3, |\bar{c}| = \sqrt{3}, (\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \dfrac{\pi}{3}, \bar{c} \perp \bar{a}, \bar{c} \perp \bar{b}$.

3.3.1.1. Знайдіть $(\bar{a},\bar{b})$.

Розв'язання. [3.9.1.]

$$(\bar{a},\bar{b}) \overset{[3.9.1]}{=} 2 \cdot 3\cos\frac{\pi}{3} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

3.3.1.2. Знайдіть $|[\bar{a},\bar{b}]|$.

Розв'язання. [3.9.3.]

$$|[\bar{a},\bar{b}]| \overset{[3.9.3]}{=} 2 \cdot 3\sin\frac{\pi}{3} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

3.3.1.3. Знайдіть $\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|$.

Розв'язання. [3.13.5.]

$$\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right| \overset{[3.13.5]}{=} V_{\text{пар}} = S_{\square(\overline{a},\overline{b})}h = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin(\widehat{\overline{a},\overline{b}})\left|\overline{c}\right| = 2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3} = 9.$$

3.3.2. Спростити вираз $(\overline{a}+\overline{b},\overline{a}-\overline{b})$.

Розв'язання. [3.10.1.]

$$(\overline{a}+\overline{b},\overline{a}-\overline{b}) = (\overline{a},\overline{a}) + (\overline{b},\overline{a}) - (\overline{a},\overline{b}) - (\overline{b},\overline{b}) \overset{①}{=} \left|\overline{a}\right|^2 - \left|\overline{b}\right|^2.$$

Коментар. ① Скалярний добуток комутативний і $(\overline{a},\overline{a}) = \left|\overline{a}\right|^2$.

3.3.3. Спростити вираз $[\overline{a}-\overline{b},\overline{a}+\overline{b}]$.

Розв'язання. [3.10.2.]

$$[\overline{a}-\overline{b},\overline{a}+\overline{b}] = [\overline{a},\overline{a}] + [\overline{a},\overline{b}] - [\overline{b},\overline{a}] - [\overline{b},\overline{b}] \overset{①}{=} 2[\overline{a},\overline{b}].$$

Коментар. ① Векторний добуток антикомутативний і $[\overline{a},\overline{a}] = \overline{0}$.

3.3.4. Спростити вираз $(\overline{a}+\overline{b},\overline{b}+\overline{c},\overline{c})$.

Розв'язання. [3.10.3.]

$$(\overline{a}+\overline{b},\overline{b}+\overline{c},\overline{c}) = (\overline{a},\overline{b}+\overline{c},\overline{c}) + (\overline{b},\overline{b}+\overline{c},\overline{c}) =$$

$$= (\overline{a},\overline{b},\overline{c}) + (\overline{a},\overline{c},\overline{c}) + (\overline{b},\overline{b}+\overline{c},\overline{c}) \overset{①}{=} (\overline{a},\overline{b},\overline{c}).$$

Коментар. ① Мішаний добуток компланарних векторів дорівнює нулю.

3.3.5. Задано вектори $\overline{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix}9\\5\\-6\end{pmatrix}, \overline{c} = \begin{pmatrix}11\\7\\-15\end{pmatrix}$.

3.3.5.1. Знайти $(\overline{a},\overline{b})$.

Розв'язання. [3.11.2]

$$(\overline{a},\overline{b}) = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\5\\-6\end{pmatrix} \overset{[3.11.2]}{=} 1\cdot 9 + 1\cdot 5 + (-1)\cdot(-6) = 20.$$

3.3.5.2. Знайти $[\overline{a},\overline{b}]$.

Розв'язання. [3.11.4.]

$$[\overline{a},\overline{b}] \overset{[3.11.4]}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & -6 \end{vmatrix} \overset{[2.7.2]}{=}$$

$$= \overline{i}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 9 & -6 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = -\overline{i} - 3\overline{j} - 4\overline{k}.$$

3.3.5.3. Знайти $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$.

Розв'язання. [3.11.5.]

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \overset{[3.11.5]}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & -6 \\ 11 & 7 & -15 \end{vmatrix} \overset{[2.7.2]}{=}$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 7 & -15 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ 11 & -15 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} = 28.$$

3.3.6. Задано вектори $\overline{a} = -\overline{m} + 6\overline{n}$ і $\overline{b} = 3\overline{m} + 4\overline{n}$, де $|\overline{m}| = 2$; $|\overline{n}| = 5$; $(\widehat{\overline{m},\overline{n}}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

3.3.6.1. Знайти $(\overline{a},\overline{b})$.

Розв'язання. [3.10.1.]

$$(\overline{a},\overline{b}) = (-\overline{m} + 6\overline{n}, 3\overline{m} + 4\overline{n}) =$$
$$= -3(\overline{m},\overline{m}) - 4(\overline{m},\overline{n}) + 18(\overline{n},\overline{m}) + 24(\overline{n},\overline{n}) =$$
$$= -3|\overline{m}|^2 + 14(\overline{n},\overline{m}) + 24|\overline{n}|^2 =$$
$$= -3|\overline{m}|^2 + 14|\overline{m}||\overline{n}|\cos(\widehat{\overline{m},\overline{n}}) + 24|\overline{n}|^2 =$$
$$= -3\cdot 2^2 + 14\cdot 2\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 24\cdot 5^2 = 518.$$

3.3.6.2. Знайти $|\overline{b}|$.

Розв'язання. [3.12.1.]

$$|\overline{b}| = \sqrt{(\overline{b},\overline{b})} = \sqrt{(3\overline{m} + 4\overline{n}, 3\overline{m} + 4\overline{n})} =$$
$$= \sqrt{9(\overline{m},\overline{m}) + 24(\overline{m},\overline{n}) + 16(\overline{n},\overline{n})} =$$
$$= \sqrt{9|\overline{m}|^2 + 24|\overline{m}||\overline{n}|\cos(\widehat{\overline{m},\overline{n}}) + 16|\overline{n}|^2} = \sqrt{316} = 2\sqrt{79}.$$

3.3.6.3. Знайти $\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|$.

Розв'язання. [3.10.2.]

$$\left|[\overline{a},\overline{b}]\right| = \left|[-\overline{m}+6\overline{n},3\overline{m}+4\overline{n}]\right| =$$
$$= \left|-3[\overline{m},\overline{m}]-4[\overline{m},\overline{n}]+18[\overline{n},\overline{m}]+24[\overline{n},\overline{n}]\right| =$$
$$= \left|-3\cdot\overline{0}+4[\overline{n},\overline{m}]+18[\overline{n},\overline{m}]+24\cdot\overline{0}\right| =$$
$$= 22\left|[\overline{n},\overline{m}]\right| = 22\left|\overline{m}\right|\left|\overline{n}\right|\sin(\widehat{\overline{m},\overline{n}}) = 22\cdot 2\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 110\sqrt{3}.$$

3.3.6.4. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

Розв'язання. [3.13.1.]

$$S_{\square} = \left|[\overline{a},\overline{b}]\right| = 110\sqrt{3}.$$

3.3.6.5. Знайти висоту паралелограма, опущену на сторону $\overline{b}$.

Розв'язання. [3.13.2.]

$$h_{\square} = \frac{\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|}{\left|\overline{b}\right|} = \frac{110\sqrt{3}}{2\sqrt{79}} = 55\sqrt{\frac{3}{79}}$$

3.3.7. Задано вектори $\overline{a} = 5\overline{i} - \overline{j} + 6\overline{k}$ та $\overline{b} = 6\overline{i} + 3\overline{j} - 3\overline{k}$

3.3.7.1. Знайти $(\overline{a},\overline{b})$.

Розв'язання. [3.11.1.]

[*Записуємо координатні стовпці векторів.***]**

$$\overline{a} = \begin{pmatrix}5\\-1\\6\end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix}6\\3\\-3\end{pmatrix}.$$

$$(\overline{a},\overline{b}) = 5\cdot 6+(-1)\cdot 3+6\cdot(-3) = 9.$$

3.3.7.2. Знайти $\operatorname{pr}_{\overline{b}}\overline{a}$.

Розв'язання. [3.12.3.]

$$\operatorname{pr}_{\overline{b}}\overline{a} \overset{[3.12.3]}{=} \frac{(\overline{a},\overline{b})}{\left|\overline{b}\right|}.$$

$$\left|\overline{b}\right| \overset{[3.8.3]}{=} \sqrt{6^2+3^2+(-3)^2} = \sqrt{54}.$$

[*Скористаємось розв'язанням* ***3.3.7.1.***]

$$\operatorname{pr}_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{9}{\sqrt{54}} = \frac{3}{\sqrt{6}}.$$

3.3.7.3. Знайти $\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}})$.

Розв'язання. [3.12.2.]

$$\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) \overset{[3.12.2]}{=} \frac{(\overline{a},\overline{b})}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|}.$$

$$\left|\overline{a}\right| \overset{[3.8.3]}{=} \sqrt{5^2+(-1)^2+6^2} = \sqrt{62}.$$

[*Скористаємось розв'язанням* ***3.3.7.1*** *та* ***3.3.7.2.***]

$$\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \frac{9}{\sqrt{62}\sqrt{54}} = \frac{3}{2\sqrt{93}}.$$

3.3.8. На векторах $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$ та $\overline{b}=9\overline{i}+5\overline{j}-6\overline{k}$ побудовано трикутник. Знайти його площу й висоту опущену на сторону, що збігається з вектором $\overline{a}$.

Розв'язання. [3.13.1, 3.13.2.]

$$S_{\Delta} \overset{[3.13.1]}{=} \frac{1}{2}\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|; \quad h_a \overset{[3.13.2]}{=} \frac{\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|}{\left|\overline{a}\right|}.$$

[*Знаходимо векторний добуток вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$* (***3.3.5.2***).**]**

$$[\overline{a},\overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -\overline{i}-3\overline{j}-4\overline{k}.$$

[*Обчислюємо довжину вектора* $[\overline{a},\overline{b}]$.**]**

$$\left|[\overline{a},\overline{b}]\right| \overset{[3.8.3]}{=} \sqrt{(-1)^2+(-3)^2+(-4)^2} = \sqrt{26}.$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{26}.$$

[*Обчислюємо довжину вектора* $\overline{a}$.**]**

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{3}.$$

$$h_{\overline{a}} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{26}{3}}.$$

3.3.9. Знайти об'єм і висоту, опущену на основу, утворену векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$, паралелепіпеда, побудованого на векторах

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}; \overline{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. [3.13.5, 3.13.6, 3.13.1.]

$$V_{\text{пар}} \overset{[3.13.5]}{=} \left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|, \quad h_{\overline{a},\overline{b}} \overset{[3.13.6]}{=} \frac{\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|}{\left|[a,\overline{b}\,]\right|}.$$

$\Big[$*Знаходимо* $[\overline{a},\overline{b}\,]$ *та* $\left|[\overline{a},\overline{b}\,]\right|$ $(\boldsymbol{3.3.8})$.$\Big]$

$$[\overline{a},\overline{b}\,] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -\overline{i} - 3\overline{j} - 4\overline{k}.$$

$$\left|[\overline{a},\overline{b}\,]\right| = \sqrt{26}.$$

$[$*Обчислюємо* $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ $(\boldsymbol{3.3.5.3})$.$]$①

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & -6 \\ 11 & 7 & -15 \end{vmatrix} = 28.$$

$$V_{\text{пар}} = \left|28\right| = 28; \ h = \frac{28}{\sqrt{26}}.$$

Коментар. ① Якщо відомий $\overline{w} = [\overline{a},\overline{b}\,]$, то $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ можна обчислити за означенням

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = ([\overline{a},\overline{b}\,],\overline{c}) = (\overline{w},\overline{c}).$$

3.3.10. Силу $\overline{F} = \overline{i} - 2\overline{j} + 4\overline{k}$ прикладено до точки $A(1;2;3)$. Знайти момент цієї сили щодо точки $O(3;2;-1)$.

Розв'язання. [3.13.4.]

$$\overline{M}_O(\overline{F}) \overset{[3.13.4]}{=} [\overline{OA},\overline{F}].$$

$[$*Знаходимо вектор.*$]$

$$\overline{OA} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2-2 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\overline{M}_O(\overline{F}) = [\overline{OA},\overline{F}] \overset{[3.11.4]}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8\overline{i} + 12\overline{j} + 4\overline{k}.$$

3.3.11. Задано вектори $\overline{a} = \lambda\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}$ та $\overline{b} = 4\overline{i} + \lambda\overline{j} - 7\overline{k}$. Для якого значення λ ці вектори ортогональні?

Розв'язання. [3.12.4.]

$$\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow (\overline{a},\overline{b}) = 0;$$

$$(\overline{a},\overline{b}) \overset{[3.11.2]}{=} \lambda \cdot 4 + 3 \cdot \lambda + 4 \cdot (-7) = 7\lambda - 28 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

3.3.12. З'ясувати, для яких значень параметра α вектори $\overline{a} = 2\overline{i} + 5\overline{j} + 7\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i} + 2\overline{j} + \alpha\overline{k}$:

1) компланарні; 2) утворюють праву трійку; 3) утворюють ліву трійку.

Розв'язання. [3.13.7, 3.13.8.]

[*Обчислюємо мішаний добуток векторів* $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$.]

$$\Delta = (\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \overset{[3.11.5]}{=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(\alpha + 2) - 5(\alpha + 1) + 7 = 6 - 3\alpha.$$

Вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ компланарні, якщо

$$\Delta = 6 - 3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 2.$$

Вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ утворюють праву трійку, якщо

$$\Delta = 6 - 3\alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 2.$$

Вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ утворюють ліву трійку, якщо

$$\Delta = 6 - 3\alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 2.$$

3.3.13. Довести, що вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ перпендикулярні тоді й лише тоді, коли $\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = \left|\overline{a} - \overline{b}\right|$.

Розв'язання. [3.12.1.]

$$\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = \left|\overline{a} - \overline{b}\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\overline{a} + \overline{b},\overline{a} + \overline{b})} = \sqrt{(\overline{a} - \overline{b},\overline{a} - \overline{b})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\overline{a},\overline{a}) + (\overline{a},\overline{b}) + (\overline{b},\overline{a}) + (\overline{b},\overline{b}) =$$

$$= (\overline{a},\overline{a}) - (\overline{a},\overline{b}) - (\overline{b},\overline{a}) + (\overline{b},\overline{b}) \Leftrightarrow (\overline{a},\overline{b}) = 0 \Leftrightarrow \overline{a} \perp \overline{b}.$$

3.3.14. Вектор $\overline{x}$ ортогональний до векторів $\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ та $\overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, утворює з вектором $\overline{i}$ тупий кут. Знаючи, що $\left|\overline{x}\right| = 6\sqrt{3}$, знайти координати вектора $\overline{x}$.

Розв'язання. [3.12.1.]

Оскільки ненульовий вектор $\overline{x}$ ортогональний до ненульових векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$, то він колінеарний їх векторному добутку $\overset{[3.9.2]}{\Leftrightarrow}$ $\overline{x} = \lambda[\overline{a},\overline{b}]$.

$$[\overline{a},\overline{b}] \overset{[3.11.4]}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \overline{i} - \overline{j} + 5\overline{k}.$$

$$\overline{x} = \lambda[\overline{a},\overline{b}] = \lambda\overline{i} - \lambda\overline{j} - 5\lambda\overline{k} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ -5\lambda \end{pmatrix}.$$

[*Обчислюємо довжину вектора* $\overline{x}$ *.*]

$$\left|\overline{x}\right| \overset{[3.8.3]}{=} \sqrt{27\lambda^2} = 3\sqrt{3}\left|\lambda\right|.$$

[*Справджуємо умову задачі про довжину вектора.*]

$$3\sqrt{3}\left|\lambda\right| = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2 \Leftrightarrow \overline{x}_{1,2} = \begin{pmatrix} \pm 2 \\ \mp 2 \\ \mp 10 \end{pmatrix}.$$

[*Справджуємо умову задачі про напрямок вектора.*]

Оскільки вектор $\overline{x}$ утворює гострий кут з вектором $\overline{i}$, то $\cos(\widehat{\overline{x},\overline{i}}) > 0$, і шуканим є вектор з додатною першою координатою.

Шуканий вектор

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

3.3.15. Обчисліть $(\overline{a},\overline{b}),(\overline{a},\overline{a})$ та значення виразу:

1) $(2\overline{a} + \overline{b}, 3a - \overline{b})$, якщо $\left|\overline{a}\right| = 2, \left|\overline{b}\right| = 3, (\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \dfrac{\pi}{3}$;

2) $(3\overline{a} - 2\overline{b}, \overline{a} + 2\overline{b})$, якщо $\left|\overline{a}\right| = 4, \left|\overline{b}\right| = 5, (\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \dfrac{\pi}{4}$;

3) $(\overline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \overline{b})$, якщо $\left|\overline{a}\right| = 2, \left|\overline{b}\right| = 5, \overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$;

4) $(\overline{a} + \overline{b}, \overline{a} + \overline{b})$, якщо $\left|\overline{a}\right| = 3, \left|\overline{b}\right| = 4, \overline{a} \perp \overline{b}$.

3.3.16. Обчисліть довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах:

1) $\overline{a} = \overline{p} - 3\overline{q},\ \overline{b} = 5\overline{p} + 2\overline{q},$ якщо $\left|\overline{p}\right| = 2\sqrt{2}, \left|\overline{q}\right| = 3, (\widehat{\overline{p},\overline{q}}) = \dfrac{\pi}{4}$;

2) $\overline{a} = 2\overline{m} + \overline{n},\ \overline{b} = \overline{m} - 2\overline{n},$ якщо $\left|\overline{m}\right| = \left|\overline{n}\right| = 1, (\widehat{\overline{m},\overline{n}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

3.3.17. Визначте кут між векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$, якщо:

1) $\left|\overline{a}\right| = 1, \left|\overline{b}\right| = 2,\ (\overline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \overline{b}) + (\overline{a} + 2\overline{b}, \overline{a} + 2\overline{b}) = 20$;

2) $\left|\overline{a}\right| = 2, \left|\overline{b}\right| = 3,\ (2\overline{a} - 3\overline{b}, 2\overline{a} - 3\overline{b}) - (\overline{a} + 4\overline{b}, \overline{a} + 4\overline{b}) = 69$.

3.3.18. Визначте, при якому значенні α ортогональні вектори:

1) $\overline{a}_1 + \alpha\overline{a}_2$ та $\overline{a}_1 - \alpha\overline{a}_2$, якщо $\left|\overline{a}_1\right| = 3, \left|\overline{a}_2\right| = 5$;

2) $\alpha\overline{a} + 17\overline{b}$ та $3\overline{a} - \overline{b}$, якщо $\left|\overline{a}\right| = 2, \left|\overline{b}\right| = 5, (\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

3.3.19. Обчисліть:

1) $\mathrm{pr}_{\overline{a}+\overline{b}}(2\overline{a} - \overline{b})$, якщо $\left|\overline{a}\right| = \left|\overline{b}\right| = 1, (\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \dfrac{2\pi}{3}$;

2) $\mathrm{pr}_{5\overline{a}-12\overline{b}}(10\overline{a} + 2\overline{b})$, якщо $\left|\overline{a}\right| = \left|\overline{b}\right| = 1, (\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \dfrac{\pi}{2}$.

3.3.20. Для заданих векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$:

а) обчисліть $(\overline{a}, \overline{b}), \mathrm{pr}_{\overline{a}}\,\overline{b}, \mathrm{pr}_{\overline{b}}\,\overline{a}$; б) знайдіть $(\widehat{\overline{a},\overline{b}})$, якщо:

1) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; 2) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$;

3) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; 4) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$;

5) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; 6) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$;

7) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};$ 8) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

3.3.21. Знайдіть довжини сторін і кути трикутника з вершинами:

1) $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$ та $C(3;-2;1)$;

2) $A(1;2;1)$, $B(3;-1;7)$ та $C(7;4;-2)$.

3.3.22. Знайдіть значення параметра λ, при якому ортогональні вектори:

1) $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + \lambda\overline{k}, \overline{b} = \lambda\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k};$

2) $\overline{a} = \overline{i} + 5\overline{j} - 6\overline{k}, \overline{b} = 2\overline{i} - \overline{j} + \lambda\overline{k}.$

3.3.23. Обчисліть роботу, яку виконує сила $\overline{F}$ під час переміщення її точки прикладання на вектор $\overline{s}$, якщо:

1) $\overline{F} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix};$ 2) $\overline{F} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \overline{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$

3.3.24. Знайдіть вектор $\overline{x}$, який справджує умови:

1) $\overline{x} \parallel \overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ (\overline{x}, \overline{a}) = 3;$ 2) $\overline{x} \parallel \overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},\ (\overline{x}, \overline{a}) = -18;$

3) $\begin{cases} (\overline{x}, \overline{k}) = 0, \\ (\overline{x}, \overline{a}) = 2, \\ (\overline{x}, \overline{b}) = 8, \end{cases} \overline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix};$ 4) $\begin{cases} (\overline{x}, \overline{i}) = 1, \\ (\overline{x}, \overline{a}) = 3, \\ (\overline{x}, \overline{b}) = 5, \end{cases} \overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}.$

3.3.25. Знайдіть $\left|[\overline{a}, \overline{b}]\right|$ та значення виразу:

1) $\left|[\overline{a} + 3\overline{b}, 3\overline{a} - \overline{b}]\right|$, якщо $\left|\overline{a}\right| = 1, \left|\overline{b}\right| = 2, (\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = \dfrac{2\pi}{3};$

2) $\left|[3\overline{a} + \overline{b}, 2\overline{a} - \overline{b}]\right|$, якщо $\left|\overline{a}\right| = 2, \left|\overline{b}\right| = 3, (\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = \dfrac{5\pi}{6}.$

3.3.26. Знайдіть площу паралелограма, побудованого на векторах:

1) $\overline{p} = \overline{a} - 2\overline{b}$ та $\overline{q} = 3\overline{a} + 2\overline{b}$, якщо $\left|\overline{a}\right| = 5, \left|\overline{b}\right| = \sqrt{2}$, $(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \dfrac{\pi}{4}$;

2) $\overline{p} = 6\overline{a} - 3\overline{b}$ та $\overline{q} = 3\overline{a} + 2\overline{b}$, якщо $\left|\overline{a}\right| = 4, \left|\overline{b}\right| = 5$, $(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \dfrac{\pi}{6}$.

3.3.27. Яку умову мають справджувати вектори $\overline{a}_1$ та $\overline{a}_2$, щоб були колінеарними вектори:

1) $\overline{a}_1 + \overline{a}_2$ та $\overline{a}_1 - \overline{a}_2$; 2) $3\overline{a}_1 + \overline{a}_2$ та $\overline{a}_1 - 3\overline{a}_2$.

3.3.28. Задано: $\left|\overline{a}\right| = 2, \left|\overline{b}\right| = 5, (\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \dfrac{\pi}{6}$. Виразіть через вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ одиничний вектор $\overline{c}^0$, ортогональний до векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ і такий, що:

1) трійка $\overline{a},\overline{b},\overline{c}^0$ — права; 2) трійка $\overline{a},\overline{b},\overline{c}^0$ — ліва.

3.3.29. Знайдіть: а) $[\overline{a},\overline{b}]$; б) площу трикутника, побудованого на векторах $\overline{a},\overline{b}$; в) довжину висоти трикутника, опущену на сторону, що збігається з вектором $\overline{a}$:

1) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$; 2) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

3.3.30. У трикутнику ABC знайдіть довжину висоти, якщо:

1) $A(1;-1;2), B(5;-6;2), C(1;3;-1), h = \left|\overline{BD}\right|$;

2) $A(1;1;1), B(-2;-1;7), C(-1;5;5), h = \left|\overline{AD}\right|$.

3.3.31. Знайдіть координати вектора $\overline{x}$, ортогонального до векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$, якщо:

1) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \left|\overline{x}\right| = 26, \dfrac{\pi}{2} < (\widehat{\overline{x},\overline{j}}) < \pi$;

2) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \left|\overline{x}\right| = \sqrt{138}, 0 < (\widehat{\overline{x},\overline{k}}) < \dfrac{\pi}{2}$;

3) $\overline{a}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}, \overline{b}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}, (\overline{x}, \overline{i}+2\overline{j}-7\overline{k})=10;$

4) $\overline{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \overline{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}, (\overline{x}, 2\overline{i}-3\overline{j}+4\overline{k})=51.$

3.3.32. Знайдіть момент сили $\overline{F}$, прикладеної до точки A, відносно точки O, якщо:

1) $\overline{F}=2\overline{i}-4\overline{j}+5\overline{k}, A(4;-2;3), O(3;2;-1);$

2) $\overline{F}=\overline{i}+2\overline{j}+3\overline{k}, A(3;-5;7), O(1;-8;9).$

3.3.33. Обчисліть $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$, де $\overline{c}\perp\overline{a}$, $\overline{c}\perp\overline{b}$, якщо:

1) $|\overline{a}|=4, |\overline{b}|=2, |\overline{c}|=3, \overline{a}\perp\overline{b}$, $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ — права трійка;

2) $|\overline{a}|=|\overline{b}|=|\overline{c}|=1, (\widehat{\overline{a},\overline{b}})=\dfrac{\pi}{6}$, $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ — ліва трійка.

3.3.34. Обчисліть $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ і встановіть, якою (правою чи лівою) є трійка: а) $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$; б) $\overline{b},\overline{a},\overline{c}$; в) $\overline{c},\overline{a},\overline{b}$, якщо:

1) $\overline{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \overline{b}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}, \overline{c}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$; 2) $\overline{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \overline{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \overline{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$

3.3.35. Установіть, чи компланарні вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$, якщо:

1) $\overline{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}, \overline{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}, \overline{c}=\begin{pmatrix}1\\9\\-11\end{pmatrix}$; 2) $\overline{a}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}, \overline{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \overline{c}=\begin{pmatrix}3\\-4\\7\end{pmatrix}.$

3.3.36. З'ясуйте, для яких значень λ вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$: а) компланарні; б) утворюють праву трійку; в) утворюють ліву трійку, якщо:

1) $\overline{a}=\begin{pmatrix}\lambda\\3\\1\end{pmatrix}, \overline{b}=\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}, \overline{c}=\begin{pmatrix}-1\\5\\4\end{pmatrix}$; 2) $\overline{a}=\begin{pmatrix}\lambda\\2\\3\end{pmatrix}, \overline{b}=\begin{pmatrix}-4\\-5\\-6\end{pmatrix}, \overline{c}=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}.$

3.3.37. З'ясуйте, чи лежать в одній площині точки:

1) $A(3;3;2), B(7;1;5), C(1;1;2)$ та $D(3;-1;4)$;

2) $A(2;3;-1), B(1;2;5),\ C(0;3;1)$ та $D(3;2;3)$.

3.3.38. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах:

1) $\overline{a} = 3\overline{i} + 4\overline{j}, \overline{b} = \overline{k} - 3\overline{j}, \overline{c} = 2\overline{j} + 5\overline{k}$;

2) $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}, \overline{b} = 3\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k},\ \overline{c} = \overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$.

3.3.39. Знайдіть висоту $h = \left|\overline{DE}\right|$ тетраедра з вершинами в точках:

1) $A(1;1;1), B(2;0;2), C(2;2;2)$ та $D(3;4;-3)$;

2) $A(1;2;1), B(3;0;-2), C(5;2;7)$ та $D(-6;-5;8)$.

3.3.40. Знайдіть $[[\overline{a},\overline{b}\,],\overline{c}]$ та $[\overline{a},[\overline{b},\overline{c}]]$, якщо

1) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \overline{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; 2) $\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \overline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Відповіді

3.3.15. 1) $3, 4, 0$; 2) $10\sqrt{2}, 16, 40\sqrt{2} - 50$; 3) $-10, 4, 49$; 4) $0, 9, 25$.

3.3.16. 1) $15, \sqrt{593}$; 2) $\sqrt{7}, \sqrt{13}$. **3.3.17.** 1) $\dfrac{2\pi}{3}$; 2) π.

3.3.18. 1) $\alpha = \pm\dfrac{3}{5}$; 2) $\alpha = 40$. **3.3.19.** 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) 2.

3.3.20. 1) а) $(\overline{a},\overline{b}) = 10, \text{pr}_{\overline{a}}\,\overline{b} = 2\sqrt{5}, \text{pr}_{\overline{b}}\,\overline{a} = \sqrt{5}$; б) $(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = 0$;

2) а) $(\overline{a},\overline{b}) = 8, \text{pr}_{\overline{a}}\,\overline{b} = \dfrac{8}{\sqrt{5}}, \text{pr}_{\overline{b}}\,\overline{a} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$; б) $(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \arccos\dfrac{4}{5}$;

3) а) $(\overline{a},\overline{b}) = 0, \text{pr}_{\overline{a}}\,\overline{b} = 0, \text{pr}_{\overline{b}}\,\overline{a} = 0$; б) $(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \dfrac{\pi}{2}$;

4) а) $(\overline{a},\overline{b}) = -10, \text{pr}_{\overline{a}}\,\overline{b} = -2\sqrt{5}, \text{pr}_{\overline{b}}\,\overline{a} = -\sqrt{5}$; б) $(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \pi$;

5) а) $(\overline{a},\overline{b}) = 22, \text{pr}_{\overline{a}}\,\overline{b} = \dfrac{11}{3}, \text{pr}_{\overline{b}}\,\overline{a} = \dfrac{22}{7}$, б) $(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \arccos\dfrac{11}{21}$;

6) а) $(\overline{a},\overline{b}) = -4, \text{pr}_{\overline{a}}\,\overline{b} = -\dfrac{4}{\sqrt{3}}, \text{pr}_{\overline{b}}\,\overline{a} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; б) $(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$;

7) а) $(\overline{a},\overline{b}) = 4, \text{pr}_{\overline{a}}\,\overline{b} = \dfrac{4}{15}, \text{pr}_{\overline{b}}\,\overline{a} = \dfrac{4}{3}$; б) $(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \arccos\dfrac{4}{45}$.

8) а) $(\overline{a},\overline{b}) = 0, \mathrm{pr}_{\overline{a}}\,\overline{b} = 0, \mathrm{pr}_{\overline{b}}\,\overline{a} = 0$; б) $(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \dfrac{\pi}{2}$.

3.3.21. 1) $\left|\overline{AB}\right| = 5, \left|\overline{BC}\right| = 5\sqrt{2}, \left|\overline{AC}\right| = 5, \hat{A} = \dfrac{\pi}{2}, \hat{B} = \hat{C} = \dfrac{\pi}{4}$;

2) $\left|\overline{AB}\right| = 7, \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{122}, \left|\overline{AC}\right| = 7, \hat{A} = \arccos\left(-\dfrac{12}{49}\right), \hat{B} = \hat{C} = \arccos\left(\dfrac{61}{7\sqrt{122}}\right)$;

3.3.22. 1) $\lambda = 2$; 2) $\lambda = -\dfrac{1}{2}$. **3.3.23.** 1) 36; 2) 16.

3.3.24. 1) $\overline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 2) $\overline{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$; 3) $\overline{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; 4) $\overline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3.3.25. 1) $\sqrt{3}, 10\sqrt{3}$; 2) $3{,}25$.

3.3.26. 1) 40; 2) 210.

3.3.27. 1)–2) $\overline{a}_1 \parallel \overline{a}_2$.

3.3.28. 1) $\dfrac{1}{5}[\overline{a},\overline{b}]$; 2) $-\dfrac{1}{5}[\overline{a};\overline{b}]$.

3.3.29. 1) а) $[\overline{a},\overline{b}] = 10\overline{i} - 2\overline{j} + 11\overline{k}$, б) $S_\Delta = \dfrac{15}{2}$, в) $h_{\overline{a}} = 5$;

2) а) $[\overline{a},\overline{b}] = 12\overline{i} + 24\overline{j} + 8\overline{k}$, б) $S_\Delta = 14$, в) $h_{\overline{a}} = \dfrac{28}{\sqrt{17}}$.

3.3.30. 1) 5; 2) $\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$.

3.3.31. 1) $\begin{pmatrix} -6 \\ -24 \\ 8 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 24 \\ -21 \\ -15 \end{pmatrix}$.

3.3.32. 1) $-4\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}$; 2) $13\overline{i} - 8\overline{j} + \overline{k}$.

3.3.33. 1) 24; 2) $-\dfrac{1}{2}$.

3.3.34. 1) $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = 5$, а) правою, б) лівою, в) правою;

2) $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = -4$, а) лівою, б) правою, в) лівою.

3.3.35. 1) так; 2) так.

3.3.36. 1) $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = -14\lambda - 42$, а) $\lambda = -3$, б) $\lambda < -3$, в) $\lambda > -3$;

2) $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = 3\lambda - 3$, а) $\lambda = 1$, б) $\lambda > 1$, в) $\lambda < 1$.

3.3.37. 1) так; 2) ні.

3.3.38. 1) 51; 2) 13.

3.3.39. 1) $3\sqrt{2}$; 2) 11.

3.3.40. 1) $[[\overline{a},\overline{b}],\overline{c}] = \overline{i} - 11\overline{j} + 2\overline{k}, [\overline{a},[\overline{b},\overline{c}]] = -54\overline{i} + 23\overline{j} + 4\overline{k}$;

2) $[[\overline{a},\overline{b}],\overline{c}] = 3\overline{i} - 12\overline{j} - 3\overline{k}, [\overline{a},[\overline{b},\overline{c}]] = -6\overline{i} - 6\overline{k}$.

Практикум 3.4. Комплексні числа

Навчальні задачі

3.4.1. Знайти $z_1 + z_2, z_1 z_2, z_2 - z_1, \dfrac{z_1}{z_2}$, якщо $z_1 = 4 + 5i,\ z_2 = 3 - 2i$.

Розв'язання. [3.14.]

$$z_1 + z_2 \overset{[3.14.4]}{=} 7 + 3i;\ z_1 - z_2 \overset{[3.14.4]}{=} 1 + 7i;$$

$$z_1 z_2 \overset{[3.14.5]}{=} (4 + 5i)(3 - 2i) = 12 + 15i - 8i + 10 = 22 + 7i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} \overset{[3.14.8]}{=} \frac{\left(4 + 5i\right)\left(3 + 2i\right)}{\left(3 - 2i\right)\left(3 + 2i\right)} \overset{[3.14.5]}{=} \frac{12 + 15i + 8i - 10}{9 + 4} = \frac{2}{13} + \frac{23}{13}i.$$

3.4.2. Знайти дійсні розв'язки рівняння $(2x + y) + (x + 3y)i = 3 - i$.

Розв'язання. [3.14.3.]

$$(2x + y) + (x + 3y)i = 3 - i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3, \\ x + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$$

3.4.3.1. Зобразити у тригонометричній та показниковій формі число $z = -1 + i$.

Розв'язання. [3.16.1.]

Число записано в алгебричній формі:

$$z = x + iy = -1 + i.$$

$$\underbrace{\operatorname{Re} z = x = -1 < 0, \operatorname{Im} z = y = 1 > 0;}_{\text{число розташоване у 2-й чверті}}$$

$$\rho = \left|z\right| \overset{[3.16.3]}{=} \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$

$$\varphi = \arg z \overset{[3.16.4]}{=} \operatorname{arctg}(-1) + \pi = \frac{3\pi}{4};$$

$$z \overset{[3.16.1]}{=} \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}.$$

3.4.3.2. Зобразити у тригонометричній та показниковій формі число $z = 1 + \cos 2 + i\sin 2$.

Розв'язання.

$$\underbrace{\operatorname{Re} z = 1 + \cos 2 > 0, \operatorname{Im} z = \sin 2 > 0.}_{\text{число розташовано у 1-й чверті}}$$

$$|z| \overset{[3.16.3]}{=} \sqrt{(1+\cos 2)^2 + \sin^2 2} = \sqrt{2 + 2\cos 2} = \sqrt{4\cos^2 1} = 2\cos 1.$$

$$\arg z \overset{[3.16.4]}{=} \operatorname{arctg}\frac{\sin 2}{1+\cos 2} = \operatorname{arctg}\frac{2\sin 1\cdot\cos 1}{2\cos^2 1} = \operatorname{arctg}\operatorname{tg} 1 = 1.$$

$$z \overset{[3.16.1]}{=} 2\cos 1\cdot(\cos 1 + i\sin 1) = 2\cos 1\cdot e^i.$$

3.4.4.1. Знайти алгебричну форму числа $(-1 - i\sqrt{3})^{12}$.

Розв'язання. [3.16.8.]

[*Записуємо число* $z = -1 - i\sqrt{3}$ *у тригонометричній формі* [3.16.1].]

$$\underbrace{x = -1 < 0, y = -\sqrt{3} < 0 \Rightarrow}_{\text{число розташоване у 3-й чверті}}$$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\arg z = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

[*Застосовуємо формулу піднесення до степеня.*]

$$z^{12} \overset{[3.16.8]}{=} \underbrace{2^{12}\left(\cos\left(12\cdot\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) + i\sin\left(12\cdot\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right)}_{\text{модуль підносимо до степеня, аргумент множимо на степінь}} =$$

$$= 2^{12}(\cos(-8\pi) + i\sin(-8\pi)) = 2^{12}(\cos 0 + i\sin 0) = 2^{12} = 4096.$$

3.4.4.2. Знайти алгебричну форму числа $((1 + i\sqrt{3})(2 - 2i))^4$.

Розв'язання.

[*Записуємо числа* $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 2 - 2i$ *у тригонометричній формі.*]

$$\operatorname{Re} z_1 = 1 > 0, \operatorname{Im} z_1 = \sqrt{3} > 0;$$

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2; \varphi_1 = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3};$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

$$\operatorname{Re} z_2 = 2 > 0, \operatorname{Im} z_2 = -2 < 0;$$

$$|z_2| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2};$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{-2}{2} = -\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4};$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

[*Обчислюємо добуток z_1z_2 у тригонометричній формі.*]

$$z_1z_2 \overset{[3.16.5]}{=} \underbrace{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}_{\text{модулі перемножуємо, аргументи додаємо}} =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

[*Застосовуємо формулу піднесення до степеня.*]

$$((1+i\sqrt{3})(2-2i))^4 \overset{[3.16.8]}{=} \left(4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right)^4 =$$

$$= (4\sqrt{2})^4\left(\cos\frac{4\pi}{12}+i\sin\frac{4\pi}{12}\right) = 1024\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 1024\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 512+512\sqrt{3}i.$$

3.4.4.3. Знайти алгебричну форму числа $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2-2i}\right)^{10}$.

Розв'язання. [3.16.7.]

[*Використовуємо тригонометричну форму чисел $1+i\sqrt{3}$ та $2-2i$ із 3.4.4.2. Ділимо комплексні числа у тригонометричній формі.*]

Користуючись результатом попереднього пункту, маємо

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} \overset{[3.16.7]}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

[*Застосовуємо формулу піднесення до степеня.*]

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2-2i}\right)^{10} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\right)^{10} \overset{[3.16.8]}{=}$$

$$= \frac{1}{32}\left(\cos\frac{70\pi}{12}+i\sin\frac{70\pi}{12}\right) = \frac{1}{32}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{64}-\frac{i}{64}.$$

3.4.5.1. Знайти всі значення $\sqrt[4]{-1}$ і зобразіть їх на комплексній площині.

Розв'язання. [3.16.9.]

[*Записуємо число -1 у тригонометричній формі.*]

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi.$$

[*Записуємо спільну формулу для значень кореня.*]

$$\sqrt[4]{-1} \overset{[3.16.9]}{=} \omega_k = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}, k = \overline{0,3}.$$

[*Виписуємо всі окремі значення кореня.*]

$$\omega_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\omega_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\omega_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\omega_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

[*Зображуємо знайдені значення на комплексній площині, використовуючи полярну систему координат.*]

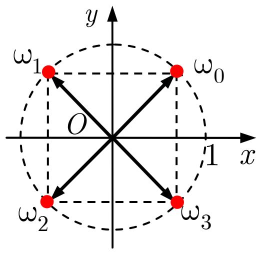


Рис. до 3.4.5.1

3.4.5.2. Знайти всі значення $\sqrt[5]{i}$ і зобразіть їх на комплексній площині.
Розв'язання. [3.16.9.]

[*Записуємо число i у тригонометричній формі* [3.16.1].]

$$\operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z = 1 > 0.$$

$$\left|z\right| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1; \arg z = \frac{\pi}{2};$$

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

[*Записуємо спільну формулу для значень кореня.*]

$$\sqrt[5]{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \omega_k \overset{[3.16.9]}{=}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}\right), k = \overline{0,4}.$$

[*Виписуємо всі окремі значення кореня.*]

$$\omega_0 = \cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}, \omega_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},$$

$$\omega_2 = \cos\frac{9\pi}{10} + i\sin\frac{9\pi}{10},$$

$$\omega_3 = \cos\frac{13\pi}{10} + i\sin\frac{13\pi}{10},$$
$$\omega_4 = \cos\frac{17\pi}{10} + i\sin\frac{17\pi}{10}.$$

[*Зображуємо знайдені значення на комплексній площині, використовуючи полярну систему координат.*]

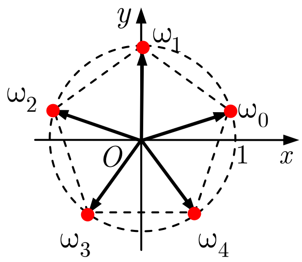


Рис. до 3.4.5.2

3.4.6.1. Зобразити на площині $\mathbb{C}$ множини точок, що справджують умову $\left|z-1\right| = 2$.

Розв'язання. [3.14.1, 3.16.3.]

[*Використовуємо геометричний зміст умови.*]

$\left\{z \in \mathbb{C} \mid \left|z-1\right| = 2\right\}$ — множина точок, віддалених від точки $z = 1$ на віддаль 2 — це коло з центром у точці $z = 1$ і радіусом 2.

[*Зображуємо розв'язок.*]

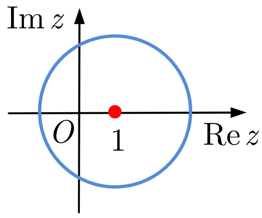


Рис. до 3.4.6.1

3.4.6.2. Зобразити на площині $\mathbb{C}$ множини точок, що справджують умову $\left|z+i\right| = \left|z-i\right|$.

Розв'язання. [3.14.1, 3.16.3.]

I спосіб (геометричний).

[*Використовуємо геометричний зміст умови.*]

$\left\{z \in \mathbb{C} \mid \left|z+i\right| = \left|z-i\right|\right\}$— множина точок рівновіддалених від точок $z_1 = -i$ та $z_2 = i$ — пряма, яка перпендикулярна до відрізка z_1z_2 і проходить через його середину.

[*Зображуємо розв'язок.*]

II спосіб (аналітичний).

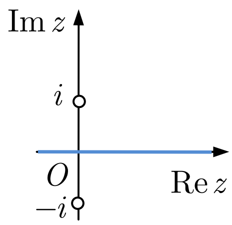


Рис. до 3.4.6.2

Нехай $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$.

$$\left|z+i\right| = \left|x + i(y+1)\right| \overset{[3.16.3]}{=} \sqrt{x^2 + (y+1)^2};$$
$$\left|z-i\right| = \left|x + i(y-1)\right| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}.$$
$$\left|z+i\right| = \left|z-i\right| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow y = 0.$$

[*Зображуємо розв'язок.*]

3.4.6.3. Зобразити на площині $\mathbb{C}$ множини точок, що справджують умову $(|z| \le 1) \wedge \left(\frac{\pi}{3} < \arg z \le \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. [3.16.4.]

[*Використовуємо геометричний зміст умови.*]

$\left\{z \in \mathbb{C} \mid (|z| \le 1) \wedge \left(\frac{\pi}{3} < \arg z \le \frac{\pi}{2}\right)\right\}$ — множина точок, розташованих усередині круга з межею $|z| = 1$: $x^2 + y^2 = 1$ між променями $\varphi = \frac{\pi}{3}$ та $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

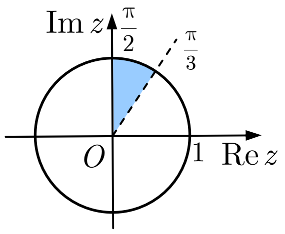


Рис. до 3.4.6.3

3.4.7. З'ясувати геометричний зміст співвідношень:

1) $|z - z_0| = a$; 2) $|z - z_0| < a$;

3) $|z - z_0| > a$; 4) $\arg z = \alpha$;

5) $\operatorname{Re} z = a$; 6) $\operatorname{Im} z = b$.

Розв'язання. [3.16.1, 3.16.3, 3.16.4.]

1. Множиною точок, віддаль яких від точки z_0 дорівнює a, є коло з центром у точці z_0 радіусом a.

2. Нерівність описує внутрішність круга з центром у точці z_0 радіусом a.

3. Нерівність описує зовнішність круга з центром у точці z_0 радіусом a.

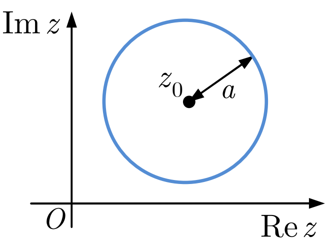


Рис. до 3.4.7.1)

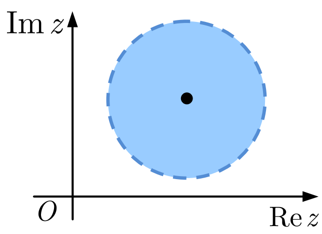


Рис. до 3.4.7.2)

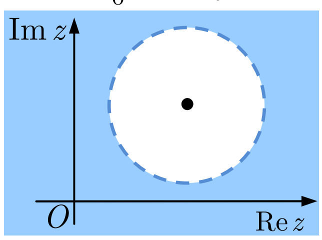


Рис. до 3.4.7.3)

4. Рівняння задає промінь, що виходить з початку координат під кутом α з додатним напрямом дійсної осі.

5. Вертикальна пряма $x = a$.

6. Горизонтальна пряма $y = b$.

3.4.8. Розв'язати рівняння $z^3 + z - 2 = 0$ $(z \in \mathbb{C})$.

Розв'язання.

[*Підбираємо дійсний корінь рівняння.*[1]]

Число $z = 1$ — корінь рівняння.

[*Застосовуємо схему Горнера.*②]

	1	0	1	−2
1	1	1	2	0

$$(z-1)(z^2+z+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &z_1=1,\\ &z^2+z+2=0. \end{aligned}\right.$$

[*Розв'язуємо квадратне рівняння.*]

$$z^2+z+2=0;$$

$$D=1-8=-7=7i^2;$$

$$z_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}.$$

[*Записуємо відповідь.*]

$$z_1=1, z_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}.$$

Коментар. ① Кубічне рівняння з дійсними коефіцієнтами завжди має принаймні один дійсний корінь, який є дільником вільного члена рівняння.
② Або ділимо многочлен z^3+z-2 на многочлен $(z-1)$ у стовпчик.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

3.4.9. Знайдіть дійсні числа x та y з рівняння:

1) $(2x+y)+(x+3y)i=3-i$;

2) $(x-5y)+(x-2y)i=-17-8i$.

3.4.10. Знайдіть $z_1+z_2, z_1z_2, z_2-z_1, \overline{z}_2, \dfrac{z_1}{z_2}$, якщо:

1) $z_1=3+4i, z_2=2-3i$; 2) $z_1=\sqrt{2}-i\sqrt{3}, z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{3}$;

3.4.11. Обчисліть:

1) $(2+i)^2$; 2) $(1-2i)^2$;

3) $\dfrac{1-2i}{1+2i}$; 4) $\dfrac{2+3i}{2-3i}$;

5) $(a+bi)^3, a,b\in\mathbb{R}$; 6) $(a-bi)^3, a,b\in\mathbb{R}$;

7) $\sqrt{3+4i}$; 8) $\sqrt{-3-4i}$.

3.4.12. Зобразіть комплексне число z і спряжене до нього число $\overline{z}$ на комплексній площині:

1) $z = 2 + i$;
2) $z = 2 - i$;
3) $z = -3 + 2i$;
4) $z = -2 - 3i$;
5) $z = -1$;
6) $z = 2$;
7) $z = 2i$;
8) $z = -3i$.

3.4.13. Обчисліть:

1) $i^4 + \dfrac{1}{i^3}$;
2) $i^6 + \dfrac{1}{i^5}$;
3) $i^4 + i^{14} + i^{24} + i^{34} + i^{44} + i^{45}$;
4) $i + i^2 + i^3 + ... + i^n, n > 4$.

