І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей,
О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова

МАТЕМАТИКА В ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Том 2

Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як підручник для студентів технічних університетів

КОНДОР

Київ
2019

УДК 517(075.8)
М34

Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(*протокол № 7 від 25.06.2018 р.*)

Рецензенти:
В. В. Гавриленко — д-р фіз.-мат. наук, проф., завідувач кафедри інформаційних систем і технологій Національного транспортного університету,
П. В. Задерей — д-р фіз.-мат. наук, проф., завідувач кафедри вищої математики Київського національного університету технології та дизайну,
Б. В. Олійник — д-р фіз.-мат. наук, проф., завідувач кафедри математики Національного університету «Києво-Могилянська академія»

М34 Математика в технічному університеті : Підручник / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова ; за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. — Т. 2. — 504 с.
ISBN 978-617-7841-40-0

«Математика в технічному університеті» є навчальним комплексом, що складається з підручника та практикуму. Теоретична і практична частини комплексу відповідають навчальним програмам з вищої математики бакалавріату технічних університетів. Комплекс може бути застосований для забезпечення як денної форми навчання, так і дистанційної чи змішаної.

Для студентів технічних університетів.

УДК 517(075.8)

ISBN 978-617-7841-40-0

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

В основу навчального комплексу «Математика в технічному університеті» покладено навчальні матеріали курсу вищої математики, які пройшли вже багаторічну серйозну апробацію викладачами та студентами Київського політехнічного інституту, а саме: конспекти лекцій та практикуми для проведення практичних занять та організації самостійної роботи студентів, матеріали дистанційних курсів.

Теоретична і практична частина комплексу відповідає навчальним програмам з вищої математики всіх технічних спеціальностей КПІ ім. Ігоря Сікорського денної та заочної форм навчання. Комплекс може бути застосований для підтримки як денної форми навчання, так і дистанційної чи змішаної.

Гармонічне поєднання теоретичної частини (власне підручника) і практичної частини (практикуму — задачника з великою кількістю розв'язаних задач) уже можна вважати традицією написання навчальних видань для майбутніх інженерів чи економістів.

Другий том підручника складається з 4 розділів:

— функції однієї змінної;

— теорія границь;

— диференціальне числення функцій однієї змінної;

— диференціальне числення функцій кількох змінних.

Значна частина розділу «Функції однієї змінної» призначена для заповнення прогалин у шкільних знаннях з математики і може вивчатися студентами самостійно або в межах адаптаційного курсу математики.

Треба зазначити, що навколо порядку вивчення тем, рівня строгості викладання для нематематиків (жодним чином не применшуючи важливість ґрунтовної математичної підготовки для майбутнього інженера, економіста чи соціолога) триває безперервна дискусія. Опанування студентами математичних основ дає надію, що надалі вони зможуть поглибити свої математичні знання під вивчення спеціальних дисциплін або самостійно.

Певної незалежності порядку вивчення розділів у виданні досягнуто завдяки модульній побудові комплексу (весь матеріал розбито на порівняно невеликі розділи). Для викладу теорії свідомо вибрано *базовий* рівень, «...щоб математичний підручник для інженера не перетворився на маленьку копію університетського курсу». Поглиблювати свої знання з основного курсу математики або вивчати ті спеціальні розділи, які не ввійшли до навчального комплексу можна за виданнями вказаними у списку рекомендованої літератури.

Кожен розділ побудовано за такою схемою:

— вступ (анотація розділу, місце розділу в курсі вищої математики, перелік ключових понять, основні знання та вміння);

— основна частина (власне, виклад теоретичного матеріалу);

— запитання та завдання для самоконтролю;

— формули, твердження, алгоритми та схеми;

— практикуми;

— основні поняття та вміння.

Основу тексту підручника складають опис основних понять, формулювання означень та теорем, обговорення умов теорем, доведення основних теорем, ілюстративні приклади (змістовні приклади подано у практикумі). У тексті також уміщено велику кількість рисунків, що унаочнюють і ілюструють математичні поняття та твердження.

Нумерація означень, теорем та рисунків є наскрізною в середині розділу. Розділ розбито на теми (обсяг наближено відповідає обсягу однієї лекції).

Кожен розділ містить опорний конспект теоретичного матеріалу, доповнений схемами та алгоритмами розв'язання задач і має назву *«Формули, твердження, алгоритми»*.

Вивчення теорії з кожної теми підкріплюється опануванням відповідного *практикуму*, яке полягає в розбиранні розв'язаних начальних задач і розв'язання певної кількості задач під керівництвом викладача чи самостійно. До всіх задач практикумів подано відповіді. Нумерація задач наскрізна. Обсяг кожного практикуму наближено відповідає обсягу практичного заняття.

Задачі вміщено тільки полегшеного і базових рівнів. Збірники задач та вправ, які містять складніші задачі, подано в *списку рекомендованих джерел*.

У тексті практикумів використано такі позначення:

$[X.Y.Z.]$ — посилання на опорний конспект, а саме клітинку Z, у якій уміщено теоретичний факт або формулу, таблиці $X.Y.$ з розділу X;

X.Y.Z. — посилання на навчальну задачу **X.Y.Z** практикуму **X.Y.**

①,②,③,... — посилання в навчальній задачі на коментар, який уміщено після її розв'язання.

Опорні конспекти та практикуми також допоможуть під час розв'язання індивідуальних домашніх завдань, підготовці до контрольних робіт та іспитів, заповненні прогалин у попередніх знаннях.

Перелік *основних понять і вмінь, запитання та завдання для самоконтролю* допоможуть у підготовці до контрольних робіт, колоквіумів та іспиту.

Вивчати теоретичний матеріал на *підвищеному* рівні (зокрема ознайомитись з відсутніми в тексті доведеннями), а також ознайомитись з мотивацією запровадження математичних понять, їх історією та застосуваннями можна за *списком рекомендованих джерел.*

Для зручності користування підручником подано *предметний та іменний покажчики.* Предметний покажчик містить посилання на підпункти теоретичної частини розділу, де запроваджено чи розглянуто поняття і номери задач відповідного практикуму. Іменний покажчик містить посилання на підпункти теоретичної частини, де згадано прізвище видатного математика і коротку біографічну довідку про нього.

У *додатку А* подано інформацію про походження деяких термінів та позначень.

Постановку курсу вищої математики в технічному університеті та розроблення відповідного навчально-методичного забезпечення доцільно орієнтувати на досягнення трьох основних цілей:

— розвиток у студентів культури мислення (особливо його логічного та алгоритмічного аспектів);

— опанування математики як універсальної мови науки, необхідної для вивчення всіх подальших дисциплін;

— перетворення математики на робочий інструмент аналізу та дослідження математичних моделей.

Потреба ефективного керування самостійною роботою студентів спонукає до подальшого розвитку і ставить задачу створення та доповнення комплексу збірниками індивідуальних домашніх завдань, контрольних робіт, тестів різних форм.

Автори висловлюють вдячність рецензентам, колегам та студентам за корисні зауваження і поради, урахування яких дозволило покращити стиль викладу окремих розділів.

Зауваження й помічені огріхи та неточності можна надсилати на адреси:

alexir1@ukr.net,
victor144169@gmail.com,
a.dyx@ukr.net,
fedorova_lb@yahoo.com.ua

Автори

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

■	— завершення доведення
❍ та ●	— початок і завершення розв'язання прикладу
f^{-1}	— обернена функція до f *5.1.3*
$f \circ g$	— суперпозиція функцій f та g *5.1.4*
$\eta(x)$	— одинична функція Гевісайда *5.2.7*
$\operatorname{sgn} x$	— функція знак числа *5.2.7*
$[x]$	— ціла частина числа *5.2.7*
$\{x\}$	— дробова частина числа *5.2.7*
$\mathcal{D}(x)$	— функція Діріхле *5.2.7*
$P_n(x)$	— многочлен n-го степеня *5.3.4*
x^{α}	— степенева функція з показником α *5.4.1*
$\sqrt[n]{x}$	— корінь n-го степеня з x *5.4.1*
$\sin x, \cos x,$ $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$	— тригонометричні функції аргументу x *5.5.2*
$\arcsin x, \arccos x,$ $\operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$	— обернені тригонометричні функції аргументу x *5.5.2*
a^x	— показникова функція з основою a аргументу x *5.6.1*
e^x	— експонента числа аргументу x *5.6.1*
$\log_a x$	— логарифм за основою a аргументу x *5.6.4*
$\ln x$	— натуральний логарифм аргументу x *5.6.4*
$\lg x$	— десятковий логарифм аргументу x *5.6.4*
$\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x,$ $\operatorname{th} x, \operatorname{cth} x$	— гіперболічні синус, косинус, тангенс і котангенс аргументу x *5.6.5*
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	— границя функції f у точці x_0 *6.1.2*
$f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$	— границя функції f у точці x_0 зліва *6.1.3*
$f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$	— границя функції f у точці x_0 справа *6.1.3*
$\lim\limits_{n \to \infty} x_n$	— границя числової послідовності *6.2.2*

$\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \to x_0$	— нескінченно мала функція $\alpha(x)$ має вищий порядок мализни, ніж $\beta(x)$, коли $x \to x_0$ *6.3.1*
$\alpha(x) \asymp \beta(x)$, $x \to x_0$;	— нескінченно малі функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ мають однаковий порядок мализни, коли $x \to x_0$ *6.3.1*
$\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to x_0$;	— нескінченно малі функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ еквівалентні, коли $x \to x_0$ *6.3.1*
Δx	— приріст аргументу *6.4.1*
$\Delta f(x_0)$	— приріст функції f у точці x_0 *6.4.1*
$C[a;b]$	— множина функцій, які неперервні на відрізку $[a;b]$ *6.4.3*
$\max\limits_{[a;b]} f(x)$	— найбільше значення функції f на відрізку $[a;b]$ *6.4.3*
$\min\limits_{[a;b]} f(x)$	— найменше значення функції f на відрізку $[a;b]$ *6.4.3*
$f'(x_0), y'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}, \left.\dfrac{dy}{dx}\right\vert_{x=x_0}$	— похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 *7.1.1*
f', y'	— похідна (1-го порядку) функції $y = f(x)$ *7.1.1*
$f'_-(x_0)$ $(f'_+(x_0))$	— лівобічна (правобічна) похідна функції f у точці x_0 *7.1.1*
dx та df	— диференціали аргументу x та функції f *7.1.5*
$df(x_0)$	— диференціал функції f у точці x_0 *7.1.5*
$f''(x), f'''(x)$	— похідні 2-го та 3-го порядків функції f *7.2.1*
$f^{(n)}(x)$	— похідна n-го порядку функції f *7.2.1*
$C^n(a;b)$	— множина функцій, які мають неперервну n-ту похідну в інтервалі $(a;b)$ *7.2.1*
$d^n f$	— диференціал n-го порядку функції f *7.2.2*
$f(x) \ll g(x)$, $x \to x_0$	— функція $g(x)$ зростає непорівняно швидше, ніж функція $f(x)$, коли $x \to x_0$ *7.3.3*
$\tilde{P}_n(x)$	— многочлен Тейлора n-го порядку 7.4.1
$r_n(x)$	— залишковий член формули Тейлора n-го порядку *7.4.1*

$f \cup \ (f\cap)$	— функція опукла донизу (догори) *7.5.4*
$U_{\varepsilon}(M_0)$	— ε-окіл точки M_0 *8.1.1*
$\Delta_x f(M_0)$ та $\Delta_y f(M_0)$	— частинні прирости функції $z = f(x,y)$ за змінними x та y у точці M_0 *8.2.1*
$z'_x(M_0), f'_x(M_0)$, $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x}, \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x}$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right\vert_{M_0}, \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right\vert_{M_0}$	— частинна похідна функції $z = f(x,y)$ за змінною x у точці M_0 *8.2.1*
$z'_y(M_0), f'_y(M_0)$, $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial y}, \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial y}$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right\vert_{M_0}, \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right\vert_{M_0}$	— частинна похідна функції $z = f(x,y)$ за змінною x у точці M_0 *8.2.1*
u'_{x_i}, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$	— частинна похідна функції $u = f(x_1,\ldots,x_n)$ за змінною x_i *8.2.1*
$\Delta z(M_0), \Delta f(M_0)$	— повний приріст функції $z = f(M)$ *8.2.2*
$df(M_0), dz(M_0)$	— повний диференціал функції $z = f(M)$ у точці M_0 *8.2.3*
$d_x f(M_0)$ та $d_y f(M_0)$	— частинні диференціали функції $z = f(M)$ за змінними x та y у точці M_0 *8.2.3*
$f''_{xx}, z''_{xx}, f''_{yy}, z''_{yy}$ $f''_{xy}, z''_{xy}, f''_{yx}, z''_{yx}$	— частинні похідні функції $z = f(x,y)$ 2-го порядку *8.2.6*
$d^m u(M_0), d^m f(M_0)$	— диференціал m-го порядку функції $u = f(M)$ *8.2.7*
$\overline{r}'(t_0)$	— похідна вектор-функції $\overline{r} = \overline{r}(t)$ у точці t_0
$\dfrac{\partial u(M)}{\partial l}$	— похідна функції $u = f(x,y,z)$ за напрямом вектора $\overline{l}$ у точці M *8.4.1*
$\operatorname{grad} u(M)$	— градієнт функції $u = f(x,y,z)$ у точці M *8.4.2*
$\max\limits_{M \in \overline{D}} f(M)$ та $\min\limits_{M \in \overline{D}} f(M)$	— найбільше та найменше значення функції f в області $\overline{D}$ *8.5.4*

РОЗДІЛ 5. ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

У розділі систематизовано відомості про числові функції, зокрема про основні елементарні функції: многочлен, степеневу, показникову, логарифмічну, тригонометричні й обернені тригонометричні. Розглянуто основні характеристики поводження функцій. Подано методи побудови графіків елементарних функцій за допомогою геометричних перетворень.

Ключові поняття:

— *числова функція;*

— *графік функції;*

— *обернена функція;*

— *складена функція;*

— *елементарна функція;*

— *геометричне перетворення графіка функції.*

Опанувавши цей розділ Ви зможете:

— *знаходити область означення функції;*

— *визначати поводження функції за її графіком;*

— *знаходити обернену функцію;*

— *визначати структуру складеної функції;*

— *застосовувати формули перетворень числових функцій;*

— *ділити многочлени;*

— *розкладати многочлени на множники;*

— *будувати графіки елементарних функцій за допомогою геометричних перетворень.*

Попередні знання та вміння з розділів:

— *Елементарна алгебра;*

— *Множини й числа.*

Поданий матеріал використовуєтьcя в розділах:

— *Теорія границь;*

— *Диференціальне числення функцій однієї змінної;*

— *Інтегральне числення функцій однієї змінної.*

5.1. ЧИСЛОВІ ФУНКЦІЇ

Функція є основним об'єктом дослідження математичного аналізу — розділу математики, що об'єднує диференціальне та інтегральне числення функцій.

5.1.1. Основні поняття

1. Нехай задано числові множини $X \subset \mathbb{R}$ та $Y \subset \mathbb{R}$ і *дійсну функцію дійсного аргументу* (дійсної змінної) $f : X \to Y$, яка кожному значенню $x \in X$ увідповіднює єдине значення $y \in Y$.

Множину X називають *областю означення* функції f і позначають
$$D(f) = X;$$
число x — *аргументом* функції, число y, яке **відповідає** значенню x, — *значенням* функції і позначають $f(x)$.

Множину, яку позначають
$$E(f) = f(X) = \{f(x) \in Y \mid x \in X\},$$
називають *множиною значень* функції f.

Задаванню функції відповідає запис $y = f(x), x \in X$.

Отже, поняття функції містить три складові:

1) область означення $D(f) = X \subset \mathbb{R}$;

2) множину значень $E(f) = f(X) \subset \mathbb{R}$;

3) правило f, яке увідповіднює кожному значенню $x \in D(f)$ єдине значення $y = f(x) \in E(f)$.

Функцію f можна уявляти ще як «чорну скриньку», що перетворює аргумент x у значення $y = f(x)$ (рис. 5.1).

Рис. 5.1. Функція як чорна скринька

Приміром, якщо функцію $y = x^2$ задано на множині $D(f) = [-1;2]$, то множиною значень функції є $E(f) = [0;4]$ (рис. 5.2).

2. Множину точок площини Oxy з координатами $(x; f(x)), x \in X$, називають *графіком* Γ функції $y = f(x)$, означеної на множині $X \subset \mathbb{R}$.

Зазвичай графіком функції є деяка лінія; але, приміром, якщо $X = \mathbb{N}$, то графіком функції є набір ізольованих точок (рис. 5.3—5.5).

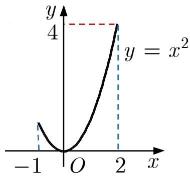


Рис. 5.2. Графік функції $y = x^2, x \in [-1; 2]$

Будь-яка вертикальна пряма перетинає графік функції не більше як в одній точці.

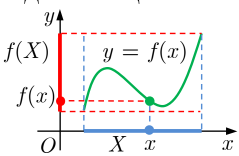


Рис. 5.3. Графік функції $y = f(x), x \in X$

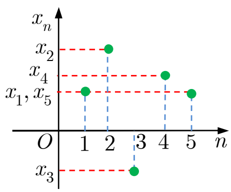


Рис. 5.4. Графік функції $y = f(n), n \in \mathbb{N}$

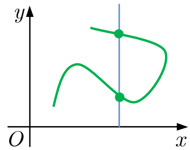


Рис. 5.5. Крива, що не є графіком функції

3. Функції $y = f_1(x), x \in X_1$, та $y = f_2(x), x \in X_2$, називають *рівними*, якщо вони мають одну й ту саму область означення $X = X_1 = X_2$ і для всіх $x \in X$ виконано рівність

$$f_1(x) = f_2(x).$$

Приміром, функції $y = |x|, x \in \mathbb{R}$, та $y = \sqrt{x^2}, x \in \mathbb{R}$, рівні, а функції $y = x^2, x \in \mathbb{R}$, та $y = x^2, x \in [0; 1]$, — ні.

Отже, не треба ототожнювати функцію з формулою, якою її задано.

4. Розгляньмо функцію $y = f(x)$ з областю означення $D(f)$ і функцію $u = g(x)$ з областю означення $D(g)$.

Функції, значення яких у кожній точці дорівнюють

$$f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

називають відповідно *сумою*, *різницею*, *добутком* і *часткою* функцій f та g.

Область означення суми, різниці та добутку функцій f та g є перетин $D(f) \cap D(g)$, а областю означення частки — множина

$$(D(f) \cap D(g)) \setminus \{x \in D(g) \mid g(x) = 0\}.$$

Приміром, сума функцій $y = \sqrt{x}, x \in [0; 1]$, та $u = \dfrac{1}{x}, x \in [-2; 0) \cup (0; 2]$, означена на множині $(0; 1]$.

5.1.2. Способи задавання функції

1. Аналітичний спосіб, коли функцію задають формулою (формулами) або співвідношенням.

Аналітично функцію $f : X \to Y$ можна задавати:

1) *явно* — одним аналітичним виразом $y = f(x), x \in X$, або кількома (*кусково-задана* функція)

$$y = \begin{cases} f_1(x), x \in X_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x), x \in X_n; \end{cases}$$

2) *неявно* — співвідношенням

$$F(x, y) = 0,$$

якщо $\forall x \in X : F(x, f(x)) = 0$;

3) *параметрично* — рівняннями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in T \subset \mathbb{R},$$

де залежність y від x задано не безпосередньо, а за допомогою *параметра* t.

Якщо функцію задано аналітично, але область означення не вказано, то під нею розуміють *область існування* функції (*природну область означення* функції) — множину всіх дійсних значень аргументу, для яких аналітичний вираз має зміст.

2. Графічний спосіб задавання функції, коли функцію задають її графіком у прямокутній декартовій системі координат; абсциси точок графіка належать області означення функції, а ординати рівні відповідним значенням функції.

3. Табличний спосіб задавання функції, коли функцію задають таблицею низки значень аргументу й відповідних значень функції.

4. Алгоритмічний (програмний) спосіб, коли функцію задають програмою на одній з мов програмування.

5. Описовий спосіб, коли функцію задають словесним описом відповідності f, що дозволяє за заданим $x \in D(f)$ визначити $y \in E(f)$.

Приміром, функцію задану явно $y = x^2$, можна задати:

— неявно співвідношенням

$$y - x^2 = 0;$$

— параметрично рівняннями:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2; \end{cases}$$

— графічно — її графік парабола (рис. 5.6);

— таблично (з деяким кроком)

x	...	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	...
y	...	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	...

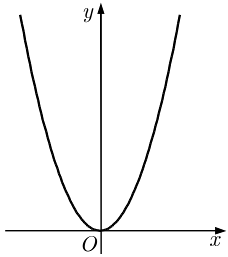


Рис. 5.6. Графік функції $y = x^2$

5.1.3. Обернена функція

1. Нехай задано функцію $y = f(x)$ з областю означення X і множиною значень Y. Функція f кожному значенню $x_0 \in X$ увідповіднює єдине значення $y_0 = f(x_0) \in Y$. При цьому може виявитись, що різним значенням аргументу x_1 та x_2 відповідає одне й те саме значення функції y_1. Додатково вимагаємо, щоб функція $y = f(x)$ різним значенням x увідповіднювала різні значення y. Тоді кожному значенню $y \in Y$ відповідатиме єдине значення $x \in X$, тобто можна означити функцію $x = \varphi(y)$ з областю означення Y і множиною значень X.

Цю функцію називають *оберненою* функцією до заданої функції f і позначають f^{-1}.

Отже, функція $x = f^{-1}(y)$ є оберненою до функції $y = f(x)$, якщо:

1) областю означення функції $x = f^{-1}(y)$ є множина значень функції $y = f(x)$;

2) множина значень функції $x = f^{-1}(y)$ є областю означення функції $y = f(x)$;

3) кожному значенню змінної $y \in Y$ відповідає єдине значення змінної $x \in X$, таке що, $f(x) = y$.

2. Виконано співвідношення:

$$f(f^{-1}(y)) = y;$$
$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

З них випливає, що кожну із двох функцій f і f^{-1} можна назвати прямою чи оберненою, тобто ці функції *взаємно обернені* (рис. 5.7).

3. Щоб знайти функцію $x = f^{-1}(y)$, обернену до функції $y = f(x)$, рівняння

$$f(x) = y$$

розв'язують щодо змінної x (якщо це можливо).

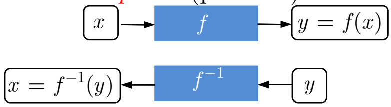


Рис. 5.7. Схеми для взаємно обернених функцій

Приміром, для функції $y = x^3, x \in \mathbb{R}$, існує обернена до неї функція $x = \sqrt[3]{y}, y \in \mathbb{R}$.

4. Оскільки кожна точка $(x;y)$ лінії $y = f(x)$ є одночасно точкою лінії $x = f^{-1}(y)$, то графіки взаємно обернених функцій збігаються.

Графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ та $y = f^{-1}(x)$ симетричні відносно прямої $y = x$ (бісектриси 1-го і 3-го координатних кутів) (рис. 5.8).

5. Функцію, до якої існує обернена функція, називають *оборотною*. З означення оберненої функції випливає, що функція f оборотна тоді й лише тоді, коли ця функція задає взаємно однозначну відповідність між множинами X та Y.

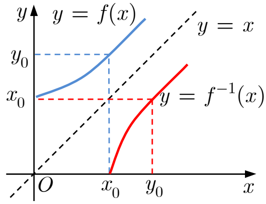


Рис. 5.8. Графіки взаємно обернених функцій

5.1.4. Складена функція

1. Нехай на множині D означено числову функцію $u = g(x)$ із множиною значень E і на множині E задано функцію $y = f(u)$ із множиною значень F.

Кожному значенню $x \in D$ увідповіднено (з допомогою *проміжної змінної* $u \in E$) одне, цілком певне, значення $y \in F$, тобто задано *складену функцію*

$$y = f(g(x)), x \in D$$

Таку складену функцію ще називають *суперпозицією* функцій g та f і пишуть

$$y = (f \circ g)(x), x \in D.$$

2. Складену функцію $y = f(g(x))$ (рис. 5.9) можна записати як ланцюжок рівностей:

$$y = f(u), u = g(x),$$

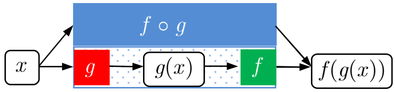


Рис. 5.9. Схема складеної функції

де функцію g називають *внутрішньою*, а f — *зовнішньою*.

Приміром, функція $y = \sin^2 x$ є суперпозицією функцій $u = \sin x$ та $y = u^2$.

5.1.5. Класифікація функцій

1. *Основними елементарними* функціями називають:

1) *сталу* функцію $f(x) = C, D(f) = \mathbb{R}$;

2) *степеневу* функцію $y = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, D(f) = (0;+\infty)$;

3) *показникову* функцію $y = a^x, a > 0, a \neq 1, D(f) = \mathbb{R}$;

4) *логарифмічну* функцію $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1, D(f) = (0;+\infty)$;

5) *тригонометричні* функції;

6) *обернені тригонометричні* функції.

Усі функції, одержані скінченною кількістю арифметичних дій над основними елементарними функціями та дійсними числами, а також їхні суперпозиції, утворюють *клас елементарних функцій.*

2. Нагадаймо, що *тригонометричними* функціями називають (п. 5.5.1):

1) *синус* $y = \sin x, D(f) = \mathbb{R}$;

2) *косинус* $y = \cos x, D(f) = \mathbb{R}$;

3) *тангенс* $y = \operatorname{tg} x, D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \middle| x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$;

4) *котангенс* $y = \operatorname{ctg} x, D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \middle| x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. *Оберненими тригонометричними* функціями називають (п. 5.5.5):

1) *арксинус* $y = \arcsin x, D(f) = [-1;1]$;

2) *арккосинус* $y = \arccos x, D(f) = [-1;1]$;

3) *арктангенс* $y = \operatorname{arctg} x, D(f) = \mathbb{R}$;

4) *арккотангенс* $y = \operatorname{arcctg} x, D(f) = \mathbb{R}$.

4. Многочлен

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

називають *цілою раціональною* функцією.

Функцію $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називають *дробово-раціональною* функцією.

Сукупність цілих раціональних і дробово-раціональних функцій утворює клас *раціональних функцій*.

Функцію, утворену скінченною кількістю суперпозицій і арифметичних дій над раціональними функціями й над степеневими функціями із дробовими показниками, і яка не є раціональною, називають *ірраціональною*.

Приміром, $y = \sqrt{x}$ — ірраціональна функція.

Раціональні й ірраціональні функції утворюють клас *алгебричних функцій*.

Елементарну функцію, яка не є алгебричною, називають *трансцендентною*.

До трансцендентних належать усі основні елементарні функції, крім степеневих з раціональними показниками, а також гіперболічні й обернені гіперболічні функції (п. 5.5.5).

5.2. ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОВОДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

Поводження функції та розташування її графіка описують за допомогою певних характеристик.

5.2.1. Нулі і знак функції на множині

1. Значення аргументу $x \in D(f)$, для якого значення функції f дорівнює нулю, називають *нулем* функції. Отже, нулі функції є коренями рівняння

$$f(x) = 0.$$

Приміром, функція
$$f(x) = (x-1)(x+2)$$
має два нулі $x_1 = 1$ та $x_2 = -2$.

2. Якщо для всіх значень $x \in (a;b)$, функція набуває значень того самого знаку (лише додатних або лише від'ємних), то інтервал $(a;b)$ називають *інтервалом знакосталості* функції (рис. 5.10).

В інтервалі, на якому функція додатна, графік її розташований над віссю Ox, а в інтервалі, на якому вона від'ємна, — під віссю Ox; у точках перетину з віссю абсцис функція дорівнює нулю.

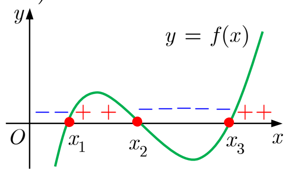


Рис. 5.10. Нулі та інтервали знакосталості функції

5.2.2. Парність і непарність функції

1. Означення 5.1 (парної функції).

Функцію f називають *парною*, якщо:

1) область її означення $D(f)$ симетрична відносно точки $x = 0$;

2) для кожного $x \in D(f)$ виконано рівність
$$f(-x) = f(x).$$

Приміром, функції $y = |x|, y = x^2$ та $y = \cos x$ є парними функціями, означеними на всій числовій осі.

Означення 5.2 (непарної функції).

Функцію f називають *непарною*, якщо:

1) область її означення $D(f)$ симетрична відносно $x = 0$;

2) для кожного $x \in D(f)$ виконано рівність
$$f(-x) = -f(x).$$

Приміром, функції $y = x, y = \dfrac{1}{x}$ та $y = x^3$ є непарними функціями.

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy (рис. 5.11), а непарної — відносно початку координат — точки O (рис. 5.12).

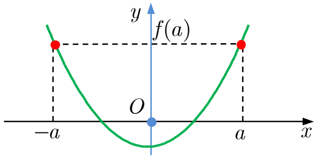


Рис. 5.11. Графік парної функції

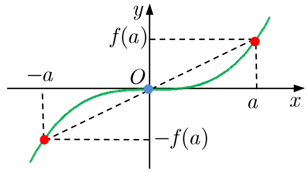


Рис. 5.12. Графік непарної функції

2. Парні й непарні функції мають такі властивості:

1) зміна знаку перед функцією не змінює її парності (непарності);

2) сума парних функцій є парною функцією;

3) сума непарних функцій є непарною функцією;

4) добуток будь-якої кількості парних функцій є парною функцією;

5) добуток парної функції на непарну є непарною функцією;

6) добуток парної кількості непарних функцій є парною функцією, а непарної кількості — непарною функцією.

5.2.3. Періодичність функції

1. Означення 5.3 (періодичної функції).

Функцію f називають *періодичною*, якщо існує число $T \neq 0$, таке, що:

1) для кожного x з області означення, $x + T$ також належать області означення;

2) виконано рівність

$$f(x + T) = f(x).$$

Число T називають *періодом* функції f. Якщо існує найменший додатний період функції, то його називають *основним періодом*.

Приміром, функція $y = \sin x$ періодична з основним періодом $T = 2\pi$, а функція-стала $f(x) = c = \text{const}, D(f) = \mathbb{R}$, періодична, але основного періоду не має.

Якщо T — основний період функції f, то графік такої функції «повторюється» з періодичністю T (рис. 5.13).

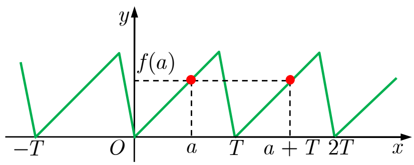


Рис. 5.13. Графік періодичної функції

2. Періодичні функції мають такі властивості:

1) якщо T — період функції f, то її періодами також є числа $mT, m \in \mathbb{Z}$;

2) якщо функція $y = f(x)$ періодична з періодом T, то функція $y = f(\omega x)$ — періодична з періодом $\dfrac{T}{\omega}$.

5.2.4. Монотонність функції

1. Означення 5.4 (зростаючої (спадної) функції).

Функцію f називають *зростаючою* (*спадною*) на множині $X \subset D(f)$, якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає більше (менше) значення функції (рис. 5.14—5.15) і позначають $f \nearrow$ $(f \searrow)$, тобто для будь-яких значень $x_1, x_2 \in X$ з нерівності

$$x_1 < x_2$$

випливає нерівність

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

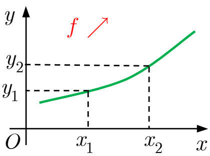


Рис. 5.14. Графік зростаючої функції

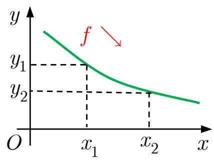


Рис. 5.15. Графік спадної функції

Означення 5.5 (неспадної (незростаючої) функції).

Функцію f називають *неспадною* (*незростаючою*) на множині $X \subset D(f)$, якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає не менше (не більше) значення функції (рис. 5.16—5.17), тобто для будь-яких значень $x_1, x_2 \in X$ з нерівності

$$x_1 < x_2$$

випливає нерівність

$$f(x_1) \le f(x_2) \quad (f(x_1) \ge f(x_2)).$$

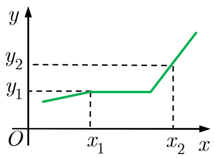


Рис. 5.16. Графік неспадної функції

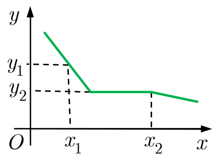


Рис. 5.17. Графік незростаючої функції

2. Зростаючі, спадні, неспадні та незростаючі функції називають *монотонними*; зростаючі та спадні — *строго монотонними*.

Стала функція $y = c$ є незростаючою й неспадною водночас.

3. Теорема 5.1 (достатня умова оборотності).

Будь-яка строго монотонна функція має обернену функцію. При цьому, якщо пряма функція строго зростає (спадає), то обернена їй функція також строго зростає (спадає).

Зауважмо, що монотонність функції є лише достатньою умовою її оборотності, тобто існують немонотонні оборотні функції.

5.2.5. Опуклість функції

1. Означення 5.6 (опуклої донизу (догори) функції).

Функцію f називають *опуклою донизу* (*догори*) на множині $X \subset D(f)$, якщо для будь-яких значень $x_1, x_2 \in X$ з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що хорда AB, яка з'єднує точки $A(x_1; f(x_1))$ та $B(x_2; f(x_2))$, розташована не нижче (не вище) за графік функції, і позначають $f\cup$ $(f\cap)$ (рис. 5.18—5.19).

Опуклу донизу функцію ще називають *угнутою*, а опуклу догори — *опуклою*.

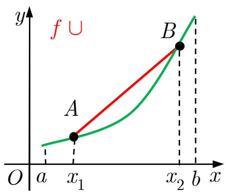


Рис. 5.18. Графік функції опуклої донизу (угнутої)

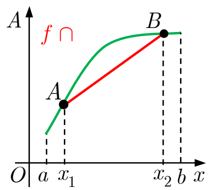


Рис. 5.19. Графік функції опуклої догори (опуклої)

2. Приміром, функція $y = x^2$ опукла донизу на $\mathbb{R}$, функція $y = x^3$ опукла донизу на множині $[0;+\infty)$. Функція $y = 2 - x^2$ опукла догори на $\mathbb{R}$, а функція $y = x^3$ — опукла догори на множині $(-\infty;0]$.

5.2.6. Обмеженість функції

1. Означення 5.7 (обмеженої зверху (знизу) функції).

Функцію f називають *обмеженою зверху* (*знизу*) на множині $X \subset D(f)$ (рис. 5.20—5.21), якщо існує таке число $M \in \mathbb{R}$ $(m \in \mathbb{R})$, що для будь-яких значень аргументу $x \in X$ виконано умову

$$f(x) \leq M \ (m \leq f(x)).$$

Означення 5.8 (обмеженої функції).

Функцію f називають *обмеженою* на множині $X \subset D(f)$, якщо існує таке число $C > 0$, що для будь-яких значень аргументу $x \in X$ виконано умову

$$\left|f(x)\right| \leq C.$$

Геометрично обмеженість функції числом C означає, що її графік розташований у смузі завширшки $2C$ (рис. 5.22).

Обмежена функція є обмеженою зверху і знизу.

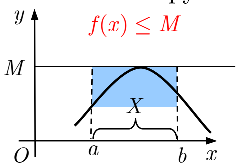


Рис. 5.20. Графік функції, обмеженої зверху на множині X

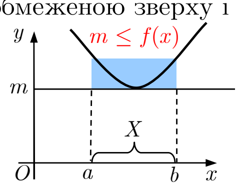


Рис. 5.21. Графік функції, обмеженої знизу на множині X

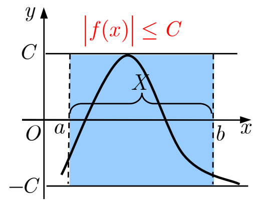


Рис. 5.22. Графік функції, обмеженої на множині X

2. Приміром, 1) функція $y = x^2$ є обмеженою знизу на своїй природній області означення $\mathbb{R}$ і необмеженою зверху, оскільки $0 \leq x^2$;

2) функція $y = 2 - x^2$ обмежена зверху й необмежена знизу на $\mathbb{R}$, оскільки $2 - x^2 \leq 2$;

3) функція $y = \sin x$ є обмеженою на $\mathbb{R}$, оскільки $\left|\sin x\right| \leq 1$.

3. Функцію f називають *необмеженою зверху* (*знизу*) на множині $X \subset D(f)$, якщо для будь-якого числа M існує число $x \in X$ таке, що

$$f(x) > M \ \ (f(x) < M).$$

4. Приміром, функція $y = \dfrac{1}{x}$ необмежена зверху на множині $(0;1)$, оскільки для будь-якого $M > 0$ існує таке число $x \in (0;1)$ (зокрема, $x = \dfrac{1}{M+1}\bigg)$, що $f\left(\dfrac{1}{1+M}\right) = 1 + M > M$.

Якщо $M \leq 0$, то за число x можна взяти будь-яке число з інтервалу $(0;1)$.

5.2.7. Деякі неелементарні функції

У математиці окрім елементарних функцій розглядають і неелементарні функції. Подаймо деякі.

1. *Одинична* функція *Гевісайда* (рис. 5.23)

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \{0{,}1\}$.

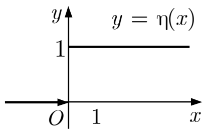


Рис. 5.23. Графік одиничної функції Гевісайда

2. Функція *знак числа* (рис. 5.24)

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \{-1{,}0{,}1\}$. Функція непарна.

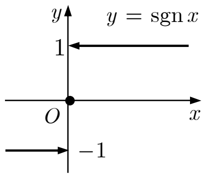


Рис. 5.24. Графік функції знак числа

3. *Ціла частина числа* (рис. 5.25)

$$[x] = \begin{cases} x, & x = n \in \mathbb{Z}, \\ n, & n < x < n+1, \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \mathbb{Z}$. Функція неспадна.

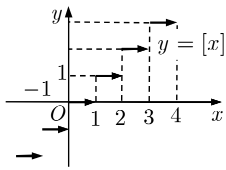


Рис. 5.25. Графік цілої частини числа

4. *Дробова частина числа* (рис. 5.26)

$$\{x\} = x - [x]$$

$D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = [0;1)$. Функція періодична з періодом $T = 1$.

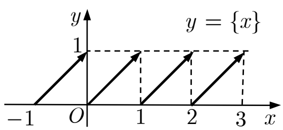


Рис. 5.26. Графік дробової частини числа

5. Функція *Діріхле*

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \{0;1\}$. Функція періодична; періодом є будь-яке раціональне число.

6. Зауважмо, що функція $|x|$, яку теж означують двома аналітичними виразами є елементарною, оскільки $|x| = \sqrt{x^2}$.

5.3. МНОГОЧЛЕНИ

Систематизуймо відомості про многочлени та їх властивості як алгебричні так і функціональні.

5.3.1. Стала функція

1. Функцію

$$y = b,$$

де b — деяке дійсне число, називають *сталою*.

Область означення $D(f) = \mathbb{R}$, множина значень $E(f) = \{b\}$.

Стала функція є парною і періодичною. Стала функція $y = 0$ є водночас і парною, і непарною.

2. Графіком сталої функції $y = b$ є пряма, паралельна осі абсцис, що проходить через точку $(0;b)$ (рис. 5.27).

Зокрема, графіком функції $y = 0$ є вісь абсцис Ox.

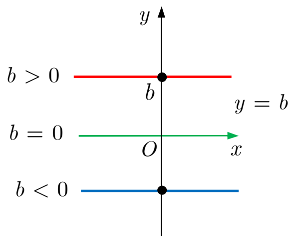


Рис. 5.27. Графік функції $y = b$

5.3.2. Лінійна функція

1. Функцію

$$y = ax + b,$$

де a та b є деякі числа, називають *лінійною*.

Якщо $a = 0$, то маємо сталу функцію $y = b$, а якщо $b = 0$, то дістаємо пряму пропорційність $y = ax$.

2. Далі розгляньмо лінійну функцію

$$y = ax + b, \text{ коли } a \neq 0, b \neq 0.$$

Область означення функції $D(f) = \mathbb{R}$, множина значень функції $E(f) = \mathbb{R}$.

Для $a > 0$ функція зростає на всій числовій прямій, для $a < 0$ — спадає на всій числовій прямій.

3. Графіком лінійної функції $y = ax + b$, є пряма (рис. 5.28), кутовий коефіцієнт якої a дорівнює тангенсу кута α, що утворює пряма з додатним напрямом осі Ox.

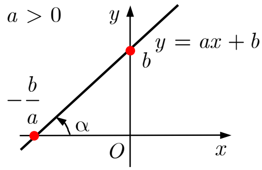


Рис. 5.28. Графік функції $y = ax + b$

4. Лінійний многочлен $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ має єдиний корінь

$$x = -\frac{b}{a}.$$

5. Функцію

$$y = ax,$$

де $a \neq 0$, називають *прямою пропорційністю*. Число a називають *коефіцієнтом пропорційності*.

Пряма пропорційність є непарною функцією.

Якщо $a > 0$, то функція $y = ax$ зростає, а якщо $a < 0$, то функція $y = ax$ спадає на всій числовій осі.

Графіком прямої пропорційності $y = ax$ є пряма, що проходить через початок координат.

5.3.3. Квадратична функція

1. Розгляньмо *квадратичну функцію* (*квадратичний тричлен*)

$$y = ax^2 + bx + c,$$

де a, b, c — сталі, причому $a \neq 0$.

Приміром, функції $y = -3x^2 + 7x + 1, y = \sqrt{2}x^2 + 5, y = -x^2$ — квадратичні.

2. Перетворімо квадратичну функцію $y = ax^2 + bx + c$ так:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x\cdot\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a},$$

де величину $D = b^2 - 4ac$ називають *дискримінантом*.

Перетворення квадратичного многочлена $y = ax^2 + bx + c$ до вигляду $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$ називають *виділенням повного квадрату*.

Приміром,

$$x^2 + 4x + 7 = (x^2 + 2\cdot x\cdot 2 + 2^2) + 7 - 2^2 =$$
$$= (x+2)^2 + 3;$$
$$3x^2 - 4x + 1 = 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\right) =$$
$$= 3\left(x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{1}{3} - \frac{4}{9}\right) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}.$$

3. Корені квадратичного многочлена. Кількість і природа коренів квадратичного многочлена з дійсними коефіцієнтами залежить від значення дискримінанту.

Квадратичний многочлен $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ для:

1) $D > 0$ має два дійсних корені

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

2) $D = 0$ має двократний дійсний корінь

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a};$$

3) $D < 0$ не має дійсних коренів, має два комплексно спряжених корені

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}, x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}.$$

4. Якщо x_1 та x_2 — корені многочлена $ax^2 + bx + c$, то правдивий такий *розклад* квадратичного многочлена *на множники*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

5. Для коренів x_1 та x_2 квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ правдива **теорема Вієта**:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\ x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

6. Графіком квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$ є парабола (рис. 5.29) з віссю симетрії $x=-\frac{b}{2a}$ і вершиною $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{D}{4a}\right)$.

7. Квадратична функція $y=ax^2$ має властивості:

1) область означення $D(f)=\mathbb{R}$;

2) множина значень $E(y)=[0;+\infty)$ для $a>0$ та $E(y)=(-\infty;0]$ для $a<0$;

3) є парною;

4) графіком є парабола, яка симетрична відносно осі Oy, з вершиною в точці O.

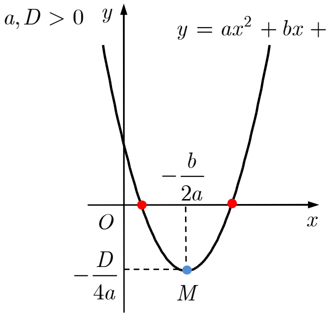


Рис. 5.29. Графік функції $y=ax^2+bx+c$

5.3.4. Многочлен n-го степеня

1. Функцію

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

де n — натуральне число, $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n$ — довільні сталі, причому $a_0\neq 0$, називають *многочленом* n-го степеня.

Дійсні чи комплексні числа $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n$ називають *коефіцієнтами* многочлена; a_0x^n — *старшим членом* многочлена; a_0 — коефіцієнтом при старшому члені; a_n — *вільним* членом многочлена.

Аргумент многочлена x може бути дійсним чи комплексним.

Будь-яке число розглядають як многочлен. При цьому число, яке не дорівнює нулю, уважають многочленом нульового степеня, а число 0 — *нуль-многочленом*. Нуль-многочлен не має степеня.

Приміром, $P_6(x)=7x^6-3x^3+3x+2$ — многочлен 6-го степеня, у якому $7x^6$ — старший член, 7 — коефіцієнт при старшому члені, 2 — вільний член многочлена.

2. Многочлен нульового степеня $P_0(x) = a_0$ називають *сталою*, многочлен 1-го степеня $P_1(x) = a_0x + a_1$ називають *лінійним* (лінійною функцією), многочлен 2-го степеня $P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ називають *квадратичним* (квадратичною функцією).

5.3.5. Ділення многочлена на многочлен

1. Сума, різниця та добуток двох многочленів є многочленом. Степінь суми многочленів не перевищує найбільшого із степенів доданків. Степінь добутку многочленів, відмінних від нуль-многочлена, дорівнює сумі степенів множників.

2. Розділити многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, який не є нуль-многочленом, означає знайти такі многочлени $S(x)$ та $R(x)$, щоб справджувалась тотожність

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x),$$

де степінь $R(x)$ менший від степеня $Q(x)$ або $R(x)$ є нуль-многочленом,

За аналогією з діленням чисел $P(x)$ називають *діленим*, $Q(x)$ — *дільником*, $S(x)$ — *часткою*, $R(x)$ — *остачею*.

Таке ділення можливе (й однозначне), якщо степінь многочлена-діленого не нижча від степеня многочлена-дільника.

Якщо $R(x)$ є нуль-многочленом, тобто якщо $P(x) = Q(x)S(x)$, то кажуть, що $P(x)$ *ділиться* на $Q(x)$ без остачі.

3. Приміром, після ділення $P(x) = x^3 + 2$ на $Q(x) = x + 1$ дістаємо частку $S(x) = x^2 - x + 1$ і остачу $R(x) = 1$, оскільки,

$$x^3 + 2 = (x + 1)(x^2 - x + 1) + 1.$$

4. У загальному випадку многочлен ділять на многочлен стовпчиком. Під час ділення многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

на $(x - \alpha)$ дістаємо многочлен

$$Q_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

з остачею $r = b_n$.

При цьому коефіцієнти одержаного многочлена справджують рекурентні співвідношення

$$b_0 = a_0;$$
$$b_1 = a_1 + \alpha b_0;$$
$$\ldots$$
$$b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2};$$
$$r = a_n + \alpha b_{n-1}$$

Ділення можна записувати у таблицю, яку називають *схемою Горнера*:

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ & & + & + & + & + & + \\ & & \alpha b_0 & \alpha b_1 & \ldots & \alpha b_{n-2} & \alpha b_{n-1} \\ \hline \alpha & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & r \end{array}$$

5.3.6. Корені многочлена

1. *Коренем* многочлена $P_n(x)$ називають таке значення x, для якого многочлен дорівнює нулю.

Поділімо многочлен $P_n(x)$ на многочлен $(x-a)$ з остачею:

$$P_n(x) = (x-a)S_{n-1} + R,$$

де остача R є сталою.

Підставляючи в одержану рівність $x = a$, маємо

$$P_n(a) = R.$$

Теорема 5.2 (Безу).

Число a є коренем многочлена $P_n(x)$ тоді й лише тоді, коли цей многочлен ділиться на $(x-a)$, тобто правдива рівність

$$P_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x).$$

2. Якщо існує число $k \in \mathbb{N}, 1 \le k \le n$, і многочлен $Q_{n-k}(x)$, такий, що для всіх x правдива рівність

$$P_n(x) = (x-a)^k Q_{n-k}(x),$$

де $Q_{n-k}(a) \ne 0$, то число a називають *коренем кратності* k многочлена $P_n(x)$. Якщо $k = 1$, то корінь називають *однократним* або *простим*.

Теорема 5.3 (основна теорема алгебри).

Кожний многочлен ненульового степеня має хоча б один комплексний корінь.

3. Якщо многочлен n-го степеня

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n, a_0 \neq 0,$$

має n коренів $x_1, x_2, ..., x_n$ (деякі з них можуть повторюватись), то його можна записати як добуток

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)....(x - x_n).$$

Приміром, якщо

$$P(x) = 3(x + 2)^2 x^3 (x - 1),$$

то $x = -2$ є двократним коренем, $x = 0$ — трикратним, а $x = 1$ — однократним (простим).

4. Многочлен степеня n може мати не більше як n коренів. Многочлен степеня n має рівно n коренів, якщо кожен корінь рахувати стільки разів, скільки його кратність.

5. Нехай задано многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n, a_0 \neq 0,$$

і числа $x_1, x_2, ..., x_n$ — його корені (з урахуванням кратності).

Теорема 5.4 (Вієта).

Для коренів многочлена правдиві формули Вієта:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0},$$

....

$$x_1x_2...x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

Приміром, для коренів многочлена

$$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

правдиві такі співвідношення:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2,$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -1,$$

$$x_1x_2x_3 = -2.$$

5.3.7. Тотожна рівність многочленів

1. Тотожна рівність многочленів $P_n(x)$ та $Q_m(x)$ означає, що вони набувають рівних значень для всіх значень аргументу, тобто

$$P_n(x) \equiv Q_m(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : P_n(x) = Q_m(x).$$

2. Якщо два многочлени тотожно рівні, то вони однакового степеня і мають рівні коефіцієнти при однакових степенях.

Приміром, якщо $ax^2 + bx + c \equiv 2x^2 - 3$, то $a = 2, b = 0, c = -3$.

3. Якщо многочлен $P_n(x)$ тотожно рівний нулю, то всі його коефіцієнти дорівнюють нулю.

4. Якщо значення двох многочленів $P_n(x)$ та $Q_n(x)$ збігаються для $(n+1)$ різних значень аргументу x, то ці многочлени тотожно рівні.

5.3.8. Многочлени з дійсними коефіцієнтами

1. Якщо многочлен $P_n(x)$ із дійсними коефіцієнтами має комплексний корінь $x = \alpha + i\beta$, то він має і спряжений корінь $x = \alpha - i\beta$.

Отже, у розклад многочлена комплексні корені входять спряженими парами. Перемноживши лінійні множники

$$(x - (\alpha + i\beta))(x - (\alpha - i\beta)),$$

дістаємо квадратичний тричлен з дійсними коефіцієнтами:

$$(x - (\alpha + i\beta))(x - (\alpha - i\beta)) = ((x - \alpha) - i\beta)((x - \alpha) + i\beta) =$$
$$= (x - \alpha)^2 - (ib)^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = x^2 + px + q.$$

Теорема 5.5 (про розклад многочлена на множники).

Будь-який многочлен з дійсними коефіцієнтами розкладається на лінійні та квадратичні множники з дійсними коефіцієнтами, тобто

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\ldots(x - x_r)^{k_r} \times$$
$$\times(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}\ldots(x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}.$$

При цьому $k_1 + k_2 + \ldots + k_r + 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_m) = n$, усі квадратні тричлени не мають дійсних коренів.

Приміром,

$$x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4).$$

2. Многочлен непарного степеня з дійсними коефіцієнтами має принаймні один дійсний корінь.

3. Цілі корені многочлена з цілими коефіцієнтами є дільниками його вільного члена.

5.4. СТЕПЕНЕВІ ФУНКЦІЇ

Систематизуймо відомості про степеневі функції та їхні графіки.

5.4.1. Степені дійсного числа

1. Нехай a — дійсне число, а n — натуральне число.

n-м степенем числа a називають добуток n множників, кожен з яких дорівнює a, тобто

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}$$

Для $n = 1$ маємо

$$a^1 = a.$$

Число a називають *основою* степеня, n — *показником*.

За означенням покладають: якщо $a \neq 0$, то

$$a^0 = 1;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, n \in \mathbb{N}.$$

2. Будь-яке додатне число a можна записати *стандартним* чином

$$a_1 \cdot 10^n,$$

де $1 \le a_1 < 10, n$ — ціле число, яке називають *порядком* числа a.

3. *Коренем* n-го степеня (n — натуральне число) з числа a називають таке число b, n-й степінь якого дорівнює a, і позначають

$$\sqrt[n]{a} = b.$$

З означення випливає, що коли $\sqrt[n]{a} = b$, то $b^n = a$.

Корінь 2-го степеня (квадратний корінь) із числа a позначають символом

$$\sqrt{a}.$$

4. Якщо $a > 0$, то $\sqrt[n]{a}$ має єдине додатне значення.

Якщо n — парне натуральне число і $a > 0$, то $\sqrt[n]{a}$ має рівно два дійсних значення, які є протилежними числами.

Якщо n — парне натуральне число і $a < 0$, то $\sqrt[n]{a}$ не має дійсних значень.

Якщо n — непарне натуральне число і $a \neq 0$, то $\sqrt[n]{a}$ має єдине дійсне значення (додатне для $a > 0$ і від'ємне для $a < 0$).

Для довільного натурального n $\sqrt[n]{0}$ має єдине значення, що дорівнює 0.

5. Невід'ємне значення кореня називають *арифметичним* значенням.

Якщо a — дійсне число, символом $\sqrt[n]{a}$, де n — парне натуральне число і $a \geq 0$, позначатимемо арифметичне значення кореня, а якщо n — непарне натуральне число, то єдине дійсне значення кореня (арифметичне для $a \geq 0$ і неарифметичне для $a \leq 0$).

Приміром, унаслідок такої домовленості

$$\sqrt{25} = 5,\ \sqrt[3]{-8} = -2.$$

6. За означенням покладають: якщо $a \geq 0$ і m та n — натуральні числа, то

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m};$$

якщо $a > 0$, то

$$a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}.$$

Нецілий степінь для від'ємного числа не означують.

Приміром,

$$8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2;\ 25^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}.$$

Зауважмо, що

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & n = 2k, \\ a, & n = 2k+1, \end{cases} k \in \mathbb{N}.$$

7. З'ясуймо, який зміст має запис a^α, де a — додатне дійсне число, а α — ірраціональне число.

Якщо $a = 1$, то покладають $1^\alpha = 1$.

Нехай $a > 1$. Візьмімо будь-яке раціональне число $r_1 < \alpha$ і будь-яке раціональне число $r_2 > \alpha$. Тоді

$$r_1 < r_2 \text{ і } a^{r_1} < a^{r_2}.$$

У цьому разі під a^{α} розуміють таке число, яке міститься між a^{r_1} та a^{r_2} для будь-яких раціональних чисел r_1 та r_2, таких, що $r_1 < \alpha < r_2$. Доведено, що таке число існує і єдине для будь-якого $a > 1$ і будь-якого ірраціонального α.

Нехай $0 < a < 1$. Візьмімо будь-яке раціональне число $r_1 < \alpha$ і будь-яке раціональне число $r_2 > \alpha$. Тоді

$$r_1 < r_2 \text{ і } a^{r_1} > a^{r_2}.$$

У цьому разі під a^{α} розуміють таке число, яке міститься між a^{r_1} і a^{r_2} для будь-яких раціональних чисел r_1 та r_2, таких, що $r_1 < \alpha < r_2$. Доведено, що таке число існує і єдине для будь-якого $a \in (0;1)$ і будь-якого ірраціонального α.

8. Приміром, оскільки

$$1 < \sqrt{2} < 2;\ 1,4 < \sqrt{2} < 1,5;$$
$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42;\ 1,414 < \sqrt{2} < 1,415;\ldots,$$

то маємо,

$$3^1 < 3^{\sqrt{2}} < 3^2;\ 3^{1,4} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,5};$$
$$3^{1,41} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,42};\ 3^{1,414} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,415};\ldots.$$

Можна довести, що існує єдине число, яке справджує всі ці нерівності. Це число й беруть за значення $3^{\sqrt{2}}$.

9. Степені від'ємних чисел з ірраціональними показниками не означують.

Приміром, вирази $(-2)^{\sqrt{3}}, (-0,3)^{\pi}$ не означені.

10. Для будь-яких $a > 0, b > 0$ і x, y **піднесення до степеня** має властивості:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2) $a^x : a^y = a^{x-y}$;
3) $(a^x)^y = a^{xy}$;
4) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$;
5) $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$;
6) $\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$.

5.4.2. Степенева функція

1. Функцію

$$y = x^{\alpha},$$

де α — дійсне число, відмінне від нуля, називають *степеневою* функцією.

Область означення $D(f) = (0;+\infty)$, множина значень $E(f) = (0;+\infty)$.

Для деяких α множини $D(f)$ та $E(f)$ можуть бути ширшими.

Степенева функція справджує функціональне рівняння

$$\boxed{f(x)f(y) = f(xy).}$$

2. Нехай $\alpha = 2n-1, n \in \mathbb{N}, y = x^{2n-1}$. Тоді $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна, зростає на $\mathbb{R}$. Графік — парабола порядку $2n-1$ (пряма, коли $n=1$) (рис. 5.30).

3. Нехай $\alpha = 2n, n \in \mathbb{N}, y = x^{2n}$. Тоді $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = [0;+\infty)$.

Функція парна. Графік — парабола порядку $2n$ (рис. 5.31).

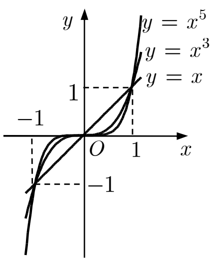


Рис. 5.30. Графіки функцій $y = x^{2n-1}$

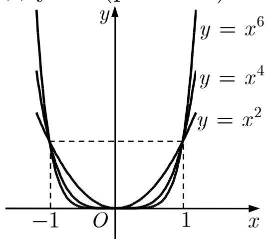


Рис. 5.31. Графіки функцій $y = x^{2n}$

4. Нехай $\alpha = -2n+1, n \in \mathbb{N}, y = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$. Тоді $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Функція непарна, спадає на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Графік функції має вертикальну асимптоту $x=0$ і горизонтальну асимптоту $y=0$ (рис. 5.32).

5. Нехай $\alpha = -2n, n \in \mathbb{N}, y = \dfrac{1}{x^{2n}}$. Тоді $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $E(f) = (0;+\infty)$. Функція парна. Графік функції має вертикальну асимптоту $x=0$ та горизонтальну асимптоту $y=0$ (рис. 5.33).

6. Нехай $\alpha = \dfrac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}, y = \sqrt[2n]{x}$. $D(f) = [0;+\infty)$, $E(f) = [0;+\infty)$. Функція зростає на $[0;+\infty)$ (рис. 5.34).

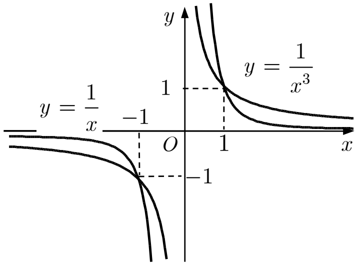


Рис. 5.32. Графіки функцій $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$

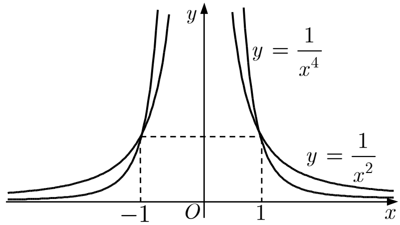


Рис. 5.33. Графіки функцій $y = \frac{1}{x^{2n}}$

7. Нехай $\alpha = \frac{1}{2n-1}, n \in \mathbb{N}, y = \sqrt[2n-1]{x}$. $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна. Зростає на $\mathbb{R}$ (рис. 5.35).

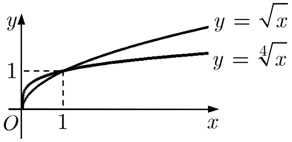


Рис. 5.34. Графіки функцій $y = \sqrt[2n]{x}$

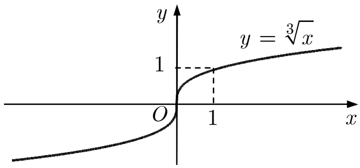


Рис. 5.35. Графік функцій $y = \sqrt[3]{x}$

8. Розгляньмо, приміром, степеневі функції з ірраціональними показниками $y = x^{\sqrt{2}}$ (рис. 5.36) та $y = x^{-1/\pi}$ (рис. 5.37).

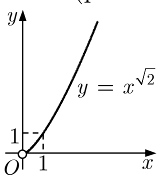


Рис. 5.36. Графік функцій $y = x^{\sqrt{2}}$

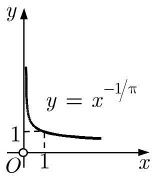


Рис. 5.37. Графіки функцій $y = x^{-1/\pi}$

5.4.3. Дробово-лінійна функція

1. Функцію

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

де a, b, c, d — деякі числа, $c \neq 0$, називають *дробово-лінійною*.

Область означення функції $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, множина значень функції $E(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$.

2. Графіком дробово-лінійної функції є гіпербола з вертикальною асимптотою $x = -\dfrac{d}{c}$ і горизонтальною асимптотою $y = \dfrac{a}{c}$ (рис. 5.38).

3. Функцію

$$y = \frac{a}{x},$$

де a — число, відмінне від нуля, називають *оберненою пропорційністю*. Число a називають *коефіцієнтом оберненої пропорційності*.

Обернена пропорційність є непарною функцією.

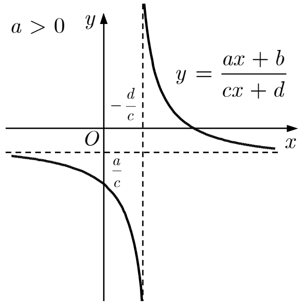


Рис. 5.38. Графік дробово-лінійної функції $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Якщо $a > 0$, то функція $y = \dfrac{a}{x}$ спадає на проміжках $(-\infty;0)$ та $(0;+\infty)$, а якщо $a < 0$, то функція $y = \dfrac{a}{x}$ зростає на проміжках $(-\infty;0)$ та $(0;+\infty)$.

5.5. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Систематизуймо відомості про тригонометричні та обернені тригонометричні функції та їхні графіки.

5.5.1. Тригонометричні функції числового аргументу

1. Нагадаймо означення тригонометричних функцій гострого кута за допомогою прямокутного трикутника (рис. 5.39).

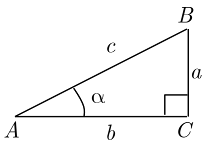


Рис. 5.39. Прямокутний трикутник

Косинусом кута α називають відношення довжини прилеглого катета до довжини гіпотенузи:

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}.$$

Синусом кута α називають відношення довжини протилежного катета до довжини гіпотенузи:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}.$$

Тангенсом кута α називають відношення довжини протилежного катета до довжини прилеглого катета:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}.$$

Котангенсом кута α називають відношення довжини прилеглого катета до довжини протилежного катета:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}.$$

2. Кути й дуги найчастіше вимірюють градусами й радіанами. Кут в 1° є $\dfrac{1}{180}$ часткою розгорнутого кута. Кут в 1 *радіан* дорівнює центральному куту, який спирається на дугу кола, довжина якої дорівнює радіусу кола. Кут в 1° має $\dfrac{\pi}{180}$ радіанів, а 1 радіан $= \dfrac{\pi^\circ}{180}$.

Надалі вимірюватимемо всі кути радіанами.

3. Розгляньмо коло радіусом 1 із центром у початку координат. Увідповіднімо кожному дійсному числу t точку кола за таким правилом (рис. 5.40):

1) числу $t = 0$ відповідає точка A — правий кінець горизонтального діаметра;

2) якщо $t > 0$, то, починаючи від точки A, проти годинникової стрілки опишімо на колі дугу завдовжки в t (оскільки коло одиничне, то це відповідає повертанню променю OA на t радіан проти годинникової стрілки); одержуємо точку M_t, яка відповідає числу t;

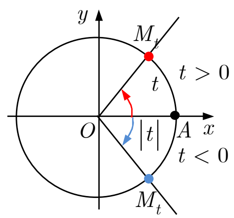


Рис. 5.40. Відповідність між дійсними числами і точками числового кола

3) якщо $t < 0$, то, починаючи від точки A, за годинниковою стрілкою опишімо на колі дугу завдовжки в $|t|$ (це відповідає повертанню променю OA на $|t|$ радіан за годинниковою стрілкою); одержуємо точку M_t, яка відповідає числу t.

Кожному дійсному числу відповідає єдина точка числового кола.

Якщо точка M_t відповідає числу t, то вона відповідає будь-якому числу $t + 2\pi k$, де k — ціле число, яке показує кількість повних обходів кола в додатному або від'ємному напрямі.

4. Розгляньмо число t і позначмо відповідну йому точку M_t числового кола (рис. 5.41).

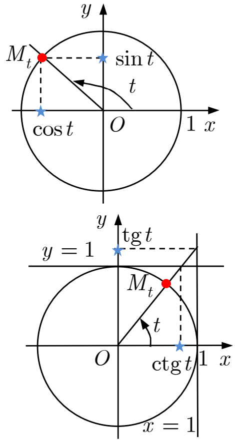


Рис. 5.41. Тригонометричні функції числа

Косинусом числа t називають абсцису точки M_t одиничного кола й позначають $\cos t$.

Синусом числа t називають ординату точки M_t одиничного кола й позначають $\sin t$.

Тангенсом числа t називають ординату точки перетину прямої $x = 1$ (*осі тангенсів*) із променем OM_t й позначають $\operatorname{tg} t$.

Котангенсом числа t називають абсцису точки перетину прямої $y = 1$ (*осі котангенсів*) із променем OM_t й позначають $\operatorname{ctg} t$.

Функції

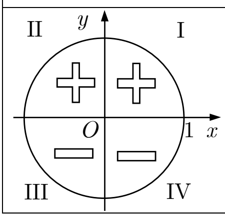
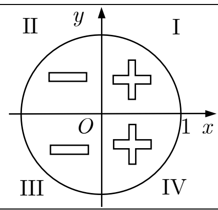
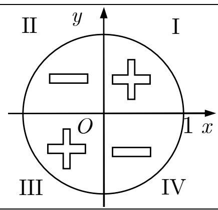
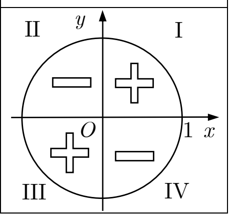
$$y = \cos x, y = \sin x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$$

називають *тригонометричними* функціями.

Оскільки точка M_t відповідає як числу t так і будь-якому числу $t + 2\pi k$, де k — ціле число, то

$$\cos(t + 2\pi k) = \cos t;$$
$$\sin(t + 2\pi k) = \sin t.$$

5. Знаки тригонометричних функцій позначмо на наступних діаграмах:

$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
			

6. Значення тригонометричних функцій деяких кутів можна звести до табл. 5.1.

Таблиця 5.1

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0	–

Прочерк у таблиці означає, що відповідне значення функції не існує.

7. *Формулами зведення* називають співвідношення, за допомогою яких значення тригонометричних функцій аргументів

$$\frac{\pi}{2} \pm x, \pi \pm x, \frac{3\pi}{2} \pm x, 2\pi \pm x$$

виражають через значення $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$ та $\operatorname{ctg} x$.

Усі формули зведення можна зібрати до табл. 5.2.

Таблиця 5.2

	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{3\pi}{2}-x$	$\frac{3\pi}{2}+x$	$2\pi-x$	$2\pi+x$
sin	$\cos x$	$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
cos	$\sin x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
tg	$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x$
ctg	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x$

Полегшують запам'ятовування цих формул за допомогою правил:

1) уважаючи x кутом з 1-ої чверті, ставимо перед функцією відповідний знак;

2) під час переходу від функцій аргументів $\dfrac{\pi}{2} \pm x, \dfrac{3\pi}{2} \pm x$ до функцій аргументу x назви функцій міняємо: синус — на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс, котангенс — на тангенс.

3) під час переходу від функцій аргументів $\pi \pm x, 2\pi \pm x$ до функцій аргументу x назву функції зберігаємо.

5.5.2. Основні співвідношення для тригонометричних функцій

1. Оскільки $M_t(x;y)$ належить одиничному колу, то

$$x^2 + y^2 = 1,$$

тобто

$$\boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1.}$$

Ця рівність правдива для будь-яких значень t; її називають *основною тригонометричною тотожністю*.

Ділячи основну тригонометричну тотожність на $\cos^2 t$ $\left(\sin^2 t\right)$, одержуємо наслідки:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 + \operatorname{tg}^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}, t \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{ctg}^2 t + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 t}, t \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}}$$

2. Тангенс та котагенс справджують співвідношення:

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}, t \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \\ \operatorname{ctg} t = \dfrac{\cos t}{\sin t}, t \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}}$$

Перемножуючи ці рівності, дістаємо співвідношення:

$$\boxed{\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1, \;\; t \neq \dfrac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}.}$$

3. Формули додавання. Для будь-яких x та y правдиві формули:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x;$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

4. Формули подвійних кутів. З формул додавання синуса та косинуса для будь-яких x можна одержати формули:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

5. Формули подання тригонометричних функцій через тангенс половинного кута. Для будь-якого $x \neq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, правдиві формули:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}; \;\; \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}.$$

6. Формули перетворення сум тригонометричних функцій у добутки. Для будь-яких x та y правдиві формули:

$$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x \pm y}{2}\cos\frac{x \mp y}{2};$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x - y}{2}\cos\frac{x + y}{2};$$
$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x + y}{2}\sin\frac{y - x}{2}.$$

7. Формули перетворення добутків тригонометричних функцій у суми. Для будь-яких x та y правдиві формули:

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2};$$
$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2};$$
$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}.$$

8. Формула доповняльного кута. Перетворімо двочлен

$$a\sin x + b\cos x,$$

приміром, так:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\sin x \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \cos x \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) =$$
$$= A\left(\sin x \cdot \frac{a}{A} + \cos x \cdot \frac{b}{A}\right),$$

де $A = \sqrt{a^2+b^2}$.

Оскільки

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

то існує такий доповняльний кут φ, що

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{A}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{A}. \end{cases}$$

Тоді

$$a\cos x + b\sin x = A\big(\sin x \cdot \cos\varphi + \cos x \cdot \sin\varphi\big) = A\sin(x+\varphi).$$

Отже, правдива *формула доповняльного кута*:

$$\boxed{a\cos x + b\sin x = A\sin(x+\varphi).}$$

5.5.3. Основні характеристики тригонометричних функцій

1. Відзначмо основні властивості функції синус $y = \sin x$.

Область означення функції $D(\sin) = \mathbb{R}$, множина значень $E(\sin) = [-1;1]$.

Функція синус:

1) обмежена, $|\sin x| \leq 1$;

2) непарна;

3) періодична з періодом 2π.

Графіком функції $y = \sin x$ є *синусоїда* (рис. 5.42).

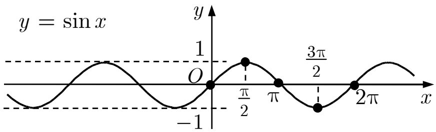


Рис. 5.42. Графік функції $y = \sin x$

2. Відзначмо основні властивості функції косинус $y = \cos x$.

Область означення функції $D(\cos) = \mathbb{R}$, множина значень $E(\cos) = [-1;1]$.

Функція косинус:

1) обмежена, $|\cos x| \leq 1$;

2) парна;

3) періодична з періодом 2π.

Графіком функції $y = \cos x$ є *косинусоїда* (рис. 5.43).

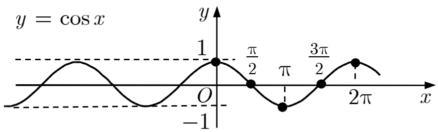


Рис. 5.43. Графік функції $y = \cos x$

3. Відзначмо основні властивості функції тангенс $y = \operatorname{tg} x$.

Область означення функції $D(\operatorname{tg})$ — множина всіх дійсних чисел, окрім чисел $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Множина значень $E(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$.

Функція тангенс:

1) непарна;

2) періодична з періодом π.

Графіком функції $y = \operatorname{tg} x$ є *тангенсоїда* (рис. 5.44).

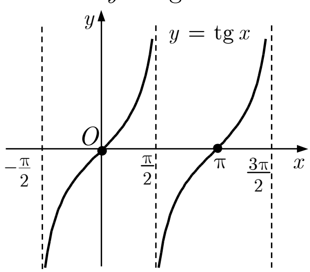


Рис. 5.44. Графік функції $y = \operatorname{tg} x$

4. Відзначмо основні властивості функції котангенс $y = \operatorname{ctg} x$.

Область означення функції $D(\operatorname{ctg})$ — множина всіх дійсних чисел, окрім чисел $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Множина значень $E(\operatorname{ctg}) = \mathbb{R}$.

Функція котангенс:

1) непарна;

2) періодична з періодом π,

Графіком функції $y = \operatorname{ctg} x$ є *котангенсоїда* (рис. 5.45).

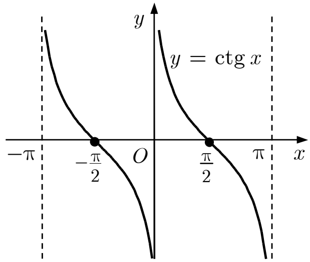


Рис. 5.45. Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$

5.5.4. Обернені тригонометричні функції

1. *Арксинусом* числа a називають число (кут) $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює a, і позначають $\arcsin a$ (рис. 5.46).

Тобто, з рівності $\arcsin a = t$ випливає, що $\sin t = a$.

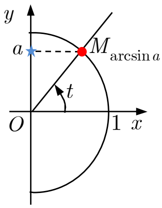


Рис. 5.46. Означення арксинуса

2. *Арккосинусом* числа a називають число (кут) $t \in [0; \pi]$, косинус якого дорівнює a і позначають $\arccos a$ (рис. 5.47).

Тобто, з рівності $\arccos a = t$ випливає, що $\cos t = a$.

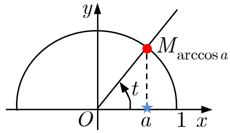


Рис. 5.47. Означення арккосинуса

3. *Арктангенсом* числа a називають число (кут) $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a, і позначають $\operatorname{arctg} a$.

Тобто, з рівності $\operatorname{arctg} a = t$ випливає, що $\operatorname{tg} t = a$.

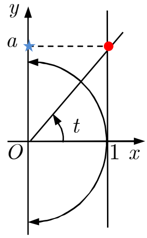


Рис. 5.48. Означення арктангенса

4. *Арккотангенсом* числа a називають число (кут) $t \in (0; \pi)$, котангенс якого дорівнює a, і позначають $\operatorname{arcctg} a$.

Тобто, з рівності $\operatorname{arcctg} a = t$ випливає, що $\operatorname{ctg} t = a$.

5. Формули значень тригонометричних функцій від обернених тригонометричних функцій можна звести до табл. 5.3 (їх також можна знаходити за допомогою прямокутного трикутника).

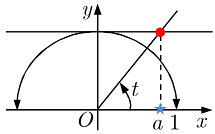
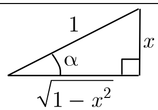
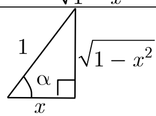
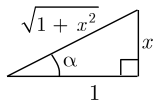
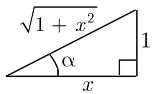


Рис. 5.49. Означення арккотангенса

Таблиця 5.3

	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
sin	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
cos	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
tg	$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\dfrac{1}{x}$
ctg	$\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{x}$	x
				

5.5.5. Основні характеристики обернених тригонометричних функцій

1. Функція $y = \sin x$ на відрізку $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ зростає і набуває всі значення з відрізку $[-1;1]$. Тому функція $y = \sin x$ на відрізку $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ оборотна, тобто має обернену функцію, яку називають *арксинусом* і позначають $y = \arcsin x$.

Область означення арксинуса
$$D(\arcsin) = [-1;1],$$
множина значень $E(\arcsin) = \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ (рис. 5.50).

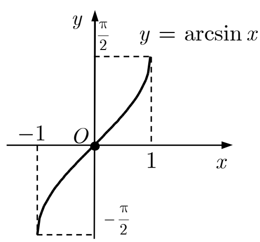


Рис. 5.50. Графік функції $y = \arcsin x$

Функція арксинус:

1) обмежена, $|\arcsin x| \le \dfrac{\pi}{2}$;

2) непарна;

3) зростає на відрізку $[-1;1]$.

2. Функція $y = \cos x$ на відрізку $[0;\pi]$ має обернену функцію, яку називають *арккосинусом* і позначають $y = \arccos x$.

Область означення арккосинуса

$$D(\arccos) = [-1;1],$$

множина значень $E(\arccos) = [0;\pi]$ (рис. 5.51).

Функція арккосинус:

1) обмежена, $|\arccos x| \le \pi$;

2) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;

3) спадна.

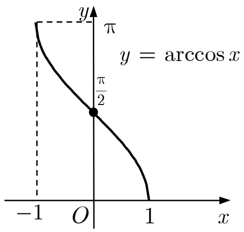


Рис. 5.51. Графік функції $y = \arccos x$

3. Функція $y = \operatorname{tg} x$ в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ має обернену функцію, яку називають *арктангенсом* і позначають $y = \operatorname{arctg} x$.

Область означення арктангенса $D(\operatorname{arctg}) = \mathbb{R}$, множина значень $E(\operatorname{arctg}) = \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 5.52).

Функція арктангенс:

1) обмежена, $|\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2}$;

2) непарна;

3) зростаюча.

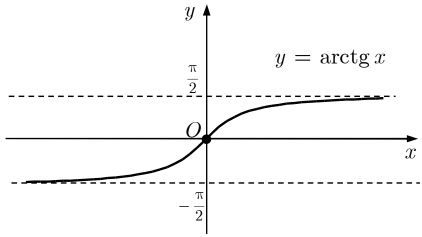


Рис. 5.52. Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$

4. Функція $y = \operatorname{ctg} x$ на відрізку $(0;\pi)$ має обернену функцію, яку називають *арккотангенсом* і позначають $y = \operatorname{arcctg} x$.

Область означення арккотангенса

$$D(\operatorname{arcctg}) = \mathbb{R},$$

множина значень $E(\operatorname{arcctg}) = (0;\pi)$ (рис. 5.53).

Функція арккотангенс:

1) обмежена, $|\operatorname{arcctg} x| < \pi$;

2) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$;

3) спадна.

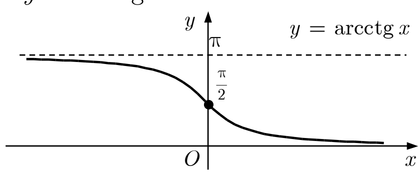


Рис. 5.53. Графік функції $y = \operatorname{arcctg} x$

5. Прямі й обернені тригонометричні функції є взаємно оберненими. Приміром:

$$\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1;1], \quad \arcsin(\sin x) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

5.6. ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ

Систематизуймо відомості про показникову та логарифмічну функції, їх графіки.

5.6.1. Показникова функція

1. Функцію,

$$y = a^x,$$

де a — деяке додатне число, відмінне від одиниці, називають *показниковою* функцією за *основою* a.

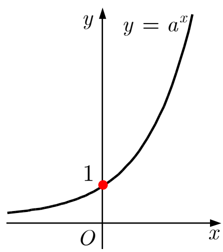


Рис. 5.54. Графік показникової функції $y = a^x, a > 1$

Область означення $D(f) = \mathbb{R}$, область значення $E(f) = (0;+\infty)$ (рис. 5.54—5.55).

Функція $y = a^x$:

1) зростає для $a > 1$ і спадає для $0 < a < 1$;

2) справджує функціональне рівняння

$$\boxed{f(x+y) = f(x)f(y);}$$

3) $a^0 = 1$.

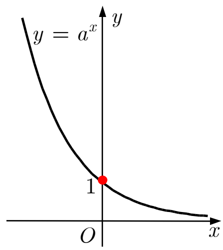


Рис. 5.55. Графік показникової функції $y = a^x, 0 < a < 1$

2. Особливо важливу роль у математиці відіграє показникова функція, основою якої є трансцендентне число $e \approx 2{,}718...$, що буде означено в п. 6.2.3. Функцію $y = e^x$ часто називають *експонентою*.

5.6.2. Логарифм

1. Розгляньмо дійсне додатне число a, відмінне від 1, і додатне дійсне число b $(a > 0, a \neq 1, b > 0)$.

Логарифмом числа b за *основою* a, називають показник степеня, до якого треба піднести число a, щоб одержати число b, і позначають $\log_a b$.

Приміром, $\log_3 9$ — логарифм числа 9 за основою 3,

$$\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2.$$

Дію знаходження логарифма числа називають *логарифмуванням*, а обернену до неї дію визначення числа за його логарифмом — *потенціюванням*.

2. З означення логарифма випливає *основна логарифмічна тотожність*

$$\boxed{a^{\log_a b} = b, \quad b > 0}$$

Приміром,

$$3^{\log_3 5} = 5.$$

3. Логарифм за основою e називають *натуральним* і позначають $\ln x$; логарифм за основою 10 називають *десятковим* і позначають $\lg x$.

5.6.3. Основні формули для логарифмів

1. Логарифм добутку двох додатних чисел дорівнює сумі логарифмів співмножників:

$$\boxed{\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c,}$$

де $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$.

2. Логарифм частки додатних чисел дорівнює різниці логарифмів діленого й дільника:

$$\boxed{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c,}$$

де $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$.

3. Логарифм степеня дорівнює добутку показника степеня на логарифм її основи:

$$\boxed{\log_a b^c = c \log_a b,}$$

де $a > 0, a \neq 1, b > 0$.

Зокрема,

$$\log_a \frac{1}{b} = \log_a b^{-1} = -\log_a b.$$

4. Формула переходу від логарифма за основою b до логарифма за основою a має вигляд

$$\boxed{\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b},}$$

де $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, c > 0.$

5. Якщо $a = c$, то формула переходу набуває вигляду

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b},$$

звідки

$$1 = \log_a b \cdot \log_b a.$$

6. Приміром,

$$\log_3 14 = \log_3(2 \cdot 7) = \log_3 2 + \log_3 7;$$

$$\log_2 \frac{7}{3} = \log_2 7 - \log_2 3;$$

$$\log_3 25 = \log_3 5^2 = 2\log_3 5; \;\; \log_3 \frac{1}{5} = -\log_3 5;$$

$$\log_2 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 2};$$

$$\log_2 5 = \frac{1}{\log_5 2}.$$

5.6.4. Логарифмічна функція

1. Оскільки показникова функція $y = a^x$, де $a > 0, a \neq 1$, є монотонною (зростаючою для $a > 1$ і спадною для $0 < a < 1$), то до неї існує обернена функція.

Щоб знайти цю обернену функцію, треба з формули $y = a^x$ виразити x через y :

$$x = \log_a y,$$

а потім змінити позначення x на y і y на x:

$$y = \log_a x.$$

Функцію

$$y = \log_a x,$$

де $a > 0, a \neq 1$, називають *логарифмічною* за *основою* a.

2. Графіки логарифмічної функції $y = \log_a x$ та показникової функції $y = a^x$ симетричні відносно прямої $y = x$ (рис. 5.56—5.57).

Область означення $D(f) = (0;+\infty)$, множина значень $E(f) = \mathbb{R}$.

Функція $y = \log_a x$:

1) зростає для $a > 1$ і спадає для $0 < a < 1$;

2) справджує функціональне рівняння

$$\boxed{f(xy) = f(x) + f(y).}$$

3) $\log_a 1 = 0$.

3. Логарифмічна й показникова функції є взаємно оберненими:

$$\log_a a^x = x; \quad a^{\log_a x} = x, x > 0.$$

4. Правдива **формула зв'язку** між степеневою, логарифмічною і показниковою функціями:

$$\boxed{x^\alpha = a^{\alpha \log_a x},}$$

де $x > 0, a > 0, a \neq 1$.

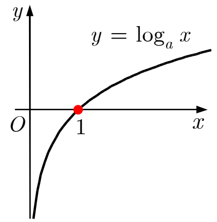


Рис. 5.56. Графік логарифмічної функції $y = \log_a x, a > 1$

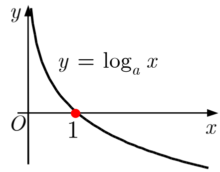


Рис. 5.57. Графік логарифмічної функції $y = \log_a x, 0 < a < 1$

5.6.5. Гіперболічні функції

1. За допомогою експоненти $y = e^x$ можна означити нові функції: *гіперболічний синус*

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

та *гіперболічний косинус*

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Ці функції мають властивості:

1) $D(\operatorname{sh}) = D(\operatorname{ch}) = \mathbb{R}$;

2) $E(\operatorname{sh}) = \mathbb{R}, E(\operatorname{ch}) = [1;+\infty)$;

3) гіперболічний синус є непарною функцією (рис. 5.58), а гіперболічний косинус — парною (рис. 5.59);

4) $\operatorname{sh} 0 = 0, \operatorname{ch} 0 = 1$.

2. З означення гіперболічних синуса та косинуса можна одержати співвідношення схожі на співвідношення для тригонометричних функцій:

1) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$;

2) $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y$;

3) $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$;

4) $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$,
$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$.

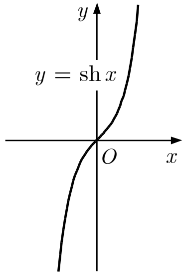


Рис. 5.58. Графік гіперболічного синуса

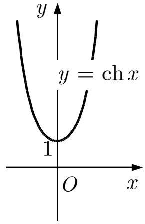


Рис. 5.59. Графік гіперболічного косинуса

3. Назва «гіперболічні функції» пояснюється тим, що рівняння

$$\begin{cases} x = \operatorname{ch} t, \\ y = \operatorname{sh} t, \end{cases} t \in \mathbb{R},$$

є параметричними рівняннями правої гілки гіперболи $x^2 - y^2 = 1$, так само, як рівняння

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} t \in [0; 2\pi]$$

є параметричними рівняннями кола $x^2 + y^2 = 1$. Тому й тригонометричні функції синус і косинус інколи називають «коловими».

4. За аналогією з тригонометричними функціями *гіперболічний тангенс* та *гіперболічний котангенс* означують формулами:

$$y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},$$

$$y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Ці функції мають властивості:

1) $D(\operatorname{th}) = \mathbb{R}, D(\operatorname{cth}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

2) $E(\operatorname{th}) = (-1; 1)$,
$E(\operatorname{cth}) = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;

3) гіперболічні тангенс і котангенс є непарними функціями (рис. 5.60);

4) $\operatorname{th} 0 = 0$.

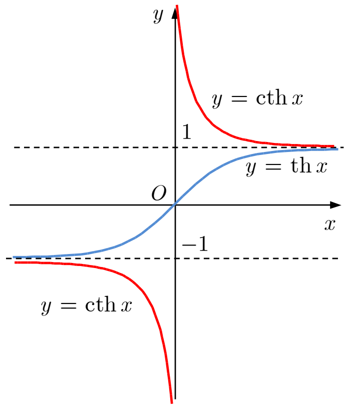


Рис. 5.60. Графіки гіперболічних тангенса і котангенса

5.7. ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

Графік елементарних функцій часто можна одержати за допомогою відповідних геометричних перетворень графіків відомих функцій.

5.7.1. Паралельне перенесення графіка вздовж осі абсцис

1. Знаючи графік функції $y = f(x)$, з'ясуймо, як виглядає графік функції

$$y = f(x - a),$$

де $a = \text{const}$.

Якщо $a > 0$, то функція $y = f(x - a)$ набуває тих самих значень, що й функція $y = f(x)$, але для значень x, більших на a. Тому графік $y = f(x - a)$ має ту саму форму, що й графік $y = f(x)$, проте він зсунутий відносно графіка $y = f(x)$ у додатному напрямі осі Ox на a одиниць.

Якщо $a < 0$, то графік функції $y = f(x - a)$ зсунуто відносно графіка $y = f(x)$ у від'ємному напрямі осі Ox на $(-a)$ одиниць.

2. Отже, щоб побудувати графік $y = f(x - a)$, графік $y = f(x)$ паралельно переносять уздовж осі Ox на a (ліворуч для $a < 0$, праворуч для $a > 0$) (рис. 5.61).

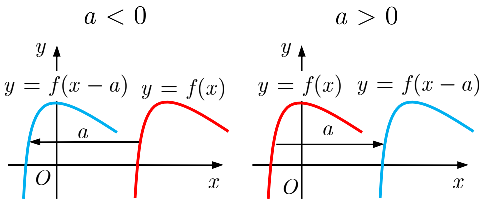


Рис. 5.61. Паралельне перенесення графіка вздовж осі Ox

5.7.2. Паралельне перенесення графіка вздовж осі ординат

1. При тих самих значеннях x значення функції $y = f(x) + b$ відрізняються від значень функції $y = f(x)$ на число b.

Якщо $b > 0$, то значення $f(x) + b$ більші за значення $f(x)$ на b, а, якщо $b < 0$, то — менші від значень $f(x)$ на $(-b)$.

2. Отже, щоб побудувати графік $y = f(x) + b$, графік $y = f(x)$ паралельно переносять уздовж осі Oy на b (вниз для $b < 0$, вгору для $b > 0$) (рис. 5.62).

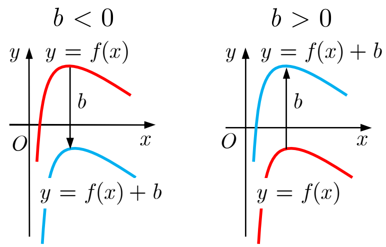


Рис. 5.62. Паралельне перенесення графіка вздовж осі Oy

5.7.3. Стискання (розтягування) вздовж осі абсцис

1. Уважаючи, що графік функції $y = f(x)$ відомий, з'ясуємо, який вигляд має графік функції $y = f(kx)$, де $k = \text{const} > 0$.

Функція $y = f(kx)$ набуває ті самі значення, що й функція $y = f(x)$, але для значень x, поділених на k. Приміром, для $x = x_0$ значення функції $y = f(x)$ дорівнює $f(x_0)$; функція $y = f(kx)$ також набуває значення $f(x_0)$, але для $x = \dfrac{x_0}{k}$.

Тому, щоб із графіка функції $y = f(x)$ дістати графік функції $y = f(kx)$, досить абсциси всіх точок цього графіка поділити на k (залишивши незмінними ординати).

2. Отже, щоб побудувати графік $y = f(kx)$, графік $y = f(x)$ розтягують у $\dfrac{1}{k}$ разів $(0 < k < 1)$ чи стискають у k разів $(k > 1)$ вздовж осі Ox (рис. 5.63).

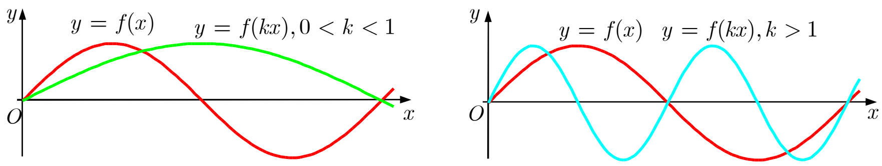


Рис. 5.63. Стискання (розтягування) графіка функції вздовж осі Ox

5.7.4. Стискання (розтягування) вздовж осі ординат

1. Нехай задано графік функції $y = f(x)$. З'ясуємо, який вигляд має графік функції $y = cf(x)$, де $c = \text{const} > 0$.

Для кожного допустимого значення аргументу $x = x_0$ значення функції $y = cf(x)$ дорівнює значенню функції $y = f(x)$, помноженому на c.

Тому, щоб із графіка $y = f(x)$ дістати графік $y = cf(x)$, досить ординати всіх точок цього графіка помножити на c (залишивши незмінними абсциси).

2. Отже, щоб побудувати графік $y = cf(x)$, графік $y = f(x)$ стискають в $\frac{1}{c}$ разів $(0 < c < 1)$ чи розтягують у c разів $(c > 1)$ вздовж осі Oy (рис. 5.64).

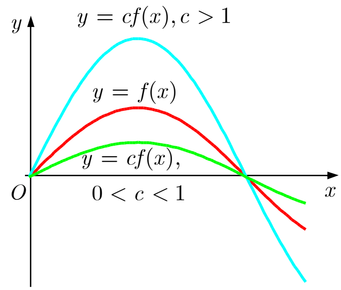


Рис. 5.64. Стискання (розтягування) графіка функції вздовж осі Oy

5.7.5. Дзеркальне відбивання відносно осі абсцис

1. Для тих самих значень x функції $y = f(x)$ та $y = -f(x)$ набувають протилежних значень.

Тому для кожного допустимого значення $x = x_0$ точка $A_1(x_0; f(x_0))$, що належить графіку $y = f(x)$, симетрична відносно осі Ox точці $A_2(x_0; -f(x_0))$, що належить графіку $y = -f(x)$.

Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі Ox.

2. Отже, щоб побудувати графік $y = -f(x)$, графік $y = f(x)$ симетрично відбивають відносно осі Ox (рис. 5.65).

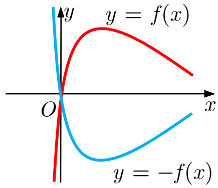


Рис. 5.65. Дзеркальне відбиття графіка функції відносно осі абсцис

5.7.6. Дзеркальне відбивання відносно осі ординат

1. Функція $y = f(-x)$ набуває тих самих значень, що й функція $y = f(x)$, але для протилежних значень x. Приміром, для $x = x_0$ значення функції $y = f(x)$ дорівнює $f(x_0)$; функція $y = f(-x)$ також набуває значення $f(x_0)$, але для $x = -x_0$.

Тому для кожного допустимого значення аргументу $x = x_0$ точка $A_1(x_0; f(x_0))$, що належить графіку функції $y = f(x)$, симетрична відносно осі Oy точці $A_2(-x_0; f(x_0))$, що належить графіку функції $y = f(-x)$.

Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = f(-x)$ симетричні відносно осі Oy.

2. Щоб побудувати графік $y = f(-x)$, графік $y = f(x)$ симетрично відбивають відносно осі Oy (рис. 5.66).

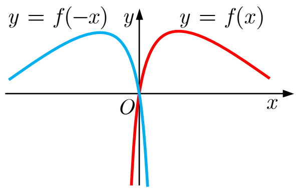


Рис. 5.66. Дзеркальне відбиття графіка функції відносно осі ординат

5.7.7. Графік функції $y = f(|x|)$

1. З'ясуймо, як виглядає графік функції $y = f(|x|)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$.

Якщо $x \geq 0$, то $|x| = x$ і $f(|x|) = f(x)$, а якщо $x < 0$, то $|x| = -x$ і $f(|x|) = f(-x)$.

Тому, графік функції $y = f(|x|)$ для $x \geq 0$ збігається із графіком функції $y = f(x)$, а для $x < 0$ — із графіком функції $y = f(-x)$.

2. Отже, щоб побудувати графік $y = f\left(\left|x\right|\right)$, частину графіка $y = f(x), x \geq 0$, доповнюють його відбитком відносно осі Oy (рис. 5.67).

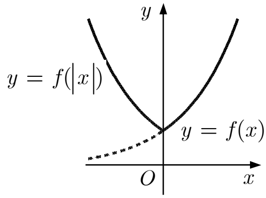


Рис. 5.67. Графік функції $y = f\left(\left|x\right|\right)$

5.7.8. Графік функції $y = \left|f(x)\right|$

1. Розгляньмо побудову графіка функції $y = \left|f(x)\right|$ за відомим графіком функції $y = f(x)$.

Для всіх значень x, для яких $f(x) \geq 0$, $\left|f(x)\right| = f(x)$, а для значень x, для яких $f(x) < 0$, $\left|f(x)\right| = -f(x)$.

Тому графік функції $y = \left|f(x)\right|$ збігається із графіком функції $y = f(x)$ на кожному з її проміжків області означення, на яких $f(x) \geq 0$, а на всіх інших проміжках області означення — із графіком функції $y = -f(x)$.

2. Отже, щоб побудувати графік $y = \left|f(x)\right|$, частину графіка $y = f(x), y \geq 0$, не міняють, а частину графіка $y = f(x), y < 0$, відбивають відносно осі Ox (рис. 5.68).

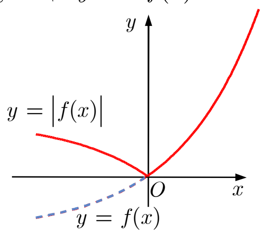


Рис. 5.68. Графік функції $y = \left|f(x)\right|$

5.7.9. Графік рівняння $\left|y\right| = f(x)$

1. Графік рівняння $\left|y\right| = f(x)$ збігається з частиною графіка функції $y = f(x)$ на кожному з її проміжків області означення, на яких $f(x) \geq 0$, і містить також відбиток цієї частини відносно осі Ox.

2. Отже, щоб побудувати графік $|y| = f(x)$, беруть частину графіка $y = f(x), y \geq 0$, і доповнюють її відбитком відносно осі Ox (рис. 5.69).

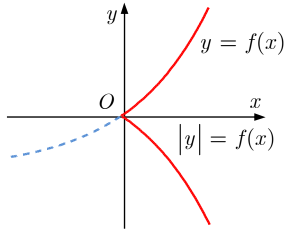


Рис. 5.69. Графік функції $y = |f(x)|$

5.7.10. Графік гармонічної залежності

Важливим прикладом застосування геометричних перетворень є побудова графіка гармонічної залежності

$$y = M\sin(\omega x + \alpha),$$

де сталу $M > 0$ називають *амплітудою*, сталу $\omega > 0$ — *частотою* (коловою), суму $\omega x + \alpha$ — *фазою*, сталу α — *початковою фазою*.

З'ясуймо вплив параметрів на графік синусоїди $y = M\sin(\omega x + \alpha)$ (рис. 5.70).

Амплітуда M «збільшує» розмах синусоїди $y = \sin x$ від $-M$ до M; частота ω змінює період з 2π на $\dfrac{2\pi}{\omega}$; наявність початкової фази зміщує синусоїду ліворуч на $\dfrac{\alpha}{\omega}$, оскільки

$$\omega t + \alpha = \omega\left(t + \frac{\alpha}{\omega}\right).$$

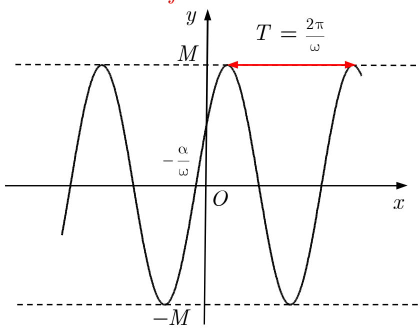


Рис. 5.70. Графік гармонічної залежності $y = M\sin(\omega x + \alpha)$

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

5.1.1. Визначте, чи є графіком функції зображена лінія?

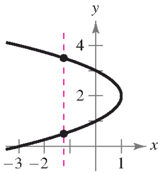


Рис. до 5.1.1.1)

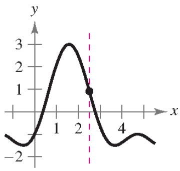


Рис. до 5.1.1.2)

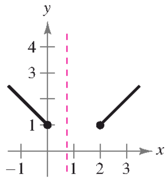


Рис. до 5.1.1.3)

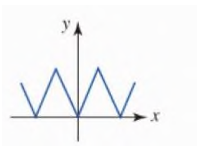


Рис. до 5.1.1.4)

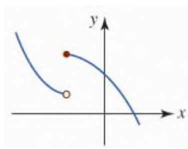


Рис. до 5.1.1.5)

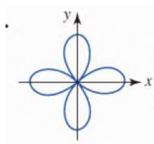


Рис. до 5.1.1.6)

5.1.2. За графіком функції f визначте:

1) $f(0)$;

2) значення x для яких $f(x) = 3$ та $f(x) = 0$;

3) значення x для яких $f(x) < 0$ та $f(x) > 0$.

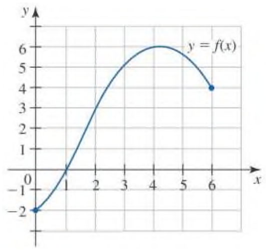


Рис. до 5.1.2

5.1.3. Знайдіть для графічно заданої функції її область означення і множину значень.

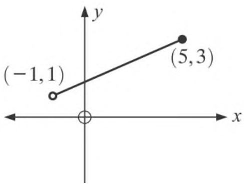


Рис. до 5.1.3.1)

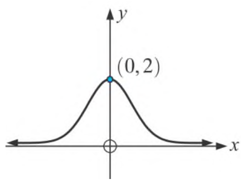


Рис. до 5.1.3.2)

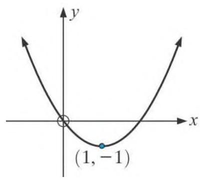


Рис. до 5.1.3.3)

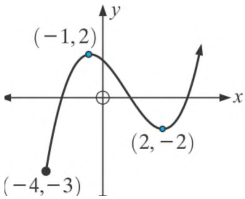


Рис. до 5.1.3.4)

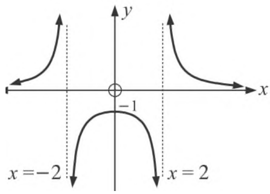


Рис. до 5.1.3.5)

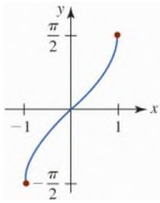


Рис. до 5.1.3.6)

5.1.4. Функцію, яку задано явно $y = x^2 + 1$ задайте: 1) параметрично; 2) неявно; 3) графічно.

5.1.5. Задайте таблично всі можливі функції з областю означення $\{1,2\}$ та множиною значень $\{3,4\}$.

5.1.6. Нехай $f(x)$ має область означення $[4;8]$ та множину значень $[2;6]$. Знайдіть область означення і множину значень функції:

1) $g(x) = f(x) + 3$; 2) $g(x) = f(x+3)$, 3) $g(x) = f(2x)$; 4) $g(x) = 2f(x)$.

5.1.7. Означте функцію f, яка має:

1) область означення $[3;+\infty)$; 2) область означення $(3;+\infty)$;

3) множину значень $[3;+\infty)$; 4) множину значень $(3;+\infty)$;

5) областю означення $(-2;2)\setminus\{0\}$; 6) область означення $\mathbb{R}\setminus\{2,3\}$.

5.1.8. Запишіть однією формулою приклад функції, область означення якої складається з:

1) однієї точки; 2) двох точок; 3) множини всіх цілих чисел.

5.1.9. Запишіть однією формулою приклад функції, множина значень якої складається з:

1) однієї точки; 2) двох точок; 3) множини всіх цілих чисел.

5.1.10. Задано функції $f(x) = \sqrt{x-1}$ та $g(x) = \sqrt{2-x}$. Знайдіть область означення функції: 1) $f+g$; 2) fg; 3) $\dfrac{f}{g}$; 4) $\dfrac{g}{f}$.

5.1.11. Чи існують такі функції f_1 та f_2, що $E(f_1) = E(f_2) = \mathbb{R}$, але: 1) $E(f_1 + f_2) = \{1\}$; 2)* $E(f_1 f_2) = \{1\}$.

5.1.12. Укажіть проміжки тотожності функцій:

1) $f(x) = \dfrac{x}{x^2}$ та $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$ та $\varphi(x) = x$;

3) $f(x) = x$ та $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$; 4) $f(x) = |x|$ та $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$.

5.1.13. Чи є функція, яку задано графічно, взаємно однозначною?

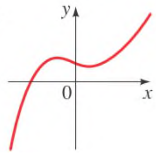


Рис. до 5.1.13.1)

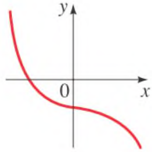


Рис. до 5.1.13.2)

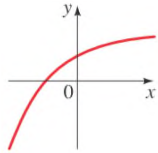


Рис. до 5.1.13.3)

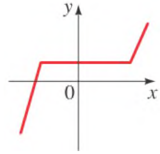


Рис. до 5.1.13.4)

5.1.14. За графіком функції f зобразіть графік функції f^{-1}.

5.1.15. За графіком функції f^{-1} зобразіть графік функції f.

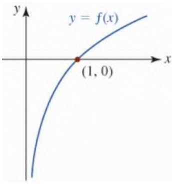


Рис. до 5.1.14.1)

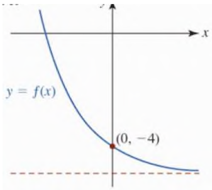


Рис. до 5.1.14.2)

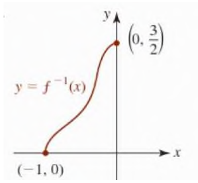


Рис. до 5.1.15.1)

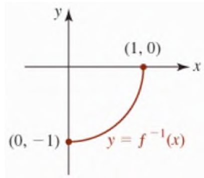


Рис. до 5.1.15.2)

5.1.16. Чи існують функції, які обернені самі до себе? Відповідь обґрунтуйте. Що можна сказати про графік такої функції?

5.1.17. Доведіть, що існує лише одна функція f, означена на всій числовій осі, така, що для будь-якої функції g, також означеної на всій осі, правдива рівність:

$$f \circ g = g \circ f.$$

Знайдіть цю функцію.

5.2.1. Доведіть, що:

1) сума, різниця і добуток двох парних функцій є парною функцією;

2) добуток двох непарних функцій є парною функцією;

3) сума двох непарних функцій є непарною функцією;

4) добуток парної і непарної функції є непарною функцією.

5.2.2. Яка функція, означена на всій дійсній осі, є парною і непарною одночасно? Покажіть, що така функція єдина.

5.2.3. Доведіть, що якщо $D(f)$ симетрична відносно 0, то:

1) $\varphi(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ — парна функція;

2) $\psi(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ — непарна функція;

3) f є сумою парної та непарної функцій.

5.2.4. Визначте, яку симетрію має крива (відносно початку координат, відносно осі Oy, обидві або жодної):

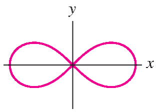


Рис. до 5.2.4.1)

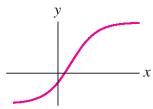


Рис. до 5.2.4.2)

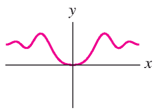


Рис. до 5.2.4.3)

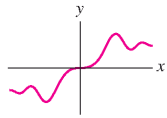


Рис. до 5.2.4.4)

5.2.5. Побудуйте парне й непарне продовження функції, заданої графіком.

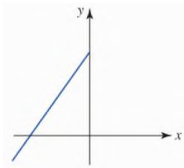


Рис. до 5.2.5.1)

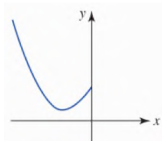


Рис. до 5.2.5.2)

5.2.6. Заповність таблицю, де f є парною функцією.

5.2.7. Заповність таблицю, де g є непарною функцією.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	−1	2	10	8	0
$g(x)$	2	−3	0	1	−4
$(f \circ g)(x)$					

Рис. до 5.2.6

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	−2	−3	0	−1	−4
$g(x)$	9	7	−6	−5	13
$(g \circ f)(x)$					

Рис. до 5.2.7

5.2.8. Що можна сказати про парність чи непарність функції $h(x) = f(g(x))$, якщо $E(g) \subset D(f)$ і:

1) f — парна функція, а g — непарна;

2) f, g — непарні функції;

3) f — довільна, а g — парна?

5.2.9. Нехай функція $f(x)$ періодична і має період T. Доведіть, що функція $f(kx+b)$, де $k \neq 0$, також періодична з періодом $\dfrac{T}{|k|}$.

5.2.10. Нехай функції f_1 та f_2 періодичні з періодами T_1 та T_2 відповідно. Доведіть, що будь-яке додатне число, кратне T_1 та T_2, є періодом функцій $f_1 \pm f_2$ та $f_1 f_2$.

5.2.11. Доведіть, що якщо число T — період f, то для будь-якого натурального n число nT є також періодом функції f.

5.2.12. Доведіть, що для функції Діріхле

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

будь-яке додатне раціональне число є періодом. Жодне ірраціональне число не є періодом функції Діріхле.

5.2.13. Доведіть, що, якщо g — періодична, а f — довільна функція, то $h = f(g(x))$ — періодична функція.

5.2.14. Що можна сказати про кількість розв'язків рівняння $f(x) = c$, якщо функція f періодична?

5.2.15. Визначте, які із зображених функцій є періодичними? Для періодичних функцій знайдіть їх основний період.

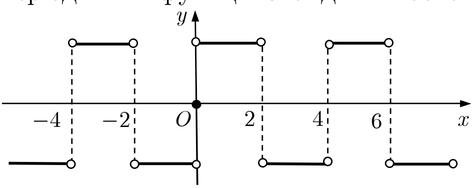


Рис. до 5.2.15.1)

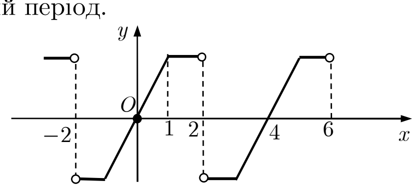


Рис. до 5.2.15.2)

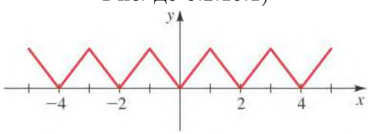


Рис. 5.2.15.3)

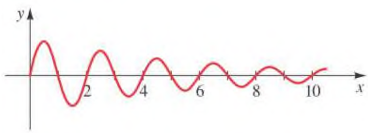


Рис. до 5.2.15.4)

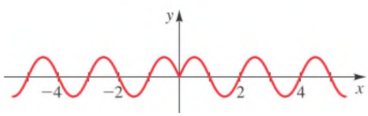


Рис. 5.2.15.5)

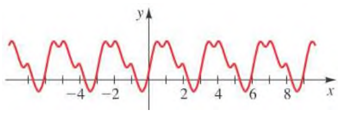


Рис. 5.2.15.6)

5.2.16. Доведіть, що парна функція не може бути строго монотонною.

5.2.17. Для функції f, заданої графічно знайдіть проміжки:

1) зростання функції;

2) спадання функції;

3) опуклості догори;

4) опуклості донизу.

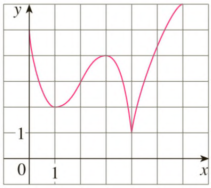


Рис. до 5.2.17.1)

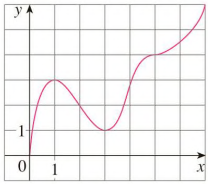


Рис. до 5.2.17.2)

5.2.18. Доведіть, що сума двох зростаючих (спадних) функцій є зростаючою (спадною) функцією.

5.2.19. Покажіть, що добуток двох зростаючих функцій може не бути зростаючою функцією.

5.2.20. Доведіть, що суперпозиція монотонних функцій є монотонною функцією.

5.2.21. Що можна сказати про кількість розв'язків рівняння $f(x) = c$, якщо функція f спадає чи зростає в усій області означення?

5.2.22. Чи правильно, що, якщо при кожному значенні $c \in \mathbb{R}$ рівняння $f(x) = c$ має єдиний розв'язок, то: 1) $E(f) = \mathbb{R}$; 2) функція f монотонна.

5.2.23. Чи правильне таке твердження: якщо функція f означена на $[a;b]$, то вона обмежена на $[a;b]$?

5.2.24. Наведіть приклади двох необмежених на $(0;+\infty)$ функцій, добуток яких є обмеженою на $(0;+\infty)$ функцією.

5.2.25. Доведіть, що сума, різниця та добуток двох обмежених функцій є обмеженою функцією.

5.2.26. Покажіть, що частка двох обмежених функцій може не бути обмеженою функцією.

5.3.1. Розглянувши на відрізку $[x_1;x_2]$ лінійну функцію $f(x) = ax + b, a \neq 0$, покажіть, що

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

і витлумачте цю рівність геометрично для $a > 0$.

5.3.2. Покажіть, що якщо f та g лінійні функції, то й $f + g$ також лінійна функція. А що можна сказати про fg?

5.3.3. Покажіть, що якщо f та g лінійні функції такі, що $f(0) = g(0)$ та $f(1) = g(1)$, то $f(x) = g(x)$.

5.3.4. Знайдіть кутові коефіцієнти зображених прямих.

5.3.5. Знайдіть рівняння зображеної прямої.

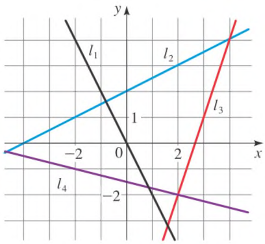


Рис. до 5.3.4

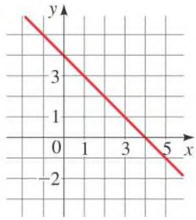


Рис. до 5.3.5.1)

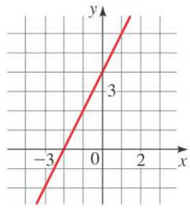


Рис. до 5.3.5.2)

5.3.6. Увідповідніть функції: а) $f(x) = (x-2)^2$; б) $f(x) = (x+4)^2$; в) $f(x) = x^2 - 2$; г) $f(x) = (x+1)^2 - 2$; ґ) $f(x) = 4 - (x-2)^2$; д) $f(x) = -(x-4)^2$ та їхні графіки.

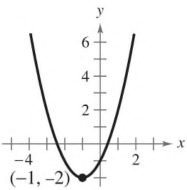


Рис. до 5.3.6.1)

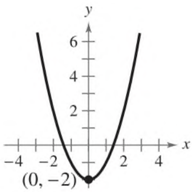


Рис. до 5.3.6.2)

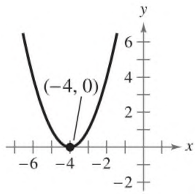


Рис. до 5.3.6.3)

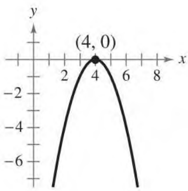


Рис. до 5.3.6.4)

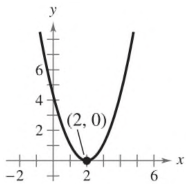


Рис. до 5.3.6.5)

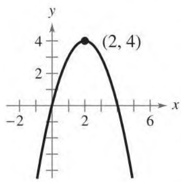


Рис. до 5.3.6.6)

5.3.7. Запишіть квадратичну функцію, зображену на графіку.

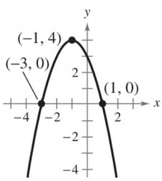
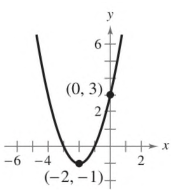


Рис. 5.3.7.1)



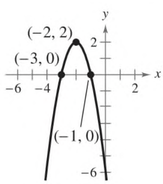


Рис. 5.3.7.3)

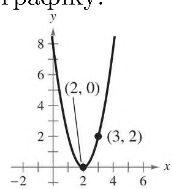


Рис. 5.3.7.4)

Рис. 5.3.7.2)

5.3.8. Знайдіть формулу кубічного многочлена з дійсними коефіцієнтами, зображеного на графіку, якщо відомо, що один із коренів многочлена є $(1+i)$.

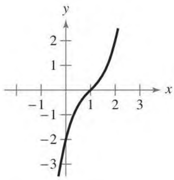


Рис. до 5.3.8.1)

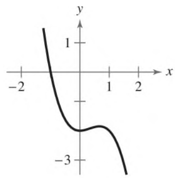


Рис. до 5.3.8.2)

5.3.9. Підберіть таке значення параметра k, щоб:

1) розклад многочлена $f(x) = x^3 - kx^2 + 2kx - 8$ на множники містив множник $(x-4)$;

2) многочлен $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + k$ націло ділився на многочлен $(x-5)$.

5.4.1. Увідповідніть графіки дробово-раціональної функції $f(x) = a + \dfrac{b}{x+c}$ та умови на параметри:

а) $a > 0, b > 0, c < 0$; б) $a > 0, b < 0, c > 0$;

в) $a < 0, b > 0, c > 0$; г) $a < 0, b < 0, c < 0$.

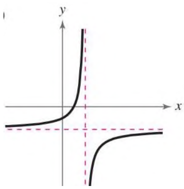


Рис. до 5.4.1.1)

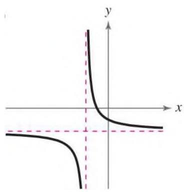


Рис. до 5.4.1.2)

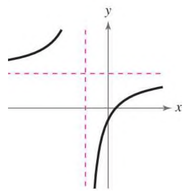


Рис. до 5.4.1.3)

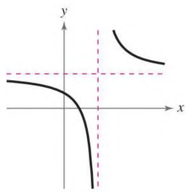


Рис. до 5.4.1.4)

5.5.1. Знайдіть значення $\sin\theta, \cos\theta, \operatorname{tg}\theta, \operatorname{ctg}\theta$.

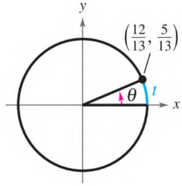


Рис. до 5.5.1.1)

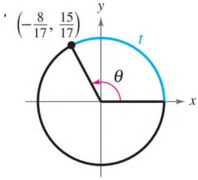


Рис. до 5.5.1.2)

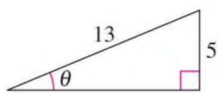


Рис. до 5.5.1.3)

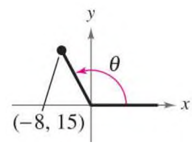


Рис. до 5.5.1.4)

5.5.2. Для кожної пари функцій f та g з'ясуйте, чи тотожні вони, чи ні. Якщо ні, укажіть для яких значень x ці функції тотожні:

1) $f(x) = \operatorname{tg} x, g(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$;

2) $f(x) = \sin x, g(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$;

3) $f(x) = \left|\sin x\right|, g(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$.

5.6.1. Визначте, графік якої показникової функції $f(x) = Cb^x$ зображено.

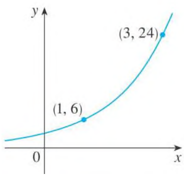


Рис. до 5.6.1.1)

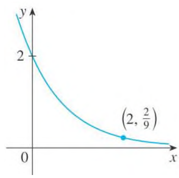


Рис. до 5.6.1.2)

5.6.2. Для кожної пари функцій f та g з'ясуйте, чи тотожні вони, чи ні. Якщо ні, укажіть для яких значень x ці функції тотожні:

1) $f(x) = \ln x^2, g(x) = 2\ln x$; 2) $f(x) = \ln x^2, g(x) = 2\ln\left|x\right|$;

3) $f(x) = 2^{\log_2 x}, g(x) = x$; 4) $f(x) = \log_2 2^x, g(x) = x$.

5.7.1. Нехай $D(f)$ — область означення і $E(x)$ — множина значень функції f. Якими є область означення і множина значень функції $g(x) = -f(x)$.

5.7.2. Запишіть, графіки яких функцій одержано із графіка функції $y = x^2$ за допомогою геометричних перетворень.

5.7.3. Запишіть, графіки яких функцій одержано із графіка функції $y = x^3$ за допомогою геометричних перетворень.

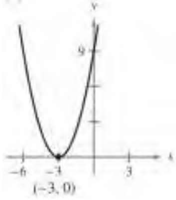


Рис. до 5.7.2.1)

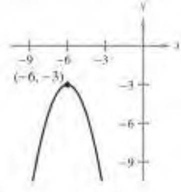


Рис. до 5.7.2.2)

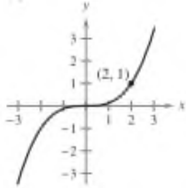


Рис. до 5.7.3.1)

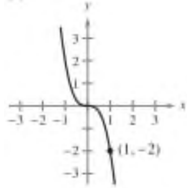


Рис. до 5.7.3.2)

5.7.4. Запишіть, графік якої функції дістаємо після геометричного перетворення:

1) графік $y = f(x)$ зміщено на 5 одиниць угору та на 1 одиницю праворуч;

2) графік $y = f(x)$ стиснуто вздовж осі Oy у 3 рази і зміщено на 2 одиниці праворуч;

3) графік $y = f(x)$ дзеркально відбито відносно осі Ox і зміщено на 7 одиниці ліворуч;

4) графік $y = f(x)$ дзеркально відбито відносно осі Oy і стиснуто вздовж осі Ox у 2 рази.

5.7.5. Укажіть амплітуду, частоту і період функції $f(x) = 4\sin 3x$.

5.7.6. Запишіть формулу косинусоїдальної функції з амплітудою 3 і періодом 8π.

5.7.7. Запишіть функцію, яку задано графічно, у вигляді $y = A\cos \omega x$.

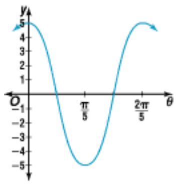


Рис. до 5.7.7.1)

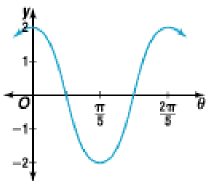


Рис. до 5.7.7.2)

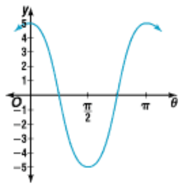


Рис. до 5.7.7.3)

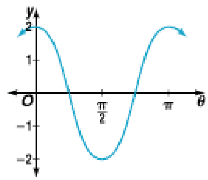


Рис. до 5.7.7.4)

5.7.8. Опишіть зв'язок між графіками функцій f та g. Розгляньте амплітуду, період і зміщення.

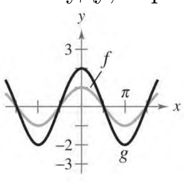


Рис. до 5.7.8.1)

Рис. до 5.7.8.2)

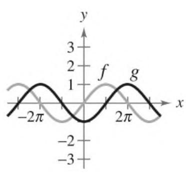


Рис. до 5.7.8.3)

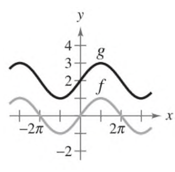


Рис. до 5.7.8.4)

5.7.9. Увідповідніть функції: а) $y = \operatorname{ctg} 4x$; б) $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; в) $y = \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$; г) $y = -\operatorname{tg} x$ та їхні графіки.

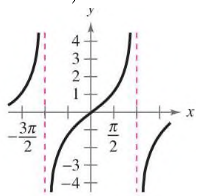


Рис. до 5.7.9.1)

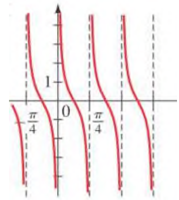


Рис. до 5.7.9.2)

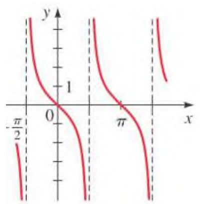


Рис. до 5.7.9.3)

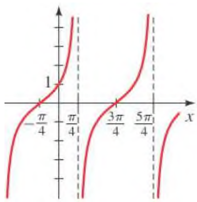


Рис. до 5.7.9.4)

5.7.10. Визначте, графік якої функції вигляду $y = D + A\sin x$ чи $y = D + A\cos x$ зображено на проміжку завдовжки в період (знайдіть значення параметрів).

Рис. до 5.7.10.1)

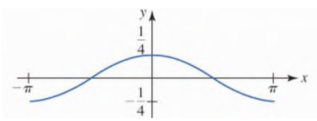


Рис. до 5.7.10.2)

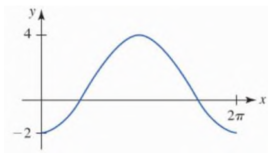


Рис. до 5.7.10.3)

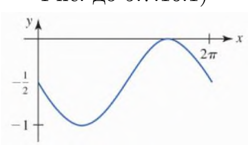


Рис. до 5.7.10.4)

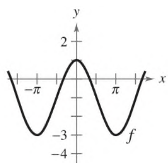


Рис. до 5.7.10.5)

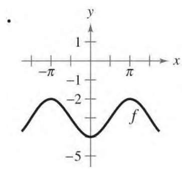


Рис. до 5.7.10.6)

5.7.11. Знайдіть значення параметрів функції вигляду $f(x) = A\sin(\omega x - \varphi)$ заданої графічно.

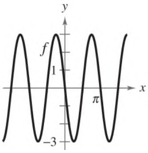


Рис. до 5.7.11.1)

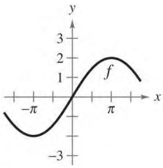


Рис. до 5.7.11.2)

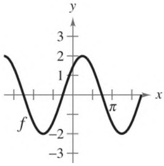


Рис. до 5.7.11.3)

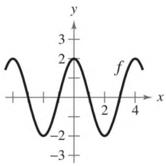


Рис. до 5.7.11.4)

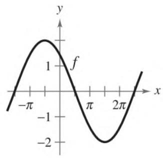


Рис. до 5.7.11.5)

5.7.12. Увідповідніть функції: а) $f(x) = 2^x$; б) $f(x) = 2^x + 1$; в) $f(x) = 2^{-x}$; г) $f(x) = 2^{x-2}$ та їхні графіки.

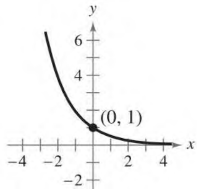


Рис. до 5.7.12.1)

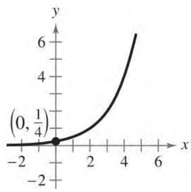


Рис. до 5.7.12.2)

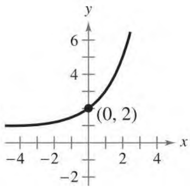


Рис. до 5.7.12.3)

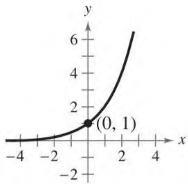


Рис. до 5.7.12.4)

5.7.13. Увідповідніть функції: а) $y = \ln(x-2)$; б) $f(x) = -\log_3(-x)$; в) $f(x) = -\log_3(x+2)$; г) $f(x) = \log_3(1-x)$; ґ) $y = -\ln(2x)$; д) $f(x) = \log_3(x-1)$ та їхні графіки.

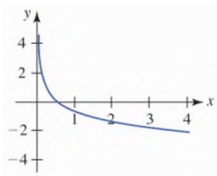


Рис. до 5.7.13.1)

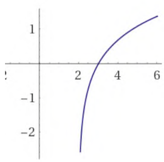


Рис. до 5.7.13.2)

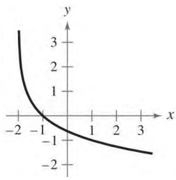


Рис. до 5.7.13.3)

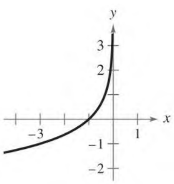


Рис. до 5.7.13.4)

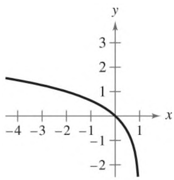


Рис. до 5.7.13.5)

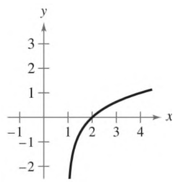


Рис. до 5.7.13.6)

5.7.14. Запишіть формулою $y = Af(kx + b) + B$ геометричне перетворення графіка функції $y = f(x)$.

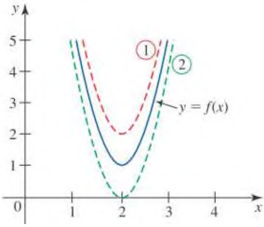


Рис. до 5.7.14.1)

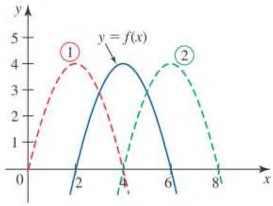


Рис. до 5.7.14.2)

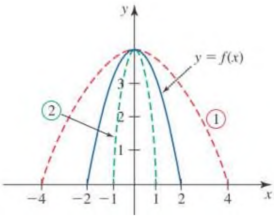


Рис. до 5.7.14.3)

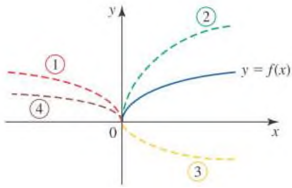


Рис. до 5.7.14.4)

5.7.15. Функцію f задано графічно на відрізку $[0;4]$.

1. Зобразьте графіки функцій $f(x+2)$ та $f(x)+2$.

2. Зобразьте графіки функцій $f(2x)$, $f\left(\dfrac{x}{2}\right), 2f(x)$.

3. Зобразьте графіки функцій $f(-x), -f(x)$.

4. Продовжіть графік функції на відрізок $[-4;4]$ парним чином.

5. Продовжіть графік функції на відрізок $[-4;4]$ непарним чином.

6. Продовжіть функцію з періодом $T = 4$.

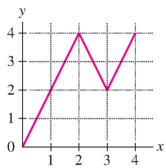


Рис. до 5.7.15

Відповіді

5.1.1. 1) ні; 2) так; 3) так; 4) так; 5) так; 6) ні.

5.1.2. 1) $f(0) = -2$; 2) $f(2) = 3$ та $f(1) = 0$; 3) $X_- = (0;1), X_+ = (1;6)$.

5.1.3. 1) $D(f) = (-1;5], E(f) = (1;3]$; 2) $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = (0;2]$;
3) $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [-1;+\infty)$; 4) $D(f) = [-4;+\infty), E(f) = [-3;+\infty)$;
5) $D(f) = (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty), E(f) = (-\infty;1] \cup (0;+\infty)$;

6) $D(f)=[-1;1], E(f)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

5.1.6. 1) $D(g)=[4;8], E(g)=[5;9]$; 2) $D(g)=[1;5], E(g)=[2;6]$;
3) $D(g)=[2;4], E(g)=[2;6]$; 4) $D(g)=[4;8], E(g)=[4;12]$.

5.1.7. 1) $f(x)=\sqrt{x-3}$; 2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-3}}$; 3) $f(x)=x^2+3$; 4) $f(x)=3+\frac{1}{x^2}$;
5) $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}$; 6) $f(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$.

5.1.8. 1) $f(x)=\sqrt{-x}+\sqrt{x}$; 2) $f(x)=\sqrt{-x^2(x-1)^2}$; 3) $f(x)=\sqrt{\log_2\left|\cos\pi x\right|}$.

5.1.9. 1) $f(x)=1$; 2) $f(x)=\frac{|x|}{x}$; 3) $f(x)=x+\sqrt{-\left|\sin\pi x\right|}$.

5.1.10. 1), 2) $D(f+g)=D(fg)=[1;2]$; 3) $D\left(\frac{f}{g}\right)=[1;2)$; 4) $D\left(\frac{g}{f}\right)=(1;2]$.

5.1.11. $f_1(x)=x, f_2(x)=1-x$.

5.1.12. 1), 2) тотожні на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; 3) тотожні на проміжку $[0;+\infty)$; 4) тотожні на $\mathbb{R}$.

5.1.13. 1) ні; 2) так; 3) так; 4) ні.

5.1.16. Так. Приміром, $f(x)=x, f(x)=\frac{1}{x}, f(x)=\frac{x+1}{x-1},\ldots$. Їхній графік симетричний відносно прямої $y=x$.

5.1.17. $f(x)=x$.

5.2.2. $f(x)=0$.

5.2.4. 1) обидві; 2) жодної; 3) відносно осі Oy; 4) відносно початку координат.

5.2.6.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	2	10	8	0
$g(x)$	2	-3	0	1	-4
$(f\circ g)(x)$	10	8	1	2	0

5.2.8. 1) парна функція; 2) непарна функція; 3) парна функція.

5.2.14. або 0, або ∞.

5.2.15. 1) неперіодична; 2) періодична, $T=4$; 3) періодична, $T=2$; 4) неперіодична;
5) неперіодична; 6) періодична, $T=3$.

5.2.17. 1) $f(x)\nearrow$: $(1;3),(4;6)$, $f\searrow$: $(0;1),(3;4)$, $f\cup:(0;2)$, $f\cap:(2;4),(4;6)$;
2) $f(x)\nearrow$: $(0;1),(3;7)$, $f\searrow$: $(1;3)$, $f\cup:(1;4),(5;7)$ $f\cap:(0;1),(4;5)$.

5.2.19. $f_1(x)=f_2(x)=x, x\in\mathbb{R}$, або $f_1(x)=f_2(x)=-\frac{1}{x}, x\in(0;+\infty)$.

5.2.21. 0 або 1.

5.2.22. 1) так; 2) ні, приміром, $f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 0, x\neq 1,\\ 1, & x=0,\\ 0, & x=1.\end{cases}$

5.2.23. Ні. Приміром, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \in [-1;0) \cup (0;1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

5.2.24. $f_1(x) = x, f_2(x) = \dfrac{1}{x}.$

5.2.26. $f_1(x) = x, f_2(x) = x - 1, x \in [-1;2].$

5.3.4. $k_1 = -2, k_2 = \dfrac{1}{2}, k_3 = 3, k_4 = -\dfrac{1}{4}.$

5.3.5. 1) $y = 4 - x$; 2) $y = 2x + 4$.

5.3.6. 1-г, 2-в, 3-б, 4-д, 5-а, 6-ґ.

5.3.7. 1) $y = 4 - (x+1)^2$; 2) $y = (x+2)^2 - 1$; 3) $y = 2 - 2(x+2)^2$; 4) $y = 2(x-2)^2$.

5.3.8. 1) $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$; 2) $P_3(x) = -x^3 + x^2 - 2$.

5.3.9. 1) $k = 7$; 2) $k = -210$.

5.4.1. 1-г, 2-в, 3-б, 4-а.

5.5.1. 1) $\sin\theta = \dfrac{5}{13}, \cos\theta = \dfrac{12}{13}, \operatorname{tg}\theta = \dfrac{5}{12}, \operatorname{ctg}\theta = \dfrac{12}{5};$

2) $\sin\theta = \dfrac{15}{17}, \cos\theta = -\dfrac{8}{17}, \operatorname{tg}\theta = -\dfrac{15}{8}, \operatorname{ctg}\theta = -\dfrac{8}{15};$

3) $\sin\theta = \dfrac{5}{13}, \cos\theta = \dfrac{12}{13}, \operatorname{tg}\theta = \dfrac{5}{12}, \operatorname{ctg}\theta = \dfrac{12}{5};$

4) $\sin\theta = \dfrac{15}{17}, \cos\theta = -\dfrac{8}{17}, \operatorname{tg}\theta = -\dfrac{15}{8}, \operatorname{ctg}\theta = -\dfrac{8}{15}.$

5.5.2. 1) тотожні для $x \ne \dfrac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$; 2) тотожні для $x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$; 3) тотожні.

5.6.1. 1) $f(x) = 3 \cdot 2^x$; 2) $f(x) = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^x.$

5.6.2. 1) тотожні для $x > 0$; 2) тотожні; 3) тотожні для $x > 0$; 4) тотожні.

5.7.1. $D(g) = D(f), E(g) = \{-y \mid y = f(x)\}.$

5.7.2. 1) $y = (x+3)^2$; 2) $y = -3 + (x+6)^2$.

5.7.3. 1) $y = \dfrac{1}{8}x^3$; 2) $y = -2x^3$.

5.7.4. 1) $y = f(x-1) + 5$; 2) $y = \dfrac{1}{3}f(x-2)$; 3) $y = -f(x+7)$; 4) $y = f(-2x)$.

5.7.5. Амплітуда $M = 4$, частота $\omega = 3$, період $T = \dfrac{2\pi}{3}$.

5.7.6. $y = 3\cos\left(\dfrac{x}{4}\right).$

5.7.7. 1) $y = 5\cos 5x$; 2) $y = 2\cos 5x$; 3) $y = 5\cos 2x$; 4) $y = 2\cos 2x$.

5.7.8. 1) $f(x)=2g(x)$; 2) $f(x)=g\left(\dfrac{x}{3}\right)$; 3) $f(x)=g(x+\pi)$; 4) $f(x)=g(x)-2$.

5.7.9. 1-б, 2-а, 3-г, 4-в.

5.7.10. 1) $y=-3\sin x$; 2) $y=\dfrac{1}{4}\cos x$; 3) $y=1-3\cos x$; 4) $y=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sin x$;

5) $y=-1+2\cos x$; 6) $y=-3-\cos x$.

5.7.11. 1) $y=-3\sin 2x$; 2) $y=2\sin\dfrac{x}{2}$; 3) $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$;

4) $y=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{\pi}{2}\right)$; 5) $y=-2\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

5.7.12. 1-в, 2-г, 3-б, 4-а.

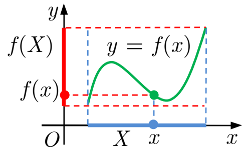
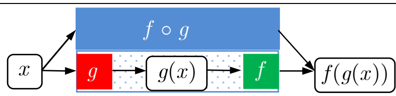
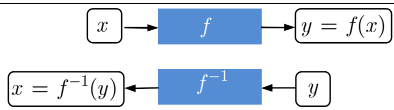
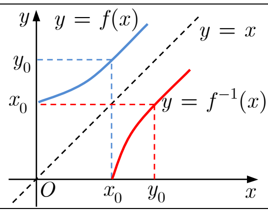
5.7.13. 1-ґ, 2-а, 3-в, 4-б, 5-г, 6-д.

5.7.14. 1) $y_1=f(x)+1, y_2=f(x)-1$; 2) $y_1=f(x+2), y_2=f(x-2)$;

3) $y_1=f(2x), y_2=f\left(\dfrac{x}{2}\right)$; 4) $y_1=f(-x), y_2=2f(x), y_3=-f(x), y_4=\dfrac{1}{2}f(-x)$.

Формули, твердження, алгоритми

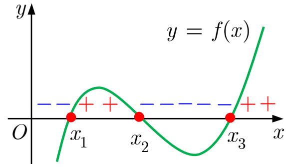
5.1. Функція однієї змінної

❶ ***Функція*** $f(x), x \in X \subset \mathbb{R}$	
❷ ***Графік функції*** $f(x), x \in X$. $\Gamma = \{M(x;y) \mid x \in X, y = f(x)\},$ $\Gamma \subset X \times Y$	
❸ ***Рівність*** функцій $f_1, x \in X_1$ і $f_2, x \in X_2$	1) $X_1 = X_2$; 2) $\forall x \in X_1 : f_1(x) = f_2(x)$
❹ ***Арифметичні дії над функціями*** f та g	$x \in D(f) \cap D(g)$
① ***Сума***	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
② ***Різниця***	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
③ ***Добуток***	$(fg)(x) = f(x)g(x)$
④ ***Частка***	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$
❺ ***Складена функція*** f ***від*** g (*суперпозиція* g та f) g — *внутрішня* функція, f — *зовнішня* функція	$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$ $x \in D(g) \cap \{x \mid g(x) \in D(f)\}$ 
❻ ***Обернена функція***. Нехай функція f установлює взаємно однозначну відповідність між множинами D та E. *Оберненою* до f функцією називають функцію f^{-1} таку, що $x = f^{-1}(y), y \in E.$ Функцію, яка має обернену, називають *оборотною*.	 
Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. Якщо функція зростає (спадає) на інтервалі, то вона має обернену функцію на цьому інтервалі, яка також зростає (спадає).	

5.2. Основні характеристики функції

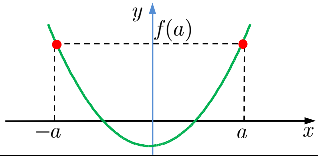
❶ ***Множина нулів*** та ***області знакосталості*** функції.

$$X_{-} = \{x \mid f(x) < 0\};$$
$$X_0 = \{x \mid f(x) = 0\};$$
$$X_{+} = \{x \mid f(x) > 0\}$$



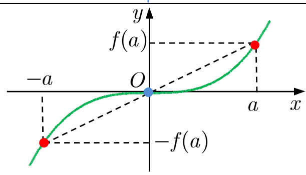
❷ ***Парна*** функція.
$\forall x \in D(f): -x \in D(f)$ і $f(-x) = f(x)$

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy.



❸ ***Непарна*** функція.
$\forall x \in D(f): -x \in D(f)$ і $f(-x) = -f(x)$

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.



❹ ***Властивості парних і непарних функцій***

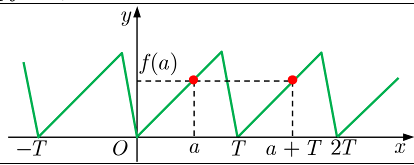
① Зміна знаку перед функцією не змінює її парності (непарності).
② Сума парних функцій є парною функцією.
③ Сума непарних функцій є непарною функцією.

④ Добуток будь-якої кількості парних функцій є парною функцією.
⑤ Добуток парної функції на непарну є непарною функцією.
⑥ Добуток парної кількості непарних функцій є парною функцією, а непарної кількості — непарною функцією.

❺ ***Періодична*** функція з ***періодом*** T.
$\exists T \neq 0 \quad \forall x \in D(f): x + T \in D(f)$

$$\text{і } f(x+T) = f(x).$$

Якщо існує найменший додатний період функції, то його називають *основним періодом*.



Графік T-періодичної функції складається з повторюваних фрагментів графіка функції на проміжку $[0;T]$.

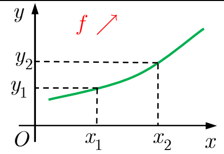
Якщо функція $f(x)$ періодична з періодом T,

то функція $Af(kx+b)$ також є періодичною з періодом $\dfrac{T}{|k|}, k \neq 0$.

❻ *Монотонні* функції

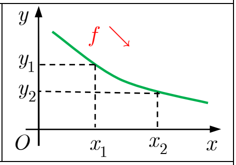
① ***Зростаюча*** функція на множині X

$\forall x_1, x_2 \in X:$
$x_1 < x_2 \Rightarrow$
$f(x_1) < f(x_2)$



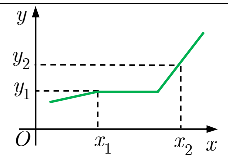
② ***Спадна*** функція на множині X

$\forall x_1, x_2 \in X:$
$x_1 < x_2 \Rightarrow$
$f(x_1) > f(x_2)$



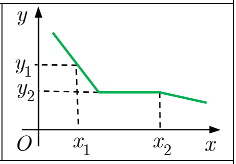
③ ***Неспадна*** функція на множині X

$\forall x_1, x_2 \in X:$
$x_1 < x_2 \Rightarrow$
$f(x_1) \le f(x_2)$



④ ***Незростаюча*** функція на множині X

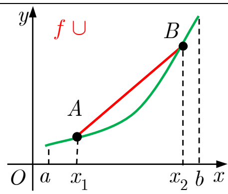
$\forall x_1, x_2 \in X:$
$x_1 < x_2 \Rightarrow$
$f(x_1) \ge f(x_2)$



Функції зростаючі, спадні, неспадні та незростаючі на множині X називають *монотонними* на цій множині.

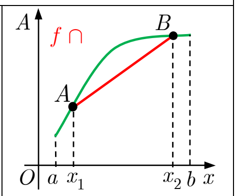
❼ *Опукла донизу* функція на множині X

$\forall x_1, x_2 \in X:$
$x_1 < x_2 \Rightarrow$
хорда AB
не нижче
за графік $y = f(x)$



❽ *Опукла догори* функція на множині X

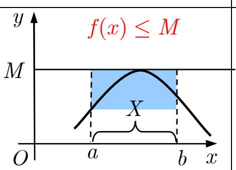
$\forall x_1, x_2 \in X:$
$x_1 < x_2 \Rightarrow$
хорда AB
не вище
за графік $y = f(x)$



❾ *Обмежені функції*

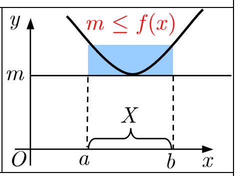
① Функція ***обмежена зверху*** на множині X

$\exists M \in \mathbb{R}:$
$\forall x \in X \Rightarrow$
$f(x) \le M$



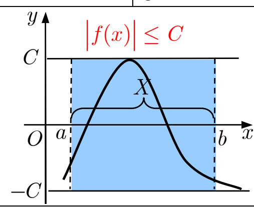
② Функція ***обмежена знизу*** на множині X

$\exists m \in \mathbb{R}:$
$\forall x \in X \Rightarrow$
$m \le f(x)$

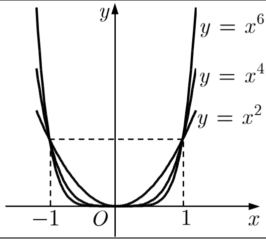
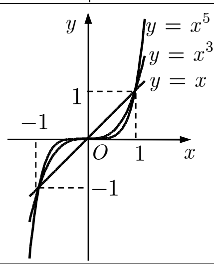


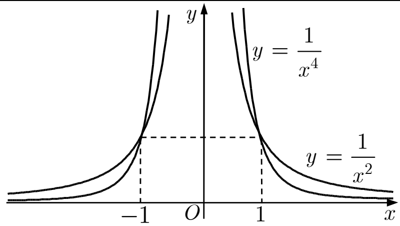
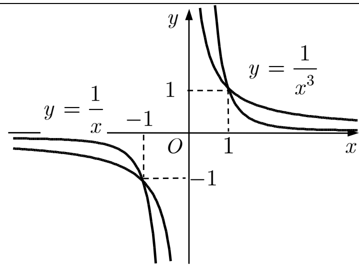
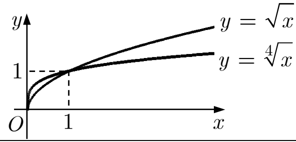
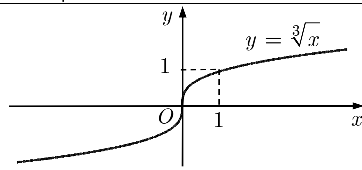
③ Функція ***обмежена*** на множині X

$\exists C > 0 : \forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \le C$



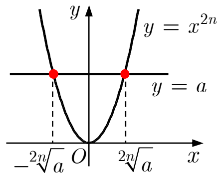
5.3. Степенева функція

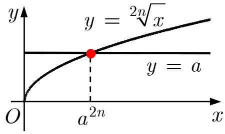
<table>
<tr><td>❶ Степінь x^{α}</td><td colspan="2">x — основа степеня;
α — показник степеня</td></tr>
<tr><td>① натуральний показник $n \in \mathbb{N}$</td><td>$x^1 = x$
$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ разів}}$</td><td>$0^n = 0;$
$1^n = 1$</td></tr>
<tr><td>② нульовий показник</td><td colspan="2">$x^0 = 1, x \neq 0$</td></tr>
<tr><td>③ від'ємний показник $(-n) \in \mathbb{Z}_-$</td><td colspan="2">$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} \quad (x \neq 0)$</td></tr>
<tr><td>④ дробовий показник $(m, n \in \mathbb{N})$</td><td colspan="2">$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} \quad (n \neq 1)$</td></tr>
<tr><td>❷ Арифметичний корінь $\sqrt[n]{x}$</td><td colspan="2">x — підкореневий вираз;
n — показник степеня</td></tr>
<tr><td>з невід'ємного числа x</td><td colspan="2">$a = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow a^n = x, x \geq 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">з від'ємного числа x</td><td colspan="2">$\sqrt[2n-1]{x} = -\sqrt[2n-1]{-x}, x < 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sqrt[2n]{x}, x < 0$ — не існує</td></tr>
<tr><td colspan="3">❸ Окремі випадки степеневої функції</td></tr>
<tr><td>① Степенева функція $y = x^{2n}, n \in \mathbb{N}$.
$D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = [0; +\infty)$.
Функція парна.
Графіком є парабола порядку $2n$.</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>② Степенева функція $y = x^{2n-1}$.
$D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = \mathbb{R}$.
Функція непарна;
зростає на $\mathbb{R}$.
Графік — парабола порядку $2n - 1$.
(для $n = 1$ графіком є пряма).</td><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

③ ***Степенева*** функція $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ E(f) = (0; +\infty)$. Функція парна. Вертикальна асимптота $x = 0$, горизонтальна асимптота $y = 0$.	
④ ***Степенева*** функція $y = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Функція непарна; спадає на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Вертикальна асимптота $x = 0$, горизонтальна асимптота $y = 0$.	
⑤ ***Степенева*** функція $y = \sqrt[2n]{x}$. $D(f) = [0; +\infty),\ E(f) = [0; +\infty)$. Функція зростає на $[0; +\infty)$.	
⑥ ***Степенева*** функція $y = \sqrt[2n-1]{x}$. $D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна; зростає на $\mathbb{R}$.	
❹ *Піднесення до степеня* і *взяття кореня* є ***взаємно оберненими*** діями.	$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} \lvert x \rvert, & n = 2k, \\ x, & n = 2k-1, \end{cases} k \in \mathbb{N};$ $(\sqrt[n]{x})^n = x$
❺ ***Властивості степенів.*** ① $x^a x^b = x^{a+b}$; ② $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$; ③ $(x^a)^b = x^{ab}$; ④ $(xy)^a = x^a y^a$; ⑤ $\left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$	❻ ***Властивості коренів*** $(x \geq 0, y \geq 0)$. ① $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$; ② $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$; ③ $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$; ④ $\sqrt[n]{x^n y} = x\sqrt[n]{y}$; ⑤ $x\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n y}$

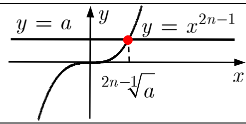
❼ *Основні степеневі рівняння та нерівності* $(n \in \mathbb{N})$

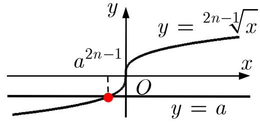
	$a<0$	$a=0$	$a>0$
$x^{2n}<a$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\begin{cases} x>-\sqrt[2n]{a}, \\ x<\sqrt[2n]{a} \end{cases}$
$x^{2n}=a$	$\varnothing$	$x=0$	$x=\pm\sqrt[2n]{a}$
$x^{2n}>a$	$\mathbb{R}$	$x\neq 0$	$\left[\begin{array}{l} x<-\sqrt[2n]{a}, \\ x>\sqrt[2n]{a} \end{array}\right.$
$\sqrt[2n]{x}<a$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\begin{cases} x\geq 0, \\ x<a^{2n} \end{cases}$
$\sqrt[2n]{x}=a$	$\varnothing$	$x=0$	$x=a^{2n}$
$\sqrt[2n]{x}>a$	$x\geq 0$	$x>0$	$x>a^{2n}$





$x^{2n+1}<a$	$x<\sqrt[2n+1]{a}$
$x^{2n+1}=a$	$x=\sqrt[2n+1]{a}$
$x^{2n+1}>a$	$x>\sqrt[2n+1]{a}$
$\sqrt[2n+1]{x}<a$	$x<a^{2n+1}$
$\sqrt[2n+1]{x}=a$	$x=a^{2n+1}$
$\sqrt[2n+1]{x}>a$	$x>a^{2n+1}$





❽ *Деякі ірраціональні рівняння та нерівності*

① $f^{2n}(x)=g^{2n}(x) \Leftrightarrow \left|f(x)\right|=\left|g(x)\right|;$

② $f^{2n+1}(x)=g^{2n+1}(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x);$

③ $\sqrt[2n]{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g^{2n}(x), \\ g(x)\geq 0; \end{cases}$

④ $\sqrt[2n+1]{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow f(x)=g^{2n+1}(x);$

⑤ $\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ f(x)=g(x); \end{cases}$

⑥ $\sqrt[2n+1]{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow f(x)<\bigl(g(x)\bigr)^{2n+1};$

⑦ $\sqrt[2n+1]{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow f(x)>\bigl(g(x)\bigr)^{2n+1};$

⑧ $\sqrt[2n+1]{f(x)}<\sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x);$

⑨ $\sqrt[2n]{f(x)}<\sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)>f(x); \end{cases}$

⑩ $\sqrt[2n]{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)>0, \\ f(x)<\bigl(g(x)\bigr)^{2n}; \end{cases}$

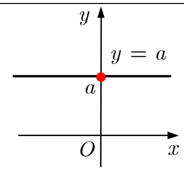
⑪ $\sqrt[2n]{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)\geq 0, \\ f(x)>\bigl(g(x)\bigr)^{2n}, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)<0, \\ f(x)\geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

5.4. Стала, лінійна та дробово-лінійна функції

❶ ***Стала*** функція $y = a$.
$D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \{a\}$.

Функція парна.

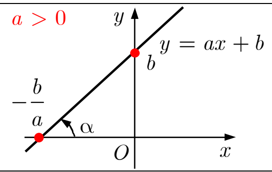
Графік — горизонтальна пряма.



❷ ***Лінійна*** функція $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

$D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \mathbb{R}$.

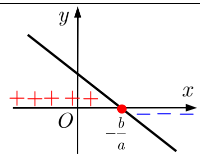
Графіком є пряма лінія з кутовим коефіцієнтом $k = a = \operatorname{tg}\alpha$.



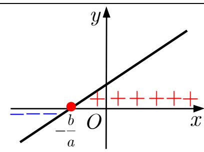
❸ ***Лінійне рівняння та нерівності***

	$a < 0$	$a > 0$
$ax + b > 0$	$x < -\dfrac{b}{a}$	$x > -\dfrac{b}{a}$
$ax + b = 0$	$x = -\dfrac{b}{a}$	
$ax + b < 0$	$x > -\dfrac{b}{a}$	$x < -\dfrac{b}{a}$

$a < 0$



$a > 0$



❹ ***Дробово-лінійна*** функція

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} =$$

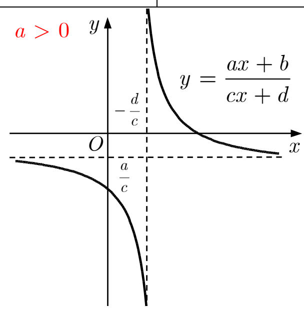
$$= \frac{a}{c} + \frac{b - (ad)/c}{cx+d} \quad (c \neq 0).$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}, E(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}.$$

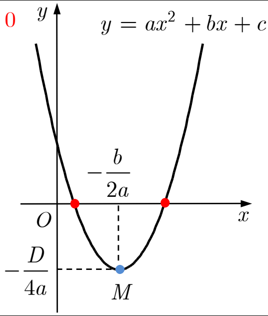
Графік — гіпербола.

Вертикальна асимптота $x = -\dfrac{d}{c}$,

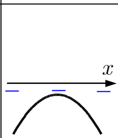
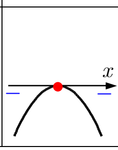
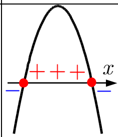
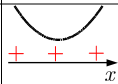
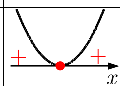
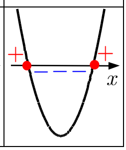
горизонтальна асимптота $y = \dfrac{a}{c}$.



5.5. Квадратична функція

❶ ***Квадратична*** функція $y = ax^2 + bx + c \ \ (a \neq 0)$. $D(f) = \mathbb{R}$. Графіком є парабола.	
❷ ***Дискримінант***	$D = b^2 - 4ac$
❸ ***Виділення повного квадрата***	$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$
❹ ***Корені*** квадратного рівняння $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$	$D \geq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
❺ ***Розклад на множники***	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
❻ ***Теорема Вієта***	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

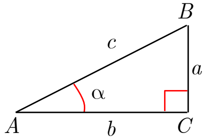
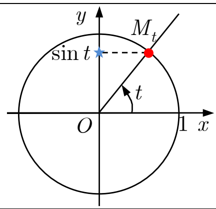
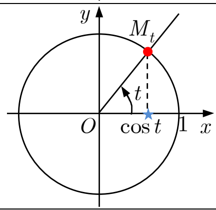
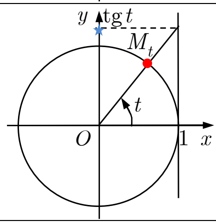
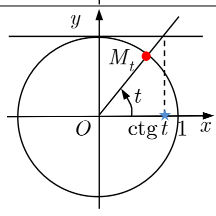
❼ ***Квадратні рівняння та нерівності*** $(x_1 < x_2)$

	$a < 0$			$a > 0$		
	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
$ax^2 + bx + c < 0$	$\mathbb{R}$	$x \neq x_1$	$\left[\begin{array}{l} x < x_1, \\ x > x_2 \end{array}\right.$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\begin{cases} x > x_1, \\ x < x_2 \end{cases}$
$ax^2 + bx + c = 0$	$\varnothing$	$x = x_1$	$\{x_1, x_2\}$	$\varnothing$	$x = x_1$	$\{x_1, x_2\}$
$ax^2 + bx + c > 0$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\begin{cases} x > x_1, \\ x < x_2 \end{cases}$	$\mathbb{R}$	$x \neq x_1$	$\left[\begin{array}{l} x < x_1, \\ x > x_2 \end{array}\right.$
проміжки знакосталості функції $y = ax^2 + bx + c$						

5.6. Многочлени

❶ ***Многочлен n-го степеня*** $(a_0 \neq 0, n \in \mathbb{N})$	$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$
$a_0, a_1, \ldots, a_n$ — *коефіцієнти многочлена*; a_0 — *старший коефіцієнт*;	a_0x^n — *старший член многочлена*; a_n — *вільний член многочлена.*
❷ ***Тотожна рівність многочленів***	$P_n(x) \equiv Q_m(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : P_n(x) = Q_m(x)$
Два многочлени тотожно рівні, якщо вони однакового степеня і мають рівні коефіцієнти при однакових степенях.	Якщо значення двох многочленів $P_n(x)$ та $Q_n(x)$ збігаються для $(n+1)$ різних значень аргументу x, то ці многочлени тотожно рівні.
❸ ***Корені (нулі) многочлена***	
① x_0 — корінь многочлена $P_n(x)$	$P_n(x) = (x - x_0)Q_{n-1}(x)$
② x_0 — корінь кратності k	$P_n(x) = (x - x_0)^k Q_{n-k}(x),\ Q_{n-k}(x_0) \neq 0$
❹ ***Основна теорема алгебри.*** Кожний многочлен степеня $n \geq 1$ з комплексними коефіцієнтами має хоча б один корінь.	① Многочлен степеня n може мати не більше як n коренів. ② Многочлен непарного степеня з дійсними коефіцієнтами має принаймні один дійсний корінь.
❺ ***Раціональні корені многочлена.*** Раціональними коренями многочлена $P_n(x)$ з цілими коефіцієнтами можуть бути лише числа $\dfrac{m}{p}$, де $m \in \mathbb{Z}$ — дільник a_n, $p \in \mathbb{Z}$ — дільник a_0, НСД$(m,p) = 1$.	
❻ ***Ділення многочлена на многочлен***	$\dfrac{A_n(x)}{B_m(x)} = Q_{n-m}(x) + \dfrac{R_k(x)}{B_m(x)}$,
де $Q_{n-m}(x)$ — частка (ціла частина дробу) $(n \geq m)$; $R_k(x)$ — остача $(k < m)$.	
❼ ***Теорема Безу.*** Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен $x - a$ дорівнює значенню цього многочлена для $x = a$: $P_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x) + P_n(a).$	
❽ ***Схема Горнера***	
$b_0 = a_0;\ b_1 = a_1 + \alpha b_0;$ … $b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2};$ $r = a_n + \alpha b_{n-1}$	$\begin{array}{c\|cccccc} & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ & & + & + & + & + & + \\ & & \alpha b_0 & \alpha b_1 & \ldots & \alpha b_{n-2} & \alpha b_{n-1} \\ \hline \alpha & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & r \end{array}$
$P_n(x) = a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n, Q_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}, r = P_n(a).$	

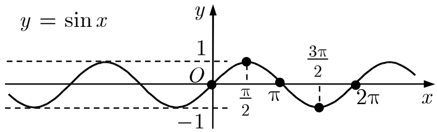
5.7. Тригонометричні функції

❶ ***Прямокутний трикутник.*** AB — *гіпотенуза*; AC — *прилеглий катет*; BC — *протилежний катет*		
❷ ***Синус.*** *Синусом* числа t називають ординату точки M_t одиничного кола й позначають $\sin t$. Основний період синуса 2π: $\sin(t+2\pi k)=\sin t, k\in\mathbb{Z}$		$\sin\alpha=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{a}{c}$
❸ ***Косинус.*** *Косинусом* числа t називають абсцису точки M_t одиничного кола й позначають $\cos t$. Основний період косинуса 2π: $\cos(t+2\pi k)=\cos t, k\in\mathbb{Z}$		$\cos\alpha=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{b}{c}$
❹ ***Тангенс.*** *Тангенсом* числа t називають ординату точки перетину прямої $x=1$ (*осі тангенсів*) із променем OM_t й позначають $\operatorname{tg} t$. Основний період тангенса π: $\operatorname{tg}(t+\pi k)=\operatorname{tg} t, k\in\mathbb{Z}$		$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{a}{b}$
❺ ***Котангенс.*** *Котангенсом* числа t називають абсцису точки перетину прямої $y=1$ (*осі котангенсів*) із променем OM_t й позначають $\operatorname{ctg} t$. Основний період котангенса π: $\operatorname{ctg}(t+\pi k)=\operatorname{ctg} t, k\in\mathbb{Z}$		$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{b}{a}$
❻ ***Зв'язок*** між тригонометричними функціями	$\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

<table>
<tr>
<td>

❼ ***Функція*** $y = \sin x$.
$D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [-1;1]$.
Функція непарна;
періодична з періодом $T = 2\pi$;
обмежена: $\left|\sin x\right| \le 1$.
Графік — *синусоїда*.

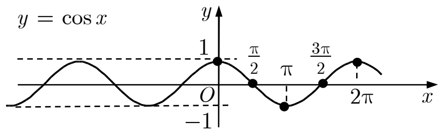
</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

❽ ***Функція*** $y = \cos x$.
$D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [-1;1]$.
Функція парна;
періодична з періодом $T = 2\pi$;
обмежена: $\left|\cos x\right| \le 1$.
Графік — *косинусоїда*.

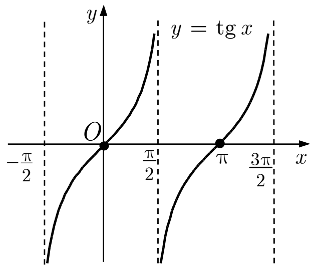
</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

❾ ***Функція*** $y = \operatorname{tg} x$.
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$,
$E(f) = \mathbb{R}$.
Функція непарна;
періодична з періодом $T = \pi$;
зростає на $D(f)$.
Графік — *тангенсоїда*.
Вертикальні асимптоти
$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

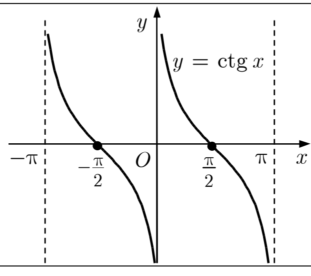
</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

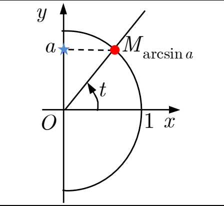
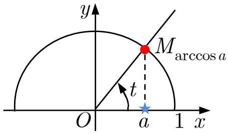
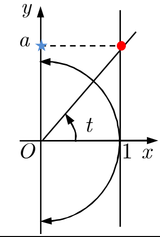
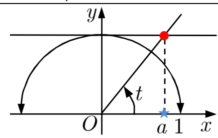
❿ ***Функція*** $y = \operatorname{ctg} x$.
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}, E(f) = \mathbb{R}$.
Функція непарна;
періодична з періодом $T = \pi$;
спадає на $D(f)$.
Графік — *котангенсоїда*.
Вертикальні асимптоти $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

</td>
<td>

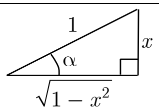
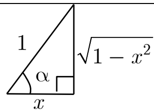
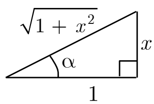
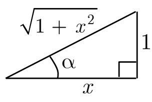


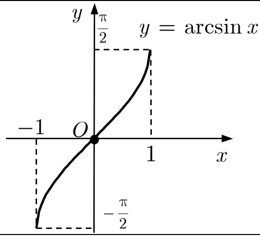
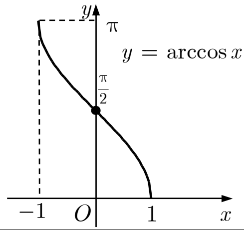
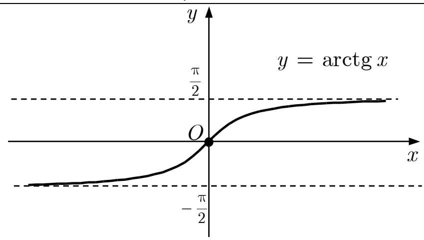
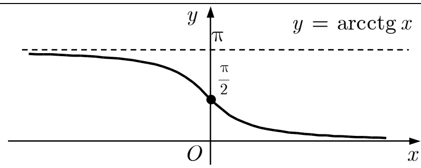
</td>
</tr>
</table>

5.8. Обернені тригонометричні функції

❶ ***Арксинус.*** *Арксинусом* числа a називають число $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює a, і позначають $\arcsin a$.	$\arcsin a = t \Rightarrow$ $\sin t = a$	
❷ ***Арккосинус.*** *Арккосинусом* числа a називають число $t \in [0; \pi]$, косинус якого дорівнює a, і позначають $\arccos a$.	$\arccos a = t \Rightarrow$ $\cos t = a$	
❸ ***Арктангенс.*** *Арктангенсом* числа a називають число $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a, і позначають $\operatorname{arctg} a$.	$\operatorname{arctg} a = t \Rightarrow$ $\operatorname{tg} t = a$	
❹ ***Арккотангенс.*** *Арккотангенсом* числа a називають число $t \in (0; \pi)$, котангенс якого дорівнює a, і позначають $\operatorname{arcctg} a$.	$\operatorname{arcctg} a = t \Rightarrow$ $\operatorname{ctg} t = a$	

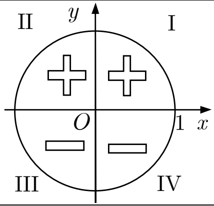
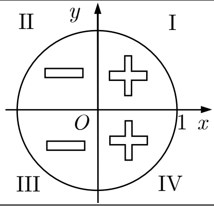
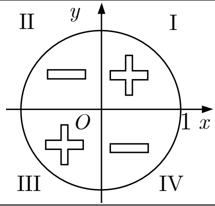
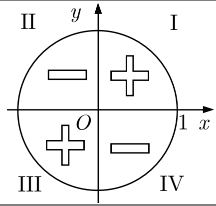
❺ ***Формули значень тригонометричних функцій від обернених тригонометричних функцій***

	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
sin	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
cos	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
tg	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$
ctg	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	x
				

❻ ***Функція*** $y = \arcsin x$. $D(f) = [-1;1]$, $E(f) = \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. Функція непарна; зростає на $D(f)$.	
❼ ***Функція*** $y = \arccos x$. $D(f) = [-1;1]$, $E(f) = [0;\pi]$. Функція спадає на $D(f)$.	
❽ ***Функція*** $y = \operatorname{arctg} x$. $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. Функція непарна; зростає на $D(f)$. Горизонтальні асимптоти $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$.	
❾ ***Функція*** $y = \operatorname{arcctg} x$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \left(0;\pi\right)$. Функція спадає на $D(f)$. Горизонтальні асимптоти $y = 0$, $y = \pi$.	
❿ Прямі й обернені тригонометричні функції є ***взаємно оберненими***	
① $\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1;1]$,	$\arcsin(\sin x) = x, x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$
② $\cos(\arccos x) = x, x \in [-1;1]$	$\arccos(\cos x) = x, x \in [0;\pi]$
③ $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$	$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$
④ $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$	$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, x \in (0;\pi)$

5.9. Властивості тригонометричних тригонометричних функцій

❶ *Знаки* тригонометричних функцій

$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
			

❷ *Парність (непарність)* тригонометричних функцій

① $\sin(-x) = -\sin x$;

② $\cos(-x) = \cos x$;

③ $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$;

④ $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$;

⑤ $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;

⑥ $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$

❸ *Формули зведення*

	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$	$\pi - x$	$\pi + x$
sin	$\cos x$	$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
cos	$\sin x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x$
tg	$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x$
ctg	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x$

① $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$;

② $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$;

③ $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;

④ $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$

❹ *«Стандартні» значення*

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0	–

	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$
arcsin	0	$\frac{\pi}{6}$	$*$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	–
arccos	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$*$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	–
arctg	0	$*$	$\frac{\pi}{6}$	$*$	$*$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
arcctg	$\frac{\pi}{2}$	$*$	$\frac{\pi}{3}$	$*$	$*$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

де «–» — відповідного значення не існує; «∗» — значення «нестандартне».

❺ ***Основні тригонометричні тотожності.***

① $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

② $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$;

③ $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

④ $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

❻ ***Формули додавання.***

① $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$;

② $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$;

③ $\operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$;

④ $\operatorname{ctg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y}$

❼ ***Формули кратних аргументів.***

① $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$;

② $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

③ $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$;

④ $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

❽ ***Формули зниження степеня.***

① $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$;

② $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

❾ ***Формули для універсальної тригонометричної підстановки***

$t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ або $u = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$

① $\sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2} = \dfrac{2u}{u^2 + 1}$;

② $\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} = \dfrac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$

❿ ***Перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.***

① $2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$;

② $2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$;

③ $2 \sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y)$

⓫ ***Перетворення суми тригонометричних функцій у добуток.***

① $\sin x \pm \sin y = 2 \sin \dfrac{x \pm y}{2} \cos \dfrac{x \mp y}{2}$;

② $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x - y}{2} \cos \dfrac{x + y}{2}$;

③ $\cos x - \cos y = 2 \sin \dfrac{x + y}{2} \sin \dfrac{y - x}{2}$

⓬ ***Формула доповняльного кута.***

$A \sin \omega t + B \cos \omega t = M \sin(\omega t + \alpha)$

$M = \sqrt{A^2 + B^2}$ — *амплітуда*;

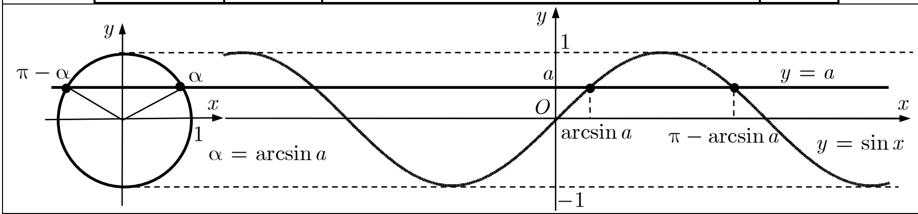
α — *доповняльний кут*:

$$\begin{cases} \cos \alpha = \dfrac{A}{M}, \\ \sin \alpha = \dfrac{B}{M} \end{cases}$$

5.10. Основні тригонометричні рівняння

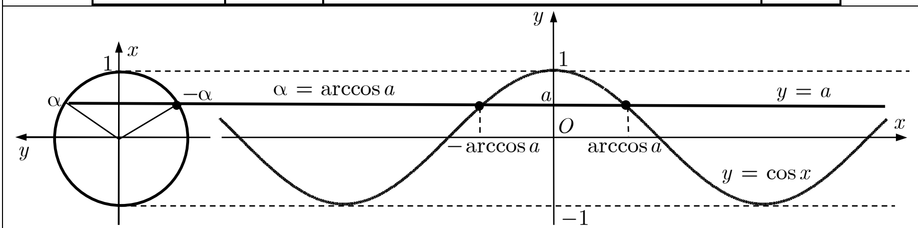
❶ *Рівняння та нерівності з синусом*

	$a < -1$	$\lvert a\rvert \le 1$	$a > 1$
$\sin x < a$	$\varnothing$	$-\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n$	$\mathbb{R}$
$\sin x = a$	$\varnothing$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\varnothing$
$\sin x > a$	$\mathbb{R}$	$\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n$	$\varnothing$
$\sin x = -1$		$-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	
$\sin x = 0$		$\pi n, n \in \mathbb{Z}$	
$\sin x = 1$		$\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	



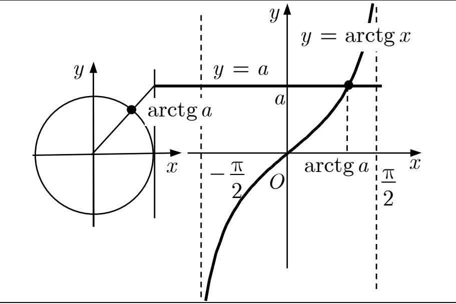
❷ *Рівняння та нерівності з косинусом*

	$a < -1$	$\lvert a\rvert \le 1$	$a > 1$
$\cos x < a$	$\varnothing$	$\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n$	$\mathbb{R}$
$\cos x = a$	$\varnothing$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\varnothing$
$\cos x > a$	$\mathbb{R}$	$-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n$	$\varnothing$
$\cos x = -1$		$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	
$\cos x = 0$		$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	
$\cos x = 1$		$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	



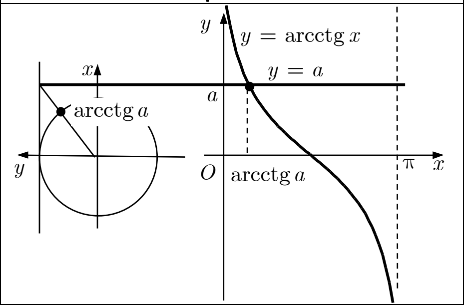
❸ *Рівняння та нерівності з тангенсом*

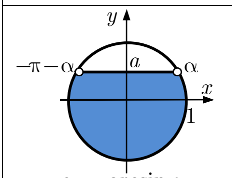
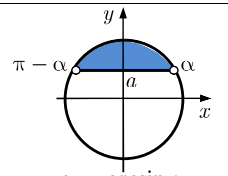
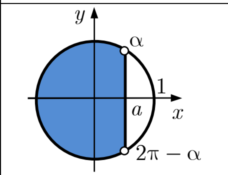
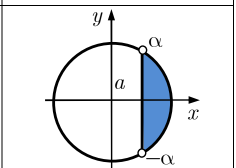
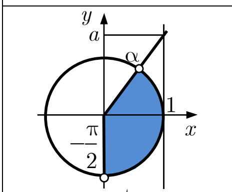
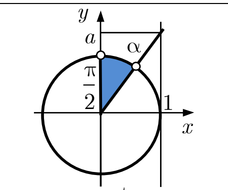
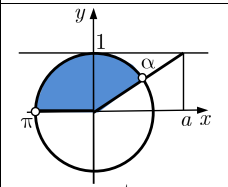
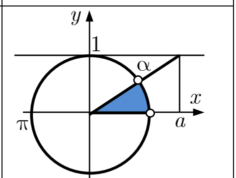
$\operatorname{tg} x < a$	$-\dfrac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x > a$	$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \dfrac{\pi}{2} + \pi n$
$\operatorname{tg} x = 0$	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$



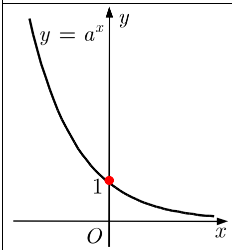
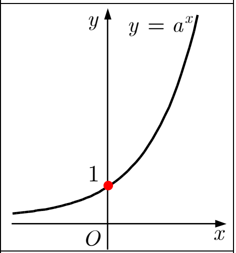
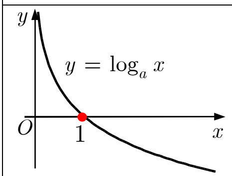
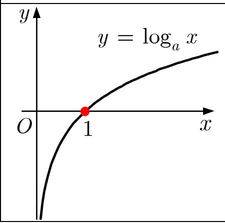
❹ *Рівняння та нерівності з котангенсом*

$\operatorname{ctg} x < a$	$\operatorname{arcctg} a + \pi n < x < \pi(n+1)$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x > a$	$\pi n < x < \operatorname{arcctg} a + \pi n$
$\operatorname{ctg} x = 0$	$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$



$\sin x < a$	$\sin x > a$	$\cos x < a$	$\cos x > a$
 $\alpha = \arcsin a$	 $\alpha = \arcsin a$	 $\alpha = \arccos a$	 $\alpha = \arccos a$
$\operatorname{tg} x < a$	$\operatorname{tg} x > a$	$\operatorname{ctg} x < a$	$\operatorname{ctg} x > a$
 $\alpha = \operatorname{arctg} a$	 $\alpha = \operatorname{arctg} a$	 $\alpha = \operatorname{arcctg} a$	 $\alpha = \operatorname{arcctg} a$

5.11. Показникова і логарифмічна функції

<table>
<tr><td rowspan="2">❶ Логарифм. Логарифмом додатного числа x за основою a $(a > 0, a \neq 1)$ називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a, щоб одержати число x, і позначають $\log_a x$.</td><td colspan="2">$\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x, x > 0$</td></tr>
<tr><td>① $\log_a 1 = 0$;</td><td>② $\log_a a = 1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">❷ Показникова функція $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$.
$D(f) = \mathbb{R}, E(f) = (0; +\infty)$.
Функція $\begin{cases} \text{спадає на } \mathbb{R}, & 0 < a < 1, \\ \text{зростає на } \mathbb{R}, & a > 1. \end{cases}$
Горизонтальна асимптота $y = 0$.</td><td>$0 < a < 1$</td><td>$a > 1$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">❸ Логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$.
$D(f) = (0; +\infty), E(f) = \mathbb{R}$.
Функція $\begin{cases} \text{спадає на } \mathbb{R}, & 0 < a < 1, \\ \text{зростає на } \mathbb{R}, & a > 1. \end{cases}$
Вертикальна асимптота $x = 0$.</td><td>$0 < a < 1$</td><td>$a > 1$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">❹ Окремі випадки логарифмів і показникової функції</td></tr>
<tr><td>① Десятковий логарифм</td><td colspan="2">$\lg x = \log_{10} x$</td></tr>
<tr><td>② Натуральний логарифм*</td><td colspan="2">$\ln x = \log_e x$</td></tr>
<tr><td>③ Експоненціальна функція</td><td colspan="2">$y = e^x$</td></tr>
<tr><td colspan="3">❺ Властивості логарифмів $(x > 0, y > 0)$</td></tr>
<tr><td>① основна логарифмічна тотожність</td><td colspan="2">$a^{\log_a b} = b$</td></tr>
<tr><td>② логарифм добутку</td><td colspan="2">$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$</td></tr>
<tr><td>③ логарифм частки</td><td colspan="2">$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$</td></tr>
</table>

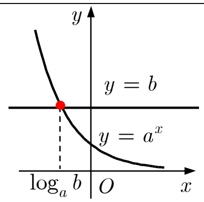
* Основа натурального логарифма — трансцендентне число $e \approx 2{,}718$ [6.2.6].

④ *логарифм степеня*	$\log_{a^r} x^p = \frac{p}{r}\log_a x$
⑤ *логарифм оберненого числа*	$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
⑥ *формула переходу до іншої основи*	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a}$; $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
❻ Логарифмічна й показникова функції є ***взаємно оберненими***	$\log_a a^x = x;$ $a^{\log_a x} = x, x > 0$
❼ ***Зв'язок*** між степеневою, показниковою й логарифмічною функціями	$x^{\alpha} = a^{\alpha \log_a x},$ $(x > 0, a > 0, a \neq 1)$

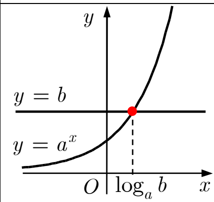
❽ ***Основні показникові рівняння та нерівності***

	$b \leq 0$	$b > 0$, $0 < a < 1$	$b > 0$, $a > 1$
$a^x < b$	$\varnothing$	$x > \log_a b$	$x < \log_a b$
$a^x = b$	$\varnothing$	$x = \log_a b$	
$a^x > b$	$\mathbb{R}$	$x < \log_a b$	$x > \log_a b$

$0 < a < 1$



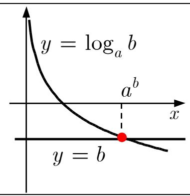
$a > 1$



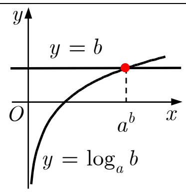
❾ ***Основні логарифмічні рівняння та нерівності***

	$0 < a < 1$	$a > 1$
$\log_a x < b$	$x > a^b$	$0 < x < a^b$
$\log_a x = b$	$x = a^b$	
$\log_a x > b$	$0 < x < a^b$	$x > a^b$

$0 < a < 1$



$a > 1$



❿ ***Деякі показникові та логарифмічні рівняння та нерівності***

① $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x);$

④ $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0; \end{cases}$

$0 < a < 1$	$a > 1$
② $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x);$	⑤ $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x);$
③ $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0; \end{cases}$	⑥ $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$

5.12. Гіперболічні функції

<table>
<tr><td>

❶ ***Гіперболічний синус***

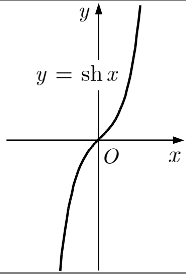
$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \mathbb{R}.$

Функція непарна.

Зростає на $\mathbb{R}$.

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

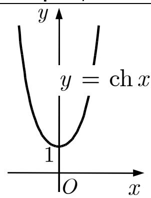
❷ ***Гіперболічний косинус***

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [1;+\infty).$

Функція парна.

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

❸ ***Гіперболічний тангенс***

$$y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

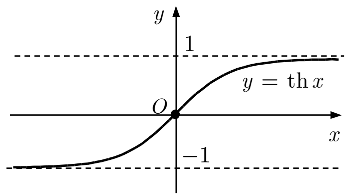
$D(f) = \mathbb{R}, E(f) = (-1;1).$

Функція непарна;

зростає на $\mathbb{R}$.

Графік має горизонтальні асимптоти $y = \pm 1$.

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

❹ ***Гіперболічний котангенс***

$$y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, E(f) = \mathbb{R} \setminus [-1;1].$

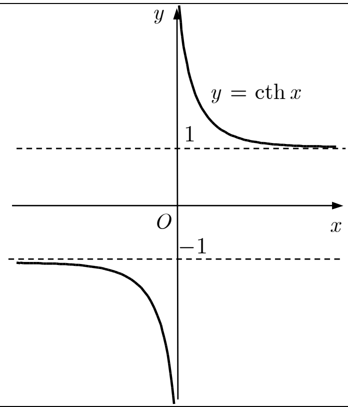
Функція непарна;

спадає на $D(f)$.

Вертикальна асимптота $x = 0$;

горизонтальні асимптоти $y = \pm 1$.

</td><td>



</td></tr>
</table>

❺ *Парність (непарність) функцій*

① $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$;

② $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$;

③ $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$;

④ $\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$

❻ *«Стандартні» значення.*

$$\operatorname{sh} 0 = 0;$$
$$\operatorname{ch} 0 = 1;$$
$$\operatorname{th} 0 = 0$$

❼ *Основні тотожності.*

① $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$;

② $\operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1$;

③ $1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

④ $1 - \operatorname{cth}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

❽ *Формули додавання.*

① $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x$;

② $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{sh} x$;

③ $\operatorname{th}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$;

④ $\operatorname{cth}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{cth} x \operatorname{cth} y \pm 1}{\operatorname{cth} y \pm \operatorname{cth} x}$

❾ *Формули кратних аргументів.*

① $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$;

② $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$;

③ $\operatorname{sh} 3x = 4 \operatorname{sh}^3 x + 3 \operatorname{sh} x$;

④ $\operatorname{ch} 3x = 4 \operatorname{ch}^3 x - 3 \operatorname{ch} x$

❿ *Формули зниження степеня.*

① $\operatorname{sh}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$;

② $\operatorname{ch}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$

⓫ *Формули для універсальної гіперболічної підстановки*

$$t = \operatorname{th} \frac{x}{2} \text{ або } u = \operatorname{cth} \frac{x}{2}$$

① $\operatorname{sh} x = \dfrac{2t}{1 - t^2} = \dfrac{2u}{u^2 - 1}$;

② $\operatorname{ch} x = \dfrac{1 + t^2}{1 - t^2} = \dfrac{u^2 + 1}{u^2 - 1}$

⓬ *Формули перетворення добутку гіперболічних функцій у суму.*

① $2 \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \operatorname{ch}(x + y) - \operatorname{ch}(x - y)$;

② $2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \operatorname{ch}(x + y) + \operatorname{ch}(x - y)$;

③ $2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \operatorname{sh}(x + y) + \operatorname{sh}(x - y)$

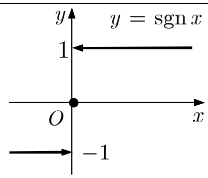
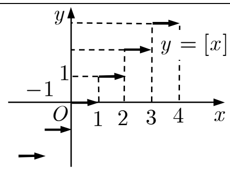
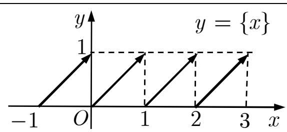
⓭ *Формули перетворення суми тригонометричних функцій у добуток.*

① $\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \dfrac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \dfrac{x \mp y}{2}$;

② $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \dfrac{x + y}{2} \operatorname{ch} \dfrac{x - y}{2}$;

③ $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \dfrac{x + y}{2} \operatorname{sh} \dfrac{x - y}{2}$

5.13. Класифікація функцій

❶ ***Основні елементарні*** функції: ① $f(x) = C$; ② $y = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$; ③ $y = a^{x}, a > 0, a \neq 1$; ④ $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$;	⑤ тригонометричні функції: $y = \sin x, y = \cos x,$ $y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x;$ ⑥ обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x,\ \ y = \arccos x,$ $y = \operatorname{arctg} x;\ \ y = \operatorname{arcctg} x$
❷ ***Елементарна*** функція — функція, одержана скінченною кількістю суперпозицій і арифметичних дій над основними елементарними функціями.	
❸ ***Раціональні*** функції: ① *ціла раціональна* функція $P_n(x)$; ② *дробово-раціональна* функція $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$	❹ ***Ірраціональна*** функція — функція, одержана скінченною кількістю суперпозицій і арифметичних дій над раціональними функціями та над степеневими функціями із дробовими показниками, яка не є раціональною.
❺ ***Алгебричні*** функції. ① раціональна функція; ② ірраціональна функція	❻ ***Трансцендентна*** функція — елементарна функція, яка не є алгебричною.
❼ ***Кусково-задана функція***	$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in X_1, \\ \dots & \dots \\ f_n(x), & x \in X_n \end{cases}$
❽ Функція ***знак числа*** (***сигнум***) $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$ $D(f) = \mathbb{R},\ \ E(f) = \{-1, 0, 1\}.$ Функція непарна.	
❾ ***Ціла частина*** числа $[x] = \begin{cases} x, & x = n \in \mathbb{Z}, \\ n, & n < x < n + 1. \end{cases}$ $D(f) = \mathbb{R},\ \ E(f) = \mathbb{Z}.$ Функція неспадна.	
❿ ***Дробова частина*** числа $\{x\} = x - [x].$ $D(f) = \mathbb{R},\ \ E(f) = [0; 1).$ Функція періодична з періодом $T = 1$.	

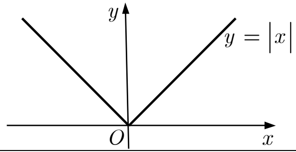
5.14. Функція модуль

❶ Функція ***модуль*** числа.

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = [0; +\infty)$.

Функція парна.



$$|x| = \sqrt{x^2}$$

❷ *Властивості модуля.*

① $|x| \geq 0$;

② $|x| = |-x|$;

③ $x = y \Rightarrow |x| = |y|$;

④ $-|x| \leq x \leq |x|$;

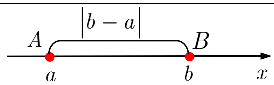
⑤ $|xy| = |x||y|$;

⑥ $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$;

⑦ $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*нерівність трикутника*);

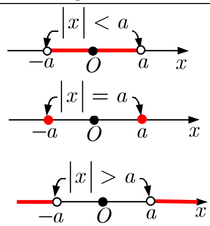
⑧ $|x| - |y| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$

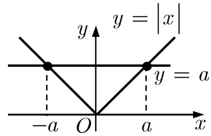
❸ *Геометричний зміст модуля.* Віддаль між точками $A(a)$ та $B(b)$ числової прямої дорівнює $|b - a|$.



❹ *Основні рівняння та нерівності з модулем*

	$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
$\lvert x\rvert < a$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\begin{cases} x > -a, \\ x < a \end{cases}$
$\lvert x\rvert = a$	$\varnothing$	$x = 0$	$\{-a, a\}$
$\lvert x\rvert > a$	$\mathbb{R}$	$x \neq 0$	$\left[\begin{array}{l} x < -a, \\ x > a \end{array}\right.$





❺ *Рівняння та нерівності з модулем*

① $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x); \end{array}\right.$

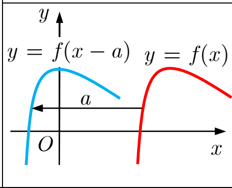
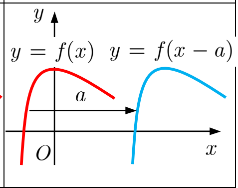
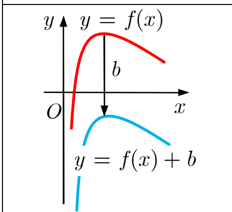
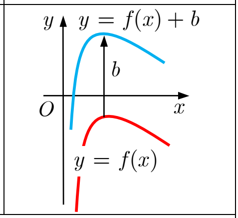
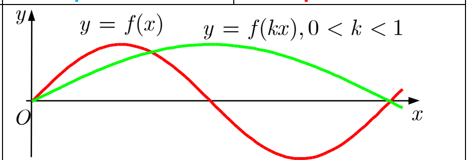
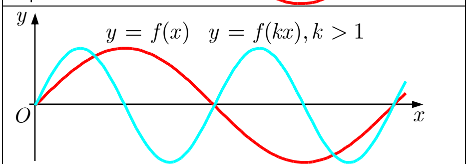
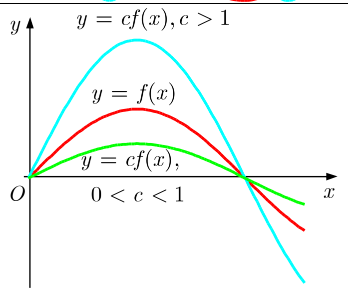
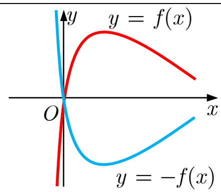
② $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \end{array}\right. \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$

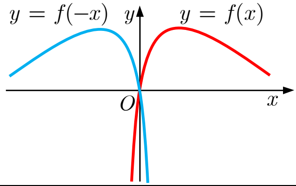
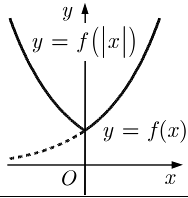
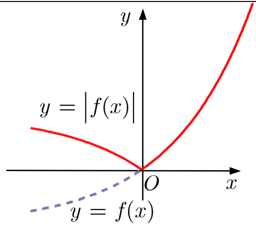
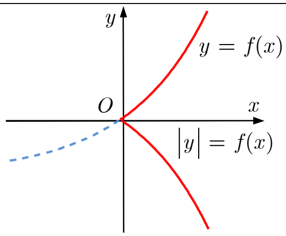
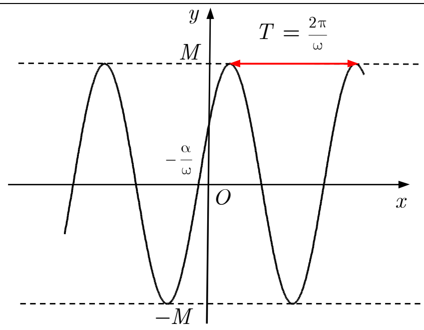
③ $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x)$;

④ $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x); \end{cases}$

⑤ $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$

5.15. Геометричні перетворення графіків функцій

❶ ***Паралельне перенесення вздовж осі Ox.*** Щоб побудувати графік $y = f(x - a)$, графік $y = f(x)$ паралельно переносять уздовж осі Ox на a (ліворуч для $a < 0$, праворуч для $a > 0$).	$a < 0$ 	$a > 0$ 
❷ ***Паралельне перенесення вздовж осі Oy.*** Щоб побудувати графік $y = f(x) + b$, графік $y = f(x)$ паралельно переносять уздовж осі Oy на b (вниз для $b < 0$, вгору для $b > 0$).	$b < 0$ 	$b > 0$ 
❸ ***Стискання (розтягування) вздовж осі Ox.*** Щоб побудувати графік $y = f(kx)$, графік $y = f(x)$ розтягують у $\dfrac{1}{k}$ разів $(0 < k < 1)$ уздовж осі Ox чи стискають у k разів $(k > 1)$ вздовж осі Ox	 	
❹ ***Стискання (розтягування) вздовж осі Oy.*** Щоб побудувати графік $y = cf(x)$, графік $y = f(x)$ стискають в $\dfrac{1}{c}$ разів $(0 < c < 1)$ вздовж осі Oy чи розтягують у c разів $(c > 1)$ вздовж осі Oy.		
❺ ***Дзеркальне відбивання відносно осі Ox.*** Щоб побудувати графік $y = -f(x)$, графік $y = f(x)$ симетрично відбивають відносно осі Ox.		

❻ ***Дзеркальне відбивання відносно осі Oy.*** Щоб побудувати графік $y = f(-x)$, графік $y = f(x)$ симетрично відбивають відносно осі Oy.	
❼ ***Графік функції $y = f\left(\lvert x\rvert\right)$.*** Щоб побудувати графік $y = f\left(\lvert x\rvert\right)$, частину графіка $y = f(x), x \geq 0$, доповнюють його відбитком відносно осі Oy.	
❽ ***Графік функції $y = \lvert f(x)\rvert$.*** Щоб побудувати графік $y = \lvert f(x)\rvert$, частину графіка $y = f(x), y \geq 0$, не міняють, а частину графіка $y = f(x), y < 0$, відбивають відносно осі Ox.	
❾ ***Графік рівняння $\lvert y\rvert = f(x)$.*** Щоб побудувати графік $\lvert y\rvert = f(x)$, беруть частину графіка $y = f(x), y \geq 0$, і доповнюють її відбитком відносно осі Ox.	
❿ ***Гармонічне коливання*** $$y = M\sin(\omega t + \alpha),$$ де t — час, $M > 0$ — *амплітуда*, $\omega > 0$ — *частота* (колова), $\omega t + \alpha$ — *фаза*, α — *початкова фаза*.	

Практикум 5.1. Числові функції

Навчальні задачі

5.1.1. Для функції $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$ знайти: $f(0), f(2), \left|f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|, f(-x)$. Чи існує $f(-1)$?

Розв'язання. [5.1.1.]

[*Підставляючи значення аргументу x у формулу для функції f, дістаємо відповідні значення функції.*]

$$f(0)=\frac{0-2}{0+1}=-2;$$
$$f(2)=\frac{2-2}{2+1}=0;$$
$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}-2}{\frac{1}{2}+1}\right|=|-1|=1;$$
$$f(-x)=\frac{-x-2}{-x+1}=\frac{x+2}{1-x}.$$

Значення $f(-1)$ не існує, оскільки $-1\notin D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5.1.2. Знайти $f(-2), f(0), f(1)$, якщо $f(x)=\begin{cases}1+x, & x\le 0,\\ 2^x, & x>0.\end{cases}$

Розв'язання. ①

[*Визначаємо в які проміжки потрапляють значення аргументу й вибираємо відповідні формули для значень функцій.*]

$$-2\in(-\infty;0]\Rightarrow f(-2)=(x+1)\Big|_{x=-2}=-1;$$
$$0\in(-\infty;0]\Rightarrow f(0)=(x+1)\Big|_{x=0}=1;$$
$$1\in(0;+\infty)\Rightarrow f(1)=2^x\Big|_{x=1}=2.$$

Коментар. ① Маємо кусково-задану функцію, тобто задану різними формулами на різних проміжках.

5.1.3.1. Знайти природну область означення функції

$$f(x)=\sqrt{x-7}+\sqrt{10-x}.$$

Розв'язання. [5.1.4.]

[*Знаходимо природну область означення суми функцій як перетин областей означення доданків.*]

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad f_1(x) = \sqrt{x-7}, f_2(x) = \sqrt{10-x}.$$

$$D(f_1) = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 7 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\};$$

$$D(f_2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 10 - x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 10\}.$$

$$D(f) = D(f_1) \cap D(f_2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 \leq x \leq 10\} = [7;10].$$

5.1.3.2. Знайти природну область означення функції $f(x) = \dfrac{\arcsin(x-1)}{\log_2 x}$.

Розв'язання.

[*Знаходимо природну область означення частки функцій як різницю перетину областей означення діленого та дільника і множини тих значень аргументу, де дільник дорівнює нулю.*]

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \quad f_1(x) = \arcsin(x-1), f_2(x) = \log_2 x.$$

$$D(f_1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x - 1 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\};$$

$$D(f_2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\};$$

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_2 x = 0\} = \{1\}.$$

$$D(f) = (D(f_1) \cap D(f_2)) \setminus X = (0;1) \cup (1;2].$$

5.1.4. Знайти множину значень функції:

1) $f(x) = x^2 - 8x + 20$; 2) $f(x) = 3^{-x^2}$;

3) $f(x) = 2\sin x - 7$.

Розв'язання.

1. [*Перетворюємо вираз для $f(x)$, виділяючи повний квадрат.*]

$$f(x) = x^2 - 8x + 20 = (x-4)^2 + 4 \geq 4 \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$E(f) = [4;+\infty).$$

2. $E(-x^2) = (-\infty;0] \Rightarrow E(3^{-x^2}) = E(3^{-x})\Big|_{x\in(-\infty;0]} = [1;+\infty)$.

3. $E(\sin x) = [-1;1] \Rightarrow E(2\sin x) = [-2;2] \Rightarrow E(2\sin x - 7) = [-9;-5]$.

5.1.5.1. Записати в явному вигляді функцію y, яку задано неявно рівнянням $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1, y \leq 0$.

Розв'язання.

[*Виражаємо y з рівняння та враховуємо обмеження на аргумент x.*]

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1\\ y\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{x^2}{9}-1,\\ y\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\pm2\sqrt{\dfrac{x^2}{9}-1},\\ y\le 0\\ \dfrac{x^2}{9}-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{2}{3}\sqrt{x^2-9},\\ x^2\ge 9.\end{cases}$$

$$y=-\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}, x\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty).$$

5.1.5.2. Записати в явному вигляді функцію y, яку задано неявно рівнянням $xy=8$.

Розв'язання.

$$y=\frac{8}{x}, x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty).$$

5.1.6.1. Записати в явному вигляді функцію, яку задано параметрично рівняннями: $\begin{cases}x=3t,\\ y=6t-t^2.\end{cases}$

Розв'язання. ①

[*Виражаємо t з одного із рівнянь (у цьому прикладі з 1-го).*]

$$t=\frac{x}{3}.$$

[*Підставляючи знайдене значення параметра у друге рівняння, виключаємо параметр.*]

$$y=2x-\frac{x^2}{9}.$$

Коментар. ① Треба виключити параметр із параметричних рівнянь.

5.1.6.2. Записати в явному вигляді функцію, яку задано параметрично рівняннями $\begin{cases}x=\cos t;\\ y=\cos 2t.\end{cases}$

Розв'язання.

[*Шукаємо можливий зв'язок між виразами $x=x(t)$ та $y=y(t)$.*]

$$y=\cos 2t=2\cos^2 t-1=2x^2-1.$$

$$y=2x^2-1.$$

5.1.7. Знайти значення параметра t, яке відповідає координатам точки $M_0(3;2)$ на лінії $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$

Розв'язання.

[*Підставляючи координати точки в параметричні рівняння лінії, дістаємо систему щодо змінної* t.]

$$\begin{cases} 3 = t^2 + 2t, \\ 2 = t^3 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = -3, \end{array}\right. \\ 2 = t^3 + t \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.$$

$t = 1.$

5.1.8.1. Знайти обернену функцію до функції $f(x) = 2x + 5$ і визначити її область означення.

Розв'язання. [5.1.6.]

[***Крок 1.*** *Знаходимо область означення і множину значень функції.*]

$D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \mathbb{R}.$

[***Крок 2.*** *З'ясовуємо існування оберненої функції.*]

Оскільки функція f зростає для всіх $x \in \mathbb{R}$, то вона має обернену функцію на $\mathbb{R}$.

[***Крок 3.*** *Знаходимо вираз для оберненої функції, розв'язуючи рівняння* $y = f(x)$ *щодо* x.]

$$y = 2x + 5 \Leftrightarrow x = \frac{y-5}{2}.$$

[***Крок 4.*** *Записуємо відповідь.*]

Оберненою до $f(x)$ функцією є функція

$$f^{-1}(y) = \frac{y-5}{2}, y \in \mathbb{R}.$$

5.1.8.2. Знайти обернену функцію до функції $f(x) = x^2 + 2$ і визначити її область означення.

Розв'язання.

$D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = [2;+\infty).$

Оскільки для будь-якого $y \in (2;+\infty)$ рівняння

$$x^2 + 2 = y$$

має два різних розв'язки

$$x_1 = \sqrt{y^2 - 2} \text{ та } x_2 = -\sqrt{y^2 - 2},$$

то задана функція не має оберненої.

5.1.9.1. Для функцій $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$ знайти суперпозиції: а) $f \circ g$ та б) $g \circ f$, указати їхні області означення.

Розв'язання. [5.1.5.]

[*Знаходимо області означення функцій, які входять до суперпозиції.*]

$D(f) = \mathbb{R}, D(g) = [0;+\infty)$.

А. [*Знаходимо множину значень внутрішньої функції суперпозиції* $f \circ g$.]

$E(g) = [0;+\infty) \subset D(f)$.

[*Знаходимо формулу для суперпозиції функцій.*]

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

[*Знаходимо область означення суперпозиції.*]

$$D(f \circ g) = \{x \in D(g) \mid g(x) \in D(f)\} = [0,+\infty).$$

[*Записуємо відповідь.*]

$(f \circ g)(x) = x, x \in [0,+\infty)$.

Б. [*Так само для* $(g \circ f)(x)$.]

$E(f) = [0;+\infty) \subset D(g)$.

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = \left|x\right|.$$

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(g)\} = \mathbb{R}.$$

$(g \circ f)(x) = \left|x\right|, x \in \mathbb{R}$.

5.1.9.2. Для функцій $f(x) = \ln(x^2), g(x) = \sin x$ знайти суперпозиції: а) $f \circ g$ та б) $g \circ f$, указати їхні області означення.

Розв'язання. [5.1.5.]

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, D(g) = \mathbb{R}$.

А. $E(g) = [-1;1]$. $E(g) \setminus \{0\} \in D(f)$.

$$(f \circ g)(x) = \ln(\sin x)^2.$$

$$D(f \circ g) = \{x \in D(g) \mid g(x) \in D(f)\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

$(f \circ g)(x) = \ln(\sin x)^2, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Б. $E(f) = \mathbb{R} = D(g)$.

$$(g \circ f)(x) = \sin\ln(x^2).$$

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(g)\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$(g \circ f)(x) = \sin\ln(x^2), x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5.1.10.1. Визначити функцію f, яка справджує умову

$$f(x+1) = x^2 - 3x + 2.$$

Розв'язання.

[*Замінюємо змінну.*]

Нехай $x+1=t$, тоді $x=t-1$. Отже,

$$f(t) = f(x+1) = x^2 - 3x + 2 = t^2 - 5t + 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

5.1.10.2. Визначити функцію f, яка справджує умову

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}, x > 0.$$

Розв'язання.

Нехай $\dfrac{1}{x} = t$, тобто $x = \dfrac{1}{t}, t > 0$. Отже,

$$f(t) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{t} + \sqrt{1+\frac{1}{t^2}} = \frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}, t > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}, x > 0.$$

5.1.11.1. Показати, що функція $f(x) = \log_a x$ справджує функціональне рівняння $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 x_2)$.

Розв'язання.

Справді, для будь-яких $x_1 > 0$ та $x_2 > 0$ маємо

$$f(x_1) + f(x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a x_1 x_2 = f(x_1 x_2).$$

5.1.11.2. Показати, що функція $f(x) = a^x$ справджує функціональне рівняння $f(x_1)f(x_2) = f(x_1 + x_2)$.

Розв'язання.

Справді, для будь-яких x_1 та x_2 маємо

$$f(x_1)f(x_2) = a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2} = f(x_1 + x_2).$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

5.1.12. Знайдіть значення: $f(0), f(1), f(-x), f\left(\dfrac{1}{x}\right), \dfrac{1}{f(x)}$ для функції:

1) $f(x) = x^2 + x - 2$; 2) $f(x) = x^3 - x^2 + 3$.

5.1.13. Знайдіть значення: $f(-2), f(0), f(1), f(2)$ для функції:

1) $f(x) = \begin{cases} 2x^3, & x < 0, \\ 3x, & x \geq 0; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1, \\ x^3, & x > 1. \end{cases}$

5.1.14. Знайдіть множину Y, на яку функція f відображує множину X, якщо:

1) $f(x) = x^2, X = [-1;2]$; 2) $f(x) = x^3, X = [-2;1]$;

3) $f(x) = \log_3 x, X = (3;27]$; 4) $f(x) = \log_{1/2} x, X = [2;8)$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{4^x}, X = (0;1)$; 6) $f(x) = 2^x, X = (-1;2]$.

5.1.15. Знайдіть природну область означення функції:

1) $f(x) = \sqrt{x-2} + \dfrac{1}{x^2 - 4}$; 2) $f(x) = \sqrt{3-x} - \dfrac{1}{x^3 - 27}$;

3) $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{\arccos x}$; 4) $f(x) = \dfrac{\log_4(-x)}{\mathrm{arctg}(x+1)}$.

5.1.16. Знайти множину значень функції:

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 10$; 2) $f(x) = x^2 + 4x + 9$;

3) $f(x) = 2^{x^2} - 1$; 4) $f(x) = 3^{x^3} + 1$;

5) $f(x) = 3 - 7\cos x$; 6) $f(x) = 7\sin x - 3$.

5.1.17. Запишіть у явному вигляді функцію y, яку задано неявно рівнянням:

1) $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$; 2) $x^2 y = 5$;

3) $2^{x+y} = 4$; 4) $\log_2(y-2) + \log_2 x = 1$.

5.1.18. Запишіть у явному вигляді функцію y, яку задано параметрично рівняннями:

1) $\begin{cases} x = t + 3, \\ y = t^2 + 6t + 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3\cos^2 t; \\ y = 2\sin^2 t. \end{cases}$

5.1.19. Знайдіть обернену функцію до функції f та її область означення, якщо:

1) $f(x) = 3x - 4$; 2) $f(x) = -2x + 3$;

3) $f(x) = \sin x, x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 4) $f(x) = \cos x, x \in [-\pi; 0]$;

5) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; 6) $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$;

7) $f(x) = 3^{x-4}$; 8) $f(x) = \log_4(x + 2)$.

5.1.20. Знайдіть суперпозиції $f \circ g$ і $g \circ f$, укажіть їхні області означення:

1) $f(x) = 1 - x, g(x) = x^2$; 2) $f(x) = 2^x, g(x) = \log_2 x$;

3) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; +\infty), \\ 0, & x \in (-\infty; 0), \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; +\infty), \\ x^2, & x \in (-\infty; 0). \end{cases}$

5.1.21. Задано $\varphi(x) = x^2, \psi(x) = 3^x$. Знайдіть:

1) $\varphi(\varphi(x)), \varphi(\psi(x))$; 2) $\psi(\psi(x)), \psi(\varphi(x))$.

5.1.22. Задано функції $u = \sin x, v = \log_2 x, w = 1 + x, y = \frac{1}{x}$ та $z = \sqrt{x}$. Запишіть формулу, що задає суперпозицію:

1) $u \circ v \circ w \circ y \circ z$; 2) $z \circ y \circ w \circ v \circ u$;

3) $w \circ y \circ v \circ z \circ u$; 4) $y \circ v \circ z \circ u \circ w$.

5.1.23. Запишіть функцію за допомогою суперпозиції основних елементарних функцій:

1) $f(x) = \cos^3 2^x$; 2) $f(x) = \sin^2(\log_2 x)$;

3) $f(x) = \log_2 \operatorname{tg} x^3$; 4) $f(x) = 3^{\arcsin^2 x}$.

5.1.24. Визначте, які з точок A та B належать лінії, заданої рівняннями:

1) $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t, \end{cases} A(0; 0), B(3; 3)$;

2) $\begin{cases} x = \sin t + 1, \\ y = \cos t - 1, \end{cases} A(0; -1), B(1{,}6; -0{,}2)$.

5.1.25. Для графіка параметрично заданої функції $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} t \in [0; \pi]$ знайдіть:

1) координати точки, яка відповідає значенню параметра $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

2) значення параметра t, яке відповідає точці $M_0(1; 0)$.

5.1.26. Визначте функцію f, що справджує умову:

1) $f(x-2) = \dfrac{1}{x+1}, x \neq -1$; 2) $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}, x \neq 0$;

3) $f(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2$;

4) $f(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$.

5.1.27. Покажіть, що функція f справджує функціональне рівняння:

1) $f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 0, f(x) = kx + b$;

2) $f(x)f(-x) = 1, f(x) = a^x$;

3) $f(x_1) + f(x_2) = f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2}\right)$, $f(x) = \lg \dfrac{1+x}{1-x}$.

5.1.28. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x| - x$; 2) $y = |x| - (\sqrt{x})^2$;

3) $y = \operatorname{sgn} \cos x$; 4) $y = \operatorname{sgn} \sin x$;

5) $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$; 6) $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$;

7) $y = x^{\log_x (x^2 - 2)}$; 8) $y = \sqrt{2}^{\log_2 x}$;

9) $y = \sin(\arcsin x)$; 10) $y = \arcsin(\sin x)$;

11) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$; 12) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$.

Відповіді

5.1.12. 1) $f(0) = -2, f(1) = 0, f(-x) = x^2 - x - 2, f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} - 2, \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$;

2) $f(0) = 3, f(1) = 3, f(-x) = -x^3 - x^2 + 3, f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^2} + 3, \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x^3 - x^2 + 3}$.

5.1.13. 1) $f(-2) = -16, f(0) = 0, f(1) = 3, f(2) = 6$;
2) $f(-2) = 3, f(0) = -1, f(1) = 0, f(2) = 8$.

5.1.14. 1) $Y = [0;4]$; 2) $[-8;1]$; 3) $Y = (1;3]$; 4) $Y = (-3;-1]$;
5) $Y = \left(\frac{1}{4};1\right)$; 6) $Y = \left(\frac{1}{2};4\right]$.

5.1.15. 1) $D(f) = (2;+\infty)$; 2) $D(f) = (-\infty;3)$; 3) $D(f) = (0;1)$;
4) $D(f) = (-\infty;-1) \cup (-1;0)$.

5.1.16. 1) $E(f) = (-\infty;-1]$; 2) $E(f) = [5;+\infty)$; 3) $E(f) = [0;+\infty)$; 4) $E(f) = (1;+\infty)$;
5) $E(f) = [-4;10]$; 6) $E(f) = [-10;4]$.

5.1.17. 1) $y = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1;1]$; 2) $y = \frac{5}{x^2}, x \neq 0$; 3) $y = 2 - x, x \in \mathbb{R}$;
4) $y = \frac{2}{x} + 2, x \in (0;+\infty)$.

5.1.18. 1) $y = x^2 + 1$; 2) $y = 2 - \frac{2x}{3}$.

5.1.19. 1) $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y + \frac{4}{3}, D(f^{-1}) = \mathbb{R}$; 2) $f^{-1}(y) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}y, D(f^{-1}) = \mathbb{R}$;
3) $f^{-1}(y) = -\pi - \arcsin y, D(f^{-1}) = [-1;1]$; 4) $f^{-1}(y) = -\arccos y, D(f^{-1}) = [-1;1]$;
5), 6) не існує; 7) $f^{-1}(y) = \log_3 y + 4, D(f^{-1}) = (0;+\infty)$; 8) $f^{-1}(y) = 4^y - 2, D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

5.1.20. 1) $(f \circ g)(x) = 1 - x^2, x \in \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = (1-x)^2, x \in \mathbb{R}$;
2) $(f \circ g)(x) = x, x \in [0;+\infty), (g \circ f)(x) = x, x \in \mathbb{R}$;
3) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;+\infty), \\ x^2, & x \in (-\infty;0), \end{cases}$ $(g \circ f)(x) = 0, x \in \mathbb{R}$.

5.1.21. 1) $\varphi(\varphi(x)) = x^4, \varphi(\psi(x)) = 3^{2x}$; 2) $\psi(\psi(x)) = 3^{3^x}, \psi(\varphi(x)) = 3^{x^2}$.

5.1.22. 1) $\sin\log_2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$; 2) $\frac{1}{\sqrt{1 + \log_2 \sin x}}$; 3) $1 + \frac{1}{\log_2 \sqrt{\sin x}}$; 4) $\frac{1}{\log_2 \sqrt{\sin(1+x)}}$.

5.1.23. 1) $u \circ v \circ w, u = x^3, v = \cos x, w = 2^x$; 2) $u \circ v \circ w, u = x^2, v = \sin x, w = \log_2 x$;
3) $u \circ v \circ w, u = \log_2 x, v = \operatorname{tg} x, w = x^3$; 4) $u \circ v \circ w, u = 3^x, v = x^2, w = \arcsin x$.

5.1.24. 1) A; 2) A та B. **5.1.25.** 1) $M_0(0;1)$; 2) $t_0 = 0$.

5.1.26. 1) $f(x) = \frac{1}{x+3}$; 2) $f(x) = x^2 - 2$; 3) $f(x) = \cos x$; 4) $f(x) = \sin x$.

Практикум 5.2. Основні характеристики функцій

Навчальні задачі

5.2.1.1. Знайти множину нулів X_0, область додатності X_+ та область від'ємності X_- для функції $f(x) = 1 + x$.

Розв'язання. [5.2.1.]

[*Знаходимо значення* x, *де* $f(x) = 0$.]

$$1 + x = 0;\ x = -1 \Rightarrow X_0 = \{-1\}.$$

[*Знаходимо значення* x, *де* $f(x) > 0$.]

$$x + 1 > 0;\ x > -1 \Rightarrow X_+ = (-1; +\infty).$$

[*Знаходимо значення* x, *де* $f(x) < 0$.]

$$x + 1 < 0;\ x < -1 \Rightarrow X_- = (-\infty; -1).$$

5.2.1.2. Знайти множину нулів X_0, область додатності X_+ та область від'ємності X_- для функції $f(x) = \sin \pi x$.

Розв'язання.

$$\sin \pi x = 0;\ \pi x = \pi k, k \in \mathbb{Z};\ x = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow X_0 = \mathbb{Z}.$$

$$\sin \pi x > 0;\ 2\pi k < \pi x < \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};\ 2k < x < 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$X_+ = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \big(2k; 2k + 1\big).$$

$$\sin \pi x < 0 \Leftrightarrow -\pi + 2\pi k < \pi x < 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2k - 1 < x < 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_- = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \big(2k - 1; 2k\big).$$

5.2.2.1. Визначити, чи є функція $f(x) = 3x^7 - 2x^3 + \sin x$ парною, непарною або загального вигляду?

Розв'язання. [5.2.2, 5.2.3.]

[***Крок 1.*** *Знаходимо область означення функції і перевіряємо її на симетричність відносно точки* 0.]

$D(f) = (-\infty; +\infty)$ є симетричною відносно точки 0.

[***Крок 2.*** *Знаходимо* $f(-x)$.]

$$f(-x) = 3(-x)^7 - 2(-x)^3 + \sin(-x) = -3x^7 + 2x^3 - \sin x.$$

[***Крок 3.*** *Порівнюємо* $f(-x)$ *з* $f(x)$.]

$$f(-x) = -f(x).$$

[***Крок 4.*** *Висновуємо про функцію* f.]

Функція f є непарною.

5.2.2.2. Визначити, чи є функція $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 - 25}$ парною, непарною або загального вигляду?

Розв'язання.

$D(f) = (-\infty;-5) \cup (-5;5) \cup (5;+\infty)$ є симетричною відносно точки 0.

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{(-x)^2 - 25} = \frac{\cos x}{x^2 - 25}.$$
$$f(-x) = f(x).$$

Функція f є парною.

5.2.2.3. Визначити, чи є функція $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ парною, непарною або загального вигляду?

Розв'язання.

$D(f) = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$ не є симетричною відносно точки 0.

Функція f є ні парною, ні непарною (є загального вигляду).

5.2.2.4. Визначити, чи є функція $f(x) = 2^x$ парною, непарною або загального вигляду?

Розв'язання.

$D(f) = (-\infty;+\infty)$ є симетричною відносно точки 0.

$$f(-x) = 2^{-x}.$$
$$f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x).$$

Функція f є загального вигляду.

5.2.3.1. З'ясувати, чи є функція $f(x) = 5\cos 7x$ періодичною і визначити її основний період T.

Розв'язання. [5.2.5, 5.7.8.]

Оскільки основним періодом функції $\cos x$ є число $T_0 = 2\pi$, то періодом[1] функції $f(x) = 5\cos 7x$ є число $T = \dfrac{2\pi}{7}$.

Отже, функція f є періодичною з основним періодом $T = \dfrac{2\pi}{7}$.

Коментар. ① Можна показати, що цей період є основним.
Справді, якщо $T_1 > 0$ — який-небудь інший період цієї функції, то для будь-якого x виконано

$$5\cos 7\left(x + T_1\right) = 5\cos 7x.$$

Тобто $7T_1$ — період функції $\cos t$, де $t = 7x$, і, отже, $7T_1 \ge 2\pi \Rightarrow T_1 \ge \dfrac{2\pi}{7}$.

5.2.3.2. З'ясувати, чи є функція $f(x) = \cos^2 2x$ періодичною і визначити її основний період T.

Розв'язання.
Оскільки

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2},$$

то період заданої функції збігається з періодом функції $\cos 4x$.
Основним періодом $\cos x$ є число $T_0 = 2\pi$. Отже, основний період функції $\cos 4x$ є число $T = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

Функція f є періодичною з основним періодом $T = \dfrac{\pi}{2}$.

5.2.3.3. З'ясувати, чи є функція $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - 2\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$ періодичною і визначити її основний період T.

Розв'язання. [5.7.9.]

Основний період функції $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ дорівнює $T_1 = 2\pi$, а основний період функції $\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$ дорівнює $T_2 = 3\pi$.

Основним періодом функції $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - 2\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$ є найменше спільне кратне чисел 2π та 3π — число $T = 6\pi$.
Функція f є періодичною з основним періодом $T = 6\pi$.

5.2.3.4. З'ясувати, чи є функція $f(x) = x\sin x$ періодичною і визначити її основний період T.

Розв'язання.
Доведімо, що функція f неперіодична, від супротивного. Нехай $T > 0$ — період функції f. Тоді,

$$f(x+T) = (x+T)\sin(x+T) = x\sin x \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Покладімо в цій рівності $x = 0$:

$$T\sin T = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} T = 0, \\ T = \pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{array}\right. \\ T > 0 \end{cases} \Rightarrow T = \pi k, k \in \mathbb{N}.$$

Отже, період (якщо він існує), може дорівнювати лише πk.

Якщо $x = 2\pi n, n \in \mathbb{N}$, то

$$f(x + 2\pi n) = (x + 2\pi n)\sin(x + 2\pi n) = (x + 2\pi n)\sin x \neq x\sin x.$$

Якщо $x = (2n-1)\pi, n \in \mathbb{Z}$, то

$$f(x + (2n-1)\pi) = (x + (2n-1)\pi)\sin(x + (2n-1)\pi) =$$
$$= -(x + (2n-1)\pi)\sin x \neq x\sin x.$$

Одержана суперечність доводить, що функція f неперіодична.

5.2.4. Продовжити функцію $f(x) = x^2$, $x \in (0;+\infty)$ на $(-\infty;0]$ так, щоб продовжена функція на $\mathbb{R}$ була: а) парною, б) непарною.

Розв'язання. [5.2.2–5.2.4.]

А. Нехай парним продовженням функції f на всю числову вісь є функція

$$f_{\text{п}}(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ a, & x = 0, \\ g(x), & x < 0. \end{cases}$$

Для парності функції $f_{\text{п}}$ потрібно, щоб

$$\forall x \in (-\infty;0)\ f_{\text{п}}(x) = g(x) = f_{\text{п}}(-x) = f(-x) = x^2;$$
$$f_{\text{п}}(0) = a = f_{\text{п}}(0) \Rightarrow a \in \mathbb{R}.$$

Отже,

$$f_{\text{п}}(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ a, & x = 0, a \in \mathbb{R} \text{ (рис. 1)}. \\ x^2, & x < 0. \end{cases}$$

Б. Нехай непарним продовженням функції f на всю числову вісь є функція

$$f_{\text{н}}(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ a, & x = 0, \\ g(x), & x < 0. \end{cases}$$

Для непарності функції потрібно, щоб

$$\forall x \in (-\infty;0)\ f_{\text{н}}(x) = g(x) = -f_{\text{н}}(-x) = -f(-x) = -x^2;$$
$$f_{\text{н}}(0) = a = -f_{\text{н}}(0) = -a \Rightarrow a = 0.$$

Отже,

$$f_{\text{н}}(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x^2, & x < 0. \end{cases} \text{ (рис. 2).}$$

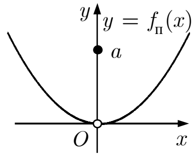


Рис. 1 до 5.2.4

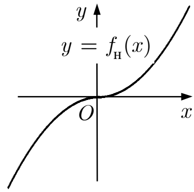


Рис. 2 до 5.2.4

5.2.5. Довести, що функція $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ зростає на множині $(1;+\infty)$.

Розв'язання. [5.2.6.]

$D(f) = \mathbb{R}$. Розгляньмо x_1 та x_2 $(x_2 > x_1)$.

[_Щоб довести нерівність_ $f(x_2) > f(x_1)$ _розгляньмо знак різниці_ $f(x_2) - f(x_1)$.**]**

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2 + \frac{1}{x_2} - x_1 - \frac{1}{x_1} = x_2 - x_1 - \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}$$
$$= (x_2 - x_1)\frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2} > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

5.2.6.1. Довести, що функція $f(x) = 9 - x^2$ обмежена зверху на множині $\mathbb{R}$.

Розв'язання. [5.2.9.]

Оскільки $9 - x^2 \le 9$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$, то функція f є обмеженою зверху на $\mathbb{R}$.

5.2.6.2. Довести, що функція $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$ обмежена на $\mathbb{R}$.

Розв'язання.

Оскільки $\dfrac{x^2}{1 + x^2} = 1 - \dfrac{1}{1 + x^2}$, то

$$0 \le \frac{x^2}{1 + x^2} \le 1 \Rightarrow \left|\frac{x^2}{1 + x^2}\right| \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Отже, функція f є обмеженою на $\mathbb{R}$.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

5.2.7. Знайти множину нулів X_0, область додатності X_+ й область від'ємності X_- для функції:

1) $f(x) = 2 + x - x^2$;
2) $f(x) = x^2 + 5x + 4$;
3) $f(x) = 3^x - 9$;
4) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 2$;
5) $f(x) = \log_{1/2} x - 1$;
6) $f(x) = \log_2 x - 3$;
7) $f(x) = \cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}}, x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$;
8) $f(x) = \sin 2x - \frac{1}{2}, x \in [0; \pi]$.

5.2.8. З'ясувати, чи функція f є парною, непарною чи загального вигляду, якщо:

1) $f(x) = e^{x^2} \cos x$;
2) $f(x) = x^2 - 8x + 20$;
3) $f(x) = \arcsin(x + 1)$;
4) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$;
5) $f(x) = \ln \frac{1 - x}{1 + x}$;
6) $f(x) = \frac{1}{1 - x^4}, x \in (-1; 1)$;
7) $f(x) = \frac{2 \sin x}{5x}$;
8) $f(x) = |x + 3| - |x - 3|$;
9) $f(x) = x^2, x \in (-\infty; 1]$;
10) $f(x) = \sin x, x \in [0; \pi]$.

5.2.9. З'ясуйте, чи є функція f періодичною, і в разі періодичності визначте основний період T:

1) $f(x) = 3 \sin 4x$;
2) $f(x) = \sin^2 3x$;
3) $f(x) = \sin \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x$;
4) $f(x) = x^2$;
5) $f(x) = \sin x + \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$;
6) $f(x) = 3 \sin x - 5 \cos \pi x$;
7) $f(x) = 5$;
8) $f(x) = \{x\} + 1$.

5.2.10. Знайдіть $f(-4), f(10)$, де f — T-періодична функція, якщо:

1) $f(x) = |x-1|, x \in [0;3), T = 3$; 2) $f(x) = x^2, x \in [-1;3), T = 4$.

5.2.11. Продовжте функцію $f(x)$, $x \in (0;+\infty)$ на $(-\infty;0]$ так, щоб продовжена функція на $\mathbb{R}$ була: а) парною, б) непарною:

1) $f(x) = x + 1$; 2) $f(x) = e^x + 1$.

5.2.12. З'ясуйте, чи є функція f обмеженою, обмеженою зверху, обмеженою знизу, необмеженою на вказаній множині, якщо:

1) $f(x) = x^2 + 2, x \in [-1;3]$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}, x \in (-2;2)$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}, x \in [-1;1]$;

5) $f(x) = 3^x + 1, x \in \mathbb{R}$; 6) $f(x) = \log_2 x - 1, x \in (0;2]$.

Відповіді

5.2.7. 1) $X_0 = \{-1, 2\}, X_+ = (-1;2), X_- = (-\infty;-1) \cup (2;+\infty)$;

2) $X_0 = \{-4;-1\}, X_+ = (-\infty;-4) \cup (-1;+\infty), X_- = (-4;-1)$;

3) $X_0 = \{2\}, X_+ = (2;+\infty), X_- = (-\infty;2)$;

4) $X_0 = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}, X_+ = \left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right), X_- = \left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$;

5) $X_0 = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}, X_+ = \left(0;\dfrac{1}{2}\right), X_- = \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$; 6) $X_0 = \{8\}, X_+ = (8;+\infty), X_- = (0;8)$;

7) $X_0 = \left\{\dfrac{\pi}{12}\right\}, X_+ = \left[0;\dfrac{\pi}{12}\right), X_- = \left(\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{3}\right]$;

8) $X_0 = \left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}\right\}, X_+ = \left(\dfrac{\pi}{12};\dfrac{5\pi}{12}\right), X_- = \left[0;\dfrac{\pi}{12}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{12};\pi\right]$.

5.2.8. 1) парна; 2) загального вигляду; 3) загального вигляду; 4) непарна; 5) непарна; 6) парна; 7) парна; 8) непарна; 9) загального вигляду; 10) загального вигляду.

5.2.9. 1) періодична, $T = \dfrac{\pi}{2}$; 2) періодична, $\dfrac{\pi}{3}$; 3) періодична, 4π; 4) неперіодична; 5) періодична, $T = 2\pi$; 6) неперіодична; 7) періодична з будь-яким періодом; 8) періодична, $T = 1$.

5.2.10. 1) $f(-4) = 1, f(10) = 0$; 2) $f(-4) = 0, f(10) = 4$.

5.2.11. 1) $f_{\text{п}}(x)=\begin{cases} f(x), & x>0,\\ a\in\mathbb{R}, & x=0,\\ f(-x), & x<0\end{cases}=\begin{cases} x+1, & x>0,\\ a, & x=0,\\ 1-x, & x<0\end{cases}$ $f_{\text{н}}(x)=\begin{cases} f(x), & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -f(-x), & x<0\end{cases}=\begin{cases} x+1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x<0;\end{cases}$

2) $f_{\text{п}}(x)=\begin{cases} e^x+1, & x>0,\\ a, & x=0,\ a\in\mathbb{R},\\ e^{-x}+1, & x<0\end{cases}$ $f_{\text{н}}(x)=\begin{cases} e^x+1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -e^{-x}-1, & x<0.\end{cases}$

5.2.12. 1) обмежена; 2) обмежена; 3) обмежена зверху; 4) обмежена; 5) обмежена знизу; 6) обмежена зверху.

Практикум 5.3. Многочлени

Навчальні задачі

5.3.1. Зобразити графік функції $y=-\dfrac{1}{2}x+1$.

Розв'язання. [5.4.2.] ①

[*Знаходимо точки перетину прямої з осями координат і заповнюємо таблицю* ② .]

x	0	2
y	1	0

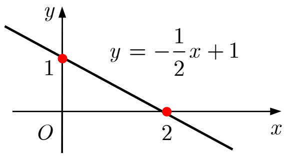


Рис. до 5.3.1

[*Зображуємо пряму.*]

Коментар. ① Оскільки графіком лінійної функції є пряма, то, для того щоб зобразити її, достатньо вибрати будь-які дві різні точки на цій прямій. Скажімо, точки перетину прямої з осями координат $A(0;y_1), B(x_2;0)$. Для цього покладають спершу $x=0$ і знаходять y_1, потім покладають $y=0$ і знаходять x_2 з лінійного рівняння.

② Покладаючи $x=0$, маємо $y_1=1$.

Покладаючи $y=0$, маємо $0=-\dfrac{1}{2}x_2+1 \Leftrightarrow x_2=2$.

5.3.2. Розв'язати рівняння $2x-4=0$.

Розв'язання. [5.4.3.]

$$2x-4=0 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{2}=2.$$

$x=2$.

5.3.3.1. Розв'язати нерівність $2x > 8$.
Розв'язання. [5.4.3.]

$$2x > 8 \Leftrightarrow x > \frac{8}{2} \Leftrightarrow x > 4.$$

$x \in (4;+\infty)$.

5.3.3.2. Розв'язати нерівність $-3x \geq 15$.
Розв'язання.

$$-3x \geq 15 \Leftrightarrow x \leq \frac{15}{-3} \Leftrightarrow x \leq -5.$$

$x \in (-\infty;-5]$.

5.3.4.1. Розв'язати рівняння $x^2 - 3x - 4 = 0$.
Розв'язання. [5.5.7.]

[***Крок 1.*** *Виписуємо коефіцієнти рівняння* $ax^2 + bx + c = 0$.]

$$a = 1, b = -3, c = -4.$$

[***Крок 2.*** *Знаходимо дискримінант квадратного рівняння* $D = b^2 - 4ac$.]

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25.$$

[***Крок 3.*** *Аналізуємо наявність дійсних коренів. Якщо корені є, знаходимо їх за формулою [5.5.4.]*]

Оскільки дискримінант $D > 0$, то квадратне рівняння має два різних корені:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{3+5}{2} = 4, \\ x_2 = \dfrac{3-5}{2} = -1. \end{array}\right.$$

$x_1 = 4, x_2 = -1$.

5.3.4.2. Розв'язати рівняння $9x^2 - 12x + 4 = 0$.
Розв'язання.

$$a = 9, b = -12, c = 4.$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0.$$

Квадратне рівняння має два рівні корені [*один двократний корінь*]:

$$x_1 = x_2 = \frac{12}{2 \cdot 9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

$x_{1,2} = \dfrac{2}{3}$.

5.3.4.3. Розв'язати рівняння $x^2 - x + 1 = 0$.
Розв'язання.

$$a = 1, b = -1, c = 1.$$
$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0.$$

Квадратне рівняння не має дійсних коренів.
$x \in \varnothing$.