3.4.14. Запишіть число у тригонометричній і показниковій формах:

1) 1;
2) -1;
3) $2i$;
4) $-3i$;
5) $1 + i$;
6) $-1 + i$;
7) $-1 - i$;
8) $1 - i$;
9) $\sqrt{3} - i$;
10) $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$;
11) $-\cos\varphi + i\sin\varphi$;
12) $\cos\varphi - i\sin\varphi$;
13) $\sin\varphi + i\cos\varphi$;
14) $-\cos\varphi - i\sin\varphi$;
15) $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha, 0 \le \alpha \le \pi$;
16) $1 - \cos\alpha + i\sin\alpha, 0 \le \alpha \le 2\pi$.

3.4.15. Обчисліть:

1) $5\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right) \cdot 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{8} + i\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)$;

2) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}\right) \cdot 6\left(\cos\dfrac{6\pi}{7} + i\sin\dfrac{6\pi}{7}\right)$;

3) $\dfrac{4\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}$;

4) $\dfrac{3\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)}{6\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}$.

3.4.16. Побудуйте в полярній системі координат точку M і знайдіть полярні координати точок, які симетричні до неї:

а) відносно полярної осі; б) відносно полюса, якщо

1) $M\left(2;\dfrac{\pi}{4}\right)$; 2) $M\left(3;\dfrac{\pi}{3}\right)$;

3) $M\left(1;-\dfrac{2\pi}{3}\right)$; 4) $M\left(2;-\dfrac{3\pi}{4}\right)$;

5) $M(3;0)$; 6) $M(1;\pi)$.

3.4.17. Зобразіть на площині множини чисел, модуль ρ та аргумент φ яких справджують умову:

1) $\rho = 1$; 2) $\rho = 3$;

3) $\rho \le 3$; 4) $\rho > 3$;

5) $2 < \rho < 3$; 6) $1 \le \rho < 2$;

7) $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$; 8) $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$;

9) $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6}$; 10) $0 < \varphi < \pi$.

3.4.18. Зобразіть на площині множини чисел, які справджують умову:

1) $\operatorname{Re} z > 0$; 2) $\operatorname{Im} z \le 2$;

3) $\left|\operatorname{Re} z\right| < 1$; 4) $\left|\operatorname{Im} z\right| \ge 2$;

5) $\left|z\right| \le 1$; 6) $\left|z + 3 - 2i\right| > 1$;

7) $\left|z+1\right| = \left|z-1\right|$; 8) $\left|z+1\right| \ge \left|z-1\right|$;

9) $\left|z+1\right| = \left|z-i\right|$; 10) $\left|z+1\right| \le \left|z-i\right|$.

3.4.19. Обчисліть:

1) $\left(2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^{10}$; 2) $\left(3\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^{6}$;

3) $(1+i)^{25}$; 4) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)^{200}$;

5) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}$;   6) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{24}$.

3.4.20. Знайдіть усі значення коренів:

1) $\sqrt{4\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)}$;   2) $\sqrt{9\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}$;

3) $\sqrt[3]{1}$;   4) $\sqrt[4]{i}$;

5) $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$;   6) $\sqrt[3]{-2+2i}$;

7) $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$;   8) $\sqrt[4]{\dfrac{-1+i}{1-i\sqrt{3}}}$.

3.4.21. Розв'яжіть рівняння у множині комплексних чисел:

1) $z^2+2z+5=0$;   2) $4z^2-2z+1=0$;

3) $z^3-6z+9=0$;   4) $z^3-6z+4=0$;

5) $z^2-(3-2i)z+(5-5i)=0$;   6) $z^2-(3+7i)z-(10-11i)=0$.

3.4.22. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь:

1) $\begin{cases}(3-i)z_1+(4+2i)z_2=1+3i,\\(4+2i)z_1-(2+3i)z_2=7;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(2+i)z_1+(2-i)z_2=6,\\(3+2i)z_1+(3-2i)z_2=8.\end{cases}$

3.4.23. Перетворіть на добуток:

1) $\sin\varphi+\sin 2\varphi+\sin 3\varphi+\ldots+\sin n\varphi$;

2) $\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\ldots+\cos n\varphi$.

Відповіді

3.4.9. 1) $x=2, y=-1$; 2) $x=-2, y=3$.

3.4.10. 1) $z_1+z_2=5+i, z_1z_2=18-i, z_2-z_1=-1-7i, \overline{z}_2=2+3i, \dfrac{z_1}{z_2}=-\dfrac{6}{13}+\dfrac{17}{13}i.$

2) $z_1+z_2=2\sqrt{2}, z_1z_2=5, z_2-z_1=2\sqrt{3}i, \overline{z}_2=\sqrt{2}-\sqrt{3}i, \dfrac{z_1}{z_2}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2\sqrt{6}}{5}i.$

3.4.11. 1) $3+4i$; 2) $-3-4i$; 3) $-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$; 4) $-\dfrac{5}{13}+\dfrac{12}{13}i$; 5—6) $a^3-3ab^2+i(\pm 3a^2b\mp b^3)$;
7) $2+i, -2-i$; 8) $1-2i, -1+2i$.

3.4.13. 1) $1+i$; 2) $-1-i$; 3) $1+i$; 4) 0, якщо $n=4k$, i, якщо $n=4k+1$, $i-1$, якщо $n=4k+2$, -1, якщо $n=4k+3$.

3.4.14. 1) $\cos 0 + i\sin 0$; 2) $\cos\pi + i\sin\pi$; 3) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$;

4) $3\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$; 5) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;

6) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$; 7) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$;

8) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$; 9) $2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$;

10) $\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}$; 11) $\cos(\pi-\varphi) + i\sin(\pi-\varphi)$; 12) $\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$;

13) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)$; 14) $\cos(\pi+\varphi) + i\sin(\pi+\varphi)$;

15) $2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} + i\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$; 16) $2\sin\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)$.

3.4.15. 1) $10i$; 2) -12; 3) $2i$; 4) $\dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

3.4.17. 1) коло радіусом 1 з центром у т. O; 2) коло радіусом 3 з центром у т. O; 3) круг радіусом 3 із центром у т. O; 4) зовнішні точки круга; 5) кільце без своїх меж; 6) кільце без зовнішньої межі; 7), 8) промінь із т. O; 9) кут; 10) верхня відкрита півплощина.

3.4.18. 1) відкрита півплощина, праворуч від уявної осі;
2) півплощина, розташовану нижче горизонтальної прямої $y=2$;
3) вертикальна смуга;
4) зовнішність горизонтальної смуги;
5) круг радіусом 1 із центром у т. O;
6) зовнішність круга радіусом 1 із центром у т. $-3+2i$;
7) уявна вісь;
8) права півплощина;
9) бісектриса 2-ї та 4-ї чверті;
10) півплощина $x+y\le 0$.

3.4.19. 1) $2^{10}=1024$; 2) $3^6=729$; 3) $2^{12}+2^{12}i$; 4) $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $2^9 - i2^9\sqrt{3}$; 6) 2^{12}.

3.4.20. 1) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}, -\sqrt{2}-i\sqrt{2}$; 2) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}i$;

3) $1, -\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos\dfrac{1+4k}{8}\pi + i\sin\dfrac{1+4k}{8}\pi, k=0,1,2,3$;

5) $\sqrt{3}+i, -1+i\sqrt{3}, -\sqrt{3}-i, 1-i\sqrt{3}$; 6) $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right),\ k=0,1,2;$

7) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+19}{72}\pi+i\sin\frac{24k+19}{72}\pi\right),\ k=\overline{0,5};$

8) $\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\left(\cos\frac{13+24k}{48}\pi+i\sin\frac{13+24k}{48}\pi\right),\ k=\overline{0,3}.$

3.4.21. 1) $z_{1,2}=-1\pm 2i$; 2) $z_{1,2}=\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{3}}{4}i$; 3) $z_1=-3, z_{2,3}=\frac{3\pm i\sqrt{3}}{2}$;
4) $z_1=2, z_{2,3}=-1\pm\sqrt{3}$; 5) $z_1=2+i, z_2=1-3i$; 6) $z_1=2+3i, z_2=1+4i$.

3.4.22. 1) $z_1=1, z_2=i$; 2) $z_1=2+i,\ z_2=2-i$.

3.4.23. 1) $\frac{\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$; 2) $\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВМІННЯ

Основні означення	
1. Вектор. Довжина вектора. **2.** Протилежний вектор. Нульовий вектор. Одиничний вектор. Орт вектора. **3.** Кут між векторами. Взаємне розташування векторів: колінеарні вектори; компланарні вектори; ортогональні вектори; рівні вектори. **4.** Лінійні дії над векторами. **5.** Скалярний добуток векторів. **6.** Векторний добуток векторів.	**7.** Мішаний добуток векторів. **8.** Проекція вектора на вісь. **9.** Лінійно незалежна і лінійно залежна система векторів. **10.** Векторний простір. **11.** Базис векторного простору. **12.** Розклад вектора за базисом. **13.** Ортонормований базис. **14.** Орієнтація геометричних просторів. **15.** Декартова система координат. **16.** Полярна система координат. **17.** Комплексне число.
Теореми	
1. Критерій лінійної залежності векторів. **2.** Теорема про базис. **3.** Теорема про дії над векторами в координатній формі.	**4.** Критерії колінеарності векторів. **5.** Критерій ортогональності векторів. **6.** Критерій компланарності векторів.
Основні задачі	
1. Знаходити координати вектора в заданому базисі. **2.** Додавати, віднімати і множити вектори на число геометрично і в координатній формі. **3.** Досліджувати на лійнійну незалежність і лінійно залежність систему векторів. **4.** Обчислювати скалярний добуток і довжину векторного добутку за означенням. **5.** Обчислювати скалярний, векторний і мішаний добутки векторів у координатній формі. **6.** Знаходити довжину вектора.	**7.** Знаходити проекцію вектора на вісь. **8.** Знаходити кут між векторами. **9.** Знаходити напрямні косинуси вектора. **10.** З'ясовувати взаємне розташування векторів. **11.** Знаходити координати точки поділу відрізка в заданому відношенні. **12.** Знаходити віддаль між точками. **13.** Записувати комплексне число і виконувати дії над комплексними числами в алгебричній, тригонометричній і показниковій формах.

РОЗДІЛ 4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Аналітична геометрія — розділ математики, в якому досліджують геометричні образи засобами алгебричного аналізу із застосуванням методу координат.

Базовими в аналітичній геометрії є дві ідеї:

— ідея координат, яка полягає в тому, що положення точки відносно заданого базису може бути однозначно визначене її координатами;

— ідея геометричного тлумачення рівнянь, яка полягає в зіставленні алгебричного рівняння із двома (трьома) невідомими і геометричного образу на площині (у просторі).

Аналітична геометрія ефективно застосовує векторну й лінійну алгебру до геометрії.

Ключові поняття:

— *рівняння лінії;*

— *рівняння поверхні;*

— *пряма;*

— *площина;*

— *крива 2-го порядку;*

— *перетворення прямокутної декартової системи координат;*

— *поверхня 2-го порядку.*

Опанувавши цей, розділ Ви зможете:

— *записувати рівняння прямої в різних формах;*

— *записувати рівняння площини в різних формах;*

— *досліджувати взаємне розташування прямих і площин;*

— *класифікувати криві 2-го порядку за їх рівняннями;*

— *зводити рівняння геометричного образу 2-го порядку до канонічного вигляду;*

— *досліджувати поверхні 2-го порядку методом перерізів.*

Попередні знання та вміння з розділів:

— *Елементарна геометрія;*

— *Лінійна алгебра;*

— *Векторна алгебра.*

Поданий матеріал використовується в розділах:

— *Диференціальне числення функцій однієї змінної;*

— *Диференціальне числення функцій кількох змінних;*

— *Інтегральне числення функцій однієї змінної;*

— *Інтегральне числення функцій кількох змінних.*

4.1. ПРЯМІ НА ПЛОЩИНІ

В аналітичній геометрії геометричні об'єкти вивчають за допомогою методів лінійної та векторної алгебри. Таке вивчення ґрунтується на методі координат, у якому положення точки на прямій, площині чи у просторі описують відповідно одним, двома або трьома числами — координатами цієї точки. Кожній кривій (поверхні) відповідає одне або кілька рівнянь, які зв'язують координати будь-якої точки, що їй належить.

Дві основні задачі аналітичної геометрії формулюють так:

1) знаючи геометричні властивості кривої (поверхні), знайти її рівняння;

2) знаючи рівняння кривої (поверхні), вивчити її форму і властивості.

4.1.1. Лінії на площині

1. Рівняння лінії у прямокутній декартовій системі координат. Виберімо ПДСК на площині й розгляньмо деяку лінію L. В аналітичній геометрії, на відміну від елементарної геометрії, під *лінією* розуміють множину точок $M(x;y)$ площини (ще кажуть — *геометричне місце точок*), координати яких справджують рівняння $F(x,y)=0$:

$$L = \{M(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y)=0\}.$$

Означення 4.1. (рівняння лінії).

Рівнянням лінії L у заданій ПДСК називають рівняння

$$F(x,y)=0,$$

яке справджують координати x,y кожної точки M цієї лінії, і не справджують координати точок, які на лінії не лежать.

Якщо з рівняння лінії можна виразити одну з координат:

$$y=f(x) \text{ або } x=\varphi(y),$$

то такий вигляд рівняння називають *явним*.

Рівняння лінії у вигляді $F(x,y)=0$ називають *неявним*. Явне рівняння можна завжди записати у неявному вигляді:

$$f(x)-y=0.$$

2. Рівняння $F(x,y)=0$ може визначати множини точок, що не узгоджуються з інтуїтивним поняттям кривої або не визначати жодного геометричного образу.

Приміром:

1) рівняння $x^2 + y^2 = 0$ у ПДСК на площині визначає точку $O(0;0)$;

2) рівняння $\left|y\right| - y = 0$ у ПДСК на площині визначає верхню півплощину з віссю Ox;

3) рівняння $x^2 + y^2 + 1 = 0$ визначає порожню множину точок.

Рівняння лінії може містити лише одну з координат. Приміром, рівняння $y = 0$ визначає на площині пряму — вісь Ox.

3. Щоб дістати рівняння деякої лінії L, треба виразити геометричне означення (характерну властивість) лінії через координати її довільної точки.

Приміром, коло з центром у точці O та радіусом R можна розглядати як множину всіх точок, віддалених від точки O на віддаль R (рис. 4.1). Це означає, що для будь-якої точки M, що лежить на колі, $\left|MO\right| = R$. Якщо ж точка M' не лежить на колі, то $\left|M'O\right| \neq R$. Складімо рівняння цього кола.

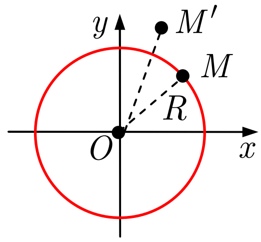


Рис. 4.1. Коло як множина точок рівновіддалених від точки

Нехай $M(x;y)$ точка кола радіусом R із центром у початку координат O. Тоді,

$$\left|OM\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = R \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2.$$

Отже, таке коло має в декартовій системі координат рівняння

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

4. Координати точки перетину ліній. Щоб знайти координати всіх точок перетину ліній L_1 та L_2, заданих рівняннями $F_1(x,y) = 0$ та . $F_2(x,y) = 0$, розв'язують систему рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x,y) = 0, \\ F_2(x,y) = 0. \end{cases}$$

Кожний розв'язок системи визначає точку перетину ліній L_1 та L_2. Якщо система не має розв'язків, то лінії L_1 та L_2 не перетинаються.

5. Класифікація плоских ліній. Задання ліній за допомогою їх рівнянь приводить до класифікації ліній залежно від властивостей цих рівнянь.

Алгебричною лінією називають таку лінію, яку можна задати в декартових координатах алгебричним рівнянням

$$F(x,y) = 0,$$

де $F(x,y)$ є цілий многочлен від змінних x,y, тобто сума скінченної кількості одночленів вигляду $ax^m y^n$ степеня $(m+n)$, де a — сталий коефіцієнт, а показники степенів натуральні числа або нулі.

Степенем многочлена називають найвищий степінь одночленів, що входять до його складу.

Алгебричні лінії поділяють залежно від *порядку* їх рівнянь — степеня многочлена, що стоїть у лівій частині рівняння.

6. Неалгебричну лінію називають *трансцендентною*.

Приміром, пряма $y - a = 0$ є алгебричною лінією 1-го порядку, коло $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ — алгебричною лінією 2-го порядку, а синусоїда $y = \sin x$ і логарифмічна крива $y = \ln x$ — трансцендентні.

7. В аналітичній геометрії передусім вивчають лінії, які у ПДСК мають алгебричні рівняння, приміром:

— 1-го порядку (коефіцієнти його можуть бути довільні, але хоча б один з коефіцієнтів a,b не дорівнює нулю)

$$ax + by + c = 0;$$

— рівняння 2-го порядку (хоча б один з коефіцієнтів a,b чи c має бути ненульовим)

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Лінія, що має алгебричне рівняння n-го степеня у ПДСК, у будь-якій іншій ПДСК має також алгебричне рівняння n-го степеня.

Із цього випливає, що алгебричний характер рівняння і його порядок є властивостями, притаманними самій лінії, тобто вони не зв'язані з вибором системи координат (інваріантні щодо системи).

8. Рівняння лінії в полярній системі координат. Вигляд рівняння лінії L залежить не лише від самої лінії, а й від вибору системи координат. Отже, для рівняння лінії суттєво вказувати систему координат, у якій це рівняння записано.

Рівнянням лінії в полярній системі координат називають рівняння

$$\Phi(\rho, \varphi) = 0,$$

яке справджують полярні координати ρ та φ всіх точок цієї лінії й лише вони.

Зокрема, рівняння лінії в полярних координатах може мати вигляд

$$\rho = \rho(\varphi).$$

Приміром, рівняння кола радіусом R із центром у полюсі: $\rho = R$.

9. Дослідімо і побудуймо кардіоїду — криву з рівнянням $\rho = a(1+\cos\varphi), a > 0,$ у полярних координатах.

Оскільки завжди $a(1+\cos\varphi) \geq 0,$ то обмежень на полярний кут немає.

Завдяки парності функції $\rho = a(1+\cos\varphi)$ крива симетрична щодо полярної осі.

Якщо полярний кут φ змінювати від 0 до π, то полярний радіус ρ змінюватиметься від $2a$ до 0. Знайдімо кілька точок на кардіоїді:

φ	0	$\pi/3$	$\pi/2$	π
ρ	$2a$	$3a/2$	a	0

Будуємо кардіоїду (рис. 4.2).

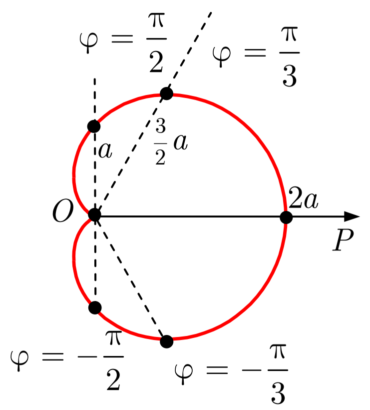


Рис. 4.2. Кардіоїда

10. Параметричні рівняння лінії у ПДСК. Нехай точка рухається вздовж деякої лінії L, а її декартові координати в кожний момент t справджують рівняння

$$x = x(t), y = y(t), t \in T.$$

Означення 4.2 (параметричних рівнянь лінії).

Параметричними рівняннями лінії L у ПДСК називають співвідношення

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

де функції $x(t)$ та $y(t)$ мають спільну область означення T.

Кожному значенню $t \in T$ відповідає точка $M(x(t);y(t)) \in L$ і для будь-якої точки $M(x;y) \in L$ знайдеться таке значення $t \in T$, що $x(t), y(t)$ є координатами точки M.

Параметричні рівняння лінії можна записати у векторному вигляді:

$$\overline{r} = \overline{r}(t), t \in T, \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, t \in T.$$

11. Векторне параметричне рівняння використовують у механіці як рівняння руху точки M, яка в кожний момент t має певні координати x, y (рис. 4.3).

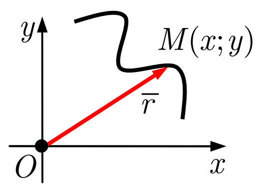


Рис. 4.3. Рух точки

Загалом параметр t — не обов'язково час, це може бути будь-яка інша величина, що характеризує положення точки на лінії.

12. Приміром, коло радіусом R із центром у початку координат має параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} t \in [0;2\pi),$$

де t — кут між радіусом-вектором точки M і додатною піввіссю осі абсцис (рис. 4.4).

Справді, для будь-якого значення t маємо

$$(R\cos t)^2 + (R\sin t)^2 = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2.$$

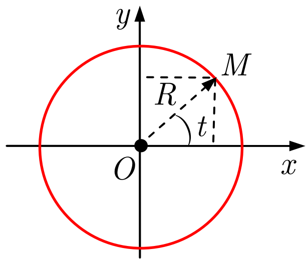


Рис. 4.4. Параметричні рівняння кола

4.1.2. Рівняння прямої на площині

Положення прямої на площині можна описати в різний спосіб. Приміром, можна задати:

1) одну з точок прямої і вектор, який паралельний прямій;

2) одну з точок прямої і вектор, який перпендикулярний до прямої;

3) дві різні точки, через які проходить пряма тощо.

Кожному з цих способів відповідає своя форма рівняння прямої.

Пряму можна задати також як множину точок рівновіддалених від двох заданих різних точок. Пряма є серединним перпендикуляром до відрізка, який сполучає ці точки.

Надалі вважатимемо, що на площині задано деяку ПДСК.

1. Параметричні й канонічне рівняння прямої. Нехай задано точку $M_0(x_0;y_0)$ і ненульовий вектор $\overline{s} = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$.

Запишімо рівняння прямої L, що проходить через точку M_0 паралельно вектору $\overline{s}$. Така пряма єдина (рис. 4.5). Точка $M(x;y)$ тоді й лише тоді належить прямій L, коли вектори $\overline{M_0M}$ та $\overline{s}$ колінеарні:

$$M \in L \Leftrightarrow \overline{M_0M} \parallel \overline{s}.$$

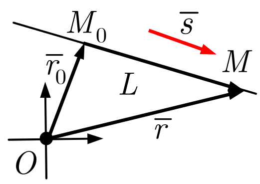


Рис. 4.5. Пряма на площині, паралельна вектору

Вектор $\overline{s}$ називають *напрямним вектором* прямої L і позначають

$$\overline{s} = \overline{s}(L).$$

З критерію колінеарності векторів $\overline{M_0M}$ та $\overline{s}$ випливає, що

$$\overline{M_0M} = t\overline{s}, t \in \mathbb{R}.$$

2. Якщо позначити радіус-вектор точки M_0 як $\overline{r}_0$, а радіус-вектор точки M як $\overline{r}$, то з умови коліненеарності векторів $\overline{M_0M} = \overline{r} - \overline{r}_0$ та $\overline{s}$ дістаємо *векторне параметричне рівняння* прямої

$$\boxed{\overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{s}, t \in \mathbb{R}.}$$

Розписуючи ці рівняння в координатній формі, дістаємо *параметричні рівняння* прямої L на площині

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, t \in \mathbb{R}. \end{cases}}$$

3. Якщо $t \in \mathbb{R}$, то параметричні рівняння описують усю пряму, якщо $t \in (-\infty; b]$ або $t \in [a; +\infty)$, то описують півпряму (промінь), а якщо $t \in [a; b], a, b \in \mathbb{R}$, то — відрізок.

4. Ураховуючи, що в колінеарних векторів пропорційні координати, дістаємо *канонічне рівняння* прямої L на площині:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.}$$

Якщо $l = 0$ канонічне рівняння задає вертикальну пряму $x = x_0$, при $m = 0$ — горизонтальну пряму $y = y_0$.

5. Рівняння прямої через дві точки. Нехай задано дві різні точки $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$. Запишімо рівняння прямої L, яка проходить через ці точки. Така пряма єдина.

Точка $M(x; y)$ тоді й лише тоді належить прямій L, коли вектори $\overline{M_1M} = \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix}$ та $\overline{M_1M_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \neq \overline{0}$ колінеарні. Ураховуючи, що їх координати пропорційні, дістаємо канонічне *рівняння прямої, яка проходить через дві точки*:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.}$$

6. Нехай задано точку $M_0(x_0; y_0)$ і ненульовий вектор $\overline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Запишімо рівняння прямої L, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{n}$. Така пряма єдина (рис. 4.6).

Точка $M(x;y)$ тоді й лише тоді належить прямій L, коли вектори $\overline{M_0M}$ та $\overline{n}$ перпендикулярні:

$$M \in L \Leftrightarrow \overline{M_0M} \perp \overline{n}.$$

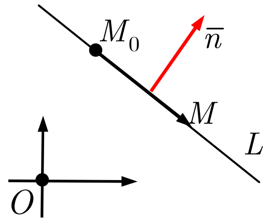


Рис. 4.6. Пряма на площині, перпендикулярна до вектора

Вектор $\overline{n}$ називають *нормальним вектором* прямої L і позначають

$$\overline{n} = \overline{n}(L).$$

7. З критерію ортогональності векторів $\overline{M_0M}$ та $\overline{n}$ дістаємо *рівняння* прямої, *яка проходить через точку* $M_0(x_0;y_0)$ *перпендикулярно до вектора* $\overline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$(\overline{M_0M}, \overline{n}) = 0 \Leftrightarrow \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.}$$

8. Загальне рівняння прямої на площині. Розкриваючи дужки і позначаючи $c = -ax_0 - by_0$, дістаємо *загальне рівняння* прямої з нормальним вектором $\overline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$\boxed{ax + by + c = 0.}$$

Теорема 4.1 (про пряму на площині як лінію 1-го порядку).

Будь-яку пряму на площині можна задати лінійним рівнянням у ПДСК. Будь-яке лінійне рівняння у ПДСК на площині задає пряму.

Доведення. Першу частину теорему вже доведено в п. 7 та 8.

Доведімо другу: якщо задано рівняння

$$ax + by + c = 0,$$

де хоча б один з коефіцієнтів a чи b відмінний від нуля, то це рівняння задає пряму.

Нехай, приміром, $b \neq 0$. Тоді рівняння можна переписати у вигляді

$$a(x - 0) + b\left(y - \left(-\frac{c}{b}\right)\right) = 0.$$

Згідно з п. 7 таке рівняння означує пряму, що проходить через точку $M_0\left(0;-\frac{c}{b}\right)$ перпендикулярно до вектора $\overline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. ■

Отже, єдиною лінією 1-го порядку є пряма.

9. Окремі випадки загального рівняння прямої на площині. Дослідімо, як розміщена пряма відносно ПДСК, коли деякі коефіцієнти в загальному рівнянні дорівнюють нулю.

Можливі такі випадки:

1) якщо $a = 0$, то пряма $by + c = 0$ паралельна осі Ox, а її нормальний вектор $\overline{n} = b\overline{j}$, перпендикулярний до цієї осі;

2) якщо $b = 0$, то пряма $ax + c = 0$ паралельна осі Oy, а її нормальний вектор $\overline{n} = a\overline{i}$ перпендикулярний до цієї осі;

3) якщо $c = 0$, то пряма $ax + by = 0$ проходить через початок координат;

4) якщо $a = c = 0$, то пряма $by = 0$ зливається з віссю Ox. Отже, вісь Ox має рівняння $y = 0$;

5) якщо $b = c = 0$, то пряма $ax = 0$ зливається з віссю Oy. Отже, вісь Oy має рівняння $x = 0$.

10. Зведімо всі випадки виродження (рівності нулю коефіцієнтів) рівняння прямої до таблиці, де 0 означає, що відповідний коефіцієнт нульовий, а $\not 0$ — відповідний коефіцієнт ненульовий (рис. 4.7).

a	b	c	Висновок	a	b	c	Висновок
0	0	$\not 0$	$L = \varnothing$	$\not 0$	0	0	$L = Oy$
0	$\not 0$	0	$L = Ox$	$\not 0$	0	$\not 0$	$L \parallel Oy$
0	$\not 0$	$\not 0$	$L \parallel Ox$	$\not 0$	$\not 0$	0	$O \in L$

Рис. 4.7. Неповні рівняння прямої на площині

11. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Нехай задано точку $M_0(x_0; y_0)$, яка лежить на прямій L і кут α, який утворює пряма з додатним напрямом осі Ox. Тангенс кута нахилу α прямої L до осі Ox називають *кутовим коефіцієнтом* прямої і позначають $k = \operatorname{tg}\alpha$. Знайдімо рівняння прямої L.

Розгляньмо канонічне рівняння прямої L

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$

Якщо напрямний вектор прямої $\overline{s}$ є ортом, то

$$\overline{s} = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Коли $\alpha = \frac{\pi}{2}$ і $l = 0$, то рівняння набуває вигляду $x - x_0 = 0$ (можна вважати, що $k = \infty$).

Якщо $l \neq 0$, то після перетворення дістаємо *рівняння* прямої *з кутовим коефіцієнтом* (рис. 4.8):

$$y = y_0 + \frac{m}{l}(x - x_0) \Leftrightarrow y = y_0 + k(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{y = kx + \tilde{b},}$$

де $k = \frac{m}{l} = \operatorname{tg}\alpha$; $\tilde{b} = y_0 - \frac{m}{l}x_0$.

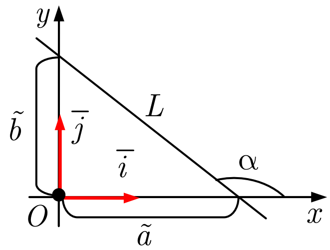


Рис. 4.8. Кутовий коефіцієнт прямої і відрізки, які відтинає пряма

Якщо $\tilde{b} = 0$, то пряма проходить через початок координат.

12. Рівняння прямої у відрізках. Якщо пряма проходить через точки $A(\tilde{a};0)$ та $B(0;\tilde{b})$, тобто відтинає на осях відрізки $\tilde{a} \neq 0$ та $\tilde{b} \neq 0$, то з рівняння прямої, яка проходить через дві точки одержимо *рівняння прямої у відрізках* (див. рис. 4.8):

$$\frac{x - \tilde{a}}{0 - \tilde{a}} = \frac{y - 0}{\tilde{b} - 0}; -\frac{x}{\tilde{a}} + 1 = \frac{y}{\tilde{b}};$$

$$\boxed{\frac{x}{\tilde{a}} + \frac{y}{\tilde{b}} = 1.}$$

13. Нормоване рівняння прямої на площині. Нехай задано пряму L. Через точку O проведімо пряму L', перпендикулярну до прямої L, і позначимо кут нахилу прямої L' до осі Ox через α, точку її перетину з прямою L — через H, а довжину відрізка OH — через p (рис. 4.9).

Напрям нормалі від O до H уважатимемо за додатний. Величини α та p цілком визначають положення прямої L на площині.

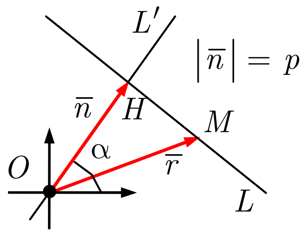


Рис. 4.9. Нормоване рівняння прямої

Отже, орт нормального вектора $\bar{n} = \overline{OH}$ має координати

$$\bar{n}^0 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Ураховуючи, що проекція радіуса-вектора $\bar{r} = \overline{OM}$ довільної точки $M(x;y)$ прямої на напрям нормального вектора

$$\operatorname{pr}_{\bar{n}} \bar{r} = (\bar{r}, \bar{n}^0) = x\cos\alpha + y\sin\alpha = p,$$

дістаємо *нормоване рівняння* прямої на площині

$$\boxed{x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,}$$

де $p \geq 0$ виражає віддаль прямої від початку координат.

14. Умовами «нормованості» загального рівняння

$$ax + by + c = 0$$

прямої на площині є:

1) $a^2 + b^2 = 1$;

2) $c \leq 0$.

Загальне рівняння прямої можна перетворити на нормоване, помноживши його на *нормувальний множник*

$$\mu = -\frac{\operatorname{sgn} c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

4.1.3. Взаємне розташування прямих на площині

Нехай дві прямі на площині задано:

а) або загальними рівняннями:

$$L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0, L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

б) або канонічними рівняннями

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1}, L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2},$$

в) або рівняннями з кутовими коефіцієнтами

$$L_1 : y = k_1x + b_1, L_2 : y = k_2x + b_2.$$

1. Кут між прямими. Дві перетинні прямі утворюють два суміжних кути (рис. 4.10).

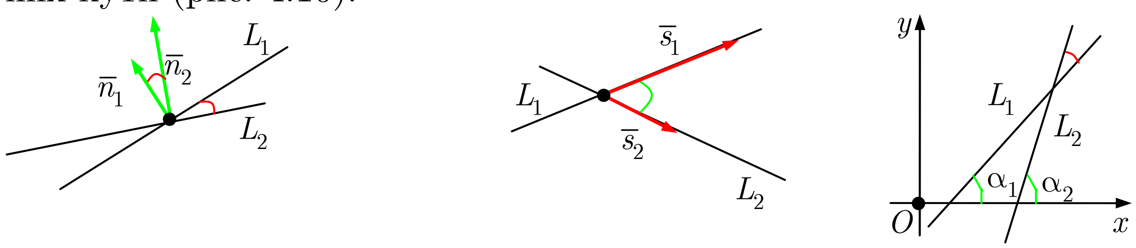


Рис. 4.10. Кут між прямими

Один з цих кутів можна знайти як:

а) кут між нормальними векторами прямих, тобто

$$\boxed{\cos(\widehat{L_1, L_2}) = \cos(\widehat{\bar{n}_1, \bar{n}_2}) = \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|},}$$

б) кут між напрямними векторами прямих, тобто

$$\boxed{\cos(\widehat{L_1, L_2}) = \cos(\widehat{\bar{s}_1, \bar{s}_2}) = \frac{(\bar{s}_1, \bar{s}_2)}{|\bar{s}_1||\bar{s}_2|},}$$

в) як різницю кутів нахилу прямих, тобто

$$\boxed{\operatorname{tg}(\widehat{L_1, L_2}) = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.}$$

2. Дві прямі на площині можуть бути перетинними або паралельними, зокрема зливатись.

Через будь-яку точку, що не лежить на заданій прямій можна провести лише одну пряму, яка паралельна заданій.

3. Умови паралельності двох прямих. Прямі на площині L_1 та L_2 *паралельні* (рис. 4.11) тоді й лише тоді, коли:

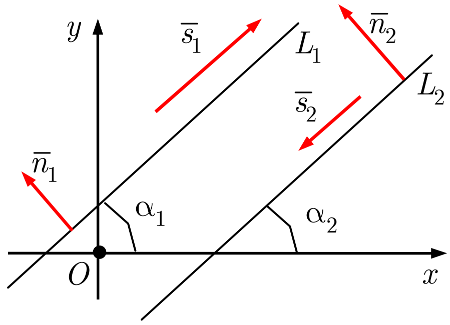


Рис. 4.11. Паралельні прямі

а) їх нормальні вектори $\bar{n}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ та $\bar{n}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ колінеарні, тобто

$$\boxed{L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0;}$$

б) їх напрямні вектори $\bar{s}_1 = \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix}$ та $\bar{s}_2 = \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \end{pmatrix}$ колінеарні, тобто

$$\boxed{L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2;}$$

в) їх кути нахилу α_1 та α_2 рівні, тобто

$$\boxed{L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2.}$$

Якщо виконано одну з умов:

а) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$;

б) $\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2 \nparallel \overline{M_1 M_2}$, де $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$;

в) $k_1 = k_2, b_1 \neq b_2$,

то прямі L_1 та L_2 *паралельні різні* (не мають спільних точок).

Якщо виконано одну з умов:

а) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$;

б) $\overline{s}_1 \parallel \overline{s}_2 \parallel \overline{M_1M_2}$;

в) $k_1 = k_2, b_1 = b_2$,

то прямі L_1 та L_2 *зливаються*.

4. Умови перетинності двох прямих. Прямі на площині L_1 та L_2 *перетинаються* (мають лише одну спільну точку) (рис. 4.12) тоді й лише тоді, коли:

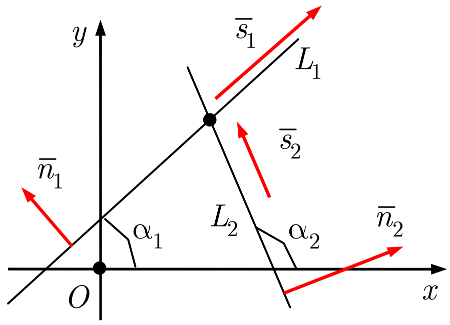


Рис. 4.12. Перетинні прямі

а) $\overline{n}_1 \nparallel \overline{n}_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$;

б) $\overline{s}_1 \nparallel \overline{s}_2 \Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2} \neq \dfrac{m_1}{m_2}$;

в) $k_1 \neq k_2$.

5. Умови перпендикулярності двох прямих. Прямі на площині L_1 та L_2 *перпендикулярні* тоді й лише тоді, коли:

а) їх нормальні вектори $\overline{n}_1$ та $\overline{n}_2$ перпендикулярні, тобто

$$\boxed{L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 \perp \overline{n}_2 \Leftrightarrow (\overline{n}_1, \overline{n}_2) = 0;}$$

б) їх напрямні вектори $\overline{s}_1$ та $\overline{s}_2$ перпендикулярні, тобто

$$\boxed{L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overline{s}_1 \perp \overline{s}_2 \Leftrightarrow (\overline{s}_1, \overline{s}_2) = 0;}$$

в) їх кути нахилу α_1 та α_2 зв'язані співвідношенням $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{2} + \alpha_1$, тобто

$$\boxed{L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2}.}$$

Справді,

$$k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) = -\operatorname{ctg}\alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1} = -\frac{1}{k_1}.$$

6. Віддаль від точки до прямої на площині. На площині задано пряму $L : ax + by + c = 0$ і точку $M_0(x_0; y_0)$. Знайдімо віддаль d від точки M_0 до прямої L (рис. 4.13).

Нехай M_1 — будь-яка точка прямої L. Тоді шукана віддаль

$$d = \left|\operatorname{pr}_{\overline{n}} \overline{M_1M_0}\right| = \left|\frac{(\overline{M_1M_0}, \overline{n})}{|\overline{n}|}\right|,$$

де $\overline{n}$ — будь-який нормальний вектор прямої L.

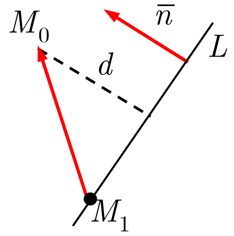


Рис. 4.13. Віддаль від точки до прямої

Підставляючи координати векторів

$$\overline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \overline{M_1M_0} = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{pmatrix},$$

у формулу маємо

$$d = \frac{\left|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

і враховуючи, що координати точки M_1 справджують рівняння прямої

$$L : ax_1 + by_1 + c = 0,$$

дістаємо формулу *віддалі від точки* M_0 *до прямої* L на площині:

$$\boxed{d(M_0, P) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.}$$

7. Віддаль між паралельними прямими L_1 та L_2 можна знайти як віддаль від будь-якої точки прямої L_1 до прямої L_2.

8. Нехай пряму L задано нормованим рівнянням

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0.$$

Відхиленням точки M_0 *від прямої* L на площині називають число

$$\delta(M_0, L) = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p =$$
$$= -\operatorname{sgn} c \cdot \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Отже,

$$d(M_0, L) = \left|\delta(M_0, L)\right|.$$

9. Пряма L розбиває множину всіх точок площини на три підмножини:

$$\mathbb{A}^+ = \{M \notin L \mid \delta(M, L) > 0\};$$
$$L = \{M \in L \mid \delta(M, L) = 0\};$$
$$\mathbb{A}^- = \{M \notin L \mid \delta(M, L) < 0\}.$$

Початок координат — точка $O \in \mathbb{A}^-$ або $O \in L$.

4.2. КРИВІ 2-ГО ПОРЯДКУ

Єдиною лінією 1-го порядку на площині є пряма. Широке застосування і цікаві властивості мають лінії, які задано в декартовій системі координат рівняннями 2-го порядку від змінних x та y.

4.2.1. Лінія 2-го порядку

1. Означення 4.3 (лінії 2-го порядку).

Лінією 2-го порядку на площині називають множину точок площини, прямокутні координати $(x;y)$ яких справджують алгебричне рівняння 2-го порядку:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

де a_{11}, a_{12}, a_{22} — не рівні разом нулю.

До *кривих 2-го порядку* належать: коло, еліпс, парабола та гіпербола.

2. Коло. Підсумуємо відомості про цю важливу криву. *Коло* є множиною всіх точок площини, рівновіддалених від однієї точки — *центра* кола. Відрізок, який сполучає центр кола з будь-якою його точкою, а також довжину цього відрізка називають *радіусом* кола.

У ПДСК коло з центром у початку координат O радіусом a *має канонічне рівняння*

$$\boxed{x^2 + y^2 = a^2.}$$

Коло можна задати параметричними рівняннями

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad t \in [0;2\pi).}$$

У полярній системі координат коло з центром у полюсі радіусом a має рівняння

$$\boxed{\rho = a.}$$

4.2.2. Еліпс

1. *Еліпсом* називають криву на площині, яка в деякій ПДСК має рівняння

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a \geq b > 0.}$$

Це рівняння називають *канонічним рівнянням* еліпса, а систему — *канонічною системою* еліпса.

Якщо $a = b$, рівняння еліпса переходить у рівняння кола з центром у точці O радіусом a.

2. Еліпс можна задати параметричними рівняннями:

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} t \in [0, 2\pi).}$$

3. З рівнянь еліпса випливає, що:

1) еліпс міститься у прямокутнику $\{(x,y) : |x| \leq a, |y| \leq b\}$;

2) осі Ox і Oy є осями симетрії еліпса, а точка O — його центром симетрії, тобто якщо точка $M_0(x_0;y_0)$ належить еліпсу, то й точки $(-x_0;y_0)$, $(-x_0;-y_0)$ та $(x_0;-y_0)$ також йому належать;

3) еліпс перетинає осі координат у точках $A_1(-a;0), A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ (рис. 4.14);

Еліпс можна одержати стисканням кола $x^2 + y^2 = a^2$ вздовж осі Oy з коефіцієнтом $\frac{b}{a}$ (рис. 4.15).

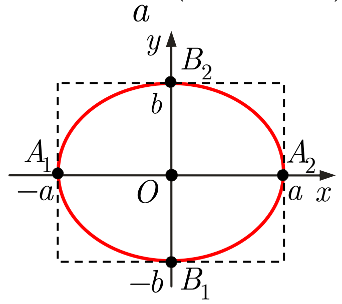


Рис. 4.14. Еліпс

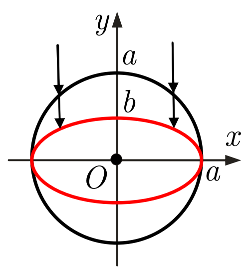


Рис. 4.15. Еліпс як стиснене коло

4. Еліпс із точністю до знаків (тобто орієнтації осей) визначає свої канонічні координати, з якими, за умови, що $b < a$ зв'язані такі характеристики (рис. 4.16):

число a — *велика піввісь*;

число b — *мала піввісь*;

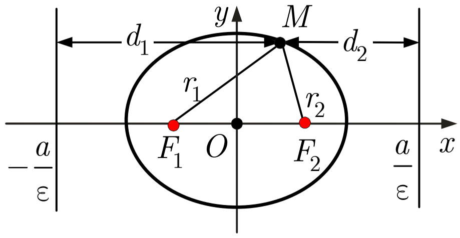


Рис. 4.16. Характеристики еліпса

число $c = \sqrt{a^2 - b^2}$;

число $2c = |F_1F_2|$ — *фокусна віддаль*;

число $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$ — *ексцентриситет* $(0 \le \varepsilon < 1)$;

число $p = \dfrac{b^2}{a}$ — *фокальний параметр*;

вісь абсцис — *велика (фокальна) вісь*;

вісь ординат — *мала вісь*;

точка $O(0;0)$ — *центр*;

точки $(\pm a;0),(0;\pm b)$ — *вершини*;

точки $(\pm c;0)$ — *фокуси*;

прямі $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}, \varepsilon \ne 0$ — *директриси*.

Фокус $F_2(c;0)$ і директрису $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ називають *правими*, а фокус $F_1(-c;0)$ та директрису $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ — *лівими*; d_1 та d_2 — віддалі від точки еліпса до лівої та правої директрис.

Для будь-якого кола $b = a, c = 0, \varepsilon = 0, p = a$, фокуси зливаються з центром, директриси не означені.

Віддалі будь-якої точки $M(x;y)$ еліпса від фокусів називають *фокальними радіусами* цієї точки:

$$|F_1M| = a + \varepsilon x = r_1;$$
$$|MF_2| = a - \varepsilon x = r_2.$$

5. Еліпс є множина точок, сума віддалей яких від фокусів стала і більша за віддаль між фокусами:

$$\boxed{r_1 + r_2 = 2a > 2c.}$$

Цю властивість еліпса називають *фокальною*. Її можна використати для інваріантного (незалежного від системи координат) означення еліпса.

4.2.3. Парабола

1. *Параболою* називають криву на площині, яка в деякій ПДСК має рівняння

$$\boxed{y^2 = 2px, p > 0.}$$

Це рівняння називають *канонічним рівнянням* параболи, а ПДСК — *канонічною ПДСК* параболи.

2. З канонічного рівняння параболи випливає, що:

1) парабола розташована у правій півплощині $x \geq 0$;

2) вісь Ox — вісь симетрії;

3) парабола перетинає вісь абсцис у точці $O(0;0)$.

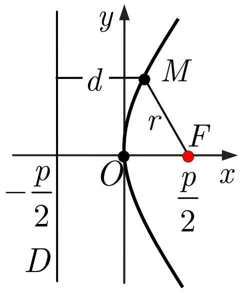


Рис. 4.17. Парабола

3. Парабола з точністю до орієнтації осі ординат визначає свої канонічні координати, з якими зв'язані такі характеристики (рис. 4.17):

число p — *фокальний параметр*;

число $\frac{p}{2}$ — *фокусна віддаль*;

вісь абсцис — *фокальна вісь*;

точка $A(0;0)$ — *вершина*;

точка $\left(\frac{p}{2};0\right)$ — *фокус*;

пряма $x = -\frac{p}{2}$ — *директриса*.

Ексцентриситет параболи $\varepsilon = 1$. *Фокальний радіус* $r = x + \frac{p}{2}$. Число d — віддаль від точки параболи до директриси.

4. Парабола є множиною точок, що рівновіддалені від фокуса й директриси:

$$\boxed{r = d.}$$

4.2.4. Гіпербола

1. *Гіперболою* називають криву на площині, яку в деякій ПДСК задає рівняння

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, a,b>0.}$$

Це рівняння називають *канонічним рівнянням* гіперболи, а ПДСК — *канонічною ПДСК* гіперболи.

2. Гіперболу можна задати параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x=\pm a\operatorname{ch}t, \\ y=b\operatorname{sh}t, t\in\mathbb{R} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x=\dfrac{a}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right), \\ y=\dfrac{b}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right), \left|t\right|\geq 1. \end{cases}$$

3. З канонічного рівняння гіперболи випливає (рис. 4.18):

1) для всіх точок гіперболи $\left|x\right|\geq a$, тобто гіпербола розташована за межами смуги $\{(x,y):\left|x\right|<a\}$;

2) осі Ox та Oy є осями симетрії гіперболи, а точка O — її центром симетрії;

3) гіпербола перетинає лише вісь абсцис у точках $A_1(-a;0), A_2(a;0)$;

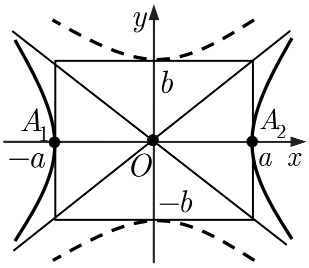


Рис. 4.18. Гіпербола

4) гіпербола має асимптоти $y=\pm\dfrac{b}{a}x$.

4. Гіпербола з точністю до знаків (тобто орієнтації осей) визначає свої канонічні координати, з якими зв'язані такі характеристики (рис. 4.19):

число a — *дійсна піввісь*;

число b — *уявна піввісь*;

число $c=\sqrt{b^2+a^2}$;

число $2c=\left|F_1F_2\right|$ — *фокусна віддаль*;

число $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$ — *ексцентриситет* ($\varepsilon>1$);

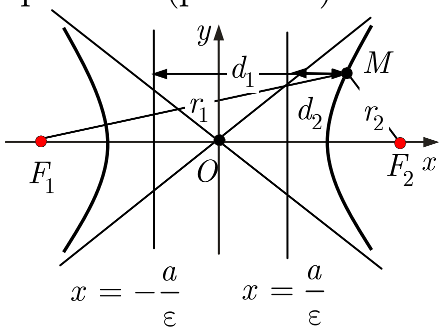


Рис. 4.19. Характеристики гіперболи

число $p=\dfrac{b^2}{a}$ — *фокальний параметр*;

вісь абсцис — *дійсна (фокальна) вісь*;

вісь ординат — *уявна вісь*;

точка $O(0;0)$ — *центр*;

точки $(\pm a;0)$ — *вершини*;

точки $(\pm c;0)$ — *фокуси*;

прямі $x=\pm\frac{a}{\varepsilon},\varepsilon\neq 0$ — *директриси*.

Лівий та правий *фокальні радіуси*:

$$r_1=\begin{cases}a+\varepsilon x, & x>a,\\ -a-\varepsilon x, & x<-a;\end{cases}\quad r_2=\begin{cases}-a+\varepsilon x, & x>a,\\ a-\varepsilon x, & x<-a;\end{cases}$$

$$r_1-r_2=\begin{cases}2a, & x>a,\\ -2a, & x<-a\end{cases}\Rightarrow |r_1-r_2|=2a.$$

Числа d_1 та d_2 — віддалі від точки гіперболи до лівої та правої директрис.

5. Гіпербола є множиною точок, модуль різниці віддалей яких від фокусів є стала величина, менша від віддалі між фокусами:

$$\boxed{|r_1-r_2|=2a<2c.}$$

Цю властивість гіперболи називають *фокальною*. Її можна використати для інваріантного (незалежного від системи координат) означення гіперболи.

4.2.5. Спільні властивості кривих 2-го порядку

Нехай точка $M(x;y)$ належить лінії 2-го порядку.

1. Фокально-директоріальна властивість. Віддалі від точки M до лівої та правої директрис еліпса:

$$d_1=\left|x+\frac{a}{\varepsilon}\right|=\frac{|\varepsilon x+a|}{\varepsilon}=\frac{r_1}{\varepsilon};\ d_2=\left|x-\frac{a}{\varepsilon}\right|=\frac{|\varepsilon x-a|}{\varepsilon}=\frac{r_2}{\varepsilon}.$$

Отже,

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon<1.$$

Віддаль точки M до директриси параболи

$$d=x+\frac{p}{2}=r.$$

Отже,

$$\frac{r}{d}=\varepsilon=1.$$

Для гіперболи правдиве співвідношення:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon > 1.$$

Теорема 4.2 (про фокальну-директоріальну властивість). Еліпс, парабола, гіпербола є множинами точок, для яких відношення фокального радіуса r до віддалі точки до відповідної директриси d є сталим і дорівнює ексцентриситету ε.

2. Оптичні властивості кривих 2-го порядку. Якщо помістити в один з фокусів еліпса точкове джерело світла, то всі промені після відбиття від еліпса зійдуться в іншому його фокусі (рис. 4.20).

Якщо помістити у фокус параболи точкове джерело світла, то всі промені, відбиті від параболи, спрямуються паралельно фокальній осі параболи (рис. 4.21).

Ця властивість обґрунтовує форму параболічних антен, дзеркал для прожекторів тощо.

Якщо помістити в один з фокусів гіперболи точкове джерело світла, то кожний промінь після відбиття від гіперболи начебто виходить з іншого фокуса (рис. 4.22).

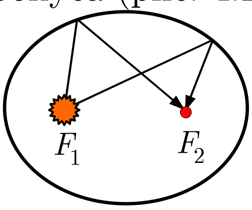


Рис. 4.20. Оптична властивість еліпса

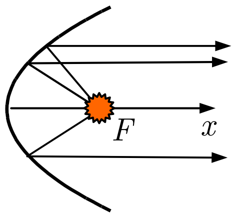


Рис. 4.21. Оптична властивість параболи

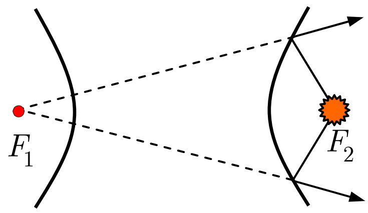


Рис. 4.22. Оптична властивість гіперболи

3. Рівняння кривих 2-го порядку в полярних координатах. Якщо полюс полярної системи координат вибрати для еліпса в лівому фокусі, параболи — у фокусі, гіперболи — у правому фокусі; полярною віссю вибрати фокальну вісь і спрямувати її зліва направо, то еліпс, парабола та права гілка гіперболи в полярних координатах мають рівняння (рис. 4.23)

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.}$$

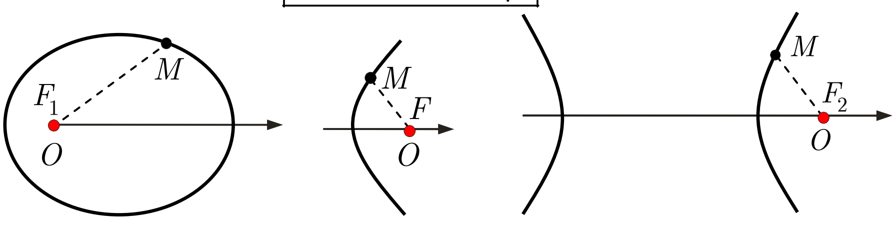


Рис. 4.23. Криві 2-го порядку в полярній системі координат

4.3. ЗВЕДЕННЯ РІВНЯННЯ ЛІНІЙ 2-ГО ПОРЯДКУ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ

За допомогою геометричних перетворень декартових прямокутних координат будь-яке рівняння лінії 2-го порядку можна звести до канонічного вигляду.

4.3.1. Квадратичні форми

1. Для дослідження ліній і поверхонь 2-го порядку зручно розвинути певний математичний апарат лінійної алгебри.

Розгляньмо симетричну матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, тобто $a_{12} = a_{21}$.

Означення 4.4 (квадратичної форми).

Вираз

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2$$

називають *квадратичною формою* змінних x_1, x_2.

Матрицю A називають *матрицею* квадратичної форми.

2. Упорядкований набір чисел x_1, x_2 можна розглядати як координати вектора $\overline{x} \in \mathbb{V}^2$ в деякому ортонормованому базисі $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ простору $\mathbb{V}^2$, тобто

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2.$$

Тоді квадратична форма

$$Q(\overline{x}) = Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2.$$

є числовою функцією векторного аргументу $\overline{x}$, яка означена в усьому просторі $\mathbb{V}^2$.

3. Приміром,

$$Q(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2$$

є квадратичною формою змінних $x_1 = x, x_2 = y$ з коефіцієнтами

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = a_{21} = -\frac{3}{2}, \quad a_{22} = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратична форма $Q(\overline{x})$ має у вибраному базисі *канонічний вигляд*, якщо матриця квадратичної форми в цьому базисі діагональна, тобто $a_{12} = a_{21} = 0$.

4. Для будь-якої квадратичної форми існує базис, у якому вона має канонічний вигляд.

4.3.2. Власні числа і власні вектори матриці

1. Означення 4.5. (власного вектора і власного числа матриці).

Ненульовий стовпець $\vec{x}$ називають *власним вектором* квадратної матриці $A_{2\times2}$, якщо існує таке число λ, що

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \quad \vec{x} \neq \vec{0}.$$

Число λ називають *власним числом* матриці A, що відповідає власному вектору $\vec{x}$.

2. Матричне рівняння $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ еквівалентне однорідній системі лінійних алгебричних рівнянь

$$(A - \lambda E_2)\vec{x} = \vec{0},$$

де E_2 — одинична матриця 2-го порядку.

Ця система (а, отже, і матричне рівняння) матиме ненульові розв'язки, якщо

$$\operatorname{rang}(A - \lambda E_2) < 2 \Leftrightarrow \left|A - \lambda E_2\right| = 0.$$

3. Матрицю

$$A - \lambda E_2 = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix},$$

де λ — незалежна змінна, називають *характеристичною матрицею* матриці A.

Визначник характеристичної матриці

$$\left|A - \lambda E_2\right| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}$$

називають *характеристичним многочленом* матриці A.

Рівняння

$$\boxed{\left|A - \lambda E_2\right| = 0}$$

називають *характеристичним рівнянням* матриці A.

Дістаньмо явний вигляд характеристичного рівняння:

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}=0;$$
$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0;$$
$$\boxed{\lambda^2-\operatorname{tr}A+\det A=0.}$$

4. Власні числа матриці A є коренями характеристичного многочлена $\left|A-\lambda E_2\right|$ цієї матриці. Власні вектори є ненульовими розв'язками однорідної СЛАР

$$(A-\lambda E_2)\vec{x}=\vec{0}.$$

5. Кількість власних чисел матриці скінченна, натомість кількість власних векторів — нескінченна, оскільки нескінченною є множина розв'язків виродженої однорідної системи.

4.3.3. Перетворення ПДСК на площині

Нехай на площині задано дві прямокутні декартові системи координат Oxy та $O'x'y'$.

Нехай довільна точка M у системі Oxy має координати $(x;y)$, а в системі $O'x'y'$ — координати $(x';y')$. Установімо зв'язок між цими координатами.

1. Паралельне перенесення координатних осей. Припустімо, що ПДСК $O'x'y'$ одержана із ПДСК Oxy *паралельним перенесенням*. Це означає, що орти координатних осей рівні $\overline{i}=\overline{i}',\overline{j}=\overline{j}'$, а початки координат різні (рис. 4.24).

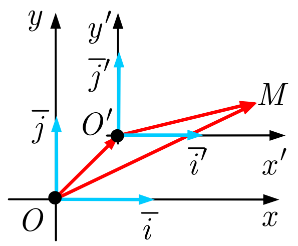


Рис. 4.24. Паралельне перенесення

Нехай $\overline{r}$ та $\overline{r}'$ — радіуси-вектори точки M відносно точок O та O', тобто

$$\overline{r}=x\overline{i}+y\overline{j},$$
$$\overline{r}'=x'\overline{i}+y'\overline{j},$$

а $(a;b)$ — координати точки O' у ПДСК Oxy, тобто

$$\overline{OO'}=a\overline{i}+b\overline{j}.$$

Оскільки

$$\overline{r}=\overline{r}'+\overline{OO'},$$

то

$$x\overline{i}+y\overline{j}=(x'\overline{i}+y'\overline{j})+(a\overline{i}+b\overline{j}),$$

або

$$\boxed{\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b. \end{cases}}$$

2. Повертання координатних осей. Припустімо, що координатні осі ПДСК $Ox'y'$ одержано з координатних осей ПДСК Oxy *повертанням* на кут φ. Отже, системи мають різні базиси $\{\overline{i}, \overline{j}\}$ та $\{\overline{i}', \overline{j}'\}$, але спільні початки координат (рис. 4.25).

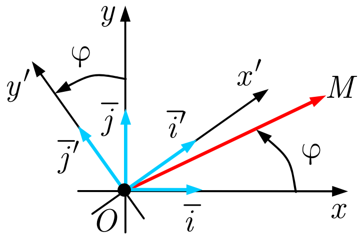


Рис. 4.25. Повертання координатних осей

Координатами орта $\overline{i}'$ в базисі $\{\overline{i}, \overline{j}\}$ є косинуси кутів φ та $\frac{\pi}{2} - \varphi$, які утворює вектор $\overline{i}'$ відповідно з осями Ox та Oy:

$$\overline{i}' = \overline{i}\cos\varphi + \overline{j}\sin\varphi,$$

а координатами орта $\overline{j}'$ є косинуси кутів $\varphi + \frac{\pi}{2}$ та φ:

$$\overline{j}' = -\overline{i}\sin\varphi + \overline{j}\cos\varphi.$$

Оскільки радіуси-вектори $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j}$ та $\overline{r}' = x'\overline{i}' + y'\overline{j}'$ довільної точки M рівні, то

$$x\overline{i} + y\overline{j} = x'\overline{i}' + y'\overline{j}'.$$

Замінюючи вектори $\overline{i}$ та $\overline{j}$ їхніми виразами, дістаємо:

$$\begin{aligned} x\overline{i} + y\overline{j} &= x'(\overline{i}\cos\varphi + \overline{j}\sin\varphi) + y'(-\overline{i}\sin\varphi + \overline{j}\cos\varphi) = \\ &= (x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)\overline{i} + (x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)\overline{j}, \end{aligned}$$

або

$$\boxed{\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases}}$$

Ураховуючи, що стару систему координат можна одержати з нової повертанням на кут $(-\varphi)$, маємо, що нові координати виражаються через старі так:

$$\boxed{\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases}}$$

3. Приміром, знайдімо рівняння гіперболи $y = \frac{1}{x}$ у ПДСК, одержаної з початкової ПДСК повертанням на кут $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (рис. 4.26).

Підставляючи формули перетворення координат

$$\begin{cases} x = x'\cos\dfrac{\pi}{4} - y'\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{x'}{\sqrt{2}} - \dfrac{y'}{\sqrt{2}}, \\ y = x'\sin\dfrac{\pi}{4} + y'\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{x'}{\sqrt{2}} + \dfrac{y'}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

у рівняння гіперболи $xy = 1$, дістаємо:

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$$

— канонічне рівняння рівнобічної гіперболи.

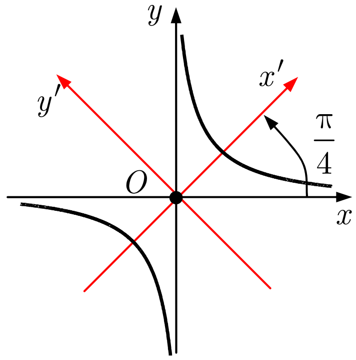


Рис. 4.26. Гіпербола в різних системах координат

4. Переорієнтування координатних осей. Припустімо, що осі Ox та Ox' координатних систем збігаються, а осі ординат Oy та Oy' напрямлені протилежно (систему Oxy' одержано *переорієнтуванням* системи Oxy) (рис. 4.27).

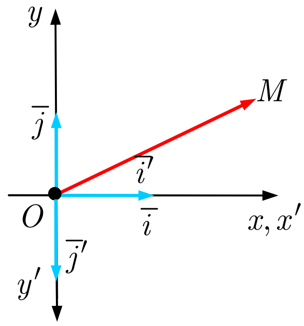


Рис. 4.27. Переорієнтування координатних осей

Базисні вектори систем зв'язані співвідношеннями

$$\overline{i} = \overline{i}', \ \overline{j} = -\overline{j}',$$

а координати $(x;y)$ та $(x';y')$ довільної точки M зв'язані рівностями:

$$\begin{cases} x = x', \\ y = -y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

4.3.4. Побудова канонічних систем координат для кривих 2-го порядку

1. Окремі випадки перетворення ПДСК.

А. Лінія з рівнянням

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = a^2, a > 0$$

є колом (рис. 4.28). Канонічну систему координат для цього кола дістаємо із заданої паралельним перенесенням початку координат у точку $(x_0;y_0)$.

Б. Лінія з рівнянням

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, a \geq b > 0,$$

є еліпсом (рис. 4.29). Канонічну систему координат для цього еліпса дістаємо із заданої повертанням на кут $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

В. Лінія з рівнянням

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1, a>b>0,$$

є еліпсом (рис. 4.30). Канонічну систему координат для цього еліпса дістаємо із заданої паралельним перенесенням початку координат у точку $(x_0;y_0)$.

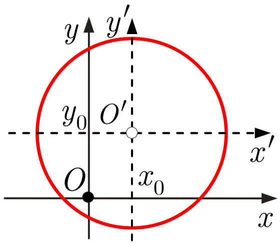


Рис. 4.28. Коло

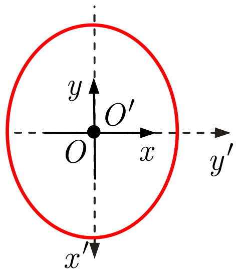


Рис. 4.29. Еліпс

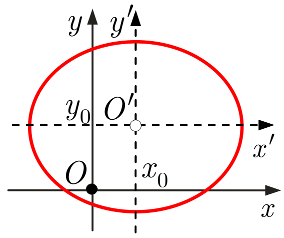


Рис. 4.30. Еліпс

Г. Лінії, які задані рівняннями

$$y^2=-2px, x^2=2py,\ x^2=-2py, p>0,$$

є параболами (рис. 4.31). Канонічну систему координат для цих парабол дістаємо із заданої переорієнтуванням або повертанням осей.

Ґ. Лінія з рівнянням

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0), p>0,$$

є параболою (рис. 4.32). Канонічну систему координат для цієї параболи дістаємо із заданої паралельним перенесенням початку координат у точку $(x_0;y_0)$.

Д. Лінія з рівнянням

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1, b, a>0,$$

є гіперболою, *спряженою* до канонічної (рис. 4.33). Канонічну систему координат для цієї гіперболи дістаємо із заданої повертанням на кут $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

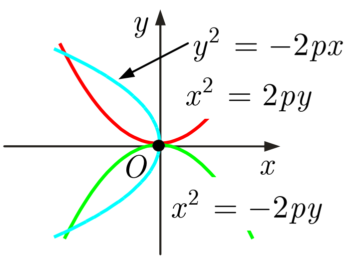


Рис. 4.31. Параболи

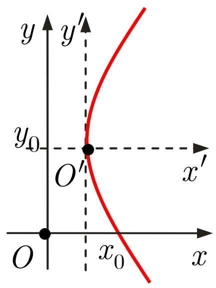


Рис. 4.32. Парабола

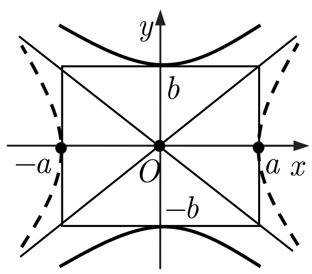


Рис. 4.33. Гіпербола

Е. Лінія з рівнянням
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,\ \ a,b>0,$$
є гіперболою. Канонічну систему координат для цієї гіперболи дістаємо із заданої паралельним перенесенням початку координат у точку $(x_0;y_0)$.

2. Загальний випадок перетворення ПДСК. Розгляньмо загальне рівняння геометричного образу 2-го порядку на площині
$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$
де a_{11},a_{12} та a_{22} не дорівнюють нулю одночасно.

У разі, якщо $a_{12}=0$, то це рівняння можна перетворити до канонічного вигляду (тим самим будуючи відповідну канонічну систему координат) паралельним перенесенням осей координат.

Отже, нехай $a_{12}\neq 0$. Розгляньмо матрицю
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\ a_{21}=a_{12},$$
квадратичної форми
$$Q(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2.$$

Повертанням координатних осей на певний кут φ можна анулювати коефіцієнт при добутку змінних. Для цього будують ортонормований базис площини із власних векторів матриці A, у якому матриця квадратичної форми набуває діагонального вигляду
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},$$
де λ_1,λ_2 — власні числа матриці A.

3. Алгоритм зведення рівняння лінії 2-го порядку до канонічного вигляду.

А. Записують матрицю A квадратичною форми.

Б. Знаходять власні числа λ_1 та λ_2 матриці A.

В. Знаходять власні вектори $\vec{x}_1$ та $\vec{x}_2$ матриці A.

Г. Знаходять орти власних векторів
$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\end{pmatrix}\text{ та }\vec{e}_2=\begin{pmatrix}\alpha_{12}\\ \alpha_{22}\end{pmatrix}$$

Ґ. Записують матрицю лінійного перетворення координат, що задає водночас і повертання координатних осей на кут φ:

$$H = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Тобто

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases}$$

Д. Переходячи до нових координат x' та y', дістають таке рівняння лінії

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_{13}x' + 2b_{23}y' + b_{33} = 0, b_{33} = a_{33}.$$

Е. Паралельним перенесенням ПДСК знищують один або обидва лінійних доданки в рівнянні й дістають канонічне рівняння лінії 2-го порядку.

4.3.5. Класифікація ліній 2-го порядку

1. *Інваріантом* рівняння ліній 2-го порядку називають функцію від коефіцієнтів цього рівняння, значення якої не змінюється після переходу від однієї ПДСК до іншої. Величини

$$J_1 = a_{11} + a_{22},\ J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ J_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

де $a_{21} = a_{12},\ a_{31} = a_{13},\ a_{32} = a_{23},$ є інваріантами рівняння лінії 2-го порядку.

2. Значення інваріантів визначають геометричні характеристики лінії. Інваріантами є також характеристичний многочлен матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ і власні числа λ_1 та λ_2 матриці A.

3. Усі лінії 2-го порядку поділяють на три типи:

1) якщо $J_2 > 0,$ то лінія еліптичного типу;

2) якщо $J_2 = 0,$ то лінія параболічного типу;

3) якщо $J_2 < 0,$ то лінія гіперболічного типу.

Тип лінії зберігається в разі зміни ПДСК.

4. За допомогою перетворення координат рівняння лінії можна звести до одного з таких типів:

1) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + m = 0$ (для еліпсів і гіпербол);

2) $\lambda_1 x^2 + 2ky = 0$ (для парабол);

3) $\lambda_1 x^2 + n = 0$ (для вироджених парабол),

а коефіцієнти цих рівнянь можна виразити через інваріанти:

$$J_1 = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2;$$
$$J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2;$$
$$J_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 m.$$

5. З поданих рівностей і теореми Вієта випливає, що власні числа λ_1 та λ_2 є коренями квадратного рівняння

$$\lambda^2 - J_1\lambda + J_2 = 0;\ m = \frac{J_3}{J_2}.$$

Рівняння лінії може задавати:

1) порожню множину ($J_2 > 0, J_3 > 0$ або $J_2 = J_3 = 0$, $(a_{31})^2 - a_{11}a_{33} < 0$);

2) точку ($J_2 > 0, J_3 = 0$);

3) пару перетинних прямих ($J_2 < 0, J_3 = 0$);

4) пару паралельних прямих ($J_2 = J_3 = 0,\ (a_{31})^2 - a_{11}a_{33} > 0$);

5) еліпс ($J_2 > 0, J_3 < 0$);

6) параболу ($J_2 = 0, J_3 \neq 0$);

7) гіперболу ($J_2 < 0, J_3 \neq 0$).

4.4. ПЛОЩИНИ

Розгляньмо ефективне застосування до геометрії площини лінійної і векторної алгебри.

4.4.1. Поверхні

1. Рівняння поверхні у прямокутній декартовій системі координат. Виберімо ПДСК у просторі й розгляньмо деяку поверхню S. В аналітичній геометрії, на відміну від елементарної геометрії, під *поверхнею* розуміють множину точок $M(x;y;z)$ простору (ще кажуть — *геометричне місце точок*), координати яких справджують рівняння $F(x,y,z)=0$:

$$L=\{M(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z)=0\}.$$

Означення 4.6 (рівняння поверхні).

Рівнянням поверхні S у заданій ПДСК називають рівняння

$$F(x,y,z)=0,$$

яке справджують координати x,y та z кожної точки, що лежить на поверхні, і не справджують координати жодної точки, що не лежить на ній.

Зокрема, рівняння поверхні у ПДСК може мати *явний* вигляд

$$z=f(x,y).$$

Рівняння поверхні у вигляді

$$F(x,y,z)=0$$

називають *неявним*. Явне рівняння можна завжди записати у неявному вигляді:

$$f(x,y)-z=0.$$

2. Рівняння $F(x,y,z)=0$ може визначати множини точок, що не узгоджуються з інтуїтивним поняттям поверхні або не визначати жодного геометричного образу. Приміром,

1) рівняння $x^2+y^2=0$ у ПДСК означує точки осі Oz;

2) рівняння $x^2+y^2+z^2+1=0$ означує порожню множину точок.

Рівняння поверхні може не містити якоїсь координати чи координат, але визначати поверхню у просторі. Приміром, рівняння $z=0$ означує у ПДСК площину Oxy.

3. Щоб дістати рівняння деякої поверхні S, треба виразити геометричне означення (характерну властивість) поверхні через координати її довільної точки.

Приміром, сферу з центром у точці O й радіусом R можна розглядати як множину всіх точок, віддалених від точки O на віддаль R (рис. 4.34). Це означає, що для будь-якої точки M, що лежить на сфері, $\left|MO\right| = R$. Якщо ж точка M' не лежить на сфері, то $\left|M'O\right| \neq R$.

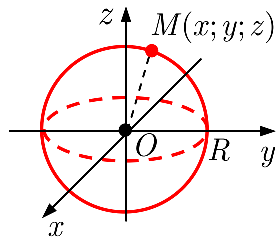


Рис. 4.34. Сфера радіусом R з центром у початку координат

Складімо рівняння цієї сфери.

Вибираємо за початок координат ПДСК точку O, центр сфери. Тоді точка $M(x;y;z)$ належить сфері, якщо

$$\left|OM\right| = R \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R.$$

Після перетворення маємо неявне рівняння сфери у ПДСК:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

4. Класифікація поверхонь. Поверхню називають *алгебричною*, якщо її можна задати в декартових координатах рівнянням

$$F(x, y, z) = 0,$$

де $F(x,y,z) = 0$ є цілий многочлен від змінних x, y, z, тобто сума скінченної кількості одночленів вигляду $ax^p y^q z^r$ зі сталими коефіцієнтами і цілими невід'ємними показниками степенів p, q, r.

Решту поверхонь називають *трансцендентними*. Алгебричні поверхні класифікують за порядком їх рівняння, тобто за степенем многочлена, який стоїть у лівій частині рівняння. Під час перетворення декартових координат алгебричні рівняння залишаються алгебричними, а їх порядок не змінюється.

У курсі аналітичної геометрії вивчають лише алгебричні поверхні 1-го і 2-го порядків.

4.4.2. Рівняння площини

Положення площини можна описати в різний спосіб. Приміром, можна задати:

1) одну точку площини і два неколінеарних вектори, які паралельні площині;

2) три точки площини, які не лежать на одній прямій;

3) одну точку площини й ненульовий вектор, який перпендикулярний до площини тощо.

Кожному з цих способів відповідає своя форма рівняння площини.

Надалі вважатимемо, що у просторі задано деяку ПДСК.

1. Рівняння площини, яка паралельна двом векторам. Нехай задано точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і два неколінерні вектори

$$\overline{u}=\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix},\overline{v}=\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}.$$

Знайдімо рівняння площини, яка проходить через точку M_0 паралельно векторам $\overline{u}$ та $\overline{v}$. Відкладаємо вектори $\overline{u}$ та $\overline{v}$ від точки M_0. Шукана площина єдина (рис. 4.35).

Точка $M(x;y;z)$ тоді й лише тоді належить площині P, коли вектори $\overline{M_0M},\overline{u},\overline{v}$ — компланарні:

$$M\in P \Leftrightarrow \overline{M_0M},\overline{u},\overline{v} - \text{ компланарні.}$$

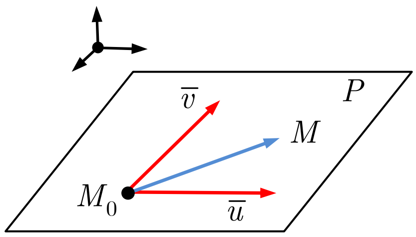


Рис. 4.35. Площина, яка паралельна двом векторам

2. З критерію компланарності векторів $\overline{M_0M},\overline{u},\overline{v}$ дістаємо *рівняння* площини, *яка проходить через точку* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *паралельно двом векторам*

$$\overline{u}=\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix},\overline{v}=\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}:$$

$$\boxed{(\overline{M_0M},\overline{u},\overline{v})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}=0.}$$

3. Рівняння площини через три точки. Нехай задано три точки $M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2)$ та $M_3(x_3;y_3;z_3)$, які не лежать на одній прямій. Через ці точки проходить одна й лише одна площина.

Складімо рівняння площини P, яка проходить через точки $M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2)$ та $M_3(x_3;y_3;z_3)$.

За вектори, які паралельні площині можна взяти

$$\overline{M_1M_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}, \overline{M_1M_3} = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Одержуємо *рівняння* площини, *яка проходить через три точки*:

$$(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.}$$

4. Нехай задано точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і ненульовий вектор $\overline{n} = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}$. Запишімо рівняння площини P, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{n}$. Така площина єдина (рис. 4.36).

Точка $M(x; y; z)$ належить площині P тоді й лише тоді, коли вектори $\overline{M_0M}$ та $\overline{n}$ перпендикулярні:

$$M \in P \Leftrightarrow \overline{M_0M} \perp \overline{n}.$$

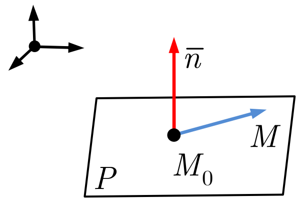


Рис. 4.36. Нормальний вектор площини

Вектор $\overline{n}$ називають *нормальним вектором* площини P і позначають

$$\overline{n} = \overline{n}(P).$$

5. З критерію ортогональності векторів $\overline{M_0M}$ та $\overline{n}$ дістаємо *рівняння* площини, *яка проходить через точку* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно до вектора* $\overline{n} = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}$:

$$(\overline{M_0M}, \overline{n}) = 0 \Leftrightarrow \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.}$$

6. Загальне рівняння площини. Розкриваючи дужки і позначаючи $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, дістаємо *загальне рівняння* площини з нормальним вектором $\overline{n} = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}$:

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0.}$$

Теорема 4.3 (про площину як поверхню 1-го порядку).

Будь-яку площину можна задати лінійним рівнянням у ПДСК у просторі. Будь-яке лінійне рівняння у ПДСК у просторі задає площину.

Доведення. Першу частину теорему вже доведено в п. 5 та 6.

Доведімо другу: якщо задано рівняння

$$ax + by + cz + d = 0,$$

де хоча б один з коефіцієнтів a, b чи c відмінний від нуля, то це рівняння задає площину.

Нехай, приміром, $c \neq 0$. Тоді рівняння можна переписати у вигляді

$$a(x-0)+b(y-0)+c\left(z-\left(-\frac{d}{c}\right)\right)=0.$$

Згідно з п. 5 таке рівняння означає площину, що проходить через точку $M_0\left(0;0;-\frac{d}{c}\right)$ перпендикулярно до вектора

$$\overline{n}=a\overline{i}+b\overline{j}+c\overline{k}. \blacksquare$$

Отже, єдиною поверхнею 1-го порядку є площина.

7. Окремі випадки загального рівняння площини. Дослідімо, як розміщена площина відносно ПДСК, коли деякі коефіцієнти в загальному рівнянні дорівнюють нулю.

Координатні площини мають відповідно рівняння:

$$Oxy \perp \overline{k} : cz = 0 \Leftrightarrow z = 0;$$
$$Oxz \perp \overline{j} : by = 0 \Leftrightarrow y = 0;$$
$$Oyz \perp \overline{i} : ax = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Вектор $\overline{a}$ паралельний площині P тоді й лише тоді, коли він ортогональний до її нормального вектора:

$$\overline{a} \parallel P \Leftrightarrow \overline{a} \perp \overline{n}(P).$$

Приміром, площина P паралельна вектору $\overline{i}$, а, отже, й осі Ox, тоді й лише тоді, коли її нормальний вектор $\overline{n}=a\overline{i}+b\overline{j}+c\overline{k}$ ортогональний до $\overline{i}$:

$$(\overline{n},\overline{i}) = a = 0 \Leftrightarrow P : by + cz + d = 0.$$

Якщо в загальному рівнянні площини деякі коефіцієнти дорівнюють нулю, то маємо неповні рівняння площини.

8. Зведімо всі випадки виродження (рівності нулю коефіцієнтів) рівняння площини до таблиці, де 0 означає, що відповідний коефіцієнт нульовий, а $\not{0}$ — відповідний коефіцієнт ненульовий (рис. 4.37).

a	b	c	d	Висновок	a	b	c	d	Висновок
0	0	0	$\not{0}$	$P=\varnothing$	$\not{0}$	0	0	0	$P=Oyz$
0	0	$\not{0}$	0	$P=Oxy$	$\not{0}$	0	0	$\not{0}$	$P \parallel Oyz$
0	0	$\not{0}$	$\not{0}$	$P \parallel Oxy$	$\not{0}$	0	$\not{0}$	0	$Oy \subset P$
0	$\not{0}$	0	0	$P=Oxz$	$\not{0}$	0	$\not{0}$	$\not{0}$	$P \parallel Oy$
0	$\not{0}$	0	$\not{0}$	$P \parallel Oxz$	$\not{0}$	$\not{0}$	0	0	$Oz \subset P$
0	$\not{0}$	$\not{0}$	0	$Ox \subset P$	$\not{0}$	$\not{0}$	0	$\not{0}$	$P \parallel Oz$
0	$\not{0}$	$\not{0}$	$\not{0}$	$P \parallel Ox$	$\not{0}$	$\not{0}$	$\not{0}$	0	$O \in P$

Рис. 4.37. Неповні рівняння площини

9. Рівняння площини у відрізках. Якщо всі коефіцієнти в загальному рівнянні площини відмінні від нуля, тоді його можна перетворити на *рівняння* площини *у відрізках* (рис. 4.38):

$$ax + by + cz = -d;$$

$$\frac{x}{-d/a} + \frac{y}{-d/b} + \frac{z}{-d/c} = 1;$$

$$\frac{x}{\tilde{a}} + \frac{y}{\tilde{b}} + \frac{z}{\tilde{c}} = 1.$$

Це рівняння справджують координати точок $A(\tilde{a};0;0)$, $B(0;\tilde{b};0)$ та $C(0;0;\tilde{c})$, і $|\tilde{a}|,|\tilde{b}|,|\tilde{c}|$ — довжини відрізків, які відтинає площина P від осей координат.

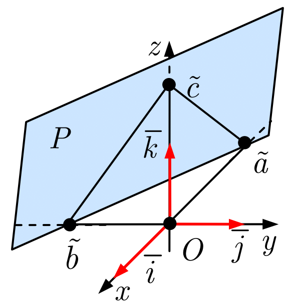


Рис. 4.38. Рівняння площини у відрізках

10. Нормоване рівняння площини. Розгляньмо площину P. Нехай точка H — основа перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину P, а $\overline{OH}$ — радіус-вектор цієї точки, який утворює кути α, β та γ з координатними осями (рис. 4.39).

Отже, орт нормального вектора $\overline{n} = \overline{OH}$ має координати

$$\overline{n}^0 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}.$$

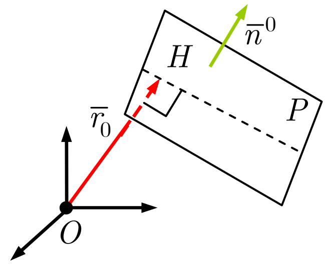


Рис. 4.39. Нормоване рівняння площини

Ураховуючи, що проекція радіуса-вектора $\overline{r} = \overline{OM}$ довільної точки $M(x;y;z)$ прямої на напрям нормального вектора

$$\mathrm{pr}_{\overline{n}}\,\overline{r} = (\overline{r}, \overline{n}^0) = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p,$$

дістаємо *нормоване рівняння* площини

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,}$$

де $p \geq 0$ виражає віддаль площини від початку координат.

11. Умовами «нормованості» загального рівняння

$$ax + by + cz + d = 0$$

площини є:

1) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$;

2) $d \leq 0$.

Загальне рівняння площини можна перетворити на нормоване, помноживши його на *нормувальний множник*

$$\mu = -\frac{\operatorname{sgn} d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

4.4.3. Взаємне розташування площин

Нехай дві площини задано загальними рівняннями:

$$P_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$P_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

1. Кут між площинами. Двогранний *кут* $(\widehat{P_1, P_2})$ *між площинами* вимірюють лінійним кутом, який дорівнює куту між їхніми нормальними векторами (рис. 4.40):

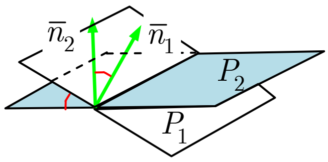


Рис. 4.40. Кут між площинами

$$\boxed{\cos(\widehat{P_1, P_2}) = \cos(\widehat{\bar{n}_1, \bar{n}_2}) = \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|}.}$$

2. Дві площини можуть перетинатись уздовж прямої або бути паралельними, зокрема зливатись.

3. Умови паралельності двох площин. Площини P_1 та P_2 *паралельні* (рис. 4.41) тоді й лише тоді, коли їх нормальні вектори

$$\bar{n}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \text{ та } \bar{n}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

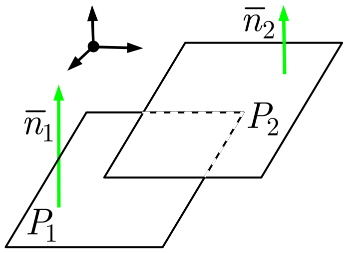


Рис. 4.41. Паралельні площини

колінеарні, тобто

$$\boxed{P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.}$$

Якщо

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2},$$

то площини *паралельні різні* (не мають спільних точок).

Якщо

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2},$$

то площини P_1 та P_2 *зливаються*.

4. Умови перетинності двох площин. Дві непаралельні площини перетинаються вздовж прямої. Отже, пряму в просторі можна задати перетином двох площин — загальними рівняннями прямої у просторі

$$L:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0. \end{cases}$$

Площини P_1 та P_2 *перетинаються* тоді й лише тоді, коли $\overline{n}_1 \nparallel \overline{n}_2$.

5. Умови перпендикулярності двох площин. Площини $P_1(M_1) \perp \overline{n}_1$ та $P_2(M_2) \perp \overline{n}_2$ *перпендикулярні* тоді й лише тоді, коли їх нормальні вектори $\overline{n}_1$ та $\overline{n}_2$ перпендикулярні, тобто

$$\boxed{P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 \perp \overline{n}_2 \Leftrightarrow (\overline{n}_1, \overline{n}_2) = 0.}$$

6. Віддаль від точки до площини. Задано площину $P: ax+by+cz+d=0$ і точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Треба знайти віддаль d від точки M_0 до площини P (рис. 4.42).

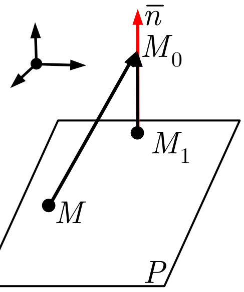


Рис. 4.42. Віддаль від точки до площини

Нехай M_1 — будь-яка точка площини P. Тоді шукана віддаль

$$d = \left|\text{pr}_{\overline{n}}\, \overline{M_1M_0}\right| = \left|\frac{(\overline{M_1M_0}, \overline{n})}{|\overline{n}|}\right|,$$

де $\overline{n}$ — будь-який нормальний вектор площини P.

Підставляючи координати векторів

$$\overline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \overline{M_1M_0} = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \\ z_0 - z_1 \end{pmatrix},$$

у формулу маємо

$$d = \frac{|a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Далі, ураховуючи, що координати точки M_1 справджують рівняння площини

$$L: ax_1+by_1+cz_1+d=0,$$

дістаємо формулу *віддалі від точки* M_0 *до площини* P:

$$\boxed{d(M_0, P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.}$$

7. *Віддаль між паралельними площинами* можна знайти як віддаль від будь-якої точки однієї площини до другої площини.

8. Нехай площину P задано нормованим рівнянням

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Відхиленням точки M_0 *від площини* P називають число

$$\delta(M_0, P) = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p =$$
$$= -\operatorname{sgn} d \cdot \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Отже,

$$d(M_0, P) = \left|\delta(M_0, P)\right|.$$

9. Площина P розбиває множину всіх точок простору на три підмножини:

$$\mathbb{A}^+ = \{M \notin P \mid \delta(M, P) > 0\};$$
$$P = \{M \in P \mid \delta(M, P) = 0\};$$
$$\mathbb{A}^- = \{M \notin P \mid \delta(M, P) < 0\}.$$

Початок координат — точка $O \in \mathbb{A}^-$ або точка $O \in P$.

4.5. ПРЯМІ У ПРОСТОРІ

Розгляньмо ефективне застосування до геометрії прямих у просторі та прямих і площин лінійної і векторної алгебри.

4.5.1. Лінії у просторі

1. Лінія як перетин двох поверхонь. Лінію у просторі природно розглядати як переріз двох поверхонь, тобто як геометричне місце точок, що лежать одночасно на двох поверхнях.

Якщо $F_1(x, y, z) = 0$ та $F_2(x, y, z) = 0$ — рівняння двох поверхонь, перетином яких є лінія L, то:

1) координати будь-якої точки, що лежить на лінії L, справджують обидва рівняння одночасно;

2) обидва рівняння одночасно не справджують координати жодної точки, що не лежить на лінії L.

Отже, система рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

означує лінію L.

2. Приміром, два рівняння

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

разом означують коло (як перетин двох сфер) (рис. 4.43).

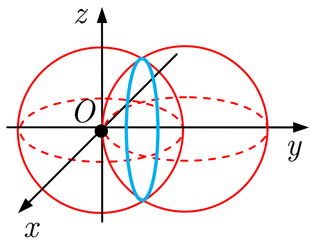


Рис. 4.43. Коло як перетин двох сфер

3. Параметричні рівняння лінії у просторі. Лінію у просторі можна розглядати як шлях, що проходить матеріальна точка, яка неперервно рухається за певним законом. Як і для лінії на площині, це приводить до параметричного зображення лінії у просторі, тобто координати x, y та z будь-якої лінії задають як неперервні функції деякого параметра t:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), t \in T. \end{cases}$$

Параметричні рівняння лінії у просторі можна записати у векторному вигляді

$$\overline{r} = \overline{r}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}, t \in T.$$

4.5.2. Пряма у просторі

Положення прямої у просторі можна описати в різний спосіб. Приміром, можна задати:

1) одну з точок прямої і вектор, який паралельний прямій;

2) дві різні точки, через які проходить пряма тощо;

3) дві непаралельні площини, які перетинаються вздовж прямої.

Кожному з цих способів відповідає своя форма рівняння прямої.

Надалі вважатимемо, що на площині задано деяку ПДСК.

1. Нехай задано точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і ненульовий вектор

$$\overline{s}=\begin{pmatrix} l\\ m\\ n\end{pmatrix}.$$

Знайдімо рівняння прямої L, що проходить через точку M_0 паралельно вектору $\overline{s}$. Така пряма єдина (рис. 4.44).

Точка $M(x;y;z)$ тоді й лише тоді належить прямій L, коли вектори $\overline{M_0M}$ та $\overline{s}$ колінеарні:

$$M\in L \Leftrightarrow \overline{M_0M}\parallel \overline{s}.$$

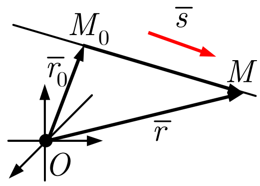


Рис. 4.44. Рівняння прямої

Вектор $\overline{s}$ називають *напрямним вектором* прямої L і позначають

$$\overline{s}=\overline{s}(L).$$

З критерію колінеарності векторів $\overline{M_0M}$ та $\overline{s}$ випливає, що

$$\overline{M_0M}=t\overline{s}, t\in\mathbb{R}.$$

2. Параметричні рівняння прямої. Якщо позначити радіус-вектор точки M_0 як $\overline{r}_0$, а радіус-вектор точки M як $\overline{r}$, то з умови колінеарності векторів $\overline{M_0M}=\overline{r}-\overline{r}_0$ та $\overline{s}$ дістаємо *векторне параметричне рівняння* прямої

$$\boxed{\overline{r}=\overline{r}_0+t\overline{s}, t\in\mathbb{R}.}$$

Розписуючи ці рівняння в координатній формі, дістаємо *параметричні рівняння* прямої L у просторі

$$\boxed{\begin{cases} x=x_0+lt,\\ y=y_0+mt, t\in\mathbb{R}.\\ z=z_0+nt,\end{cases}}$$

3. Якщо $t\in\mathbb{R}$, то параметричні рівняння описують усю пряму, якщо $t\in(-\infty;b]$ або $t\in[a;+\infty)$, то описують півпряму (промінь), а якщо $t\in[a;b], a,b\in\mathbb{R}$, то — відрізок.

4. Канонічні рівняння прямої. Ураховуючи, що в колінеарних векторів пропорційні координати, дістаємо *канонічні рівняння* прямої L у просторі

$$\boxed{\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.}$$

5. Якщо, приміром, $n = 0$, то це означає, що

$$z - z_0 = 0,\ \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$

Якщо ж, приміром, $m = n = 0$, то це означає, що

$$y - y_0 = 0,\ z - z_0 = 0, x \in \mathbb{R}.$$

Зокрема, якщо $M_0 \in L$ і:

1) $L \parallel \overline{i} \Rightarrow L : \dfrac{x - x_0}{1} = \dfrac{y - y_0}{0} = \dfrac{z - z_0}{0} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\ y = y_0,\ z = z_0;$

2) $L \parallel \overline{j} \Rightarrow L : \dfrac{x - x_0}{0} = \dfrac{y - y_0}{1} = \dfrac{z - z_0}{0} \Leftrightarrow x = x_0,\ y \in \mathbb{R},\ z = z_0;$

3) $L \parallel \overline{i} \Rightarrow L : \dfrac{x - x_0}{0} = \dfrac{y - y_0}{0} = \dfrac{z - z_0}{1} \Leftrightarrow x = x_0,\ y = y_0,\ z \in \mathbb{R}.$

6. Рівняння прямої через дві точки. Через будь-які дві різні точки M_1 та M_2 проходить одна й лише одна пряма.

Складімо рівняння прямої L, яка проходить через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та $M_2(x_2; y_2; z_2)$. За напрямний вектор прямої можна взяти вектор

$$\overline{s} = \overline{M_1M_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Одержуємо *рівняння* прямої, *яка проходить через дві точки*:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.}$$

7. Загальні рівняння прямої у просторі. Дві непаралельні площини перетинаються вздовж прямої. Отже, пряму в просторі можна задати перетином двох площин — *загальними рівняннями* прямої у просторі (рис. 4.45):

$$L : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

8. Від загальних рівнянь можна перейти до канонічних чи параметричних рівнянь прямої. Для цього треба знайти напрямний вектор прямої $\overline{s}$ і будь-яку точку M_0, розташовану на цій прямій.

Оскільки напрямний вектор прямої $\overline{s}$ перпендикулярний до обох нормальних векторів площин, то можна взяти

$$\overline{s} = [\overline{n}_1, \overline{n}_2].$$

Параметричні рівняння прямої можна одержати також, знаходячи загальний розв’язок системи рівнянь площин.

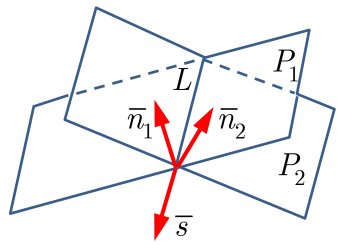


Рис. 4.45. Пряма як перетин двох площин

4.5.3. Взаємне розташування прямих у просторі

Нехай дві прямі задано канонічними рівняннями:

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \text{ та } L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

1. Кут між двома прямими. *Кутом між двома прямими* у просторі називають будь-який з кутів, утворений прямими, проведеними через довільну точку простору паралельно заданим прямим (рис. 4.46).

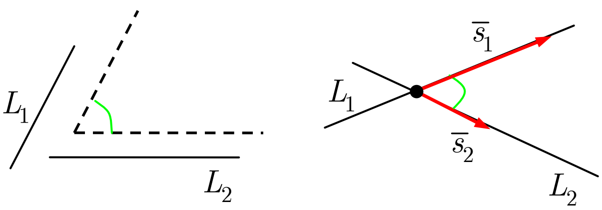


Рис. 4.46. Кут між прямими

Один з цих кутів можна знайти як кут між напрямними векторами прямих, тобто

$$\boxed{\cos(\widehat{L_1, L_2}) = \cos(\widehat{\overline{s}_1, \overline{s}_2}) = \frac{(\overline{s}_1, \overline{s}_2)}{|\overline{s}_1||\overline{s}_2|},}$$

2. Дві прямі у просторі можуть лежати в одній площині й бути: перетинними чи паралельними, або не лежати в одній площині й бути мимобіжними.

3. Умови паралельності двох прямих. Прямі у просторі L_1 та L_2 *паралельні* (рис. 4.47) тоді й лише тоді, коли їх напрямні вектори $\overline{s}_1$ та $\overline{s}_2$ колінеарні, тобто

$$\boxed{L_1 \text{ та } L_2 \text{ паралельні} \Leftrightarrow \overline{s}_1 \parallel \overline{s}_2.}$$

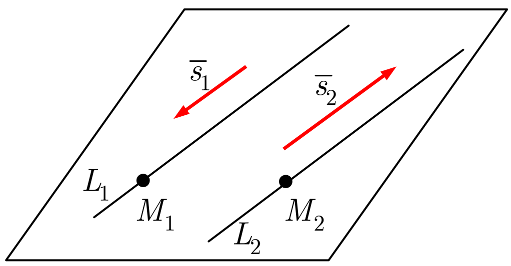


Рис. 4.47. Паралельні прямі

Якщо $\overline{s}_1 \parallel \overline{s}_2 \nparallel \overline{M_1M_2}$, де $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2)$, то прямі L_1 та L_2 *паралельні різні* (не мають спільних точок).

Через дві різні паралельні прямі можна провести лише одну площину.