5.3.5.1. Розв'язати за допомогою теореми Вієта квадратне рівняння

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Розв'язання. [5.5.6.]
[*Записуємо співвідношення теореми Вієта і підбираємо розв'язки системи.*]

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2; \\ x_1 \cdot x_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

$x_1 = -1, x_2 = 3$.

5.3.5.2. Розв'язати за допомогою теореми Вієта квадратне рівняння

$$2x^2 - x - 1 = 0.$$

Розв'язання.
[*Ділимо рівняння на старший коефіцієнт.*]

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{1}{2}; \\ x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{1}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$x_1 = -1, x_2 = \dfrac{1}{2}$.

5.3.6. Розкласти на множники тричлен $16x^2 + 15x - 1$.
Розв'язання. [5.5.5.]
[***Крок 1.*** *Знаходимо корені квадратного рівняння.*]

$$a = 16, b = 15, c = -1.$$
$$D = 15^2 - 4 \cdot 16 \cdot (-1) = 225 + 64 = 289 > 0.$$
$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm 17}{32} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{16}, \\ x_2 = -1. \end{array} \right.$$

[***Крок 2.*** *Розкладаємо многочлен на множники за формулою*
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).]$$

$$16x^2 + 15x - 1 = 16\left(x - \frac{1}{16}\right)\left(x + 1\right) = \left(16x - 1\right)\left(x + 1\right).$$

5.3.7. Скоротити дріб $\dfrac{2x^2+7x-4}{x^2+5x+4}$.

Розв'язання. [5.5.5.]

[*Розкладаємо многочлени в чисельнику і знаменнику дробу на множники.*]

$$2x^2+7x-4=0.$$
$$a=2, b=7, c=-4.$$
$$D=7^2-4\cdot 2\cdot(-4)=49+32=81>0.$$
$$x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{81}}{2\cdot 2}=\frac{-7\pm 9}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{1}{2},\\ x_2=-4.\end{array}\right.$$
$$2x^2+7x-4=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+4\right).$$

$$x^2+5x+4=0.$$
$$a=1, b=5, c=4.$$
$$D=5^2-4\cdot 1\cdot 4=25-16=9>0.$$
$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{-5\pm 3}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-1,\\ x_2=-4.\end{array}\right.$$
$$x^2+5x+4=\left(x+1\right)\left(x+4\right).$$

[*Підставляємо розкладені многочлени і скорочуємо дріб.*]

$$\frac{2x^2+7x-4}{x^2+5x+4}=\frac{2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\cancel{\left(x+4\right)}}{\left(x+1\right)\cancel{\left(x+4\right)}}=\frac{2x-1}{x+1}.$$

5.3.8.1. Виділити повний квадрат із многочлена x^2-4x+5.

Розв'язання. [5.5.3.]

$$x^2-4x+5=\left(x^2-2\cdot 2\cdot x+2^2\right)-2^2+5=(x-2)^2+1.$$

5.3.8.2. Виділити повний квадрат із многочлена $-2x^2-9x+5$.

Розв'язання. [5.5.3.]

$$-2x^2-9x+5=-2\left(x^2+\frac{9}{2}x-\frac{5}{2}\right)=$$
$$=-2\left(\left(x^2+2\cdot\frac{9}{4}x+\frac{9^2}{4^2}\right)-\frac{5}{2}-\frac{81}{16}\right)=-2\left(x+\frac{9}{4}\right)^2+\frac{121}{8}.$$

5.3.9.1. Розв'язати нерівність $x^2 - 6x + 8 < 0$.

Розв'язання. [5.5.7.]

[***Крок 1.*** *Знаходимо корені квадратного тричлена.*]

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ x_1 x_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 4. \end{cases}.$$

[***Крок 2.*** *Наносимо на числову вісь знайдені корені та вилучаємо їх.*]

Рис. до 5.3.9.1

[***Крок 3.*** *Визначаємо знак многочлена в кожному з інтервалів, на які розбивають корені рівняння числову вісь, проводячи «змійку».*] ①

[***Крок 4.*** *Записуємо відповідь.*] ②

$x \in (2;4)$.

Коментар. ① «Змійку» запускають праворуч від найбільшого кореня:

1) **зверху**, якщо старший коефіцієнт многочлена додатний;

2) **знизу**, якщо старший коефіцієнт многочлена від'ємний.

② На тих проміжках, де крива проходить:

1) **вище** числової прямої, виконано нерівність $f(x) > 0$;

2) **нижче** числової прямої, виконано нерівність $f(x) < 0$.

Оскільки нерівності строгі, то точки $x = 2$ та $x = 4$ не включаємо у відповідь.

5.3.9.2. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

Розв'язання.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

[*Оскільки нерівності нестрогі, то точки $x = 1$ та $x = 3$ включаємо у відповідь*].

$x \in (-\infty;1] \cup [3;+\infty)$.

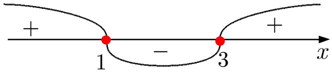


Рис. до 5.3.9.2

5.3.10. Знайти множину значень функції $y = x^2 + 4x + 5$.

Розв'язання. [5.5.1]

[*Виділяємо повний квадрат із квадратичного многочлена.*]

$$x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1.$$

Для всіх x правдиві нерівності:

$$(x+2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + 1 \geq 1.$$

Множина значень функції $E(y) = [1;+\infty)$.

5.3.11. Знайдіть коефіцієнти многочлена $P_n(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, якщо $P_n(x) \equiv 2x^3 - 3x + 1$.

Розв'язання. [5.6.2.]

[*Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях многочленів.*]①

$$\begin{array}{r|l} x^3 & a = 2, \\ x^2 & b = 0, \\ x & c = -3, \\ 1 & d = 1. \end{array}$$

Коментар. ① Відсутність у записі многочлена доданку певного степеня означає, що коефіцієнт при цьому степені дорівнює нулю.

5.3.12. Виділити цілу частину дробу $\dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 2}$.

Розв'язання. [5.6.6.]

[*Ділимо у стовпчик чисельник на знаменник.*]①

$$\begin{array}{rl|l} - & x^3 + x^2 - x - 1 & x - 2 \\ & x^3 - 2x^2 & \overline{x^2 + 3x + 5} \\ \hline - & 3x^2 - x - 1 & \\ & 3x^2 - 6x & \\ \hline - & 5x - 1 & \\ & 5x - 10 & \\ \hline & 9 & \end{array}$$

[*Записуємо відповідь. Частка є цілою частиною раціонального дробу, остача — чисельником, а дільник — знаменником.*]

$$\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1} = \\ = x^2 + 3x + 5 + \frac{9}{x - 2}.$$

Коментар. ① Ділити многочлени припиняють тоді, коли степінь остачі стане меншим від степеня дільника.

5.3.13. Розв'язати рівняння $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$.

Розв'язання. [5.6.8.]①

[***Крок 1.*** *Знаходимо дільники вільного члена рівняння.*]

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6.$

[***Крок 2.*** *Ділимо кубічний многочлен на $x - \alpha$, де α — один із знайдених дільників, за допомогою схеми Горнера*② .]

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ \hline
1 & 1 & 3 & -2 & -8 \\ \hline
-1 & 1 & 1 & -6 & 0
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
\Rightarrow x = 1 - \text{ не є коренем рівняння} \\
\Rightarrow x = -1 - \text{ корінь рівняння}
\end{array}$$

[***Крок 3.*** *Розкладаємо кубічний многочлен на множники.*]

$$(x+1)(x^2+x-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x^2+x-6=0. \end{array}\right.$$

[***Крок 4.*** *Розв'язуємо квадратне рівняння.*]

$$x^2+x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-3. \end{array}\right.$$

[***Крок 5.*** *Записуємо відповідь.*]

Отже, $x \in \{-1;2;-3\}$.

Коментар. ① Мова йде не про розв'язання кубічного рівняння за загальною формулою, а про відшукання можливого цілого кореня рівняння, що дозволить звести розв'язання кубічного рівняння до розв'язання квадратного.

② Можна ділити також многочлен на $(x-\alpha)$ у стовпчик.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

5.3.14. Побудуйте графік функції:

1) $y=x+1$;
2) $y=-2x-4$;
3) $x=-2$;
4) $x=2$;
5) $y=3$;
6) $y=-3$;
7) $y=|x+2|$;
8) $y=|x-3|$;
9) $y=1-|x|$;
10) $y=|x|+2$;
11) $y=|x+1|-|x-1|$;
12) $y=|x-2|+|x+2|$.

5.3.15. Розв'яжіть рівняння:

1) $3x=75$;
2) $9x=0$;
3) $\dfrac{x}{3}=8$;
4) $3x-5=16$;
5) $1-2x=15$;
6) $\dfrac{2x+1}{5}=\dfrac{x-4}{7}$.

5.3.16. Розв'яжіть нерівності:

1) $2x > 22$; 2) $7x \leq 21$;

3) $-3x > 15$; 4) $\dfrac{x-1}{2} > -2$.

5.3.17. Розв'яжіть рівняння:

1) $\left|2x+1\right| = 4$; 2) $\left|5x+2\right| = -2$;

3) $2x + \left|x-3\right| = 8$; 4) $5x + \left|x\right| = -48$;

5) $\left|x-1\right| + \left|x+2\right| = 3$; 6) $\left|x\right| + \left|x-1\right| = x$.

5.3.18. Розв'яжіть нерівність:

1) $\left|2x-3\right| < 2$; 2) $\left|3x+2\right| > 3$;

3) $\left|x+1\right| > -x$; 4) $\left|2x-5\right| \leq x$;

5) $\left|x\right| + \left|x-1\right| \leq 1$; 6) $\left|x\right| - \left|x-1\right| < 2$.

5.3.19. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 9$; 2) $-x^2 - 5x = 0$;

3) $x^2 - 6x + 8 = 0$; 4) $x^2 - 4x + 4 = 0$;

5) $x^2 + 4x + 5 = 0$; 6) $2x^2 + x - 3 = 0$;

7) $x^2 - 5\left|x\right| - 24 = 0$; 8) $x^2 + \left|x+1\right| = 1 - 2x$.

5.3.20. Розкладіть многочлен на множники:

1) $x^2 - 5x + 6$; 2) $x^2 + 8x + 15$;

3) $6x^2 - 5x - 6$; 4) $10x^2 - 17x + 3$;

5) $5x^2 + 23x - 10$; 6) $7x^2 - 8x + 1$.

5.3.21. Виділить повний квадрат із многочлена:

1) $x^2 - 4xy + 4y^2$; 2) $x^2 + 2x - 10$;

3) $x^2 - 4x + 9$; 4) $2x^2 + 4x + 9$;

5) $4x^2 - 3x + 6$; 6) $2x^2 + 3x - 1$.

5.3.22. Розв'яжіть нерівності:

1) $x^2 \le 4$; 2) $x^2 > 16$;

3) $(x-1)^2 > 0$; 4) $(x+2)^2 \le 0$;

5) $(x-1)(x-4) > 0$; 6) $(x+3)(5-x) \ge 0$;

7) $x^2 - \left|x\right| - 2 \ge 0$; 8) $x^2 - 3\left|x\right| + 2 < 0$;

9) $\left|x^2 - 3x\right| < 2$; 10) $\left|2x^2 - 12x + 13\right| \ge 3$.

5.3.23. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{a^2-4}{7a+14}$; 2) $\dfrac{y^2-49}{y^2+5y-14}$;

3) $\dfrac{7+6c-c^2}{21-3c}$; 4) $\dfrac{5a-a^2}{5+34a-7a^2}$.

5.3.24. Побудуйте графік і знайдіть: а) множину значень; б) інтервал зростання; в) інтервал спадання функції:

1) $y = x^2 - 2x + 2$; 2) $y = -x^2 - 6x + 5$;

3) $y = -x^2 - 4x$; 4) $y = x^2 - 4x$.

5.3.25. Побудуйте графік функції:

1) $y = -1 + \dfrac{1}{x-1}$; 2) $y = 2 + \dfrac{1}{x+3}$;

3) $y = \begin{cases} 2-x, & x < 1, \\ x^2, & x \ge 1; \end{cases}$ 4) $y = \begin{cases} \left|x\right|, & x \le 2, \\ x^2 - 2, & x > 2. \end{cases}$

5.3.26. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$; 2) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$;

3) $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$; 4) $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$;

5) $3x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 0$; 6) $4x^3 - 13x + 6 = 0$.

5.3.27. Розв'яжіть нерівності:

1) $(x+4)^5(x-1)^4(x-2)^7 < 0$; 2) $(x+7)^4(x+6)^5(x-9)^3 \le 0$;

3) $x^4(x+6)^5(x-9)^3 \ge 0$; 4) $(x+4)^5(x-3)^4(x-2)^7 > 0$.

5.3.28. Розділіть многочлен на многочлен у стовпчик:

1) $\dfrac{2x^3-5x^2-14x+8}{x-2}$; 2) $\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x-3}$;

3) $\dfrac{x^4-3x^3-x^2+8x-4}{x^2-4x+4}$; 4) $\dfrac{x^4+x^3+3x^2+2x+2}{x^2-x+1}$.

Відповіді

5.3.15. 1) $\{25\}$; 2) $\{0\}$; 3) $\{24\}$; 4) $\{7\}$; 5) $\{-7\}$; 6) $\{-3\}$.

5.3.16. 1) $(11;+\infty)$; 2) $(-\infty;3]$; 3) $(-\infty;-5)$; 4) $(-3;+\infty)$.

5.3.17. 1) $\left\{-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right\}$; 2) $\varnothing$; 3) $\left\{\frac{11}{3}\right\}$; 4) $\{-12\}$; 5) $[-2;1]$; 6) $\{1\}$.

5.3.18. 1) $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$; 2) $\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$; 3) $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$; 4) $\left[\frac{5}{3};5\right]$; 5) $[0;1]$; 6) $\mathbb{R}$.

5.3.19. 1) $\{-3;3\}$; 2) $\{0;-5\}$; 3) $\{2;4\}$; 4) $\{2\}$; 5) $\varnothing$; 6) $\left\{-\frac{3}{2};1\right\}$; 7) $\{-8;8\}$; 8) $\{-2;0\}$.

5.3.20. 1) $(x-2)(x-3)$; 2) $(x+3)(x+5)$; 3) $6\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$; 4) $10\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$;

5) $5(x+5)\left(x-\frac{2}{5}\right)$; 6) $7(x-1)\left(x-\frac{1}{7}\right)$.

5.3.21. 1) $(x-2y)^2$; 2) $(x+1)^2-11$; 3) $(x-2)^2+5$; 4) $2(x+1)^2+7$; 5) $4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{87}{16}$;

6) $2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{17}{8}$.

5.3.22. 1) $[-2;2]$; 2) $(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$; 3) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; 4) $\{-2\}$; 5) $(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$;

6) $[-3;5]$; 7) $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$; 8) $(-2;-1)\cup(1;2)$; 9) $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};1\right)\cup\left(2;\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$;

10) $(-\infty;1]\cup(2;4]\cup(5;+\infty)$.

5.3.23. 1) $\frac{a-2}{7}$; 2) $\frac{y-7}{y-2}$; 3) $\frac{c+1}{3}$; 4) $\frac{a}{7a+1}$.

5.3.24. 1) $E(y)=[1;+\infty)$, зростає на $(1;+\infty)$, спадає на $(-\infty;1)$;

2) $E(y)=(-\infty;14]$, зростає на $(-\infty;-3)$, спадає на $(-3;+\infty)$;

3) $E(y)=(-\infty;4]$, зростає на $(-\infty;-2)$, спадає на $(-2;+\infty)$;

4) $E(y)=[-4;+\infty)$, зростає на $(2;+\infty)$, спадає на $(-\infty;2)$.

5.3.26. 1) покласти $x^2=t$, $\{-1;1;-5;5\}$; 2) $\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\}$; 3) $\{-4;1;2\}$; 4) $\{-2;3\}$;

5) $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; 6) $\left\{-2;\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right\}$.

5.3.27. 1) $(-4;1)\cup(1;2)$; 2) $\{-7\}\cup[-6;9]$; 3) $(-\infty;-6]\cup\{0\}\cup[9;+\infty)$;
4) $(-\infty;-4)\cup(2;3)\cup(3;+\infty)$.

5.3.28. 1) $2x^2-x-16-\frac{24}{x-2}$; 2) $2x^2+3x-2$; 3) x^2+x-1;
4) $x^2+2x+4+\frac{4x-2}{x^2-x+1}$.

Практикум 5.4. Степенева функція

Навчальні задачі

5.4.1. Виконати дії:

1) $x^3\cdot x^5$; 2) $\frac{x^5}{x^3}$;

3) $\left(x^3\right)^5$; 4) x^0.

Розв'язання. [5.3.1, 5.3.5.]

1. $x^3\cdot x^5=x^{3+5}=x^8$.
2. $\frac{x^5}{x^3}=x^{5-3}=x^2$.
3. $\left(x^3\right)^5=x^{3\cdot 5}=x^{15}$.
4. $x^0=1$.

5.4.2. Обчислити $\frac{2^{12}\cdot 3^{12}}{2^{10}\cdot 3^{15}}$.

Розв'язання. [5.3.5.]

$$\frac{2^{12}\cdot 3^{12}}{2^{10}\cdot 3^{15}}=\frac{2^{12-10}}{3^{15-12}}=\frac{2^2}{3^3}=\frac{4}{27}.$$

5.4.3. Записати у вигляді степеня (із дробовим або від'ємним показником):

1) $\frac{1}{a^3}$; 2) $\sqrt[3]{a}$;

3) $\sqrt[3]{a^2}$; 4) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^5}}$.

Розв'язання. [5.3.1, 5.3.5.]

1. $\dfrac{1}{a^3} = a^{-3}$.

2. $\sqrt[3]{a} = a^{1/3}$.

3. $\sqrt[3]{a^2} = a^{2/3}$.

4. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^5}} = \dfrac{1}{a^{5/4}} = a^{-5/4}$.

5.4.4. Виконати дії:

1) $\sqrt[3]{x^6}$; 2) $\sqrt{x^6}$.

Розв'язання. [5.3.6.]

1. $\sqrt[3]{x^6} = x^{6/3} = x^2$.

2. $\sqrt{x^6} = |x|^{6/2} = |x|^3$.

5.4.5. Обчислити:

1) $\sqrt[5]{4^{10}}$; 2) $\sqrt{\dfrac{4}{25}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$.

Розв'язання. [5.3.6.]

1. $\sqrt[5]{4^{10}} = 4^{10/5} = 4^2 = 16$.

2. $\sqrt{\dfrac{4}{25}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \dfrac{2}{5}$.

3. $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$.

5.4.6. Винести множник з-під кореня:

1) $\sqrt[5]{2^7}$; 2) $\sqrt{24}$;

3) $\sqrt[4]{2500}$; 4) $\sqrt[3]{a^{11}b^4}$.

Розв'язання. [5.3.6.]

1. $\sqrt[5]{2^7} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^2} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{2^2} = 2\sqrt[5]{4}$.

2. $\sqrt{24} = \sqrt{2^2 \cdot 6} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$.

3. $\sqrt[4]{2500} = \sqrt[4]{5^4 \cdot 4} = \sqrt[4]{5^4} \cdot \sqrt[4]{4} = 5\sqrt[4]{2^2} = 5\sqrt{2}$.

4. $\sqrt[3]{a^{11}b^4} = \sqrt[3]{a^9 a^2 b^3 b} = \sqrt[3]{a^9 b^3} \cdot \sqrt[3]{a^2 b} = a^3 b \sqrt[3]{a^2 b}$.

5.4.7. Унести множник під корінь:

1) $3\sqrt[3]{6}$; 2) $a^2\sqrt[5]{b}$.

Розв'язання. [5.3.6.]

1. $3\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 6} = \sqrt[3]{162}$.
2. $a^2\sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a^{10}} \cdot \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a^{10}b}$.

5.4.8. Спростити вираз:

1) $4 \cdot 81^{1/4} + 2^0$; 2) $\sqrt[3]{81} - \sqrt{49}\sqrt[3]{24}$;

3) $\sqrt[4]{27a} \cdot \sqrt[4]{3a^3}$; 4) $\dfrac{\sqrt[5]{192t}}{\sqrt[5]{6t^{11}}}$.

Розв'язання. [5.3.1, 5.3.5, 5.3.6.]

1. $4 \cdot 81^{1/4} + 2^0 = 4 \cdot \sqrt[4]{81} + 1 = 4 \cdot 3 + 1 = 13$.
2. $\sqrt[3]{81} - \sqrt{49} \cdot \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} - 7\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} - 7\sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} =$
$$= 3\sqrt[3]{3} - 7 \cdot 2\sqrt[3]{3} = -11\sqrt[3]{3}.$$
3. $\sqrt[4]{27a} \cdot \sqrt[4]{3a^3} = \sqrt[4]{27a \cdot 3a^3} = \sqrt[4]{3^4 a^4} = 3a$.
4. $\dfrac{\sqrt[5]{192t}}{\sqrt[5]{6t^{11}}} = \sqrt[5]{\dfrac{192t}{6t^{11}}} = \sqrt[5]{\dfrac{32}{t^{10}}} = \dfrac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{t^{10}}} = \dfrac{2}{t^2}$.

5.4.9. Розв'язати рівняння $\sqrt{3x-6} = \sqrt{9-2x}$.

Розв'язання. [5.3.8.]

I спосіб (з перевіркою знайдених коренів).

$\sqrt{3x-6} = \sqrt{9-2x}$; $\left(\sqrt{3x-6}\right)^2 = \left(\sqrt{9-2x}\right)^2 \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow 3x - 6 = 9 - 2x \Leftrightarrow 5x = 15 \Leftrightarrow x = 3.$$

Перевірка.

Для $x = 3$: $\sqrt{3 \cdot 3 - 6} = \sqrt{3}$;$\sqrt{9 - 2 \cdot 3} = \sqrt{3}$.

$x = 3$ — корінь рівняння.

II спосіб (еквівалентних перетворень).

$$\sqrt{3x-6} = \sqrt{9-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6 \geq 0, \\ 3x - 6 = 9 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

$x = 3$.

5.4.10. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+11} = 1 - x$.

Розв'язання. [5.3.8.]

I спосіб (з перевіркою знайдених коренів).

$\sqrt{x+11}=1-x;\left(\sqrt{x+11}\right)^2=(1-x)^2 \Leftrightarrow$

$$x+11=1-2x+x^2 \Leftrightarrow x^2-3x-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-2, \\ x_2=5. \end{array}\right.$$

Перевірка.

Для $x=-2$: $\sqrt{-2+11}=\sqrt{9}=3; 1-(-2)=3$.

$x=-2$ — корінь рівняння.

Для $x=5$: $\sqrt{5+11}=\sqrt{16}=4;\ 1-5=-4$.

$x=5$ не є коренем рівняння.

Отже, $x=-2$.

II спосіб (еквівалентних перетворень).

$$\sqrt{x+11}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x\ge 0, \\ x+11\ge 0, \\ \left(\sqrt{x+11}\right)^2=(1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x\ge 0, \\ x+11=1-2x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1, \\ x^2-3x-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1, \\ \left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$$

$x=-2$.

5.4.11.1. Розв'язати нерівність $\sqrt{2x-1}>1$.

Розв'язання. [5.3.8.]

$$\sqrt{2x-1}>1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1\ge 0, \\ (\sqrt{2x-1})^2>1^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{2}, \\ 2x-1>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{2}, \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$$

$x\in(1;+\infty)$.

5.4.11.2. Розв'язати нерівність $\sqrt{2x+1}\le 3$.

Розв'язання. [5.3.8.]

$$\sqrt{2x+1}\le 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1\ge 0, \\ \left(\sqrt{2x+1}\right)^2\le 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{1}{2}, \\ 2x+1\le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{1}{2}, \\ x\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le x\le 4.$$

$x\in\left[-\frac{1}{2};4\right]$.

5.4.11.3. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+6} < -2$.

Розв'язання. [5.3.8.]

Оскільки $\sqrt{x+6} \geq 0$, то початкова нерівність розв'язків не має.

$x \in \varnothing$.

5.4.11.4. Розв'язати нерівність $\sqrt{x-2} \geq -1$.

Розв'язання. [5.3.8.]

Оскільки $\sqrt{x-2} \geq 0$, то початкова нерівність правдива для всіх x з області означення функції $f(x) = \sqrt{x-2}$.

$$D(f) = \{x \mid x - 2 \geq 0\} = \{x \mid x \geq 2\}.$$

$x \in [2; +\infty)$.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

5.4.12. Запишіть у вигляді степеня з основою x:

1) $(x^7 \cdot x^9)^2$;
2) $x^7 \cdot (x^9)^2$;
3) $\left(\dfrac{x^2}{x^9}\right)^3$;
4) $\left(\dfrac{x}{x^6}\right)^{-7}$;
5) $\left(\dfrac{x^3 \cdot x^4}{x^5}\right)^{-6}$;
6) $\left(\dfrac{x^4}{x^{-3}}\right)^{-8}$.

5.4.13. Знайдіть значення числових виразів:

1) $\dfrac{26^9}{13^8 \cdot 8^3}$;
2) $\dfrac{9^6 \cdot 4^3}{27^4 \cdot 2^5}$;
3) $\dfrac{3^5 \cdot 5^7}{15^7 \cdot 2^8} \cdot \dfrac{22^9 \cdot 3^{12}}{11^8 \cdot 9^4}$;
4) $\dfrac{34^{10}}{2^{11} \cdot 17^9} : \dfrac{7^6 \cdot 2^7}{14^8}$.

5.4.14. Запишіть у вигляді степеня (із дробовим або від'ємним показником):

1) $\dfrac{1}{x}$;
2) $\dfrac{1}{3(x-1)^3}$;
3) $\sqrt[5]{b^4}$;
4) $\dfrac{1}{\sqrt[11]{c^2}}$.

5.4.15. Запишіть у вигляді степеня з основою x:

1) $\left(\dfrac{x^2}{x^9}\right)^3$; 2) $\left(\dfrac{x}{x^6}\right)^{-7}$;

3) $\left(\dfrac{x^3\cdot x^4}{x^5}\right)^{-6}$; 4) $\left(\dfrac{x^4}{x^{-3}}\right)^{-8}$;

5) $x^{1/8}\cdot\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[8]{x^5}$; 6) $x^{8/9}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[9]{x^7}$;

7) $\dfrac{\sqrt[4]{x^3\cdot\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}$; 8) $\sqrt[5]{x^4\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt[4]{x^{-11}}}}$.

5.4.16. Знайдіть значення числового виразу:

1) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$; 2) $\sqrt[3]{135}\cdot\sqrt[3]{25}$;

3) $\dfrac{\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{4}}$; 4) $\sqrt[4]{32\cdot 3}\cdot\sqrt[4]{8\cdot 27}$.

5.4.17. Спростіть (усі змінні вважайте додатними):

1) $\sqrt[4]{x^2}$; 2) $\sqrt[4]{b^8}$;

3) $\sqrt{a^2b^4}$; 4) $\sqrt{\dfrac{49a^4}{169b^2}}$.

5.4.18. Перетворіть заданий вираз до вигляду $\sqrt[n]{A}$:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}$; 2) $\sqrt[4]{3b^3}\cdot\sqrt{3b}$;

3) $\sqrt[3]{ab}\cdot\sqrt[6]{4ab}$; 4) $\sqrt[4]{a^3}:\sqrt{a}$;

5) $\sqrt[12]{a^2b^3}:\sqrt[6]{ab^4}$; 6) $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$;

7) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2m^4n^8}}$; 8) $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$.

5.4.19. Винесіть множник з-під знаку кореня:

1) $\sqrt{125}$; 2) $\sqrt[3]{54}$;

3) $\sqrt{a^5b}$; 4) $\sqrt[3]{x^{14}}$.

5.4.20. Унесіть множник під знак кореня:

1) $2\sqrt{5}$; 2) $5\sqrt[3]{2}$;

3) $3\sqrt[3]{4}$; 4) $x^2\sqrt[5]{y}$.

5.4.21. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(-41)^2}$; 2) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$.

5.4.22. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-1} = 2$; 2) $\sqrt{-x} = -2$;

3) $\sqrt[3]{x} = 2$; 4) $\sqrt[5]{x} = -3$;

5) $2\sqrt[3]{x^3} + 3\sqrt{x^2} = 5$; 6) $4\sqrt[5]{x^5} + 3\sqrt[4]{x^4} = 7$;

7) $\sqrt{x} = \sqrt{2-x}$; 8) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+3}$;

9) $\sqrt{x^2-11} = \sqrt{1-x}$; 10) $\sqrt{3-x^2} = \sqrt{-5x-3}$;

11) $\sqrt{x} = -x$; 12) $\sqrt{x+3} = 2x+5$;

13) $(x^2-9)\sqrt{2-x} = 0$; 14) $(x^2-16)\sqrt{x+3} = 0$;

15) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 6 = 0$; 16) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 12 = 0$.

5.4.23. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x} \geq 0$; 2) $\sqrt{x} > -1$;

3) $\sqrt{x+4} \geq 5$; 4) $\sqrt{x-3} > 2$;

5) $\sqrt{x-1} < 3$; 6) $\sqrt{x+3} \leq 4$;

7) $(x-6)\sqrt{x} \geq 0$; 8) $(x+1)\sqrt{x-3} \leq 0$;

9) $\sqrt{x} < x-6$; 10) $\sqrt{-3x+4} \leq x$;

11) $\sqrt{x} > x-2$; 12) $\sqrt{x+6} \geq x$.

5.4.24. Знайдіть область означення функції:

1) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{9-x^2}$; 2) $f(x) = \sqrt{x^2+x}$.

5.4.25. Зобразіть графік функції:

1) $y = \sqrt{x+3} - 1$; 2) $y = -\sqrt{x-3} + 1$;

3) $y = (x-2)^3 + 1$; 4) $y = (x+1)^3 + 2$;

5) $y = \sqrt[3]{x}$; 6) $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Відповіді

5.4.12. 1) x^{32}; 2) x^{25}; 3) x^{-21}; 4) x^{35}; 5) x^{-12}; 6) x^{-56}.

5.4.13. 1) 13; 2) 2; 3) 198; 4) 833.

5.4.14. 1) x^{-1}; 2) $\frac{1}{3}(x-1)^{-3}$; 3) $b^{4/5}$; 4) $c^{-2/11}$.

5.4.15.1) x^{-21}; 2) x^{35}; 3) x^{-12}; 4) x^{-56}; 5) $x, x \geq 0$; 6) x^2; 7) $x^{1/2}$; 8) $x^{3/4}$.

5.4.16. 1) 10; 2) 15; 3) 3; 4) 12.

5.4.17. 1) $\sqrt{x}$; 2) b^2; 3) ab^2; 4) $\frac{7a^2}{13b}$.

5.4.18.1) $\sqrt[4]{8}$; 2) $\sqrt[4]{27b^5}$; 3) $\sqrt[6]{4a^3b^3}$; 4) $\sqrt[4]{a}$; 5) $\sqrt[12]{b^{-5}}$; 6) $\sqrt[6]{x}$; 7) $\sqrt[3]{2mn^2}$; 8) $\sqrt[10]{8}$.

5.4.19. 1) $5\sqrt{5}$; 2) $3\sqrt[3]{2}$; 3) $a^2\sqrt{ab}$; 4) $x^4\sqrt[3]{x^2}$. **5.4.20.** 1) $\sqrt{20}$; 2) $\sqrt[3]{250}$; 3) $\sqrt[3]{108}$; 4) $\sqrt[5]{x^{10}y}$.

5.4.21.1) 41; 2) $\sqrt{5}-2$.

5.4.22. 1) $\{5\}$; 2) $\varnothing$; 3) $\{8\}$; 4) $\{-243\}$; 5) $\{-5;1\}$; 6) $\{1\}$; 7) $\{1\}$; 8) $\{6\}$; 9) $\{-4\}$; 10) $\{-1\}$; 11) $\{0\}$; 12) $\{-2\}$; 13) $\{-3;2\}$; 14) $\{-3;4\}$; 15) $\{16\}$; 16) $\{729\}$.

5.4.23. 1) $[0;+\infty)$; 2) $[0;+\infty)$; 3) $[21;+\infty)$; 4) $(7;+\infty)$; 5) $[1;10)$; 6) $[-3;13]$; 7) $\{0\} \cup [6;+\infty)$; 8) $\{3\}$; 9) $(9;+\infty)$; 10) $\left[1;\frac{4}{3}\right]$; 11) $[0;4)$; 12) $[-6;3]$.

5.4.24. 1) $D(f) = [0;3]$; 2) $D(f) = (-\infty;-1] \cup [0;+\infty)$.

Практикум 5.5. Тригонометричні функції

Навчальні задачі

5.5.1. Визначити знаки $\sin 2, \cos 2, \operatorname{tg} 2, \operatorname{ctg} 2$.

Розв'язання. [5.7, 5.9.1.]

Оскільки $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$, то точка M_2 одиничного кола лежить у 2-й чверті.

$$\sin 2 > 0, \cos 2 < 0,$$

$$\operatorname{tg} 2 = \frac{\sin 2}{\cos 2} < 0, \operatorname{ctg} 2 = \frac{\cos 2}{\sin 2} < 0.$$

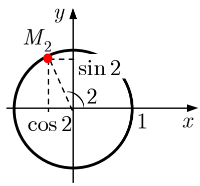


Рис. до 5.5.1

5.5.2. Знайти $\cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha, \operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = -\dfrac{4}{5}, \pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

Розв'язання. [5.9.]

Точка M_α одиничного кола лежить у 3-й чверті, отже $\cos\alpha < 0$ і

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \left(-\frac{4}{5}\right) : \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{3};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{3}{4}.$$

5.5.3. Звести до функції гострого кута:

1) $\sin\dfrac{17\pi}{3}$; 2) $\cos 735°$;

3) $\operatorname{tg}(-1759°)$; 4) $\operatorname{ctg}\dfrac{7\pi}{4}$.

5) $\cos\dfrac{2\pi}{3}$; 6) $\sin\dfrac{5\pi}{6}$.

Розв'язання. [5.9.3, 5.7.]

1. **[***Використовуючи* 2π*-періодичність і непарність синуса, маємо***]**

$$\sin\frac{17\pi}{3} = \sin\left(3\cdot 2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. $\cos 735° = \cos(2\cdot 360° + 15°) = \cos 15°$.

3. $\operatorname{tg}(-1759°) = \operatorname{tg}(41° - 10\cdot 180°) = \operatorname{tg} 41°$.

4. $\operatorname{ctg}\dfrac{7\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(2\cdot\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4} = -1$.

5. **[***Використовуючи формулу зведення, маємо***]**

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

6. $\sin\dfrac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

5.5.4. Спростити вираз $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cos(\pi-\alpha)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$.

Розв'язання. [5.9.3.]

$$\frac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cos(\pi-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{(-\operatorname{tg}\alpha)(-\cos\alpha)\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha(-\operatorname{tg}\alpha)(-\operatorname{ctg}\alpha)}=1.$$

5.5.5. Спростити вираз:

$$1)\ \frac{\sin 32^\circ\cos 28^\circ+\cos 32^\circ\sin 28^\circ}{\sin 15^\circ\cos 15^\circ};\ \ 2)\ \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}.$$

Розв'язання. [5.9.6, 5.9.7.]

1. $$\frac{\sin 32^\circ\cos 28^\circ+\cos 32^\circ\sin 28^\circ}{\sin 15^\circ\cos 15^\circ}=\frac{2\sin(32^\circ+28^\circ)}{2\sin 15^\circ\cos 15^\circ}=\frac{2\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ}=$$
$$=2\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}=2\sqrt{3}.$$

2. $$\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{2\cos 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha.$$

5.5.6. Подати $\cos x\cos 3x$ як суму тригонометричних функцій.

Розв'язання. [5.9.10.]

$$\cos x\cos 3x=\frac{1}{2}(\cos(x+3x)+\cos(x-3x))=\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos(-2x)=$$
$$=\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x.$$

5.5.7.1. Перетворити вираз $\sin x-3\cos x$, у синус різниці, упроваджуючи допоміжний кут.

Розв'язання. [5.9.12.]

[***Крок 1.*** *Визначаємо амплітуду.*]

$$A=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}.$$

[***Крок 2.*** *Перетворюємо вираз.*]

$$\sin x-3\cos x=\sqrt{10}\left(\frac{\sin x-3\cos x}{\sqrt{10}}\right)=\sqrt{10}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}-\cos x\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

[***Крок 3.*** *Визначаємо допоміжний кут із системи.*]①

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{10}},\\ \sin\varphi=\dfrac{3}{\sqrt{10}}\end{cases}\Rightarrow\varphi=\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

[***Крок 4.*** *Записуємо перетворену формулу.*]

$$\sin x - \cos 3x = \sqrt{10}\sin\left(x - \arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

Коментар. ① Оскільки $\cos\varphi > 0$ та $\sin\varphi > 0$, то кут φ лежить у 1-й чверті.

5.5.7.2. Перетворити вираз $\sin x + \cos x$, упроваджуючи допоміжний кут.
Розв'язання. [5.9.12.]

I спосіб (перетворення в синус суми).

$$\sin x + \cos x = \sqrt{1^2 + 1^2}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

II спосіб (перетворення в косинус різниці).

$$\sin x + \cos x = \sqrt{1^2 + 1^2}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

5.5.8. Обчислити:

1) $\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)$; 2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\sqrt{2})$;

3) $\arcsin\left(\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$; 4) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)\right)$;

5) $\arcsin(\sin 3)$; 6) $\arccos(\cos 4)$.

Розв'язання. [5.8.10.]

1. $\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$.

2. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

3. $\arcsin\left(\sin\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\pi}{8}$, оскільки $\dfrac{\pi}{8} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)\right) = -\dfrac{\pi}{5}$, оскільки $\left(-\dfrac{\pi}{5}\right) \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

5. $\arcsin(\sin 3) = \arcsin(\sin(\pi - 3)) = \pi - 3$, оскільки $\pi - 3 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

6. $\arccos(\cos 4) = \arccos(\cos(2\pi - 4)) = 2\pi - 4$, оскільки $2\pi - 4 \in [0; \pi]$.

5.5.9. Знайти $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

Розв'язання. [5.8.5.]

Нехай $\arcsin\frac{3}{5} = \alpha$.

Розглядаємо прямокутний трикутник з гіпотенузою $c = 5$ і катетом $a = 3$, який лежить проти кута α.

За Піфагоровою теоремою маємо

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Тоді

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{4}.$$

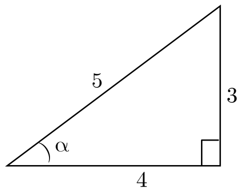


Рис. до 5.5.9

5.5.10.1. Розв'язати рівняння $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. [5.10.1.]

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

5.5.10.2. Розв'язати рівняння $\sin x = -\frac{1}{3}$.

Розв'язання.

$$\sin x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$x = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

5.5.10.3. Розв'язати рівняння $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$

Розв'язання.

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=\pi n \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+\pi n \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}.$$

$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}.$

5.5.11.1. Розв'язати рівняння $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Розв'язання. [5.10.2.]

$$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\left(\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi n \Leftrightarrow x=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+2\pi n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

$x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$

5.5.11.2. Розв'язати рівняння $\cos x=\frac{1}{3}.$

Розв'язання.

$$\cos x=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

$x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$

5.5.11.3. Розв'язати рівняння $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=0.$

Розв'язання.

$$\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\pi n \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{5\pi}{6}+\pi n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

$x=\frac{5\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$

5.5.12. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Розв'язання. [5.10.3.]

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n \Leftrightarrow x = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

5.5.13. Розв'язати рівняння $\operatorname{ctg} x = -1$.

Розв'язання. [5.10.4.]

$$\operatorname{ctg} x = -1 \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi n \Leftrightarrow x = \pi - \operatorname{arcctg} 1 + \pi n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pi - \frac{\pi}{4} + \pi n \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

5.5.14. Розв'язати нерівність $\sin x > \dfrac{1}{2}$.

Розв'язання. [5.10.1.][1]

[*Розв'язуємо нерівність, будуючи графіки* $y = \sin x$ *і* $y = \dfrac{1}{2}$.]

$\arcsin \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$.

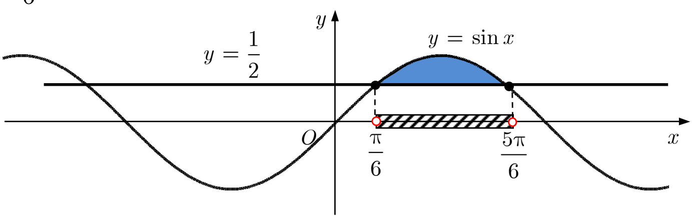


Рис. до 5.5.14

Нерівність $\sin x > \dfrac{1}{2}$ правдива для $x \in \left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right)$. Ураховуючи періодичність синуса, маємо

$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$

Коментар. ① Задачу можна розв'язати як за допомогою графіка $y = \sin x$, так і на одиничному колі.

5.5.15. Розв'язати нерівність $\cos x \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. [5.10.2.]

[*Розв'язуємо нерівність за допомогою одиничного кола.*]

$\arccos \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

Нерівність $\cos x \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ правдива для $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right)$.

Ураховуючи періодичність косинуса, маємо

$$x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$

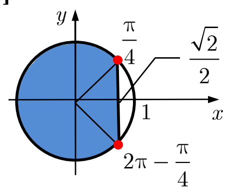


Рис. до 5.5.15

5.5.16. Знайти область означення функції $f(x) = \arcsin \operatorname{tg} x$.

Розв'язання. [5.8.6, 5.10.3.]

Функція f означена, якщо $\left|\operatorname{tg} x\right| \le 1$ і $x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$$\left|\operatorname{tg} x\right| \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \le 1, \\ \operatorname{tg} x \ge -1. \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}; \ \operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

$$-\frac{\pi}{4} + \pi n \le x \le \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$D(f): x \in \left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}.$$

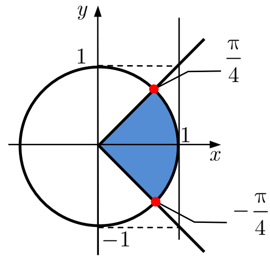


Рис. до 5.5.16

5.5.17. Знайти множину значень функції $f(x) = 11\cos x$.

Розв'язання. [5.7.8.]

Для всіх x правдиві нерівності

$$-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow -11 \le 11\cos x \le 11.$$

Множина значень функції $E(f) = [-11; 11]$.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

5.5.18. Виразіть у радіанах кут:

1) 20°; 2) 45°;

3) 135°; 4) 240°.

5.5.19. Виразіть у градусах кут:

1) $\dfrac{\pi}{18}$; 2) $\dfrac{\pi}{4}$;

3) $\dfrac{2\pi}{3}$; 4) $\dfrac{7\pi}{6}$.

5.5.20. Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)$; 2) $\cos(2\pi-t)$;

3) $\sin(\pi-t)$; 4) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)$;

5) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)$; 6) $\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)$;

7) $\dfrac{\sin(\pi-t)\cos(2\pi-t)}{\operatorname{tg}(\pi-t)\cos(\pi-t)}$.

5.5.21. Обчисліть за допомогою формул зведення:

1) $\cos\dfrac{5\pi}{3}$; 2) $\sin\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)$;

3) $\sin(-7\pi)+2\cos\dfrac{31\pi}{3}-\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{4}$; 4) $\sin 75^\circ\cdot\sin 15^\circ$.

5.5.22. Спростіть:

1) $\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos\beta$; 2) $\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)$;

3) $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}-\alpha\right)-\dfrac{1}{2}\cos\alpha$; 4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\cos\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{3}\right)$;

5) $\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta$; 6) $\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)$.

5.5.23. Обчисліть:

1) $\cos\dfrac{5\pi}{8}\cos\dfrac{3\pi}{8}+\sin\dfrac{5\pi}{8}\sin\dfrac{3\pi}{8}$; 2) $\cos\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin\dfrac{\pi}{12}\sin\dfrac{\pi}{4}$;

3) $\sin 77^\circ\cos 17^\circ-\sin 13^\circ\cos 73^\circ$; 4) $\dfrac{\operatorname{tg}25^\circ+\operatorname{tg}20^\circ}{1-\operatorname{tg}25^\circ\operatorname{tg}20^\circ}$.

5.5.24. Спростіть:

1) $\dfrac{2\sin^2\alpha - 1}{1 - 2\cos^2\alpha}$;

2) $\dfrac{\sin 2t}{\cos t} - \sin t$;

3) $\cos^2 t - \cos 2t$;

4) $\dfrac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}$;

5) $\dfrac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ}$;

6) $\dfrac{\sin t}{2\cos^2 \dfrac{t}{2}}$;

7) $\dfrac{\cos t}{\cos\dfrac{t}{2} + \sin\dfrac{t}{2}}$;

8) $\sqrt{1 - \cos 2x} + \sqrt{2}\sin x, x \in [0; 2\pi]$;

9) $\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, x \in (-\pi; \pi)$.

5.5.25. Обчисліть:

1) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$;

2) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;

3) $2\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8}$;

4) $\dfrac{10\sin 40^\circ \sin 50^\circ}{\cos 10^\circ}$.

5.5.26. Перетворіть у добуток:

1) $\sin 3t - \sin t$;

2) $\cos 6t + \cos 4t$.

5.5.27. Перетворіть у суму:

1) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$;

2) $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2}\right)$;

3) $\sin\beta\cos(\alpha + \beta)$.

5.5.28. Перетворіть вираз до вигляду $A\sin(\omega t + \varphi), A > 0$:

1) $\sin 5x - \cos 5x$;

2) $\sqrt{3}\sin x + \cos x$;

3) $12\cos x - 5\sin x$;

4) $-\sin x - \cos x$.

5.5.29. Знайдіть значення інших тригонометричних функцій кута α, якщо:

1) $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}, 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;

2) $\sin\alpha = -\dfrac{1}{8}, \pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

3) $\cos\alpha = -\dfrac{2}{5}, \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$ 4) $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}, \dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi;$

5) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{15}, \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$ 6) $\operatorname{ctg}\alpha = 3, \pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}.$

5.5.30. Обчисліть:

1) $\arcsin\left(2\cos\dfrac{2\pi}{3}\right);$ 2) $\arccos\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}\right);$

3) $\operatorname{arctg}\left(2\cos\dfrac{7\pi}{6}\right);$ 4) $\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{ctg}\dfrac{2\pi}{3}\right).$

5.5.31. Обчисліть:

1) $\sin\left(\arcsin\dfrac{2}{5}\right);$ 2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}\right);$

3) $\sin\left(\arccos\dfrac{3}{5}\right);$ 4) $\cos\left(\arcsin\left(-\dfrac{5}{13}\right)\right);$

5) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\dfrac{5}{13}\right)\right);$ 6) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{3}{5}\right).$

5.5.32. Обчисліть:

1) $\arcsin(\sin 1{,}2\pi);$ 2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} 3{,}3\pi\right);$

3) $\arcsin(\sin 6);$ 4) $\arccos(\cos 11).$

5.5.33. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 3x = 0;$ 2) $\cos\dfrac{x}{4} = 0;$

3) $\sin\dfrac{\pi x}{2} = 1;$ 4) $\cos 2x = -1;$

5) $\sin x = \dfrac{1}{3};$ 6) $\operatorname{tg} x = 5;$

7) $\cos\left(5x - \dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2};$ 8) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{2\pi}{3}\right) = -1.$

5.5.34. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin 2x > 0$;
2) $\cos 3x \geq 0$;
3) $\operatorname{tg} 3x < 0$;
4) $\sin x \geq \dfrac{1}{2}$;
5) $\cos x < \dfrac{1}{2}$;
6) $\operatorname{tg} 4x \geq \sqrt{3}$;
7) $\operatorname{ctg} 2x > 1$;
8) $\operatorname{ctg}(3x) < -1$;
9) $\cos\left(\dfrac{x+\pi}{4}\right) \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;
10) $\sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

5.5.35. Знайдіть область означення функції:

1) $y = \arcsin(5x - 1)$;
2) $y = \arccos\left(\dfrac{x-5}{6}\right)$;
3) $y = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$;
4) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

5.5.36. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = 5 - \sin 5x$;
2) $y = 6 + 2\cos x$;
3) $y = \arccos|x|$;
4) $y = \arcsin|x|$;
5) $y = 5^{\sin x}$;
6) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\cos x}$.

5.5.37. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 1$;
2) $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - 1$;
3) $y = \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$;
4) $y = \operatorname{ctg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Відповіді

5.5.18. 1) $\dfrac{\pi}{9}$; 2) $\dfrac{\pi}{4}$; 3) $\dfrac{3\pi}{4}$; 4) $\dfrac{4\pi}{3}$.

5.5.19. 1) $10°$; 2) $45°$; 3) $120°$; 4) $210°$.

5.5.20. 1) $\cos t$; 2) $\cos t$; 3) $\sin t$; 4) $-\sin t$; 5) $\operatorname{ctg} t$; 6) $-\operatorname{ctg}\alpha$; 7) $\cos t$.

5.5.21. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 2; 4) $\frac{1}{4}$.

5.5.22. 1) $\sin\beta\cos\alpha$; 2) $\cos\alpha\cos\beta$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$; 4) $\frac{1}{2}\cos\alpha$; 5) $\sin\alpha\sin\beta$; 6) $\sin\beta\cos\alpha$;

5.5.23.1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 1.

5.5.24. 1) 1; 2) $\sin t$; 3) $\sin^2 t$; 4) $2\cos 20°$; 5) $\cos 40° - \sin 40°$; 6) $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$; 7) $\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}$;

8) $\begin{cases} 2\sqrt{2}\sin x, & x \in [0;\pi], \\ 0, & x \in [\pi;2\pi]; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}, & x \in [0;\pi), \\ 0, & x \in (-\pi;0). \end{cases}$

5.5.25. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $5\operatorname{tg} 40°$.

5.5.26. 1) $2\cos 2t\sin t$; 2) $2\cos t\cos 5t$.

5.5.27. 1) $\frac{1}{2}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha)$; 2) $\frac{1}{2}(\cos\alpha + \cos\beta)$; 3) $\frac{1}{2}(\sin(\alpha + 2\beta) - \sin\alpha)$.

5.5.28. 1) $\sqrt{2}\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $2\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$; 3) $13\sin\left(-x + \operatorname{arctg}\frac{12}{5}\right)$; 4) $\sqrt{2}\sin\left(-x - \frac{\pi}{4}\right)$.

5.5.29. 1) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \operatorname{ctg}\alpha = 2\sqrt{2}$;

2) $\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{7}}{8}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3\sqrt{7}}, \operatorname{ctg}\alpha = 3\sqrt{7}$;

3) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}, \operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}, \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{2}{\sqrt{21}}$; 4) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}, \operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}, \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$;

5) $\cos\alpha = -\frac{1}{4}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}, \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{15}}$; 6) $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$.

5.5.30. 1) $-\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $-\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$.

5.5.31. 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{4}{5}$; 4) $\frac{12}{13}$; 5) $-\frac{12}{5}$; 6) $\frac{3}{4}$.

5.5.32. 1) $-0{,}2\pi$; 2) $0{,}3\pi$; 3) $6 - 2\pi$; 4) $4\pi - 11$.

5.5.33. 1) $x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$; 2) $x = 2\pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $x = 4n + 1, n \in \mathbb{Z}$;

4) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 5) $x = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

6) $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 7) $x_1 = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, x_2 = \frac{7\pi}{60} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$;

8) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

5.5.34. 1) $x \in \left(\pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$; 2) $x \in \left[-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3}; \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3}\right], n \in \mathbb{Z}$;

3) $x \in \left(\dfrac{\pi n}{3} - \dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi n}{3}\right), n \in \mathbb{Z}$; 4) $x \in \left[\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$;

5) $x \in \left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$; 6) $x \in \left[\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{4}; \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}\right), n \in \mathbb{Z}$;

7) $x \in \left(\dfrac{\pi n}{2}; \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}\right), n \in \mathbb{Z}$; 8) $x \in \left(-\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3}; \dfrac{\pi n}{3}\right), n \in \mathbb{Z}$;

9) $x \in \left[-2\pi + 8\pi n; 8\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$; 10) $x \in \left(-\dfrac{11\pi}{6} + 4\pi n; \dfrac{7\pi}{6} + 4\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

5.5.35. 1) $D(y) = \left[0; \dfrac{2}{5}\right]$; 2) $D(y) = [-1; 11]$; 3) $x \neq \dfrac{2\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

4) $x \neq -\dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

5.5.36. 1) $E(y) = [4; 6]$; 2) $E(y) = [4; 8]$; 3) $E(y) = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$; 4) $E(y) = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$;

5) $E(y) = \left[\dfrac{1}{5}; 5\right]$; 6) $y = \left[\dfrac{1}{3}; 3\right]$.

Практикум 5.6. Показникова та логарифмічна функції

Навчальні задачі

5.6.1. Обчислити:

1) $\log_2 8$;
2) $\log_2 \dfrac{1}{2}$;
3) $\log_{1/2} 1$;
4) $\log_{1/2} \sqrt{2}$;
5) $5^{\log_5 3}$;
6) $10^{\log_{100} 16}$;
7) $\log_3 15 - \log_3 5$;
8) $\log_6 2 + \log_6 3$;
9) $7^{\frac{1}{\log_5 7}}$;
10) $\log_2 \log_3 \sqrt{3\sqrt{3}}$.

Розв'язання.* *[5.11.1, 5.11.5.]

1. $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3\log_2 2 = 3$.

2. $\log_2 \dfrac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$.

3. $\log_{1/2} 1 = 0$.

4. $\log_{1/2} \sqrt{2} = \log_{2^{-1}} 2^{1/2} = -\dfrac{1}{2}\log_2 2 = -\dfrac{1}{2}$.

5. $5^{\log_5 3} = 3$.

6. $10^{\log_{100} 16} = 10^{\frac{1}{2}\log_{10} 16} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$.

7. $\log_3 15 - \log_3 5 = \log_3 \dfrac{15}{5} = \log_3 3 = 1$.

8. $\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6(2 \cdot 3) = \log_6 6 = 1$.

9. $7^{\frac{1}{\log_5 7}} = 7^{\log_7 5} = 5$.

10. $\log_2 \log_3 \sqrt{3\sqrt{3}} = \log_2 \log_3 \left(3^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_2 \log_3 3^{\frac{3}{4}} = \log_2 \dfrac{3}{4} =$

$$= \log_2 3 - \log_2 4 = \log_2 3 - 2.$$

5.6.2. Злогарифмувати $\lg \dfrac{3a^2\sqrt[3]{b}}{c^4(a+b)}$, де $a > 0, b > 0, c > 0$.

Розв'язання. [5.11.5.]

$$\lg \frac{3a^2\sqrt[3]{b}}{c^4(a+b)} = \lg\Big(3a^2\sqrt[3]{b}\Big) - \lg\Big(c^4(a+b)\Big) =$$

$$= \lg 3 + \lg a^2 + \lg b^{1/3} - \lg c^4 - \lg(a+b) =$$

$$= \lg 3 + 2\lg a + \frac{1}{3}\lg b - 4\lg c - \lg(a+b).$$

5.6.3. Спростити $2^{\log_2 a + 2\log_2 b - 3\log_2 c}$.

Розв'язання. [5.11.5, 5.11.6.]

$$2^{\log_2 a + 2\log_2 b - 3\log_2 c} = 2^{\log_2 a + \log_2 b^2 - \log_2 c^3} = 2^{\log_2 ab^2 - \log_2 c^3} = 2^{\log_2 \frac{ab^2}{c^3}} = \frac{ab^2}{c^3}.$$

5.6.4.1. Розв'язати рівняння $7^x = 5$.

Розв'язання. [5.11.8.]

$$7^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_7 5.$$

$x = \log_7 5$.

5.6.4.2. Розв'язати рівняння $6^{x+2} = 6^{x^2}$.
Розв'язання.

$$6^{x+2} = 6^{x^2} \Leftrightarrow x + 2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1, \\ x_2 = 2. \end{array}\right.$$

$x_1 = -1, x_2 = 2$.

5.6.5.1. Розв'язати рівняння $\log_3 x = 2$.
Розв'язання. [5.11.9.]

$$\log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9.$$

$x = 9$.

5.6.5.2. Розв'язати рівняння $\log_5(x^2 - 1) = \log_5(7x - 7)$.
Розв'язання.

$$\log_5(x^2 - 1) = \log_5(7x - 7) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 7x - 7, \\ 7x - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 6 = 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 6 \end{array}\right. \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

$x = 6$.

5.6.6.1. Розв'язати нерівність $2^x < 5$.
Розв'язання. [5.11.8.]

$$2^x < 5 \Leftrightarrow x < \log_2 5.$$

$x \in (-\infty; \log_2 5)$.

5.6.6.2. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4$.

Розв'язання.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4 \Leftrightarrow x \geq \log_{1/2} 4 \Leftrightarrow x \geq -2\log_2 2 \Leftrightarrow x \geq -2.$$

$x \in [-2; +\infty)$.

5.6.6.3. Розв'язати нерівність $3^x \leq 0$.
Розв'язання.

Оскільки $3^x > 0$ для будь-якого x, то нерівність не має розв'язків.

Отже, $x \in \varnothing$.

5.6.6.4. Розв'язати нерівність $2^x > -2$.
Розв'язання.
Оскільки $2^x > 0$ для будь-якого x, то нерівність правдива для будь-якого x. Отже, $x \in (-\infty;+\infty)$.

5.6.7.1. Розв'язати нерівність $\log_2 x > -2$.
Розв'язання. [5.11.9.]

$$\log_2 x > -2 \Leftrightarrow x > 2^{-2} \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}.$$

$x \in \left(\frac{1}{4};+\infty\right)$.

5.6.7.2. Розв'язати нерівність $\log_3 x \le 2$.
Розв'язання.

$$\log_3 x \le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \le 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \le 9.$$

$x \in (0;9]$.

5.6.7.3. Розв'язати нерівність $\log_{1/2} x > -2$.
Розв'язання.

$$\log_{1/2} x > -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 4.$$

$x \in (0;4)$.

5.6.8. Знайти область означення функції $f(x) = \ln(3 - x)$.
Розв'язання. [5.11.3.]
Функція f означена, якщо $3 - x > 0 \Leftrightarrow x < 3$.
Область означення функції $D(f) = (-\infty;3)$.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

5.6.9. Знайдіть:

1) $\log_2 2$;
2) $\log_2 1$;
3) $\log_2 4$;
4) $\log_2 64$;
5) $\log_2 \frac{1}{8}$;
6) $\log_2 \sqrt[3]{2}$.

5.6.10. Обчисліть:

1) $\log_4 8$;
2) $\log_{1/3} 27$;
3) $\dfrac{\log_{\sqrt[3]{7}} 81}{\log_{49}\sqrt{3}}$;
4) $3^{\log_3 7}$;
5) $9^{\log_3 6-1}$;
6) $\log_4 2+\log_4 8$;
7) $\log_3 2-\log_3 54$;
8) $\log_3 8+3\log_3\dfrac{9}{2}$;
9) $\log_2 5-\log_2 35+\log_2 56$;
10) $\log_2\log_5\sqrt[8]{5}$;
11) $6^{\frac{2}{\log_5 6}}$;
12) $64^{\frac{1}{3\log_{27} 8}}$;
13) $\log_3\left(\log_2 5\cdot\log_5 8\right)$.

5.6.11. Спростіть:

1) $\dfrac{\log_2^2 14+\log_2 14\cdot\log_2 7-2\log_2^2 7}{\log_2 14+2\log_2 7}$;

2) $\dfrac{3\log_5 15\cdot\log_5 9-2\log_5^2 15-\log_2^2 9}{\log_5 9-\log_5 15}$;

3) $\sqrt{13}^{\log_{13}(27-10\sqrt{2})}+\sqrt{5}^{\log_5(11+6\sqrt{2})}$;

4) $\log_4(7-4\sqrt{3})+\log_8(26+15\sqrt{3})$;

5) $\log_6^2 7+\dfrac{\log_8 7}{\log_8 6}-\dfrac{\log_6 7}{\log_{42} 6}$;

6) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{18} 19\cdot\log_{19} 20\cdot\log_{20} 21$.

5.6.12. Злогарифмуйте вираз:

1) $\log_2(16a^2b^3)$;
2) $\log_2\left(\dfrac{1}{8}a\sqrt{b^7}\right)$;
3) $\log_2(48a\sqrt{a}\cdot b^4)$;
4) $\log_2\dfrac{b^3}{4a^5}$.

5.6.13. Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x = 1$;
2) $5^x = 0$;
3) $2^x = 5$;
4) $4^{2x-3} = 0,5$;
5) $4^{x^2} = 4^{x+2}$;
6) $2^x + 2^{x+5} = 264$;
7) $2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 2 = 0$;
8) $7^{2x+1} + 4 \cdot 21^x - 3^{2x+1} = 0$.

5.6.14. Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2 x = 5$;
2) $\log_2(2x-1) = 4$;
3) $\log_9(x^2-5) = \log_9(1-x)$;
4) $\log_3 \log_2 \log_{1/3}(x-1) = 0$;
5) $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$;
6) $x^{5x-1} = 1$.

5.6.15. Розв'яжіть нерівність:

1) $5^{x-1} < 25$;
2) $6^{2x} \leq \dfrac{1}{36}$;
3) $3^x \geq 9$;
4) $2^x > 64$;
5) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2} < 27$;
6) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-2} \geq 4$;
7) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$;
8) $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 \geq 0$.

5.6.16. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_5(3-8x) > 0$;
2) $\log_{1/2}(7-3x) \geq 0$;
3) $\log_2(x-3) \leq 3$;
4) $\log_{1/5}(3-2x) > -1$;
5) $\log_3(3x-1) < \log_3(2x+3)$;
6) $\log_{1/7}(4x-3) \geq \log_{1/7}(x+3)$;
7) $\lg^2 x - 4\lg x + 3 > 0$;
8) $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 \leq 0$.

5.6.17. Знайдіть область означення функції:

1) $f(x) = \ln(x+2)$;
2) $f(x) = \log_{1/4}(5-x)$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{\log_5(x-6)}$;
4) $f(x) = \dfrac{1}{\log_3(x+4)}$.

5.6.18. Знайдіть множину значень функції:

1) $f(x)=4^{\frac{1}{x+1}}$; 2) $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{(x-1)^2}$.

5.6.19. Побудуйте графік функції:

1) $y=3^{x-1}+1$; 2) $y=2^{x+1}-1$;

3) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-2$; 4) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+2$;

5) $y=\log_2(x-2)$; 6) $y=\log_{1/2}(x+2)$.

Відповіді

5.6.9. 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) 6; 5) -3; 6) $\frac{1}{3}$.

5.6.10. 1) $\frac{3}{2}$; 2) -3; 3) 48; 4) 7; 5) 4; 6) 2; 7) -3; 8) 6; 9) 3; 10) -3; 11) 25; 12) 9; 13) 1.

5.6.11. 1) 1; 2) 2; 3) 8; 4) 0; 5) 0; 6) $\log_2 21$.

5.6.12. 1) $4+2\log_2 a+3\log_2 b$; 2) $-3+\log_2 a+\frac{7}{2}\log_2 b$; 3) $4+\log_2 3+\frac{3}{2}\log_2 a+4\log_2 b$; 4) $3\log_2 b-5\log_2 a-2$.

5.6.13. 1) 0; 2) $\varnothing$; 3) $\log_2 5$; 4) $\frac{5}{4}$; 5) $\{-1;2\}$; 6) 3; 7) 1; 8) -1.

5.6.14. 1) 32; 2) $\frac{17}{2}$; 3) -3; 4) $\frac{10}{9}$; 5) $\left\{\frac{1}{2};8\right\}$; 6) $\left\{\frac{1}{5};1\right\}$.

5.6.15. 1) $(-\infty;3)$; 2) $(-\infty;-1]$; 3) $[2;+\infty)$; 4) $(6;+\infty)$; 5) $(-1;+\infty)$; 6) $(-\infty;0]$; 7) $(1;2)$; 8) $(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

5.6.16. 1) $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$; 2) $\left[2;\frac{7}{3}\right)$; 3) $(3;12]$; 4) $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$; 5) $\left(\frac{1}{3};4\right)$; 6) $\left(\frac{3}{4};2\right]$; 7) $(0;10)\cup(1000;+\infty)$; 8) $[3;9]$.

5.6.17. 1) $D(f)=(-2;+\infty)$; 2) $D(f)=(-\infty;5)$; 3) $D(f)=(6;7)\cup(7;+\infty)$; 4) $D(f)=(-4;-3)\cup(-3;+\infty)$.

5.6.17. 1) $E(f)=(0;1)\cup(1;+\infty)$; 2) $E(f)=(0;+\infty)$.

Практикум 5.7. Побудова графіків за допомогою геометричних перетворень

Навчальні задачі

5.7.1. Побудувати за допомогою геометричних перетворень графік функції $y = x^2 + 4x + 5$.

Розв'язання. [5.5.3, 5.15.1, 5.15.2.]

[*Перетворюємо квадратичну функцію, виділяючи повний квадрат.*]

$$y = x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1.$$

[*Графік заданої функції дістаємо із графіка функції* $y = x^2$ *перенесенням ліворуч на* 2 *одиниці вздовж осі* Ox *і на* 1 *одиницю вгору вздовж осі* Oy.]

$$y = x^2 \to y = (x+2)^2 \to y = (x+2)^2 + 1.$$

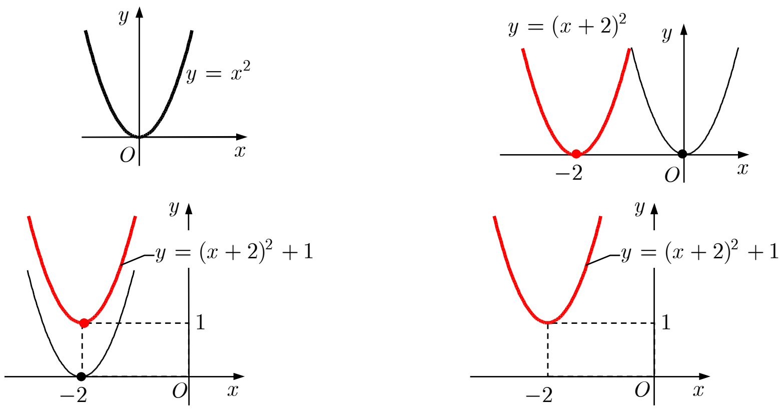


Рис. до 5.7.1

5.7.2. Побудувати за допомогою геометричних перетворень графік функції $y = \dfrac{3x+1}{x-1}$.

Розв'язання. [5.4.4, 5.15.]

[*Перетворюємо дробово-лінійну функцію, виділяючи цілу частину дробу.*]

$$y = \frac{3x-1}{x-1} = \frac{3(x-1)+2}{x-1} = 3 + \frac{2}{x-1}.$$

[*Графік заданої функції дістаємо із графіка функції* $y = \dfrac{1}{x}$ *розтягуванням у* 2 *рази вздовж осі* Oy, *перенесенням на* 1 *одиницю в напрямі осі* Ox *і на* 3 *одиниці в напрямі осі* Oy.]

$$y = \frac{1}{x} \to y = \frac{2}{x} \to y = \frac{2}{x-1} \to y = 3 + \frac{2}{x-1}.$$

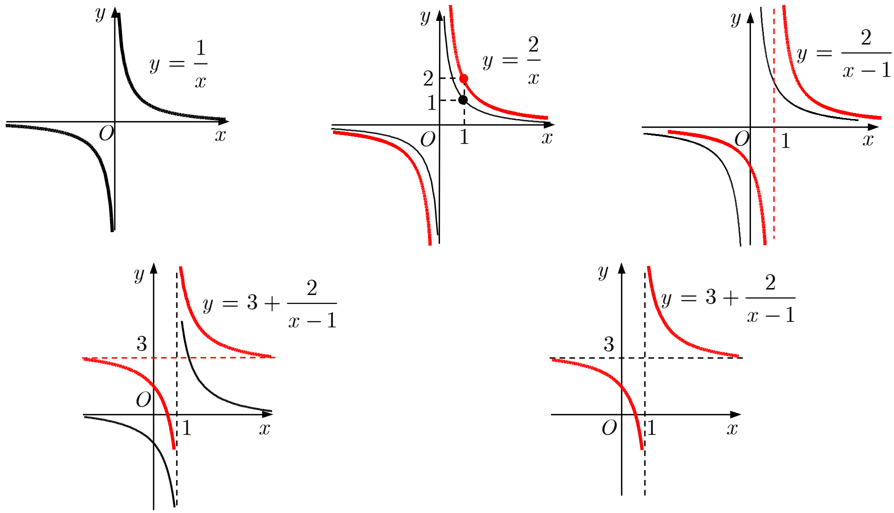


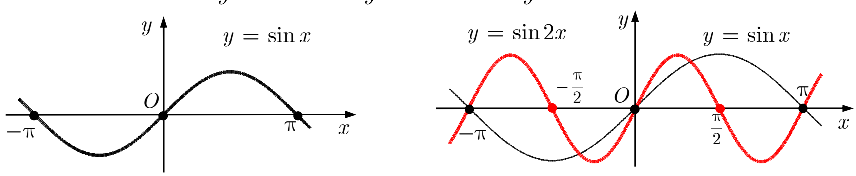
Рис. до 5.7.2

5.7.3.1. Побудувати за допомогою геометричних перетворень графік функції $y = 3\sin 2x$.

Розв'язання. [5.7.7, 5.15.3, 5.15.4.]

[*Графік заданої функції дістаємо із графіка функції* $y = \sin x$ *стисканням у* 2 *рази вздовж осі* Ox *і розтягуванням у* 3 *рази вздовж осі* Oy.]

$$y = \sin x \to y = \sin 2x \to y = 3\sin 2x.$$



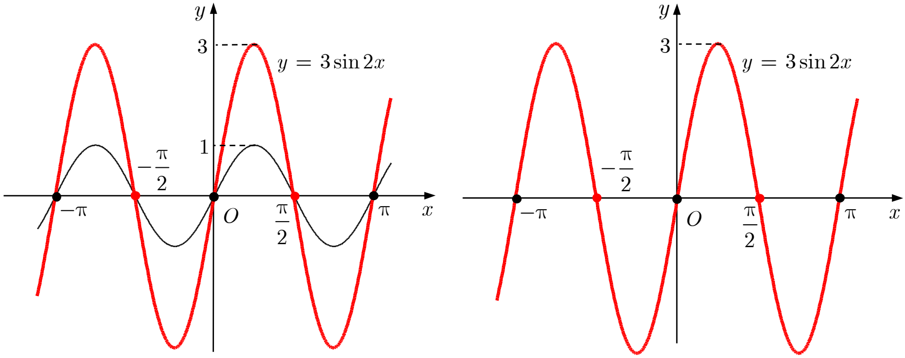


Рис. до 5.7.3.1

5.7.3.2. Побудувати за допомогою геометричних перетворень графік функції $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

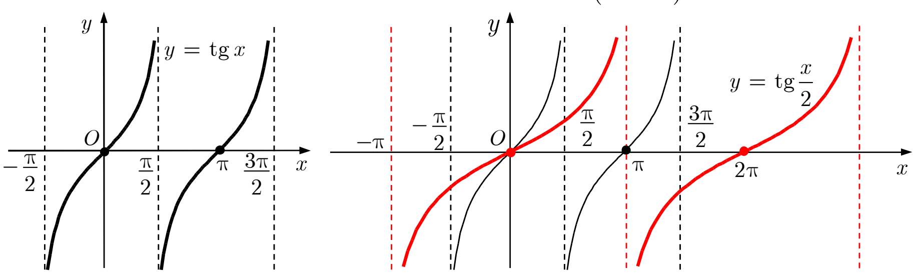
Розв'язання. [5.7.9, 5.15.1, 5.15.3.]

[*Перетворюємо аргумент функції, щоб дізнатись про його зсув.*]

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

[*Графік заданої функції дістаємо із графіка функції* $y = \operatorname{tg} x$ *розтягуванням у* 2 *рази вздовж осі* Ox *і перенесенням на* $\dfrac{\pi}{2}$ *одиниць уздовж осі* Ox.]

$$y = \operatorname{tg} x \to y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \to y = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$



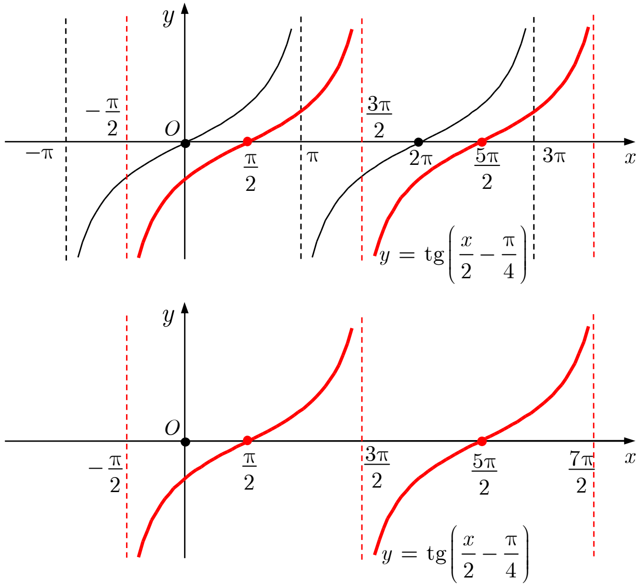


Рис. до 5.7.3.2

5.7.3.3. Побудувати за допомогою геометричних перетворень графік функції $y = -\arcsin|x|$.

***Розв'язання*. [5.8.1, 5.15.5, 5.15.7.]**

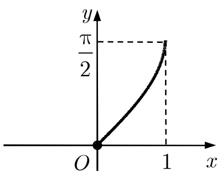
[*Графік функції* $y = \arcsin|x|$ *дістаємо із графіка функції* $y = \arcsin x$ *так:*

1) будуємо частину графіка $y = \arcsin x, x \geq 0$;

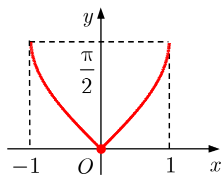
2) доповнюємо побудовану криву її дзеркальним відбитком відносно осі Oy.

Графік функції $y = -\arcsin|x|$ *дістаємо із графіка функції* $y = \arcsin|x|$ *дзеркальним відбиттям відносно осі Ox.*]

$$y = \arcsin x, x \geq 0 \to y = \arcsin|x| \to y = -\arcsin|x|.$$



$y = \arcsin x, x \geq 0$



$y = \arcsin|x|$

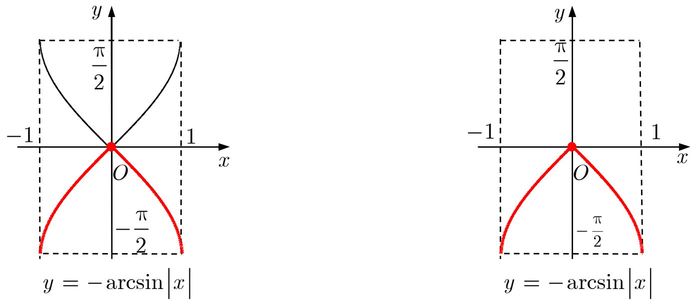
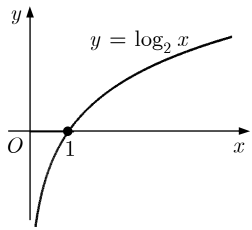


Рис. до 5.7.3.3

5.7.4. Побудувати за допомогою геометричних перетворень графік функції $y = \left|\log_2 x\right|$.

Розв'язання. [5.11.3, 5.15.8.]



[*Графік функції* $y = \left|\log_2 x\right|$ *дістаємо із графіка функції* $y = \log_2 x$ *так:*

1) будуємо графік функції $y = \log_2 x$;

2) не змінюємо частину графіка, яка розташована над віссю Ox;

3) дзеркально відбиваємо відносно осі Ox *частину графіка, яка розташована під віссю* Ox.]

$$y = \log_2 x \to y = \left|\log_2 x\right|.$$

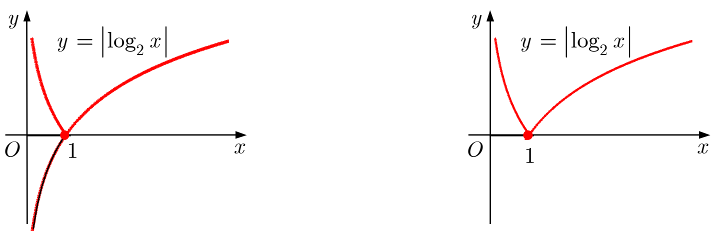


Рис. до 5.7.4

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

5.7.5. За допомогою елементарних перетворень побудуйте графік функції:

1) $y = -2x^2$; 2) $y = x^2 - 4$;

3) $y = -(x-1)^2$; 4) $y = x^2 + 6x$;

5) $y = x^2 - 4\left|x\right| + 3$; 6) $y = \left|x^2 - 2x - 8\right|$.

5.7.6. За допомогою елементарних перетворень побудуйте графік функції:

1) $y = 2x^3$; 2) $y = -x^3$;

3) $y = (x-1)^3 + 2$; 4) $y = (x+2)^2 - 1$;

5) $y = -\sqrt{x}$; 6) $y = \sqrt{-x}$;

7) $y = \sqrt{2-x}$; 8) $y = -\sqrt{x+1}$;

9) $y = \sqrt[3]{x+1}$; 10) $y = \sqrt[3]{1-x}$;

11) $y = \left|x^3\right|$; 12) $y = \sqrt{\left|x\right|}$.

5.7.7. За допомогою елементарних перетворень побудуйте графік функції:

1) $y = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$;

3) $y = \dfrac{1}{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; 4) $y = \sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1$;

5) $y = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$; 6) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$;

7) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; 8) $y = \sin\left|x\right|$;

9) $y = \left|\cos x\right|$; 10) $y = \left|\sin x\right|$.

5.7.8. За допомогою елементарних перетворень побудуйте графік функції:

1) $y = 2\arcsin(x-1) + \dfrac{\pi}{2}$; 2) $y = \dfrac{1}{2}\arccos(x+2) - \dfrac{\pi}{4}$;

3) $y = 3\operatorname{arctg}(x-1) + \dfrac{\pi}{2}$; 4) $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{arcctg}(x+3)$;

5) $y = \sin(\arcsin x)$; 6) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$;

7) $y = \arccos(\cos x)$; 8) $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$.

5.7.9. За допомогою елементарних перетворень побудуйте графік функції:

1) $y = 2^x - 1$;

2) $y = \log_2(x+1)$;

3) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1}$;

4) $y = \log_{1/3}(2x-3)$;

5) $y = 2^{|x|}$;

6) $y = 1 - \log_3 x$;

7) $y = \left|\left(\dfrac{1}{2}\right)^x - 1\right|$;

8) $y = \log_2(|x| - 1)$;

9) $y = 3^{\log_3 x}$;

10) $y = |\log_2(x-1)|$;

11) $y = 3^{\log_3 |x|}$;

12) $y = \log_2 |x-1|$;

13) $y = \operatorname{ch}(x+1) - 1$;

14) $y = \operatorname{sh}(x-1) + 1$.

5.7.10. Укажіть амплітуду, частоту, період і початкову фазу гармонік $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ і побудуйте їхні графіки, якщо:

1) $f_1(t) = 3\sin\left(2t - \dfrac{2\pi}{3}\right), f_2(t) = 2\cos\left(2t - \dfrac{2\pi}{3}\right), f_3(t) = f_1(t) + f_2(t)$;

2) $f_1(t) = 4\sin\left(3t + \dfrac{3\pi}{4}\right), f_2(t) = 3\cos\left(3t + \dfrac{3\pi}{4}\right), f_3(t) = f_1(t) + f_2(t)$.

Відповіді

5.7.10. 1) $A_1 = 3, \omega_1 = 2, T_1 = \pi, \varphi_1 = -\dfrac{2\pi}{3}$, $A_2 = 2, \omega_2 = 2, T_2 = \pi, \varphi_2 = -\dfrac{2\pi}{3}, A_3 = \sqrt{13}$, $\omega_3 = 2, T_3 = \pi, \varphi_3 = \arcsin\dfrac{2}{\sqrt{13}} - \dfrac{2\pi}{3}$; 2) $A_1 = 4, \omega_1 = 3, T_1 = \dfrac{2\pi}{3}, \varphi_1 = \dfrac{3\pi}{4}$, $A_2 = 3, \omega_2 = 3, T_2 = \dfrac{2\pi}{3}, \varphi_2 = \dfrac{3\pi}{4}$, $A_3 = 5, \omega_3 = 3, T_3 = \dfrac{2\pi}{3}, \varphi_3 = \arcsin\dfrac{3}{5} - \dfrac{2\pi}{3}$.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВМІННЯ

Основні означення	
1. Парна й непарна функції. **2.** Періодична функція. **3.** Монотонні функції: спадна, зростаюча, незростаюча, неспадна. **4.** Функція опукла догори (донизу). **5.** Обмежена функція. Функція обмежена зверху (знизу).	**6.** Елементарна функція. **7.** Гіперболічні функції: гіперболічний синус, гіперболічний косинус, гіперболічний тангенс, гіперболічний котангенс. 8. Дробово-раціональна функція.
Теореми	
1. Достатня умова оборотності функції. **2.** Теорема Безу. **3.** Основна теорема алгебри.	**4.** Теорема Вієта. **5.** Теорема про розклад многочлена на множники.
Методи	
1. Метод побудови графіка функції за допомогою елементарних перетворень.	
Основні задачі	
1. Знаходити область означення числової функції. **2.** Знаходити обернену функцію. **3.** Визначати структуру складеної функції. **4.** Знаходити нулі та інтервали знакосталості функції. **5.** Досліджувати функцію на парність (непарність).	**6.** Досліджувати функцію на періодичність. **7.** Досліджувати функцію на обмеженість. **8.** Будувати графіки функцій за допомогою геометричних перетворень. **9.** Ділити один многочлен на інший. **10.** Розкладати многочлен на множники.

РОЗДІЛ 6.

ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ

6.1. Границя функції

6.2. Границя числової послідовності

6.3. Еквівалентні нескінченно малі функції

6.4. Неперервність функції

Розділ присвячено поняттю границі функції та числової послідовності, що є базовим для побудови диференціального та інтегрального числення функції однієї та кількох змінних, теорії рядів.

Розвинуто ефективний апарат для знаходження границь функцій. Вивчено властивості нескінченно малих та нескінченно великих функцій. Запроваджено важливі класи функцій неперервних у точці й на відрізку.

Поданий матеріал використовується в розділах:

— *Диференціальне числення функцій однієї змінної;*

— *Інтегральне числення функцій однієї змінної;*

— *Теорія рядів.*

Ключові поняття:

— *границя функції;*

— *границя числової послідовності;*

— *число* e;

— *нескінченно мала функція (н. м. ф.);*

— *нескінченно велика функція (н. в. ф.);*

— *еквівалентність н. м. ф. (н. в. ф.);*

— *неперервність функції;*

— *точка розриву.*

Опанувавши цей розділ Ви зможете:

— *знаходити границі за допомогою перетворень функцій;*

— *знаходити границі за допомогою еквівалентних функцій;*

— *порівнювати н. м. ф. (н. в. ф.);*

— *досліджувати функцію на неперервність;*

— *класифікувати точки розриву функції.*

Попередні знання та вміння з розділів:

— *Множини й числа;*

— *Функції однієї змінної.*

6.1. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Поняття границі є ефективним інструментом як для дослідження функцій, так і для означення ключових понять математичного аналізу: похідної, визначеного інтеграла, суми ряду.

6.1.1. Границя функції в точці

1. Розгляньмо функцію f, яка означена в деякому околі точки x_0, окрім, можливо самої точки x_0.

Означення 6.1 **(границі функції мовою околів, за Коші).**

Точку A називають *границею функції* f *у точці* x_0, якщо для будь-якого ε-околу $U_\varepsilon(A)$ точки A існує проколений δ-окіл $U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ точки x_0, такий, що для всіх

$$x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$$

відповідні значення функції

$$f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

і позначають

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Розпишімо окремі випадки сформульованого означення.

2. x_0, A — дійсні числа (рис. 6.1). Число A називають границею функції f у точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що з нерівності

$$0 < \left|x - x_0\right| < \delta$$

випливає нерівність

$$\left|f(x) - A\right| < \varepsilon.$$

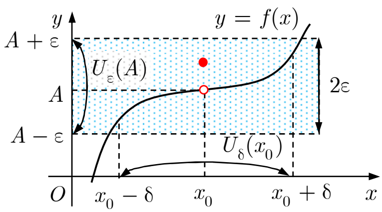


Рис. 6.1. Скінченна границя функції f, коли $x \to x_0 \in \mathbb{R}$

Або

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - A\right| < \varepsilon.$$

3. x_0 — дійсне число, $A = \infty$ (рис. 6.2).

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :$$
$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon.$$

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то графік функції має в точці x_0 *вертикальну асимптоту* $x = x_0$.

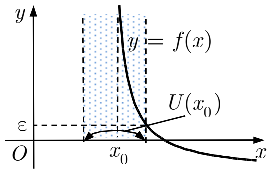


Рис. 6.2. Нескінченна границя функції f, коли $x \to x_0 \in \mathbb{R}$

4. Розгляньмо важливий випадок скінченної границі A функції f у точці $x_0 = +\infty$ (рис. 6.3):

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :$$
$$x > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Якщо $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = A$, то графік функції має *горизонтальну асимптоту* $y = A$.

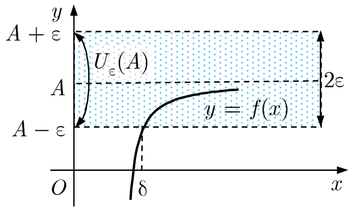


Рис. 6.3. Скінченна границя функції f, коли $x \to +\infty$

5. $A = f(x_0)$. Якщо функція f, означена в околі точки $x_0 \in X$ і $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функцію f називають *неперервною в точці* x_0.

Можна довести, що

> Будь-яка елементарна функція неперервна в кожній точці своєї області означення.

6. А. Приміром, доведімо, що для сталої функції $f(x) = c$,

$$\lim_{x \to x_0} c = c.$$

Справді, для будь-якого x і для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконано

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Отже, за δ можна взяти будь-яке додатне число.

Б. Покажімо також, що

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0.$$

Справді, для будь-якого $\varepsilon > 0$ нерівність $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon$ випливає з нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$ для $\delta = \varepsilon$.

7. Точка x_0 може як належати області означення функції f так і не належати. Оскільки, коли знаходять границю, функцію розглядають лише в досить малому проколеному околі точки x_0, то існування границі функції в точці є **локальною** властивістю функції.

Властивості функцій, що мають скінченну границю.

1 (*єдиність границі*). Якщо функція f має скінченну границю в точці x_0, то ця границя єдина.

2 (*обмеженість*). Якщо функція f має скінченну границю в точці x_0, то існує проколений окіл точки x_0, у якому функція f обмежена.

3 (*збереження знаку*). Якщо існує скінченна $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ і в деякому проколеному околі точки x_0 виконано нерівність $f(x) \geq 0$, то $A \geq 0$.

4 (*збереження нерівності*). Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = A_1$ та $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = A_2$ і в деякому проколеному околі точки x_0 правдива нерівність $f_1(x) \leq f_2(x)$, то $A_1 \leq A_2$.

5 (*теорема про проміжну функцію, про «двох вартових»*). Якщо існує скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = A$ і в деякому проколеному околі точки x_0 правдиві нерівності $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ (рис. 6.4).

Доведення. 2. З рівності $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$, зокрема й для $\varepsilon = 1$, знайдеться таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < 1.$$

За нерівністю трикутника

$$|f(x) - A| \geq |f(x)| - |A|.$$

Отже,

$$|f(x)| < |A| + 1 = C.$$

А це й означає обмеженість функції f у проколеному околі точки x_0.

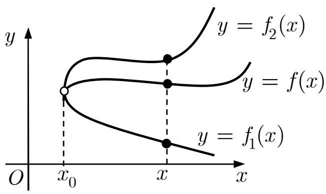


Рис. 6.4. Теорема про двох вартових

5. З рівностей $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = A$ випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існують два проколених околи точки x_0, в одному з яких виконано нерівності $-\varepsilon < f_1(x) - A < \varepsilon$, а в другому — нерівності $-\varepsilon < f_2(x) - A < \varepsilon$.

З нерівності $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ випливає, що

$$f_1(x) - A \leq f(x) - A \leq f_2(x) - A.$$

Отже, у меншому із двох околів виконано нерівності

$$-\varepsilon < f_1(x) - A \le f(x) - A \le f_2(x) - A < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A. \blacksquare$$

6.1.2. Однобічні границі функції

1. В означенні границі функції f уважають, що точка x прямує до точки x_0 довільним чином: як зліва так і справа (тобто залишаючись як меншою так і більшою, ніж x_0). Однак, значення границі може залежати від того, з якого боку (зліва чи справа) x прямує до x_0.

Означення 6.2 **(границі функції зліва і справа)** (рис. 6.5).

Точку A називають *границею* функції f у точці x_0 *зліва* (*лівобічною границею* в точці x_0), якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x, які справджують нерівність

$$-\delta < x - x_0 < 0,$$

відповідні значення функції

$$f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Точку A називають *границею* функції f у точці x_0 *справа* (*правобічною границею* в точці x_0), якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x, які справджують нерівність

$$0 < x - x_0 < \delta,$$

відповідні значення функції

$$f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Границю зліва в точці x_0 позначають як

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0 - 0} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x).$$

Границю справа в точці x_0 позначають як

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0 + 0} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x).$$

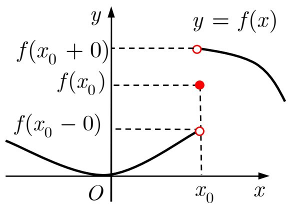


Рис. 6.5. Однобічні границі функції f у точці x_0

Границю зліва (справа) називають *однобічною границею*.

Границю, коли $x \to -\infty$, можна вважати границею справа, а границю, коли $x \to +\infty$, — границею зліва.

2. Теорема 6.1 (критерій існування скінченної границі).

Функція f має скінченну границю A в точці x_0 тоді й лише тоді, коли в цій точці існують рівні числу A границі зліва і справа:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A.$$

3. Приміром, знайдімо однобічні границі функції f, де

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, & x \in (-\infty;2], \\ x, & x \in (2;+\infty), \end{cases}$$

у точці $x_0 = 2$.

$$f(2-0) = \lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{x\to 2-0} \frac{x^2}{4} = 1;$$

$$f(2+0) = \lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{x\to 2+0} x = 2.$$

Оскільки однобічні границі існують, але не рівні між собою, то за критерієм існування границі в точці $x_0 = 2$ функція f границі не має (рис. 6.6).

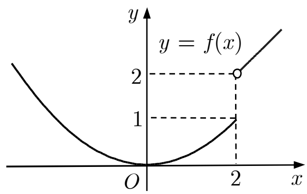


Рис. 6.6. Графік функції з різними однобічними границями в точці $x_0 = 2$

6.1.3. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

1. Розгляньмо важливі випадки границі функції.

Означення 6.3. (нескінченно малої та нескінченно великої функції).

Функцію f називають *нескінченно малою* (*н. м. ф.*), коли $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

і *нескінченно великою* (*н. в. ф.*), якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \text{ (або } -\infty, \text{ або } +\infty).$$

З означень границі функції в точці випливає, що функція α є н. м. ф., коли $x \to x_0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < \left|x - a\right| < \delta \Rightarrow \left|\alpha(x)\right| < \varepsilon.$$

Жодна зі сталих, крім $\alpha(x) = 0$, не є нескінченно малою, якою б малою за модулем вона не була. Термін «нескінченно мала» описує характер змінювання функції, а не її значення.

2. Властивість бути нескінченно малою чи нескінченно великою є локальною. Приміром, функція $y = \dfrac{1}{x}$ є нескінченно малою, коли $x \to \infty$, і нескінченно великою, коли $x \to 0$ (рис. 6.7).

Будь-яка нескінченно велика функція в околі точки x_0 є необмеженою в околі цієї точки. Обернене твердження не правдиве.

Приміром, функція $y = x\sin x$ є необмеженою, але не є нескінченно великою, коли $x \to \infty$ (рис. 6.8).

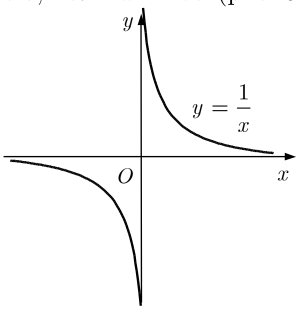


Рис. 6.7. Графік функції $y = \dfrac{1}{x}$

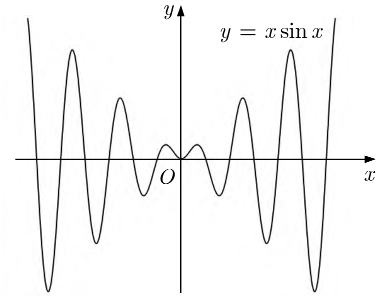


Рис. 6.8. Графік функції $y = x\sin x$

3. Властивості нескінчено малих функцій.

1. Сума (різниця) скінченної кількості нескінченно малих функцій, коли $x \to x_0$, є нескінченно малою функцією.
2. Добуток нескінченно малої функції, коли $x \to x_0$, на обмежену в околі точки x_0 функцію є нескінченно малою функцією.
3. Добуток скінченної кількості нескінченно малих функцій, коли $x \to x_0$, є нескінченно малою функцією.
4. Частка від ділення нескінченно малої функції, коли $x \to x_0$, на функцію, що має відмінну від нуля границю в точці x_0, є нескінченно малою функцією.
5. Якщо $\alpha(x)$ є нескінченно малою функцією, коли $x \to x_0$, і $\alpha(x) \neq 0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою функцією в точці x_0, і якщо $f(x)$ є нескінченно великою функцією, коли $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ є нескінченно малою функцією в точці x_0.

Доведення. 1. Нехай $u(x) = \alpha(x) + \beta(x) - \gamma(x)$, де $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ — н. м. ф., коли $x \to x_0$. Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти такі $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 > 0$, що

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$
$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$
$$0 < |x - x_0| < \delta_3 \Rightarrow |\gamma(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Позначмо $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Тоді за нерівністю трикутника

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |u(x)| = |\alpha(x) + \beta(x) - \gamma(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| + |\gamma(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

2. Нехай функція α є н. м. ф., коли $x \to x_0$, і для деякого $M > 0$ знайдеться окіл точки x_0, у якому виконується нерівність $|f(x)| < M$. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться проколений окіл точки x_0, у якому виконано нерівність $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$. У найменшому із двох околів виконано нерівність

$$|\alpha(x) f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon. \blacksquare$$

Зауважмо, що частка нескінченно малих функцій у загальному випадку не є нескінченно малою функцією.

5. З означень скінченної границі функції та нескінченно малої функції в точці випливає

Теорема 6.2 (про зв'язок функції, її границі та н. м. ф.).

Число A є границею функції f у точці x_0 тоді й лише тоді, коли

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

де α — нескінченно мала функція, коли $x \to x_0$.

Доведення. $\boxed{\Rightarrow}$ Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Позначмо $\alpha(x) = f(x) - A$. За означенням границі функції в точці, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Нехай $f(x) = A + \alpha(x)$ і $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. За означенням н. м. ф., для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A. \blacksquare$$

6. З теореми 6.2 випливає доведення єдиності границі функції. Справді, нехай існують різні границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A_1$ та $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A_2$. Тоді

$$f(x) = A_1 + \alpha_1(x) = A_2 + \alpha_2(x) \Leftrightarrow A_1 - A_2 = \alpha_2(x) - \alpha_1(x),$$

де $\alpha_1(x), \alpha_2(x)$ — н. м. ф., коли $x \to x_0$. Остання рівність неможлива, оскільки ліворуч стоїть відмінна від нуля стала, у правій — н. м. ф.

6.1.4. Знаходження границі функції

Основним інструментом знаходження границі функції є

Теорема 6.3 **(про арифметичні дії над границями функцій).**

Якщо існують скінченні $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ та $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, то

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = AB$, $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = A^n, n \in \mathbb{N}$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} Cf(x) = CA$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}, B \neq 0$;

5) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = A^B, A > 0$.

Доведення. Доведімо, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = AB$. На підставі теореми 6.5 з умови

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \lim_{x \to x_0} g(x) = B,$$

випливає, що

$$f(x) = A + \alpha(x), g(x) = B + \beta(x),$$

де α та β — нескінченно малі функції, коли $x \to x_0$.

Розгляньмо

$$f(x)g(x) = (A + \alpha(x))(B + \beta(x)) = AB + (A\beta(x) + \alpha(x)B + \alpha(x)\beta(x))$$

Оскільки $A\beta(x) + \alpha(x)B + \alpha(x)\beta(x)$ є нескінченно малою функцією послідовно за твердженнями 2, 3, 1 теореми 6.4, то на підставі теореми 6.5 маємо

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = AB. \blacksquare$$

6.1.5. «Визначеності» й невизначеності

1. У теоремах 6.2 та 6.3 йдеться про ситуації, у яких можна без будь-яких перетворень, відразу, знайти значення границь.

Твердження цих теорем можна узагальнити, поповнюючи перелік відповідних ситуацій, «визначеностей».

Приміром, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ і $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, то

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \infty; \quad \lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \infty \ (A \neq 0).$$

2. Але можливі й «невизначені» ситуації, які потребують перетворень функцій під знаком границі.

Приміром, добуток н. м. ф. на н. в. ф. може: бути н. м. ф., мати відмінну від нуля границю, бути н. в. ф.:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \cdot \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \cdot \dfrac{a}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} a = a;$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x \cdot \dfrac{1}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty;$

У цій ситуації говорять про невизначеність типу $0 \cdot \infty$.

3. Усього існує 7 типів *невизначеностей*:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0.$$

Зведімо всі визначені й невизначені ситуації до табл. 6.1 та 6.2.

Таблиця 6.1

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))$	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$
A	B	$A+B$	AB	$\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$
A	∞	∞	$\infty\ \ (A\neq 0)$	0
∞	B	∞	$\infty\ \ (B\neq 0)$	∞
0	0	0	0	$\dfrac{0}{0}$
0	∞	∞	$0\cdot\infty$	0
∞	0	∞	$0\cdot\infty$	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\dfrac{\infty}{\infty}$
$+\infty$	$-\infty$	$\infty-\infty$	$-\infty$	$\dfrac{\infty}{\infty}$

Таблиця 6.2

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$
$A>0$	B	A^B
$+0$	$-\infty$	$+\infty$
$+0$	$+\infty$	0
$+0$	0	0^0
$0<A<1$	$-\infty$	$+\infty$
$0<A<1$	$+\infty$	0
1	∞	1^∞
$A>1$	$-\infty$	0
$A>1$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$ або $B<0$	0
$+\infty$	0	∞^0
$+\infty$	$B>0$ або $+\infty$	$+\infty$

4. Розкрити невизначеність — означає знайти границю відповідного виразу, якщо вона існує. Розгляньмо важливий приклад розкриття невизначеності $\dfrac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(a_0+\dfrac{a_1}{x}+\ldots+\dfrac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0+\dfrac{b_1}{x}+\ldots+\dfrac{b_m}{x^m}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\frac{a_0+\dfrac{a_1}{x}+\ldots+\dfrac{a_n}{x^n}}{b_0+\dfrac{b_1}{x}+\ldots+\dfrac{b_m}{x^m}}=\begin{cases}0, & n<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

6.2. ГРАНИЦЯ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Важливим окремим випадком числової функції однієї змінної є числова послідовність.

6.2.1. Числова послідовність

1. Означення 6.4 (числової послідовності).

Числовою послідовністю називають числову функцію $x_n = f(n)$, означену на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$, і позначають

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots = \{x_n\}, n \in \mathbb{N}.$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ називають *членами* числової послідовності, а x_n — n-м або *загальним членом* послідовності.

Графік послідовності **дискретний**, тобто послідовність $\{x_n\}$ зображають точками площини Oxy з координатами $(n; x_n), n \in \mathbb{N}$ (рис. 6.9).

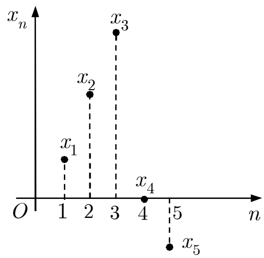


Рис. 6.9. Графік числової послідовності

2. Послідовність можна задати:

1) формулою загального члена, приміром, *геометрична прогресія*

$$x_n = b_0 q^{n-1}, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{x_n\} = b_0, b_0 q, b_0 q^2, \ldots, b_0 q^{n-1}, \ldots;$$

2) словесним описом, приміром, «$\{x_n\}$ — послідовність простих чисел», звідки

$$\{x_n\} = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots;$$

3) рекурентною формулою, коли задають кілька членів послідовності і вказують правило, за яким можна знайти наступні її члени, приміром послідовність *чисел Фібоначчі* $\{a_n\}$:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

6.2.2. Границя послідовності

1. Розгляньмо числову послідовність $\{x_n\}, n \in \mathbb{N}$.

Означення 6.5 (границі послідовності).

Точку a називають *границею* послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться номер $N_\varepsilon = N(\varepsilon)$ такий, що всі члени послідовності з номерами $n > N_\varepsilon$ потраплять в ε-окіл точки a, і пишуть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ або } x_n \to a, \text{ коли } n \to \infty.$$

Границя послідовності не залежить від відкидання скінченної кількості членів послідовності або їх змінювання.

Для послідовностей залишаються правдивими (після переформулювання) теореми про функції, які мають скінченні границі, та нескінченно малі та нескінченно великі функції.

2. Числову послідовність, що має скінченну границю a, називають *збіжною* до числа a й *розбіжною*, якщо вона не має скінченної границі.

3. Геометричний зміст збіжності послідовності. Послідовність $\{x_n\}$ збігається до дійсного числа a, якщо поза межами будь-якої симетричної горизонтальної смуги завширшки 2ε міститься лише скінченна кількість точок послідовності (рис. 6.10):

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow \left|x_n - a\right| < \varepsilon.$$

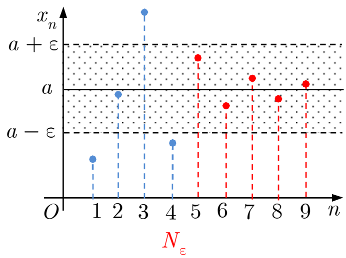


Рис. 6.10. Геометричний зміст збіжної послідовності

4. Теорема 6.4. (Гайне, критерій існування границі функції мовою послідовностей).

Число A є границею функції f у точці $x_0 \in \mathbb{R}$ тоді й лише тоді, коли для будь-якої послідовності аргументів $\{x_n\}, (x_n \neq x_0)$, такої, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до числа A:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

5. Доведімо, приміром, що функція $f(x) = \sin x$ хоч і обмежена, але не має границі, коли $x \to \infty$. Для цього досить указати дві послідовності $\{x'_n\}$ та $\{x''_n\}$, такі, що $x'_n \to \infty$ та $x''_n \to \infty$, коли $n \to \infty$, щоб відповідні послідовності значень функції збігались до різних границь.

Справді, якщо $\{x'_n\} = \{\pi n\}$ та $\{x''_n\} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right\}$, то $\{x'_n\} \to \infty$, $\{x''_n\} \to \infty$, коли $n \to \infty$, але

$$\{f(x'_n)\} = \{\sin \pi n\} = \{0\} \to 0, n \to \infty;$$

$$\{f(x''_n)\} = \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right\} = \{1\} \to 1, n \to \infty.$$

6.2.3. Границя обмеженої монотонної послідовності

1. Запишімо означення *монотонних* послідовностей.

Послідовність $\{x_n\}$:

1) *зростає* (позначають $\{x_n\} \nearrow$), якщо

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots \Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ x_n < x_{n+1};}$$

2) *не спадає*, якщо

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots \Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N} : x_n \le x_{n+1};}$$

3) *спадає* (позначають $\{x_n\} \searrow$), якщо

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots \Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N} : x_n > x_{n+1};}$$

4) *не зростає*, якщо

$$x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \ldots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \ldots \Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N} : x_n \ge x_{n+1}.}$$

Монотонність послідовності $\{a_n\}$ можна встановити, вивчаючи знак різниці $\Delta = a_{n+1} - a_n$, або, для послідовностей $\{b_n\}$ з додатними членами, порівнюючи відношення $q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ з 1.

2. Послідовність називають *обмеженою зверху* (*знизу*), якщо існує таке число $M \in \mathbb{R}$ $(m \in \mathbb{R})$, що

$$x_n \le M \quad (m \le x_n) \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}.$$

Послідовність $\{x_n\}$ називають *обмеженою*, якщо існує таке число $C > 0$, що

$$|x_n| \le C \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}.$$

Зростаюча послідовність завжди обмежена знизу першим членом, а спадна послідовність обмежена зверху першим членом.

3. Необхідною умовою збіжності послідовності є її обмеженість. Однак, обмеженість послідовності не гарантує її збіжності.

Приміром, обмежена послідовність $\{(-1)^n\}$ є розбіжною. Виявляється, що для монотонних послідовностей їхня обмеженість є достатньою умовою збіжності.

Важливим інструментом дослідження послідовності на збіжність є

Теорема 6.5 **(ознака Ваєрштраса).**

Якщо монотонна послідовність $\{x_n\}$ обмежена, то вона збігається. При цьому, якщо $\{x_n\}$ неспадна (незростаюча) послідовність, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\} \ \left(\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}\right).$$

Доведення. Нехай для визначеності $\{x_n\}$ — неспадна обмежена послідовність і $a = \sup\{x_n\}$. За означенням точної верхньої межі множини $\{x_n\}$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_N \in \{x_n\} : a - \varepsilon < x_N \le a,$$

а з того, що послідовність $\{x_n\}$ неспадна, випливає нерівність

$$a - \varepsilon < x_N \le x_{N+1} \le \ldots \le a < a + \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall n > N \Rightarrow \left|x_n - a\right| < \varepsilon.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}. \blacksquare$$

4. Число *e*. Розгляньмо послідовність із загальним членом

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}:$$

Використовуючи формулу біному Ньютона, можна показати, що послідовність $\{x_n\}$ монотонно зростає та обмежена зверху:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1};$$
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3, n = 1, 2, \ldots.$$

За ознакою Ваєрштраса це означає, що існує скінченна границя послідовності $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}$, яку позначають

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.}$$

Число e трансцендентне,

$$e \approx 2{,}7182818....$$

Границя, що означує число e, є прикладом невизначеності вигляду 1^∞.

Доведення. Покладаючи у формулі біному Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

$a = 1, b = \frac{1}{n}$, дістаємо

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + ... +$$
$$... + \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(n-1))}{n!}\frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + ... +$$
$$... + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

З цієї рівності випливає, що зі зростанням n кількість додатних доданків у правій частни збільшується. Крім того, коли зростає n, то $\frac{1}{n}$ спадає, а величини $\left(1-\frac{1}{n}\right), \left(1-\frac{2}{n}\right), ...$ зростають. Отже, послідовність $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ — зростаюча, при цьому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2.$$

Покажімо, що вона обмежена. Замінімо кожну дужку у правій частині рівності на 1, $3!$ на $2^2, ...,$ $n!$ на 2^{n-1}:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

У дужках стоїть сума геометричної прогресії з першим членом $b_1 = 1$ і знаменником $q = \frac{1}{2}$:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1\cdot\frac{\frac{1}{2^n}-1}{\frac{1}{2}-1}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<2.$$

Тому,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+2=3.$$

За теоремою 6.8 (Ваєрштраса) обмежена зверху зростаюча послідовність має границю.■

6.3. ЕКВІВАЛЕНТНІ НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ФУНКЦІЇ

Заміна під знаком границі однієї нескінченно малої на іншу, еквівалентну їй, є зручним та ефективним інструментом розкриття невизначеностей.

6.3.1. Порівняння нескінченно малих функцій

1. Нескінченно малі та нескінченно великі функції порівнюють між собою, досліджуючи їхню частку.

Нехай α та β є нескінченно малі функції, коли $x\to x_0$. Тоді:

1) якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то α називають *н. м. ф. вищого порядку мализни*, ніж β, коли $x\to x_0$, і позначають

$$\alpha(x)=o(\beta(x)), x\to x_0,$$

(символ o читають як «о-мале»);

2) якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\in\mathbb{R}\ (A\neq 0)$, то α та β називають *н. м. ф. однакового порядку мализни*, коли $x\to x_0$ і позначають

$$\alpha(x)\asymp\beta(x), x\to x_0;$$

3) якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує, то α та β називають *непорівнянними н. м. ф.*

Означення 6.6. (**еквівалентних н. м. ф.**).

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то α та β називають *еквівалентними н. м. ф.*, коли $x\to x_0$, і позначають

$$\alpha(x)\sim\beta(x), x\to x_0;$$

2. Розгляньмо приклади порівняння функцій:

1) н. м. ф. $\alpha(x)=x^2$ вищого порядку мализни, ніж н. м. ф. $\beta(x)=x$, коли $x\to 0$. Справді,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0\Leftrightarrow x^2=o(x), x\to 0;$$

2) н. м. ф. $\alpha(x)=2x$ та $\beta(x)=x$ є н. м. ф. одного порядку мализни, коли $x\to 0$, оскільки

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2\Leftrightarrow 2x\asymp x, x\to 0;$$

3) н. м. ф. $\alpha(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ та $\beta(x)=x$, непорівняні, коли $x\to 0$, оскільки їхнє відношення $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\sin\dfrac{1}{x}$ не має границі в точці $x=0$.

3. Означення 6.7 (порядку мализни).

Нехай α та β є нескінченно малі функції, коли $x\to x_0$. Якщо існує таке $k>0$, що

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=A\in\mathbb{R}\ \ (A\neq 0),$$

то н. м. ф. α називають функцією k-*го порядку мализни* щодо н. м. ф. β, коли $x\to x_0$, і пишуть

$$\alpha(x)\sim A(\beta(x))^k, x\to x_0.$$

Функцію $A(\beta(x))^k$ називають *головною частиною* функції α щодо β, коли $x\to x_0$.

Для нескінченно великих функцій говорять про *порядок росту*.

4. Приміром, функція $\alpha(x)=3x^2+2x^5$, має:

1) порядок мализни $k=2$ щодо н. м. ф. $\beta(x)=x$, коли $x\to 0$, і

2) порядок росту $k=5$ щодо н. в. ф. $\beta(x)=x$, коли $x\to\infty$, оскільки

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+2x^5}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(3+2x^3\right)=3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+2x^5\sim 3x^2, x\to 0;$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x^5}{x^5}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^3}+2\right)=2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+2x^5\sim 2x^5, x\to\infty.$$

Функція $3x^2$ є головною частиною функції $\alpha(x)=3x^2+2x^5$ щодо функції $\beta(x)=x$, коли $x\to 0$.

Функція $2x^5$ є головною частиною функції $\alpha(x)=3x^2+2x^5$ щодо функції $\beta(x)=x$, коли $x\to\infty$.

5. Властивості еквівалентних н. м. ф.

1. Границя частки двох нескінченно малих функцій не зміниться, якщо кожну з них замінити на еквівалентну їй н. м. ф.
2. Різниця двох еквівалентних нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією вищого порядку мализни, ніж кожна з них.
3. Сума скінченної кількості нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку найнижчого порядку мализни (головній частині всієї суми).
4. Сума скінченної кількості нескінченно великих функцій різних порядків еквівалентна доданку найвищого порядку росту (головній частині всієї суми).

Доведення. 1. Нехай f та h — н. м. ф. і $f(x)\sim g(x)$, коли $x\to x_0$. Тоді
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{g(x)}{h(x)}\cdot\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)}.$$
2. Нехай f,g — н. м. ф. і $f(x)\sim g(x)$, коли $x\to x_0$. Тоді
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)=1-1=0\Leftrightarrow f(x)-g(x)=o(f(x)), x\to x_0.$$
3. Нехай f,g — н. м. ф. і $f(x)=o(g(x))$, коли $x\to x_0$. Тоді
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right)=1+0=1\Leftrightarrow f(x)+g(x)\sim f(x), x\to x_0. \blacksquare$$

6. Заміну суми нескінченно малих функцій (нескінченно великих функцій) її головною частиною називають *відкиданням н. м. ф. вищих порядків мализни* (*н. в. ф. нижчих порядків росту*).

Приміром, для функції $f(x) = ax^m + bx^n, m < n$.

$$f(x) \sim ax^m, x \to 0;$$

$$f(x) \sim bx^n, x \to \infty.$$

Тоді,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0}{b_0} x^{n-m}.$$

6.3.2. Перша визначна границя

1. Якщо кут x виражений у радіанах, то правдива *перша визначна границя*

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Доведення. Спершу доведімо нерівність

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, x \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right) \cup \left(0;\frac{\pi}{2}\right).$$

Припустімо, що кут $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. З рисунку 6.11 бачимо, що

$$S_{\Delta OAB} < S_{\text{сек.} OAB} < S_{\Delta OAC}.$$

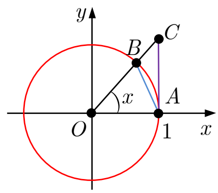


Рис. 6.11. Перша визначна границя

Оскільки розглянуті площі рівні відповідно

$$\frac{1}{2}\sin x, \frac{1}{2}x, \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

то

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right).$$

Розділивши всі члени цієї рівності на $\sin x > 0$, дістанемо

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Ця нерівність буде правдивою і для $x \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ завдяки парності функцій $y = \cos x$ та $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

З нерівності $|\sin x| < |x|$ випливає, що

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

Звідки

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right) = 1-2\lim_{x\to 0}\sin^2\frac{x}{2} = 1-0 = 1.$$

Оскільки $f_1(x)=\cos x\to 1$ та $f_2(x)=1\to 1$, коли $x\to 0$, то за теоремою про проміжну функцію одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \blacksquare$$

2. Наслідками першої визначної границі є такі границі:

1) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;}$ 2) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2};}$

3) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1;}$ 4) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.}$

Доведення. 1. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1. \blacksquare$

6.3.3. Друга визначна границя

1. Узагальненням означення числа e є *друга визначна границя*

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

Доведення її базується на нерівності

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, x\ge 1,$$

де $n=[x]$ — ціла частина числа x, і теоремі 6.1.5 про двох вартових.

Покладаючи $y=\dfrac{1}{x}$ у другій визначній границі, дістаємо

$$\boxed{\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = e.}$$

Доведення. 1. Доведімо твердження для $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Нехай $x\ge 1$ і $[x]=n$, тоді

$$n\le x<n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n};$$
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Якщо $x\to+\infty$, то $n\to\infty$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

За теоремою 6.1.5 про проміжну функцію маємо, що

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

2. Доведімо тепер, що

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Замінюючи x на $(-y)$, маємо

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e\cdot 1 = e. \blacksquare$$

2. Наслідками другої визначної границі є такі границі:

1) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a};}$

2) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1;}$

3) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a;}$

4) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1;}$

5) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x} = \mu.}$

Зауважмо, що формули, у які входять показникова функція $y = a^x$ чи логарифмічна $y = \log_a x$ мають найпростіший вигляд саме для основи $a = e$.

6.3.4. Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій

1. З визначних границь і наслідків з них випливає така таблиця еквівалентностей:

1. $\sin x \sim x, x \to 0.$

6. $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}, x \to 0.$

2. $\operatorname{tg} x \sim x, x \to 0.$

7. $\ln(1+x) \sim x, x \to 0.$

3. $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, x \to 0.$

4. $\arcsin x \sim x, x \to 0.$

5. $\operatorname{arctg} x \sim x, x \to 0.$

8. $a^x - 1 \sim x \ln a, x \to 0.$

9. $e^x - 1 \sim x, x \to 0.$

10. $(1+x)^{\mu} - 1 \sim \mu x, x \to 0.$

Н. м. ф., що стоять у правих частинах виписаних еквівалентностей, є головними частинами функцій, що стоять у лівих частинах, коли $x \to 0$.

2. За допомогою еквівалентностей можна одержати **формулу розкриття** однієї зі степенево-показникових невизначеностей:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \left[1^{\infty}\right] = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)v(x)}.}$$

Доведення. Перетворімо вираз під знаком границі:

$$\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{v(x)\ln u(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{v(x)\ln(1+(u(x)-1))} =$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln(1+(u(x)-1))} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)v(x)}. \blacksquare$$

Приміром,

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = \left[1^{\infty}\right] = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2}} = e^{-1/2}.$$

3. З таблиці еквівалентностей і п. 2 теореми 6.9 випливають *асимптотичні рівності*. Приміром,

$$\sin x = x + o(x), x \to 0,$$

$$1-\cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2), x \to 0.$$

4. Формули таблиці еквівалентностей залишаться правильними, якщо x замінити на будь-яку н. м. ф. $u(x)$, коли $x \to x_0$. Приміром,

$$\sin(5(x-1)^2) \sim 5(x-1)^2, x \to 1;$$
$$\sin u \sim u, u \to 0,\ x \to 1$$

5. Обчислюючи границі, у добутку та частці під знаком границі можна замінювати н. м. ф. на еквівалентну їй н. м. ф.

У різниці (сумі) еквівалентних нескінченно малих функцій під знаком границі **не можна** замінювати н. м. ф на еквівалентні. У цьому разі перетворюють різницю (суму) на добуток (частку) або використовують асимптотичні рівності.

6.4. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Неперервні функції є основним класом функцій, які розглядають у математичному аналізі. Уявлення про неперервну функцію як функцію, графік якої можна накреслити не відриваючи олівця від паперу, є лише початковим уявленням, що потребує уточнення.

6.4.1. Неперервність функції в точці

1. Нехай функцію f означено в деякому околі точки x_0.

Означення 6.8 (функції, неперервної в точці).

Функцію f називають *неперервною в точці* x_0, якщо існує границя функції f, коли $x \to x_0$, і ця границя дорівнює значенню функції в точці:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Отже, функція f є неперервною в точці x_0, якщо виконано умови:

1) вона означена в деякому околі точки x_0;

2) існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Оскільки $x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$, то останню рівність можна переписати так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right),$$

що дозволяє для неперервних функцій переходити до границі під знаком функції.

3. З означення неперервної в точці x_0 функції $y = f(x)$ випливає, що

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x - x_0 \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0.$$

Позначмо *приріст аргументу* в точці x_0 як

$$\boxed{\Delta x = x - x_0}$$

і відповідний йому *приріст функції* f як

$$\boxed{\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).}$$

Тоді умову неперервності можна переписати як

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.}$$

Функція f є *неперервною* в точці x_0, якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції.

4. Властивості функцій, неперервних у точці.

1. Функція, неперервна в точці, обмежена в деякому околі цієї точки.
2. Якщо функція f неперервна в точці x_0, то існує окіл точки x_0, у якому функція f має знак числа $f(x_0)$.
3. Якщо функції f_1 та f_2 неперервні в точці x_0 і виконано нерівність $f_1(x_0) > f_2(x_0)$, то існує окіл точки x_0, у якому $f_1(x) > f_2(x)$.
4. Якщо функції f та g неперервні в точці x_0, то й функції $f \pm g, fg$ та $\dfrac{f}{g}$ (у разі, якщо $g(x_0) \neq 0$) неперервні в точці x_0.

5 (*неперервність складеної функції*). Нехай функція g неперервна в точці x_0, а функція f неперервна в точці $y_0 = g(x_0)$, тоді складена функція $f(g(x))$ неперервна в точці x_0.

Властивості функцій, неперервних у точці, випливають з означення неперервності і відповідних властивостей границі функції в точці.

Доведення. 4. Доведімо, приміром, неперервність функції fg в точці x_0.

З неперервності функцій f та g в точці x_0 випливає, що

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0).$$

Тоді

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0)g(x_0).$$

Отже, функція fg неперервна в точці x_0.

5. На підставі неперервності f у точці $y_0 = g(x_0)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \sigma > 0 \ \forall y : \left|y - y_0\right| < \sigma \Rightarrow \left|f(y) - f(y_0)\right| < \varepsilon.$$

Унаслідок неперервності функції g в точці x_0 для знайденого σ маємо

$$\exists \delta > 0 \ \forall x : \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|g(x) - g(x_0)\right| < \sigma.$$

З цих нерівностей випливає, що для всіх x, які справджують нерівність $\left|x - x_0\right| < \delta$, виконано нерівність

$$\left|f(g(x)) - f(g(x_0))\right| < \varepsilon,$$

тобто функція $f(g)$ неперервна в точці x_0. ■

5. На властивості 5 ґрунтується метод заміни змінної для знаходження границі неперервної функції:

якщо функція $y = g(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $f(y)$ неперервна в точці $y_0 = g(x_0)$, то

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to y_0} f(y), \quad y = g(x).}$$

6. Теорема 6.6 (про неперервність елементарних функцій).

Елементарні функції неперервні в усіх точках, де вони означені.

Доведення. Доведімо неперервність деяких функцій.

1. Стала функція. Функція $f(x) = c = \text{const}, x \in X$, неперервна в будь-якій точці $x_0 \in X$, оскільки

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c = f(x_0).$$

2. Многочлени та раціональні функції. Доведімо неперервність функції $f(x) = ax^k$ в будь-якій точці x. За біноміальною формулою Ньютона

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (a(x + \Delta x)^k - ax^k) =$$
$$= a \lim_{\Delta x \to 0} (x^k + C_k^1 x^{k-1} \Delta x + C_k^2 x^{k-2} \Delta x^2 + \ldots + \Delta x^k - x^k) =$$
$$= a \lim_{\Delta x \to 0} (C_k^1 x^{k-1} \Delta x + C_k^2 x^{k-2} \Delta x^2 + \ldots + \Delta x^k) = 0.$$

Отже, функція $f(x) = ax^k$ неперервна в будь-якій точці x. Тоді многочлен

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

де $a_k \in \mathbb{R}, k = \overline{0, n}$, неперервна функція в будь-якій точці x як сума неперервних функцій вигляду $a_{n-k} x^k, k = \overline{0, n}$.

Раціональна функція

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

де $P_n(x)$ та $Q_m(x)$ — многочлени степенів n та m відповідно, у всіх точках, де многочлен $Q_m(x)$ відмінний від нуля, неперервна як відношення двох неперервних функцій.

3. Тригонометричні функції $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$. З нерівності (яка випливає з доведення першої визначної границі)

$$|\sin x| \le |x|$$

випливає, що

$$0 \le \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| \le \frac{|\Delta x|}{2}.$$

Маємо для будь-якого x_0

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\sin x = \lim_{\Delta x\to 0}(\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0) =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right) = \left|\begin{array}{l}\text{добуток н.м.ф.}\\ \text{на обмежену}\end{array}\right| = 0;$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\cos x = \lim_{\Delta x\to 0}(\cos(x_0+\Delta x)-\cos x_0) =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(-2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right) = \left|\begin{array}{l}\text{добуток н.м.ф.}\\ \text{на обмежену}\end{array}\right| = 0.$$

Тобто функції $f(x)=\sin x$ та $f(x)=\cos x$ — неперервні в будь-якій точці $x\in\mathbb{R}$.

Функція $f(x)=\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ неперервна в точках, де $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$, тобто в точках де $\cos x\neq 0$; функція $f(x)=\operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ неперервна в точках, де $x\neq\pi n, n\in\mathbb{Z}$ (як частка неперервних функцій).■

6.4.2. Точки розриву функції

1. Точку, у якій функція f неперервна, називають *точкою неперервності* функції f.

Теорема 6.7 **(критерій неперервності функції в точці).**

Функція f, неперервна в точці x_0 тоді й лише тоді, коли існують $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ і
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

2. Розгляньмо функцію f, означену в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Означення 6.9 **(точки розриву).**

Точку x_0 називають *точкою розриву* функції f, якщо: функція f або не означена в точці x_0, або f означена в цій точці, але не є в ній неперервною.

Розрив функції в точці x_0 геометрично означає «розрив» графіка функції в цій точці.

3. Нехай x_0 — точка розриву функції f (тобто в ній порушено принаймні одну з умов означення 6.8).

Означення 6.10 (типів точок розриву).
Якщо в точці розриву x_0 існують обидві скінченні однобічні границі функції $f(x_0-0)$ та $f(x_0+0)$, то її називають *точкою розриву 1-го роду* (*точкою скінченного розриву*), а величину
$$\delta = f(x_0+0) - f(x_0-0)$$
називають *стрибком функції*.
У разі, якщо в точці розриву x_0 функція f не має хоча б однієї однобічної границі або має нескінченну границю, то точку x_0 називають *точкою розриву 2-го роду.*

Можлива детальніша класифікація розривів.

А. Якщо стрибок функції в точці розриву 1-го роду x_0 дорівнює нулю, то точку x_0 називають *точкою усувного розриву* (рис. 6.12).

Усувний розрив можна «усунути», змінюючи значення функції в точці x_0 (доозначуючи функцію f у точці x_0), тобто утворюючи нову функцію
$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ f(x_0 \pm 0), & x = x_0, \end{cases}$$
що збігається з функцією f скрізь, окрім точки x_0. Тоді функція g буде вже неперервною в цій точці (рис. 6.13).

Б. Якщо стрибок функції в точці розриву 1-го роду x_0 не дорівнює нулю, то точку x_0 називають *точкою неусувним розривом* (рис. 6.14).

В. Якщо в точці розриву 2-го роду x_0 існують обидві однобічні границі, але хоча б одна з них нескінченна, то точку x_0 називають *точкою нескінченного розриву* (*полюсом*). У таких точках графік функції має вертикальну асимптоту $x = x_0$ (рис. 6.15).

Г. Якщо в точці розриву 2-го роду x_0 не існує хоча б одна з однобічних границь, то точку x_0 називають *точкою істотного розриву* (рис. 6.16).

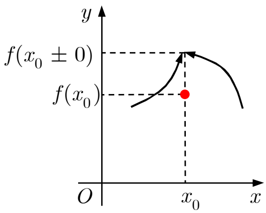


Рис. 6.12. Точка розриву 1-го роду (усувного)

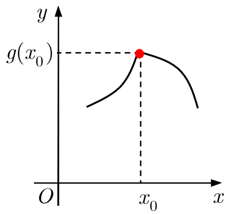


Рис. 6.13. Усунення розриву

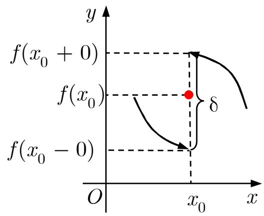


Рис. 6.14. Точка розриву 1-го роду (неусувного)

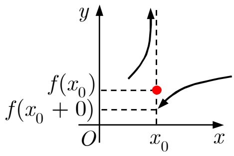


Рис. 6.15. Точка розриву 2-го роду (нескінченного)

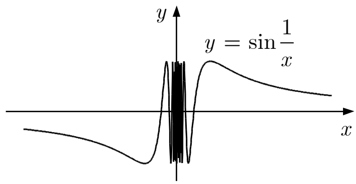


Рис. 6.16. Точка розриву 2-го роду (істотного)

4. Приміром, для функції

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

точка $x_0 = 0$ є точкою розриву.

Обчислімо однобічні границі в точці $x_0 = 0$:

$$f(+0) = \lim_{x\to+0} \operatorname{sgn} x = \lim_{x\to+0} 1 = 1;$$
$$f(-0) = \lim_{x\to-0} \operatorname{sgn} x = \lim_{x\to+0} (-1) = -1.$$

Оскільки в точці $x_0 = 0$ існують скінченні, не рівні між собою, однобічні границі, то це точка розриву 1-го роду, неусувного (рис. 6.17), із стрибком

$$\delta = f(+0) - f(-0) = 1 - (-1) = 2.$$

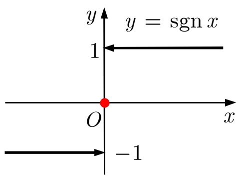


Рис. 6.17. Графік функції $y = \operatorname{sgn} x$

6.4.3. Властивості функцій, неперервних на відрізку

1. Функцію f у точці x_0 називають *неперервною справа*, якщо $f(x_0+0) = f(x_0)$, і *неперервною зліва*, якщо $f(x_0-0) = f(x_0)$.

Означення 6.11 (функції неперервної на відрізку).

Функцію f називають *неперервною* в інтервалі $(a;b)$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Функцію f називають *неперервною* на відрізку $[a;b]$, якщо вона неперервна в інтервалі $(a;b)$ і в точці a неперервна справа, а в точці b неперервна зліва.

Множину всіх неперервних на відрізку $[a;b]$ функцій позначають $C[a;b]$.

2. Теорема 6.8 (Ваєрштраса, про обмеженість функції,).

Функція f, неперервна на відрізку $[a;b]$, обмежена на ньому (рис. 6.18).

Якщо функція f неперервна в інтервалі (або на півінтервалі $[a;b)$, або на півінтервалі $(a;b]$), то f не обов'язково обмежена на ньому. Приміром, функція $f(x) = \frac{1}{x}$ неперервна на півінтервалі $(0;1]$, але не є обмежена на ньому, оскільки $\frac{1}{x} \to +\infty$, коли $x \to +0$.

3. Розгляньмо функцію f, обмежену на множині X.

Означення 6.12 (найменшого і найбільшого значень функції).

Точну верхню межу M значень неперервної на відрізку $[a;b]$ функції f називають *найбільшим значенням* функції на цьому відрізку і позначають

$$\max_{[a;b]} f(x) = \sup_{x\in[a;b]} f(x) = M.$$

Точну нижню межу m значень неперервної на відрізку $[a;b]$ функції f називають *найменшим значенням* функції на цьому відрізку і позначають

$$\min_{[a;b]} f(x) = \inf_{x\in[a;b]} f(x) = m.$$

Теорема 6.9 (Ваєрштраса, про найбільше та найменше значення).

Неперервна на відрізку $[a;b]$ функція f досягає на цьому відрізку свого найбільшого значення M та найменшого значення m (див. рис. 6.18).

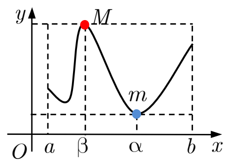


Рис. 6.18. Теореми Ваєрштраса

4. Якщо функція f неперервна в інтервалі $(a;b)$, то вона може й не досягати на ньому найбільшого чи найменшого значення. Приміром, функція $f(x) = x^2, x \in (-1;1)$. Справді, $\sup\limits_{x\in(-1;1)} x^2 = 1$, але в жодній точці інтервалу $(-1;1)$ функція не досягає цього значення. Отже, функція $f(x) = x^2, x \in (-1;1)$, не досягає в цьому інтервалі свого найбільшого значення. Найменше значення $m = \inf\limits_{x\in(-1;1)} x^2$ досягається в точці $x = 0$.

5. Теорема 6.10 (Больцано — Коші, про нулі функції).

Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$ і набуває на його кінцях значень $A = f(a)$ і $B = f(b)$ різних знаків, то всередині інтервалу $(a;b)$ знайдеться принаймні одна точка c, для якої $f(c) = 0$ (рис. 6.19).

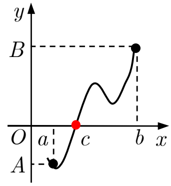


Рис. 6.19. Теорема про нулі функції

Доведення. Нехай для визначеності $f(a) = A < 0, f(b) = B > 0$. Поділімо відрізок $[a;b]$ точкою x_0 навпіл. Якщо $f(x_0) = 0$, то теорему доведено, а якщо $f(x_0) \neq 0$, то візьмімо ту половину $[a_1;b_1]$ відрізка $[a;b]$, для якої $f(a_1) < 0, f(b_1) > 0$, тобто $a_1 = a, b_1 = x_0$ або $a_1 = x_0, b_1 = b$,

Знову поділімо вибраний відрізок $[a_1;b_1]$ навпіл точкою x_1. Якщо $f(x_1) = 0$, то шукану точку $c = x_1$ знайдено. Якщо ж $f(x_1) \neq 0$, то візьмімо ту половину $[a_2;b_2]$ відрізка $[a_1;b_1]$, для якої $f(a_2) < 0, f(b_2) > 0$.

Продовживши ці міркування, або знаходимо через скінченну кількість кроків точку $c \in (a;b)$, що $f(c) = 0$, або існує послідовність *стяжних вкладених* відрізків $[a_n;b_n], n \in \mathbb{N}$, тобто відрізків, які справджують умови:

$$[a_{n+1};b_{n+1}] \subset [a_n;b_n] \Leftrightarrow a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n; \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0,$$

для яких $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$.

Зі щільності множини дійсних чисел (теореми Кантора) випливає, що знайдеться єдина точка $c \in (a;b)$, спільна для всіх цих відрізків, причому

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Ураховуючи неперервність функції f і спрямувавши в нерівностях $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$ n до ∞, одержимо, що

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \le 0, \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) \ge 0,$$

тобто $f(c) = 0$. ■

Вимога неперервності функції f на відрізку $[a;b]$ суттєва: функція, що має розрив хоча б в одній точці, може перейти від від'ємного значення до додатного і не набуваючи нульового значення. Приміром, функція (рис. 6.20)

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

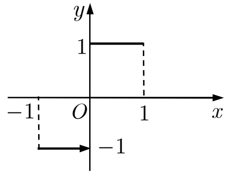


Рис. 6.20. Графік функції, яка має розрив в одній точці

6. Теорема 6.11 (Больцано — Коші, про проміжні значення).

Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, $f(a) = A, f(b) = B$, і C — будь-яке число, що лежить між A та B, то в інтервалі $(a;b)$ знайдеться точка c, у якій (рис. 6.21)

$$f(c) = C.$$

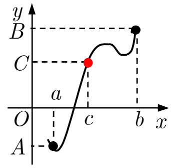


Рис. 6.21. Теорема про проміжні значення функції

Доведення. Нехай для визначеності $A < B$. Тоді для функції $\varphi(x) = f(x) - C$ маємо:

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0;$$
$$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

Отже, функція $\varphi(x)$ на кінцях відрізку $[a;b]$ має різні знаки. За теоремою Больцано — Коші про нулі функції існує така точка $c \in (a;b)$, що

$$\varphi(c) = f(c) - C = 0 \Rightarrow f(c) = C. \blacksquare$$

З того що функція означена на відрізку і набуває всіх своїх проміжних значень на ньому ще не випливає її неперервність на цьому відрізку (рис. 6.22).

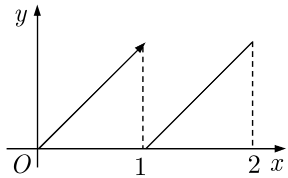


Рис. 6.22. Приклад розривної функції, що набуває всі проміжні значення

8. Теорема 6.12 (про неперервність оберненої функції).

Якщо функція f зростає (спадає) і неперервна на відрізку $[a;b]$, то обернена функція f^{-1} зростає (спадає) і неперервна на відрізку $[A;B]$, де $[A;B]$ — множина значень функції f.

З неперервності та строгої монотонності функції $\sin x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x$ на $[0;\pi]$, $\operatorname{tg} x$ в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{ctg} x$ в $(0;\pi)$ випливає неперервність обернених тригонометричних функцій $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ та $\operatorname{arcctg} x$ у їхніх областях означення.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

6.1.1. За графіком функції f знайдіть указані значення (або з'ясуйте, що вони не існують): $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $f(1)$.

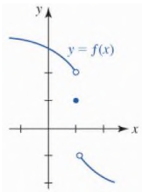


Рис. до 6.1.1.1)

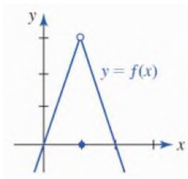


Рис. до 6.1.1.2)

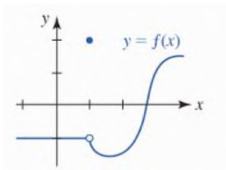


Рис. до 6.1.1.3)

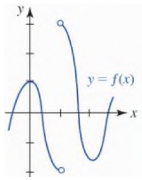


Рис. до 6.1.1.4)

6.1.2. За графіком функції g знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to 1-0} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 1+0} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$, $g(1)$;

2) $\lim\limits_{x\to 2-0} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 2+0} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$, $g(2)$;

3) $\lim\limits_{x\to 3-0} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 3+0} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$, $g(3)$.

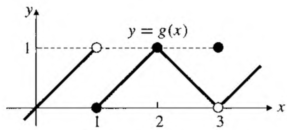


Рис. до 6.1.2

6.1.3. За графіком функції f знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $f(1)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $f(2)$;

4) $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $f(3)$;

5) $\lim\limits_{x\to 4-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 4+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, $f(4)$;

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$;

7) асимптоти графіка функції $y = f(x)$.

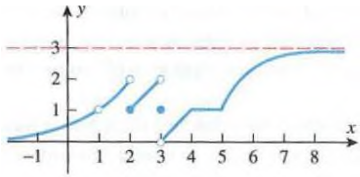


Рис. до 6.1.3

6.1.4. За графіком функції f знайдіть:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x),\ \lim_{x\to 2+0} f(x), \lim_{x\to 2} f(x), f(2),\ \lim_{x\to -\infty} f(x),\ \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

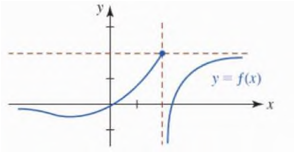


Рис. до 6.1.4.1)

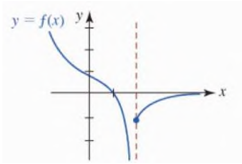


Рис. до 6.1.4.2)

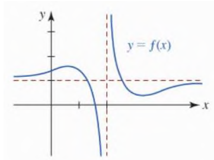


Рис. до 6.1.4.3)

6.1.5. За графіком функції f знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to -2-0} f(x),\ \lim\limits_{x\to -2+0} f(x), \lim\limits_{x\to -2} f(x), f(-2);$

2) $\lim\limits_{x\to -0} f(x),\ \lim\limits_{x\to +0} f(x), \lim\limits_{x\to 0} f(x), f(0);$

3) $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x),\ \lim\limits_{x\to 2+0} f(x), \lim\limits_{x\to 2} f(x), f(2);$

4) вертикальні асимптоти графіка функції f.

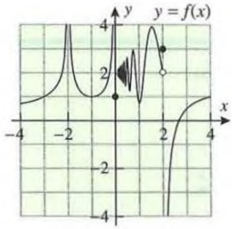


Рис. до 6.1.5

6.1.6. За графіком функції φ знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} \varphi(x);$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi(x);$

3) $\lim\limits_{x\to 4} \varphi(x);$

4) асимптоти графіка функції.

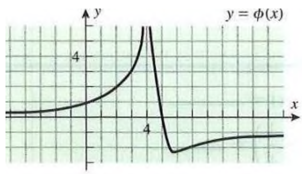


Рис. до 6.1.6

6.1.7. За графіком функції G знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} G(x);$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} G(x).$

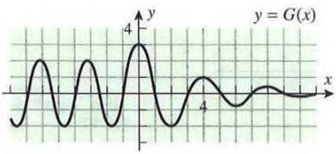


Рис. до 6.1.7

6.1.8. За графіком функції f $(D(f) = [0;+\infty))$ знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to +0} f(x), f(0);$

2) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x),\ \lim\limits_{x\to 1+0} f(x), \lim\limits_{x\to 1} f(x), f(1);$

3) $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x),\ \lim\limits_{x\to 2+0} f(x), \lim\limits_{x\to 2} f(x), f(2);$

4) $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x), \lim\limits_{x\to 3+0} f(x),$
$\lim\limits_{x\to 3} f(x), f(3);$

5) $\lim\limits_{x\to 4-0} f(x), \lim\limits_{x\to 4+0} f(x),$
$\lim\limits_{x\to 4} f(x), f(4);$

6) $\lim\limits_{x\to 5-0} f(x), \lim\limits_{x\to 5+0} f(x),$
$\lim\limits_{x\to 5} f(x), f(5);$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x).$

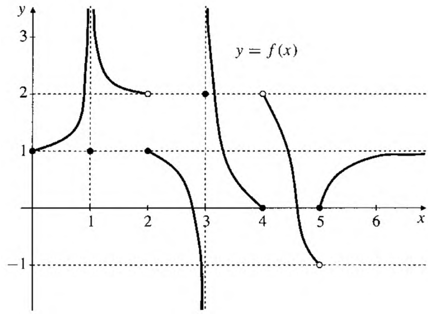


Рис. до 6.1.8

6.1.9. Чи правильно, що:

1) якщо функція f має границю в точці x_0, а функція g не має границі в цій точці, то функція $f+g$ не має границю в точці x_0;

2) якщо функції f та g не мають границі в точці x_0, то функція $f+g$ також не має границі в цій точці?

6.1.10. Наведіть приклад функції, яка означена і не має границі в усіх цілих точках, але має границі в решті точок.

6.1.11. Покажіть на прикладах, що:

1) частка двох нескінченно малих, коли $x\to x_0$, функцій може не бути нескінченно малою функцією:

2) якщо $\alpha(x)$ — н. м. ф., коли $x\to x_0$, а $\beta(x)$ — н. м. ф., коли $x\to x_1$, то сума $\alpha(x)+\beta(x)$ може ніде не бути нескінченно малою функцією;

3) сума нескінченно великих функцій, коли $x\to x_0$, може бути навіть нескінченно малою функцією, коли $x\to x_0$.

6.1.12. Наведіть приклад, функції, нескінченно малої, коли $x\to 1$ та $x\to 2$, але яка не є нескінченно малою в околі інших точок.

6.1.13. Зобразіть можливий графік функції f із заданими властивостями:

1) а) $D(f)=[-1;1]$; б) $f(-1)=f(0)=f(1)$;

в) $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=1;$

2) а) $D(f)=[-2;1]$; б) $f(-2)=f(0)=f(1)=0$;

в) $\lim\limits_{x\to -2+0} f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=1;$

3) а) $D(f) = (-\infty;2]$; б) $f(-2) = f(0) = 1$; в) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = +\infty$;

4) $f(-1) = 3, f(0) = -1, f(1) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не існує;

5) $f(-2) = 3$, $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = -1, f(1) = -2$;

6) $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 3, f(3) = 0$, $f(1)$ не існує;

7) $f(-2) = 2, f(x) = 1, -1 \le x \le 1$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1, f(2) = 3$,

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ не існує;

8) $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0} = -\infty, f(2) = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$;

9) $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to -\infty} = 3$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -2$;

10) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$.

6.1.14. Що означає, що для функції $f(x), x \in X$:

1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in X : 0 < \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x)\right| < \varepsilon$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in X : 0 < \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - A\right| < \varepsilon$;

3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in X : 0 < \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x)\right| > \varepsilon$?

6.1.15. Що можна виснувати про поводження функції f у точці x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x) = A \in \mathbb{R}$.

6.1.16. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 4$ та $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -2$, знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x))$; 2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$; 3) $\lim\limits_{x\to a} 4g(x)$; 4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

6.1.17. Для визначеності знайдіть границю, а для невизначеності визначте її тип:

1) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}$; 4) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}$.

6.1.18. Для визначеності знайдіть границю, а для невизначеності визначте її тип:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\sin(x-1)}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}$.

6.1.19. Для визначеності знайдіть границю, а для невизначеності визначте її тип:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{x-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{1}{x-1}\right)^{x-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{\sin(x-1)}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1+0}(\sin(x-1))^{x-1}$.

6.1.20. Знайдіть $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2}=3$.

6.1.21. Знайдіть $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ та $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$, якщо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=-2$.

6.1.22. Знайдіть $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, якщо $\sqrt{5-2x^2}\le f(x)\le\sqrt{5-x^2}$ для $x\in[-1;1]$.

6.1.23. Нехай $\left|f(x)\right|\le g(x)$ для всіх x. Що можна сказати про $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, якщо: 1) $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$; 2) $\lim\limits_{x\to a}g(x)=3$?

6.2.1. Запишіть можливу формулу загального члена послідовності:

1) $-1,1,-1,1,-1,1,\ldots$; 2) $1,-1,1,-1,1,-1,\ldots$;

3) $1,0,1,0,1,0,\ldots$; 4) $a,a^3,a^5,a^7,\ldots$.

6.2.2. Які з поданих тверджень правильні, а які ні?

1. Якщо послідовність необмежена, то вона не має найбільшого члена.

2. Якщо послідовність обмежена, то вона має як найбільший, так і найменший члени.

3. Якщо послідовність не має найбільшого члена, то вона необмежена.

4. Якщо послідовність має найменший і найбільший члени, то вона обмежена.

5. Якщо всі члени послідовності цілі числа і ця послідовність обмежена, то вона має як найбільший, так і найменший члени.

6. Якщо послідовність необмежена, то лише скінченна кількість її членів може лежати на проміжку $[0;1]$.

7. Якщо послідовності $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$ обмежені, то послідовність $\{a_n+b_n\}$ також обмежена.

8. Якщо послідовності $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$ обмежені, то послідовність $\{a_n b_n\}$ також обмежена.

9. Якщо послідовність монотонна, то вона має найбільший або найменший член.

10. Якщо послідовність $\{a_n\}$ необмежена й жодний її член не дорівнює нулю, то послідовність $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ обмежена.

6.2.3. Які з поданих тверджень правильні, а які ні?

1. Сума двох монотонних послідовностей є монотонна послідовність.

2. Сума двох спадних послідовностей є спадна послідовність.

3. Добуток двох зростаючих послідовностей є зростаюча послідовність.

4. Добуток двох спадних послідовностей є спадною послідовністю.

6.2.4. Чи може добуток двох немонотонних послідовностей бути:

1) монотонною, але не строго монотонною послідовністю;

2) строго монотонною послідовністю;

3) добуток двох зростаючих послідовностей бути немонотонною послідовністю?

6.2.5. Наведіть приклади таких послідовностей $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$, щоб:

1) послідовність $\{a_n\}$ зростала, а послідовності $\{b_n\}$ та $\{a_n + b_n\}$ спадали;

2) послідовність $\{a_n\}$ спадала, а послідовності $\{b_n\}$ та $\{a_n + b_n\}$ зростали;

3) послідовність $\{a_n\}$ зростала, а послідовності $\{b_n\}$ та $\{a_n b_n\}$ спадали;

4) послідовність $\{a_n\}$ спадала, а послідовності $\{b_n\}$ та $\{a_n b_n\}$ зростали;

5) послідовності $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$ були необмеженими, а послідовність $\{a_n + b_n\}$ обмеженою;

6) послідовності $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$ були необмеженими, а послідовність $\{a_n b_n\}$ обмеженою;

7) послідовності $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$ були обмеженими, а послідовність $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ необмеженою.

6.2.6. Що означає, твердження:

1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon\ \forall n > N_\varepsilon : \left|x_n - a\right| < \varepsilon$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon\ \forall n > N_\varepsilon : \left|x_n\right| > \varepsilon$;

3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon\ \forall n > N_\varepsilon : \left|x_n\right| < \varepsilon$?

6.2.7. Наведіть приклад:

1) частки двох нескінченно малих послідовностей, що не є нескінченно малою послідовністю;

2) нескінченно малої послідовності, перші сто членів якої більше за 1000;

3) нескінченно малої послідовності, яка містить нескінченно багато як додатних, так і від'ємних членів;

4) послідовності $\{x_n\}$, яка розбігається, але для якої послідовність $\{\left|x_n\right|\}$ збігається.

6.2.8. Нехай $\{x_n\}$ нескінченно мала, а $\{y_n\}$ та $\{z_n\}$ — нескінченно великі послідовності. Чи правильно, що завжди:

1) $\{x_n y_n\}$ — нескінченно велика послідовність;

2) $\{x_n y_n\}$ — нескінченно мала послідовність;

3) $\{x_n y_n\}$ — збіжна послідовність;

4) $\{y_n z_n\}$ — нескінченно велика послідовність;

5) $\{y_n + z_n\}$ — розбіжна послідовність?

6.2.9. Наведіть приклад таких збіжних послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$, що:

1) $x_n > y_n$, але $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $x_n > 100y_n > 0$, але $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

6.2.10. Які з поданих тверджень правильні, а які ні?

1. Якщо послідовність має границю, то вона обмежена.
2. Якщо послідовність не має границі, то вона необмежена.
3. Якщо послідовність обмежена, то вона має границю.
4. Якщо послідовність монотонна й обмежена, то вона має границю.
5. Якщо послідовність не монотонна, то вона не має границі.
6. Якщо послідовність необмежена, то вона розбіжна.
7. Якщо в кожному околі $(c-\varepsilon; c+\varepsilon)$ точки c лежить безліч членів послідовності $\{a_n\}$, то число c — границя цієї послідовності.
8. Якщо в кожному околі $(c-\varepsilon; c+\varepsilon)$ точки c лежать всі члени послідовності $\{a_n\}$, за винятком, можливо, скінченної їх кількості, то c — границя послідовності $\{a_n\}$.

9. Якщо $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, то в кожному околі $(c-\varepsilon; c+\varepsilon)$ точки c лежить безліч членів цієї послідовності.

10. Якщо $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ поза проміжком $(c-\varepsilon; c+\varepsilon)$ точки c лежить скінченна кількість членів цієї послідовності.

6.2.11. Що означає для послідовності $\{a_n\}$ кожна з таких властивостей:

1) у кожному околі точки c лежать усі члени послідовності $\{a_n\}$;

2) у певному околі точки c лежать усі члени послідовності $\{a_n\}$;

3) жодний окіл точки c не містить жодного члена послідовності $\{a_n\}$;

4) жодний окіл точки c не містить усіх членів послідовності $\{a_n\}$;

5) поза певним околом точки c лежить скінченна кількість членів послідовності $\{a_n\}$;

6) поза кожним околом точки c лежить скінченна кількість членів послідовності $\{a_n\}$.

6.2.12. Які з поданих тверджень правильні, а які ні?

1. Якщо у збіжній послідовності змінити скінченну кількість членів, то нова послідовність матиме ту саму границю.

2. Зміною скінченної кількості членів не можна з розбіжної послідовності дістати збіжну.

3. Якщо послідовності $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$ мають однакову границю, то послідовність $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ має ту саму границю.

4. Якщо послідовність $\{a_n\}$ збігається, то послідовність $\{|a_n|\}$ також збігається.

5. Якщо послідовність $\{|a_n|\}$ збігається, то послідовність $\{a_n\}$ також збігається.

6.2.13. Послідовність $\{a_n\}$ збігається, а послідовність $\{b_n\}$ розбігається. Чи може:

1) послідовність $\{a_n + b_n\}$ збігатися;

2) послідовність $\{a_n b_n\}$ збігатися?

6.2.14. Наведіть приклади таких розбіжних послідовностей $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$, щоб:

1) послідовність $\{a_n + b_n\}$ збігалася;

2) послідовність $\{a_n b_n\}$ збігалася;

3) послідовність $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ збігалася?

6.3.1. Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ — н. м. ф. в точці x_0 і $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c.$

Запишіть за допомогою символіки порівняння $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, якщо:
1) $c = 2$; 2) $c = 0$;3) $c = \infty$; 4) $c = 1$.

6.3.2. Знайдіть значення параметра a, для якого виконано рівність:

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x}{x} = 1$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{ax} = 1$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{a/x} = e$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = 1$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_3(1-2x)}{ax} = \dfrac{1}{\ln 3}$

6.4.1. Що відомо про $f(3)$, якщо функція f неперервна і $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1$?

6.4.2. Нехай $f(x) < 0$ для $x > 0$ та $f(x) > 1$ для $x < 0$. Чи може бути функція f неперервною в точці $x = 0$?

6.4.3. Охарактеризуйте поводження функції в точці $x_0 = 0$.

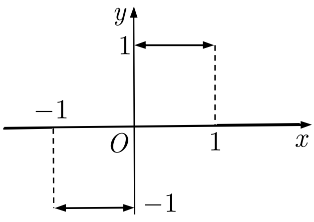


Рис. до 6.1.8.1)

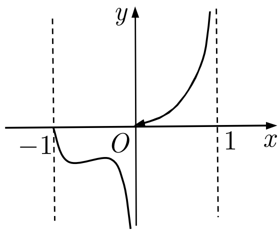


Рис. до 6.1.8.2)

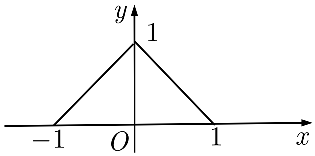


Рис. до 6.1.8.3)

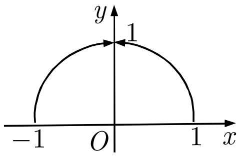


Рис. до 6.1.8.4)

6.4.4. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)$, якщо функція $f(x)$ має усувний розрив у точці $x=2$ і $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=1$?

6.4.5. Використовуючи графік функції f, укажіть її точки розриву і визначте їх тип.

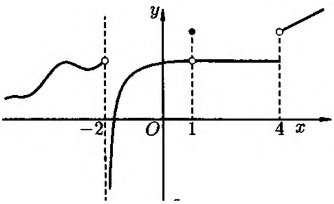


Рис. до 6.4.5.1)

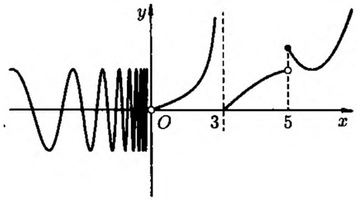


Рис. до 6.4.5.2)

6.4.6. Наведіть приклад двох розривних у точці x_0 функцій f та g, для яких:

1) функція $h(x)=f(x)+g(x)$ є неперервною в цій точці;

2) функція $h(x)=f(x)g(x)$ є неперервною в цій точці.

6.4.7. Наведіть приклад:

1) функції, неперервної і необмеженої в інтервалі $(a;b)$;

2) функції, заданої на відрізку $[a;b]$ і необмеженої на ньому;

3) неперервної на деякій множині функції, яка набуває значення 0 та 2, але не набуває значення 1;

4) функції, неперервної на кожному з проміжків $[0;1)$ та $[1;2]$, але не є неперервною на їх об'єднанні, тобто на відрізку $[0;2]$;

5) функції, неперервної в інтервалі $(a;b)$, множина значень якої:

а) інтервал; б) відрізок; в) півінтервал;

6) функції $f(x)$, розривної на відрізку $[a;b]$, для якої функції $\left|f(x)\right|$ неперервна на цьому відрізку.

6.4.8. Нехай функція f неперервна на відрізку $[1;5]$ і $f(1) = 20, f(5) = 100$. Визначте які із тверджень є завжди правильними, завжди хибними або правильними за певних умов:

1) рівняння $f(c) = 3$ має розв'язок $c \in [1;5]$;

2) рівняння $f(c) = 75$ має розв'язок $c \in [1;5]$;

3) рівняння $f(c) = 50$ не має розв'язку $c \in [1;5]$;

4) рівняння $f(c) = 30$ має точно один розв'язок $c \in [1;5]$.

6.4.9. Чи досягає функція $f(x) = x^2$ свого найбільшого значення в інтервалі $(-1;1)$? свого найменшого значення? Поясніть.

Відповіді

6.1.1. 1) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 2, \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = -1, \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ не існує, $f(1) = 1$;

2) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 3, \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 3, \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3, f(1) = 0$;

3) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = -1, \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = -1, \lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1, f(1) = 2$;

4) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = -2, \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 3, \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ не існує, $f(1)$ не існує.

6.1.2. 1) $\lim\limits_{x\to 1-0} g(x) = 1, \lim\limits_{x\to 1+0} g(x) = 0, \lim\limits_{x\to 1} g(x)$ не існує, $g(1) = 0$;

2) $\lim\limits_{x\to 2-0} g(x) = \lim\limits_{x\to 2+0} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} g(x) = g(2) = 1$;

3) $\lim\limits_{x\to 3-0} g(x) = \lim\limits_{x\to 3+0} g(x) = \lim\limits_{x\to 3} g(x) = 0, g(3) = 1$.

6.1.3. 1) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$;

2) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1, f(1)$ не існує;

3) $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = 2, \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = 1, \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ не існує, $f(2) = 1$;

4) $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = 2, \lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to 3} f(x)$ не існує, $f(3) = 1$;

5) $\lim\limits_{x\to 4-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 4+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} f(x) = f(4) = 1$;

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3$;

7) ліва горизонтальна асимптота $y = 0$ та права горизонтальна асимптота $y = 3$.

6.1.4. 1) $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = 2, \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ не існує, $f(2) = 2$,

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$;

2) $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = -1, \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ не існує, $f(2) = -1,$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0;$

3) $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty, f(2)$ не існує,

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1.$

6.1.5. 1) $\lim\limits_{x\to -2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} f(x) = +\infty, f(-2)$ не існує;

2) $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to +0} f(x) = 2, \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не існує, $f(0) = 1;$

3) $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = 2, \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ не існує, $f(2) = 3;$

4) двобічна вертикальна асимптота $x = -2$, ліва вертикальна асимптота $x = 0$, права вертикальна асимптота $x = 2$.

6.1.6. 1) $\lim\limits_{x\to -\infty} \varphi(x) = 0$; 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi(x) = -1$; 3) $\lim\limits_{x\to 4} \varphi(x) = +\infty$; 4) ліва асимптота $y = 0$, права асимптота $y = -1$, вертикальна асимптота $x = 4$.

6.1.7. 1) $\lim\limits_{x\to -\infty} G(x)$ не існує; 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} G(x) = 0.$

6.1.8. 1) $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = f(0) = 1;$

2) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty, f(1) = 1;$

3) $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = 2, \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = 1, \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ не існує, $f(2) = 1;$

4) $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to 3} f(x) = \infty, f(3) = 2;$

5) $\lim\limits_{x\to 4-0} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to 4+0} f(x) = 2, \lim\limits_{x\to 4} f(x)$ не існує, $f(4) = 0;$

6) $\lim\limits_{x\to 5-0} f(x) = -1, \lim\limits_{x\to 5+0} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to 5} f(x)$ не існує, $f(5) = 0;$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1.$

6.1.9. 1) так; 2) ні.

6.1.10. $f(x) = [x]$.

6.1.12. $f(x) = (x-1)(x-2)$.

6.1.14. 1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0, x_0 \in \mathbb{R}$; 2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R};$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty,\ x_0 \in \mathbb{R};$

6.1.15. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, обмежена.

6.1.16. 1) 2; 2) -8; 3) -8; 4) -2.

6.1.17. 1) 0; 2) $\dfrac{0}{0}$; 3) ∞; 4) $\dfrac{\infty}{\infty}$.

6.1.18. 1) $\sin 1$; 2) $\dfrac{0}{0}$; 3) 0; 4) $\infty - \infty$; 5) 0.

6.1.19. 1) 1^{∞}; 2) 1; 3) 0; 4) ∞^{0}; 5) 0^{0}.

6.1.20. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$.

6.1.21. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

6.1.22. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \sqrt{5}$.

6.1.23. 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$; 2) не відомо.

6.2.1. 1) $(-1)^{n+1}$; 2) $(-1)^{n}$; 3) $\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$; 4) a^{2n-1}.

6.2.2. 1) ні; 2) ні; 3) ні; 4) так; 5) так; 6) ні; 7) так; 8) так; 9) так; 10) так.

6.2.3. 1) ні; 2) так; 3) ні; 4) ні.

6.2.4. 1) так, $x_n = (-1)^n, y_n = (-1)^n$; 2) так, $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}, y_n = (-1)^n n^2$;
3) $x_n = y_n = n-2$.

6.2.6. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

6.2.8. 1) ні; 2) ні; 3) ні; 4) так; 5) ні.

6.2.10. 1) так; 2) ні; 3) ні; 4) так; 5) ні; 6) так; 7) ні; 8) так; 9) так; 10) так;

6.2.11. 1) $a_n = c$; 2) послідовність обмежена; 3) таких послідовностей не буває; 4) послідовність необмежена; 5) послідовність обмежена; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

6.2.12. 1) так; 2) так; 3) так; 4) так; 5) ні.

6.2.13. 1) ні; 2) так.

6.3.1. 1) $\alpha(x) \asymp \beta(x)$; 2) $\alpha(x) = o(\beta(x))$; 3) $\beta(x) = o(\alpha(x))$; 4) $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

6.3.2. 1) $a = 0$; 2) $a = \pi$; 3) $a = -1$; 4) $a = e$; 5) $a = -2$.

6.4.1. $f(3) = 1$.

6.4.2. Ні.

6.4.3. 1) розрив 1-го роду, неусувний; 2) розрив 2-го роду, нескінченний; 3) функція неперервна; 4) розрив 1-го роду, усувний.

6.4.4. $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = 1$.

6.4.5. 1) функція $f(x)$ має: в точці $x = 2$ розрив 2-го роду, нескінченний; у точці $x = 1$ розрив 1-го роду, усувний; у точці $x = 4$ розрив 1-го роду, неусувний;
2) функція $f(x)$ має: в точці $x = 0$ розрив 2-го роду, істотний; у точці $x = 3$ розрив 2-го роду, нескінченний; у точці $x = 5$ розрив 1-го роду, неусувний.

6.4.6. 1) $f(x) = x - \operatorname{sgn} x, g(x) = x + \operatorname{sgn} x, x_0 = 0$;
2) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0, \end{cases} x_0 = 0$.

6.4.7. 1) $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$; 2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-a}, & x \in (a;b], \\ 0, & x = a; \end{cases}$ 3) $f(x) = x, x \in [0;1) \cup (1;2]$;

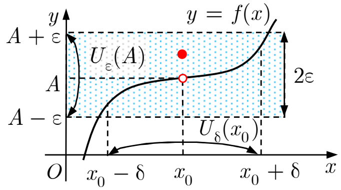
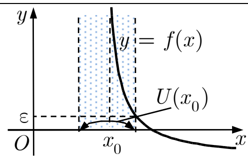
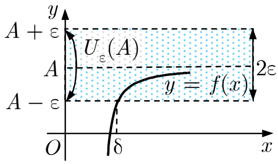
4) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;1), \\ 1, & x \in [1;2]; \end{cases}$ 5) а) $f(x) = x, x \in (0;1)$; б) $f(x) = \sin x, x \in (0;2\pi)$;

в) $f(x) = \left|x\right|, x \in (-1;1)$; 6) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} x \in [-1;1]$.

6.4.8. 1) правильне за певних умов; 2) завжди правильне; 3) неправильне; 4) правильне за певних умов.

Формули, твердження, алгоритми

6.1. Границя функції

❶ Означення границі функції в точці ***за Коші* (*мовою околів*)**	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(A)\ \exists U_\delta(x_0):$ $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$
❷ ***Скінченна*** границя функції в точці $(x_0, A \in \mathbb{R})$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0:$ $0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$	
❸ ***Нескінченна*** границя функції в точці $(x_0 \in \mathbb{R}, A = \infty)$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0:$ $0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x)\rvert > \varepsilon$	
❹ ***Скінченна*** границя функції на нескінченності $(x_0 = +\infty, A \in \mathbb{R})$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0:$ $x > \delta \Rightarrow \lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$	
❺ Границя ***зліва*** (***лівобічна*** границя). $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0,\\ x<x_0}} f(x)$	❻ Границя ***справа*** (***правобічна*** границя). $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0,\\ x>x_0}} f(x)$
❼ ***Критерій існування скінченної границі.*** Функція f має скінченну границю A в точці x_0 тоді й лише тоді, коли в цій точці існують рівні числу A границі зліва і справа:	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$
❽ ***Властивості функцій, що мають скінченну границю***	
① Якщо функція має скінченну границю в точці, то ця границя єдина. ② Якщо функція має скінченну границю в точці, то вона обмежена в деякому проколеному околі цієї точки.	④ Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$ і в деякому проколеному околі точки x_0 правдива нерівність $f_1(x) \le f_2(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$.

③ Якщо існує скінченна $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ і в деякому проколеному околі точки x_0 виконано нерівність $f(x) \geq 0$, то $A \geq 0$.	⑤ (*теорема про «двох вартових»*). Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A$ і в деякому проколеному околі точки x_0 правдиві нерівності $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.
❾ ***Теорема про арифметичні дії над границями функцій.*** Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$ $(A, B \in \mathbb{R})$, то: ① $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$; ② $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = AB$,	③ $\lim\limits_{x \to x_0} Cf(x) = CA$; ④ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}, B \neq 0$; ⑤ $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = A^n, n \in \mathbb{N}$; ⑥ $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = A^B, A > 0$

6.2. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

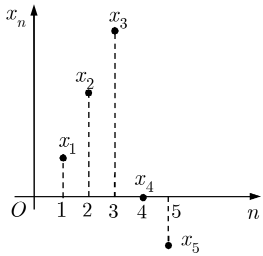
❶ ***Нескінченно мала функція*** α в точці x_0 (н. м. ф.)	$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$
❷ ***Нескінченно велика функція*** f у точці x_0 (н. в. ф.)	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ (або $\pm\infty$)
❸ ***Властивості н. м. ф.*** $(\alpha(x) \to 0, \beta(x) \to 0$, коли $x \to x_0)$	
① *сума н. м. ф.* α та β	$\alpha(x) + \beta(x) \to 0$, коли $x \to x_0$
② *добуток н. м. ф.* α та β	$\alpha(x)\beta(x) \to 0$, коли $x \to x_0$
③ *добуток н. м. ф.* α *на обмежену в околі точки* x_0 *функцію* f	$\alpha(x)f(x) \to 0$, коли $x \to x_0$
④ *частка н. м. ф.* α *і функції* f, *яка має ненульову границю*	$\dfrac{\alpha(x)}{f(x)} \to 0$, коли $x \to x_0$
⑤ *зв'язок між н. м. ф.* α *і н. в. ф.* f	$\dfrac{1}{\alpha(x)} \to \infty$ $(\alpha(x) \neq 0)$, коли $x \to x_0$
	$\dfrac{1}{f(x)} \to 0$, коли $x \to x_0$
❹ ***Теорема про зв'язок функції, її границі та н. м. ф.*** Число A є границею функції f у точці x_0 тоді й лише тоді, коли	$f(x) = A + \alpha(x)$, де α — н. м. ф., коли $x \to x_0$.

∞ — н. в. ф., 0 — н. м. ф., 1 — функція, що має границю 1	
❺ ***Невизначеності***	$\dfrac{\infty}{\infty},\ \dfrac{0}{0},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}$
❻ ***«Визначеності»*** $(a, b \in \mathbb{R})$	
$a + (+\infty) = +\infty;$	$(+\infty) + (+\infty) = +\infty;$
$a \cdot (+\infty) = +\infty, a > 0;$	$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty;$
$\dfrac{a}{\infty} = 0;$	$\dfrac{a}{0} = \infty;$
$0^{b} = 0^{+\infty} = 0, b > 0;$	$0^{-b} = 0^{-\infty} = +\infty, b < 0;$
$a^{+\infty} = 0,\ \ 0 < a < 1;$	$a^{+\infty} = +\infty,\ \ 1 < a < +\infty;$
$(+\infty)^{b} = 0, -\infty \le b < 0;$	$(+\infty)^{b} = +\infty,\ \ 0 < b < +\infty$

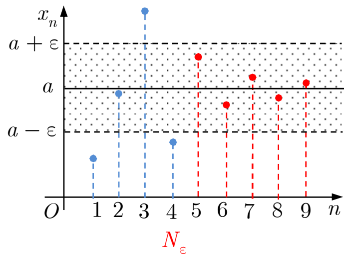
6.3. Деякі важливі границі функцій

❶ $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha} = 0,\ \alpha > 0$	❷ $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha} = \infty,\ \alpha > 0$
❸ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^{\alpha}} = 0,\ \alpha > 0$	❹ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{\alpha}} = \infty,\ \alpha > 0$
❺ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0x^{n} + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^{m} + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \begin{cases} 0, & n < m, \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n = m, \\ \infty, & n > m \end{cases}$	
❻ $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{x} = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1 \end{cases}$	$\lim\limits_{x\to-\infty} a^{x} = \begin{cases} +\infty, & 0 < a < 1, \\ 1, & a = 1, \\ 0, & a > 1 \end{cases}$
❼ $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty,$ $\lim\limits_{x\to+0} \log_a x = -\infty,$ $\quad a > 1$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty;$ $\lim\limits_{x\to+0} \log_a x = +\infty,$ $\quad 0 < a < 1$
❽ $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2};$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$	❾ $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi;$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$

6.4. Числові послідовності

❶ ***Числова послідовність.*** *Числовою послідовністю* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots = \{x_n\}, n \in \mathbb{N}$, називають числову функцію $x_n = f(n)$, означену на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$. $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — *члени* послідовності; $x_n = f(n), n \in \mathbb{N}$,— n-*й* (*загальний*) *член* послідовності.		
❷ Послідовність ***чисел Фібоначчі***	$\{F_n\} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$	
① Означення (*рекурентна* формула)	$F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$	
② n-*й член* (φ — *золотий переріз*)	$F_n = \dfrac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}, \quad \varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$	
❸ ***Обмежена*** послідовність $\{x_n\}$	$\exists C > 0\ \forall n : \lvert x_n \rvert \leq C$	
❹ ***Монотонні послідовності*** $\left(\Delta = x_{n+1} - x_n;\ q = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}, x_n > 0\right)$		
① ***Зростаюча*** послідовність $\{x_n\}$ $\{x_n\} \nearrow$	$\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}$	
	$\Delta > 0$	$q > 1$
② ***Неспадна*** послідовність $\{x_n\}$	$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}$	
	$\Delta \geq 0$	$q \geq 1$
③ ***Спадна*** послідовність $\{x_n\}$ $\{x_n\} \searrow$	$\forall n \in \mathbb{N} : x_n > x_{n+1}$	
	$\Delta < 0$	$q < 1$
④ ***Незростаюча*** послідовність $\{x_n\}$	$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_{n+1}$	
	$\Delta \leq 0$	$q \leq 1$

6.5. Границя послідовності

❶ ***Скінченна*** границя числової послідовності	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow \left\| x_n - a \right\| < \varepsilon$
❷ ***Нескінченна*** границя числової послідовності	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall E > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow \left\| x_n \right\| > E$
❸ ***Збіжна послідовність.*** Послідовність називають *збіжною*, якщо вона має скінченну границю.	❹ ***Розбіжна послідовність.*** Послідовність називають *розбіжною*, якщо вона має нескінченну границю або не має границі.
❺ ***Геометричний зміст збіжності послідовності.*** Послідовність $\{x_n\}$ збігається до числа a, якщо поза межами будь-якої симетричної горизонтальної смуги завширшки 2ε міститься лише скінченна кількість точок послідовності.	
❻ ***Необхідна ознака збіжності***	Якщо послідовність збігається, то вона обмежена.
❼ ***Достатня умова збіжності*** (***ознака Ваєрштраса***)	Якщо монотонна послідовність обмежена, то вона збігається.
❽ ***Число e***	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
❾ ***Критерій існування границі функції мовою послідовностей*** (***Гайне***). Число A є границею функції f у точці $x_0 \in \mathbb{R}$ тоді й лише тоді, коли для будь-якої послідовності аргументів $\{x_n\}, (x_n \neq x_0)$, такої, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до числа A.	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\{x_n\}, x_n \neq x_0 :$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

6.6. Порівняння нескінченно малих функцій

❶ α — н. м. ф. *вищого порядку мализни*, ніж β, коли $x \to x_0$	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$	$\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \to x_0$
❷ α та β — н. м. ф. *одного порядку мализни*, коли $x \to x_0$	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$	$\alpha(x) \asymp \beta(x)$, $x \to x_0$
❸ α та β — *еквівалентні н. м. ф.*, коли $x \to x_0$	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$	$\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to x_0$
❹ α та β — *непорівнянні* н. м. ф., коли $x \to x_0$	$\nexists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$	
❺ н. м. ф. α *має порядок* k *щодо* н. м. ф. β, коли $x \to x_0$	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = C$, $C \neq 0, C \neq \infty$	$\alpha(x) \sim C(\beta(x))^k$, $x \to x_0$
$C(\beta(x))^k$ — *головна частина* функції α щодо $\beta, x \to x_0$		
❻ ***Властивості еквівалентних функцій*** $(\alpha(x) \sim \beta(x), x \to x_0)$		
① Границя частики двох нескінченно малих функцій не зміниться, якщо кожну з них замінити на еквівалентну їй н. м. ф.	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\gamma(x)}$	
② Різниця двох еквівалентних нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією вищого порядку, ніж кожна з них.	$\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$, $\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x))$	
③ Сума скінченної кількості нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку найнижчого порядку мализни.	$f(x) = ax^m + bx^n \sim ax^m$, $m < n, x \to 0$ (ax^m — головна частина н. м. ф. f)	
④ Сума скінченної кількості нескінченно великих функцій різних порядків еквівалентна доданку найвищого порядку росту.	$f(x) = ax^m + bx^n \sim bx^n$, $m < n, x \to \infty$ (bx^n — головна частина н. в. ф. f)	

6.7. Визначні границі

❶ ***Перша визначна*** границя (x у радіанах)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
❷ ***Наслідки з першої визначної границі***	
① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$; ② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$;	③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$; ④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$
❸ ***Друга визначна*** границя	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{1/y}=e$
❹ ***Наслідки з другої визначної границі***	
① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$; ② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$;	③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$; ④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$; ⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$
Розкриття степенево-показникових невизначеностей	
❺ $\left[0^0,\infty^0,1^\infty\right]$	$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\ln u(x)}$
❻ $\left[1^\infty\right]$	$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)v(x)}$

6.8. Таблиця еквівалентностей

$u=u(x)\to 0, x\to x_0$	
❶ $\sin u\sim u,\quad u\to 0$	❻ $\log_a(1+u)\sim\dfrac{u}{\ln a},\quad u\to 0$
❷ $\operatorname{tg} u\sim u,\quad u\to 0$	❼ $\ln(1+u)\sim u,\quad u\to 0$
❸ $1-\cos u\sim\dfrac{u^2}{2},\quad u\to 0$	❽ $a^u-1\sim u\ln a,\quad u\to 0$
❹ $\arcsin u\sim u,\quad u\to 0$	❾ $e^u-1\sim u,\quad u\to 0$
❺ $\operatorname{arctg} u\sim u,\quad u\to 0$	❿ $(1+u)^{\mu}-1\sim\mu u,\quad u\to 0$

6.9. Неперервність функції в точці

❶ ***Функція неперервна в точці.*** Функцію, яка означена в околі точки, називають *неперервною в точці*, якщо границя функції дорівнює значенню функції в цій точці.	f неперервна в точці $x_0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
Функція f *неперервна зліва* в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$.	Функція f *неперервна справа* в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.
❷ ***Критерій неперервності функції в точці.*** Функція f неперервна в точці x_0 тоді й лише тоді, коли	$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.
❸ ***Приріст аргументу*** в точці x_0	$\Delta x = x - x_0$
❹ ***Приріст функції*** f у точці x_0	$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
❺ ***Функція неперервна в точці.*** Функцію f, називають *неперервною в точці* $x_0 \in X$, якщо	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$.
❻ ***Властивості функцій неперервних у точці.*** ① Функція, яка неперервна в точці, обмежена в деякому околі цієї точки. ② Якщо функція f неперервна в точці x_0, то існує окіл, у якому функція f має знак числа $f(x_0)$. ③ Якщо функції f_1 та f_2 неперервні в точці x_0 і виконано нерівність $f_1(x_0) > f_2(x_0)$, то існує окіл точки x_0, у якому $f_1(x) > f_2(x)$.	④ Якщо функції f та g неперервні в точці x_0, то й функції $f \pm g, fg$ та $\dfrac{f}{g}$ $(g(x_0) \neq 0)$ неперервні в точці x_0. ⑤ Якщо функція g неперервна в точці x_0, а функція f неперервна в точці $y_0 = g(x_0)$, то складена функція $f(g(x))$ неперервна в точці x_0. ⑥ Основні елементарні функції неперервні в усіх точках, де вони означені.
❼ ***Заміна змінної у границі.*** Якщо функція $y = g(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $f(y)$ неперервна в точці $y_0 = g(x_0)$, то	$\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = \left[\begin{array}{l} y = g(x), \\ y \to g(x_0) \end{array}\right] = \lim\limits_{y \to y_0} f(y)$.

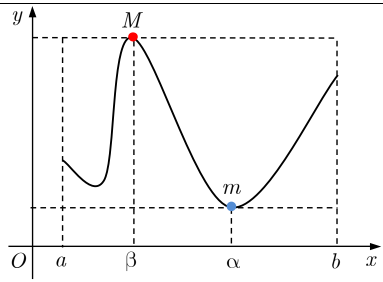
6.10. Неперервність функції на відрізку

❶ ***Функція неперервна на відрізку.*** Функцію f називають *неперервною на відрізку* $[a;b]$, якщо вона неперервна в кожній точці інтервалу $(a;b)$, у точці a неперервна справа, а в точці b — неперервна зліва.
Множину всіх неперервних на відрізку $[a;b]$ функцій позначають $C[a;b]$.

Властивості неперервних на відрізку функцій

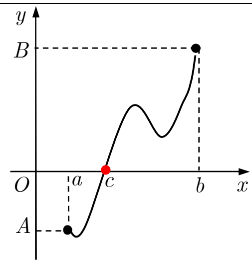
❷ ***Теорема про обмеженість функції (Ваєрштраса).*** Неперервна на відрізку функція обмежена на цьому відрізку.

❸ ***Теорема про найбільше та найменше значення (Ваєрштраса).*** Неперервна на відрізку функція досягає на цьому відрізку свого найбільшого та найменшого значення.



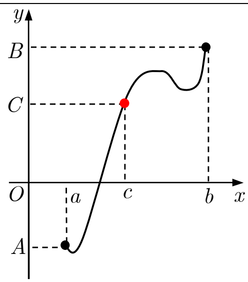
$$M = \max_{x\in[a;b]} f(x), m = \min_{x\in[a;b]} f(x)$$

❹ ***Теорема про нулі функції (Больцано — Коші).*** Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$ і набуває на його кінцях значень $A = f(a)$ та $B = f(b)$ різних знаків, то всередині інтервалу $(a;b)$ знайдеться принаймні одна точка c, для якої $f(c) = 0$.



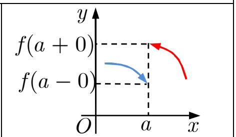
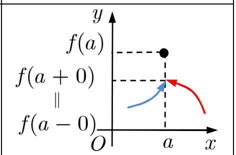
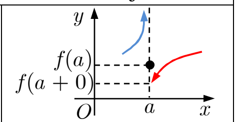
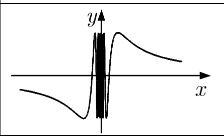
❺ ***Теорема про проміжні значення (Больцано — Коші).*** Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, і набуває на його кінцях різних значень $f(a) = A, f(b) = B$, і $C \in [A;B]$, то в інтервалі $(a;b)$ знайдеться принаймні одна точка c, у якій

$$f(c) = C.$$



❻ ***Теорема про неперервність оберненої функції.*** Якщо функція f строго монотонна й неперервна на відрізку $[a;b]$, то обернена функція f^{-1} неперервна на $[A;B]$, де $[A;B]$ — множина значень функції f.

6.11. Точки розриву функції

<table>
<tr><td>❶ Точка розриву. Точку x_0 називають точкою розриву функції f, якщо вона означена в околі точки x_0 (окрім, можливо самої точки x_0), але не є неперервною в цій точці.</td><td colspan="2">Порушено рівність $$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Класифікація точок розриву</td></tr>
<tr><td>❷ Розрив 1-го роду (скінченний розрив)</td><td colspan="2">обидві однобічні границі $$f(x_0+0), f(x_0-0)$$ функції $f(x)$ у точці x_0 існують і скінченні</td></tr>
<tr><td>① неусувний (стрибок)</td><td>$f(x_0+0)\neq$
$\neq f(x_0-0)$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>② усувний</td><td>$f(x_0+0)=$
$=f(x_0-0)\neq f(x_0)$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>❸ Розрив 2-го роду</td><td colspan="2">хоча б одна з однобічних границь $$f(x_0+0), f(x_0-0)$$ функції f у точці x_0 нескінченна або не існує</td></tr>
<tr><td>① нескінченний (полюс)</td><td>$\exists f(x_0-0)=\pm\infty$
або
$\exists f(x_0+0)=\pm\infty$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>② істотний</td><td>$\nexists f(x_0-0)$
або
$\nexists f(x_0+0)$</td><td>
</td></tr>
</table>

❹ ***Схема дослідження функції на неперервність у точці.***

① Знаходять $f(x_0 - 0)$ та $f(x_0 + 0)$.

② Висновують:

1) якщо існують скінченні однобічні границі й

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0),$$

то функція f *неперервна в точці* x_0;

2) якщо існують скінченні однобічні границі й

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) \neq f(x_0)$$

або функція не означена в точці x_0, то функція f має в точці x_0 *розрив 1-го роду, усувний*;

3) якщо існують скінченні однобічні границі й $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$, то функція f має в точці x_0 *розрив 1-го роду, неусувний*;

4) якщо існують однобічні границі і хоча б одна з них нескінченна, то функція f має в точці x_0 *розрив 2-го роду, нескінченний* (*полюс*), а графік функції має вертикальну асимптоту $x = x_0$;

5) якщо хоча б одна із границь не існує, то функція f у точці x_0 має *розрив 2-го роду, істотний.*

6.12. Метод інтервалів

❶ ***Алгоритм методу інтервалів знаходження проміжків знакосталості функції*** f.

① Знаходять область означення $D(f)$ функції f.

② Визначають дійсні корені рівняння $f(x) = 0$.

③ Розбивають область означення $D(f)$ коренями на проміжки знакосталості функції f.

④ Визначають знаки функції f на кожному проміжку, обчислюючи значення функції $f(x)$ у внутрішній точці (*правило пробної точки*) кожного проміжку або за *правилом розставлення знаків.*

⑤ Записують проміжки знакосталості.

❷ ***Правило розставлення знаків («змійки»).***

① Функція

$$f(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\ldots(x - x_n)^{k_n},$$

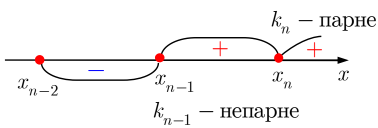
$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n, k_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1, n}$$

є додатною справа від точки x_n.

② Після переходу від одного проміжку до сусіднього (справа наліво) через точку $x_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ функція f:

1) змінює знак, якщо k_i — непарне;

2) не змінює знак, якщо k_i — парне.



Практикум 6.1. Границя функції

Навчальні задачі

6.1.1.1. Користуючись означенням границі функції за Коші (мовою $\varepsilon - \delta$), довести, що $\lim\limits_{x \to 2}(4x+1) = 9$.

Розв'язання. [6.1.2.]

[*Вибираємо довільне додатне число* ε.]

Нехай $\varepsilon > 0$.

[*Щоб довести, що* $\lim\limits_{x \to x_0 \in \mathbb{R}} f(x) = A \in \mathbb{R}$, *знаходимо таке* $\delta(\varepsilon) > 0$, *що для всіх* x, *які справджують нерівність* $0 < |x - x_0| < \delta$, *виконано нерівність* $|f(x) - A| < \varepsilon$.]

$$|(4x+1) - 9| < \varepsilon; \ |x - 2| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Якщо $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, то для всіх x:

$$0 < |x - 2| < \delta = \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |(4x+1) - 9| < \varepsilon.$$

Отже, $\lim\limits_{x \to 2}(4x+1) = 9$.

6.1.1.2. Користуючись означенням границі функції за Коші (мовою $\varepsilon - \delta$), довести, що $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$.

Розв'язання. [6.1.4.]

Нехай $\varepsilon > 0$.

[*Щоб довести, що* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$, *знаходимо таке* $\delta(\varepsilon) > 0$, *що для всіх* x, *які справджують нерівність* $x > \delta$, *виконано нерівність* $|f(x) - A| < \varepsilon$.]

$$\left|\frac{1}{x+2} - 0\right| < \varepsilon, x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x+2} < \varepsilon; \ x + 2 > \frac{1}{\varepsilon}; \ x > \frac{1}{\varepsilon} - 2.$$

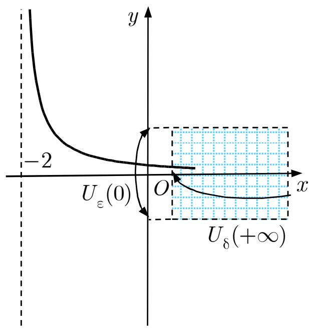


Рис. до 6.1.1.2

Якщо $\delta = \frac{1}{\varepsilon} - 2$, коли $\frac{1}{\varepsilon} - 2 > 0$, або $\delta = 0$, коли $\frac{1}{\varepsilon} - 2 < 0$, то для всіх x:

$$x > \delta \Rightarrow \frac{1}{x+2} < \varepsilon.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+2} = 0$.

6.1.1.3. Користуючись означенням границі функції за Коші (мовою $\varepsilon - \delta$), довести, що $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{1}{x+2} = \infty$.

Розв'язання. [6.1.3.]

Нехай $\varepsilon > 0$.

[*Щоб довести, що* $\lim\limits_{x\to x_0\in\mathbb{R}} f(x) = \infty$, *знаходимо таке* $\delta(\varepsilon) > 0$, *що для всіх* x, *які справджують нерівність* $0 < |x - x_0| < \delta$, *виконано нерівність* $|f(x)| > \varepsilon$.]

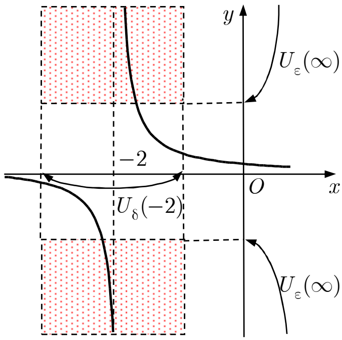


Рис. до 6.1.1.3

$$\left|\frac{1}{x+2}\right| = \frac{1}{|x+2|} > \varepsilon \Rightarrow |x+2| < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Якщо $\delta = \dfrac{1}{\varepsilon}$, то для всіх x:

$$0 < |x+2| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x+2}\right| > \varepsilon.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{1}{x+2} = \infty$.

6.1.2.1. Знайти $\lim\limits_{x\to2}(3x^2 - 4)$.

Розв'язання. [6.9.6.6, 6.9.1.]

[*Оскільки функція* $f(x) = 3x^2 - 4$ *елементарна й* $2 \in D(f)$, *то підставляючи* $x = 2$ *у* $f(x)$, *знаходимо границю.*]①

$$\lim_{x\to2}(3x^2 - 4) = 3\cdot2^2 - 4 = 8.$$

Коментар. ① Якщо f — елементарна функція і $x_0 \in D(f)$, то функція f неперервна, тобто

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

6.1.2.2. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)$.

Розв'язання. [6.3.3, 6.1.9.]

[*Використовуючи теорему про арифметичні дії [6.1.9], знаходимо границю.*]

$$\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=[5-3\cdot 0+2\cdot 0]=5.$$

6.1.3.1. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4}{x+2}$.

Розв'язання. [6.9.1.]

[*Щоб знайти* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(x_0\in\mathbb{R})$, *знаходимо границю чисельника* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ *та границю знаменника* $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$.]①

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-4}{x+2}=\left[\frac{3\cdot 2^2-4}{2+2}=\frac{8}{4}\right]=2.$$

Коментар. ① Якщо $B\neq 0$, то маємо «визначеність» $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

6.1.3.2. Знайти $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-4}{x+2}$.

Розв'язання. [6.9.1, 6.2.6.]

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2-4}{x+2}=\left[\frac{3\cdot(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{8}{0}\right]^{①}=\infty.$$

Коментар. ① Якщо $A\neq 0, B=0$, то за теоремою про зв'язок н. м. ф. та н. в. ф. маємо «визначеність» $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{A}{0}\right]=\infty$.

6.1.3.3. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Розв'язання. [6.2.5.]

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\left[\frac{2^2-4}{2-2}=\frac{0}{0}\right]\underset{[1.18.5.3]}{\overset{①}{=}}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\overset{②}{=}\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

Коментар. ① Якщо $A=0, B=0$, то маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$, яку треба розкрити перетворенням виразів $f(x)$ та $g(x)$.

Якщо f та g є многочленами й $f(x_0) = g(x_0) = 0$, то невизначеність $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ розкривають виділенням множників вигляду $(x - x_0)^k$ в чисельнику та знаменнику:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)^n f_1(x)}{(x-x_0)^m g_1(x)},$$

де $f_1(x_0) \neq 0, g_1(x_0) \neq 0$.

② Оскільки розглядаючи границю в точці x_0, уважають, що $x \neq x_0$, то $x - x_0 \neq 0$. Скорочуючи на найменший із степенів $(x-x_0)^n$ та $(x-x_0)^m$ «невизначеність» перетворюємо на «визначеність».

6.1.4.1. Знайти $\lim\limits_{x\to 1} 3^{x-1}$.

Розв'язання. [6.9.6.6.]

[*Знаходимо границю, підставляючи у* $f(x) = 3^{x-1}$ *значення* $x = 1$.]

$$\lim_{x\to 1} 3^{x-1} = 3^{1-1} = 3^0 = 1.$$

6.1.4.2. Знайти $\lim\limits_{x\to -\infty} 4^{x+1}$.

Розв'язання. [6.3.6.]

[*Знаходимо границю, використовуючи відоме поводження функції* $y = 4^x$.] ①

$$\lim_{x\to -\infty} 4^{x+1} = [4^{-\infty}] = 0.$$

Коментар. ① Зручно вважати, що основні елементарні функції задані також і графічно.

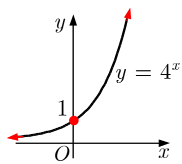


Рис. до 6.1.4.2 та 6.1.4.3

6.1.4.3. Знайти $\lim\limits_{x\to +\infty} 4^{x+1}$.

Розв'язання. [6.3.6.]

$$\lim_{x\to +\infty} 4^{x+1} = [4^{+\infty}] = +\infty.$$

6.1.5.1. Знайти $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}$.

Розв'язання. [6.2.5.]

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[6.2.5]}{\underset{[5.5.5]}{=}} \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x+1)}{2(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)} = \lim_{x\to -2} \frac{x+1}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{7}.$$

6.1.5.2. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{(x-3)^2(x+1)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{(x-3)^2(x+1)}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{[6.2.5]}{\underset{[5.5.5]}{=}}\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)^2(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{(x-3)(x+1)}=\left[\frac{1}{0}\right]\overset{[6.2.6]}{=}\infty.$$

6.1.5.3. Знайти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x+5}-3}$.

Розв'язання.

[*Позбуваємось ірраціональності у знаменнику за формулою*:

$$\frac{1}{a-b}=\frac{a+b}{(a-b)(a+b)}=\frac{a+b}{a^2-b^2},$$

де $a=\sqrt{x+5}, b=3$.]

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x+5}-3}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{[6.2.5]}{=}\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-16)(\sqrt{x+5}+3)}{\left(\sqrt{x+5}-3\right)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)(\sqrt{x+5}+3)\overset{[6.9.6.6]}{=}48.$$

6.1.6.1. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+5}{x^3+x+1}$.

Розв'язання. [6.3.5.]

[*Знаходячи* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_1x^{\alpha_1}+a_2x^{\alpha_2}+\ldots+a_nx^{\alpha_n}}{b_1x^{\beta_1}+b_2x^{\beta_1}+\ldots+b_mx^{\beta_m}}$, *ділимо чисельник і знаменник дробу на* x *у найвищому степені всього виразу.*]

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+5}{x^3+x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\left[\begin{array}{l}\text{найвищий степінь усього виразу}\\ \text{дорівнює } s=3\end{array}\right]\left[\frac{:x^3}{:x^3}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\left[\frac{0}{1}\right]\overset{①}{=}0.$$

Коментар. ① Зауважмо, що степінь многочлена знаменника більший від степеня чисельника і границю можна також знайти за правилом [6.3.5].

6.1.6.2. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+6}{5-4x^2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+6}{5-4x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\left[\begin{array}{l}\text{найвищий степінь усього виразу}\\ \text{дорівнює } s=2\end{array}\right]\left[\frac{:x^2}{:x^2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{6}{x^2}}{\frac{5}{x^2}-4}=\left[\frac{3}{-4}\right]\overset{①}{=}-\frac{3}{4}.$$

Коментар. ① Зауважмо, що степінь многочлена чисельника дорівнює степеню многочлена знаменника і границю можна також знайти за правилом [6.3.5].

6.1.6.3. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+1}{x^3+2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+1}{x^3+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\left[\begin{array}{l}\text{найвищий степінь усього виразу}\\ \text{дорівнює } s=4\end{array}\right]\left[\frac{:x^4}{:x^4}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^4}}=\left[\frac{1}{0}\right]\underset{①}{\overset{[6.2.3.5]}{=}}\infty.$$

Коментар. ① Степінь многочлена чисельника вищий від степеня многочлена знаменника і границю можна також знайти за правилом [6.3.5].

6.1.6.4. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-x}{\sqrt[4]{x^8-5x+3}}$.

Розв'язання.

[*З урахуванням показника кореня, ділимо чисельник і знаменник дробу на* x^2.]

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-x}{\sqrt[4]{x^8-5x+3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\left[\frac{:x^2}{:x^2}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{1}{x}}{\sqrt[4]{1-\frac{5}{x^7}+\frac{3}{x^8}}}=4.$$

6.1.6.5. Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt[6]{x}+\sqrt[5]{32x^{10}+1}}{(x+\sqrt[4]{x})\sqrt[3]{x^3-1}}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt[6]{x}+\sqrt[5]{32x^{10}+1}}{(x+\sqrt[4]{x})\sqrt[3]{x^3-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\left[\frac{:x^2}{:x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x^{5/6}}+\sqrt[5]{32+\dfrac{1}{x^{10}}}}{\left(1+\dfrac{1}{x^{3/4}}\right)\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^3}}}=\frac{\sqrt[5]{32}}{1}=2.$$

6.1.6.6. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^3-(x-2)^3}{96x^2+39x}$.

[*Визначаємо найвищий степінь виразу, перетворюючи чисельник.*]

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^3-(x-2)^3}{96x^2+39x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+6x^2+12x+8-(x^3-6x^2+12x-8)}{96x^2+39x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+16}{96x^2+39x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\left[\frac{:x^2}{:x^2}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{12+\dfrac{16}{x^2}}{96+\dfrac{39}{x}}=\frac{12}{96}=\frac{1}{8}.$$

6.1.6.7. Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\cdot3^x-2^x}{5\cdot3^x+2^x}$.

Розв'язання. [6.2.5, 6.3.6.]

[*Ділимо чисельник і знаменник дробу на функцію, яка зростає найшвидше.*]

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot3^x-2^x}{5\cdot3^x+2^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\left[\frac{:3^x}{:3^x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\left(\dfrac{2}{3}\right)^x}{5+\left(\dfrac{2}{3}\right)^x}=\frac{2}{5}.$$

6.1.7. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to-1/2}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

Розв'язання. [6.9.6.6, 6.2.6, 6.2.5.]①

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left[\dfrac{0-1}{2\cdot0^2-0-1}\right]=1.$

2. $\lim\limits_{x\to -1/2} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \left[\dfrac{-\frac{3}{4}}{0}\right] = \infty.$

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{[5.5.5]}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{2x+1} = \dfrac{2}{3}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \left[\dfrac{:x^2}{:x^2}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{2}.$

Коментар. ① Способи відшукання границі функції в точці залежать як від самої функції, так і від точки, до якої прямує аргумент функції.

6.1.8.1. Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+3x+1}\right)$.

Розв'язання. [6.2.5.]

[*Розкриваючи невизначеність*

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sqrt[n]{f(x)}-g(x)\right) = [\infty-\infty],$$

перетворюємо вираз під знаком границі за формулою:

$$a-b = \frac{(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1})}{a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1}} = \frac{a^n-b^n}{a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1}}.\Bigg]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+3x+1}\right) = [\infty-\infty] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3x-\sqrt{9x^2+3x+1}\right)}{3x+\sqrt{9x^2+3x+1}}\left(3x+\sqrt{9x^2+3x+1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-(9x^2+3x+1)}{3x+\sqrt{9x^2+3x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-(3x+1)}{3x+\sqrt{9x^2+3x+1}} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\left[\frac{:x}{:x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\left(3+\frac{1}{x}\right)}{3+\sqrt{9+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-3}{3+3} = -\frac{1}{2}.$$

6.1.8.2. Знайти $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+3x+1}\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+3x+1}\right) = [-\infty-\infty] = -\infty.$$

6.1.8.3. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{x^2-x-2}\right)$.

Розв'язання.

[*Розкриваючи невизначеність вигляду*

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}-\frac{f_2(x)}{g_2(x)}\right)=[\infty-\infty]$$

зводимо дроби до спільного знаменника.]

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-x-2}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)-3}{(x-2)(x+1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3}.$$

6.1.9.1. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\left(x+1\right)^{2x-1}$.

Розв'язання. [6.1.9.6.]

[*Щоб знайти* $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}$, *знаходимо границю основи* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ *та границю показника* $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$.]^{①}

$$\lim_{x\to 2}(x+1)^{2x-1}=\left[3^3\right]^{①}=27.$$

Коментар. ① Якщо $A,B\in\mathbb{R}, A>0$, то за теоремою [6.1.9.6] маємо «визначеність» $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=A^B$.

6.1.9.2. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{x}{2x+1}}$.

Розв'язання. [6.2.6.]

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{x}{2x+1}}=\left[\begin{array}{c}\dfrac{1}{x^2}\to 0,\ \dfrac{x}{2x+1}=\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{x}}\to\dfrac{1}{2},\\ x\to\infty\end{array}\right]=\left[0^{1/2}\right]^{①}=0.$$

Коментар. ① Якщо $A=0$ і $B\neq 0$, то маємо «визначеності» [6.2.6]:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=\left[0^B, B>0\right]=0,$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=\left[0^B, B<0\right]=+\infty.$$

6.1.9.3. Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^{x}$.

***Розв'язання**. [6.2.6.]*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{x}=\left[\begin{array}{c}\dfrac{x}{2x+1}=\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{x}}\to\dfrac{1}{2},\\ x\to+\infty\end{array}\right]=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}\right]^{①}=0.$$

Коментар. ① Якщо $0<A<1$ і $B=+\infty$, то маємо «визначеність» [6.2.6]:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=\left[A^{+\infty},0<A<1\right]=0.$$

6.1.9.4. Знайти $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^{x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{x}=\left[\begin{array}{c}\dfrac{x}{2x+1}=\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{x}}\to\dfrac{1}{2},\\ x\to-\infty\end{array}\right]=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty}\right]=+\infty.$$

Коментар. ① Якщо $0<A<1$ і $B=-\infty$, то маємо «визначеність» [6.2.6]:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=\left[A^{-\infty},0<A<1\right]=+\infty.$$

6.1.9.5. Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

***Розв'язання.* [6.2.6.]**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left[\begin{array}{c}2+\dfrac{1}{x}\to2,\\ x\to+\infty\end{array}\right]=\left[2^{+\infty}\right]^{①}=+\infty.$$

Коментар. ① Якщо $A>1$ і $B=+\infty$, то маємо «визначеність» [6.2.6]:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=\left[A^{+\infty},A>1\right]=+\infty.$$

6.1.9.6. Знайти $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

***Розв'язання.* [6.2.6.]**

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left[\begin{array}{c}2+\dfrac{1}{x}\to2,\\ x\to-\infty\end{array}\right]=\left[2^{-\infty}\right]=0.$$

Коментар. ① Якщо $A > 1$ і $B = -\infty$, то маємо «визначеність» [6.2.6]:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = \left[A^{-\infty}, A > 1\right] = 0.$$

6.1.9.7. Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)^{3+\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. [6.2.6.]

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^{3+\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} \to +\infty, 3+\dfrac{1}{x} \to 3, \\ \qquad x \to +\infty\end{array}\right] = \left[(+\infty)^3\right]^{①} = +\infty.$$

Коментар. ① Якщо $A = +\infty, B \neq 0$, то маємо «визначеності» [6.2.6]:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = \left[(+\infty)^B, B > 0\right] = +\infty,$$
$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = \left[(+\infty)^B, B < 0\right] = 0.$$

Якщо $A = B = 0$, або $A = +\infty, B = 0$, або $A = 1, B = \infty$, то маємо невизначеність відповідно вигляду 0^0, або ∞^0, або 1^∞, яку треба розкрити (буде розглянуто далі).

6.1.10. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\sin\left(\pi\dfrac{\sqrt{2x}-2}{x-2}\right)$.

Розв'язання. [6.9.6.6.]

[*Використовуємо формулу* $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)$.]①

$$\lim_{x\to 2}\sin\left(\pi\frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}\right) = \sin\left(\lim_{x\to 2}\pi\frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$= \sin\left(\lim_{x\to 2}\pi\frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}\right) = \sin\left(\lim_{x\to 2}\frac{2\pi}{\sqrt{2x}+2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Коментар. ① Завдяки неперервності функції $f(x) = \sin x$.

6.1.11.1. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.

Розв'язання. [6.2.3.3.]

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = \left[\begin{array}{l} x \to 0, \\ \left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \le 1\end{array}\right] = [\text{н. м. ф.} \cdot \text{обм.}] = 0.$$

6.1.11.2. Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$;

Розв'язання. [6.2.3.3]

$$\lim_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}) \overset{[5.9.11]}{=} \lim_{x\to+\infty} 2\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2} =$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} 2\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = \sin\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right) = \sin 0 = 0, \\ \left|2\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right| \le 2 \end{array}\right] =$$

$$= [\text{н. м. ф.} \cdot \text{обм.}] = 0$$

6.1.12.1. Знайти $f(1-0)$ та $f(1+0)$ функції $f(x)=\dfrac{x-1}{|x-1|}$ $(x\ne 1)$.

Розв'язання. [6.1.5, 6.1.6.]

$$f(1-0) = \lim_{\substack{x\to1,\\ x<1}}\frac{x-1}{|x-1|} \overset{[1.13.1]}{=} \left[\begin{array}{l} x<1 \Leftrightarrow x-1<0 \\ |x-1| = -(x-1) \end{array}\right] = \lim_{\substack{x\to1,\\ x<1}}\frac{x-1}{-(x-1)} = -1;$$

$$f(1+0) = \lim_{\substack{x\to1,\\ x>1}}\frac{x-1}{|x-1|} \overset{[1.13.1]}{=} \left[\begin{array}{l} x>1 \Leftrightarrow x-1>0 \\ |x-1| = (x-1) \end{array}\right] = \lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{x-1} = 1.$$

6.1.12.2. Знайти $f(2-0)$ та $f(2+0)$ функції $f(x)=\dfrac{2}{x-2}$.

Розв'язання.

$$f(2-0) = \lim_{x\to2-0}\frac{2}{x-2} = \left[\frac{2}{-0}\right] \overset{[6.2.3.5]}{=} -\infty;$$

$$f(2+0) = \lim_{x\to2+0}\frac{2}{x-2} = \left[\frac{2}{+0}\right] \overset{[6.2.3.5]}{=} +\infty.$$

6.1.12.3. Знайти $f(2-0)$ та $f(2+0)$ функції $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 2, \\ -2x+2, & x>2. \end{cases}$

Розв'язання.

[*Вибираємо відповідні формули для значень функцій.*]

$$f(2-0) = \lim_{\substack{x\to2,\\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to2,\\ x<2}}(x+1) = 3;$$

$$f(2+0) = \lim_{\substack{x\to 2,\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2,\\ x>2}} (-2x+2) = -2.$$

6.1.13. Схарактеризувати поводження функції $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$, коли а) $x \to -\infty$ та б) $x \to +\infty$.

Розв'язання. [6.2.1, 6.2.2.]

А. [*Знаходимо границю функції.*]

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \left[\infty + \infty\right] = +\infty.$$

[*Висновуємо.*]

f — н. в. ф., коли $x \to -\infty$.

Б. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \left[\infty - \infty\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$$

f — н. м. ф., коли $x \to +\infty$.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

6.1.14. Сформулюйте мовою $\varepsilon - \delta$ твердження:

1) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2$;
2) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$;
3) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = +\infty$;
4) $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = -\infty$;
5) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 0$;
6) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$.

6.1.15. Користуючись означенням границі функції за Коші (мовою $\varepsilon - \delta$), доведіть, що:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-8) = -5$;
2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x+1}{3x+9} = \dfrac{5}{3}$;
3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(1-x)^2} = +\infty$;
4) $\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

6.1.16. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-1)$;
2) $\lim\limits_{x\to -2}(3x^3+1)$;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4+\dfrac{3}{\sqrt{x}}-\dfrac{5}{x^3}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$;

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}$;

7) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x+3}$;

8) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$;

9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{1-x}$;

10) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2}{x^2-9}$;

11) $\lim\limits_{x\to1}\sin(x-1)$;

12) $\lim\limits_{x\to1}\cos(x-1)$.

6.1.17. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}3^{x-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}3^{x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}(x-3)$;

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}(x-3)$;

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arcctg}(x+2)$;

8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg}(x+2)$;

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_2(x-1)$;

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_{1/2}(x-1)$;

11) $\lim\limits_{x\to1+0}\log_{1/2}(x-1)$.

12) $\lim\limits_{x\to1+0}\log_2(x-1)$.

6.1.18. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2+3x-10}$;

2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-6x+5}$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{3x^2+2x-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4x+3}$;

6) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-3x^2-2x+6}{x^2-5x+6}$;

7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$;

8) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x^2+4x+4}$.

6.1.19. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{49-x^2}{1-\sqrt{8-x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2-x}}{x-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^4-1}$;

8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x^m-a^m}$ $(n, m \in \mathbb{N})$;

9) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$;

10) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

6.1.20. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+5}{2x^3+x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+x^3-1}{5x^4+x^2-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+3}{x^2+x+6}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+7}{4x^2-x+2}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-10}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+4x+3}{x^3+2x^2+x}$;

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$;

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$;

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}$;

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$;

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^3+7x-1)^6}{(2x^6-13x^2+x)^3}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$.

6.1.21. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6\cdot 5^x-7\cdot 4^x}{3\cdot 5^x+2\cdot 2^x}$;
2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8\cdot 7^x-7\cdot 9^x}{4\cdot 7^x+9^x}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5^x-4^x-3^x-2^x\right)$;
4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5^x-4^x-3^x-2^x\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^5+x^4+x^3+1)}{\ln(x^3+x^2+x+1)}$;
6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^3+x^2+1)}{\ln(x^4+x^2+x+1)}$;

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(e^{6x}+1)}{\ln(e^{2x}+1)}$;
8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_2(4^x+5)}{\log_2(2^x+3)}$.

6.1.22. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4}{3x^2-2x-16}$;
2) $\lim\limits_{x\to\frac{8}{3}}\dfrac{x^2-4}{3x^2-2x-16}$;

3) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{3x^2-2x-16}$;
4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{3x^2-2x-16}$.

6.1.23. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+4}-x\right)$;
2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+12x}-\sqrt{9x^2+18x-5}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to6}\left(\dfrac{12}{x^2-36}-\dfrac{1}{x-6}\right)$;
6) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$;
8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$.

6.1.24. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{11x+8}{12x+1}\right)^{\cos^2 x}$;
2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^3+1}{x^3+8}\right)^{\frac{2}{x+1}}$;

3) $\lim\limits_{x\to1+0}(3x-3)^x$;
4) $\lim\limits_{x\to-2+0}(2x+4)^x$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+4}{x-1}\right)^{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x+4}{x-1}\right)^{x}$;

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{4x-1}\right)^{x}$; 8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1}{4x-1}\right)^{x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{\frac{x^2+1}{2x^2+1}}$; 10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{1-5\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}$.

6.1.25. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to1}\log_2(7x-1+\sqrt{3x+1})$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\cos\left(\pi\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}\right)$.

6.1.26. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\dfrac{1}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{4\cos 3x+x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\ln\left(2+\sqrt{\operatorname{arctg}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1}\right)$.

6.1.27. Знайдіть однобічні границі: а) $f(x_0-0)$; б) $f(x_0+0)$, якщо:

1) $f(x)=\dfrac{x+1}{|x+1|}, x_0=-1$; 2) $f(x)=1+\dfrac{|x-2|}{x-2}, x_0=2$;

3) $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}, x_0=2$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}, x_0=0$;

5) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, x_0=0$; 6) $f(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x+1}, x_0=-1$;

7) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<2,\\ x^2, & x\ge 2,\end{cases}\quad x_0=2$; 8) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}, & x<0,\\ x, & x\ge 0,\end{cases}\quad x_0=0$.

6.1.28. Схарактеризуйте поводження функції $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$, коли:

1) $x\to1$; б) $x\to-1$;

в) $x\to0$; г) $x\to\infty$.

Відповіді

6.1.16. 1) 17; 2) -23; 3) 3; 4) 4; 5) 9; 6) $-\frac{1}{4}$; 7) 0; 8) 0; 9) ∞; 10) ∞; 11) 0; 12) 1.

6.1.17. 1) $+\infty$; 2) 0; 3) $+\infty$; 4) 0; 5) $-\frac{\pi}{2}$; 6) $\frac{\pi}{2}$; 7) 0; 8) π; 9) $+\infty$; 10) $-\infty$; 11) $+\infty$; 12) $-\infty$.

6.1.18. 1) $\frac{4}{7}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 1; 6) 7; 7) 0; 8) ∞.

6.1.19. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) -28; 4) 4; 5) $-\frac{1}{12}$; 6) $\frac{2}{3}$; 7) $\frac{5}{4}$; 8) $\frac{n}{m}a^{n-m}$; 9) $3x^2$; 10) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

6.1.20. 1) $\frac{3}{2}$; 2) ∞; 3) 0; 4) $\frac{3}{4}$; 5) ∞; 6) 0; 7) -1; 8) 0; 9) 1; 10) ∞; 11) $\frac{49}{16}$; 12) 8; 13) 100.

6.1.21. 1) 2; 2) -7; 3) $+\infty$; 4) 0; 5) $\frac{5}{3}$; 6) $\frac{3}{4}$; 7) 3; 8) 2.

6.1.22. 1) $\frac{1}{5}$; 2) ∞; 3) $\frac{2}{7}$; 4) $\frac{1}{3}$.

6.1.23. 1) $\frac{5}{2}$; 2) 0; 3) $-\infty$; 4) 0; 5) $-\frac{1}{12}$; 6) -1; 7) $\frac{1}{4}$; 8) 0.

6.1.24. 1) 8; 2) $\frac{1}{64}$; 3) 0; 4) $+\infty$; 5) $+\infty$; 6) 0; 7) 0; 8) $+\infty$; 9) $+\infty$; 10) 0.

6.1.25. 1) 3; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6.1.26. 1) 0; 2) 0; 3) 2; 4) $\ln 2$; 5) 0.

6.1.27. 1) $f(-1-0)=-1, f(-1+0)=1$; 2) $f(2-0)=0, f(2+0)=2$; 3) $f(2-0)=0, f(2+0)=+\infty$; 4) $f(-0)=1, f(+0)=0$; 5) $f(-0)=-\frac{\pi}{2}, f(+0)=\frac{\pi}{2}$; 6) $f(-1-0)=\pi, f(-1+0)=0$; 7) $f(2-0)=3, f(2+0)=4$; 8) $f(-0)=-2, f(+0)=0$.

6.1.28. 1) н. м. ф.; 2) н. в. ф.; 3) н. в. ф.; 4) н. м. ф.

Практикум 6.2. Границя послідовності

Навчальні задачі

6.2.1.1. Записати перші 5 членів послідовності $\{x_n\}$, якщо $x_n = 2^{n+1}$.

Розв'язання. [6.4.1]

[*Підставляємо значення* $n = 1, 2, 3, 4, 5$ *у формулу для загального члена послідовності.*]

$$x_1 = 2^{1+1} = 4, x_2 = 2^{2+1} = 8, x_3 = 16, x_4 = 32, x_5 = 64.$$

Отже, $\{x_n\} = 4, 8, 16, 32, 64, \ldots.$

6.2.1.2. Записати перші 5 членів послідовності $\{x_n\}$, якщо: $x_1 = -1, x_n = -nx_{n-1}$.

Розв'язання.

[*Послідовно визначаємо члени з рекурентної формули.*]

$$x_1 = -1, x_2 = -2 \cdot (-1) = 2,\ x_3 = -3 \cdot 2 = -6,\ x_4 = 24, x_5 = -120.$$

Отже,

$$\{x_n\} = -1, 2, -6, 24, -120, \ldots$$

6.2.1.3. Записати перші 5 членів послідовності $\{x_n\}$, якщо x_n — n-й знак у десятковому записі числа π.

Розв'язання.

Оскільки $\pi = 3{,}141592654\ldots$, то

$$x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 4, x_4 = 1, x_5 = 5.$$

Отже, $\{x_n\} = 3, 1, 4, 1, 5, \ldots.$

6.2.2.1. Визначити одну з можливих формул для загального члена послідовності $\{x_n\} = \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{10}{13}, \frac{17}{18}, \frac{26}{23}, \ldots.$

Розв'язання. [6.4.1]①

Чисельник кожного із заданих членів послідовності з номером n дорівнює $n^2 + 1$.

Знаменники утворюють арифметичну прогресію $3, 8, 13, 18, \ldots$ з першим членом $a_1 = 3$ і різницею $d = 5$. Отже,

$$a_n = a_1 + d(n-1) = 3 + 5(n-1) = 5n - 2.$$

Тому

$$x_n = \frac{n^2 + 1}{5n - 2}.$$

Коментар. ① Задавання кілька перших членів послідовності ще не означує цю послідовність. Тому поставлену задачу треба сприймати як задачу відшукання деякої простої індуктивної закономірності, що узгоджується із заданими членами.

6.2.2.2. Визначити одну з можливих формул для загального члена послідовності $\{x_n\} = 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{5}, \ldots$.

Розв'язання.

Загальний член послідовності можна записати двома формулами: однією — для членів, що стоять на непарних, другою — для членів, що стоять на парних місцях:

$$x_n = \begin{cases} k, & n = 2k-1, \\ \dfrac{1}{k+1}, & n = 2k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Загальний член можна записати також однією, складнішою, формулою, приміром,

$$x_n = \frac{n+1}{4}\left(1-(-1)^n\right) + \frac{1}{n+2}(1+(-1)^n).$$

6.2.3.1. Довести, що послідовність $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$ зростає.

Розв'язання. [6.4.4.]

[*Записуємо* x_{n+1}.]

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

[*Досліджуємо* $\Delta = x_{n+1} - x_n$.]

$$\Delta = x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} =$$

$$= \frac{(2n+1)(n+1)-(2n+3)n}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отже, $x_{n+1} > x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, тобто послідовність $\{x_n\}$ зростає.

6.2.3.2. Довести, що послідовність $\{x_n\} = \left\{\dfrac{2^n}{n}\right\}$ зростає.

Розв'язання. [6.4.4.]

$$x_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1} > 0.$$

[*Досліджуємо* $q = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.]①

$$q-1=\frac{x_{n+1}}{x_n}-1=\left(\frac{2^{n+1}}{n+1}:\frac{2^n}{n}\right)-1=\frac{2n}{n+1}-1=\frac{n-1}{n+1}>0\ \forall n\geq 2.$$

Отже, $q>1$ і $x_{n+1}>x_n$ $\forall n\in\mathbb{N}, n>2$, тобто послідовність $\{x_n\}$ зростає.

Коментар. ① Нерівність $q>1$ рівносильна нерівності $q-1>0$.

6.2.4.1. Довести, що числова послідовність $\{x_n\}=\left\{\dfrac{n^3+1}{n^3+4}\right\}$ обмежена.

Розв'язання. [6.4.3.]

$$0<\frac{n^3+1}{n^3+4}=1-\frac{3}{n^3+4}<1\Rightarrow\left|\frac{n^3+1}{n^3+4}\right|<1.$$

Отже, послідовність $\{x_n\}$ є обмеженою.

6.2.4.2. Довести, що числова послідовність $\{x_n\}=\left\{\dfrac{(-1)^n n+11}{\sqrt{n^2+1}}\right\}$ обмежена.

Розв'язання.

Оскільки

$$\left|(-1)^n n+11\right|\overset{[5.14.2]}{\leq}\left|(-1)^n n\right|+11=n+11,$$
$$\sqrt{n^2+1}>\sqrt{n^2}=n,$$

то

$$\left|x_n\right|=\frac{\left|(-1)^n n+11\right|}{\sqrt{n^2+1}}\leq\frac{n+11}{n}=1+\frac{11}{n}\leq 12.$$

Отже, послідовність $\{x_n\}$ є обмеженою.

6.2.5.1. Знайти найбільший елемент обмеженої зверху послідовності $\{x_n\}=\left\{\dfrac{90n}{n^2+9}\right\}$.

Розв'язання. [6.4.3, 6.4.4.]①

Маємо

$$x_n=\frac{90n}{n^2+9}<\frac{90n}{n^2}=\frac{90}{n}\leq 90.$$

Отже, послідовність $\{x_n\}$ обмежена зверху.

[*Розглядаємо різниці.*]

$$x_{n+1}-x_n=\frac{90(n+1)}{(n+1)^2+9}-\frac{90n}{n^2+9}==-\frac{90(n^2+n-9)}{((n+1)^2+9)(n^2+9)};$$
$$x_n-x_{n-1}=\frac{90n}{n^2+9}-\frac{90(n-1)}{(n-1)^2+9}=\frac{90(-n^2+n+9)}{((n-1)^2+9)(n^2+9)}.$$

Якщо x_n — найбільший елемент, то $x_{n+1}-x_n\le 0$ і $x_n-x_{n-1}\ge 0$.

Отже,

$$\begin{cases}x_{n+1}-x_n\le 0,\\ x_n-x_{n-1}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n^2+n-9\ge 0,\\ -n^2+n+9\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}n\le\dfrac{-1-\sqrt{37}}{2},\\ n\ge\dfrac{-1+\sqrt{37}}{2};\end{array}\right.\\ \dfrac{1-\sqrt{37}}{2}\le n\le\dfrac{1+\sqrt{37}}{2}\end{cases}\Rightarrow 2{,}54\approx\frac{-1+\sqrt{37}}{2}\le n\le\frac{1+\sqrt{37}}{2}\approx 3{,}54.$$

Оскільки $n\in\mathbb{N}$, то $n=3$, тобто $x_3^{\max}=15$.

Коментар. ① Найбільший елемент $x_n^{\max}$ послідовності можна схарактеризувати нерівностями:

$$x_{n-1}\le x_n^{\max}, x_n^{\max}\ge x_{n+1}\ \text{або}\ \frac{x_n^{\max}}{x_{n-1}}\ge 1, \frac{x_n^{\max}}{x_{n+1}}\ge 1\ (x_n>0).$$

6.2.5.2. Знайти найменший елемент обмеженої знизу послідовності $\{x_n\}=\left\{-\dfrac{n^2}{2^n}\right\}$.

Розв'язання. [6.4.3, 6.4.4.] ①

[*Розглядаємо відношення.*]

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=-\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}:\left(-\frac{n^2}{2^n}\right)=\frac{(n+1)^2}{2n^2};$$
$$\frac{x_{n-1}}{x_n}=-\frac{(n-1)^2}{2^{n-1}}:\left(-\frac{n^2}{2^n}\right)=\frac{2(n-1)^2}{2n^2}.$$

Якщо x_n — найменший елемент і $x_n<0\ \forall n\in\mathbb{N}$, то $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\le 1$ і $\dfrac{x_{n-1}}{x_n}\le 1$.

Отже,

$$\begin{cases} \dfrac{(n+1)^2}{2n^2} \le 1; \\ \dfrac{2(n-1)^2}{n^2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n+1)^2 \le 2n^2, \\ n^2 \ge 2(n-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - 2n - 1 \ge 0, \\ n^2 - 4n + 2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} n \le 1 - \sqrt{2}, \\ n \ge 1 + \sqrt{2}, \end{array}\right. \\ 2 - \sqrt{2} \le n \le 2 + \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow 2,41 \approx 1 + \sqrt{2} \le n \le 2 + \sqrt{2} \approx 3,41.$$

Отже, $n = 3$, $x_3^{\min} = -\dfrac{9}{8}$.

Коментар. ① Найменший елемент $x_n^{\min}$ послідовності можна схарактеризувати нерівностями:

$$x_{n-1} \ge x_n^{\min}, x_n^{\min} \le x_{n+1} \text{ або } \frac{x_n^{\min}}{x_{n-1}} \le 1, \frac{x_n^{\min}}{x_{n+1}} \le 1 \ (x_n > 0).$$

6.2.6.1. Довести за означенням, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ і визначити номер N_ε, такий, що

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon = 0,001 \, \forall n > N_\varepsilon.$$

Розв'язання. [6.5.1.]

[*Вибираємо довільне число* $\varepsilon > 0$.]

Нехай $\varepsilon > 0$.

[*Щоб довести, що* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, *визначаємо такий номер* N_ε, *що для всіх номерів* $n > N_\varepsilon$ *буде виконано нерівність* $|x_n - a| < \varepsilon$.]

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{-1}{n+1} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Якщо $N_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1 \right]$, коли $\left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1 \right] > 0$, або $N_\varepsilon = 1$, коли $\left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1 \right] \le 0$, то для всіх n:

$$n > N_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1.$

Якщо $\varepsilon=\dfrac{1}{1000}$, тоді

$$N=\left[\frac{1}{\frac{1}{1000}}-1\right]=[999]=999;$$
$$\forall n>999:\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\frac{1}{1000}.$$

6.2.6.2. Довести, що послідовність $\{x_n\}=\left\{\dfrac{(-1)^n n}{n+1}\right\}$ не має границі.

Розв'язання. [6.5.4.]①

Розглядаємо послідовність

$$\{x_n\}=-\frac{1}{2},\frac{2}{3},-\frac{3}{4},\frac{4}{5},-\frac{5}{6},\frac{6}{7},\ldots$$

Якщо вибрати $\varepsilon=1$, то всі парні члени послідовності потрапляють у смугу із центром у точці $x=1$ завширшки 2, а всі непарні — у смугу із центром у точці $x=-1$ завширшки 2, причому ці смуги не перетинаються.

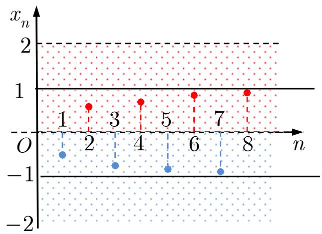


Рис. до 6.2.6.2

А за означенням, якщо точка $x=1$ або $x=-1$ була б границею послідовності $\{x_n\}$, то всі члени послідовності, починаючи з деякого номера, мали б потрапити у вибрану смугу.

Коментар. ① Не існування границі послідовності $\{x_n\}$ можна довести, знайшовши таке значення $\varepsilon>0$ і такі 2 різні точки a та b, що $U_\varepsilon(a)$ та $U_\varepsilon(b)$ містять нескінченну кількість членів послідовності.

6.2.7.1. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}$.

Розв'язання. [1.17.1.]

[*Використовуючи властивість факторіала, виносимо спільний множник і скорочуємо на нього.*]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}=\left[\begin{matrix}(n+1)!=(n+1)n!,\\(n+2)!=(n+2)(n+1)n!\end{matrix}\right]=$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!(1+(n+1))}{n!(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\left[\frac{:n^2}{:n^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} = 0.$$

6.2.7.2. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}}$.

Розв'язання. [1.16.2.4.]①

[*Підсумовуємо геометричні прогресії в чисельнику та знаменнику дробу за формулою*

$$S_n = b_1 + b_1 q + \ldots + b_1 q^{n-1} = b_1\frac{q^n-1}{q-1}.\Bigg]$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\dfrac{(1/3)^{n+1}-1}{1/3-1}}{1\cdot\dfrac{(1/4)^{n+1}-1}{1/4-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}{\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)} = \frac{9}{8}.$$

Коментар. ① Ця послідовність є часткою сум двох геометричних прогресій зі знаменниками $q_1 = \frac{1}{3}$ та $q_2 = \frac{1}{4}$.

6.2.7.3. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

Розв'язання. [1.16.1.4.]①

[*Перетворюємо загальний член послідовності, зводячи дроби до спільного знаменника, і використовуємо формулу суми арифметичної прогресії*

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1+a_n}{2}n.\Bigg]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+(n-1)}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+(n-1))(n-1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\left[\frac{:n^2}{:n^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Коментар. ① Тут не можна скористатись безпосередньо теоремою [6.2.3.1], оскільки маємо суму нескінченної кількості н. м. п.

6.2.8. Довести, що послідовність $\{x_n\}$, яку означено рекурентним співвідношенням $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, x_1 = \sqrt{2}$, збіжна. Знайти її границю.

Розв'язання. [6.4.3, 6.4.4, 6.5.7.] ①

[*Доводимо обмеженість послідовності.*]

Доведімо за методом математичної індукції, що для всіх n правдива нерівність $x_n < 2$.

Припустімо, що цю нерівність доведено при $n = k, x_k < 2$. Тоді маємо

$$x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Оскільки $x_1 < 2$, то, на підставі принципу математичної індукції, нерівність $x_n < 2$ доведено для всіх n. Оскільки, крім того, $0 < x_n$, то послідовність $\{x_n\}$ обмежена.

[*Доводимо монотонність послідовності.*]

З нерівності

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} > \sqrt{2x_n} > \sqrt{x_n^2} = x_n$$

випливає, що вона зростає.

[*Висновуємо.*]

Отже, за ознакою Ваєрштраса [6.5.7], ця послідовність має границю, яку позначаємо $s = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Переходимо до границі, коли $n \to \infty$, в рівності

$$x_{n+1}^2 = 2 + x_n.$$

За теоремою [6.1.9] маємо

$$s^2 = s + 2,$$

звідки $s_1 = -1, s_2 = 2$. Але, оскільки $x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, то $s \geq 0$.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Коментар. ① Збіжність послідовності можна довести, якщо показати, що вона: або обмежена зверху і зростає, або обмежена знизу і спадає.

6.2.9. Знайти границю послідовності $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+x^{2n}}{2+x^{4n}}$ і побудувати графік функції $y = f(x)$.

Розв'язання.

Для будь-якого значення x, що справджує нерівність $\left|x\right| < 1$,

$$x^{2n} \to 0, x^{4n} \to 0, n \to \infty.$$

Отже, $f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Для будь-якого значення x, що справджує нерівність $\left|x\right| > 1$,

$$x^{2n} \to +\infty, x^{4n} \to +\infty, n \to \infty.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+x^{2n}}{2+x^{4n}} = \left[\frac{:\, x^{4n}}{:\, x^{4n}}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{-4n}+x^{-2n}}{2x^{-4n}+1} = 0.$$

Для $\left|x\right| = 1$ і будь-якому n $x^{2n} = x^{4n} = 1$.

Отже, $f(x) = \dfrac{2}{3}$. Функцію f можна задати формулою:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \left|x\right| < 1, \\ \dfrac{2}{3}, & \left|x\right| = 1, \\ 0, & \left|x\right| > 1. \end{cases}$$

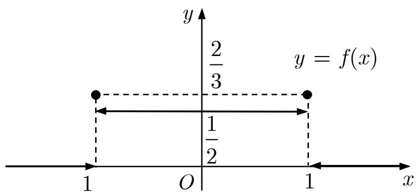


Рис. до 6.2.9

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

6.2.10. Запишіть перші 5 членів послідовності $\{x_n\}$, якщо:

1) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$; 2) $x_1 = 1, x_n = x_{n-1} + 2$.

6.2.11. Визначити одну з можливих формул для загального члена послідовності $\{x_n\}$:

1) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{15}, \ldots$; 2) $\dfrac{1}{3\cdot 4}, \dfrac{1}{5\cdot 6}, \dfrac{1}{7\cdot 8}, \dfrac{1}{8\cdot 9}, \dfrac{1}{9\cdot 10}, \ldots$;

3) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{81}, \dfrac{1}{243}, \ldots$; 4) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{17}, \dfrac{1}{26}, \ldots$.

6.2.12. Доведіть, що послідовність $\{x_n\}$ зростає, якщо:

1) $x_n = n^3 + 2n$; 2) $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+10}$;

3) $x_n = \dfrac{3^n}{n+1}$; 4) $x_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!}$.

6.2.13. Доведіть, що числова послідовність $\{x_n\}$ обмежена, якщо:

1) $x_n = (-1)^n$; 2) $x_n = \dfrac{n+1}{n}$.

6.2.14. Дослідіть послідовність на монотонність і обмеженість:

1) $x_n = n - \dfrac{1}{n}$; 2) $x_n = \cos\dfrac{\pi n}{2}$;

3) $x_n = -\dfrac{n^2+1}{n^2}$; 4) $x_n = -\sqrt{n}$.

6.2.15. Знайдіть найбільший елемент обмеженої зверху послідовності $\{x_n\}$, якщо:

1) $x_n = 6n - n^2 - 5$; 2) $x_n = e^{10n - n^2 - 24}$;

3) $x_n = \dfrac{10^n}{n!}$; 4) $x_n = \dfrac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$.

6.2.16. Доведіть, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і визначте номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такий, що $\left|x_n - a\right| < \varepsilon = 0{,}001\ \forall n > N_\varepsilon$, якщо:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+2}{n+1} = 3$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n - 1}{3^n} = 1$.

6.2.17. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+3n)^3 - 27n^3}{(1+4n)^2 + 2n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^4 - n^4}{n^4 + 3}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)^2}{(n+1)^3 - (n+3)^3}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(2n-1)}{4n^3+1}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+5}+n}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{9n^2+2n}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{8n^3+2}}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!}{(n+3)!+(n+2)!}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot 5^n-4^n}{3\cdot 5^n+4^n}$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+4^n}{3^n-4^{n+1}}$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-3})$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+1}-\dfrac{n^3}{n^2+1}\right)$; 14) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+5}{4n+1}-\dfrac{n^2+4}{2n+3}\right)$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cos n!}{n^2+1}$; 16) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n}\sin 2^n}{n^3+1}$;

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+...+\dfrac{2n-1}{n^2}\right)$;

18) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+...+\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right)$;

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$;

20) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

6.2.18. Доведіть існування границі послідовності

$$x_n=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+...+\frac{1}{2^n+1}.$$

6.2.19. Доведіть існування границі послідовності і знайдіть її:

1) $\sqrt{2},\sqrt{2\sqrt{2}},\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},...$; 2) $0{,}2,\ 0{,}23,\ 0{,}233,\ 0{,}2333,...$;

3) $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2+x_n}, x_1=a>0.$

6.2.20. Схарактеризуйте поводження послідовності (збіжна, н. м. п., розбіжна, н. в. п.):

1) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$; 2) $x_n = n^{(-1)^n}$;

3) $x_n = n\sin\dfrac{\pi n}{2}$; 4) $x_n = \ln(\ln n), n \ge 2$;

5) $x_n = n + \sqrt[3]{2 + n - n^3}$;

6) $x_n = \sqrt{2n^2 + 4n + 1} - \sqrt{2n^2 + 3n + 2}$.