Якщо $\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2 \parallel \overline{M_1M_2}$, то прямі L_1 та L_2 *зливаються.*

4. Умови перетинності двох прямих. Прямі у просторі L_1 та L_2 *перетинаються* (мають лише одну спільну точку) (рис. 4.48) тоді й лише тоді, коли вектори $\bar{s}_1$ та $\bar{s}_2$ неколінеарні, а вектори $\overline{M_1M_2}, \bar{s}_1, \bar{s}_2$ — компланарні, тобто

$$\boxed{L_1 \text{ та } L_2 \text{ перетинні} \Leftrightarrow (\overline{M_1M_2}, \bar{s}_1, \bar{s}_2) = 0, \bar{s}_1 \not\parallel \bar{s}_2.}$$

Через дві перетинні прямі можна провести лише одну площину.

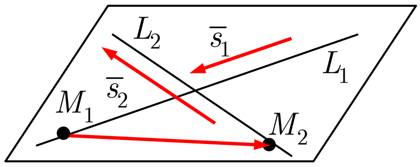


Рис. 4.48. Перетинні прямі

5. Умови мимобіжності двох прямих. Прямі у просторі L_1 та L_2 *мимобіжні* тоді й лише тоді, коли вектори $\overline{M_1M_2}, \bar{s}_1, \bar{s}_2$ некомпланарні, тобто

$$\boxed{L_1 \text{ та } L_2 \text{ мимобіжні} \Leftrightarrow (\overline{M_1M_2}, \bar{s}_1, \bar{s}_2) \neq 0.}$$

6. Умови перпендикулярності двох прямих. Прямі у просторі L_1 та L_2 *перпендикулярні* тоді й лише тоді, коли їх напрямні вектори $\bar{s}_1$ та $\bar{s}_2$ перпендикулярні, тобто

$$\boxed{L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \bar{s}_1 \perp \bar{s}_2 \Leftrightarrow (\bar{s}_1, \bar{s}_2) = 0;}$$

7. Приміром, на рис. 4.49 прямі L_1, L_2 — паралельні; L_1, L_3 — перетинні; L_2, L_3 — мимобіжні.

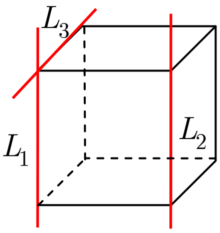


Рис. 4.49. Взаємне розташування прямих у просторі

8. Віддаль від точки до прямої у просторі. Нехай M' — ортогональна проекція точки M_0 на пряму L.

Віддаль $d(M_0, L)$ *від точки* M_0 *до прямої* L дорівнює висоті паралелограма, побудованого на векторах $\overline{M_1M_0}$ та $\bar{s}$, відкладеного від точки M_1 (рис. 4.50).

Отже,

$$\boxed{d(M_0, L) = \frac{\left|[\overline{M_1M_0}, \bar{s}]\right|}{|\bar{s}|}.}$$

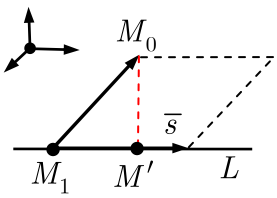


Рис. 4.50. Віддаль від точки до прямої у просторі

9. Віддаль між паралельними прямими у просторі. *Віддаллю між паралельними прямими* L_1 та L_2 називають віддаль від будь-якої точки прямої L_1 до прямої L_2 (або від будь-якої точки прямої L_2 до L_1) (рис. 4.51):

$$\boxed{d(L_1, L_2) = \frac{\left|[\overline{M_1M_2}, \overline{s}_1]\right|}{|\overline{s}_1|},}$$

де $M_1 \in L_1, M_2 \in L_2, \overline{s}_1 = \overline{s}(L)$.

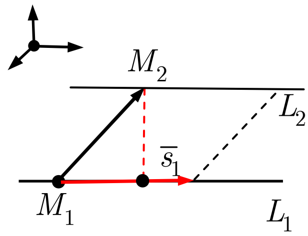


Рис. 4.51. Віддаль між паралельними прямими

10. Віддаль між мимобіжними прямими. *Спільним перпендикуляром* до мимобіжних прямих L_1 та L_2 називають пряму L, таку, що $L \perp L_1$ та $L \perp L_2$. Нехай $L \cap L_1 = N_1$ та $L \cap L_2 = N_2$.

Існує лише одна пара точок $N_1 \in L_1$ та $N_2 \in L_2$, така, що пряма N_1N_2 є спільним перпендикуляром до прямих L_1 та L_2 (рис. 4.52).

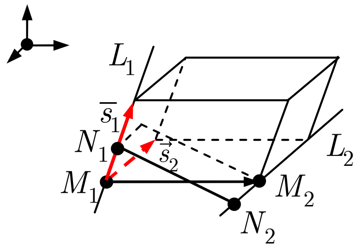


Рис. 4.52. Віддаль між мимобіжними прямими

Віддаллю між мимобіжними прямими називають число $\left|\overline{N_1N_2}\right|$.— висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{s}_1, \overline{s}_2$, $\overline{M_1M_2}$.

Отже,

$$\boxed{d(L_1, L_2) = \frac{\left|(\overline{M_1M_2}, [\overline{s}_1, \overline{s}_2])\right|}{\left|[\overline{s}_1, \overline{s}_2]\right|},}$$

де $M_1 \in L_1, M_2 \in L_2, \overline{s}_1 = \overline{s}(L_1), \overline{s}_2 = \overline{s}(L_2)$.

4.5.4. Взаємне розташування прямої і площини

Нехай пряму задано канонічними рівняннями

$$L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

а площину загальним рівнянням

$$P : ax + by + cz + d = 0$$

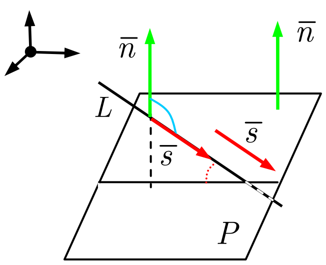


Рис. 4.53. Кут між площиною і прямою

1. Кут між площиною і прямою. *Кутом* $(\widehat{L, P})$ *між прямою* L *і площиною* P називають менший із двох кутів між прямою L та її ортогональною проекцією на площину (рис. 4.53):

$$\sin(\widehat{L, P}) = \left|\cos(\widehat{\overline{n}, \overline{s}})\right| = \frac{\left|(\overline{n}, \overline{s})\right|}{|\overline{n}||\overline{s}|},$$

де $\overline{s} = \overline{s}(L), \overline{n} = \overline{n}(P)$.

2. Розташування прямої відносно площини. Пряма у просторі може перетинати задану площину, бути до неї паралельною або лежати на ній.

А. Пряма L *паралельна* площині P (без спільних точок) тоді й лише тоді, коли $\overline{n}(P) \perp \overline{s}(L), M_0 \notin P$ (рис. 4.54).

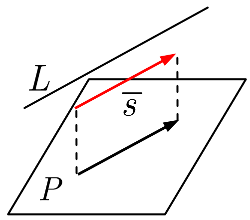


Рис. 4.54. Пряма паралельна площині

Б. Пряма L *лежить* у площині P тоді й лише тоді, коли $\overline{n}(P) \perp \overline{s}(L), M_0 \in P$.

Якщо дві точки прямої L належать площині P, то ця пряма лежить у площині P.

В. Пряма L *перетинається* із площиною P тоді й лише тоді, коли $\overline{n}(P) \not\perp \overline{s}(L)$.

Г. Пряма L *перпендикулярна* до площини P тоді й лише тоді, коли $\overline{n}(P) \parallel \overline{s}(L)$ (рис. 4.55).

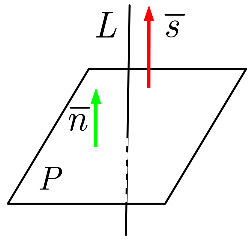


Рис. 4.55. Пряма перетинає площину (перпендикулярна до площини)

Через кожну точку M_0 проходить єдина пряма, перпендикулярна до площини P.

3. Якщо пряма L перпендикулярна до площини P, то її ортогональна проекція на площину P є точкою. Якщо ж пряма L не перпендикулярна до площини P, то її ортогональна проекція на площину P є прямою.

4.6. ПОВЕРХНІ 2-ГО ПОРЯДКУ

Єдиною поверхнею 1-го порядку є площина. Широке застосування і цікаві властивості мають геометричні образи, які задано в декартовій системі координат рівняннями 2-го порядку від змінних x, y та z.

4.6.1. Класифікація поверхонь і просторових кривих

1. Означення 4.7 (геометричного образу 2-го порядку).

Геометричним образом 2-го порядку у просторі називають множину точок простору, прямокутні координати $(x;y;z)$ яких справджують алгебричне рівняння 2-го порядку:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$
$$+2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

де $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ не дорівнюють нулю одночасно.

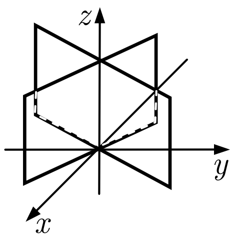


Рис. 4.56. Пара перетинних площин

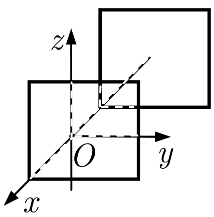


Рис. 4.57. Пара паралельних площин

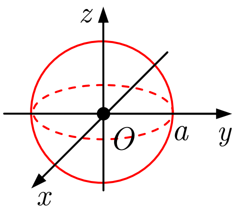


Рис. 4.58. Сфера

2. Це рівняння може задавати:
1) порожню множину;
2) точку;
3) пару перетинних площин (рис. 4.56);
4) пару паралельних площин (рис. 4.57);
5) циліндри;
6) конус;
7) еліпсоїд;
8) гіперболоїди;
9) параболоїди.

3. *Сферою* називають множину всіх точок простору, рівновіддалених від заданої точки, яку називають *центром* сфери (рис. 4.58). Відрізок, який сполучає центр сфери з будь-якою її точкою, а також довжину цього відрізка називають *радіусом* сфери.

У ПДСК сфера з центром у початку координат O радіусом a має *канонічне рівняння*

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = a^2.}$$

4.6.2. Деякі класи поверхонь

1. Поверхні обертання. Поверхню, яка разом з кожною своєю точкою містить усе коло, утворене обертанням цієї точки навколо деякої фіксованої прямої — *осі обертання*, називають *поверхнею обертання* (рис. 4.59).

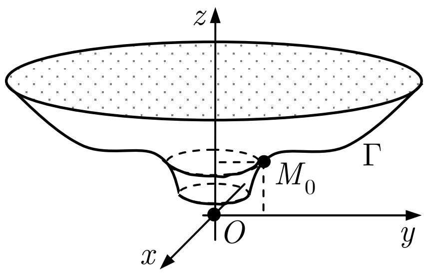


Рис. 4.59. Поверхня обертання

2. Нехай Γ — крива на площині Oyz: $z = f(y)$, $y \geq 0$. Обертаючись навколо осі Oz, крива Γ утворює поверхню обертання.

Нехай $M_0(y_0;z_0)$ — довільна точка кривої Γ. Точка M_0 пробігає коло, проекцією якого на площину Oxy є

$$x^2 + y^2 = \left(y_0\right)^2.$$

Отже,

$$z_0 = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Завдяки довільності точки M_0 на кривій Γ поверхню обертання задає рівняння

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

3. Запишімо рівняння поверхонь, утворених обертанням навколо осі Oz кривих 1-го та 2-го порядку, розміщених у площині Oyz:

1) прямої $az - cy = 0$;

2) еліпса $\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

3) гіперболи $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

4) гіперболи $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1$;

5) параболи $y^2 = 2pz$.

1. Обертанням прямої навколо осі Oz одержимо коловий конус (рис. 4.60)

$$z = \pm\frac{c}{a}\sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}.$$

Оскільки криві 2)–5) симетричні щодо осі Oz (змінна y входить у рівняння лише в парному степені), тому, скориставшись формулою, знайдімо рівняння відповідних поверхонь обертання.

2. Еліпсоїд обертання (рис. 4.61)

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Якщо $a = c$, одержимо рівняння сфери радіусом a.

3. Однопорожнинний гіперболоїд обертання (рис. 4.62)

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

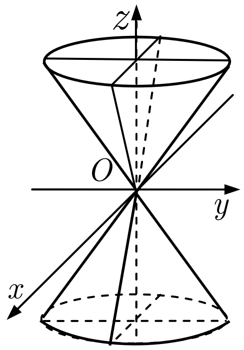


Рис. 4.60. Конус обертання

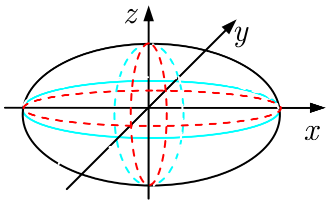


Рис. 4.61. Еліпсоїд обертання

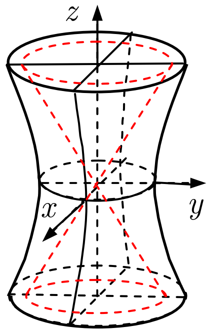


Рис. 4.62. Однопорожнинний гіперболоїд обертання

4. Двопорожнинний гіперболоїд обертання (рис. 4.63)

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2+y^2}{a^2}=1.$$

5. Параболоїд обертання (рис. 4.64)

$$\frac{x^2+y^2}{p}=2z.$$

Усі утворені поверхні є поверхнями 2-го порядку. Проте обертанням кривих 2-го порядку можна утворити й поверхні вищих порядків.

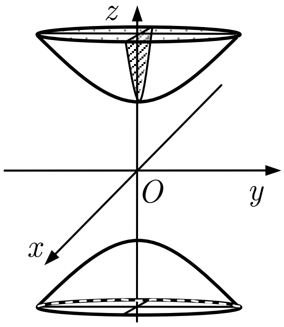


Рис. 4.63. Двопорожнинний гіперболоїд обертання

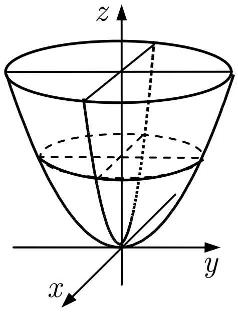


Рис. 4.64. Параболоїд обертання

4. Циліндричні поверхні. Поверхню називають *циліндричною* (*циліндром*), якщо вона разом з кожною своєю точкою M містить усю пряму — *твірну* циліндричної поверхні, яка проходить через точку M паралельно заданому вектору $\overline{p}$.

Нехай Γ — деяка лінія — *напрямна* циліндричної поверхні, а $\overline{p}$ — ненульовий вектор. Поверхня, утворена прямими, які проходять через усі точки лінії Γ паралельно вектору $\overline{p}$, буде циліндричною.

Візьмімо довільну точку O і проведімо площину Oxy перпендикулярно до твірної L і пряму Oz паралельно твірній L.

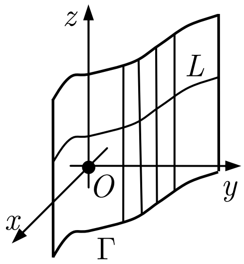


Рис. 4.65. Циліндрична поверхня

Площина Oxy перетне циліндричну поверхню за напрямною Γ (рис. 4.65), яка має рівняння (що збігається з рівнянням циліндричної поверхні із твірною, паралельною осі Oz)

$$F(x, y) = 0.$$

Це й буде рівняння циліндричної поверхні у вибраній системі координат.

Рівняння $F(y, z) = 0$ описує циліндричну поверхню із твірною, паралельною осі Ox, а рівняння $F(x, z) = 0$ — із твірною, паралельною осі Oy.

5. Циліндричними поверхнями 2-го порядку із твірними, паралельними осі Oz, і напрямними — кривими 2-го порядку — є:

1) *еліптичний циліндр* (рис. 4.66)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0.$$

Якщо $a = b$, то дістанемо *коловий циліндр* $x^2 + y^2 = a^2$;

2) *параболічний циліндр* (рис. 4.67)

$$y^2 = 2px,\ p > 0.$$

3) *гіперболічний циліндр* (рис. 4.68)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0.$$

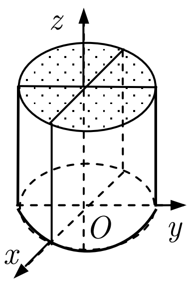


Рис. 4.66. Еліптичний циліндр

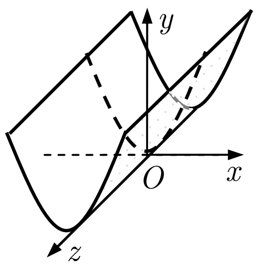


Рис. 4.67. Параболічний циліндр

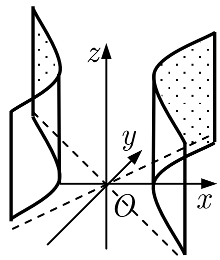


Рис. 4.68. Гіперболічний циліндр

6. Конічні поверхні. Поверхню, якій належить точка M_0, що разом з кожною точкою M, відмінною від M_0, містить пряму M_0M, називають *конічною* поверхнею (*конусом*) (рис. 4.69).

Точку M_0 називають *вершиною* конуса, а прямі, які проходять через цю точку і належать поверхні,— її *твірними*. Конус може мати більше ніж одну вершину.

Нехай Г — довільна крива і точка O розташована поза нею. Через кожну точку кривої Г й точку O проведімо прямі. Поверхня, утворена всіма цими прямими, буде конічною.

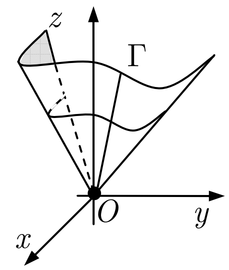


Рис. 4.69. Конічна поверхня

Точка O — вершина конуса, а прямі, що проходять через неї,— твірні конуса. Криву Г називають *напрямною*.

Функцію $F(x,y,z)$ називають *однорідною функцією* порядку $\alpha \neq 0$ щодо змінних x,y та z, якщо для довільного числа $t \neq 0$ виконано тотожність

$$F(tx,ty,tz) = t^\alpha F(x,y,z).$$

Можна довести, що якщо $F(x,y,z)$ — однорідна функція, то $F(x,y,z) = 0$ є *рівнянням конічної поверхні*.

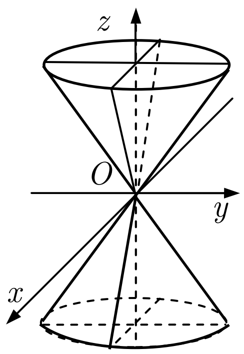


Рис. 4.70. Еліптичний конус

7. Конічною поверхнею 2-го порядку буде *еліптичний конус* (рис. 4.70).

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.}$$

Коли $a = b$, то матимемо *коловий конус*.

8. Конічні перерізи. Еліпс, парабола, гіпербола є лініями перетину колового конуса із площинами, які не проходять через його вершину (рис. 4.71).

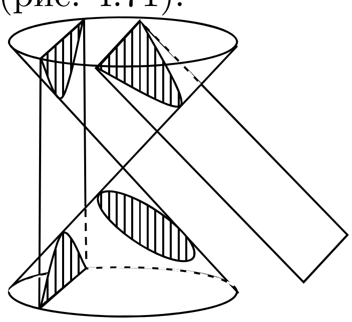


Рис. 4.71. Конічні перерізи

Якщо січна площина перетинає всі твірні однієї порожнини конуса, то в перерізі дістаємо еліпс (зокрема, коло).

Якщо січна площина паралельна одній із твірних конуса, то вона перетинає лише одну порожнину конуса вздовж параболи.

Якщо січна площина перетинає обидві порожнини конуса, то в перерізі дістаємо гіперболу.

9. Метод перерізів. Нехай S — деяка поверхня, задана у ПДСК. Щоб вивчити форму поверхні методом паралельних перерізів, поверхню S перетинають площинами, паралельними координатним, і визначають лінії перерізу поверхні з цими площинами.

Якщо S — поверхня, задана у ПДСК рівнянням
$$F(x,y,z)=0,$$
а $z=h$ — площина P, паралельна координатній площині Oxy, то проекція лінії перетину поверхні S із площиною P на площину Oxy має рівняння
$$F(x,y,h)=0.$$

4.6.3. Еліпсоїд

1. *Еліпсоїдом* називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій ПДСК справджують рівняння
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a\geq b\geq c>0.}$$

Це рівняння називають *канонічним рівнянням* еліпсоїда, а систему координат — *канонічною системою*.

2. Кожну вісь координат еліпсоїд перетинає у двох точках, симетричних щодо початку координат:
$$A_{1,2}(\pm a;0;0), B_{1,2}(0;\pm b;0); C_{1,2}(0;0;\pm c).$$

Точки перетину еліпсоїда з осями координат називають *вершинами* еліпсоїда, відрізки A_1A_2, B_1B_2 та C_1C_2 — *осями* еліпсоїда, а числа a,b та c — *півосями* еліпсоїда. Якщо всі ці числа різні, то еліпсоїд називають *тривісним*. Якщо дві півосі дорівнюють одна одній, то маємо *еліпсоїд обертання*. Якщо, нарешті, $a=b=c$, то поверхня є *сферою* з центром у початку координат.

Оскільки змінні x,y,z у рівняння еліпсоїда входять у парних степенях, то еліпсоїд симетричний щодо всіх координатних площин, координатних осей і початку координат.

З рівняння еліпсоїда випливає, що
$$\frac{x^2}{a^2}\leq 1,\ \frac{y^2}{b^2}\leq 1,\ \frac{z^2}{c^2}\leq 1 \Leftrightarrow |x|\leq a,\ |y|\leq b,\ |z|\leq c.$$

3. Обертанням еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

навколо осі Ox (рис. 4.72) одержимо еліпсоїд обертання

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

а з нього — стисканням уздовж осі Oz з коефіцієнтом $\frac{c}{b}\le 1$ — еліпсоїд загального вигляду (рис. 4.73).

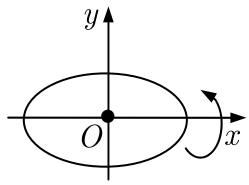


Рис. 4.72

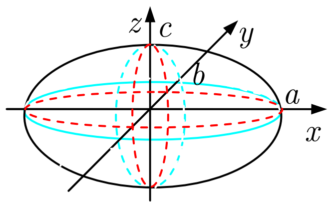


Рис. 4.73. Еліпсоїд

Рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

задає лише одну точку $O(0;0;0)$, а рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

— порожню множину (ще кажуть «уявний еліпсоїд»).

4.6.4. Гіперболоїди

1. Однопорожнинний гіперболоїд. *Однопорожнинним гіперболоїдом* називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій ПДСК справджують *канонічне рівняння*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, a,b,c>0.}$$

Систему координат, у якій однопорожнинний гіперболоїд має це рівняння, називають *канонічною системою*.

2. Однопорожнинний гіперболоїд перетинає вісь Ox у вершинах — точках $A_{1,2}(\pm a;0;0)$, а вісь Oy — у точках $B_{1,2}(0;\pm b;0)$. Вісь Oz однопорожнинний гіперболоїд не перетинає. Відрізки A_1A_2 та B_1B_2 називають *дійсними осями* однопорожнинного гіперболоїда. Числа a,b,c називають *півосями* однопорожнинного гіперболоїда.

Рівняння поверхні містить змінні x,y,z у парних степенях, тому однопорожнинний гіперболоїд симетричний відносно всіх координатних площин, координатних осей і початку координат.

З рівняння однопорожнинного гіперболоїда випливає, що

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1.$$

3. Обертанням гіперболи

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

навколо осі Oz одержимо однопорожнинний гіперболоїд обертання (рис. 4.74)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

а з нього — стисканням уздовж осі Oy з коефіцієнтом $\frac{b}{a}$ — однопорожнинний гіперболоїд загального вигляду (рис. 4.75).

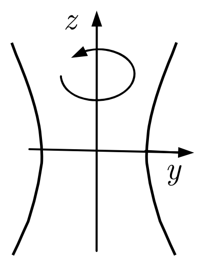


Рис. 4.74. Обертання гіперболи

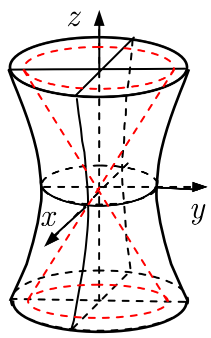


Рис. 4.75. Однопорожнинний гіперболоїд

4. Двопорожнинний гіперболоїд. *Двопорожнинним гіперболоїдом* називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій ПДСК справджують *канонічне рівняння*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, a, b, c > 0.}$$

Систему координат, у якій двопорожнинний гіперболоїд має це рівняння, називають *канонічною системою*.

5. Двопорожнинний гіперболоїд перетинає вісь Oz у двох точках — вершинах — $C_{1,2}(0;0;\pm c)$. Осі Ox та Oy не перетинають поверхню. Відрізок C_1C_2 називають *дійсною віссю*. Числа a, b та c називають *півосями* двопорожнинного гіперболоїда.

Двопорожнинний гіперболоїд симетричний відносно всіх координатних площин, координатних осей і початку координат.

Двопорожнинний гіперболоїд міститься всередині *асимптотичного конуса*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, a, b, c>0$$

і за межами смуги $|z| \geq c$.

6. Обертанням гіперболи

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$$

навколо осі Oz (рис. 4.76) одержимо двопорожнинний гіперболоїд обертання

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

а з нього — стисканням уздовж осі Oy з коефіцієнтом $\frac{b}{a}$ — двопорожнинний гіперболоїд загального вигляду (рис. 4.77).

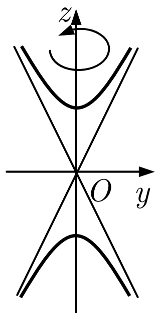


Рис. 4.76. Обертання гіперболи

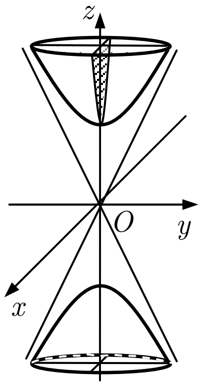


Рис. 4.77. Двопорожнинний гіперболоїд

4.6.5. Параболоїди

1. Еліптичний параболоїд. *Еліптичним параболоїдом* називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій ПДСК справджують *канонічне рівняння*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z, a, b>0.}$$

Систему координат, у якій еліптичний параболоїд має це рівняння, називають *канонічною системою*.

2. Еліптичний параболоїд має з осями координат лише одну спільну точку — *вершину* — точку $O(0;0;0)$.

Оскільки рівняння містить змінні x, y у парних степенях, то еліптичний параболоїд симетричний відносно площин Oxz та Oyz. Поверхня не симетрична відносно площини Oxy. Звідси випливає, що еліптичний параболоїд симетричний відносно координатної осі Oz і не симетричний відносно осей Ox та Oy і початку координат.

З рівняння еліптичного параболоїда випливає, що для всіх точок поверхні $z \geq 0$, причому $z = 0$ тоді й лише тоді, коли точка збігається з початком координат. Отже, всі точки еліптичного параболоїда, крім початку координат, розміщені по один бік від площини Oxy.

3. Обертанням параболи $2a^2z = y^2$ навколо осі Oz (рис. 4.78) одержимо параболоїд обертання

$$2z = \frac{x^2 + y^2}{a^2},$$

а з нього — стисканням вздовж осі Oy з коефіцієнтом $\dfrac{b}{a}$ — еліптичний параболоїд загального вигляду (рис. 4.79).

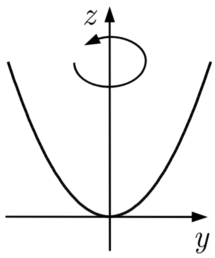


Рис. 4.78. Обертання параболи

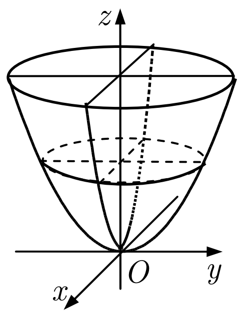


Рис. 4.79. Еліптичний параболоїд

4. Гіперболічний параболоїд. *Гіперболічним параболоїдом* (рис. 4.80) називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій ПДСК справджують *канонічне рівняння*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, a, b > 0.}$$

Систему координат, у якій гіперболічний параболоїд має це рівняння, називають *канонічною системою*.

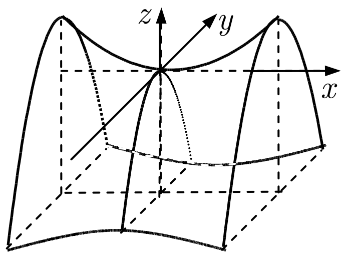


Рис. 4.80. Гіперболічний гіперболоїд

5. Гіперболічний параболоїд перетинає осі канонічної системи координат у єдиній точці — у початку координат.

Гіперболічний параболоїд симетричний відносно площин Oxz та Oyz і не симетричний відносно площини Oxy.

6. Дослідімо форму гіперболічного параболоїда методом перерізів.

Перерізання поверхні площинами $z = h$ дає гіперболи (рис. 4.81, I)

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{2h})^2} - \frac{y^2}{(b\sqrt{2h})^2} = 1, h > 0,$$

спряжені до них гіперболи (рис. 4.81, III)

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{-2h})^2} - \frac{y^2}{(b\sqrt{-2h})} = -1, h < 0,$$

та пару перетинних прямих — асимптот гіпербол (рис. 4.81, II)

$$y = \pm\frac{b}{a}x, h = 0.$$

Перерізання поверхні площинами $y = h$ дає параболи (рис. 4.82)

$$x^2 = 2a^2\left(z + \frac{h^2}{2b^2}\right).$$

Перерізання поверхні площинами $x = h$ дає параболи (рис. 4.83).

$$y^2 = -2b^2\left(z - \frac{h^2}{2a^2}\right).$$

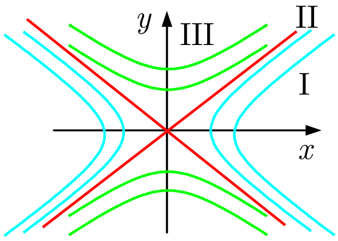


Рис. 4.81

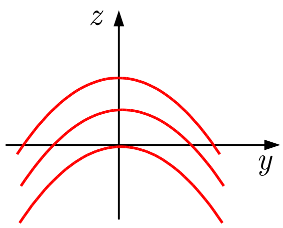


Рис. 4.82

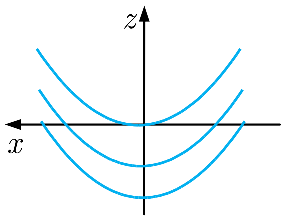


Рис. 4.83

7. Прямолінійні твірні поверхонь 2-го порядку. Деякі з розглянутих поверхонь 2-го порядку можна утворити рухом прямої лінії. Це очевидно для конуса та циліндра. Виявляється, що однопорожнинний гіперболоїд і гіперболічний параболоїд теж є поверхнями, що утворені прямолінійними твірними (рис. 4.84).

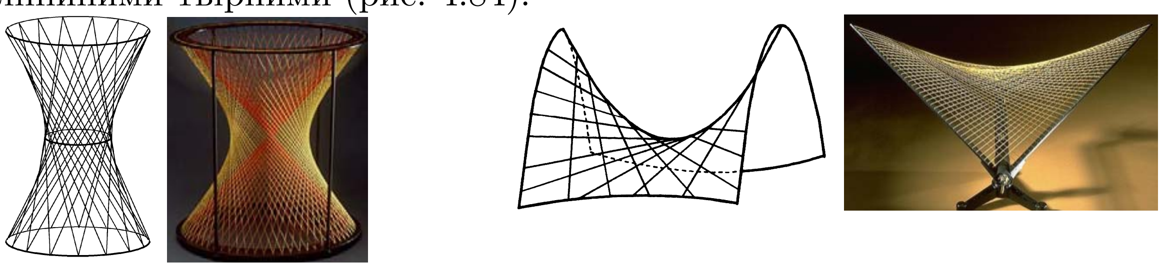


Рис. 4.84. Прямолінійні твірні поверхонь

4.7. ВИЗНАЧНІ КРИВІ ТА ПОВЕРХНІ

У різних розділах математики доводиться розглядати деякі трансцендентні та алгебричні криві та поверхні вищих порядків, ніж другий.

4.7.1. Плоскі криві у ПДСК

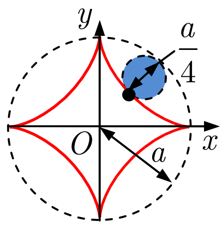


Рис. 4.85. Астроїда

1. *Астроїда* (рис. 4.85) — крива , яку задає в деякій ПДСК:
— рівняння

$$\boxed{x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3};}$$

— параметричні рівняння: $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

Астроїда — траєкторія руху точки M кола радіусом $\dfrac{a}{4}$, що котиться внутрішнім боком кола радіусом $a > 0$ (див. рис. 4.85).

2. *Циклоїда* (рис. 4.86) — крива, яку в деякій ПДСК задають параметричні рівняння:

$$\boxed{\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), t \in \mathbb{R}. \end{cases}}$$

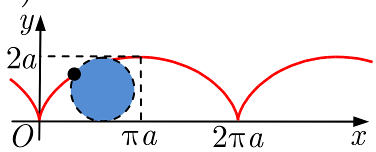


Рис. 4.86. Циклоїда

Циклоїда — траєкторія руху точки кола, що котиться нерухомою прямою без ковзання.

Циклоїду утворює нескінченна кількість арок, кожна з яких відповідає одному обороту кола. Отже, першій арці від початку координат відповідає змінювання параметра t від 0 до 2π; другій — від 2π до 4π тощо.

3. *Декартів листок* (рис. 4.87) — крива, яку в деякій ПДСК задає:
— рівняння

$$\boxed{x^3 + y^3 - 3axy = 0, a > 0;}$$

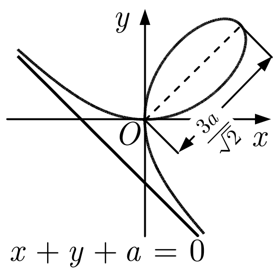


Рис. 4.87. Декартів листок

— параметричні рівняння у ПДСК:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}, t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}. \end{cases}$$

4. *Кучер Аньєзі* (рис. 4.88) — крива, яку в деякій ПДСК задає рівняння

$$\boxed{y = \frac{a^3}{x^2+a^2}.}$$

5. *Петльова парабола* (рис. 4.89) — крива, яку в деякій ПДСК задає рівняння

$$\boxed{ay^2 = x(x-a)^2.}$$

6. *Розгортка кола* (рис. 4.90) — крива, яку в деякій ПДСК задають параметричні рівняння:

$$\boxed{\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), t \in [0;+\infty). \end{cases}}$$

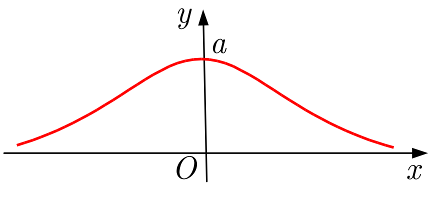


Рис. 4.88. Кучер Ан'єзі

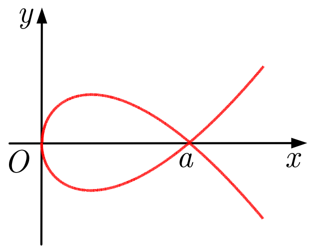


Рис. 4.89. Петльова парабола

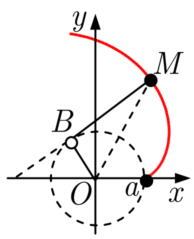


Рис. 4.90. Розгортка кола

4.7.2. Плоскі криві в полярній системі координат

1. *Паскалів завиток* (рис. 4.91) — крива, яка має в деякій полярній системі рівняння

$$\boxed{\rho = 2a\cos\varphi \pm l.}$$

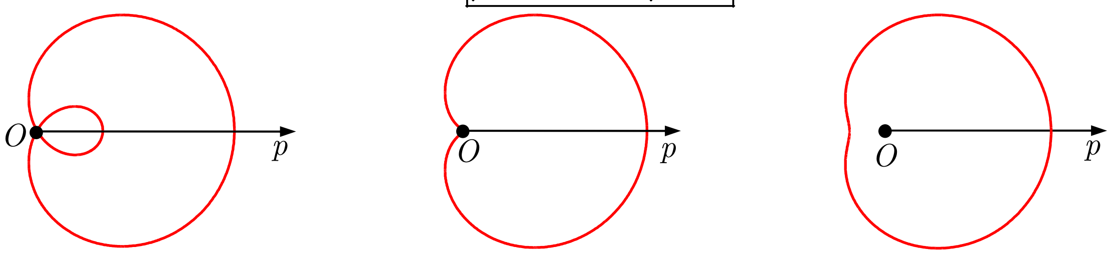


Рис. 4.91. Завиток Паскаля

Лінія симетрична щодо осі Ox; якщо $l < 2a$, то точка O — вузлова (у ній лінія перетинає себе), якщо $l = 2a$, то полюс є точкою вертання, якщо $l > 2a$, то точка O, яка належить кривій, є ізольованою особливою точкою.

Паскалів завиток використовують для креслення профілю ексцентрика, якщо потрібно, щоб стрижень, який ковзає профілем, коливався гармонічно.

2. *Кардіоїда* (рис. 4.92) — крива, яку в деякій полярній системі координат задає рівняння

$$\boxed{\rho = 2a(1 + \cos\varphi).}$$

Кардіоїда — траєкторія руху точки кола радіусом a, яке котиться зовнішнім боком кола з таким самим радіусом — окремий випадок Паскалевого завитка.

3. *Лемніската Бернуллі* (рис. 4.93) — крива, яку в деякій ПДСК задає рівняння

$$\boxed{(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).}$$

Рівняння в полярній системі: $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$.

Лемніската Бернуллі — множина всіх точок площини, для яких добуток віддалей до двох заданих точок цієї площини є сталим і рівним квадрату половини віддалі між заданими точками:

$$\left|F_1M\right|\left|F_2M\right| = a^2.$$

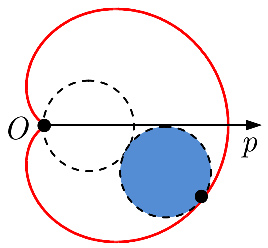


Рис. 4.92. Кардіоїда

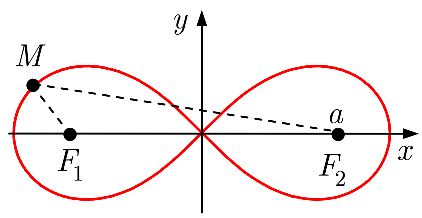


Рис. 4.93. Лемніската Бернуллі

4. *Архімедова спіраль* (рис. 4.94) — крива, яку в деякій полярній системі координат задає рівняння

$$\boxed{\rho = a\varphi.}$$

Архімедова спіраль — траєкторія руху точки, що рівномірно рухається прямою, яка рівномірно обертається навколо фіксованої точки.

5. *Гіперболічна спіраль* (рис. 4.95) — крива, яку в деякій полярній системі координат задає рівняння

$$\boxed{\rho = \frac{a}{\varphi}.}$$

6. *Логарифмічні спіралі*, права і ліва (рис. 4.96 і 4.97) — криві, які в деякій полярній системі координат задають рівняння

$$\boxed{\rho = a^{\varphi}, a > 1} \text{ (для правої);}$$

$$\boxed{\rho = a^{\varphi}, 0 < a < 1} \text{ (для лівої).}$$

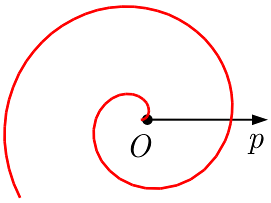


Рис. 4.94. Спіраль Архімеда

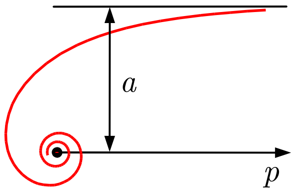


Рис. 4.95. Гіперболічна спіраль

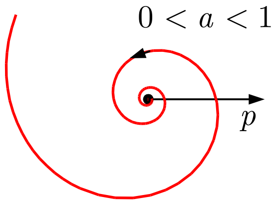


Рис. 4.97. Логарифмічна спіраль (ліва)

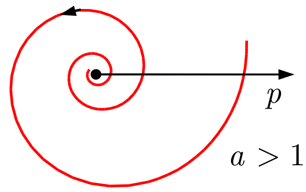
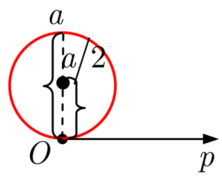


Рис. 4.96. Логарифмічна спіраль (права)

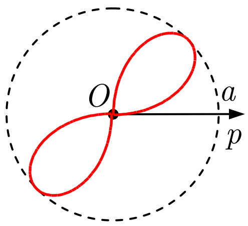
7. *Рози* (рис. 4.98) — сукупність кривих, які в деякій полярній системі координат задають рівняннями:

$$\boxed{\rho = a\sin n\varphi} \text{ або } \boxed{\rho = a\cos n\varphi, a > 0.}$$

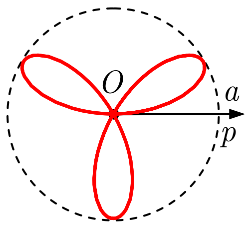
Рози містяться всередині кола радіусом a; коли n ціле, то мають n пелюсток.



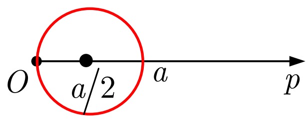
$\rho = a\sin\varphi$



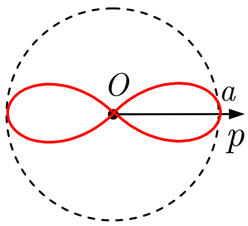
$\rho = a\sin 2\varphi$



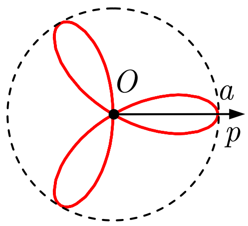
$\rho = a\sin 3\varphi$



$\rho = a\cos\varphi$



$\rho = a\cos 2\varphi$



$\rho = a\cos 3\varphi$

Рис. 4.98. Рози

4.7.3. Просторові криві

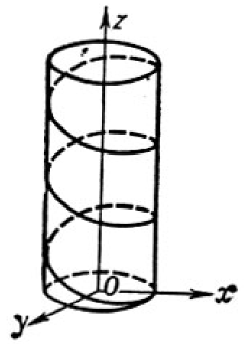


Рис. 4.99. Циліндрична гвинтова лінія

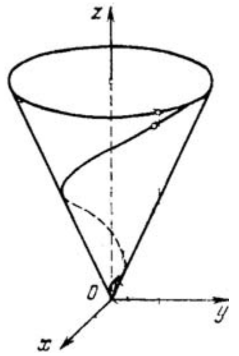


Рис. 4.100. Конічна гвинтова лінія

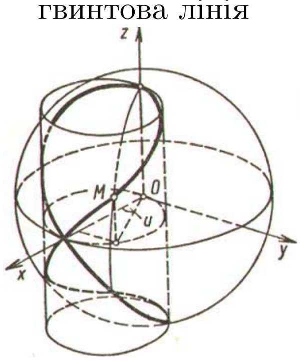


Рис. 4.101. Крива Вівіані

1. *Циліндрична гвинтова лінія* (рис. 4.99) — просторова крива, яку описує точка, що обертається зі сталою кутовою швидкістю навколо нерухомої осі й одночасно переміщується поступально зі сталою швидкістю вздовж цієї осі.

Параметричні рівняння:

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = \dfrac{ht}{2\pi}, t \in [0; +\infty), \end{cases}}$$

де a — радіус циліндра; h — крок гвинтової лінії.

2. *Конічна гвинтова лінія* (рис. 4.102) — лінія на поверхні колового конуса, що перетинає всі твірні під однаковим кутом.

Параметричні рівняння:

$$\boxed{\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t, \\ z = bt, t \in [0; +\infty). \end{cases}}$$

3. *Крива Вівіані* (рис. 4.103) — лінія перетину сфери з коловим циліндром, удвічі меншого радіуса, ніж сфера.

Неявні рівняння:

$$\boxed{\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 = ax. \end{cases}}$$

4.7.4. Поверхні

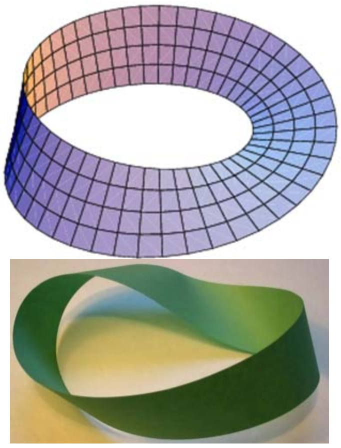


Рис. 4.102. Мебіусів листок

1. *Мебіусів листок* (рис. 4.104) — поверхня, яку можна одержати склеюванням двох протилежних боків перекрученої прямокутної смужки. Ця поверхня є прикладом однобічної неорієнтованої поверхні: якщо рухатись уздовж Мебіусова листка, не перетинаючи його межі, то (на відміну від двобічних поверхонь, приміром, сфери, циліндра) можна потрапити в початкову точку, опинившись у перевернутому положенні, тобто з «другого боку».

2. *Тор* (рис. 4.105) — поверхня, одержана обертанням кола навколо осі, що лежить у площині кола і її не перетинає.

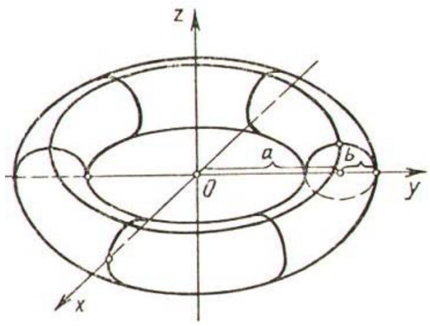


Рис. 4.103. Тор

Параметричні рівняння:

$$\boxed{\begin{cases} x = (a + b\cos u)\cos v, \\ y = (a + b\cos u)\sin v, \\ z = b\sin u, \quad u, v \in [0; 2\pi]. \end{cases}}$$

3. *Гелікоїд* (рис. 4.104) — гвинтова поверхня, яку в просторовій ПДСК задають параметричні рівняння:

$$\boxed{\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \\ z = hv, \;\; u, v \in \mathbb{R}. \end{cases}}$$

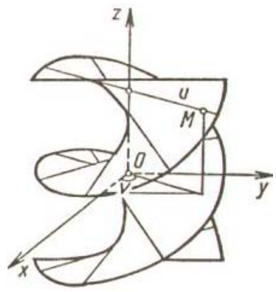


Рис. 4.104. Гелікоїд

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

4.1.1. Класифікуйте лінію (для алгебричної лінії вкажіть порядок):

1) $y - \cos x = 0$; 2) $x + xy + y = 1$; 3) $x + y - 3 = 0$.

4.1.2. Запишіть параметричні рівняння кола $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 16$.

4.1.3. Запишіть рівняння кола $x^2 + y^2 = 2x$ у полярній системі координат, скориставшись формулами зв'язку між ПДСК та полярною системою координат.

4.1.4. Укажіть хоча б один напрямний вектор прямої $L: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-3}$ і хоча б одну точку, яка лежить на прямій.

4.1.5. Укажіть хоча б один напрямний вектор з рівняннями $\begin{cases} x = -t, \\ y = 1 + 2t, \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ і хоча б одну точку, яка лежить на прямій.

4.1.6. Знайдіть один з нормальних векторів прямої $5x - 3y + 15 = 0$.

4.1.7. Укажіть хоча б один нормальний вектор прямої з рівнянням $5(x+1) + 4(y-2) = 0$ і хоча б одну точку, яка лежить на прямій.

4.1.8. Для якого значення c точка $M(3;-2)$ належить прямій $2x + 5y + c = 0$?

4.1.9. Знайдіть абсцису точки $M(a;2)$, яка належить прямій $3x - 4y + 20 = 0$.

4.1.10. Укажіть особливості розташування прямої відносно ПДСК:

1) $2x - 3y = 0$; 2) $4x + 5 = 0$; 3) $y - 1 = 0$.

4.1.11. Визначте, для якого значення параметра α пряма $(\alpha^2 - 9)x + (3\alpha - 6)y + (\alpha + 3) = 0$:

1) паралельна осі Ox; 2) паралельна осі Oy; 3) проходить через початок координат; 4) зливається з віссю Ox; 5) зливається з віссю Oy.

4.1.12. Визначте кутовий коефіцієнт прямої:

1) $3x - y + 4 = 9$; 2) $y - 2 = 0$; 3) $x - 3 = 0$.

4.1.13. Укажіть, які відрізки відтинає пряма $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}=1$ від осей координат.

4.1.14. Визначте, чи є нормованим рівняння прямої:

1) $\dfrac{3}{5}x-\dfrac{4}{5}y+1=0$; 2) $\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{y}{\sqrt{2}}-1=0$?