6.2.21. Знайти границю послідовності $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$ і побудувати графік функції $y = f(x)$.

Відповіді

6.2.10. 1) $\{x_n\} = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$; 2) $\{x_n\} = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$.

6.2.11. 1) $x_n = \dfrac{1}{3n}$; 2) $x_n = \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}$; 3) $x_n = \dfrac{1}{3^n}$; 4) $x_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

6.2.14. 1) зростаюча, необмежена; 2) немонотонна, обмежена; 3) зростаюча, обмежена; 4) спадна, обмежена зверху.

6.2.15. 1) $x_{\max} = x_3 = 4$; 2) $x_{\max} = x_5 = e$; 3) $x_{\max} = x_9 = x_{10} = \dfrac{10^9}{9!}$;

4) $x_{\max} = x_1 = \dfrac{\pi^2}{6}$.

6.2.17. 1) $\frac{3}{2}$; 2) 0; 3) $-\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) -2; 6) 2; 7) 0; 8) ∞; 9) $\frac{2}{3}$; 10) $-\frac{1}{4}$; 11) $\frac{1}{3}$; 12) 0;

13) -1; 14) $\frac{5}{8}$; 15) 0; 16) 0; 17) 1; 18) $\frac{3}{4}$; 19) 1; 20) $\frac{1}{2}$.

6.2.19. 1) 2; 2) $\frac{7}{30}$; 3) 0.

6.2.20. 1) н. в. п.; 2) розбіжна; 3) розбіжна; 4) н. в. п.; 5) н. м. п.; 6) збіжна.

6.2.21. $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ \frac{1}{2}, & |x| = 1, \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$

Практикум 6.3. Еквівалентні нескінченно малі функції

Навчальні задачі

6.3.1.1. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

Розв'язання. [6.8.]

[*Розкриваємо невизначеність, замінюючи н. м. ф. на еквівалентну їй.*] ①

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}\left[\sin u(x)\overset{[6.8.1]}{\sim}u(x), u(x)\to 0\right]\\ \sin 5x\sim 5x,\ 5x\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{x}=5.$$

Розв'язання. ① Така заміна можлива тільки в добутку чи частці:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)}{h(x)}=\left[\begin{array}{l}f(x)\to 0,\\ g(x)\to 0,\\ h(x)\to 0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{l}f(x)\sim f_1(x),\\ g(x)\sim g_1(x),\\ h(x)\sim h_1(x)\end{array}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)g_1(x)}{h_1(x)}.$$

6.3.1.2. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3x\cdot \operatorname{tg}\sqrt{x}}{\operatorname{arctg} x\cdot(1-\cos 2x)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 3x\cdot \operatorname{tg}\sqrt{x}}{\operatorname{arctg} x\cdot(1-\cos 2x)}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{[6.8]}{=}\left|\begin{array}{l}\arcsin 3x\sim 3x, 3x\to 0\\ \operatorname{tg}\sqrt{x}\sim\sqrt{x},\sqrt{x}\to 0,\\ \operatorname{arctg} x\sim x,\\ 1-\cos 2x\sim\dfrac{(2x)^2}{2}=2x^2, 2x\to 0\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2\cdot\sqrt{x}}{x\cdot 2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{9}{2\sqrt{x}}=+\infty.$$

6.3.1.3. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{2x}-1)\ln(1-3x^2)}{\sqrt[7]{1+x^2}-1}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\ln(1-3x^2)}{\sqrt[7]{1+x^2}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{[6.8]}{=}$$

$$\begin{bmatrix} e^{2x}-1\sim 2x, 2x\to 0 \\ \ln(1-3x^2)\sim(-3x^2),(-3x^2)\to 0, \\ (1+x^2)^{1/7}-1\sim \dfrac{1}{7}x^2, x^2\to 0 \end{bmatrix} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot(-3x^2)}{\dfrac{1}{7}x^2} = \lim_{x\to 0}(-42x)=0.$$

6.3.2.1. Знайти $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

Розв'язання. [6.8.]

[*Щоб скористатись еквівалентністю, перетворюємо чисельник.*]

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[5.10.11]}{=} \lim_{x\to a}\frac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\cdot\sin\dfrac{x-a}{2}}{x-a} = \left|\begin{matrix}\sin\dfrac{x-a}{2}\sim\dfrac{x-a}{2}, \\ \dfrac{x-a}{2}\to 0\end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\cdot\dfrac{x-a}{2}}{x-a} = \lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2} = \cos a.$$

6.3.2.2. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$.

Розв'язання.

[*Щоб скористатись еквівалентністю для н. м. ф.* $a^{x_2}-a^{x_1}$, *перетворюємо її як* $a^{x_2}-a^{x_1}=a^{x_1}(a^{x_2-x_1}-1)$.]

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{e(e^{x-1}-1)}{x-1} = \left|\begin{matrix} e^{x-1}-1\overset{[6.8.9]}{\sim} x-1, \\ (x-1)\to 0\end{matrix}\right| = \lim_{x\to 1}\frac{e(x-1)}{x-1} = e.$$

6.3.2.3. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$.

Розв'язання.

[*Щоб скористатись еквівалентністю для н. м. ф.* $f(x), x\to x_0$, *перетворюємо її аргумент як* $x=(x-x_0)+x_0, (x-x_0)\to 0$.]

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{1-(1+(x-1))^{1/3}}{1-(1+(x-1))^{1/5}} \overset{[6.8]}{=}$$

$$= \left|\begin{matrix}(1+(x-1))^{1/3}-1\sim\dfrac{1}{3}(x-1), \\ (1+(x-1))^{1/5}-1\sim\dfrac{1}{5}(x-1), (x-1)\to 0\end{matrix}\right| = \lim_{x\to 1}\frac{-\dfrac{1}{3}(x-1)}{-\dfrac{1}{5}(x-1)} = \frac{5}{3}.$$

6.3.2.4. Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$.

Розв'язання.

[*Щоб скористатись еквівалентністю для н. м. ф.* $\log_a x_1 - \log_a x_2$ *перетворюємо її як* $\log_a x_2 - \log_a x_1 = \log_a \dfrac{x_2}{x_1}$.]

$$\lim_{x\to+\infty} x(\ln(x+1)-\ln x) = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \left[\infty\cdot 0\right] \overset{[6.8]}{=}$$

$$= \left|\begin{matrix}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sim\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x}\to 0,\\ x\to+\infty\end{matrix}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1.$$

6.3.3.1. Знайти $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[6.8]}{=} \left|\begin{matrix}\ln(1+3^x)\sim 3^x, 3^x\to 0\\ \ln(1+2^x)\sim 2^x, 2^x\to 0\\ x\to-\infty\end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{2^x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty}\right] = 0.$$

6.3.3.2. Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 3^x(1+3^{-x})}{\ln 2^x(1+2^{-x})} \overset{[5.11.5]}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln 3+\ln(1+3^{-x})}{x\ln 2+\ln(1+2^{-x})} = \left[\frac{:x}{:x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 3+\dfrac{1}{x}\ln(1+3^{-x})}{\ln 2+\dfrac{1}{x}\ln(1+2^{-x})} = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

6.3.4.1. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\sin 5x}-3^{\sin x}}{e^{x^2}-\cos x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{\sin 5x}-3^{\sin x}}{e^{x}-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{3^{\sin x}(3^{\sin 5x-\sin x}-1)}{(e^{x}-1)+(1-\cos x)} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} 3^{\sin 5x - \sin x} - 1 \overset{[6.8.8]}{\sim} (\sin 5x - \sin x)\ln 3 \overset{[5.9.11]}{=} \\ = 2\ln 3 \cdot \sin 2x \cdot \cos 3x \sim 2\ln 3 \cdot (2x) \cdot 1 = 4x\ln 3, \\ (\sin 5x - \sin x) \to 0, x \to 0 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3^{\sin x} \cdot 4x\ln 3}{(e^x - 1) + (1 - \cos x)} = \left[\frac{:x}{:x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4 \cdot 3^{\sin x} \ln 3}{\dfrac{e^x - 1}{x} + \dfrac{1 - \cos x}{x}} = \left| \begin{array}{l} 3^{\sin x} \to 1, \qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} \overset{[6.7.4]}{=} 1, \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x} = 0 \end{array} \right| = 4\ln 3.$$

6.3.4.2. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\pi - 4\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x}}{x}$.

Розв'язання. [6.8.]

$$\lim_{x\to 0} \frac{\pi - 4\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 4\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x}}{x} = \left[\begin{array}{l} u(x) \sim \operatorname{tg} u(x), \\ u(x) \to 0, x \to x_0 \end{array}\right]^{①} =$$

$$\overset{[6.8.2]}{=} 4\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x}\right)}{x} = 4\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{1+x}}{x\left(1 + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} \cdot \dfrac{1}{1+x}\right)} \overset{[5.9.4]}{=}$$

$$= 4\lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{1+x}}{x\left(1 + \dfrac{1}{1+x}\right)} = 4\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x}{1+x}}{x \cdot \dfrac{x+2}{x+1}} = 4\lim_{x\to 0} \frac{1}{x+2} = 2.$$

Коментар. ① Усі еквівалентності можна використовувати в обидва боки, замінюючи ліву частину на праву або праву частину на ліву.

6.3.5.1. Знайти $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$.

Розв'язання. [6.8, 6.9.7.]

[*Якщо $x \to x_0 \neq 0$, то щоб спростити знаходження границі, замінюємо аргумент границі за формулою $t = x - x_0$.***]**

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x} = \left[\frac{0}{0}\right]^{①} = \left| \begin{array}{c} t = x - 1 \to 0, \\ x = t + 1 \end{array} \right| = \lim_{t\to 0} \frac{\sin 7\pi(t+1)}{\sin 2\pi(t+1)} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(7\pi t+7\pi)}{\sin(2\pi t+2\pi)} \overset{[5.10.3]}{=} \lim_{t\to 0}\frac{-\sin 7\pi t}{\sin 2\pi t} = \left|\begin{matrix}\sin 7\pi t\sim 7\pi t, 7\pi t\to 0\\ \sin 2\pi t\sim 2\pi t, 2\pi t\to 0\end{matrix}\right| =$$

$$= -\lim_{t\to 0}\frac{7\pi t}{2\pi t} = -\frac{7}{2}.$$

Коментар. ① Скористатись еквівалентностями відразу не можна, оскільки $7\pi x\to 7\pi$ та $2\pi x\to 2\pi$, коли $x\to 1$.

6.3.5.2. Знайти $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{x-10}$.

Розв'язання. [6.8.]

$$\lim_{x\to 10}\frac{\lg x-1}{x-10} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{matrix}t=x-10\to 0,\\ x=t+10\end{matrix}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{\lg(10+t)-\lg 10}{t} \overset{[5.11.5]}{=}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\lg\left(1+\dfrac{t}{10}\right)}{t} = \left[\begin{matrix}\lg\left(1+\dfrac{t}{10}\right)\sim\dfrac{t}{10\ln 10},\\ \dfrac{t}{10}\to 0\end{matrix}\right] \overset{[6.8.6]}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t}{10\ln 10}}{t} = \frac{1}{10\ln 10}.$$

6.3.5.3. Знайти $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\dfrac{\pi}{\cos x}-2x\operatorname{tg}x\right)$.

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{\pi}{\cos x}-2x\operatorname{tg}x\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{\pi}{\cos x}-\frac{2x\sin x}{\cos x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\pi-2x\sin x}{\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{matrix}t=x-\dfrac{\pi}{2}\to 0,\\ x=t+\dfrac{\pi}{2}\end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\pi-2\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{\pi-(2t+\pi)\cos t}{-\sin t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\pi(1-\cos t)-2t\cos t}{-\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{\pi(1-\cos t)}{-\sin t}+\lim_{t\to 0}\frac{2t\cos t}{\sin t} =$$

$$= \left[\begin{matrix}1-\cos t\sim\dfrac{t^2}{2},\\ \sin t\sim t\end{matrix}\right] = \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\pi t^2}{2}}{-t}+\lim_{t\to 0}\frac{2t\cos t}{t} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0}t+2\lim_{t\to 0}\cos t = 2.$$

6.3.6.1. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

Розв'язання. [6.7.3, 6.7.6.]

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \left[\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1\right] = \left[1^\infty\right] \overset{[6.7.6]}{\underset{①}{=}}$$

$$= \left[\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)v(x)}\right] =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}-1\right)x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}} = e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Коментар. ① Інакше цю границю можна знайти ще так:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \left[1^\infty\right] = \lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x}{x+1}-1\right)\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\left(-\frac{1}{x+1}\right)\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\left(-\frac{1}{x+1}\right)\right)^{-(x+1)\cdot\left(-\frac{x}{x+1}\right)} = \lim_{\substack{x\to\infty,\\ -(x+1)\to\infty}}\left(\left(1+\left(-\frac{1}{x+1}\right)\right)^{-(x+1)}\right)^{\left(-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)} \overset{[6.7.3]}{=} e^{-1}.$$

6.3.6.2. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\big(\ln(e+x)\big)^{\operatorname{ctg} x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\big(\ln(e+x)\big)^{\operatorname{ctg} x} = \left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\ln(e+x) = 1,\\ \lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg} x = \infty\end{array}\right] = \left[1^\infty\right] \overset{[6.7.6]}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x+e)-1)\operatorname{ctg} x} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+e)-\ln e}{\operatorname{tg} x}} \overset{[5.11.5]}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)}{\operatorname{tg} x}} = \left[\ln\left(1+\frac{x}{e}\right) \sim \frac{x}{e}, \frac{x}{e} \to 0\right] \overset{[6.8.7]}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{e}}{x}} = e^{1/e}.$$

6.3.7. Визначити порядок мализни та головну частину нескінченно малої функції $\alpha(x) = x^3 + 1000x^2$ щодо н. м. ф. $\beta(x) = x$, коли $x \to 0$.

Розв'язання. [6.6.5.]

[*Щоб знайти порядок н. м. ф.* $\alpha(x)$ *щодо н. м. ф.* $\beta(x)$, *коли* $x \to x_0$, *досліджуємо* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\left[\beta(x)\right]^k}$.]

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+1000x^2}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x+1000)}{x^k}=\lim_{x\to 0}x^{2-k}(x+1000)=$$
$$=\begin{cases}0, & 2-k>0,\\ 1000, & 2=k,\\ \infty, & 2-k<0.\end{cases}$$

Отже, н. м. ф. $\alpha(x)$ має порядок $k=2$ щодо н. м. ф. $\beta(x)=x$, коли $x\to 0$; головна частина $1000x^2$. Тобто
$$x^3+1000x^2\sim 1000x^2, x\to 0.$$

6.3.8. Визначити порядок росту та головну частину нескінченно великої функції $\alpha(x)=\dfrac{x^5}{1+x+2x^2}$ щодо функції $\beta(x)=x, x\to\infty$.

Розв'язання.* *[6.6.5.]

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^5}{1+x+2x^2}}{x^k}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{5-k}}{1+x+2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{3-k}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+2}=\begin{cases}\infty, & 3-k>0,\\ \dfrac{1}{2}, & 3-k=0,\\ 0, & 3-k<0.\end{cases}$$

Отже, н. в. ф. $\alpha(x)$ має порядок росту $k=3$ щодо н. в. ф. $\beta(x)=x$, коли $x\to\infty$; головна частина $\dfrac{1}{2}x^3$. Тобто
$$\frac{x^5}{1+x+2x^2}\sim\frac{x^3}{2}, x\to\infty.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

6.3.9. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(x+\dfrac{5\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x}{\arcsin 2x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{arctg}x}{\sqrt{4+x}-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\operatorname{ctg}x\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{\operatorname{tg}^2x-\sin^2x}$;

7) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$;

8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}a}{x-a}$.

6.3.10. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arcsin x}{\sqrt{1-x}}$.

6.3.11. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-5x)}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^2)}{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\big(\ln(2+x)-\ln x\big)$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty} x\log_2\dfrac{10+x}{5+x}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\ln\cos\dfrac{\pi}{x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+\ln(1+x)+\operatorname{tg}3x^2}{x^2+x^3}$.

6.3.12. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-1}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{-2(x-1)}-1}{x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{2x}}{\operatorname{tg}x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(4^{\frac{1}{x}}-4^{\frac{1}{x+1}}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[7]{1+x^2}-1}{x^2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+\sin x^2}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}$;

8) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}$.

6.3.13. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^x$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{x^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(1+\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}x}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x^2]{\cos x}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x\cdot3^x}{1+x\cdot7^x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; 10) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x^2\cdot2^x}{1+x^2\cdot5^x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$;

11) $\lim\limits_{x\to0}\left(2-e^{x^2}\right)^{\frac{1}{\ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{3}\right)}}$; 12) $\lim\limits_{x\to0}\left(2-3^{\sin^2 x}\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$.

6.3.14. Визначте порядок мализни та головну частину нескінченно малої функції $\alpha(x)$ щодо функції $\beta(x)=x$, коли $x\to0$, якщо:

1) $\alpha(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$; 2) $\alpha(x)=\ln(1+x^2)-2\sqrt[3]{(e^x-1)^2}$;

3) $\alpha(x)=3^{\sqrt[3]{x}}-1$; 4) $\alpha(x)=\operatorname{tg}x-\sin x$.

6.3.15. Визначте порядок росту та головну частину нескінченно великої функції $\alpha(x)$ щодо функції $\beta(x)=x$, коли $x\to\infty$, якщо:

1) $\alpha(x)=\sqrt{16x^4+x+1}$; 2) $\alpha(x)=\dfrac{x^5}{2x^2+x+1}$.

Відповіді

6.3.9. 1) 3; 2) 0; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) 12; 5) 0; 6) $\frac{1}{4}$; 7) $-\sin a$; 8) $-\frac{1}{\sin^2 a}$.

6.3.10. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2\pi}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6.3.11. 1) -5; 2) 2; 3) $\frac{1}{a}$; 4) 2; 5) $\frac{5}{\ln 2}$; 6) $-\frac{\pi^2}{2}$; 7) $-\ln 2$; 8) 2.

6.3.12. 1) $3\ln 2$; 2) -3; 3) 5; 4) $\ln 4$; 5) $\frac{1}{7}$; 6) 2; 7) $\frac{1}{3}$; 8) $4\ln 2-4$.

6.3.13. 1) e^2; 2) e^{-4}; 3) e^3; 4) e^{-4}; 5) e^{km}; 6) e^8; 7) e; 8) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 9) $\frac{3}{7}$; 10) $\frac{2}{5}$;
11) e^{-9/π^2}; 12) 9.

6.3.14. 1) $k = \frac{1}{2}$, головна частина $\left(-x^{1/2}\right)$, $x \to 0$; 2) $k = \frac{2}{3}$, головна частина $\left(-2x^{2/3}\right), x \to 0$; 3) $k = \frac{1}{3}$, головна частина $\left(\ln 3 \cdot x^{1/3}\right)$; 4) $k = 3$, головна частина $\frac{x^3}{2}$.

6.3.15. 1) $k = 2$, головна частина $2x^2, x \to \infty$; 2) $k = 3$, головна частина $\frac{x^3}{2}, x \to \infty$;

Практикум 6.4. Неперервність функції. Точки розриву функції

Навчальні задачі

6.4.1.1. Знайти й дослідити точки розриву функції $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Розв'язання. [6.11.]

[***Крок 1.*** *Класифікуємо функцію і знаходимо її область означення.*]

Функція f — елементарна; область означення функції $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

[***Крок 2.*** *Визначаємо точки підозрілі на розрив.*]

$x_0 = 0$ — точка розриву.

[***Крок 3.*** *Знаходимо однобічні границі в підозрілих точках і, якщо треба, значення функції.*]

Оскільки

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \overset{[6.7.1]}{=} 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x} = 1, \ \nexists f(0)$$

[***Крок 4.*** *Висновуємо про кожну підозрілу точку.*]

Точка $x_0 = 0$ є точкою розриву 1-го роду, усувного [6.11.2.2]. ①

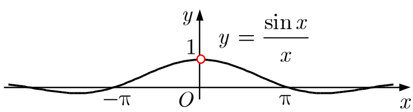


Рис. до 6.4.1.1

Функцію $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ можна доозначити в точці $x_0 = 0$, покладаючи

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Функція g вже буде неперервною на $\mathbb{R}$.

Коментар. ① Усувний розрив можна «усунути», доозначуючи функцію f у точці x_0, тобто утворюючи нову функцію

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ f(x_0 \pm 0), & x = x_0, \end{cases}$$

що тотожна функції f скрізь, окрім точки x_0, і буде вже неперервною в цій точці.

6.4.1.2. Знайти й дослідити точки розриву функції $f(x) = e^{1/x}$.

Розв'язання. [6.11.]

Функція f — елементарна; область означення $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$x_0 = 0$ — точка розриву.

$$\lim_{x \to -0} e^{1/x} = 0; \quad \lim_{x \to +0} e^{1/x} = +\infty.$$

Оскільки обидві границі існують і одна з них нескінченна, то $x_0 = 0$ — точка розриву 2-го роду, нескінченного [6.11.3.1].

Графік функції має в точці $x_0 = 0$ праву вертикальну асимптоту.

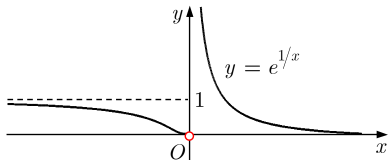


Рис. до 6.4.1.2

6.4.1.3. Знайти й дослідити точки розриву функції

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0, \\ (x-1)^2, & 0 \le x \le 2, \\ 4 - x, & x > 2. \end{cases}$$

Розв'язання. [6.11.]

Функція f — неелементарна, означена різними аналітичними виразами на різних проміжках, які є неперервними функціями на цих проміжках. Отже, єдині підозрілі на розрив точки — це точки $x_1 = 0$ та $x_2 = 2$, де змінюються аналітичні вирази для функції f.

1. Досліджуємо точку $x_1 = 0$.

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} (1 - x^2) = 1;$$
$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} (x-1)^2 = 1.$$

[*Оскільки $f(-0) = f(+0)$, то знаходимо значення $f(0)$.***]**

$$f(0) = (0-1)^2 = 1.$$

Оскільки існують скінченні границі $f(-0), f(+0)$ і

$$f(+0) = f(-0) = 1 = f(0),$$

то за критерієм неперервності [6.9.2]

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$$

функція f є неперервною в точці $x_1 = 0$.

2. Досліджуємо точку $x_2 = 2$.

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} (x-1)^2 = 1;$$
$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} (4-x) = 2.$$

Оскільки існують скінченні границі $f(2-0), f(2+0)$ і

$$f(2-0) = 1 \ne 2 = f(2+0),$$

то точка $x_2 = 2$ є точкою розриву 1-го роду, неусувного [6.11.2.1], зі стрибком①

$$\delta = f(2+0) - f(2-0) = 2 - 1 = 1.$$

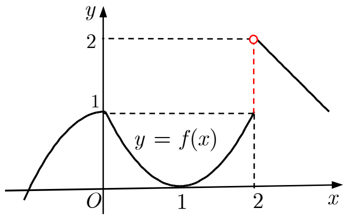


Рис. до 6.4.1.3

Коментар. ① Оскільки $f(2-0) = f(2) = (2-1)^2 = 1$, то функція f є неперервною зліва в точці $x_0 = 2$.

6.4.1.4. Знайти й дослідити точки розриву функції $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$.

Розв'язання. [6.11.]

Функція f — елементарна, область означення $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Доведімо, користуючись критерієм існування границі (Гайне) [6.3.2], що не існує $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$.

[*Розглядаємо дві послідовності значень аргументу.*]

$$\{x_n'\} = \left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\right\} = \frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \ldots, \frac{2}{\pi + 2\pi n}, \ldots, \lim_{n\to\infty} x_n' = 0;$$
$$\{x_n''\} = \left\{\frac{1}{2\pi n}\right\} = \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{4\pi}, \frac{1}{6\pi}, \ldots, \frac{1}{2\pi n}, \ldots, \lim_{n\to\infty} x_n'' = 0.$$

[*Розглядаємо послідовності значень функції.*]

$$\{f(x_n')\} = 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots, \lim_{n\to\infty} f(x_n') = 1;$$
$$f(x_n'') = 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots, \lim_{n\to\infty} f(x_n'') = 0.$$

Отже, не існує $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$.

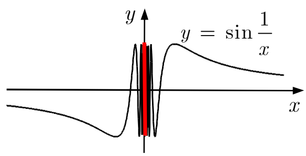


Рис. до 6.4.1.4

Точка $x_0 = 0$ є точкою розриву 2-го роду, істотного [6.11.3.2].

6.4.2. Знайти з точністю 0,1 корінь рівняння $x^4 + x^3 - 1 = 0$ на відрізку $[0;1]$.

Розв'язання. [6.10.4.]

Нехай $f(x) = x^4 + x^3 - 1$. Ця функція неперервна $\forall x \in \mathbb{R}$, а, отже, і на $[0;1]$. Оскільки $f(0) = -1 < 0, f(1) = 1 > 0$, то за теоремою Больцано — Коші про нулі функції [6.10.4.]

$$\exists c \in (0;1) : f(c) = 0,$$

тобто рівняння $f(x) = 0$ має корінь на $[0;1]$.

Покладаємо $a = 0, b = 1$.

[*Крок 1.* *Обчислюємо* $f(a), f(b)$.**]**

$$f(a) = f(0) = -1, f(b) = f(1) = 1.$$

[*Крок 2.* *Перевіряємо знак* $f(a)f(b)$.**]**

$$f(a)f(b) = -1 \cdot 1 = -1 < 0 \Rightarrow c \in (0;1).$$

[*Крок 3.* *Порівнюємо довжину відрізка* $[a;b]$ *з точністю.***]**

$$\left|b - a\right| = 1 > 0{,}1.$$

[*Крок 4.* *Обчислюємо* $x_1 = \dfrac{a+b}{2}, f(x_1)$.**]**

$$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{13}{16}.$$

[*Крок 5.* *Перевіряємо знаки* $f(x_1)f(a)$ *та* $f(x_1)f(b)$ *і вибираємо відрізок, якому належить корінь рівняння.***]**

$$f(x_1)f(a) = -\frac{13}{16} \cdot (-1) = \frac{13}{16} > 0;$$

$$f(x_1)f(b) = -\frac{13}{16} \cdot 1 = -\frac{13}{16} < 0 \Rightarrow c \in [x_1; b].$$

Покладаємо $a_1 = x_1 = \dfrac{1}{2}, b_1 = b = 1$.

[*Крок 6.* *Порівнюємо довжину відрізка* $[a_1; b_1]$ *з точністю.***]**

$$\left|a_1 - b_1\right| = \frac{1}{2} > 0{,}1.$$

[*Повторюємо кроки* 4—6 *доти, доки не буде виконано умову* $\left|a_i - b_i\right| < \varepsilon$.**]**

$$x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4}.$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{67}{256}.$$

$$f(x_2)f(a_1) = -\frac{67}{256} \cdot \left(-\frac{13}{16}\right) > 0;$$

$$f(x_2)f(b_1) = -\frac{67}{256} \cdot 1 < 0.$$

Покладаємо

$$a_2 = x_2 = \frac{3}{4}, b_2 = b_1 = 1.$$

$$\left|a_2 - b_2\right| = \frac{1}{4} = 0,25 > 0,1.$$

$$x_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{7}{8}....$$

Нарешті дістаємо: $x = 0,81$ з точністю $\varepsilon = 0,1$.

Коментар. ① Знайти корінь з точністю 0,1 означає вказати відрізок $[a;b]$ завдовжки $b - a \le 0,1$, який містить корінь рівняння. Щоб знайти наближене значення кореня, скористаємось *методом половинного поділу.*

6.4.3. Розв'язати нерівність $\dfrac{(x-2)^3 x^2}{(x+1)^5} > 0.$

Розв'язання. [6.12.]

[***Крок 1.*** *Знаходимо точки, у яких множники функції*

$$f(x) = a(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}...(x - x_n)^{k_n}, k_i \in \mathbb{Z},$$

дорівнюють нулю.]

$$x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = -1.$$

[***Крок 2.*** *Наносимо ці значення на числову вісь, виколюючи точки, де дорівнюють нулю множники у від'ємному степені.*]

[***Крок 3.*** *Визначаємо знак многочлена в кожному з інтервалів, на які розбивають корені рівняння числову вісь, проводячи «змійку».*] ①

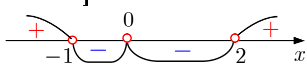


Рис. до 6.4.3

[***Крок 4.*** *Записуємо відповідь.*] ②

$x \in (-\infty;-1) \cup (2;+\infty)$.

Коментар. ① «Змійку» запускають праворуч від найбільшого кореня:

1) **зверху**, якщо $a > 0$;

2) **знизу**, якщо $a < 0$.

② На тих проміжках, де крива проходить:

1) **вище** числової прямої, виконано нерівність $f(x) > 0$;

2) **нижче** числової прямої, виконано нерівність $f(x) < 0$.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

6.4.4. Знайдіть і дослідіть точки розриву функції f і побудуйте (схематично) її графік, якщо :

1) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$;

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$;

3) $f(x) = \dfrac{(1+x)^n-1}{x}, n \in \mathbb{N}$;

4) $f(x) = 1 - x\sin\dfrac{1}{x}$;

5) $f(x) = \dfrac{|3x-5|}{3x-5}$;

6) $f(x) = \dfrac{|x+2|}{\operatorname{arctg}(x+2)}$;

7) $f(x) = (x+1)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

8) $f(x) = \dfrac{3^{\frac{1}{x-2}}-1}{3^{\frac{1}{x-2}}+1}$;

9) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$;

10) $f(x) = \dfrac{2}{1-3^{3+x}}$;

11) $f(x) = 3^{\frac{x}{4-x^2}}$;

12) $f(x) = e^{\frac{1}{\sin x}}$;

13) $f(x) = \dfrac{3}{\log_2|x+1|}$;

14) $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

15) $f(x) = \cos\dfrac{\pi}{2-x}$;

16) $f(x) = \sin\dfrac{1}{(x+3)^2}$;

17) $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \le x \le 1, \\ 4-2x, & 1 < x < 2{,}5, \\ 2x-7 & 2{,}5 \le x \le 4; \end{cases}$

18) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} 2x, & x < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2x+3}, & x > \dfrac{1}{2}; \end{cases}$

19) $f(x)=\begin{cases} e^{x+3}, & x\le -3,\\ 10-x^2, & |x|\le 3,\\ 2^{\frac{1}{x-2}}, & x>3; \end{cases}$ 20) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 1,\\ \sin\frac{1}{x-3}, & x>1. \end{cases}$

6.4.5. Виберіть значення параметрів так, щоб функція f була скрізь неперервною й побудуйте її графік:

1) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 1,\\ 3-ax^2, & x>1; \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} -2\sin x, & x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ A\sin x+B, & |x|<\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x, & x\ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

6.4.6. Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{(2x-1)(x-2)^3}{(x+1)(x+2)^2}<0;$ 2) $\dfrac{(x+3)(x+2)^3(x+1)}{x(x-3)(x-4)}>0.$

6.4.7. Доведіть, що рівняння має розв'язок на вказаному відрізку:

1) $x^3+3x+1=0, x\in[-1;0];$ 2) $x^5-6x^2+3x-7=0, x\in[0;2].$

Відповіді

6.4.4. 1) функція f має в точці $x=1$ розрив 1-го роду, усувний, $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\ne 1,\\ \dfrac{2}{3}, & x=1; \end{cases}$

2) функція f має в точці $x=-1$ розрив 1-го роду, усувний, $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\ne -1,\\ \dfrac{1}{3}, & x=-1; \end{cases}$

3) функція f має в точці $x=0$ розрив 1-го роду, усувний, $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\ne 0,\\ n, & x=0; \end{cases}$

4) функція f має в точці $x=0$ розрив 1-го роду, усувний, $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\ne 0,\\ 1, & x=0; \end{cases}$

5) функція f має в точці $x=\dfrac{5}{3}$ розрив 1-го роду, неусувний;

6) функція f має в точці $x=-2$ розрив 1-го роду, неусувний;

7) функція f має в точці $x=0$ розрив 1-го роду, неусувний;

8) функція f має в точці $x=2$ розрив 1-го роду, неусувний;

9) функція f має в точках $x=\pm 3$ розрив 2-го роду, нескінченний;

10) функція f має в точці $x=-3$ розрив 2-го роду, нескінченний;

11) функція f має в точках $x=\pm 2$ розрив 2-го роду, нескінченний;

12) функція f має в точках $x=\pi k, k\in\mathbb{Z}$, розрив 2-го роду, нескінченний;

13) функція f має в точці $x=-1$ розрив 1-го роду, усувний, $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq -1,\\ 0, & x=-1,\end{cases}$

а в точках $x=-2, x=0$ — розрив 2-го роду, нескінченний;

14) функція f має в точці $x=0$ розрив 1-го роду, усувний, $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq 0,\\ 2, & x=0,\end{cases}$

а в точках $x=\pm 1$ — розрив 2-го роду, нескінченний;

15) функція f має в точці $x=2$ розрив 2-го роду, істотний;

16) функція f має в точці $x=-3$ розрив 2-го роду, істотний;

17) функція f має в точці $x=2{,}5$ розрив 1-го роду, неусувний;

18) функція f має в точці $x=\dfrac{1}{2}$ розрив 1-го роду, усувний, $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq \dfrac{1}{2},\\ \dfrac{\pi}{4}, & x=\dfrac{1}{2};\end{cases}$

19) функція f має в точці $x=3$ розрив 1-го роду, неусувного;

20) функція f має в точках $x=0, x=1$ розрив 1-го роду, неусувний,

а в точці $x=3$ — розрив 2-го роду, істотний.

6.4.5. 1) $a=1$; 2) $A=-1, B=1$.

6.4.6. 1) $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup\left(\dfrac{1}{2};2\right)$; 2) $x\in(-\infty;-3)\cup(-2;-1)\cup(0;3)\cup(4;+\infty)$.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВМІННЯ

Основні означення	
1. Границя функції (за Коші, мовою околів). **2.** Границя функції зліва (справа). **3.** Нескінченно мала функція. **4.** Нескінченно велика функція. **5.** Числова послідовність. **6.** Границя числової послідовності. **7.** Число e.	**8.** Еквівалентні н. м. ф. (н. в. ф.). **9.** Порядок мализни н. м. ф. **10.** Неперервність функції в точці. **11.** Типи точок розриву. **12.** Неперервність функції на відрізку. **13.** Найбільше та найменше значення функції на відрізку.
Теореми	
1. Властивості функцій, що мають скінченну границю. **2.** Критерій існування скінченної границі. **3.** Властивості н. м. ф. **4.** Теорема про зв'язок н. м. ф. і н. в. ф. **5.** Теорема про зв'язок функції і її границі. **6.** Теорема про арифметичні дії з функціями, що мають скінченні границі. **7.** Критерій існування границі функції (мовою послідовностей). **8.** Ознака Ваєрштраса збіжності обмеженої послідовності. **9.** Властивості еквівалентних функцій.	**10.** Перша визначна границя. **11.** Друга визначна границя. **12.** Властивості функцій, неперервних у точці. **13.** Теорема про неперервність елементарної функції. **14.** Критерій неперервності функції в точці. **15.** Теорема Ваєрштраса про обмеженість функції. **16.** Теорема Ваєрштраса про найбільше та найменше значення функції. **17.** Теорема Больцано — Коші про проміжні значення функції. **18.** Теорема Больцано — Коші про нулі функції.
Основні задачі	
1. Знаходити границю елементарної функції усередині області означення. **2.** Знаходити границю функції (послідовності) за теоремою про арифметичні дії. **3.** Знаходити границю функції за допомогою таблиці еквівалентностей. **4.** Порівнювати н. м. ф. (н. в. ф.).	**5.** Визначати порядок мализни н. м. ф. (порядок росту н. в. ф.). **6.** Досліджувати функцію на неперервність. **7.** Класифікувати точки розриву функції. **8.** Схематично зображувати поводження функції в околі точки розриву.

РОЗДІЛ 7. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Диференціальне числення — розділ математики, який вивчає поводження функції, зокрема швидкість її зміни, за допомогою поняття похідної та диференціала функції.

У розділі розглянуто також застосування похідної та диференціала до задач геометрії та фізики. Подано схему повного дослідження поводження функції і побудови її графіка.

Поданий матеріал використовується в розділах:

— Інтегральне числення функцій однієї змінної;

— Диференціальне числення функцій кількох змінних;

— Диференціальні рівняння;

— Теорія рядів;

— Теорія функцій комплексної змінної;

— Інтегральні перетворення.

Ключові поняття:

— похідна функції;

— диференціал функції;

— диференційовність функції;

— екстремум функції;

— многочлен Тейлора.

Опанувавши цей розділ Ви зможете:

— знаходити похідні й диференціали функцій за допомогою правил і формул диференціювання;

— застосовувати похідні й диференціали до розв'язання задач геометрії й фізики;

— знаходити границі засобами диференціального числення;

— наближати функції многочленами (формула Тейлора);

— досліджувати функції на монотонність та опуклість за допомогою похідних;

— знаходити локальні та глобальні екстремуми функцій;

— будувати графіки функцій за результатами повного дослідження функції.

Попередні знання та вміння з розділів:

— Функції однієї змінної;

— Теорія границь;

— Аналітична геометрія.

7.1. ПОХІДНА ТА ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

Вивчення швидкості перебігу будь-якого процесу, зокрема швидкості зміни функції, приводить до поняття похідної функції. Розділ математики, який присвячений не тільки розв'язанню цієї задачі в найзагальнішому випадку, але й висновкам, які випливають з її розв'язання, називають *диференціальним численням* функцій.

7.1.1. Похідна функції

1. Розгляньмо функцію f, означену в деякому околі $U(x_0)$ точки x_0. Надаємо фіксованому значенню аргументу x_0 приріст Δx такий, що точка $x = x_0 + \Delta x$ належить околу $U(x_0)$.

Означення 7.1 (похідної функції в точці).

Похідною функції f *у точці* x_0 називають границю відношення приросту функції

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля і позначають

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0 використовують ще позначення:

$$y'(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

З означення похідної функції f у точці x_0 випливає, що

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Якщо для деякого значення x_0

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\infty \ \text{(або } -\infty \text{ чи } +\infty\text{)},$$

то кажуть, що в точці x_0 існує *нескінченна похідна*.

2. Знайдімо, приміром, похідну функції $f(x)=ax$ у точці $x=x_0$:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{ax-ax_0}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a(x-x_0)}{x-x_0}=a.$$

3. Покажімо, що функція $f(x)=\sqrt{x}$ у точці $x_0=0$ має нескінченну похідну:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\sqrt{0+\Delta x}-\sqrt{0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}=+\infty.$$

4. Якщо значенню аргументу x функції f відповідає певне значення $f'(x)$, то означено функцію

$$f' : x \mapsto f'(x).$$

Кажуть, що функція f «*породжує*» функцію f', а функція f' «*походить*» від функції f.

Дію відшукання похідної функції f називають *диференціюванням*.

5. Означення 7.2 (однобічних похідних).

Лівобічною (*правобічною*) *похідною функції* f *у точці* x_0 називають

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\quad\left(\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right),$$

і позначають $f'(x_0-0)$ $(f'(x_0+0))$.

Праву та ліву похідні функції в точці називають *однобічними похідними* функції в цій точці.

Нехай функцію f означено в околі точки x_0.

Теорема 7.1 (критерій існування скінченної похідної).

Функція f, означена в околі точки x_0, має скінченну похідну $f'(x_0)$ тоді й лише тоді, коли існують скінченні й рівні між собою однобічні похідні $f'(x_0-0)$ та $f'(x_0+0)$, причому:

$$f'(x_0)=f'(x_0-0)=f'(x_0+0).$$

6. Приміром, знайдімо однобічні похідні функції $f(x)=|x|$ у точці $x_0=0$:

$$f'(-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\left|\Delta x + 0\right| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1;$$
$$f'(+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\left|\Delta x + 0\right| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Отже, функція $f(x) = \left|x\right|$ не має похідної в точці $x = 0$.

7.1.2. Диференційовність функції

1. Розгляньмо функцію f, яку означено в деякому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}$.

Означення 7.3 (диференційовності функції в точці).

Функцію f називають *диференційовною* в точці x_0, якщо її приріст у цій точці

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

можна записати як

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \ \ \Delta x \to 0,$$

де $A = A(x_0)$ стала щодо Δx, $\alpha(\Delta x)$ — н. м. ф., коли $\Delta x \to 0$.

Теорема 7.2 (критерій диференційовності).

Функція f диференційовна в точці x_0 тоді й лише тоді, коли в точці x_0 існує скінченна похідна $f'(x_0) = A$.

Доведення. $\boxed{\Rightarrow}$ Нехай функція f диференційовна в точці x_0. Доведімо, що в цій точці існує скінченна похідна $f'(x_0) = A$. З диференційовності функції f у точці x_0 випливає, що приріст функції, відповідний приросту аргументу Δx, можна записати як

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

звідки

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

де A для заданої точки x_0 стала (не залежить від Δx), а $\alpha(\Delta x) \to 0$, коли $\Delta x \to 0$. Із властивості функції, що має скінченну границю, випливає, що

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Нехай у функції f у точці x_0 існує скінченна похідна $f'(x_0)$, тобто існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \Leftrightarrow \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

де $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Тому

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

А це і є умова диференційовності, причому $f'(x_0) = A$. ■

2. Теорема 7.3. (необхідна умова диференційовності).

Якщо функція диференційовна в деякій точці, то вона неперервна в цій точці.

Зворотне твердження неправдиве: з неперервності функції f у деякій точці не випливає диференційовність її в цій точці.

Приміром, функція $y = |x|$ непрерервна в точці $x_0 = 0$, має в цій точці однобічні похідні, але не має похідної в ній, а, отже, не є диференційовною (рис. 7.1).

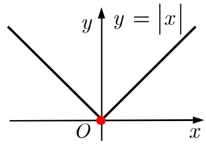


Рис. 7.1. Приклад неперервної недиференційовної функції в точці $x_0 = 0$

Множина диференційовних функцій є підмножиною множини неперервних функцій.

7.1.3. Правила диференціювання

Знаходити похідну функції безпосередньо за означенням досить складно й неефективно. На практиці функції диференціюють за допомогою низки правил і формул.

Нехай функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$ диференційовні в деякому інтервалі $(a;b)$.

1. Сталий множник можна винести за знак похідної:

$$\boxed{(Cu)' = Cu'.}$$

2. Похідна суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) похідних цих функцій:

$$\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'.}$$

Правило працює для будь-якої скінченної кількості доданків.

3. Похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутку похідної першого множника на другий та добутку першого множника на похідну другого:

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'.}$$

Доведення. З диференційовності функцій u та v випливає існування скінченних похідних u' та v' і неперервність функції u та v.

За означенням

$$(u(x)v(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x) + u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} u(x) \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} =$$

$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \blacksquare$$

4. Похідна частки двох функцій дорівнює дробу, чисельник якого є різницею добутків знаменника дробу на похідну чисельника і чисельника дробу на похідну знаменника, а знаменник є квадрат дільника:

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \ (v \neq 0).}$$

5. Дифенціювання складеної функції. Розгляньмо складену функцію $y = f(\varphi(x))$ із *проміжним аргументом* $u = \varphi(x)$ і *основним аргументом* x.

Нехай функція $u = \varphi(x)$ має скінченну похідну u'_x у точці x, а функція $y = f(u)$ має скінченну похідну y'_u у відповідній точці $u = \varphi(x)$.

Похідна складеної функції за основним аргументом дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну цього аргументу за основним аргументом:

$$\boxed{y'_x = y'_u u'_x.}$$

Сформульоване правило працює також, якщо проміжних аргументів декілька.

Доведення. Надаємо незалежному аргументу x приріст Δx. Тоді функція $u = \varphi(x)$ одержує приріст Δu, а це для $\Delta u \neq 0$ викликає приріст Δy функції $y = f(u)$.

З диференційовності функції $y = f(u)$ в точці u випливає, що

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u,$$

де $\alpha(\Delta u) \to 0$, коли $\Delta u \to 0$.

Уважаємо, що $\alpha(0) = 0$. Тоді записана рівність зберігається і для $\Delta u = 0$ (маємо $0 = 0$).

Ділячи рівність почленно на Δx, дістаємо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta u \to 0$ (з неперервності функції $u = \varphi(x)$ у точці x) і $\alpha(\Delta u) \to 0$. Отже, існує границя

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x. \ \blacksquare$$

6. Диференціювання оберненої функції. Розгляньмо дві взаємно обернені функції $y = f(x)$ та $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$. Нехай функція f диференційовна.

Похідна оберненої функції дорівнює оберненій величині похідної заданої функції:

$$\boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x}, y'_x \neq 0.}$$

Зауважмо, що після диференціювання треба у праву частину рівності замість x підставити $\varphi(y)$.

Доведення. Нехай функція $y = f(x)$ строго монотонна в інтервалі $(a;b)$ і має похідну $f'(x) \neq 0, x \in (a;b)$. Розгляньмо обернену функцію $x = \varphi(y)$. Надаємо аргументу y приріст $\Delta y \neq 0$. Йому відповідає приріст Δx оберненої функції, причому $\Delta x \neq 0$ на підставі строгої монотонності (оскільки $f'(x_0) \neq 0$) функції $y = f(x)$. Тому можна записати

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Якщо $\Delta y \to 0$, то завдяки неперервності оберненої функції приріст $\Delta x \to 0$. Оскільки

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0,$$

то звідси випливають рівності

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)},$$

тобто

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \ \blacksquare$$

7.1.4. Основні формули диференціювання

1. Нехай $u = u(x)$ — диференційовна функція, C — стала.

Функція	Похідна	Функція	Похідна
C	0	$u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$
$a^u, 0 < a \neq 1$	$a^u \ln a \cdot u'$	e^u	$e^u \cdot u'$
$\log_a u$, $0 < a \neq 1$	$\dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$	$\ln u$	$\dfrac{1}{u} \cdot u'$
$\sin u$	$\cos u \cdot u'$	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
$\operatorname{tg} u$	$\dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	$\operatorname{ctg} u$	$-\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$\arcsin u$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	$\arccos u$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$\operatorname{arctg} u$	$\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$	$\operatorname{arcctg} u$	$-\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$\operatorname{sh} u$	$\operatorname{ch} u \cdot u'$	$\operatorname{ch} u$	$\operatorname{sh} u \cdot u'$
$\operatorname{th} u$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$	$\operatorname{cth} u$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$

Доведення. Виведімо деякі формули таблиці похідних, користуючись визначними границями та наслідками з них.

1. Нехай $f(x) = C = \text{const}, x \in \mathbb{R}$. Тоді

$$f'(x) = C' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0.$$

2. Для функції $f(x) = a^x, 0 < a \neq 1, x \in \mathbb{R}$, маємо:

$$f'(x) = (a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Зокрема,

$$(e^x)' = e^x.$$

3. Для функції $f(x) = \log_a x, 0 < a \neq 1, x > 0.$ маємо:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Зокрема,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

4. Формулу диференціювання для функції $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}, \alpha \in \mathbb{R}, x > 0$, можна одержати за правилом диференціювання складеної функції:

$$(x^\alpha)' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

5. Для функції $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$, маємо:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Так само одержують і похідну функції $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$.

6. Для функції $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, скористаємось правилом диференціювання частки:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Так само одержують і похідну функції $f(x) = \operatorname{ctg} x, x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

7. Похідну функції $y = \arcsin x, x \in (-1;1)$ одержують за правилом диференціювання оберненої функції.

Маємо $x = f^{-1}(y) = \sin y, y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Отже,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(f^{-1}(y))'} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

У точках $x = \pm 1$ функція $y = \arcsin x$ не є диференційовною.

Так само можна одержати похідні функцій $y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$.

8. Для функції $f(x) = \operatorname{sh} x, x \in \mathbb{R}$, скористаємось правилами диференціювання:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}(-1)) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Так само можна одержати похідну функції $y = \operatorname{ch} x$. Похідні функцій $y = \operatorname{th} x$ та $y = \operatorname{cth} x$ дістають за правилом диференціювання частки.■

2. Логарифмічне диференціювання. Розгляньмо функцію $f(x) > 0$ й утворімо складену функцію $\ln f(x)$. Обчислімо похідну функції $\ln f(x)$, яку називають *логарифмічною похідною* функції $f(x)$,

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x).$$

Звідси випливає **правило логарифмічного диференціювання**:

$$\boxed{f'(x) = f(x)(\ln f(x))'.}$$

Логарифмічне диференціювання спрощує знаходження похідної:

1) степенево-показникових функцій $(u(x))^{v(x)}$;

2) функцій, що мають велику кількість співмножників.

3. Приміром,

$$((\sin x)^x)' = (\sin x)^x (\ln(\sin x)^x)' = (\sin x)^x (x \ln \sin x)' =$$
$$= (\sin x)^x \left(1 \cdot \ln \sin x + x \cdot \frac{(\sin x)'}{\sin x}\right) =$$
$$= (\sin x)^x \left(\ln \sin x + x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\right) = (\sin x)^x \left(\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x\right).$$

4. Диференціювання неявної функції. Нехай диференційовну функцію $y = y(x)$ задано неявно рівнянням

$$F(x,y) = 0.$$

Якщо в рівнянні $F(x,y) = 0$ під y розуміти функцію $y(x), x \in X$, то це рівняння перетворюється на тотожність за аргументом x:

$$F(x, y(x)) \equiv 0.$$

Диференціюючи цю тотожність за змінною x та вважаючи, що y є функцією x, дістаємо лінійне щодо y' рівняння, яке також містить змінні x та y.

Розв'язуючи його щодо y', знаходимо шукану похідну функції $y = f(x)$, заданої неявно:

$$y'_x = g(x,y).$$

5. Приміром, знайдімо похідну від функції $y = f(x)$, заданої рівнянням $x^2 + y^2 = a^2$.

Продиференціюємо рівняння за змінною x:

$$2x + 2yy' = 0.$$

Отже,

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

6. Диференціювання функцій, заданих параметрично. Нехай функцію $y(x)$ задано параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in T.$$

Припускаємо, що функції $x(t)$ та $y(t)$ диференційовні для будь-якого $t \in T$ й $x'(t) \neq 0$. Нехай функція $x = x(t)$ має диференційовну обернену функцію $t(x)$. Функцію $y = y(x)$, задану параметрично, можна розглядати як складену функцію

$$y = y(t), t = t(x),$$

де t — проміжний аргумент.

Тоді

$$y'_x = y'_t t'_x = y'_t \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Отже, похідна функції $y = y(x)$, заданої параметрично, також задається параметрично:

$$\boxed{\begin{cases} x = x(t), \\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}, \end{cases} t \in T.}$$

7. Приміром, якщо задано функцію $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} t \in [0; \pi]$, то її похідну задають рівняння:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y' = \dfrac{(\sin t)'}{(\cos t)'} = \dfrac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t, \end{cases} t \in [0; \pi].$$

7.1.5. Диференціал функції

1. Нехай функція f диференційовна в точці x_0, тобто має скінченну похідну $f'(x_0)$ і

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \ \Delta x \to 0.$$

Означення 7.4 (диференціала функції в точці).

Диференціалом функції f у точці x_0 називають головну, лінійну щодо Δx, частину приросту цієї функції f і позначають

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

2. Знайдімо, приміром, диференціал функції $f(x) = x$.

Оскільки

$$f'(x) = x' = 1,$$

то

$$df(x) = dx = \Delta x,$$

тобто диференціал незалежної змінної дорівнює приросту цієї змінної і формулу для обчислення диференціала можна ще записати так:

$$\boxed{df(x) = f'(x)dx.}$$

З неї випливає рівність

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

Отже, позначення $\dfrac{df(x)}{dx}$ можна розглядати як відношення диференціалів $df(x)$ та dx.

7.1.6. Геометричний і механічний зміст похідної та диференціала

1. Дотична до кривої. Розгляньмо задачу побудови дотичної до довільної плоскої кривої. Нехай f неперервна функція, означена в деякому околі точки x_0. Розглядаємо дві точки

$$M_0(x_0; y_0) \text{ та } M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$$

графіка цієї функції (рис. 7.2).

Через них проходить єдина пряма — *січна*

$$M_0M : \frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

Кутовий коефіцієнт січної

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

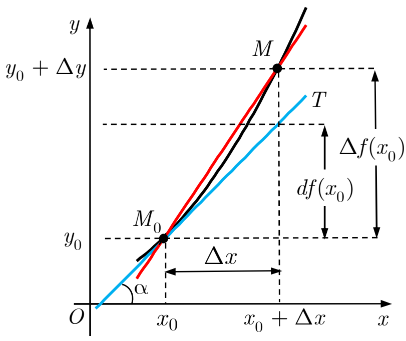


Рис. 7.2. Дотична до кривої

Якщо точка M рухається вздовж кривої до точки M_0, то січна повертається навколо точки M_0 і прямує до деякого граничного положення M_0T, яке називають *дотичною до кривої* в точці M_0.

Січна прямуватиме до граничного положення, відмінного від вертикальної прямої, тоді й лише тоді, коли існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

яка є *кутовим коефіцієнтом дотичної* до графіка функції f у точці x_0.

У разі скінченної похідної $f'(x_0)$ дотична до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ має рівняння

$$\boxed{y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).}$$

Кутом між двома кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ у точці їх перетину називають кут між дотичними до кривих, проведеними в цій точці.

З рівняння дотичної, позначаючи ординату дотичної через $y_{\text{дот}}$, дістаємо рівності:

$$y_{\text{дот}} - y_0 = f'(x_0)\Delta x = dy(x_0).$$

2. Похідна й диференціал функції в точці мають такий **геометричний зміст**:

1) похідна функції f у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; f(x_0))$, тобто

$$\boxed{f'(x_0) = k_{\text{дот}} = \operatorname{tg} \alpha,}$$

де α — кут нахилу дотичної до осі Ox.

2) диференціал функції f у точці x_0 дорівнює приросту ординати дотичної у точці $M_0(x_0; f(x_0))$.

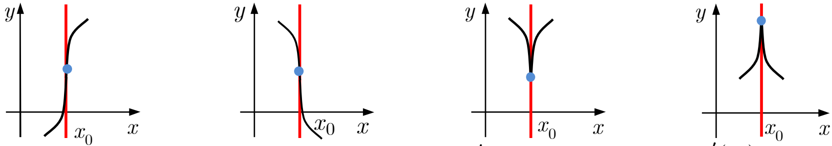
3. Перетворюючи рівняння січної до вигляду

$$\frac{y}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = x - x_0 + \frac{y_0}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$$

і спрямовуючи Δx до нуля, дістаємо, що нескінченній похідній відповідає вертикальна дотична з рівнянням $x = x_0$.

Якщо в точці x_0 існують однобічні нескінченні похідні функції, то в цій точці графік функції має вертикальну дотичну (рис. 7.3) з рівнянням

$$\boxed{x = x_0.}$$



$f'_-(x_0) = +\infty$, $f'_+(x_0) = +\infty$ $\quad$ $f'_-(x_0) = -\infty$, $f'_+(x_0) = -\infty$ $\quad$ $f'_-(x_0) = -\infty$, $f'_+(x_0) = +\infty$ $\quad$ $f'_-(x_0) = +\infty$, $f'_+(x_0) = -\infty$

Рис. 7.3. Вертикальні дотичні до графіків функції

4. Якщо в точці x_0 не існує скінченної чи нескінченної похідної функції, то точка $M_0(x_0;y_0)$ є кутовою точкою графіка функції і в такій точці не можна провести дотичну (рис. 7.4).

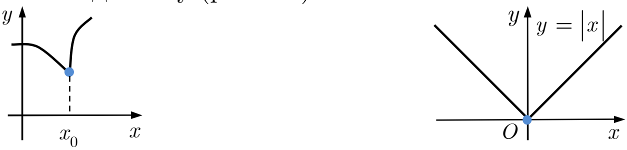


Рис. 7.4. До графіка функції у кутовій точці не можна провести дотичну

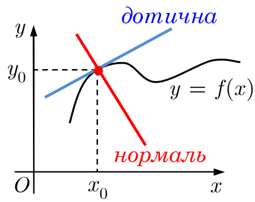


Рис. 7.5. Нормаль до кривої

5. *Нормаллю до кривої* $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0;y_0)$ називають пряму, що перпендикулярна до дотичної в цій точці (рис. 7.5).

Оскільки кутові коефіцієнти перпендикулярних прямих зв'язані співвідношенням

$$k_1 k_2 = -1 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1},$$

то

$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{f'(x_0)},$$

за умови, що $k_{\text{дот}} = f'(x_0) \neq 0$.

Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ у точці $(x_0;y_0)$ має вигляд

$$\boxed{y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).}$$

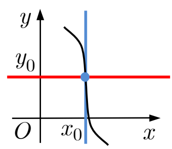


Рис. 7.6. Горизонтальна нормаль

6. Якщо дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0;f(x_0))$ є вертикальною прямою $x = x_0$, то нормаль до графіка є горизонтальною прямою (рис. 7.6)

$$\boxed{y = y_0;}$$

а в разі горизонтальної дотичної $y = y_0$ нормаль має рівняння (рис. 7.7)

$$\boxed{x = x_0.}$$

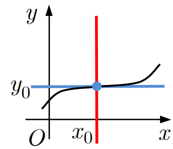


Рис. 7.7. Вертикальна нормаль

7. Швидкість прямолінійного руху. Розгляньмо матеріальну точку M, що рухається вздовж деякої прямої за законом

$$s = s(t),$$

де s — довжина шляху, який пройшла точка від початкової точки M_0; t — час. Нехай M — положення точки в момент t, а M' — у момент $t + \Delta t$ і Δs — віддаль між точками M та M' (рис. 7.8), тобто

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t).$$

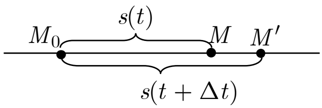


Рис. 7.8. Прямолінійний рух

Відношення

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v_{\text{сер}}$$

називають *середньою швидкістю* руху на ділянці від M до M', а границю

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$$

називають *швидкістю* (миттєвою швидкістю) руху в момент t. Отже,

$$\boxed{v(t) = \frac{ds}{dt}.}$$

Диференціал

$$ds = v\Delta t$$

дорівнює шляху, який би пройшла точка за проміжок часу Δt, починаючи з моменту t, якби рух на цій ділянці був би рівномірний зі швидкістю v. Цей шлях відрізняється від справжнього шляху Δs на нескінченно малу вищого порядку мализни, ніж Δt, коли $\Delta t \to 0$.

7.2. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Розглядаючи похідну від функції як нову функцію, можна знайти похідну від похідної функції — похідну 2-го порядку, а потім і похідну від похідної 2-го порядку і так далі.

7.2.1. Похідні вищих порядків

1. Розгляньмо диференційовну в кожній точці $x \in X$ функцію $f(x)$.

Тоді її похідна $f'(x)$, яку називають ще *похідною 1-го порядку* (*першою похідною*), також є функцією від x. Якщо функція $f'(x)$ диференційовна, то можна означити її похідну

$$\boxed{(f'(x))' = f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2},}$$

яку називають похідною 2-го порядку (*другою похідною*) *функції* $f(x)$.

Означення 7.5. (похідної n-го порядку).

Похідною n-го порядку функції $f(x)$ називають похідну від похідної $(n-1)$-го порядку і позначають

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = (f^{(n-1)}(x))', n = 1,2,\ldots, \quad f^{(0)}(x) \equiv f(x).$$

Похідні 1-го, 2-го та 3-го порядку позначають штрихами, приміром,

$$f'(x), f''(x), f'''(x).$$

Починаючи з похідної 4-го порядку, похідні позначають цифрами (римськими або арабськими, узятими в дужки). Приміром,

$$f^{(4)}(x) \equiv f^{\mathrm{IV}}(x).$$

Функцію f називають n *разів диференційовною* в точці $x \in X$, якщо в цій точці функція має всі похідні до n-го порядку включно.

Множину всіх функцій f, означених в інтервалі $(a;b)$, які мають неперервну похідну n-го порядку, позначають $C^n(a;b)$.

Функцію $f(x)$, що має похідні будь-якого порядку в кожній точці інтервалу $(a;b)$, називають *нескінченно диференційовною* в $(a;b)$ і пишуть $f \in C^{\infty}(a;b)$.

2. Приміром, функції $e^x, \sin x, \cos x$ є нескінченно диференційовними на $(-\infty;+\infty)$.

Методом математичної індукції можна одержати формули:

1) $(x^m)^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, & n \le m, \\ 0, & n > m, \end{cases} n \in \mathbb{N};$

2) $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}, n \in \mathbb{N};$

3) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}n\right), n \in \mathbb{N};$

4) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}n\right), n \in \mathbb{N};$

5) $\left(\dfrac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}, n \in \mathbb{N};$

6) $(\ln(x+a))^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}, n \in \mathbb{N}.$

Доведення. Приміром доведімо формулу 3).

1. Формула правдива для $n = 1$ та $n = 2$:

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

2. Припустімо, що формула правдива для $n = k$:

$$(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right).$$

3. Доведімо, що вона правдива для $n = k+1$:

$$(\sin x)^{(k+1)} = \left(\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Отже, за принципом математичної індукції формула правдива для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. ■

3. Механічний зміст другої похідної. Нехай $s = s(t)$ — закон прямолінійного руху матеріальної точки, тоді перша похідна від функції

$s(t)$ визначає швидкість руху $v = s'(t)$. Друга похідна є швидкістю зміни швидкості руху, тобто прискоренням

$$a = \frac{dv}{dt} = s''(t).$$

4. Похідні вищих порядків суми та добутку функцій. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають похідні n-го порядку в точці x, то функції $u(x) \pm v(x)$ та $u(x)v(x)$ також мають похідні n-го порядку в цій точці, причому

$$(u(x) \pm v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x);$$

$$(u(x)v(x))^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + \ldots + C_n^{n-1} u' v^{(n-1)} + C_n^n u v^{(n)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x),$$

де $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}; u^{(0)}(x) = u, v^{(0)}(x) = v(x), n \in \mathbb{N}$.

Формулу для $(uv)^{(n)}$ називають *Ляйбніцовою* формулою. Вона нагадує формулу Ньютонового біному, лише замість степенів стоять порядки похідних.

Якщо функція f є n разів диференційовною в точці x, а $C = \text{const}$, то

$$(Cf(x))^{(n)} = Cf^{(n)}(x), C = \text{const}, n \in \mathbb{N}.$$

5. Приміром,

$$(x \sin x)^{(2012)} = \left| \begin{array}{lll} C_{2012}^0 = 1 & u^{(2012)} = \sin\left(x + 1006\pi\right) = \sin x & v = x \\ C_{2012}^1 = 2012 & u^{(2011)} = \sin\left(x + \dfrac{2011\pi}{2}\right) = -\cos x & v' = 1 \\ C_{2012}^2 = \ldots & u^{(2010)} = \ldots & v'' = 0 \end{array} \right| =$$

$$= 1 \cdot x \sin x + 2012 \cdot 1(-\cos x) + 0 + \ldots = x \sin x - 2012 \cos x.$$

7.2.2. Диференціали вищих порядків

1. Розгляньмо диференційовну функцію f. Її диференціал (диференціал 1-го порядку)

$$df(x) = f'(x)dx$$

залежить від x та dx.

Диференціалом 2-го порядку (*другим диференціалом*) функції f називають диференціал від диференціала 1-го порядку і позначають

$$\boxed{d^2 f = d(df).}$$

Означення 7.6 (диференціала n-го порядку).

Диференціалом n-го порядку (*n-м диференціалом*) функції f називають диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку і позначають

$$d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x)), n \in \mathbb{N},$$
$$d^0 f(x) = f(x).$$

2. Нехай f є функцією незалежної змінної x, що має диференціали будь-якого порядку. Тоді

$$df(x) = f'(x)dx,$$

де $dx = \Delta x$ є сталим. За означенням

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx =$$
$$= (f''(x)dx)dx = f''(x)(dx)^2.$$

Отже,

$$\boxed{d^2 f(x) = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2.}$$

Так само

$$d^3 f(x) = d(d^2 f(x)) = d(f''(x)(dx)^2) = d(f''(x))(dx)^2 =$$
$$= (f'''(x)dx)(dx)^2 = f'''(x)(dx)^3 = f'''(x)dx^3.$$

Методом математичної індукції можна довести, що

$$\boxed{d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n, n \in \mathbb{N}.}$$

Звідси, зокрема, випливає, що

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.}$$

3. Виведімо тепер формули для обчислення диференціалів у разі, коли аргумент x є диференційовною функцією $x = \varphi(t)$ незалежної змінної t. Для одного й того самого Δt, але різних t (а, отже, і різних x) прирости Δx різні, тобто в цьому разі $dx \neq \Delta x$ не можна вважати незалежним від x, оскільки диференціал функції

$$dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t)dt.$$

Тому

$$df(t) = f_t'(t)dt = f_\varphi'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = f_x'(x)dx.$$

Отже, перший диференціал функції f визначають однією і тією самою формулою незалежно від того, чи є її аргумент незалежною змінною, чи є функцією іншого аргументу.

Цю властивість диференціала називають *інваріантністю форми першого диференціала*.

Знайдімо диференціал 2-го порядку:

$$d^2f(x) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d^2x =$$
$$= (f''(x)dx)dx + f'(x)d^2x = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Отже, диференціали 2-го (і вище) порядку вже не мають властивості інваріантності.

7.2.3. Похідні вищих порядків від функцій, заданих параметрично

1. Розгляньмо функцію $y = y(x)$ задану параметрично рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in T.$$

Оскільки

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x,$$

то

$$y : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x : \begin{cases} x = x(t), \\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y''_{xx} : \begin{cases} x = x(t), \\ y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \end{cases}} \ldots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{y^{(n)}_{x^n} : \begin{cases} x = x(t), \\ y^{(n)}_{x^n} = \dfrac{(y^{(n-1)}_{x^{n-1}})'_t}{x'_t}. \end{cases}}$$

2. Приміром, якщо задано функцію $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} t \in [0; \pi]$, то її першу похідну задають рівняння

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y' = -\operatorname{ctg} t, \end{cases} t \in [0; \pi].$$

Другу похідну задають рівняння:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y'' = \dfrac{(-\operatorname{ctg} t)'}{(\cos t)'} = \dfrac{\dfrac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\dfrac{1}{\sin^3 t}, \end{cases} t \in [0; \pi].$$

7.3. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Сформулюємо низку важливих теорем про функції, диференційовні в інтервалі, та дістаємо ефективне правило для розкриття невизначеностей за допомогою похідних.

7.3.1. Теорема Ферма

1. Теорема 7.4 (Ферма).

Нехай функція f неперервна в інтервалі $(a;b)$ і набуває свого найбільшого або найменшого значення в деякій точці c цього інтервалу. Тоді, якщо в точці c існує скінченна похідна $f'(c)$, то $f'(c)=0$.

Доведення. Нехай для визначеності функція f досягає в точці c свого найбільшого значення, тобто $f(x) \le f(c), c \in (a;b)$.

Тоді на підставі диференційовності функції f у точці c для $x > c$ дістаємо

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0 \Rightarrow \lim_{x\to c+0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c+0) \le 0,$$

а для $x < c$ маємо

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0 \Rightarrow \lim_{x\to c-0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c-0) \ge 0.$$

Ці нерівності одночасно можуть виконуватись лише тоді, коли

$$f'(c+0) = f'(c-0) = f'(c) = 0. \blacksquare$$

2. Геометричний зміст теореми Ферма полягає в наступному: якщо в точці $x=c$ функція f досягає найбільшого або найменшого значення, то дотична до графіка цієї функції в точці $x=c$ паралельна осі Ox (рис. 7.9).

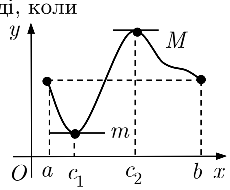


Рис. 7.9. Геометричний зміст теореми Ферма

7.3.2. Теореми про середнє значення

1. Функцію f називають *диференційовною в інтервалі* $(a;b)$, якщо вона диференційовна в кожній точці цього інтервалу.

Диференційовним в інтервалі функціям притаманні спільні властивості — теореми про середнє значення.

Теорема 7.5 (Роля).

Якщо функція f:

1) неперервна на відрізку $[a;b]$;

2) диференційовна в інтервалі $(a;b)$;

3) на кінцях відрізку $[a;b]$ набуває рівних значень $f(a)=f(b)$,

то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка c, у якій похідна функції f дорівнює нулю, тобто

$$f'(c)=0, c\in(a;b).$$

Доведення. Якщо для будь-якої точки $x\in(a;b)$ виконано рівність

$$f(x)=f(a)=f(b),$$

то функція f стала в цьому інтервалі і для будь-якої точки $c\in(a;b)$ виконано умову $f'(c)=0$.

Нехай існує точка $x_0\in(a;b)$, для якої $f(x_0)\neq f(a)$, приміром, $f(x_0)>f(a)$. На підставі Ваєрштрасової теореми 6.14 для функції f існує така точка $c\in[a;b]$, у якій функція f набуває найбільшого значення. Тоді

$$f(c)\geq f(x_0)>f(a)=f(b).$$

Тому $c\neq a$ та $c\neq b$, тобто $c\in(a;b)$ і функція f набуває в точці c найбільшого значення. Отже, на підставі теореми Ферма $f'(c)=0$. ■

2. Геометричний зміст теореми Роля: якщо неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційовна в інтервалі $(a;b)$ функція f набуває на кінцях цього відрізку рівних значень, то на графіку цієї функції знайдеться принаймні одна така точка з абсцисою $x=c$, у якій дотична паралельна осі Ox (рис. 7.10).

3. Вимогу диференційовності можна послабити до вимоги існування скінченної або нескінченної похідної певного знаку. Приміром, функція (рис. 7.11)

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-(x-1)^2}, & 0\leq x\leq 2,\\ -\sqrt{1-(x+1)^2}, & -2\leq x<0.\end{cases}$$

4. Усі вимоги теореми Роля істотні. На рис. 7.12 зображені графіки трьох функцій, означених на $[-1;1]$, для кожної з яких не виконана лише одна із трьох умов

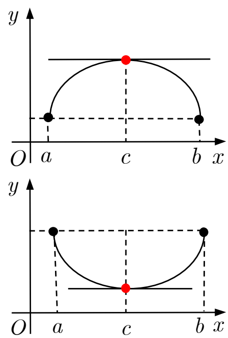


Рис. 7.10. Геометричний зміст теореми Роля

теореми й не існує такої точки $c \in (-1;1)$: $f'(c) = 0$.

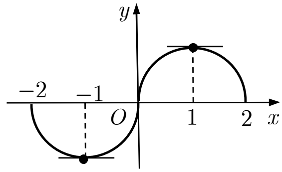


Рис. 7.11

1) функція $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0;1], \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ — розривна;

2) функція $f(x) = |x|$ — недиференційовна в точці $x = 0$;

3) для функції $f(x) = x, x \in [0;1]$, $f(0) \neq f(1)$.

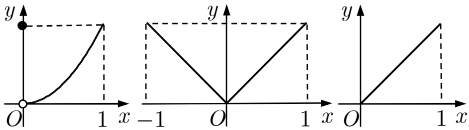


Рис. 7.12

5. Теорема 7.6 (Лаґранжа).

Якщо функція f:

1) неперервна на відрізку $[a;b]$,

2) диференційовна в інтервалі $(a;b)$,

то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка c така, що правдива *формула Лаґранжа*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a), a < c < b.$$

Доведення. Розгляньмо допоміжну функцію

$$\varphi(x) = (b-a)f(x) - (f(b) - f(a))x.$$

Ця функція справджує умови теореми Роля на відрізку $[a;b]$:

1) φ неперервна на $[a;b]$ як сума неперервних на $[a;b]$ функцій;

2) φ диференційовна в $(a;b)$ функція як сума диференційовних в $(a;b)$ функцій;

3) $\varphi(a) = \varphi(b) = bf(a) - af(b)$.

Знайдімо похідну цієї функції:

$$\varphi'(x) = (b-a)f'(x) - (f(b) - f(a)).$$

Згідно з теоремою Роля існує точка $c \in (a;b)$, така, що $\varphi'(c) = 0$, тобто

$$(b-a)f'(c) - (f(b) - f(a)) = 0 \Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b-a). \blacksquare$$

6. Якщо в Лаґранжовій формулі покласти $a = x_0, b = x_0 + \Delta x$, то вона набуває вигляду

$$\boxed{\Delta f(x_0) = f'(c)\Delta x, c \in \left(x_0; x_0 + \Delta x\right).}$$

Оскільки формула дає точний зв'язок приросту функції і приросту аргументу, її ще називають *формулою скінченних приростів* (вказати точку c часто неможливо).

7. Геометричний зміст Лаґранжової теореми (рис. 7.13) полягає в тому, що на дузі AB графіка функції $y = f(x)$, для якої виконано умови теореми, з кінцями в точках $A = (a; f(a))$ та $B = (b; f(b))$ знайдеться точка $C = (c; f(c))$, дотична в якій паралельна хорді AB.

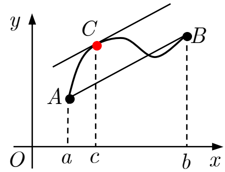


Рис. 7.13. Геометричний зміст теореми Лаґранжа

8. Теорема 7.7 (Коші).

Якщо функції f і g:

1) неперервні на відрізку $[a; b]$,

2) диференційовні в інтервалі $(a; b)$,

3) похідна $g'(x) \neq 0$ в інтервалі $(a; b)$,

то в інтервалі $(a; b)$ існує принаймні одна точка c така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < b.$$

Лаґранжева теорема випливає з теореми Коші для $g(x) = x$.

7.3.3. Правило Бернуллі — Лопіталя

1. Сформулюємо умови застосовності ще одного ефективного способу знаходження границь.

Теорема 7.8 (Бернуллі — Лопіталя).

Якщо:

1) функції f та g означені, непрерервні й диференційовні у проколеному околі точки x_0;

2) $g'(x) \neq 0$ в усіх точках цього околу;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$;

4) існує $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

то існує $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Доведення. Розгляньмо випадок скінченної точки x_0 і

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

Доозначмо функції f та g у точці x_0, покладаючи

$$f(x_0) = g(x_0) = 0.$$

Тоді функції f та g стають неперервними в точці x_0. Застосовуючи до них теорему Коші на відрізку $[x_0;x]$, дістаємо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

де точка $c \in (x_0;x)$. Якщо $x \to x_0$, то $c \to x_0$ і

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to x_0}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \blacksquare$$

Спосіб розкриття невизначеностей вигляду $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$ (якщо виконано умови теореми), за формулою:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \text{ або } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

називають *правилом Бернуллі — Лопіталя*.

2. Невизначеності

$$0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$$

можна звести до невизначеностей $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$ за допомогою перетворень:

$$fg = \left[0\cdot\infty\right] = \frac{f}{g^{-1}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{g}{f^{-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right];$$

$$f-g = [\infty-\infty] = \frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}} = \left[\frac{0}{0}\right];$$

$$f^{g} = \left[1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}\right] = e^{g\ln f} = e^{\frac{\ln f}{g^{-1}}} (f>0).$$

3. Може трапитись, що границя відношення похідних не існує, тоді як границя відношення функцій існує. Приміром, функції $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$ та $g(x) = x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Частка похідних $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$ у точці $x = 0$ границі не має. Отже, з існування $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ не випливає існування $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

4. Правило Бернуллі — Лопіталя інколи доводиться застосовувати кілька разів.

За правилом Бернуллі — Лопіталя можна довести, що:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0, n \in \mathbb{N}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \alpha > 0.$$

Тобто, степенева функція $x^\alpha, \alpha > 0$, зростає непорівняно швидше логарифмічної та непорівняно повільніше показникової функції.

$$\boxed{\ln x \ll x^\alpha \ll e^x, x \to +\infty\ \forall\alpha > 0.}$$

7.4. ТЕЙЛОРОВА ФОРМУЛА

Найпростішими функціями в розумінні обчислень їхніх значень є многочлени. Виникає питання про можливість наближення (заміни) функції $f(x)$ в околі точки x_0 многочленом деякого степеня.

7.4.1. Многочлен і формула Тейлора

1. Нехай функція f принаймні n разів диференційовна в околі точки x_0.

Означення 7.7 (многочлена Тейлора).

Многочленом Тейлора n-го порядку функції f за степенями $(x - x_0)$ називають многочлен

$$\tilde{P}_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,\ (f^{(0)} = f).$$

Значення похідних функції f і її многочлена Тейлора $\tilde{P}_n(x)$ до n-го порядку включно збігаються:

$$f(x_0) = \tilde{P}_n(x_0), f'(x_0) = \tilde{P}_n'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0) = \tilde{P}_n^{(n)}(x_0).$$

2. Означення 7.8 (формули Тейлора).

Формулою Тейлора n-го порядку функції f в околі точки x_0 називають рівність

$$f(x) = \tilde{P}_n(x) + r_n(x),$$

де $\tilde{P}_n(x)$ — многочлен Тейлора, $r_n(x) = f(x) - \tilde{P}_n(x)$ — *залишковий член формули Тейлора* (рис. 7.14).

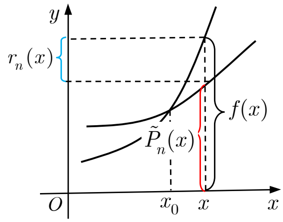


Рис. 7.14. Формула Тейлора

Формулу Тейлора в околі точки $x_0 = 0$ називають *формулою Тейлора — Маклорена.*

Залишковий член формули Тейлора $r_n(x)$ визначає похибку наближення функції f її многочленом Тейлора $\tilde{P}_n(x)$.

Якщо $f(x) = P_n(x)$ є многочленом n-го порядку, то $r_n(x) = 0$:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

7.4.2. Різні форми Тейлорової формули

1. Покладаючи $x - x_0 = \Delta x, x = x_0 + \Delta x$ у Тейлоровій формулі

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x_0 + \Delta x),$$

одержуємо

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \\ + r_n(x_0 + \Delta x).$$

Оскільки

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0),$$
$$f^{(n)}(x_0)\Delta x^n = d^n f(x_0),$$

то Тейлорову формулу n-го порядку функції f можна записати в *диференціальній формі*

$$\boxed{\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \frac{d^3 f(x_0)}{3!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + r_n(x).}$$

2. Теорема 7.9 (Тейлора).

Якщо функція f означена й n разів диференційовна в околі точки x_0, то правдива *формула Тейлора* n-го порядку функції f *із залишковим членом у формі Пеано*:

$$f(x) = \tilde{P}_n(x) + o((x - x_0)^n) =$$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$
$$+ o((x - x_0)^n), x \to x_0.$$

Доведення. $r_n(x) = f(x) - \tilde{P}_n(x)$

З означення многочлена $\tilde{P}_n(x)$ випливає, що

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Доведімо, що

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Застосуймо n разів правило Бернуллі — Лопіталя для розкриття невизначеності вигляду $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{(n-1)!(x - x_0)} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{r_n^{(n)}(x)}{n!} = 0,$$

тобто $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$, коли $x \to x_0$. ■

3. Якщо вимагати від функції f $(n + 1)$ разів диференційовності в околі точки x_0, то можна записати *формулу Тейлора* n-го порядку функції f *із залишковим членом у формі Лаґранжа*:

$$\boxed{\begin{gathered} f(x) = \tilde{P}_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = \\ = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \\ c \in (x_0; x), \end{gathered}}$$

якщо $x > x_0$ або $c \in (x; x_0)$, якщо $x < x_0$.

7.4.3. Розвинення за формулою Тейлора — Маклорена елементарних функцій

1. Одержімо розвинення функції $f(x)=e^x$. Функція $f(x)=e^x$ нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$. Знаходимо послідовно похідні від функції $f(x)=e^x$:

$$\left.\begin{aligned} &f(x)=e^x,\\ &f'(x)=e^x,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &f^{(n)}(x)=e^x,\\ &f^{(n+1)}(x)=e^x,\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &f(0)=1,\\ &f'(0)=1,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &f^{(n)}(0)=1\\ &f^{(n+1)}(c)=e^c, c\in(0;x).\end{aligned}\right.$$

Підставляючи одержані значення $f(0),f'(0),\dots,f^{(n)}(0),f^{(n+1)}(c)$ у формулу Тейлора — Маклорена із залишковими членами у формі Пеано та Лаґранжа, дістаємо:

$$\boxed{\begin{aligned} e^x &=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n);\\ e^x &=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c,\quad c\in(0;x).\end{aligned}}$$

2. Розвинення функції $f(x)=\sin x$:

$$\boxed{\begin{gathered} \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+o(x^{2k});\\ \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+(-1)^k\cos c\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},\\ c\in(0;x).\end{gathered}}$$

3. Розвинення функції $f(x)=\cos x$:

$$\boxed{\begin{gathered} \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2k+1});\\ \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+(-1)^{k+1}\cos c\cdot\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!},\\ c\in(0;x).\end{gathered}}$$

4. Розвинення функції $f(x) = \ln(1+x)$:

$$\boxed{\begin{gathered}\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n);\\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(1+c)^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1},\\ c \in (0; x).\end{gathered}}$$

5. Розвинення функції $f(x) = (1+x)^\alpha$:

$$\boxed{\begin{gathered}(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n);\\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n +\\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+c)^{\alpha-n-1}x^{n+1},\ c \in (0; x).\end{gathered}}$$

Якщо $\alpha = m \in \mathbb{N}$, то всі члени формули Тейлора — Маклорена, починаючи з $(m+1)$-го зникають, і формула Тейлора — Маклорена перетворюється на формулу *Ньютонового бінома*

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^m \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

7.4.4. Застосування Тейлорової формули

1. Знаходження границь. Формули Тейлора — Маклорена із залишковим членом у формі Пеано є джерелом асимптотичних формул.

Приміром, для $f(x) = \sin x$ (рис. 7.15) маємо:

$$\sin x = x + o(x^2);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6),$$
$$x \to 0.$$

Використаємо одну з цих формул для обчислення границі

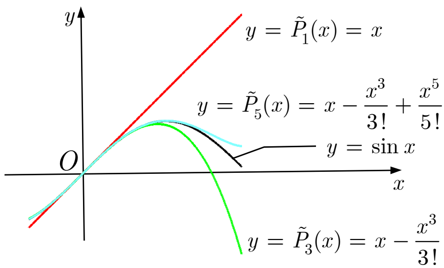


Рис. 7.15. Наближення функції $f(x) = \sin x$ Тейлоровими многочленами в точці $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!}+\frac{o(x^4)}{x^3}\right)=\frac{1}{6}.$$

2. Наближенні обчислення. Формулу Тейлора за степенями $(x-x_0)$ із залишковим членом у формі Лаґранжа застосовують для обчислення наближених значень функції в околі $U(x_0)$.

Значення $f(x)$ в околі $U(x_0)$ обчислюють за формулою

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

похибка наближення не перевищує

$$\left|r_n(x)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|,\ c\in(x_0;x).$$

3. Приміром, обчислімо $e^{0,1}$ з точністю до $0,001$.

❍Записуємо формулу Тейлора — Маклорена для e^x:

$$e^x=1+\frac{x!}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+r_n(x),$$

$$r_n(x)=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}, 0<c<x.$$

Похибка наближення не повинна перевищувати $0,001$, отже,

$$r_n(x)=\frac{e^c(0,1)^{n+1}}{(n+1)!}<0,001.$$

Оскільки $e^c<2$, то

$$\frac{2}{10^{n+1}(n+1)!}<0,001.$$

Покладаючи $n=1,2,3,...$, знаходимо, що нерівність виконано, починаючи з $n=3$.

Отже, з точністю до $0,001$

$$e^{0,1}\approx 1+\frac{0,1}{1!}+\frac{0,01}{2!}+\frac{0,001}{3!}=1,105.$$ ●

4. При $n=1$ функцію f наближають многочленом 1-го степеня

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

з похибкою

$$r_2(x) = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$$

Оскільки за означенням $x - x_0 = \Delta x, f'(x_0)\Delta x = df(x_0)$, то

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0),$$

з похибкою, що не перевищує

$$\left|r_2(x)\right| = \left|\frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2\right|, x_0 < c < x.$$

7.5. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Застосуймо диференціальне числення до дослідження функцій та побудови їх графіків.

7.5.1. Монотонність функцій

Одним із застосувань похідної є дослідження функцій і побудова їхніх графіків.

1. Теорема 7.10 (критерій сталості функції).

Функція f є сталою на відрізку $[a;b]$ тоді й лише тоді, коли

$$f'(x) = 0, x \in [a;b].$$

Доведення. $\boxed{\Rightarrow}$ Якщо функція f є сталою на відрізку $[a;b]$, то вона має на цьому відрізку похідну, і ця похідна

$$f'(x) = 0, x \in [a;b].$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Нехай $f'(x) = 0$ для всіх $x \in [a;b]$. Розгляньмо фіксовану точку $x_0 \in [a;b]$ і будь-яку точку $x \in [a;b], x \neq x_0$. На підставі теореми Лаґранжа

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

де $c \in (x_0;x)$. Оскільки $f'(c) = 0$, то $f(x) = f(x_0)$ для всіх $x \in [a;b]$. Це означає, що

$$f(x) = \text{const}, x \in [a;b]. \blacksquare$$

2. Теорема 7.11 (необхідна умова зростання (спадання) функції).

Якщо функція f на відрізку $[a;b]$ диференційовна і зростає (спадає), то $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0), x \in [a;b]$.

Доведення. Справді, якщо функція f зростаюча, то

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) > 0 \text{ для } \Delta x > 0;$$
$$\Delta f(x) < 0 \text{ для } \Delta x < 0.$$

В обох випадках $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0$, а, отже,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0. \blacksquare$$

3. Теорема 7.12 (достатні умови строгої монотонності).

Якщо функція f:
1) неперервна на відрізку $[a;b]$,
2) диференційовна в інтервалі $(a;b)$ і
3) $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$,
то функція f зростає (спадає) на відрізку $[a;b]$.

Доведення. Справді, за формулою скінченних приростів для довільних x та x_0 з відрізка $[a;b]$ маємо

$$\Delta f(x_0) = f'(c)\Delta x.$$

Отже, якщо $f'(x) > 0$ в $(a;b)$ і $\Delta x > 0$, то $\Delta f(x) > 0$ і функція f зростає на відрізку $[a;b]$.

Якщо $f'(x) < 0$ в $(a;b)$ і $\Delta x > 0$, то $\Delta f(x) < 0$ і функція f спадає на відрізку $[a;b]$. $\blacksquare$

4. Якщо функція f зростає (спадає) в $(a;b)$, то це ще не означає, що $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ в усіх точках проміжку.

Приміром, функція $y = x^3$ зростає в $(-\infty;+\infty)$, однак $y'(0) = 3x^2\Big|_{x=0} = 0$ (рис. 7.16).

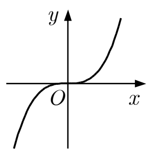


Рис. 7.16. Зростаюча функція

5. Інтервали монотонності функції відокремлюють один від одного або точки, де похідна дорівнює нулеві, або точки, де похідна дорівнює нескінченності чи не існує.

Означення 7.9 (критичної точки 1-го порядку).

Нехай функція f означена в околі точки x_0. Точку x_0 називають *критичною точкою 1-го порядку* функції f, якщо виконано одну з умов:

1) $f'(x_0) = 0$;
2) $f'(x_0) = \infty$;
3) $\nexists f'(x_0)$.

Геометрично ці умови означають, що у критичній точці 1-го порядку дотична або паралельна осі Ox (умова 1) (такі точки називають *стаціонарними*), або паралельна осі Oy (умова 2) (такі точки називають *точками вертання*) або дотичної не існує (умова 3) (такі точки називають *кутовими*) (рис. 7.17).

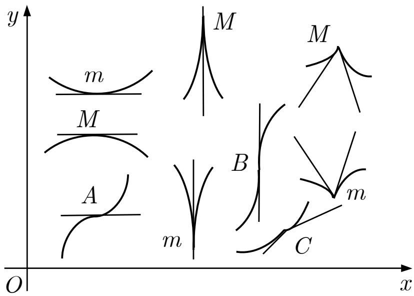


Рис. 7.17. Критичні точки 1-го порядку

7.5.2. Локальні екстремуми функції

1. **Означення 7.10 (точок локального екстремуму).**

Точку x_0 називають *точкою локального максимуму* (*мінімуму*) функції f, якщо існує δ-окіл точки x_0, такий, що для всіх $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ виконано нерівність

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) < 0$$
$$(\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) > 0).$$

Точки локального максимуму та мінімуму називають *точками локального екстремуму функції.*

Значення $f(x_0)$ називають *локальним максимумом* (*мінімумом*) функції (рис. 7.18).

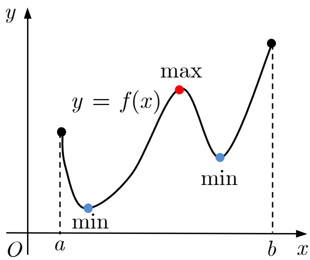


Рис. 7.18. Локальні екстремуми

Локальність екстремуму означає, що відповідна нерівність повинна виконуватись лише в деякому околі точки x_0, а не на всій області означення. Функція може мати декілька локальних екстремумів, але всі вони досягаються у внутрішніх точках області означення. Причому можливо, що локальний максимум буде меншим, ніж локальний мінімум.

2. Теорема 7.13 (необхідна умова локального екстремуму).

Якщо функція f у точці x_0 досягає локального екстремуму, то в цій точці виконано одну з умов:
1) $f'(x_0) = 0$;
2) $f'(x_0) = \infty$;
3) $\nexists f'(x_0)$.

Тобто, точка, у якій функція досягає локального екстремуму є критичною точкою 1-го порядку. Обернене твердження неправильне: не вся-ка критична точка 1-го порядку є точкою локального екстремуму.

3. Теорема 7.14 (перша достатня умова локального екстремуму).

Нехай x_0 — критична точка 1-го порядку функції f і функція f неперервна в деякому околі точки x_0. Якщо в цьому околі:

1) $f'(x) > 0$ для $x < x_0$, і $f'(x) < 0$ для $x > x_0$, то в точці x_0 функція f досягає максимуму;
2) $f'(x) < 0$, коли $x < x_0$, і $f'(x) > 0$, коли $x > x_0$, то функція f досягає в точці x_0 мінімуму (рис. 7.19);
3) похідна $f'(x)$ не змінює знак переходячи через x_0, то в точці x_0 функція f екстремуму не має.

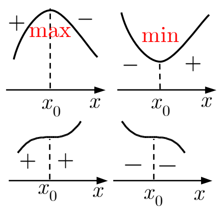


Рис. 7.19. Достатня умова локального екстремуму

Доведення. Нехай x_0 — точка можливого екстремуму, причому $f'(x) > 0$, коли $x \in U_\delta(x_0 - 0)$, та $f'(x) < 0$, коли $x \in U_\delta(x_0 + 0)$.

Тоді

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0\,\forall x \in U_\delta(x_0 - 0) \Rightarrow f(x_0) > f(x), \\ f'(x) < 0\,\forall x \in U_\delta(x_0 + 0) \Rightarrow f(x) < f(x_0), \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists U_\delta(x_0) : f(x_0) > f(x),$$

Тобто точка x_0 є точкою локального максимуму функції f.

Так само доводиться існування точки локального мінімуму.

Якщо $f'(x)$ зберігає знак в околі точки x_0, то в цьому околі функція монотонна, тобто точка x_0 не є точкою локального екстремуму.■

4. Приміром, для функції $f(x) = x^2$ точка $x = 0$ є критичною точкою 1-го порядку, оскільки $f'(0) = 2x\big|_{x=0} = 0$; похідна $f'(x) = 2x$ змінює знак «з мінуса на плюс». Отже, точка $x = 0$ є точкою локального мінімуму функції $f(x) = x^2$.

5. Умова неперервності функції f у самій точці істотна. Приміром, для функції (рис. 7.20)

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ x - 1, & x > 0 \end{cases}$$

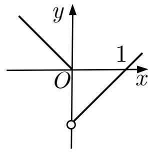


Рис. 7.20. Відсутність локального екстремуму

похідна $f'(x)$ існує в усіх точках, окрім точки $x = 0$. Переходячи через цю точку, похідна змінює знак, але в точці $x = 0$ функція екстремуму не має: не існує околу точки $x = 0$, у якій $f(0) = 1$ було б найбільшим або найменшим значенням функції f. Тут порушена умова неперервності функції f у точці $x = 0$.

6. **Теорема 7.15 (друга достатня умова локального екстремуму).**

Нехай функція f має в околі точки x_0 першу та другу похідні, причому $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$. Тоді:

1) якщо $f''(x_0) > 0$, то функція f має в точці x_0 локальний мінімум;

2) якщо $f''(x_0) < 0$, то функція f має в точці x_0 локальний максимум.

7. Приміром, для функції $f(x) = x^2$ точка $x = 0$ є критичною точкою 1-го порядку, оскільки $f'(0) = 2x\big|_{x=0} = 0$.

Оскільки $f''(x) = 2 > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, зокрема й в точці $x = 0$, то точка $x = 0$ є точкою локального мінімуму.

7.5.3. Найменше та найбільше значення функції

1. За Ваєрштрасовою теоремою 6.14 неперервна на відрізку $[a;b]$ функція досягає на цьому відрізку свого найменшого та найбільшого значення, які ще називають *глобальними екстремумами* функції на відрізку (рис. 7.21).

Ці значення функція може набувати або в точках локальних екстремумів в інтервалі $(a;b)$, або на межі при $x = a$ чи $x = b$.

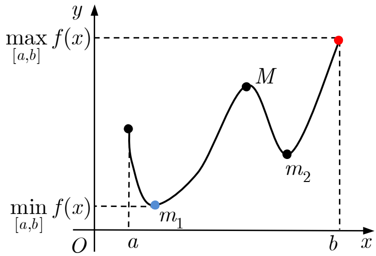


Рис. 7.21. Глобальні екстремуми функції

2. Приміром, функція $f(x) = x^2$ на відрізку $[-1;2]$ набуває свого найменшого значення в стаціонарній точці $x = 0$, а свого найбільшого значення на правому кінці відрізка — у точці $x = 2$:

$$\min_{x\in[-1;2]} f(x) = f(0) = 0;$$

$$\max_{x\in[-1;2]} f(x) = f(2) = 4.$$

7.5.4. Опуклість функцій і точки перегину

1. Розгляньмо функцію $f(x), x \in (a;b)$. Нехай x_1 та x_2 — дві різні точки інтервалу $(a;b)$. Через точки $A(x_1;f(x_1))$ та $B(x_2;f(x_2))$ графіка функції f проведімо хорду AB.

Означення 7.11 **(опуклості донизу і догори).**

Функцію f називають *опуклою донизу* в інтервалі $(a;b)$, якщо для будь-яких x_1 та x_2 з $(a;b)$, $a \le x_1 < x_2 \le b$, хорда AB $(A = f(x_1), B = f(x_2))$ лежить не нижче графіка цієї функції і позначають $f \cup$ (рис. 7.22).

Функцію f називають *опуклою догори* в інтервалі $(a;b)$, якщо для будь-яких x_1 та x_2 з $(a;b)$, $a \le x_1 < x_2 \le b$, хорда AB лежить не вище графіка цієї функції і позначають $f \cap$ (рис. 7.23).

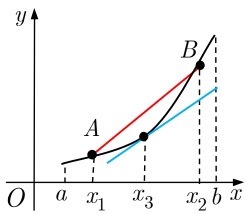


Рис. 7.22. Опукла донизу функція

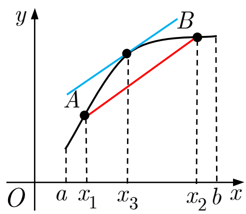


Рис. 7.23. Опукла догори функція

Неперервно диференційовна функція f опукла донизу (догори) в інтервалі $(a;b)$ тоді й лише тоді, коли всі точки $(x;f(x)), x \in (a;b)$, графіка функції лежать не нижче (не вище) дотичної, проведеної до нього в будь-якій точці $(x_3; f(x_3)), x_3 \in (a;b)$.

Теорема 7.16 (достатня умова опуклості функції).

Нехай функція $y = f(x)$ в інтервалі $(a;b)$ двічі неперервно диференційовна. Тоді:

1) якщо $f''(x) > 0 \, \forall x \in (a;b)$, то ця функція в інтервалі $(a;b)$ опукла донизу;

2) якщо $f''(x) < 0 \, \forall x \in (a;b)$, то ця функція в інтервалі $(a;b)$ опукла догори.

2. Нехай функція f неперервна в деякому околі точки x_0 й існує $f'(x_0)$ (скінченна, $+\infty$ або $-\infty$).

Означення 7.12 (точки перегину).

Точку x_0 називають *точкою перегину* функції f, якщо вона відокремлює інтервал опуклості догори функції f від інтервалу опуклості донизу. Тоді точку $M_0(x_0; f(x_0))$ називають *точкою перегину графіка* функції $y = f(x)$. (рис. 7.24).

Отже, під час переходу аргументу x через точку перегину x_0, напрям опуклості функції змінюється на протилежний.

Інтервали опуклості функції можуть відокремлюватись один від одного або точками, де друга похідна дорівнює нулю, або точками, де друга похідна дорівнює нескінченності, або точками, де друга похідна не існує.

Означення 7.13 (критичної точки 2-го порядку).

Нехай функція f означена в околі точки x_0. Точку x_0 називають *критичною точкою 2-го порядку* функції f, якщо виконано одну з умов:

1) $f''(x_0) = 0$;

2) $f''(x_0) = \infty$;

3) $\nexists f''(x_0)$.

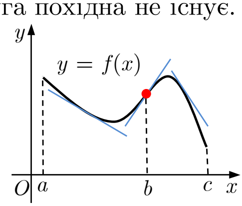


Рис. 7.24. Точка перегину

Теорема 7.17 (необхідна умова точки перегину).

Якщо x_0 є точкою перегину функції f, то в цій точці виконано одну з умов:

1) $f''(x_0) = 0$;
2) $f''(x_0) = \infty$;
3) $\nexists f''(x_0)$.

Ця умова не є достатньою. Приміром, для функції
$$y = x^4, y''(0) = 12x^2 \mid_{x=0} = 0,$$
але $x = 0$ не є точкою перегину.

Теорема 7.18 (достатня умова точки перегину).

Якщо для функції f точка x_0 є критичною точкою 2-го порядку, і, переходячи через цю точку, друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка x_0 є точкою перегину функції f.

3. Приміром, для функції $f(x) = x^3$ точка $x = 0$ є критичною точкою 2-го порядку, оскільки $f''(0) = 6x\big|_{x=0} = 0$; похідна $f''(x) = 6x$ змінює знак. Отже, точка $x = 0$ є точкою перегину функції $f(x) = x^3$.

7.5.5. Асимптоти графіка функції

1. Розгляньмо криву L з нескінченною гілкою.

Означення 7.14 (асимптоти).

Асимптотою кривої L називають таку пряму, що віддаль d від точки M кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка M віддаляється вздовж нескінченної гілки кривої від початку координат (рис. 7.25).

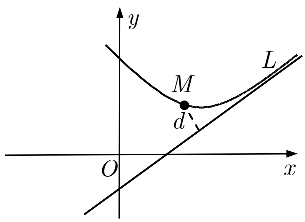


Рис. 7.25. Асимптота кривої

2. Пряма $x = x_0$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо
$$\boxed{\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \pm\infty} \text{ або } \boxed{\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \pm\infty.}$$

Справді, при цьому віддаль

$$d = \left| x - x_0 \right|$$

від точки $M(x; f(x_0))$ графіка функції $y = f(x)$ до прямої $x = x_0$ прямує до нуля і точка M необмежено віддаляється від початку координат (рис. 7.26).

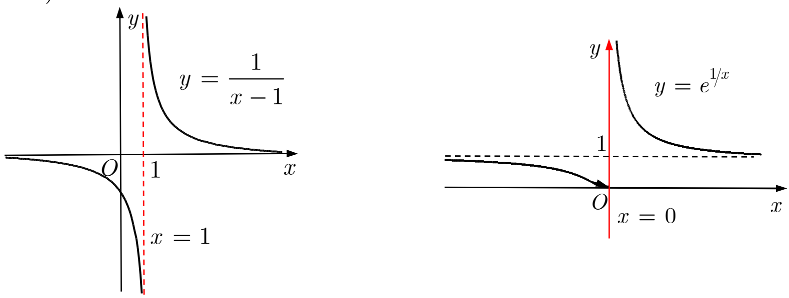


Рис. 7.26. Приклади вертикальних асимптот

3. Розгляньмо функцію f задану в околі $U_\varepsilon(+\infty)$ (випадок $-\infty$ розглядають так само). Нехай пряма $y = kx + b$ є асимптотою графіка функції $y = f(x)$ (її називають *похилою*, а в разі $k = 0$ — *горизонтальною асимптотою*) (рис. 7.27).

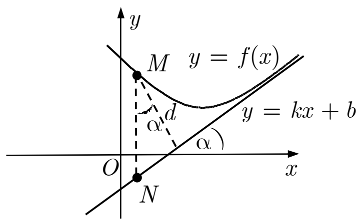


Рис. 7.27. Похила асимптота

Те, що пряма $y = kx + b$ є асимптотою кривої $y = f(x)$, коли $x \to +\infty$, означає, що віддаль d від точки $M(x; f(x))$ кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли $x \to +\infty$. З рисунку бачимо, що

$$d = \left| MN \right| \left| \cos\alpha \right|,$$

де $N(x; kx + b)$. Оскільки $\cos\alpha \neq 0$, прямування до нуля d, коли $x \to +\infty$, тягне за собою прямування до нуля

$$\left| MN \right| = \left| f(x) - kx - b \right|,$$

і навпаки.

Отже, пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$ тоді й лише тоді, коли

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (kx + b) \right) = 0.}$$

Існування асимптоти графіка функції означає, що, коли $x \to +\infty$ функція поводить себе «майже як лінійна функція».

Теорема 7.19 (критерій існування похилої асимптоти). Графік функції $y = f(x)$ має похилу асимптоту $y = kx + b$, тоді й лише тоді, коли існують скінченні границі:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$

4. Приміром, знайдімо асимптоти для функції $y = x - \dfrac{1}{x}$.

$$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Оскільки,

$$\lim_{x\to -0} \left(x - \frac{1}{x} \right) = +\infty, \quad \lim_{x\to +0} \left(x - \frac{1}{x} \right) = -\infty,$$

то пряма $x = 0$ — двобічна вертикальна асимптота графіка функції.

Оскільки,

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x} = 1, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x \right) = 0,$$

то пряма $y = x$ є двобічною похилою асимптотою графіка функції.

7.5.6. Схема повного дослідження функції

Досліджують двічі диференційовну функцію $y = f(x)$ на $D(f)$ (за винятком, можливо, скінченої множини точок) і будують її графік за такою схемою:

1) знаходять область означення функції f — множину $D(f)$;

2) установлюють можливі симетрії графіка функції f;

3) визначають можливі точки розриву функції f і асимптоти її графіка;

4) за допомогою першої похідної функції f визначають інтервали монотонності й точки локального екстремуму функції;

5) за допомогою другої похідної функції f визначають інтервали опуклості й точки перегину функції;

6) знаходять можливі точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з осями координат;

7) будують графік функції $y = f(x)$ за встановленою інформацією.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

7.1.1. Виходячи із графіка функції, укажіть точки, у яких функція не має похідної, має нескінченну похідну чи розривна.

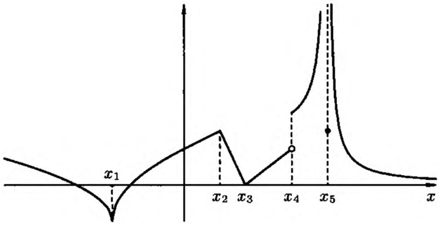


Рис. до 7.1.1.1)

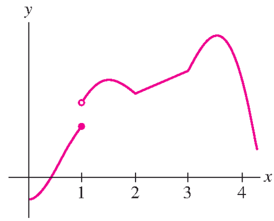


Рис. до 7.1.1.2)

7.1.2. Побудуйте приклад функції, неперервної на всій дійсній прямій, яка має похідну скрізь, крім точок 1 та 2.

7.1.3. Припускаючи диференційовність функції, доведіть, що:

1) похідна парної функції — непарна функція;

2) похідна непарної функції — парна функція;

3) похідна T-періодичної функції — T-періодична функція.

7.1.4. Чи правильно, що якщо функція f має похідну в точці x_0, а функція g — не має, то функція $f(x)g(x)$ також не має похідної в точці x_0?

7.1.5. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $x = -3$. Чому дорівнюють $f(-3)$ та $f'(-3)$?

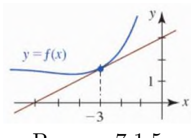


Рис. до 7.1.5

7.1.6. За поданим графіком $y = f(x)$ зобразьте графік f'.

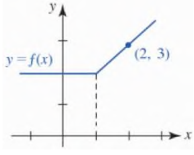


Рис. до 7.1.6.1)

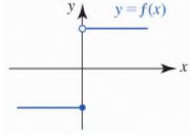


Рис. до 7.1.6.2)

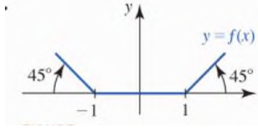


Рис. до 7.1.6.3)

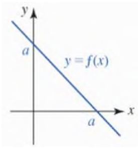


Рис. до 7.1.6.4)

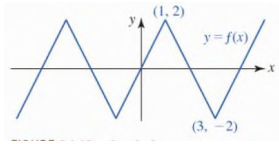


Рис. до 7.1.6.5)

7.1.7. Увідповідніть графік f (а, б, в, г) і графік f' (1, 2, 3). Якому графіку похідної відповідає 2 графіка функції?

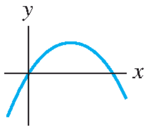


Рис. до 7.1.7.а)

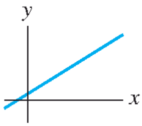


Рис. до 7.1.7.б)

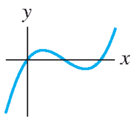


Рис. до 7.1.7.в)

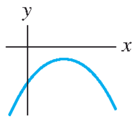


Рис. до 7.1.7.г)

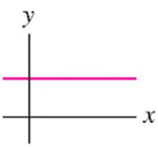


Рис. до 7.1.7.1)

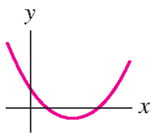


Рис. до 7.1.7.2)

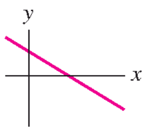


Рис. до 7.1.7.3)

7.1.8. Визначте, який із графіків $y = f(x)$ та $y = g(x)$ є графіком функції, а який її похідної.

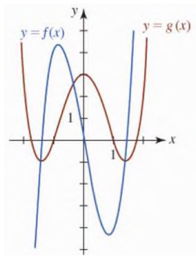


Рис. до 7.1.8

7.1.9. Увідповідніть графік f і графік f'.

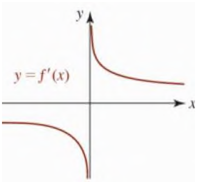


Рис. до 7.1.9.а)

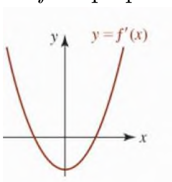


Рис. до 7.1.9.б)

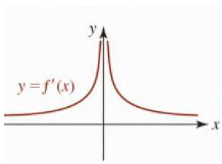


Рис. до 7.1.9.в)

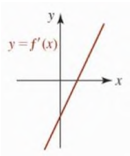


Рис. до 7.1.9.г)

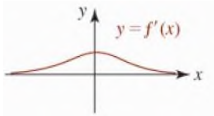


Рис. до 7.1.9.ґ)

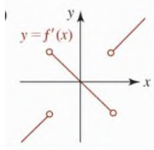


Рис. до 7.1.9.д)

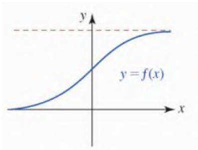


Рис. до 7.1.9.1)

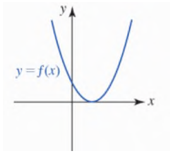


Рис. до 7.1.9.2)

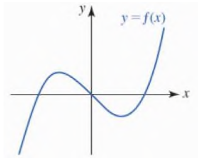


Рис. до 7.1.9.3)

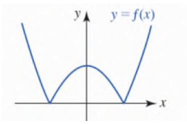


Рис. до 7.1.9.4)

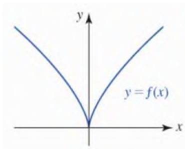


Рис. до 7.1.9.5)

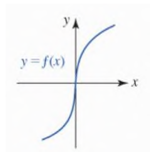


Рис. до 7.1.9.6)

7.1.10. Визначте, де зображено графік функції f, g та h, так, щоб $f'(x) = g(x)$ та $g'(x) = h(x)$.

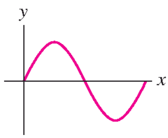


Рис. до 7.1.10.1)

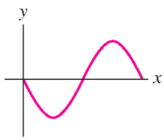


Рис. до 7.1.10.2)

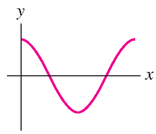


Рис. до 7.1.10.3)

7.1.11. Знайдіть такі значення сталих A та B, для яких функція

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le a, \\ Ax + B, & x > a \end{cases}$$

є неперервною й диференційовною.

7.1.12. Функції f та g задано графічно. Нехай $F(x) = g(f(x))$ та $G(x) = f(g(x))$. Знайдіть $F'(1), G'(-1)$ та $F'(2)$. Якщо похідна не існує, поясніть чому.

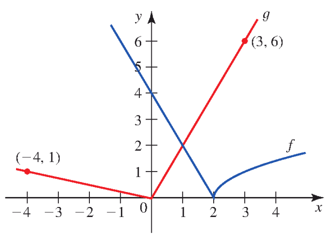


Рис. до 7.1.12

7.2.1. Випишіть окремі випадки (для $n = 2$ та $n = 3$) формули Лейбніца $(uv)''$ та $(uv)'''$.

7.2.2. Знайдіть усі значення $n \in \mathbb{N}$ такі, що:

1) $(\sin x)^{(n)} = \sin x$; 2) $(\sin x)^{(n)} = \cos x$;

3) $(\cos x)^{(n)} = \cos x$; 4) $(\cos x)^{(n)} = \sin x$.

7.2.3. На рис. зображено графік f''. Визначте, на якому з рисунків а) та б) зображено f та f'.

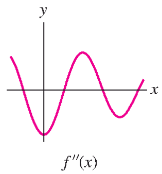


Рис. до 7.2.3

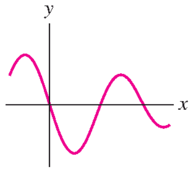


Рис. до 7.2.3.а)

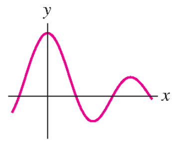


Рис. до 7.2.3.б)

7.2.4. З'ясуйте, на якому з рисунків зображено f, f' та f''.

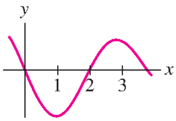


Рис. до 7.2.4.1)

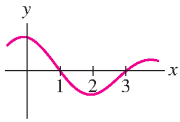


Рис. до 7.2.4.2)

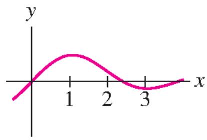


Рис. до 7.2.4.3)

7.2.5. Для многочлена $P(x) = (x + x^5 + x^7)^{10}(1 + x^2)^{11}(x^3 + x^5 + x^7)$ знайдіть: 1) $P^{(99)}(x)$; 2) $P^{(100)}(x)$.

7.3.1. Поясніть, чому для функцій, зображених на рисунку, не виконано теорему Роля?

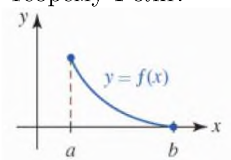


Рис. до 7.3.1.1)

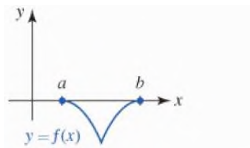


Рис. до 7.3.1.2)

7.3.2. Яку найбільшу кількість дійсних коренів може мати рівняння $x^7 + 8x + 13 = 0$?

7.3.3. Нехай x_1 та x_2 — корені многочлена $P(x)$. Доведіть, що у многочлена $P'(x)$ знайдеться корінь, що лежить між x_1 та x_2.

7.3.4. Покажіть, що рівняння $ax^3 + bx + c = 0, a > 0, b > 0$, не може мати двох дійсних коренів.

7.3.5. Поясніть, чому для функцій, зображених на рисунку, не виконано теорему Лаґранжа?

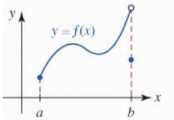


Рис. до 7.3.5.1)

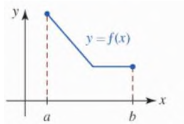


Рис. до 7.3.5.2)

7.3.6. Знайдіть точку, у якій дотична до кривої $y = x^2 - 4x$ паралельна хорді, що з'єднує точки $A(1;-3)$ та $B(5;5)$ на цій кривій.

7.3.7. Використовуючи теорему Лаґранжа доведіть нерівність $e^x > 1 + x$ для $x \in \mathbb{R}$.

7.4.1. Запишіть Тейлорову формулу для тричі неперервно диференційовної функції $f(x)$ в околі $U(x_0)$ точки x_0 із залишковим членом у формі: 1) Пеано; 2) Лаґранжа.

7.4.2. Покажіть, що $x = a$ є кратний корінь функції f тоді й лише тоді, коли $f(a) = f'(a) = 0$.

7.4.3. На графіку зображне многочлен з коренями A, B та C. Які з цих коренів є кратними?

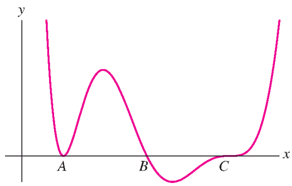


Рис. до 7.4.3

7.5.1. Функцію f задано графічно на відрізку $[0;9]$.

1. Знайдіть $f'(x)$ для $x = 1, 3, 4, 7$.

Визначте для яких значень x:

2) $f'(x) < 0$;

3) $f'(x) = 0$;

4) $f'(x) > 0$.

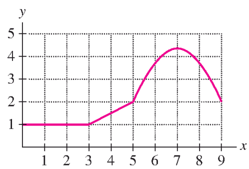


Рис. до 7.5.1

7.5.2. На рисунку зображено неперервну функцію на відрізку $[a;b]$ з критичними точками 1-го порядку $c_1, c_2, \dots, c_{10}$.

Знайдіть:

1) критичні точки, у яких $f'(x) = 0$;

2) критичні точки, у яких не існує $f'(x)$;

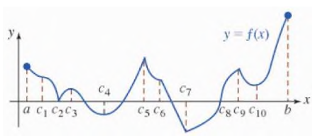


Рис. до 7.5.2

3) точки, у яких функція має локальний мінімум;

4) точки, у яких функція має локальний максимум;

5) точки, у яких функція має глобальний мінімум;

6) точки, у яких функція має глобальний максимум.

7.5.3. Чи правильне таке твердження: якщо функція означена на певному проміжку і не має на ньому точок екстремуму, то вона монотонна на цьому проміжку?

7.5.4. Зобразьте графік неперервної функції f, яка не має глобальних екстремумів, але має локальний максимум і локальний мінімум з однаковими значеннями.

7.5.5. Дайте приклад неперервної функції, означеної на відрізку $[a;b]$, для якої глобальний мінімум збігається з глобальним максимумом.

7.5.6. Нехай f є неперервною парною функцією і $f(a)$ є локальним мінімумом функції. Що можна сказати про $f(-a)$?

7.5.7. Нехай f є неперервною непарною функцією і $f(a)$ є локальним максимом функції. Що можна сказати про $f(-a)$?

7.5.8. Нехай f є диференційовною функцією, яка має єдину критичну точку 1-го порядку $x = x_0$. Якщо $k \neq 0$, знайдіть критичну точку функції:

1) $f(x) + k$; 2) $kf(x)$; 3) $f(x+k)$; 4) $f(kx)$.

7.5.9. Зобразіть графік функції f, яка відповідає зображеному графіку f'.

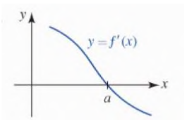


Рис. до 7.5.9.1)

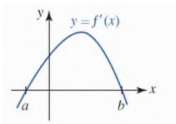


Рис. до 7.5.9.2)

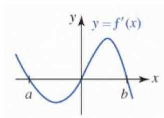


Рис. до 7.5.9.3)

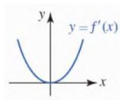


Рис. до 7.5.9.4)

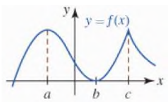


Рис. до 7.5.9.5)

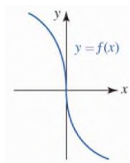


Рис. до 7.5.9.6)

7.5.10. Визначте екстремуми функції $y = f(x)$.

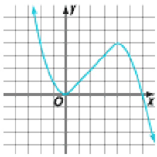


Рис. до 7.5.10.1)

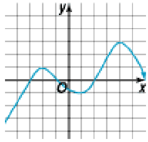


Рис. до 7.5.10.2)

7.5.11. На якому з рисунків точка екстремуму x_0 є стаціонарною точкою?

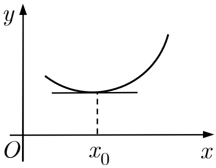


Рис. 1 до 7.5.11

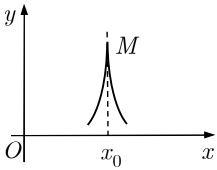


Рис. 2 до 7.5.11

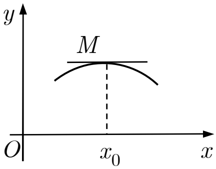


Рис. 3 до 7.5.11

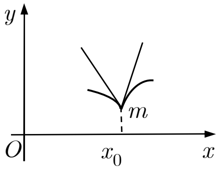


Рис. 4 до 7.5.11

7.5.12. Наведіть приклад диференційовної функції, що мають екстремуми лише в точках $x = 0, x = \pm 1, x = \pm 2, \ldots$.

7.5.13. Знайдіть значення a, b та c такі, що $f(x) = ax^2 + bx + c$ має локальний максимум 6 у точці $x = 2$ і перетинає вісь Oy у точці $(0;4)$.

7.5.14. Знайдіть значення a, b, c та d такі, що $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ має локальний мінімум -3 у точці $x = 0$ і локальний максимум 4 у точці $x = 1$.

7.5.15. Функцію f задано графічно.

1. Скільки критичних точок 1-го порядку має функція f на відрізку $[0;8]$?

2. Яке найбільше значення функції f на відрізку $[0;8]$?

3. Яке найменше значення функції f на відрізку $[0;8]$?

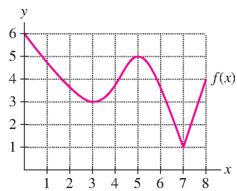


Рис. до 7.5.15

4. Який локальний максимум функції f?

5. Які локальні мінімуми функції f?

6. Знайдіть відрізок на якому найбільше та найменше значення функції f досягаються у критичних точках.

7. Знайдіть відрізок, у якому найменше значення досягається на кінцях відрізка.

7.5.16. За графіком f' знайдіть критичні точки 1-го порядку функції f і визначте чи є вони точками локального мінімуму (максимуму), чи ні.

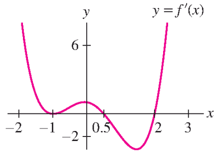


Рис. до 7.5.16

7.5.17. Функцію f задано графічно на вказаному відрізку. Знайдіть найбільше та найменше значення функції (якщо вони існують) і точки, у яких вони досягаються.

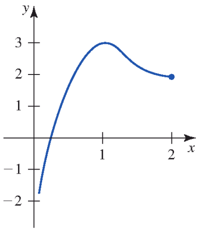


Рис. до 7.5.17.1)

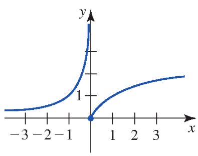


Рис. до 7.5.17.2)

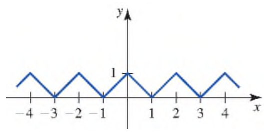


Рис. до 7.5.17.3)

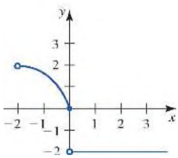


Рис. до 7.5.17.4)

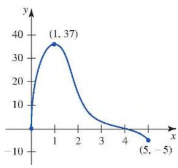


Рис. до 7.5.17.5)

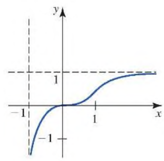


Рис. до 7.5.17.6)

7.5.18. Знайдіть значення a,b та c такі, що графік функції $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ проходить через точку $(-1;0)$ і має точку перегину $(1;1)$.

7.5.19. Знайдіть значення a,b та c такі, що графік функції $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ має горизонтальну дотичну в точці перегину $(1;1)$.

7.5.20. Укажіть інтервали, у яких f зростає (спадає).

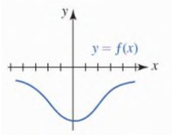


Рис. до 7.5.20.1)

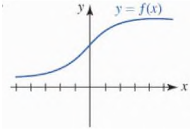


Рис. до 7.5.20.2)

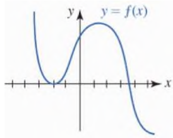


Рис. до 7.5.20.3)

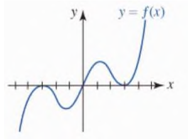


Рис. до 7.5.20.4)

7.5.21. Увідповідніть характеристику і фрагмент графіка функції.

1) $f''(x) < 0$ для всіх x; 2) $f''(x)$ змінює знак з $+$ на $-$;

3) $f''(x) > 0$ для всіх x; 4) $f''(x)$ змінює знак з $-$ на $+$.


Рис. до 7.5.21.а)


Рис. до 7.5.21.б)


Рис. до 7.5.21.в)


Рис. до 7.5.21.г)

7.5.22. Охарактеризуйте графіки функції одним або кількома твердженнями:

а) f має додатну першу похідну;

б) f має від'ємну другу похідну;

в) графік функції f має точку перегину;

г) f диференційовна;

ґ) f має локальний екстремум;

д) кутові коефіцієнти дотичних зростають зі зростанням x.

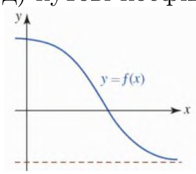


Рис. до 7.5.22.1)

Рис. до 7.5.22.2)

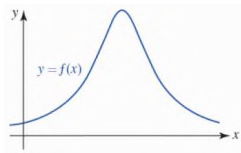


Рис. до 7.5.22.3)

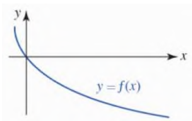


Рис. до 7.5.22.4)

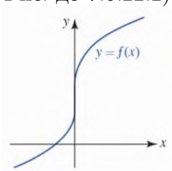


Рис. до 7.5.22.5)

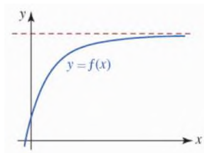


Рис. до 7.5.22.6)

7.5.23. Функцію f задано графічно. Визначте проміжки опуклості функції f і точки перегину графіка функції f.

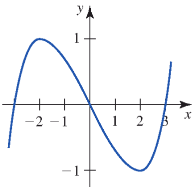


Рис. до 7.5.23.1)

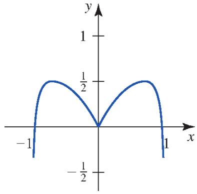


Рис. до 7.5.23.2)

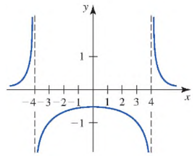


Рис. до 7.5.23.3)

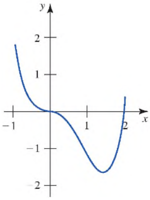


Рис. до 7.5.23.4)

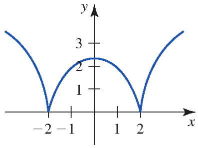


Рис. до 7.5.23.5)

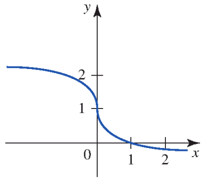


Рис. до 7.5.23.6)

7.5.24. Увідповідніть характеристику з графіком функції:

а) $f'(0)$ невизначена;

б) f спадає в $(-\infty;0)$;

в) графік функції f опуклий догори в інтервалі $(0;3)$;

г) графік функції має точку перегину $x=3$.

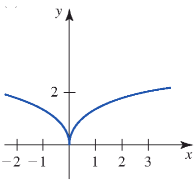


Рис. до 7.5.24.1)

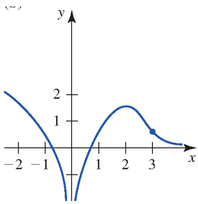


Рис. до 7.5.24.2)

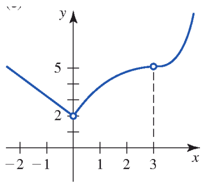


Рис. до 7.5.24.3)

7.5.25. Увідповідніть характеристику з графіком функції:

а) f спадає в $(-\infty;2)$ і зростає в $(2;+\infty)$;

б) графік функції опуклий донизу в $(1;+\infty)$;

в) графік функції f має точки перегину в $x=0$ та $x=1$.

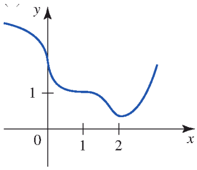


Рис. до 7.5.25.1)

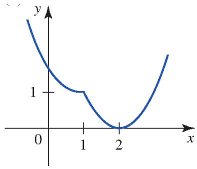


Рис. до 7.5.25.2)

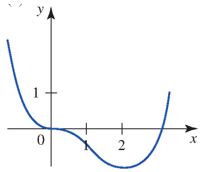


Рис. до 7.5.25.3)

7.5.26. Для функції f, заданої графічно, укажіть комбінацію знаків f' та f'' на кожному інтервалі A—G.

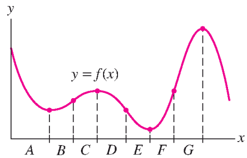


Рис. до 7.5.26

7.5.27. Для функції f, заданої графічно, укажіть зміну знаків f' чи f'' у кожній точці A—G.

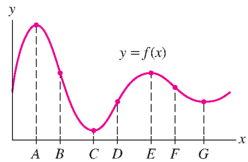


Рис. до 7.5.27

7.5.28. Опишіть за допомогою значень похідних $f'(x)$ та $f''(x)$ графік функції $y = f(x)$ для:

1) $x < -1$;
2) $x = -1$;
3) $-1 < x < 1$;
4) $x = 1$;
5) $1 < x < 3$;
6) $x = 3$;
7) $x > 3$.

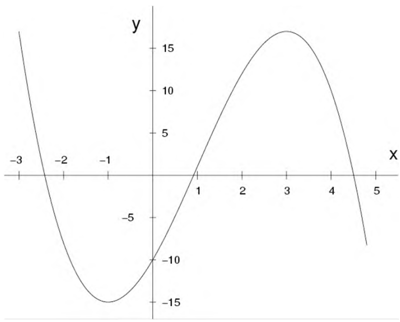


Рис. до 7.5.28

7.5.29. Опишіть за допомогою значень похідних $f'(x)$ та $f''(x)$ графік функції $y = f(x)$ для:

1) $x < 1$;
2) $x = 1$;
3) $1 < x < 3$;
4) $x = 3$;
5) $3 < x < 5$;
6) $x = 5$;
7) $5 < x < 6$;
8) $x = 6$;
9) $6 < x < 7$;
10) $x = 7$;
11) $x > 7$.

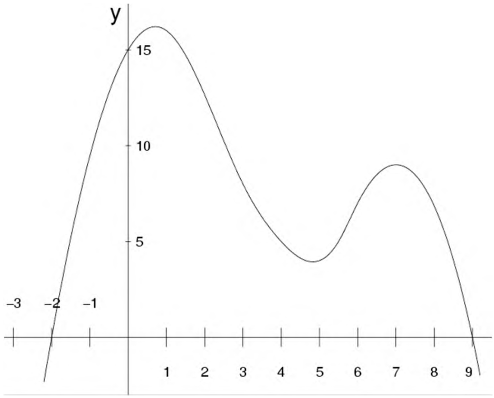


Рис. до 7.5.29

7.5.30. Для функції задано графічно, укажіть точки, у яких вона:

1) досягає локального максимуму;
2) локального мінімуму;
3) $f'(x) > 0$;
4) $f''(x) < 0$;
5) має перегин;
6) досягає найбільшого значення;
7) досягає найменшого значення.

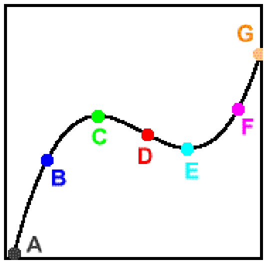


Рис. до 7.5.30

7.5.31. Укажіть, які асимптоти має графік функції.

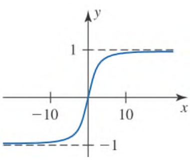


Рис. до 7.5.31.1)

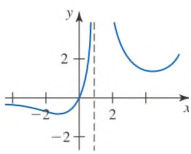


Рис. до 7.5.31.2)

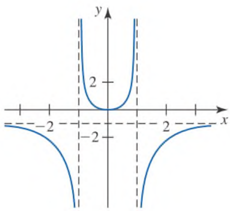


Рис. до 7.5.31.3)

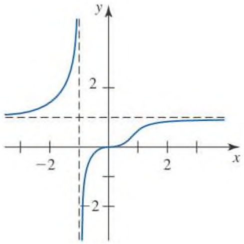


Рис. до 7.5.31.4)

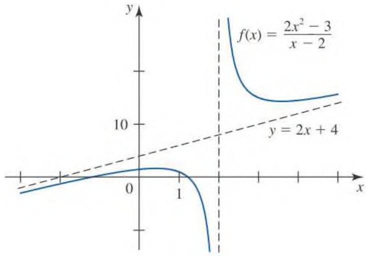


Рис. до 7.5.31.5)

7.5.32. Зобразьте графіки функції f із заданими властивостями:

1) $f(-1)=0, f(0)=1$, $f'(3)$ не існує, $f'(5)=0$, $f'(x)>0$ для $x<3$ та $x>5$, $f'(x)<0$ для $x\in(3;5)$;

2) $f(0)=0$, $f'(0)=f'(1)=0$, $f'(x)>0$ для $x\in(0;1)$ та $x>1$, $f'(x)<0$ для $x<-1$ та $x\in(-1;0)$;

3) $f(-x)=f(x)$, $f(2)=3$, $f'(x)>0$ для $x>2$, $f'(x)<0$ для $x\in(0;2)$;

4) $f(-2)=0, f(4)=0, f'(3)=0, f''(1)=f''(2)=0$, $f''(x)<0$ для $x<1$ та $x>2$, $f''(x)>0$ для $x\in(1;2)$;

5) $f(0)=5, f(2)=0, f'(2)=0$, $f''(3)$ не існує, $f''(x)>0$ для $x<3$, $f''(x)<0$ для $x>3$;

6) $f(-x)=-f(x)$, вертикальна асимптота $x=2$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, $f''(x)<0$ для $x\in(0;2)$, $f''(x)>0$ для $x>2$.

Відповіді

7.1.1. 1) не має похідної в точках x_2, x_3, має нескінченну похідну в точці x_1, розривна в точках x_4, x_5; 2) не має похідної в точках $x=2, x=3$, має розрив у точці $x=1$.

7.1.2. $f(x)=\left|x-1\right|+\left|x-2\right|$.

7.1.4. Ні. Приміром $f(x)=x, g(x)=\left|x\right|$.

7.1.5. $\frac{x}{-6}+\frac{y}{3}=1, f(-3)=\frac{3}{2}, f'(-3)=-\frac{1}{2}$.

7.1.7. 1-б, 2-в, 3-а, 3-г.

7.1.8. $y=g(x)$ — графік функції, $y=f(x)$ графік похідної.

7.1.9. 1-г, 2-г, 3-б, 4-д, 5-а, 6-в.

7.1.10. 1) $y=h(x)$, 2) $y=f(x)$, 3) $y=g(x)$.

7.1.11. $A=2a, B=-a^2$.

7.1.12. $F'(1) = -4$, $G'(-1) = -\dfrac{1}{2}$, $F'(2)$ не існує, оскільки не існують $g'(f(2)) = g'(0)$ та $f'(2)$.

7.2.2. 1) $n = 4k, k \in \mathbb{Z}$; 2) $n = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}$; 3) $n = 4k, k \in \mathbb{Z}$; 4) $n = 4k + 3, k \in \mathbb{Z}$.

7.2.3. а) $f'(x)$; б) $f(x)$.

7.2.4. 1) $f''(x)$; 2) $f'(x)$; 3) $f(x)$.

7.2.5. 1) $99!$; 2) 0.

7.3.1. 1) $f(a) \neq f(b)$; 2) f не є диференційовною в $(a;b)$. **7.3.2.** 1.

7.3.5. 1) функція f не є неперервною на $[a;b]$;

2) функція f не є диференційовною в $(a;b)$.

7.3.6. $x = 3$.

7.4.1. 1) $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^2 + \\ +o((x - x_0)^3)$$

2) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dfrac{f'''(c)}{3!}(x - x_0)^2$

7.4.3. A та C.

7.5.1. 1) $f(1) = 0$, $f(3)$ не існує, $f(4) = \dfrac{1}{2}$, $f(7) = 0$;

2) $x \in (7;9)$; 3) $x \in (0;3)$ та $x = 7$; 4) $x \in (3;5) \cup (5;7)$.

7.5.2. 1) $x = c_3, x = c_4, x = c_{10}$; 2) $x = c_2, x = c_5, x = c_6, x = c_7, x = c_9$;

3) $x = c_2, x = c_4, x = c_7, x = c_{10}$; 4) $x = c_3, x = c_5, x = c_9$; 5) $x = c_7$; 6) $x = b$.

7.5.5. $f(x) = \mathrm{const}, x \in [a;b]$.

7.5.6. $f(-a)$ є локальним мінімумом. **7.5.7.** $f(-a)$ є локальним мінімумом.

7.5.8. 1) $x = x_0$; 2) $x = x_0$; 3) $x = x_0 - k$; 4) $x = \dfrac{x_0}{k}$.

7.5.10. 1) точка мінімуму $x = 0$ та точка максимуму $x = 4$;

2) точка мінімуму $x = 1$ та точки максимуму $x = -2, x = 4$.

7.5.11. 1) та 3).

7.5.12. $f(x) = \cos \pi x$.

7.5.13. $a = -\dfrac{1}{2}, b = 2, c = 4$. **7.5.14.** $a = -14, b = 21, c = 0, d = -3$.

7.5.15. 1) 3; 2) $\max\limits_{x \in [0;8]} f(x) = f(0) = 6$; 3) $\min\limits_{x \in [0;8]} f(x) = f(7) = 1$; 4) $f_{\max}(5) = 5$;

5) $f_{\min}(3) = 3, f_{\min}(7) = 1$; 6) $[1;8]$; 7) $[0;7]$ або $[7;8]$.

7.5.16. $x = -1$ не є точкою екстремуму; $x = \dfrac{1}{2}$ є точкою локального максимуму; $x = 2$ є точкою локального мінімуму.

7.5.17. 1) $\max f(x) = f(1) = 3$; 2) $\min f(x) = f(0) = 0$;

3) $\max f(x) = f(2k) = 1, \min f(x) = f(2k-1) = 0, k \in \mathbb{Z}$;

4) $\min f(x) = f((0;+\infty)) = -2$;

5) $\max f(x) = f(1) = 37, \min f(x) = f(5) = -5$;

6) найбільше та найменше значення не існують.

7.5.18. $a = -\dfrac{1}{6}, b = \dfrac{1}{2}, c = \dfrac{2}{3}$.

7.5.19. $a = 1, b = -3, c = 3$.

7.5.20. 1) $f(x) \searrow: (-\infty;0), f(x) \nearrow: (0;+\infty)$; 2) $f(x) \nearrow: (-\infty;+\infty)$;

3) $f(x) \searrow: (-\infty;-2),(2;+\infty), f(x) \nearrow: (-2;2)$;

4) $f(x) \searrow: (-3;-1),(1;3), f(x) \nearrow: (-\infty;-3),(-1;1),(3;+\infty)$.

7.5.21. 1-в, 2-а, 3-б, 4-г.

7.5.22. 1) в), г); 2) г), ґ), д); 3) г), ґ); 4) б), г), д); 5) а); 6) а), б), г).

7.5.23. 1) $f\cap : (-\infty;0), f\cup : (0;+\infty), x = 0$ 2) $f\cap : (-\infty;0),(0;+\infty)$;

3) $f\cap : (-4;4), f\cup : (-\infty;-4),(4+\infty)$; 4) $f\cap : (0;1), f\cup : (-\infty;0),(1;+\infty), x = 0$;

5) $f\cap : (-\infty;-2),(-2;2),(2;+\infty)$; 6) $f\cap : (-\infty;0), f\cup : (0;+\infty), x = 0$.

7.5.24. 1) б), в); 2) а), б), в), г); 3) а), б), в).

7.5.25. 1) а), в); 2) а), б); 3) а), б), в).

7.5.26. а) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$; б) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$; в) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$;

г) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$; ґ) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$; д)) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$;

е) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$.

7.5.27. а) $f'(x) + -$; б) $f''(x) - +$; в) $f'(x) - +$; г) $f''(x) + -$; ґ) $f'(x) + -$; д) $f''(x) - +$;

е) $f'(x) - +$.

7.5.28. 1) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$; 2) $f'(x) = 0, f''(x) > 0$; 3) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$;

4) $f'(x) > 0, f''(x) = 0$; 5) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$; 6) $f'(x) = 0, f''(x) < 0$;

7) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$.

7.5.29. 1) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$; 2) $f'(x) = 0, f''(x) < 0$; 3) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$;

4) $f'(x) < 0, f''(x) = 0$ 5) $f'(x), f''(x) > 0$; 6) $f'(x) = 0, f''(x) > 0$; 7) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$;

8) $f'(x) > 0, f''(x) = 0$; 9) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$; 10) $f'(x) = 0, f''(x) < 0$;

11) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$.

7.5.30. 1) C; 2) E; 3) A, B, F; 4) B, C; 5) D; 6) G; 7) A.

7.5.31. 1) $y = -1$ — ліва горизонтальна асимптота, $y = 1$ — права горизонтальна асимптота;

2) $x = 1$ — двобічна вертикальна асимптота, $y = 0$ — ліва горизонтальна асимптота;

3) $x = \pm 1$ — двобічні вертикальні асимптоти, $y = -1$ — двобічна горизонтальна асимптота;

4) $x = -1$ — двобічна вертикальна асимптота, $y = 1$ — двобічна горизонтальна асимптота;

5) $x = 2$ — двобічна вертикальна асимптота, $y = 2x + 4$ — двобічна похила асимптота.

Формули, твердження, алгоритми

7.1. Похідна й диференціал функції

❶ ***Похідна функції в точці.*** *Похідною* функції f *у точці* x_0 називають границю відношення приросту функції до приросту	аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля і позначають $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$
Позначення похідної функції $y = f(x)$	$y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$
❷ ***Лівобічна похідна.*** *Лівобічною похідною* функції f *у точці* x_0 називають $$f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$	❸ ***Правобічна похідна.*** *Правобічною похідною* функції f *у точці* x_0 називають $$f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
❹ ***Критерій існування похідної.*** Функція f, має скінченну похідну $f'(x_0)$ тоді й лише тоді, коли існують скінченні й рівні між собою однобічні	похідні $f'(x_0 - 0)$ та $f'(x_0 + 0)$, причому: $$f'(x_0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0).$$
❺ ***Функція, диференційовна в точці.*** Функцію f називають *диференційовною в точці* x_0, якщо її приріст у цій точці $$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$	можна зобразити як $$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$ де $A = A(x_0)$ стала щодо Δx, $\alpha(\Delta x)$ — н. м. ф., коли $\Delta x \to 0$.
❻ ***Критерій диференційовності.*** Функція f диференційовна в точці x_0 тоді й лише тоді, коли в точці x_0 існує скінченна похідна $f'(x_0) = A$.	❼ ***Необхідна умова диференційовності.*** Якщо функція диференційовна в деякій точці, то вона й неперервна в цій точці.
❽ ***Диференціал функції.*** Головну, лінійну щодо Δx, частину приросту функції f називають *диференціалом функції* f в точці x_0 і позначають	$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$
❾ Формула обчислення ***диференціала***	$$df(x) = f'(x)dx$$

7.2. Правила диференціювання

❶ $(Cu)' = Cu', C = \text{const}$	❷ $(u \pm v)' = u' \pm v'$
❸ $(uv)' = u'v + uv'$	❹ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
❺ $\left(f(u)\right)'_x = f'_u \cdot u'_x$	❻ $y = f(x) \Rightarrow y' = f(x)(\ln f(x))'$
❼ ***Похідна оберненої функції***	$y'_x = \frac{1}{x'_y}$
❽ ***Похідна параметрично заданої функції*** $y(x) : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in T \end{cases}$	$y'(x) : \begin{cases} x = x(t), \\ y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}, t \in T \end{cases}$

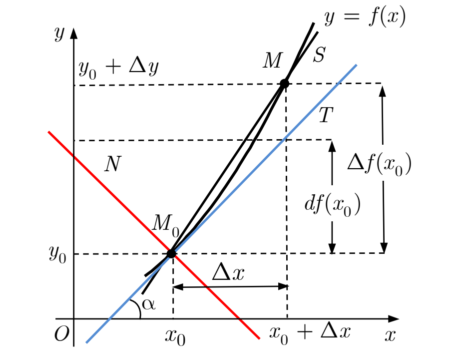
7.3. Формули диференціювання

$u = u(x)$ (якщо $u(x) = x$, то $u' = x' = 1$)	
❶ $(C)' = 0, C = \text{const}$	❷ $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$
❸ $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u', a > 0$	❹ $(e^u)' = e^u u'$
❺ $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u', a > 0, a \neq 1$	❻ $(\ln u)' = \frac{1}{u} u'$
❼ $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	❽ $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
❾ $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} u'$	❿ $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$
⓫ $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} u'$	⓬ $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} u'$
⓭ $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1 + u^2} u'$	⓮ $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1 + u^2} u'$
⓯ $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$	⓰ $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$
⓱ $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} u'$	⓲ $(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} u'$

7.4. Формули для похідних вищих порядків

❶ ***Похідні вищих порядків***	$f''(x) = (f'(x))'$, $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))', n \in \mathbb{N}$
Позначення	$y'', y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n)}, \ldots;$ $f''(x), f'''(x), \ldots, f^{(n)}(x);$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^ny}{dx^n}$
❷ ***Диференціали вищих порядків***	$d^2f(x) = d(df(x))$, $d^nf(x) = d(d^{n-1}f(x))$
❸ ***Інваріантність*** 1-го диференціала	$df(u(x)) = f'(u)du, u = u(x)$
❹ Формула обчислення ***диференціала***	$d^nf(x) = f^{(n)}(x)dx^n$, де x — незалежний аргумент
❺ ***Лейбніцева*** формула	$\left(u(x)v(x)\right)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)$
	$u^{(0)} = u, v^{(0)} = v$
❻ ***Похідна параметрично заданої функції*** $y(x) : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in (\alpha;\beta) \end{cases}$	$y^{(n)}(x) : \begin{cases} x = x(t), \\ y^{(n)}_{x^n}(t) = \dfrac{\left(y^{(n-1)}_{x^{n-1}}(t)\right)'_t}{x'_t(t)}, t \in (\alpha;\beta), \end{cases}$ $x^n = \underbrace{x \ldots x}_{n \text{ разів}}$
❼ ***Похідні вищих порядків деяких функцій***	
① $(x^m)^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, & n \le m, \\ 0, & n > m \end{cases}$ $m \in \mathbb{N}$	② $\left(\dfrac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$
③ $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$	④ $(e^x)^{(n)} = e^x$
⑤ $(\log_a x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$	⑥ $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$
⑦ $(\sin \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \sin\left(\alpha x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$	⑧ $(\cos \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\alpha x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$

7.5. Застосування похідної та диференціала

❶ ***Дотична та нормаль до кривої.*** *Дотичною до кривої в точці* M_0 називають пряму M_0T, що є граничним положенням січної M_0M, коли точка M прямує по кривій до точки M_0. *Нормаллю* до кривої називають пряму, яка перпендикулярна до дотичної і проходить через точку дотику.		 S — січна; T — дотична; N — нормаль
❷ ***Геометричний зміст похідної та диференціала*** функції f у точці $M_0(x_0; f(x_0))$		① $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = k_{\text{дот}}$ ② $df(x_0) = \Delta y_{\text{дот}}$
❸ Рівняння ***дотичної***	$f'(x_0) < \infty$	$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
	$f'(x_0) = \infty$	$x = x_0$
❹ Рівняння ***нормалі***	$f'(x_0) \neq 0$, $f'(x_0) \neq \infty$	$y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$
	$f'(x_0) = 0$	$x = x_0$
	$f'(x_0) = \infty$	$y = f(x_0)$
❺ ***Кут між двома кривими*** $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ у точці їх перетину — це кут між дотичними до кривих, проведеними в цій точці.		$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)f_2'(x_0)}$
❻ ***Наближене обчислення*** значення функції		$\Delta f(x_0) \approx df(x_0);$ $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$
❼ ***Механічний зміст*** похідних функції. $s = s(t)$ — закон прямолінійного руху		***швидкість*** руху $v(t) = s'(t),$ ***прискорення*** $a(t) = v'(t) = s''(t)$

7.6. Основні теореми диференціального числення

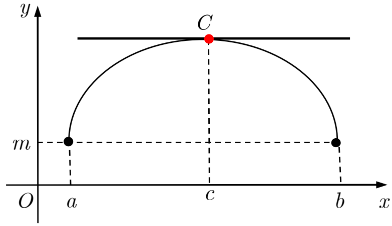
❶ ***Теорема Роля.*** Якщо функція f:

1) неперервна на відрізку $[a;b]$;

2) диференційовна в інтервалі $(a;b)$;

3) на кінцях відрізку $[a;b]$ набуває рівних значень $f(a)=f(b)$, то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка c, така, що

$$f'(c)=0, c\in(a;b).$$



На графіку функції існує точка M, дотична в якій паралельна осі Ox.

❷ ***Теорема Лаґранжа.***

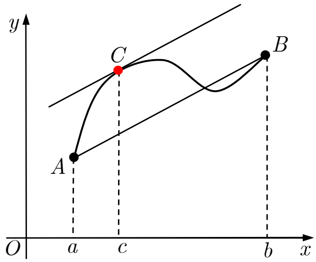
Якщо функція f:

1) неперервна на відрізку $[a;b]$,

2) диференційовна в інтервалі $(a;b)$,

то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка c, така, що

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a), c\in(a;b).$$



На графіку функції існує точка C, дотична в якій паралельна січній AB.

❸ ***Теорема Коші.***

Якщо функції f та g:

1) неперервні на відрізку $[a;b]$,

2) диференційовні в інтервалі $(a;b)$,

3) похідна $g'(x)\neq 0$ в інтервалі $(a;b)$,

то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка c, така, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}, c\in(a;b).$$

❹ ***Правило Бернуллі — Лопіталя.*** Якщо функції f та g:

1) означені й диференційовні у проколеному околі точки x_0,

2) $g'(x)\neq 0$ в цьому околі,

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0\ (\infty)$,

4) існує $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

то існує

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\text{ або }\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

7.7. Тейлорова формула

❶ ***Многочлен Тейлора*** n-го порядку функції f за степенями $(x-x_0)$	$\tilde{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$
❷ ***Формула Тейлора*** n-го порядку для функції f в околі точки x_0	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x)$
❸ ***Формула Тейлора — Маклорена*** для функції f в околі точки $x_0 = 0$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + r_n(x)$
❹ ***Залишковий член*** формули Тейлора	$r_n(x) = f(x) - \tilde{P}_n(x)$
❺ ***Залишковий член*** у формі ***Пеано***	$r_n(x) = o((x-x_0)^n), x \to x_0$
❻ ***Залишковий член*** у формі ***Лаґранжа***	$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, c \in (x_0; x)$

❼ ***Теорема Тейлора.*** Якщо функція f означена в деякому околі точки x_0 і n разів диференційовна в ньому, то правдива *Тейлорова формула* в околі точки x_0 із *залишковим членом у формі Пеано*:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), x \to x_0.$$

❽ ***Формула Тейлора — Маклорена для деяких елементарних функцій***

① $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + e^c\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, $\quad c \in (0; x)$

② $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(1+c)^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

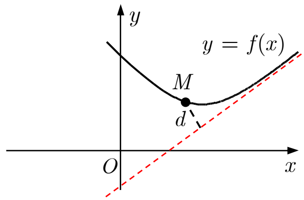
③ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \cos c \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

④ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\cos c\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$

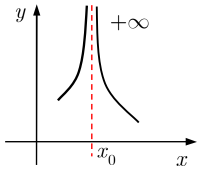
⑤ $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}^{k\text{ множників}}}{k!}x^k + \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}^{n+1\text{ множник}}}{(1+c)^{n-\alpha+1}(n+1)!}x^{n+1}$

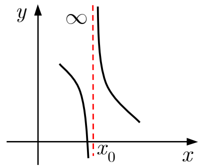
7.8. Асимптоти. Екстремуми. Точки перегину

❶ ***Асимптота.*** *Асимптотою* кривої з нескінченною гілкою називають таку пряму, що віддаль d точки M кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка M віддаляється вздовж нескінченної гілки від початку координат.



❷ ***Вертикальна асимптота.*** Пряма $x = x_0$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.





❸ ***Похила асимптота $y = kx + b$.*** Графік функції $y = f(x)$ має похилу асимптоту $y = kx + b$, тоді й лише тоді, коли існують **скінченні** границі

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

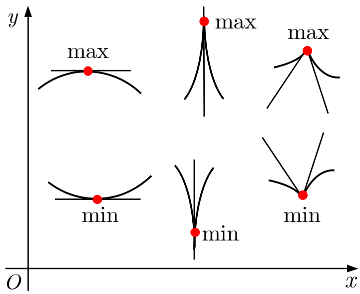
$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$

❹ ***Локальні екстремуми функції.*** Якщо існує такий δ-окіл точки x_0, що для всіх $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ виконано нерівність:

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) < 0,$$

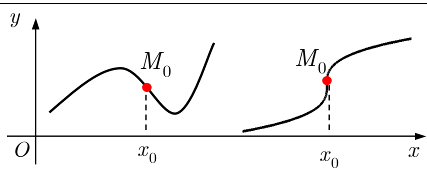
$$(\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) > 0),$$

то точку x_0 називають *точкою* строгого *локального максимуму* (*мінімуму*) функції f, а значення $f(x_0)$ — *локальним максимумом* (*мінімумом*) функції.



Точки максимуму та мінімуму називають *точками екстремуму* функції, а максимуми та мінімуми функції — *екстремумами* функції.

❺ ***Точка перегину функції.*** Нехай функція f означена в околі точки x_0 і існує $f'(x_0)$ (скінченна, $+\infty$ або $-\infty$). Якщо точка x_0 відокремлює інтервал опуклості вгору від інтервалу опуклості донизу функції f, то її називають *точкою перегину* функції f.



Точку $M_0(x_0; f(x_0))$ називають *точкою перегину графіка* функції $y = f(x)$.

7.9. Дослідження функції на монотонність і точки екстремуму

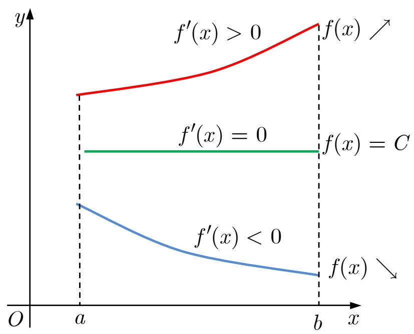
❶ ***Критична точка 1-го порядку.*** Нехай функція f означена в околі точки x_0. Точку x_0 називають *критичною точкою 1-го порядку*, якщо виконано одну з умов:

1) $f'(x_0) = 0$ (стаціонарна точка);
2) $f'(x_0) = \infty$ (точка вертання);
3) $\nexists f'(x_0)$ (кутова точка).

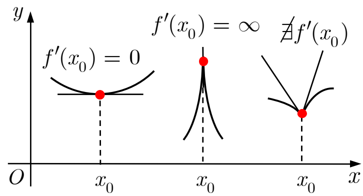
❷ ***Достатня умова монотонності функції.*** Нехай функція f диференційовна в інтервалі $(a;b)$. Тоді якщо $\forall x \in (a;b)$:

1) $f'(x) > 0$, то функція f зростає в інтервалі $(a;b)$ ($f \nearrow$);
2) якщо $f'(x) < 0$, то функція f спадає в інтервалі $(a;b)$ ($f \searrow$).

Якщо $f'(x) = 0$, то функція f стала в інтервалі $(a;b)$.

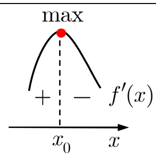


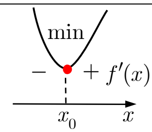
❸ ***Необхідна умова локального екстремуму.*** Якщо функція f означена в деякому околі точки x_0 і досягає в цій точці екстремуму, то точка x_0 є критичною точкою 1-го порядку.



❹ ***Перша достатня умова локального екстремуму.*** Нехай x_0 — критична точка 1-го порядку і функція f неперервна в деякому околі точки x_0. Якщо в цьому околі:

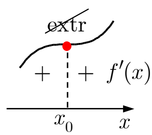
1) $f'(x) > 0$ для $x < x_0$, і $f'(x) < 0$ для $x > x_0$, то в точці x_0 функція f досягає максимуму;

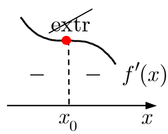




2) $f'(x) < 0$, для $x < x_0$, і $f'(x) > 0$, для $x > x_0$, то функція f досягає в точці x_0 мінімуму;

3) похідна не змінює знак переходячи через x_0, то в точці x_0 функція f екстремуму немає.





❺ ***Друга достатня умова локального екстремуму.*** Нехай функція f двічі неперервно диференційовна в точці x_0 та $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. Тоді:

1) якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимуму;

2) якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального мінімуму.

7.10. Дослідження функції на напрям опуклості та точки перегину

❶ ***Критична точка 2-го порядку.*** Нехай функція f означена в околі точки x_0. Точку x_0 називають *критичною точкою 2-го порядку*, якщо виконано одну з умов:

1) $f''(x_0) = 0$;

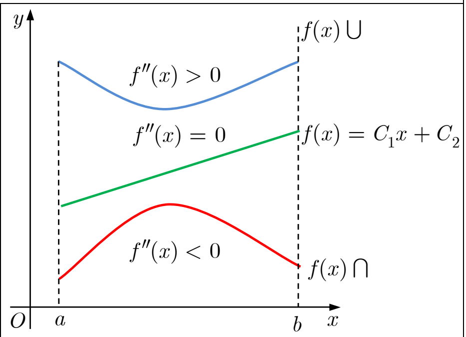
2) $f''(x_0) = \infty$;

3) $\nexists f''(x_0)$.

❷ ***Достатня умова опуклості донизу (догори) функції.*** Нехай функція f в інтервалі $(a;b)$ двічі неперервно диференційовна. Тоді, якщо $\forall x \in (a;b)$:

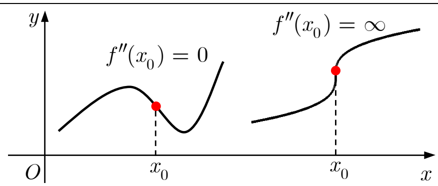
1) $f''(x) > 0$, то функція f в інтервалі $(a;b)$ опукла донизу ($f\bigcup$);

2) якщо $f''(x) < 0$, то функція f в інтервалі $(a;b)$ опукла догори ($f\bigcap$).

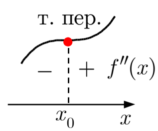


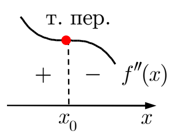
Якщо $f''(x) = 0$, то функція f в інтервалі $(a;b)$ лінійна.

❸ ***Необхідна умова точки перегину.*** Якщо функція f означена в деякому околі точки x_0 і точка x_0 — точка перегину функції f, то точка x_0 є критичною точкою 2-го порядку.



❹ ***Достатня умова точки перегину.*** Якщо для функції f точка x_0 є критичною точкою 2-го порядку, і, переходячи через цю точку, $f''(x)$ змінює знак, то точка x_0 є точкою перегину функції f.





7.11. Схеми дослідження функції

❶ ***Схема дослідження функції на монотонність і точки екстремуму (локального).*** ① Знаходять область означення функції. ② Серед внутрішніх точок області означення знаходять критичні точки 1-го порядку функції. ③ Досліджують знак першої похідної в кожному з інтервалів, на які критичні точки розбивають область означення. ④ Застосовуючи достатні умови монотонності й існування локального екстремуму, висновують про поводження функції. Обчислюють значення функції в точках екстремуму.	❷ ***Схема дослідження функції на напрям опуклості і точки перегину її графіка.*** ① Знаходять область означення функції. ② Серед внутрішніх точок області означення знаходять критичні точки 2-го порядку функції. ③ Досліджують знак другої похідної в кожному з інтервалів, на які критичні точки розбивають область означення. ④ Застосовуючи достатні умови опуклості й існування точки перегину, висновують про поводження функції.
❸ ***Схема дослідження функції на глобальний екстремум (найбільше та найменше значення).*** ① Знаходять критичні точки 1-го порядку функції в інтервалі $(a;b)$; ② Обчислюють значення функції у знайдених критичних точках і на кінцях відрізку $[a;b]$. ③ Серед обчислених значень функції вибирають найбільше та найменше значення функції на $[a;b]$.	❹ ***Схема повного дослідження функції та побудови її графіка.*** ① Знаходять область означення $D(f)$ функції f. ② Установлюють можливі симетрії графіка функції. ③ Визначають можливі точки розриву функції й асимптоти її графіка. ④ За допомогою першої похідної функції визначають інтервали монотонності й точки екстремуму. ⑤ За допомогою другої похідної функції визначають інтервали опуклості функції і точки перегину її графіка. ⑥ Знаходять можливі точки перетину графіка функції з осями координат. ⑦ Будують графік функції $y = f(x)$.

Практикум 7.1. Похідні функцій

Навчальні задачі

7.1.1. Користуючись означенням, знайти похідну функції $f(x) = 4x^2 - 3x + 8$ у точці x_0. Обчислити $f'(1)$.

Розв'язання. [7.1.1.]

[***Крок 1.*** *Знаходимо значення функції* f *у точках* $x_0 + \Delta x$ та x_0.]

$$f(x_0 + \Delta x) = 4(x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 8 =$$
$$= 4x_0^2 - 3x_0 + 8 + 8x_0\Delta x - 3\Delta x + 4(\Delta x)^2.$$
$$f(x_0) = 4x_0^2 - 3x_0 + 8.$$

[***Крок 2.*** *Знаходимо приріст функції* f *у точці* x_0.]

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 8x_0\Delta x - 3\Delta x + 4(\Delta x)^2.$$

[***Крок 3.*** *Знаходимо відношення приросту функції* f *до приросту аргументу.*]

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{8x_0\Delta x - 3\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x} = 8x_0 - 3 + 4\Delta x.$$

[***Крок 4.*** *Знаходимо границю відношення приросту функції* f *до приросту аргументу, коли* $\Delta x \to 0$.]

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(8x_0 - 3 + 4\Delta x) = 8x_0 - 3.$$
$$f'(1) = 5.$$

7.1.2.1. Знайти похідну функції $f(x) = x^4$.

Розв'язання. [7.3.2.]

$$f'(x) = (x^4)' \overset{[7.3.2]}{=} \left[{\color{red}(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}\right] \overset{\alpha=4}{=} 4x^{4-1} = 4x^3.$$

7.1.2.2. Знайти похідну функції $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$.

Розв'язання.

[*Переписуємо функцію у вигляді, зручному для диференціювання, використовуючи формулу* $\sqrt[q]{u^p} = u^{p/q}$.]

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^4}\right)' = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' \overset{[7.3.2]}{=} \left[{\color{red}(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}\right] \overset{\alpha=\frac{4}{3}}{=} \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}.$$

7.1.2.3. Знайти похідну функції $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$.

Розв'язання.

[*Переписуємо функцію у вигляді, зручному для диференціювання, використовуючи формулу* $\dfrac{1}{u^\alpha}=u^{-\alpha}$.]

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x^3}\right)'=\left(x^{-3}\right)'\overset{[7.3.2]}{=}\left[(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}\right]\overset{\alpha=-3}{=}-3x^{-3-1}=-3x^{-4}=-\frac{3}{x^4}.$$

7.1.2.4. Знайти похідну функції $f(x)=3x^2-5x+1$.

Розв'язання. [7.2.1, 7.2.2, 7.3.1, 7.3.2.]

[*На кожному кроці використовуємо відповідні правила та формули диференціювання.*]

$$f'(x)=(4x^3-3x^2+5x-1)'\overset{[7.2.2,7.2.1]}{=}\begin{bmatrix}(u\pm v)'=u'\pm v',\\ (Cu)'=Cu'\end{bmatrix}=$$

$$=4(x^3)'-3(x^2)'+5(x)'-(1)'\overset{[7.3.2,7.3.1]}{=}\begin{bmatrix}(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},\\ (C)'=0\end{bmatrix}=$$

$$=4\cdot 3x^2-3\cdot 2x+5\cdot 1-0=12x^2-6x+5.$$

7.1.2.5. Знайти похідну функції $f(x)=3\sqrt[3]{x}+\dfrac{4}{\sqrt[4]{x^3}}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}$.

Розв'язання.

$$f'(x)=\left(3\sqrt[3]{x}+\frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)'=\left[\frac{1}{u^\alpha}=u^{-\alpha},\sqrt[q]{u^p}=u^{\frac{p}{q}}\right]=$$

$$=\left(3x^{\frac{1}{3}}+4x^{-\frac{3}{4}}-x^{-1}+\frac{1}{2}x^{-2}\right)'\overset{[7.2.2,7.2.1]}{=}\begin{bmatrix}(u\pm v)'=u'\pm v',\\ (Cu)'=Cu'\end{bmatrix}=$$

$$=3\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'+4\left(x^{-\frac{3}{4}}\right)'-(x^{-1})'+\frac{1}{2}(x^{-2})'\overset{[7.3.2]}{=}\left[(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}\right]=$$

$$=3\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)x^{-\frac{7}{4}}-(-1)x^{-2}+\frac{1}{2}\cdot(-2)x^{-3}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{\sqrt[4]{x^7}}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}.$$

7.1.3.1. Знайти похідну функції $f(x)=e^{2x}$.

Розв'язання. [7.3.4.]

$$f'(x)=(e^{2x})'\overset{[7.3.4]}{=}\Big[(e^u)'=e^u u'\Big]\overset{u=2x}{=}e^{2x}(2x)'=e^{2x}\cdot 2=2e^{2x}.$$

7.1.3.2. Знайти похідну функції $f(x)=\sin 3x$.

Розв'язання. [7.3.7.]

$$f'(x)=(\sin 3x)'\overset{[7.3.7]}{=}\Big[(\sin u)'=\cos u\cdot u'\Big]\overset{u=3x}{=}\cos 3x\cdot(3x)'=$$
$$=\cos 3x\cdot 3=3\cos 3x.$$

7.1.3.3. Знайти похідну функції $f(x)=e^{2x}\sin 3x$.

Розв'язання. [7.2.3.]

$$f'(x)=(e^{2x}\sin 3x)'\overset{[7.2.3]}{=}\Big[(uv)'=u'v+uv'\Big]=$$
$$=(e^{2x})'\sin 3x+e^{2x}(\sin 3x)'\overset{[7.3.4,7.3.7]}{=}\left[\begin{array}{l}(e^u)'=e^u u',\\(\sin u)'=\cos u\cdot u'\end{array}\right]=$$
$$=e^{2x}(2x)'\sin 3x+e^{2x}\cos 3x\cdot(3x)'=e^{2x}\cdot 2\sin 3x+e^{2x}\cos 3x\cdot 3=$$
$$=e^{2x}(2\sin 3x+3\cos 3x).$$

7.1.3.4. Знайти похідну функції $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}x}{\ln x}$.

Розв'язання. [7.2.4, 7.3.6, 7.3.9.]

$$f'(x)=\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\ln x}\right)'\overset{[7.2.4]}{=}\left[\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\right]=\frac{(\operatorname{tg}x)'\ln x-\operatorname{tg}x\cdot(\ln x)'}{\ln^2 x}=$$
$$\overset{[7.3.9,7.3.6]}{=}\left[\begin{array}{l}(\operatorname{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x},\\(\ln x)'=\dfrac{1}{x}\end{array}\right]=\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}\ln x-\operatorname{tg}x\cdot\dfrac{1}{x}}{\ln^2 x}=\frac{x\ln x-\sin x\cdot\cos x}{x\ln^2 x\cdot\cos^2 x}.$$

7.1.3.5. Знайти похідну функції $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}x}{3^x}$.

Розв'язання. [7.2.3, 7.3.3, 7.3.13.]

[*Перетворюємо функцію за формулою* $\dfrac{u}{v}=uv^{-1}$.]①

$$f'(x)=\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{3^x}\right)'=(\operatorname{arctg}x\cdot 3^{-x})'\overset{[7.2.3]}{=}\Big[(uv)'=u'v+uv'\Big]=$$

$$= (\operatorname{arctg} x)' \cdot 3^{-x} + \operatorname{arctg} x \cdot (3^{-x})' \overset{[7.3.2,7.3.3,7.3.13]}{=} \left[\begin{matrix} (\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \\ (a^u)' = a^u \ln a \cdot u' \end{matrix} \right]^{u=-x} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} \cdot 3^{-x} + \operatorname{arctg} x \cdot 3^{-x} \ln 3 \cdot (-x)' = \frac{1}{1+x^2} \cdot 3^{-x} - \operatorname{arctg} x \cdot 3^{-x} \ln 3.$$

Коментар. ① Похідну можна також знаходити й за правилом диференціювання частки.

7.1.4.1. Знайти похідну функції $f(x) = 3^{x^4}$.

Розв'язання. [7.3.2, 7.3.3.] ①

$$f'(x) = \left(3^{x^4}\right)' \overset{[7.3.4]}{=} \left[(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'\right] \overset{u=x^4}{=} 3^{x^4} \ln 3 \cdot (x^4)' \overset{[7.3.2]}{=}$$

$$= \left[(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}\right] \overset{\alpha=4}{=} 3^{x^4} \ln 3 \cdot 4x^3 = 4 \ln 3 \cdot x^3 3^{x^4}.$$

Коментар. ① Вираз 3^{x^4} розуміють як $3^{(x^4)}$, а не як $(3^x)^4 = 3^{4x}$.

7.1.4.2. Знайти похідну функції $f(x) = \log_2(5x + 4)$.

Розв'язання. [7.3.5.]

$$f'(x) = \left(\log_2(5x+4)\right)' \overset{[7.3.5]}{=} \left[(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u'\right] \overset{u=5x+4}{=} \frac{1}{(5x+4)\ln 2}(5x+4)' =$$

$$= \frac{1}{(5x+4)\ln 2} \cdot 5 = \frac{5}{(5x+4)\ln 2}$$

7.1.4.3. Знайти похідну функції $f(x) = \cos^2 3x$.

Розв'язання.

[*Переписуємо* $f^\alpha(x)$ як $(f(x))^\alpha$.]

$$f'(x) = (\cos^2 3x)' = ((\cos 3x)^2)' \overset{[7.3.2]}{=} \left[(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'\right] =$$

$$= 2 \cos 3x \cdot (\cos 3x)' \overset{[7.3.8]}{=} \left[(\cos u)' = -\sin u \cdot u'\right] \overset{u=3x}{=}$$

$$= 2 \cos 3x \cdot (-\sin 3x)(3x)' = 2 \cos 3x \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 \overset{[5.9.7]}{=} -3 \sin 6x.$$

7.1.4.4. Знайдіть похідну функції $f(x) = \operatorname{th}^3 x^2$.

Розв'язання. [7.3.2, 7.3.17.]

$$f'(x) = \left(\operatorname{th}^3 x^2\right)' = \left((\operatorname{th} x^2)^3\right)' \overset{[7.3.2]}{=} \left[(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'\right] \overset{u=\operatorname{th} x^2}{=} 3(\operatorname{th} x^2)^2(\operatorname{th} x^2)' =$$
$$\overset{[7.3.17]}{=} \left[(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}u'\right] \overset{u=x^2}{=} 3\operatorname{th}^2 x^2 \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x^2}(x^2)' \overset{[7.3.2]}{=} 3\operatorname{th}^2 x^2 \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x^2} \cdot 2x.$$

7.1.5.1. Знайти похідну функції $f(v) = \operatorname{ctg} v \cdot \sin a$.

Розв'язання. [7.2.1, 7.3.10.]

[*Знаходимо похідну функції за змінною* v.]①

$$f'(v) = (\operatorname{ctg} v \cdot \sin a)' \overset{[7.2.1]}{=} \left[(Cu)' = Cu'\right] = \underbrace{\sin a}_{\text{стала}} \cdot (\operatorname{ctg} v)' \overset{[7.3.10]}{=}$$
$$= \sin a\left(-\frac{1}{\sin^2 v}\right) = -\frac{\sin a}{\sin^2 v}.$$

Коментар. ① Оскільки похідну функції $f(v)$ беремо за її аргументом v, то $\sin a$ є сталою, а $v' = 1$.

7.1.5.2. Знайти похідну функції $s(t) = \operatorname{arctg} t + \operatorname{ctg}\sqrt{3}$.

Розв'язання. [7.2.2, 7.3.1, 7.3.13.]

$$s'(t) = \left(\operatorname{arctg} t + \operatorname{ctg}\sqrt{3}\right)' \overset{[7.2.2]}{=} \left[(u+v)' = u' + v'\right] =$$
$$= (\operatorname{arctg} t)' + \underbrace{(\operatorname{ctg}\sqrt{3})'}_{\text{стала}} \overset{[7.3.13, 7.3.1]}{=} \left[\begin{array}{c} (\operatorname{arctg} t)' = \dfrac{1}{1+t^2}, \\ C' = 0 \end{array}\right] = \frac{1}{1+t^2} + 0 = \frac{1}{1+t^2}.$$

7.1.6.1. Знайти похідну функції $f(x) = \dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}(x+4)^2}$.

Розв'язання. [7.2.6, 7.2.1, 7.2.2, 7.3.6.]①

[*Застосовуємо правило логарифмічного диференціювання*
$$f'(x) = f(x)(\ln f(x))'.]$$

$$f'(x) \overset{[7.2.6]}{=} f(x)\Bigg(\underbrace{\ln\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}(x+4)^2}}_{\substack{\text{максимально використовуємо}\\ \text{властивості логарифма}}}\Bigg)'.$$

[*Використовуємо властивості логарифма:*

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y;$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y; \quad .$$
$$\log_a x^{\alpha} = \alpha \log_a x, \ \ x, y > 0.]$$

$$f'(x) = f(x)\left(3\ln(x+1) + \frac{1}{4}\ln(x-2) - \frac{2}{5}\ln(x-3) - 2\ln(x+4)\right)' \overset{[7.2.1,7.2.2]}{\underset{[7.3.6]}{=}}$$
$$= \left[\begin{matrix}(u \pm v)' = u' \pm v', \\ (Cu)' = Cu'\end{matrix} \quad (\ln u)' = \frac{1}{u}u'\right] =$$
$$= \frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2(x+4)^2}}\left(\frac{3}{x+1} + \frac{1}{4(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)} - \frac{2}{x+4}\right).$$

Коментар. ① Формулу логарифмічної похідної доцільно використовувати для диференціювання виразів з великою кількістю множників або степенево-показникових виразів.

7.1.6.2. Знайти похідну функції $f(x) = (\arcsin x)^{\operatorname{ctg} x}$.

Розв'язання. [7.2.3, 7.2.6, 7.3.]

$$f'(x) \overset{[7.2.6]}{=} \left[f'(x) = f(x)\ln f(x)\right] = f(x)(\underbrace{\ln(\arcsin x)^{\operatorname{ctg} x}}_{\text{використовуємо властивості логарифма}})' =$$

$$= f(x)(\operatorname{ctg} x \ln \arcsin x)' \overset{[7.2.3]}{=} \left[(uv)' = u'v + uv'\right] =$$

$$= f(x)((\operatorname{ctg} x)' \ln \arcsin x + \operatorname{ctg} x \cdot (\ln \arcsin x)') \overset{[7.3.10]}{\underset{[7.3.6]}{=}} \left[\begin{matrix}(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \\ (\ln u)' = \dfrac{1}{u}u'\end{matrix}\right]$$

$$= f(x)\left(\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\ln \arcsin x + \operatorname{ctg} x \frac{1}{\arcsin x}(\arcsin x)'\right) \overset{[7.3.11]}{=}$$
$$= (\arcsin x)^{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{\ln \arcsin x}{\sin^2 x} + \frac{\operatorname{ctg} x}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}\right).$$

7.1.7. Знайти похідну функції $y(x)$, заданої неявно $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Розв'язання. ①

[*Диференціюємо обидві частини рівності, що задає функцію $y(x)$ неявно, за змінною x.*]

$$(x^3)' + (y^3)' - 3a(xy)' = 0.$$

$$\left[\begin{array}{c} (y^3)' \overset{[7.3.2]}{=} 3y^2y', \\ (xy)' \overset{[7.2.3]}{=} x'y + xy' = y + xy' \end{array}\right]$$

$$3x^2 + 3y^2y' - 3ay - 3axy' = 0.$$

[*Залишаємо всі доданки, які містять* y', *ліворуч і переносимо праворуч решту.*]

$$(3y^2 - 3ax)y' = -3x^2 + 3ay.$$

[*Виражаємо* y'.]

$$y' \overset{②}{=} -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}.$$

Коментар. ① Перехід від неявного задавання функції до явного часто буває складним, а то й неможливим. Щоб знайти похідну $y' = \dfrac{dy}{dx}$, **не потрібно** переходити від неявного задавання функції до явного.

② Похідна від неявно заданої функції є також неявно заданою функцією змінної x.

7.1.8. Знайти похідну y'_x функції y, заданої параметрично

$$y(x) : \begin{cases} x = \operatorname{tg} t + t, \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}, \end{cases} t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

для довільного значення t і для $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Розв'язання. [7.2.8.]

[*Знаходимо похідно параметрично заданої функції за формулою:*

$$\left. y'(x) : \begin{cases} x = x(t), \\ y'_x(t) = \dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)}. \end{cases} \right]^{①}$$

$$y'_x(t) = \frac{\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)'}{(\operatorname{tg} t + t)'} = \frac{\dfrac{2\sin t}{\cos^3 t}}{\dfrac{1}{\cos^2 t} + 1} = \frac{2\sin t}{\cos t + \cos^3 t};$$

$$y'_x(x): \begin{cases} x = \operatorname{tg} t + t, \\ y'_x(t) = \dfrac{2\sin t}{\cos t + \cos^3 t}, \end{cases} t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$y'_x(x)\,\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3}.$$

① Похідна від неявно заданої функції є також неявно заданою функцією змінної x.

7.1.9. Знайти похідну й диференціал функції $f(x) = (2x-1)^{10}$ у точці $x_0 = 1$.

Розв'язання. [7.1.9.]

[*Знаходимо похідну функції f.*]

$$f'(x) = ((2x-1)^{10})' \overset{[7.3.2]}{=} \left[u^\alpha = \alpha u^{\alpha-1}u'\right] \overset{u=2x-1}{=}$$
$$= 10(2x-1)^9(2x-1)' = 10(2x-1)^9 \cdot 2 = 20(2x-1)^9.$$

[*Знаходимо похідну функції f у точці $x_0 = 1$.*]

$$f'(1) = 20(2x-1)^9\Big|_{x=1} = 20(2\cdot 1 - 1)^9 = 20.$$

[*Знаходимо диференціал функції f у точці x_0 за формулою [7.1.9]*

$$df(x_0) = f'(x_0)dx.]$$

$$df(1) = 20dx.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

7.1.10. Користуючись означенням, знайдіть похідну функції f у точці x_0. Обчисліть $f'(2)$, якщо

1) $f(x) = x^2 - x + 1$;
2) $f(x) = \dfrac{2}{x}$.

7.1.11. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + 2x - 1$;
2) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + 3x + 2$;
3) $f(y) = 2\sqrt{y} - \dfrac{1}{y} + \sqrt[4]{3}$;
4) $f(z) = 3\sqrt[3]{z} + \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{a^3}$;
5) $f(x) = (5x^2 + 7)^3$;
6) $f(x) = (1 + 5x - 8x^2)^5$;

7) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 1}$; 8) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 5}}$;

9) $f(x) = x^3(2x - 1)^5$; 10) $f(x) = x^4(3x + 4)^6$;

11) $g(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + 1}$; 12) $s(t) = \dfrac{3t^2 + 1}{t - 1}$.

7.1.12. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x \operatorname{ctg} x$; 2) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$;

3) $f(x) = \dfrac{x}{1 - \cos x}$; 4) $\rho(\varphi) = \varphi \sin \varphi + \cos \varphi$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{7}\sin 7x - \dfrac{3}{5}\cos 5x$; 6) $f(x) = \dfrac{1}{9}\cos 9x + \dfrac{3}{7}\sin 7x$;

7) $f(x) = \sqrt{\sin x}$; 8) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$;

9) $f(x) = \operatorname{ctg}^4 x$; 10) $f(x) = 7\operatorname{tg}^6 x$;

11) $f(x) = 5\cos^5 x$; 12) $f(x) = 8\sin^2 x$.

7.1.13. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = e^{3x+4}$; 2) $f(x) = e^{-2x+5}$;

3) $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$; 4) $f(x) = 6^{-x^2}$;

5) $f(x) = e^{\operatorname{ctg} x}$; 6) $f(x) = e^{1/x}$;

7) $f(x) = (a^x)^n, a > 0$; 8) $f(x) = a^{x^n}, a > 0$.

7.1.14. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \ln(2x - 3)$; 2) $f(x) = \ln(3x + 4)$;

3) $f(x) = \sqrt[3]{\log_2 x}$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{\log_3 x}$;

5) $f(x) = \ln \cos x$; 6) $f(x) = \ln \sin x$;

7) $f(x) = \ln \dfrac{x - 2}{x + 2}$; 8) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

7.1.15. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^2 \log_3 x$; 2) $f(x) = \dfrac{x-1}{\lg x}$;

3) $f(x) = \dfrac{x}{4^x}$; 4) $f(x) = x \cdot 10^x$;

5) $f(x) = \dfrac{e^x}{\sin x}$; 6) $f(x) = \dfrac{\cos x}{e^x}$;

7) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x$; 8) $f(x) = \dfrac{1-10^x}{1+10^x}$;

9) $f(x) = x \sin x \ln x$; 10) $f(x) = xe^x(\cos x + \sin x)$.

7.1.16. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \arcsin 5x$; 2) $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$;

3) $f(x) = \arccos(1 - x^2)$; 4) $f(x) = \arccos \dfrac{1}{x}$;

5) $f(x) = \operatorname{arctg} 3x^2$; 6) $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$;

7) $f(x) = \arcsin^3 x^2$; 8) $f(x) = \operatorname{arctg}^2 \dfrac{1}{x^2}$;

9) $f(x) = \operatorname{arcctg}^4 5x$; 10) $f(x) = \operatorname{arcctg} \sqrt{x^3}$;

11) $f(x) = \arcsin \sqrt{1 - x^2}, x > 0$; 12) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$.

7.1.17. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \operatorname{ch}^3 x$; 2) $f(x) = \ln \operatorname{th} x$;

3) $f(x) = \cos x \cdot \operatorname{ch} x + \sin x \cdot \operatorname{sh} x$; 4) $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{\operatorname{sh} x + \sin x}$.

7.1.18. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \ln \dfrac{\sqrt[21]{(x+4)^{13}} \sqrt[28]{(x-3)^{13}}}{\sqrt[12]{x+1}}$;

2) $f(x) = \ln \dfrac{x^2(2x+4)^7}{(6 + 7x + 2x^2)(2x+3)^7}$;

3) $f(x) = (5x-4)^3(x-2)^2(3-4x)$; 4) $f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{x(x^2+2)}{x-4}}$;

5) $f(x) = \dfrac{5x^2}{x^2+1}\sin^3 x\cos^4 x$; 6) $f(x) = \dfrac{(x+5)^7(x^2-4x+2)^3}{(x^3+3x^2+5)^2}$;

7) $f(x) = x^x$; 8) $f(x) = (\sin x)^{\arcsin x}$;

9) $f(x) = (\ln x)^{e^x}$; 10) $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$;

11)* $f(x) = x^{x^x} + 2^{2^x}$; 12)* $f(x) = x^{x^2} + x^{2^x} + 2^{x^x}$.

7.1.19. Знайдіть похідну y'_x функції $y(x)$, заданої неявно:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; 2) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;

3) $y = x + \operatorname{arctg} y$; 4) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$;

5) $\cos(xy) = x$; 6) $\operatorname{tg} y = xy$;

7) $2y\ln y = x$; 8) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$;

9) $x^y = y^x$; 10) $a^{x/y} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^a$.

7.1.20. Знайдіть похідну y'_x функції y, заданої параметрично:

1) $y(x): \begin{cases} x = a(\varphi - \sin\varphi), \\ y = a(1-\cos\varphi); \end{cases}$ 2) $y(x): \begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t; \end{cases}$

3) $y(x): \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t; \end{cases}$ 4) $y(x): \begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$

7.1.21. Знайдіть диференціал функції f у точці x та у точці x_0, якщо:

1) $f(x) = \sin x - x\cos x + 4, x_0 = \dfrac{\pi}{6}$;

2) $f(x) = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}, x_0 = \sqrt{3}$.

7.1.22. Знайдіть значення похідної y'_x функції $y(x)$, заданої параметрично, у точці $t_0=\dfrac{\pi}{4}$:

1) $y(x):\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$ 2) $y(x):\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$

7.1.23. Доведіть, що функція y справджує диференціальне рівняння:

1) $xy' + 1 = e^y, y = \ln\dfrac{1}{1+x}$;

2) $(1-x^2)y' - xy = 1, y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

7.1.24*. Знайдіть суму:

1) $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$;

2) $2 + 2\cdot 3x + 3\cdot 4x^2 + \ldots + n(n-1)x^{n-2}$.

Відповіді

7.1.10. 1) $f'(x_0) = 2x_0 - 1, f'(2) = 3$; 2) $f'(x_0) = -\dfrac{2}{x_0^2}, f'(2) = -\dfrac{1}{2}$.

7.1.11. 1) $f'(x) = 4x^3 - x^2 + 2$; 2) $f'(x) = x^2 - x + 3$; 3) $f'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{y^2}$;
4) $f'(z) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{z^2}} - \dfrac{2}{z^3}$; 5) $f'(x) = 30x(5x^2+7)^2$; 6) $f'(x) = 5(1+5x-8x^2)^4(5-16x)$;
7) $f'(x) = \dfrac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x+1}}$; 8) $f'(x) = -\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+5)^4}}$; 9) $f'(x) = x^2(2x-1)^4(16x-3)$;
10) $f'(x) = 2x^3(3x+4)^5(15x+8)$; 11) $g'(\alpha) = \dfrac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}$; 12) $s'(t) = \dfrac{3t^2-6t-1}{(t-1)^2}$.

7.1.12. 1) $f'(x) = \operatorname{ctg} x - \dfrac{x}{\sin^2 x}$; 2) $f'(x) = \dfrac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$; 3) $f'(x) = \dfrac{1-\cos x - x\sin x}{(1-\cos x)^2}$;
4) $\rho'(\varphi) = \varphi\cos\varphi$; 5) $f'(x) = \cos 7x + 3\sin 5x$; 6) $f'(x) = -\sin 9x + 3\cos 7x$;
7) $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$; 8) $f'(x) = \dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos^3 x}}$; 9) $f'(x) = 4\operatorname{ctg}^3 x\cdot\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$;
10) $f'(x) = 42\operatorname{tg}^5 x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$; 11) $f'(x) = 25\cos^4 x\cdot(-\sin x)$; 12) $f'(x) = 8\sin 2x$;

7.1.13. 1) $f'(x) = 3e^{3x+4}$; 2) $f'(x) = -2e^{-2x+5}$; 3) $f'(x) = \dfrac{2^{\sqrt{x}} \ln 2}{2\sqrt{x}}$;

4) $f'(x) = -2x \cdot 6^{-x^2} \ln 6$; 5) $f'(x) = -\dfrac{e^{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}$; 6) $f'(x) = -\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$; 7) $f'(x) = na^{nx} \ln a$;

8) $f'(x) = nx^{n-1}a^{x^n} \ln a$.

7.1.14. 1) $f'(x) = \dfrac{2}{2x-3}$; 2) $f'(x) = \dfrac{3}{3x+4}$; 3) $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\log_2 x} \cdot x \ln 2}$;

4) $f'(x) = -\dfrac{1}{x \ln 3 \log_3^2 x}$; 5) $f'(x) = -\operatorname{tg} x$; 6) $f'(x) = \operatorname{ctg} x$; 7) $f'(x) = \dfrac{4}{x^2 - 4}$;

8) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

7.1.15. 1) $f'(x) = 2x \log_3 x + \dfrac{x}{\ln 3}$; 2) $f'(x) = \dfrac{x \ln 10 \lg x - x + 1}{x \ln 10 \lg^2 x}$;

3) $f'(x) = 4^{-x}(1 - x \ln 4)$; 4) $f'(x) = 10^x(1 + x \ln 10)$; 5) $f'(x) = \dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$;

6) $f'(x) = -\dfrac{\sin x + \cos x}{e^x}$; 7) $f'(x) = e^x(x^2+1)$; 8) $f'(x) = -\dfrac{2 \cdot 10^x \ln 10}{(1+10^x)^2}$.

9) $f'(x) = \sin x \ln x + x \cos x \ln x + \sin x$; 10) $f'(x) = e^x(\cos x + \sin x + 2x \cos x)$.

7.1.16. 1) $f'(x) = \dfrac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$; 2) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$; 3) $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}}$;

4) $f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$; 5) $f'(x) = \dfrac{6x}{1+9x^4}$; 6) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$;

7) $f'(x) = 3 \arcsin^2 x^2 \cdot \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$; 8) $f'(x) = -\dfrac{4x}{x^4+1} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2}$; 9) $f'(x) = -\dfrac{20 \operatorname{arcctg}^3 5x}{1+25x^2}$;

10) $f'(x) = -\dfrac{3\sqrt{x}}{2(1+x^2)}$; 11) $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 12) $f'(x) = -\dfrac{1}{2}$.

7.1.17. 1) $f'(x) = 3 \operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{sh} x$; 2) $f'(x) = \dfrac{2}{\operatorname{sh} 2x}$; 3) $f'(x) = 2 \cos x \cdot \operatorname{sh} x$;

4) $f'(x) = \dfrac{2 \operatorname{sh} x \cdot \sin x}{(\operatorname{sh} x + \sin x)^2}$.

7.1.18. 1) $f'(x) = \dfrac{13}{21(x+4)} + \dfrac{13}{28(x-3)} - \dfrac{1}{12(x+1)}$;

2) $f'(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{7}{x+2} - \dfrac{4x+7}{2x^2+7x+6} - \dfrac{14}{2x+3}$;

3) $f'(x) = 15(5x-4)^2(x-2)^2(3-4x) + 2(5x-4)^3(x-2)(3-4x) - 4(5x-4)^3(x-2)^2$;

4) $f'(x) = \dfrac{1}{5} f(x)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{x^2+2} - \dfrac{1}{x-4}\right)$; 5) $f'(x) = f(x)\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{2x}{x^2+1} + 3 \operatorname{ctg} x - 4 \operatorname{tg} x\right)$;

6) $f'(x) = f(x)\left(\dfrac{7}{x+5} - \dfrac{6x-12}{x^2-4x+2} - \dfrac{6x^2+12x}{x^3+3x^2+5}\right)$; 7) $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$;

8) $f'(x) = f(x)\left(\arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x + \dfrac{\ln\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$; 9) $f'(x) = (\ln x)^{e^x} e^x\left(\dfrac{1}{x\ln x} + \ln\ln x\right)$;

10) $f'(x) = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \sin x \cdot \ln\operatorname{tg} x\right)$;

11)—12) *Указівка.* Знайдіть похідну кожного доданку окремо.

11) $f'(x) = x^{x^x} \cdot x^{x-1}(1 + x\ln x(\ln x - 1)) + 2^{2^x + x}\ln^2 2$;

12) $f'(x) = x^{x^2+1}(1+\ln^2 x) + x^{2^x} \cdot 2^x\left(\dfrac{1}{x} + \ln 2 \cdot \ln x\right) + 2^{x^x}\ln 2 \cdot x^x(\ln x + 1)$.

7.1.19. 1) $y' = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$; 2) $y' = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$; 3) $y' = \dfrac{1+y^2}{y^2}$; 4) $y' = \dfrac{2^x - 2^{-y}}{1-2^x}$;

5) $y' = -\dfrac{1 + y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$; 6) $y' = \dfrac{y\cos^2 y}{1 - x\cos^2 y}$;

7) $y' = \dfrac{1}{2(1+\ln y)}$; 8) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$; 9) $y' = \dfrac{y^2 - xy\ln y}{x^2 - xy\ln x}$; 10) $y' = \dfrac{y}{x}$.

7.1.20. 1) $y'_x : \begin{cases} x = a(\varphi - \sin\varphi), \\ y'_x(\varphi) = \operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}; \end{cases}$ 2) $y'_x : \begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y'_x(t) = \dfrac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}; \end{cases}$

3) $y'_x : \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y'_x(t) = \dfrac{t}{2}; \end{cases}$ 4) $y'_x : \begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y'_x(t) = \dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}. \end{cases}$

7.1.21. 1) $df(x) = x\sin x dx, df\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{12}dx$; 2) $df(x) = \operatorname{arctg} x dx, df(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}dx$.

7.1.22. 1) $y'_x : \begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y'_x(t) = -\operatorname{tg} t, \end{cases} y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$; 2) $y'_x : \begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y'_x(t) = \operatorname{tg} t, \end{cases} y'_x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$.

7.1.24. *Указівка.* Використати значення суми $x + x^2 + \ldots + x^n$.

Практикум 7.2. Застосування похідної

Навчальні задачі

7.2.1.1. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $f(x) = x^2 - 6x + 4$ в точках з абсцисами: а) $x_0 = 4$ та б) $x_0 = 3$.

Розв'язання. [7.5.3, 7.5.4.]

А. [*Знаходимо значення функції* $f(x_0)$ *та значення похідної* $f'(x_0)$.]

$$f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 4 = -4.$$
$$f'(x) = 2x - 6;\ f'(4) = 2 \cdot 4 - 6 = 2.$$

[*Підставляємо значення* $x_0, f(x_0)$ *та* $f'(x_0)$ *у рівняння дотичної* [*7.5.3*] *зі скінченною похідною* $f'(x_0)$
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).]$$

Рівняння дотичної:
$$y = (-4) + 2(x - 4);\quad y = 2x - 12.$$

[*Підставляємо значення* $x_0, f(x_0)$ *та* $f'(x_0)$ *у рівняння нормалі* [*7.5.4*] *зі скінченною похідною* $f'(x_0) \neq 0$
$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).]$$

Рівняння нормалі:
$$y = (-4) - \frac{1}{2}(x - 4);\ y = -\frac{1}{2}x - 2.$$

Б. $f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 4 = -5.$
$$f'(x) = 2x - 6;\ f'(3) = 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

Рівняння дотичної:
$$y = (-5) + 0(x - 3);\ y = -5.$$

[*Підставляємо значення* x_0 *у рівняння нормалі* [*7.5.4*] *із* $f'(x_0) = 0$
$$x = x_0.]$$

Рівняння нормалі:
$$x = 3.$$

7.2.1.2. Записати рівняння дотичної та нормалі в точці $M_0(2;2)$ до кривої
$$L: \begin{cases} x = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2}, \\ y = \dfrac{1}{2t} + \dfrac{3}{2t^2}. \end{cases}$$

Розв'язання. [7.2.8, 7.5.3, 7.5.4.]

[*Знаходимо значення параметра* t, *яке відповідає точці* $M_0(2;2)$.]
$$\begin{cases} 2 = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2}, \\ 2 = \dfrac{1}{2t} + \dfrac{3}{2t^2} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.$$

Точці $(2;2)$ кривої відповідає значення параметра $t_0 = 1$.

[*Обчислюємо похідну* $y'_x\big|_{x=x_0}$.]

$$y'_x(t) \overset{[7.2.8]}{=} \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t+6}{2t+4};\ y'_x\big|_{x=2} = y'_x\ \big|_{t=1} = \frac{7}{6}.$$

[*Підставляємо значення* x_0, y_0 *та* $y'_x\big|_{x=x_0}$ *в рівняння дотичної зі скінченною* $y'_x\big|_{x=x_0}$

$$y = y_0 + y'_x\big|_{x=x_0}(x - x_0).]$$

Рівняння дотичної:

$$y = 2 + \frac{7}{6}(x-2);\ 6y - 7x + 2 = 0.$$

[*Підставляємо значення* x_0, y_0 *та* $y'_x\big|_{x=x_0}$ *в рівняння нормалі зі скінченною* $y'_x\big|_{x=x_0} \neq 0$

$$y = y_0 - \frac{1}{y'_x\big|_{x=x_0}}(x - x_0).]$$

Рівняння нормалі:

$$y = 2 - \frac{6}{7}(x-2);\ 7y + 6x - 26 = 0.$$

7.2.1.3. Записати рівняння дотичної та нормалі до кола $x^2 + y^2 = 4$ у точці $M_0(\sqrt{3};1)$.

Розв'язання. [7.5.3, 7.5.4.]

[*Знаходимо похідну функції* $y(x)$, *заданої неявно, й обчислюємо* $y'(x_0)$.]

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \Rightarrow 2x + 2yy' = 0;$$

$$2yy' = -2x;\quad y' = -\frac{x}{y}.$$

$$y'(x_0) = -\frac{x}{y}\bigg|_{\substack{x=\sqrt{3},\\ y=1}} = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}.$$

[*Підставляємо значення* x_0, y_0 *та* $y'(x_0)$ *в рівняння дотичної зі скінченною* $y'(x_0)$

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0).]$$

Рівняння дотичної:

$$y = 1 - \sqrt{3}(x - \sqrt{3});\ y = -\sqrt{3}x + 4.$$

[*Підставляємо значення* x_0, y_0 *та* $y'(x_0)$ *в рівняння нормалі зі скінченною* $y'(x_0) \neq 0$

$$y = y_0 - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).]$$

Рівняння нормалі:

$$y = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \sqrt{3});\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x.$$

7.2.2.1. Визначити, у якій точці дотична до параболи $y = x^2$ паралельна прямій $y = 4x - 5$.

Розв'язання. [4.3.3., 7.5.2.]

Нехай точка дотику $M_0(x_0; y_0)$. Тоді

$$k_{\text{дот.}} \overset{[7.5.2.1]}{=} y'(x_0) = 2x_0.$$

Оскільки кутові коефіцієнти паралельних прямих рівні [4.3.3.2], то

$$k_{\text{дот.}} = 2x_0 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 2, y_0 = 4.$$

Дотична до параболи $y = x^2$ паралельна прямій $y = 4x - 5$ у точці $M_0(2;4)$.

7.2.2.2. Визначити, у якій точці дотична до параболи $y = x^2$ перпендикулярна до прямої $2x - 6y + 5 = 0$.

Розв'язання. [4.3.3, 7.5.2.]

Нехай точка дотику $M_0(x_0; y_0)$. Тоді

$$k_{\text{дот.}} \overset{[7.5.2]}{=} y'(x_0) = 2x_0.$$

[*Знаходимо кутовий коефіцієнт прямої* $2x - 6y + 5 = 0$.]

$$2x - 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{6} \Rightarrow k = \frac{1}{3}.$$

Оскільки кутові коефіцієнти перпендикулярних прямих зв'язані співвідношенням [4.3.3.3]

$$k_1 k_2 = -1,$$

то,

$$k_{\text{дот.}} = 2x_0 = -3 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{3}{2}, y_0 = \frac{9}{4}.$$

Дотична до параболи $y = x^2$ перпендикулярна до прямої $2x - 6y + 5 = 0$ в точці $M_0\left(-\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)$.

7.2.2.3. Визначити, у якій точці дотична до параболи $y = x^2$ утворює із прямою $3x - y + 1 = 0$ кут $\frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. [4.3.7, 7.5.2.]

Нехай точка дотику $M_0(x_0;y_0)$. Тоді

$$k_{\text{дот.}} \overset{[7.5.2]}{=} y'(x_0) = 2x_0.$$

[*Знаходимо кутовий коефіцієнт прямої* $3x - y + 1 = 0$.]

$$3x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + 1 \Rightarrow k = 3.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \overset{[4.10.3]}{=} \left|\frac{2x_0 - 3}{1 + 2x_0 \cdot 3}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{2x_0 - 3}{6x_0 + 1}\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x_{01} &= -1, \\ x_{02} &= \frac{1}{4} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} y_{01} &= 1, \\ y_{02} &= \frac{1}{16}. \end{aligned}\right.$$

Дотична до параболи $y = x^2$ утворює кут $\frac{\pi}{4}$ із прямою $3x - y + 1 = 0$ в точках $M_1(-1;1)$ та $M_2\left(\frac{1}{4};\frac{1}{16}\right)$.

7.2.3. Визначити, під яким кутом перетинаються гіпербола $y = \frac{1}{x}$ із параболою $y = \sqrt{x}$.

Розв'язання. [7.5.5.]

[*Знаходимо точки перетину гіперболи та параболи.*]

$$\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1, y = 1.$$

Криві перетинаються в точці $M_0(1;1)$.

[*Знаходимо кутові коефіцієнти дотичних у точці* M_0.]

$$k_1 = (\sqrt{x})'\big|_{x=1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = \frac{1}{2};$$

$$k_2 = \left.\left(\frac{1}{x}\right)'\right|_{x=1} = -\left.\frac{1}{x^2}\right|_{x=1} = -1.$$

Отже,

$$\operatorname{tg}\varphi \overset{[4.3.7]}{=} \left[\operatorname{tg}(\widehat{L_1, L_2}) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right] = \frac{\frac{1}{2} - (-1)}{1 + \frac{1}{2}\cdot(-1)} = 3.$$

Криві утворюють гострий кут $\varphi_1 = \operatorname{arctg} 3$ і тупий кут $\varphi_2 = \pi - \operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

7.2.4.1. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^2 + 3t + 1$ м. Визначити його швидкість у момент $t = 4$ с.

Розв'язання. [7.5.7.]

Швидкість руху тіла є похідною від пройденого шляху. Отже,

$$v(t) = s'(t) = (t^2 + 3t + 1)' = 2t + 3.$$
$$v(4) = 11 \text{ м/с}.$$

7.2.4.2. Кількість електрики, що протікає через провідник, починаючи з моменту $t = 0$, задано формулою $q(t) = 2t^2 + 3t + 1$ Кл. Знайти силу струму наприкінці п'ятої секунди.

Розв'язання. [7.5.8.]

Сила струму є похідною від кількості електрики, що протікає через провідник. Отже,

$$I(t) = q'(t) = (2t^2 + 3t + 1)' = 4t + 3;$$
$$I(5) = 23 \text{ А}.$$

7.2.5. Обчисліть наближено $\ln(1,02)$.

Розв'язання. [7.5.6.]

[*Щоб скористатися формулою* [*7.5.6*] *наближеного обчислення значення функції,*

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

визначаємо $f(x), x_0$ *та* Δx.**]**

$$f(x) = \ln x, x_0 = 1, \Delta x = 0,02.$$

$$f(1) = \ln 1 = 0,\ f'(1) = \left.\frac{1}{x}\right|_{x=1} = 1.$$

$$\ln(1,02) \approx 0 + 1 \cdot 0,02 = 0,02.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

7.2.6. Запишіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4;$ 2) $f(x) = \ln x, x_0 = 1;$

3) $f(x) = x^2 - 4x + 5, x_0 = 2;$ 4) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x, x_0 = -2;$

5) $f(x) = \sqrt{x+1} + 1, x_0 = -1;$ 6) $f(x) = \sqrt[3]{x-1} - 2, x_0 = 1.$

7.2.7. Запишіть рівняння дотичної до кривої L у точці M_0 та в точці M_1, що відповідає значенню параметра $t = t_1$, якщо:

1) $L : \begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases} M_0\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; 2\sqrt{2}\right), t_1 = 0;$

2) $L : \begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \end{cases} M_0(0;0), t_1 = \frac{\pi}{4}.$

7.2.8. Запишіть рівняння дотичної та нормалі до кривої в точці M_0:

1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1, M_0\left(2; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right);$ 2) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1, M_0(4; -\sqrt{3}).$

7.2.9. У яких точках кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ дорівнює k, якщо:

1) $f(x) = x^3, k = 3;$ 2) $f(x) = \frac{3}{x}, k = -3.$

7.2.10. Запишіть рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$, яка: а) паралельна прямій L_1, б) перпендикулярна до прямої L_2, якщо:

1) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 6, L_1 : y = x, L_2 : x + 5y - 10 = 0;$

2) $f(x) = x^3, L_1 : 3x - y + 5 = 0, L_2 : y = -\frac{x}{12}.$

7.2.11. З'ясуйте, під якими кутами перетинаються:

1) парабола $y = x^2$ та пряма $3x - y - 2 = 0;$

2) синусоїда $y = 1 + \sin x$ та пряма $y = 1.$

7.2.12. 1. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = (9t - t^3)$ м. Знайдіть швидкість руху для моментів $t = 1$ с та $t = 2$ с.

2. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \dfrac{t^4}{4} - 4t^3 + 16t^2$. Знайдіть швидкість руху. Коли тіло рухається у зворотному напрямі?

7.2.13. Обчисліть наближено значення функції f у точці x_1, якщо:

1) $f(x) = \operatorname{arctg} x, x_1 = 1{,}04$; 2) $f(x) = e^{x^2 - x}, x_1 = 1{,}2$.

7.2.14. Складіть диференціальне рівняння кривої, що має характеристичну властивість:

1) квадрат довжини відрізка, який відтинає будь-яка дотична від осі ординат, дорівнює добутку координат точки дотику;

2) будь-яка дотична перетинається з віссю ординат у точці, однаково віддаленої від точки дотику до початку координат.

Відповіді

7.2.6. 1) $y = \dfrac{1}{4}x + 1,\ y = 18 - 4x$; 2) $y = x - 1, y = 1 - x$; 3) $y = 1, x = 2$; 4) $y = 8,\ x = -2$; 5) $x = -1, y = 1$; 6) $x = 1, y = -2$.

7.2.7. 1) $y = -\dfrac{4}{3}x + 4\sqrt{2} = 0, x = 3$; 2) $y = 0, (\pi + 4)x + (\pi - 4)y - \pi^2\dfrac{\sqrt{2}}{4} = 0$.

7.2.8. 1) $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}x + 2\sqrt{3}, y = \dfrac{4}{\sqrt{3}}x - \dfrac{7}{2\sqrt{3}}$; 2) $y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x - 5\sqrt{3}$.

7.2.9. 1) $(1;1), (-1;-1)$; 2) $(1;3), (-1;-3)$.

7.2.10. 1) а) $y = x - 14$, б) $y = 5x - 38$; 2) а) $y = 3x \pm 2$, б) $y = 12x \pm 16$.

7.2.11. 1) $\alpha_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}, \alpha_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{13}$; 2) $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{4}, \alpha_2 = \dfrac{3\pi}{4}$.

7.2.12. 1) 6 м/с; -3 м/с; 2) $v = t^3 - 12t^2 + 32t$, рух у зворотному напрямі від $t = 4$ до $t = 8$.

7.2.13. 1) $0{,}805$; 2) $1{,}2$.

7.2.14. 1) $y' = \dfrac{y}{x} \pm \sqrt{\dfrac{y}{x}}$; 2) $y' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}\right)$.

Практикум 7.3. Похідні вищих порядків

Навчальні задачі

7.3.1.1. Знайти похідну 5-го порядку функції $f(x) = 5x^4$.

Розв'язання. [7.4.1.]

[*Послідовно знаходимо похідні 1—5-го порядку.*]

$$f'(x) = 20x^3;\ f''(x) = (20x^3)' = 60x^2;\ f'''(x) = (60x^2)' = 120x;$$
$$f^{(4)}(x) = (120x)' = 120;\ f^{(5)}(x) = (120)' = 0.$$

7.3.1.2. Знайти похідну 3-го порядку функції $f(x) = \sin^2 x$.

Розв'язання. [7.4.1.]

$$f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x;\ f''(x) = (\sin 2x)' = 2\cos 2x;$$
$$f'''(x) = (2\cos 2x)' = -4\sin 2x.$$

7.3.1.3. Знайти похідну 50-го порядку функції $f(x) = \cos 2x$.

Розв'язання. [7.4.7.]

$$(\cos 2x)^{(50)} \overset{[7.4.7.7]}{=} \left[(\cos \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\alpha x + n\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2^{50}\cos\left(2x + 50\cdot\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$2^{50}\cos(2x + 25\pi) = 2^{50}\cos(2x + 12\cdot 2\pi + \pi) =$$
$$= 2^{50}\cos(2x+\pi) = -2^{50}\cos 2x.$$

7.3.2.1. Знайти похідну $f^{(100)}(x)$, де $f(x) = (x^2+1)\cos 2x$.

Розв'язання. [7.4.5.]

[*Щоб знайти похідну, використовуємо Ляйбніцеву формулу* [*7.4.5.*]

$$\big(u(x)v(x)\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x).]$$

$$u = \cos 2x, v(x) = x^2+1, n = 100.$$

$$(uv)^{(100)} = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k u^{(100-k)}v^{(k)}$$

[*Послідовно знаходимо похідні й обчислюємо значення біноміальних коефіцієнтів доти, доки похідна однієї з функцій не дорівнюватиме нулю.*][①]

$$\begin{array}{lll} v^{(0)}(x) = x^2+1 & C_{100}^0 = 1 & u^{(100)}(x) = 2^{100}\cos 2x \\ v'(x) = 2x & C_{100}^1 = 100 & u^{(99)}(x) = 2^{99}\sin 2x \\ v''(x) = 2 & C_{100}^2 = 4950 & u^{(98)}(x) = -2^{98}\cos 2x \\ v'''(x) = 0 \ldots\ldots & & \end{array}$$

[*Підставляємо знайдені похідні й коефіцієнти у формулу.*]

$$f^{(100)}(x) =$$
$$= 2^{100}\cos 2x\cdot(x^2+1)+100\cdot 2^{100}\sin 2x\cdot x-4950\cdot 2^{99}\cos 2x+0+\ldots+0=$$
$$=2^{100}\Big((x^2-2474)\cos 2x+100x\sin 2x\Big).$$

Коментар. ① Оскільки,

$$u^{(100)}(x)=2^{100}\cos\big(2x+50\pi\big)\overset{[7.4.7]}{=}2^{100}\cos 2x;$$
$$u^{(99)}(x)=2^{99}\cos\left(2x+\frac{99\pi}{2}\right)=2^{99}\sin 2x;$$
$$u^{(98)}(x)=2^{98}\cos\big(2x+49\pi\big)=-2^{98}\cos 2x.$$

$$C_{100}^{1}\overset{[1.15.5]}{=}\frac{100!}{1!99!}=100;$$

$$C_{100}^{2}=\frac{100!}{2!98!}\overset{[1.15.5]}{=}\frac{100\cdot 99}{1\cdot 2}=4950.$$

7.3.2.2. Знайти похідну $f^{(n)}(x)$, де $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}$.

Розв'язання. [7.4.5.]

Функція означена й диференційовна на $(-\infty;1),(1;2),(2;+\infty)$.

[*Розкладаємо дробово-раціональний вираз на суму елементарних дробів.*]

$$\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{(A+B)x-B-2A}{(x-1)(x-2)}.$$

[*У рівних дробів, з рівними знаменниками, повинні бути рівні чисельники. Два многочлена тотожно рівні (тобто для всіх значень x), якщо вони мають рівні коефіцієнти при однакових степенях.*]

$$x-3\equiv(A+B)x-B-2A\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=1,\\-B-2A=-3.\end{cases}$$

$$y=\frac{x-3}{x^2-3x+2}=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-2}.$$
$$y^{(n)}=2\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}\overset{[7.4.7]}{=}2\cdot\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}.$$

7.3.3. Знайти похідну y''_{xx} функції y, заданої параметрично:
$$y(x):\begin{cases}x = a\cos t,\\ y = b\sin t, t\in[0;2\pi).\end{cases}$$

Розв'язання. [7.4.6.]

$$y'_x:\begin{cases}x = a\cos t, t\in[0;2\pi),\\ y'_x(t) = \dfrac{b\cos t}{-a\sin t} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t.\end{cases}\quad y''_{xx}:\begin{cases}x = a\cos t, t\in[0;2\pi),\\ y''_{xx}(t) = \dfrac{\frac{b}{a}\frac{1}{\sin^2 t}}{-a\sin t} = -\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}.\end{cases}$$

7.3.4. Знайти похідну y'' функції y, , заданої неявно співвідношенням
$$y = x + \operatorname{arctg} y.$$

Розв'язання.

[*Знаходимо 1-шу похідну функції, заданої неявно.*]
$$y - x - \operatorname{arctg} y = 0.$$
$$y' - 1 - \frac{y'}{1+y^2} = 0;$$
$$y'\left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right) = 1;$$
$$y' = \frac{1+y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} + 1.$$

[*Диференціюємо вираз для y' за змінною x.*]
$$y'' = \left(\frac{1}{y^2}+1\right)' = \underset{\substack{\text{підставляємо}\\ \text{вираз для } y'}}{-\frac{2y'}{y^3}} = -\frac{2}{y^3}\left(\frac{1}{y^2}+1\right) = -\frac{2}{y^3} - \frac{2}{y^5}.$$

7.3.5. Знайти диференціал 2-го порядку функції $f(x) = \ln(1+x^2)$.

Розв'язання. [7.4.4.]
$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2};\ f''(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$
$$d^2 f \overset{[7.4.4]}{=} \left[d^2 f = f''(x)dx^2\right] = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}dx^2.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

7.3.6. Знайдіть зазначену похідну:

1) $f(x) = (x+10)^6, f'''(2);$
2) $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4, f^{(4)}(1);$
3) $f(x) = x^3 \ln x, f^{(4)}(x);$
4) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), f''(x);$
5) $f(x) = (2x+3)e^{-x}, f''(x);$
6) $f(x) = (3x-4)e^{2x}, f'''(x);$
7) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}, f''(x);$
8) $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, f''(x);$
9) $f(x) = xe^x, f^{(n)}(x);$
10) $f(x) = \ln(ax+b), f^{(n)}(x);$
11) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}, f^{(n)}(x);$
12) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}, f^{(n)}(x).$

7.3.7. 1. Доведіть, що функція $y = A\sin(\omega t + \omega_0) + B(\cos\omega t + \omega_0)$ справджує диференціальне рівняння $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0.$

2. Доведіть, що функція $y = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx} + C_3 \cos nx + C_4 \sin nx$ справджує диференціальне рівняння $\dfrac{d^4y}{dx^4} = n^4 y.$

7.3.8. Знайдіть зазначену похідну функції $y(x)$, заданої неявно:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, y'';$
2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, y'';$
3) $x^3 + y^3 - 3axy = 0, y'';$
4) $y = \sin(x+y), y'';$
5) $y = \operatorname{tg}(x+y), y''';$
6) $e^{x+y} = xy, y''.$

7.3.9. Знайдіть похідну y''_{xx} функції y, заданої параметрично:

1) $y(x): \begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$
2) $y(x): \begin{cases} x = a(\varphi - \sin\varphi), \\ y = a(1 - \cos\varphi); \end{cases}$
3) $y(x): \begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 - 1; \end{cases}$
4) $y(x): \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1 - t^2). \end{cases}$

7.3.10. Знайдіть похідну за Ляйбніцевою формулою:

1) $((x^2+1)\sin x)^{(20)}$; 2) $((x^2+x+1)\cos x)^{(15)}$;

3) $((2x-3)e^{-2x})^{(10)}$; 4) $(x^2e^{-x})^{(8)}$;

5) $(x\ln x)^{(8)}$; 6) $(x\log_2 x)^{(9)}$.

7.3.11. Знайдіть диференціал d^2f функції:

1) $f(x)=4^{-x^2}$; 2) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

Відповіді

7.3.6. 1) $f'''(2)=207360$; 2) $f^{(4)}(1)=360$; 3) $f^{(4)}(x)=\dfrac{6}{x}$; 4) $f''(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$;

5) $f''(x)=e^{-x}(2x-1)$; 6) $f'''(x)=4e^{2x}(6x+1)$; 7) $f''(x)=\dfrac{6x(2x^3-1))}{(x^3+1)^3}$;

8) $f''(x)=-\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$; 9) $f^{(n)}(x)=e^x(x+n)$; 10) $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}$;

11) $f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!}{2}\left[\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}+\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$;

12) $f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$.

7.3.8. 1) $y''=-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$; 2) $y''=-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$; 3) $y''=-\dfrac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$;

4) $y''=-\dfrac{y}{(1-\cos(x+y))^3}$; 5) $y'''=\dfrac{-2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}$; 6) $y''=-\dfrac{y((x-1)^2+(y-1)^2)}{x^2(y-1)^3}$.

7.3.9. 1) $y''_{xx}:\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y''_{xx}(t)=\dfrac{1}{3a\cos^4 t\sin t};\end{cases}$ 2) $y''_{xx}:\begin{cases}x=a(\varphi-\sin\varphi),\\ y''_{xx}(\varphi)=-\dfrac{1}{a(1-\cos\varphi)^2};\end{cases}$

3) $y''_{xx}:\begin{cases}x=\ln t,\\ y''_{xx}(t)=4t^2;\end{cases}$ 4) $y''_{xx}:\begin{cases}x=\arcsin t,\\ y''_{xx}(t)=-\dfrac{2}{1-t^2}.\end{cases}$

7.3.10. 1) $(x^2-379)\sin x-40x\cos x$; 2) $(x^2+x-209)\sin x-(30x+15)\cos x$;

3) $1024e^{-2x}(2x-13)$; 4) $e^{-x}(x^2-16x+56)$; 5) $\dfrac{720}{x^7}$; 6) $-\dfrac{5040}{x^8\ln 2}$.

7.3.11. 1) $d^2f=4^{-x^2}2\ln 4\cdot(2x^2\ln 4-1)dx^2$; 2) $d^2f=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}dx^2$.

Практикум 7.4. Правило Бернуллі — Лопіталя

Навчальні задачі

7.4.1. Перевірити Ролеву теорему для функції $f(x) = x - x^3$ на $[-1;0]$ та $[0;1]$.

Розв'язання. [7.6.1.]

Оскільки f неперервна й диференційовна на $\mathbb{R}$, то вона є неперервною на відрізках $[-1;0]$ та $[0;1]$ і диференційовною в інтервалах $(-1;0)$ та $(0;1)$.

$$f(-1) = f(0) = f(1) = 0.$$

Отже, на $[-1;0]$ та $[0;1]$ виконано всі умови Ролевої теореми для функції f.

[*Знаходимо значення c, про яке йдеться в теоремі.*]

$$f'(x) = 1 - 3x^2.$$

$$f'(c) = 1 - 3c^2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \in (-1;0), c_2 = \sqrt{\frac{1}{3}} \in (0;1).$$

7.4.2. Довести, що для многочлена $P(x) = (x^2 + 1)(x + 3)(x + 2)(x - 1)$ в інтервалі $(-3;1)$ існує корінь рівняння $P''(x) = 0$.

***Розв'язання*. [7.6.1.]**

Оскільки

$$P(-3) = P(-2) = P(1) = 0,$$

і $P(x)$ — функція диференційовна на $\mathbb{R}$, то для функції $P(x)$ виконано всі умови Ролевої теореми на $[-3;-2]$ і $[-2;1]$:

$$\exists c_1 \in (-3;-2) : P'(c_1) = 0;$$
$$\exists c_2 \in (-2;1) : P'(c_2) = 0.$$

Для функції $P'(x)$ на $[c_1;c_2] \subset (-3;1)$ виконано всі умови Ролевої теореми:

$$\exists d \in (c_1;c_2) \Rightarrow d \in (-3;1) : P''(d) = 0.$$

7.4.3. Перевірити Лаґранжову теорему для $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ на $[-1;1]$.

Розв'язання. [7.6.2.]

Функція f справджує умови Лаґранжової теореми на $[-1;1]$: неперервна на відрізку $[-1;1]$ і диференційовна в інтервалі $(-1;1)$.

$$f'(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x};\ f(1) - f(-1) = 2f'(c);$$

$$0 = \frac{4}{3}\sqrt[3]{c} \Rightarrow c = 0 \in (-1;1).$$

7.4.4. Довести нерівність $\left|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b\right| \le \left|a - b\right|$.

Розв'язання. [7.6.2.]

Для $a = b$, нерівність виконано. Отже, нехай $a < b$. Для функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$ на $[a;b]$ виконано умови Лаґранжової теореми.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\frac{\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b}{a-b} = \frac{1}{1+c^2}, c \in (a;b).$$

$$\left|\frac{\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b}{a-b}\right| \le 1 \Leftrightarrow \left|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b\right| \le \left|a-b\right|.$$

7.4.5. З'ясувати чи застосовна теорема Коші для функцій $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^3$ на $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$?

Розв'язання. [7.6.3.]

Функції f і g неперервні й диференційовні на $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Але

$$g'(0) = 3x^2 \,|_{x=0} = 0.$$

Отже, теорема Коші до цих функцій не застосовна① .

Коментар. ① Невиконання умови теореми призводить до можливого невиконання твердження:

$$\frac{\sin c}{3c^2} \ne \frac{\cos\frac{\pi}{2} - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)^3} = 0 \ \ \forall c \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$$

7.4.6.1. Користуючись правилом Бернуллі — Лопіталя, знайти $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Розв'язання. [7.6.4.]

[*Перевіряємо умови застосовності правила Бернуллі — Лопіталя.*]

Функції $f(x) = \ln x$ та $g(x) = x$:

1) означені та диференційовні, коли $x \to +\infty$,

2) $g'(x) = 1 \ne 0$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

[*Для того щоб знайти* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\text{ або }\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ *за правилом Бернуллі — Лопіталя з'ясовуємо, чи існує* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L.$]

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0=L.$$

[*Висновуємо, що*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\text{ або }\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L.]$$

Отже,①

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Коментар. ① Зазвичай знаходження $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ за правилом Бернуллі — Лопіталя записують так відразу, переконуючись в існуванні потрібних похідних і границь під час обчислень. Якщо ж з'ясовується, що $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ не існує, то висновують, що правило Бернуллі — Лопіталя **не застосовне** і знаходять границю в інший спосіб.

7.4.6.2. Користуючись правилом Бернуллі — Лопіталя, знайти

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x-\sin x}.$$

Розв'язання. [7.6.4.]

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x-\sin x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(2x-\sin x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{2-\cos x}\text{ не існує,}$$

тобто правило Бернуллі — Лопіталя не застосовне, але

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{2-\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{2}.$$

7.4.6.3. Користуючись правилом Бернуллі — Лопіталя, знайти

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{50}-2x+1}{x^{100}-2x+1}.$$

Розв'язання. [7.6.4.]

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{50}-2x+1}{x^{100}-2x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{(x^{50}-2x+1)'}{(x^{100}-2x+1)'}=\lim_{x\to1}\frac{50x^{49}-2}{100x^{99}-2}=\frac{24}{49}.$$

7.4.6.4. Користуючись правилом Бернуллі — Лопіталя, знайти $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

Розв'язання. [7.6.4.]

[*Перетворюємо невизначеність* $\infty-\infty$ *до вигляду* $\frac{0}{0}$, *зводячи дроби до спільного знаменника.*]①

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}\overset{②}{=}\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=$$

використовуємо еквівалентність у знаменнику

$$=\lim_{x\to0}\frac{(e^x-x-1)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}\overset{[6.7.4]}{=}\frac{1}{2}.$$

Коментар. ① Щоб перетворити різницю на частку використовують формули:

$$f-g=\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}};\quad \frac{1}{f}-\frac{1}{g}=\frac{g-f}{fg}.$$

Використання правила Бернуллі — Лопіталя можливо лише для розкриття невизначеностей $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$. Застосування його до невизначеностей іншого вигляду або до «визначеностей», призведе до помилкового результату:

$$\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x-1}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty\neq\lim_{x\to1}\frac{(x+1)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{1}{1}=1.$$

② Перед використанням правила Бернуллі — Лопіталя варто, де це можливо, скористатись еквівалентностями.

7.4.6.5. Користуючись правилом Бернуллі — Лопіталя, знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}$.

Розв'язання. [7.6.4.]

[*Перетворюємо невизначеність* $0\cdot\infty$ *до вигляду* $\frac{\infty}{\infty}$.]①

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \left[\infty\cdot 0\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{②}=$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0.$$

Коментар. ① Щоб перетворити добуток на частку використовують формули:

$$fg = \frac{f}{g^{-1}} = \frac{g}{f^{-1}}.$$

② Правило Бернуллі — Лопіталя використовують повторно доти, доки не усунуть невизначеність або з'ясують, що правило не застосовне.

7.4.6.6. Користуючись правилом Бернуллі — Лопіталя, знайти $\lim\limits_{x\to1-0}(1-x)^{\ln x}$.

Розв'язання. [7.6.4.]

[*Перетворюємо невизначеність* 0^0 *до вигляду* $0\cdot\infty$.]①

$$\lim_{x\to1-0}(1-x)^{\ln x} = [0^0] = e^{\lim\limits_{x\to1-0}\ln(1-x)\cdot\ln x} = e^A.$$

$$A = \lim_{x\to1-0}\ln(1-x)\cdot\ln x = \left[0\cdot\infty\right] = \left|\begin{matrix}\ln x\sim(x-1),\\ x\to1-0\end{matrix}\right| =$$
$$= \lim_{x\to1-0}\ln(1-x)\cdot(x-1) = \lim_{x\to1-0}\frac{\ln(1-x)}{(x-1)^{-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$
$$= \lim_{x\to1-0}\frac{-(1-x)^{-1}}{-(1-x)^{-2}} = \lim_{x\to1-0}(1-x) = 0.$$
$$\lim_{x\to1-0}(1-x)^{\ln x} = e^0 = 1.$$

Коментар. ① Для перетворення степенево-показникової невизначеності використовують формулу:

$$f^g = e^{g\ln f}(f>0).$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

7.4.7. 1. Нехай $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$. Доведіть, що всі три корені рівняння $f'(x)=0$ дійсні.

2. Покажіть правдивість Ролевої теореми для функції $f(x)=2^{x^2-x}$ на [0;1].

7.4.8. 1. Доведіть, що рівняння $16x^4 - 64x + 31 = 0$ не може мати двох різних дійсних коренів у інтервалі (0;1).

2. Доведіть, що рівняння $e^{x-1} + x - 2 = 0$, яке має корінь $x = 1$ (перевірте!), не має інших дійсних коренів.

7.4.9. 1. Застосовуючи Лаґранжову формулу для функції $f(x) = \sqrt{3}x^3 + 3x$ на відрізку [0;1], визначте точку $x = c$, про яку йдеться в теоремі.

2. Застосовуючи формулу Коші для функцій $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ та $g(x) = x^2 + 4$ на відрізку [0;2], визначте точку $x = c$, про яку йдеться в теоремі.

7.4.10. Застосовуючи Лаґранжову формулу, доведіть нерівність:

1) $e^x > 1 + x, x \neq 0$;

2) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, x > 0$.

7.4.11. Користуючись правилом Бернуллі — Лопіталя, знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100} + x - 2}{x^{50} + x - 2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 3^x}{4^x - 5^x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$;

4) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{5}}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - \cos\alpha x}{e^{\beta x} - \cos\beta x}$;

9) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^n e^{-x})$;

10) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^3}$.

7.4.12. Користуючись правилом Бернуллі — Лопіталя, знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - \ln^3 x)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1} \sin(x-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1+0} \ln x \cdot \ln(x-1)$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}((\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x)$; 6) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

7.4.13. Користуючись правилом Бернуллі — Лопіталя, знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{3}{\ln\sin x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to+0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to+0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to\pi/2-0} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$; 10) $\lim\limits_{x\to1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

7.4.14. Перевірте, що задана границя існує, але її не можна знайти за правилом Бернуллі — Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Відповіді

7.4.9. 1) $c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $c_1 = \dfrac{1}{2}, c_2 = \dfrac{5}{3}$.

7.4.11. 1) $\dfrac{101}{51}$; 2) $\dfrac{\ln 2 - \ln 3}{\ln 4 - \ln 5}$; 3) 1; 4) $\dfrac{2}{3\sqrt[6]{5}}$; 5) $-\dfrac{1}{2}$; 6) 2; 7) $-\infty$; 8) $\dfrac{\alpha}{\beta}$; 9) 0; 10) 0.

7.4.12. 1) 0; 2) $+\infty$; 3) $-\dfrac{2}{\pi}$; 4) 0; 5) 0; 6) $\dfrac{1}{2}$; 7) $\dfrac{1}{12}$; 8) -1.

7.4.13. 1) $\dfrac{1}{e}$; 2) e^3; 3) e^3; 4) 1; 5) 1; 6) $\dfrac{1}{e}$; 7) e^2; 8) 1; 9) $\dfrac{e}{2}$. 10) $\dfrac{1}{e}$.

7.4.14. 1) 0; 2) 1.

Практикум 7.5. Тейлорова формула

Навчальні задачі

7.5.1.1. Записати формулу Тейлора 2-го порядку для функції f в околі точки x_0 із залишковим членом у формі Пеано.

Розв'язання. [7.7.7.]

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), x \to x_0.$$

7.5.1.2. Записати формулу Тейлора 3-го порядку для функції f в околі точки x_0 із залишковим членом у формі Лаґранжа.

Розв'язання. [7.7.2, 7.7.6.]

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) +$$
$$+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x - x_0)^4, c \in (x_0; x).$$

7.5.2.1. Розкласти многочлен $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$ за степенями $(x - 2)$.

Розв'язання. [7.7.2, 7.7.6.]

[*Записуємо формулу Тейлора для функції f в околі точки $x_0 = 2$.*]

Оскільки $f^{(k)}(x) = 0$ для $k > 4$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x - 2)^k =$$
$$= f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x - 2) + \frac{f''(2)}{2!}(x - 2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x - 2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x - 2)^4.$$

[*Знаходимо значення функції та значення похідних до 4-го порядку включно функції f у точці $x_0 = 2$.*]

$$f(2) = 0;$$
$$f'(x) = 8x^3 - 15x^2 - 6x + 8,\ f'(2) = 0;$$
$$f''(x) = 24x^2 - 30x - 6,\ f''(2) = 30;$$
$$f'''(x) = 48x - 30,\ f'''(2) = 66;$$
$$f^{(4)}(x) = 48.$$

[*Підставляємо знайдені значення у формулу Тейлора.*]

$$f(x) = 15(x - 2)^2 + 11(x - 2)^3 + 2(x - 2)^4.$$

7.5.2.2. Розвинути функцію $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ за степенями $(x-2)$, до члена, що містить $(x-2)^3$.

Розв'язання. [7.7.2, 7.7.5.]

$$f(x)=\frac{x}{1-x}=-1-\frac{1}{x-1},\ x_0=2, n=3.$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{3}\frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k+o\Big((x-2)^3\Big).$$

$$f'(x)=\frac{1}{(x-1)^2};\ f''(x)=\frac{-2}{(x-1)^3};\ f'''(x)=\frac{6}{(x-1)^4}.$$

$$f(2)=-2,\ f'(2)=1;$$

$$f''(2)=-2,\ f'''(2)=6.$$

$$f(x)=-2+(x-2)-(x-2)^2+(x-2)^3+o\Big((x-2)^3\Big),$$

коли $x\to 2$.

7.5.2.3. Розвинути функцію $f(x)=e^x\ln(x+1)$ за степенями x, до члена, який містить x^3 включно.

Розв'язання. [7.7.8.]

[*Записуємо формули Тейлора — Маклорена 3-го порядку для функцій $f(x)=e^x$ та $f(x)=\ln(x+1)$ із залишковим членом у формі Пеано.***]**

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

[*Перемножуємо обидва розвинення і збираємо подібні до x^3 включно.***]**

$$e^x\ln(1+x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)=$$

$$=x+x^2\left(1-\frac{1}{2}\right)+x^3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+o(x^3)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

$$e^x\ln(1+x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

7.5.3.1. Обчислити $\sqrt[3]{30}$ з точністю до 10^{-4} за допомогою Тейлорової формули.

Розв'язання. [7.7.8.]

[*Перетворюємо підкореневий вираз, виділяючи з нього найближчий повний куб.*]

$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27+3} = \sqrt[3]{27\left(1+\frac{1}{9}\right)} = 3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}}.$$

[*Записуємо формулу Тейлора — Маклорена для функції* $f(x) = (1+x)^{1/3}$ *в околі точки* $x_0 = 0$ *із залишковим членом у Лаґранжовій формі.*]

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)...\left(\frac{1}{3}-k+1\right)}_{k\text{ множників}} \frac{x^k}{k!} + r_n(x),$$

$$r_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} \cdot \frac{2\cdot 5\cdot 8...(3n-1)}{3^{n+1}(1+c)^{n+\frac{2}{3}}}\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}, c \in \left(0;\frac{1}{9}\right).$$

[*Підбираємо такий порядок формули Тейлора, щоб залишковий член за модулем не перевищував заданої похибки.*]

$$\left|3r_1(x)\right| = \frac{2}{3\cdot 2!}(1+c)^{-\frac{5}{3}}\left(\frac{1}{9}\right)^2 < \frac{1}{3^5} > 10^{-4};$$

$$\left|3r_2(x)\right| = \frac{2\cdot 5}{3^2\cdot 3!}(1+c)^{-\frac{8}{3}}\left(\frac{1}{9}\right)^3 < \frac{5}{3^9} > 10^{-4};$$

$$\left|3r_3(x)\right| = \frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^3\cdot 4!}(1+c)^{-\frac{11}{3}}\left(\frac{1}{9}\right)^4 < \frac{10}{3^{12}} < 10^{-4} \Rightarrow n = 3.$$

[*Обчислюємо шукане значення за формулою Тейлора 3-го порядку, беручи у проміжних обчисленнях один запасний десятковий знак після коми.*]

$$\sqrt[3]{30} \approx 3\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{9}\right)^3\right) \approx$$

$$\approx 3(1{,}00000 + 0{,}03703 - 0{,}00137 + 0{,}00008) = 3\cdot 1{,}03574 = 3{,}10722.$$

[*Залишаємо в результаті лише 4 знаки після коми.*]

$$\sqrt[3]{30} = 3{,}1072 \pm 10^{-4}.$$

7.5.3.2. Обчислити $e^{0,1}$ з точністю до $0,001$.