Якщо ні, то як треба перетворити рівняння?

4.1.15. Укажіть, для якого значення параметра α прямі $x+2y+5=0$ та $\alpha x+4y-3=0$:

1) паралельні; 2) перпендикулярні?

4.1.16. Укажіть, для якого значення параметра α прямі $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}$ та $\dfrac{x-1}{\alpha}=\dfrac{y+3}{4}$:

1) паралельні; 2) перпендикулярні?

4.1.17. Укажіть, для якого значення k прямі $y=5x-2$ та $y=kx+5$:

1) паралельні; 2) перпендикулярні?

4.2.1. Укажіть, які з рівнянь:

1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$; 3) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}=1$; 4) $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x}{1}=0$

задають: а) коло; б) еліпс (не коло); в) параболу; г) гіперболу?

4.2.2. Укажіть, які з наступних властивостей:

1) множина точок, сума віддалей яких від фокусів стала і більша за віддаль між фокусами;

2) множина точок, які рівновіддалені від фокуса і директриси;

3) множина точок, модуль різниці віддалей яких від фокусів є сталою величиною, меншою за віддаль між фокусами;

4) множина точок, які рівновіддалені від однієї точки

визначають:

а) коло; б) еліпс; в) гіперболу; г) параболу.

4.3.1. Запишіть матрицю квадратичної форми $Q(x,y)=x^2-y^2+4xy$.

4.3.2. У системі координат $(O;\overline{i},\overline{j})$ задано рівняння лінії $x^2+y^2=5$ і точку $O'(2;-3)$. Знайдіть рівняння цієї лінії в системі координат $(O';\overline{i},\overline{j})$.

4.4.1. Знайдіть один з нормальних векторів площини $5x - 3y + z + 15 = 0$.

4.4.2. Площину задано рівнянням $5(x+1) + 4(y-2) - 3(z+4) = 0$. Укажіть хоча б один нормальний вектор площини і хоча б одну точку, яка лежить на площині.

4.4.3. Для якого значення d точка $M(3;-2;1)$ належить площині $2x + 5y - z + d = 0$?

4.4.4. Укажіть особливості розташування площини відносно ПДСК:

1) $2x - 3y + z = 0$; 2) $4x + y - 5 = 0$; 3) $y - 1 = 0$.

4.4.5. Укажіть, які відрізки відтинає площина з рівнянням $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{-2} + \dfrac{z}{4} = 1$ від осей координат?

4.4.6. Визначте, чи є нормованим рівняння площини:

1) $\dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3}z + 1 = 0$; 2) $\dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{y}{\sqrt{3}} - \dfrac{z}{\sqrt{3}} - 2 = 0$?

Якщо ні, то як рівняння треба перетворити?

4.4.7. Укажіть, для якого значення параметра α площини $x + 2y - z + 5 = 0$ та $\alpha x + 4y - 2z - 3 = 0$:

1) паралельні; 2) перпендикулярні?

4.5.1. Укажіть хоча б один напрямний вектор прямої з рівнянням $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z}{0}$ і хоча б одну точку, яка лежить на прямій.

4.5.2. Укажіть хоча б один напрямний вектор прямої з рівняннями $\begin{cases} x = -t, \\ y = 1 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 3t, \end{cases}$ і хоча б одну точку, яка лежить на прямій.

4.5.3. Визначте, який геометричний об'єкт задає у просторі рівняння $x - 2y + 3 = 0$ і система рівнянь $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ z = 0\,? \end{cases}$ Як називають рівняння системи?

4.5.4. Укажіть на особливості розташування прямої з рівнянням $\dfrac{x-x_0}{0} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{0}$ відносно ПДСК.

4.5.5. Укажіть, для якого значення параметра α прямі $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{3}$ та $\dfrac{x-1}{\alpha}=\dfrac{y+3}{-4}=\dfrac{z+2}{6}$:

1) паралельні; 2) перпендикулярні?

4.5.6. Визначте, для якого значення параметра α площина $\alpha x+2y-3z+1=0$ і пряма $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z}{-6}$:

1) паралельні; 2) перпендикулярні?

4.6.1. Укажіть, які з рівнянь:

1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}=1$; 3) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}=1$;
4) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=\dfrac{z^2}{16}$; 5) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=\dfrac{z}{16}$.

задають: а) сферу; б) еліпсоїд (не сферу); в) конус; г) еліптичний параболоїд; ґ) однопорожнинний гіперболоїд?

4.6.2. Які геометричні образи у просторі задано рівняннями:

1) $x+y=1$; 2) $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$; 3) $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$; 4) $z=x^2$?

Відповіді

4.1.1. 1) трансцендентна крива; 2) алгебрична, 2-го порядку; 3) алгебрична, 1-го порядку.

4.1.2. $\begin{cases} x=1+4\cos t, \\ y=-3+4\sin t, \end{cases} t\in[0;2\pi)$.

4.1.3. $\rho=2\cos\varphi$.

4.1.4. $\overline{s}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}, M_0(1;-1)$.

4.1.5. $\overline{s}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, M_0(0;1)$.

4.1.6. $\overline{n}=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$.

4.1.7. $\overline{n}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}, M_0(-1;2)$.

4.1.8. $c=4$.

4.1.9. $a=-4$.

4.1.10. 1) проходить через початок координат; 2) паралельна осі Oy; 3) паралельна осі Ox.

4.1.11. 1) $\alpha = \pm 3$; 2) $\alpha = 2$; 3) $\alpha = -3$; 4) $\alpha = -3$; 4) $\alpha \in \varnothing$.

4.1.12. 1) $k = 3$; 2) $k = 0$; 3) $k = \infty$.

4.1.13. $\tilde{a} = 3, \tilde{b} = -2$.

4.1.14. 1) ні, помножити на $\mu = -1$; 2) так.

4.1.15. 1) $\alpha = 2$; 2) $\alpha = -8$.

4.1.16. 1) $\alpha = 2$; 2) $\alpha = 8$.

4.1.17. 1) $k = 5$; 2) $k = -\dfrac{1}{5}$.

4.2.1. 1) еліпс; 2) гіпербола; 3) коло; 4) парабола.

4.2.2. 1) еліпс; 2) парабола; 3) гіпербола; 4) коло.

4.3.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4.3.2. $x'^2 + y'^2 + 4x' - 6y' + 8 = 0$.

4.4.1. $\overline{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.4.2. $\overline{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, M_0(-1;2;-4)$.

4.4.3. $d = 5$. **4.4.4.** 1) проходить через початок координат; 2) паралельна осі Oz; 3) паралельна площині Oxz.

4.4.5. $\tilde{a} = 3, \tilde{b} = -2, \tilde{c} = 4$.

4.4.6. 1) ні, помножити на $\mu = -1$; 2) так.

4.4.7. 1) $\alpha = 2$; 2) $\alpha = -10$.

4.5.1. $\overline{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, M_0(1;-1;0)$. **4.5.2.** $\overline{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, M_0(0;1;2)$.

4.5.3. Площину і пряму, загальні рівняння прямої.

4.5.4. Паралельно осі Oy.

4.5.5. 1) $\alpha = 2$; 2) $\alpha = -26$.

4.5.6. 1) $\alpha = -13$; 2) $\alpha = 1$.

4.6.1. 1) еліпсоїд; 2) однопорожнинний гіперболоїд; 3) сфера; 4) конус; 5) еліптичний параболоїд.

4.6.2. 1) площина; 2) еліптичний циліндр; 3) гіперболічний циліндр; 4) параболічний циліндр.

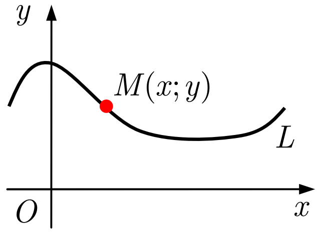
Формули, твердження, алгоритми

4.1. Рівняння ліній і поверхонь

<table>
<tr><td>

❶ ***Рівняння лінії*** L ***на площині:***
① *неявне* $F(x,y)=0, (x;y)\in D$;
② *явне* $y=f(x), x\in[a;b]$;
③ *параметричні* $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases} t\in[\alpha;\beta]$

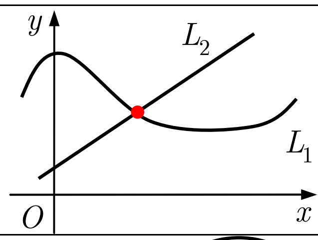
</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

❷ ***Точка перетину ліній***
$L_1 : F_1(x,y)=0$ та $L_2 : F_2(x,y)=0$.
$$\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ F_2(x,y)=0 \end{cases}$$

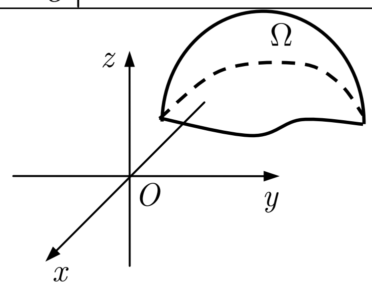
</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

❸ ***Рівняння поверхні*** Ω:
① *неявне* $F(x,y,z)=0$;
② *явне* $z=f(x,y)$;
③ *параметричні* $\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), (u;v)\in D \\ z=z(u,v), \end{cases}$

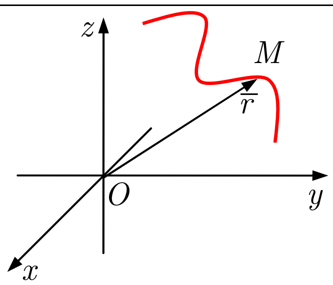
</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

❹ ***Рівняння лінії у просторі*** L:
① *загальні (переріз двох поверхонь)*
$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0; \end{cases}$$
② *параметричні* $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), t\in[\alpha;\beta] \\ z=z(t) \end{cases}$

</td><td>

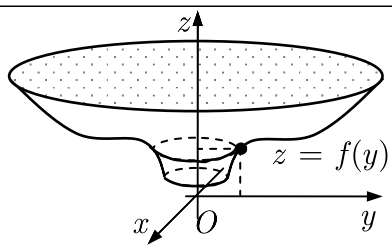


$\overline{r}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$

</td></tr>
<tr><td>

❺ ***Рівняння поверхні обертання,*** утвореної обертанням кривої $z=f(y)$ навколо осі Oz
$$z=f(\sqrt{x^2+y^2})$$

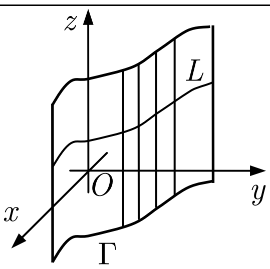
</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

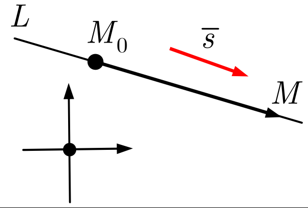
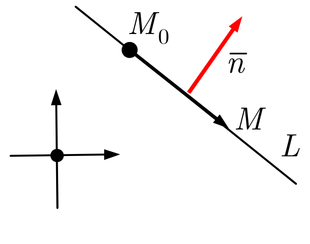
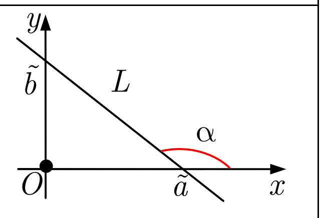
❻ ***Рівняння циліндричної поверхні***, твірні якої паралельні осі Oz і проходять через напрямну лінію $\Gamma\subset Oxy$, що має рівняння $F(x,y)=0$.
$$F(x,y)=0.$$

</td><td>



</td></tr>
</table>

4.2. Пряма на площині

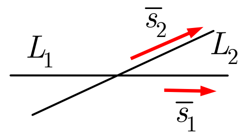
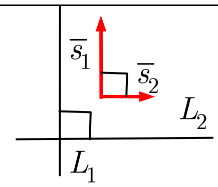
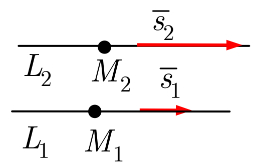
❶ ***Канонічне*** рівняння прямої* (***рівняння*** прямої, що проходить ***через точку паралельно вектору***)	$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$ $M_0(x_0;y_0)\in L, L\parallel \overline{s}$	
Напрямний вектор прямої	$\overline{s}=\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}=\overline{s}(L)$	
❷ ***Параметричні*** рівняння прямої	$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases} t\in\mathbb{R}$	
❸ ***Рівняння*** прямої, що проходить ***через дві точки***	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1},$ $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)\in L$	
❹ ***Рівняння*** прямої, що проходить ***через точку перпендикулярно до вектора****	$(\overline{M_0M},\overline{n})=0,$ $M_0\in L, L\perp\overline{n}$	
Нормальний вектор прямої	$\overline{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\overline{n}(L)$	
❺ ***Загальне рівняння*** прямої	$ax+by+c=0$	
Будь-яке лінійне рівняння у ПДСК на площині задає пряму.		
❻ ***Рівняння*** прямої ***у відрізках***	$\dfrac{x}{\tilde a}+\dfrac{y}{\tilde b}=1$	
❼ ***Рівняння*** прямої ***з кутовим коефіцієнтом***	$y=kx+\tilde b$ $y=k(x-x_0)+y_0, M_0(x_0;y_0)\in L$	
Кутовий коефіцієнт прямої	$k=\operatorname{tg}\alpha$	
❽ ***Нормоване*** рівняння прямої	$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ $\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \cos\beta\end{pmatrix}=\overline{n}^0, p=d(O,L)\geq 0$	

* Умова колінеарності векторів $\overline{M_0M}$ та $\overline{s}$.

** Умова ортогональності векторів $\overline{M_0M}$ та $\overline{n}$.

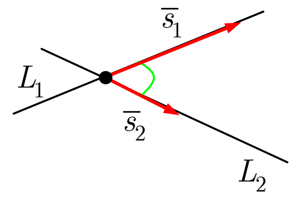
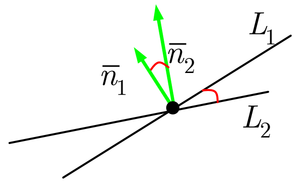
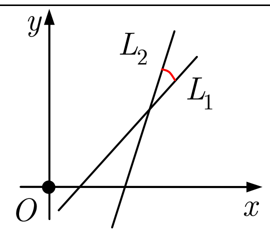
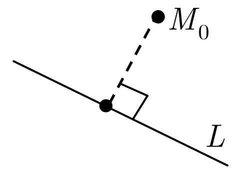
❾ ***Нормувальний множник*** (для загального рівняння прямої)	$\mu = -\dfrac{\operatorname{sgn} c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

4.3. Взаємне розташування прямих на площині

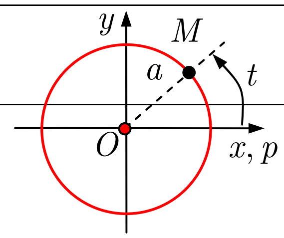
❶ Прямі $L_1 : \dfrac{x-x_1}{l_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1}$ та $L_2 : \dfrac{x-x_2}{l_2} = \dfrac{y-y_2}{m_2}$:		
① ***перетинні***	$\bar{s}_1 \nparallel \bar{s}_2$	
② ***перпендикулярні***	$\bar{s}_1 \perp \bar{s}_2$	
③ ***паралельні (різні)***	$\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2 \nparallel \overline{M_1M_2}$	
④ ***зливаються***	$\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2 \parallel \overline{M_1M_2}$	
❷ Прямі $L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ та $L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$:		
① ***перетинні***	$\bar{n}_1 \nparallel \bar{n}_2$	
② ***перпендикулярні***	$\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$	
③ ***паралельні (різні)***	$\bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2, \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$	
④ ***зливаються*** (рівняння задають одну пряму)	$\bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2, \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$	
❸ Прямі $L_1 : y = k_1x + b_1$ і $L_2 : y = k_2x + b_2$:		
① ***перетинні***	$k_1 \neq k_2$	
② ***перпендикулярні***	$k_1k_2 = -1$	
③ ***паралельні (різні)***	$k_1 = k_2, b_1 \neq b_2$	
④ ***зливаються***	$k_1 = k_2, b_1 = b_2$	

❹ ***Неповні рівняння*** прямої (0 означає, що відповідний коефіцієнт нульовий, а $\not0$ — відповідний коефіцієнт ненульовий)

a	b	c	Висновок	a	b	c	Висновок
0	0	$\not0$	$L = \varnothing$	$\not0$	0	0	$L = Oy$
0	$\not0$	0	$L = Ox$	$\not0$	0	$\not0$	$L \parallel Oy$
0	$\not0$	$\not0$	$L \parallel Ox$	$\not0$	$\not0$	0	$O \in L$

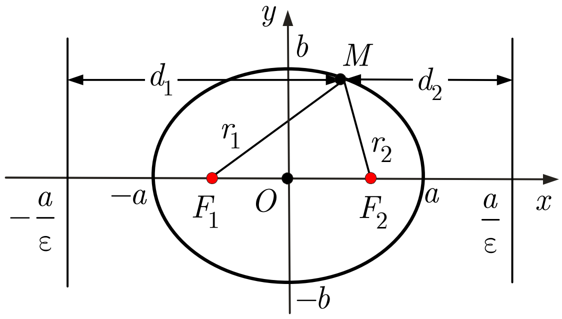
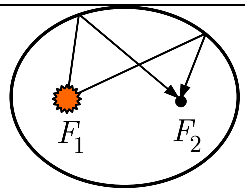
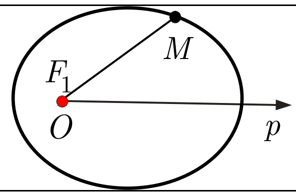
❺ ***Кут*** між ***прямими*** L_1 та L_2 $\overline{s}_1 = \overline{s}(L_1), \overline{s}_2 = \overline{s}(L_2)$	$\cos(\widehat{L_1, L_2}) =$ $= \cos(\widehat{\overline{s}_1, \overline{s}_2}) =$ $= \dfrac{(\overline{s}_1, \overline{s}_2)}{\lvert\overline{s}_1\rvert\lvert\overline{s}_2\rvert}$	
❻ ***Кут*** між ***прямими*** L_1 та L_2 $\overline{n}_1 = \overline{n}(L_1), \overline{n}_2 = \overline{n}(L_2)$	$\cos(\widehat{L_1, L_2}) =$ $= \cos(\widehat{\overline{n}_1, \overline{n}_2}) =$ $= \dfrac{(\overline{n}_1, \overline{n}_2)}{\lvert\overline{n}_1\rvert\lvert\overline{n}_2\rvert}$	
❼ ***Кут*** між ***прямими*** $L_1 : y = k_1x + b_1$ та $L_2 : y = k_2x + b_2$	$\mathrm{tg}(\widehat{L_1, L_2}) =$ $= \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$	
❽ ***Віддаль*** від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $L : ax + by + c = 0$ на площині	$d(M_0, L) =$ $= \dfrac{\lvert ax_0 + by_0 + c\rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	
❾ ***Відхилення*** точки $M_0(x_0; y_0)$ від прямої $L : ax + by + c = 0$ на площині	$\delta(M_0, L) = -\operatorname{sgn} c \cdot \dfrac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $d(M_0, L) = \lvert\delta(M_0, L)\rvert,$ $\delta(O, L) \le 0$	

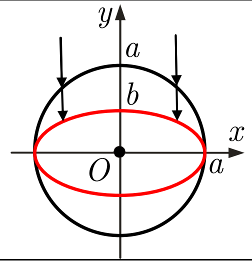
4.4. Лінії 2-го порядку. Коло

❶ ***Загальне рівняння*** лінії 2-го порядку в ПДСК	$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 +$ $+2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$	
❷ ***Коло*** є множиною всіх точок площини, рівновіддалених від однієї точки.	$\lvert CM\rvert = a$	C — *центр* кола a — *радіус* кола
❸ ***Канонічне рівняння*** кола у ПДСК (центр у початку координат)	$x^2 + y^2 = a^2$	

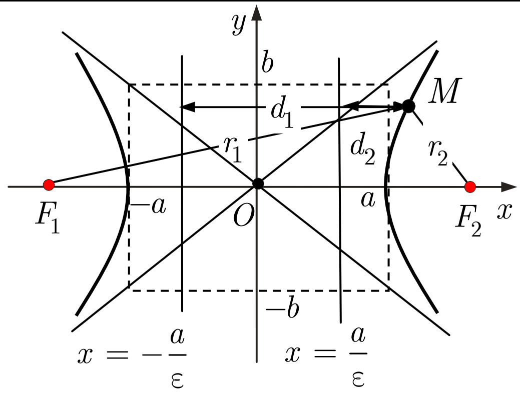
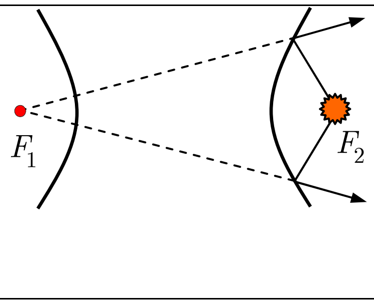
❹ ***Параметричні рівняння*** кола	$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases}$ $t \in [0;2\pi)$	
❺ ***Рівняння*** кола ***в полярній системі координат*** (центр у полюсі)	$\rho = a$	

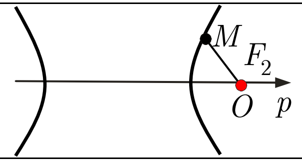
4.5. Еліпс

❶ ***Канонічне рівняння*** еліпса у ПДСК	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$
❷ ***Параметричні рівняння*** еліпса	$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} t \in [0,2\pi)$
❸ ***Основні характеристики еліпса:*** a — *велика піввісь*; b — *мала піввісь*; $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; $\varepsilon = \frac{c}{a}$ — *ексцентриситет*; точки $F_{1,2}(\mp c;0)$ — *фокуси*; прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}, \varepsilon \neq 0$ — *директриси*;	 $r_{1,2} = a \pm \varepsilon x$ — *фокальні радіуси*
❹ ***Фокальна властивість еліпса.*** Еліпс є множиною точок, сума віддалей яких від фокусів стала і більша за віддаль між фокусами. $r_1 + r_2 = 2a > 2c$	❺ ***Фокально-директоріальна властивість еліпса.*** $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon < 1$
❻ ***Оптична властивість еліпса.*** Якщо помістити в один з фокусів еліпса точкове джерело світла, то всі промені після відбиття від еліпса зійдуться в іншому його фокусі.	
❼ ***Рівняння еліпса*** в полярній системі координат (лівий фокус у полюсі)	$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$, $\varepsilon < 1$ 

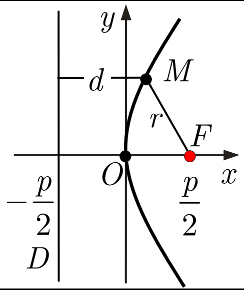
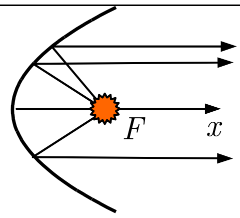
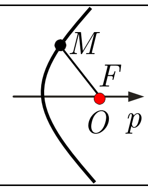
❽ Еліпс як ***стиснене коло***	

4.6. Гіпербола

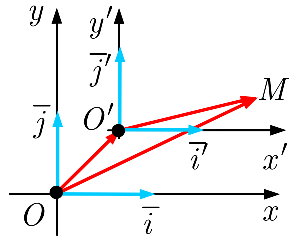
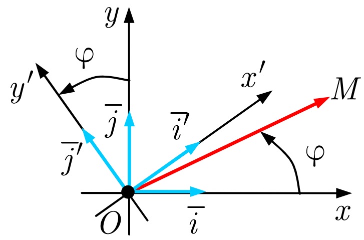
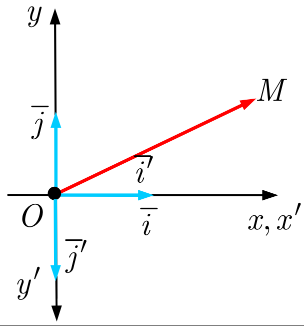
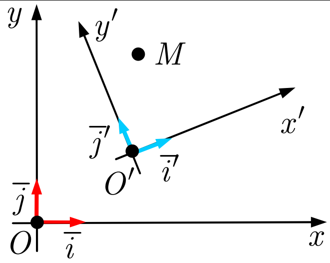
❶ ***Канонічне рівняння*** гіперболи у ПДСК	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, a,b>0$
❷ ***Параметричні рівняння*** гіперболи	$\begin{cases} x=\pm a\operatorname{ch} t, \\ y=b\operatorname{sh} t, t\in\mathbb{R} \end{cases}$
❸ ***Основні характеристики гіперболи:*** a — *дійсна піввісь;* b — *уявна піввісь;* $c=\sqrt{a^2+b^2}$; $\varepsilon=\frac{c}{a}$ — *ексцентриситет;* точки $F_{1,2}(\mp c;0)$ — *фокуси;* прямі $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ — *директриси;*	 прямі $y=\pm\frac{b}{a}x$ — *асимптоти;* $r_{1,2}=a\pm\varepsilon x$ — *фокальні радіуси*
❹ ***Фокальна властивість гіперболи.*** Гіпербола є множиною точок, модуль різниці віддалей яких від фокусів є сталою величиною, меншою за віддаль між фокусами. $\lvert r_1-r_2\rvert=2a<2c$	❺ ***Фокально-директоріальна властивість гіперболи.*** $\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon>1$
❻ ***Оптична властивість гіперболи.*** Якщо помістити в один з фокусів гіперболи точкове джерело світла, то кожний промінь після відбиття від гіперболи начебто виходить з іншого фокуса.	

<table>
<tr>
<td>❼ Рівняння гіперболи
в полярній системі координат
(полюс у правому фокусі))</td>
<td>$\rho = \dfrac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi},$
$\varepsilon > 1$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

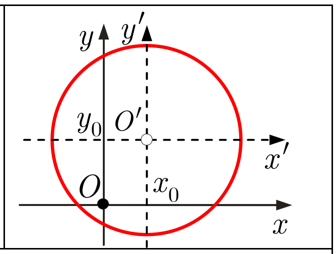
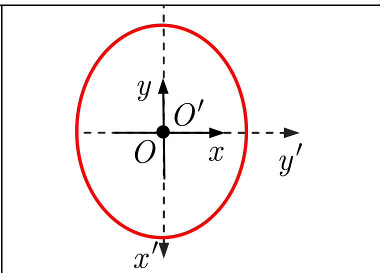
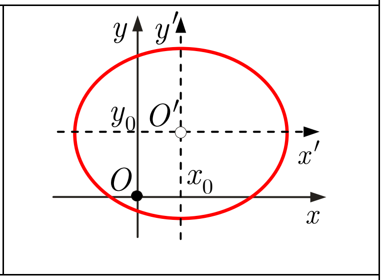
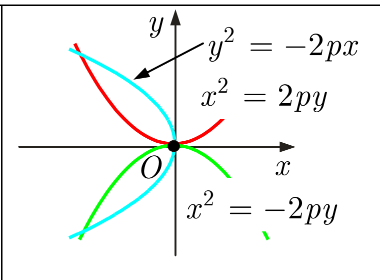
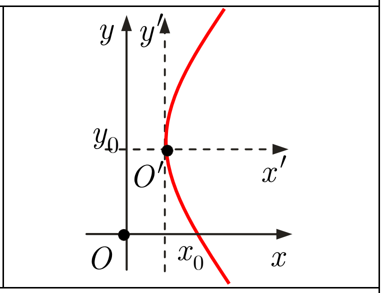
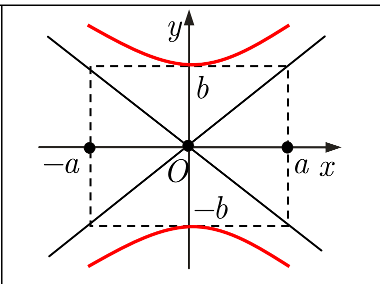
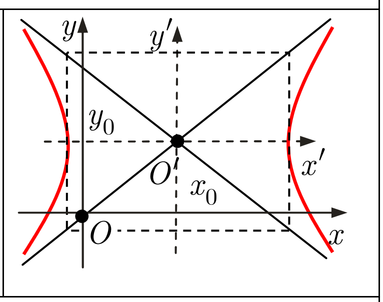
4.7. Парабола

<table>
<tr>
<td>❶ Канонічне рівняння параболи
у ПДСК</td>
<td colspan="2">$y^2 = 2px, p > 0$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">❷ Основні характеристики параболи:
p — фокальний параметр;
$\varepsilon = 1$ — ексцентриситет;
точка $\left(\dfrac{p}{2};0\right)$ — фокус;
пряма $x = -\dfrac{p}{2}$ — директриса;</td>
<td colspan="2">
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$r = x + \dfrac{p}{2}$ — фокальний радіус</td>
</tr>
<tr>
<td>❸ Фокально-директоріальна властивість параболи.
Парабола є множиною точок, які рівновіддалені від фокуса і директриси.</td>
<td colspan="2">$\dfrac{r}{d} = \varepsilon = 1$</td>
</tr>
<tr>
<td>❹ Оптична властивість параболи. Якщо помістити у фокус параболи точкове джерело світла, то всі промені, відбиті від параболи, спрямуються паралельно фокальній осі параболи</td>
<td colspan="2">
</td>
</tr>
<tr>
<td>❺ Рівняння параболи в полярній системі координат
(полюс у фокусі)</td>
<td>$\rho = \dfrac{p}{1 - \cos\varphi}$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

4.8. Перетворення систем координат

❶ ***Паралельне перенесення*** $\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b \end{cases}$	
❷ ***Повертання*** $\begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$	
❸ ***Переорієнтування*** $\begin{cases} x = x', \\ y = -y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y \end{cases}$	
❹ ***Загальне перетворення*** $\begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi + a, \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi + b \end{cases}$	
❺ Лінія, що має алгебричне рівняння n-го степеня у ПДСК, у будь-якій іншій ПДСК має також алгебричне рівняння n-го степеня.	

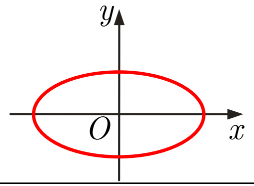
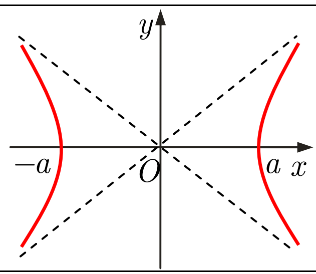
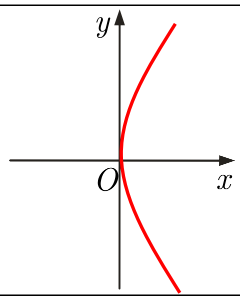
4.9. Побудова канонічних систем координат для кривих 2-го порядку

<table>
<tr><td colspan="2">❶ Коло</td><td>(паралельне перенесення)</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2, a>0$</td></tr>
<tr><td colspan="4">❷ Еліпс</td></tr>
<tr><td>(повертання)</td><td>
</td><td>(паралельне перенесення)</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1, a\geq b>0,$</td><td colspan="2">$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1, a>b>0$</td></tr>
<tr><td colspan="4">❸ Парабола</td></tr>
<tr><td>(повертання, переорієнтування осей)</td><td>
</td><td>(паралельне перенесення)</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y^2=-2px, x^2=2py,$
$x^2=-2py,\ p>0,$</td><td colspan="2">$(y-y_0)^2=2p(x-x_0), p>0,$</td></tr>
<tr><td colspan="4">❹ Гіпербола</td></tr>
<tr><td>(повертання, переорієнтування осей)</td><td>
</td><td>(паралельне перенесення)</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1, b,a>0,$</td><td colspan="2">$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1, a,b>0,$</td></tr>
</table>

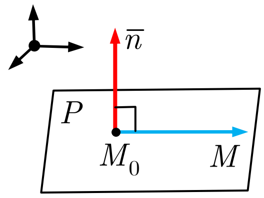
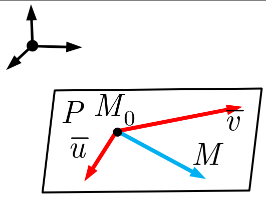
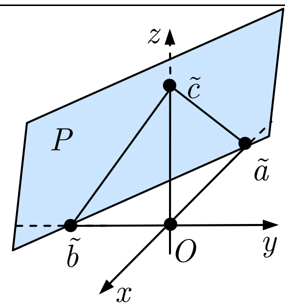
4.10. Власні числа і власні вектори матриці

❶ ***Квадратична форма*** від 2-х змінних	$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2$
❷ ***Матриця*** квадратичної форми	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ a_{12} = a_{21}$
❸ ***Характеристичний многочлен*** матриці	$\lvert A - \lambda E_2 \rvert = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}$
❹ ***Характеристичне рівняння*** матриці	$\lvert A - \lambda E_2 \rvert = 0$ $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$ $\lambda^2 - \operatorname{tr} A \cdot \lambda + \det A = 0$
❺ ***Теорема Гамільтона — Келі.*** Будь-яка матриця є коренем свого характеристичного рівняння.	$A^2 - \operatorname{tr} A \cdot A + \det A \cdot E_2 = O_{2\times 2}$
❻ ***Власний вектор і власне число матриці.*** Ненульовий стовпець $\vec{x}$ називають *власним вектором* квадратної матриці $A_{n\times n}$, якщо існує таке число λ, що $A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$ Число λ називають *власним числом* матриці A, що відповідає власному вектору $\vec{x}$.	❼ ***Знаходження власних чисел і власних векторів матриці.*** ① Власні числа матриці є коренями характеристичного рівняння матриці $\lvert A - \lambda E_n \rvert = 0.$ ② Власні вектори є ненульовими розв'язками однорідної СЛАР $(A - \lambda E_n)\vec{x} = \vec{0}.$
❽ ***Алгоритм зведення рівняння лінії 2-го порядку до канонічного вигляду.*** ① Записують матрицю A квадратичної форми. ② Знаходять власні числа λ_1 та λ_2 матриці A. ③ Знаходять власні вектори $\vec{x}_1$ та $\vec{x}_2$ матриці A. ④ Знаходять орти власних векторів $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix}$ та $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix}$	⑤ Записують матрицю, що задає повертання координатних осей на кут φ: $H = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases}$ ⑥ Записують рівняння лінії у системі координат $Ox'y'$. ⑦ Паралельним перенесенням ПДСК знищують один або обидва лінійних доданки в рівнянні й дістають канонічне рівняння лінії 2-го порядку.

4.11. Класифікації ліній 2-го порядку

<table>
<tr><td colspan="3">❶ Інваріанти рівняння лінії 2-го порядку $(a_{21} = a_{12}, a_{31} = a_{13}, a_{32} = a_{23})$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$$J_1 = a_{11} + a_{22},\ J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ J_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">❷ Еліптичний тип
$J_2 > 0$</td><td>$J_3 < 0$ еліпс</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$J_3 > 0$ уявний еліпс</td></tr>
<tr><td colspan="2">$J_3 = 0$ точка</td></tr>
<tr><td rowspan="2">❸ Гіперболічний тип
$J_2 < 0$</td><td>$J_3 \neq 0$ гіпербола</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$J_3 = 0$ пара перетинних прямих</td></tr>
<tr><td rowspan="2">❹ Параболічний тип
$J_2 = 0$</td><td>$J_3 \neq 0$ парабола</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$J_3 = 0:$
$(a_{31})^2 - a_{11}a_{33} > 0$ — пара паралельних прямих;
$(a_{31})^2 - a_{11}a_{33} = 0$ — пара прямих, що зливаються;
$(a_{31})^2 - a_{11}a_{33} < 0$ — пара уявних паралельних прямих (порожня множина).</td></tr>
<tr><td colspan="3">Коло, еліпс, парабола, гіпербола — криві 2-го порядку.</td></tr>
</table>

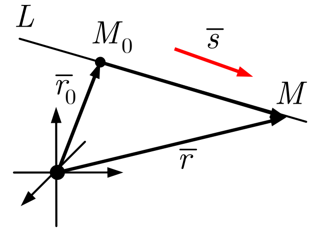
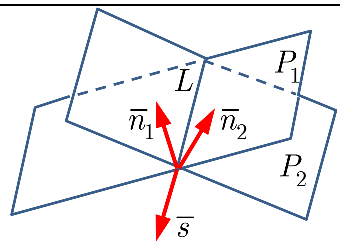
4.12. Площина

❶ ***Рівняння*** площини, що проходить ***через точку перпендикулярно до вектора***[*]	$(\overline{M_0M}, \overline{n}) = 0,$ $M_0 \in P, P \perp \overline{n}$	
Нормальний вектор площини	$\overline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \overline{n}(P)$	
❷ ***Загальне*** рівняння площини	$ax + by + cz + d = 0$	
Будь-яке лінійне рівняння у просторі задає площину.		
❸ ***Рівняння*** площини, що проходить ***через точку паралельно двом векторам***[**]	$(\overline{M_0M}, \overline{u}, \overline{v}) = 0,$ $M_0 \in P, P \parallel \overline{u}, P \parallel \overline{v}$	
❹ ***Рівняння*** площини, що проходить ***через три точки***	$(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) = 0,$ $M_1, M_2, M_3 \in P, \overline{M_1M_2} \nparallel \overline{M_1M_3}$	
❺ ***Рівняння*** площини ***у відрізках***	$\frac{x}{\tilde{a}} + \frac{y}{\tilde{b}} + \frac{z}{\tilde{c}} = 1$	
❻ ***Нормоване*** рівняння площини	$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ $\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \overline{n}^0, p = d(O, P) \geq 0$	
❼ ***Нормувальний множник*** (для загального рівняння площини)	$\mu = -\frac{\operatorname{sgn} d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$	

[*] Умова ортогональності векторів $\overline{M_0M}$ та $\overline{n}$.

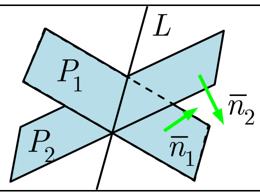
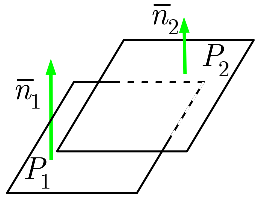
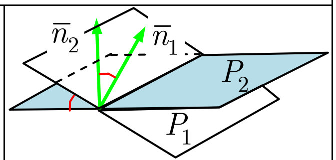
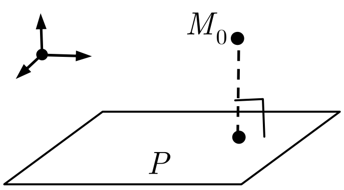
[**] Умова компланарності векторів $\overline{M_0M}, \overline{u}$ та $\overline{v}$.

4.13. Пряма у просторі

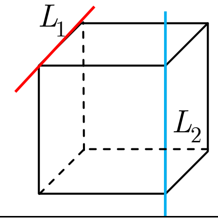
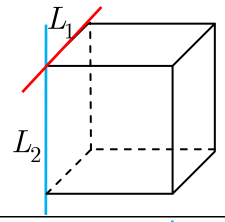
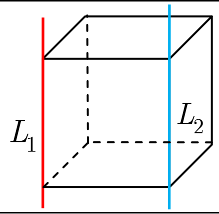
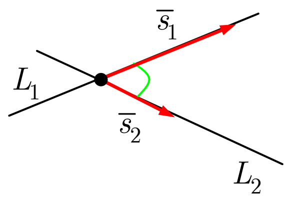
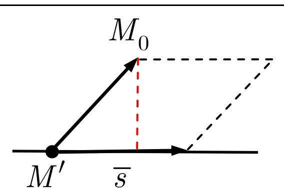
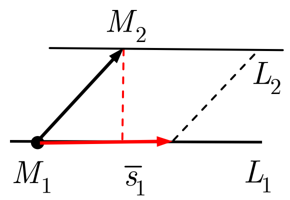
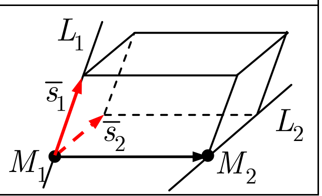
❶ ***Канонічні*** рівняння прямої* (***рівняння*** прямої, що проходить ***через точку паралельно вектору***)	$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$ $M_0(x_0;y_0;z_0)\in L, L \parallel \overline{s}$
Напрямний вектор прямої	$\overline{s}=\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}=\overline{s}(L)$ 
❷ ***Векторне параметричне*** рівняння прямої	$\overline{r}=\overline{r}_0+t\overline{s}, t\in\mathbb{R}$
❸ ***Параметричні*** рівняння прямої	$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, t\in\mathbb{R} \\ z=z_0+nt, \end{cases}$$
❹ ***Векторне*** рівняння прямої	$[\overline{r}-\overline{r}_0,\overline{s}]=\overline{0}$
❺ Рівняння прямої, що проходить ***через дві точки***	$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$ $M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2)\in L$
❻ ***Загальні*** рівняння прямої (пряму задано перетином двох непаралельних площин)	 $$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

* Умова колінеарності векторів $\overline{M_0M}$ та $\overline{s}$.

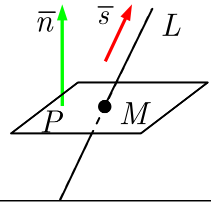
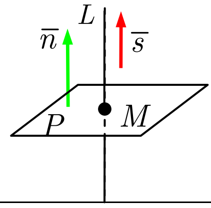
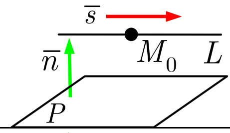
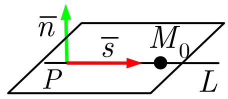
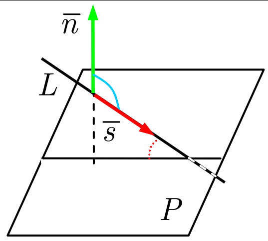
4.14. Взаємне розташування площин

<table>
<tr><td colspan="3">Площини $P_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ та $P_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$:</td></tr>
<tr><td>❶ перетинаються вздовж прямої</td><td>$\overline{n}_1 \not\parallel \overline{n}_2$</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>перпендикулярні</td><td>$\overline{n}_1 \perp \overline{n}_2$</td></tr>
<tr><td>❷ паралельні (різні)</td><td>$\overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2,$
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>❸ зливаються
(рівняння задають одну площину)</td><td colspan="2">$\overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2, \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$</td></tr>
<tr><td>❹ Неповні рівняння площини (0 означає, що відповідний коефіцієнт нульовий, а $\not0$ — відповідний коефіцієнт ненульовий).</td><td colspan="2">
<table>
<tr><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th><th>Висновок</th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th><th>Висновок</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>$\not0$</td><td>$P = \varnothing$</td><td>$\not0$</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>$P = Oyz$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>$\not0$</td><td>0</td><td>$P = Oxy$</td><td>$\not0$</td><td>0</td><td>0</td><td>$\not0$</td><td>$P \parallel Oyz$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>$\not0$</td><td>$\not0$</td><td>$P \parallel Oxy$</td><td>$\not0$</td><td>0</td><td>$\not0$</td><td>0</td><td>$Oy \subset P$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$\not0$</td><td>0</td><td>0</td><td>$P = Oxz$</td><td>$\not0$</td><td>0</td><td>$\not0$</td><td>$\not0$</td><td>$P \parallel Oy$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$\not0$</td><td>0</td><td>$\not0$</td><td>$P \parallel Oxz$</td><td>$\not0$</td><td>$\not0$</td><td>0</td><td>0</td><td>$Oz \subset P$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$\not0$</td><td>$\not0$</td><td>0</td><td>$Ox \subset P$</td><td>$\not0$</td><td>$\not0$</td><td>0</td><td>$\not0$</td><td>$P \parallel Oz$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$\not0$</td><td>$\not0$</td><td>$\not0$</td><td>$P \parallel Ox$</td><td>$\not0$</td><td>$\not0$</td><td>$\not0$</td><td>0</td><td>$O \in P$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>❺ Кут між площинами P_1 та P_2
$\overline{n}_1 = \overline{n}(P_1), \overline{n}_2 = \overline{n}(P_2)$</td><td>$\cos(\widehat{P_1, P_2}) =$
$= \cos(\widehat{\overline{n}_1, \overline{n}_2}) =$
$= \frac{(\overline{n}_1, \overline{n}_2)}{\lvert\overline{n}_1\rvert \lvert\overline{n}_2\rvert}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">❻ Віддаль від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$
до площини $P : ax + by + cz + d = 0$</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td colspan="2">$d(M_0, P) = \frac{\lvert ax_0 + by_0 + cz_0 + d \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">❼ Відхилення точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$
від площини
$P : ax + by + cz + d = 0$</td><td colspan="2">$\delta(M_0, P) = -\operatorname{sgn} d \cdot \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$d(M_0, P) = \lvert \delta(M_0, P) \rvert,$
$\delta(O, P) \leq 0$</td></tr>
</table>

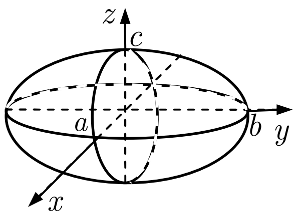
4.15. Взаємне розташування прямих у просторі

Прямі $L_1:\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ та $L_2:\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$:		
❶ ***мимобіжні*** Через мимобіжні прямі не можна провести площину.	$(\overline{M_1M_2},\bar{s}_1,\bar{s}_2)\neq 0$	
❷ ***перетинні*** Через перетинні й різні паралельні прямі можна провести єдину площину.	$(\overline{M_1M_2},\bar{s}_1,\bar{s}_2)=0,$ $\bar{s}_1 \nparallel \bar{s}_2$	
❸ ***паралельні (різні)*** Через кожну точку простору проходить одна й лише одна пряма паралельна заданій.	$\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2 \nparallel \overline{M_1M_2}$	
❹ ***зливаються*** (рівняння задають одну пряму)	$\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2 \parallel \overline{M_1M_2}$	
❺ ***Кут*** між ***прямими*** L_1 та L_2 $\bar{s}_1=\bar{s}(L_1),\bar{s}_2=\bar{s}(L_2)$	$\cos(\widehat{L_1,L_2})=$ $=\cos(\widehat{\bar{s}_1,\bar{s}_2})=$ $=\dfrac{(\bar{s}_1,\bar{s}_2)}{\lvert\bar{s}_1\rvert\lvert\bar{s}_2\rvert}$	
❻ ***Віддаль*** від ***точки*** M_0 до ***прямої*** L $M'\in L,\bar{s}=\bar{s}(L)$	$d(M_0,L)=$ $=\dfrac{\lvert[\overline{M'M_0},\bar{s}]\rvert}{\lvert\bar{s}\rvert}$	
❼ ***Віддаль*** між ***паралельними прямими*** L_1 та L_2 $M_1\in L_1,M_2\in L_2,\bar{s}_1=\bar{s}(L)$	$d(L_1,L_2)=$ $=\dfrac{\lvert[\overline{M_1M_2},\bar{s}_1]\rvert}{\lvert\bar{s}_1\rvert}$	
❽ ***Віддаль*** між ***мимобіжними прямими*** L_1 та L_2 $M_1\in L_1,M_2\in L_2,\bar{s}_1=\bar{s}(L_1),\bar{s}_2=\bar{s}(L_2)$	$d(L_1,L_2)=$ $=\dfrac{\lvert(\overline{M_1M_2},[\bar{s}_1,\bar{s}_2])\rvert}{\lvert[\bar{s}_1,\bar{s}_2]\rvert}$	

4.16. Взаємне розташування прямої і площини

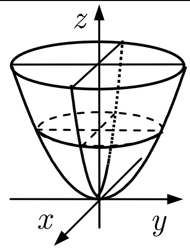
<table>
<tr><td colspan="3">Площина $P: ax+by+cz+d=0$ і пряма $L: \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$:</td></tr>
<tr><td>❶ перетинаються в одній точці</td><td>$\overline{n} \not\perp \overline{s}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>перпендикулярні</td><td>$\overline{n} \parallel \overline{s}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>❷ паралельні (без спільних точок)</td><td>$\overline{n} \perp \overline{s}, M_0 \notin P$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>❸ мають безліч спільних точок
(пряма L лежить у площині P)</td><td>$\overline{n} \perp \overline{s}, M_0 \in P$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>❹ Кут між прямою L
і площиною P
$\overline{s}=\overline{s}(L), \overline{n}=\overline{n}(P)$</td><td>$\sin(\widehat{L,P}) =$
$= \left|\cos(\widehat{\overline{n},\overline{s}})\right| =$
$= \dfrac{\left|(\overline{n},\overline{s})\right|}{\left|\overline{n}\right|\left|\overline{s}\right|}$</td><td>
</td></tr>
</table>

4.17. Поверхні 2-го порядку



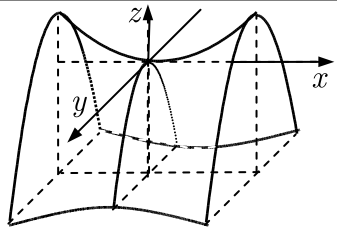
Еліпсоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



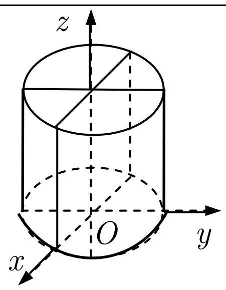
Еліптичний параболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$



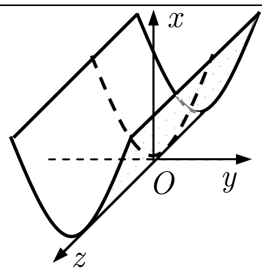
Гіперболічний параболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$



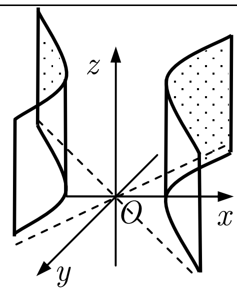
Еліптичний циліндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



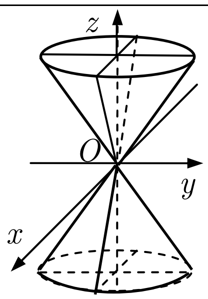
Параболічний циліндр

$$y^2=2px$$



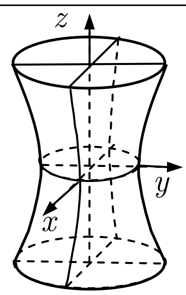
Гіперболічний циліндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



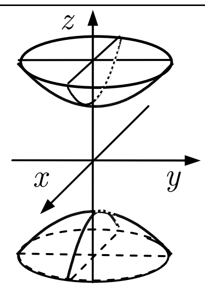
Конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$



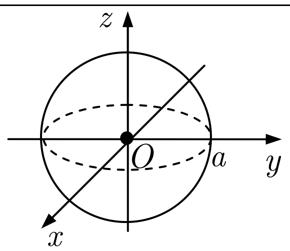
Однопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



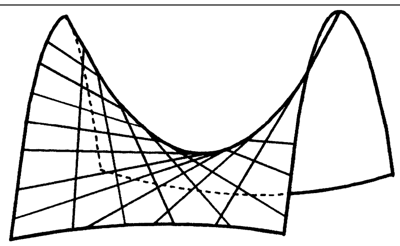
Двопорожнинний гіперболоїд

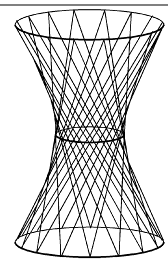
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



Сфера

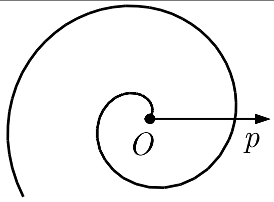
$$x^2+y^2+z^2=a^2$$





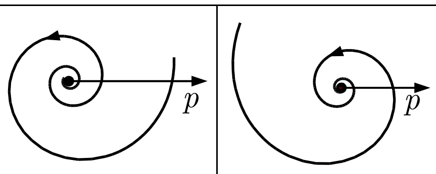
Гіперболічний параболоїд і однопорожнинний гіперболоїд — лінійчаті поверхні.