Розв'язання. [7.7.8.]

[*Записуємо формулу Тейлора — Маклорена для* e^x *із залишковим членом у Лаґранжовій формі.*]

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x),$$
$$r_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}, 0 < c < \frac{1}{10}.$$

[*Визначаємо потрібний порядок Тейлорової формули, оцінюючи модуль залишкового члена.*]

$$\left|r_n(x)\right| = \frac{e^c(0{,}1)^{n+1}}{(n+1)!} < \underbrace{\frac{2}{10^{n+1}(n+1)!}}_{\substack{\text{для зручності}\\ \text{підсилюємо нерівність}}} < 0{,}001.$$

$$n = 1 : \frac{1}{100} > 0{,}001; \quad n = 2 : \frac{1}{3000} < 0{,}001.$$

$$e^{0{,}1} \approx 1 + \frac{0{,}1}{1!} + \frac{0{,}01}{2!} = 1{,}0000 + 0{,}1000 + 0{,}0050 = 1{,}1050.$$
$$e^{0{,}1} \approx 1{,}105 \pm 10^{-3}.$$

7.5.4. Оцінити похибку, яку допускають, обчислюючи значення $\ln 1{,}5$ за формулою: $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$.

Розв'язання. [7.7.8.]

$n = 4, x_0 = 0.$

$$r_4(x) = \frac{4!x^5}{5!(1+c)^4}, 0 < c < x = 0{,}5.$$

$$0 < r_4(x) \le \max_{0 \le c \le 0{,}5} \frac{1}{5}\frac{(0{,}5)^5}{(1+c)^4} < \frac{(0{,}5)^5}{5} < 0{,}01 = \varepsilon.$$

$$\ln 1{,}5 \approx 0{,}5 - \frac{1}{2}(0{,}5)^2 + \frac{1}{3}(0{,}5)^3 - \frac{1}{4}(0{,}5)^4 \approx 0{,}40.$$
$$\ln 1{,}5 \approx 0{,}40 \pm 0{,}01.$$

7.5.5. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{e^{-x}-1+x-\dfrac{x^2}{2!}}$, використовуючи формулу Тейлора.

Розв'язання. [7.7.7.]

[*Підставляємо замість* $\sin x$ *та* e^{-x} *їхні формули Тейлора за степенями* x *такого порядку, щоб після знищення, залишалися доданок або доданки.*]

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{e^{-x}-1+x-\dfrac{x^2}{2!}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}{\left(1-\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-1+x-\dfrac{x^2}{2!}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)}{-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)}=-1.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

7.5.6. 1. Розкладіть многочлен $f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$ за степенями $(x-4)$.

2. Розкладіть многочлен $f(x)=x^3+3x^2-2x+4$ за степенями $(x+1)$.

7.5.7. Многочлен f розкладіть за степенями x, застосовуючи Тейлорову формулу, якщо:

1) $f(x)=(x^2-3x+1)^3$; 2) $f(x)=(x^2+x-2)^3$.

7.5.8. Напишіть Тейлорову формулу 3-го порядку для функції f в околі точки $x_0=0$ і побудуйте графіки заданої функції та її многочлена Тейлора 3-го степеня, якщо:

1) $f(x)=\operatorname{tg} x$; 2) $f(x)=\arcsin x$.

7.5.9. Напишіть Тейлорову формулу n-го порядку для функції f в околі точки x_0, якщо:

1) $f(x)=xe^x, x_0=0$; 2) $f(x)=\sqrt{x}, x_0=4$.

7.5.10. 1. Знайдіть перші три члени розвинення функції $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$ за Тейлоровою формулою в околі точки $x_0 = 1$. Обчисліть наближено $f(1{,}03)$.

2. Знайдіть перші три члени розвинення функції

$$f(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 3$$

за Тейлоровою формулою в околі точки $x_0 = 2$. Обчисліть наближено $f(2{,}02)$ та $(1{,}97)$.

7.5.11. Застосовуючи наближену формулу, знайдіть указане значення й оцініть похибку:

1) $e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2}, \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$; 2) $\ln(1+x) \approx x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}, \ln 1{,}1$.

7.5.12. Обчисліть з абсолютною похибкою, меншою від $0{,}001$, наближене значення:

1) $\sin 1$; 2) $\sqrt{e}$;

3) $\ln 1{,}05$; 4) $\sqrt[5]{33}$.

7.5.13. Знайдіть за допомогою Тейлорової формули:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(1-\cos x) - x\sin x}{x^4}$.

Відповіді

7.5.6. 1) $f(x) = (x-4)^4 + 11(x-4)^3 + 37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56$;
2) $f(x) = 8 - 5(x+1) + (x+1)^3$.

7.5.7. 1) $f(x) = x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 45x^3 + 30x^2 - 9x + 1$;
2) $f(x) = x^6 + 3x^5 - 3x^4 - 11x^3 + 6x^2 + 12x - 8$.

7.5.8. 1) $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + r_3(x)$; 2) $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + r_3(x)$.

7.5.9. 1) $x + \dfrac{x^2}{1!} + \dfrac{x^3}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{(n-1)!} + r_n(x)$;

2) $2+\dfrac{x-4}{4}-\dfrac{(x-4)^2}{64}+\dfrac{(x-4)^3}{512}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{(2n-2)!}{n!(n-1)!2^{4n-2}}(x-4)^n+r_n(x)$.

7.5.10. 1) $1-6(x-1)+(x-1)^2+\ldots, f(1{,}03)=0{,}82$;

2) $f(x)\approx 321+1087(x-2)+1648(x-2)^2+\ldots, f(2{,}02)\approx 343{,}4, f(1{,}97)=289{,}9$.

7.5.11. 1) $e^{-1/4}\approx 0{,}78, \delta<0{,}01$; 2) $\ln 1{,}1\approx 0{,}0953, \delta<0{,}0001$.

7.5.12. 1) $0{,}842$; 2) $1{,}648$; 3) $0{,}049$; 4) $2{,}012$.

7.5.13. 1) $-\dfrac{1}{12}$; 2) $\dfrac{1}{3}$; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) $\dfrac{1}{12}$.

Практикум 7.6. Дослідження функцій за допомогою похідних

Навчальні задачі

7.6.1.1. Знайти інтервали монотонності й точки локальних екстремумів функції $f(x)=4x^3-21x^2+18x+7$.

Розв'язання. [7.9.1–7.9.4, 7.11.1.]

[***Крок 1.*** *Визначаємо область означення.*]

$D(f)=(-\infty;+\infty)$.

[***Крок 2.*** *Знаходимо критичні точки 1-го порядку функції* f [7.9.1].] [1]

$$f'(x)=12x^2-42x+18.$$

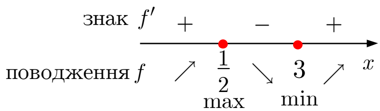
$$f'(x)=0\Leftrightarrow x_1=\frac{1}{2}, x_2=3.$$

$$f'(x)\neq\infty, \exists f'(x)\quad \forall x\in(-\infty;+\infty).$$

Критичні точки 1-го порядку: $x_1=\dfrac{1}{2}, x_2=3$.

[***Крок 3.*** *Визначаємо знак* f' *в кожному інтервалі монотонності.*] [2]

$$f'(x)=12(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right).$$



[***Крок 4.*** *Застосовуючи достатні умови монотонності* [7.9.2] *й існування точки екстремуму* [7.9.4], *висновуємо про поводження функції.*]

$f\nearrow$: $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right), (3;+\infty)$; $f\searrow$: $\left(\dfrac{1}{2};3\right)$.

$x = \dfrac{1}{2}$ — точка локального максимуму, $f_{\max}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{45}{4}$;

$x = 3$ — точка локального мінімуму, $f_{\min}(3) = -20$.

Коментар. ① Точки, у яких: 1) $f'(x_0) = 0$ (стаціонарна точка); 2) $f'(x_0) = \infty$ (точка вертання); 3) $\nexists f'(x_0)$ (кутова точка).

② Якщо функція $f'(x)$ неперервна, то вона зберігає знак на кожному з інтервалів $(a;x_1),(x_1;x_2),\ldots,(x_n;b)$ між двома сусідніми критичними точками. Знак $f'(x)$ на кожному з інтервалів визначають *методом інтервалів* [6.12.1].

7.6.1.2. Знайти інтервали монотонності й точки локальних екстремумів функції $f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$.

Розв'язання. [7.9.1–7.9.4, 7.11.1.]

$D(f) = [-\sqrt{8};\sqrt{8}]$.

$$f'(x) = \frac{16x - 4x^3}{2\sqrt{8x^2 - x^4}} = \frac{2x}{|x|}\frac{4 - x^2}{\sqrt{8 - x^2}}.$$

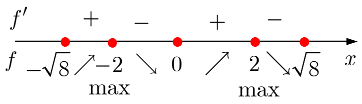
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2 \in (-\sqrt{8};\sqrt{8}).$$

$$f'(x) = \infty \Leftrightarrow 8 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{8} \notin (-\sqrt{8};\sqrt{8}).$$

$$\nexists f'(x) \Leftrightarrow x_5 = 0.$$

Критичні точки 1-го порядку: $x_{1,2} = \pm 2, x_5 = 0$.

$$f'(x) = \frac{-2x(x-2)(x+2)}{|x|\sqrt{8 - x^2}}.$$



$f \nearrow$: $(-\sqrt{8};-2),(0;2)$; $f \searrow$: $(-2;0),(2;\sqrt{8})$;

$x = \pm 2$ — точки локальних максимумів, $f_{\max}(-2) = f_{\max}(2) = 4$;

$x = 0$ — точка локального мінімуму, $f_{\min}(0) = 0$.

7.6.1.3. Знайти інтервали монотонності й точки локальних екстремумів функції $f(x) = x\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Розв'язання. [7.9.1–7.9.4, 7.11.1.]

$D(f) = (-\infty;+\infty)$.

$$f'(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x-1}} = \frac{5x-3}{3\sqrt[3]{x-1}}.$$

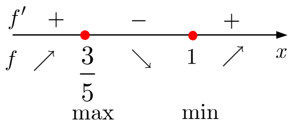
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{5}.$$

$$f'(x) = \infty \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} = 0 \Leftrightarrow x_2 = 1.$$

$$\exists f'(x)\ \forall x \in (-\infty; +\infty).$$

Критичні точки 1-го порядку: $x_1 = \dfrac{3}{5}, x_2 = 1$.

$$f'(x) = \frac{5\left(x - \dfrac{3}{5}\right)}{3(x-1)^{1/3}}.$$



$f \nearrow$: $\left(-\infty; \dfrac{3}{5}\right), (1; +\infty)$; $\quad f \searrow$: $\left(\dfrac{3}{5}; 1\right)$;

$x = \dfrac{3}{5}$ — точка локального максимуму, $f_{\max}\left(\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\dfrac{4}{9}}$;

$x = 1$ — точка локального мінімуму, $f_{\min}(1) = 0$.

7.6.1.4. Знайти інтервали монотонності й точки локальних екстремумів функції $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \ln x$.

Розв'язання. [7.9.1–7.9.4, 7.11.1.]
$D(f) = (0; +\infty)$.

$$f'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}.$$

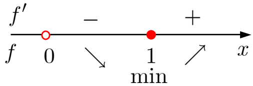
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 1;\ x_1 = -1 \notin (0; +\infty).$$

$$f'(x) = \infty \Rightarrow x_3 = 0 \notin (0; +\infty).$$

$$\exists f'(x)\ \ \forall x \in (0; +\infty).$$

Критична точка 1-го порядку $x = 1$.

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x}.$$



$f \nearrow$: $(1;+\infty)$, $f \searrow$: $(0;1)$;

$x = 1$ — точка локального мінімуму, $f_{\min}(1) = \dfrac{1}{2}$.

7.6.1.5. Знайти інтервали монотонності й точки локальних екстремумів функції $f(x) = x \ln x$.

Розв'язання. [7.9.1–7.9.4, 7.11.1.]

$D(f) = (0;+\infty)$.

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

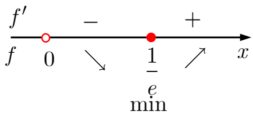
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0; \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}.$$

$$f'(x) \neq \infty, \exists f'(x), x \in (0;+\infty).$$

Критична точка 1-го порядку $x = \dfrac{1}{e}$.

[*Визначаємо знак $f'(x)$ у кожному інтервалі монотонності за правилом пробної точки.*]

$$f'(x) = \ln x + 1, f'\left(\frac{1}{e^2}\right) = -1 < 0, f'(1) = 1 > 0$$



$f \nearrow$: $\left(\dfrac{1}{e};+\infty\right)$; $f \searrow$: $\left(0;\dfrac{1}{e}\right)$;

$x = \dfrac{1}{e}$ — точка локального мінімуму, $f_{\min}\left(\dfrac{1}{e}\right) = e$.

7.6.1.6. Дослідити на локальні екстремуми функцію $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ за допомогою другої достатньої умови.

Розв'язання. [7.9.5.]

$D(f) = (0;+\infty)$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0;\ \ln x = e \Leftrightarrow x = e.$$

$$f'(x) \neq \infty, \exists f'(x), x \in (0;+\infty).$$

Критична точка 1-го порядку $x = e$.

[*Знаходимо другу похідну функції і досліджуємо її знак у критичних точках.***]**

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3};$$

$$f''(e) = \frac{2\ln e - 3}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0.$$

[*Застосовуючи 2-гу достатню умову існування локального екстремуму* [*7.9.5*], *висновуємо.***]**

$x = e$ — точка локального максимуму, $f_{\max}(e) = \dfrac{1}{e}$.

7.6.2. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 3, x \in [-1;2].$$

Розв'язання. [7.11.3.]

Функція f неперервна на відрізку $[-1;2]$.

[*Крок 1.* *Знаходимо критичні точки 1-го порядку функції* f *в* $(-1;2)$.]**

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2;$$

$$f'(x) \neq \infty, \exists f'(x), x \in (-1;2)$$

$$x_1, x_3 \notin (-1;2);\ x_2 \in (-1;2).$$

[*Крок 2.* *Обчислюємо значення функції* f *у знайдених критичних точках і на кінцях відрізку.*]**

$$f(-1) = -4;\ f(0) = 3;\ f(2) = -13.$$

[*Крок 3.* *Серед обчислених значень функції вибираємо найбільше та найменше значення функції* f *на відрізку.*]**

$$\max_{[-1,2]} f = f(0) = 3;$$

$$\min_{[-1,2]} f = f(2) = -13.$$

7.6.3. Довести нерівність $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, x > 0.$

Розв'язання. [7.9.3, 7.9.4.]

Розглядаємо функцію

$$f_1(x) = \ln(x+1) - x.$$

[*Досліджуємо її на монотонність.*]

$$f_1'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1} < 0\,\forall x > 0.$$

Функція спадає на $(0;+\infty)$ і отже, своє найбільше значення вона набуває у точці $x = 0:\ f_1(0) = 0.$

Звідси випливає, що $f_1(x) < 0$ або

$$\ln(x+1) - x < 0\,\forall x > 0.$$

Розглядаємо функцію

$$f_2(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}.$$

[*Досліджуємо її на монотонність.*]

$$f_2'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{x^2}{x+1} > 0\ \ \forall x > 0.$$

Функція зростає на $(0;+\infty)$ і, отже, своє найменше значення набуває в точці $x = 0$: $f_2(0) = 0$. Звідси випливає, що $f_2(x) > 0$ або

$$\ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} > 0\ \forall x > 0.$$

7.6.4. Знайти інтервали опуклості й точки перегину функції $f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$

Розв'язання. [7.10, 7.11.2.]

[***Крок 1.*** *Знаходимо область означення функції.*]

$D(f) = (-\infty;+\infty).$

[***Крок 2.*** *Знаходимо критичні точки 2-го порядку функції* [*7.10.1*].]

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},\ f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$f''(x) \neq \infty, \exists f''(x)\ \ \forall x \in (-\infty;+\infty).$$

Критичні точки 2-го порядку: $x_{1,2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

[***Крок 3.*** *Досліджуємо знак* $f''(x)$ *у кожному інтервалі.*]

$$f''(x) = \frac{6\left(x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}{(1+x^2)^3}.$$

знак f''	$+$		$-$		$+$	
поводження f	$\cup$	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cap$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cup$	x
		т. пер.		т. пер.		

[***Крок 4.*** *Використовуючи достатні умови опуклості догори (донизу)* [*7.10.2*] і точки перегину [*7.10.4*], *висновуємо про поводження функції.*]

$f\cup : \left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$; $f\cap : \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ — точки перегину графіка функції.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

7.6.5. Покажіть, що функція:

1) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ спадає в інтервалі $(-2;1)$;

2) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ зростає в інтервалі $(0;1)$ і спадає в інтервалі $(1;2)$. Побудуйте графік цієї функції;

3) $f(x) = x^3 + x$ скрізь зростає;

4) $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$ скрізь спадає.

7.6.6. Знайдіть інтервали монотонності й точки локальних екстремумів функції:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$;

2) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$;

3) $f(x) = (x-2)^5(2x+1)^4$;

4) $f(x) = -x^2(x-12)^2$;

5) $f(x) = (x+1)e^{-x}$;

6) $f(x) = (2x-3)e^{2x}$;

7) $f(x) = (x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$;

8) $f(x) = \sqrt[3]{(2x-1)(1-x)^2}$;

9) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$; 10) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$;

11) $f(x) = x - e^x$; 12) $f(x) = x^2 e^{-x}$;

13) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$; 14) $f(x) = 2x^2 - \ln x$;

15) $f(x) = x - 2\sin x \ (0 \le x \le 2\pi)$;

16) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x \ (0 \le x \le 2\pi)$.

7.6.7. Знайдіть найбільше та найменше значення функції на зазначеному відрізку:

1) $f(x) = x^2, [-1;2]$; 2) $f(x) = x^3, [-2;3]$;

3) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5, [-2;2]$; 4) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x, [1;3]$;

5) $f(x) = \sqrt{100 - x^2}, [-6;8]$; 6) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}, [0;3]$;

7) $f(x) = x + 2\sqrt{x}, x \in [0,4]$; 8) $f(x) = \sin 2x - x, \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

7.6.8. Доведіть правдивість нерівності:

1) $2x \operatorname{arctg} x \ge \ln(1 + x^2)$; 2) $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x \ \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

7.6.9. Визначте висоту прямого колового конуса:

1) уписаного в кулю радіусом R, з найбільшою бічною поверхнею;

2) описаного навколо кулі радіусом R, найменшого об'єму.

7.6.10. Покажіть, що графік функції

1) $y = x \operatorname{arctg} x$ скрізь угнутий; 2) $y = \ln(x^2 - 1)$ скрізь опуклий.

7.6.11. Знайдіть інтервали опуклості й точки перегину функції:

1) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$; 2) $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$;

3) $f(x) = x^2 \ln x$; 4) $f(x) = x^4(12 \ln x - 7)$;

5) $f(x) = \sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1}$; 6) $f(x) = xe^{2x} + 1$.

7) $f(x) = e^{-x^2}$. 8) $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

7.6.12. За допомогою другої достатньої умови дослідіть на локальні екстремуми функцію:

1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$;   2) $f(x) = x^2(2-x)^2$;

3) $f(x) = x + \sqrt{1-x}$;   4) $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$.

7.6.13. 1. Знайдіть значення параметра a, для якого функція $f(x) = a\sin x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$ має локальний екстремум у точці $x = \dfrac{\pi}{3}$? Чи буде це локальний максимум чи мінімум?

2. Знайдіть значення параметрів a та b, для яких функція $f(x) = a\ln x + bx^2 + x$ має локальні екстремуми в точках $x_1 = 1$ та $x_2 = 2$. Покажіть, що для цих значень a та b задана функція має мінімум у точці x_1 і максимум у точці x_2.

3. Знайдіть значення параметрів a та b для яких точка $(1;3)$ є точкою перегину графіка функції $y = ax^3 + bx^2$.

4. Знайдіть значення параметра a, для якого функція $f(x) = x^4 + a\ln x$ має єдину точку перегину при $x = 1$?

Відповіді

7.6.6. 1) $f\nearrow$: $(-\infty;0),(1;+\infty)$, $f\searrow$: $(0;1)$, $x_{\max} = 0, x_{\min} = 1$;

2) $f\nearrow$: $(-\infty;-1),(3;+\infty)$, $f\searrow$: $(-1;3)$, $x_{\max} = -1, x_{\min} = 3$;

3) $f\nearrow$: $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{11}{18};+\infty\right)$, $f\searrow$: $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{11}{18}\right)$, $x_{\max} = -\dfrac{1}{2}, x_{\min} = \dfrac{11}{18}$;

4) $f\nearrow$: $(-\infty;0),(6;12)$, $f\searrow$: $(0;6),(12;+\infty)$ $x_{\max} = 0, x_{\max} = 12, x_{\min} = 6$;

5) $f\nearrow$: $(-\infty;0)$, $f\searrow$: $(0;+\infty)$ $x_{\max} = 0$; 6) $f\nearrow$: $(1;+\infty)$, $f\searrow$: $(-\infty;1)$ $x_{\min} = 1$;

7) $f\nearrow$: $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right),(5;+\infty)$, $f\searrow$: $(-\infty;-1),\left(\dfrac{1}{2};5\right)$, $x_{\max} = \dfrac{1}{2}, x_{\min} = 1, x_{\min} = 5$;

8) $f\nearrow$: $\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right),(1;+\infty)$, $f\searrow$: $\left(\dfrac{2}{3};1\right)$, $x_{\max} = \dfrac{2}{3}, x_{\min} = 1$;

9) $f\nearrow$: $(-\infty;-\sqrt{12}),(\sqrt{12};+\infty)$, $f\searrow$: $(-\sqrt{12};-2),(-2;2),(2;\sqrt{12})$, $x_{\max} = -\sqrt{12}, x_{\min} = \sqrt{12}$;

10) $f\nearrow$: $(-\infty;0),(2;+\infty)$, $f\searrow$: $(0;1),(1;2)$, $x_{\max} = 0, x_{\min} = 2$;

11) $f\nearrow$: $(-\infty;0)$, $f\searrow$: $(0;+\infty)$, $x_{\max} = 0$;

12) $f\searrow: (-\infty;0),(2;+\infty),\ f\nearrow: (0;2),\ x_{\max}=2, x_{\min}=0$;

13) $f\nearrow: (e;+\infty),\ f\searrow: (0;1),(1;e),\ x_{\min}=e$;

14) $f\searrow: \left(0;\dfrac{1}{2}\right), f\nearrow: \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right),\ x_{\min}=\dfrac{1}{2}$;

15) $f\nearrow: \left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{3}\right), f\searrow: \left(0;\dfrac{\pi}{3}\right),\left(\dfrac{5\pi}{3};2\pi\right),\ x_{\max}=\dfrac{5\pi}{3},\ x_{\min}=\dfrac{\pi}{3}$;

16) $f\nearrow: \left(0;\dfrac{\pi}{6}\right),\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{6}\right),\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right), f\searrow: \left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right),\left(\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{3\pi}{2}\right)$,

$x_{\max}=\dfrac{\pi}{6},\ x_{\max}=\dfrac{5\pi}{6},\ x_{\min}=\dfrac{\pi}{2}, x_{\min}=\dfrac{3\pi}{2}$.

7.6.7. 1) $\max\limits_{[-1;2]} f = f(2) = 4, \min\limits_{[-1;2]} f = f(0) = 0$; 2) $\max\limits_{[-2;3]} f = f(3) = 27, \min\limits_{[-2;3]} f = f(-2) = -8$;

3) $\max\limits_{[-2;2]} f = f(-2) = f(2) = 13, \min\limits_{[-2;2]} f = f(-1) = f(1) = 4$;

4) $\max\limits_{[1;3]} f = f(2) = 28, \min\limits_{[1;3]} f = f(1) = 23$; 5) $\max\limits_{[-6;8]} f = 10, \min\limits_{[-6;8]} f = 6$;

6) $\max\limits_{[0;3]} f = f(3) = \sqrt[3]{9}, \min\limits_{[0;3]} f = f(0) = f(2) = 0;.7)$ $\max\limits_{[0;4]} f = f(4) = 8, \min\limits_{[0;4]} f = f(0) = 0$;

8) $\max\limits_{[-\pi/2;\pi/2]} f = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}, \min\limits_{[-\pi/2;\pi/2]} f = f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

7.6.9. 1) $\dfrac{4R}{3}$; 2) $4R$.

7.6.11. 1) $f\cap: \left(-\infty;\dfrac{5}{3}\right), f\cup: \left(\dfrac{5}{3};+\infty\right),\ x=\dfrac{5}{3}$ — точка перегину;

2) $f\cap: \left(2;4\right), f\cup: \left(-\infty;2\right),(4;+\infty),\ x=2, x=4$ — точки перегину;

3) $f\cap: (0;e^{-3/2}), f\cup: (e^{-3/2};+\infty),\ x=e^{-3/2}$ — точки перегину;

4) $f\cap: (0;1), f\cup: (1;+\infty),\ x=1$ — точка перегину;

5) $f\cap: (-1;1), f\cup: (-\infty;-1),(1;+\infty), x=\pm 1$ — точки перегину;

6) $f\cap: (-\infty;-1), f\cup: (-1;+\infty), x=-1$ — точка перегину;

7) $f\cap: \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), f\cup: \left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right), x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ — точки перегину;

8) $f\cap: \left(-\infty;-1\right),(1;+\infty), f\cup: \left(-1;1\right),\ x=\pm 1$ — точки перегину.

7.6.12. 1) $x_{\max}=\dfrac{1}{3}, x_{\min}=1$; 2) $x_{\max}=1, x_{\min}=2$; 3) $x_{\max}=\dfrac{3}{4}$; 4) $x_{\max}=1, x_{\min}=-1$.

7.6.13. 1) для $a=2$ локальний максимум; 2) $a=-\dfrac{2}{3}, b=-\dfrac{1}{6}$; 3) $a=-\dfrac{2}{3}, b=-\dfrac{1}{6}$;

4) $a=12$.

Практикум 7.7. Побудова графіків функцій

Навчальні задачі

7.7.1. Знайти рівняння асимптот графіка функції $y = \dfrac{x^3+2}{x^2-4}$.

Розв'язання. [7.8.2, 7.8.3.]

[***Крок 1.*** *Визначаємо область означення.*]

Область означення функції $D(f) = (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty)$.

[***Крок 2.*** *Досліджуємо поведінку функції на межі області означення.*]

[*Досліджуємо поведінку функції, коли* $x \to -2$.]

$$\lim_{x\to-2-0} \frac{x^3+2}{x^2-4} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to-2+0} \frac{x^3+2}{x^2-4} = +\infty.$$

[*Висновуємо.*]

Пряма $x = -2$ є вертикальною (двобічною) асимптотою графіка функції.

[*Досліджуємо поводження функції, коли* $x \to 2$.]

$$\lim_{x\to2-0} \frac{x^3+2}{x^2-4} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to2+0} \frac{x^3+2}{x^2-4} = +\infty.$$

Пряма $x = 2$ є вертикальною (двобічною) асимптотою графіка функції.

[*Досліджуємо поводження функції, коли* $x \to -\infty$, *шукаючи похилу асимптоту* $y = kx + b$.]

$y = kx + b, x \to -\infty:$

$$k\_ = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2}{x(x^2-4)} = 1,$$

$$b\_ = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+2}{x^2-4} - x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+2-x^3+4x}{x^2-4}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x+2}{x^2-4}\right) = 0.$$

Так само, $k_+ = 1, b_+ = 0$.

[*Висновуємо.*]

Пряма $y = x$ є похилою (двобічною) асимптотою графіка функції.

7.7.2.1. Дослідити функцію $f(x) = \dfrac{x^3}{3-x^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язання. [7.11.4.]

[***Крок 1.*** *Знаходимо область означення функції.*]

$D(f) = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

[***Крок 2.*** *Установлюємо можливі симетрії графіка функції.*]

Оскільки $D(f)$ симетрична відносно точки 0 і

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{1+(-x)^2} = -\frac{x^3}{1+x^2} = -f(x),$$

то функція f непарна і її графік симетричний відносно початку координат.

[***Крок 3.*** *Досліджуючи поводження функції на межі області означення, визначаємо можливі точки розриву функції й асимптоти графіка функції.*]

[*Досліджуємо функцію, коли* $x \to \pm\sqrt{3} \pm 0$.]

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty.$$

Точки $x = \pm\sqrt{3}$ — точки розриву 2-го роду, нескінченного.

Прямі $x = -\sqrt{3}$ та $x = \sqrt{3}$ — двобічні вертикальні асимптоти.

[*Шукаємо похилі асимптоти графіка функції.*]

$y = kx + b,\ x \to \pm\infty$:

$$k_{\pm} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{3-x^2} = -1;$$

$$b_{\pm} = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{3-x^2} + x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{3-x^2} = 0.$$

Пряма $y = -x$ — двобічна похила асимптота.

[***Крок 4.*** *За допомогою першої похідної визначаємо інтервали монотонності й точки екстремуму функції.*]

$$f'(x) = \frac{3x^2(3-x^2) + 2x^4}{(3-x^2)^2} = \frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x^2(9-x^2)=0\Leftrightarrow x_1=0, x_{2,3}=\pm 3;$$
$$f'(x)=\infty\Rightarrow (3-x^2)^2=0\Leftrightarrow x_{4,5}=\pm\sqrt{3}\notin D(f),$$
$$\exists f'(x), x\in D(f).$$
$$f'(x)=\frac{3x^2(3-x^2)+2x^4}{(3-x^2)^2}=-\frac{x^2(x+3)(x-3)}{(x+\sqrt{3})^2(x-\sqrt{3})^2}.$$

x		-3		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		3	
f'	$-$		$+$		$+$		$+$		$+$		$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$

$$y_{\max}(3)=-\frac{9}{2}, y_{\min}(-3)=\frac{9}{2}.$$

[***Крок 5.*** *За допомогою другої похідної визначаємо інтервали опуклості й точки перегину функції.*]

$$f''(x)=\frac{(18x-4x^3)(3-x^2)^2-(9x^2-x^4)2(3-x^2)(-2x)}{(3-x^2)^4}=\frac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}.$$
$$f''(x)=0\Leftrightarrow 6x(9+x^2)=0\Leftrightarrow x_1=0;$$
$$f''(x)=\infty\Leftrightarrow (3-x^2)^3=0\Leftrightarrow x_{2,3}=\pm\sqrt{3}\notin D(f),$$
$$\exists f''(x), x\in D(f).$$
$$f''(x)=\frac{6x(9+x^2)}{-(x+\sqrt{3})^3(x-\sqrt{3})}.$$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
f''	$+$		$-$		$+$		$-$
f	$\cup$		$\cap$	т. пер.	$\cup$		$\cap$

$x=0$ — точка перегину, $y(0)=0$.

[***Крок 6.*** *Знаходимо можливі точки перетину графіка функції з осями координат.*]

$$x=0\Rightarrow y=0;$$
$$y=0\Rightarrow x=0.$$

[***Крок 7.*** *Будуємо графік функції* $y=f(x)$.]

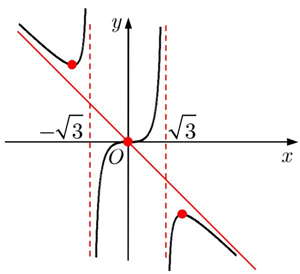


Рис. до 7.7.2.1

7.7.2.2. Дослідити функцію $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язання. [7.11.4.]

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. Оскільки $D(f)$ симетрична щодо 0 і

$$f(-x) = (-x+1)^{2/3} - (-x+2)^{2/3} \neq \pm f(x),$$

то функція f загального вигляду.

3. Функція f неперервна і вертикальних асимптот її графік не має.

Асимптота $y = kx + b, x \to \pm\infty$:

$$k_{\pm} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^{2/3} - (x+2)^{2/3}}{x} = 0;$$

$$b_{\pm} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[(x+1)^{2/3} - (x+2)^{2/3}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^2 - (x+2)^2}{(x+1)^{4/3} + (x+1)^{2/3}(x+2)^{2/3} + (x+2)^{4/3}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x}{3x^{4/3}} = 0;$$

Пряма $y = 0$ — горизонтальна асимптота.

4. $f'(x) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{(x+2)^{1/3} - (x+1)^{1/3}}{(x+1)^{1/3}(x+2)^{1/3}}\right)$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x+2)^{1/3} = (x+1)^{1/3} \Leftrightarrow x \in \varnothing;$$

$$f'(x) = \infty \Rightarrow (x+1)^{1/3}(x+2)^{1/3} = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = -2;$$

$$\exists f'(x), x \in D(f).$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} f' & + & & - & & + & \\ \hline f & \nearrow & -2 & \searrow & -1 & \nearrow & x \\ & & \max & & \min & & \end{array}$$

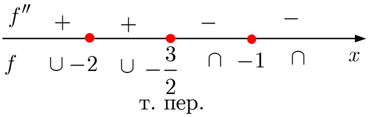
$y_{\max}(-2) = 1, y_{\min}(-1) = -1$.

5. $f''(x) = -\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{(x+2)^{4/3} - (x+1)^{4/3}}{(x+1)^{4/3}(x+2)^{4/3}}\right)$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)^{4/3} = (x+1)^{4/3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2 = x+1, \\ x+2 = -x-1 \end{array}\right. \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2}.$$

$$f''(x) = \infty \Leftrightarrow (x+1)^{4/3}(x+2)^{4/3} = 0 \Leftrightarrow x_2 = -1, x_3 = -2.$$

$$\exists f''(x), x \in D(f).$$



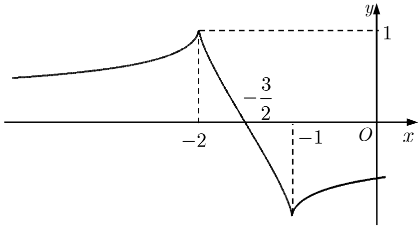


Рис. до 7.7.2.2

$x = -\dfrac{3}{2}$ — точка перегину, $y\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 0.$

6. $y = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{2}.$

$x = 0 \Rightarrow y = 1 - \sqrt[3]{4} \approx -0,58.$

7.7.2.3. Дослідити функцію $f(x) = \dfrac{e^{x+2}}{x+2}$ і побудувати її графік:

Розв'язання. [7.11.4.]

1. $D(f) = (-\infty;-2) \cup (-2;+\infty).$

2. Оскільки область означення $D(f)$ не симетрична відносно 0, то функція f загального вигляду.

3. $\lim\limits_{x\to -2-0} \dfrac{e^{x+2}}{x+2} = -\infty;\quad \lim\limits_{x\to -2+0} \dfrac{e^{x+2}}{x+2} = +\infty.$

Точка $x = -2$ є точкою розриву 2-го роду, нескінченного.

Пряма $x = -2$ — вертикальна асимптота.

Асимптота $y = kx + b, x \to \pm\infty :$

$$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x+2}}{x(x+2)} = 0;\quad b_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x+2}}{x+2} = 0.$$

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+2}}{x(x+2)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{[7.6.4]}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^{x+2})'}{(x^2+2x)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+2}}{2x+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{[7.6.4]}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+2}}{2} = +\infty.$$

$y = 0$ — ліва горизонтальна асимптота.

4. $f'(x) = \dfrac{e^{x+2}(x+1)}{(x+2)^2}.$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2}(x+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1;$$
$$f'(x) = \infty \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -2 \notin D(f);$$
$$\exists f'(x), x \in D(f).$$

$$\begin{array}{lccccccc} f' & - & & - & & + & & \\ f & \searrow & -2 & \searrow & -1 & \nearrow & & x \\ & & & & \min & & & \end{array}$$

$$y_{\min}(-1) = e \approx 2{,}71.$$

5. $f''(x) = \dfrac{e^{x+2}(x^2 + 2x + 2)}{(x+2)^3}.$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2}(x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing;$$
$$f''(x) = \infty \Leftrightarrow (x+2)^3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \notin D(f);$$
$$\exists f''(x), x \in D(f).$$

$$\begin{array}{lccccc} f'' & - & & + & & \\ f & \cap & -2 & \cup & + & x \end{array}$$

6. $y \neq 0$;

$x = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{e^2}{2}.$

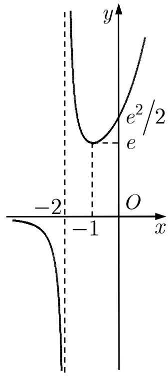


Рис. до 7.7.2.3

7.7.2.4. Дослідити функцію $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$ і побудувати її графік.

Розв'язання. [7.11.4.]

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. Оскільки $D(f)$ симетрична відносно 0 і
$$f(-x) = -x - \operatorname{arctg} x = -f(x),$$
то функція f непарна і її графік симетричний відносно початку координат.

3. Функція неперервна і вертикальних асимптот графік функції не має. Асимптота $y = kx + b, x \to \pm\infty$:
$$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{x} = 1; \; b_- = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$
$$k_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{x} = 1; \; b_+ = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

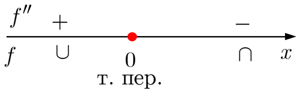
$y = x - \dfrac{\pi}{2}$ — ліва похила асимптота;

$y = x + \dfrac{\pi}{2}$ — права похила асимптота.

4. $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x^2} > 0, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \nearrow$ на $\mathbb{R}$.

5. $f''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0;$$
$$f''(x) = \infty \Leftrightarrow (1+x^2)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing;$$
$$\exists f''(x), x \in D(f).$$



$x = 0$ — точка перегину, $y(0) = 0$.

6. $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

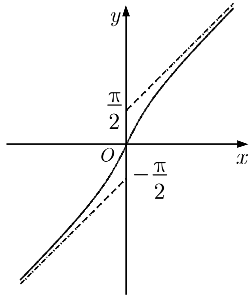


Рис. до 7.7.2.4

7.7.3. Дослідити астроїду, задану рівняннями $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ і побудувати її.

Розв'язання. [7.11.4.]

[*Досліджуємо криву, задану параметрично за схемою повного дослідження й побудови графіка функції* $y = f(x)$.] ①

1. Функції $\cos^3 t$ та $\sin^3 t$ означенні для будь-яких значень t. Але оскільки ці функції періодичні з періодом 2π, досить розглянути проміжок $t \in [0; 2\pi)$.

2. Оскільки $x \in [-a; a]$ та $y \in [-a; a]$, то крива асимптот не має.

3. $y'_x(t) = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\operatorname{tg} t$.

$$y'_x(t) = 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = \pi;$$
$$y'_x(t) = \infty \Rightarrow t_3 = \frac{\pi}{2}, t_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

4. $y''_{xx}(t) = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \dfrac{(-\operatorname{tg} t)'}{(a\cos^3 t)'} = \dfrac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$.

$$y''_{xx}(t) \neq 0;$$
$$y''_{xx}(t) = \infty \Leftrightarrow t_1 = 0, t_2 = \frac{\pi}{2}, t_3 = \pi, t_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

5. $x = 0 \Leftrightarrow \cos^3 t = 0 \Rightarrow t_1 = \dfrac{\pi}{2}, t_2 = \dfrac{3\pi}{2}$.

$y = 0 \Leftrightarrow \sin^3 t = 0 \Rightarrow t_1 = 0, t = \pi$.

[*Будуємо таблицю значень змінних* t, x *та* y, *а також знаків першої та другої похідних.*]

t	0	$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$	π	$\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$
x	a		0		$-a$		0	
y'	0	$-$	∞	$+$	0	$-$	∞	$+$
y''	∞	$+$	∞	$+$	∞	$-$	∞	$-$
y	0	$\searrow \cup$	$y_{\max} = a$	$\nearrow \cup$	0	$\searrow \cap$	$y_{\min} = -a$	$\nearrow \cap$

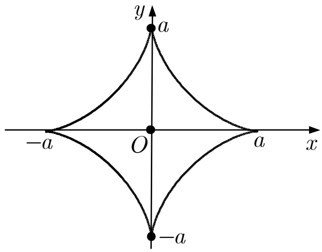


Рис. до 7.7.3

Коментар. ① Асимптоти кривої визначають, шукаючи такі значення t, щоб:

або $x \to \infty$, або $y \to \infty$, або $x \to \infty, y \to \infty$.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

7.7.4. 1. Перевірте, що пряма $y = 2x + 1$ є асимптотою лінії $y = 2x + 1 + \dfrac{1}{x^3}$.

2. Перевірте, що пряма $y = -3x + 2$ є асимптотою лінії $y = \dfrac{-3x^2 + 2x + 4}{x}$.

7.7.5. Знайдіть асимптоти графіка функції:

1) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$; 2) $y = \dfrac{x^2 + 5}{x^2 - 4} + 2x$;

3) $y = \ln\dfrac{x + 1}{x - 2}$; 4) $y = x\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$;

5) $y = xe^{x}$; 6) $y = xe^{2/x} + 1$;

7) $y = x \operatorname{arctg} 2x$; 8) $y = 2x + \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2}$;

9) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$; 10) $y = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$.

7.7.6. Повністю дослідіть функцію f і побудуйте її графік, якщо:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$; 2) $f(x) = e^{-x^2}$;

3) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; 4) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$.

7.7.7. Повністю дослідіть функцію f і побудуйте її графік, якщо:

1) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$;

3) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$; 4) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3-1}$;

5) $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$; 6) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-4}}$;

7) $f(x) = xe^{-x}$; 8) $f(x) = x^2 e^{-x}$;

9) $f(x) = \dfrac{e^{-1/x}}{x}$; 10) $f(x) = (2x-1)e^{2/x}$;

11) $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$; 12) $f(x) = x^2 \ln x$;

13) $f(x) = x + \sin x$; 14) $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$.

7.7.8. Побудуйте криву, задану параметричними рівняннями:

1) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t, \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t. \end{cases}$

Відповіді

7.7.5. 1) $x = -1$ — вертикальна асимптота, $y = x + 2$ — похила асимптота;
2) $x = \pm 2$ — вертикальні асимптоти, $y = 2x + 1$ — похила асимптота;
3) $x = -1$ — ліва вертикальна асимптота, $x = 2$ — права вертикальна асимптота, $y = 0$— горизонтальна асимптота;

4) $x = -\dfrac{1}{e}$ — права вертикальна асимптота, $y = x + \dfrac{1}{e}$ — права похила асимптота.

5 $y = 0$ — ліва горизонтальна асимптота;

6) $x = 0$ — права вертикальна асимптота, $y = x + 3$ — похила асимптота;

7) $y = -\dfrac{\pi}{2}x - \dfrac{1}{2}$ — ліва похила асимптота, $y = \dfrac{\pi}{2}x - \dfrac{1}{2}$ — права похила асимптота;

8) $y = 2x \pm \dfrac{\pi}{2}$ — ліва і праві похилі асимптоти;

9) $y = x - \dfrac{1}{3}$ — похила асимптота;

10) $x = -1$ — ліва вертикальна асимптота, $x = 1$ — права вертикальна асимптота, $y = -x$ та $y = x$ — ліва та права похилі асимптоті.

7.7.6. 1) рис. до 7.7.6.1); 2) рис. до 7.7.6.2); 3) рис. до 7.7.6.3); 4) рис. до 7.7.6.4).

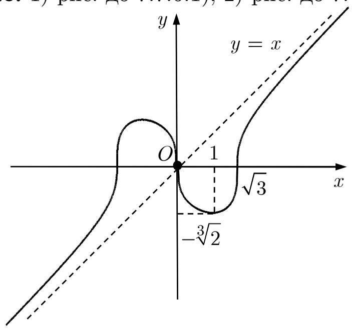


Рис. до 7.7.6.1)

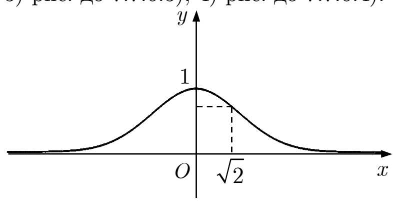


Рис. до 7.7.6.2)

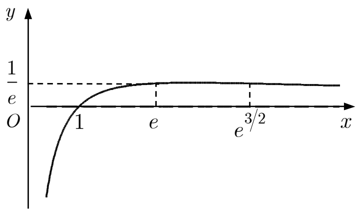


Рис. до 7.7.6.3)

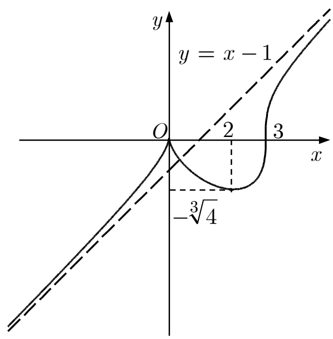


Рис. до 7.7.6.4)

7.7.7. 1) $y_{\max}(1) = \dfrac{1}{2}, y_{\min}(-1) = -\dfrac{1}{2}$, $x = -\sqrt{3}, x = 0$ та $x = \sqrt{3}$ — точки перегину, $y = 0$ — горизонтальна асимптота;

2) $y_{\min}(0) = 1$, $x = \pm 1$ — вертикальні асимптоти, $y = 0$ — горизонтальна асимптота;

3) $y_{\max}(-3) = -\dfrac{27}{4}$, $x = 0$ — точка перегину, $x = -1$ — вертикальна асимптота, $y = x - 2$ — похила асимптота;

4) $y_{\max}(0) = 0, y_{\min}(\sqrt[3]{4}) = \dfrac{4\sqrt[3]{4}}{3}$, $x = -\sqrt[3]{2}$ — точка перегину, $x = 1$ — вертикальна асимптота, $y = x$ — похила асимптота;

5) $y_{\max}(0) = 2, y_{\min}(\pm 1) = \sqrt[3]{4}$;

6) $y_{\max}(0) = 0$, $y_{\min}(2) = \sqrt[3]{16}$, $x = -\sqrt[3]{4}$ — точка перегину, $x = \sqrt[3]{4}, y = x$ — асимптоти;

7) $y_{\max}(1) = \dfrac{1}{e}, x = 2$ — точка перегину, $y = 0$ — асимптота;

8) $y_{\max}(2) = \dfrac{4}{e^2}$, $y_{\min}(0) = 0$, $x = 2 \pm \sqrt{2}$ — точки перегину, $y = 0$ — асимптота;

9) $y_{\max}(1) = \dfrac{1}{e}, x = 1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ — точки перегину, $x = 0$ — ліва асимптота, $y = 0$ — асимптота;

10) $x = 1$ — точка перегину, $x = 0$ — права асимптота, $y = 2x + 3$ — асимптота.

11) $y_{\max}\left(\dfrac{1}{e}\right) = -e$, $x = 1$ — асимптота, $x = 0$ та $y = 0$ — праві асимптоти;

12) $y_{\min}\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2e}, x = \dfrac{1}{e\sqrt{e}}$ — точка перегину;

13) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z},$ — точки перегину;

14) $y_{\max}(-1) = \dfrac{\pi}{2} - 1, y_{\min}(1) = 1 - \dfrac{\pi}{2}$, $x = 0$ — точка перегину, $y = x \pm \pi$ — асимптоти.

7.7.8. 1) циклоїда, графік повторюється з періодом $T = 2\pi$, $y_{\max}(\pi a) = 2a, y_{\min}(0) = y_{\min}(2\pi a) = 0$;

2) кардіоїда, замкнена лінія, симетрична відносно осі абсцис, з точкою вертання $(a;0)$.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВМІННЯ

Основні означення	
1. Похідна функції в точці. 2. Диференційовність функції в точці. 3. Диференціал функції в точці. 4. Похідна функції n-го порядку. 5. Диференціал функції n-го порядку.	**6.** Многочлен Тейлора. **7.** Формула Тейлора. **8.** Точка локального максимуму (мінімуму) функції. **9.** Точка перегину функції. **10.** Асимптота графіка функції.
Теореми	
1. Критерій існування скінченної похідної. **2.** Критерій диференційовності. **3.** Необхідна умова диференційовності. **4.** Теорема Ферма. **5.** Теорема Роля. **6.** Теорема Лаґранжа. **7.** Теорема Коші. **8.** Теорема про правило Бернуллі — Лопіталя. **9.** Теорема Тейлора. **10.** Критерій сталості функції. **11.** Достатня умова строгої монотонності.	**12.** Необхідна умова існування локального екстремуму. **13.** Перша достатня умова існування локального екстремуму. **14.** Друга достатня умова існування локального екстремуму. **15.** Достатня умова опуклості догори (донизу) функції. **16.** Необхідна умова існування точки перегину. **17.** Достатня умова існування точки перегину. **18.** Критерій існування похилої асимптоти.
Основні задачі	
1. Знаходити похідні й диференціали функцій за правилами й формулами диференціювання. **2.** Знаходити рівняння дотичної та нормалі до кривої. **3.** Знаходити рівняння асимптоти до графіка функції. **4.** Досліджувати функцію на монотонність й локальні екстремуми.	**5.** Досліджувати функцію на опуклість і точки перегину. **6.** Знаходити найбільше та найменше значення функції на відрізку. **7.** Знаходити границю за правилом Бернуллі — Лопіталя. **8.** Знаходити многочлен Тейлора функції. **9.** Записувати формулу Тейлора функції із залишковим членом у формі Пеано та Лаґранжа.

РОЗДІЛ 8.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

У розділі розширено й узагальнено теорію функцій однієї змінної на числові функції кількох змінних.

Коротко розглянуто й теорію вектор-функцій однієї змінної.

Поданий матеріал використовується в розділах:

— Інтегральне числення функцій кількох змінних;

— Теорія поля;

— Теорія функцій комплексної змінної.

Ключові поняття:

— арифметичний простір;

— функція кількох змінних;

— частинна похідна функції кількох змінних;

— диференціал функції кількох змінних;

— диференційовність функції кількох змінних;

— похідна за напрямом функції кількох змінних;

— градієнт функції кількох змінних;

— вектор-функція.

Опанувавши цей розділ Ви зможете:

— визначати область означення функції кількох змінних;

— будувати лінії (поверхні) рівня функції кількох змінних;

— знаходити частинні похідні функцій кількох змінних;

— знаходити диференціали функцій кількох змінних;

— обчислювати похідну за напрямом функції кількох змінних;

— знаходити градієнт функції кількох змінних;

— досліджувати функції 2-х змінних на екстремуми (локальний, глобальний, умовний).

Попередні знання та вміння з розділів:

— Диференціальне числення функцій однієї змінної;

— Векторна алгебра;

— Аналітична геометрія.

8.1. ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Функції однієї незалежної змінної не описують усі типи залежностей, що існують у природі та людській діяльності. Природно розширити поняття функціональної залежності й розглянути числові функції кількох змінних.

8.1.1. Арифметичний простір і його підмножини

1. *Арифметичним n-вимірним простором* $\mathbb{R}^n$ називають множину всіляких упорядкованих наборів з n чисел $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, які називають *точками* простору й позначають $M(x_1; x_2; \ldots; x_n)$.

Віддаль між точками $M'(x_1'; x_2'; \ldots; x_n')$ і $M''(x_1''; x_2''; \ldots; x_n'')$ знаходять за формулою

$$\boxed{\rho(M', M'') = \sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_2')^2 + \ldots + (x_n'' - x_n')^2},}$$

яка узагальнює формулу віддалі між точками площини й геометричного простору.

Зокрема, числова пряма є простором $\mathbb{R}^1$, координатна площина є простором $\mathbb{R}^2$, а тривимірний простір з ПДСК є простором $\mathbb{R}^3$.

2. Окіл. ε-*околом* точки $M_0 \in \mathbb{R}^n$ (n-вимірною кулею радіусом ε із центром у точці M_0) називають множину точок

$$\boxed{U_\varepsilon(M_0) = \{M \in \mathbb{R}^n \mid \rho(M_0, M) < \varepsilon\}.}$$

Зокрема, для $n = 2$ маємо круг із центром у точці $M_0(x_0; y_0)$ радіусом ε (рис. 8.1):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2;$$

для $n = 3$ маємо кулю із центром у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ радіусом ε (рис. 8.2):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \varepsilon^2.$$

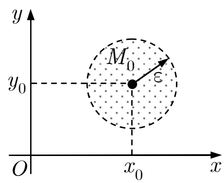


Рис. 8.1. ε-окіл на площині ($\mathbb{R}^2$)

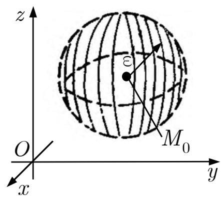


Рис. 8.2. ε-окіл у просторі ($\mathbb{R}^3$)

3. Відкрита множина. Точку $M \in D$ називають *внутрішньою* точкою множини D, якщо існує такий окіл цієї точки, який повністю міститься у множині D. Множину D називають *відкритою*, якщо кожна її точка внутрішня.

Прикладом відкритої множини є ε-окіл будь-якої точки.

4. Область. Множину D називають *зв'язною*, якщо будь-які дві її точки можна з'єднати неперервною кривою (зокрема ламаною), що повністю лежить у множині D (рис. 8.3—8.4).

Відкриту зв'язну множину називають *областю*.

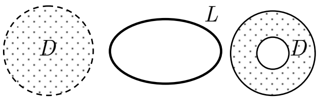


Рис. 8.3. Приклади зв'язних множин

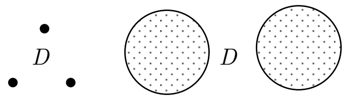


Рис. 8.4. Приклади незв'язних множин

5. Межа множини. Точку M називають *межовою* точкою множини D, якщо будь-який окіл цієї точки містить як точки, що належать множині D, так і точки, що їй не належать. Множину всіх межових точок множини називають *межею* множини D і позначають ∂D.

Об'єднання області D і множини її межових точок називають *замкненою областю* і позначають $\bar{D}$:

$$\bar{D} = D \cup \partial D.$$

Прикладом замкненої множини є круг зі своєю межею колом або куля зі своєю межею сферою.

8.1.2. Функції кількох змінних

1. Розгляньмо деяку множину точок D простору $\mathbb{R}^n$.

Якщо існує правило f, яке кожній точці $M(x_1;x_2;\ldots;x_n) \in D$ увідповіднює число u, то кажуть, що задано *функцію f n-змінних* і позначають

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(M), M \in D.$$

Множину D називають *областю означення* функції f і позначають $D(f)$. Число $u = f(M)$ називають *значенням* функції f у точці M. Множину

$$E(f) = \{u \in \mathbb{R} \mid u = f(M), M \in D(f)\}$$

називають *множиною значень* функції f.

Оскільки всі найважливіші застосування можна спостерігати вже на функціях двох змінних, то надалі детальніше розглядатимемо саме їх.

Функцію двох змінних $z = f(x,y)$, $M(x;y) \in D$, можна зобразити графічно. Для цього в кожній точці $(x;y) \in D$ обчислюють значення функції $z = f(x,y)$. Сукупність точок $P(x;y;f(x,y))$ утворює графік G_f функції $z = f(x,y)$, що є деякою поверхнею у просторі $\mathbb{R}^3$ (рис. 8.5).

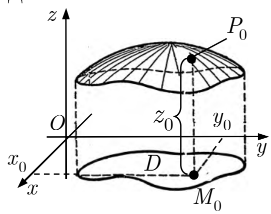


Рис. 8.5. Графік функції двох змінних

2. Приміром, областю означення функції $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ є круг $x^2 + y^2 \le 1$, а графіком — верхня півсфера із центром у точці O радіусом 1.

3. Для зображення функцій двох змінних часто використовують метод перерізів, який полягає в тому, що поверхню $z = f(x,y)$ перерізають площинами $x = x_0$ та $y = y_0$ і за кривими $z = f(x_0,y)$ та $z = f(y_0,x)$ визначають вигляд графіка функції $z = f(x,y)$.

Але можна фіксувати значення не аргументів, а функції, тобто перерізати поверхню площинами $z = C, C \in E(f)$. При цьому одержуємо криву

$$\boxed{f(x,y) = C,}$$

яку називають *лінією рівня* функції.

Тобто, лінія рівня на площині Oxy — це проекція кривої, утвореної перерізом поверхні $z = f(x,y)$ площиною $z = C$.

Якщо покласти $C = C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, вибираючи ці числа в арифметичній прогресії з різницею h, то дістаємо послідовність ліній рівня, за взаємним розташуванням яких можна вивчати поводження функції.

Зокрема, де лінії густіші, функція змінюється швидше (поверхня, що зображує функцію, йде крутіше), а там, де лінії рівня розташовані рідше, функція змінюється повільніше (відповідна поверхня пологіша) (рис. 8.6).

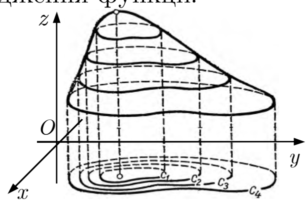


Рис. 8.6. Лінії рівня

Приміром, для функції $z = x^2 + y^2$ лініями рівня є кола $x^2 + y^2 = C \geq 0$.

Для функцій трьох змінних $u = f(x, y, z)$ розглядають *поверхні рівня* — множини точок $M(x; y; z)$ простору, які справджують рівняння

$$\boxed{f(x, y, z) = C.}$$

Приміром, поверхні рівні функції $u = z^2 - x^2 - y^2$ подано на рис. 8.7.

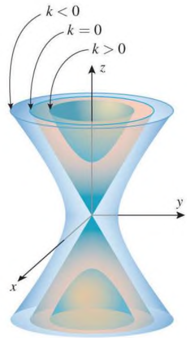


Рис. 8.7. Поверхні рівня

8.1.3. Границя функції кількох змінних

1. Нехай функцію

$$u = f(M), M(x_1; x_2; \ldots; x_n) \in D,$$

означено у проколеному околі точки $M_0(x_{10}; x_{20}; \ldots; x_{n0})$.

Означення 8.1 (границі функції).

Число A називають *границею функції* f у точці M_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що для всіх точок M із проколеного δ-околу точки M_0 виконано нерівність

$$\left| f(M) - A \right| < \varepsilon$$

і позначають

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = \lim_{\substack{x_1 \to x_{10} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n \to x_{n0}}} f(x_1, \ldots, x_n) = A.$$

З означення випливає, що, якщо границя існує, то вона не залежить від шляху, за яким точка M прямує до точки M_0 (кількість таких напрямів нескінченна; для функцій однієї змінної $x \to x_0$ лише по двох напрямах: зліва та справа).

2. Приміром, функція $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ має різні границі вздовж різних променів $y = kx$, коли $x \to 0$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Отже, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не існує.

3. Властивості функцій однієї змінної, які мають скінченні границі, зберігаються і для функцій кількох змінних. Зокрема, правдива теорема про арифметичні над границями функцій:

Якщо $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = A$, $\lim\limits_{M\to M_0} g(M) = B$, то:

$$\lim_{M\to M_0} (f(M) \pm g(M)) = A \pm B;$$

$$\lim_{M\to M_0} f(M)g(M) = AB; \lim_{M\to M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{A}{B} \ (B \neq 0).$$

4. Нехай функцію $u = f(M), M \in D$, означено в деякому околі точки M_0.

Означення 8.2 (неперервності функції).

Функцію f називають *неперервною в точці* M_0, якщо

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Якщо позначити *повний приріст* функції як

$$\Delta f(M_0) = f(M) - f(M_0),$$

то умову неперервності функції $u = f(M)$ у точці M_0 можна переписати як

$$\boxed{\lim_{M\to M_0} \Delta f(M_0) = 0.}$$

Арифметичні дії з неперервними функціями й суперпозиція неперервних функцій приводять до неперервних функцій.

5. Нехай функцію означено у проколеному околі точки. Якщо в цій точці функція не означена або не є неперервною, то таку точку називають *точкою розриву* функції.

Для функцій кількох змінних точки розриву можуть заповнювати лінії (поверхні). Приміром, для функції $z = \dfrac{1}{9x^2-4y^2}$ точки розриву утворюють множину точок площини Oxy, яку визначає рівняння $9x^2 - 4y^2 = 0$, тобто точки прямих $y = \pm\dfrac{3}{2}x$.

6. Функцію, неперервну в кожній точці області D, називають *неперервною в області* D.

Область на площині (у просторі) називають *обмеженою*, якщо існує круг (куля), який містить цю область.

Теорема 8.1 (Ваєрштраса).

Якщо функція f неперервна в обмеженій замкненій області $\bar{D}$, то функція f:

1) обмежена в області $\bar{D}$;

2) набуває в області $\bar{D}$ своїх найбільшого та найменшого значень.

8.2. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Поняття похідних та диференціалів функцій однієї змінної можна узагальнити і для функцій кількох змінних.

8.2.1. Частинні похідні 1-го порядку

1. Похідна $f'(x)$ функції однієї змінної $y = f(x)$ характеризує швидкість змінення функції в точці x.

Для функції двох (або більшої кількості змінних) можна говорити про швидкість змінення функції в точці лише в певному напрямі, оскільки ця швидкість у різних напрямах може бути різною.

Нехай функція $z = f(x,y)$ означена в деякому околі $U(M_0)$ точки $M_0(x_0;y_0)$ і

$$M(x_0 + \Delta x; \Delta y) \in U(M_0),$$
$$M(x_0; y_0 + \Delta y) \in U(M_0).$$

Частинними приростами функції $f(x,y)$ за змінною x (за змінною y) у точці M_0 називають різниці

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta_x f(M_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),\\ \Delta_y f(M_0) &= f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\end{aligned}}$$

відповідно.

Означення 8.3 (частинної похідної).

Частинною похідною функції $z = f(x,y)$ *за змінною* x (*за змінною* y) у точці M_0 називають границю відношення частинного приросту функції до відповідного приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, і позначають:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(M_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x};$$
$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_y f(M_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Ще використовують позначення:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}, z'_x(M_0), f'_x(M_0);$$
$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}, z'_y(M_0), f'_y(M_0).$$

З означення випливає, що частинну похідну функції $z = f(x,y)$ за змінною x знаходять за формулами і правилами обчислення похідних функцій однієї змінної (при цьому змінну y уважають сталою).

2. Приміром, для функції $z = x^y$ маємо:

1) $z'_x = yx^{y-1}$ (за правилом диференціювання степеневої функції, y — стала);

2) $z'_y = x^y \ln x$ (за правилом диференціювання показникової функції, x — стала).

3. Для функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можна означити n частинних похідних:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n},$$

де

$$\boxed{\frac{\partial u(M_0)}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f(M_0)}{\Delta x_i}, i = \overline{1,n}.}$$

Знаходять частинну похідну за певною змінною за правилами й формулами диференціювання функцій однієї змінної, при цьому решту змінних уважають сталими.

8.2.2. Диференційовність функції

1. Нагадаймо, що функцію однієї змінної $y = f(x)$ називають диференційовною в точці x_0, якщо її приріст у цій точці можна записати у вигляді

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha \Delta x,$$

де $A = A(x_0)$ стала відносно Δx, $\alpha = \alpha(\Delta x)$ — н. м. ф., коли $\Delta x \to 0$.

Необхідною й достатньою умовою диференційовності функції $y = f(x)$ у точці x_0 є існування скінченної похідної

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A.$$

2. Розгляньмо функцію $z = f(x, y)$ означену в деякому околі $U(M_0)$ і точки $M_0(x_0; y_0)$ та $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U(M_0)$.

Повним приростом функції $z = f(x, y)$, який відповідає приростам аргументів

$$\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0,$$

називають різницю

$$\boxed{\Delta f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(M) - f(M_0).}$$

Означення 8.4 (диференційовності функції).

Функцію $z = f(x, y)$ називають *диференційовною в точці* M_0, якщо в деякому околі цієї точки повний приріст функції можна записати як

$$\Delta f(M_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

де $A = A(M_0), B = B(M_0)$ — сталі щодо $\Delta x, \Delta y$; $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ і $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$, коли $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

3. Теорема 8.2 (необхідні умови диференційовності).

Якщо функція $z = f(x,y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0;y_0)$, то:

1) у цій точці існують частинні похідні за обома змінними, причому

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = A; \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = B;$$

2) функція неперервна в точці M_0.

Доведення. 1. Для точки $(x_0 + \Delta x; y_0)$ маємо:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + \alpha\Delta x \ \big(\Delta y = 0\big).$$

Звідси, розділивши обидві частини цієї рівності на $\Delta x \neq 0$ і враховуючи означення, маємо

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A.$$

Так само $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = B.$

2. $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f(M_0) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \big(A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y\big) = 0.$

Отже, функція $z = f(x,y)$ неперервна в точці M_0. ■

Повний приріст диференційовної функції f у точці M_0 можна записати як

$$\boxed{\Delta f(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,}$$

де $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ і $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$, коли $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

З неперервності функцій двох змінних у точці M_0 та з існування її частинних похідних у цій точці ще не випливає її диференційовність.

Теорема 8.3 (достатня умова диференційовності).

Якщо функція f має неперервні частинні похідні в деякому околі точки M_0, то функція f диференційовна в точці M_0.

8.2.3. Повний диференціал функції

1. Розгляньмо диференційовну в точці $M_0(x_0; y_0)$ функцію $z = f(x,y)$.

Означення 8.5 (повного диференціала).

Повним диференціалом функції $z = f(x,y)$ у точці M_0 називають лінійну щодо Δx та Δy частину повного приросту цієї функції в точці M_0 і позначають

$$df(M_0) = dz(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\Delta y.$$

Вирази $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\Delta x$ та $\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\Delta y$ називають *частинними диференціалами* функції f за змінними x та y і позначають $d_x f(M_0)$ та $d_y f(M_0)$. Отже,

$$\boxed{df(M_0) = d_x f(M_0) + d_y f(M_0).}$$

Оскільки для незалежних змінних $dx = \Delta x, dy = \Delta y$, то формула для обчислення диференціала набуває вигляду

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.}$$

Для функції n змінних $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ маємо формулу повного диференціала

$$\boxed{du = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.}$$

2. З означення випливає, що для достатньо малих $|\Delta x|$ та $|\Delta y|$ правдива наближена рівність

$$\Delta f(M_0) \approx df(M_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y,}$$

яку використовують у наближених обчисленнях.

8.2.4. Похідна складеної функції

1. Розгляньмо функцію $z = f(x,y)$ двох змінних x та y, кожна з яких є функцією незалежної змінної t:

$$x = x(t), y = y(t).$$

Тоді функція $\tilde{z}(t) = f(x(t), y(t))$ є складеною функцією змінної t.

Якщо функції $x = x(t), y = y(t)$ диференційовні в точці t, а функція $z = f(x,y)$ диференційовна в точці $M(x;y)$, то складена функція $\tilde{z}(t) = f(x(t),y(t))$ також диференційовна в точці t і її похідну знаходять за формулою

$$\boxed{\frac{d\tilde{z}}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.}$$

Так само знаходять похідну функції $u = f(x,y,z), x = x(t), y = y(t), z = z(t)$:

$$\boxed{\frac{d\tilde{u}}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}.}$$

2. Зокрема, якщо $t = x, y = y(x), z = z(x)$, то дістаємо формулу для обчислення *повної похідної*

$$\boxed{\frac{d\tilde{u}}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}.}$$

3. Розгляньмо загальніший випадок. Нехай $z = f(x,y)$ — функція двох змінних x та y, які залежать від змінних u, v:

$$x = x(u,v), y = y(u,v).$$

Тоді функція $\tilde{z} = f(x(u,v), y(u,v))$ є складеною функцією незалежних змінних u та v.

Якщо функції $x(u,v)$ та $y(u,v)$ диференційовні в точці $M_1(u;v)$, а функція $z = f(x,y)$ диференційовна в точці $M_2(x(u,v);y(u,v))$, то складена функція $\tilde{z} = f(x(u,v), y(u,v))$ диференційовна в точці $M_1(u,v)$ і її частинні похідні знаходять за формулами:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u};\\ \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.\end{aligned}}$$

4. Знайдімо диференціал складеної функції:

$$\begin{aligned}dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.\end{aligned}$$

Це доводить, що повний диференціал функції $z = f(x,y)$ має *інваріатну* (*незмінну*) *форму*, тобто незалежну від того, чи є x та y незалежними змінними, чи диференційовними функціями змінних u та v.

8.2.5. Похідна неявної функції

1. Розгляньмо рівняння

$$F(x,y,z) = 0.$$

Якщо кожній парі чисел x та y з деякої множини відповідає єдине значення z, яке разом з x та y справджує це рівняння, то рівняння задає неявну функцію $z = f(x,y)$.

Теорема 8.4 (про неявну функцію).

Нехай функція $F(x,y,z)$ і її похідні $F'_x(x,y,z), F'_y(x,y,z)$ та $F'_z(x,y,z)$ означені й неперервні в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, причому $F(M_0) = 0$, а $F'_z(M_0) \neq 0$. Тоді існує окіл точки M_0, у якому рівняння $F(x,y,z) = 0$ означує єдину функцію $z = f(x,y)$, неперервну й диференційовну в околі точки $(x_0;y_0)$ і таку, що $f(x_0,y_0) = z_0$.

Диференціюючи рівність $F(x,y,z) = 0$ за змінними x та y:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

дістаємо формули для знаходження частинних похідних функції $z = f(x,y)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \end{aligned}}$$

2. Розгляньмо тепер диференційовність неявної функції $y = f(x)$, означеної рівнянням

$$F(x,y) = 0.$$

Нехай $F(x, y)$ — неперервно диференційовна функція, така, що $F'_y(x, y) \neq 0$. Тоді похідну неявної функції $y = f(x)$ можна знайти за формулою

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}}.$$

8.2.6. Частинні похідні вищих порядків

1. Якщо функція $z = f(x, y)$ задана в області D і має частинні похідні z'_x, z'_y у всіх точках $(x; y) \in D$, то ці похідні можна розглядати як нові функції, задані в області D.

Якщо існує частинна похідна за змінною x від функції $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, то її називають *частинною похідною 2-го порядку* від функції f за змінною x і позначають $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ або f''_{x^2}. Отже, за означенням

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}.$$

Якщо існує частинна похідна від функції $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ за змінною y, то її називають *мішаною частинною похідною 2-го порядку* від функції f і позначають

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}.$$

Для функції $z = f(x, y)$ можна ще розглянути:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right). \end{aligned}}$$

Якщо існують частинні похідні від частинних похідних 2-го порядку функції $f(x, y)$, то їх називають *частинними похідними 3-го порядку* функції $f(x, y)$ (існує вісім таких похідних).

2. Природно виникає запитання: чи залежить результат диференціювання від порядку диференціювання?

Теорема 8.5 **(про рівність мішаних похідних).**

Якщо функція $f(x,y)$ означена разом зі своїми похідними $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ у деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$ і похідні f''_{xy} та f''_{yx} неперервні в точці M_0, то

$$f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0).$$

Така сама теорема правдива для неперервних мішаних похідних довільного порядку, що різняться між собою лише порядком диференціювання.

8.2.7. Диференціали вищих порядків

1. Диференціал 2-го порядку функції $z = f(x,y)$ означують формулою

$$\boxed{d^2z = d(dz).}$$

Якщо функція f має неперервні частинні похідні, а змінні x та y незалежні, то

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z.$$

2. У разі незалежних змінних x та y для *диференціала m-го порядку* функції z, який означають рівністю

$$\boxed{d^m z = d(d^{m-1}z),}$$

маємо формулу:

$$\boxed{d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^m z,}$$

Цей вираз розуміють так: двочлен, який стоїть у правій частині співвідношення, треба розкрити за формулою біному Ньютона, а потім одержаним виразом подіяти почленно на функцію $z(x,y)$.

3. Для функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від n незалежних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ диференціал m-го порядку знаходять за формулою:

$$\boxed{d^m u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m u.}$$

8.2.8. Тейлорова формула для функції двох змінних

Для $(n+1)$ разів неперервно диференційовної функції однієї змінної $y = f(x)$ можна записати формулу Тейлора в диференціальній формі із залишковим членом у формі Лаґранжа:

$$\Delta f = df(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(c)}{(n+1)!}, c \in (x_0; x).$$

де $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Теорема 8.6 (Тейлора).

Якщо функція $z = f(x, y)$ $(n+1)$ разів неперервно диференційовна в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$, то для неї правдива *Тейлорова формула* n-го порядку в околі точки M_0

$$\Delta f = df(M_0) + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(M_0)}{n!} + r_n$$

із *залишковим членом* у *Лаґранжовій* формі

$$r_n = \frac{d^{n+1} f(M')}{(n+1)!}, M' \in U(M_0).$$

8.3. ВЕКТОР-ФУНКЦІЇ

У курсі вищої математики і її застосуваннях доводиться працювати не лише з числовими функціями, але й з функціями, у яких область означення D або множина значень E складається з елементів іншої природи, приміром $E \subset \mathbb{V}^3$.

8.3.1. Поняття векторної функції

1. *Векторною функцією* (*вектор-функцією скалярного аргументу*) називають відображення, яке кожному дійсному числу $t \in T$ увідповіднює певний вектор $\overline{r} = \overline{r}(t)$.

У фіксованому базисі $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$ задавання однієї вектор-функції $\overline{r} = \overline{r}(t)$ рівносильно задаванню трьох числових функцій $x(t), y(t)$ та $z(t)$, які є її координатами:

$$\overline{r}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}, t \in T.$$

Геометрично вектор-функцію зручно зображувати, будуючи множину точок простору (деяку криву) з радіусами-векторами

$$\overline{r} = \overline{r}(t), t \in T,$$

які виходять з фіксованої точки O. Цю множину називають *годографом* вектор-функції (рис. 8.8). Функція $\overline{r}(t)$ задає параметричне зображення годографа L з параметром t.

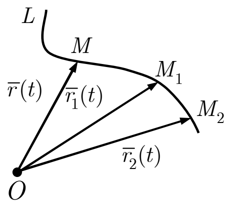


Рис. 8.8. Годограф вектор-функції $\overline{r} = \overline{r}(t)$

Фізично годограф вектор-функції можна розглядати як траєкторію руху матеріальної точки.

2. Приміром, годографом функції

$$\overline{r}(t) = \overline{i}a\cos t + \overline{j}b\sin t, 0 \le t \le 2\pi,$$

є еліпс із параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} t \in [0;2\pi].$$

8.3.2. Границя й неперервність вектор-функції

1. *Границею вектор-функції* $\overline{r}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}$, коли $t \to t_0$, називають сталий вектор $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ такий, що

$$\lim_{t\to t_0} \left|\overline{r}(t) - \overline{a}\right| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a_x, \\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = a_y, \\ \lim\limits_{t\to t_0} z(t) = a_z \end{cases}$$

і пишуть, що $\lim\limits_{t\to t_0} \overline{r}(t) = \overline{a}$.

Властивості границь вектор-функцій можна дістати з означення та відповідних властивостей границь числових функцій.

2. Вектор-функцію $\overline{r} = \overline{r}(t)$, означену в деякому околі точки t_0, називають *неперервною в точці* t_0, якщо

$$\lim_{t \to t_0} \overline{r}(t) = \overline{r}(t_0).$$

Вектор-функція $\overline{r}(t)$ неперервна в точці t_0 тоді й лише тоді, коли координатні функції $x(t), y(t)$ та $z(t)$ неперервні в точці t_0.

8.3.3. Похідна вектор-функції

1. Нехай вектор-функція $\overline{r}(t)$ означена в деякому околі точки t_0. Надаймо аргументу приріст $\Delta t \neq 0$ й розгляньмо приріст вектор-функції

$$\Delta \overline{r}(t_0) = \overline{r}(t_0 + \Delta t) - \overline{r}(t_0).$$

Відношення $\dfrac{\Delta \overline{r}(t_0)}{\Delta t}$ є вектором, колінеарним вектору $\Delta \overline{r}(t_0)$.

Означення 8.6 (похідної вектор-функції).

Похідною вектор-функції $\overline{r}(t)$ в точці t_0 називають вектор

$$\overline{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{r}(t_0 + \Delta t) - \overline{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

2. З того, що

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{r}(t_0 + \Delta t) - \overline{r}(t_0)}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} \end{pmatrix}$$

маємо, що існування похідної $\overline{r}'(t_0)$ рівносильно існуванню похідних $x'(t_0), y'(t_0)$ та $z'(t_0)$, причому правдива рівність

$$\boxed{\overline{r}'(t_0) = x'(t_0)\overline{i} + y'(t_0)\overline{j} + z'(t_0)\overline{k} = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix}.}$$

3. Правдиві такі **правила диференціювання вектор-функції:**

1) $(\overline{r}_1(t) \pm \overline{r}_2(t))' = \overline{r}_1'(t) \pm \overline{r}_2'(t)$;

2) $(C\overline{r}(t))' = C\overline{r}'(t), C = \mathrm{const}$;

3) $(\overline{r}_1(t), \overline{r}_2(t))' = (\overline{r}_1'(t), \overline{r}_2(t)) + (\overline{r}_1(t), \overline{r}_2'(t))$;

4) $[\overline{r}_1(t), \overline{r}_2(t)]' = [\overline{r}_1'(t), \overline{r}_2(t)] + [\overline{r}_1(t), \overline{r}_2'(t)]$.

8.3.4. Геометричний і механічний зміст похідної вектор-функції

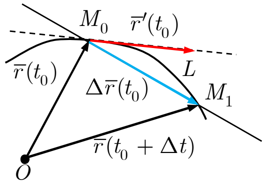


Рис. 8.9. Похідна вектор-функції

1. Розгляньмо вектор $\dfrac{\Delta\overline{r}(t_0)}{\Delta t}$ колінеарний вектору січної M_0M_1 до кривої (рис. 8.9). Коли $\Delta t \to 0$, точка M_1 прямує вздовж годографа до точки M_0, і тому січна M_0M_1 прямує до дотичної до кривої L у точці M_0, а , отже, й вектор $\overline{r}'(t_0)$, паралельний граничному положенню вектора січної, також буде напрямлений уздовж цієї дотичної.

Вектори $\Delta\overline{r}(t_0)$ і $\dfrac{\Delta\overline{r}(t_0)}{\Delta t}$ колінеарні. Якщо $\Delta t > 0$, то ці вектори напрямлені в бік зростання t. Якщо $\Delta t < 0$, то вектор $\Delta\overline{r}(t_0)$ напрямлений у бік спадання t, а вектор $\dfrac{\Delta\overline{r}(t_0)}{\Delta t}$ знову напрямлений у бік зростання t.

Геометричний зміст вектора $\overline{r}'(t_0)$ полягає в тому, що він напрямлений уздовж дотичної до годографа функції $\overline{r}(t)$ у бік зростанням параметру t.

2. Вектор-функція $\overline{r}(t)$ з механічного погляду задає закон руху матеріальної точки по кривій, яка є годографом. Оскільки похідна є швидкістю змінення функції в заданій точці, то $\overline{r}'(t_0)$ є швидкістю руху матеріальної точки по цій кривій, напрямленою вздовж дотичної до кривої в бік зростання t.

8.3.5. Дотична пряма й нормальна площина до просторової кривої

1. Розгляньмо гладку просторову криву L (рис. 8.10) з рівняннями:

$$\overline{r} = \overline{r}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in T. \\ z = z(t), \end{cases}$$

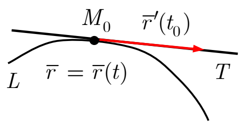


Рис. 8.10. Дотична пряма до кривої

яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$

Нехай точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ відповідає значення t_0 параметра t. Тоді вектор

$$\overline{r}'(t_0) = x'(t_0)\overline{i} + y'(t_0)\overline{j} + z'(t_0)\overline{k}$$

має напрям дотичної прямої T до кривої L у точці M_0.

Дотична пряма до кривої L у точці M_0 має такі канонічні рівняння:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.}$$

2. Площину N, яка перпендикулярна до дотичної прямої в точці дотику, називають *нормальною площиною* до кривої в цій точці.

Нормальна площина до кривої L має рівняння

$$\boxed{x'(t_0)\big(x - x_0\big) + y'(t_0)\big(y - y_0\big) + z'(t_0)\big(z - z_0\big) = 0.}$$

8.4. ПОХІДНА ЗА НАПРЯМОМ І ГРАДІЄНТ ФУНКЦІЇ

Поняття похідної за напрямом узагальнює поняття частинної похідної функції кількох змінних. За допомогою похідної за напрямом вивчають швидкість зміни функції у вибраному напрямі. Важливим є також питання про напрям найшвидшої зміни функції.

8.4.1. Похідна за напрямом

1. Розгляньмо функцію $u = f(M)$, означену в деякому околі точки M_0 з радіусом-вектором $\overline{r_0} = x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k}$, і вектор $\overline{l}$ (рис. 8.11).

Орт вектора $\overline{l}$ вектор

$$\overline{l}^{\,0} = \frac{1}{|\overline{l}|}\overline{l} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix},$$

де α, β та γ — кути, утворені вектором $\overline{l}$ з осями Ox, Oy і Oz.

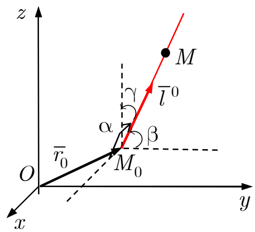


Рис. 8.11. Похідна за напрямом

Означення 8.7 (похідної за напрямом).

Похідною функції $u = f(M)$ у точці M_0 *за напрямом* вектора $\overline{l}$ називають границю

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \lim_{t\to+0}\frac{f(\overline{r_0} + t\overline{l}^{\,0}) - f(\overline{r_0})}{t}.$$

2. Щоб дістати координатну форму похідної за напрямом, візьмімо промінь, що виходить з точки M_0 у напрямі вектора $\overline{l}$, з параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\cos\beta, \quad t \geq 0. \\ z = z_0 + t\cos\gamma, \end{cases}$$

У точках цього променя маємо функцію

$$u = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) = F(t).$$

Тоді

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \lim_{t\to+0}\frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to+0}\frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(+0).$$

Якщо функція $u = f(x, y, z)$ неперервно диференційовна в точці M_0, то застосовуючи правило диференціювання складеної функції, одержуємо

$$\boxed{\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma.}$$

3. Якщо за напрям вектора $\overline{l}$ узяти, приміром, напрям осі Ox, то $\overline{l}^{\,0} = \overline{i}$. Тоді маємо $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, тобто похідна за напрямом осі Ox є частинною похідною за змінною x. Так само і для похідних за напрямом осей Oy та Oz.

Існування похідних функції в заданій точці за всіма напрямами не гарантує диференційовності функції в цій точці.

4. Для функції $u = f(x,y)$ двох змінних маємо

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\sin\alpha,}$$

де $\overline{l}^{\,0} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\end{pmatrix}, \beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha.$

5. Похідна за напрямом має властивості:

1) $\dfrac{\partial u(M)}{\partial l}$ дорівнює швидкості змінювання функції $u(M)$ у напрямі вектора $\overline{l}$;

2) якщо $\dfrac{\partial u(M)}{\partial l} > 0$, то функція $u = u(M)$ зростає в напрямі вектора $\overline{l}$;

3) якщо $\dfrac{\partial u(M)}{\partial l} < 0$, то функція $u = u(M)$ спадає в напрямі вектора $\overline{l}$.

8.4.2. Градієнт функції

1. Слушним є питання: за напрямом якого вектора $\overline{l}$ похідна $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ має найбільше значення? Цей напрям указує градієнт функції.

Означення 8.8 **(градієнта функції в точці).**

Градієнтом диференційовної функції $u = f(x,y,z)$ у точці M називають вектор

$$\operatorname{grad} u(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\overline{k} = \begin{pmatrix} u'_x(M)\\ u'_y(M)\\ u'_z(M)\end{pmatrix}.$$

Градієнт можна розглядати для функцій будь-якої кількості змінних.

За допомогою градієнта похідну функції $u = f(M)$ за напрямом вектора $\overline{l}$ можна записати як

$$\boxed{\frac{\partial u(M)}{\partial l} = (\operatorname{grad} u(M), \overline{l}^{\,0}) = \left|\operatorname{grad} u(M)\right| \cos\varphi = \operatorname{pr}_{\overline{l}^{\,0}} \operatorname{grad} u,}$$

де $\varphi = \widehat{(\operatorname{grad} u(M), \overline{l}^{\,0})}$.

Отже, похідна в заданому напрямі дорівнює проекції градієнта на напрям диференціювання (рис. 8.12). Звідси випливає, що якщо $\operatorname{grad} u(M) \neq 0$, то похідна $\dfrac{\partial u(M)}{\partial l}$ набуває найбільшого значення, коли за вектор $\overline{l}$ узяти градієнт функції $u(M)$, а саме

$$\max \frac{\partial u(M)}{\partial l} = \left.\frac{\partial u(M)}{\partial l}\right|_{\overline{l} = \operatorname{grad} u} = \left|\operatorname{grad} u(M)\right|.$$

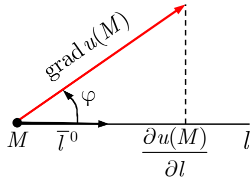


Рис. 8.12. Похідна за напрямом як проекція градієнта

У протилежному напрямі, який задає вектор $(-\operatorname{grad} u)$, похідна $\dfrac{\partial u(M)}{\partial l}$ має найменше значення, що дорівнює $-\left|\operatorname{grad} u(M)\right|$.

2. Напрям вектора $\operatorname{grad} u$, називають *напрямом найшвидшого підіймання*, а напрям вектора $(-\operatorname{grad} u)$ — *напрям найшвидшого спускання*.

З установленого геометричного змісту градієнта випливає, що градієнт не залежить від вибору системи координат, оскільки й напрям, і довжина вектора градієнта в кожній точці не залежать від вибору системи координат.

8.4.3. Геометричний зміст градієнта

Розгляньмо поверхню Ω, яку задає рівняння

$$F(x, y, z) = 0.$$

Нехай функція $F(x, y, z)$ диференційовна в точці $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \Omega$, причому не всі частинні похідні в точці M_0 дорівнюють нулю.

Кажуть, що вектор $\overline{n}$ перпендикулярний до поверхні Ω в точці M_0, якщо він перпендикулярний до будь-якої дотичної прямої, проведеної до поверхні в цій точці.

Теорема 8.7 **(про геометричний зміст градієнта).**

Вектор $\operatorname{grad} u(M_0)$ перпендикулярний до поверхні рівня гладкої функції $u = f(x, y, z)$ у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ цієї поверхні (рис. 8.13).

Доведення. Розгляньмо довільну криву

$$L : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in T, \\ z = z(t), \end{cases}$$

що проходить через точку M_0 поверхні рівня

$$\Omega : f(x, y, z) = C,$$

де точці M_0 відповідає значення параметра t_0.

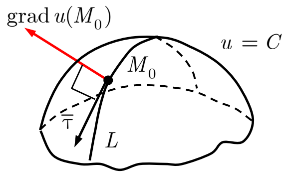


Рис. 8.13. Геометричний зміст градієнта

Вектор

$$\overline{\tau} = x'(t_0)\overline{i} + y'(t_0)\overline{j} + z'(t_0)\overline{k}$$

напрямлений уздовж дотичної до кривої L.

Оскільки крива L лежить на поверхні, то координати її точок справджують рівняння

$$f(x(t), y(t), z(t)) = C.$$

Диференціюючи цю рівність за змінною t, маємо

$$\frac{df(t_0)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\bigg|_{M_0} = 0 \Leftrightarrow (\operatorname{grad} u(M_0), \overline{\tau}) = 0.$$

А це й означає ортогональність вектора $\operatorname{grad} u(M_0)$ до вектора дотичної $\overline{\tau}$ і його перпендикулярність до поверхні Ω. ■

8.4.4. Дотична площина й нормаль до поверхні

1. З теореми 8.8 випливає, що дотичні до всіх кривих, які проходять через точку M_0 і лежать на поверхні

$$\Omega : F(x, y, z) = 0,$$

ортогональні до одного й того самого вектора $\operatorname{grad} F(M_0)$ (рис. 8.14). Тоді всі ці дотичні лежать в одній і тій самій площині T, яку називають *дотичною площиною* до поверхні в точці M_0.

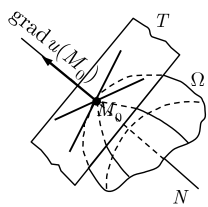


Рис. 8.14. Дотична площина та нормаль до поверхні

Оскільки площина T проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора

$$\operatorname{grad} F(M_0) = \begin{pmatrix} F'_x(M_0) \\ F'_y(M_0) \\ F'_z(M_0) \end{pmatrix},$$

то її задає рівняння

$$(\operatorname{grad} F(M_0), \overline{MM_0}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0,}$$

де $M(x; y; z)$ — точка дотичної площини T.

2. *Нормаллю* до поверхні Ω у точці M_0 називають пряму N, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини T в цій точці.

Оскільки нормаль проходить через точку M_0 і її напрямним вектором є $\operatorname{grad} F(M_0)$, то маємо канонічне рівняння нормалі

$$\boxed{\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.}$$

3. Для поверхні, заданої явно рівнянням $z = f(x, y)$, покладімо

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0,$$

звідки маємо:

— рівняння дотичної площини

$$\boxed{f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0;}$$

— рівняння нормалі

$$\boxed{\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.}$$

8.4.5. Геометричний зміст частинних похідних і диференціала

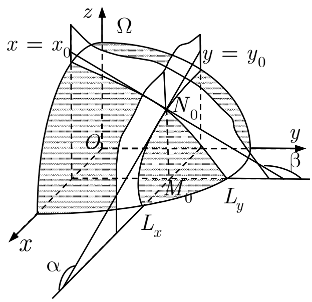


Рис. 8.15. Геометричний зміст частинних похідних

1. Нехай задано диференційовну функцію $z = f(x,y)$, графік якої у просторі є деякою поверхнею Ω. Нехай $M_0(x_0;y_0)$ — фіксована точка з області D означення функції f, а $N_0(x_0;y_0;z(x_0,y_0))$ — точка поверхні Ω, яка відповідає точці M_0 (рис. 8.15).

Знаходячи частинну похідну $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x}$, змінну y фіксують так, що $y = y_0$.

Геометрично це означає, що через точку $M_0 \in D$ проводять площину $y = y_0$, яка паралельна площині Oxz, і розглядають функцію $z = f(x,y_0)$ однієї змінної x у точці $x = x_0$.

Похідна цієї функції $z'_x(x_0) = \dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x}$ дорівнює тангенсу кута α між прямою, паралельної осі Ox, і дотичною до кривої $z = f(x,y_0)$, що є лінією перерізу поверхні $z = f(x,y)$ із площиною $y = y_0$:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Так само частинна похідна $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial y}$ дорівнює тангенсу кута β між прямою, паралельної осі Oy, і дотичною до кривої $z = f(x_0,y)$, що є лінією перерізу поверхні $z = f(x,y)$ із площиною $x = x_0$.

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = \operatorname{tg}\beta.$$

2. Якщо поверхню задано в явному вигляді $z = f(x,y)$, то рівняння дотичної площини до цієї поверхні в точці $N_0(x_0;y_0;z(x_0,y_0))$ має вигляд

$$f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Його ще можна переписати як

$$\Delta z = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y = df(x_0,y_0),$$

де $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0, \Delta z = z - z_0$.

Отже, диференціал функції $z = f(x,y)$ у точці $(x_0; y_0)$ є приростом аплікати точки дотичної площини до поверхні $z = f(x,y)$ у точці $N_0(x_0; y_0; z(x_0, y_0))$.

8.5. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Поняття локального екстремуму й найбільшого та найменшого значення функцій однієї змінної можна узагальнити і для функцій кількох змінних.

8.5.1. Локальні екстремуми функції двох змінних

1. Розгляньмо функцію $z = f(x,y), (x;y) \in D$, і точку $M_0(x_0; y_0) \in D$.

Означення 8.9 (локального екстремуму).

Якщо існує окіл точки M_0, який належить області D, і для всіх точок M цього околу, відмінних від точки M_0, виконано нерівність

$$f(M) < f(M_0) \ \ (f(M) > f(M_0)),$$

то точку M_0 називають *точкою локального максимуму* (*локального мінімуму*) функції f, а число $f(M_0)$ — *локальним максимумом* (*локального мінімумом*) цієї функції.

Точки максимуму та мінімуму функції називають її *точками екстремуму* (рис. 8.15).

Якщо покласти

$$x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y,$$

то повний приріст функції

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x,y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Якщо приріст функції зберігає знак в околі точки M_0, то в цій точці функція має локальний екстремум:

1) максимум, якщо $\Delta f(x_0, y_0) < 0$;

2) мінімум, якщо $\Delta f(x_0, y_0) > 0$.

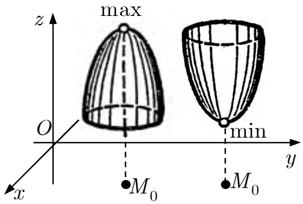


Рис. 8.15. Точки локального екстремуму

2. Теорема 8.8 (необхідна умова екстремуму).

Якщо функція $z = f(x,y)$ має в точці $M_0(x_0;y_0)$ локальний екстремум, то в цій точці частинні похідні 1-го порядку за змінними x та y дорівнюють нулю, нескінченності або не існують.

Доведення. Нехай $M_0(x_0;y_0)$ — точка екстремуму. Тоді функція $\varphi(x) = f(x,y_0)$ є функцією однієї змінної, яка має екстремум у точці $x = x_0$. Тому її похідна $f'_x(x_0,y_0)$ дорівнює нулю, нескінченності або не існує.

Так само, розглядаючи функцію $\psi(y) = f(x_0,y)$, дістаємо, що $f'_y(x_0,y_0)$ дорівнює нулю, нескінченності або не існує.■

Точку $M_0(x_0;y_0)$, у якій частинні похідні 1-го порядку функції f дорівнюють нулю, називають *стаціонарною точкою* функції f. Стаціонарну точку, яка не є точкою локального екстремуму називають *сідловою* точкою функції.

У стаціонарній точці виконано також умови:

$$dz(M_0) = 0,\ \operatorname{grad} f(M_0) = \overline{0}.$$

Стаціонарні точки та точки, у яких частинні похідні функції дорівнюють нескінчености або не існують, називають *критичними точками*.

3. Приміром, дослідімо функцію $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Функція $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ має максимум у точці $(0;0)$, оскільки $f(0,0) = 1, f(x,y) < 1$, якщо $x^2 + y^2 > 0$.

Частинні похідні функції $f(x,y)$

$$f'_x(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, f'_y(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

у точці $(0;0)$ не існують (рис. 8.17).

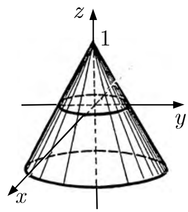


Рис. 8.17. У точці $(0;0;1)$ похідні не існують

4. Проте не будь-яка критична точка є точкою екстремуму, тобто теорема 8.9 установлює лише необхідну, але не достатню умови екстремуму.

Приміром, дослідімо функцію $z = xy$. Частинні похідні функції $z = xy$ дорівнюють нулю в точці $(0;0)$.

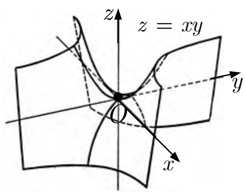


Рис. 8.18. Точка O є сідловою точкою поверхні

Але ця функція в указаній точці екстремуму не має, тому що в досить малому околі точки $(0;0)$ вона набуває як додатних, так і від'ємних значень (рис. 8.18). Точка $(0;0)$ є сідловою. Графіком функції $z = xy$ є гіперболічний параболоїд.

8.5.2. Достатні умови локального екстремуму

1. Нехай функція $z = f(x,y)$ двічі неперервно диференційовна в околі точки $M_0(x_0;y_0)$. Якщо точка M_0 є точкою локального екстремуму, то

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow df(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}dy = 0.$$

Запишімо Тейлорову формулу 1-го порядку для функції f:

$$\Delta f(M_0) = df(M_0) + \frac{d^2 f(M')}{2!} = \left|df(M_0) = 0\right| =$$
$$= \frac{1}{2}(f''_{xx}(M')\Delta x^2 + 2f''_{xy}(M')\Delta x\Delta y + f''_{yy}(M')\Delta y^2).$$

Отже, знак приросту функції $\Delta f(M_0)$ визначається знаком 2-го диференціала $d^2 f(M)$.

Другий диференціал функції $z = f(x,y)$ є квадратичною формою $Q(dx,dy)$ щодо змінних dx і dy, яку можна записати як

$$d^2 z = (dx \quad dy)H\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

де

$$H = \begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{pmatrix}$$

є матрицею квадратичної форми, яку називають *матрицею Гессе*.

Визначник матриці Гессе $\det H$ називають *гессіаном*.

Отже $d^2 f(M_0) > 0 \quad (d^2 f(M_0) < 0)$ тоді й лише тоді, коли матриця Гессе є додатно (від'ємно) визначеною.

Згідно із критерієм Сильвестра матриця H є:

1) додатно визначеною, якщо $z''_{xx}(M_0) > 0, \det H(M_0) > 0$;

2) від'ємно визначеною, якщо $z''_{xx}(M_0) < 0, \det H(M_0) > 0$.

Теорема 8.9 **(достатня умова локального екстремуму функції двох змінних).**

Нехай точка $M_0(x_0;y_0)$ є стаціонарною точкою функції $z=f(x,y)$,

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}=0, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}=0,$$

і в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$ функція f має неперервні частинні похідні до 2-го порядку включно:

$$A\mid_{M_0}=\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}, B\mid_{M_0}=\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}, C\mid_{M_0}=\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2},$$

$$\Delta(M_0)=\det H(M_0)=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}_{M_0}$$

Тоді:

1) якщо $\Delta(M_0)>0$, то функція f у точці M_0 має *екстремум*, причому

а) якщо $A>0$, то функція f у точці M_0 має *мінімум*;

б) якщо $A<0$, то функція f у точці M_0 має *максимум*;

2) якщо $\Delta(M_0)<0$, то функція f в точці M_0 **не має** екстремуму;

3) якщо $\Delta(M_0)=0$, то функція f у точці M_0 **може мати**, а **може й не мати** екстремуму і потребує додаткового дослідження.

2. Дослідімо на екстремум функцію $z=x^4+y^4$.

❍Знайдімо стаціонарні точки функції. Із системи рівнянь

$$\begin{cases} z'_x=4x^3=0, \\ z'_y=4y^3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$$

Точка $M_0(0;0)$ — стаціонарна.

$$A\mid_{M_0}=z''_{x^2}\mid_{M_0}=0, B=z''_{xy}\mid_{M_0}=0, C=A\mid_{M_0}=z''_{y^2}\mid_{M_0}=0;$$

$$\Delta(M_0)=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Теорема 8.10 не дає відповідь про наявність або відсутність екстремуму. Проведімо додаткове дослідження:

$\Delta f(x,y)=x^4+y^4-f(0,0)=x^4+y^4>0 \Rightarrow M_0(0;0)-\min.$●

8.5.3. Найбільше та найменше значення функції всередині замкненої області

Нехай функція $z = f(M)$ означена й неперервна в обмеженій замкненій області $\overline{D}$ і диференційовна в усіх внутрішніх точках $\overline{D}$. Тоді за теоремою Ваєрштраса існують точки $M' \in \overline{D}, M'' \in \overline{D}$, у яких вона досягає найбільшого та найменшого значень:

$$f(M') = \max_{M \in \overline{D}} f(M),$$
$$f(M'') = \min_{M \in \overline{D}} f(M).$$

Ці точки треба шукати серед критичних точок функції f усередині області D та серед точок межі області ∂D.

Найбільше та найменше значення функції називають *глобальними екстремумами* функції.

8.5.4. Умовний екстремум

1. Розгляньмо функцію $z = f(x,y)$ означену в деякій області D. Нехай у цій області задано криву $L : \varphi(x,y) = 0$ і треба знайти екстремуми функції $f(x,y)$ лише серед тих її значень, які відповідають точкам кривої L. Такі екстремуми називають *умовними екстремумами* функції $z = f(x,y)$ на кривій L.

Знаходячи умовні екстремуми функції $z = f(x,y)$, аргументи x та y уже не можна розглядати як незалежні змінні: вони зв'язані між собою співвідношенням $\varphi(x,y) = 0$, яке називають *умовою зв'язку*.

2. Приміром, функція $z = 1 - x$, графіком якої є площина, не має локальних екстремумів, а вже за умови зв'язку $x^2 + y^2 = 1$ на цій площині з'являється найнижча та найвища точки (рис. 8.19).

3. Один з методів відшукання умовного екстремуму функції $z = f(x,y)$ за умови зв'язку $\varphi(x,y) = 0$ полягає в підставлянні однієї зі змінних, знайдених з рівняння зв'язку у функцію $f(x,y)$.

Нехай рівняння зв'язку виражає y як однозначну диференційовну функцію змінної x:

$$y = g(x).$$

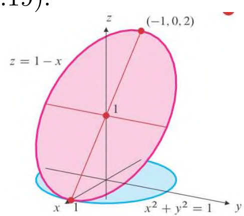


Рис. 8.19. Умовний екстремум

Підставляючи у функцію $f(x,y)$ замість y функцію $g(x)$, дістаємо функцію однієї змінної

$$z = f(x, g(x)) = F(x),$$

у якій уже враховано рівняння зв'язку. Екстремум (безумовний) функції $F(x)$ є шуканим умовним екстремумом.

4. Другий метод дослідження функції на умовний екстремум полягає в побудові *Лаґранжевої функції*:

$$\boxed{F(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),}$$

де λ — деякий числовий коефіцієнт, *Лаґранжів множник*, який треба визначити.

Можна довести, що точка умовного екстремуму функції $f(x,y)$ за умови зв'язку $\varphi(x,y) = 0$, є стаціонарною точкою Лаґранжевої функції.

5. Необхідними умовами існування безумовного екстремуму Лаґранжевої функції є:

$$\boxed{\begin{cases} F'_x \equiv f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0, \\ F'_y \equiv f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) = 0, \\ F'_\lambda \equiv \varphi(x,y) = 0. \end{cases}}$$

6. Достатні умови полягають у дослідженні знаку диференціала

$$d^2F(x, y; \lambda) = F''_{x^2}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{y^2}dy^2$$

за умов зв'язку.

Якщо у стаціонарній точці $M_0(x_0; y_0; \lambda_0)$ $d^2F(M_0) > 0$, то функція $z = f(x,y)$ має в цій точці умовний мінімум, якщо ж $d^2F(M_0) < 0$, то — умовний максимум.

7. Можна спростити дослідження характеру умовного екстремуму, відразу врахувавши умову зв'язку. З рівняння зв'язку маємо

$$\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0, \; dy = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}dx,$$

тому в довільній стаціонарній точці

$$d^2F(x,y;\lambda) = F''_{x^2}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{y^2}dy^2 =$$
$$= F''_{x^2}dx^2 + 2F''_{xy}dx\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}dx\right) + F''_{y^2}\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}dx\right)^2 =$$
$$= -\frac{dx^2}{\left(\varphi'_y\right)^2}\left[-\left(\varphi'_y\right)^2 F''_{x^2} + 2\varphi'_x\varphi'_y F''_{xy} - \left(\varphi'_x\right)^2 F''_{y^2}\right].$$

Множник у квадратних дужках можна подати як визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & F''_{x^2} & F''_{xy} \\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{y^2} \end{vmatrix},$$

де

$$\det H = \begin{vmatrix} F''_{x^2} & F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{y^2} \end{vmatrix}$$

є гессіаном функції Лаґранжа. Якщо $\Delta(M_0) < 0$, то $d^2F(M_0) > 0$, що вказує на умовний мінімум.

Так само, коли $\Delta(M_0) > 0$ маємо $d^2F(M_0) < 0$, тобто $z = f(x,y)$ у цій стаціонарній точці має умовний максимум.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

8.1.1. Підберіть аналітичний вираз функції двох змінних $z = f(x,y)$ так, щоб область означення такої функції була б множина:

1) площина з викинутої точкою $A(2;-3)$;

2) площина з викинутим колом $x^2 + y^2 = 4$;

3) півкруг $x^2 + y^2 \leq 4, y < 0$;

4) зовнішність круга $x^2 + (y-3)^2 > 9$.

8.1.2. Увідповідніть функції та їхні лінії рівня:

а) $z = 3x + 4y$; б) $z = x^3 - y$; в) $z = 4x - 3y$; г) $z = x^2 - y$.

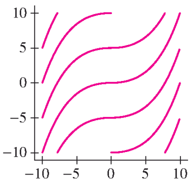


Рис. до 8.1.2.1)

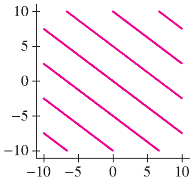


Рис. до 8.1.2.2)

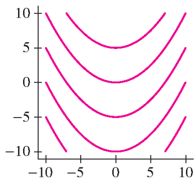


Рис. до 8.1.2.3)

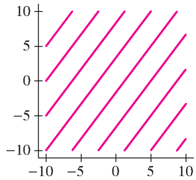


Рис. до 8.1.2.4)

8.1.3. Опишіть графік функції $z = f(x,y)$ із зображеними лініями рівня.

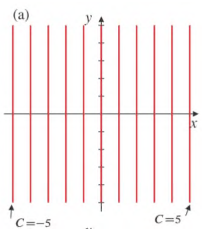


Рис. до 8.1.3.1)

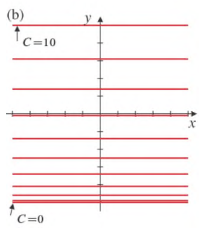


Рис. до 8.1.3.2)

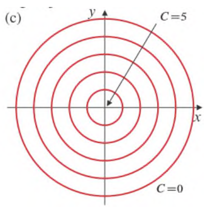


Рис. до 8.1.3.3)

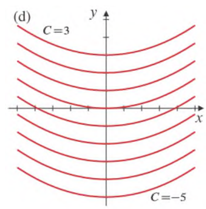


Рис. до 8.1.3.4)

8.1.4. Увідповідніть графіки та лінії рівня функцій.

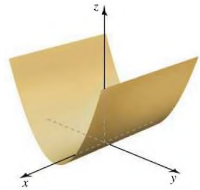


Рис. до 8.1.4.1)

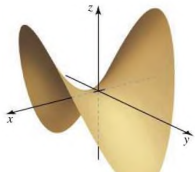


Рис. до 8.1.4.2)

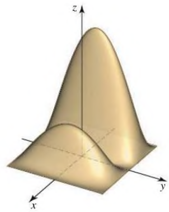


Рис. до 8.1.4.3)

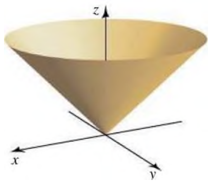


Рис. до 8.1.4.4)

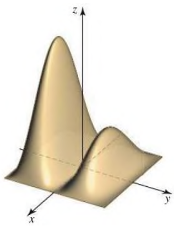


Рис. до 8.1.4.5)

Рис. до 8.1.4.6)

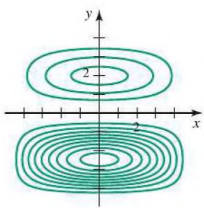


Рис. до 8.1.4.а)

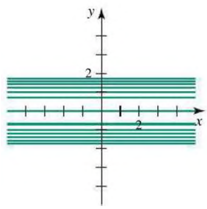


Рис. до 8.1.4.б)

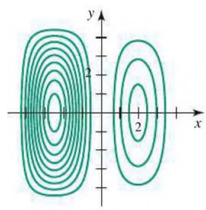


Рис. до 8.1.4.в)

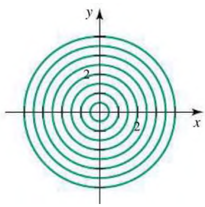


Рис. до 8.1.4.г)

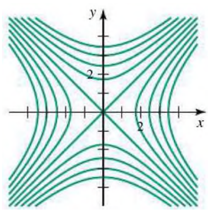


Рис. до 8.1.4.ґ)

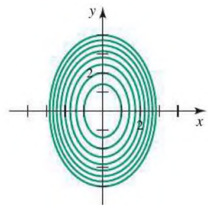


Рис. до 8.1.4.д)

8.1.5. Увідповідніть функції та їхні графіки.

а) $z = 2$; б) $z = -e^{-x^2-y^2}$; в) $z = x + 2y + 3$; г) $z = -y^2$; ґ) $z = x^3 - \sin y$; д) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

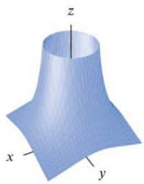


Рис. до 8.1.5.1)

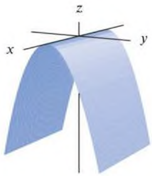


Рис. до 8.1.5.2)

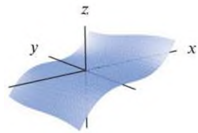


Рис. до 8.1.5.3)

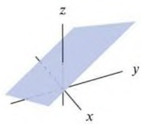


Рис. до 8.1.5.4)

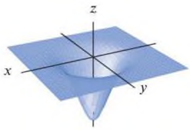


Рис. до 8.1.5.5)

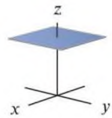


Рис. до 8.1.5.6)

8.1.6.1. Поясніть, чому не існує $\lim\limits_{(x;y)\to P} f(x,y)$.

8.1.6.2. Чи існує $\lim\limits_{(x;y)\to Q} g(x,y)$? Якщо так, то чому вона дорівнює?

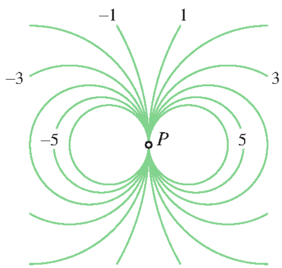


Рис. до 8.1.6.1

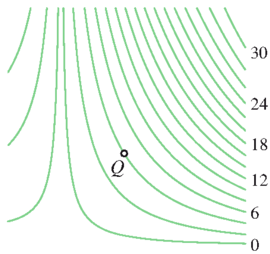


Рис. до 8.1.6.2

8.1.7. За лініями рівня функції знайдіть границю функції $f(x,y)$ в точці або поясніть, чому вона не існує.

1) $\lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} f(x,y)$;

2) $\lim\limits_{(x;y)\to(-1;2)} f(x,y)$;

3) $\lim\limits_{(x;y)\to(-2;0)} f(x,y)$;

4) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x,y)$.

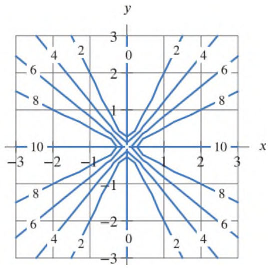


Рис. до 8.1.7

8.1.8. Яку умову мають справджувати параметри a,b та c, щоб гарантувати існування $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xy}{ax^2+bxy+cy^2}$?

8.2.1. Виберіть величину, яку означує вираз:

1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{z(x+\Delta x,y)-z(x,y)}{\Delta x}$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$;

3) $\lim\limits_{\Delta y\to 0} \dfrac{z(x,y+\Delta y)-z(x,y)}{\Delta y}$; 4) $z(x+\Delta x,y)-z(x,y)$;

5) $z(x+\Delta x,y+\Delta y)-z(x,y)$.

а) Δz; б) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; в) $\Delta_x z$; г) dz; ґ) $\dfrac{\partial z}{\partial y}$; д) $d_y z$.

8.2.2. Виберіть величину, яку означує вираз:

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}$; 3) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}$;

4) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}$; 5) $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}$.

а) $\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial u}$, якщо $z=f(x,y), x=x(u,v), y=y(u,v)$;

б) $\dfrac{d\tilde{u}}{dx}$, якщо $u=f(x,y,z), y=y(x), z=z(x)$;

в) $\dfrac{d\tilde{u}}{dt}$, якщо $u=f(x,y), x=x(t), y=y(t)$;

г) $\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial v}$, якщо $z=f(x,y), x=x(u,v), y=y(u,v)$;

ґ) $\dfrac{d\tilde{u}}{dx}$, якщо $u=f(x,y), y=y(x)$.

8.2.3. Знайдіть u_x', якщо $u = (\sin yz)e^{z^2 + \ln y}$.

8.2.4. Визначте знаки частинних похідних f_x' та f_y' у точках P, Q, R, S за лініями рівня функції $f(x, y)$.

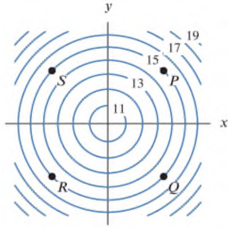


Рис. до 8.2.4

8.2.5. Значення функції $f(x, y)$ задано таблицею. Припускаючи, що відповідні частинні похідні існують, висловіть припущення про знак частинної похідної:

1) $f_x'(-2, -1)$;

2) $f_y'(2, 1)$;

3) $f_x'(2, 1)$;

4) $f_y'(0, 3)$.

$x \setminus y$	−1	1	3	5
−2	7	3	2	1
0	8	5	3	2
2	10	7	5	4
4	13	10	8	7

Рис. до 8.2.5

8.2.6. Знайдіть z''_{xy}, якщо

$$d^2 z = 2 \ln y dx^2 + \frac{4x}{y} dxdy - \frac{x^2}{y^2} dy^2 .$$

8.2.7. Що можна сказати про знаки z_x', z''_{xx}, z_y' та z''_{yy} у точці P?

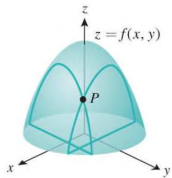


Рис. до 8.2.7

8.2.8. Якщо $z''_{xy} = 4y$, то чому дорівнює: 1) z''_{yx}; 2) z'''_{xyx}; 3) z'''_{xyy}?

8.2.9. Чи існує функція $f(x, y)$ для якої $f_x' = xy$ та $f_y' = y^2$? Якщо ні, поясніть чому.

8.2.10. Подайте приклад функції $f(x, y)$, для якої $f''_{xx} \neq 0, f''_{yy} \neq 0$ та $f''_{xy} = 0$.

8.3.1. Зобразьте годограф вектор-функції

$$\overline{a}(t) = 2\cos^3 t \cdot \overline{i} + 2\sin^3 t \cdot \overline{j}, 0 \leq t < 2\pi.$$

8.3.2. Годографом вектор-функції $\overline{a}(t)$ є переріз конуса $x^2 + y^2 = z^2$ і параболоїда $z = x^2 + y^2$. Знайдіть вектор-функцію $\overline{a}(t)$.

8.3.3. Задано параболоїд $z = x^2 + y^2$. Знайдіть параметризацію і визначте тип лінії:

1) перетину параболоїда і площини $x = 2$;

2) перетину параболоїда і площини $y = -1$;

3) рівня $x^2 + y^2 = 25$.

8.3.4. Задано вектор-функцію $\overline{r}(t) = \cos t \cdot \overline{i} - \sin t \cdot \overline{j} + t\overline{k}$. Знайдіть:

1) координати точки кривої, що відповідає значенню параметра $t = \pi$;

2) дотичний вектор до графіка функції в цій точці.

8.3.5. Опишіть криву $\overline{r}(t) = a\cos t \cdot \overline{i} + b\sin t \cdot \overline{j} + ct\overline{k}$, де $a > 0, b > 0, c > 0$ та $a \neq b$.

8.3.6. Зобразьте коло $\overline{r}(t) = \cos t \cdot \overline{i} + \sin t \cdot \overline{j}$ та вектори:

1) $\overline{r}'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$; 2) $\overline{r}''(\pi)$; 3) $\overline{r}(2\pi) - \overline{r}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

8.4.1. Визначте, який з виразів не є похідною функції за напрямом вектора в точці:

1) $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{f(\overline{r}_0 + t\overline{l}^{\,0}) - f(\overline{r}_0)}{t}$;

2) $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma$;

3) $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial y}\sin\alpha$;

4) $(\operatorname{grad} u(M_0), \overline{l}^{\,0})$;

5) $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial x}\overline{i} + \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial y}\overline{j} + \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial z}\overline{k}$.

8.4.2. Чому дорівнює найбільша похідна за напрямом функції $z = f(x, y)$ у деякій точці M, якщо градієнт у цій точці $\operatorname{grad} z(M) = -3\overline{i} + 4\overline{j}$?

8.4.3. Знайдіть напрями градієнтів функції в точці A.

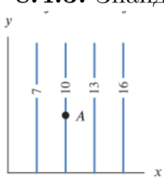


Рис. до 8.4.3.1

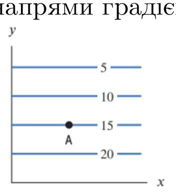


Рис. до 8.4.3.2

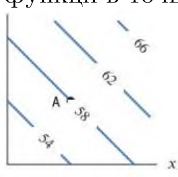


Рис. до 8.4.3.3

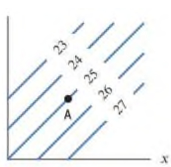


Рис. до 8.4.3.4

8.4.4. За графіком ліній рівня функції f визначте знак похідної за напрямом вектора $\overline{l}$ в точці M_i, якщо:

1) $M_1(-2;2), \overline{l} = \overline{i}$;

2) $M_2(0;-2), \overline{l} = \overline{j}$;

3) $M_3(0;-2), \overline{l} = \overline{i} + 2\overline{j}$;

4) $M_4(0;-2), \overline{l} = \overline{i} - 2\overline{j}$;

5) $M_5(-1;1), \overline{l} = \overline{i} + \overline{j}$;

6) $M_6(-1;1), \overline{l} = -\overline{i} + \overline{j}$.

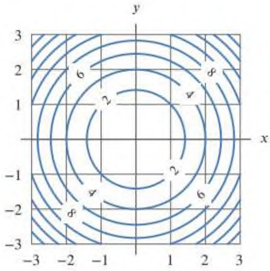


Рис. до 8.4.4

8.4.5. Розташуйте за зростанням величини $\dfrac{\partial f}{\partial u_1}, \dfrac{\partial f}{\partial u_2}, \dfrac{\partial f}{\partial u_3}, \dfrac{\partial f}{\partial u_4}, 0$.

8.4.6. Знайдіть значення частинних похідних $f'_x(1,2)$ та $f'_y(1,2)$.

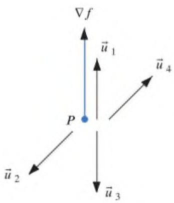


Рис. до 8.4.5

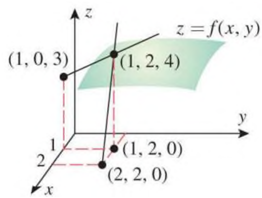


Рис. до 8.4.6

8.4.7. Наведіть приклад функції $z = f(x, y)$ такої, що:

1) вектор $\overline{i} - 2\overline{j} - \overline{k}$ є перпендикулярним до дотичної площини до її графіка в точці де $x = 0, y = 0$;

2) $\operatorname{grad} f = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}$.

8.5.1. Які з поданих нижче функцій $z = f(x, y)$ справджують у точці $M_0(0;0)$ умови $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$, але не мають у ній екстремуму?

1) $z = x^2 - y^2$;

2) $z = x^2 + y^2$;

3) $z = xy$;

4) $z = -x^4 - y^4$.

8.5.2. За графіками ліній рівня визначте чи має функція f у точці P локальний екстремум чи сідлову точку?

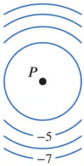


Рис. до 8.5.2.1)

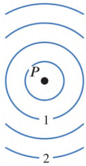


Рис. до 8.5.2.2)

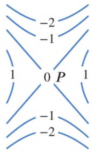


Рис. до 8.5.2.3)

8.5.3. Класифікуйте точки P—T (критична: локального мінімуму чи максимуму, сідлова або некритична).

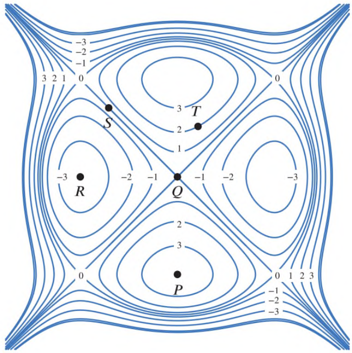


Рис. до 8.5.3

8.5.4. Нехай $f(x,y) = 3x^2 + ky^2 + 9xy$. Визначте значення параметра k при якому в критичній точці $M_0(0;0)$ функція має:

1) сідлову точку;
2) локальний максимум;
3) локальний мінімум.

8.5.5. Нехай $f(x,y) = x^3 + ky^2 - 5xy$. Визначте значення параметра k для якого у критичній точці $M_0(0;0)$ функція має:

1) сідлову точку;
2) локальний максимум;
3) локальний мінімум.

8.5.6. Нехай $f(x,y) = kx^2 + y^2 - 4xy$. Визначте значення параметра k при якому в критичній точці $M_0(0;0)$ функція має:

1) сідлову точку;
2) локальний максимум;
3) локальний мінімум.

8.5.7. Знайдіть a та b такі, що функція $f(x,y) = x^2 + ax + y^2 + b$ мала локальний мінімум 20 у точці $M(1;0)$.

8.5.8. Знайдіть a, b та c такі, що функція $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + ax + by + c$ мала локальний мінімум 11 у точці $M(2;5)$.

8.5.9. Що можна скзати про точку M_0 для функції $f(x,y)$, якщо відомо що $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$, $f''_{xx}(M_0) > 0, f''_{yy}(M_0) > 0, f''_{xy}(M_0) = 0$.

8.5.10. Нехай $h(x,y) = f(x) + g(y)$. Покажіть, що функція h має критичну точку $M_0(a;b)$, якщо $f'(a) = g'(b)$. Ця точка є: 1) точкою локального мінімуму, якщо $f''(a) > 0, g''(b) > 0$; 2) точкою локального максимуму, якщо $f''(a) < 0, g''(b) < 0$; 3) сідловою точкою, якщо $f''(a)g''(b) < 0$.

8.5.11. Нехай $h(x,y) = (f(x))^2 + (g(y))^2$. Покажіть, що якщо $f(a) = g(b)$, то точка $M_0(a;b)$ є точкою локального мінімуму функції h.

8.5.12. Складіть функцію Лагранжа для дослідження на умовний екстремум функції $z = xy + x^2$ за умови зв'язку $y - 2x = 6$.

8.5.13. Задано графіки ліній рівня функції $f(x,y)$ і умови зв'язку $g(x,y) = 0$. Оцініть найбільше та найменше значення функції $f(x,y)$ за умови зв'язку $g(x,y) = 0$.

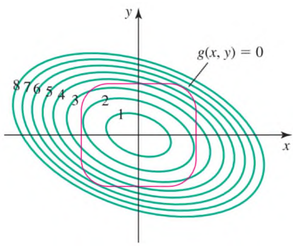


Рис. до 8.5.13.1)

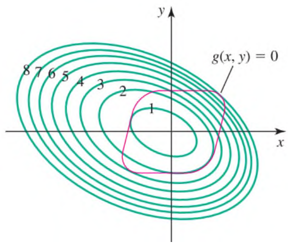


Рис. до 8.5.13.2)

Відповіді

8.1.1. 1) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x-2)^2 + (y+3)^2}$; 2) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 4}$;
3) $f(x,y) = \ln(-y)\sqrt{4 - x^2 - y^2}$; 4) $f(x,y) = \ln(x^2 + (y-3)^2 - 9)$.

8.1.2. 1-б, 2-а, 3-г, 4-в.

8.1.3. 1) площина, що проходить через вісь Oy, нахилена вгору осі Ox; 2) циліндр який?; 3) коловий конус з основою на площині Oxy та вершиною в точці $A(0;0;5)$; 4) циліндр $z = y - x^2$.

8.1.4. 1-б, 2-ґ, 3-в, 4-г, 5-а, 6-д.

8.1.5. 1-д, 2-г, 3-ґ, 4-в, 5-б, 6-а.

8.1.6. 2) $\lim\limits_{(x;y)\to Q} g(x,y) = 4.$

8.1.7. 1) $\lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} f(x,y) = 8$; 2) $\lim\limits_{(x;y)\to(-1;2)} f(x,y) = 2$; 3) $\lim\limits_{(x;y)\to(-2;0)} f(x,y) = 10$;

4) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x,y)$ не існує.

8.1.8. $a = c = 0, b \neq 0.$

8.2.1. 1-б, 2-г, 3-ґ, 4-в, 5-а.

8.2.2. 1-в, 2-а, 3-б, 4-ґ, 5-г.

8.2.3. $u'_x = 0.$

8.2.4. $f'_x(P) > 0, f'_y(P) > 0,$ $f'_x(Q) > 0, f'_y(Q) < 0,$ $f'_x(R) < 0, f'_y(R) < 0,$ $f'_x(S) < 0, f'_y(S) > 0.$

8.2.5. 1) $f'_x(-2,-1) > 0$; 2) $f'_y(2,1) < 0$; 3) $f'_x(2,1) > 0$; 4) $f'_y(0,3) < 0.$

8.2.6. $z''_{xy} = \dfrac{2x}{y}.$

8.2.7. $z'_x(P) < 0, z''_{xx}(P) < 0, z'_y(P) < 0, z''_{yy}(P) < 0.$

8.2.8. 1) $z''_{yx} = 4y$; 2) $z'''_{xyx} = 0$; 3) $z'''_{xyy} = 4.$

8.2.9. Не існує, оскільки $f''_{xy} \neq f''_{yx}.$

8.2.10. $f(x,y) = x^2 + y^2 + x + y + 1.$

8.3.2. $\cos t \cdot \overline{i} + \sin t \cdot \overline{j} + \overline{k}.$

8.3.3. 1) парабола $\begin{cases} x = 2, \\ y = t, \qquad t \in \mathbb{R}; \\ z = t^2 + 4, \end{cases}$ 2) парабола $\begin{cases} x = t, \\ y = -1, \quad t \in \mathbb{R}; \\ z = t^2 + 1, \end{cases}$

3) коло $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 5\sin t, \end{cases} t \in [0;2\pi).$

8.3.4. 1) $M_1(-1;0;\pi)$; 2) $\overline{\tau}(M_1) = \overline{j} + \overline{k}.$

8.3.5. Конічна гвинтова лінія.

8.3.6. 1) $\overline{r}'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}$; 2) $\overline{r}''(\pi) = -\overline{i}$; 3) $\overline{r}(2\pi) - \overline{r}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \overline{i} + \overline{j}.$

8.4.1. 5.

8.4.2. $\max \dfrac{\partial z}{\partial l} = 5.$

8.4.3. 1) $\overline{i}$; 2) $-\overline{j}$; 3) $\overline{i} + \overline{j}$; 4) $\overline{i} - \overline{j}.$

8.4.4. 1) $\dfrac{\partial f(M_1)}{\partial l} < 0$; 2) $\dfrac{\partial f(M_2)}{\partial l} < 0$; 3) $\dfrac{\partial f(M_3)}{\partial l} < 0$; 4) $\dfrac{\partial f(M_4)}{\partial l} > 0$;

5) $\dfrac{\partial f(M_5)}{\partial l} = 0$; 6) $\dfrac{\partial f(M_6)}{\partial l} > 0.$

8.4.5. $\dfrac{\partial f}{\partial u_3}, \dfrac{\partial f}{\partial u_2}, 0, \dfrac{\partial f}{\partial u_4}, \dfrac{\partial f}{\partial u_1}$.

8.4.6. $f'_x(1,2) = -4, f'_y(1,2) = \dfrac{1}{2}$.

8.4.7. 1) $u = x - 2y + z - 1$; 2) $u = 2x + 3y + 4z - 1$;

8.5.1. 1), 3).

8.5.2. 1) локальний максимум; 2) локальний мінімум; 3) сідлова точка.

8.5.3. P — критична точка, точка локального максимуму, Q — критична, сідлова точка, R — критична точка, точка локального мінімуму, S, T — некритична точка.

8.5.4. 1) $k < \dfrac{27}{4}$; 2) для жодного значення; 3) $k \geq \dfrac{27}{4}$.

8.5.5. 1) для будь-яких значень k; 2), 3) для жодного значення.

8.5.6. 1) $k < 4$; 2) жодного значення; 3) $k \geq 4$.

8.5.7. $a = -2, b = 21$.

8.5.8. $a = -9, b = -12, c = 50$.

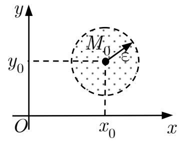
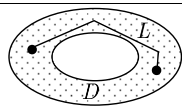
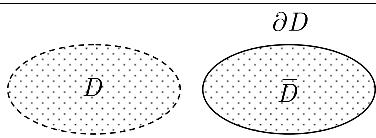
8.5.9. M_0 — точка локального мінімуму.

8.5.12. $L(x, y; \lambda) = xy + x^2 + \lambda(y - 2x - 6)$

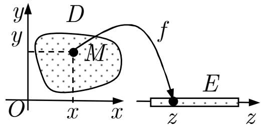
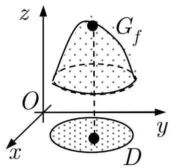
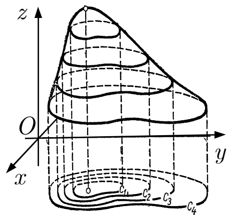
8.5.13. 1) $f_{\min} = 2, f_{\max} = 6$; 2) $f_{\min} = 1, f_{\max} = 8$.

Формули, твердження, алгоритми

8.1. Арифметичний простір та його підмножини

❶ *Арифметичним* n*-вимірним простором* $\mathbb{R}^n$ називають множину всіляких упорядкованих наборів з n чисел $(x_1; x_2; ...; x_n)$, які називають *точками* простору й позначають $M(x_1; x_2; ...; x_n)$.	
❷ Віддаль між точками $M'(x_1'; x_2'; ...; x_n')$ і $M''(x_1''; x_2''; ...; x_n'')$: $$\rho(M', M'') = \sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_2')^2 + ... + (x_n'' - x_n')^2}.$$	
❸ ε-***окіл точки*** M_0	$U_\varepsilon(M_0) = \{M \in \mathbb{R}^n \mid \rho(M, M_0) < \varepsilon\}$
$n = 2:$ $$U_\varepsilon(M_0) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon\}$$	
❹ ***Внутрішня точка.*** Точку $M \in D$ називають *внутрішньою* точкою множини D, якщо існує такий окіл цієї точки, який повністю міститься у множині D.	❺ ***Відкрита множина.*** Множину D називають *відкритою*, якщо кожна її точка є внутрішньою.
❻ ***Межова точка.*** Точку M, називають *межовою* точкою множини D, якщо будь-який окіл цієї точки містить як точки, які належать множині D, так і точки, які їй не належать.	Множина всіх межових точок множини D утворює її *межу* ∂D.
	❼ ***Замкнена множина.*** Множину $\bar{D}$, яка містить усі свої межові точки (свою межу), називають *замкненою*. $\bar{D} = D \cup \partial D$.
❽ ***Зв'язна множина.*** Множину D називають *зв'язною*, якщо будь-які дві її точки можна сполучити ламаною L, що лежить в області D.	
❾ ***Область.*** Відкриту, зв'язну множину називають *областю*. Об'єднання області D з її межею ∂D називають *замкненою областю*.	
❿ Область називають *обмеженою*, якщо існує окіл, який містить цю область.	

8.2. Границя функції кількох змінних. Неперервність

❶ ***Функція*** n ***змінних.*** Якщо існує правило f, яке кожній точці $M(x_1;x_2;...;x_n) \in D$ увідповіднює число u, то кажуть, що задано *функцію* f n*-змінних* і позначають $u = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(M), M \in D.$	 D — *область означення;* E — *множина значень*
❷ ***Графіком*** функції 2-х змінних $z = f(x, y), (x; y) \in D$, називають поверхню $G_f = \{M(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$	
❸ ***Лінія рівня*** функції $z = f(x, y)$ $L_C = \{M(x; y) \mid f(x, y) = C\},$ $C = \mathrm{const}$	
❹ ***Поверхня рівня*** функції $u = f(x, y, z)$	$\Omega_C = \{M(x; y; z) \mid f(x, y, z) = C\},$ $C = \mathrm{const}$
❺ ***Границя функції.*** $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$	$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ $\forall M \in U_\delta(M_0) \setminus \{M_0\} \Rightarrow$ $\Rightarrow f(M) \in U_\varepsilon(A)$ Границя функції не залежить від напряму руху точки M до точки M_0.
❻ ***Неперервність функції.*** Функцію f називають *неперервною в точці* M_0, якщо вона означена в околі точки M_0 і $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$	Функцію, неперервну в кожній точці множини D, називають ***неперервною на множині*** D.
❼ ***Частинні*** прирости: функції $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$	$\Delta_x z(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$ $\Delta_y z(M_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$ де $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$

❽ ***Повний*** приріст функції: $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$	$\Delta z(M_0) =$ $= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$
❾ ***Умова неперервності*** функції $u = f(M)$ у точці M_0	$\lim\limits_{M \to M_0} \Delta f(M_0) = 0$
❿ ***Теореми Ваєрштраса.*** Якщо функція f неперервна в обмеженій замкненій області $\bar{D}$, то:	1) f обмежена в області $\bar{D}$; 2) f набуває в області $\bar{D}$ своїх найбільшого та найменшого значень.

8.3. Похідні функцій кількох змінних

❶ ***Частинна*** похідна функції: $z = f(x, y)$ за змінною x у точці M_0	$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right\|_{M_0} = z'_x(M_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z(M_0)}{\Delta x}$
$z = f(x, y)$ за змінною y у точці M_0	$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right\|_{M_0} = z'_y(M_0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z(M_0)}{\Delta y}$
❷ Похідна ***складеної*** функції $z = f(x, y), x = x(t), y = y(t),$ $\tilde{z}(t) = f(x(t), y(t))$	$\dfrac{d\tilde{z}}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$
$z = f(x, y),$ $x = x(u, v), y = y(u, v),$ $\tilde{z}(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$	$\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u},$ $\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}$
❸ ***Повна*** похідна функції $z = f(x, y), y = y(x),$ $\tilde{z}(x) = f(x, y(x))$	$\dfrac{d\tilde{z}}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}$
❹ Похідна ***неявної*** функції $F(x, y) = 0, \quad y = y(x)$	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$
$F(x, y, z) = 0, \qquad z = z(x, y)$	$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$
❺ Частинні похідні ***2-го порядку*** функції $z = f(x, y)$	
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right);$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right);$	мішані похідні: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right);$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$

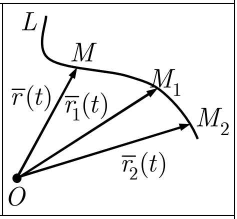
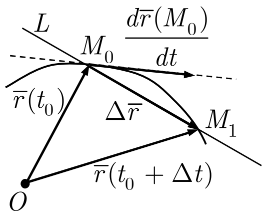
❻ ***Теорема про рівність мішаних похідних.*** Нехай функція $z = f(x,y)$ та її похідні $z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx}$ означені в області D.	Якщо z''_{xy} та z''_{yx} неперервні в точці $M_0 \in D$, то $$z''_{xy}(M_0) = z''_{yx}(M_0).$$

8.4. Диференціали функцій кількох змінних

❶ ***Диференційовність функції в точці.*** Функцію $z = f(x,y)$ називають *диференційовною в точці* $M_0(x_0; y_0)$, якщо в деякому околі цієї точки повний приріст функції має вигляд	$\Delta f(M_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$ де $A(M_0), B(M_0)$ — сталі щодо Δx та Δy; $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ та $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — н. м. ф., коли $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0.$
❷ ***Необхідна умова диференційовності.*** Якщо функція $z = f(x,y)$ диференційовна в точці M_0, то $$A(M_0) = z'_x(M_0), B(M_0) = z'_y(M_0).$$	❸ ***Достатня умова диференційовності.*** Якщо функція $z = f(x,y)$ має в околі точки M_0 неперервні похідні $z'_x(M), z'_y(M)$, то вона диференційовна в точці M_0.
❹ ***Повний диференціал функції в точці.*** Головну лінійну частину приросту диференційовної в точці M_0 функції $z = f(x,y)$ називають *повним диференціалом* функції f в точці M_0 і позначають	$$dz(M_0) = z'_x(M_0)\Delta x + z'_y(M_0)\Delta y$$
❺ Формула для обчислення ***повного*** диференціала функції	
$z = f(x,y)$	$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$
$u = f(x,y,z)$	$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$
❻ ***Частинні*** диференціали функції $z = f(x,y)$	$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx, \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy$$
❼ Диференціал ***2-го порядку*** функції $z = f(x,y)$ незалежних змінних x, y	$$d^2 z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$$

❽ Диференціал m-***го порядку*** функції $z=f(x,y)$ незалежних змінних x,y	$d^m z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^m z$

8.5. Вектор-функція дійсного аргументу

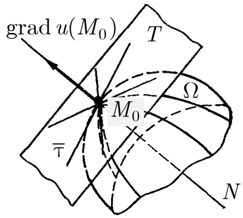
❶ ***Векторною функцією*** (*вектор-функцією скалярного аргументу*) називають відображення, яке кожному дійсному числу $t\in T$ увідповіднює певний вектор $\overline{r}=\overline{r}(t)$.	$\overline{r}=x(t)\overline{i}+y(t)\overline{j}+z(t)\overline{k}=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}, t\in T$
❷ ***Годографом*** вектор-функції $\overline{r}=\overline{r}(t)$ називають лінію, яку описує у просторі кінець вектора $\overline{r}$. Будь-яку лінію у просторі можна розглядати як годограф деякої вектор-функції.	$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\\z=z(t)\end{cases}$ 
❸ ***Границя вектор-функції*** $\lim\limits_{t\to t_0}\overline{r}(t)=\overline{a}$	$\lim\limits_{t\to t_0}\left\|\overline{r}(t)-\overline{a}\right\|=0.$
❹ ***Неперервність вектор функції.*** Вектор-функція $\overline{r}=\overline{r}(t)$ *неперервна в точці* t_0, якщо	$\lim\limits_{t\to t_0}\overline{r}(t)=\overline{r}(t_0)$
❺ ***Похідна вектор-функції***	$\frac{d\overline{r}(t_0)}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{r}(t+\Delta t)-\overline{r}(t_0)}{\Delta t}=$ $=x'(t)\overline{i}+y'(t)\overline{j}+z'(t)\overline{k}$
❻ ***Дотичний вектор.*** Якщо $\overline{r}=\overline{r}(t)$, то $\frac{d\overline{r}}{dt}$ є вектором, напрямленим за дотичною до годографа вектор-функції $\overline{r}(t)$ у бік зростання аргументу t.	

8.6. Похідна за напрямом вектора. Градієнт

❶ ***Похідна за напрямом вектора.*** *Похідною* функції $u = f(M)$ *за напрямом вектора* $\overline{l}$ у точці M_0 називають	$\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \lim\limits_{t \to +0} \dfrac{f(\overline{r}_0 + t\overline{l}^{\,0}) - f(\overline{r}_0)}{t}$, де $\overline{l}^{\,0}$ — орт вектора $\overline{l}, \overline{r}_0 = \overline{OM_0}$.
❷ ***Похідна*** функції $u = u(x, y)$ за напрямом $\overline{l}^{\,0} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$	$\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial y}\sin\alpha$
$u = u(x, y, z), \overline{l}^{\,0} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$	$\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + {}$ $+ \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma$
❸ ***Градієнт.*** *Градієнтом* диференційовної функції $u = f(M)$ у точці M_0 називають вектор	$\operatorname{grad} u(M_0) =$ $= \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial x}\overline{i} + \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial y}\overline{j} + \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial z}\overline{k}$
❹ ***Зв'язок*** між похідною за напрямом і градієнтом функції	$\dfrac{\partial u}{\partial l} = (\operatorname{grad} u, \overline{l}^{\,0}) = \operatorname{pr}_{\overline{l}^{\,0}} \operatorname{grad} u$
❺ ***Властивості градієнта.*** ① Градієнт напрямлений у бік зростання функції. ② Довжина градієнта функції в точці дорівнює найбільшій похідній функції в цій точці, тобто	$\max \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \left\lvert \operatorname{grad} u(M_0) \right\rvert$ ③ Градієнт функції u у точці M_0 напрямлений уздовж нормалі до поверхні рівня $u(x, y, z) = C$, що проходить через точку M_0.

❻ ***Властивості похідної за напрямом.*** Величина $\left\lvert \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} \right\rvert$ визначає швидкість зміни функції в точці M_0 за напрямом вектора $\overline{l}$, а знак $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M_0)$ — характер її зміни (зростання або спадання).

8.7. Дотична і нормаль

❶ ***Дотична площина і нормаль до поверхні.*** *Дотичною площиною* до поверхні Ω в точці M_0 називають площину T, у якій розташовані дотичні до всеможливих кривих, які проведені на поверхні Ω через M_0.	
Нормаллю до поверхні Ω в точці M_0 називають пряму N, що проходить через M_0 перпендикулярно до P.	
❷ ***Вектор нормалі*** до поверхні $F(x, y, z) = 0$	$\overline{n} = \pm \operatorname{grad} F$
$z = f(x, y)$	$\overline{n} = \pm\left(z'_x\overline{i} + z'_y\overline{j} - \overline{k}\right)$
❸ Рівняння ***дотичної площини*** до поверхні $F(x, y, z) = 0$ у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$	$F'_x(M_0)(x - x_0) +$ $+F'_y(M_0)(y - y_0) +$ $+F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$
❹ Рівняння ***нормалі*** до поверхні $F(x, y, z) = 0$ у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$	$\dfrac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \dfrac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \dfrac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$
❺ Рівняння ***дотичної площини*** до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$	$z'_x(M_0)(x - x_0) + z'_y(M_0)(y - y_0) -$ $-(z - z_0) = 0,$ $z_0 = f(x_0, y_0)$
❻ Рівняння ***нормалі*** до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$	$\dfrac{x - x_0}{z'_x(M_0)} = \dfrac{y - y_0}{z'_y(M_0)} = \dfrac{z - z_0}{-1}$
❼ Рівняння ***дотичної*** до кривої $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$	$\dfrac{x - x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{y'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{z'(t_0)},$ $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0)$
❽ Рівняння ***нормальної площини*** до кривої L у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$	$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) +$ $+z'(t_0)(z - z_0) = 0$

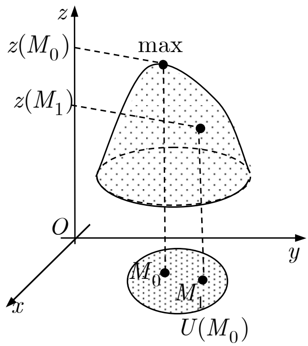
8.8. Локальні екстремуми функції двох змінних

❶ ***Тейлорова формула.*** Якщо функція $z = f(M)$ диференційовна $(m+1)$ разів у деякому околі $U(M_0)$ точки $M_0(x_0; y_0)$, то для будь-якої точки $M \in U(M_0)$ правдива *Тейлорова формула* з центром у точці M_0.

$$f(M) = f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \ldots + \frac{d^m f(M_0)}{m!} + \frac{d^{m+1} f(M')}{(m+1)!}, M' \in U(M_0)$$

❷ ***Локальний максимум (мінімум).*** Функція $z = f(x,y)$ має *локальний максимум* (*мінімум*) у точці M_0, якщо існує такий окіл $U(M_0)$, для всіх точок якого, відмінних від точки M_0, виконано нерівність

$$f(M_0) > f(M) \quad (f(M_0) < f(M)).$$



Точки локального максимуму та мінімуму називають точками *локального екстремуму*.

❸ ***Необхідна умова локального екстремуму.*** Якщо функція $z = f(x,y)$ диференційовна в точці M_0 і має екстремум у цій точці, то

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z(M_0)}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow dz(M_0) = 0$$

Точку M_0, у якій $dz(M_0) = 0$, називають *стаціонарною*. Стаціонарну точку, яка не є точкою локального екстремуму, називають *сідловою*.

❹ Матриця ***Гессе*** функції $z = f(x,y)$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{pmatrix}$$

❺ ***Гессіан*** функції $z = f(x,y)$

$$\det H(x,y) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix}$$

Позначення

$$A\,|_{M_0} = \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2}, B\,|_{M_0} = \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x \partial y}, C\,|_{M_0} = \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2},$$
$$\Delta = \det H(M_0)$$

❻ ***Достатня умова локального екстремуму.*** Нехай функція $z = f(x,y)$ двічі диференційовна в точці M_0 в деякому її околі й точка M_0 — стаціонарна точка функції f.	1) якщо $\Delta > 0$, то в точці M_0 функція f має екстремум: а) коли $A > 0$, мінімум; б) коли $A < 0$, максимум; 2) якщо $\Delta < 0$, то в точці M_0 функція f не має екстремуму; 3) якщо $\Delta = 0$, то функція потребує додаткового дослідження.
❼ Алгоритм дослідження функції ***на локальний екстремум.*** ① Визначають область означення функції. ② Розв’язуючи систему $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases}$ знаходять стаціонарні точки функції f: $M_1(x_1;y_1),\ldots,M_n(x_n;y_n)$.	③ Для кожної точки M_i перевіряють достатні умови існування екстремуму і висновують.

8.9. Глобальний і умовний екстремум функції двох змінних

❶ ***Глобальні екстремуми.*** Якщо функція $z = f(x,y)$ диференційовна в обмеженій замкненій області $\bar{D} = D \cup \partial D$, то вона досягає свого найбільшого (найменшого) значення або в стаціонарній точці всередині області D або на межі області ∂D.	❷ ***Умовні екстремуми.*** Функція $z = f(x,y)$ має *умовний максимум* (*умовний мінімум*) в точці M_0, якщо існує такий окіл $U(M_0)$, для всіх точок якого, відмінних від точки M_0, які справджують *умову зв’язку* $\varphi(M) = 0$, виконано нерівність $f(M_0) > f(M)$ $(f(M_0) < f(M))$.
❸ ***Функція Лаґранжа*** для знаходження умовного екстремуму функції $f(x,y)$ з умовою зв’язку $\varphi(x,y) = 0$	$F(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$

❹ ***Необхідні умова*** умовного екстремуму	$\begin{cases} F'_x = 0, \\ F'_y = 0, \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$
❺ ***Достатня умова умовного екстремуму.*** Нехай функції $f(x,y)$ та $\varphi(x,y)$ двічі неперервно диференційовні в околі стаціонарної точки $(x_0;y_0;\lambda_0)$ функції Лаґранжа $$F(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y),$$ тоді, якщо в цій точці	$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & F''_{x^2} & F''_{xy} \\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{y^2} \end{vmatrix} > 0 \ (< 0)$$ то в точці $M_0(x_0;y_0)$ функція $z = f(x,y)$ має умовний максимум (умовний мінімум).
❻ ***Схема дослідження функції*** $z = f(x,y)$ ***на глобальний екстремум у замкненій області*** $$\bar{D} = D \cup L_1 \cup ... \cup L_n,$$ $$L_i : \varphi_i(x,y) = 0, i = \overline{1,n}.$$ ① Розв'язуючи систему $$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases}$$ знаходять стаціонарні точки функції f, які належать області D.	② На кожній ділянці межі $\varphi_i(x,y) = 0$ знаходять стаціонарні точки функції однієї змінної $$z_i = f(x,y)\Big\|_{\varphi_i(x,y)=0}$$ і долучають до розгляду межові точки цієї ділянки. ③ Обчислюють значення функції у знайдених точках і вибирають серед них найбільше та найменше значення функції в області $\bar{D}$.
❼ ***Схема дослідження функції*** $z = f(x,y)$ ***на умовний екстремум з умовою зв'язку*** $\varphi(x,y) = 0$. ① Складають функцію Лаґранжа. $$L(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y).$$	② Знаходять стаціонарні точки функції Лаґранжа із системи $$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$$ ③ У кожній знайденій точці перевіряють достатні умови існування умовного екстремуму і висновують.

Практикум 8.1. Функції кількох змінних

Навчальні задачі

8.1.1.1. Знайти й зобразити область означення D функції $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ і побудувати лінії рівня цієї функції.

Розв'язання. [8.2.1, 8.2.3.] ①

[*Знаходимо область означення функції.*]

Функція означена, якщо

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4.$$

Цю нерівність справджують координати всіх точок, що лежать усередині й на межі круга радіусом $R = 2$ з центром у початку координат.

[*Знаходимо лінії рівня функції* $z = f(x,y)$:

$$f(x,y) = C.]$$

Рівняння сукупності ліній рівня:

$$\sqrt{4 - x^2 - y^2} = C \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 - C^2, C \in [0;2].$$

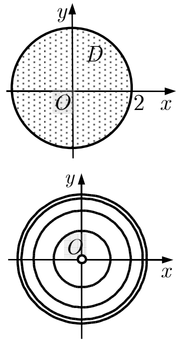


Рис. до зад. 8.1.1

Надаючи C різних значень з відрізка $[0;2]$, дістаємо концентричні кола з центром у початку координат.

Коментар. ① Під областю означення функції $u = f(x,y)$ двох змінних, заданої аналітично, розуміють множину точок $(x;y)$ площини, у яких аналітичний вираз $f(x,y)$ визначений і набуває дійсних значень.

8.1.1.2. Знайти область означення D функції $u = \arcsin(x^2 + y^2 - z^2)$ і її поверхні рівня.

Розв'язання. [8.2.1, 8.2.4.] ①

[*Знаходимо область означення функції.*]

Функція означена, якщо

$$-1 \leq x^2 + y^2 - z^2 \leq 1.$$

Ця нерівність означає множину точок між двопорожнинним гіперболоїдом

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1$$

й однопорожнинним гіперболоїдом

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

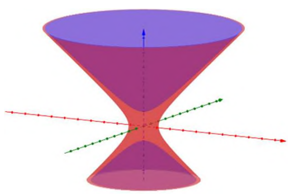


Рис. до 8.1.2

[*Знаходимо поверхні рівня функції* $u = f(x,y,z)$

$$f(x,y,z) = C.]$$

Рівняння сукупності поверхонь рівня:

$$\arcsin(x^2 + y^2 - z^2) = C, C \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Якщо $C \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, то поверхнями рівня є двопорожнинні гіперболоїди

$$x^2 + y^2 - z^2 = \sin C;$$

якщо $C = 0$, то поверхнею рівня є конус

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0;$$

якщо $C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, та поверхнями рівня є однопорожнинні гіперболоїди

$$x^2 + y^2 - z^2 = \sin C.$$

Коментар. ① Під областю означення функції трьох змінних $u = f(x,y,z)$, заданої аналітично, розуміють множину точок $(x;y;z)$ простору, у яких аналітичний вираз $f(x,y,z)$ визначений і набуває дійсних значень.

8.1.2. Знайти годограф функції $\overline{r} = \sqrt{1-t^2}\overline{i} + \sqrt{1+t^2}\overline{j}, t \in [0;1]$.

Розв'язання. [8.5.2.]

[*Записуємо параметричні рівняння годографа.*]

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \sqrt{1+t^2} \end{cases} \quad t \in [0;1].$$

[*Виключаючи параметр* t, *дістаємо неявне рівняння годографа.*]

$$x^2 + y^2 = 1 - t^2 + 1 + t^2 = 2.$$

Початковою точкою годографа є $A(x(0);y(0)) = (1;1)$, а кінцевою — точка $B(x(1);y(1)) = (0;\sqrt{2})$.

Отже, годографом вектор-функції є дуга кола $x^2 + y^2 = 2$ від точки $A(1;1)$ до точки $B(0;\sqrt{2})$, що обходиться за годинниковою стрілкою.

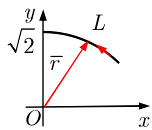


Рис. до 8.1.2

8.1.3.1. Знайти $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{y}$.

Розв'язання. [8.2.5.] [①]

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{y} = \left| \begin{array}{c} \text{②} \\ \sin xy \sim xy, \\ xy \to 0 \end{array} \right| = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{xy}{y} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} x = 2.$$

Коментар. ① Границя існує, якщо вона не залежить від способу прямування точки $(x;y)$ до точки $(2;0)$.

② Для функцій кількох змінних залишаються правдивими еквівалентності.

8.1.3.2. Знайти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

Розв'язання.

[*Переходимо до полярних координат* (ρ,φ).][1]

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi; \end{cases} \quad \begin{cases} x \to 0, \\ y \to 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \rho \to 0.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos^2\varphi\sin\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in (-\pi;\pi].$$

Коментар. ① Часто границю $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$ обчислюють переходячи до полярних координат із центром у точці $A(a;b)$:

$$x = a + \rho\cos\varphi,$$
$$y = b + \rho\sin\varphi.$$

Якщо $(x;y) \to (a;b)$, то

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \rho \to 0.$$

Задачу зводять до дослідження $\lim\limits_{\rho\to 0} F(\rho,\varphi)$, де

$$F(\rho,\varphi) = f(a+\rho\cos\varphi, b+\rho\sin\varphi).$$

8.1.3.3. Знайти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (2x+5y)\sin\dfrac{3}{x}$.

Розв'язання.

Оскільки $(2x+5y) \to 0$, коли $x \to 0$, $y \to 0$, і $\left|\sin\dfrac{3}{x}\right| \le 1$, то за властивістю н. м. ф. маємо, що

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(2x+5y)\sin\frac{3}{x}=0.$$

8.1.3.4. Знайти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Розв'язання.

[*Переходимо до полярних координат.*]

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi; \end{cases} \begin{cases} x\to 0, \\ y\to 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\rho\to 0.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}=\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=\cos 2\varphi.$$

Границя залежить від кута φ, тобто від способу прямування точки $(x;y)$ до точки $(0;0)$. А це означає, що функція f не має границі у точці $(0;0)$. ①

Коментар. ① Якщо б границя існувала, то вона не залежала б від способу прямування точки $(x;y)$ до точки $(0;0)$.

8.1.4.1. Знайти точки розриву функції $z=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+2)^2}$.

Розв'язання. [8.2.6.]

Для заданої функції точками розриву можуть бути лише точки, де знаменник дорівнює нулю:

$$(x-1)^2+(y+2)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=-2. \end{cases}$$

Оскільки $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -2}}\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+2)^2}=\infty$, то точка $M_0(1;-2)$ є точкою нескінченного розриву.

8.1.4.2. Знайти точки розриву функції $z=\dfrac{x-y}{x^3-y^3}$.

Розв'язання.

Задана функція може мати розриви лише в точках, де знаменник дорівнює нулю:

$$x^3-y^3=0 \Leftrightarrow y=x.$$

Отже, функція z має розриви в точках прямої $y = x$.

Нехай $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, x_0 = y_0$. Тоді,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{x-y}{x^3-y^3} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{1}{x^2+xy+y^2} = \frac{1}{x_0^2+x_0y_0+y_0^2} = \frac{1}{3x_0^2}.$$

Отже, точки прямої $y = x, x \neq 0$, — точки усувного розриву.

Із співвідношення

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-y}{x^3-y^3} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{x^2+xy+y^2} = \infty$$

випливає, що точка $M_0(0;0)$ — точка нескінченного розриву.

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

8.1.5. Знайдіть і зобразіть область означення і лінії рівня функції:

1) $z = \sqrt{\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - 1}$; 2) $z = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$;

3) $z = \sqrt{4x - y^2}$; 4) $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$;

5) $z = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}\right)$; 6) $z = \sqrt{\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} - 1}$.

8.1.6. Знайдіть і зобразіть область означення функції:

1) $z = \arcsin\dfrac{x}{y^2} + \arcsin(1-y)$; 2) $z = \arccos\dfrac{x}{x+y}$;

3) $z = \sqrt{(x^2+y^2-4)(9-x^2-y^2)}$;

4) $z = \log_3(x^2+y^2-1) + \sqrt{16-x^2-y^2}$.

8.1.7. Знайдіть область означення функції і її поверхні рівня:

1) $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2-9^2}$; 2) $u = \ln(36 - 36x^2 - 9y^2 - 4z^2)$;

3) $u = \arcsin\dfrac{x^2+y^2}{z}$; 4) $u = \dfrac{1}{\sqrt{z - x^2 - y^2}}$;

5) $u = \dfrac{\ln(z^2-x^2-y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$; 6) $u = \sqrt{\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} - z^2}$;

7) $u = \ln(1 - x^2 - y^2 + z^2)$; 8) $u = \sqrt{2z^2 - 6x^2 - 3y^2 + 6}$.

8.1.8. Знайдіть годограф вектор-функції:

1) $\overline{r} = (2t-1)\overline{i} + (-3t+2)\overline{j} + 4t\overline{k}, t \in \mathbb{R}$;

2) $\overline{r} = 2\cos^3 t \cdot \overline{i} + 2\sin^3 t \cdot \overline{j}, t \in [0;2\pi]$;

3) $\overline{r} = \cos t \cdot \overline{i} + \sin t \cdot \overline{j} + t\overline{k}, t \in \mathbb{R}$;

4) $\overline{r} = 4\operatorname{ch} t \cdot \overline{i} - \overline{j} + 3\operatorname{sh} t \cdot \overline{k}, t \in \mathbb{R}$.

8.1.9. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$;

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1}-1}{x^2+y^2-4y+4}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \dfrac{\operatorname{tg}(x+y)e^{x-y}}{x^2-y^2}$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$;

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$;

6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$;

8) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 5}} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

8.1.10. Покажіть, що границя не існує:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x-y}{x+y}$;

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

8.1.11. Знайдіть точки розриву функції:

1) $z = e^{-\frac{3}{x^2+y^2}}$;

2) $z = e^{\frac{2}{x^2-y^2}}$;

3) $z = \dfrac{1}{y-x^2}$;

4) $z = \dfrac{1}{x^2-y^2-1}$.

8.1.12. Знайдіть точки розриву функції:

1) $u = \dfrac{1}{xyz}$;

2) $u = \dfrac{1}{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2}$;

3) $u = \dfrac{1}{x^2+y^2-z^2-1}$;

4) $u = \dfrac{1}{x^2+y^2-z^2+1}$.

Відповіді

8.1.5. 1) $D(f)=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\left|\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\geq 1\right.\right\}$; 2) $D(f)=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\left|x^2+y^2<9\right.\right\}$;

3) $D(f)=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\left|y^2\leq 4x\right.\right\}$; 4) $D(f)=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\left|y^2>4x-8\right.\right\}$;

5) $D(f)=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}<1\right.\right\}$; 6) $D(f)=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\left|\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}\geq 1\right.\right\}$.

8.1.6. 1) криволінійний трикутник, утворений прямою $y=2$ та параболами $y^2=\pm x$, без вершини $(0;0)$; 2) два тупих вертикальних кути, утворених прямими $y=0$ та $y=-2x$, включно з межею, без спільної вершини $(0;0)$;
3) $D(f)=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\left|4\leq x^2+y^2\leq 9\right.\right\}$; 4) $D(f)=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\left|1<x^2+y^2\leq 16\right.\right\}$.

8.1.8. 1) пряма $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{4}$; 2) астроїда $x^{2/3}+y^{2/3}=2^{2/3}$; 3) гвинтова лінія $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\\ z=t;\end{cases}$ 4) права гілка гіперболи $\begin{cases}\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1,\\ y=-1,\end{cases}$ що пробігається знизу догори, якщо дивитись від початку координат.

8.1.9. 1) -6; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{e^2}{2}$; 4) 1; 5) 0; 6) 0; 7) e; 8) e^3.

8.1.11. 1) точка розриву $(0;0)$; 2) лінії розриву — прямі $y=\pm x$; 3) лінія розриву — парабола $y=x^2$; 4) лінія розриву — гіпербола $x^2-y^2=1$.

8.1.12. 1) поверхні розриву — площини $x=0, y=0, z=0$; 2) точка розриву $(1;-1;0)$;
3) поверхня розриву — однопорожнинний гіперболоїд $x^2+y^2-z^2-1=0$;
4) поверхня розриву — двопорожнинний гіперболоїд $x^2+y^2-z^2+1=0$.

Практикум 8.2. Похідні й диференціали функцій кількох змінних

Навчальні задачі

8.2.1.1. Знайти частинні похідні 1-го порядку функції $z=xe^{-xy}$.
Розв'язання. [8.3.1.]

[*Знаходимо частинну похідну за змінною* x.]

$$z'_x=(xe^{-xy})'_x\overset{①}{=}e^{-xy}-xye^{-xy}.$$

[*Знаходимо частинну похідну за змінною* y.]

$$z'_y = (xe^{-xy})'_y \overset{②}{=} -x^2e^{-xy}.$$

Коментар. ① Знаходячи частинну похідну функції $z = xe^{-xy}$ за змінною x, вважаємо y сталою і використовуємо правила і формули диференціювання функцій однієї змінної.

② Знаходячи частинну похідну функції $z = xe^{-xy}$ за змінною y, вважаємо x сталою і використовуємо правила і формули диференціювання функцій однієї змінної.

8.2.1.2. Знайти частинні похідні 1-го порядку функції $u = z^{xy}$.

Розв'язання. [8.3.1.]①

$$u'_x = yz^{xy}\ln z, u'_y = xz^{xy}\ln z, u'_z = xyz^{xy-1}.$$

Коментар. ① Функція u залежить від трьох змінних x, y, z. Знаходячи частинні похідні за кожною змінною, інші дві вважаємо сталими.

8.2.2.1. Знайти частинні диференціали й повний диференціал 1-го порядку функції $u = \ln(x^2 + y^2)$.

Розв'язання. [8.4.5, 8.4.6.]

$$d_xu \overset{[8.4.6]}{=} \left[\frac{\partial u}{\partial x}dx\right] = \frac{2x}{x^2+y^2}dx; \quad d_yu \overset{[8.4.6]}{=} \left[\frac{\partial u}{\partial y}dy\right] = \frac{2y}{x^2+y^2}dy.$$

$$du \overset{[8.4.5]}{=} \left[\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right] = \frac{2x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy.$$

8.2.2.2. Знайти диференціал 1-го порядку функції $u = \dfrac{z}{x^2+y^2}$ у точці $M_0(1;2;1)$.

Розв'язання. [8.4.5.]

$$du\Big|_{M_0} \overset{[8.4.5]}{=} \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0} dx + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0} dy + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_0} dz.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0} = \frac{-z}{(x^2+y^2)^2}2x\Big|_{M_0(1;2;1)} \underset{\text{підставляємо: } x=1, y=2, z=1}{=} -\frac{2}{25};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0} = \frac{-z}{(x^2+y^2)^2}2y\Big|_{M_0(1;2;1)} = -\frac{4}{25};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.\frac{1}{x^2+y^2}\right|_{M_0(1;2;1)} = \frac{1}{5}.$$

[*Підставляємо знайдені похідні у формулу для диференціала.*]

$$du\big|_{M_0(1;2;1)} = -\frac{1}{25}\big(2dx + 4dy - 5dz\big).$$

8.2.3.1. Знайти $\frac{d\tilde{z}}{dt}$, якщо $u = x^y, x = \ln t, y = \sin t$.

Розв'язання. [8.3.2.]

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} \overset{[8.3.2]}{=} \left[\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right] = yx^{y-1}\frac{1}{t} + x^y \ln x \cdot \cos t =$$

$$= \frac{\sin t}{t}(\ln t)^{\sin t - 1} + \cos t \cdot \ln\ln t \cdot (\ln t)^{\sin t}.$$

8.2.3.2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{d\tilde{z}}{dx}$, якщо $z = \ln(e^x + e^y), y = \frac{1}{3}x^3 + x$;

Розв'язання. [8.3.3.]

[*Знаходимо частинну похідну.*]

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}.$$

[*Записуємо формулу для повної похідної і знаходимо похідну.*]

$$\frac{d\tilde{z}}{dx} \overset{[8.3.3]}{=} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

$$\frac{d\tilde{z}}{dx} = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y}(x^2+1) = 1 + \frac{x^2 e^{\frac{1}{3}x^3 + x}}{e^x + e^{\frac{1}{3}x^3+x}} = 1 + \frac{x^2 e^{\frac{1}{3}x^3}}{1 + e^{\frac{1}{3}x^3}}.$$

8.2.4. Знайти z'_u, z'_v, якщо $z = x^3 + y^3 - 3xy, x = uv, y = \frac{u}{v}$.

Розв'язання. [8.3.2.]

[*Визначаємо формули.*]

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} \overset{[8.3.2]}{=} \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} \overset{[8.3.2]}{=} \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

[*Обчислюємо всі потрібні похідні.*]

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 3u^2v^2 - 3\frac{u}{v}; \quad \frac{\partial x}{\partial u} = v; \frac{\partial x}{\partial v} = u;$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 3\frac{u^2}{v^2} - 3uv; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{v}; \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{u}{v^2};$$

[*Підставляємо знайдені похідні у формули.*]

$$z'_u = \left(3u^2v^2 - 3\frac{u}{v}\right)v + \left(3\frac{u^2}{v^2} - 3uv\right)\frac{1}{v} = 3\left(u^2v^3 + \frac{u^2}{v^3} - 2u\right);$$
$$z'_v = \left(3u^2v^2 - 3\frac{u}{v}\right)u + \left(3\frac{u^2}{v^2} - 3uv\right)\left(-\frac{u}{v^2}\right) = 3u^3\left(v^2 - \frac{1}{v^4}\right).$$

8.2.5. Знайти z'_x, z'_y якщо $x + 2y + 3z = e^z$.

Розв'язання. [8.3.4.]

[*Записуємо співвідношення, яке задає неявну функцію у вигляді* $F(x, y, z) = 0$.]

$$F(x, y, z) = x + 2y + 3z - e^z.$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} \overset{[8.3.4]}{=} \left[-\frac{F'_x}{F'_z}\right] = -\frac{1}{3 - e^z};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} \overset{[8.3.4]}{=} \left[-\frac{F'_y}{F'_z}\right] = -\frac{2}{3 - e^z}.$$

8.2.6. Знайти всі похідні 2-го порядку функції $z = xe^{-xy}$.

Розв'язання. [8.3.5, 8.3.6.]①

[*Знаходимо похідні 1-го порядку.*]

$$z'_x = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{-xy}) = (1 - xy)e^{-xy};$$
$$z'_y = \frac{\partial}{\partial y}(xe^{-xy}) = -x^2e^{-xy}.$$

[*Знаходимо похідні 2-го порядку.*]

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}((1-xy)e^{-xy}) = -2ye^{-xy} + xy^2e^{-xy};$$
$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-x^2e^{-xy}) = x^3e^{-xy};$$
$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}((1-xy)e^{-xy}) = -2xe^{-xy} + x^2ye^{-xy};$$
$$z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-x^2e^{-xy}) = -2xe^{-xy} + x^2ye^{-xy}.$$

Коментар. ① Для функції двох змінних можна розглядати чотири похідні 2-го порядку. Якщо виконані умови теореми про рівність мішаних похідних [8.3.6], то мішані похідні z''_{xy} та z''_{yx} рівні.

8.2.7. Знайти диференціали 2-го та 3-го порядку функції $u(x,y) = e^y \sin x$. Обчислити їх у точці $M_0\left(\frac{\pi}{2};0\right)$.

Розв'язання. [8.4.7, 8.4.8.]

[*Записуємо формулу для диференціала 2-го порядку функції двох змінних.*]

$$d^2u \overset{[8.4.7]}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2.$$

[*Знаходимо похідні 2-го порядку.*]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^y \sin x; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^y \cos x; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^y \sin x.$$

[*Підставляємо знайдені похідні у формулу для диференціала.*]

$$d^2u = -e^y \sin x dx^2 + 2e^y \cos x dxdy + e^y \sin x dy^2.$$

[*Обчислюємо диференціал у точці M_0.*]

$$d^2u(M_0) = -e^y \sin x dx^2 + 2e^y \cos x dxdy + e^y \sin x dy^2\Big|_{M_0\left(\frac{\pi}{2};0\right)} = -dx^2 + dy^2.$$

[*Записуємо формулу для диференціала 3-го порядку функції двох змінних.*]

$$d^3z \underset{m=3}{\overset{[8.4.8]}{=}} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

[*Знаходимо похідні 3-го порядку.*]

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -e^y \cos x; \ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = -e^y \sin x;$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = e^y \cos x; \ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = e^y \sin x.$$

[*Підставляємо знайдені похідні у формулу для диференціала.*]

$$d^3 u = -e^y \cos x dx^3 - 3e^y \sin x dx^2 dy + 3e^y \cos x dx dy^2 + e^y \sin x dy^3.$$

[*Обчислюємо диференціал у точці* M_0.]

$$d^3 u(M_0) = -e^y \cos x dx^3 - 3e^y \sin x dx^2 dy + 3e^y \cos x dx dy^2 + e^y \sin x dy^3 \Big|_{M_0\left(\frac{\pi}{2};0\right)} =$$
$$= -3dx^2 dy + dy^3.$$

8.2.8. Знайти похідну вектор-функції $\overline{r} = (t + \cos t)\overline{i} + t\overline{j} + \sin t \cdot \overline{k}$ в точці $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання. [8.5.5.]

$$\overline{r}'(t) = \left[x'(t)\overline{i} + y'(t)\overline{j} + z'(t)\overline{k} \right] =$$
$$= (t + \cos t)'\overline{i} + t'\overline{j} + (\sin t)' \cdot \overline{k} = (1 - \sin t)\overline{i} + \overline{j} + \cos t \cdot \overline{k}.$$
$$\overline{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1 - \sin t)\overline{i} + \overline{j} + \cos t \cdot \overline{k}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \overline{j}.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

8.2.9. Знайдіть частинні похідні і повний диференціал функції:

1) $z = x^3 y - y^3 x + 2x - 3y + 1$;
2) $z = xy - \dfrac{y}{x} + 3x + 2y - 2$;
3) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$;
4) $z = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$;
5) $z = x^y$;
6) $z = (\cos y)^{\sin x}$;
7) $x = \rho \cos \varphi$;
8) $y = \dfrac{t}{\alpha} + t \sin \alpha$.

8.2.10. Знайдіть частинні похідні і повний диференціал функції:

1) $u = xyz$;
2) $u = x^3 + yz^2 + 3yx - x + z$;
3) $u = x^{yz}$;
4) $u = x^{y/z}$.

8.2.11. Знайдіть $du(M_0)$, якщо:

1) $u = \dfrac{x}{y^2}, M_0(1;1)$; 2) $u = \dfrac{x+y}{x-y}, M_0(3;2)$;

3) $u = \ln \arcsin(x + y^3), M_0\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$;

4) $u = \operatorname{arcctg} \ln(\sqrt{x} + y^4), M_0(e^2;0)$;

5) $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, M_0(3;4;5)$; 6) $u = \left(xy + \dfrac{x}{y}\right)^z, M_0(1;1;1)$.

8.2.12. Знайдіть $\dfrac{d\tilde{u}}{dt}$, якщо:

1) $u = e^{x-2y}, x = \sin t, y = t^3$;

2) $u = \arcsin(x-y), x = 3t, y = 4t^3$;

3) $u = xyz, x = t^2+1, y = \ln t, z = \operatorname{tg} t$;

4) $u = \dfrac{yz}{x}, x = e^t, y = \ln t, z = t^2 - 1$.

8.2.13. Знайдіть $\dfrac{d\tilde{z}}{dx}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, якщо:

1) $z = x^2 y, y = \sin x + \cos x$; 2) $z = \dfrac{x^2-y}{x^2+y}, y = 3x+1$;

3) $z = \operatorname{arctg}(xy), y = e^x$; 4) $z = \arcsin\dfrac{x}{y}, y = \sqrt{x^2+1}$.

8.2.14. Знайдіть $\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial u}, \dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial v}$ якщо:

1) $z = x^2 \ln y, x = \dfrac{u}{v}, y = 3u - 2v$;

2) $z = x \sin y + y \cos x, x = \dfrac{u}{v}, y = uv$;

3) $z = \sqrt{x^2 - y^2}, x = u^v, y = u \ln v$;

4) $z = x^y + y^x, x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2$.

8.2.15. Знайдіть dz, якщо:

1) $x^2 e^{2z} - z^2 e^{2x} = 0$; 2) $z \sin x - \cos(x - z) = 0$;

3) $\sin(xz) - e^{xz} - x^2 z = 0$; 4) $z^x = x^z$;

5) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z = 5$; 6) $z^3 - 4xy + y^2 - 4 = 0$;

7) $z^3 + 3xyz = a^3$; 8) $e^z - xyz = 0$;

9) $xz - e^{z/y} + x^3 + y^3 = 0$; 10) $yz = \operatorname{arctg}(xz)$.

8.2.16. Знайдіть d^2u, якщо:

1) $u = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$; 2) $u = x^3 + 3x^2y - y^3$;

3) $u = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$; 4) $u = \arcsin(xy)$;

5) $u = (x + y)e^{xy}$; 6) $u = x \ln \dfrac{y}{x}$;

7) $u = x^y$; 8) $u = y^{\ln x}$;

9) $u = xy + yz + zx$; 10) $u = \ln(x + y + z)$;

11) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; 12) $u = e^{xyz}$.

8.2.17. Знайдіть вказані похідні:

1) $z = xe^{-y}, \dfrac{\partial^5 z}{\partial x \partial y^4}$; 2) $z = \ln(x^2 + y^2), \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$;

3) $z = \sin xy, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$; 4) $z = e^{xy^2}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

8.2.18. Знайдіть похідну 1-го порядку вектор-функції:

1) $\overline{r} = \sin t \cdot \overline{i} + \cos^2 t \cdot \overline{j} + \sin t \cos t \cdot \overline{k}$;

2) $\overline{r} = t \cos t \cdot \overline{i} + t \sin t \cdot \overline{j} + t\overline{k}$.

Відповіді

8.2.9. 1) $z'_x = 3x^2y - y^3 + 2, z'_y = x^3 - 3y^2x - 3$; 2) $z'_x = y + \dfrac{y}{x^2} + 3, z'_y = x - \dfrac{1}{x} + 2$;

3) $z'_x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z'_y = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}$;

4) $z'_x = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, z'_y = \dfrac{y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}$;

5) $z'_x = yx^{y-1}, z'_y = x^y \ln x$; 6) $z'_x = \cos x(\cos y)^{\sin x} \ln \cos y, z'_y = -(\cos y)^{\sin x - 1} \sin x \sin y$;

7) $x'_\rho = \cos\varphi, x'_\varphi = -\rho\sin\varphi$; 8) $y'_t = \dfrac{1}{\alpha} + \sin\alpha, y'_\alpha = -\dfrac{t}{\alpha^2} + t\cos\alpha$.

8.2.10. 1) $u'_x = yz, u'_y = xz, u'_z = xy$; 2) $u'_x = 3x^2 + 3y - 1, u'_y = z^2 + 3x, \ u'_z = 2yz + 1$;

3) $u'_x = yzx^{yz-1}, \ u'_y = zx^{yz} \ln x, u'_z = yx^{yz} \ln x$;

4) $u'_x = \dfrac{y}{z} x^{\frac{y}{z} - 1}; u'_y = \dfrac{1}{z} x^{\frac{y}{z}} \ln x; u'_z = -\dfrac{y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \ln x$.

8.2.11. 1) $du(M_0) = dx - 2dy$; 2) $du(M_0) = -4dx + 6dy$; 3) $du(M_0) = \dfrac{6}{\pi}dx$;

4) $du(M_0) = -\dfrac{e^{-2}}{4}dx$; 5) $du(M_0) = -\dfrac{3}{25}dx - \dfrac{4}{25}dy + \dfrac{1}{5}dz$; 6) $2dx + \ln 4 \cdot dz$.

8.2.12. 1) $\dfrac{d\tilde{u}}{dt} = e^{x-2y}(\cos t - 6t^2) = e^{\sin t - 2t^3}(\cos t - 6t^2)$; 2) $\dfrac{d\tilde{u}}{dt} = \dfrac{3-12t^2}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$;

3) $\dfrac{d\tilde{u}}{dt} = 2tyz + \dfrac{xz}{t} + \dfrac{xy}{\cos^2 t}$; 4) $\dfrac{d\tilde{u}}{dt} = \dfrac{x(z+2yt^2) - yzte^t}{tx^2}$.

8.2.13. 1) $\dfrac{d\tilde{z}}{dx} = 2xy + x^2(\cos x - \sin x) = 2x(\sin x + \cos x) + x^2(\cos x - \sin x), \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy$;

2) $\dfrac{d\tilde{z}}{dx} = \dfrac{2x(3x+2)}{(x^2+3x+1)^2}, \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{4xy}{(x^2+y)^2}$;

3) $\dfrac{d\tilde{z}}{dx} = \dfrac{e^x(x+1)}{1+x^2e^{2x}}, \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{1+x^2y^2}$; 4) $\dfrac{d\tilde{z}}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}, \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$;

8.2.14. 1) $\tilde{z}'_u = 2x\ln y \cdot \dfrac{1}{v} + x^2\dfrac{1}{y} \cdot 3 = \dfrac{2u}{v^2}\ln(3u-2v) + \dfrac{3u^2}{v^2(3u-2v)}$,

$\tilde{z}'_v = 2x\ln y\left(-\dfrac{u}{v^2}\right) + x^2\dfrac{1}{y} \cdot (-2) = -\dfrac{2u^2}{v^3}\ln(3u-2v) - \dfrac{2u^2}{v^2(3u-2v)}$;

2) $\tilde{z}'_u = (\sin y - y\sin x)\dfrac{1}{v} + (x\cos y + \cos x)v$,

$\tilde{z}'_v = (\sin y - y\sin x)\left(-\dfrac{u}{v^2}\right) + (x\cos y + \cos x)u$.

3) $\tilde{z}'_u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}vu^{v-1} - \dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\ln v$, $\tilde{z}'_v = \dfrac{xu^v}{\sqrt{x^2-y^2}}\ln u - \dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\dfrac{u}{v}$;

4) $\tilde{z}'_u = 2u(yx^{y-1} + y^x\ln y + x^y\ln x + xy^{x-1})$, $\tilde{z}'_v = 2v(yx^{y-1} + y^x\ln y - x^y\ln x - xy^{x-1})$.

8.2.15. 1) $dz = \dfrac{z^2e^{2x} - xe^{2z}}{x^2e^{2z} - ze^{2x}}dx$; 2) $dz = \dfrac{z\cos x + \sin(x-z)}{\sin(x-z) - \sin x}dx$;

3) $dz = \dfrac{z}{x} \cdot \dfrac{2x + e^{xz} - \cos xz}{\cos xz - e^{xz} - x}dx$; 4) $dz = \dfrac{z^2\ln x - 1}{x^2\ln z - 1}dx$;

5) $dz = \dfrac{(2-x)dx + 2ydy}{z+1}$; 6) $dz = \dfrac{4ydx + (4x-2y)dy}{3z^2}$;

7) $dz = -\dfrac{yzdx + xzdy}{xy + z^2}$; 8) $dz = \dfrac{z}{z-1}\left(\dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y}\right)$;

9) $dz = \dfrac{y^2(z+3x^2)dx + (3y^4 + ze^{z/y})dy}{y(e^{z/y} - xy)}$; 10) $dz = \dfrac{zdx - z(1+x^2z^2)dy}{y(1+x^2z^2) - x}$.

8.2.16. 1) $d^2u = 6xdx^2 + 2(2y - 15y^2)dxdy + (2x - 30xy + 20y^3)dy^2$;

2) $d^2u = (6x+6y)dx^2 + 12xdxdy - 6ydy^2$;

3) $d^2u = \dfrac{(2x^2+y^2)dx^2 + 2xydxdy + (x^2+2y^2)dy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

4) $d^2u = \dfrac{xy^3dx^2 + 2dxdy + x^3ydy^2}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$.

5) $d^2u = e^{xy}(y(y^2+xy+2)dx^2 + 2(x+y)(xy+2)dxdy + x(x^2+xy+2)dy^2)$;

6) $d^2u = -\dfrac{1}{x}dx^2 + \dfrac{2}{y}dxdy - \dfrac{x}{y^2}dy^2$;

7) $d^2u = y(y-1)x^{y-2}dx^2 + 2(1+y\ln x)x^{y-1}dxdy + x^y\ln^2 xdy^2$;

8) $d^2u = y^{\ln x}\left(\dfrac{\ln y(\ln y+1)}{x^2}dx^2 + 2\dfrac{\ln x\ln y+1}{xy}dxdy + \dfrac{\ln x(\ln x-1)}{y^2}dy^2\right)$;

9) $d^2u = 2(dxdy + dxdz + dydz)$;

10) $d^2u = -\dfrac{dx^2+dy^2+dz^2+2(dxdy+dxdz+dydz)}{(x+y+z)^2}$;

11) $d^2u = \dfrac{(y^2+z^2-x^2)dx^2 + (x^2+z^2-y^2)dy^2 + (x^2+y^2-z^2)dz^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} -$

$-\dfrac{4(xydxdy + xzdxdz + yzdydz)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$;

12) $d^2u = e^{xyz}((yzdx + zxdy + xydz)^2 + 2(zdxdy + xdydz + ydzdx))$.

8.2.17. 1) e^{-y}; 2) $\dfrac{4y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$; 3) $-2x\sin xy - x^2y\cos xy$; 4) $2y^3(2+xy^2)e^{xy^2}$.

8.2.18. 1) $\overline{r}' = \cos t\cdot\overline{i} - \sin 2t\cdot j + \cos 2t\cdot\overline{k}$;
2) $\overline{r}' = (\cos t - t\sin t)\overline{i} + (\sin t + t\cos t)\overline{j} + \overline{k}$.

Практикум 8.3. Похідна за напрямом вектора. Градієнт

Навчальні задачі

8.3.1. Знайти градієнт, величину і напрям найбільшої зміни функції $u(M) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ у точці $M_0(1;2;1)$.

Розв'язання. [8.6.3, 8.6.6.]

[*Записуємо формулу для* $\operatorname{grad} u(M_0)$.]

$$\operatorname{grad} u(M_0) \overset{[8.6.3]}{=} \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\overline{k}.$$

[*Обчислюємо частинні похідні функції* $u(M)$.]

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_0} = \frac{1}{\sqrt{6}};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_0} = \frac{2}{\sqrt{6}};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_0} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

[*Знаходимо* $\operatorname{grad} u(M_0)$.] ①

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{k}.$$

[*Обчислюємо довжину* $\operatorname{grad} u(M_0)$.]

$$\left|\operatorname{grad} u(M_0)\right| = \sqrt{\frac{1}{6}+\frac{4}{6}+\frac{1}{6}} = 1.$$

Найбільша зміна функції відбувається у напрямі вектора $\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; величина найбільшої зміни дорівнює 1.

Коментар. ① Найбільша зміна функції відбувається у напрямі градієнта. Величина цієї зміни дорівнює довжині градієнта.

8.3.2. Знайти похідну функції $u(M) = xy^2 + z^2 - xyz$ у точці $M_0(1;1;2)$ за напрямом вектора $\bar{l} = (1;\sqrt{2};1)^T$.

Розв'язання. [8.6.4.]

[*Записуємо формулу для похідної за напрямом.*]

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} \overset{[8.6.4]}{=} (\operatorname{grad} u, \bar{l}^{\,0}).$$

де $\bar{l}^{\,0}$ — орт вектора $\bar{l}$.

[*Знаходимо* $\operatorname{grad} u(M_0)$.]

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = (y^2 - yz)\,|_{(1;1;2)} = -1;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = (2xy - xz)\,|_{(1;1;2)} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = (2z - xy)\,|_{(1;1;2)} = 3.$$

$$\operatorname{grad} u(M_0) = -\overline{i} + 3\overline{k} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

[*Знаходимо орт вектора* $\overline{l}$.]

$$\overline{l}^{\,0} = \frac{\overline{l}}{\left|\overline{l}\right|}.$$

$$\left|\overline{l}\right| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2; \ \overline{l}^{\,0} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

[*Знаходимо* $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l}$.]

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = (-1 \quad 0 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

8.3.3. Знайдіть напрям і величину $\operatorname{grad} u(M_0)$, якщо:

1) $u = x^2 + y^2, M_0(3;2)$; 2) $u = \sqrt{4 + x^2 + y^2}, M_0(2;1)$;

3) $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz, M_0(1;-1;2)$;

4) $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz, M_0(2;1;1)$.

8.3.4. Знайдіть кут між градієнтами функції u в точках M_1 та M_2:

1) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}, M_1(1;1), M_2(1;-1)$;

2) $u = \arcsin\dfrac{x}{x + y}, M_1(1;1), M_2(3;4)$;

3) $u = x^2 + y^2 + z^2, M_1(1;1;\sqrt{7}), M_2(\sqrt{7};-1;-1)$;

4) $u = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}, M_1(1;1;1), M_2(1;2;-1)$.

8.3.5. Знайдіть похідну функції u у напрямі $\overline{l}$ у точці M_0, якщо:

1) $u = \operatorname{arctg} xy, \overline{l} = (1;1), M_0(1;1)$;

2) $u = x\sin(x + y), \overline{l} = (-2;0), M_0\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$;

3) $u = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1, \overline{l} = \overline{M_0M_1}, M_0(3;1), M_1(6;5)$;

4) $u = 5x + 10x^2y + y^5, \overline{l} = \overline{M_0M_1}, M_0(1;2), M_1(5;-1)$;

5) $u = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2, \overline{l} = \left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)^T, M_0(3;3;1)$;

6) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \overline{l} = \left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)^T, M_0(1;2;1)$;

7) $u = xyz, \overline{l} = \overline{M_0M_1},\ M_0(5;1;2),\ M_1(9;4;14)$;

8) $u = x^2y^2z^2, \overline{l} = \overline{M_0M_1}, M_0(1;-1;3),\ M_1(0;1;1)$.

8.3.6. Знайдіть найбільше значення $\frac{\partial u}{\partial l}$ у точці M_0, якщо:

1) $u = xy^2 - 3x^4y^5, M_0(1;1)$; 2) $u = \frac{x + \sqrt{y}}{y}, M_0(2;1)$;

3) $u = \ln xyz, M_0(1;-2;-3)$;

4) $u = \operatorname{tg} x - x + 3\sin y - \sin^3 y + 2z + \operatorname{ctg} z, M_0\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$.

8.3.7. 1. Знайдіть швидкість змінювання функції $u = xyz$ у точці $M_0(5;1;-8)$ у напрямі вектора $\overline{l} = \overline{M_0M_1}, M_1(9;4;4)$.

2. Знайдіть швидкість змінювання функції $u = xe^y + ye^x - z^2$ у точці $M_0(3;0;2)$ у напрямі вектора $\overline{l} = \overline{M_0M_1}, M_1(4;1;3)$.

8.3.8. 1. Знайдіть напрям і величину найбільшого змінювання функції $u = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ у точці $M_0(1;1;1)$.

2. Знайдіть напрям і величину найбільшого змінювання функції $u = xyz$ у точці $M_0(2;1;-1)$.

Відповіді

8.3.3. 1) $6\overline{i} + 4\overline{j}, 2\sqrt{13}$; 2) $\frac{2}{3}\overline{i} + \frac{1}{3}\overline{j}, \frac{\sqrt{5}}{3}$; 3) $6\overline{i} - 6\overline{j} + 6\overline{k}, 6\sqrt{3}$; 4) $9\overline{i} - 3\overline{j} - 3\overline{k}, 3\sqrt{11}$.

8.3.4. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\cos\alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}}$; 3) $\cos\alpha = \frac{1}{9}$; 4) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{99}}$.

8.3.5. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.2) -1; 3) 0; 4) -18; 5) 62; 6) $\frac{5}{9}$; 7) $\frac{98}{13}$; 8) -22.

8.3.6. 1) $\sqrt{290}$; 2) $\frac{\sqrt{29}}{2}$; 3) $\frac{7}{6}$; 4) $\frac{\sqrt{137}}{8}$.

8.3.7. 1) $-\dfrac{92}{13}$; 2) $\dfrac{e^3}{\sqrt{3}}$.

8.3.8. 1) $\operatorname{grad} u(M_0) = 8\overline{i} - 4\overline{j} + 8\overline{k}, \max \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \left|\operatorname{grad} u(M_0)\right| = 12.$

2) $\operatorname{grad} u(M_0) = -\overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}, \max \dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \left|\operatorname{grad} u(M_0)\right| = 3.$

Практикум 8.4. Дотична й нормаль до поверхні та кривої

Навчальні задачі

8.4.1. Знайти одиничний вектор внутрішньої нормалі до поверхні $S : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{1} = 1$ у точці $M_0\left(1;1;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Розв'язання. [8.6.3, 8.7.2.]

[*Записуємо рівняння поверхні у вигляді* $F(x,y,z) = 0$.]

$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} - 1.$$

[*Записуємо формулу для вектора нормалі до поверхні* S.]

$$\overline{n}(M_0) \overset{[8.7.2]}{=} \pm \operatorname{grad} F(M_0).$$

[*Записуємо формулу для* $\operatorname{grad} F(M_0)$.]

$$\operatorname{grad} F(M_0) \overset{[8.6.3]}{=} \frac{\partial F(M_0)}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial F(M_0)}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial F(M_0)}{\partial z}\overline{k}.$$

[*Обчислюємо частинні похідні.*]

$$F_x'(M_0) = \frac{x}{2}\bigg|_{M_0} = \frac{1}{2}; F_y'(M_0) = \frac{y}{2}\bigg|_{M_0} = \frac{1}{2}; F_z'(M_0) = 2z\,|_{M_0} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

[*Підставляємо знайдені похідні*]

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \frac{1}{2}\overline{i} + \frac{1}{2}\overline{j} + \sqrt{2}\overline{k}.$$

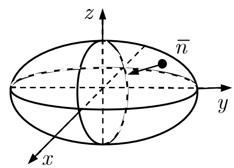


Рис. до 8.4.1

Вектор внутрішньої нормалі до еліпсоїда у точці M_0 утворює тупі кути з осями координат, отже,

$$\overline{l} = \overline{n}(M_0) = -\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\sqrt{2}\right)^T.$$

[*Знаходимо орт вектора нормалі.*]

$$\overline{l}^0 = \overline{n}^0 = \frac{\overline{n}}{|\overline{n}|}; \qquad |\overline{n}| = \sqrt{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

$$\overline{l}^0 = -\sqrt{\frac{2}{5}}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

8.4.2. Скласти рівняння дотичної площини P та нормалі L до поверхні $S : x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ у точці $M_0(1;2;-1)$.

Розв'язання. [8.7.3, 8.7.4.]

[*Записуємо рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні* $F(x,y,z) = 0$.]

$$T : F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0;$$

$$N : \frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$

[*Обчислюємо частинні похідні функції* $F(x,y,z)$.]

$$F'_x(M_0) = (3x^2 + yz)\,\big|_{(1;2;-1)} = 1;$$

$$F'_y(M_0) = (3y^2 + xz)\,\big|_{(1;2;-1)} = 11;$$

$$F'_z(M_0) = (3z^2 + xy)\,\big|_{(1;2;-1)} = 5.$$

Рівняння дотичної площини T:

$$1(x - 1) + 11(y - 2) + 5(z + 1) = 0,$$

$$x + 11y + 5z - 18 = 0.$$

Рівняння нормалі N:

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{11} = \frac{z + 1}{5}.$$

8.4.3. Знайти дотичний вектор до кривої $\begin{cases} x = a\operatorname{ch} t, \\ y = a\operatorname{sh} t, \\ z = at \end{cases}$ для $t = 0$.

Розв'язання. [8.5.6.]

[*Записуємо формулу для дотичного вектора.*]

$$\overline{\tau} \overset{[8.5.6]}{=} \left[\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a\operatorname{sh} t \\ a\operatorname{ch} t \\ a \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}.$$

8.4.4. Запишіть рівняння дотичної прямої та нормальної площини до лінії $\begin{cases} x = t^4/4, \\ y = t^3/3, \\ z = t^2/2 \end{cases}$ у точці, що відповідає значенню параметра $t = 6$.

Розв'язання. [8.7.7, 8.7.8.]

[*Записуємо рівняння дотичної прямої та нормальної площини до кривої* L.]

$$T: \frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)};$$

$$N: x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0,$$

де $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0)$.

[*Знаходимо координати точки дотику* $M_0(x_0; y_0; z_0)$.]

$$x_0 = \left.\frac{t^4}{4}\right|_{t=6} = 348, y_0 = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{t=6} = 72; z_0 = \left.\frac{t^2}{2}\right|_{t=6} = 18.$$

[*Знаходимо координати дотичного вектора.*]

$$\overline{\tau} = \left.\begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}\right|_{t=6} = \begin{pmatrix} 216 \\ 36 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Рівняння дотичної прямої T:

$$\frac{x - 348}{216} = \frac{y - 72}{36} = \frac{z - 18}{6}.$$

Рівняння нормальної площини N:

$$216(x - 348) + 36(y - 72) + 6(z - 18);$$

$$36x + 6y + z - 12978 = 0.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

8.4.5. Знайдіть одиничний вектор, напрямлений уздовж нормалі до заданої поверхні в точці M_0:

1) $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5, M_0(1;1;2)$;

2) $xy + xz + yz = 3, M_0(1;1;1)$.

8.4.6. Запишіть рівняння дотичної площини й нормалі до заданої поверхні в точці M_0:

1) $z = 2x^2 - 4y^2, M_0(2;1;4)$; 2) $z = x^2 + y^2, M_0(1;-2;5)$;

3) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0, M_0(4;3;4)$;

4) $x^2 + y^2 + z^2 = 9, M_0(1;-2;-2)$;

5) $\dfrac{x^2}{27} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{3} = 1, M_0(3;-2;-1)$;

6) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{3} = -1, M_0(4;-3;3)$;

7) $z - y - \ln\dfrac{x}{z} = 0, M_0(1;1;1)$; 8) $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8, M_0(2;2;1)$.

8.4.7. 1. До поверхні $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ проведіть дотичні площини, які паралельні площині $x + 4y + 6z = 0$.

2. До поверхні $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ проведіть дотичні площини, які паралельні площині $x - y + 2z = 0$.

3. До поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ проведіть дотичну площину, яка перпендикулярна до площин $x - y - z = 2$ та $2x - 2y - z = 4$.

4. Для поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ знайдіть нормаль, яка паралельна прямій $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{4}$.

8.4.8. Знайдіть дотичний вектор $\overline{\tau}$ до кривої L у точці, яка відповідає значенню параметра $t = t_0$:

1) $L: \begin{cases} x = 1 - \cos t, \\ y = \sin t, \quad t_0 = \dfrac{\pi}{2}; \\ z = t, \end{cases}$

2) $L: \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, t_0 = 0. \\ z = e^t, \end{cases}$

8.4.9. Запишіть рівняння дотичної і нормальної площини до заданої кривої в точці, що відповідає значення t_0:

1) $x = \sin 2t, y = 1 - \cos 2t, z = \sqrt{2}\cos t, t_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

2) $x = a\operatorname{ch} t, y = b\sin t, z = ct, t_0 = 0$.

8.4.10. Запишіть рівняння дотичної і нормальної площини до заданої кривої в точці M_0:

1) $x = t^2, y = 1 - t, z = t^3, M_0(1;0;1)$;

2) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4\sin\dfrac{t}{2}, M_0\left(\dfrac{\pi}{2} - 1;1;2\sqrt{2}\right)$.

Відповіді

8.4.5. 1) $\pm\begin{pmatrix} 2/3\sqrt{14} \\ 1/3\sqrt{14} \\ 11/3\sqrt{14} \end{pmatrix}^T$; 2) $\pm\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

8.4.6. 1) $8x - 8y - z = 4, \dfrac{x-2}{8} = \dfrac{y-1}{-8} = \dfrac{z-4}{-1}$;

2) $2x - 4y - z - 5 = 0, \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-5}{-1}$;

3) $3x + 4y - 6z = 0, \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{-6}$;

4) $x - 2y + 2z - 9 = 0, \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$;

5) $2x - 3y - 6z - 18 = 0, \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-1}{-6}$;

6) $3x - 4y - 12z + 12 = 0, \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+3}{-4} = \dfrac{z-3}{-12}$;

7) $x + y - 2z = 0, \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$; 8) $x + y - 4z = 0, \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{4}$.

8.4.7. 1) $x + 4y + 6z = \pm 21$; 2) $x - y + 2z = \pm\sqrt{\dfrac{11}{2}}$;

3) $x + y = 1 \pm \sqrt{2}$; 4) $\dfrac{x - 1 \pm 1/\sqrt{26}}{1} = \dfrac{y \pm 3/\sqrt{26}}{3} = \dfrac{z \pm 3/\sqrt{26}}{4}$.

8.4.8. 1) $\overline{\tau} = \overline{i} + \overline{k}$; 2) $\overline{\tau} = -\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$.

8.4.9. 1) $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{-1}, 2y - z - 1 = 0$; 2) $\dfrac{x-a}{0} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}, by + cz = 0$.

8.4.10. 1) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{3}, 2x - y + 3z - 5 = 0;$

2) $\dfrac{x - \frac{\pi}{2} + 1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, x + y + \sqrt{2}z = \dfrac{\pi}{2} + 4.$

Практикум 8.5. Екстремуми функції кількох змінних

Навчальні задачі

8.5.1. Розвинути функцію $z = e^{x/y}$ за Тейлоровою формулою з центром у точці $M_0(0;1)$ до членів 2-го порядку включно.

Розв'язання. [8.8.1.]

[*Записуємо Тейлорову формулу 2-го порядку з центром у точці* $M_0(0;1)$.]

$$z(x,y) = z(0,1) + \frac{1}{1!}\Big(z'_x(0,1)x + z'_y(0,1)(y-1)\Big) +$$
$$+\frac{1}{2!}(z''_{x^2}(0,1)x^2 + 2z''_{xy}(0,1)x(y-1) + z''_{y^2}(0,1)(y-1)^2) + r_2(x,y).$$

[*Обчислюємо частинні похідні функції* z *у точці* M_0.]

$$z(M_0) = 1;$$
$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = \left(e^{x/y}\frac{1}{y}\right)\Bigg|_{M_0(0;1)} = 1;$$
$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = \left(e^{x/y}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right)\Bigg|_{M_0(0;1)} = 0;$$
$$\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2} = \left(e^{x/y}\frac{1}{y^2}\right)\Bigg|_{M_0(0;1)} = 1;$$
$$\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x \partial y} = \left(-e^{x/y}\frac{x}{y^3} - e^{x/y}\frac{1}{y^2}\right)\Bigg|_{M_0(0;1)} = -1;$$
$$\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2} = \left(e^{x/y}\frac{x^2}{y^4} + e^{x/y}\frac{2x}{y^3}\right)\Bigg|_{M_0(0;1)} = 0.$$

[*Підставляємо обчислені похідні в Тейлорову формулу.*]

$$e^{x/y} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - x(y-1) + r_2(x,y).$$

8.5.2. Дослідити функцію $z(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ на екстремум.

Розв'язання. [8.8.2–8.8.7.]

[***Крок 1.*** *Визначаємо область означення функції.*]

$$D(z) = \mathbb{R}^2.$$

[***Крок 2.*** *Знаходимо стаціонарні точки функції* z *із системи* $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases}$.]

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12.$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ 6xy - 12 = 0. \end{cases}$$

Стаціонарними є точки: $M_0(2;1),\ M_1(-2;-1), M_2(1;2), M_3(-1;-2)$.

[***Крок 3.*** *Для кожної точки перевіряємо достатню умову існування екстремуму і висновуємо.*]

[*Знаходимо похідні 2-го порядку функції* z *і гессіан.*]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x;$$

$$\det H(x,y) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36x^2 - 36y^2.$$

Для $M_0(2;1)$:

$$A_0 = 6x\big|_{M_0(2;1)} = 12, B_0 = 6y\big|_{M_0(2;1)} = 6, C_0 = 6x\big|_{M_0(2;1)} = 12;$$

$$\Delta_0 = 144 - 36 = 108 > 0, A_0 = 12 > 0 \Rightarrow M_0 - \text{ точка } \min.$$

Для $M_1(-2;-1)$:

$$A_1 = -12, B_1 = -6, C_1 = -12;$$

$$\Delta_1 = 144 - 36 = 108 > 0, A_1 = -12 < 0 \Rightarrow M_1 - \text{точка} \max.$$

Для $M_1(1;2)$:

$$A_2 = 6, B_2 = 12, C_2 = 6;$$

$$\Delta_2 = 36 - 144 < 0 \Rightarrow M_2 - \text{не є точкою екстремума.}$$

Для $M_3(-1;-2)$:

$$A_3 = -6, B_3 = -12, C_3 = -6;$$

$$\Delta_3 = 36 - 144 < 0 \Rightarrow M_3 - \text{не є точкою екстремума.}$$

8.5.3.1. Знайти найбільше та найменше значення функції
$$z = x^2 + y^2 - xy - x - y$$
в області $\bar{D} : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3.$

Розв'язання. [8.9.1, 8.9.6.]

[*Зображуємо область* $\bar{D} = D \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3$.]

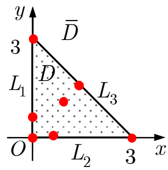


Рис. до 8.5.3.1

[***Крок 1.*** *Знаходимо стаціонарні точки, що є внутрішніми для області* $\bar{D}$ *із системи* $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$]

$$z'_x = 2x - y - 1, \quad z'_y = 2y - x - 1.$$

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0, \\ 2y - x - 1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1; \end{cases} \quad M_0(1;1) \in D.$$

[***Крок 2.*** *Знаходимо стаціонарні точки на межі області і долучаємо до них кінцеві точки кожної ланки.*]

На $L_1 = \left\{x = 0, 0 \leq y \leq 3\right\}$:

$$z(x,y)\Big|_{x=0} = z_1(y) = y^2 - y, y \in [0;3].$$

$$z'_1 = 2y - 1 = 0; y = \frac{1}{2}; M_1\left(0;\frac{1}{2}\right) \in L_1.$$

$$M_2(0;0) \in L_1, M_3(0;3) \in L_1.$$

На $L_2 = \left\{y = 0, 0 \leq x \leq 3\right\}$:

$$z(x,y)\Big|_{y=0} = z_2(x) = x^2 - x, x \in [0;3].$$

$$z'_2 = 2x - 1 = 0; x = \frac{1}{2}; M_4\left(\frac{1}{2};0\right) \in L_2.$$

$$M_2(0;0), M_5(3;0) \in L_2.$$

На $L_3 = \left\{y = 3 - x, 0 \leq x \leq 3\right\}$:

$$z(x,y)\Big|_{y=3-x} = z_3(x) = 3x^2 - 9x + 6, x \in [0;3].$$

$$z'_3 = 6x - 9 = 0; x = \frac{3}{2}; M_6\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right) \in L_3.$$

$$M_3(0;3), M_5(3;0) \in L_3.$$

[***Крок 3.*** *Порівнюємо значення функції у знайдених точках.*]

$$z(M_0) = z(1,1) = -1;$$

$$z(M_1) = z\left(0,\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4};\quad z(M_2) = z(0,0) = 0;$$

$$z(M_3) = z(0,3) = 6;\quad z(M_4) = z\left(\frac{1}{2},0\right) = -\frac{1}{4};$$

$$z(M_5) = z(3,0) = 6;\quad z(M_6) = z\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}.$$

[*Висновуємо.*]

$$\max_{M\in\overline{D}} z(M) = z(0,3) = z(3,0) = 6;$$
$$\min_{M\in\overline{D}} z(M) = z(1,1) = -1.$$

8.5.3.2. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x + y$ в області $\overline{D} : x^2 + y^2 \le 4$.

Розв'язання. [8.9.1, 8.9.6.]

1. $z'_x = 1, z'_y = 1$. Отже, стаціонарних точок функція не має.

2. Межу області коло $x^2 + y^2 = 4$ задаємо параметрично $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

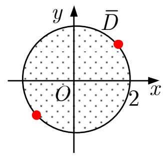


Рис. до 8.5.3.2

$$z(x,y)\big|_{\substack{x=2\cos t,\\ y=2\sin t}} = \tilde{z}(t) = 2\cos t + 2\sin t, t \in [0;2\pi].$$

$$\tilde{z}'(t) = -2\sin t + 2\cos t.$$

$$\tilde{z}'(t) = -2\sin t + 2\cos t = 0;\ \mathrm{tg}\, t = 1;\ t_1 = \frac{\pi}{4}, t_2 = \frac{5\pi}{4}.$$

$$M_1(\sqrt{2};\sqrt{2}), M_2(-\sqrt{2};-\sqrt{2}).$$

$$z(M_1) = z(\sqrt{2};\sqrt{2}) = 2\sqrt{2};$$

$$z(M_2) = z(-\sqrt{2};-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}.$$

$$\max_{M\in\overline{D}} z(M) = z(\sqrt{2},\sqrt{2}) = 2\sqrt{2};$$
$$\min_{M\in\overline{D}} z(M) = z(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}.$$

8.5.4.1. Дослідити на екстремум функцію $z = (3x^2 - 4y)^2 + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}y$ за умови зв'язку $\dfrac{3}{4}x^2 - y + \dfrac{1}{6} = 0$ методом виключення змінних.

Розв'язання. [8.9.2.]

[*Виражаємо одну із змінних з рівняння зв'язку.*]

$$y(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{6}.$$

[*Підставляємо вираз у функцію* $z(x, y)$.]

$$z(x, y(x)) = \varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{5}{9}.$$

[*Досліджуємо на локальний екстремум одержану функцію.*]

$$\varphi'(x) = x + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{3}.$$

[*Перевіряємо виконання достатніх умов існування локального екстремуму.*]

$$\varphi''\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 > 0\,.$$

У точці $x_0 = -\frac{1}{3}$ функція $\varphi(x)$ має локальний мінімум.

З умови зв'язку знаходимо відповідне значення

$$y_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

Точка $M_0\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$ є точкою локального умовного мінімуму функції $z(x, y)$.

[*Обчислюємо значення функції* $z(x, y)$ *в цій точці.*]

$$z_{\min} = z\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

8.5.4.2. Дослідити на екстремум функцію $z = (3x^2 - 4y)^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y$ за умови зв'язку $\frac{3}{4}x^2 - y + \frac{1}{6} = 0$ методом множників Лаґранжа.

Розв'язання. [8.9.2–5, 8.9.7.]

[***Крок 1.*** *Записуємо функцію Лаґранжа для задачі.*]

$$F(x, y; \lambda) = \left[\, f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) \right] = (3x^2 - 4y)^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \lambda\left(\frac{3}{4}x^2 - y + \frac{1}{6}\right),$$

де λ — невизначений Лаґранжів множник.

[***Крок 2.*** *Знаходимо стаціонарні точки Лаґранжевої функції.*]

$$\begin{cases} F'_x = 12x(3x^2 - 4y) + \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{2}\lambda x = 0; \\ F'_y = -8(3x^2 - 4y) + \dfrac{2}{3} - \lambda = 0; \\ \varphi(x,y) = \dfrac{3}{4}x^2 - y + \dfrac{1}{6} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}, y = \frac{1}{4}, \lambda = 6 \Leftrightarrow M'_0\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{4};6\right).$$

[***Крок 3.*** *Перевіряємо виконання достатніх умов екстремуму для функції Лаґранжа в точці* M'_0.]

[*Знаходимо похідні 2-го порядку Лаґранжової функції.*]

$$F''_{xx}(M) = 12(9x^2 - 4y) + \frac{3}{2}\lambda, F''_{xy}(M) = -48x, F''_{yy}(M) = 32;$$
$$F''_{xx}(M'_0) = 9, F''_{xy}(M'_0) = 16, F''_{yy}(M'_0) = 32.$$

[Знаходимо похідні 1-го порядку функції $\varphi(x,y)$.]

$$\varphi'_x(M'_0) = \frac{3}{2}x\Big|_{M'_0} = -\frac{1}{2}; \varphi'_y(M'_0) = -1.$$

[*Досліджуємо знак визначника 3-го порядку.*]

$$\Delta = \left[\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & F''_{x^2} & F''_{xy} \\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{y^2} \end{vmatrix}\right] = \begin{vmatrix} 0 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & 9 & 16 \\ -1 & 16 & 32 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Отже, у точці M'_0 функція $F(x,y;\lambda)$ має локальний мінімум

$$F_{\min} = F(M'_0) = \frac{1}{2},$$

а функція

$$z = (3x^2 - 4y)^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y$$

при наявності зв'язку

$$\frac{3}{4}x^2 - y + \frac{1}{6} = 0$$

має в точці $M_0\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)$ умовний мінімум

$$z_{\min} = z\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

8.5.5. Розвиньте функцію f за степенями $x - x_0$ та $y - y_0$, знайшовши члени 2-го порядку включно:

1) $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2, x_0 = 1, y_0 = -1;$

2) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, x_0 = 1, y_0 = 0;$

3) $f(x, y) = y^x, x_0 = 1, y_0 = 1;$

4) $f(x, y) = \sin x \sin y, x_0 = y_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

8.5.6. Знайдіть точки екстремуму функції:

1) $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y;$ 2) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10;$

3) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1;$ 4) $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27;$

5) $z = 2y^3 + 24y^2 - x^2 - 6xy + 6y - 18x;$

6) $z = 2x^3 + 12x^2 + y^2 + 6xy + 14y + 30x;$

7) $z = x^3y^2(6 - x - y), x > 0, y > 0;$ 8)
$z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}, x > 0, y > 0;$

9) $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y;$

10) $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y;$

11) $z = e^{x/2}(x + y^2);$

12) $z = e^{-x^2 - y^2}(ax^2 + by^2), a > 0, b > 0.$

8.5.7. Знайдіть найбільше та найменше значення функції:

1) $z = x^2 + y^2$ у крузі $x^2 + y^2 \le 9;$

2) $z = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}$ в області $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 1;$

3) $z = xy$ у крузі $x^2 + y^2 \le 1;$

4) $z = x^2 - y^2$ у крузі $x^2 + y^2 \le 4;$

5) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ у трикутнику, обмеженому прямими $x = 0,\ y = 0$ та $x + y + 3 = 0;$

6) $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ у трикутнику, обмеженому осями координат і прямою $x + y + 5 = 0;$

7) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ у прямокутнику, обмеженому прямими $x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$;

8) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ у прямокутнику, обмеженому прямими $x = 0, y = 0, x = 1, y = 2$;

9) $z = x^2 + 2xy - 1$ в області, обмеженій лініями $y = 0$ та $y = x^2 - 4$;

10) $z = x^4 - 2x^2y^2 + y^3$ в області, обмеженій лініями $y = 4$ та $y = x^2$.

8.5.8. Знайдіть умовні екстремуми функції:

1) $z = \dfrac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = 1$;

2) $z = 2x + y$ при $x^2 + y^2 = 1$;

3) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$;

4) $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$;

5) $z = x^2 + xy + y^2$ при $x^2 + y^2 = 1$;

6) $z = 2x^2 + 12xy + y^2$ при $x^2 + 4y^2 = 25$.

8.5.9. 1. З усіх прямокутних паралелепіпедів, які мають заданий об'єм V, знайдіть той, який має найменшу поверхню.

2. З'ясуйте, яка з відкритих прямокутних ванн місткістю V має найменшу площу поверхні.

8.5.10. 1. Доведіть, що добуток трьох невід'ємних чисел заданої суми є найбільшим тоді й лише тоді, коли ці числа рівні між собою.

2. Доведіть, що сума трьох додатних чисел, які мають заданий добуток, є найменшою тоді й лише тоді, коли ці числа рівні.

Відповіді

8.5.5. 1) $5 + 5(x-1) - 5(y+1) + \dfrac{1}{2!}[2(x-1)^2 - 6(x-1)(y+1) + 2(y+1)^2] + r_2$;

2) $y - (x-1)y + r_2$; 3) $1 + (y-1) + (x-1)(y-1) + r_2$;

4) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{1}{2}\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{1}{4}\left[\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 - 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right) + \left(y - \dfrac{\pi}{4}\right)^2\right] + r_2$.

8.5.6. 1) $z_{\min}(1,0) = -1$; 2) $z_{\max}(0,0) = 10$; 3) $z_{\min}\left(1, \dfrac{1}{2}\right) = 0$; 4) $z_{\min}(3,3) = 0$;

5) $z_{\max}(21,-10) = 781$; 6) $z_{\min}(1,-10) = -56$; 7) $z_{\max}(3,2) = 108$;

8) $z_{\min}(5;2)=30$; 9) $z_{\min}(1,3)=10-18\ln 3$; 10) $z_{\min}(1,2)=7-10\ln 2$;

11) $z_{\min}(-2,0)=-\dfrac{2}{e}$; 12) $z_{\min}(0,0)=0$; якщо $a>b$, то $z_{\max}(\pm1,0)=\dfrac{a}{e}$; якщо $a<b$, то $z_{\max}(0,\pm1)=\dfrac{b}{e}$; якщо $a=b$, то $z_{\max}(x^2+y^2=1)=\dfrac{a}{e}$.

8.5.7. 1) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y)=z\Big(x^2+y^2=9\Big)=9$, $\min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y)=z\Big(0,0\Big)=0$;

2) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y)=z\left(\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\right)=1$, $\min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y)=z\Big(0,0\Big)=0$;

3) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y)=z\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{2}$, $\min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y)=z\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{1}{2}$;

4) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y)=z(2,0)=z(-2,0)=4$, $\min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y)=z(0,2)=z(0,-2)=-4$;

5) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y)=z(-3,0)=z(0,-3)=6$, $\min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y)=z(-1,-1)=-1$;

6) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y)=z(0,-5)=41$, $\min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y)=z(-2,-1)=-3$;

7) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y)=z(2,-1)=13$, $\min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y)=z(1,1)=z(0,-1)=-1$.

8) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y)=z(1,2)=17$, $\min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y)=z(1,0)=-3$;

9) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y)=z\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{20}{9}\right)=\dfrac{181}{27}$, $\min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y)=z(1,-3)=-6$;

10) $\max\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y)=z(0,4)=64$, $\min\limits_{(x;y)\in\bar{D}} z(x,y)=z(\pm2,4)=-48$.

8.5.8. 1) $z_{\min}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1-2\sqrt{2}$, $z_{\max}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=1-2\sqrt{2}$;

2) $z_{\min}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}},-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\sqrt{5}$, $z_{\max}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\sqrt{5}$; 3) $z_{\min}\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{19}{4}$;

4) $z_{\min}(1,0)=0, z_{\max}\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{27}$. 5) $z_{\min}\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{2}, z_{\max}\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{3}{2}$;

6) $z_{\min}\Big(\pm3,\mp2\Big)=-50, z_{\max}\left(\pm4,\pm\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{425}{4}$.

8.5.9. 1) куб з ребром $\sqrt[3]{V}$; 2) $\sqrt[3]{2V}\times\sqrt[3]{2V}\times\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВМІННЯ

<table>
<tr><th colspan="2">Основні означення</th></tr>
<tr><td>1. Арифметичний n-вимірний простір.
2. Границя функції кількох змінних.
3. Неперервність функції кількох змінних у точці.
4. Частинна похідна функції 2-х змінних у точці.
5. Диференційовність функції 2-х змінних у точці.</td><td>6. Повний диференціал функції кількох змінних.
7. Похідна вектор-функції.
8. Похідна функції кількох змінних за напрямом.
9. Градієнт функції кількох змінних.
10. Точка локального максимуму (мінімуму) функції.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Теореми</th></tr>
<tr><td>1. Теорема про арифметичні дії з функціями, що мають скінченну границю.
2. Необхідна умова диференційовності.
3. Достатня умова диференційовності.
4. Теорема про рівність мішаних похідних.
5. Теорема Тейлора.</td><td>6. Теорема про геометричний зміст градієнта.
7. Необхідна умова існування екстремуму функції 2-х змінних.
8. Достатня умова існування локального екстремуму функції 2-х змінних.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Основні задачі</th></tr>
<tr><td>1. Знаходити область означення функції кількох змінних.
2. Знаходити рівняння ліній (поверхонь) рівня функції кількох змінних.
3. Знаходити частинні похідні n-го порядку функції кількох змінних.
4. Обчислювати диференціал n-го порядку функції кількох змінних у точці.
5. Знаходити похідні вектор-функції.
6. Обчислювати похідну функції кількох змінних за напрямом.</td><td>7. Знаходити градієнт функції кількох змінних.
8. Знаходити рівняння дотичної прямої і нормальної площини до просторової кривої.
9. Знаходити рівняння дотичної площини і нормальної прямої до поверхні.
10. Досліджувати функцію 2-х змінних на локальний екстремум.
11. Знаходити найбільше та найменше значення функції 2-х змінних у замкненій області.
12. Досліджувати функцію на умовний екстремум.</td></tr>
</table>

Додаток А. Походження деяких термінів та позначень

1. Походження деяких термінів

Амплітуда — лат. *amplitudo* (обшир, розмір), *amplus* (широкий). [Лежандр (1786)].

Арк- — скорочення лат. *arcus* (дуга).

Глобальний — лат. *globus* (кулястої форми).

Годограф — гр. *hodos* (шлях, рух), *graph* (пишу, зображую) [Гамільтон (1846)].

Градієнт — лат. *gradiens* (той, що йде вперед, що росте) [Лемб (1897), Вебер, 1900].

Графік — від гр. *graph* (пишу, зображую).

Дискримінант — лат. *discrimen* (той, що розрізняє), *discriminare* (розбирати, розрізняти) [Сільвестр (1852)].

Диференціал — лат. *differentia* (різниця) [Ляйбніц (1690)], диференціальний [Ляйбніц (1684)].

Еквівалентний — лат. *aequus* (рівний), *valens* (сильний) — рівнозначний. Еквівалентні нескінченно малі функції [Дюбуа-Реймон (1870)].

Експонента — лат. *exponent* (показник) [Штіфель (1544)].

Екстремум — лат. *extremum* (крайній). [Дюбуа-Реймон (1879)].

Інтервал — лат. *inter-* (між-) та *vallum* (стіна) — проміжок.

Косинус — скорочення лат. *complementarii anguli sinus* — доповняльний синус [Ґантер (1620)]. Гіперболічний косинус [Ламберт (1768)].

Котангенс — скорочення лат. *complementarii anguli tangens* — доповняльний тангенс [Ґантер (1620)].

Критерій — гр. *kriterion* (засіб судження) від *krino* (суджу).

Критичний — гр. *krinein* відокремлювати, розрізняти.

Логарифм — гр. *logos* (слово, відношення) та *arithmos* (число) [Непер (1614)], сучасний зміст терміна [Валіс (1693)]. Натуральний логарифм [Менґолі (1657)].

Локальний — лат. *localis* (місцевий).

Максимум — лат. *maximum* (найбільше) [Ферма (бл. 1629)].

Мінімум — лат. *minimum* (найменше). [Ферма (бл. 1629)].

Монотонний — гр. *monos* (єдиний), *tonos* (тон) — однотонний [К. Нойман (1881)].

Період — гр. *peri-* (навколо) та *odos* (шлях) — обхід по колу.

Прогресія — лат. *progressio* (рух уперед, зростання) [Боецій (бл. 510)].

Радіан — лат. *radius* (спиця колеса, промінь) — променистий [Дж. Томсон (1873)].

Рекуретний — лат. *rec-* (назад) *curro* (бігти) — (зворотний) [Муавр (1720–1730)].

Синус — лат. *sinus* (викривлена поверхня, затока, бухта) [Роберт Честерський (1145)]. Гіперболічний синус [Ламберт (1768)].

Стаціонарний — лат. *stationarius* (нерухомий).

Тангенс — лат. *tangens* (дотичний) [Фінке (1583)]. Тангенс гіперболічний [Ламберт (1768)].

Тригонометрія — гр. *trigonon* (трикутник), *metrike* (міряю) — вимірювання трикутників [Пітіскус (1595)], тригонометрична функція [Клюґель (1770)].

Фаза — гр. *phasis* (поява).

Функція — лат. *function* (завершення, виконання) [Ляйбніц (1673)].

2. Походження деяких позначень

$f(x)$	[Ойлер (1734)]
$f^{-1}(x)$	[Гершель (1820)]
$f : X \to Y$	[Гуревич (1940)]
$f \circ g$	[Бурбакі (1944)]
∞	[Валіс (1655)]
sgn	[Кронекер (1884)]
e	[Ойлер (1736)]
log	[Кавальєрі (1632)] (Log — [Кеплер (1624)])
ln	[Стрингґем (1893)]
sin	[Оутред (1632)] (sin. — [Фінке (1583)])
cos	[Ойлер (1729)] (cos. — [Джик (1696)])
tg	[Ойлер (1753)] (tan. — [Фінке (1583)]; tan — [Жирар (1629)])
ctg	[Шенфліс (1886)] (cot. — [Джик (1696)]; cot — [Кестнер (1758)])
arcsin, arctg	[Лаґранж (1772)]
sh, ch, th	[Кліфорд (1878)] (Sh, Ch — [Ріккаті (1757)]; Th — [Гуель (1864)])
$[x]$	[Ґаус (1808)]
$\sim$	(знак еквівалентності н. м. ф.) [Дюбуа-Реймон (1870)]
$D(f), E(f)$	[французькі математики (поч. XX ст)]
$\lim\limits_{x=c}$	від. лат. *limes* (межа) [Ваєрштрас (1841)], (lim. — [Люїльє (1786)]; $\lim\limits_{n=\infty}$ — [Гамільтон (1853)])
$\lim\limits_{x\to c}$	[Літем (1905)]
$f(x_0-0), f(x_0+0)$	[Діріхле (1837)]
ε, δ	[Ваєрштрас (лекції), Боне (1871)]
$\frac{0}{0}$	[Й. Бернуллі (1730), д'Аламбер (1754)]

$\frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty$	[Карстен (1786)]
$\Delta x; \Delta f$	[Ойлер (1755)]
$dx, dy, \frac{dy}{dx}$	[Ляйбніц (1675)]
f'	[Лаґранж (1797)]
$\frac{\partial u}{\partial x}$	[Лежандр (1786)]
z'_x, z'_y	[Лаґранж (1787, 1801)]
$z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$	[Лаґранж (1801)]
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$	[Якобі (1837)]
$df(x,y)$	[Ойлер (1755)]
grad	[Г. Вебер (1900)]

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ І РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Підручники та посібники

1. *Adams R. A.* Calculus : Complete course / R. A. Adams, C. Essex. — Toronto : Pearson Canada, 2010. — 1076 pp.

2. *Anton H.* Calculus: Early transcendentes / H. Anton, I. Bivens, S. Davis. — John Wiley & sons, Inc., 2012. — 1318 pp.

3. *Larson R.* Calculus / R. Larson, B. Edwards. — Brooks/Cole, 2014. — 1280 pp.

4. *Rogawski J.* Calculus / J. Rogawski. — New York : W. H. Freeman and Company, 2012. — 1050 pp.

5. *Stewart J.* Calculus : Early transcendentals / J. Stewart. — Cengage Learning, 2016. — 1368 pp.

6. *Tan S. T.* Calculus / S. T. Tan. — Brooks/Cole, 2010. — 1324 pp.

7. *Zill D. G.* Advanced engineering mathematics / D. G. Zill, W. S. Wright. — Burlington : Jones and Bartlett Learning, 2017. — 1004 pp.

8. *Zill D. G.* Calculus : Early transcendentes / D. G. Zill, W. S. Wright. — Sudbury : Jones and Bartlett publishers, 2011. — 994 pp.

9. *Барковський В. В.* Вища математика для економістів : навч. посіб. / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. — Київ : Центр учбової літератури, 2017. — 445 с.

10. Вся высшая математика / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — М. : Эдиториал УРСС, 2017. — Т. 1; Т. 2.

11. *Дубовик В. П.* Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. — Київ : Игнатекс-Україна, 2013. — 648 с.

12. *Жевняк Р. М.* Высшая математика : Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Дифференциальное исчисление / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн. : Вышэйшая школа, 1992. — 384 с.

13. *Морозова В. Д.* Введение в анализ / В. Д. Морозова ; под ред. В. С. Зарубина и А. П. Крищенко. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016. — 407 с.

14. *Крамор В. С.* Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В. С. Крамор. — М. : Оникс, 2008. — 416 с.

15. *Математика* : Практична підготовка до ЗНО / О. М. Роганін, О. Ю. Максименко, О. О. Тарасенко, В. І. Вербицький. — Харків : ТОРСІНГ ПЛЮС, 2009. — 480 с.

16. *Нелін Є. П.* Алгебра в таблицях / Є. П. Нелін. — Харків : Гімназія, 2013. — 128 с.

17. *Овчинников П. П.* Вища математика : У 2 ч. Ч. 1 / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко ; за заг. ред. П. П. Овчинникова. — Київ : Техніка, 2003. — 600 с.

18. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления : В 2-х т. / Н. С. Пискунов. — М. : Интеграл-Пресс, 2010.

19. *Письменный Д.* Конспект лекций по высшей математике : Полный курс / Д. Письменный. — М. : Айрис-Пресс, 2014. — 608 с.

20. *Роганін О. М.* Алгебра і початки аналізу в означеннях, таблицях і схемах / О. М. Роганін. — Харків : ТОРСІНГ ПЛЮС, 2007. — 112 с.

21. *Титаренко О. М.* Математика : Самовчитель майбутнього студента / О. М. Титаренко, О. М. Роганін. — Харків : ТОРСІНГ ПЛЮС, 2007. — 448 с.

22. *Шипачев В. С.* Курс высшей математики : Учебник для вузов / В. С. Шипачев. — М. : Оникс, 2009. — 608 с.

Задачники та практикуми

23. *Математика в технічному університеті :* Практикум : У 4-х ч. / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. — Київ : НТУУ «КПІ», 2014. — 752 с.

24. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. — СПб. : Лань, 2017. — 492 с.

25. *Вища* математика : Збірник задач / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін. — Київ : Ігнатекс-Україна, 2011. — 480 с.

26. *Збірник* задач з вищої математики / За ред. Ф. С. Гудименка. — Київ: Видавництво Київського університету, 1967. — 352 с.

27. *Герасимчук В. С.* Вища математика : Повний курс у прикладах і задачах : / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. — Київ : Книги України ЛТД, 2009. — Т. 1.

28. *Клепко В. Ю.* Вища математика в прикладах і задачах / В. Ю. Клепко, В. Л. Голець. — Київ : Центр учбової літератури, 2017. — 594 с.

29. *Сборник* задач по курсу высшей математики / Г. И. Кручкович, Н. И. Гутарина, П. Е. Дюбюк и др. : Под ред. Г. И. Кручковича. — М. : Высш. шк., 1973. — 576 с.

30. *Сборник* задач по математике для втузов : В 4 ч. / Под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. — М. : Физматлит, 2001—2003.

31. *Титаренко О. М.* Математика. 6611 задач : від найпростіших до олімпіадних / О. М. Титаренко. — Харків : ТОРСІНГ ПЛЮС, 2011. — 480 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

* Посилання на підпункт теоретичної частини відповідного розділу.

** Посилання на номер задачі відповідного практикуму.

ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

1. Безу Етьєн *É. Bézout* (1730–1783) — французький математик. *5.3.6.1*

2. Бернуллі Йоган *J. Bernoulli* (1667–1748) — швейцарський математик. *7.3.3.1*

3. Больцано Бернард *B. Bolzano* (1781–1848) — чеський математик, логік та філософ. *6.4.3.5, 6.4.3.6*

4. Ваєрштрас Карл *K. Weierstrass* (1815–1897) — німецький математик. *6.2.3.3, 6.4.3.2, 6.4.3.3*

5. Вієт Франсуа *F. Viète* (1540–1603) — французький математик. *5.3.3.5, 5.3.6.5*

6. Гайне Едуард *E. Heine* (1821–1881) — німецький математик. *1.2.4.2, 3.2.1.1, 4.7.1.3*

7. Гессе Людвіг Отто *L. O. Hesse* (1811–1874) — німецький математик. *2.4.3.5*

8. Горнер Вільям *W. Horner* (1786–1837) — англійський математик та винахідник. *5.3.5.4*

9. Коші Оґюстен-Луї *A.-L. Cauchy* (1789–1857) — французький математик. *6.1.1.1, 6.4.3.5, 6.4.3.6, 7.3.2.8*

10. Лаґранж Жозеф-Луї *J.-L. Lagrange* (1736–1813) — французький математик та астроном італійського походження. *7.3.2.5*

11. Лопіталь Гійом де *G. de l'Hôpital* (1661–1704) — французький математик. *7.3.3.1*

12. Ляйбніц Ґотфрід Вільгельм *G. W. Leibniz* (1646—1716) — німецький математик, логік та філософ. *7.2.1.4*

13. Маклорен Колін *C. Maclaurin* (1698—1746) — шотландський математик. *1.5.7.3*


[1]


[2]


[3]


[4]

[5]


[6]


[7]


[9]


[10]


[11]


[12]


[13]

14. Пеано Джузеппе *G. Peano* (1858—1932) — італійський математик та лінгвіст. *4.7.2.1*

15. Роль Мішель *M. Rolle* (1652—1719) — французький математик. *7.3.2.1*

16. Тейлор Брук *B. Taylor* (1685—1731) — англійський математик. *2.2.2.2*

17. Ферма П'єр *P. de Fermat* (1607—1665) — французький математик. *7.3.1.1*

18. Фібоначчі Леонардо *L. Fibonacci* (1170—1242) — італійський математик. *6.2.1.2*


[14]


[15]


[16]


[17]


[18]

Зміст навчального комплексу

Том 1

Том 2

Том 3

Том 4

Навчальне видання

Алєксєєва *Ірина Віталіївна*
Гайдей *Віктор Олександрович*
Диховичний *Олександр Олександрович*
Федорова *Лідія Борисівна*

МАТЕМАТИКА В ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

ПІДРУЧНИК

Том 2

Керівник видавничих проектів: А. О. Ястребов
Друкується в авторській редакції

Підписано до друку 02.12.2019 р.
Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Гарнітура CMU Serif.
Умовн. друк. аркушів — 29.29.
Обл.-вид. аркушів — 13.91.
Тираж 300 прим.

ТОВ «Видавничий дім «КОНДОР»
Свідоцтво серія ДК № 5352 від 23.05.2017 р.
03067, м. Київ, вул. Гарматна, 29/31
тел./факс (044) 408-76-17, 408-76-25
www.condor-books.com.ua