4.18. Деякі визначні криві



Спіраль Архімеда

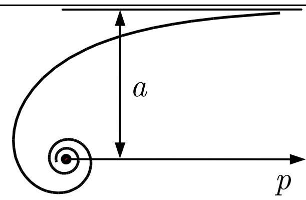
$\rho = a\varphi$



$a > 1$ $\quad$ $0 < a < 1$

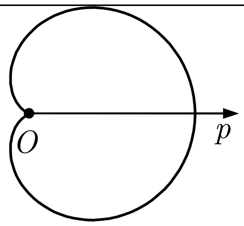
Логарифмічна спіраль

$\rho = a^{\varphi}$



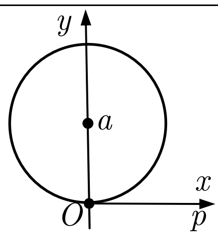
Гіперболічна спіраль

$$\rho = \frac{a}{\varphi}$$



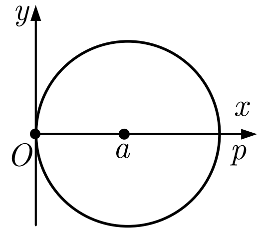
Кардіоїда

$\rho = 2a(\cos\varphi + 1)$



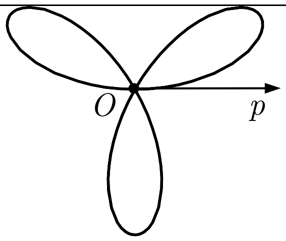
Коло $x^2 + y^2 = 2ay,$

$\rho = 2a\sin\varphi, a > 0$



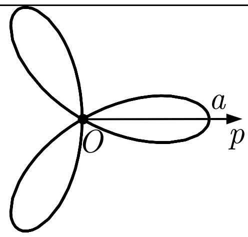
Коло $x^2 + y^2 = 2ax,$

$\rho = 2a\cos\varphi, a > 0$



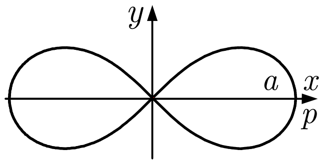
Трипелюсткова роза

$\rho = a\sin 3\varphi$



Трипелюсткова роза

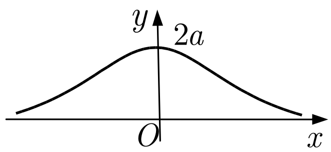
$\rho = a\cos 3\varphi$



Лемніската Бернуллі

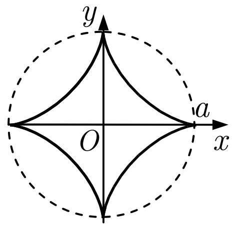
$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$

$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$



Кучер Аньєзі

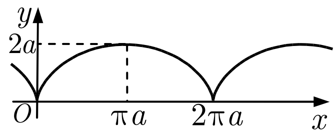
$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$$



Астроїда

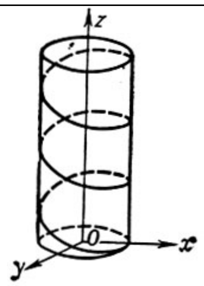
$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} t \in [0; 2\pi)$$



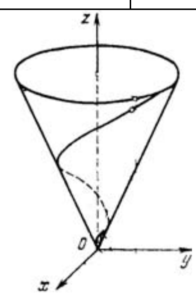
Циклоїда

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$



Циліндрична гвинтова лінія

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = \dfrac{ht}{2\pi} \end{cases}$$



Конічна гвинтова лінія

$$\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t, \\ z = bt \end{cases}$$

Практикум 4.1. Прямі на площині

Навчальні задачі

4.1.1. Записати канонічне й параметричні рівняння прямої L, що проходить через точку $M_0(1;-1)$ паралельно вектору $\overline{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. [4.2.1, 4.2.2.]①

[*Ненульовий вектор* $\overline{a}$ *можна взяти за напрямний вектор* $\overline{s}$ *шуканої прямої.*]

$$\overline{s}(L) = \overline{a}.$$

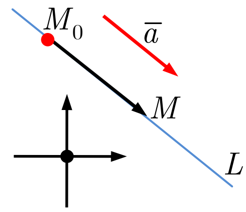


Рис. до 4.1.1

Нехай точка $M(x;y) \in L$.

[*Точка* $M(x;y)$ *належить прямій* L *тоді й лише тоді, коли вектори* $\overline{M_0M}$ *та* $\overline{a}$ *колінеарні.*]

$$M \in L \Leftrightarrow \overline{M_0M} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} \parallel \overline{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

[*Записуючи умову колінеарності векторів у координатній формі* [*3.5.6*], *дістаємо канонічне рівняння прямої* [*4.2.1*].]

Канонічне рівняння:

$$L : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{5}.$$

[*Прирівнюючи одержану пропорцію до параметра* t *й виражаючи з неї координати* x *та* y, *дістаємо параметричні рівняння прямої* [*4.2.2*].]

Параметричні рівняння:

$$L : \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -1 + 5t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

4.1.2. Записати канонічне рівняння прямої L, яка проходить через точки $M_1(3;3)$ та $M_2(4;5)$.

Розв'язання. [4.2.3.]

[*Підставляючи у формулу* [*4.2.3*] *координати точок* M_1 *та* M_2, *дістаємо канонічне рівняння прямої.*]①

$$L : \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2}.$$

Коментар. ① Напрямним вектором шуканої прямої L є ненульовий вектор

$$\overline{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \overline{s}(L).$$

4.1.3. Записати загальне рівняння прямої L, що проходить через точку $M_0(1;-3)$ перпендикулярно до вектора $\overline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. [4.2.4]①

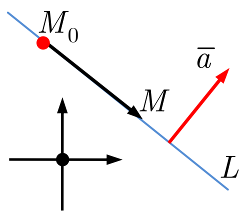


Рис. до 4.1.3

[*Оскільки вектор* $\overline{a}$ *перпендикулярний до прямої* L, *то його можна взяти за нормальний вектор* $\overline{n}$ *прямої* L.]

$$\overline{n}(L) = \overline{a}.$$

Нехай точка $M(x;y) \in L$.

[*Точка* $M(x;y)$ *належить прямій* L *тоді й лише тоді, коли вектори* $\overline{M_0M}$ *та* $\overline{a}$ *ортогональні.*]

$$M \in L \Leftrightarrow \overline{M_0M} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y+3 \end{pmatrix} \perp \overline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\overline{M_0M}, \overline{a}) = 0.$$

[*Обчислюючи скалярний добуток векторів* [*3.11.2*], *після перетворень дістаємо загальне рівняння прямої* L [*4.2.5*].]

$$4(x-1) + 5(y+3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow L : 4x + 5y + 11 = 0.$$

4.1.4.1. Записати рівняння прямої L, яка проходить через точку $M_0(7;-3)$ паралельно прямій $L_1 : \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+7}{3}$.

Розв'язання. [4.3.1.]

[*Використовуємо умову паралельності прямих* [*4.3.1*].]

$$L \parallel L_1 \Rightarrow \overline{s}(L) = \overline{s}(L_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

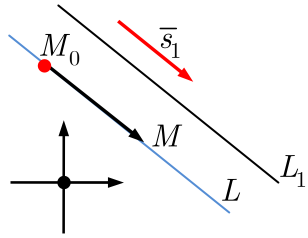


Рис. до 4.1.4.1

[*Використовуючи* ***4.1.1*** *або формулу* [*4.2.1*], *дістаємо канонічне рівняння прямої.*]

$$L : \frac{x-7}{-2} = \frac{y+3}{3}.$$

4.1.4.2. Записати рівняння прямої L, яка проходить через точку $M_0(7;-3)$ перпендикулярно до прямої $L_1 : \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+7}{3}$.

Розв'язання. [4.2.1, 4.2.4.]

$$L \perp L_1 \Rightarrow \overline{n}(L) = \overline{s}(L_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

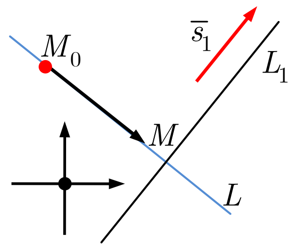


Рис. до 4.1.4.2

[*Використовуючи **4.1.3** або формулу [4.2.4], дістаємо загальне рівняння прямої.*]

$$-2(x-7) + 3(y+3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow L : -2x + 3y + 23 = 0.$$

4.1.5.1. Записати рівняння прямої L, яка проходить через точку $M_0(7;-3)$ паралельно прямій $L_2 : 4x - 5y + 1 = 0$.

Розв'язання. [4.3.2.]

[*Використовуємо умову паралельності прямих [4.3.2].*]

$$L \parallel L_2 \Rightarrow \overline{n}(L) = \overline{n}(L_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

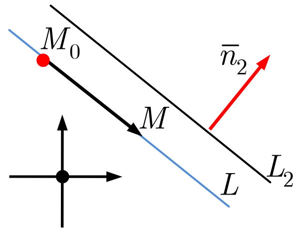


Рис. до 4.1.5.1

[*Використовуючи **4.1.3** або формулу [4.2.4], дістаємо загальне рівняння прямої.*]

$$4(x-7) - 5(y+3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow L : 4x - 5y - 43 = 0.$$

4.1.5.2. Записати рівняння прямої L, яка проходить через точку $M_0(7;-3)$ перпендикулярно до прямої $L_2 : 4x - 5y + 1 = 0$.

Розв'язання. [4.2.1, 4.2.5.]

$$L \perp L_2 \Rightarrow \overline{s}(L) = \overline{n}(L_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

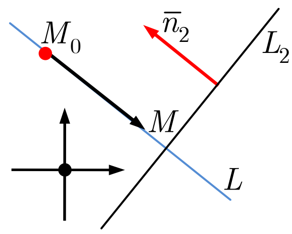


Рис. до 4.1.5.2

[*Використовуючи **4.4.1** або формулу [4.2.1], дістаємо канонічне рівняння прямої.*]

$$L : \frac{x-7}{4} = \frac{y+3}{-5}.$$

4.1.6.1. Записати рівняння прямої L, яка проходить через точку $M_0(7;-3)$ паралельно прямій $L_3 : y = 2x - 3$.

Розв'язання. [4.3.3.]

[*Використовуємо умову паралельності прямих [4.3.3].*]

$$L \parallel L_3 \Rightarrow k = k_3 = 2.$$

[*Підставляючи кутовий коефіцієнт k й координати точки M_0 в рівняння [4.2.7], дістаємо рівняння прямої L з кутовим коефіцієнтом.*]

$$y = 2(x-7) - 3;$$
$$L : y = 2x - 17.$$

4.1.6.2. Записати рівняння прямої L, яка проходить через точку $M_0(7;-3)$ перпендикулярно до прямої $L_3 : y = 2x - 3$.

Розв'язання. [4.3.3.]

[*Використовуємо умову перпендикулярності прямих [4.3.3].*]

$$L \perp L_3 \Rightarrow kk_3 = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{k_3} = -\frac{1}{2}.$$

[*Підставляючи кутовий коефіцієнт k й координати точки M_0 в рівняння [4.2.7], дістаємо рівняння прямої L з кутовим коефіцієнтом.*]

$$y = -\frac{1}{2}(x-7) - 3;$$
$$L : y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

4.1.7. Записати рівняння прямої у відрізках і побудувати пряму в ПДСК, якщо її загальне рівняння $3x - 6y - 12 = 0$.

Розв'язання. [4.2.6.]

[*Переносимо вільний член рівняння праворуч і ділимо обидві частини рівняння на нього, записуючи коефіцієнти при x, y у знаменники.*]

$$3x - 6y = 12 \Leftrightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1.$$

З одержаного рівняння прямої у відрізках випливає, що пряма перетинає осі координат у точках $A(4;0)$, $B(0;-2)$.

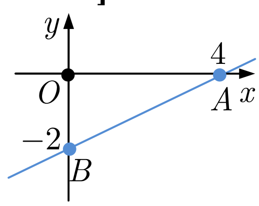


Рис. до 4.1.7

4.1.8. Записати нормоване рівняння прямої $L : 4x - 3y + 10 = 0$. Знайти напрямні косинуси нормального вектора прямої і віддаль точки $O(0;0)$ від прямої.

Розв'язання. [4.2.8, 4.2.9.] ①

[*Нормуємо загальне рівняння прямої, помножуючи його на нормувальний множник.*]

$$\mu = -\frac{\operatorname{sgn} 10}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = -\frac{1}{5}.$$

Нормоване рівняння прямої:

$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 = 0.$$

$$\cos\alpha = -\frac{4}{5}, \cos\beta = \frac{3}{5}, d(O, L) = p = 2.$$

Коментар. ① У нормованому рівнянні коефіцієнти при x та y є координатами одиничного нормального вектора, а вільний член має бути від'ємним.

4.1.9. Перевірити, чи проходить пряма $L: 2x - y + 3 = 0$ через точки $A(-1;1)$ та $B(2;-3)$.

Розв'язання. ①

[*Підставляємо координати точок у рівняння прямої.*]

$$2 \cdot (-1) - 1 + 3 = 0 \Rightarrow A \in L;$$

$$2 \cdot 2 - (-3) + 3 = 10 \neq 0 \Rightarrow B \notin L.$$

Коментар. ① Якщо точка лежить на прямій, то її координати повинні справджувати рівняння прямої.

4.1.10. Знайти точку перетину прямих

$$L_1 : 8x - 3y - 1 = 0 \text{ та } L_2 : 4x + y - 13 = 0,$$

попередньо дослідивши їх взаємне розташування.

Розв'язання. [4.3.2.]

[*Із загальних рівнянь прямих виписуємо координати їхніх нормальних векторів.*]

$$\overline{n}(L_1) = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \overline{n}(L_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[*Перевіряємо умови [4.3.2].*]

$$\frac{8}{4} \neq \frac{-3}{1} \Rightarrow \overline{n}(L_1) \nparallel \overline{n}(L_2).$$

[*Висновуємо про взаємне розташування прямих.*]

Прямі L_1 та L_2 перетинаються в точці M^*. ①

[*Знаходимо координати точки M^*, розв'язуючи систему методом Крамера чи Гауса — Йордана.*]

$$M^*(x;y) = L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 3y - 1 = 0, \\ 4x + y - 13 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow M^*(2;5).$$

Коментар. ① Координати точки перетину справджують рівняння обох прямих.

4.1.11. Задано пряму $L: 2x + 5y - 38 = 0$ та точку $Q(-2;-9)$.

4.1.11.1. Знайти проекцію точки Q на пряму L.

Розв'язання. ①

[*Крок 1.* *Знаходимо напрямний вектор і параметричні рівняння прямої L', яка проходить через точку Q перпендикулярно до прямої L (**4.1.3**).*]

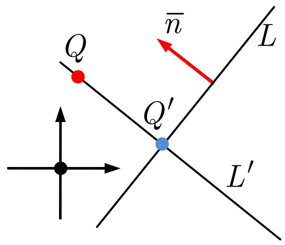


Рис. до 4.1.11.1

$$\overline{s}(L') = \overline{n}(L) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$L' \overset{[4.2.2]}{:} \begin{cases} x = 2t - 2, \\ y = 5t - 9, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

[*Крок 2.* *Знаходимо точку Q' — проекцію точки Q на пряму L як точку перетину прямих L та L', підставляючи параметричні рівняння прямої L' у загальне рівняння прямої L.*]

$$\begin{cases} 2x + 5y - 38 = 0, \\ \begin{cases} x = 2t - 2, \\ y = 5t - 9 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} 2(2t - 2) + 5(5t - 9) - 38 = 0; \\ 29t - 87 = 0; \\ t = 3. \end{aligned}$$

[*Підставляючи знайдене значення параметра $t = 3$ у параметричні рівняння прямої, дістаємо координати точки перетину.*]

$$Q' = L \cap L' : \begin{cases} x = 2 \cdot 3 - 2 = 4, \\ y = 5 \cdot 3 - 9 = 6. \end{cases} \Leftrightarrow Q'(4;6).$$

Коментар. ① Проекція точки на пряму є точкою перетину заданої прямої і прямої, яка проходить через точку перпендикулярно до заданої прямої.

4.1.11.2. Знайти точку P, симетричну точці Q відносно прямої L.

Розв'язання. ①

[*Крок 1.* *Знаходимо точку Q' — проекцію точки Q на пряму L* (**4.1.11.1**).]

$$Q'(4;6).$$

[***Крок 2.*** *Знаходимо координати точки P як точки поділу відрізка QQ' у відношенні $\lambda = -2$.*]②

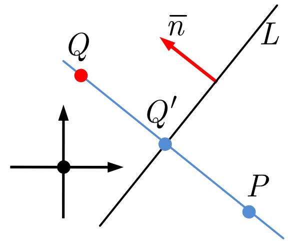


Рис. до 4.1.11.2

$$\begin{cases} x_P \overset{[3.8.6]}{=} \dfrac{x_Q - 2x_{Q'}}{-1} = 2x_{Q'} - x_Q = 2\cdot 4 - (-2) = 10, \\ y_P \overset{[3.8.6]}{=} \dfrac{y_Q - 2y_{Q'}}{-1} = 2y_{Q'} - y_Q = 2\cdot 6 - (-9) = 21 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(10;21).$$

Коментар. ① Точки P та Q розташовані на перпендикулярі до заданої прямої на однаковій віддалі від неї.

② Інший спосіб знаходження координат точки $P(x_P;y_P)$ — використати те, що точка Q' є серединою відрізка PQ [3.8.7] і розв'язати рівняння:

$$\frac{x_P + x_Q}{2} = x_{Q'} \Leftrightarrow \frac{x_P - 2}{2} = 4;$$
$$\frac{y_P + y_Q}{2} = y_{Q'} \Leftrightarrow \frac{y_P - 9}{2} = 6.$$

4.1.12. Знайти віддаль і відхилення точки $M_0(5;7)$ від прямої $L: 3x + 2y - 4 = 0$.

Розв'язання. [4.3.8, 4.3.9.]

[*Знаходимо віддаль від точки M_0 до прямої L.*]

$$d(M_0, L) \overset{[4.3.8]}{=} \frac{|3\cdot 5 + 2\cdot 7 - 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{25}{\sqrt{13}}.$$

[*Знаходимо відхилення точки M_0 від прямої L.*]

$$\delta(M_0, L) \overset{[4.3.9]}{=} -\operatorname{sgn}(-4)\cdot \frac{3\cdot 5 + 2\cdot 7 - 4}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{25}{\sqrt{13}}.$$

4.1.13. Знайти рівняння прямої L', яка паралельна прямій $L: 12x + 5y - 52 = 0$ і проходить на віддалі $d = 2$ від неї.

Розв'язання. [4.3.8]

Нехай точка $M(x;y) \in L'$. Тоді

$$d(M, L) = \frac{|12x + 5y - 52|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{|12x + 5y - 52|}{13} = 2 \Leftrightarrow$$

$$|12x + 5y - 52| = 26 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 12x + 5y - 52 = 26, \\ 12x + 5y - 52 = -26 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} L_1' : 12x + 5y - 78 = 0, \\ L_2' : 12x + 5y - 26 = 0. \end{array}\right.$$

4.1.14. Знайти рівняння бісектрис кутів L' та L'' між прямими $L_1 : 12x + 9y - 17 = 0$ та $L_2 : 3x + 4y + 11 = 0$.

Розв'язання. [4.3.8] ①

Нехай точка $M(x;y) \in L'$ (одній з бісектрис).

$$d(M, L_1) = d(M, L_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|12x + 9y - 17|}{\sqrt{12^2 + 9^2}} = \frac{|3x + 4y + 11|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Leftrightarrow \frac{12x + 9y - 17}{15} = \pm \frac{3x + 4y + 11}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 12x + 9y - 17 = 9x + 12y + 33, \\ 12x + 9y - 17 = -9x - 12y - 33, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} L' : 3x - 3y - 50 = 0, \\ L'' : 21x + 21y + 16 = 0. \end{array}\right.$$

Коментар. ① Бісектриса кута між двома прямими є геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін кута.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

4.1.15. Запишіть канонічне й параметричні рівняння прямої L, що проходить через точку M_0 паралельно вектору $\overline{s}$, якщо:

1) $M_0(1;-2), \overline{s} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$; 2) $M_0(-2;-5), \overline{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$;

3) $M_0(1;2), \overline{s} = \overline{i}$; 4) $M_0(3;4), \overline{s} = \overline{j}$.

4.1.16. Запишіть канонічне рівняння прямої L, що проходить через точки:

1) $M_1(2;-5)$ та $M_2(3;2)$; 2) $M_1(-3;1)$ та $M_2(7;8)$.

4.1.17. Запишіть загальне та нормоване рівняння прямої L, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{s}$, якщо:

1) $M_0(1;-2), \overline{s} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$; 2) $M_0(-2;-5), \overline{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$;

3) $M_0(1;2), \overline{s} = \overline{i}$; 4) $M_0(3;4), \overline{s} = \overline{j}$.

4.1.18. Запишіть рівняння прямої L, яка відтинає на осях відрізки:

1) $\tilde{a} = -3, \tilde{b} = 4$; 2) $\tilde{a} = 5, \tilde{b} = -6$.

4.1.19. Запишіть рівняння прямої L, що проходить через точку M_0 і утворює кут α з віссю Ox:

1) $M_0(1;2), \alpha = \dfrac{\pi}{4}$; 2) $M_0(-\sqrt{3};4), \alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

4.1.20. Запишіть рівняння прямої L як: а) рівняння з кутовим коефіцієнтом; б) рівняння у відрізках; в) нормоване рівняння, якщо:

1) $L: 12x - 5y - 65 = 0$; 2) $L: -3x + 4y + 12 = 0$.

4.1.21. Пряму задано параметричними рівняннями L. Знайдіть: а) напрямний вектор прямої; б) координати точок, для яких $t_1 = 1, t_2 = 2$; в) значення параметра для точок перетину з осями координат; г) серед точок $A(8;6), B(12;2), C(9;4)$, точки, які належать прямій, якщо:

1) $L: \begin{cases} x = 8 - 4t, \\ y = 6 + 3t, \end{cases} t \in \mathbb{R}$; 2) $L: \begin{cases} x = 9 + 3t, \\ y = 4 - 2t, \end{cases} t \in \mathbb{R}$.

4.1.22. Запишіть рівняння прямих L_1 та L_2, які проходить через точку M_0 : а) паралельно прямій L, б) перпендикулярно до прямої L, якщо:

1) $M_0(1;-2), L: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{-1}$; 2) $M_0(-3;4), L: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-5}$;

3) $M_0(3;-4), L: 2x - 3y + 5 = 0$; 4) $M_0(2;1), L: 3x - 4y + 1 = 0$;

5) $M_0(5;6), L: y = -2x + 1$; 6) $M_0(-6;-5), L: y = 3x - 1$;

7) $M_0(1;2), L = Ox$; 8) $M_0(3;2), L = Oy$.

4.1.23. Побудуйте пряму, яку задано рівнянням:

1) $y = 2x - 4$; 2) $y = -3x + 6$;

3) $y = -\dfrac{1}{3}x$; 4) $y = \dfrac{1}{2}x$;

5) $y = 2$; 6) $y = -3$;

7) $x = -3$; 8) $x = 2$;

9) $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{3} = 1$; 10) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{-4} = 1$.

4.1.24. Зобразити множини точок:

а) $L(x,y) = 0$; б) $L(x,y) > 0$; в) $L(x,y) < 0$, якщо:

1) $L(x,y) = 2x + 3y - 6$; 2) $L(x,y) = 3x - 4y + 12$.

4.1.25. Перевірте, чи проходить пряма L через точки A та B, якщо:

1) $L : 2x + 3y - 6 = 0, A(1;1), B(0;2)$;

2) $L : 3x - 4y + 12 = 0, A(4;0), B(1;-2)$.

4.1.26. Знайти точку перетину прямих:

1) $L_1 : x + 5y - 35 = 0, L_2 : 3x + 2y - 27 = 0$;

2) $L_1 : 14x - 9y - 24 = 0, L_2 : 7x - 2y - 17 = 0$;

3) $L_1 : 14x - 9y - 24 = 0, L_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -1 + 3t \end{cases}$;

4) $L_1 : 3x + 2y - 27 = 0, L_2 : \begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = 3t \end{cases}$;

5) $L_1 : y = 2x - 3, L_2 : y = -x + 3$;

6) $L_1 : y = -3x + 5, L_2 : y = x + 1$.

4.1.27. Задано точку Q і пряму L. Знайдіть:

а) проекцію Q' точки Q на пряму L;

б) точку P, симетричну точці Q відносно прямої L, якщо:

1) $Q(-3;2), L : 2x - y + 3 = 0$; 2) $Q(-3;11), L : 3x - 5y - 4 = 0$.

4.1.28. З'ясувати взаємне розташування прямих:

1) $L_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2}, L_2 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4}$; 2) $L_1 : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{-2}, L_2 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3}$;

3) $L_1 : 3x - 5y + 1 = 0, L_2 : 5x + 3y - 2 = 0$;

4) $L_1 : 2x + y - 1 = 0, L_2 : 4x + 2y - 2 = 0$;

5) $L_1 : y = 2x - 1, L_2 : y = 2x + 3$; 6) $L_1 : y = x + 5, L_2 : y = -x + 4$;

7) $L_1 : 2x + y - 1 = 0, L_2 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2};$

8) $L_1 : 3x - 5y + 1 = 0, L_2 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3};$

4.1.29. Знайти віддаль і відхилення точки M_0 від прямої L, якщо:

1) $M_0(2;1), L : 5x - 12y + 15 = 0;$ 2) $M_0(1;-2), L : 4x - 3y - 20 = 0.$

4.1.30. Знайти кут між прямими:

1) $L_1 : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-4}, L_2 : \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+2}{3};$

2) $L_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{2}, L_2 : \dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y}{-4};$

3) $L_1 : 2x + y - 1 = 0, L_2 : x - y + 2 = 0;$

4) $L_1 : \sqrt{3}x - y - 5 = 0, L_2 : \sqrt{3}x + y + 1 = 0;$

5) $L_1 : y = 3x, L_2 : y = -2x + 5;$ 6) $L_1 : y = 7x - 2, L_2 : y = x.$

4.1.31. Знайти віддаль між паралельними прямими:

1) $L_1 : x - 2y + 3 = 0, L_2 : 2x - 4y + 7 = 0;$

2) $L_1 : 3x - y + 5 = 0, L_2 : 3x - y + 6 = 0.$

4.1.32. Знайти рівняння прямої L', яка паралельна прямій L і проходить на віддалі d від неї, якщо:

1) $L : 4x - 3y + 15 = 0, d = 3;$ 2) $L : 12x + 5y - 26 = 0, d = 2.$

4.1.33. Знайти рівняння бісектрис L' та L'' кутів між прямими:

1) $L_1 : x - 3y + 5 = 0, L_2 : 3x - y - 2 = 0;$

2) $L_1 : x - 2y - 3 = 0, L_2 : 2x + 4y + 7 = 0.$

4.1.34. Задано вершини трикутника ABC.

а) Напишіть рівняння сторони AB;

б) напишіть рівняння висоти CD і обчисліть її довжину $h = \left|CD\right|$;

в) знайдіть кут φ між висотою CD і медіаною BM;

г) напишіть рівняння бісектрис L_1 та L_2 внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині A, якщо:

1) $A(1;2), B(2;-2), C(6;1)$; 2) $A(2;-2), B(6;1), C(-2;0)$.

4.1.35. Для яких значень параметра a прямі $L_1 : ax - 4y - 6 = 0$ та $L_2 : x - ay - 3 = 0$:

а) перетинаються; б) паралельні, різні; в) зливаються?

Відповіді

4.1.15. 1) $L : \dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y+2}{4}, \begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = -2 + 4t, \end{cases} t \in \mathbb{R}$; 2) $L : \dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y+5}{-3}, \begin{cases} x = -2 + 4t, \\ y = -5 - 3t, \end{cases} t \in \mathbb{R}$;

3) $L : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{0}, \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2, \end{cases} t \in \mathbb{R}$; 4) $L : \dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y-4}{1}, \begin{cases} x = 3, \\ y = 4 + t, \end{cases} t \in \mathbb{R}$.

4.1.16. 1) $L : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+5}{7}$; 2) $L : \dfrac{x+3}{10} = \dfrac{y-1}{7}$.

4.1.17. 1) $L : -3x + 4y + 11 = 0, \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y - \dfrac{11}{5} = 0$;

2) $L : 4x - 3y - 7 = 0, \dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y - \dfrac{7}{5} = 0$; 3) $L : x - 1 = 0$; 4) $L : y - 4 = 0$.

4.1.18. 1) $\dfrac{x}{-3} + \dfrac{y}{4} = 1$; 2) $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{-6} = 1$. **4.1.19.** 1) $y = x + 1$; 2) $y = \sqrt{3}x + 7$.

4.1.20. 1) а) $y = \dfrac{12}{5}x - 13$; б) $\dfrac{x}{65/12} + \dfrac{y}{-13} = 1$; в) $\dfrac{12}{13}x - \dfrac{5}{13}y - 5 = 0$;

2) а) $y = \dfrac{3}{4}x - 3$; б) $\dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{3} = 1$; в) $\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y - \dfrac{12}{5} = 0$.

4.1.21. 1) а) $\overline{s} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, б) $A_1(4;9), A_2(0;15)$, в) $t_{Ox} = -2, t_{Oy} = 2$, г) $A \in L, B \notin L, C \notin L$;

2) а) $\overline{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, б) $A_1(12;2), A_2(15;0)$, в) $t_{Ox} = 2, t_{Oy} = -3$, г) $A \notin L, B \in L, C \in L$.

4.1.22. 1) $L_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-1}, L_2 : x - y - 3 = 0$;

2) $L_1 : \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-4}{-5}, L_2 : 2x - 5y + 26 = 0$;

3) $L_1 : 2x - 3y - 18 = 0, L_2 : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+4}{-3}$; 4) $L_1 : 3x - 4y - 2 = 0, L_2 : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-4}$;

5) $L_1: y = -2x + 16, L_2: y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$; 6) $L_1: y = 3x + 13, L_2: y = -\frac{1}{3}x - 7$;

7) $L_1: y - 2 = 0, L_2: x - 1 = 0$; 8) $L_1: x - 3 = 0, L_2: y - 2 = 0$.

4.1.25. 1) $A \notin L, B \in L$; 2) $A \in L, B \notin L$.

4.1.26. 1) (5;6); 2) (3;2);.3) (3;2); 4) (5;6); 5) (2;1); 6) (1;2).

4.1.27. 1) $Q'(-1;1), P(1;0)$; 2) $Q'(3;1), P(9;-9)$.

4.1.28. 1), 5) паралельні, різні; 2), 3), 6) перетинні, перпендикулярні; 4) паралельні, зливаються; 7), 8) перетинні.

4.1.29. 1) $d = 1, \delta = -1$; 2) $d = 2, \delta = -2$.

4.1.30. 1) $(\widehat{L_1, L_2}) = \frac{\pi}{2}$; 2) $(\widehat{L_1, L_2}) = 0$; 3) $(\widehat{L_1, L_2}) = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$; 4) $(\widehat{L_1, L_2}) = \frac{\pi}{3}$;

5) $(\widehat{L_1, L_2}) = \frac{\pi}{4}$; 6) $(\widehat{L_1, L_2}) = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. **4.1.31.** 1) $d = \frac{1}{2\sqrt{5}}$; 2) $d = \frac{11}{\sqrt{10}}$.

4.1.32. 1) $L_1': 4x - 3y = 0, L_2': 4x - 3y + 30 = 0$;

2) $L_1': 12x + 5y = 0, L_2': 12x + 5y - 52 = 0$.

4.1.33. 1) $L_1': 4x - 4y + 3 = 0, L_2': 2x + 2y - 7 = 0$; 2) $L_1': 4x + 1 = 0, L_2': 8y + 13 = 0$.

4.1.34. 1) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-4}, \frac{x-6}{-4} = \frac{y-1}{-1}$, $h = \frac{19}{\sqrt{17}}, \cos\varphi = \frac{19}{\sqrt{17 \cdot 58}}$;

2) $\frac{x-2}{4} = \frac{y+2}{3}, \frac{x+2}{3} = \frac{y}{-4}, h = 4$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

4.1.35. 1) $a \neq \pm 2$; 2) $a = -2$; 3) $a = 2$.

Практикум 4.2. Криві 2-го порядку

Навчальні задачі

4.2.1. Визначити, яку криву задає рівняння $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$, знайти її основні характеристики та зобразити криву.

Розв'язання. [4.4.3, 4.5.1, 4.6.1, 4.7.1.]

[*Перетворюємо рівняння кривої, щоб визначити її тип.*]

$$4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

Задана крива є еліпсом, з канонічною системою координат Oxy. ①

[*Знаходимо основні характеристики кривої [4.5.3] і зображуємо її.*]

Півосі: велика $a = 3$ та мала $b = 2$.

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$$

Ексцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Фокуси: $F_1(-\sqrt{5},0), F_2(\sqrt{5},0)$.

Директриси

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}\Leftrightarrow x=-\frac{9}{\sqrt{5}}, x=\frac{9}{\sqrt{5}}.$$

Коментар. ① Фокуси еліпса лежать на осі Ox симетрично відносно початку координат.

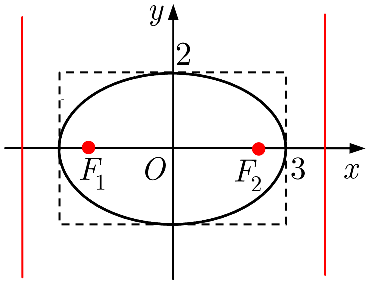


Рис. до 4.2.1

4.2.2. Визначте, яку криву задає рівняння

$$5x^2-4y^2+30x+16y+9=0,$$

знайдіть її канонічне рівняння і зобразіть її.

Розв'язання. [4.8.1.]

[*Перетворюємо рівняння кривої, щоб визначити її тип.*]

$$5x^2-4y^2+30x+16y+9=0\Leftrightarrow$$

виділяємо повні квадрати

$$\Leftrightarrow 5(x^2+6x+9)-5\cdot 9-4(y^2-4y+4)+4\cdot 4+9=0;$$

$$5(x+3)^2-4(y-2)^2=20\Leftrightarrow\frac{(x+3)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{5}=1.$$

Це рівняння гіперболи з центром у точці $O(-3;2)$, тобто, ПДСК у якій записано рівняння не канонічна. Паралельним перенесенням осей [4.8.1]

$$\begin{cases}x'=x+3,\\ y'=y-2,\end{cases}$$

дістаємо канонічну ПДСК $O'x'y'$, у якій гіпербола має рівняння

$$\frac{x'^2}{2^2}-\frac{y'^2}{(\sqrt{5})^2}=1.$$

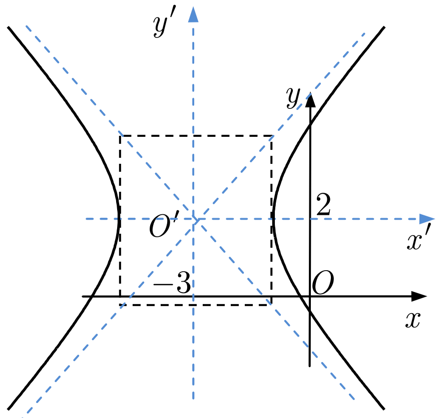


Рис. до 4.2.2

4.2.3. Записати рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо відомо рівняння асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ і віддаль між фокусами $2c=20$.

Розв'язання. [4.6.1, 4.6.3.]

Розміщення фокусів є канонічним, отже, гіпербола має рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Рівняння асимптот

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

і $c^2 = a^2 + b^2$. З умов задачі випливає, що

$$c = 10, \frac{b}{a} = \frac{4}{3}.$$

[*Розв'язуємо систему щодо параметрів a і b.*]

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a} = \dfrac{4}{3}, \\ a^2 + b^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow a = 6, b = 8.$$

Рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

4.2.4. Початок ПДСК переносять у точку $O'(3;-1)$ і повертають осі на кут $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Знайти нові координати точки A, якщо її старі координати були $A(3;4)$.

Розв'язання. [4.8.1, 4.8.2.]

[*Користуючись формулами перетворення координат [4.8.1], дістаємо координати точки $A(x';y')$ у перенесеній системі $O'xy$.*]

$$\begin{cases} x' = x - 3 = 3 - 3 = 0, \\ y' = y - (-1) = 4 - (-1) = 5. \end{cases}$$

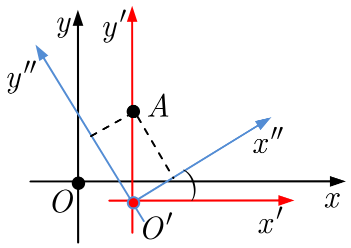


Рис. до 4.2.4

[*Користуючись формулами перетворення координат [4.8.2], дістаємо координати точки $A(x'';y'')$ у повернутій системі координат $O'x''y''$.*]

$$\begin{cases} x'' = x'\cos\dfrac{\pi}{6} + y'\sin\dfrac{\pi}{6} = 0\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 5\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}, \\ y'' = -x'\sin\dfrac{\pi}{6} + y'\cos\dfrac{\pi}{6} = -0\cdot\dfrac{1}{2} + 5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

У новій системі координат $A\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)$.

4.2.5.1. Знайти власні числа і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. [4.10.] ①

[***Крок 1.*** *Знаходимо власні числа матриці A як корені характеристичного многочлена матриці.*]

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 5;\ \lambda_2 = 10.$$

[***Крок 2.*** *Знаходимо власні вектори матриці A, що відповідають власним числам, як розв'язки відповідної однорідної системи $(A - \lambda E_2)\vec{x} = 0$.*] ①

$\lambda_1 = 5:$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_{11} - \frac{1}{2}\alpha_{12} = 0;\ \alpha_{11} = \frac{1}{2}\alpha_{12}.$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = 10:$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_{12} + 2\alpha_{22} = 0;\ \alpha_{12} = -2\alpha_{22}.$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Коментар. ① За власний вектор можна вибрати *будь-який* ненульовий розв'язок відповідної однорідної системи.

4.2.5.2. Визначити яку криву задає у ПДСК рівняння

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$$

Знайти її канонічне рівняння і побудувати відповідну канонічну систему координат.

Розв'язання. [4.10.] ①

[***Крок 1.*** *Записуємо квадратичну форму лінії 2-го порядку.*]

$$Q(x, y) = 9x^2 - 4xy + 6y^2$$

[***Крок 2.*** *Записуємо матрицю квадратичної форми, ураховуючи, що $-4 = 2a_{12} = 2a_{21}$.*]

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

[***Крок 3.*** *Знаходимо власні числа і власні вектори матриці A* (***4.2.5.1***).]

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 10; \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[***Крок 4.*** *Знаходимо орти власних векторів.*]

$$\left|\vec{x}_1\right| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \vec{e}_1 = \frac{\vec{x}_1}{\left|\vec{x}_1\right|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

$$\left|\vec{x}_2\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \vec{e}_2 = \frac{\vec{x}_2}{\left|\vec{x}_2\right|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

[***Крок 5.*** *Записуємо матрицю перетворення координат і саме перетворення.*]

$$H = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = H\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' - \dfrac{2}{\sqrt{5}}y'; \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y'. \end{cases}$$

[***Крок 6.*** *Переходимо до нових координат у рівнянні кривої.*]

$$5x'^2 + 10y'^2 - 8\sqrt{5}y' - 2 = 0.$$

$$5x'^2 + 10\left(y' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 10 = 0.$$

[***Крок 7.*** *Застосовуємо паралельне перенесення.*]

Підставляючи співвідношення

$$\begin{cases} x' = x'', \\ y' = y'' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \end{cases}$$

у рівняння еліпса, дістаємо канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x''^2}{2} + \frac{y''^2}{1} = 1.$$

[***Крок 8.*** *Записуємо формули переходу від старої системи координат до нової.*]

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x'' - \dfrac{2}{\sqrt{5}}y'' - \dfrac{4}{5}, \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x'' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y'' + \dfrac{2}{5}. \end{cases}$$

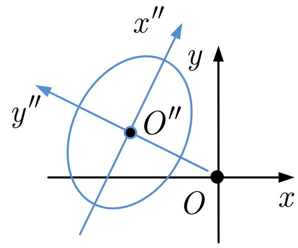


Рис. до 4.2.5.2

Формули задають перенесення початку координат у точку $O''\left(-\dfrac{4}{5}; \dfrac{2}{5}\right)$ і повертання на кут $\operatorname{arctg} 2$.

Коментар. ① Тип кривої можна визначити за допомогою інваріантів.

$$J_2 = \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 50 > 0; \; J_3 = \begin{vmatrix} 9 & -2 & 8 \\ -2 & 6 & -4 \\ 8 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -500 < 0.$$

Отже, крива є еліпсом [4.11.2].

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

4.2.6. Визначте, яку множину точок задає рівняння:

1) $y^2 - 4x^2 = 0$; 2) $y^2 + 4x^2 = -1$;

3) $9y^2 + x^2 = -1$; 4) $9y^2 - x^2 = 0$;

5) $(x-2)(y+3) = 0$; 6) $(x+2)(y-3) = 0$.

7) $x^2 - 4 = 0$; 8) $y^2 - 9 = 0$.

4.2.7. Визначте, яку криву задає рівняння, знайдіть її основні характеристики та зобразіть криву:

1) $x^2 + y^2 = 9$; 2) $x^2 + y^2 = 16$;

3) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$; 4) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$;

5) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$; 6) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{1} = 1$;

7) $y^2 = 4x$; 8) $y^2 = 6x$.

4.2.8. Визначте, яку криву задає рівняння, знайдіть її канонічне рівняння і зобразіть її:

1) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$; 2) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$;

3) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$; 4) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$;

5) $\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1;$ 6) $\dfrac{(x+1)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1;$

7) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0;$ 8) $5x^2+9y^2+30x-18y+9=0;$

9) $\dfrac{(x+2)^2}{4}-\dfrac{(y-3)^2}{9}=-1;$ 10) $\dfrac{(x+1)^2}{9}-\dfrac{(y-2)^2}{16}=-1;$

11) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0;$

12) $5x^2-9y^2-30x+18y-9=0;$

13) $(y-1)^2=-4(x+2);$ 14) $(y+2)^2=-8(x-1);$

15) $y^2+6x+14y+43=0;$ 16) $y^2+8x+16y=0.$

4.2.9. Запишіть неявне і параметричні рівняння кола із центром у точці A радіусом R, якщо:

1) $A(-1;2), R=3;$ 2) $A(2;-3), R=4.$

4.2.10. Запишіть канонічне рівняння еліпса, якщо:

1) $a=4, b=3;$ 2) $a=3, b=1;$

3) $2c=6, a=5;$ 4) $2c=10, a=13.$

4.2.11. Запишіть канонічне рівняння гіперболи, якщо:

1) $2a=10, 2c=26;$ 2) $2a=8, 2c=10.$

4.2.12. Запишіть канонічне рівняння параболи, якщо:

1) $F(3;0);$ 2) $F(4;0).$

4.2.13. Визначте, які криві на площині задають параметричні рівняння:

1) $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=3\sin t, \end{cases} t\in[0;2\pi);$ 2) $\begin{cases} x=1+2\cos t, \\ y=2+2\sin t, \end{cases} t\in[0;2\pi);$

3) $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases} t\in[0;\pi];$ 4) $\begin{cases} x=1+3\cos t, \\ y=4\sin t, \end{cases} t\in[0;2\pi).$

4.2.14. Зобразіть на координатній площині лінію:

1) $y=\sqrt{9-x^2};$ 2) $y=-\sqrt{16-x^2};$

3) $x=-\sqrt{16-x^2};$ 2) $x=\sqrt{9-y^2}.$

4.2.15. Зобразіть на координатній площині множину точок $M(x;y)$, координати яких справджують умову:

1) $x^2 + y^2 \leq 4$;
2) $x^2 + y^2 > 9$;
3) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} > 1$;
4) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \leq 1$;
5) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} \leq 1$;
6) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} > 1$;
7) $y^2 > 2x$;
8) $y^2 \leq 4x$;
9) $xy > 1, y > x^2$;
10) $xy < 1, y < x^2$.

4.2.16. Знайдіть перетворене рівняння кривої F після перенесення початку координат у точку A, якщо:

1) $xy - 6x + 2y + 3 = 0, A(-2;6)$;
2) $x^2 + 6x - 8y + 1 = 0, A(-3;-1)$.

4.2.17. Запишіть формули перетворення координат, якщо координатні осі повернуто на кут:

1) $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$;
2) $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$.

4.2.18. Визначте кут α, на якій повернуто осі, якщо формули перетворення координат:

1) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}x' - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y', \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \dfrac{1}{2}y'; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \dfrac{1}{2}y', \\ y = -\dfrac{1}{2}x' + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y'. \end{cases}$.

4.2.19. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$,
2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

4.2.20. Зведіть рівняння кривої до канонічного вигляду й зобразіть її:

1) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;
2) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;
3) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 116 = 0$;
4) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 152 = 0$;

5) $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$;

6) $6xy+8y^2-12x-26y+29=0$;

7) $9x^2+24xy+16y^2-40x+30y=0$;

8) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$;

9) $6xy+8y^2-12x-26y+20=0$;

10) $x^2+4xy+4y^2-4x-8y+3=0$.

4.2.21. Складіть рівняння кола в полярних координатах за заданим радіусом R і полярними координатами центра:

1) $C(R;0)$; 2) $C(R;\pi)$.

4.2.22. Знайдіть полярні координати центра та радіус кожного кола:

1) $\rho=4\cos\varphi$; 2) $\rho=6\sin\varphi$;

3) $\rho=-6\sin\varphi$; 4) $\rho=-4\cos\varphi$;

5) $\rho=6\cos\left(\varphi-\dfrac{\pi}{3}\right)$; 6) $\rho=6\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

4.2.23. Визначте, яку криву задає рівняння в полярних координатах:

1) $\rho=\dfrac{15}{3-7\cos\varphi}$; 2) $\rho=\dfrac{7}{5-2\cos\varphi}$;

3) $\rho=\dfrac{3}{4-4\cos\varphi}$; 4) $\rho=\dfrac{6}{2-\cos\varphi}$.

4.2.24. Виведіть рівняння геометричного місця точок:

1) сума віддалей яких до двох заданих точок $F_1(-3;0)$ та $F_2(3;0)$ є величина стала, рівна 10;

2) різниця віддалей яких до двох заданих точок $F_1(-5;0)$ та $F_2(5;0)$ є величина стала, рівна 6;

3) віддаль до заданої точки $F(3;0)$ дорівнює віддалі до заданої прямої $x+3=0$;

4) рівновіддалених від двох заданих точок $A(-2;0)$ та $B(0;2)$.

Відповіді

4.2.6. 1) пара перетинних прямих, $y=\pm 2x$; 2) $\varnothing$; 3) $\varnothing$; 4) пара перетинних прямих, $y=\pm\dfrac{1}{3}x$; 5) пара перетинних прямих, $x-2=0, y+3=0$;

6) пара перетинних прямих $x+2=0, y-3=0$;

7) пара паралельних прямих, $x\pm 2=0$; 8) пара паралельних прямих, $y\pm 3=0$.

4.2.7. 1) коло, $C(0;0)$, $R=3$; 2) коло, $C(0;0)$, $R=4$; 3) еліпс, $a=2, b=1$; 4) еліпс, $a=3, b=2$; 5) гіпербола, $a=2, b=3$; 6) гіпербола, $a=1, b=2$; 7) парабола, $p=2$; 8) парабола, $p=3$.

4.2.8. 1) коло, $C(-1;2)$, $R=2, x^2+y^2=4$; 2) коло, $C(-2;3)$, $R=3, x^2+y^2=9$;

3) коло, $C(1;-2)$, $R=1, x^2+y^2=1$; 4) коло, $C(2;-3)$, $R=3, x^2+y^2=9$;

5) еліпс, $C(-2;3), a=3, b=2, \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$; 6) еліпс, $C(-1;2), a=4, b=3, \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$;

7) еліпс, $C(1;-2), a=4, b=2\sqrt{3}, \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$; 8) еліпс, $C(-3;1), a=3, b=\sqrt{5}, \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$;

9) гіпербола, $C(-2;3), a=2, b=3, \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$;

10) гіпербола, $C(-1;2), a=3, b=4, \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$;

11) гіпербола, $C(2;-3), a=3, b=4, \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$; 12) $C(3;1), a=3, b=\sqrt{5}, \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{5}=1$;

13) парабола, $A(-2;1), y^2=4x$; 14) парабола, $A(1;-2), y^2=8x$;

15) парабола, $A(1;-7), y^2=6x$; 16) парабола, $A(8;-8), y^2=8x$.

4.2.9. 1) $(x+1)^2+(y-2)^2=9, \begin{cases} x=-1+3\cos t, \\ y=2+3\sin t, \end{cases} t\in[0;2\pi)$;

2) $(x-2)^2+(y+3)^2=16, \begin{cases} x=2+4\cos t, \\ y=-3+4\sin t, \end{cases} t\in[0;2\pi)$.

4.2.10. 1) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{1}=1$; 3) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$; 4) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$.

4.2.11. 1) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{144}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$. **4.2.12.** 1) $y^2=6x$; 2) $y^2=8x$.

4.2.13. 1) коло, $C(0;0)$, $R=3$; 2) коло, $C(1;2)$, $R=2$; 3) верхнє півколо, $C(0;0)$, $R=1$; 4) еліпс, велика вісь паралельна Oy, $C(1;0), a=4, b=3$.

4.2.16. 1) $x'y'+15=0$; 2) $x'^2-8y'=0$.

4.2.17. 1) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}x'-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y', \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x'+\dfrac{1}{2}y'; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y', \\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y'. \end{cases}$

4.2.18. 1) $\alpha = \frac{\pi}{3}$; 2) $\alpha = -\frac{\pi}{6}$.

4.2.19. 1) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 2) $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2, \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4.2.20. 1) еліпс, $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$; 2) еліпс, $\frac{x'^2}{32} + \frac{y'^2}{18} = 1$; 3) точка, $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 0$;
4) $\varnothing, \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = -1$; 5) гіпербола, $\frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{9} = 1$; 6) гіпербола, $-\frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{9} = 1$;
7) парабола, $x'^2 = -2y'$; 8) парабола, $(x'-2)^2 = -2(y'-3)$;
9) пара перетинних прямих $9x'^2 - y'^2 = 0$;
10) пара паралельних прямих $x + 2y - 3 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$.

4.2.21. 1) $\rho = 2R\cos\varphi$; 2) $\rho = -2R\cos\varphi$.

4.2.22. 1) $C(2;0), R = 2$; 2) $C\left(3;\frac{\pi}{2}\right), R = 3$; 3) $C\left(3;-\frac{\pi}{2}\right), R = 3$; 4) $C(2;\pi), R = 2$;
5) $C\left(3;\frac{\pi}{3}\right), R = 3$; 6) $C\left(3;\frac{\pi}{6}\right), R = 3$.

4.2.23. 1) гіпербола; 2) еліпс; 3) парабола; 4) еліпс.

4.2.24. 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $y^2 = 12x$; 4) $y = -x$.

Практикум 4.3. Прямі у просторі. Площини

Навчальні задачі

4.3.1. Записати канонічні й параметричні рівняння прямої L, що проходить через точку $M_0(1;-1;0)$ паралельно вектору $\overline{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. [4.13.1, 4.13.2.]

[*Ненульовий вектор $\overline{a}$ можна взяти за напрямний вектор $\overline{s}$ шуканої прямої.*]

$$\overline{s}(L) = \overline{a}.$$

Нехай точка $M(x;y;z) \in L$.

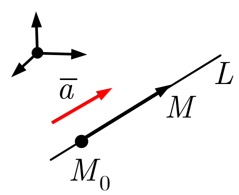


Рис. до 4.3.1

[*Точка $M(x;y;z)$ належить прямій L тоді й лише тоді, коли вектори $\overline{M_0M}$ та $\overline{a}$ колінеарні.*]

$$M \in L \Leftrightarrow \overline{M_0M} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z \end{pmatrix} \parallel \overline{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

[*Записуючи умову колінеарності векторів у координатній формі* [*3.5.6*], *дістаємо канонічне рівняння прямої* [*4.13.1*].**]**

Канонічні рівняння прямої

$$L : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{-6}.$$

[*Прирівнюючи одержану пропорцію до параметра t й виражаючи з неї координати x, y та z, дістаємо параметричні рівняння прямої* [*4.13.2*].**]**

Параметричні рівняння прямої

$$L : \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -1 + 5t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = -6t, \end{cases}$$

4.3.2. Записати канонічні рівняння прямої L, яка проходить через точки $M_1(3;3;3)$, $M_2(4;5;6)$.

Розв'язання. [4.13.5.]

[*Підставляючи у формулу* [*4.13.5*] *координати точок M_1 та M_2, дістаємо канонічне рівняння прямої.***]**①

$$L : \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

Коментар. ① Напрямним вектором шуканої прямої L є ненульовий вектор

$$\overline{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \overline{s}(L).$$

4.3.3. Записати рівняння прямої L, яка проходить через точку $M_0(7;-3;1)$ паралельно прямій $L_1 : \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+7}{3} = \dfrac{z-1}{0}$.

Розв'язання. [4.15.3.]

[*Використовуємо умову паралельності прямих* [*4.15.3*].**]**

$$L \parallel L_1 \Rightarrow \overline{s}(L) = \overline{s}(L_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

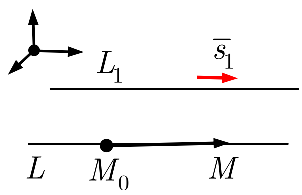


Рис. до 4.3.3

[*Використовуючи* ***4.3.1*** *або формулу [4.13.1], дістаємо канонічне рівняння прямої.***]**

$$L: \frac{x-7}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{0}.$$

4.3.4. Записати рівняння площини P, що проходить через точку $M_0(1;-3;2)$ перпендикулярно до вектора $\overline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. [4.12.1.]

[*Оскільки вектор $\overline{a}$ перпендикулярний до площини P, то його можна взяти за нормальний вектор $\overline{n}$ площини P.***]**

$$\overline{n}(P) = \overline{a}.$$

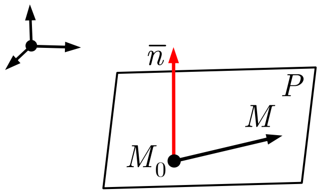


Рис. до 4.3.4

Нехай точка $M(x;y;z) \in P$.

[*Точка $M(x;y;z)$ належить площині P тоді й лише тоді, коли вектори $\overline{M_0M}$ та $\overline{a}$ ортогональні.***]**

$$M \in P \Leftrightarrow \overline{M_0M} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y+3 \\ z-2 \end{pmatrix} \perp \overline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\overline{M_0M}, \overline{a}) = 0.$$

[*Обчислюючи скалярний добуток векторів [3.11.2], після перетворень дістаємо загальне рівняння площини P [4.12.2].***]**

$$4(x-1) + 0(y+3) + 5(z-2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$P: 4x + 5z - 14 = 0.$$

4.3.5. Записати рівняння площини P, яка проходить через точку $M_0(2;-1;1)$ паралельно площині $P_1: x - 4y + 5z - 1 = 0$.

Розв'язання. [4.14.2.]

[*Використовуємо умову паралельності площин [4.14.2].***]**

$$P \parallel P_1 \Rightarrow \overline{n}(P) = \overline{n}(P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

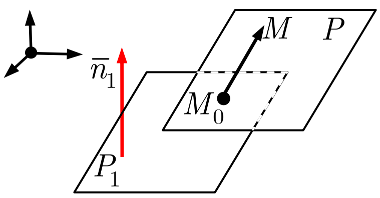


Рис. до 4.3.7

[*Використовуючи* ***4.3.4*** *або формулу [4.12.2], дістаємо загальне рівняння площини.***]**

$$1(x-2)-4(y+1)+5(z-1)=0;$$
$$P: x-4y+5z-11=0.$$

4.3.6. Записати рівняння площини P, яка проходить через точку $M_0(2;0;-5)$, паралельно двом векторам $\overline{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ та $\overline{v}=\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$.

Розв'язання. [4.12.3.] ①

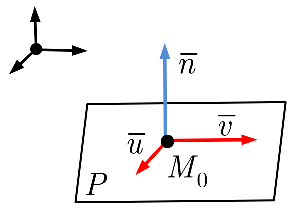


Рис. до 4.3.6

Оскільки $\frac{2}{-1}\neq\frac{0}{3}$, то вектори $\overline{u}$ та $\overline{v}$ — не колінеарні.

Нехай точка $M(x;y;z)\in P$.

[*Точка $M(x;y;z)$ належить площині P тоді й лише тоді, коли вектори $\overline{M_0M}, \overline{u}$ та $\overline{v}$ компланарні.*]

$$M\in P \Leftrightarrow \overline{M_0M}=\begin{pmatrix}x-2\\y\\z+5\end{pmatrix}, \overline{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \overline{v}=\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix} \text{ — компланарні} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\overline{M_0M},\overline{u},\overline{v})}_{\textit{мішаний добуток}}=0 \overset{[3.11.5]}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix}x-2 & y & z+5\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 3\end{vmatrix}=0 \overset{[2.7.2]}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot 6 - y\cdot 3 + (z+5)\cdot(-1)=0;$$
$$P: 6x-3y-z-17=0.$$

Коментар. ① За нормальний вектор площини P можна взяти вектор $\overline{n}(P)=[\overline{u},\overline{v}]$.

4.3.7. Записати рівняння площини P, що проходить через пряму $L: \frac{x-1}{-3}=\frac{y+3}{8}=\frac{z}{-1}$ паралельно вектору $\overline{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$.

Розв'язання. [4.12.3.]

$$M_0(1;-3;0)\in L\subset P \Rightarrow M_0\in P,\ \overline{s}(L)=\begin{pmatrix}-3\\8\\-1\end{pmatrix}\parallel P.$$

Вектори $\overline{s}$ та $\overline{a}$ — неколінеарні, бо $\frac{-3}{1}\neq\frac{8}{0}$.

[*Використовуючи* ***4.3.8*** *або формулу [4.12.3], дістаємо рівняння площини P, яка проходить через точку M_0 паралельно векторам $\overline{a}$ та $\overline{s}$.***]**

$$(\overline{M_0M}, \overline{a}, \overline{s}) = 0 \overset{[3.11.5]}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot(-24) - (y+3)\cdot 8 + z\cdot 8 = 0;$$

$$-24x - 8y + 8z = 0.$$

Рівняння шуканої площини

$$P: 3x + y - z = 0.$$

4.3.8. Записати рівняння площини P, що проходить через точки $M_1(2;-1;3), M_2(1;1;1)$ паралельно вектору $\overline{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. [4.12.3.]

Вектори

$$\overline{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-(-1) \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ та } \overline{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ —}$$

неколінеарні, бо $-\dfrac{1}{7} \neq \dfrac{2}{4}$.

[*Використовуючи* ***4.3.8*** *або формулу [4.12.3], дістаємо рівняння площини P, яка проходить через точку M_1 паралельно векторам $\overline{M_1M_2}$ та $\overline{a}$.***]**

$$(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{a}) = 0 \overset{[3.11.5]}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 7 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot 8 - (y+1)\cdot 14 + (z-3)\cdot(-18) = 0;$$

$$8x - 14y - 18z + 24 = 0;$$

$$P: 4x - 7y - 9z + 12 = 0.$$

4.3.9. Записати рівняння площини P, що проходить через три різні точки $M_1(2;3;1), M_2(-1;2;5)$ та $M_3(3;0;1)$.

Розв'язання. [4.12.4.]

Вектори

$$\overline{M_1M_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ та } \overline{M_1M_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{— неколінеарні,}$$

бо $\dfrac{-3}{1} \neq \dfrac{-1}{-3}$ (тобто точки M_1, M_2, M_3 не лежать на одній прямій).

[*Використовуючи* ***4.3.8*** *або формулу* [*4.12.4*], *дістаємо рівняння площини* P, *яка проходить через три точки, що не лежать на одній прямій.***]**

$$(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot 12 - (y-3)(-4) + (z-1)\cdot 10 = 0;$$

$$P : 6x + 2y + 5z - 23 = 0.$$

4.3.10. Знайти рівняння площини у відрізках і зобразити площину в ПДСК, якщо її загальне рівняння $3x - 6y + 4z - 12 = 0$.

Розв'язання. [4.12.5.]

[*Переносимо вільний член рівняння праворуч і ділимо обидві частини рівняння на нього, записуючи коефіцієнти при* x, y, z *у знаменники.***]**

$$3x - 6y + 4z = 12 \Leftrightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1.$$

З одержаного рівняння площини у відрізках випливає, що площина перетинає осі координат у точках $A(4;0;0)$, $B(0;-2;0)$ та $C(0;0;3)$.

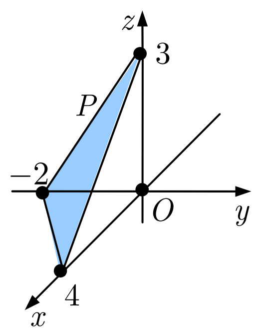


Рис. до 4.3.12

4.3.11. З'ясувати, чи є рівняння площини $4x - 6y - 12z - 11 = 0$ нормованим. Якщо ні, то знормувати його.

Розв'язання. [4.12.6, 4.12.7.][1]

$$-11 < 0;$$

$$\sqrt{16 + 36 + 144} = \sqrt{196} = 14 \neq 1.$$

Рівняння не є нормованим, оскільки нормальний вектор площини не одиничний. Знормуємо рівняння, помноживши його на $\mu = \dfrac{1}{14}$:

$$\frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{11}{14} = 0.$$

Коментар. ① У нормованому рівнянні коефіцієнти при x, y і z є координатами одиничного нормального вектора, а вільний член має бути від'ємним.

4.3.12. Записати параметричні й канонічні рівняння прямої L, яку задано загальними рівняннями $L: \begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 7z - 4 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. [4.14.1.] ①

I метод.

[*Знаходимо загальний розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь.***]**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -7 & 4 \end{array}\right)_{\overleftarrow{a}_2 - 3\overleftarrow{a}_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & -16 & -8 \end{array}\right)_{\frac{1}{8}\overleftarrow{a}_2} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)^{\overleftarrow{a}_1 + 2\overleftarrow{a}_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - t = 2, \\ y - 2t = -1, t \in \mathbb{R}. \\ z = t, \end{cases}$$

Параметричні рівняння прямої

$$L: \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -1 + 2t, t \in \mathbb{R}. \\ z = t, \end{cases}$$

Канонічні рівняння прямої

$$L: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}.$$

II метод.

[*Крок 1.* *Знаходимо будь-яку точку на прямій, покладаючи, приміром,* $z = 0$ *і розв'язуючи систему з 2-х рівнянь з 2-ма невідомими.***]** ①

$$\begin{cases} x - 2y - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases} \Rightarrow M_0(2;-1;0) \in L.$$

[***Крок 2.*** *Знаходимо напрямний вектор* $\overline{s}$ *прямої як векторний добуток нормальних векторів* $\overline{n}_1$ *та* $\overline{n}_2$ *перетинних площин.*]②

$$\overline{s} = [\overline{n}_1, \overline{n}_2] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -7 \end{vmatrix} = -8\overline{i} + 16\overline{j} + 8\overline{k}.$$

Коментар. ① Якщо система не має розв'язків, то покладаємо $y = 0$ або $x = 0$.

② Оскільки шукана пряма перпендикулярна до нормальних векторів обох площин.

4.3.13. Записати рівняння площини P, яка проходить через точку $M_0(1;-1;0)$ перпендикулярно до прямої $L : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{3}$.

Розв'язання. [4.16.1.]

$$P \perp L \Rightarrow \overline{n}(P) = \overline{s}(L) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

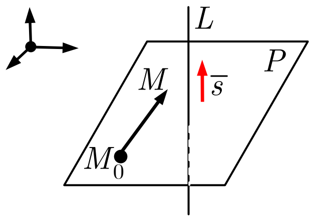


Рис. до 4.3.13

[*Використовуючи **4.3.4** або формулу [4.12.1]*, дістаємо *рівняння площини* P, *що проходить через точку* M_0 *перпендикулярно до вектора* $\overline{s}$.]

$$(\overline{M_0M}, \overline{s}) = 0 \overset{[3.11.2]}{\Leftrightarrow} 1(x-1) - 2(y+1) + 3z = 0.$$

Рівняння шуканої площини

$$P : x - 2y + 3z - 3 = 0.$$

4.3.14. Записати рівняння площини P, яка проходить через пряму

$$L_1 : \begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = 4, \\ z = -t + 1, \end{cases} \quad \text{паралельно прямій } L_2 : \frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{2}.$$

Розв'язання.

$$M_1(2;0;1) \in L_1 \subset P \Rightarrow M_1(2;0;1) \in P,\ \overline{s}_1 = \overline{s}(L_1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \parallel P;$$

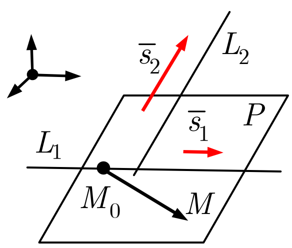


Рис. до 4.3.14

$$L_2 \parallel P \Rightarrow \overline{s}_2 = \overline{s}(L_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \parallel P.$$

Вектори $\overline{s}_1$ та $\overline{s}_2$ — неколінеарні, бо $\dfrac{0}{1} \neq \dfrac{-1}{2}$.

[*Використовуючи* ***4.3.8*** *або формулу* [*4.12.3*], *дістаємо рівняння площини* P, *яка проходить через точку* M_1 *паралельно векторам* $\overline{s}_1$ *та* $\overline{s}_2$.]

$$(\overline{MM_1}, \overline{s}_1, \overline{s}_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot 9 - y\cdot(-6) + (z-1)\cdot(-3) = 0.$$

Рівняння шуканої площини

$$P : 3x + 2y - z - 5 = 0.$$

4.3.15. Записати параметричні рівняння прямої L, яка проходить через точку $M_0(1;-4;3)$ перпендикулярно до площини $P : 3x - y + 5 = 0$.

Розв'язання. [4.16.1.]

$$L \perp P \Rightarrow \overline{s}(L) = \overline{n}(P) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

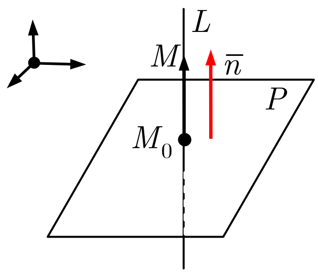


Рис. до 4.3.15

[*Використовуючи* ***4.3.1*** *або формулу* [*4.13.3*], дістаємо *параметричні рівняння прямої.*]

$$L : \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = -4 - t, \ \ t \in \mathbb{R}. \\ z = 3, \end{cases}$$

4.3.16. Знайти точку перетину прямої $L : \begin{cases} x = 7 + 5t, \\ y = 4 + t, \\ z = 5 + 4t \end{cases}$ і площини $P : 3x - y + 2z - 5 = 0$, попередньо дослідивши їх взаємне розташування.

Розв'язання. [4.16.1.]

[*Із загального рівняння площини* P *і канонічних рівнянь прямої* L *виписуємо координати нормального вектора площини і напрямного вектора прямої.***]**

$$\overline{n}(P) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \overline{s}(L) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

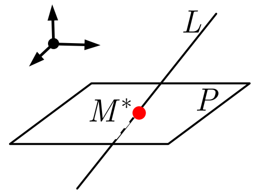


Рис. до 4.3.16

[*Перевіряємо умови* [*4.16.1*].**]**

$$3 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 22 \neq 0 \overset{[3.12.4]}{\Rightarrow} \overline{n}(P) \not\perp \overline{s}(L).$$

[*Висновуємо про взаємне розташування прямої і площини.***]**

Площина P і пряма L перетинаються в точці M^*.

[*Знаходимо координати точки* M^*, *розв'язуючи систему — підставляючи параметричні рівняння прямої у загальне рівняння площини.***]**

$$M^*(x;y;z) = L \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} P : 3x - y + 2z - 5 = 0. \\ L : \begin{cases} x = 7 + 5t, \\ y = 4 + t, \\ z = 5 + 4t \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(7 + 5t) - (4 + t) + 2(5 + 4t) - 5 = 0;$$

$$22t + 22 = 0; t = -1.$$

[*Підставляючи знайдене значення параметра* $t = -1$ *у параметричні рівняння прямої, дістаємо координати точки перетину.***]**

$$P \cap L = M^* : \begin{cases} x = 7 + 5 \cdot (-1) = 2, \\ y = 4 + (-1) = 3, \\ z = 5 + 4 \cdot (-1) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow M^*(2;3;1).$$

4.3.17. Знайти проекцію точки $M_0(1;0;1)$ на площину $P : 4x + z + 12 = 0$.

Розв'язання. ①

[*Крок 1.* *Знаходимо параметричні рівняння прямої* L, *яка проходить через точку* M_0 *перпендикулярно до площини* P (*див.* ***4.3.15***).**]**

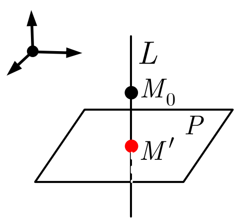


Рис. до 4.3.17

$$L : \begin{cases} x = 1 + 4t, \\ y = 0, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + t, \end{cases}$$

[*Крок 2.* *Знаходимо точку M' — проекцію точки M_0 як точку перетину прямої L і площини P (див. 4.3.16).*]:

$$M' : \begin{cases} 4x + z + 12 = 0, \\ x = 1 + 4t, \\ y = 0, \\ z = 1 + t \end{cases} \Leftrightarrow M'(-3;0;0).$$

Коментар. ① Проекція точки на площину є точкою перетину заданої площини і прямої, яка проходить через точку перпендикулярно до заданої площини.

4.3.18. Знайти проекцію точки $M_0(2;-1;3)$ на пряму $L : \begin{cases} x = 3t, \\ y = 5t - 7, t \in \mathbb{R}. \\ z = 2t + 2, \end{cases}$

Розв'язання. ①

[*Крок 1.* *Знаходимо загальне рівняння площини P, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до прямої L (див. 4.3.13).*]

$$P : (\overline{M_0M}_0, \overline{s}) = 0 \Leftrightarrow P : 3x + 5y + 2z - 7 = 0.$$

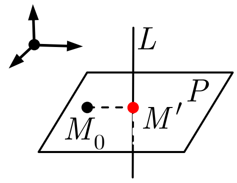


Рис. до 4.3.18

[*Крок 2.* *Знаходимо точку M' — проекцію точки M_0 як точку перетину прямої L і площини P (див. 4.3.17).*]

$$\begin{cases} P : 3x + 5y + 2z - 7 = 0, \\ L : \begin{cases} x = 3t, \\ y = 5t - 7, \\ z = 2t + 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow M'(3;-2;4).$$

Коментар. ① Проекція точки на пряму є точкою перетину заданої прямої і площини, яка проходить через точку перпендикулярно до заданої прямої.

4.3.19. Записати рівняння прямої L, яка проходить через точку $M_0(5;2;4)$ перпендикулярно до прямої $L_1 : \begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -1 + 4t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 2t, \end{cases}$

Розв'язання.

[*Крок 1.* *Знаходимо проекцію точки M_0 на пряму L_1 (див. 4.3.18).*]

Рівняння площини P, яка проектує точку M_0 на пряму L_1:

$$P : 3x + 4y + 2z - 31 = 0.$$

Проекція точки M_0 на пряму L_1 — точка

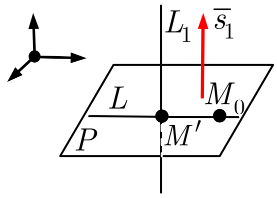


Рис. до 4.3.19

$$M' : \begin{cases} 3x + 4y + 2z - 31 = 0, \\ x = 2 + 3t, \\ y = -1 + 4t, \\ z = 2t. \end{cases} \Leftrightarrow M'(5;3;2).$$

[***Крок 2.*** *Записуємо канонічне рівняння прямої L через точки M_0 та M' (див.* ***4.3.3***).]

$$L : \frac{x-5}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{-2}.$$

4.3.20. Знайти точку, симетричну точці $M_1(2;-5;7)$ відносно прямої $L : \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-6}{2}$.

Розв'язання. ①

[***Крок 1.*** *Знаходимо проекцію точки M_1 на пряму L — точку M_1' (див.* ***4.3.18***).]

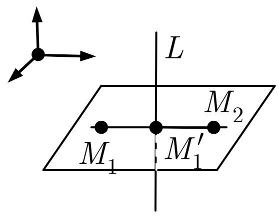


Рис. до 4.3.20

$$M_1'(3;-2;2).$$

[***Крок 2.*** *Знаходимо координати точки M_2 як точки поділу відрізка M_1M_1' у відношенні $\lambda = -2$.*]

$$\begin{cases} x_2 \overset{[3.8.6]}{=} \dfrac{x_1 - 2x'}{-1} = 2x' - x_1 = 2\cdot 3 - 2 = 4, \\ y_2 \overset{[3.8.6]}{=} \dfrac{y_1 - 2y'}{-1} = 2y' - y_1 = 2\cdot(-2) - (-5) = 1, \\ z_2 \overset{[3.8.6]}{=} \dfrac{z_1 - 2x'}{-1} = 2z' - z_1 = 2\cdot 2 - 7 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow M_2(4;1;-3).$$

Коментар. ① Точку M_2 називають симетричною точці M_1 відносно прямої L, якщо $\left|M_1'M_2\right| = \left|M_1M_1'\right|$, де M' — проекція точки M_1 на пряму L.

4.3.21. Знайти точку, симетричну точці $M_1(1;3;-4)$ відносно площини $P : 3x + y - 2z = 0$.

Розв'язання. ①

[*Крок 1.* *Знаходимо проекцію точки* M_1 *на площину* P — *точку* M_1' (*див.* ***4.3.17***).**]**

$$M_1'(-2;2;-2).$$

Крок 2. *Знаходимо координати точки* M_2 *як точки поділу відрізка* M_1M_1' *у відношенні* $\lambda=-2$.**]**

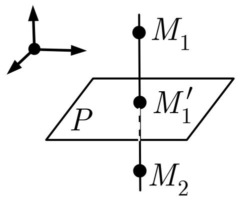


Рис. до 4.3.21

$$\begin{cases} x_2 \overset{[3.8.6]}{=} \dfrac{x_1-2x'}{-1} = 2x'-x_1 = 2\cdot(-2)-1=4, \\ y_2 \overset{[3.8.6]}{=} \dfrac{y_1-2y'}{-1} = 2y'-y_1 = 2\cdot 2-3=1, \\ z_2 \overset{[3.8.6]}{=} \dfrac{z_1-2x'}{-1} = 2z'-z_1 = 2\cdot(-2)-(-4)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M_2(-5;1;0).$$

Коментар. ① Точку M_2 називають симетричною точці M_1 відносно площини P, якщо $\left|M_1'M_2\right| = \left|M_1M_1'\right|$, де M' — проекція точки M_1 на площину P.

4.3.22. Записати рівняння спільного перпендикуляра L до мимобіжних прямих: $L_1: \dfrac{x-6}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-10}{-1}$, $L_2: \dfrac{x+4}{-7} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-4}{3}$.

Розв'язання. [4.15.1.]

[*З канонічних рівнянь прямих виписуємо координати точок, які лежать на прямих і координати їхніх напрямних векторів.***]**

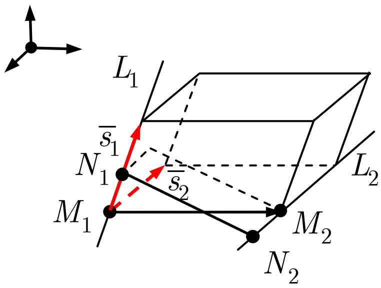


Рис. до 4.3.22

$$M_1(6;1;10)\in L_1, M_2(-4;3;4)\in L_2$$

$$\overline{s}_1 = \overline{s}(L_1) = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \overline{s}_2 = \overline{s}(L_2) = \begin{pmatrix}-7\\2\\3\end{pmatrix}.$$

[*Перевіряємо умови [4.15.1].***]**

$$\overline{M_1M_2} = \begin{pmatrix}-10\\2\\-6\end{pmatrix};$$

$$[\overline{s}_1,\overline{s}_2] \overset{[3.11.4]}{=} \begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & 2 & -1\\ -7 & 2 & 3\end{vmatrix} = \overline{i}\cdot 8 - \overline{j}\cdot(-4) + \overline{k}\cdot 16 = \begin{pmatrix}8\\4\\16\end{pmatrix}.$$

$$(\overline{M_1M_2}, \overline{s}_1, \overline{s}_2) = (\overline{M_1M_2}, [\overline{s}_1, \overline{s}_2]) =$$
$$= (-10) \cdot 8 + 2 \cdot 4 + (-6) \cdot 16 = -168 \neq 0.$$

[*Висновуємо про взаємне розташування прямих.***]**

Прямі L_1 та L_2 — мимобіжні.

[*Крок 1.* *Знаходимо нормальний вектор площини, яка проходить через пряму L_1 паралельно прямій L_2.***]**

$$L_1 \subset P, L_2 \parallel P \Rightarrow \overline{n}(P) \perp \overline{s}_1, \overline{n}(P) \perp \overline{s}_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{n}(P) \parallel [\overline{s}_1, \overline{s}_2] = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{n}(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

[*Крок 2.* *Знаходимо рівняння площини P_1, яка містить пряму L_1 і перпендикулярна до площини P.***]**

$$L_1 \subset P_1, P_1 \perp P \Rightarrow M_1 \in P_1, \overline{s}_1 \parallel P_1, \overline{n}(P) \parallel P_1 \overset{[4.12.3]}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow (\overline{M_1M}, \overline{s}_1, \overline{n}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-6 & y-1 & z-10 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-6) \cdot 9 - (y-1) \cdot 6 + (z-10) \cdot (-3) = 0;$$
$$P_1 : 3x - 2y - z - 6 = 0.$$

[*Крок 3.* *Знаходимо рівняння площини P_2, яка містить пряму L_2 і перпендикулярна до площини P.***]**

$$L_2 \subset P_2, P_2 \perp P \Rightarrow M_2 \in P_2, \overline{s}_2 \parallel P_2, \overline{n}(P) \parallel P_2 \overset{[4.12.3]}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow (\overline{M_2M}, \overline{s}_2, \overline{n}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+4 & y-3 & z-4 \\ -7 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+4) \cdot 5 - (y-3) \cdot (-34) + (z-4) \cdot (-11) = 0;$$
$$P_2 : 5x + 34y - 11z - 38 = 0.$$

[*Крок 4.* *Знаходимо загальні рівняння спільного перпендикуляра як перетин площин P_1* та *P_2.***]**

$$L = P_1 \cap P_2 : \begin{cases} 3x - 2y - z - 6 = 0, \\ 5x + 34y - 11z - 38 = 0. \end{cases}$$

4.3.23. Записати рівняння площини P, яка рівновіддалена від двох площин: $P_1 : x - z - 5 = 0$, $P_2 : 3x + 5y + 4z = 0$.

Розв'язання. [4.14.6]

Нехай точка $M(x;y;z) \in P$.

[*Знаходимо множину точок, рівновіддалених від площин P_1 та P_2.*]

$$d(M,P_1) \overset{[4.14.6]}{=} \frac{|x - z - 5|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|x - z - 5|}{\sqrt{2}};$$

$$d(M,P_2) = \frac{|3x + 5y + 4z|}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 4^2}} = \frac{|3x + 5y + 4z|}{5\sqrt{2}}.$$

$$d(M,P_1) = d(M,P_2) \Leftrightarrow \frac{|x - z - 5|}{\sqrt{2}} = \frac{|3x + 5y + 4z|}{5\sqrt{2}};$$

$$5|x - z - 5| = |3x + 5y + 4z|;$$

$$5(x - z - 5) = \pm(3x + 5y + 4z);$$

$$\left[\begin{array}{l} 5x - 5z - 25 = 3x + 5y + 4z, \\ 5x - 5z - 25 = -3x - 5y - 4z. \end{array}\right.$$

Отже, оскільки площини P_1 та P_2 — не паралельні, дістаємо рівняння двох «бісекторіальних» площин:

$$P' : 2x - 5y - 9z - 25 = 0,$$

$$P'' : 8x + 5y - z - 25 = 0.$$

4.3.24. Через пряму $L : \begin{cases} 3x - y + 2z + 9 = 0, \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}$ провести площину паралельну осі Ox.

Розв'язання. [4.14.4.]

[*Записуємо рівняння жмутка площин — множини площин, що проходить через пряму L перетину площин P_1 та P_2.*]

$$\alpha(3x - y + 2z + 9) + \beta(x + z - 3) = 0;$$

$$(3\alpha + \beta)x - \alpha y + (2\alpha + \beta)z + (9\alpha - 3\beta) = 0.$$

Площина P паралельна осі Ox, коли $3\alpha + \beta = 0$ [4.4.10]. Звідки $\beta = -3\alpha$. Рівняння шуканої площини:

$$\alpha(3x - y + 2z + 9) - 3\alpha(x + z - 3) = 0;$$

$$P : y + z - 18 = 0.$$

4.3.25. Визначити двогранні кути, які утворюють площини:

$$P_1 : 6x + 3y - 2z = 0,\ P_2 : x + 2y + 6z - 12 = 0.$$

Розв'язання. [4.14.5.]

$$\cos(\widehat{P_1, P_2}) = \cos(\widehat{\overline{n}_1, \overline{n}_2}) = \frac{(\overline{n}_1, \overline{n}_2)}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|}.$$

$$\overline{n}(P_1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \overline{n}(P_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$|\overline{n}(P_1)| \overset{[3.8.3]}{=} \sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7;$$

$$|\overline{n}(P_2)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{1 + 4 + 36} = \sqrt{41}.$$

$$\cos(\widehat{P_1, P_2}) \overset{[4.14.5]}{=} \frac{(\overline{n}_1, \overline{n}_2)}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|} \overset{[3.11.2]}{=} \frac{6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 6}{7 \cdot \sqrt{41}} = \frac{0}{7\sqrt{41}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\widehat{P_1, P_2}) = \frac{\pi}{2}.$$

4.3.26. Записати рівняння площини P, яка проходить через точку $M_0(2;-1;1)$ перпендикулярно до площин

$$P_1 : x + y + 5z - 9 = 0 \text{ та } P_2 : 2x + y + 2z + 1 = 0.$$

Розв'язання. [4.12.1.]

[*Із загальних рівнянь площин P_1 та P_2 виписуємо координати їхніх нормальних векторів.***]**

$$\overline{n}(P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \overline{n}(P_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

[*Знаходимо нормальний вектор площини P.***]**

$$P \perp P_1, P \perp P_2 \Rightarrow \overline{n}(P_1) \perp \overline{n}(P), \overline{n}(P_2) \perp \overline{n}(P) \Rightarrow$$

$$\overline{n}(P) = [\overline{n}(P_1), \overline{n}(P_2)] \overset{[3.11.4]}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}(2 - 5) - \overline{j}(2 - 10) + \overline{k}(1 - 2) = -3\overline{i} + 8\overline{j} - \overline{k} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

[*Використовуючи формулу [4.12.1], записуємо рівняння площини, що проходить через точку* M_0 *перпендикулярно до вектора* $\overline{n}(P)$.]

$$(\overline{M_0M}, \overline{n}) = 0 \Leftrightarrow -3(x-2) + 8(y+1) - 1(z-1) = 0;$$
$$P: -3x + 8y - z + 15 = 0.$$

4.3.27. Знайти віддаль від точки $M_0(1;2;-3)$ до площини $5x - 3y + z + 14 = 0$. З'ясувати, в одному чи різних підпросторах відносно заданої площини розташована точка M_0 і початок системи координат.

Розв'язання. [4.14.6, 4.14.7.]

$$d(M_0, P) \overset{[4.14.6]}{=} \frac{|5\cdot 1 - 3\cdot 2 + 1\cdot(-3) + 14|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{|5 - 6 - 3 + 14|}{\sqrt{35}} = \frac{10}{\sqrt{35}}.$$

З'ясуймо знак відхилення точки M_0 від площини:

$$\delta(M_0, P) \overset{[4.14.7]}{=} -\operatorname{sgn} 14 \cdot \frac{5 - 6 - 3 + 14}{\sqrt{35}} = -\frac{10}{\sqrt{35}} < 0.$$

Знак відхилення вказує на те, що точка M_0 і початок системи координат належать одному півпростору щодо заданої площини.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

4.3.28. Запишіть канонічні й параметричні рівняння прямої L, що проходить через точку $M_0(2;0;-5)$ паралельно:

1) вектору $\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$;

2) вектору $\overline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

3) осі Ox;

4) осі Oy;

4.3.29. Запишіть канонічні й параметричні рівняння прямої L, що проходить через точку $M_0(2;0;-5)$ паралельно прямій:

1) $L' : \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$;

2) $L' : \begin{cases} x = -2 + t, \\ y = 2t, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 - 3t, \end{cases}$

4.3.30. Запишіть канонічні рівняння прямої, що проходить через точки M_1 та M_2 і координати напрямного вектора прямої, якщо:

1) $M_1(1;-2;1), M_2(3;1;-1)$; 2) $M_1(3;-1;0), M_2(1;0;-3)$.

4.3.31. Установіть, які з точок $M_1(3;4;7), M_2(2;0;4), M_3(0;-5;1)$ належать прямій:

1) $L:\begin{cases} x=2+t, \\ y=1+3t, t\in\mathbb{R}; \\ z=5+2t, \end{cases}$ 2) $L:\begin{cases} x=-2+3t, \\ y=2-2t, \quad t\in\mathbb{R}. \\ z=3+t, \end{cases}$

4.3.32. Запишіть загальне рівняння площини, яка проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{n}$,

1) $M_1(2;1;-1), \overline{n}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; 2) $M_0(3;-1;0), \overline{n}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$.

4.3.33. Запишіть загальне рівняння площини P, що проходить через точку M_0, паралельно векторам $\overline{a}_1$ та $\overline{a}_2$ і знайдіть її нормальний вектор, якщо:

1) $M_0(1;1;1), \overline{a}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{a}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; 2) $M_0(0;1;2), \overline{a}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{a}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4.3.34. Запишіть рівняння площини P, що проходить через точки M_1 і M_2 паралельно вектору $\overline{a}$, якщо:

1) $M_1(1;2;0), M_2(2;1;1), \overline{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; 2) $M_1(1;1;1), M_2(2;3;-1), \overline{a}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4.3.35. Запишіть рівняння площини P, що проходить через точки:

1) $M_1(1;2;0), M_2(2;1;1), M_3(3;0;1)$;

2) $M_1(1;1;1), M_2(0;-1;2), M_3(2;3;-1)$.

4.3.36. Запишіть рівняння площини, що проходить через точки:

1) $M_1(1;-3;2), M_2(-2;1;4), \parallel Ox$;

2) $M_1(-2;1;-3), M_2(1;-3;-4), \parallel Oy$;

3) $M_1(4;-1;1), M_2(0;-2;-3), \parallel Oz$.

4.3.37. Запишіть рівняння площини, що проходить через вісь:

1) Ox і точку $M_1(-1;1;-3)$; 2) Oy і точку $M_2(1;-2;5)$;

3) Oz і точку $M_3(2;3;-4)$.

4.3.38. Запишіть рівняння площини, що проходить через точку:

1) $M_1(-2;3;-1)$ паралельно площині Oxy;

2) $M_2(4;-1;5)$ паралельно площині Oxz;

3) $M_3(-3;-2;2)$ паралельно площині Oyz.

4.3.39. Запишіть нормоване рівняння площини:

1) $5y-12z+26=0$; 2) $x+\sqrt{2}y+z-10=0$.

4.3.40. Перевірте, які з точок $A(-1;2;3)$, $B(1;-2;1), C(0;1;2), D(3;0;3)$ та $E(5;-7;11)$ лежать на площині $2x-3y+z-9=0$.

4.3.41. Знайдіть довжини відрізків, які відтинає від координатних площин площина:

1) $2x+3y-9z+18=0$; 2) $x-2y+5z-20=0$.

4.3.42. Знайдіть об'єм тетраедра, який відтинає від координатного кута площина:

1) $3x-2y+z-12=0$; 2) $x+2y-5z+10=0$.

4.3.43. З'ясуйте, як розташована відносно системи координат $Oxyz$ площина:

1) $3y+2z-1=0$; 2) $2x+y-5z=0$;

3) $2x-y-1=0$, 4) $2x+y=0$;

5) $x+z=0$; 6) $3y-4z=0$;

7) $2x+3=0$; 8) $z+4=0$.

4.3.44. Запишіть параметричні й канонічні рівняння прямих:

1) $L:\begin{cases} x+y+2z-3=0, \\ x-y+z-1=0; \end{cases}$ 2) $L:\begin{cases} x+2y+4z-7=0, \\ 2x+y-z-5=0. \end{cases}$

4.3.45. Знайдіть відхилення δ та віддаль d точки M_0 від площини P, якщо:

1) $M_0(-2;-4;3), P: 2x-y+2z+3=0;$

2) $M_0(2;-1;-1), P: 16x-12y+15z-4=0;$

3) $M_0(1;2;-3), P: 5x-3y+z+4=0.$

4.3.46. Дослідіть взаємне розташування площин. У разі, якщо вони паралельні, то знайдіть віддаль $d(P_1, P_2)$ між площинами, якщо вони — перетинні, то знайдіть косинус кута між ними:

1) $P_1: -x+2y-z+1=0,\ P_2: y+3z-1=0;$

2) $P_1: x-y+1=0,\ P_2: y-z+1=0;$

3) $P_1: 2x-y+z-1=0,\ P_2: -4x+2y-2z-1=0;$

4) $P_1: 2x-y-z+1=0,\ P_2: -4x+2y+2z-2=0.$

4.3.47. Запишіть рівняння площин, що поділяють навпіл кути, утворені площинами P_1 і P_2, якщо:

1) $P_1: x-3y+2z-5=0,\ P_2: 3x-2y-z+3=0;$

2) $P_1: 2x-y+5z-3=0,\ P_2: 2x-10y+4z-2=0.$

4.3.48. Запишіть рівняння площини, рівновіддаленої від площин P_1 і P_2, якщо:

1) $P_1: 4x-y-2z-3=0,\ P_2: 4x-y-2z-5=0;$

2) $P_1: 5x-3y+z+3=0,\ P_2: 10x-6y+2z+7=0.$

4.3.49. На віддалі k одиниць від площини P проведіть площину, паралельну їй, якщо:

1) $k=5, P: x-2y+2z-14=0;$

2) $k=3, P: 3x-6y-2z+14=0.$

4.3.50. Доведіть, що прямі L_1 та L_2 паралельні, і знайдіть віддаль між ними, якщо:

1) $L_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 3t, \qquad t \in \mathbb{R}, \\ z = -2 + t, \end{cases}$ $L_2 : \begin{cases} x = 7 + 4t', \\ y = 5 - 6t', \, t' \in \mathbb{R}; \\ z = 4 - 2t', \end{cases}$

2) $L_1 : \begin{cases} x = 2t, \\ y = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ z = -2t, \end{cases}$ $L_2 : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$

4.3.51. Доведіть, що прямі L_1 та L_2 зливаються, якщо:

1) $L_1 : \begin{cases} x = 8 + 3t, \\ y = 7 - 2t, t \in \mathbb{R}, \\ z = 11 + t, \end{cases}$ $L_2 : \begin{cases} x = 5 - 6t', \\ y = 9 + 4t', \, t' \in \mathbb{R}; \\ z = 10 - 2t', \end{cases}$

2) $L_1 : \begin{cases} x = -t, \\ y = -4 - 5t, t \in \mathbb{R}, \\ z = 3 + 3t, \end{cases}$ $L_2 : \begin{cases} 4x + y + 3z - 5 = 0, \\ 7x - 2y - z - 5 = 0. \end{cases}$

4.3.52. Доведіть, що прямі L_1 та L_2 перетинаються, і знайдіть координати точок перетину:

1) $L_1 : \begin{cases} x = -3t, \\ y = 2 + 3t, t \in \mathbb{R}, \\ z = 1, \end{cases}$ $L_2 : \begin{cases} x = 1 + 5t', \\ y = 1 + 13t', t' \in \mathbb{R}; \\ z = 1 + 10t', \end{cases}$

2) $L_1 : \begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = -1, \qquad t \in \mathbb{R}, \\ z = 4 - t, \end{cases}$ $L_2 : \begin{cases} 2y - z + 2 = 0, \\ x - 7y + 3z - 17 = 0. \end{cases}$

4.3.53. Установіть, чи лежить пряма L у площині P, не має з площиною P спільних точок або перетинає в деякій точці й тоді знайдіть точку перетину:

1) $L : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z+2}{5}$, $P : 4x + 3y - z + 3 = 0;$

2) $L: \dfrac{x-7}{5} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{4}$, $P: 3x - y + 2z - 5 = 0$;

3) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{5}$, $P: x - 3y + 2z - 5 = 0$.

4.3.54. Знайдіть кут між прямими:

1) $L_1: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$ та $L_2: \dfrac{x+5}{6} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{2}$;

2) $L_1: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{3}$ та $L_2: \begin{cases} 3x + y - 5z = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 1 = 0. \end{cases}$

4.3.55. Задано пряму $L: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{0}$ і точку $M_0(0;1;2) \notin L$ (перевірте!).

1. Запишіть рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M_0.

2. Запишіть рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до прямої L;

3. Запишіть рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M_0 на пряму L.

4. Обчисліть віддаль $d(M_0, L)$.

5. Знайдіть проекцію точки M_0 на пряму L.

4.3.56. Задано площину $P: x + y - z + 1 = 0$ і пряму $l: \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$, причому $L \not\subset P$.

1. Обчисліть $\sin(\widehat{P, L})$ і координати точки перетину прямої і площини.

2. Запишіть рівняння площини, що проходить через пряму L перпендикулярно до площини P.

3. Запишіть рівняння проекції прямої L на площину P.

4.3.57. Переконайтесь, що прямі L_1 та L_2 належать одній площині, і запишіть рівняння цієї площини, якщо:

1) $L_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{4},\ L_2: \dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-2};$

2) $L_1: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-2},\ L_2: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-2}.$

4.3.58. Для прямих L_1 і L_2:

а) доведіть, що прямі мимобіжні;

б) запишіть рівняння площини, що проходить через пряму L_2 паралельно прямій L_1;

в) обчисліть віддаль між прямими;

г) запишіть рівняння спільного перпендикуляра до прямих L_1 та L_2, якщо:

1) $L_1: \dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z+3}{-2},\ L_2: \dfrac{x-21}{6}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z-2}{-1};$

2) $L_1: \dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+3}{4},\ L_2: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+7}{-3}=\dfrac{z-4}{8}.$

4.3.59. Знайдіть точку симетричну точці A відносно прямої L, якщо:

1) $A(4;3;10), L: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5};$

2) $A(-3;1;-1), L: \begin{cases} 4x-3y-13=0, \\ y-2z+5=0. \end{cases}$

4.3.60. Знайдіть точку, симетричну точці A відносно площини P:

1) $A(6;-5;5), P: 2x-3y+z-4=0;$

2) $A(-3;1;-9), P: 4x-3y-z-7=0.$

4.3.61. Знайдіть проекцію прямої L на площину $P: 3x-2y-z+15=0$, якщо:

1) $L: \begin{cases} x=1+2t, \\ y=3+t,\ t\in\mathbb{R}; \\ z=2+t, \end{cases}$ 2) $L: \begin{cases} x=1+t, \\ y=3+t, t\in\mathbb{R}. \\ z=2+t, \end{cases}$

4.3.62. Запишіть рівняння площини P', що проходить через точку M_0 паралельно площині P, і обчисліть віддаль $d(P,P')$, якщо:

1) $P: -2x+y-z+1=0, M(1;1;1)$;

2) $P: x-y-1=0, M(1;1;2)$.

4.3.63. Через лінію перетину площин $P_1: x+y-z+5=0$ та $P_2: 2x+y+z-3=0$

проведіть площину:

1) що проходить через точку $M_0(-1;3;4)$;

2) паралельну до осі Oy;

3) перпендикулярну до площини $3x-y+2z-11=0$.

4.3.64. Для яких значень параметрів a і d пряма L лежить у площині

1) $L: \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$, $P: ax+2y-4z+d=0$;

2) $L: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$, $P: ax+y-2z+d=0$.

4.3.65. Для якого значення параметра a площина $P: ax+2y-z+5=0$ паралельна прямій $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{5}$?

4.3.66. Для якого значення m пряма $L: \begin{cases} x=-1+3t, \\ y=2+mt, \; t\in\mathbb{R}, \\ z=-3-2t, \end{cases}$ не має із площиною $P: x+3y+3z-2=0$ спільних точок?

4.3.67. Для яких значень параметрів a і b площини $P: ax+by-9z-1=0$ перпендикулярна до прямої $L: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{6}=\dfrac{z-3}{3}$?

4.3.68. Для якого значення параметра a площини $P_1: x+ay+z-1=0$ та $P_2: ax+9y+\dfrac{a^3}{9}z+3=0$:

1) перетинаються; 2) паралельні; 3) збіжні.

4.3.69. Для яких значень параметра a пряма $L: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{a} = \dfrac{z-2}{-1}$:

1) перетинає площину $P: 3a^2x + ay + z - 4a = 0$;

2) паралельна цій площині; 3) лежить у цій площині.

4.3.70. Для яких значень a прямі

$$L_1: \frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-(a-2)^2}{a} \text{ та } L_2: \frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1}:$$

1) перетинаються; 2) мимобіжні;

3) паралельні; 4) збіжні.

4.3.71. Для яких значень l і m площини $P_1: 2x - y + 3z - 1 = 0$, $P_2: x + 2y - z + m = 0, P_3: x + ly - 6z + 10 = 0$ перетинаються:

1) в одній точці; 2) уздовж прямої;

3) уздовж паралельних прямих?

4.3.72. Доведіть, що площини $P_1: x - 2y + 3z - 13 = 0$,

$P_2: 5x + y - z - 11 = 0$ та $P_3: 3x + 5y - 7z + 15 = 0$

проходять через одну й ту саму пряму.

Відповіді

4.3.28. 1) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+5}{5}$, $\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = -3t, \\ z = -5 + 5t, \end{cases} t \in \mathbb{R}$;

2) $\dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+5}{2}$, $\begin{cases} x = 2, \\ y = t, \\ z = -5 + 2t, \end{cases} t \in \mathbb{R}$;

3) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+5}{0}$, $\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 0, \\ z = -5, \end{cases} t \in \mathbb{R}$; 4) $\dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+5}{0}$, $\begin{cases} x = 2, \\ y = t, \\ z = -5, \end{cases} t \in \mathbb{R}$.

4.3.29. 1) $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+5}{-1}$, $\begin{cases} x = 2 + 5t, \\ y = 2t, \\ z = -5 - t, \end{cases} t \in \mathbb{R}$; 2) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+5}{-3}$, $\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 2t, \\ z = -5 - 3t, \end{cases} t \in \mathbb{R}$.

4.3.30. 1) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$; 2) $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-3}$. **4.3.31.** 1) M_1, M_3; 2) M_2.

4.3.32. 1) $x-2y+3z+3=0$; 2) $-x+2y-7z+5=0$.

4.3.33. 1) $P: x-2y+z=0, \overline{n}(P)=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$; 2) $P: x-y-2z+5=0, \overline{n}(P)=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

4.3.34. 1) $x-2y-3z+3=0$; 2) $2x-2y-z+1=0$.

4.3.35. 1) $x+y-3=0$; 2) $2x-y-1=0$.

4.3.36. 1) $y-2z+7=0$; 2) $x+3z+11=0$; 3) $x-4y-8=0$.

4.3.37. 1) $3y+z=0$; 2) $5x-z=0$; 3) $3x-2y=0$.

4.3.38. 1) $z+1=0$; 2) $y+1=0$; 3) $x+3=0$.

4.3.39. 1) $-\dfrac{5}{13}y+\dfrac{12}{13}z-2=0$; 2) $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y+\dfrac{1}{2}z-5=0$. **4.3.40.** B і D.

4.3.41. 1) $|\tilde{a}|=9, |\tilde{b}|=6, |\tilde{c}|=2$; 2) $|\tilde{a}|=20, |\tilde{b}|=10, |\tilde{c}|=4$. **4.3.42.** 1) 48; 2) $\dfrac{50}{3}$.

4.3.43. 1) паралельна осі Ox; 2) проходить через початок координат; 3) паралельна осі Oz; 4) проходить через вісь Oz; 5) проходить через вісь Oy; 6) проходить через вісь Ox; 7) паралельна площині Oyz; 8) паралельна площині Oxy.

4.3.44. 1) $\begin{cases}x=2+3t,\\ y=1+t, \quad t\in\mathbb{R},\\ z=-2t,\end{cases}$ $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-2}$;

2) $\begin{cases}x=5-2t,\\ y=-3+3t, t\in\mathbb{R},\\ z=2-t,\end{cases}$ $\dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-2}{-1}$.

4.3.45. 1) $d=3, \delta=-3$; 2) $d=\delta=1$; 3) $d=\delta=0, M_0\in P$.

4.3.46. 1) $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2\sqrt{15}}$; 2) $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$; 3) $d=\dfrac{3}{2\sqrt{6}}$; 4) $d=0$.

4.3.47. 1) $4x-5y+z-2=0$ та $2x+y-3z+8=0$;
2) $3x-6y+7z-4=0$ та $x+4y+3z+2=0$.

4.3.48. 1) $4x-y-2z-4=0$; 2) $20x-12y+4z+13=0$.

4.3.49. 1) $x-2y+2z+1=0$, $x-2y+2z-29=0$;
2) $3x-6y-2z+35=0$, $3x-6y-2z-7=0$.

4.3.50. 1) $\sqrt{\dfrac{1277}{14}}$; 2) $\sqrt{3}$. **4.3.52.** 1) $(1;1;1)$; 2) $(10;-1;0)$.

4.3.53. 1) $L\subset P$; 2) $A(2;3;1)$; 3) $L\parallel P$. **4.3.54.** 1) $\cos(\widehat{L_1,L_2})=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $(\widehat{L_1,L_2})=\dfrac{\pi}{2}$.

4.3.55. 1) $x-2y+z=0$; 2) $2x+y-1=0$; 3) $\begin{cases} x-2y+z=0, \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$ або $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{5}$; 4) $\frac{18}{\sqrt{30}}$; 5) $M_0'\left(\frac{3}{5};-\frac{1}{5};-1\right)$.

4.3.56. 1) $\frac{1}{\sqrt{15}}, M_0(1;-6;-4)$; 2) $3x-y+2z-1=0$; 3) $\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 3x-y+2z-1=0. \end{cases}$

4.3.57. 1) $2x-16y-13z+31=0$; 2) $6x-20y-11z+1=0$.

4.3.58. 1) $4x+3y+12z-93=0$, 13, $\begin{cases} 54x-44y-7z+181=0, \\ -45x-76y+34z+497=0; \end{cases}$

2) $4x+12y+3z+76=0$, $\frac{127}{13}$, $\begin{cases} 53x-7y-44z-429=0, \\ 105x-23y-48z+136=0. \end{cases}$

4.3.59. 1) $B(2;9;6)$; 2) $B(5;-7;3)$. **4.3.60.** 1) $B(-2;7;1)$; 2) $B(1;-2;-10)$.

4.3.61. 1) $\begin{cases} 3x-2y-z+15=0, \\ x+5y-7z-2=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-2y-z+15=0, \\ x+4y-5z-3=0. \end{cases}$

4.3.62. 1) $2x-y+z-2=0, d=\frac{1}{\sqrt{6}}$; 2) $x-y=0, d=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4.3.63. 1) $4x+y+5z-19=0$; 2) $x+2z-8=0$; 3) $x+y-z+5=0$.

4.3.64. 1) $a=3, d=-23$; 2) $a=-2, d=11$. **4.4.65.** $a=-2$. **4.3.66.** $m=1$.

4.3.67. $a=-6, b=-18$. **4.3.68.** 1) $a\neq\pm3$; 2) $a=3$; 3) $a=-3$.

4.3.69. 1) $a\neq\pm\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$.

4.3.70. 1) $a=3$; 2) $a\neq\pm1, a\neq3$; 3) $a=-1$; 4) $a=1$.

4.3.71. 1) $l\neq7$; 2) $l=7, m=3$; 3) $l=7, m\neq3$.

Практикум 4.4. Поверхні 2-го порядку

Навчальні задачі

4.4.1. Визначити тип поверхні, яку задає рівняння

$$x^2+y^2+z^2+2y=0,$$

знайти канонічну систему для поверхні й зобразити поверхню.

Розв'язання. [4.17.]

[*Виділяємо повний квадрат за* y.]

$$x^2+(y^2+2y+1)-1+z^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2+z^2=1.$$

Перенесенням початку координат у точку $O'(0;-1;0)$, дістаємо канонічну систему координат:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y + 1, \\ z' = z. \end{cases}$$

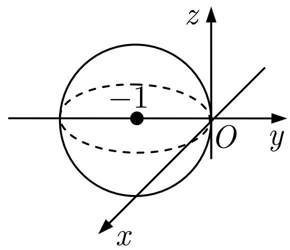


Рис. до 4.4.1

Канонічне рівняння задає сферу радіусом 1:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

4.4.2. Визначити форму й рівняння перерізу конуса $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ площиною $y = 2$.

Розв'язання. [4.17, 4.1.4.]

[*Виключаючи y із системи двох рівнянь, одержуємо рівняння проекції лінії перерізу на площину Oxz.*] ①

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4 - 2z^2 = 0; \ \frac{z^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 1.$$

Отже, перерізом конуса і площини є гіпербола, яка лежить у площині $y = 2$, фокуси якої розташовано на прямій паралельній осі Oz симетрично відносно точки O.

Коментар. ① Для ортогонального проектування форма перерізу збігається з формою його проекції.

4.4.3. Знайти рівняння поверхні, одержаної обертанням прямої $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ z = 0 \end{cases}$ навколо осі Ox.

Розв'язання. [4.1.5.]

Поверхнею обертання Ω є конус із вершиною в точці $A(4;0;0)$.

Нехай точка $M(X;Y;Z) \in \Omega$. Їй відповідає на заданій прямій точка $B(x;y;0)$. Точки M і B лежать в одній площині, яка перпендикулярна до осі обертання Ox. Тоді

$$X = x, Y^2 + Z^2 = y^2.$$

[*Підставляючи значення x та y в рівняння даної прямої, дістаємо рівняння шуканої поверхні обертання.*]

$$X + 2\sqrt{Y^2 + Z^2} = 4;$$

$$Y^2 + Z^2 = \frac{(X-4)^2}{4}.$$

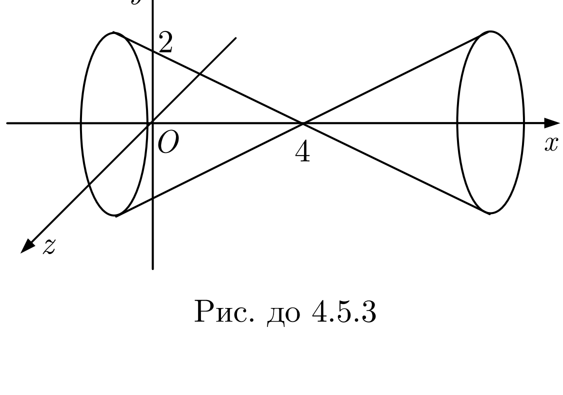


Рис. до 4.5.3

4.4.4. Звести до канонічного вигляду рівняння поверхні

$$x^2 - y^2 - 4x + 8y - 2z = 0\,.$$

Розв'язання. [4.17.]

[*Групуємо члени, що містять x та y.*]

$$(x^2 - 4x) - (y^2 - 8y) = 2z.$$

[*Доповнюємо до повних квадратів вирази в дужках.*]

$$(x^2 - 4x + 4) - (y^2 - 8y + 16) = 2z + 4 - 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - (y-4)^2 = 2(z-6).$$

[*Знаходимо канонічну систему для поверхні.*]

Паралельним перенесенням початку координат у точку $O'(2;4;6)$, одержуємо канонічну систему координат:

$$\begin{cases} x = x' + 2, \\ y = y' + 4, \\ z = z' + 6. \end{cases}$$

Канонічне рівняння

$$x'^2 - y'^2 = 2z',$$

задає гіперболічний параболоїд.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

4.4.5. Запишіть рівняння сфери, яка має центр у точці:

1) $C(5;-3;7)$ і радіус $R = 2$; 2) $C(4;-4;-2)$ і радіус $R = 6$.

4.4.6. Визначити форму й рівняння перерізу поверхонь Ω_1 та Ω_2:

1) $\Omega_1 : x - 2 = 0, \Omega_2 : \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{4} = 1;$

2) $\Omega_1 : z + 1 = 0, \Omega_2 : \dfrac{x^2}{32} - \dfrac{y^2}{18} + \dfrac{z^2}{2} = 1;$

3) $\Omega_1 : y + 6 = 0, \Omega_2 : \dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 6z;$

4) $\Omega_1 : z + 4 = 0, \Omega_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 25.$

4.4.7. Визначте, яку поверхню задає рівняння:

1) $x+5=0$; 2) $3y+5z-7=0$;

3) $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$; 4) $(x+2)^2+y^2+(z-3)^2=16$;

5) $x^2+\dfrac{y^2}{2}+3z^2=0$; 6) $x^2+y^2+9z^2+1=0$;

7) $x^2+y^2-z^2-2y+2z=0$;

8) $x^2+y^2+z^2+4y-10z+4=0$;

9) $4x^2+9y^2+36z^2+8x+36y-72z+40=0$;

10) $2x^2+y^2-z^2+16x-2y+4z+17=0$;

11) $x^2+y^2-z^2-2x-2y+2z+2=0$;

12) $x^2+y^2-6x+6y-4z+18=0$;

13) $9x^2-z^2-18x-18y-6z=0$; 14) $\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$;

15) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}=1$; 16) $z^2=4y$.

Відповіді

4.4.5. 1) $(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=4$; 2) $(x-4)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=36$.
4.4.6. 1) еліпс; 2) гіпербола; 3) парабола; 4) коло.
4.4.7. 1) площина $x=-5$, паралельна площині Oyz; 2) площина з нормальним вектором $\overline{n}=-3\overline{j}+5\overline{k}$; 3) сфера із центром у точці $C(1;-2;0)$ радіусом $R=3$; 4) сфера із центром у точці $C(-2;0;3)$ радіусом $R=4$; 5) точка $O(0;0;0)$; 6) порожня множина; 7) конус $x^2+(y-1)^2=(z-1)^2$ з вершиною в точці $C(0;1;1)$; 8) сфера із центром у точці $C(0;-2;5)$ радіусом $R=5$; 9) еліпсоїд з канонічним рівнянням $\dfrac{(x+1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)}{4}+\dfrac{z-1}{1}=1$; 10) однопорожнинний гіперболоїд $\dfrac{(x+4)^2}{6}+\dfrac{(y-1)^2}{12}-\dfrac{(z-2)^2}{12}=1$; 11) двопорожнинний гіперболоїд $(x-1)^2+(y-1)^2-(z-1)^2=-1$; 12) параболоїд обертання з канонічним рівнянням $(x-3)^2+(y+3)^2=4z$; 13) гіперболічний параболоїд $\dfrac{(x-1)^2}{1}-\dfrac{(z-3)^2}{9}=2y$. 14) еліптичний циліндр; 15) гіперболічний циліндр; 16) параболічний циліндр.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВМІННЯ

Основні означення	
1. Рівняння лінії на площині й у просторі. **2.** Рівняння поверхні. **3.** Канонічне рівняння прямої на площині. Напрямний вектор прямої. **4.** Загальне рівняння прямої на площині. Нормальний вектор прямої. **5.** Загальне рівняння площини. Нормальний вектор площини.	**6.** Канонічні рівняння прямої у просторі. Напрямний вектор прямої. **7.** Рівняння лінії 1-го та 2-го порядків. **8.** Канонічні рівняння кривих 2-го порядку: еліпса, параболи та гіперболи. **9.** Поверхні 2-го порядку. **10.** Квадратичні форми. **11.** Власні числа та власні вектори матриці.
Теореми	
1. Теорема про лінію 1-го порядку на площині. **2.** Теорема про поверхню 1-го порядку в просторі.	**3.** Теорема про фокально-директоріальні властивості кривих 2-го порядку.
Методи	
1. Метод координат. **2.** Метод зведення рівнянь кривих 2-го порядку до канонічного вигляду.	**3.** Метод перерізів.
Основні задачі	
1. Знаходити рівняння прямої на площині, яка проходить: через точку паралельно вектору, через точку перпендикулярно до вектора, через дві точки. **2.** Знаходити рівняння прямої у просторі, яка проходить: через точку паралельно вектору, через дві точки. **3.** Знаходити рівняння площини, яка проходить: через точку перпендикулярно до вектора, через точку паралельно двом векторам, через три точки. **4.** З'ясовувати взаємне розташування: прямих, площин, прямої і площини.	**5.** Знаходити кути: між прямими, між площинами, між прямою і площиною. **6.** Знаходити віддалі: від точки до прямої, від точки до площини. **7.** Визначати тип кривої 2-го порядку за її рівнянням. Знаходити основні характеристики кривих. **8.** Зводити рівняння кривої 2-го порядку до канонічного вигляду. **9.** Визначати тип поверхні 2-го порядку за її рівнянням.

Додаток А. Латинська та грецька абетки

1. Латинська абетка

A a ***Aa*** — а	N n ***N n*** — ен
B b ***Bb*** — бе	O o ***O o*** — о
C c ***Cc*** — це	P p ***P p*** — пе
D d ***Dd*** — де	Q q ***Q q*** — ку
E e ***E e*** — е	R r ***R r*** — ер
F f ***Ff*** — еф	S s ***S s*** — ес
G g ***Gg*** — же (ґе)	T t ***T t*** — те
H h ***Hh*** — аш (га)	U u ***U u*** — у
I i ***Ii*** — і	V v ***V v*** — ве
J j ***J j*** — жі (йот)	W w ***W w*** — дубль ве
K k ***Kk*** — ка	X x ***X x*** — ікс
L l ***L ℓ*** — ель	Y y ***Y y*** — ігрек (іпсилон)
M m ***M m*** — ем	Z z ***Z z*** — зет (зета)

2. Грецька абетка

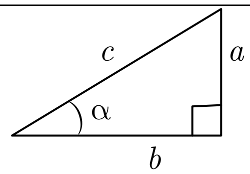
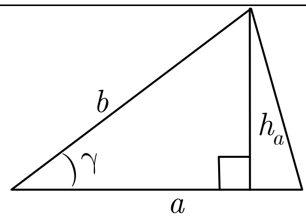
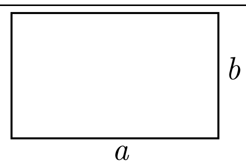
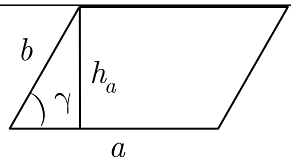
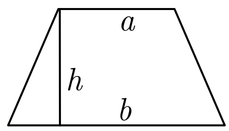
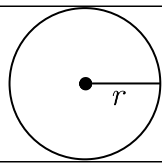
$\mathrm{A}\ \alpha$ — альфа	$\mathrm{N}\ \nu$ — ню
$\mathrm{B}\ \beta$ — бета	$\Xi\ \xi$ — ксі
$\Gamma\ \gamma$ — гамма	$\mathrm{O}\ o$ — омікрон
$\Delta\ \delta$ — дельта	$\Pi\ \pi$ — пі
$\mathrm{E}\ \varepsilon$ — епсилон	$\mathrm{P}\ \varrho$ — ро
$\mathrm{Z}\ \zeta$ — дзета	$\Sigma\ \sigma$ — сигма
$\mathrm{H}\ \eta$ — ета	$\mathrm{T}\ \tau$ — тау
$\Theta\ \vartheta$ — тета	$\Upsilon\ \upsilon$ — іпсилон
$\mathrm{I}\ \iota$ — йота	$\Phi\ \varphi$ — фі
$\mathrm{K}\ \varkappa$ — каппа	$\mathrm{X}\ \chi$ — хі
$\Lambda\ \lambda$ — лямбда	$\Psi\ \psi$ — псі
$\mathrm{M}\ \mu$ — мю	$\Omega\ \omega$ — омега

Додаток Б. Властивості дій. Деякі формули геометрії

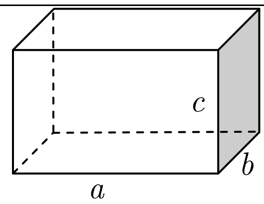
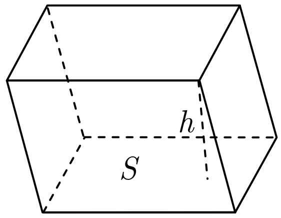
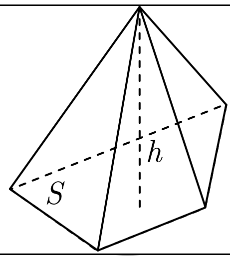
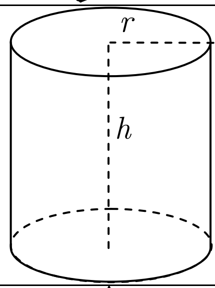
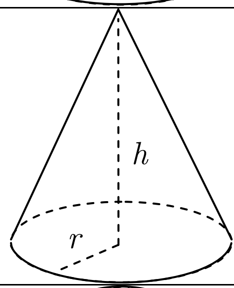
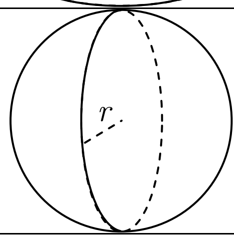
1. Властивості дій

	$\forall a, b, c \in X$
❶ ***Комутативність*** $\oplus$	$a \oplus b = b \oplus a$
❷ ***Асоціативність*** $\oplus$	$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = a \oplus b \oplus c$
❸ ***Дистрибутивність*** $\odot$ відносно $\oplus$	$(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$; $c \odot (a \oplus b) = (c \odot a) \oplus (c \odot b)$
❹ ***Нейтральний*** елемент відносно $\oplus$	$a \oplus e = e \oplus a = a$
❺ ***Симетричний*** елемент *до* a	$a \oplus a' = e = a' \oplus a$

2. Площі деяких фігур

❶ Площа ***прямокутного трикутника***	$S = \frac{1}{2}ab$	
❷ Теорема ***Піфагора***	$a^2 + b^2 = c^2$	
❸ Площа ***трикутника***	$S_{\triangle} = \frac{1}{2}ah_a$ $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$	
❹ Площа ***прямокутника***	$S_{\square} = ab$	
❺ Площа ***паралелограма***	$S_{\varDelta} = ah_a$ $S_{\varDelta} = ab\sin\gamma$	
❻ Площа ***трапеції***	$S = \frac{a+b}{2}h$	
❼ Площа ***круга***	$S_{\bigcirc} = \pi r^2$	
❽ Довжина ***кола***	$L_{\bigcirc} = 2\pi r$	

3. Об’єми деяких тіл

❶ Об’єм ***прямокутного паралелепіпеда***	$V = abc$	
❷ Об’єм ***паралелепіпеда***	$V = S_{\text{осн}}h$	
❸ Об’єм ***піраміди***	$V = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн}}h$	
❹ Об’єм ***колового циліндра***	$V = \pi r^2 h$	
❺ Об’єм ***конуса***	$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$	
❻ Об’єм ***кулі***	$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$	
❼ Площа поверхні ***сфери***	$S = 4\pi r^2$	

Додаток В. Походження деяких термінів та позначень

1. Походження деяких термінів

Абсциса — лат. *linea abscissa* (відрізана, відокремлена лінія) [Ляйбніц (1675)].

Аксіома — гр. *axioma* (авторитет; те, що не підлягає сумніву).

Алгебра — араб. *ал-джабр* (поновлення) [ал-Хорезмі (825)].

Алгоритм — лат. *Algorithmi* (від ал-Хорезмі) [Ляйбніц (1684)].

Аналіз — гр. *analysis* (розв'язання, розкладання) [Вієт (1591)].

Аналітичний — гр. *analytikos*.

Апліката — лат. *applicata* (приєднана, прикладена).

Аргумент — лат. *argumentum* (довід, доказ, знак, ознака) від *arguere* (виявляти). Аргумент функції [Нойман (1862)]. Аргумент комплексного числа [Коші (1847)].

Арифметика — гр. *arithmos* (число).

Асимптота — гр. *asymptotos* (що не зливається) [Аполлоній Пергський (III ст. до н. е.)].

Асоціативний — лат. *adsociare* (сполучати) [Гамільтон (1843)].

Астроїда — гр. *astron* (зірка), *eidos* (вигляд) (зірчаста) [фон Літров (1838)].

Базис — гр. *basis* (основа, підвалина) [Фробеніус (1879)].

Біном — лат. *bi* (два), *nomos* (частина, поділ) (двочлен) [Стевін (1585)].

Вектор — лат. *vector* (носій) від *vehere* (нести) [Гамільтон (1845)].

Вертикаль — лат. *verticalis* (прямовисний).

Гармонічний — гр. *harmonia* (скріплення, злагодженість) від *harmos* (зв'язок).

Гелікоїд — гр. *helix* (спіраль), *eidos* (вигляд).

Геометрія — гр. *geo* (земля), *metron* (вимірювання). Аналітична геометрія [Ньютон (1671, 1736)].

Гіпербола — гр. *iperbole* (перебільшення) [Аполлоній Пергський (III ст. до н. е.)].

Горизонтальний — *лат. horizon* з *гр. oros* (обмежений).

Детермінант — лат. *determinare* (обмежувати, визначати) (визначник) [Коші (1812, 1815)].

Диз'юнкція — лат. *disjunctio* (роз'єднання) [Гамільтон (1848)].

Директриса — лат. *directrixe* (напрямна) [Лопіталь (1720)].

Дистрибутивний — лат. *distributivus* (розподільний) [Сервуа (1815)].

Діагональ — гр. diagonios (проведений від кута до кута) [Герон Александрійський (I ст.)].

Еквівалентний — лат. *aequus* (рівний), *valens* (сильний) (рівносильний) [Дюбуа-Реймон (1870)].

Ексцентриситет — гр. *ekkentros* (позацентровий) [Кеплер (1609)].

Еліпс — гр. *elleipsis* (недостача) [Аполлоній Пергський (III ст. до н. е.)].

Імплікація — лат. *implicare* (тісно зв'язувати).

Інваріант — лат. *invarians* (незмінний) [Сільвестр (1851)].

Індекс — лат. *index* (показник) [Ляйбніц (1687)].

Індукція — лат. *inductio* (наведення). Математична індукція [де Морган (1838)].

Інтервал — лат. *intervallum* (проміжок, віддаль).

Ірраціональний — лат. *inrationalis* (позарозумовий) [Штіфель (1544)].

Канонічний — гр. *kanonikos* (утворений за правилами).

Кардіоїда — гр. *kardia* (серце), *eidos* (вигляд) (серцеподібна) [Кастільйон (1741)].

Квадрант — лат. *quadrans* (чверть).

Квадрат — лат. *quadratus* (чотирикутник).

Квантор — лат. *quantum* (скільки) [Пірс (1885)].

Коефіцієнт — лат. *co* (спів...), *efficiens* (той що творить) [Вієт (1591)].

Колінеарний — лат. *collinearis* (співлінійний) [Ґібз (1881)].

Комбінаторика — лат. *combinare* (з'єднувати, сполучати) [Ляйбніц (1666)].

Комбінація — лат. *combinatio* (поєднання) [Паскаль (1654)].

Компланарний — лат. *com* (спів...) *plana* (площина) (розміщений на площині) [Ґібз (1901)].

Комплексний — лат. *complicare* (складати, ускладнювати). Комплексне число [Карно (1803), Ґаус (1831)].

Комутативний — лат. *commutatus* (зміна, перетворення) [Сервуа (1815)].

Кон'юнкція — лат. *conjunctio* (союз, зв'язок) [Гамільтон (1848)].

Конус — гр. *konos* (гострокінцевий предмет) [Евклід (IV—III ст. до н. е.)] .

Координата — лат. *con* (спів-), *ordinatus* (упорядкований) [Лейбніц (1692)].

Критерій — гр. *kriterion* (спосіб розв'язання).

Лемніската — гр. *lemniskos* (пов'язка, стрічка, бант) [Я. Бернуллі (1694)].

Лінійний — лінійна функція [Дюбуа-Реймон (1882)], лінійна операція [Адамар (1903)], лінійна комбінація [Гіл (1900)], лінійна незалежність [Діксон (1901)], лінійна залежність [Бохер (1900)], лінійний оператор [Мерфі (1837)], лінійне перетворення [Келі (1845)], лінійно залежний [Мур (1893)], лінійно незалежний [Келі (1847)].

Лінія — лат. *linea* (нитка).

Математика — гр. *mathema* (знання, наука) від *manthano* (навчатись, розмірковуючи).

Матриця — лат. *matrix* (матка, те, що породжує) [Сільвестр (1850), Келі (1855)], квадратна матриця [Келі (1858)].

Метод — гр. *methodos* (шлях за чимось, дослідження) [Платон, Арістотель].

Мінор — лат. *minor* (менший) [Сільвестр (1850)].

Модуль — лат. *modulus* (міра, величина). Модуль вектора, модуль комплексного числа [Арґан (1814)], порівняння за модулем [Ґаус (1801)].

Нормаль — лат. *normalis* (прямовисний).

Нуль — лат. *nullus* (ніякий).

Нумерація — лат. *numeratio* (лічба).

Октант — лат. *octans* (восьма частина).

Ордината — лат. *ordinatus* (упорядкований) [Ляйбніц (1694)].

Орієнтація — фр. *orientation* від лат. *oriens* (схід) [Штаудт, Коші (1826)], орієнтований [Стефанос (1883)].

Орт — гр. *orthos* (прямий) [Гевісайд (1892)].

Ортогональний — гр. *orthos* (прямий), *gonia* (кут) (прямокутний) [Евклід (IV—III ст. до н. е.)].

Парабола — гр. *parabole* (рівність, порівняння) [Аполоній Пергський (III ст. до н. е.)].

Паралелепіпед — гр. *parallelos* (рівнобіжний), *ipipedon* (площина).

Паралелограм — гр. *parallelogrammon* (утворений паралельними лініями).

Паралельний — гр. *parallelos* (рівнобіжний).

Параметр — гр. *parametreo* (міряю щось, порівнюючи з чимсь) [Мідорж (1631)].

Період — гр. *periodos* (обхід, шлях навколо, чергування).

Перпедикуляр — лат. *perpendicularum* (прямовис).

Полюс — лат. *polus* з *гр. polos* (вісь) [Монж (1801)].

Полярний — лат. *polaris.* Полярна система координат [Я. Бернуллі (1691), Ойлер (1748)]. Полярні координати [Ламе (1854)].

Прогресія — лат. *progressio* (рух уперед).

Проекція — лат. *projectio* (викидання вперед). Ортогональна проекція [Дюрер (1525)]. Стереографічна проекція [д'Еґійон (1613)].

Пропорція — лат. *proportio* (співрозмірність) [Капелла (V ст.), Боецій (VI ст.)].

Радіус — лат. *radius* (промінь) [Рамус (1569)].

Радіус-вектор [Монж (1805)].

Ранг — нім. *Rang* (степінь, розряд). Ранг матриці [Фробеніус (1879).]

Раціональний — лат. *rationalis* (відносний).

Роза (крива) — лат. *rosa* (троянда) [Ґранді (1723)].

Система — гр. *sistema* (утворення, складення).

Скаляр — гр. *scalaris* (східчастий). [Вієт, Гамільтон (1843)].

Спіраль — лат. *spira* (вигин, зігнута лінія) від гр. *speira* (звій).

Сфера — гр. *sfaira* (м'яч, куля) [Платон, Аристотель (V—IV ст. до н. е.)].

Схема — гр. *skhema* (вигляд, форма).

Таблиця —лат. *tabula* (дошка, табличка для писання).

Теорема — гр. *theorema* (видовище, вистава) від *theoreo* (розглядаю) [Архімед (III ст. до н. е.)].

Теорія — гр. *theoria* (розгляд, дослідження).

Термін — лат. *terminus* (межа, край).

Тор — лат. *torus* (підвищення, опуклість, подушка)

Транспозиція — лат. *transpono* (переставляю).

Трансцендентний — лат. *transcendens* (який переважає, який виходить за межі). Трансцендентна крива [Ляйбніц (1686)], трансцендентне число [Ойлер (1748)].

Факторіал — фр. *factorielle з* лат. factor (той, що робить) [Арбоґаст (1800)].

Фокус — лат. *focus* (вогнище) від араб. (місце запалювання) [Кеплер (1604)].

Форма — лат. *forma* (зовнішність, устрій). Канонічна форма [Hermite]. Квадратична форма [Ґаус (1801)].

Формула — лат. *formula* (маленька форма).

Характеристика — гр. *kharakter* (знак, прикмета). Характеристичне рівняння [Коші (1840)].

Циклоїда — гр. *kiklos* (коло), *eidos* (вигляд) (колоподібний) [Ґалілей (1599)].

Циліндр — гр. *kulindros* (валок, коток) від *kulindro* (обертаю, катаю) [Евклід, Аристарх (IV—III ст. до н. е.)].

Цифра — лат. *cifra* від араб. *сифр* (порожнє місце, нуль).

2. Походження деяких позначень

p, q, r	висловлювання [Пеано (1897), Расел (1903)]
$\overline{p}$	заперечення p [Пірс (1868)], $\neg p$ [Гейтінґ (1930)]
$\wedge$	знак кон’юкції [Гейтинґ (1930)]
$\vee$	знак диз’юнкції [Расел (1902—1903, 1908)]
$\Rightarrow$	знак імплікації [Бурбакі (1954)], $\to$ [Гільберт (1922)]
$\Leftrightarrow$	знак еквіваленції [Бурбакі (1954)], $\leftrightarrow$ [Бекер (1933)]
$\forall$	(від першої літери нім. *All-Zeichen* для всіх) [Ґенцен (1934)]
$\exists$	(від першої літери *existe* існувати) [Пеано (1897), Расел (1910)]
M	на позначення множини (від нім. *Menge*) [Кантор (1895)]
$\{\ldots\}$	вміст множини [Кантор (1895)]
$\varnothing$	(від норвезької літери ø) [Бурбакі (Вейль) (1939)]
$\in$	(від. лат. *est* бути) ε [Пеано (1889]
$\notin$	[Бурбакі (1939)]
$\cap, \cup$	[Пеано (1888)]
$\subset$	[Шредер, Пеано (1895)]
x, y, z	на позначення невідомих [Декарт (1637)]
$+, -$	знаки додавання, віднімання [рукопис (1481), Відман (1489)]
$\times$	знак множення [Оутред (1631)]
$\cdot$	знак множення [Ляйбніц (1698)]
$:$	знак ділення [Ляйбніц (1684)]
$\pm$	[В. Оутред (1631)]
a^n	показник степеня [Декарт (1637)], $n \in \mathbb{N}$
$a^{-n}, a^{p/q}$	[Ньютон (1676)]
$\sqrt{\ }$	знак квадратного кореня [Декарт (1637)]

$\sqrt[n]{\ }$	знак кореня [Ньютон (1707)]
$\dfrac{a}{b}$	знак ділення [Фібоначчі (1202)]
a/b	знак ділення [де Морґан]
$\%$	знак відсотка [(1650)]
$=$	знак рівності [Рекорд (1557)]
$\neq, >, <$	знаки нерівності [Гаріот (1631)]
$\leq, \geq$	знаки нерівності [Валіс (1670)]
$\equiv$	знак тотожності [Ріман (1857)]
$a \equiv b \pmod m$	рівність за модулем [Ґаус (1801)]
$(\ )$	круглі дужки [Штіфель (1544), Тарталья (1556)]
$[\ ]$	квадратні дужки [Бомбеллі (1550)]
$\{\ \}$	фігурні дужки [Вієт (1593)]
$\mathbb{N}$	(від. нім. *natürliche* натуральний) [Дедекінд (1888)]
$\mathbb{Z}$	(від. нім. *Zahlen* числа)]Бурбакі (1942)], $\overline{\mathfrak{Z}}$ [Ландау (1930)]
$\mathbb{Q}$	(від. нім. *Quotient* частка) [Бурбакі (1942)]
$\mathbb{R}$	(від нім. *reelle* дійсний) [Дедекінд (1872)]
$\mathbb{C}$	[Джекобсон (1939)]
$\lvert x \rvert$	знак модуля [Ваєрштрас (1841)]
$(a;b)$	позначення для інтервалу [Ковалевський (1909)]
$[a;b], [a;b), (a;b]$	позначення для проміжків [Ган (1921)]
∞	знак нескінченності [Валіс (1655)]
$\sup$	(від лат. *supremum* (найвищий))
$!$	знак факторіала [Крамп (1808)]
$!!$	знак подвійного факторіала [Шустер (1903)]
$\sum$	знак суми [Ойлер 1755]
$\prod$	знак добутку [Ґаус (1812)]
$x_1, \ldots, x_n$	індекси
A_m^n	кількість розміщень (від фр. *arrangment* розміщення) [Нетто (1904)]
C_m^n	кількість комбінацій (від. лат. *combinatio* поєднання) [Потс (1880)]
P_n	кількість перестановок (від. нім. *Permutationen* перестановка) [Потс (1880)]
$\lVert\ \rVert$	знак матриці [Келі (1843)]
$(\ \ )$	знак матриці [Бохер (1909)]
$[\ \ ]$	знак матриці [Ковалевскі (1909)]
$\lvert\ \ \rvert$	знак визначника [А. Келі (1841)]
Δ	позначення визначника [Якобі (1827)]
A^{-1}	позначення оберненої матриці [Келі]

$\{\ldots + a_{ij}x_j + \ldots = b_i$	сучасний запис СЛАР [Коші (1815), Бохер (1909)]
$\overline{AB}$	знак вектора [Арґан (1806)]
$\overline{a}$	знак вектора [Коші (1853)]
$\lvert\overline{a}\rvert$	довжина вектора [Лоренц (1903)]
$\overline{a} \cdot \overline{b}$	скалярний добуток [Ґібс, Вілсон (1902)]
$(\overline{a}, \overline{b})$	скалярний добуток [Генрічі, Тернер (1903), Ґанс (1905)]
$\overline{a} \times \overline{b}$	векторний добуток [Ґібс, Вілсон (1902)]
$[\overline{a}, \overline{b}]$	векторний добуток [Ґанс (1905)]
$\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$	позначення векторів ортонормованого базису [Гамільтон (1853)]
i	(від лат. *imaginarius* (уявний)) уявна одиниця [Ойлер (1777)]
π	[Джонсон (1706)]
$\angle$	знак кута [Ерігон (1634)]
$\parallel$	знак парелельності [Оутред (1677)]
$\perp$	знак перпендикулярності [Ерігон (1634)]

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ І РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Підручники та посібники

1. *Jurlewicz T.* Algebra liniowa 1 : Definicje, twierdzenia, wzory / T. Jurlewicz, Z. Skoczylas. — Wrocław : Oficyna Wydawnicza GiS, 2003. — 164 str.

2. *Lay D. C.* Linear algebra and its applications / D. C. Lay. — Addison Wesley, 2005. — 815 pp.

3. *Meyer C. D.* Matrix analysis and applied linear algebra / C. D. Meyer. — SIAM, 2000. — 727 pp.

4. *Барковський В. В.* Вища математика для економістів / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. — Київ : Центр учбової літератури, 2017. — 445 с.

5. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. — СПб. : Лань, 2015. — 448 с.

6. Владимирский Б. М. Математика. Общий курс / Б. М. Владимирский, А. Б. Горстко, Я. М. Ерусалимский. — СПб. : Лань, 2008. — 960 с.

7. Вся высшая математика / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — М. : Эдиториал УРСС, 2017. — Т. 1.— 328 с.

8. *Дубовик В. П.* Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. — Київ : Игнатекс-Україна, 2013. — 648 с.

9. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии / Н. В. Ефимов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 240 с.

10. *Ефимов Н. В.* Квадратичные формы и матрицы / Н. В. Ефимов. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 168 с.

11. *Жевняк Р. М.* Высшая математика : Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Дифференциальное исчисление / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн. : Вышэйшая школа, 1992. — 384 с.

12. *Ильин В. А.* Аналитическая геометрия / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М. : Физматлит, 2017. — 224 с.

13. *Ильин В. А.* Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 280 с.

14. *Канатников А. Н.* Аналитическая геометрия / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко ; под ред. В. С. Зарубина и А. П. Крищенко. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. — 387 с.

15. *Канатников А. Н.* Линейная алгебра / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко ; под ред. В. С. Зарубина и А. П. Крищенко. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. — 336 с.

16. *Морозова В. Д.* Введение в анализ / В. Д. Морозова ; под ред. В. С. Зарубина и А. П. Крищенко. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016. — 407 с.

17. *Крамор В. С.* Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В. С. Крамор. — М. : Оникс, 2008. — 416 с.

18. Лінійна алгебра та аналітична геометрія / В. В. Булдигін, І. В. Алєксеєва, В. О. Гайдей та ін. ; за заг. ред. В. В. Булдигіна. — Київ : ТВіМС, 2011. — 224 с. — Режим доступу : *http://ela.kpi.ua/handle/123456789/16193*

19. Лінійна алгебра та аналітична геометрія / Ю. К. Рудавський, П. П. Костробій, Х. П. Луник, Д. В. Уханська. — Львів : Львівська політехніка, 1999. — 262 с.

20. *Математика* : практична підготовка до ЗНО / О. М. Роганін, О. Ю. Максименко, О. О. Тарасенко, В. І. Вербицький. — Харків : ТОРСІНГ ПЛЮС, 2009. — 480 с.

21. *Нелін Є. П.* Алгебра в таблицях / Є. П. Нелін. — Харків : Гімназія, 2013. — 128 с.

22. *Овчинников П. П.* Вища математика : у 2 ч. Ч. 1 / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко ; за заг. ред. П. П. Овчинникова. — Київ : Техніка, 2003. — 600 с.

23. *Письменный Д.* Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д. Письменный. — М. : Айрис-Пресс, 2014. — 608 с.

24. *Роганін О. М.* Алгебра і початки аналізу в означеннях, таблицях і схемах / О. М. Роганін. — Харків : ТОРСІНГ ПЛЮС, 2007. — 112 с.

25. *Титаренко О. М.* Математика : Самовчитель майбутнього студента / О. М. Титаренко, О. М. Роганін. — Харків : ТОРСІНГ ПЛЮС, 2007. — 448 с.

26. *Шипачев В. С.* Курс высшей математики / В. С. Шипачев. — М. : Оникс, 2009. — 608 с.

27. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, Н. В. Попова, В. Б. Хейнман ; под ред. В. Т. Воднева. — Мн. : Вышэйшая школа, 1986. — 272 с.

Задачники та практикуми

28. *Jurlewicz T.* Algebra liniowa 1 : przykłady i zadania / T. Jurlewicz, Z. Skoczylas. — Wrocław: Oficyna Wydawnicza GiS, 2003. — 167 str.

29. Математика в технічному університеті : Практикум : у 4-х ч. Ч. 1 / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. — Київ : НТУУ «КПІ», 2014.

30. *Апатенок Р. Ф.* Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, В. Б. Хейнман ; под ред. В. Т. Воднева. — Мн. : Вышэйшая школа, 1990. — 286 с.

31. *Беклемишева Л. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Беклимишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров ; под. ред. Д. В. Беклемишева. — СПб. : Лань, 2008. — 496 с.

32. *Бортаковский А. С.* Аналитическая геометрия в примерах и задачах / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. — М. : Инфра-М, 2016. — 496 с.

33. Вища математика : Збірник задач / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін. — Київ : Ігнатекс-Україна, 2011. — 480 с.

34. *Герасимчук В. С.* Вища математика : Повний курс у прикладах і задачах : / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. — Київ : Книги України ЛТД, 2009. — Т. 1. — 577 с.

35. Збірник задач з аналітичної геометрії та векторної алгебри / В. В. Булдигін, В. А. Жук, С. О. Рущицька, В. В. Ясінський. — Київ : Вища шк., 1999. — 192 с.

36. *Каплан И. А.* Практические занятия по высшей математике. — Харьков : Изд-во Харьковского университета, 1971. — Ч. 1—3. — 947 с.

37. *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. — М. : Профессия, 2003. — 199 с.

38. *Резниченко С. В.* Аналитическая геометрия в примерах и задачах (Алгебраические главы) / С. В. Резниченко. — М. : Изд-во МФТИ, 2001. — 576 с.

39. Сборник задач по курсу высшей математики / Г. И. Кручкович, Н. И. Гутарина, П. Е. Дюбюк и др. : Под ред. Г. И. Кручковича. — М. : Высш. шк., 1973. — 576 с.

40. Сборник задач по математике для втузов : в 4 ч. / Под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. — М. : Физматлит, 2001—2003. — Ч. 1.

41. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии учеб. пособие / А. А. Бурдун, Е. А. Мурашко, М. М. Толкачев, А. С. Феденко. — Мн. : Універсітэцкае, 1999. — 302 с.

42. Студентські математичні олімпіади : Збірник задач / В. В. Булдигін, В. А. Кушніревич, О. С. Шкабара, В. В. Ясінський. — Київ : КПІ, 2002. — 175 с.

43. *Титаренко О. М.* Математика. 6611 задач : від найпростіших до олімпіадних / О. М. Титаренко. — Харків : ТОРСІНГ ПЛЮС, 2011. — 480 с.

44. *Цубербіллер О. М.* Задачі і вправи з аналітичної геометрії / О. М. Цубербіллер. — Київ : Державне видавництво технічної літератури УРСР, 1955. — 292 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

* Посилання на підпункт теоретичної частини відповідного розділу.

** Посилання на номер задачі відповідного практикуму.

ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК


[1]]


[2]


[3]


[4]

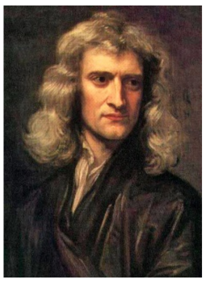

[5]


[6]


[8]


[9]


[10]


[11]


[12]


[13]

Зміст навчального комплексу

Навчальне видання

Алєксєєва *Ірина Віталіївна*
Гайдей *Віктор Олександрович*
Диховичний *Олександр Олександрович*
Федорова *Лідія Борисівна*

МАТЕМАТИКА В ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Том 1